Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Modelos de Emparelhamento Integráveis

Walney Reis Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Valerio Kurak

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Comissão Examinadora: Prof. Dr. Valerio Kurak (IFUSP)
Prof. Dr. Antônio Lima Santos (UFSCar)
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP)

São Paulo
2010

Aos meus pais Ione Reis Fernandes e Alberto dos Santos Fernandes.

*“Daqui em diante, não peço mais boa-sorte, boa-sorte sou eu.
Daqui em diante não lamento mais, não transfiro, não careço de nada;
nada de queixas atrás das portas, de bibliotecas, de tristonhas críticas;
forte e contente vou eu pela estrada aberta.”*

Walt Whitman

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Valerio Kurak, pela oportunidade.

Aos membros da banca examinadora profs. Drs. Antonio Lima Santos e Paulo Teotonio Sobrinho.

Às secretárias do Departamento de Física-Matemática, Amélia Aparecida Ferrari Genova e Simone Toyoko Shinomiya, pela ajuda fundamental.

Aos amigos e companheiros de jornada Dallessandro Bence de Santana Rodrigues, Fernando Massa Fernandes, Liner de Souza Santos, Marco Antonio Camilo Faria e Simão Pedro.

Aos amigos Elisa Gouvea Maurício Ferreira, Fleury José de Oliveira Filho, Roberto Lopes Parra e Rone Peterson Galvão de Andrade pela atenção e pelo apoio dispensados nos momentos mais necessários.

Aos meus pais, pelo carinho e pela formação que me deram e pelo incentivo em todos os passos de minha vida.

Esta dissertação de mestrado teve o suporte financeiro da Capes.

Resumo

O objetivo deste trabalho foi o estudo do Ansatz de Bethe Algébrico (ABA), que é uma técnica utilizada na obtenção dos auto-estados do hamiltoniano de inúmeros modelos da Mecânica Estatística e da Teoria Quântica de Campos. Aplicamos este procedimento na diagonalização de três modelos de spins: o modelo de Heisenberg, o modelo de Heisenberg-Sklyanin e o modelo de Heisenberg-Cherednik. Na diagonalização do primeiro modelo, não foi possível encontrar todos os auto-estados do hamiltoniano através do ABA e, durante o procedimento de obtenção das expressões analíticas, nos deparamos com um conjunto de identidades inédito na literatura. A matriz de borda do modelo de Heisenberg-Sklyanin acopla o último e o primeiro sítios, generalizando o modelo anterior, e permite estabelecer uma relação limite com outros modelos integráveis. Neste caso também não conseguimos obter todos os auto-estados utilizando a técnica do ABA. Diferentemente do que ocorreu para os primeiros modelos, o de Heisenberg-Cherednik, com acoplamentos que alternam a intensidade ao longo da cadeia de spin, apresentou um conjunto completo de auto-estados quando diagonalizado pelo ABA.

Abstract

The goal of this work was to study the Algebraic Bethe ansatz (ABA), which is a technique used to obtain the eigenstates of Hamiltonian of many models of Statistical Mechanics and Quantum Field Theory. We apply this procedure to diagonalize three types of spin models: the Heisenberg model, the Heisenberg-Sklyanin model and the Heisenberg-Cherednik model. On diagonalization of the first model, we could not find all the eigenstates of Hamiltonian through ABA, and during the procedure for obtaining the analytical expressions, we face an unprecedented set of identities in literature. The Sklyanin's boundary matrix couples the first and last sites, generalizing the previous model, and provides a limit for other integrable models. In this case also did not get all eigenstates using the technique of ABA. Unlike what happened with the first models, the Heisenberg-Cherednik model, with alternating couplings the intensity along the spin chain, presented a complete set of eigenstates when diagonalized by ABA.

Sumário

Agradecimentos	vii
Resumo	ix
Abstract	xi
I Ansatz de Bethe Algébrico	1
1 Matriz de Transferência	3
1.1 Matriz de Transferência do Modelo de Lenz-Ising	3
1.2 Modelo do Gelo	6
1.3 Modelo de 6-Vértices e seus Pesos de Boltzmann	7
2 Ansatz de Bethe Algébrico	9
2.1 Operador de Lax e Matriz de Monodromia	9
2.2 Equação de Yang-Baxter e Relações Fundamentais de Comutação	11
2.3 Diagonalização da Matriz de Transferência e Identidades	15
2.4 Equações de Bethe	28
2.5 Obtenção dos Hamiltonianos e dos Autovalores	32
II Modelos de Spins	33
3 Modelo de Heisenberg	35
3.1 Hamiltoniano do Modelo	35
3.2 ABA e Diagonalização do Hamiltoniano	37
3.3 Construção dos Autovetores do Hamiltoniano	43
4 Modelo de Heisenberg-Sklyanin	47
4.1 Hamiltoniano e Diagonalização do Modelo	47
4.2 Caso Não-Homogêneo	53
4.2.1 Relação com Aproximação BCS e Modelo de Richardson-Gaudin	54

5	Modelo de Heisenberg-Cherednik	59
5.1	Hamiltoniano do Modelo	59
5.2	Diagonalização do Hamiltoniano	61
6	Conclusões	65

Parte I

Ansatz de Bethe Algébrico

Capítulo 1

Matriz de Transferência

Um dos principais objetivos deste capítulo é recordar a definição da matriz de transferência na Mecânica Estatística Clássica. Veremos no próximo capítulo que este conceito desempenha um papel fundamental na formulação do Ansatz de Bethe Algébrico.

1.1 Matriz de Transferência do Modelo de Lenz-Ising

Escolhemos um exemplo bastante simples: o modelo de Lenz-Ising ou modelo de Ising unidimensional para iniciarmos a recordação. O modelo de Ising desperta tanto interesse por parte dos físicos por ser um protótipo para o estudo de transições de fase e também do ferromagnetismo.

Partindo-se de uma rede ou retículo cristalino, que são um conjunto de pontos igualmente espaçados com ligações entre os seus vizinhos mais próximos, pretende-se estudar como as interações de curto alcance produzem fenômenos macroscópicos. Cada um destes pontos da rede, que chamaremos de sítio i , e, no caso de um ferromagneto, será ocupado por um átomo, está associado a uma variável clássica de spin σ_i que pode assumir dois valores: ± 1 , dependendo do sítio i em que estamos interessados.

Temos assim dois estados possíveis para cada sítio que, dependendo do modelo, podem ser interpretados como “para cima” e “para baixo” ou “ocupado” e “vazio”. O conjunto dos valores de σ_i atribuídos a cada sítio constitui uma configuração do sistema. Se quisermos estudar as propriedades termodinâmicas deste modelo, precisaremos somar sobre todas as possíveis configurações, cujo total é 2^N .

Vamos considerar a hipótese de que somente interações de curto alcance contribuem para os níveis de energia do sistema, isto é, as interações entre os vizinhos próximos de uma dada configuração $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N)$ serão responsáveis pelo primeiro somatório no hamiltoniano do modelo de Ising [1]

$$\mathcal{H}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N) = - \sum_{i,j} E \sigma_i \sigma_j - \sum_i J \sigma_i, \quad (1.1)$$

sendo E a intensidade destas interações. Se E for positivo, temos um ferromagneto cuja configuração de menor energia é aquela com os spins de vizinhos próximos paralelos: $\sigma_i = \sigma_j$. O segundo somatório em (1.1) corresponde à interação dos spins da cadeia com um campo externo de intensidade J .

Este hamiltoniano deve ser exponenciado e somado sobre todas as configurações admitidas pelo sistema

para que obtenhamos a função de partição

$$Z(\beta, E, J, N) = \sum_{\pm 1} e^{-\beta \mathcal{H}(\sigma)}, \quad (1.2)$$

em que $\beta = \frac{1}{k_B T}$, com k_B sendo a constante de Boltzmann e T , a temperatura absoluta. Num estudo mais aprofundado deste modelo, algo que não faremos nesta dissertação, nos interessaríamos pelo limite termodinâmico ($N \rightarrow \infty$), em que a energia livre por sítio do retículo é

$$f(\beta, E, J) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z(\beta, E, J, N), \quad (1.3)$$

tentando obter uma forma analítica para esta energia livre f . As transições de fase apresentar-se-ão como descontinuidades em f ou em suas derivadas.

A condição de contorno que usaremos é periódica, ou seja, faremos com que σ_{N+1} seja igual a σ_1 , que equivale a construirmos uma cadeia com N sítios fechada, como ilustrado na figura 1.1. O modelo é definido levando-se em conta apenas interações entre vizinhos próximos.

Figura 1.1: Modelo de Ising unidimensional com condição de contorno periódica: $\sigma_{N+1} = \sigma_1$.

As grandezas termodinâmicas deste sistema, como energia interna, pressão, magnetização etc., podem ser calculadas a partir da função de partição Z . É portanto muito importante conhecermos esta função que, para o modelo ilustrado na figura 1.1 com campo externo nulo ($J = 0$), pode ser reescrita a partir de (1.2) como

$$Z_N = \sum_{\sigma} \exp \left(\sum_{i=1}^N K \sigma_i \sigma_{i+1} \right), \quad (1.4)$$

em que $K = E/k_B T$ e o somatório é realizado sobre a variável σ_i , que pode assumir os valores ± 1 em um i -ésimo sítio arbitrário.

Podemos reescrever a expressão (1.4) utilizando as propriedades da função exponencial

$$Z_N = \sum_{\sigma} \left(\prod_{i=1}^N \exp(K \sigma_i \sigma_{i+1}) \right) \equiv \sum_{\sigma} \left(\prod_{i=1}^N \tau_{\sigma_i \sigma_{i+1}} \right), \quad (1.5)$$

em que $\tau_{\sigma_i \sigma_{i+1}} = \exp(K \sigma_i \sigma_{i+1})$. Escrevendo explicitamente somente o produto da equação (1.5), temos

$$\prod_{i=1}^N \tau_{\sigma_i \sigma_{i+1}} = \tau_{\sigma_1 \sigma_2} \tau_{\sigma_2 \sigma_3} \tau_{\sigma_3 \sigma_4} \cdots \tau_{\sigma_{N-1} \sigma_N} \tau_{\sigma_N \sigma_1}, \quad (1.6)$$

em que notamos a estrutura de um produto matricial entre os diferentes fatores τ . Este fato, permite que

possamos reescrever cada fator na equação (1.6) como uma matriz

$$\tau = \begin{pmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

que chamaremos de matriz de transferência, devido à propriedade observada em (1.6) de que as matrizes $\tau_{\sigma_i \sigma_{i+1}}$ “transferem” a interação do sítio de rótulo i para o sítio seguinte, rotulado como $i + 1$.

Deste modo, podemos expressar a função de partição (eq. (1.5)) como o traço do produtório da expressão (1.6)

$$Z_N = \text{traço}(\tau^N), \quad (1.8)$$

e agora é possível obtermos as propriedades do modelo, como as grandezas termodinâmicas, simplesmente diagonalizando a matriz de transferência τ

$$\tau = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

em que λ_1 corresponde ao maior autovalor da matriz.

Para ilustrar a relevância do conhecimento do maior autovalor, vamos calcular a energia livre por sítio f (eq. (1.3)) do modelo de Lenz-Ising. Esta energia livre é obtida a partir da função de partição da equação (1.8)

$$f_N = \frac{\log(Z_N)}{N}. \quad (1.10)$$

Substituindo a expressão (1.9) em (1.8), obtemos a função de partição $Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$ que, inserida na equação (1.10), resulta em

$$f_N = \frac{\log\left(\lambda_1^N \left(1 + \frac{\lambda_2^N}{\lambda_1^N}\right)\right)}{N} = \log(\lambda_1) + \frac{\log\left(1 + \frac{\lambda_2^N}{\lambda_1^N}\right)}{N}. \quad (1.11)$$

O resultado final para a energia livre por sítio f de uma cadeia com um número muito grande de sítios pode ser obtido tomando-se o limite termodinâmico de (1.11), como mostrado abaixo

$$f = \lim_{N \rightarrow \infty} f_N = \log(\lambda_1). \quad (1.12)$$

Este resultado exemplifica uma utilidade do maior autovalor da matriz de transferência. Nesta dissertação não abordaremos as consequências termodinâmicas da matriz de transferência e de seus autovalores. Nossa ênfase será em como calcular os autovalores desta matriz, na verdade, vamos nos limitar aos chamados modelos de 6-vértices racionais e ao cálculo dos autovalores de suas matrizes de transferência. Com este propósito em mente, para motivar nosso estudo, dedicaremos as próximas seções deste capítulo a este assunto.

1.2 Modelo do Gelo

Vamos introduzir agora uma versão simplificada do que seria uma cristal de gelo [2]. Este modelo é simplificado porque trata-se de uma estrutura bidimensional quando, na verdade, o retículo cristalino do gelo possui uma simetria hexagonal tridimensional que, inclusive, o torna menos denso do que a água, possibilitando que lagos e rios não congelem completamente, somente as suas superfícies. Consideraremos os dipolos permanentes da molécula de água e a interação entre estes dipolos, chamada de ponte de hidrogênio, responsável pelo elevado ponto de ebulição desta substância.

Cada átomo de oxigênio do cristal, cuja posição chamaremos de vértice, está rodeado por quatro átomos de hidrogênio, dois próximos e dois afastados, conforme pode ser visto na figura 1.2. Esta disposição garante a neutralidade local dos vértices, chamada de regra do gelo, pois consideramos que os átomos de oxigênio são ânions bivalentes e os de hidrogênio, cátions monovalentes.

Figura 1.2: Os círculos escuros representam os átomos de hidrogênio e os círculos claros, os átomos de oxigênio.

Uma outra maneira de representarmos as pontes de hidrogênio do gelo seria por meio de dipolos elétricos, substituindo os círculos da figura 1.2 por setas, que representam os vetores momento de dipolo elétrico, conforme ilustrado na figura 1.3. Esses vetores ligarão os íons mais próximos em cada vértice, seguindo a convenção tradicional para o momento de dipolo elétrico de apontar da carga positiva (íon hidrogênio) para a carga negativa (íon oxigênio).

Uma outra propriedade pode ser extraída da figura 1.3: ao observarmos um único vértice, o número de setas que “entram” é igual ao de setas que “saem”. Esta regra foi chamada por Slater, o inventor do modelo, de regra da neutralidade local do gelo [2]. Esta regra conduz ao fato de que apenas seis possibilidades de vértices são admitidas, sendo o modelo correspondente chamado de modelo de 6-vértices, o qual exploraremos na próxima seção.

Figura 1.3: *Retículo cristalino do gelo em que substituímos os círculos pelos momentos de dipolo elétrico entre os íons.*

1.3 Modelo de 6-Vértices e seus Pesos de Boltzmann

Cada vértice da figura 1.3 apresenta uma configuração de setas diferentes que obedece à regra de neutralidade local (seção 1.2). A cada um dos seis vértices possíveis apresentados na figura 1.4 atribuímos uma energia diferente e um peso de Boltzmann associado x_i , com $i = 1, \dots, 6$, que lhe confere uma probabilidade específica [2, 3].

Os pesos de Boltzmann são funções do parâmetro espectral u , cuja razão está longe de estar clara neste estágio. Vamos adiantar, por enquanto, que este tipo de parametrização foi introduzido por Baxter [2], motivado pela existência de certa relação entre os diferentes vértices, atualmente conhecida como equação de Yang-Baxter.

No modelo do gelo, os vértices que correspondem a inversões de todas as setas horizontais e verticais em relação aos três primeiros vértices da figura 1.4 possuem as mesmas energias e, conseqüentemente, os mesmos pesos de Boltzmann. Não há nenhuma perda de generalidade ao considerarmos estas simetrias no modelo [3].

A função de partição será um somatório sobre todas as configurações em que cada configuração corresponde a um produto dos pesos de Boltzmann para cada vértice. A matriz de transferência, introduzida na seção 1, transforma o problema do cálculo da função de partição em um problema de autovalor.

Com o propósito de escrever a matriz de transferência, vamos introduzir uma notação matricial con-

Figura 1.4: *Vértices possíveis para o modelo de 6-vértices, cada um deles associado ao seu respectivo peso de Boltzmann $x_i(u)$.*

veniente para um vértice elementar, representado por uma matriz 4×4

$$\begin{pmatrix} \text{seta para cima} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{seta para cima} & \text{seta para esquerda} & 0 \\ 0 & \text{seta para esquerda} & \text{seta para cima} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{seta para cima} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2(u) & x_3(u) & 0 \\ 0 & x_3(u) & x_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1(u) \end{pmatrix} = L(u). \quad (1.13)$$

A fim de obter a função de partição, Baxter explora a estrutura de um produto tensorial da matriz $L(u)$, reescrevendo-a em termos das suas submatrizes 2×2 nos índices horizontais, definindo outras quatro matrizes

$$L(u) = \begin{pmatrix} L_{11}(u) & L_{12}(u) \\ L_{21}(u) & L_{22}(u) \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

em que os índices em L_{ij} estão associados às configurações das setas horizontais. Isto é, em L_{11} tanto a seta horizontal que “entra no vértice” quanto a seta horizontal que “sai do vértice” apontam para a direita. Em L_{22} é o contrário, todas as setas horizontais apontam para a esquerda. Da mesma forma, em L_{12} , a seta horizontal que entra aponta para a direita e a que sai, para a esquerda enquanto, em L_{21} , a seta entrando aponta para a esquerda e a que sai, para a direita.

A mesma estrutura que associa configurações de setas com índices 1 e 2 pode ser feita para as setas verticais em cada uma das submatrizes L_{ij} . Neste caso, a correspondência é a mesma que a horizontal, por exemplo, a seta para cima sendo associada ao índice 1 e a seta para baixo, ao índice 2. Estes índices “verticais” serão os índices da matriz de transferência que “transfere” linhas para linhas na rede bidimensional.

Podemos escrever a matriz de transferência, usando a convenção de soma sobre os índices repetidos, como

$$T_{(1,2)} = L_{1,a}^{(N)} L_{a,b}^{(N-1)} \dots L_{y,z}^{(2)} L_{z,2}^{(1)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

em que o produto matricial refere-se aos índices horizontais e o rótulo n em $L^{(n)}$ ($n = 1, \dots, N$), a ambos os índices verticais do n -ésimo vértice. Com condições periódicas de contorno, a matriz de transferência τ é o traço no “espaço” horizontal da matriz T [4], isto é, $A + D$:

$$\tau = \text{traço}(T). \quad (1.16)$$

Adiantamos que, no contexto do Ansatz de Bethe Algébrico, o espaço no qual estão definidos os índices horizontais é chamado de “espaço auxiliar”, enquanto aquele que se refere aos índices verticais, ou seja, o espaço no qual atua a matriz de transferência, é o chamado “espaço quântico”. A razão para esta nomenclatura será explicada no próximo capítulo.

Capítulo 2

Ansatz de Bethe Algébrico

Neste capítulo, desenvolveremos o instrumental da principal técnica matemática utilizada para resolver os nossos modelos de spin apresentados na segunda parte desta dissertação. Todas as definições e conceitos partirão do conteúdo apresentado no capítulo anterior sobre o modelo de seis vértices. O nosso foco principal será apresentar o ansatz de Bethe algébrico [5, 6] que utilizaremos na exploração das propriedades físicas dos modelos de spins. Expandiremos os conceitos e as relações apresentadas para estudarmos modelos quânticos, que é o caso dos modelos de Heisenberg, de Sklyanin e de Cherednik.

2.1 Operador de Lax e Matriz de Monodromia

Na seção 1.3 do capítulo anterior, mencionamos um operador, proposto por Baxter para o modelo de seis vértices, construído a partir dos vértices apresentados na figura 1.4 que, posteriormente, foram substituídos pelos pesos de Boltzmann, conforme observamos na equação (1.13). Este operador será chamado, a partir de agora, de operador de Lax que atua nos espaços quântico e auxiliar [7].

Também reescremos o operador de Lax em termos de suas submatrizes, resultando num operador que atua no espaço auxiliar, com seus elementos atuando no espaço quântico, conforme repetimos abaixo

$$\mathcal{L}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}(u) & \mathcal{L}_{12}(u) \\ \mathcal{L}_{21}(u) & \mathcal{L}_{22}(u) \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

tratando-se, portanto, de uma matriz 2×2 .

Usaremos outras matrizes com a mesma dimensão como base

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad s^z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad s^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

em que $s^\pm = s^x \pm is^y$ e s^x , s^y e s^z são as matrizes usuais de spin que satisfazem a álgebra de momento angular e podem ser escritas em termos das matrizes de Pauli

$$\vec{s} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}, \quad (2.3)$$

destacando que estamos considerando $\hbar = 1$. Os operadores de spin satisfazem as relações de comutação

abaixo

$$[s^+, s^-] = 2s^z, \quad [s^z, s^\pm] = \pm s^\pm, \quad (2.4)$$

que corresponde à álgebra usual de momento angular.

Estes operadores também podem atuar num sítio arbitrário i , de uma cadeia com um total de N sítios, através do produto tensorial de todos os operadores que atuam em cada sítio

$$s_i^{(z,\pm)} = I_1 \otimes I_2 \cdots I_{i-1} \otimes s^{(z,\pm)} \otimes I_{i+1} \cdots I_N, \quad (2.5)$$

em que cada uma das matrizes identidades I_i atua num i -ésimo sítio dos $N - 1$ sítios restantes, não alterando as propriedades destes sítios. Neste caso, a álgebra satisfeita por eles é a mesma

$$[s_i^+, s_j^-] = 2\delta_{ij}s_j^z, \quad [s_i^z, s_j^\pm] = \pm\delta_{ij}s_j^\pm, \quad (2.6)$$

acrescentando-se o fato de que, para sítios distintos, todos os operadores de spin comutam.

Agora de posse de todas estas informações, podemos escrever o operador de Lax que atua num sítio arbitrário i como

$$\mathcal{L}_i(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1(u) + x_2(u))I_i + (x_1(u) - x_2(u))s_i^z & x_3(u)s_i^- \\ x_3(u)s_i^+ & \frac{1}{2}(x_1(u) + x_2(u))I_i - (x_1(u) - x_2(u))s_i^z \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

em que $x_1(u)$, $x_2(u)$ e $x_3(u)$ são os pesos de Boltzmann que foram apresentados na seção anterior (fig. 1.4).

Os operadores de Lax são fundamentais para o nosso propósito maior de estudar os modelos de spin. Primeiramente porque a possibilidade de construí-los demonstra a integrabilidade dos modelos e, posteriormente, porque eles serão utilizados na obtenção dos hamiltonianos dos sistemas estudados.

Antes de chegarmos nos hamiltonianos dos modelos, precisamos obter uma construção bastante útil, a matriz de monodromia $T_N(u)$ [8], obtida a partir do produto de operadores de Lax, estes, por sua vez, aplicados em cada um dos N sítios da cadeia

$$T_N(u) = \mathcal{L}_N(u)\mathcal{L}_{N-1}(u) \cdots \mathcal{L}_3(u)\mathcal{L}_2(u)\mathcal{L}_1(u) \quad (2.8)$$

sendo o produto feito a partir do operador de Lax que atua no último sítio até o primeiro sítio da cadeia.

Podemos escrever a matriz de monodromia na forma de uma matriz quadrada de ordem 2, exatamente como fizemos para o operador de Lax

$$T_N(u) = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

em que as entradas são novos operadores quânticos.

Vamos ilustrar este último resultado com um exemplo didático para dois sítios. Partimos dos operadores de Lax aplicados cada um em cada sítio, conforme ilustrado na figura 2.1.

O índices a que aparece nesta figura são mudos, ou seja, serão somados quando o produto matricial

Figura 2.1: Representação gráfica da matriz de monodromia $T_N(u)$ para dois sítios.

for realizado. A representação gráfica da figura 2.1 ilustra o produto de dois operadores de Lax

$$T_2^{(1,2)}(u) = \mathcal{L}_2^{(1,a)}(u) \mathcal{L}_1^{(a,2)}(u), \quad (2.10)$$

que, neste exemplo, corresponde ao elemento $(1, 2)$ da matriz $T(u)$. Substituindo agora a expressão (2.7) (calculada em seu respectivo sítio) em (2.8), chegamos na forma explícita da matriz de monodromia $T_N(u)$ para dois sítios.

Como cada entrada desta matriz é um operador (eq. (2.9)), podemos escrevê-los separadamente para uma melhor visualização de suas estruturas

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 I + \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)(s_1^z + s_2^z) + (x_1 + x_2)^2 s_1^z s_2^z + x_3^2 s_1^+ s_2^-, \\ B(u) &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)x_3(s_1^- + s_2^-) + (x_1 - x_2)x_3(s_1^- s_2^z - s_1^z s_2^-), \\ C(u) &= \frac{1}{2}(x_1 + x_2)x_3(s_1^+ + s_2^+) + (x_1 - x_2)x_3(s_1^z s_2^+ - s_1^+ s_2^z), \\ D(u) &= \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 I - \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)(s_1^z + s_2^z) + (x_1 + x_2)^2 s_1^z s_2^z + x_3^2 s_1^- s_2^+, \end{aligned}$$

em que os x_i são funções do parâmetro espectral u e I representa a matriz identidade de ordem 2, ambos escritos desta forma para simplificar a notação.

Nota-se que, mesmo para este caso com poucos sítios, os operadores que formam a matriz de monodromia $T_2(u)$ possuem uma estrutura complexa envolvendo somas e produtos matriciais.

Todos estes resultados são importantes, inclusive a visualização explícita destes objetos matemáticos que fizemos para $N = 2$, pois serão o ponto de partida para obtermos a matriz de transferência, mencionada no primeiro capítulo.

2.2 Equação de Yang-Baxter e Relações Fundamentais de Comutação

O operador de Lax começará a ganhar importância nesta seção quando vermos que ele satisfaz igualdades muito úteis e fundamentais. Inicialmente, vamos introduzir uma matriz auxiliar $\mathcal{R}(u)$ [7], de dimensão 4×4 , que atua num espaço auxiliar

$$\mathcal{R}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c(u) & b(u) & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

Figura 2.2: Representação gráfica da equação de Yang-Baxter.

em que $a(u) = u + \eta$, $b(u) = u$ e $c(u) = \eta$ serão chamadas de amplitudes e dependem do parâmetro espectral u e de η , que é um outro parâmetro complexo.

Vamos definir também os operadores de Lax que atuam em um espaço e, no outro, atuam como a identidade

$$\mathcal{L}_1(u) = \mathcal{L}(u) \otimes I_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}(u) & 0 & \mathcal{L}_{12}(u) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{11}(u) & 0 & \mathcal{L}_{12}(u) \\ \mathcal{L}_{21}(u) & 0 & \mathcal{L}_{22}(u) & 0 \\ 0 & \mathcal{L}_{21}(u) & 0 & \mathcal{L}_{22}(u) \end{pmatrix}, \quad (2.12a)$$

$$\mathcal{L}_2(u) = I_1 \otimes \mathcal{L}(u) = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_{11}(u) & \mathcal{L}_{12}(u) & 0 & 0 \\ \mathcal{L}_{21}(u) & \mathcal{L}_{22}(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{11}(u) & \mathcal{L}_{12}(u) \\ 0 & 0 & \mathcal{L}_{21}(u) & \mathcal{L}_{22}(u) \end{pmatrix}, \quad (2.12b)$$

em que utilizamos o operador de Lax da equação (2.1) e a matriz identidade da equação (2.2).

Estes operadores satisfazem uma relação necessária para que os modelos de teoria de campo sejam integráveis: a equação de Yang-Baxter [2],

$$\mathcal{R}(u-v)\mathcal{L}_1(u)\mathcal{L}_2(v) = \mathcal{L}_2(v)\mathcal{L}_1(u)\mathcal{R}(u-v) \quad (2.13)$$

em que v também é um parâmetro espectral.

Podemos representar graficamente esta equação, assim como fizemos para a matriz de monodromia na figura 2.1. Vemos na figura 2.2 seis retas, representando cada uma delas um espaço diferente: as duas retas em negrito na vertical, rotuladas por n , simbolizam o espaço quântico e as outras quatro retas inclinadas, rotuladas por letras com índices 1 e 2, representam os espaços auxiliares 1 e 2, respectivamente.

As três retas à esquerda representam o primeiro membro da equação (2.13) enquanto as outras três retas representam o segundo membro da mesma equação. O primeiro vértice à esquerda é a matriz auxiliar atuando nos espaços auxiliares, em seguida, temos o encontro do espaço quântico n com o espaço auxiliar 1 que corresponde ao operador de Lax $\mathcal{L}_1(u)$ da equação (2.12a) e, finalmente, a intersecção dos espaços

Figura 2.3: Representação gráfica da equação de Yang-Baxter para a matriz de monodromia.

quântico e auxiliar 2, que ilustra o operador de Lax $\mathcal{L}_2(v)$ (eq. (2.12b)).

Uma informação importante a respeito da leitura da figura 2.2 é que, quando temos dois vértices alinhados com a reta vertical n , primeiro lemos o vértice inferior e, posteriormente, o vértice mais acima. Por esta razão é que o operador $\mathcal{L}_1(u)$ que atua no espaço auxiliar 1 aparece à esquerda do operador que atua no espaço auxiliar 2, $\mathcal{L}_2(v)$, na equação (2.13). Por esta mesma razão, ao fazermos a leitura das três retas à direita na figura 2.2, primeiramente identificamos o operador $\mathcal{L}_2(v)$, em seguida $\mathcal{L}_1(u)$ e, finalmente, a matriz auxiliar $\mathcal{R}$ constituindo a seqüência do produto de matrizes no segundo membro da equação de Yang-Baxter (eq. (2.13)).

Portanto, podemos enxergar a equação (2.13) como uma translação para a esquerda da reta do espaço quântico n , passando pelo vértice que representa a matriz auxiliar, conforme ilustrado na figura 2.2. A equação de Yang-Baxter é uma maneira compacta de escrevermos dezesseis relações para os quatro operadores que compoem o operador de Lax na forma matricial 2×2 da equação (2.1).

Esta equação fundamental no estudo de modelos integráveis pode ser generalizada para o caso de N espaços de Hilbert (ou N sítios especificamente para os nossos modelos de spins) em que teremos o produto de N operadores de Lax. Ou seja, podemos escrever uma equação análoga à equação (2.13) para a matriz de monodromia (eq. (2.9))

$$\mathcal{R}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)\mathcal{R}(u-v), \quad (2.14)$$

em que $T(u)$ é dado pela equação (2.8). Assim como fizemos para o operador de Lax, vamos definir as matrizes de monodromia atuando em diferentes espaços como

$$T_1(u) = T(u) \otimes I_2, \quad T_2(u) = I_1 \otimes T(u), \quad (2.15)$$

em que utilizamos novamente a matriz identidade da definição (2.2). E, assim como fizemos para a equação (2.13), podemos interpretar graficamente a equação (2.14) adotando as mesmas convenções da figura 2.2 e, utilizando um argumento chamado “argumento do trem” por Faddeev [7], trasladamos todas as retas verticais (espaços quânticos), uma a uma, para a esquerda do vértice que representa a matriz auxiliar $\mathcal{R}$, obtendo então o segundo membro da equação (2.14), conforme observamos na figura 2.3.

Será a partir das relações obtidas com a equação (2.14) que formularemos, na próxima seção, o ansatz de Bethe algébrico. Tanto a equação (2.13) quanto a equação (2.14) são relações de comutação especiais entre os operadores de Lax e a matriz de monodromia, respectivamente, pois são mediadas pela matriz auxiliar $\mathcal{R}$. Esta influência da matriz $\mathcal{R}$ aparecerá sobre a forma de coeficientes nas relações de comutação, que correspondem às amplitudes das entradas desta matriz.

Além de possuir a propriedade de comutação apresentada na equação (2.14), a matriz de monodromia $T(u)$ é utilizada na construção de outra importante matriz, introduzida no capítulo 1: a matriz de transferência. Repetindo a equação (1.16) da seção 1.3 que nos mostra sua relação com a matriz de monodromia temos

$$\tau(u) = \text{traço}(T(u)) = A(u) + D(u) \quad (2.16)$$

em que $A(u)$ e $D(u)$ são os operadores que formam a matriz $T(u)$ (eq. (2.9)). Esta é a definição da matriz de transferência para os nossos propósitos.

Para que possamos verificar algumas propriedades de $\tau(u)$, vamos obter explicitamente as dezesseis relações fundamentais de comutação (RFCs) sintetizadas pela equação de Yang-Baxter para $T(u)$ (eq. (2.14)), na qual substituímos as equações (2.11) e (2.15) resultando em

$$a(u-v)A(u)A(v) = a(u-v)A(v)A(u), \quad (2.17a)$$

$$a(u-v)A(u)B(v) = c(u-v)A(v)B(u) + b(u-v)B(v)A(u), \quad (2.17b)$$

$$a(u-v)B(u)A(v) = b(u-v)A(v)B(u) + c(u-v)B(v)A(u), \quad (2.17c)$$

$$a(u-v)B(u)B(v) = a(u-v)B(v)B(u), \quad (2.17d)$$

$$c(u-v)A(u)C(v) + b(u-v)C(u)A(v) = a(u-v)A(v)C(u), \quad (2.17e)$$

$$c(u-v)A(u)D(v) + b(u-v)C(u)B(v) = c(u-v)A(v)D(u) + b(u-v)B(v)C(u), \quad (2.17f)$$

$$c(u-v)B(u)C(v) + b(u-v)D(u)A(v) = c(u-v)B(v)C(u) + b(u-v)A(v)D(u), \quad (2.17g)$$

$$c(u-v)B(u)D(v) + b(u-v)D(u)B(v) = a(u-v)B(v)D(u), \quad (2.17h)$$

$$b(u-v)A(u)C(v) + c(u-v)C(u)A(v) = a(u-v)C(v)A(u), \quad (2.17i)$$

$$b(u-v)A(u)D(v) + c(u-v)C(u)B(v) = b(u-v)D(v)A(u) + c(u-v)C(v)B(u), \quad (2.17j)$$

$$b(u-v)B(u)C(v) + c(u-v)D(u)A(v) = b(u-v)C(v)B(u) + c(u-v)D(v)A(u), \quad (2.17k)$$

$$b(u-v)B(u)D(v) + c(u-v)D(u)B(v) = a(u-v)D(v)B(u), \quad (2.17l)$$

$$a(u-v)C(u)C(v) = a(u-v)C(v)C(u), \quad (2.17m)$$

$$a(u-v)C(u)D(v) = c(u-v)C(v)D(u) + b(u-v)D(v)C(u), \quad (2.17n)$$

$$a(u-v)D(u), C(v) = b(u-v)C(v)D(u) + c(u-v)D(v)C(u), \quad (2.17o)$$

$$a(u-v)D(u)D(v) = a(u-v)D(v)D(u), \quad (2.17p)$$

das quais quatro são nulas, pois correspondem aos comutadores do mesmo operador

$$[A(u), A(v)] = 0, \quad [B(u), B(v)] = 0, \quad [C(u), C(v)] = 0, \quad [D(u), D(v)] = 0, \quad (2.18)$$

restando doze RFCs não-nulas que serão utilizadas exaustivamente quando aplicarmos o ansatz de Bethe na diagonalização dos modelos de spin da Parte II da dissertação. Estas equações também serão úteis

para obtermos, durante esta diagonalização, identidades generalizadas para os coeficientes $a(u)$, $b(u)$ e $c(u)$, assunto que será estudado na próxima seção.

Uma outra implicação das equações (2.17) se refere à propriedade de comutação da matriz de transferência

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0, \quad (2.19)$$

que permite obtermos “cargas” que comutam entre si e, portanto, se conservam. A partir destas geramos as integrais de movimento que, no caso de seu número coincidir com os graus de liberdade do sistema, estaremos diante de um problema integrável.

2.3 Diagonalização da Matriz de Transferência e Identidades

Já possuímos dezesseis relações de comutação para os operadores que constituem a matriz de monodromia (eq. (2.9)), chamadas relações fundamentais de comutação (eq. (2.17)). Nos interessa neste momento aplicar estas relações para comutar os operadores que formam a matriz de transferência τ (eq. (2.16)) com os operadores de criação $B(u)$. Antes disto, vamos definir o estado de referência para N sítios no qual estes operadores atuarão

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{N-1} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N, \quad (2.20)$$

composto pelo produto direto dos espaços de Hilbert para cada sítio, que correspondem a espaços $\mathbb{C}^2$, resultando num espaço total de dimensão 2^N . Os estados de Bethe são criados pela ação dos B s neste “vácuo” fundamental, produzindo as M “partículas” distribuídas pelos N sítios

$$\Phi_B = B_1(u)B_2(u) \cdots B_{M-1}(u)B_M(u)\Omega_0. \quad (2.21)$$

Precisamos estudar o que acontecerá quando a matriz τ encontrar este estado mas, para isto, precisaremos comutar os operadores $A(u)$ e $D(u)$ com $B(u)$ quantas vezes for necessário até que encontrem o estado de referência Ω_0 . Sabemos que tanto $A(u)$ quanto $D(u)$ atuam neste estado da seguinte forma

$$A(u)\Omega_0 = \chi_1(u)\Omega_0, \quad D(u)\Omega_0 = \chi_2(u)\Omega_0, \quad (2.22)$$

em que $\chi_1(u)$ e $\chi_2(u)$ são os autovalores de $A(u)$ e $D(u)$, respectivamente, que também dependem do parâmetro espectral u .

A matriz de transferência atuando nos estados de Bethe, colocará os M operadores $B(u)$ entre o estado de referência Ω_0 e os operadores $A(u)$ e $D(u)$, exigindo que comutemos estes com os operadores de criação B com o objetivo de encontrar os autovalores de τ .

Para prosseguirmos na diagonalização, precisaremos das relações fundamentais de comutação (equações (2.17)), mais especificamente, utilizaremos as relações (2.17c) e (2.17h), que estão reescritas abaixo, desta-

cando o produto dos operadores que nos interessam

$$A(u)B(v) = \frac{a(v-u)}{b(v-u)}B(v)A(u) + \frac{c(u-v)}{b(u-v)}B(u)A(v), \quad (2.23a)$$

$$D(u)B(v) = \frac{a(u-v)}{b(u-v)}B(v)D(u) + \frac{c(v-u)}{b(v-u)}B(u)D(v). \quad (2.23b)$$

Fizemos também uma pequena mudança no argumento das amplitudes no segundo termo do lado direito de ambas as expressões a fim de manter todos os termos positivos, facilitando os cálculos que virão. Lembrando que estas amplitudes são dadas por $a(u) = u + \eta$, $b(u) = u$ e $c(u) = \eta$, sendo assim, a troca do argumento de $b(u)$ altera o sinal do termo, conforme desejamos.

Notamos que estas relações destacadas a pouco seriam comutadores usuais da mecânica quântica, a menos de um fator multiplicativo introduzido pelas amplitudes, caso não ocorresse uma troca nos argumentos dos operadores envolvidos, como podemos notar em ambos os segundos termos do segundo membro das expressões. Esta propriedade destas relações tornarão nossos cálculos mais complexos e trabalhosos mas também acrescentarão um ingrediente muito importante do ABA: as equações de Bethe, que serão estudadas na próxima seção.

A partir deste ponto, realizaremos explicitamente os cálculos de comutação para os casos $M = 1$, $M = 2$ e $M = 3$, com o auxílio das identidades (2.23a) e (2.23b). Este método que faz uso da matriz de transferência e seus operadores $A(u)$ e $D(u)$ é conhecido na literatura como o ansatz de Bethe algébrico (ABA) [6, 7, 8] e corresponde ao cerne desta dissertação, uma vez que é a técnica matemática que aplicaremos em todos os modelos de spins estudados nos capítulos seguintes.

Ao término desta tarefa, proporemos uma generalização para qualquer valor M de excitações do “vácuo” tanto para os autovalores, quanto para as identidades que surgirão durante o procedimento de diagonalização. Dividiremos o texto em itens para cada caso visando uma melhor estruturação da seção, facilitando a sua leitura.

- $M = 1$

$$- A(u)$$

Iniciamos reescrevendo a equação (2.23a) com os argumentos convenientes u e v_1

$$A(u)B(v_1) = \frac{a(v_1-u)}{b(v_1-u)}B(v_1)A(u) + \frac{c(u-v_1)}{b(u-v_1)}B(u)A(v_1), \quad (2.24)$$

em que v_1 se refere à criação de uma partícula por $B(v_1)$ quando ele provocar a primeira excitação de Ω_0 e, uma vez conhecida a atuação de $A(u)$ em Ω_0 (equação (2.22)), permite-nos escrever a relação de comutação para este operador da seguinte forma

$$A(u)B(v_1)\Omega_0 = \frac{a(v_1-u)\chi_1(u)}{b(v_1-u)}B(v_1)\Omega_0 + \frac{c(u-v_1)\chi_1(v_1)}{b(u-v_1)}B(u)\Omega_0, \quad (2.25)$$

chegando então numa expressão em que o primeiro termo corresponde a uma equação de autovalores para $A(u)$ e $B(v_1)$ e o segundo, um termo indesejado.

- $- D(u)$

Fazendo a mesma troca de argumentos com a equação (2.23b) temos

$$D(u)B(v_1) = \frac{a(u-v_1)}{b(u-v_1)}B(v_1)D(u) + \frac{c(v_1-u)}{b(v_1-u)}B(u)D(v_1), \quad (2.26)$$

que, ao atuar no estado de referência Ω_0 , obtemos o mesmo tipo de expressão para o comutador de $D(u)$ com $B(v_1)$

$$D(u)B(v_1)\Omega_0 = \frac{a(u-v_1)\chi_2(u)}{b(u-v_1)}B(v_1)\Omega_0 + \frac{c(v_1-u)\chi_2(v_1)}{b(v_1-u)}B(u)\Omega_0, \quad (2.27)$$

em que o autovalor de D já foi substituído.

- $- \tau(u) = A(u) + D(u)$

Escrevendo agora a matriz de transferência a partir dos resultados obtidos

$$\begin{aligned} \tau(u)B(v_1)\Omega_0 &= (A(u) + D(u))B(v_1)\Omega_0 \\ &= \left(\frac{a(v_1-u)\chi_1(u)}{b(v_1-u)} + \frac{a(u-v_1)\chi_2(u)}{b(u-v_1)} \right) B(v_1)\Omega_0 \\ &\quad + \left(\frac{c(u-v_1)\chi_1(v_1)}{b(u-v_1)} + \frac{c(v_1-u)\chi_2(v_1)}{b(v_1-u)} \right) B(u)\Omega_0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

podemos reparar que essa expressão só será uma equação de autovalores se o segundo termo do segundo membro se anular.

Agora vamos calcular a matriz de transferência para duas excitações do estado fundamental.

- $M = 2$

$$- A(u)$$

Usaremos a equação (2.24), já substituída na expressão abaixo

$$A(u)B(v_1)B(v_2) = \frac{a(v_1-u)}{b(v_1-u)}B(v_1)A(u)B(v_2) + \frac{c(u-v_1)}{b(u-v_1)}B(u)A(v_1)B(v_2), \quad (2.29)$$

em que percebemos que precisaremos repetir o procedimento de comutação em ambos os termos mais uma vez. Colocando os argumentos adequados na equação (2.23a) e substituindo em (2.29), obtemos

$$\begin{aligned} A(u)B(v_1)B(v_2) &= \frac{a(v_1-u)a(v_2-u)}{b(v_1-u)b(v_2-u)}B(v_1)B(v_2)A(u) + \frac{c(u-v_1)a(v_2-v_1)}{b(u-v_1)b(v_2-v_1)}B(u)B(v_2)A(v_1) \\ &\quad + \left(\frac{a(v_1-u)c(u-v_2)}{b(v_1-u)b(u-v_2)} + \frac{c(u-v_1)c(v_1-v_2)}{b(u-v_1)b(v_1-v_2)} \right) B(u)B(v_1)A(v_2), \end{aligned} \quad (2.30)$$

em que conseguimos por todos os operadores A à direita dos operadores B , podendo assim atuar no estado de referência Ω_0 . Antes disto, vamos utilizar a seguinte identidade para simplificar o coeficiente do último termo

$$\frac{a(v_1-u)c(u-v_2)}{b(v_1-u)b(u-v_2)} + \frac{c(u-v_1)c(v_1-v_2)}{b(u-v_1)b(v_1-v_2)} = \frac{a(v_1-v_2)c(u-v_2)}{b(v_1-v_2)b(u-v_2)}, \quad (2.31)$$

resultando na forma final para a comutação de A com dois operadores B

$$\begin{aligned}
A(u)B(v_1)B(v_2) &= \frac{a(v_1 - u)a(v_2 - u)}{b(v_1 - u)b(v_2 - u)}B(v_1)B(v_2)A(u) \\
&+ \frac{c(u - v_1)a(v_2 - v_1)}{b(u - v_1)b(v_2 - v_1)}B(u)B(v_2)A(v_1) \\
&+ \frac{a(v_1 - v_2)c(u - v_2)}{b(v_1 - v_2)b(u - v_2)}B(u)B(v_1)A(v_2).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Atuando em Ω_0 com esta expressão no estado de referência

$$\begin{aligned}
A(u)B(v_1)B(v_2)\Omega_0 &= \frac{a(v_1 - u)a(v_2 - u)\chi_1(u)}{b(v_1 - u)b(v_2 - u)}B(v_1)B(v_2)\Omega_0 \\
&+ \frac{c(u - v_1)a(v_2 - v_1)\chi_1(v_1)}{b(u - v_1)b(v_2 - v_1)}B(u)B(v_2)\Omega_0 \\
&+ \frac{a(v_1 - v_2)c(u - v_2)\chi_1(v_2)}{b(v_1 - v_2)b(u - v_2)}B(u)B(v_1)\Omega_0,
\end{aligned} \tag{2.33}$$

chegamos numa expressão em que o primeiro termo corresponde a uma equação de autovalores para $A(u)$ e o segundo e o terceiro termos são indesejados.

$$\bullet \quad - D(u)$$

Repetindo a mesma sequência de operações para D temos

$$D(u)B(v_1)B(v_2) = \frac{a(u - v_1)}{b(u - v_1)}B(v_1)D(u)B(v_2) + \frac{c(v_1 - u)}{b(v_1 - u)}B(u)D(v_1)B(v_2), \tag{2.34}$$

após a substituição da equação (2.26), obtida no caso anterior. Vamos reutilizá-la novamente, com argumentos adequados, para substituí-la em (2.34), obtendo-se

$$\begin{aligned}
D(u)B(v_1)B(v_2) &= \frac{a(u - v_1)a(u - v_2)}{b(u - v_1)b(u - v_2)}B(v_1)B(v_2)D(u) + \frac{a(v_1 - v_2)c(v_1 - u)}{b(v_1 - v_2)b(v_1 - u)}B(u)B(v_2)D(v_1) \\
&+ \left(\frac{a(u - v_1)c(v_2 - u)}{b(u - v_1)b(v_2 - u)} + \frac{c(v_1 - u)c(v_2 - v_1)}{b(v_1 - u)b(v_2 - v_1)} \right) B(u)B(v_1)D(v_2),
\end{aligned} \tag{2.35}$$

em que atingimos o nosso objetivo de comutar D com todos B s para que atinjam o estado de referência. Precisamos também simplificar o último termo de (2.35) através da mesma identidade utilizada para A (equação (2.31)), trocando-se alguns argumentos

$$\frac{a(u - v_1)c(v_2 - u)}{b(u - v_1)b(v_2 - u)} + \frac{c(v_1 - u)c(v_2 - v_1)}{b(v_1 - u)b(v_2 - v_1)} = \frac{a(v_2 - v_1)c(v_2 - u)}{b(v_2 - v_1)b(v_2 - u)}, \tag{2.36}$$

que, ao ser substituída em (2.35), resulta no comutador de D com dois operadores B

$$\begin{aligned} D(u)B(v_1)B(v_2) &= \frac{a(u-v_1)a(u-v_2)}{b(u-v_1)b(u-v_2)}B(v_1)B(v_2)D(u) \\ &+ \frac{a(v_1-v_2)c(v_1-u)}{b(v_1-v_2)b(v_1-u)}B(u)B(v_2)D(v_1) \\ &+ \frac{a(v_2-v_1)c(v_2-u)}{b(v_2-v_1)b(v_2-u)}B(u)B(v_1)D(v_2). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Outra vez podemos atuar com este resultado no estado de referência Ω_0 , obtendo a seguinte expressão

$$\begin{aligned} D(u)B(v_1)B(v_2)\Omega_0 &= \frac{a(u-v_1)a(u-v_2)\chi_2(u)}{b(u-v_1)b(u-v_2)}B(v_1)B(v_2)\Omega_0 \\ &+ \frac{a(v_1-v_2)c(v_1-u)\chi_2(v_1)}{b(v_1-v_2)b(v_1-u)}B(u)B(v_2)\Omega_0 \\ &+ \frac{a(v_2-v_1)c(v_2-u)\chi_2(v_2)}{b(v_2-v_1)b(v_2-u)}B(u)B(v_1)\Omega_0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

que também é uma equação de autovalor para $D(u)$, a menos dos dois últimos termos não desejados.

- $-\tau(u) = A(u) + D(u)$

Unindo os resultados obtidos, encontramos a expressão para a matriz de transferência atuando no estado de Bethe com duas excitações do “vácuo” Ω_0

$$\begin{aligned} \tau(u)B(v_1)B(v_2)\Omega_0 &= (A(u) + D(u))B(v_1)B(v_2)\Omega_0 \\ &= \left(\frac{a(v_1-u)a(v_2-u)\chi_1(u)}{b(v_1-u)b(v_2-u)} + \frac{a(u-v_1)a(u-v_2)\chi_2(u)}{b(u-v_1)b(u-v_2)} \right) B(v_1)B(v_2)\Omega_0 \\ &+ \left(\frac{a(v_2-v_1)c(u-v_1)\chi_1(v_1)}{b(u-v_1)b(v_2-v_1)} + \frac{a(v_1-v_2)c(v_1-u)\chi_2(v_1)}{b(v_1-v_2)b(v_1-u)} \right) B(u)B(v_2)\Omega_0 \\ &+ \left(\frac{a(v_1-v_2)c(u-v_2)\chi_1(v_2)}{b(v_1-v_2)b(u-v_2)} + \frac{a(v_2-v_1)c(v_2-u)\chi_2(v_2)}{b(v_2-v_1)b(v_2-u)} \right) B(u)B(v_1)\Omega_0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

que também será uma equação de autovalores para τ desde que os dois últimos termos se anulem simultaneamente.

Finalmente, o nosso último exemplo com três operadores de criação B .

- $M = 3$

- $-A(u)$

Usando novamente a relação fundamental (2.24) para substituí-la na expressão abaixo

$$A(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3) = \frac{a(v_1-u)}{b(v_1-u)}B(v_1)A(u)B(v_2)B(v_3) + \frac{c(u-v_1)}{b(u-v_1)}B(u)A(v_1)B(v_2)B(v_3). \quad (2.40)$$

Assim como fizemos o reaproveitamento dos resultados obtidos em $M = 1$ para simplificar os cálculos feitos em $M = 2$, vamos utilizar o resultado encontrado para $M = 2$ em ambos os termos do segundo

membro para minimizar o nosso trabalho, caso contrário, teríamos de realizar mais duas comutações de A com B , reescrevendo a equação (2.23a) mais duas vezes para diferentes argumentos das amplitudes. Este é o truque simplificador desta dedução e que será a chave para encontrarmos uma generalização para um valor de M arbitrário.

Então, reescrevendo a equação (2.32) com os argumentos adequados, substituindo nos dois termos de (2.40) e agrupando os termos semelhantes, obtemos

$$\begin{aligned}
A(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3) = & \frac{a(v_1-u)a(v_2-u)a(v_3-u)}{b(v_1-u)b(v_2-u)b(v_3-u)}B(v_1)B(v_2)B(v_3)A(u) \\
& + \frac{a(v_2-v_1)a(v_3-v_1)c(u-v_1)}{b(v_2-v_1)b(v_3-v_1)b(u-v_1)}B(u)B(v_2)B(v_3)A(v_1) \\
& + \frac{a(v_3-v_2)}{b(v_3-v_2)}\left(\frac{a(v_1-u)c(u-v_2)}{b(v_1-u)b(u-v_2)}\right)B(u)B(v_1)B(v_3)A(v_2) \\
& + \frac{a(v_3-v_2)}{b(v_3-v_2)}\left(\frac{c(u-v_1)c(v_1-v_2)}{b(u-v_1)b(v_1-v_2)}\right)B(u)B(v_1)B(v_3)A(v_2) \\
& + \frac{a(v_2-v_3)}{b(v_2-v_3)}\left(\frac{a(v_1-u)c(u-v_3)}{b(v_1-u)b(u-v_3)}\right)B(u)B(v_1)B(v_2)A(v_3) \\
& + \frac{a(v_2-v_3)}{b(v_2-v_3)}\left(\frac{c(u-v_1)c(v_1-v_3)}{b(u-v_1)b(v_1-v_3)}\right)B(u)B(v_1)B(v_2)A(v_3), \quad (2.41)
\end{aligned}$$

em que temos todos os operadores A estão à direita dos B s, prontos para atuar no estado de referência Ω_0 , produzindo seus autovalores dados pela primeira das equações (2.22).

Vamos utilizar a mesma identidade usada em $M = 2$ (eq. (2.31)) para simplificar os coeficientes dos últimos dois termos de (2.41). Para isto, reescremo-la explicitamente com as trocas adequadas dos argumentos

$$\frac{a(v_1-u)c(u-v_2)}{b(v_1-u)b(u-v_2)} + \frac{c(u-v_1)c(v_1-v_2)}{b(u-v_1)b(v_1-v_2)} = \frac{a(v_1-v_2)c(u-v_2)}{b(v_1-v_2)b(u-v_2)}, \quad (2.42a)$$

$$\frac{a(v_1-u)c(u-v_3)}{b(v_1-u)b(u-v_3)} + \frac{c(u-v_1)c(v_1-v_3)}{b(u-v_1)b(v_1-v_3)} = \frac{a(v_1-v_3)c(u-v_3)}{b(v_1-v_3)b(u-v_3)}. \quad (2.42b)$$

Substituindo-as na expressão (2.41), encontramos

$$\begin{aligned}
A(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3) = & \frac{a(v_1-u)a(v_2-u)a(v_3-u)}{b(v_1-u)b(v_2-u)b(v_3-u)}B(v_1)B(v_2)B(v_3)A(u) \\
& + \frac{a(v_2-v_1)a(v_3-v_1)c(u-v_1)}{b(v_2-v_1)b(v_3-v_1)b(u-v_1)}B(u)B(v_2)B(v_3)A(v_1) \\
& + \frac{a(v_3-v_2)a(v_1-v_2)c(u-v_2)}{b(v_3-v_2)b(v_1-v_2)b(u-v_2)}B(u)B(v_1)B(v_3)A(v_2) \\
& + \frac{a(v_2-v_3)a(v_1-v_3)c(u-v_3)}{b(v_2-v_3)b(v_1-v_3)b(u-v_3)}B(u)B(v_1)B(v_2)A(v_3), \quad (2.43)
\end{aligned}$$

que, após atuar Ω_0 , chegamos em

$$\begin{aligned}
A(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 &= \frac{a(v_1-u)a(v_2-u)a(v_3-u)\chi_1(u)}{b(v_1-u)b(v_2-u)b(v_3-u)}B(v_1)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 \\
&+ \frac{a(v_2-v_1)a(v_3-v_1)c(u-v_1)\chi_1(v_1)}{b(v_2-v_1)b(v_3-v_1)b(u-v_1)}B(u)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 \\
&+ \frac{a(v_3-v_2)a(v_1-v_2)c(u-v_2)\chi_1(v_2)}{b(v_3-v_2)b(v_1-v_2)b(u-v_2)}B(u)B(v_1)B(v_3)\Omega_0 \\
&+ \frac{a(v_2-v_3)a(v_1-v_3)c(u-v_3)\chi_1(v_3)}{b(v_2-v_3)b(v_1-v_3)b(u-v_3)}B(u)B(v_1)B(v_2)\Omega_0, \quad (2.44)
\end{aligned}$$

em que aparece o autovalor de $A(u)$ no coeficiente do primeiro termo juntamente com outros três termos indesejados.

$$\bullet \quad - D(u)$$

Procederemos da mesma forma para este último operador deste caso. A relação (2.26) foi substituída abaixo

$$\begin{aligned}
D(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3) &= \frac{a(u-v_1)}{b(u-v_1)}B(v_1)D(u)B(v_2)B(v_3) \\
&+ \frac{c(v_1-u)}{b(v_1-u)}B(u)D(v_1)B(v_2)B(v_3), \quad (2.45)
\end{aligned}$$

em que percebemos a necessidade de comutar D mais duas vezes com B utilizando a equação (2.23b) ou, aproveitando o resultado obtido para $M = 2$, colocando argumentos convenientes na expressão (2.37) e substituí-las em ambos os termos de (2.45), como fizemos abaixo por uma questão de praticidade

$$\begin{aligned}
D(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3) &= \frac{a(u-v_1)a(u-v_2)a(u-v_3)}{b(u-v_1)b(u-v_2)b(u-v_3)}B(v_1)B(v_2)B(v_3)D(u) \\
&+ \frac{c(v_1-u)a(v_1-v_2)a(v_1-v_3)}{b(v_1-u)b(v_1-v_2)b(v_1-v_3)}B(u)B(v_2)B(v_3)D(v_1) \\
&+ \frac{a(v_2-v_3)}{b(v_2-v_3)} \left(\frac{a(u-v_1)c(v_2-u)}{b(u-v_1)b(v_2-u)} \right) B(u)B(v_1)B(v_3)D(v_2) \\
&+ \frac{a(v_2-v_3)}{b(v_2-v_3)} \left(\frac{c(v_1-u)c(v_2-v_1)}{b(v_1-u)b(v_2-v_1)} \right) B(u)B(v_1)B(v_3)D(v_2) \\
&+ \frac{a(v_3-v_2)}{b(v_3-v_2)} \left(\frac{a(u-v_1)c(v_3-u)}{b(u-v_1)b(v_3-u)} \right) B(u)B(v_1)B(v_2)D(v_3) \\
&+ \frac{a(v_3-v_2)}{b(v_3-v_2)} \left(\frac{c(v_1-u)c(v_3-v_1)}{b(v_1-u)b(v_3-v_1)} \right) B(u)B(v_1)B(v_2)D(v_3), \quad (2.46)
\end{aligned}$$

em que notamos não precisar de mais nenhuma comutação entre os operadores. Só vamos simplificar os coeficientes dos quatro últimos termos com a mesma identidade usada anteriormente para $M = 2$ (eq.

(2.36)), reescrita com novos argumentos

$$\frac{a(u-v_1)c(v_2-u)}{b(u-v_1)b(v_2-u)} + \frac{c(v_1-u)c(v_2-v_1)}{b(v_1-u)b(v_2-v_1)} = \frac{a(v_2-v_1)c(v_2-u)}{b(v_2-v_1)b(v_2-u)}, \quad (2.47a)$$

$$\frac{a(u-v_1)c(v_3-u)}{b(u-v_1)b(v_3-u)} + \frac{c(v_1-u)c(v_3-v_1)}{b(v_1-u)b(v_3-v_1)} = \frac{a(v_3-v_1)c(v_3-u)}{b(v_3-v_1)b(v_3-u)}, \quad (2.47b)$$

e que serão substituídas em (2.46), simplificando os quatro últimos termos desta equação em dois novos termos

$$\begin{aligned} D(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3) &= \frac{a(u-v_1)a(u-v_2)a(u-v_3)}{b(u-v_1)b(u-v_2)b(u-v_3)}B(v_1)B(v_2)B(v_3)D(u) \\ &+ \frac{c(v_1-u)a(v_1-v_2)a(v_1-v_3)}{b(v_1-u)b(v_1-v_2)b(v_1-v_3)}B(u)B(v_2)B(v_3)D(v_1) \\ &+ \frac{a(v_2-v_3)a(v_2-v_1)c(v_2-u)}{b(v_2-v_3)b(v_2-v_1)b(v_2-u)}B(u)B(v_1)B(v_3)D(v_2) \\ &+ \frac{a(v_3-v_2)a(v_3-v_1)c(v_3-u)}{b(v_3-v_2)b(v_3-v_1)b(v_3-u)}B(u)B(v_1)B(v_2)D(v_3). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Obtemos, com atuação desta no estado de referência Ω_0 , a expressão para $D(u)$, análoga àquela obtida para $A(u)$

$$\begin{aligned} D(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 &= \frac{a(u-v_1)a(u-v_2)a(u-v_3)\chi_2(u)}{b(u-v_1)b(u-v_2)b(u-v_3)}B(v_1)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 \\ &+ \frac{c(v_1-u)a(v_1-v_2)a(v_1-v_3)\chi_2(v_1)}{b(v_1-u)b(v_1-v_2)b(v_1-v_3)}B(u)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 \\ &+ \frac{a(v_2-v_3)a(v_2-v_1)c(v_2-u)\chi_2(v_2)}{b(v_2-v_3)b(v_2-v_1)b(v_2-u)}B(u)B(v_1)B(v_3)\Omega_0 \\ &+ \frac{a(v_3-v_2)a(v_3-v_1)c(v_3-u)\chi_2(v_3)}{b(v_3-v_2)b(v_3-v_1)b(v_3-u)}B(u)B(v_1)B(v_2)\Omega_0. \end{aligned} \quad (2.49)$$

- $-\tau(u) = A(u) + D(u)$

Com as expressões obtidas para os operadores que formam o traço da matriz de monodromia (equações (2.44) e (2.49)), obtemos a matriz de transferência para o caso $M = 3$

$$\begin{aligned} \tau(u)B(v_1)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 &= (A(u) + D(u))B(v_1)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 = \\ &= \left(\frac{a(v_1-u)a(v_2-u)a(v_3-u)\chi_1(u)}{b(v_1-u)b(v_2-u)b(v_3-u)} + \frac{a(u-v_1)a(u-v_2)a(u-v_3)\chi_2(u)}{b(u-v_1)b(u-v_2)b(u-v_3)} \right) B(v_1)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 \\ &+ \left(\frac{a(v_2-v_1)a(v_3-v_1)c(u-v_1)\chi_1(v_1)}{b(v_2-v_1)b(v_3-v_1)b(u-v_1)} + \frac{c(v_1-u)a(v_1-v_2)a(v_1-v_3)\chi_2(v_1)}{b(v_1-u)b(v_1-v_2)b(v_1-v_3)} \right) B(u)B(v_2)B(v_3)\Omega_0 \\ &+ \left(\frac{a(v_3-v_2)a(v_1-v_2)c(u-v_2)\chi_1(v_2)}{b(v_3-v_2)b(v_1-v_2)b(u-v_2)} + \frac{a(v_2-v_3)a(v_2-v_1)c(v_2-u)\chi_2(v_2)}{b(v_2-v_3)b(v_2-v_1)b(v_2-u)} \right) B(u)B(v_1)B(v_3)\Omega_0 \\ &+ \left(\frac{a(v_2-v_3)a(v_1-v_3)c(u-v_3)\chi_1(v_3)}{b(v_2-v_3)b(v_1-v_3)b(u-v_3)} + \frac{a(v_3-v_2)a(v_3-v_1)c(v_3-u)\chi_2(v_3)}{b(v_3-v_2)b(v_3-v_1)b(v_3-u)} \right) B(u)B(v_1)B(v_2)\Omega_0, \end{aligned} \quad (2.50)$$

com estrutura similar às matrizes τ obtidas para os casos anteriores $M = 1$ e $M = 2$, ou seja, uma equação

de autovalores desde que haja o cancelamento dos três últimos termos de (2.50).

Proporemos neste momento uma generalização para o ansatz de Bethe algébrico com base em todas as expressões obtidas até agora para, em seguida, verificar a sua validade através do método de indução finita. A generalização proposta da equação de quase-autovalores para a matriz de transferência é

$$\begin{aligned}
\tau(u) \prod_{i=1}^M B(v_i) \Omega_0 &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^M B(v_i) \Omega_0 \\
&= \left(\prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \chi_1(u) + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \chi_2(u) \right) \prod_{i=1}^M B(v_i) \Omega_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \chi_1(v_i) \right) B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right] \Omega_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \chi_2(v_i) \right) B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right] \Omega_0, \quad (2.51)
\end{aligned}$$

que suporemos válida para $M - 1$ e a reescreveremos com os operadores A e D explicitados a fim de provarmos nossa hipótese de generalização

$$\begin{aligned}
\tau(u) \prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \Omega_0 &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \Omega_0 \\
&= \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \left(\prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \right) A(u) \Omega_0 + \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(\prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \right) D(u) \Omega_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} B(v_j) \right) A(v_i) \right] \Omega_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} B(v_j) \right) D(v_i) \right] \Omega_0. \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Excluiremos o estado de referência Ω_0 em (2.52) para que possamos manipulá-la mais a vontade,

inicialmente multiplicando à direita esta expressão pelo operador $B(v_M)$

$$\begin{aligned}
\tau(u) \prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) B(v_M) &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) B(v_M) \\
&= \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \left(\prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \right) A(u) B(v_M) \\
&\quad + \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(\prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \right) D(u) B(v_M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} B(v_j) \right) A(v_i) \right] B(v_M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} B(v_j) \right) D(v_i) \right] B(v_M) \tag{2.53}
\end{aligned}$$

nota-se que os operadores A e D não estão à direita do operador $B(v_M)$, fato que nos obrigará novamente a comutar os operadores A e D com $B(v_M)$ para que aqueles atuem no estado de referência Ω_0 .

Como sempre, vamos utilizar as relações fundamentais de comutação (2.23a) e (2.23b), reescritas abaixo explicitamente em termos dos parâmetros convenientes para prosseguirmos nossa generalização

$$A(u)B(v_M) = \frac{a(v_M - u)}{b(v_M - u)} B(v_M)A(u) + \frac{c(u - v_M)}{b(u - v_M)} B(u)A(v_M), \tag{2.54a}$$

$$A(v_i)B(v_M) = \frac{a(v_M - v_i)}{b(v_M - v_i)} B(v_M)A(v_i) + \frac{c(v_i - v_M)}{b(v_i - v_M)} B(v_i)A(v_M), \tag{2.54b}$$

$$D(u)B(v_M) = \frac{a(u - v_M)}{b(u - v_M)} B(v_M)D(u) + \frac{c(v_M - u)}{b(v_M - u)} B(u)D(v_M), \tag{2.54c}$$

$$D(v_i)B(v_M) = \frac{a(v_i - v_M)}{b(v_i - v_M)} B(v_M)D(v_i) + \frac{c(v_M - v_i)}{b(v_M - v_i)} B(v_i)D(v_M), \tag{2.54d}$$

que, substituídas em (2.53), resultam em

$$\begin{aligned}
\tau(u) \prod_{i=1}^M B(v_i) &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^M B(v_i) \\
&= \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) A(u) + \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \frac{c(u - v_M)}{b(u - v_M)} B(u) \left(\prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \right) A(v_M) \\
&\quad + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) D(u) + \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \frac{c(v_M - u)}{b(v_M - u)} B(u) \left(\prod_{i=1}^{M-1} B(v_i) \right) D(v_M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) A(v_i) \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \frac{c(v_i - v_M)}{b(v_i - v_M)} \left(B(u) \prod_{j=1}^{M-1} B(v_j) \right) A(v_M) \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) D(v_i) \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \frac{c(v_M - v_i)}{b(v_M - v_i)} \left(B(u) \prod_{j=1}^{M-1} B(v_j) \right) D(v_M) \right]. \tag{2.55}
\end{aligned}$$

Editando esta última expressão com agrupamento de alguns termos e troca de índices mudos temos

$$\begin{aligned}
\tau(u) \prod_{i=1}^M B(v_i) &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^M B(v_i) \\
&= \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) A(u) \\
&\quad + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) D(u) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) A(v_i) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \frac{c(v_i - v_M)}{b(v_i - v_M)} \right) + \frac{c(u - v_M)}{b(u - v_M)} \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \right] \\
&\quad \times \left(B(u) \prod_{k=1}^{M-1} B(v_k) \right) A(v_M) \\
&\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) D(v_i) \right] \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^{M-1} \left(\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{M-1} \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \frac{c(v_M - v_i)}{b(v_M - v_i)} \right) + \frac{c(v_M - u)}{b(v_M - u)} \prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \right] \\
&\quad \times \left(B(u) \prod_{k=1}^{M-1} B(v_k) \right) D(v_M), \tag{2.56}
\end{aligned}$$

que precisa ser simplificada e colocada numa forma adequada para fazermos a comparação com a equação (2.51), que é a nossa sugestão de generalização para a ação da matriz de monodromia num estado de Bethe geral, constituído por M operadores de criação B atuando no estado de referência Ω_0 .

Para darmos seqüência, vamos usar um outro resultado encontrado por nós: a generalização das identidades que temos utilizado constantemente nas simplificações realizadas em $M = 2$ e $M = 3$, quando editamos os coeficientes dos termos indesejados. Essa generalização das identidades não são encontradas na literatura, muito menos a demonstração de sua validade. Para nos certificarmos de que estas expressões inéditas eram válidas, fizemos testes exaustivos no programa Maple para diversos valores de M .

Apresentamos a seguir as duas identidades generalizadas para os operadores A e D , respectivamente,

$$\sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(u-v_i)}{b(u-v_i)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j-v_i)}{b(v_j-v_i)} \right) \frac{c(v_i-v_M)}{b(v_i-v_M)} \right] + \frac{c(u-v_M)}{b(u-v_M)} \prod_{j=1}^{M-1} \frac{a(v_j-u)}{b(v_j-u)} = \frac{c(u-v_M)}{b(u-v_M)} \prod_{j=1}^{M-1} \frac{a(v_j-v_M)}{b(v_j-v_M)}, \quad (2.57a)$$

$$\sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(v_i-u)}{b(v_i-u)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i-v_j)}{b(v_i-v_j)} \right) \frac{c(v_M-v_i)}{b(v_M-v_i)} \right] + \frac{c(v_M-u)}{b(v_M-u)} \prod_{j=1}^{M-1} \frac{a(u-v_j)}{b(u-v_j)} = \frac{c(v_M-u)}{b(v_M-u)} \prod_{j=1}^{M-1} \frac{a(v_M-v_j)}{b(v_M-v_j)}, \quad (2.57b)$$

sendo que nota-se facilmente que a identidade para o operador D (2.57b) pode ser obtida a partir da primeira identidade para o operador A (2.57a) invertendo-se simplesmente os argumentos de todas as amplitudes.

Após a substituição das identidades (2.57) no quarto e sexto termos do segundo membro da equação (2.56), obtemos

$$\begin{aligned} \tau(u) \prod_{i=1}^M B(v_i) &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^M B(v_i) \\ &= \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i-u)}{b(v_i-u)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) A(u) + \prod_{i=1}^M \frac{a(u-v_i)}{b(u-v_i)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) D(u) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(u-v_i)}{b(u-v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j-v_i)}{b(v_j-v_i)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) A(v_i) \right] \\ &\quad + \frac{c(u-v_M)}{b(u-v_M)} \left(\prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(v_i-v_M)}{b(v_i-v_M)} \right) \left(B(u) \prod_{k=1}^{M-1} B(v_k) \right) A(v_M) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{M-1} \left[\frac{c(v_i-u)}{b(v_i-u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i-v_j)}{b(v_i-v_j)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) D(v_i) \right] \\ &\quad + \frac{c(v_M-u)}{b(v_M-u)} \left(\prod_{i=1}^{M-1} \frac{a(v_M-v_i)}{b(v_M-v_i)} \right) \left(B(u) \prod_{k=1}^{M-1} B(v_k) \right) D(v_M), \end{aligned} \quad (2.58)$$

ficando agora evidente que o quarto termo é o M -ésimo termo do somatório do terceiro termo, o mesmo

ocorrendo para o sexto e quinto termos, logo, vamos agrupá-los

$$\begin{aligned}
\tau(u) \prod_{i=1}^M B(v_i) &= (A(u) + D(u)) \prod_{i=1}^M B(v_i) \\
&= \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) A(u) + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) D(u) \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) A(v_i) \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left[\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) D(v_i) \right], \tag{2.59}
\end{aligned}$$

resultado este que confirma a nossa expressão geral proposta (2.51). Atuando no estado de referência Ω_0 temos

$$\begin{aligned}
\tau(u) \prod_{i=1}^M B(v_i) \Omega_0 &= \left(\prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \chi_1(u) + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \chi_2(u) \right) \left(\prod_{i=1}^M B(v_i) \right) \Omega_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left[\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \chi_1(v_i) \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) \right] \Omega_0 \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \left[\frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \chi_2(v_i) \left(B(u) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M B(v_j) \right) \right] \Omega_0, \tag{2.60}
\end{aligned}$$

A partir deste resultado, podemos escrever os autovalores da matriz de transferência

$$\Lambda(u) = \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \chi_1(u) + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \chi_2(u), \tag{2.61}$$

que só poderão ter este nome se cancelarmos o último termo da expressão geral (2.60). Este cancelamento sistemático dos últimos termos obtidos na diagonalização através do método do ansatz de Bethe algébrico (que apresentamos em detalhes nesta seção) dará origem, conforme já mencionamos no início, a um tópico essencial no processo de diagonalização que será tratado na próxima seção: as equações de Bethe.

2.4 Equações de Bethe

Nesta seção, daremos continuidade a diagonalização da matriz de transferência e esclareceremos alguns pontos citados brevemente na seção 2.3. Vimos naquela seção que, ao diagonalizar a matriz τ , mesmo nas etapas intermediárias envolvendo os operadores A e D , obtínhamos sempre equações que continham um termo correspondente ao autovalor do respectivo operador, juntamente com outros termos, que chamamos

de indesejados, e não correspondiam a autovalores pois apresentavam os mesmos operadores, porém com os argumentos trocados.

Para encontrarmos as equações de autovalores desejadas para a matriz de transferência, imporemos a condição de que todos os termos indesejados se anulem, chegando assim nas chamadas equações de Bethe. Faremos estes cancelamentos caso a caso, como fizemos na seção anterior para diagonalizar a matriz τ através do ansatz de Bethe algébrico.

Antes de iniciarmos com os exemplos, vamos recordar rapidamente a expressão do operador de Lax $\mathcal{L}(u)$ escrito em termos das matrizes da base e dos pesos de Boltzmann que atua num sítio arbitrário i (eq. (2.7))

$$\mathcal{L}_i(u) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_1(u) + x_2(u))I_i + (x_1(u) - x_2(u))s_i^z & x_3(u)s_i^- \\ x_3(u)s_i^+ & \frac{1}{2}(x_1(u) + x_2(u))I_i - (x_1(u) - x_2(u))s_i^z \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

pois é a partir dele que construímos a matriz de monodromia $T(u)$ (eq. (2.9)), nos permitindo assim escrever os autovalores dos operadores $A(u)$ e $D(u)$, apresentados na equação (2.22). Quando estes operadores atuam no “vácuo” Ω_0 , eles produzem os seguintes resultados

$$A(u)\Omega_0 = x_1^N(u)\Omega_0, \quad D(u)\Omega_0 = x_2^N(u)\Omega_0, \quad (2.63)$$

em que N é o número total de sítios da cadeia. Comparando estas expressões com aquelas da equação (2.22), podemos fazer as associações: $\chi_1(u) = x_1^N(u)$ e $\chi_2(u) = x_2^N(u)$.

A partir de agora, iremos analisar caso a caso as expressões obtidas na seção anterior, com o intuito de apresentarmos as equações de Bethe.

- $M = 1$

Para que a equação (2.28) seja uma equação de autovalor para a matriz de transferência τ , devemos cancelar seu último termo

$$\frac{c(u - v_1)}{b(u - v_1)} \chi_1(v_1) + \frac{c(v_1 - u)}{b(v_1 - u)} \chi_2(v_1) = 0,$$

que, uma vez que $b(u - v_1) = -b(v_1 - u)$ e $c(u - v_1) = c(v_1 - u)$, se reduz simplesmente a

$$\frac{\chi_1(v_1)}{\chi_2(v_1)} = 1, \quad (2.64)$$

que é uma equação polinomial de grau N na variável v_1 , cuja solução está associada a energia do sistema, como será visto posteriormente. Este caso será resolvido explicitamente ao final desta seção a título de ilustração.

- $M = 2$

Para este caso, precisaremos impor a condição de que os dois últimos termos da equação (2.39) se

anulem para que encontremos as equações de Bethe

$$\begin{aligned}\frac{a(v_2 - v_1)c(u - v_1)}{b(u - v_1)b(v_2 - v_1)} \chi_1(v_1) + \frac{a(v_1 - v_2)c(v_1 - u)}{b(v_1 - v_2)b(v_1 - u)} \chi_2(v_1) &= 0, \\ \frac{a(v_1 - v_2)c(u - v_2)}{b(v_1 - v_2)b(u - v_2)} \chi_1(v_2) + \frac{a(v_2 - v_1)c(v_2 - u)}{b(v_2 - v_1)b(v_2 - u)} \chi_2(v_2) &= 0,\end{aligned}$$

e, novamente, temos relações que simplificarão as equações acima: $b(u - v_1) = -b(v_1 - u)$, $c(u - v_1) = c(v_1 - u)$, $b(u - v_2) = -b(v_2 - u)$, $c(u - v_2) = c(v_2 - u)$ e $b(v_1 - v_2) = -b(v_2 - v_1)$, resultando nas seguintes expressões

$$\frac{\chi_1(v_1)}{\chi_2(v_1)} = -\frac{a(v_1 - v_2)}{a(v_2 - v_1)}, \quad \frac{\chi_1(v_2)}{\chi_2(v_2)} = -\frac{a(v_2 - v_1)}{a(v_1 - v_2)}, \quad (2.65)$$

em que obtemos, desta vez, duas equações polinomiais acopladas que nos permitem determinar as incógnitas v_1 e v_2 . Estas incógnitas, além de possuírem relação com a energia do sistema conforme mencionado, serão também os argumentos dos operadores que criam o estado de Bethe a partir do estado de referência Ω_0 .

- $M = 3$

A equação (2.50) possui três termos indesejados a serem cancelados para que possa ser chamada de equação de autovalores para a matriz de transferência τ . Anularemos os seguintes termos

$$\begin{aligned}\frac{a(v_2 - v_1)a(v_3 - v_1)c(u - v_1)}{b(v_2 - v_1)b(v_3 - v_1)b(u - v_1)} \chi_1(v_1) + \frac{a(v_1 - v_2)a(v_1 - v_3)c(v_1 - u)}{b(v_1 - v_2)b(v_1 - v_3)b(v_1 - u)} \chi_2(v_1) &= 0, \\ \frac{a(v_3 - v_2)a(v_1 - v_2)c(u - v_2)}{b(v_3 - v_2)b(v_1 - v_2)b(u - v_2)} \chi_1(v_2) + \frac{a(v_2 - v_3)a(v_2 - v_1)c(v_2 - u)}{b(v_2 - v_3)b(v_2 - v_1)b(v_2 - u)} \chi_2(v_2) &= 0, \\ \frac{a(v_2 - v_3)a(v_1 - v_3)c(u - v_3)}{b(v_2 - v_3)b(v_1 - v_3)b(u - v_3)} \chi_1(v_3) + \frac{a(v_3 - v_2)a(v_3 - v_1)c(v_3 - u)}{b(v_3 - v_2)b(v_3 - v_1)b(v_3 - u)} \chi_2(v_3) &= 0,\end{aligned}$$

em que usaremos novamente as relações entre as amplitudes que permitem simplificar estas expressões: $b(u - v_1) = -b(v_1 - u)$, $c(u - v_1) = c(v_1 - u)$, $b(u - v_2) = -b(v_2 - u)$, $c(u - v_2) = c(v_2 - u)$, $b(u - v_3) = -b(v_3 - u)$, $c(u - v_3) = c(v_3 - u)$, $b(v_1 - v_2) = -b(v_2 - v_1)$, $b(v_2 - v_3) = -b(v_3 - v_2)$ e $b(v_1 - v_3) = -b(v_3 - v_1)$. Chegamos assim nas três equações de Bethe para este caso

$$\begin{aligned}\frac{\chi_1(v_1)}{\chi_2(v_1)} &= \frac{a(v_1 - v_2)a(v_1 - v_3)}{a(v_2 - v_1)a(v_3 - v_1)}, \\ \frac{\chi_1(v_2)}{\chi_2(v_2)} &= \frac{a(v_2 - v_1)a(v_2 - v_3)}{a(v_1 - v_2)a(v_3 - v_2)}, \\ \frac{\chi_1(v_3)}{\chi_2(v_3)} &= \frac{a(v_3 - v_1)a(v_3 - v_2)}{a(v_1 - v_3)a(v_2 - v_3)}.\end{aligned} \quad (2.66)$$

que são equações polinomiais acopladas nas variáveis v_1 , v_2 e v_3 .

Como fizemos na seção anterior durante a diagonalização da matriz τ , vamos generalizar as equações de Bethe para um valor M arbitrário de excitações do estado de referência. Podemos realizar esta generalização a partir dos resultados encontrados nesta seção para os diferentes M s ou a partir da diagonalização da matriz de transferência na seção anterior.

Observando o último termo da equação generalizada (2.60), vemos que ele é o termo que não corresponde ao autovalor de τ , sendo portanto o termo indesejado a ser cancelado, mostrado a seguir

$$\frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} \chi_1(v_i) + \frac{c(v_i - u)}{b(v_i - u)} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \chi_2(v_i) = 0,$$

lembrando que este termo geral pertence a um somatório em i que introduz M termos deste tipo à nossa equação de quase-autovalores para τ . Cada um destes termos deve ser cancelado produzindo, portanto, M equações de Bethe.

Como fizemos explicitamente para os três primeiros casos, simplificaremos cada um dos termos indesejados utilizando relações entre as amplitudes b e c , escritas aqui de forma geral: $b(u - v_i) = -b(v_i - u)$, $c(u - v_i) = c(v_i - u)$ e $b(v_i - v_j) = -b(v_j - v_i)$, com $i = 1, 2, \dots, M$, resultando nas equações de Bethe generalizadas

$$\frac{\chi_1(v_i)}{\chi_2(v_i)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i - v_j)}{a(v_j - v_i)}, \quad (2.67)$$

que formam um conjunto de M equações polinomiais acopladas nas variáveis $v_1, v_2, \dots, v_M$.

Finalizando a seção, mostraremos um exemplo prático considerando $N = 2$ com $M = 0$ e $M = 1$. Esta situação bem simples nos permitirá sentir as dificuldades crescentes a medida em que aumentamos o número de sítios N da cadeia de spins.

Antes de iniciarmos, vamos fornecer os pesos de Boltzmann para que as equações de Bethe possam ser escritas explicitamente: $x_1(u) = u + \frac{\eta}{2}$ e $x_2(u) = u - \frac{\eta}{2}$. Nos exemplos o argumento usado nos pesos serão as incógnitas v_i .

- $N = 2$: $M = 0$

Utilizando a expressão recém obtida (2.67) para escrever a equação de Bethe para este caso temos

$$\frac{(v_1 - \frac{\eta}{2})^2}{(v_1 + \frac{\eta}{2})^2} = -1, \quad (2.68)$$

que corresponde a um polinômio de 2º grau, cujas soluções são $v_1 = \{-\frac{i}{2}\eta, \frac{i}{2}\eta\}$. Neste caso, ambas as raízes são complexas.

- $N = 2$: $M = 1$

Neste caso, ao usarmos (2.67), encontramos a seguinte equação de Bethe

$$\frac{(v_1 - \frac{\eta}{2})^2}{(v_1 + \frac{\eta}{2})^2} = 1, \quad (2.69)$$

que também é um polinômio do 2º grau, com uma raiz real dupla $v_1 = \{0\}$.

Estas raízes serão substituídas nos argumentos dos operadores de criação $B(v)$ para gerar os estados de Bethe Φ_B , que serão os estados com maior valor de spin dos multipletos do sistema.

2.5 Obtenção dos Hamiltonianos e dos Autovalores

Uma outra utilidade da matriz de transferência τ é que podemos tomar a sua derivada logarítmica para encontrarmos tanto o hamiltoniano quanto os autovalores do modelo de spin estudado. Veremos com todo o detalhamento possível como isto é feito na segunda parte da dissertação, a partir do próximo capítulo.

Nesta seção vamos apresentar o método desenvolvido por Baxter para calcularmos os hamiltonianos e seus respectivos autovalores para cada modelo a ser estudado. Para aplicarmos este método, precisamos conhecer explicitamente a forma da matriz de transferência τ , com amplitudes e pesos de Boltzmann devidamente substituídos.

Podemos substituir as expressões para os pesos de Boltzmann $x_1(u)$, $x_2(u)$ e $x_3(u)$ na equação (2.7) e reescrever operador de Lax [8] para um sítio como

$$\mathcal{L}_i(u) = \begin{pmatrix} uI_i + \eta s_i^z & \eta s_i^- \\ \eta s_i^+ & uI_i - \eta s_i^z \end{pmatrix}, \quad (2.70)$$

em que u e η são os parâmetros já apresentados anteriormente. Com este operador construímos a matriz de monodromia cujo traço corresponde à matriz de transferência, conforme vimos na seção 2.1 deste capítulo.

Conforme demonstrado por Baxter, os hamiltonianos dos modelos de spins são obtidos derivando-se o logaritmo da matriz de transferência em relação ao parâmetro u

$$\mathcal{H}_{Modelo} = \frac{d}{du} \log \tau \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} = \tau^{-1} \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} \frac{d\tau}{du} \Big|_{u=\frac{\eta}{2}}, \quad (2.71)$$

notando-se que a derivada deve ser calculada em $u = \frac{\eta}{2}$.

Somente para ressaltar a complexidade do método, devemos lembrar que é uma matriz quadrada de ordem 2^N , em que N corresponde ao número de sítios da cadeia de spin do modelo. Sendo assim, devemos inverter esta matriz e multiplicá-la pela derivada de cada um dos elementos de τ , para em seguida substituímos o valor do parâmetro espectral u . Desnecessário dizer que este problema pode se tornar bastante complexo e, por causa disto, foi preciso utilizarmos um software de manipulação algébrica, o Maple.

Para os autovalores da matriz τ (eq. (2.61)), podemos aplicar o mesmo procedimento e calcular diretamente os autovalores do hamiltoniano do modelo

$$\Lambda_{Modelo} = \frac{d}{du} \log \Lambda \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} = \Lambda^{-1} \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} \frac{d\Lambda}{du} \Big|_{u=\frac{\eta}{2}}, \quad (2.72)$$

em que, novamente, após a derivação, substituímos o argumento da expressão por $u = \frac{\eta}{2}$. Neste caso, o cálculo se torna um pouco mais simples do que o anterior, que era matricial.

Depois de calculados os hamiltonianos e os autovalores pelo método de Baxter, fizemos a verificação também através do Maple, comparando os resultados obtidos com as expressões explícitas dos hamiltonianos e dos autovalores de cada modelo, uma vez que estes são construídos a partir do respectivo modelo físico. Estes estudos detalhados de cada modelo serão realizados nos capítulos seguintes, dentro da segunda parte da dissertação.

Parte II

Modelos de Spins

Capítulo 3

Modelo de Heisenberg

A partir deste capítulo, estudaremos três modelos de spins: Heisenberg, Sklyanin e Cherednik. Veremos suas propriedades físicas, características particulares e faremos comparações a fim de compreendermos melhor as conexões existentes entre estes modelos à primeira vista tão distintos. Para efetuarmos estes estudos, usaremos todo o ferramental matemático desenvolvido nas seções do capítulo 2, em que apresentamos o ansatz de Bethe algébrico (ABA). Iniciaremos nossas investigações pelo modelo de Heisenberg, que é muito similar ao modelo de Ising clássico, com a diferença fundamental de tratar-se de um modelo quântico que servirá como um padrão de comparação de resultados com os outros modelos.

3.1 Hamiltoniano do Modelo

O modelo de Heisenberg da Mecânica Estatística é um modelo para spins com interação entre vizinhos próximos, análogo ao modelo de Lenz-Ising apresentado na seção 1.1. Neste modelo simplificado de cadeias de spins quânticos, também chamado de modelo XXX de spin $\frac{1}{2}$ [8], vamos considerar uma cadeia unidimensional constituída por N sítios que interagem com seu vizinho próximo mediante uma constante de acoplamento J , que assume o mesmo valor em qualquer direção. Devido a esta característica, podemos escrever o hamiltoniano para um total de N sítios da seguinte forma

$$\mathcal{H} = J \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}, \quad (3.1)$$

em que $\vec{\sigma}_a$ é um vetor que atua no sítio a e cujas componentes são as matrizes de Pauli. Como nenhum dos termos do produto escalar dentro do somatório é privilegiado, isto é, a interação entre as diferentes componentes do vetor $\vec{\sigma}_a$ com as do próximo vetor de spin que atua no sítio vizinho rotulado como $a+1$ possui a mesma intensidade, teremos o mesmo peso para qualquer termo, permitindo-nos reescrever o hamiltoniano (3.1) como

$$\mathcal{H} = J \sum_{i=1}^N (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z), \quad (3.2)$$

em que podemos ver explicitamente as matrizes de Pauli. Este hamiltoniano possui uma estrutura geral que é análoga aos hamiltonianos dos modelos a serem estudados nos próximos capítulos, em particular, todos possuem uma constante de acoplamento entre sítios vizinhos, o que é uma característica dos modelos

físicos com interações entre spins. Estes modelos são de grande utilidade para a mecânica estatística ao descreverem os fenômenos físicos em materiais magnéticos.

É possível acrescentarmos outras interações nestes modelos como, por exemplo, um termo incluindo uma interação entre as componentes do spin e um campo magnético externo. Estas anisotropias no acoplamento entre os spins também produzem diversos modelos com uma riqueza de propriedades físicas bem maior em relação ao modelo de Heisenberg que apresentaremos.

Assim como fizemos para o modelo de Lenz-Ising (seção 1.1), utilizaremos uma condição de contorno periódica, ou seja, faremos com que $\vec{\sigma}_{N+1}$ seja igual a $\vec{\sigma}_1$, o que equivale a construirmos a cadeia fechada com N sítios da figura 3.1.

Figura 3.1: Representação esquemática de uma cadeia periódica de N sítios.

No segundo capítulo (seção 2.1) apresentamos o operador de spin $\vec{s}$ (eq. (2.3)) e as combinações s^+ e s^- de suas primeiras componentes, que satisfazem a álgebra da equação (2.4). Notamos também que, para um sistema de N sítios, os operadores de spin atuarão num sítio específico (eq. (2.5)), satisfazendo uma álgebra (eq. (2.6)) semelhante àquela das componentes do operador $\vec{s}$.

Sendo assim, podemos reescrever o hamiltoniano do modelo de Heisenberg (eq. (3.2)) como

$$\mathcal{H}_{XX} = \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^{N-1} (s_n^x s_{n+1}^x + s_n^y s_{n+1}^y + s_n^z s_{n+1}^z) + \frac{1}{\eta} (s_N^x s_1^x + s_N^y s_1^y + s_N^z s_1^z), \quad (3.3)$$

em que acrescentamos o último termo para satisfazer a condição de contorno periódica $\vec{s}_{N+1} = \vec{s}_1$ e introduzimos o parâmetro η , cuja dimensão é o inverso de uma constante de acoplamento, que terá a sua utilidade apresentada somente no penúltimo capítulo, quando estudaremos a aproximação BCS para a supercondutividade. Na verdade, este último parâmetro já foi apresentado no final da seção 2.4, quando resolvemos as equações de Bethe para um caso bem simples pois escrevemos os pesos de Boltzmann $x_1(u)$ e $x_2(u)$ explicitamente, encontrando um polinômio de 2º grau. Em seguida, na seção 2.5, utilizamos o parâmetro η para reescrevermos o operador de Lax (eq. (2.70)) em função deste e do parâmetro espectral u . Outra situação em que o η apareceu foi na seção 2.2 quando definimos a matriz auxiliar $\mathcal{R}(u)$ em termos das amplitudes $a(u)$, $b(u)$ e $c(u)$ (eq. (2.11)).

Uma outra maneira de escrevermos o hamiltoniano acima seria em termos dos operadores $s^+ = s^x + is^y$ e $s^- = s^x - is^y$ que, conforme já foi dito, apresenta uma álgebra de momento angular conhecida, possibilitando a diagonalização do modelo. Desta forma, obtemos outra expressão para o hamiltoniano

$\mathcal{H}_{XXX}$ da equação (3.3)

$$\mathcal{H}_{XXX} = \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^{N-1} (s_n^+ s_{n+1}^- + s_n^- s_{n+1}^+ + 2s_n^z s_{n+1}^z) + \frac{1}{\eta} (s_N^+ s_1^- + s_N^- s_1^+ + 2s_N^z s_1^z), \quad (3.4)$$

em que o fator $\frac{1}{2}$ que surgiu foi absorvido pela constante de acoplamento.

Com a intenção de permitir uma melhor visualização do hamiltoniano $\mathcal{H}_{XXX}$, vamos obtê-lo explicitamente para uma cadeia de dois sítios ($N = 2$) substituindo os operadores de spin na expressão (3.4), resultando em

$$\mathcal{H}_{XXX}^{(N=2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\eta} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\eta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\eta} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

em que notamos a dimensão 4×4 da matriz que corresponde ao operador hamiltoniano. Como já comentamos, a dimensão deste operador é 2^N , com N sendo o número de sítios da cadeia de spins.

Podemos também obter este hamiltoniano através do método criado por Baxter em 1973, apresentado na seção 2.5, que corresponde a tomarmos a derivada logarítmica da matriz de transferência τ em $u = \frac{\eta}{2}$ (eq. (2.71)):

$$\mathcal{H}_{XXX} = \tau^{-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \tau \left(\frac{\eta}{2} \right). \quad (3.6)$$

Ambas as maneiras de calcular o hamiltoniano foram utilizadas e, com a ajuda do programa Maple, comparadas até $N = 6$, confirmando a equivalência dos dois métodos empregados na construção destes hamiltonianos. O método da derivada logarítmica também nos permite obter os autovalores do hamiltoniano $\mathcal{H}_{XXX}$, conforme apresentado na seção 2.5 do capítulo anterior (equação (2.72)). Faremos este cálculo explicitamente na próxima seção, quando diagonalizaremos o hamiltoniano do modelo de Heisenberg.

3.2 ABA e Diagonalização do Hamiltoniano

Na seção 2.3, em que apresentamos a diagonalização da matriz de transferência através da utilização do ABA, realizamos a generalização do método obtendo uma expressão para os autovalores (eq. (2.72)), que repetimos abaixo

$$\Lambda_{XXX} = \Lambda^{-1} \Big|_{u=\eta/2} \frac{\partial}{\partial u} \Lambda \Big|_{u=\frac{\eta}{2}}. \quad (3.7)$$

Partindo desta expressão, calcularemos a equação que fornecerá os autovalores do modelo de Heisenberg e nos auxiliará na diagonalização deste modelo. Vamos relembrar da expressão para os autovalores (eq. (2.61)) que encontramos a partir da generalização dos casos estudados para diferentes valores de M

$$\Lambda(u) = \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \chi_1(u) + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \chi_2(u). \quad (3.8)$$

Precisamos recordar das amplitudes, que foram apresentadas quando mencionamos a matriz auxiliar $\mathcal{R}$ (eq. (2.11)) na seção 2.2,

$$a(u) = u + \eta, \quad b(u) = u, \quad c(u) = \eta, \quad (3.9)$$

e também dos autovalores de $A(u)$ e $D(u)$ (equações (2.22)) que, por sua vez, são funções dos pesos de Boltzmann $x_1(u)$ e $x_2(u)$, respectivamente,

$$\chi_1(u) = (x_1(u))^N = \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^N, \quad (3.10a)$$

$$\chi_2(u) = (x_2(u))^N = \left(u - \frac{\eta}{2}\right)^N, \quad (3.10b)$$

em que N representa o número de sítios da nossa cadeia de spins e u e η são parâmetros complexos.

Substituindo as relações (3.9) e (4.16) em (3.8), chegamos na expressão que iremos manipular

$$\Lambda(u) = \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i - u + \eta}{v_i - u}\right) \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^N + \left(\prod_{i=1}^M \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i}\right) \left(u - \frac{\eta}{2}\right)^N, \quad (3.11)$$

primeiramente, fazendo a inversão desta e calculando-a em $u = \frac{\eta}{2}$, resultando em

$$\Lambda^{-1}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \frac{1}{\eta^N} \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i - \frac{\eta}{2}}{v_i + \frac{\eta}{2}}\right), \quad (3.12)$$

e agora, derivando a mesma expressão (eq. (3.11)) em relação a u temos, após algumas manipulações algébricas, o seguinte resultado

$$\begin{aligned} \frac{d\Lambda(u)}{du} &= \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^N \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i - u + \eta}{v_i - u}\right) \left(\frac{N}{u + \frac{\eta}{2}} + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(v_i - u)(v_i - u + \eta)}\right) \\ &+ \left(u - \frac{\eta}{2}\right)^N \left(\prod_{i=1}^M \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i}\right) \left(\frac{N}{u - \frac{\eta}{2}} - \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(u - v_i)(u - v_i + \eta)}\right), \end{aligned} \quad (3.13)$$

em que substituiremos o argumento u por $\frac{\eta}{2}$, conforme especificado por Baxter (eq. (3.7)), encontrando a seguinte expressão

$$\frac{d\Lambda}{du}\left(\frac{\eta}{2}\right) = \eta^N \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i + \frac{\eta}{2}}{v_i - \frac{\eta}{2}}\right) \left(\frac{N}{\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(v_i - \frac{\eta}{2})(v_i + \frac{\eta}{2})}\right). \quad (3.14)$$

Comparando esta última equação com a inversa de $\Lambda(u)$ (eq. (3.12)), notamos que esta é composta por dois fatores (a fração e o produtório) que são exatamente o inverso dos dois primeiros fatores da derivada calculada a pouco (eq. (3.14)) e, portanto, ao realizarmos o produto destas duas expressões, seguindo o procedimento de Baxter, estes termos cancelar-se-ão, restando somente a expressão abaixo

$$\Lambda_{XXX} = \frac{N}{\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(v_i - \frac{\eta}{2})(v_i + \frac{\eta}{2})}, \quad (3.15)$$

que corresponde à equação dos autovalores do modelo de Heisenberg obtida através do ansatz de Bethe algébrico. Esta expressão será a base da nossa diagonalização deste modelo pois fornecerá a energia dos auto-estados do hamiltoniano $\mathcal{H}_{XXX}$ (eq. (3.4)) que compararemos com a diagonalização direta, feita com o auxílio do programa Maple.

Antes de prosseguirmos na obtenção destes autovalores, precisaremos resolver as equações de Bethe (eq. (2.67)), que generalizamos na seção 2.4 e precisam ser satisfeitas para garantir que temos em mãos um problema de autovalores. Vamos descobrir os valores das incógnitas v_i para $N = 2, 4$ e 6 e M variando de 0 até $\frac{N}{2}$, a fim de obtermos os auto-estados do hamiltoniano de Heisenberg.

No final da seção 2.4, apresentamos um exemplo de resolução das equações de Bethe a título de ilustração. O caso estudado foi $N = 2$, que possuía duas situações: $M = 0$ e $M = 1$, cada uma destas com as suas respectivas equações de Bethe (equações (2.68) e (2.69)). Elas forneceram o seguinte conjunto de raízes para o parâmetro v_1 : $\{-i\frac{\eta}{2}, 0, i\frac{\eta}{2}\}$, sendo que, para o caso $M = 1$, a equação admite também como solução $v_1 = \infty$ mas, para este valor, o operador de criação $B(v)$, que apareceu pela primeira vez como uma das entradas da matriz de monodromia $T_N(u)$ (eq. (2.9)) e gera os estados de Bethe (eq. (2.21)), não produz nenhuma solução física, uma vez que o operador S^- (que corresponde ao limite de $B(v)$ para $v \rightarrow \infty$) não cria auto-estados do hamiltoniano de Heisenberg.

Esta mesma raiz v_1 será o argumento do operador de criação $B(v_1)$, resultando na equação de autovalor para o hamiltoniano de Heisenberg

$$\mathcal{H}_{XXX} B(0)\Omega_0 = -\frac{2}{\eta}B(0)\Omega_0, \quad (3.16)$$

em que utilizamos uma das raízes de Bethe ($v_1 = 0$) para ilustrar o auto-estado de Bethe. A interpretação deste nosso exemplo bem simples é que temos neste caso um sistema com dois sítios em que somente uma partícula, cuja energia é $-\frac{2}{\eta}$, foi criada. Conseguimos então obter o único estado deste sistema a partir da solução da equação de Bethe. Veremos nesta seção que isto nem sempre é possível.

De posse das soluções das equações de Bethe para este caso, vamos substituí-las na equação (3.15) para descobrir a quais autovalores correspondem as raízes encontradas v_1 . Ao fazermos isto, verificamos que ambas as raízes conjugadas $\pm i\frac{\eta}{2}$ fornecem o mesmo autovalor, que é nulo. Já a outra raiz ($v_1 = 0$) produz um autoestado com autovalor igual a $-\frac{2}{\eta}$ ($\Lambda_{XXX}^{(M=1)} = -\frac{2}{\eta}$), contabilizando assim dois autoestados do hamiltoniano $\mathcal{H}_{XXX}$ para $N = 2$, os mesmos que obtivemos a partir da diagonalização com o Maple do hamiltoniano da equação (3.5).

A partir deste ponto, em virtude dos cálculos tornarem-se mais extensos, dividiremos em tópicos para facilitar a leitura e a compreensão dos resultados obtidos na diagonalização do hamiltoniano do modelo XXX estudado. Seguiremos a estrutura de apresentação utilizada no caso $N = 2$, resolvendo as equações de Bethe primeiramente para, em seguida, substituir as raízes encontradas na expressão dos autovalores Λ_{XXX} e comparar estes resultados com aqueles obtidos através da diagonalização direta com o Maple do hamiltoniano $\mathcal{H}_{XXX}$.

Para ilustrarmos a existência de auto-estados ausentes nas soluções das equações de Bethe, resolveremos os casos $N = 4$ e $N = 6$ mostrando quais estados não podem ser obtidos a partir destas equações e proporemos um operador que criará estes estados ao atuar no estado de referência Ω_0 .

- $N = 4$

Iremos analisar os três casos possíveis: $M = 0$, $M = 1$ e $M = 2$. Para $M = 0$, podemos utilizar a

expressão (3.15) para escrever a seguinte equação de Bethe

$$\frac{\left(v_1 + \frac{\eta}{2}\right)^4}{\left(v_1 - \frac{\eta}{2}\right)^4} = -1, \quad (3.17)$$

que apresenta quatro soluções possíveis para a incógnita v_1 : $\left\{i\frac{(\sqrt{2}+1)\eta}{2}, -i\frac{(\sqrt{2}+1)\eta}{2}, i\frac{(\sqrt{2}-1)\eta}{2}, -i\frac{(\sqrt{2}-1)\eta}{2}\right\}$, por tratar-se de um polinômio de quarto grau. Pela diagonalização direta, estas raízes fornecem cinco auto-estados degenerados correspondentes a um quintupletto com energia igual a $\frac{4}{\eta}$.

Já para $M = 1$ podemos escrever a seguinte equação de Bethe

$$\left(\frac{v_1 + \frac{\eta}{2}}{v_1 - \frac{\eta}{2}}\right)^4 = 1, \quad (3.18)$$

que é satisfeita pelo conjunto solução $v_1 = \{0, i\frac{\eta}{2}, -i\frac{\eta}{2}\}$. A quarta solução daquele polinômio de quarto grau seria $v_1 = \infty$, este resultado porém não criará nenhum estado de peso mais alto pois, quando colocado como argumento do operador B , no limite, resultará no operador S_G^- que, conforme já comentamos, não produz os estados de peso mais alto. Este operador global, definido como

$$S_G^- = \sum_{a=1}^N s_a^-, \quad (3.19)$$

é responsável pela obtenção dos auto-estados do hamiltoniano a partir do auto-estado de maior peso.

Com estas raízes da equação (3.18), calculamos os valores possíveis das energias dos auto-estados, usando a equação (3.15), resultando em dois autovalores: 0 e $\frac{2}{\eta}$, que correspondem, respectivamente, a um e dois tripletos.

As equações de Bethe para o caso $M = 2$, o último a ser considerado quando $N = 4$, são

$$\left(\frac{v_1 + \frac{\eta}{2}}{v_1 - \frac{\eta}{2}}\right)^4 = \frac{v_1 - v_2 + \eta}{v_1 - v_2 - \eta}, \quad (3.20a)$$

$$\left(\frac{v_2 + \frac{\eta}{2}}{v_2 - \frac{\eta}{2}}\right)^4 = \frac{v_2 - v_1 + \eta}{v_2 - v_1 - \eta}, \quad (3.20b)$$

que fornecerão mais seis soluções: $v_1 = i\frac{\sqrt{3}\eta}{6}$ e $v_2 = -i\frac{\sqrt{3}\eta}{6}$ que correspondem a um singlete com autovalor $-\frac{2}{\eta}$, enquanto as outras quatro soluções: $i\frac{(\sqrt{2}-1)\eta}{2}$, $i\frac{(\sqrt{2}+1)\eta}{2}$, $-i\frac{(\sqrt{2}-1)\eta}{2}$ e $-i\frac{(\sqrt{2}+1)\eta}{2}$, só satisfazem as equações de Bethe quando $v_1 = v_2$, o que é impossível pelo princípio da exclusão de Pauli pois os operadores de criação $B(v_i)$ com o mesmo argumento criam dois férmions com números quânticos idênticos num mesmo sítio.

Realizando a contabilidade final dos auto-estados encontrados a partir das raízes das equações de Bethe para o modelo de Heisenberg no caso $N = 4$ temos: um quintupletto com energia $\frac{4}{\eta}$ para $M = 0$, três tripletos com energias 0 e $\frac{2}{\eta}$ para $M = 1$ e um singlete com energia $-\frac{2}{\eta}$ para $M = 2$, totalizando assim quinze auto-estados. Verificamos então a ausência de um singlete de autovalor igual a $\frac{2}{\eta}$, que pudemos obter através da diagonalização direta do hamiltoniano utilizando o programa Maple, lembrando que o número de auto-estados do hamiltoniano é igual à dimensão do espaço de Hilbert do modelo físico

considerado, no nosso caso 2^N (seção 2.3), portanto teremos para o caso estudado 16 auto-estados.

Vamos agora estudar o próximo caso em que também não conseguimos obter todos os auto-estados do hamiltoniano a partir das soluções das equações de Bethe.

- $N = 6$

Desta vez analisaremos quatro possibilidades: $M = 0$, $M = 1$, $M = 2$ e $M = 3$. Começando com $M = 0$, temos a seguinte equação de Bethe

$$\left(\frac{v_1 - \frac{\eta}{2}}{v_1 + \frac{\eta}{2}} \right)^6 = -1, \quad (3.21)$$

que corresponde a um polinômio de sexto grau cujas seis soluções

$$v_1 = \left\{ i\frac{\eta}{2}, -i\frac{\eta}{2}, i\frac{(2 - \sqrt{3})\eta}{2}, -i\frac{\eta}{2}(2 - \sqrt{3}), i\frac{\eta}{2}(2 + \sqrt{3}), -i\frac{(2 + \sqrt{3})\eta}{2} \right\},$$

ao serem substituídas na equação (3.15), resultarão no mesmo autovalor $\frac{6}{\eta}$. Este é o valor da energia de sete autovetores degenerados, correspondendo assim a um septupletto.

O que fizemos foi diagonalizar o hamiltoniano do modelo no Maple e comparar com as soluções das equações de Bethe pois, são resultados obtidos através de métodos independentes e assim podemos verificar se é possível encontrar todos os auto-estados do modelo de Heisenberg a partir das raízes das equações de Bethe. Até agora encontramos um autovetor para $M = 0$.

Para $M = 1$, resolvemos a seguinte equação de Bethe

$$\left(\frac{v_1 - \frac{\eta}{2}}{v_1 + \frac{\eta}{2}} \right)^6 = 1, \quad (3.22)$$

que é satisfeita pelo conjunto de cinco raízes $v_1 = \left\{ 0, i\frac{\eta\sqrt{3}}{6}, -i\frac{\sqrt{3}\eta}{6}, i\frac{\eta\sqrt{3}}{2}, -i\frac{\sqrt{3}\eta}{2} \right\}$, o que mostra que este polinômio é de quinto grau e não de sexto como aparenta pelo expoente do primeiro membro. A primeira delas, $v_1 = 0$, substituída na equação (3.15), fornece o autovalor $\frac{2}{\eta}$, que corresponde à energia de sete auto-estados degenerados (dois singletos e um quintupletto). As raízes $\pm i\frac{\sqrt{3}\eta}{6}$ serão responsáveis por dois quintupletos formados por dez auto-estados de energia $\frac{3}{\eta}$ e as raízes $\pm i\frac{\eta\sqrt{3}}{2}$ resultarão, após substituição na equação (3.15), em mais dois quintupletos degenerados com autovalor igual a $\frac{5}{\eta}$. Sendo assim, encontramos mais vinte e sete auto-estados do hamiltoniano do modelo de Heisenberg para o caso $M = 1$, além dos sete obtidos anteriormente para $M = 0$, totalizando, por enquanto, trinta e quatro auto-estados.

Vamos agora estudar a terceira possibilidade, $M = 2$, resolvendo o seguinte sistema de equações de Bethe

$$\left(\frac{v_1 - \frac{\eta}{2}}{v_1 + \frac{\eta}{2}} \right)^6 = \frac{v_1 - v_2 - \eta}{v_1 - v_2 + \eta}, \quad (3.23a)$$

$$\left(\frac{v_2 - \frac{\eta}{2}}{v_2 + \frac{\eta}{2}} \right)^6 = \frac{v_2 - v_1 - \eta}{v_2 - v_1 + \eta}, \quad (3.23b)$$

encontramos os seguintes conjuntos de soluções

$$v_1 = v_2 = \left\{ i\frac{\eta}{10}\sqrt{25-10\sqrt{5}}, -i\frac{\eta}{10}\sqrt{25-10\sqrt{5}}, i\frac{\eta}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}}, -i\frac{\eta}{10}\sqrt{25+10\sqrt{5}} \right\},$$

que são soluções da mesma equação algébrica de segundo grau; temos também as soluções de um polinômio de quarto grau:

$$v_1 = v_2 = \left\{ i\frac{\eta}{8}(\sqrt{11}-\sqrt{3}), -i\frac{\eta}{8}(\sqrt{11}-\sqrt{3}), i\frac{\eta}{8}(\sqrt{11}+\sqrt{3}), -i\frac{\eta}{8}(\sqrt{11}+\sqrt{3}) \right\},$$

e, por último, as soluções de uma mesma equação algébrica de oitavo grau

$$v_1 = v_2 = \left\{ \begin{array}{l} i\frac{\eta}{8}\sqrt{-7+\sqrt{17}+\sqrt{606+174\sqrt{17}}}, i\frac{\eta}{8}\sqrt{7+\sqrt{17}-\sqrt{-606+174\sqrt{17}}}, \\ i\frac{\eta}{8}\sqrt{7+\sqrt{17}+\sqrt{-606+174\sqrt{17}}}, -i\frac{\eta}{8}\sqrt{-7+\sqrt{17}-\sqrt{606+174\sqrt{17}}}, \\ -i\frac{\eta}{8}\sqrt{-7+\sqrt{17}+\sqrt{606+174\sqrt{17}}}, -i\frac{\eta}{8}\sqrt{7+\sqrt{17}-\sqrt{-606+174\sqrt{17}}}, \\ -i\frac{\eta}{8}\sqrt{7+\sqrt{17}+\sqrt{-606+174\sqrt{17}}}, i\frac{\eta}{8}\sqrt{-7+\sqrt{17}-\sqrt{606+174\sqrt{17}}} \end{array} \right\}.$$

Com estes três conjuntos de soluções, encontramos mais cinco autovalores, substituindo pares $\{v_1, v_2\}$ adequados na equação (3.15). Combinando as quatro raízes obtidas para v_1 com as quatro obtidas para v_2 do primeiro conjunto de soluções, encontramos os autovalores $\frac{1\pm\sqrt{5}}{\eta}$, já para o segundo conjunto de soluções das equações de Bethe, descobrimos mais um autovalor: $\frac{1}{\eta}$. E, finalmente, para o terceiro grupo de raízes, obtivemos mais dois autovalores: $\frac{5\pm\sqrt{17}}{2\eta}$. Os dois primeiros autovalores correspondem às energias de um tripleto cada, totalizando seis auto-estados, enquanto os outros três autovalores respondem pelas energias de dois tripletos cada, acrescentando mais dezoito auto-estados. Temos assim, para o caso $M = 2$, vinte e quatro auto-estados que, somados àqueles até agora obtidos, resultam em cinquenta e oito auto-estados para o hamiltoniano de Heisenberg.

Finalmente, a última possibilidade é $M = 3$, cujas soluções serão obtidas a partir do seguinte sistema de equações de Bethe

$$\left(\frac{v_1 - \frac{\eta}{2}}{v_1 + \frac{\eta}{2}} \right)^6 = \frac{(v_1 - v_2 - \eta)(v_1 - v_3 - \eta)}{(v_1 - v_2 + \eta)(v_1 - v_3 + \eta)}, \quad (3.24a)$$

$$\left(\frac{v_2 - \frac{\eta}{2}}{v_2 + \frac{\eta}{2}} \right)^6 = \frac{(v_2 - v_1 - \eta)(v_2 - v_3 - \eta)}{(v_2 - v_1 + \eta)(v_2 - v_3 + \eta)}, \quad (3.24b)$$

$$\left(\frac{v_3 - \frac{\eta}{2}}{v_3 + \frac{\eta}{2}} \right)^6 = \frac{(v_3 - v_1 - \eta)(v_3 - v_2 - \eta)}{(v_3 - v_1 + \eta)(v_3 - v_2 + \eta)}. \quad (3.24c)$$

Resolvendo este sistema de equações acopladas, encontramos mais dois conjuntos de raízes que resultarão em auto-estados do nosso hamiltoniano. O primeiro conjunto de soluções é

$$v_1 = v_3 = \left\{ \frac{\eta}{6}\sqrt{15+6\sqrt{13}}, -\frac{\eta}{6}\sqrt{15+6\sqrt{13}}, \frac{\eta}{6}\sqrt{15-6\sqrt{13}}, -\frac{\eta}{6}\sqrt{15-6\sqrt{13}} \right\}$$

e $v_2 = 0$, sendo que v_1 e v_3 são soluções da mesma equação algébrica de quarto grau; já o segundo conjunto,

em que $v_1 = v_2 = v_3$, por apresentar raízes imensas sem a possibilidade de simplificação, mostrá-las-emos calculadas numericamente até a terceira casa decimal:

$$\{0, 472\eta \, i, -0, 472\eta \, i, (0, 500 + 0, 236i)\eta, (0, 500 - 0, 236i)\eta, -(0, 500 + 0, 236i)\eta, -(0, 500 - 0, 236i)\eta\},$$

na verdade, os conjuntos v_1 e v_3 são compostos por doze raízes que se repetem duas a duas e somente o conjunto v_2 é formado pelas seis raízes apresentadas. Com mais estes dois conjuntos de soluções, obtivemos os seguintes auto-estados para o modelo XXX: a partir do primeiro conjunto, encontramos dois autovalores possíveis: $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{\eta}$, que representam as energias de um singlete cada um e, as raízes do segundo conjunto solução fornecem o autovalor $\frac{2}{\eta}$, que equivale à energia de mais dois singletos e um quintupletto, auto-estados estes que já haviam sido encontrados no caso $M = 1$.

Obtivemos assim mais dois auto-estados, resultando em um total de sessenta autovetores encontrados a partir das soluções das equações de Bethe. Deveríamos ter encontrado sessenta e quatro auto-estados pois esta é a dimensão do espaço de Hilbert para este caso em que temos seis sítios na cadeia de spins de Heisenberg. Estão ausentes os auto-estados correspondentes à um singlete de energia nula e um triplete de energia $\frac{4}{\eta}$.

3.3 Construção dos Autovetores do Hamiltoniano

Neste ponto, com o intuito de compreendermos melhor o conjunto de técnicas utilizadas até o momento no estudo do hamiltoniano $\mathcal{H}_{XXX}$ (eq. (3.4)), vamos mostrar alguns cálculos explícitos para o caso $N = 2$. Esta seção terá o objetivo didático de ilustrar o método do ansatz de Bethe algébrico para esta situação extremamente simples envolvendo dois sítios.

Começaremos mostrando o resultado da diagonalização direta do hamiltoniano do modelo para $N = 2$ realizada no Maple. Encontramos dois autovalores possíveis para os quatro autovetores de $\mathcal{H}_{XXX}^{(N=2)}$ (eq. (3.5)), são eles $-\frac{2}{\eta}$ e $\frac{2}{\eta}$, sendo este último triplamente degenerado. O primeiro autovalor está associado ao autovetor

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

enquanto o segundo autovalor está relacionado ao triplete

$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Conforme estudamos nesta seção e no capítulo anterior (seção 2.3), este caso possui duas equações de Bethe: equação (2.68) para $M = 0$ e equação (2.69) para $M = 1$, cujas soluções para a variável v_1 são $\{-i\frac{\eta}{2}, 0, i\frac{\eta}{2}\}$. Vimos que as raízes complexas conjugadas, quando substituídas na equação (3.15), fornecem a energia do triplete correspondente aos autovetores (3.26) enquanto a raiz nula produz o

autovalor correspondente à energia do singlete (3.25). Portanto, nesta situação, não temos auto-estados ausentes que não podem ser obtidos a partir das equações de Bethe como ocorreu para $N = 4$ e $N = 6$, ou seja, as soluções destas equações formam um conjunto completo.

Olhando inicialmente para o tripleto (3.26), podemos descobrir quem é o estado de maior peso fazendo com que o operador global S_G^+ , análogo ao operador da equação (3.19), e definido por

$$S_G^+ = \sum_{a=1}^N s_a^+, \quad (3.27)$$

atue em todos os vetores de estado do tripleto. Os operadores s_a^z , s_a^+ e s_a^- (eq. (2.5)) são definidos a partir das matrizes que formam a base (eq. (2.2)) e estão escritos explicitamente abaixo

$$s_1^z = s^z \otimes I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad s_2^z = I \otimes s^z = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.28a)$$

$$s_1^+ = s^+ \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2^+ = I \otimes s^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.28b)$$

$$s_1^- = s^- \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2^- = I \otimes s^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.28c)$$

Finalmente, podemos escrever o operador global que atuará nos autovetores do tripleto

$$S_G^+ = s_1^+ + s_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

e, com isso, verificamos que o autovetor $\vec{w}_2$ é cancelado por este operador

$$S_G^+ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

sendo este portanto o auto-estado de maior peso.

Todo o método do ansatz de Bethe algébrico é construído a partir deste auto-estado pois será ele que dará origem aos outros autovetores do multipletto. No caso do tripleto que estamos estudando, vamos

atuar com outro operador global, S_G^- , dado por

$$S_G^- = s_1^- + s_2^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

no autovetor $\vec{w}_2$, como mostrado abaixo

$$S_G^- \vec{w}_2 = \vec{w}_3, \quad S_G^- \vec{w}_3 = 2\vec{w}_4, \quad S_G^- \vec{w}_4 = \vec{0}. \quad (3.30)$$

Estes resultados podem ser interpretados como um problema de momento angular. Para descobrirmos os valores dos spins dos auto-estados, atuamos com o operador global S_G^z , obtido a partir (3.28a),

$$S_G^z = s_1^z + s_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

em cada autovetor, resultando nas equações de autovalor

$$S_G^z \vec{w}_2 = +\vec{w}_2, \quad S_G^z \vec{w}_3 = \vec{0}, \quad S_G^z \vec{w}_4 = -\vec{w}_4,$$

que mostra os valores possíveis para os spins do triplete (+1, 0 e -1), para o caso do triplete de uma cadeia de dois sítios. Sendo assim, podemos representar os auto-estados do nosso hamiltoniano em termos de spins para “cima” ($\uparrow$) e para “baixo” ($\downarrow$), reescrevendo-os como

$$\vec{w}_2 = |\uparrow\uparrow\rangle, \quad \vec{w}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle), \quad \vec{w}_4 = |\downarrow\downarrow\rangle.$$

Desta forma fica fácil perceber que atuar com S_G^z nos autovetores (3.26) equivale a somar os spins de cada sítio, lembrando que em cada sítio eles podem assumir os valores $+\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$. Por sua vez, atuar com S_G^- nos mesmos autovetores (3.26) significa “baixar” um spin em um dos dois sítios, partindo do estado com maior spin (o estado de peso mais alto $\vec{w}_2$) até obtermos o estado de menor spin $\vec{w}_4$ que, por ter todos os seus spins apontando para “baixo”, será anulado quando este operador atingi-lo como vimos na última expressão de (3.30). Isto é análogo a queremos “levantar” um spin do estado de maior peso, conforme observamos na equação (3.29), em que o auto-estado $\vec{w}_2$ foi cancelado pelo operador que “levanta” um spin S_G^+ .

Utilizando este mesmo raciocínio, notamos que o singleto (3.25) é um estado de peso mais alto (pois $S_G^+ \vec{w}_1 = \vec{0}$) em que um dos spins já está apontando para “baixo” e seu spin total é nulo (isto é, $S_G^z \vec{w}_1 = \vec{0}$). Como este é o único auto-estado para $M = 1$, não podemos “baixar” o outro spin logo, $S_G^- \vec{w}_1 = \vec{0}$.

Os estados de Bethe Φ_B da equação (2.21) podem ser obtidos através da substituição das raízes

encontradas no argumento do operador da expressão abaixo

$$B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta u - \frac{\eta^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \eta u + \frac{\eta^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta u - \frac{\eta^2}{2} & \eta u + \frac{\eta^2}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

que é válido para uma cadeia de dois sítios. Lembremos que estes operadores são extraídos da matriz de monodromia (eq. (2.9)), de acordo com o estudo que realizamos na seção 2.1.

Para o tripleto, temos uma situação trivial em que não há operadores $B(u)$ atuando no vácuo Ω_0 pois, partimos deste (autovetor $\vec{w}_2$) para construir os auto-estados que completam o multiplete. Já para o singlete, a solução nula da equação de Bethe fornece o operador $B(0)$ que, ao atuar em Ω_0 , produz um vetor proporcional a $\vec{w}_1$

$$B(0)\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\eta^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\eta^2}{2} & \frac{\eta^2}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\eta^2}{2} \\ \frac{\eta^2}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\eta^2}{2} \vec{w}_1.$$

Para finalizar a seção, vamos apresentar o operador que cria os auto-estados ausentes do hamiltoniano do modelo de Heisenberg. Trata-se do operador bilinear em s_n^- abaixo

$$V^{(N)} = \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^n s_n^- s_{n+1}^- + (-1)^N s_N^- s_1^-,$$

que criará o estado de peso mais alto ao atuar no estado de referência Ω_0 . Em geral, este auto-estado singular satisfaz as seguintes relações

$$\begin{aligned} S_G^z V^{(N)} \Omega_0 &= \frac{(N-4)}{2} V^{(N)} \Omega_0, \\ \mathcal{H}_{XXX} V^{(N)} \Omega_0 &= \frac{(N-2)}{\eta} V^{(N)} \Omega_0, \end{aligned}$$

e, para valores de N par, ele gera sempre o auto-estado de maior peso que dará origem aos outros estados do multiplete, conforme verificamos no Maple até $N = 8$. Já para valores ímpares de N , o operador $V^{(N)}$ cria estados proporcionais ao operador s_1^- atuando no estado de referência Ω_0 . Para $N = 4$, obtemos exatamente o singlete de autovalor $\frac{2}{\eta}$ que não pode ser obtido a partir das raízes das equações de Bethe.

Capítulo 4

Modelo de Heisenberg-Sklyanin

Após estudarmos em detalhes o modelo de Heisenberg na seção anterior, vamos considerar um modelo com uma matriz de borda diagonal e verificar as consequências físicas. Novamente, assim como fizemos para o modelo XXX, utilizaremos o ansatz de Bethe algébrico para diagonalizar o hamiltoniano e compararemos os auto-estados obtidos através deste método com aqueles calculados pelo Maple, tendo como referência o que ocorreu para o modelo de Heisenberg.

4.1 Hamiltoniano e Diagonalização do Modelo

Começaremos realizando todo o procedimento do ansatz de Bethe algébrico (ABA), apresentado no capítulo 2, para este modelo de spin. Introduziremos uma matriz de borda diagonal $\mathcal{G}$ [9] dada por

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

que será utilizada na construção da matriz de monodromia abaixo

$$T_{\mathcal{G}N}(u) = \mathcal{G} \mathcal{L}_N(u) \mathcal{L}_{N-1}(u) \cdots \mathcal{L}_3(u) \mathcal{L}_2(u) \mathcal{L}_1(u), \quad (4.2)$$

que é análoga à expressão (2.8) do modelo de Heisenberg (capítulo 3), multiplicada agora pela matriz $\mathcal{G}$. Na verdade, podemos utilizar qualquer matriz de borda que satisfaça a relação [4]

$$[\mathcal{R}(u), \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}] = 0,$$

em que $\mathcal{R}(u)$ é a matriz auxiliar das equações de Yang-Baxter (eq. (2.14)).

Relembrando da forma matricial de T_N (eq. (2.9)), podemos escrever

$$T_{\mathcal{G}N}(u) = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Tomando o traço da matriz de monodromia (eq. (2.16)), obtemos a matriz de transferência do modelo

que satisfaz a seguinte relação de comutação

$$[\tau(u), \tau(v)] = 0,$$

simetria esta importante que usaremos na diagonalização do hamiltoniano. A título de ilustração, para que possamos ter uma idéia da complexidade da diagonalização do hamiltoniano, apresentamos a matriz $\tau(u)$ para $N = 2$, situação ainda bastante simples do ponto de vista algébrico,

$$\tau(u) = \text{traço}(\mathcal{GL}_2(u)\mathcal{L}_1(u)) = \begin{pmatrix} G_1 \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^2 + G_2 \left(u - \frac{\eta}{2}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (G_1 + G_2) \left(u^2 - \frac{\eta^2}{4}\right) & G_1 \eta^2 & 0 \\ 0 & G_2 \eta^2 & (G_1 + G_2) \left(u^2 - \frac{\eta^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_1 \left(u - \frac{\eta}{2}\right)^2 + G_2 \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Esta matriz é fundamental no nosso método pois, é a partir dela que conseguimos determinar o hamiltoniano de nossos modelos, de acordo com o estudo realizado na seção 2.5. Mostraremos agora como calcular o hamiltoniano de Sklyanin para este caso mais fácil de ser tratado. Precisamos obter a inversa de (4.4), cálculo este realizado no Maple e que resulta numa matriz com entradas complicadas, e substituir o argumento u por $\frac{\eta}{2}$

$$\tau^{-1}(u) \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta^2 G_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta^2 G_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta^2 G_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta^2 G_2} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Necessitamos também da derivada da expressão (4.4) calculada em $u = \frac{\eta}{2}$, mostrada a seguir

$$\frac{\partial}{\partial u} \tau(u) \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} = \begin{pmatrix} 2\eta G_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta(G_1 + G_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta(G_1 + G_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\eta G_2 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

que, ao ser mutiplicada pela inversa de $\tau(u)$ (eq. (4.5)) obtida a pouco, resultará no hamiltoniano para este caso

$$\mathcal{H}_{Sklyanin}^{(N=2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{G_1+G_2}{\eta G_2} & 0 \\ 0 & \frac{G_1+G_2}{\eta G_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\eta} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Repetimos estes cálculos no aplicativo Maple para $N = 3$ e 4 a fim de generalizarmos o hamiltoniano de Sklyanin para N sítios, o resultado é um hamiltoniano muito similar ao do modelo de Heisenberg

$$\mathcal{H}_{Sklyanin} = \frac{N}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^{N-1} (s_n^+ s_{n+1}^- + s_n^- s_{n+1}^+ + 2s_n^z s_{n+1}^z) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{G_2}{G_1} s_N^+ s_1^- + \frac{G_1}{G_2} s_N^- s_1^+ + 2s_N^z s_1^z \right), \quad (4.8)$$

com uma diferença na interação entre o N -ésimo e o primeiro sítios da cadeia de spins, conforme podemos observar no último termo do hamiltoniano acima. A matriz de borda $\mathcal{G}$ (eq. (4.1)) introduz uma anisotropia na interação entre o último e o primeiro sítios que fecha a cadeia de spins, ou seja, passamos a ter condições de contorno periódicas também neste caso. Esta condição de fronteira é chamada na literatura de condição de contorno *twisted* [10]. Este poderoso método idealizado por Baxter nos possibilitou calcular o hamiltoniano $\mathcal{H}_{Sklyanin}$ e nos permitirá calcular os autovalores deste modelo, de acordo com a descrição da seção 2.5 (eq. (2.72)).

Para prosseguirmos com o ABA, vamos obter as relações fundamentais de comutação para os operadores da nova matriz de monodromia que inclui a matriz de borda $\mathcal{G}$. Vamos lembrar a equação de Yang-Baxter (eq. (2.14)), apresentada no capítulo 2

$$\mathcal{R}(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)\mathcal{R}(u-v),$$

que corresponde a dezesseis relações envolvendo os operadores que constituem as entradas da matriz de monodromia (eq. (2.9)). Mesmo com todas as transformações que vimos até agora na matriz de monodromia, na matriz de transferência e, conseqüentemente, no hamiltoniano do modelo, as relações fundamentais de comutação são idênticas às do modelo de Heisenberg (equações (2.23)).

Este fato inusitado à primeira vista ocorre porque as entradas da matriz $\mathcal{G}$ aparecem em combinações dos operadores $A(u)$, $B(u)$, $C(u)$ e $D(u)$ que possuem as mesmas constantes multiplicativas em todos os termos das relações e, por isso, acabam se cancelando como podemos ver em alguns exemplos ilustrativos abaixo

$$\begin{aligned} b(v-u)G_1^2A(u)B(v) &= a(v-u)G_1^2B(v)A(u) + c(u-v)G_1^2B(u)A(v), \\ b(u-v)G_1G_2D(u)B(v) &= a(u-v)G_1G_2B(v)D(u) + c(v-u)G_1G_2B(u)D(v), \end{aligned}$$

em que notamos os fatores constantes que se cancelarão. Apesar disto, teremos autovalores e equações de Bethe distintas pois o traço da matriz de monodromia $T_{\mathcal{G}N}(u)$ (eq. (4.3)) incluirá a constante G_1 no primeiro termo $A(u)$ e a constante G_2 no segundo termo $D(u)$ do traço (eq. (2.16)), afetando assim os autovalores e as equações de Bethe.

Para obter estas alterações, vamos escrever o resultado da atuação dos operadores $A(u)$ e $D(u)$ no estado de Bethe $\Phi_B\{v_i\}$, que é o mesmo resultado obtido no capítulo 3 para o modelo de Heisenberg

$$A(u)\Phi_B\{v_i\} = \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i-u)}{b(v_i-u)} \chi_1(u) \Phi_B\{v_i\} + \sum_{i=1}^M \frac{c(u-v_i)}{b(u-v_i)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j-v_i)}{b(v_j-v_i)} \right) \chi_1(v_i) \Phi_B\{\widehat{v}_i\}, \quad (4.9a)$$

$$D(u)\Phi_B\{v_i\} = \prod_{i=1}^M \frac{a(u-v_i)}{b(u-v_i)} \chi_2(u) \Phi_B\{v_i\} + \sum_{i=1}^M \frac{c(v_i-u)}{b(v_i-u)} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_i-v_j)}{b(v_i-v_j)} \right) \chi_2(v_i) \Phi_B\{\widehat{v}_i\}, \quad (4.9b)$$

em que a , b e c são as entradas da matriz auxiliar $\mathcal{R}$ (eq. (2.11)) usada no nosso modelo, χ_1 e χ_2 são os autovalores de A e D , respectivamente, quando atuam no estado de referência Ω_0 (eq. (2.22)) e os estados

de Bethe são definidos como

$$\Phi_B\{v_i\} = B(v_1)B(v_2)\cdots B(v_{M-1})B(v_M)\Omega_0, \quad (4.10a)$$

$$\Phi_B\{\widehat{v}_i\} = B(v_1)\cdots B(v_{i-1})B(v_{i+1})\cdots B(v_M)\Omega_0, \quad (4.10b)$$

em que notamos, na última expressão, a ausência do operador de criação B calculado no argumento v_i .

A partir destes resultados, podemos obter, inicialmente, a expressão para os autovalores da matriz de transferência, dada pelo traço da matriz de monodromia (eq. (4.3))

$$\begin{aligned} \tau_{\mathcal{G}N}(u)\Phi_B\{v_i\} &= \text{traço}(T_{\mathcal{G}N}(u))\Phi_B\{v_i\} \\ &= (G_1A(u) + G_2D(u))\Phi_B\{v_i\} = \Lambda_{\mathcal{G}N}(u)\Phi_B\{v_i\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

em $\Lambda_{\mathcal{G}N}(u)$ corresponde ao autovalor procurado, sendo obtido tomando-se os primeiros termos de (4.9a) e (4.9b)

$$\Lambda_{\mathcal{G}N}(u) = G_1 \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{b(v_i - u)} \chi_1(u) + G_2 \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{b(u - v_i)} \chi_2(u), \quad (4.12)$$

desde que os últimos termos destas mesmas expressões se anulem, isto é, as equações de Bethe abaixo devem ser satisfeitas

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{a(v_i - v_j)} = -\frac{G_2 \chi_2(v_i)}{G_1 \chi_1(v_i)}. \quad (4.13)$$

Aplicaremos novamente o método de Baxter a fim de encontrarmos os autovalores do modelo de Sklyanin fornecido pelo ABA. Repetiremos passo a passo os cálculos realizados a pouco para a obtenção do hamiltoniano (4.8), com a diferença de que não fixaremos nenhuma variável, assim como fizemos na seção 3.2 para o modelo de Heisenberg.

Iniciamos lembrando alguns resultados úteis obtidos em capítulos anteriores, como a generalização dos autovalores a partir dos autovalores da matriz de transferência (eq. (2.72)) reescrita para o modelo com borda

$$\Lambda_{Sklyanin} = \Lambda_{\mathcal{G}N}^{-1}(u) \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} \frac{\partial}{\partial u} \Lambda_{\mathcal{G}N}(u) \Big|_{u=\frac{\eta}{2}}, \quad (4.14)$$

precisaremos também das amplitudes da matriz $\mathcal{R}$

$$a(u) = u + \eta, \quad b(u) = u, \quad c(u) = \eta, \quad (4.15)$$

e, finalmente, as expressões dos autovalores χ_1 e χ_2 dos operadores $A(u)$ e $D(u)$, respectivamente, com os respectivos pesos de Boltzmann já substituídos

$$\chi_1(u) = (x_1(u))^N = \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^N, \quad (4.16a)$$

$$\chi_2(u) = (x_2(u))^N = \left(u - \frac{\eta}{2}\right)^N. \quad (4.16b)$$

Podemos escrever explicitamente os autovalores $\Lambda_{\mathcal{G}N}(u)$ fazendo as substituições de (4.15) e (4.16) em

(4.12) conforme expressão abaixo

$$\Lambda_{\mathcal{G}N}(u) = G_1 \left(\prod_{i=1}^M \frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} \right) \left(u + \frac{\eta}{2} \right)^N + G_2 \left(\prod_{i=1}^M \frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} \right) \left(u - \frac{\eta}{2} \right)^N, \quad (4.17)$$

que inverteremos e calcularemos em $\frac{\eta}{2}$, de acordo com o primeiro fator da equação (4.14)

$$\Lambda_{\mathcal{G}N}^{-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) = \frac{1}{G_1 \eta^N} \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i - \frac{\eta}{2}}{v_i + \frac{\eta}{2}} \right), \quad (4.18)$$

em que notamos a presença de uma das entradas da matriz de fronteira $\mathcal{G}$ (4.1) aparecendo no denominador. Calculando agora a derivada de $\Lambda_{\mathcal{G}N}(u)$ no mesmo argumento $\frac{\eta}{2}$ temos

$$\frac{d\Lambda_{\mathcal{G}N}}{du} \left(\frac{\eta}{2} \right) = G_1 \eta^N \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i + \frac{\eta}{2}}{v_i - \frac{\eta}{2}} \right) \left(\frac{N}{\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(v_i - \frac{\eta}{2})(v_i + \frac{\eta}{2})} \right), \quad (4.19)$$

que é quase a mesma expressão obtida para o modelo de Heisenberg, à exceção da constante G_1 , que novamente está presente devido à matriz de borda $\mathcal{G}$.

Por último, multiplicaremos estas duas equações ((4.18) e (4.19)), conforme a prescrição de Baxter, observando que ocorre o cancelamento dos produtórios e também dos fatores constantes, resultando numa expressão analítica para a equação (4.14)

$$\Lambda_{Sklyanin} = \frac{N}{\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(v_i - \frac{\eta}{2})(v_i + \frac{\eta}{2})}, \quad (4.20)$$

que, ao compararmos com os autovalores do modelo de Heisenberg (eq. (3.15)) calculados no capítulo 3, vemos surpreendentemente que, graças ao cancelamento da constante G_1 , ambas as expressões são idênticas. Usaremos esta expressão de $\Lambda_{Sklyanin}$ para encontrarmos os autovalores deste modelo através do ABA, assim como fizemos para o modelo de Heisenberg.

Já possuímos diversos resultados para o modelo estudado neste capítulo, de tal maneira que podemos prosseguir com a pesquisa realizando a diagonalização do hamiltoniano (4.8), seguindo o mesmo roteiro que utilizamos para encontrar os auto-estados do modelo de Heisenberg no capítulo anterior (seção 3.2). Faremos os cálculos em detalhes para $N = 2$ (eq. (4.7)), caso em que conseguimos tratar algebricamente os resultados das duas situações possíveis: $M = 0$ e $M = 1$.

Começaremos mostrando os três autovalores do hamiltoniano de Sklyanin para dois sítios calculados diretamente pelo aplicativo Maple: $\frac{2}{\eta}$, $\frac{G_1+G_2}{\eta\sqrt{G_1G_2}}$ e $-\frac{G_1+G_2}{\eta\sqrt{G_1G_2}}$, em que o primeiro autovalor corresponde à energia de dois estados degenerados. Resolveremos as equações de Bethe (eq. (4.13)) e substituiremos suas soluções na expressão dos autovalores (eq. (4.20)) com o intuito de encontrarmos estes auto-estados do modelo.

Iniciando com $M = 0$, temos a seguinte equação de Bethe

$$\frac{G_2 \left(v_1 - \frac{\eta}{2} \right)^2}{G_1 \left(v_1 + \frac{\eta}{2} \right)^2} = -1, \quad (4.21)$$

cujas soluções para a incógnita v_1 são

$$v_1 = \left\{ \frac{(G_2 - G_1 + 2\sqrt{G_1 G_2}i)}{2(G_1 + G_2)}\eta, \frac{(G_2 - G_1 - 2\sqrt{G_1 G_2}i)}{2(G_1 + G_2)}\eta \right\},$$

mostrando que a equação (4.21) é um polinômio de segundo grau. Ao substituirmos $N = 2$ e $M = 0$ na equação (4.20), descobrimos que os autovalores para este caso independem do valor de v_1 , pois $\Lambda_{Sklyanin}^{(2,0)} = \frac{2}{\eta}$, que vem a ser a energia daqueles dois estados degenerados que obtivemos.

Prosseguindo agora com a segunda possibilidade, que corresponde a $M = 1$, temos a seguinte equação de Bethe a ser resolvida

$$\frac{G_2 \left(v_1 - \frac{\eta}{2}\right)^2}{G_1 \left(v_1 + \frac{\eta}{2}\right)^2} = 1, \quad (4.22)$$

que fornecerá como conjunto solução para a variável v_1 as raízes de outro polinômio do segundo grau

$$v_1 = \left\{ \frac{(G_1 + G_2 - 2\sqrt{G_1 G_2})}{2(G_2 - G_1)}\eta, \frac{(G_1 + G_2 + 2\sqrt{G_1 G_2})}{2(G_2 - G_1)}\eta \right\},$$

que, ao serem substituídas na equação dos autovalores adequada ao caso abaixo

$$\Lambda_{Sklyanin}^{(2,1)} = \frac{2}{\eta} + \frac{\eta}{\left(v_1 - \frac{\eta}{2}\right)\left(v_1 + \frac{\eta}{2}\right)},$$

nos leva a encontrar autovalores não existentes naquele conjunto de três energias de possíveis para os auto-estados, o que mostra novamente a ausência de alguns auto-estados do hamiltoniano como ocorreu com o modelo de Heisenberg. Para este modelo com matriz de fronteira também não conseguimos encontrar todos os auto-estados porque o modelo de Heisenberg pode ser pensado como um caso particular do modelo de Sklyanin em que a matriz de borda é a identidade. Portanto, esperávamos não encontrar o conjunto completo de auto-estados para este caso mais geral, com matriz de fronteira, assim como não encontramos para o agora caso particular do modelo de Heisenberg.

Como consideração final para mostrar a relação entre os modelos de Heisenberg e Sklyanin, vale notar que, ao tomarmos o limite em que a matriz $\mathcal{G}$ (4.1) tende à identidade para as duas energias não encontradas, recuperamos dois autovalores já conhecidos do modelo de Heisenberg para $N = 2$

$$\lim_{G_1, G_2 \rightarrow 1} \frac{G_1 + G_2}{\eta\sqrt{G_1 G_2}} = \frac{2}{\eta} \quad \text{e} \quad \lim_{G_1, G_2 \rightarrow 1} -\frac{G_1 + G_2}{\eta\sqrt{G_1 G_2}} = -\frac{2}{\eta},$$

que correspondem às energias de um tripleto e de um singleto, respectivamente, que obtivemos quando diagonalizamos o hamiltoniano de Heisenberg usando o ABA (seções 2.4 e 3.3), ou seja, podemos voltar ao modelo estudado no capítulo anterior sempre que transformarmos a matriz de borda na matriz identidade.

Até agora estudamos o caso homogêneo tanto do modelo de Heisenberg (cap. 3) quanto do modelo de Sklyanin, que são situações mais simples de serem tratadas algebricamente e, por esta razão, apresentam menor complexidade do ponto de vista físico.

4.2 Caso Não-Homogêneo

Na construção da matriz auxiliar $\mathcal{R}$ (eq. (2.11)) apresentada no capítulo 2, pudemos notar que restringimos a seis entradas não nulas nesta matriz porque precisávamos satisfazer as regras do modelo de 6-vértices (seções 1.2 e 1.3). Por sua vez, podemos realizar uma translação nas amplitudes por um parâmetro z_a , cujo significado será compreendido posteriormente, mantendo-se inalterada a matriz $\mathcal{R}(u - v)$, que continuará satisfazendo a equação de Yang-Baxter (eq. (2.13)), desde que façamos a mesma translação no operador de Lax. Após a translação na variável u do operador da equação (2.70), podemos multiplicá-lo por $\frac{1}{u - z_a}$, pois esta operação equivale a uma mudança na normalização de $\mathcal{L}(u)$

$$\mathcal{L}_a(u, \eta) = \begin{pmatrix} I_a + \frac{\eta}{u - z_a} s_a^z & \frac{\eta}{u - z_a} s_a^- \\ \frac{\eta}{u - z_a} s_a^+ & I_a - \frac{\eta}{u - z_a} s_a^z \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

em que todos os termos que aparecem já foram definidos no capítulo 2, com exceção do parâmetro arbitrário z_a .

Se realizarmos os mesmos cálculos do capítulo 2 (seção 2.3), partindo das novas relações de comutação, obteremos os autovalores e as equações de Bethe para a matriz de transferência $\tau(u)$, porém, é muito mais simples generalizarmos os resultados que encontramos para o caso homogêneo. Partindo da expressão dos autovalores (eq. (3.11)) e realizando a translação temos

$$\Lambda(u) = \prod_{i=1}^M \left(\frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} \right) \prod_{a=1}^N \left(1 + \frac{\eta}{2(u - z_a)} \right) + \prod_{i=1}^M \left(\frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} \right) \prod_{a=1}^N \left(1 - \frac{\eta}{2(u - z_a)} \right), \quad (4.24)$$

que é a nova expressão para os autovalores da matriz $\tau(u)$ não-homogênea. O mesmo procedimento para a equação (2.67) fornecerá as equações de Bethe para o caso não-homogêneo

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j - \eta} = \prod_{a=1}^N \frac{v_i - z_a + \frac{\eta}{2}}{v_i - z_a - \frac{\eta}{2}}. \quad (4.25)$$

Para o modelo que estamos estudando neste capítulo também podemos generalizar os resultados obtidos na seção anterior. Então, teremos para o caso não-homogêneo com matriz de borda a seguinte expressão para os autovalores da matriz $\tau_{\mathcal{G}N}(u)$

$$\Lambda_{\mathcal{G}}(u) = G_1 \prod_{i=1}^M \left(\frac{u - v_i - \eta}{u - v_i} \right) \prod_{a=1}^N \left(1 + \frac{\eta}{2(u - z_a)} \right) + G_2 \prod_{i=1}^M \left(\frac{u - v_i + \eta}{u - v_i} \right) \prod_{a=1}^N \left(1 - \frac{\eta}{2(u - z_a)} \right), \quad (4.26)$$

que é válida desde que as equações de Bethe não-homogêneas sejam satisfeitas

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{v_i - v_j + \eta}{v_i - v_j - \eta} = \frac{G_2}{G_1} \prod_{a=1}^N \frac{v_i - z_a + \frac{\eta}{2}}{v_i - z_a - \frac{\eta}{2}}. \quad (4.27)$$

4.2.1 Relação com Aproximação BCS e Modelo de Richardson-Gaudin

Para o caso não homogêneo sem borda, podemos extrair dos resultados desta seção mais informações a respeito destes modelos. A primeira coisa que mencionaremos é a expansão da matriz de transferência $\tau(u)$ em potências da variável η , que é um parâmetro complexo tanto da matriz $\mathcal{R}$ quanto do operador de Lax, conforme estudamos no capítulo 2. Realizando a expansão temos

$$\tau(u) = \tau^{(0)}(u) + \eta \tau^{(1)}(u) + \eta^2 \tau^{(2)}(u) + \mathcal{O}(\eta^3), \quad (4.28)$$

em que os termos de segunda ordem possuirão a seguinte propriedade

$$\left[\tau^{(2)}(u), \tau^{(2)}(v) \right] = 0,$$

desde que os termos de ordem zero e de primeira ordem comutem com o termo de segunda ordem.

Este termo de segunda ordem é importante pois ele dará origem às “cargas” de Gaudin [11], permitindo-nos relacionar dois modelos distintos: o modelo de Heisenberg não-homogêneo e o modelo de Gaudin. No nosso caso, temos a seguinte expressão para o termo $\tau^{(2)}(u)$

$$\tau^{(2)}(u) = 2 + \sum_{a=1}^N \frac{G_a}{u - z_a}, \quad (4.29)$$

em que G_a são as “cargas” de Gaudin, dadas por

$$G_a = \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \frac{1}{z_a - z_b} (2s_a^z s_b^z + s_a^+ s_b^- + s_a^- s_b^+), \quad (4.30)$$

também conhecidas por hamiltonianos de Gaudin. Estes operadores satisfazem mais uma propriedade

$$\sum_{a=1}^N G_a = 0.$$

Partindo deste termo de segunda ordem, podemos obter um conjunto de N operadores que comutam entre si tomando-se o resíduo de $\tau^{(2)}(u)$ [12]

$$H_a = \text{resíduo}(\tau^{(2)}(u))|_{u=z_a},$$

em que a varia de 1 até N .

Vamos agora tratar do caso com borda e, para isso, precisaremos escrever as entradas da matriz de borda $\mathcal{G}$ (eq. (4.1)) como função de η para depois expandirmos nossa matriz $\tau(u)$. Usaremos as seguintes expressões para G_1 e G_2

$$G_1 = 1 + \frac{\alpha}{2}\eta, \quad G_2 = 1 - \frac{\alpha}{2}\eta, \quad (4.31)$$

em que α é outro parâmetro relacionado com uma constante de acoplamento, conforme veremos em breve. Incorporadas à matriz de monodromia $T\mathcal{G}_N(u)$ (eq. (4.3)), faremos a expansão de $\tau(u)$ em potências de η ,

exatamente como fizemos para o caso anterior sem borda, obtendo os seguintes termos de segunda ordem

$$\tau_G^{(2)}(u) = 2 + \sum_{a=1}^N \frac{H_a}{u - z_a}, \quad (4.32)$$

em que novas “cargas” são encontradas, com uma forma bem similar àquela das cargas de Gaudin (eq. (4.30))

$$H_a = \alpha s_a^z + \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \frac{1}{z_a - z_b} (2s_a^z s_b^z + s_a^+ s_b^- + s_a^- s_b^+), \quad (4.33)$$

em que notamos a presença da constante α e, por conveniência, dividiremos por esta mesma, encontrando assim as chamadas de cargas de Cambiaggio, Rivas e Saraceno (CRS) [14]

$$H_a = s_a^z + g \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \frac{1}{z_a - z_b} (2s_a^z s_b^z + s_a^+ s_b^- + s_a^- s_b^+), \quad (4.34)$$

em que g corresponde a uma constante de acoplamento e vale $\frac{1}{\alpha}$.

Precisaremos também encontrar as expressões para os autovalores e para as equações de Bethe no caso não-homogêneo com borda. Faremos novamente expansões em potências da variável η que exigem algumas manipulações algébricas trabalhosas. Começamos pelos autovalores, usaremos a equação que nos permite calcular os autovalores $\Lambda_G(u)$ do modelo de Sklyanin não-homogêneo com matriz de borda (eq. (4.26)) que, após a substituição de (4.31), pode ser expandida em η resultando em

$$\Lambda_G^{NH}(u) = 2 + \eta^2 \left[\sum_{a=1}^N \frac{\left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \frac{1}{z_a - z_b} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{u - v_j} + \frac{\alpha}{2} \right)}{u - z_a} + \left(\sum_{j=1}^M \frac{1}{u - v_j} \right)^2 - \sum_{j=1}^M \frac{1}{(u - v_j)^2} - \alpha \sum_{j=1}^M \frac{1}{u - v_j} \right],$$

em que editamos de maneira a ficar evidente o numerador no primeiro dos somatórios, isto porque vamos calcular o resíduo da expressão acima em $u = z_a$, chegando então nos autovalores das cargas H_a

$$h_a = \frac{1}{2} \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^N \frac{1}{z_a - z_b} - \sum_{j=1}^M \frac{1}{z_a - v_j} + \frac{\alpha}{2}. \quad (4.35)$$

Agora vamos obter a expansão em η das equações de Bethe para o caso não-homogêneo com borda (eq. (4.27)) que, novamente através de bastante álgebra, chegamos em

$$\frac{1}{g} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{2}{v_i - v_j} + \sum_{a=1}^N \frac{1}{v_i - z_a} = 0, \quad (4.36)$$

que correspondem às equações de Richardson-Gaudin. Relembrando as entradas da matriz de monodromia (eq. (4.3)), sabemos que o operador $B(u)$ que aparece nela é o operador de criação dos estados de Bethe (seções 2.3 e 3.3), portanto, é importante realizarmos a expansão dele em termos do parâmetro η

$$B_R(u) = \sum_{a=1}^N \frac{s_a^-}{u - z_a}, \quad (4.37)$$

que vem a ser o operador que cria os estados no modelo de Richardson, sendo por isso chamados de operadores de Richardson.

A fim de mostrarmos a relação entre este modelo não-homogêneo com modificações de borda e a aproximação BCS, conforme fizeram Poghossian e von Delft [10, 13], vamos combinar linearmente as cargas CRS (eq. (4.34)), em que os coeficientes serão dados pelo parâmetro z_a , até obtermos

$$\mathcal{H} = -\sum_{a=1}^N z_a H_a = -\sum_{a=1}^N z_a s_a^z - g \left[\left(\frac{N}{2} - M \right)^2 - \frac{N}{4} - M + \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N s_a^- s_b^+ \right]. \quad (4.38)$$

De maneira análoga, fazemos agora a combinação dos autovalores de H_a (eq. (4.35)), resultando na expressão

$$h = -\sum_{a=1}^N z_a h_a = -g \left[\left(\frac{N}{2} - M \right)^2 - \frac{N}{4} - M \right] + \sum_{i=1}^M v_i - \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N z_a. \quad (4.39)$$

Sabendo que estes resultados devem satisfazer uma equação de autovalores, isto nos permitirá agrupar convenientemente os termos, cancelando termos constantes comuns para chegarmos na expressão

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_{a=1}^N z_a \left(\frac{1}{2} - s_a^z \right) - g \sum_{a=1}^N \sum_{b=1}^N s_a^- s_b^+, \quad (4.40)$$

que é o hamiltoniano BCS escrito em termos de pseudo-spins introduzidos pela primeira vez por Anderson [15]. Já os autovalores deste hamiltoniano corresponde ao termo restante de (4.38), ou seja,

$$h_{BCS} = \sum_{i=1}^M v_i, \quad (4.41)$$

em que as incógnitas v_i são as soluções das equações de Bethe do ABA (eq. (2.67)), isto é, podemos realizar a diagonalização do modelo BCS [10] utilizando-se o método apresentado no capítulo 2.

É possível reescrever este hamiltoniano BCS em termos de operadores fermiônicos canônicos $c_{a,+}$ e $c_{a,-}$, que representam estados reversos no tempo, e possuem as seguintes relações com os operadores de spin que estudamos até o momento

$$s_a^z = \frac{1}{2} \left(1 - c_{a+}^\dagger c_{a+} - c_{a-}^\dagger c_{a-} \right), \quad s_a^+ = c_{a-} c_{a+}, \quad s_a^- = c_{a+}^\dagger c_{a-}^\dagger, \quad (4.42)$$

que resultam na seguinte forma para o hamiltoniano

$$\mathcal{H}_{BCS} = \sum_{a,\sigma=(+,-)} \varepsilon_a c_{a\sigma}^\dagger c_{a\sigma} - g \sum_{a,b} c_{a+}^\dagger c_{a-}^\dagger c_{b-} c_{b+}, \quad (4.43)$$

em que $\varepsilon_a = \frac{z_a}{2}$ corresponde a uma escala de energia, portanto, podemos agora interpretar o parâmetro de translação nas variáveis u e v como sendo equivalente à energia. Acabamos de ver que as variáveis v_i fornecem os autovalores do hamiltoniano BCS, sendo assim também interpretadas como parâmetros de energia.

Capítulo 5

Modelo de Heisenberg-Cherednik

Nos últimos dois capítulos estudamos modelos de spins que possuíam (Sklyanin) ou não (Heisenberg) condições de borda e vimos as consequências deste fato para a diagonalização dos modelos. Neste capítulo, veremos um outro tipo de modelo de spins com interações entre os sítios que alternam a intensidade a medida em que percorremos a cadeia unidimensional com condições de contorno periódica, sendo estas as mesmas condições impostas nos modelos anteriormente apresentados.

5.1 Hamiltoniano do Modelo

Vamos novamente utilizar o procedimento de Baxter para encontrar uma expressão geral para o hamiltoniano deste terceiro modelo. Iniciamos mencionando que utilizaremos o mesmo operador de Lax definido para o modelo de 6-vértices (eq. (1.13)), porém, modificaremos os pesos de Boltzmann usuais por

$$x_1(u) = u + \frac{\eta}{2}, \quad x_2(u) = \left(u - \frac{\eta}{2}\right) G, \quad \bar{x}_2(u) = \frac{\left(u - \frac{\eta}{2}\right)}{G}, \quad x_3(u) = \eta, \quad (5.1)$$

em que nota-se a introdução de uma constante G , que veremos em breve tratar-se de uma constante de acoplamento entre os sítios. Podemos então montar o nosso operador de Lax como segue

$$\mathcal{L}(u) = \begin{pmatrix} x_1(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2(u) & x_3(u) & 0 \\ 0 & x_3(u) & \bar{x}_2(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_1(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{\eta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(u - \frac{\eta}{2}\right) G & \eta & 0 \\ 0 & \eta & \frac{\left(u - \frac{\eta}{2}\right)}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + \frac{\eta}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Como estamos procurando a expressão do hamiltoniano, precisaremos do operador de Lax escrito em termos de um sítio arbitrário a , logo, vamos reescrever (5.2) da seguinte maneira

$$\mathcal{L}_a(u) = \begin{pmatrix} \left(u + \frac{\eta}{2}\right) \left(\frac{1}{2}I_a + s_a^z\right) + \left(u - \frac{\eta}{2}\right) \left(\frac{1}{2}I_a - s_a^z\right) G & \eta s_a^- \\ \eta s_a^+ & \left(u + \frac{\eta}{2}\right) \left(\frac{1}{2}I_a - s_a^z\right) + \frac{\left(u - \frac{\eta}{2}\right)}{G} \left(\frac{1}{2}I_a + s_a^z\right) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

que será o operador que usaremos na construção da matriz de monodromia. Utilizando a equação (2.8)

para $T_N(u)$, faremos os cálculos detalhadamente para $N = 2$, começando pela matriz de monodromia

$$T_2(u) = \mathcal{L}_2(u)\mathcal{L}_1(u), \quad (5.4)$$

em $\mathcal{L}_1(u)$ e $\mathcal{L}_2(u)$ são os operadores de Lax calculados nos sítios 1 e 2 respectivamente. O traço deste operador é dado por

$$\begin{aligned} \tau(u) &= \text{traço}(\mathcal{L}_2(u)\mathcal{L}_1(u)) = \\ &= \begin{pmatrix} \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^2 + \frac{\left(u - \frac{\eta}{2}\right)^2}{G^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(G + \frac{1}{G}\right)\left(u^2 - \frac{\eta^2}{4}\right) & \eta^2 & 0 \\ 0 & \eta^2 & \left(G + \frac{1}{G}\right)\left(u^2 - \frac{\eta^2}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(u + \frac{\eta}{2}\right)^2 + G\left(u - \frac{\eta}{2}\right)^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

que vem a ser a matriz de transferência para $N = 2$. Conforme o que estudamos na seção 2.5, vamos obter a inversa da matriz $\tau(u)$ calculada em $\frac{\eta}{2}$

$$\tau^{-1}(u)\Big|_{u=\frac{\eta}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\eta^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\eta^2} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

e, por último, calculamos a derivada da matriz $\tau(u)$ no mesmo argumento da inversa, obtendo

$$\frac{\partial}{\partial u}\tau(u)\Big|_{u=\frac{\eta}{2}} = \begin{pmatrix} 2\eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta\left(G + \frac{1}{G}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta\left(G + \frac{1}{G}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\eta \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Finalmente, podemos encontrar o hamiltoniano de Cherednik multiplicando os dois últimos resultados (equações (5.6) e (5.7))

$$\mathcal{H}_{Cherednik}^{(N=2)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\eta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\eta}\left(G + \frac{1}{G}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta}\left(G + \frac{1}{G}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{\eta} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Como sempre fazemos, realizamos este mesmo procedimento para outros valores de N a fim de encontrarmos o hamiltoniano geral do modelo, resultado este que segue abaixo

$$\mathcal{H}_{Cherednik} = \frac{N}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{s_n^+ s_{n+1}^-}{G} + G s_n^- s_{n+1}^+ + 2s_n^z s_{n+1}^z \right) + \frac{1}{\eta} \left(\frac{s_N^+ s_1^-}{G} + G s_N^- s_1^+ + 2s_N^z s_1^z \right), \quad (5.9)$$

em que percebemos a alternância dos fatores G e $\frac{1}{G}$ nos termos do hamiltoniano. Justamente esta característica é que dará ao modelo a sua particularidade que vem a ser a mudança da interação entre

vizinhos próximos quando passamos de um par de sítios para o seguinte, alternando a intensidade do acoplamento entre forte e fraco periodicamente ao longo da cadeia. Veremos na próxima seção que consequências isto acarretará na diagonalização do hamiltoniano (5.9).

5.2 Diagonalização do Hamiltoniano

Realizaremos a partir de agora os cálculos que nos levarão às relações fundamentais de comutação (RFC) por meio da equação de Yang-Baxter para o modelo estudado. Introduziremos de início a matriz auxiliar $\mathcal{R}$ com a alteração, em relação à mesma matriz para o modelo XXX (2.11), que proporcionará a alternância nos acoplamentos, assim como fizemos para o operador de Lax (eq. (5.3)) a pouco, como observamos abaixo

$$\mathcal{R}(u) = \begin{pmatrix} a(u) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(u) & c(u) & 0 \\ 0 & c(u) & \bar{b}(u) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \eta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & uG & \eta & 0 \\ 0 & \eta & \frac{u}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u + \eta \end{pmatrix}, \quad (5.10)$$

em que vemos, na verdade, que a mudança será nas amplitudes $b(u)$ e $\bar{b}(u)$, que incluem a constante de interação G . Isto acarretará em modificações nos resultados que obteremos daqui por diante.

Esta mudança na matriz $\mathcal{R}$ é necessária para que a equação de Yang-Baxter (2.14) seja satisfeita e encontremos as 16 relações de comutação, sendo que as duas relações que mais usamos na diagonalização de nossos modelos são

$$A(u)B(v) = \frac{a(v-u)}{\bar{b}(v-u)}B(v)A(u) + \frac{c(u-v)}{\bar{b}(u-v)}B(u)A(v), \quad (5.11a)$$

$$D(u)B(v) = \frac{a(u-v)}{\bar{b}(u-v)}B(v)D(u) + \frac{c(v-u)}{\bar{b}(v-u)}B(u)D(v), \quad (5.11b)$$

em que notamos que a única diferença destas relações comparadas com aquelas do modelo de Heisenberg ou Sklyanin (equações (2.23)) está nos denominadores dos segundos membros, pois aparece a nova amplitude $\bar{b}(u) = \frac{u}{G}$. As RFCs nulas (equações (2.18)) continuam válidas e úteis, pois, é nelas que está a comutatividade dos operadores $B(u)$.

Esta mudança nas amplitudes tanto da matriz $\mathcal{R}$ quanto do operador de Lax significará que teremos novos autovalores e autovetores para o nosso hamiltoniano. De fato, ao comutarmos os operadores $A(u)$ e $D(u)$ através de todos os operadores de criação $B(u)$ do estado de Bethe Φ_B , verificaremos nos produtórios de ambos os termos dos segundos membros das mesmas expressões do capítulo anterior (equações (4.9)), o aparecimento da amplitude $\bar{b}(u)$ nos denominadores, logo, ao tomarmos o traço da matriz de monodromia (eq. (4.3)), encontramos os autovalores da matriz de transferência

$$\Lambda_{Ch}(u) = \prod_{i=1}^M \frac{a(v_i - u)}{\bar{b}(v_i - u)} \chi_1(u) + \prod_{i=1}^M \frac{a(u - v_i)}{\bar{b}(u - v_i)} \chi_2(u), \quad (5.12)$$

que existirão somente se as equações de Bethe abaixo forem satisfeitas

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \frac{a(v_j - v_i)}{a(v_i - v_j)} = -\frac{\chi_2(v_i)}{\chi_1(v_i)}. \quad (5.13)$$

Vamos partir agora para o cálculo dos autovalores do hamiltoniano (5.9) usando a mesma técnica da derivada logarítmica, exatamente como fizemos com os modelos anteriores. De início, escreveremos explicitamente os autovalores Λ_{Ch} substituindo as amplitudes e os autovalores dos operadores A e D , sendo que o deste último sofreu alteração devido à mudança no peso de Boltzmann $\bar{x}_2(u)$, ficando igual a $\chi_2(u) = \left(u - \frac{\eta}{2}\right)^N / G^N$, temos

$$\Lambda_{Ch}(u) = \left(\prod_{i=1}^M \frac{(u - v_i - \eta) G}{u - v_i} \right) \left(u + \frac{\eta}{2} \right)^N + \frac{1}{G^N} \left(\prod_{i=1}^M \frac{(u - v_i + \eta) G}{u - v_i} \right) \left(u - \frac{\eta}{2} \right)^N, \quad (5.14)$$

que será invertida e derivada, de acordo com a equação (2.72) apresentada no capítulo 2. Primeiro a inversa calculada em $\frac{\eta}{2}$

$$\Lambda_{Ch}^{-1} \left(\frac{\eta}{2} \right) = \frac{1}{\eta^N G^M} \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i - \frac{\eta}{2}}{v_i + \frac{\eta}{2}} \right), \quad (5.15)$$

em que surge a constante G de interação. Derivando Λ_{Ch} em relação à variável u no mesmo argumento da inversa temos

$$\frac{d\Lambda_{Ch}}{du} \left(\frac{\eta}{2} \right) = \eta^N G^M \left(\prod_{i=1}^M \frac{v_i + \frac{\eta}{2}}{v_i - \frac{\eta}{2}} \right) \left(\frac{N}{\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(v_i - \frac{\eta}{2})(v_i + \frac{\eta}{2})} \right), \quad (5.16)$$

bastando agora multiplicar ambos os resultados (5.15) e (5.16) para obtermos a expressão que temos encontrado para todos os modelos, sem as constantes características de cada caso

$$\Lambda_{Cherednik} = \frac{N}{\eta} + \sum_{i=1}^M \frac{\eta}{(v_i - \frac{\eta}{2})(v_i + \frac{\eta}{2})}, \quad (5.17)$$

em que podemos perceber, pela terceira vez, que as constantes dos modelos aparecerão nos autovalores somente quando resolvermos as equações de Bethe e descobirmos as incógnitas v_i , substituindo-as posteriormente na expressão de Λ .

E é justamente isto que faremos então, ilustrando os cálculos para uma situação simples de dois sítios, como de praxe. A diagonalização do hamiltoniano (5.8) realizada no Maple forneceu três autovalores: $\frac{2}{\eta}$, $\frac{G^2+1}{\eta G}$ e $-\frac{G^2+1}{\eta G}$, sendo o primeiro deles equivalente a dois auto-estados degenerados. Precisamos encontrar este mesmo conjunto de energias dos auto-estados do modelo de Cherednik para $N = 2$ ao resolvermos as equações de Bethe (5.13), cuja forma explícita para o primeiro caso ($M = 0$) mostramos a seguir

$$\frac{\left(v_1 - \frac{\eta}{2}\right)^2}{\left(v_1 + \frac{\eta}{2}\right)^2} = -G^2, \quad (5.18)$$

e que possui o seguinte conjunto solução para a única incógnita v_1

$$v_1 = \left\{ \frac{(1 - G^2 + 2Gi)}{2(G^2 + 1)}\eta, \frac{(1 - G^2 - 2Gi)}{2(G^2 + 1)}\eta \right\},$$

que são duas raízes complexas conjugadas, soluções de um polinômio quadrático. Este conjunto é responsável pelo autovalor degenerado $\frac{2}{\eta}$, pois a expressão dos autovalores (5.17) independe da incógnita v_1 .

O próximo caso a ser analisado é $M = 1$, para o qual temos a equação de Bethe abaixo

$$\frac{(v_1 - \frac{\eta}{2})^2}{(v_1 + \frac{\eta}{2})^2} = G^2, \quad (5.19)$$

que, ao ser resolvida, produz as soluções

$$v_1 = \left\{ \frac{(1 + G)}{2(1 - G)}\eta, \frac{(1 - G)}{2(1 + G)}\eta \right\},$$

que também são soluções de uma equação de grau 2 e, ao serem substituídas em

$$\Lambda_{Cherednik}^{(2,1)} = \frac{2}{\eta} + \frac{\eta}{(v_1 - \frac{\eta}{2})(v_1 + \frac{\eta}{2})},$$

forneem exatamente os outros dois autovalores correspondentes aos singletos calculados pelo Maple

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(1 + G)}{2(1 - G)}\eta \implies \Lambda_{Cherednik}^{(2,1)} = \frac{G^2 + 1}{\eta G}, \\ v_1 &= \frac{(1 - G)}{2(1 + G)}\eta \implies \Lambda_{Cherednik}^{(2,1)} = -\frac{G^2 + 1}{\eta G}, \end{aligned}$$

garantindo assim a completeza dos auto-estados do hamiltoniano obtidos pelo ABA. Portanto, para este modelo estudado, conseguimos encontrar todos os autovalores do hamiltoniano (5.8) através das equações de Bethe, diferentemente do que ocorreu tanto para o modelo de Heisenberg quanto para o de Sklyanin em que havia auto-estados ausentes que não conseguimos achar utilizando o ansatz de Bethe algébrico. Verificamos que não há ausências para valores maiores do número de sítios N .

Para finalizar, um comentário a respeito do limite para $G \rightarrow 1$, situação em que retornaremos ao modelo de Heisenberg com seus auto-estados de singlete e tripleto, conforme mostrado abaixo

$$\lim_{G \rightarrow 1} \frac{G^2 + 1}{\eta G} = \frac{2}{\eta} \text{ (triplete)} \quad \text{e} \quad \lim_{G \rightarrow 1} -\frac{G^2 + 1}{\eta G} = -\frac{2}{\eta} \text{ (singlete)}.$$

Capítulo 6

Conclusões

Nesta dissertação de mestrado apresentamos o Ansatz de Bethe Algébrico (ABA), técnica utilizada na obtenção dos auto-estados dos hamiltonianos de inúmeros modelos da Mecânica Estatística e da Teoria Quântica de Campos. Este método, desenvolvido por Faddeev e colaboradores na década de 1970, permite que calculemos os autovalores e construamos os autovetores de um hamiltoniano a partir de um conjunto de relações de comutação. Estas relações são obtidas a partir da equação de Yang-Baxter para as matrizes de monodromia e auxiliar de cada modelo. Aplicamos este procedimento na diagonalização de três modelos de spins: o modelo de Heisenberg (também conhecido como modelo XXX de spin $\frac{1}{2}$), o modelo de Heisenberg-Sklyanin e o modelo de Heisenberg-Cherednik.

O primeiro modelo apresenta a mesma constante de acoplamento para as três componentes do spin e , ao ser diagonalizado, mostra a impossibilidade de encontrarmos todos os seus auto-estados através do método do ABA. Para os casos estudados com número de sítios diferentes, notamos que ocorre uma ausência sistemática de um conjunto de auto-estados, com exceção da cadeia de dois sítios em que é possível obter todo o espectro do hamiltoniano. Estes auto-estados ausentes são criados por um operador bilinear em s^- ao atuar no estado de Bethe correspondente. Durante o procedimento de diagonalização, encontramos uma série de identidades envolvendo as amplitudes da matriz auxiliar que são necessárias para a simplificação de nossas expressões. Essas identidades, que são inéditas na literatura, foram generalizadas para uma cadeia de spins com um número arbitrário de sítios.

No segundo modelo estudado, o de Heisenberg-Sklyanin, introduzimos uma matriz de borda no cálculo da matriz de monodromia que promove o acoplamento entre o último e o primeiro sítios, criando assim condições de contorno periódicas para as cadeias de spins neste caso. Por ser uma generalização do modelo de Heisenberg, também não conseguimos encontrar todos os auto-estados do hamiltoniano daquele modelo ao efetuarmos a diagonalização pelo ABA. Vimos que para o caso não-homogêneo com a matriz de borda, surgem conexões com outros modelos integráveis: Richardson, Gaudin e aproximação BCS.

O último modelo de spins apresentado é o de Heisenberg-Cherednik, em que as interações entre os vizinhos próximos se alternam entre um acoplamento forte e um fraco entre os sítios. Ao diagonalizarmos este modelo, obtivemos todo o espectro de energias dos auto-estados do hamiltoniano, sem a presença de nenhum auto-estado ausente como nos modelos pesquisados anteriormente. No limite em que as constantes de acoplamento se tornam iguais a um, recuperamos todos os resultados obtidos para o modelo de Heisenberg.

Referências Bibliográficas

- [1] B. A. Cipra, *Am. Math. Month.*, **94** (1987), 937
- [2] R. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, London - New York, 1982
- [3] H. B. Thacker, *Rev. Mod. Phys.*, **53** (1981), 253
- [4] H. J. de Vega, *Nucl. Phys.*, **B18A** (1990), 229
- [5] V. Korepin, N. Bogoliubov, A. Izergin, *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1993
- [6] V. Kurak, A. Lima-Santos, *Nucl. Phys.*, **B699** (2004), 595; *Nucl. Phys.*, **B701** (2004), 497; *J. Phys.*, **A38** (2005), 333-348; *J. Phys.*, **A38** (2005), 2359-2374
- [7] L. Faddeev, “*Algebraic Aspects of Bethe Ansatz*”, arXiv:hep-th/9404013
- [8] L. Faddeev, “*How Algebraic Bethe Ansatz works for Integrable Models*”, arXiv:hep-th/9605187
- [9] E. K. Sklyanin, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **21** (1988), 2375
- [10] J. von Delft, R. Poghossian, *Phys. Rev.*, **B66** (2002)
- [11] M. Gaudin, *J. de Physique*, **37** (1976), 1087
- [12] H. M. Babujian, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26** (1993), 6981
- [13] J. von Delft, D. C. Ralph, *Phys. Rep.*, **345** (2001), 61
- [14] M. C. Cambiaggio, A. M. F. Rivas, M. Saraceno, *Nucl. Phys.*, **A624** (1997), 157
- [15] P. W. Anderson, *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1900