

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA**

**BACIAS CRIVADAS EM SISTEMAS MECÂNICOS E
BIOLÓGICOS E ESTUDO DA VARIABILIDADE DA
FREQUÊNCIA CARDÍACA**

SABRINA CAMARGO

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física
para obtenção do título de Doutora em Ciências

Banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IFUSP)

Profa. Dra. Carmen Pimentel Cintra do Prado (IFUSP)

Prof. Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau (INPE)

Prof. Dr. Sérgio Roberto Lopes (UFPR)

São Paulo
2009

À minha família

Agradecimentos

Agradeço às agências de fomento CAPES, CNPq e DAAD.

Gostaria de agradecer aos professores Jürgen Kurths, Niels Wessel, Iberê Luiz Caldas e Celso Grebogi.

Ao professor Sandro Eli de Souza Pinto e seu aluno, Rodrigo Frehse Pereira.

Um agradecimento especial ao meu orientador Ricardo Luiz Viana, que além da orientação de doutorado, ainda me deu muitas sugestões que certamente são válidas também fora da vida acadêmica.

Aos professores Vito Vanin, Nora Lia Maidana, Paulo Pascholati e Manoel Robilotta.

Às secretárias Lia e Inês do Departamento de Física Aplicada, e a Éber, Francisleine e Cláudia, funcionários da Comissão de Pós Graduação

Aos amigos Rafael Vilela, Zwinglio Guimarães, Rene Medrano, Gustavo Zampier, Reginaldo Farias, Júlia Giehl e Michele Figueiró.

Às amigas Maria Isabel Veras Orselli, Renata Beatriz de Camargo, Christiane Castroviejo, Gabriela Camargo Campos, Patrícia Camargo Magalhães, Mariana Carvalho Rossi, Lívia Sakimoto e ao Gabriel Moraes de Andrade.

Aos amigos Ruy Alberto Pisani Altafim, Letícia Altafim, Márcio Novaes Coelho Jr., Flávio Silvestre, José Carlos Boareto, Jaqueline Barcellos Boareto e Eulalie Joelle Ngamga.

Aos amigos Franciana, Fran Sato, Iara, Iris Antonio, Ernani, Gustavo Simonetti, José Miguel Samper Sanchez e Marcos César Danhoni Neves, amigos de muito tempo.

Aos meus avós, meus tios, meus primos, meus sogros, meus cunhados e minha sobrinha. E especialmente aos meus pais, Regina e Nilton, e minha irmã Talita. Obrigada pela dedicação exclusiva, pelo fomento, pelo amor e pelo carinho.

Ao Kleto, especialmente e principalmente.

*O pensamento parece uma coisa à tua
mas como que a gente voa quando começa a pensar*
Lupicínio Rodrigues

Colour my life with the chaos of trouble
Belle and Sebastian

Resumo

Um estudo de bacias crivadas e um estudo de séries de batimentos cardíacos através de ferramentas não lineares são apresentados. Bacias crivadas ocorrem em sistemas não lineares onde a simetria do espaço de fase permite a existência de um subespaço invariante capaz de atrair e repelir órbitas. Como consequência para todo ponto pertencente à bacia de atração do atrator existirá um ponto não pertencente numa distância arbitrariamente próxima. Pode-se verificar a presença de bacias crivadas pela análise do espaço de fase e dos expoentes máximos transversais de Lyapunov de tempo finito. A caracterização do fenômeno pode ainda ser complementada pelas leis de escala provenientes de um modelo para as flutuações dos expoentes máximos transversais de Lyapunov de tempo finito. O crivamento é analisado para um sistema mecânico e para um modelo ecológico. Comparamos para os dois sistemas as previsões teóricas, dadas por um modelo estocástico, com os resultados numéricos.

No estudo de séries de batimentos cardíacos diversos grupos de dados são submetidos a diferentes análises a fim de determinar índices que permitam, dado um paciente, decidir a qual grupo ele pertence. Expoentes de Lyapunov, análise depurada de flutuações e segmentação das séries foram empregados na análise das séries de intervalos RR e pressão arterial. Desses métodos empregados, nenhum foi conclusivo no sentido de caracterizar os grupos. Porém, uma nova formulação do método de segmentação das séries mostrou ser possível a caracterização através de um parâmetro, que todavia, exige séries longas de observação.

Abstract

A study of riddled basins of attraction and a study of heart rate variability through nonlinear dynamics tools are presented. Riddled basins occur in nonlinear systems whose phase space symmetry allows an invariant subspace with an chaotic attractor. This invariant subspace can either attract or repel orbits. As a consequence, for every point belonging to the basin of attraction there is another point, arbitrarily close, that does not belong to the basin of attraction. The presence of riddled basins is verified by analyzing the maximal transversal Lyapunov exponent and the maximal transversal finite time Lyapunov exponent. The characterization of riddling is complemented by the calculation of scaling laws provided by a stochastic model of the transversal finite time Lyapunov exponents. Riddling is analyzed for a mechanical system and for an ecological model. The results are compared with the theoretical prediction given by the stochastic model.

In the study of heart rate variability, time series of different groups were analyzed in order to determine quantifiers of healthness and sickness, in the sense that given a patient one can say if the patient belongs to a healthy group or not. Lyapunov exponents, detrended fluctuation analysis and time series segmentation were applied to RR-intervals and blood pressure time series. These methods were not able to characterize the groups. However, a new formulation of the segmentation method indicates that it is possible to find a quantifier, although this quantifier requires long time series of observation.

Sumário

Resumo	iv
Abstract	v
1 Introdução	1
1.1 Bacias crivadas	1
1.2 Estudo da variabilidade da frequência cardíaca	3
2 Definições fundamentais	6
2.1 Sistemas dinâmicos	6
2.2 Atrator e bacia de atração	9
2.3 Exponentes de Lyapunov	11
2.3.1 Exponentes de Lyapunov de tempo finito	15
2.4 Bacias crivadas	17
2.4.1 Exemplos de bacias crivadas	19
3 Dinâmica transversal a órbitas caóticas em variedades invariantes	23
3.1 Sincronização de caos	23
3.2 Modelo estocástico para exponentes de Lyapunov de tempo finito	28
3.3 Leis de escala	33
4 Crivamento de bacias em um sistema biológico	37
4.1 Modelo competitivo entre espécies	37
4.2 Caracterização de bacias entrelaçadas	39
5 Crivamento de bacia em um sistema mecânico	48
5.1 Leis de escala	52

6 Estudo da variabilidade da frequência cardíaca	56
6.1 Expoente máximo de Lyapunov	60
6.2 Análise de flutuações depuradas	63
6.3 Segmentação	66
6.3.1 Segmentação baseada na média	67
6.3.2 Segmentação baseada nos coeficientes de variabilidade	70
7 Conclusões e perspectivas	76
A Algumas definições matemáticas	79
B Cálculo analítico dos expoentes de Lyapunov	81
C Detalhes da dedução do modelo estocástico	82
D Tabelas	88
E Teste de Kruskal-Wallis	92
F Publicações	94
Referências Bibliográficas	115

Capítulo 1

Introdução

Esta tese é constituída por duas linhas de trabalho que, apesar de não se cruzarem diretamente, têm em comum a não linearidade característica de sistemas caóticos. A primeira trata de um fenômeno inerente a sistemas não lineares que satisfazem certas condições. A segunda refere-se a análise de séries temporais sob o prisma da dinâmica não linear. O fenômeno inerente a certos sistemas é o crivamento, ou bacias de atração crivadas, e é objeto de estudo dos Caps. 2-5. As séries temporais são séries de intervalos de tempo entre batimentos cardíacos consecutivos e a análise dessas séries é tema do Cap. 6.

1.1 Bacias crivadas

John Sommerer [1] conta como o trabalho de James Alexander [2] deu início à investigação de crivamento. James Alexander notou um acontecimento incomum: atratores onde aparentemente havia o cruzamento das trajetórias. Alexander usou um mapa no plano complexo dependente de um parâmetro positivo, que apresentava três variedades invariantes, e em cada uma delas, uma dinâmica caótica regida por um mapa quadrático. Mas como as trajetórias não se cruzam no espaço de fase, por motivo de unicidade, era curioso como atratores diferentes poderiam estar tão entrelaçados. A bacia de cada atrator apresentava ser crivada de “buracos” numa escala arbitrariamente fina; cada buraco era uma parte da bacia do outro atrator. Dessa forma, todo o espaço de fase apresentava ser topologicamente uma fronteira, pois em topologia um ponto está na fronteira entre dois conjuntos se qualquer vizinhança deste ponto contém pontos de cada um dos dois conjuntos. Ceticismo em relação a um resultado como esse, baseado em cálculos numéricos, era natural, e tal resultado poderia ser considerado com um artefato computacional. Para o crédito de Alexander e seus colaboradores, entretanto, eles foram capazes de provar que essas bacias crivadas,

nome sugerido por John Milnor, realmente existiam no sistema [1].

Sistemas caóticos com certas simetrias e propriedades matemáticas bastante gerais podem apresentar bacias de atração chamadas de bacias crivadas (“riddled basins”). As bacias crivadas são caracterizadas pela presença de “buracos” no seguinte sentido: um sistema dinâmico pode ter um atrator caótico A cuja bacia de atração é crivada com “buracos” pertencentes à bacia de outro atrator B , não necessariamente caótico. Além disso, todo ponto da bacia do atrator A tem, arbitrariamente próximo, partes da bacia do atrator B .

As consequências físicas da presença de bacias crivadas podem ser bastante sérias em termos da capacidade de prever a qual atrator irá convergir assintoticamente a trajetória originada por uma dada condição inicial no espaço de fase. Em termos da situação mencionada no parágrafo anterior, seja P um ponto arbitrário pertencente à bacia do atrator caótico A . Se a bacia de A é crivada pela bacia do outro atrator B , então uma pequena esfera de raio r centrada no ponto P terá uma fração não-nula do seu volume pertencente à bacia de B , não importando quão pequeno seja o raio da esfera.

Logo, encarando essa esfera de raio r como uma medida de incerteza relacionada com a determinação (numérica ou experimental) da condição inicial, a trajetória resultante terá sempre uma probabilidade não-nula de estar situada na bacia do outro atrator, para qualquer valor do raio r . Dessa forma, é virtualmente impossível predizer qual será o estado final do sistema dinâmico, já que, mesmo um aumento substancial da precisão na determinação da condição inicial será insuficiente para diminuir a probabilidade de cometer um erro na previsão do estado final. As chamadas bacias fractais apresentam fronteiras fractais, ao passo que a bacia crivada exibe fractalidade em toda a sua extensão. Isto é, mesmo para uma bacia fractal é possível encontrar uma região onde todos as condições iniciais pertencem a uma mesma bacia, enquanto numa bacia crivada para qualquer região arbitrariamente pequena existirão pontos pertencentes às duas bacias de atração.

Na literatura, o fenômeno de bacias crivadas foi descrito matematicamente por Alexander *et al.* [2], que apresentou exemplos em sistemas dinâmicos abstratos. Ott *et al.* [3, 4] apresenta, pouco depois, um exemplo físico de bacias crivadas, relacionado a um oscilador de Duffing. Paralelamente, as propriedades matemáticas da transição de bacias fractais para crivadas foram exploradas por Ashwin e colaboradores [5–7]. A transição para o crivamento ocorre para uma variedade de bifurcações [8–10], especialmente relacionadas à transição para o caos sincronizado [11–15]. A influência de ruído em bacias crivadas foi investigada por Lai e Grebogi [16–24].

Existe um grande número de exemplos de crivamento em sistemas dinâmicos de interesse biológico e físico, que vão de sistemas mecânicos, como arcos elásticos acoplados [19], a sistemas dinâmicos espacialmente estendidos, como redes de mapas acoplados [20].

Outras aplicações incluem modelos ecológicos de populações [21], sistemas dinâmicos “inteligentes” (cujos parâmetros são autoajustáveis) [23], reações químicas do tipo Belousov-Zhabotinsky [22] e em modelos econômicos interdependentes [24]. A confirmação experimental de bacias crivadas foi apresentada por Heagy *et al.* em circuitos de osciladores caóticos, particularmente circuitos do tipo Rössler, acoplados [25].

O estudo de bacias crivadas inicia-se no Cap. 2, com uma introdução ao estudo de sistemas dinâmicos e definições importantes para o enunciado das condições necessárias para a ocorrência de bacias crivadas. Na sequência, o Cap. 3 traz a motivação para um modelo estocástico da dinâmica transversal característica de bacias crivadas; tal motivação é originada no estudo de sincronização de sistemas caóticos idênticos acoplados. Além da contextualização, a dedução do modelo estocásticos está detalhada na Seç. 3.2.

No Cap. 4 as leis de escala apresentadas no Cap. 3 são aplicadas em um sistema biológico governado por um mapa bidimensional, ainda não explorado na literatura. Já no Cap. 5 o modelo de bacias crivadas é aplicado a um sistema mecânico relacionado a um importante sistema que é o pêndulo de oscilações forçadas amortecidas. O assunto é retomado no Cap. 7.

1.2 Estudo da variabilidade da frequência cardíaca

Glass [26] aponta a importância de se compreender os ritmos fisiológicos que são essenciais à vida e indica três pontos importantes relacionados a sincronização e ritmos fisiológicos: a origem de ritmos complexos, a sincronização de oscilações fisiológicas e o papel do ruído e de caos em tais processos. É possível que a normalidade dos ritmos fisiológicos seja determinada por uma dinâmica caótica, dado que pela presença de órbitas periódicas instáveis e dependência sensível das condições iniciais, pequenas perturbações podem levar a grandes alterações. Rabinovich e Abarbanel [27] sugerem que o corpo controla mais facilmente uma dinâmica caótica do que uma dinâmica estocástica.

Van der Pol [28] elaborou em 1928 um modelo para a geração de ritmos cardíacos baseado em três circuitos eletrônicos acoplados. Desde então a equação de Van der Pol, que representa o comportamento de um oscilador de relaxação com uma solução periódica tem sido frequentemente empregada em modelos fenomenológicos da função cardíaca. Katholi *et. al* desenvolveu um modelo mais geral para o ritmo cardíaco normal, que emprega equações do tipo Van der Pol-Liénard, com forçamento externo periódico [29]. O modelo de Katholi e o trabalho de Santos *et. al* [30], sobre sincronização entre os nódulos sinoatrial e atrioventricular do coração, foram a motivação para dar início ao estudo de séries de batimentos através de ferramentas da dinâmica não linear e eventual ocorrência de crivamento

na variedade de sincronização, uma vez que a geração de determinadas disritmias cardíacas está associada a uma perda de sincronização entre os dois nódulos.

O caráter caótico ou não das séries de batimentos cardíacos é uma questão ainda em aberto. Em junho de 2009, a revista *Chaos* selecionou essa questão para abrir sua nova seção sobre questões controversas em ciências não lineares. Sobre os trabalhos que se propuseram a responder tal questionamento, a maioria conclui que as evidências são inconclusivas ou negativas e muitos trabalhos apontam que essa não é a questão que deve ser respondida [31]. Wessel sustenta que parâmetros de ferramentas não lineares são poderosos para a descrição da dinâmica cardiovascular mas que não podem ser tomadas como paradigmas [32].

A importância clínica da variabilidade da frequência cardíaca foi apontada primeiramente por Hon e Lee em 1965 [33], quando relatam que o sofrimento fetal era precedido por alterações nos intervalos entre os batimentos cardíacos antes de qualquer outra alteração no próprio batimento. Na década de 70, Ewing [34] criou vários testes com intervalos RR para observações de curto tempo, a fim de detectar neuropatia autonômica* em pacientes com diabetes [35]. A associação de maior mortalidade pós infarto com variabilidade reduzida foi apresentada por Wolf [36] em 1977.

Observações clínicas sugerem que os mecanismos envolvidos na regulação cardiovascular interagem de maneira não linear e quantidades como expoentes de escalas fractais descrevem bem a dinâmica não linear da variabilidade da frequência cardíaca, fornecendo informações importantes no uso de prognósticos [37]. Kanters *et al.* supõe que a frequência cardíaca seja governada por um sistema composto por múltiplos atratores estranhos [38]. O papel do cérebro como mecanismo regulador da frequência cardíaca foi avaliado em pacientes transplantados sob a ação de atropina, usada no combate à rejeição do órgão doado. A análise da dimensão de correlação e do expoente máximo de Lyapunov mostrou que a atropina tende a aumentar a complexidade e a não linearidade da frequência cardíaca em voluntários saudáveis [39].

Em 1995 Peng *et al.* [40] apresentou a análise de flutuações depuradas – DFA, em inglês Detrended Fluctuation Analysis – para determinar autossimilaridades, propriedades de correlação do tipo fractal. Este método é menos sensível aos efeitos de ruído e não estacionaridade e tem a considerável vantagem de que seus expoentes podem ser calculados sem a remoção de dados discrepantes [41]. Seu trabalho em séries de intervalos RR mostrou dois comportamentos distintos para escalas curtas de tempo e escalas longas de observação. Bernaola-Galván e colaboradores [42] aplicam seu método de segmentação de séries base-

*Sintomas causados por lesões ou danos dos nervos que regulam a pressão arterial, frequência cardíaca e outras funções.

ado no nível de significância entre as médias dos segmentos produzidos. Esse método implica em considerar uma série temporal como a união de segmentos estacionários, com média e variância constantes. O resultado da segmentação em séries de intervalos RR é uma distribuição em forma de lei de potência para o comprimento dos segmentos.

O trabalho sobre as séries de batimentos cardíacos é uma ideia que vem de um encontro entre os professores Jürgen Kurths, Ricardo Viana e Moacir Godoy, em Dresden, numa conferência realizada no Instituto Max Planck em 2005. Sob a orientação do professor Niels Wessel, o estudo da variabilidade da frequência cardíaca foi possível através de um estágio sanduíche na Universidade de Potsdam, Alemanha. O estudo da variabilidade da frequência cardíaca é apresentado no Cap. 6, onde de forma resumida, o funcionamento do coração é explicado e são dados alguns exemplos de séries de sujeitos saudáveis, pacientes com fibrilação atrial e insuficiência cardíaca. Na Seç. 6.1 o expoente máximo de Lyapunov foi obtido a partir dessas séries temporais. A Seç. 6.2 apresenta a análise de flutuações depuradas e a Seç. 6.3 apresenta a segmentação das séries. A aplicação dessas técnicas tem como objetivo identificar pacientes e sujeitos saudáveis através de parâmetros extraídos dessas análises. O Cap. 7 traz as conclusões e perspectivas deste trabalho. Os Aps. A-E trazem detalhes mencionados durante os outros capítulos e as publicações estão no Ap. F.

Capítulo 2

Definições fundamentais

Movimentos caóticos aparentam ser muito complexos e geralmente trazem à tona adjetivos como selvagem, turbulento e aleatório, diz Ott [43] em sua introdução sobre sistemas caóticos. Embora apresentem um comportamento complexo, os comportamentos caóticos estão presentes em sistemas simples ou não muito elaborados. É creditado a Poincaré o início dos trabalhos em dinâmica caótica, quando o matemático analisou a estabilidade do sistema solar por conta de um concurso para homenagear o aniversário do rei da Suécia e da Noruega. Quanto a uma definição de caos em sistemas dinâmicos, existem muitas possíveis, algumas mais rigorosas, outras, nem tanto [44]. Robert Devaney, na Ref. [44] define um sistema dinâmico como caótico quando este possui sensível dependência das condições iniciais^{*}, for topologicamente transitivo[†] e possuir pontos periódicos densos[‡] em seu domínio. Kathleen Alligood [45] e Edward Ott [43] definem como sistemas caóticos os sistemas dinâmicos sem solução periódica e que possuem expoente de Lyapunov positivo. Nesta tese os sistemas abordados são caóticos, seja pela definição rigorosa de Devaney, como é o caso do mapa logístico; seja pela definição que leva em conta a presença de pelo menos um expoente positivo de Lyapunov.

2.1 Sistemas dinâmicos

Um sistema dinâmico pode ser definido como uma receita matemática para a evolução do estado de um sistema no tempo, seja este considerado contínuo ou discreto [43]. Um

^{*}Existe um ponto arbitrariamente próximo de \mathbf{x} que eventualmente se afasta de \mathbf{x} por uma diferença δ sob uma aplicação do sistema.

[†]Os pontos movem-se de uma vizinhança arbitrariamente pequena para outra qualquer, de forma que o sistema não pode ser decomposto em dois conjuntos abertos disjuntos.

[‡]Para qualquer intervalo tomado no domínio existirá um ponto periódico.

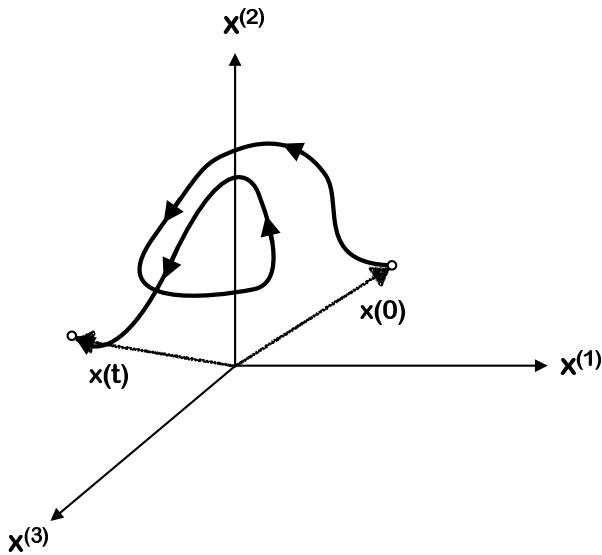


Figura 2.1: Caminho seguido pelo estado inicial $\mathbf{x}(0)$ do sistema das Eqs. (2.1) para $N = 3$, com a evolução do tempo. O espaço $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ é chamado de espaço de fase e o caminho no espaço de fase seguido pelo sistema conforme a evolução do tempo é chamado de órbita ou trajetória. Sistemas dinâmicos de tempo contínuo também são chamados de fluxos [43].

sistema de N equações diferenciais de primeira ordem dependentes do tempo (contínuo) t ,

$$\left. \begin{array}{l} dx^{(1)}/dt = f_1(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ dx^{(2)}/dt = f_2(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \\ \vdots \\ dx^{(N)}/dt = f_N(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(N)}), \end{array} \right\} \quad (2.1)$$

que também é representado na forma vetorial

$$d\mathbf{x}(t)/dt = \mathbf{f}[\mathbf{x}(t)], \quad (2.2)$$

é um exemplo de sistema dinâmico onde o tempo é contínuo, pois é possível em princípio calcular o estado futuro $\mathbf{x}(t)$ ($t > 0$), dado um estado inicial $\mathbf{x}(0)$. A Fig. 2.1 mostra o caminho seguido pelo estado do sistema para $N = 3$, com a evolução do tempo. O espaço $(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)})$ é chamado de espaço de fase e o caminho no espaço de fase seguido pelo sistema conforme a evolução do tempo é chamado de órbita ou trajetória. Em se tratando de um sistema dinâmico de tempo contínuo é comum referir-se a este como um fluxo [43].

No caso de um sistema dinâmico de tempo discreto, onde n denota a variável de tempo ($n = 0, 1, 2, \dots$), um exemplo de sistema dinâmico é um mapa, escrito na forma vetorial como

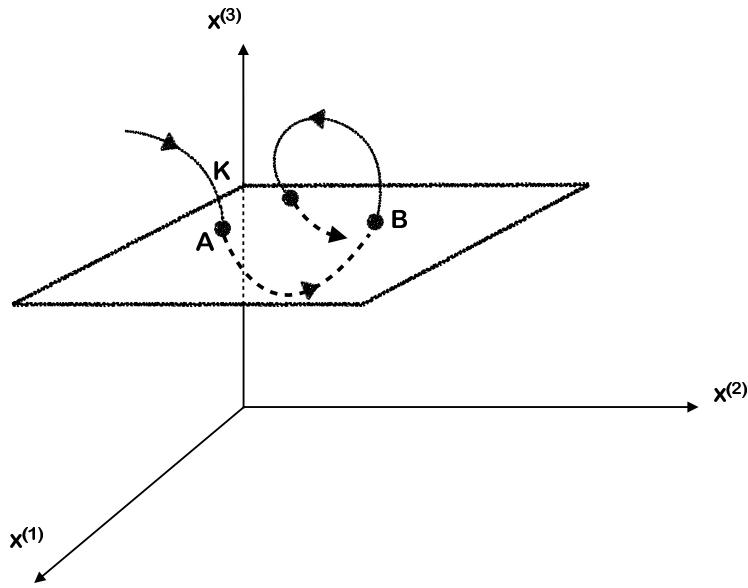


Figura 2.2: Seção de Poincaré. As interseções da órbita com o plano $x^{(3)} = K$ produzem uma sequência de sucessivos cruzamentos, representados pelos pontos A e B . O mapa de Poincaré representa um mapa bidimensional inversível transformando as coordenadas $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ da n -ésima perfuração da superfície de seção nas coordenadas $(x_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)})$ da perfuração seguinte em $n+1$ [43].

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (2.3)$$

em que \mathbf{x}_n é N -dimensional, $\mathbf{x}_n = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(N)})$. Dada um estado inicial \mathbf{x}_0 obtém-se o estado no tempo $n = 1$ por $\mathbf{x}_1 = \mathbf{M}(\mathbf{x}_0)$. Através de \mathbf{x}_1 pode-se determinar \mathbf{x}_2 e assim por diante.

É razoável conjecturar que a complexidade das estruturas apresentadas por uma órbita depende da dimensão do sistema. Fluxos de dimensão $N < 3$ não apresentam caos, assim como mapas inversíveis[§] de dimensão $N < 2$. Em mapas não inversíveis é possível encontrar comportamento caótico mesmo para $N = 1$ [¶] [43].

Através de uma técnica conhecida pelo nome de Seção de Poincaré (Fig. 2.2) é possível reduzir um fluxo (de tempo contínuo) a um mapa de tempo discreto. O mapa de Poincaré representa uma redução do espaço de fase N -dimensional do fluxo para um mapa $(N - 1)$ -dimensional. Por exemplo, considerando uma solução das Eqs. (2.1) para $N = 3$. Tomando uma superfície bidimensional, que na Fig. 2.2 é o plano $x^{(3)} = K$, as interseções da órbita com esse plano produzem uma sequência de sucessivos cruzamentos, representados pe-

[§]Um mapa \mathbf{M} é inversível se dado \mathbf{x}_n é possível resolver $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}_n$ unicamente para \mathbf{x}_n .

[¶]Do teorema de Poincaré-Bendixson, uma órbita no plano só pode convergir para um ponto fixo ou para uma órbita periódica [43].

los pontos A e B . O ponto A determina unicamente o ponto B , porque A pode ser considerado como condição inicial nas Eqs. (2.1) para determinação de B . Da mesma maneira B leva unicamente ao ponto A , pela reversão do tempo nas Eqs. (2.1). Portanto, na Fig. 2.2, o mapa de Poincaré representa um mapa bidimensional inversível transformando as coordenadas $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ da n -ésima perfuração da superfície de seção nas coordenadas $x_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)}$ da perfuração seguinte em $n + 1$.

Uma forma alternativa de produzir-se um mapa a partir de um fluxo é pela escolha de um intervalo conveniente de discretização do tempo T ^{||} de forma que $t_n = t_0 + nT$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) e $\mathbf{x}_n \equiv \mathbf{x}(t_n)$

2.2 Atrator e bacia de atração

Considerando um fluxo como o apresentado nas Eqs. (2.1), uma superfície fechada S_0 no instante de tempo $t = 0$ terá dimensão $(N - 1)$ e envolverá o volume $V(0)$ no espaço de fase de dimensão N . Evoluindo a superfície S_0 no tempo segundo a Eq. (2.2), obtém-se uma superfície S_t para algum tempo posterior, envolvendo um volume $V(t)$. Se $V(t) = V(0)$ então esse sistema é dito conservativo, caso contrário, o sistema é classificado como não conservativo. Pelo teorema da divergência [43]

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{S_t} \nabla \cdot \mathbf{f} d^N x, \quad (2.4)$$

sendo \int_{S_t} a integral sobre o volume da superfície S_t , \mathbf{f} um fluxo da forma da Eq. (2.2) e

$$\nabla \cdot \mathbf{f} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{\partial f_i(x^{(1)}, \dots, x^{(N)})}{\partial x^{(i)}}. \quad (2.5)$$

Em geral $\nabla \cdot \mathbf{f}$ será uma função dependente da posição no espaço de fase. A contração do volume em alguma região do espaço de fase é dada por $\nabla \cdot \mathbf{f} < 0$ e o sistema é chamado de sistema dissipativo. Os sistemas dissipativos são tipicamente caracterizados pela presença de atratores no espaço de fase. Os atratores são subconjuntos** limitados para os quais regiões de condições iniciais, cujo volume é diferente de zero no espaço de fase, tendem sob evolução do tempo. Sistemas conservativos por sua vez, não possuem atratores.

No caso de tempo discreto, um mapa é conservativo se preserva o volume N -dimensional do espaço de fase a cada iteração. Um mapa preserva o volume se a magnitude do determi-

^{||}No Cap. 5 a discretização do fluxo é feita com $T = 2\pi$.

**Definições a respeito de conjuntos são apresentadas no Ap. A.

nante de sua matriz Jacobiana de derivadas parciais é 1,

$$J(\mathbf{x}) \equiv \left| \det \left[\frac{\partial \mathbf{M}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] \right| = 1. \quad (2.6)$$

Se $J(\mathbf{x}) < 1$ para alguma região, diz-se que o mapa é dissipativo e como no caso dos fluxos, tipicamente existem atratores nessa região.

Segundo Ott [43], a dinâmica sobre um atrator é chamada de caótica se existir dependência sensível das condições iniciais e um atrator é estranho se é fractal. Assim, caos descreve a dinâmica sobre o atrator, enquanto “estranho” refere-se à geometria do atrator. É possível que atratores caóticos não sejam estranhos e que atratores sejam estranhos mas não caóticos.

Em termos mais rigorosos, define-se o atrator através do conjunto de pontos limites^{††}. O conjunto limite positivo $\omega(x)$ de um ponto x é o conjunto de pontos y que são pontos limites da trajetória $F^n(x)$ quando $n \rightarrow \infty$. Um conjunto A é um atrator se um ponto x tomado aleatoriamente, de acordo com alguma distribuição de probabilidade, próximo de A apresenta uma probabilidade não nula de que $\omega(x) = A$. A bacia de atração $\beta(A)$ é o conjunto de pontos $\{x : \omega(x) \subset A\}$. A maioria dos sistemas estudados apresenta uma bacia tipicamente dada por um conjunto aberto que em particular contém discos, isto é, uma região de raio ε centrado em um ponto P onde todos os pontos pertencem à mesma bacia de atração [46]. Alexander *et al.* [2] demonstra a existência de sistemas para os quais as bacias de atração não exibem discos. Assim, um ponto aleatoriamente escolhido num disco tem probabilidade não nula de pertencer a $\beta(A)$ e probabilidade não nula de não pertencer a $\beta(A)$. A bacia $\beta(A)$ é crivada com buracos e, por isso, é chamada de bacia crivada. Para que uma bacia seja crivada, é preciso mostrar que a probabilidade de um número suficiente de pontos atraídos pelo atrator caótico A é não nula e que, além disso, um número suficiente de pontos é repelido por A .

Alexander *et al.* [2] adota a definição de atrator como o conjunto de pontos para o qual a maioria das condições iniciais evoluí sob iterações de F . Então, lembrando que $\omega(x)$ é o conjunto de pontos da forma $\lim_{n \rightarrow \infty} F^{i_n}$, onde $i_n \rightarrow \infty$ com n e definindo M como a variedade H -dimensional sobre a qual F está definida, um subconjunto $A \subset M$ será considerado um atrator de F se:

1. A bacia de atração $\beta(A)$, constituída por todos os pontos $x \in M$ para os quais $\omega(x) \subset A$, deve possuir uma medida H -dimensional de Lebesgue positiva;
2. Não existe um subconjunto fechado menor $A' \subset A$ tal que $\beta(A') = \beta(A)$ até uma

^{††}Ver Ap. A.

medida zero de A' .

Essa definição, chamada de “atrator fraco” de Milnor [2], não exige que uma vizinhança arbitrariamente próxima do atrator tenha seu estado final sobre este atrator, permitindo então que órbitas sejam atraídas ou repelidas do subespaço invariante, visto que o atrator não atrai qualquer vizinhança.

A bacia de atração $\beta(A)$ de um atrator A é crivada se seu complemento intersecciona todo disco num conjunto de medida positiva. No caso de haver um outro atrator B , as bacias de atração $\beta(A)$ e $\beta(B)$ serão ditas entrelaçadas se cada disco que intersecciona uma das bacias num conjunto de medida positiva também o faz para a outra bacia [2].

2.3 Exponentes de Lyapunov

Exponentes de Lyapunov são taxas exponenciais médias de divergência ou convergência de órbitas próximas no espaço de fase. Como órbitas próximas correspondem a estados aproximadamente idênticos, uma divergência orbital exponencial significa que aqueles sistemas cujas condições iniciais eram indistinguíveis comportar-se-ão de forma completamente diferente – a previsibilidade é rapidamente perdida. Qualquer sistema com pelo menos um expoente de Lyapunov positivo é definido como caótico, com a magnitude do expoente refletindo a escala de tempo sobre a qual o sistema torna-se imprevisível.

Seja F um mapa suave em \mathbb{R} . Em uma direção, o número de Lyapunov $L(x)$ da órbita $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ é definido como

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (|F'(x_1)| \cdots |F'(x_n)|)^{1/n}, \quad (2.7)$$

e o expoente de Lyapunov $\lambda(x_1)$ é

$$\lambda(x_1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\ln |F'(x_1)| + \cdots + \ln |F'(x_n)| \right]. \quad (2.8)$$

Para um mapa sobre \mathbb{R}^m , cada órbita tem m números de Lyapunov, os quais medem a taxa de separação da órbita em relação a sua condição inicial, ao longo de m direções ortogonais. Essas direções são determinadas pela dinâmica do mapa. Como a orientação muda continuamente, as direções associadas a um dado expoente variam de maneira complicada, sendo difícil falar de uma direção bem definida associada a um dado expoente.

Considere uma circunferência S , de raio pequeno, centrado no primeiro ponto x_0 de uma órbita. Examinando a imagem $\mathbf{F}(S)$ da circunferência sob uma iteração de \mathbf{F} , obtém-se uma forma aproximadamente elipsoidal, com um eixo longo expandindo direções e um

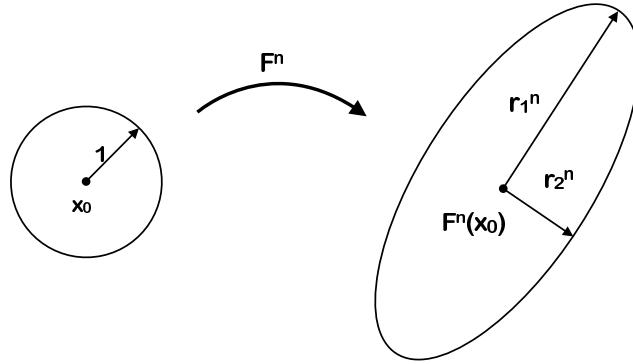


Figura 2.3: Considere uma circunferência S , de raio pequeno, centrado no primeiro ponto x_0 de uma órbita. Examinando a imagem $F(S)$ da circunferência sob uma iteração de F , obtém-se uma forma aproximadamente elipsoidal, com um eixo longo expandindo direções e um eixo curto contraindo outras direções. Após n iterações de F , a pequena circunferência terá se transformado em um elipsóide muito longo e fino. As mudanças nesses eixos em cada iteração são dadas pelos números de Lyapunov. O logaritmo natural de cada número de Lyapunov é um expoente de Lyapunov. [45]

eixo curto contraindo outras direções, como ilustrado na Fig. 2.3. Após n iterações de F , a pequena circunferência terá se transformado em um elipsóide muito longo e fino. As mudanças nesses eixos em cada iteração são dadas pelos números de Lyapunov [45]. O logaritmo natural de cada número de Lyapunov é um expoente de Lyapunov.

Para uma definição mais formal, substitui-se a pequena circunferência e o mapa F por uma esfera unitária U (Fig. 2.4) e pela matriz Jacobiana $J_n = \mathbf{DF}^n(\mathbf{x}_0)$, sendo $J_n U$ um elipsóide de m eixos ortogonais. Assim se F é um mapa suave em \mathbb{R}^m , $J_n = \mathbf{DF}^n(\mathbf{x}_0)$ e para $k = 1, 2, \dots, m$, seja r_k^n o comprimento do k -ésimo maior eixo ortogonal do elipsóide $J_n U$ para uma órbita cuja condição inicial é \mathbf{x}_0 . Então se r_k^n mede a contração ou a expansão próxima a \mathbf{x}_0 durante as primeiras n iterações, o k -ésimo número de Lyapunov de \mathbf{x}_0 é definido por

$$L_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_k^n)^{1/n}, \quad (2.9)$$

e o k -ésimo expoente de Lyapunov é $\lambda_k = \ln L_k$. Aqui considera-se que $L_1 \geq L_2 \cdots \geq L_m$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_m$.

Para a maior parte dos mapas de interesse não há forma direta de se obter os expoentes de Lyapunov apenas conhecendo-se o mapa e a matriz Jacobiana. Normalmente a matriz $J_n = \mathbf{DF}^n(\mathbf{x}_0)$ é difícil de ser calculada exatamente para n grande e então recorre-se a uma aproximação da imagem do elipsóide $J_n U$ através de algoritmos computacionais.

O elipsóide $J_n U$ tem eixos de comprimento s_i nas direções u_i . O cálculo direto do expoente envolveria ao mesmo tempo valores muito grandes e muito pequenos para os eixos do elipsóide, caso ele apresente direções de contração e expansão. Por causa da limitação

na precisão numérica, cálculos computacionais tornam-se difíceis quando envolvem ordens de grandeza diferentes. O problema em determinar s_i piora conforme n aumenta. Por essa razão o cálculo direto do elipsóide $J_n U$ é geralmente evitado.

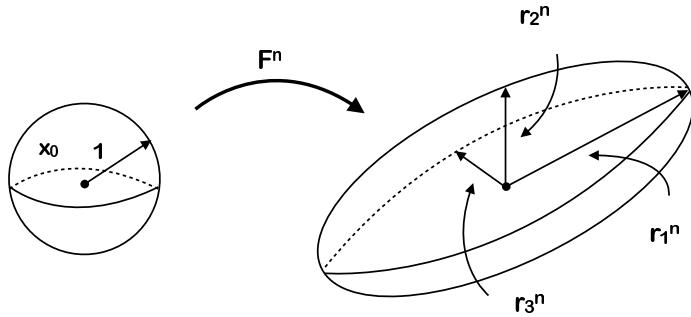


Figura 2.4: Substitui-se a pequena esfera e o mapa F por uma esfera unitária U e pela matriz Jacobiana $J_n = \mathbf{DF}^n(x_0)$, sendo $J_n U$ um elipsóide de m eixos ortogonais. Assim se \mathbf{f} é um mapa suave em \mathbb{R}^m , $J_n = \mathbf{DF}^n(x_0)$ e para $k = 1, 2, \dots, m$, seja r_k^n o comprimento do k -ésimo maior eixo ortogonal do elipsóide $J_n U$ para uma órbita cuja condição inicial é x_0 . Então se r_k^n mede a contração ou a expansão próxima à x_0 durante as primeiras n iterações [45].

O cálculo indireto que melhor funciona envolve o elipsóide à medida que ele cresce [45]. Como $J_n U = \mathbf{DF}(x_{n-1}) \dots \mathbf{DF}(x_0)U$ é possível calcular uma iteração por instante de tempo. Começando com uma base ortonormal $\{\mathbf{w}_1^0, \dots, \mathbf{w}_m^0\}$ em \mathbb{R}^m e calculando os vetores $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{DF}(x_0)\mathbf{w}_1^0, \dots, \mathbf{z}_m = \mathbf{DF}(x_0)\mathbf{w}_m^0.$$

Estes vetores localizam-se sobre a nova elipse $\mathbf{DF}(x_0)U$, mas não são necessariamente ortogonais. Esse problema é contornado através da criação de um novo conjunto de vetores ortogonais $\{\mathbf{w}_1^1, \dots, \mathbf{w}_m^1\}$ que produzirá um novo elipsóide com o mesmo volume de $J_n U$ [45]. A criação de um novo conjunto é feita usando-se a reortogonalização de Gram-Schmidt, que é definida como

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{z}_1$$

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{z}_2 - \frac{\mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2} \mathbf{y}_1$$

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{z}_3 - \frac{\mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2} \mathbf{y}_1 - \frac{\mathbf{z}_3 \cdot \mathbf{y}_2}{\|\mathbf{y}_2\|^2} \mathbf{y}_2$$

⋮

$$\mathbf{y}_m = \mathbf{z}_m - \frac{\mathbf{z}_m \cdot \mathbf{y}_1}{\|\mathbf{y}_1\|^2} \mathbf{y}_1 - \dots - \frac{\mathbf{z}_m \cdot \mathbf{y}_{m-1}}{\|\mathbf{y}_{m-1}\|^2} \mathbf{y}_{m-1}$$

onde \cdot é o produto escalar e $\|\cdot\|$ é o comprimento Euclidiano. Note o efeito da reortonormalização: primeiro \mathbf{z}_1 é declarado e mantido no novo conjunto. A parte de \mathbf{z}_2 que é perpendicular a \mathbf{z}_1 é conservada como \mathbf{y}_2 ; o termo subtraído é a projeção de \mathbf{z}_2 sobre a direção de \mathbf{z}_1 . O vetor \mathbf{y}_3 é definido como a parte de \mathbf{z}_3 perpendicular ao plano composto por \mathbf{z}_1 e \mathbf{z}_2 e assim por diante.

Tomando $\mathbf{w}_1^1 = \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{w}_m^1 = \mathbf{y}_m$ para a nova base ortogonal obtém-se um elipsóide de mesmo volume que $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_0)U$. Depois, aplicando $\mathbf{DF}(\mathbf{x}_1)$ ao ponto seguinte da órbita e reortonormalizando

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}_1)\mathbf{w}_1^1, \dots, \mathbf{DF}(\mathbf{x}_1)\mathbf{w}_m^1,$$

produz-se um novo conjunto ortonormal $\{\mathbf{w}_1^2, \dots, \mathbf{w}_m^2\}$. Repetindo esse processo n vezes obtém-se um conjunto final $\{\mathbf{w}_1^n, \dots, \mathbf{w}_m^n\}$ de vetores que se aproximam dos eixos do elipsóide $J_n U$.

A expansão total r_i^n na i -ésima direção após n -iterações é aproximadamente o comprimento do vetor \mathbf{w}_i^n . Assim $\|\mathbf{w}_i^n\|^{1/n}$ é a aproximação ao i -ésimo maior número de Lyapunov após n passos.

Para eliminar o problema de números extremamente grandes e pequenos este algoritmo deve ser implementado para normalizar a base ortogonal em cada passo. Denotando os vetores \mathbf{y} da aplicação da reortonormalização de Gram-Schmidt,

$$\mathbf{DF}(\mathbf{x}_j)\mathbf{w}_i^j, \dots, \mathbf{DF}(\mathbf{x}_j)\mathbf{w}_m^j,$$

por $\mathbf{y}_1^{j+1}, \dots, \mathbf{y}_m^{j+1}$ e fazendo $\mathbf{w}_i^{j+1} = \mathbf{y}_1^{j+1}/\|\mathbf{y}_1^{j+1}\|$, ou seja, tornando-os unitários, tem-se que $\|\mathbf{y}_1^{j+1}\|$ mede o crescimento de um passo na direção i , e como $r_i^n \approx \|\mathbf{y}_1^n\| \dots \|\mathbf{y}_i^n\|$,

$$\frac{\ln \|\mathbf{y}_1^n\| + \dots + \ln \|\mathbf{y}_i^n\|}{n}$$

é uma estimativa conveniente para o i -ésimo maior expoente de Lyapunov após n passos.

Qualquer sistema dinâmico contínuo, dependente do tempo e que não possua ponto fixo possuirá pelo menos um expoente nulo correspondente a vagarosa mudança de magnitude num eixo principal tangente ao fluxo. Eixos que na média estão se expandindo (contraindo) correspondem a expoentes positivos (negativos).

A expansão exponencial indicada por um expoente de Lyapunov positivo é incompatível com movimento sobre um atrator limitado, a menos que algum processo de “dobra” combine trajetórias amplamente separadas. Cada expoente positivo reflete uma “direção” na qual o sistema experimenta repetidamente esticamentos e dobras que descorrelacionam estados próximos no atrator [47].

2.3.1 Exponentes de Lyapunov de tempo finito

Para definir o expoente de Lyapunov de tempo finito, seja um mapa \mathbf{F} num espaço d_H -dimensional; n um inteiro positivo e $\mathbf{DF}^n(\mathbf{x}_0)$ a matriz Jacobiana do mapa iterado n vezes, cujos elementos são calculados na condição inicial $\mathbf{x}_0 \in A$. Supondo que os autovalores de $\mathbf{DF}^n(\mathbf{x}_0)$ são ordenados: $\xi_1(\mathbf{x}_0, n) \geq \xi_2(\mathbf{x}_0, n) \geq \dots \geq \xi_{d_H}(\mathbf{x}_0, n)$. Então no k -ésimo tempo n , o expoente finito de Lyapunov a tempo n para \mathbf{x}_0 é definido como [48]

$$\tilde{\lambda}_k(\mathbf{x}_0; n) = \frac{1}{n} \ln \|\mathbf{DF}^n(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{v}_k\|, \quad (k = 1, 2, \dots, d_H), \quad (2.10)$$

onde \mathbf{v}_k é um vetor unitário na direção relacionada a $\xi_1(\mathbf{x}_0, n)$. No limite de tempo infinito, a Eq. (2.10) é o expoente de Lyapunov infinito $\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_k(\mathbf{x}_0; n)$. Se o atrator A é caótico, com um expoente de Lyapunov positivo (ou hipercaótico, com mais de um expoente de Lyapunov positivo), os primeiros d_H expoentes de tempo infinito são positivos, tal que existem $d_H - d_M$ expoentes de Lyapunov ao longo de direções transversais ao subespaço invariante M . Para típicas condições iniciais sobre o subespaço invariante as órbitas resultantes evoluem para o atrator caótico e movem-se ergodicamente sobre o atrator. A questão que surge é se este atrator sobre o subespaço invariante é capaz de atrair pontos que não pertencem a tal subespaço, e no caso de atraí-los, como pequenas perturbações podem afetar o sistema. A resposta para essa questão é dada pelo expoente máximo transversal de Lyapunov, λ_\perp , que determina a convergência ($\lambda_\perp < 0$) ou a divergência das órbitas em direção ao subespaço invariante ($\lambda_\perp > 0$). Assim, para determinar a estabilidade transversal de M é suficiente considerar o maior expoente apenas, denotado por λ_\perp , onde

$$\lambda_\perp = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n) < 0, \quad (2.11)$$

indica que as órbitas no subespaço invariante são transversalmente estáveis. A possível existência de um número infinito de órbitas transversalmente instáveis mergulhadas em um atrator estável implica em um número de flutuações positivas e negativas do maior expoente transversal a tempo finito, $\tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n)$.

Considerando a distribuição de probabilidade $P(\tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n))$ de onde é possível calcular a média do expoente de tempo finito,

$$\langle \tilde{\lambda}_\perp(n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\lambda}_\perp(n) P(\tilde{\lambda}_\perp(n)) d\tilde{\lambda}_\perp(n). \quad (2.12)$$

A natureza caótica das órbitas permite que a quantidade $P(\tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n))$ possa ser tratada como uma variável aleatória [48]. Assim, para n suficientemente grande, a distribuição

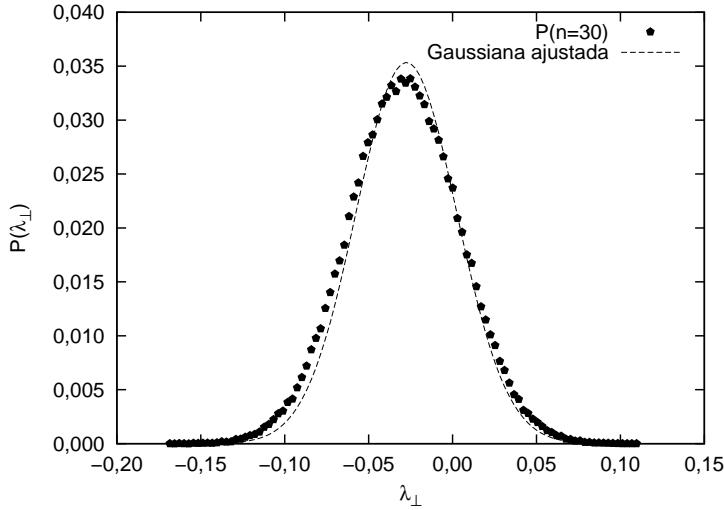


Figura 2.5: Exemplo de distribuição do expoente finito transversal de Lyapunov para $n = 50$. Considerando a distribuição de probabilidade $P(\tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n))$ como sendo da forma da Eq. (2.15) é possível calcular a média do expoente de tempo finito como $\langle \tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n) \rangle = \lambda_\perp$.

$P(\tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n))$ pode ser escrita como

$$P(\tilde{\lambda}_\perp(n)) \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_\perp)}{2\pi}} e^{-nG(\lambda_\perp)}, \quad (2.13)$$

e a função $G(\lambda)$ possui as seguintes propriedades

$$G(\lambda_\perp) = G'(\lambda_\perp) = 0, \quad G''(\lambda_\perp) > 0. \quad (2.14)$$

Pela expansão em série de $G(\lambda)$ na vizinhança de λ_\perp , o primeiro termo que não se anula é o quadrático, de forma que $P(\tilde{\lambda}_\perp(n))$ é reduzida a uma distribuição Gaussiana,

$$P(\tilde{\lambda}_\perp(n)) \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_\perp)}{2\pi}} \exp\left[\frac{-nG''(\lambda_\perp)}{2}(\tilde{\lambda}_\perp(n) - \lambda_\perp)^2\right], \quad (n \gg 1), \quad (2.15)$$

tal que o resultado da substituição de (2.15) em (2.12) é

$$\langle \tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n) \rangle = \lambda_\perp. \quad (2.16)$$

Em termos da distribuição dos expoentes transversais de tempo finito, a perda de estabilidade transversal implica numa fração positiva φ dos valores de $\tilde{\lambda}_\perp(\mathbf{x}_0, n)$ para condições iniciais \mathbf{x}_0 tomadas aleatoriamente no atrator A ,

$$\varphi(n) = \int_0^\infty P(\tilde{\lambda}_\perp(n))d\tilde{\lambda}_\perp(n) > 0. \quad (2.17)$$

Através de (2.13),

$$\varphi(n) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}\left(\lambda_\perp \sqrt{\frac{n}{4D}}\right), \quad (2.18)$$

onde

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (2.19)$$

é a função erro [49]. Se a distribuição dos expoentes de tempo finito é tal que metade dos expoentes apresente sinal positivo, então o expoente λ_\perp vai a zero e o subespaço invariante M perde a estabilidade transversal [50, 51].

Devido à ergodicidade, calcular o expoente transversal finito a tempo n usando uma longa trajetória caótica do atrator e dividí-la em um número grande N de segmentos de tamanho n é equivalente a tomar N condições aleatórias sobre o atrator e calcular o expoente para uma trajetória de comprimento n .

2.4 Bacias crivadas

Uma bacia crivada não contém conjuntos abertos e é cheia de “buracos”, embora apresente medida de Lebesgue positiva. A diferença entre uma bacia crivada e uma bacia fractal consiste no fato de que para a bacia fractal a fractalidade está em sua fronteira, ou seja, uma bacia é fractal quando sua fronteira é um conjunto fractal [16]. Para que um sistema apresente uma bacia crivada ele deve satisfazer algumas condições [2–4]:

1. Existe um subespaço invariante cuja dimensão é inferior à dimensão do espaço de fase.
2. A dinâmica no subespaço invariante tem um atrator caótico A .
3. Existe outro atrator B não pertencente ao subespaço invariante (Fig. 2.6).
4. O atrator A é transversalmente estável, ou seja, todos os expoentes de Lyapunov são negativos para perturbações infinitesimais em direções transversais ao subespaço invariante.
5. Um conjunto de órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico A torna-se transversalmente instável. Como consequência, pelo menos um dos expoentes de

Lyapunov ao longo da direção transversal ao subespaço invariante, embora seja negativo para a maioria das órbitas no atrator, experimenta flutuações positivas de tempo finito.

A condição 1 é consequência de simetrias do sistema que o permite apresentar um subespaço invariante M , de forma que uma condição inicial sobre M permanecerá para sempre sobre M , não escapando desse subespaço para tempos posteriores. Para o crivamento é necessário que exista um conjunto denso de pontos transversalmente instáveis, com medida de Lebesgue nula, mergulhado no atrator localizado em M , o que exige que o atrator seja caótico (condição 2). A existência de um atrator situado fora de M (condição 3), se deve ao fato da bacia do atrator caótico ser crivada por buracos pertencentes à bacia de outro estado final. Se os expoentes transversais de Lyapunov de órbitas típicas sobre o subespaço invariante M são todos negativos (condição 4), então A é no mínimo um atrator fraco no sentido de Milnor, e sua bacia tem medida de Lebesgue positiva. Pela condição 5, enquanto o subespaço invariante M permanece transversalmente estável, existirão trajetórias sobre o atrator A que são transversalmente instáveis. Qualitativamente, a condição 4 pode ser verificada pelo cálculo do expoente máximo de Lyapunov ao longo de uma direção transversal a M . Porém, verificar a condição 5 exige a determinação de uma órbita transversal periódica instável mergulhada no atrator A , o que é possível para poucos sis-

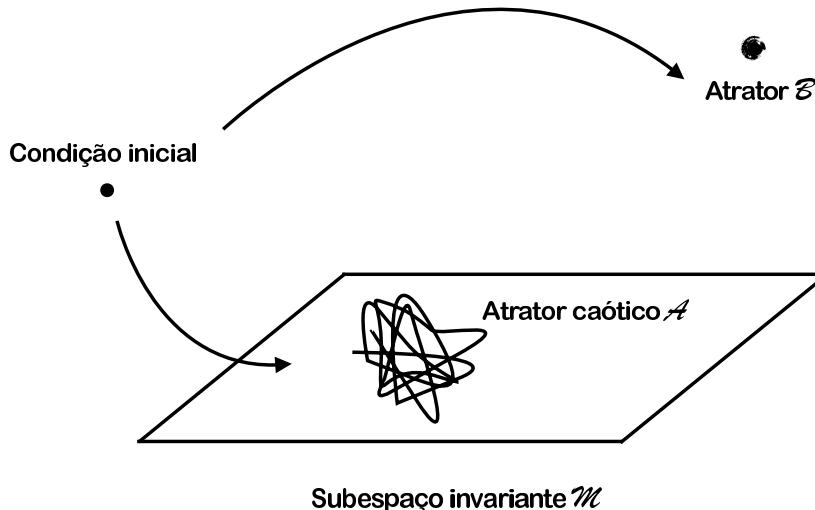


Figura 2.6: Para que ocorra o crivamento é necessário que exista um subespaço invariante M , com um atrator caótico A . Além do atrator caótico A no subespaço invariante M , é necessária a existência de um outro atrator B que não esteja em M . O atrator A deve ser transversalmente estável, ou seja, todos os expoentes de Lyapunov são negativos para perturbações infinitesimais em direções transversais ao subespaço invariante e deve existir um conjunto de órbitas periódicas instáveis imersas no atrator caótico A torna-se transversalmente instável [43].

temas dinâmicos [8, 16]. Na maioria das situações recorre-se à existência de flutuações através do cálculo dos expoentes de Lyapunov de tempo finito.

2.4.1 Exemplos de bacias crivadas

O seguinte mapa bidimensional [49] apresenta os aspectos gerais envolvidos na definição matemática do crivamento. Trata-se de um mapa não inversível onde $0 \leq x \leq 1$, $-\infty \leq y \leq \infty$,

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n), \\ y_{n+1} = pe^{-5(x_n - \chi)^2}y_n + y_n^3, \end{cases} \quad (2.20)$$

e parâmetros p e χ positivos. Devido às potências nas equações que regem a dinâmica em

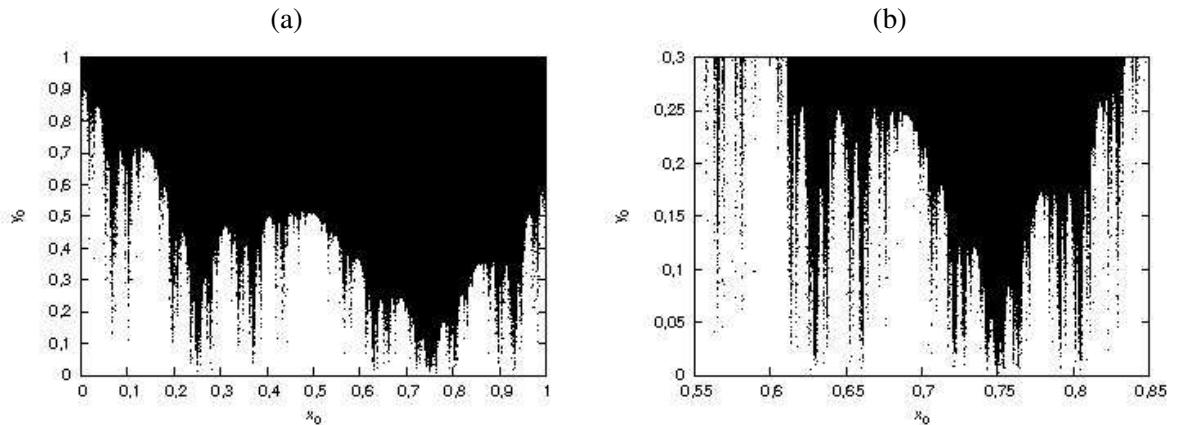


Figura 2.7: Bacia crivada resultante da iteração do mapa dado pelas Eqs. (2.20). Os pontos em preto representam a bacia do atrator $|y| = \infty$.

y , existe uma simetria $y \rightarrow -y$, tal que a condição $y = 0$ define um subespaço invariante M , dentro do espaço de fase bidimensional. Neste caso, y é a única direção transversal a M . A Fig. 2.7 mostra a bacia crivada resultante da iteração do mapa dado pelas Eqs. (2.20). Os pontos em preto representam a bacia do atrator $|y| = \infty$. A dinâmica em x é conhecidamente caótica, possuindo um incontável número de órbitas periódicas instáveis e uma órbita densa no atrator A , de onde toma-se $\chi = 3/4$ como ponto fixo instável. O termo cúbico na dinâmica transversal garante que se $|y_n| > 1$, então $|y_{n+1}| > |y_n| > 1$ para todas as iterações seguintes das Eqs. (2.20). Assim, uma vez que uma órbita atinja $|y| = 1$, a órbita seguirá assintoticamente para infinito. Esse estado de $|y| = \infty$ será considerado como o outro estado final possível, B , fora do subespaço invariante.

Para o mapa dado pelas Eqs. (2.20) é possível analisar o início do crivamento em termos da bifurcação do ponto fixo instável $\mathbf{x}_p = (3/4, 0)$ do atrator pela variação do parâmetro p através de um valor crítico, p_c (Fig. 2.8). A matriz Jacobiana das Eqs. (2.20) é

$$\mathbf{DF}(x, y) = \begin{pmatrix} 4(1 - 2x) & 0 \\ -10p(x - 3/4)e^{-5(x-3/4)^2}y & p(x - 3/4)e^{-5(x-3/4)^2} + 3y^2 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

cujos autovalores em \mathbf{x}_p são $\xi_{\parallel} = -2$, na direção paralela, e $\xi_{\perp} = p$, na direção transversal ao subespaço invariante $y = 0$. Então, embora \mathbf{x}_p seja sempre estável ao longo do subespaço invariante, para $p < 1$ o ponto fixo \mathbf{x}_p é estável transversalmente e para $p > 1$, \mathbf{x}_p é instável transversalmente (Fig. 2.8).

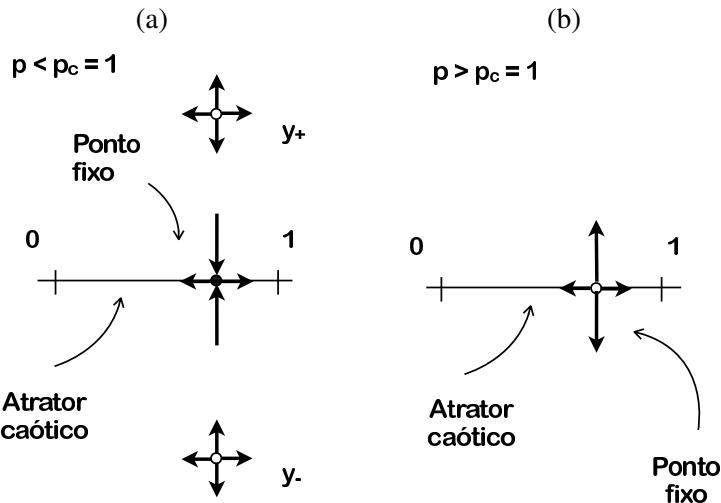


Figura 2.8: Para o mapa dado pelas Eqs. (2.20) é possível analisar o início do crivamento em termos da bifurcação do ponto fixo instável $\mathbf{x}_p = (3/4, 0)$ do atrator pela variação do parâmetro p através de um valor crítico, p_c . Embora \mathbf{x}_p seja sempre estável ao longo do subespaço invariante, para $p < 1$ o ponto fixo \mathbf{x}_p é estável transversalmente e para $p > 1$, \mathbf{x}_p é instável transversalmente. A dinâmica em y apresenta dois pontos fixos em $\mathbf{r}_{\pm} = (3/4, \pm \sqrt{1-p})$, situados fora do subespaço invariante [49].

Além disso, para $p < 1$, a dinâmica em y apresenta dois pontos fixos em $\mathbf{r}_{\pm} = (3/4, y_{\pm})$, situados fora do subespaço invariante (Fig. 2.8(a)). Para os pontos \mathbf{r}_{\pm} , os autovalores da matriz Jacobiana são $\xi_{\parallel} = -2$ e $\xi_{\perp} = 3 - 2p$, de forma que sejam sempre repulsores. Consequentemente, há uma bifurcação sela-repulsor em $p_c = 1$. Para p aproximando-se de p_c pela esquerda, a sela \mathbf{x}_p e o par de pontos repulsores \mathbf{r}_{\pm} unem-se restando apenas um repulsor no subespaço invariante para $p > p_c$ (Fig. 2.8(b)).

Como a dinâmica em x é não inversível, entretanto, não somente o ponto fixo instável \mathbf{x}_p torna-se instável transversalmente em $p = p_c$, como também todas as suas pré ima-

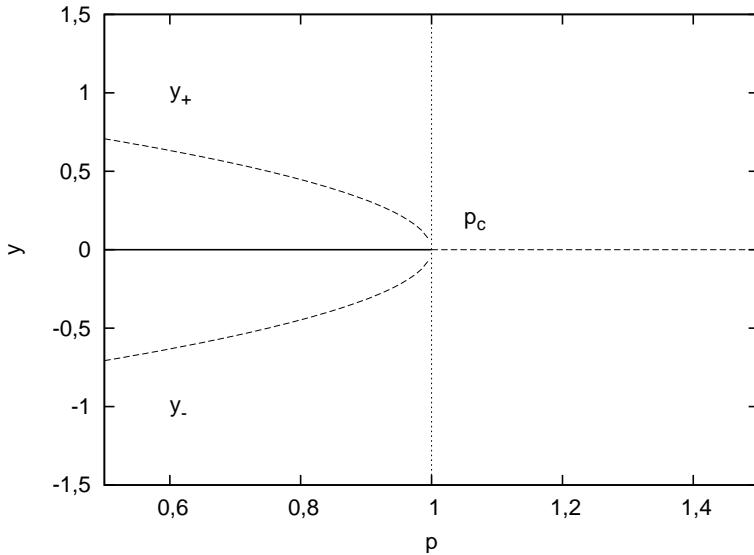


Figura 2.9: A dinâmica em y apresenta dois pontos fixos em $\mathbf{r}_\pm = (3/4, y_\pm)$, $y_\pm = \pm \sqrt{1-p}$, situados fora do subespaço invariante. Para os pontos \mathbf{r}_\pm , os autovalores da matriz Jacobiana são $\xi_{\parallel} = -2$ e $\xi_{\perp} = 3 - 2p$, de forma que sejam sempre repulsores. Consequentemente, há uma bifurcação sela-repulsor em $p_c = 1$. Para p aproximando-se de p_c pela esquerda, a sela \mathbf{x}_p e o par de pontos repulsores \mathbf{r}_\pm unem-se restando apenas um repulsor no subespaço invariante para $p > p_c$ [49].

gens. constituindo um conjunto aberto denso de pontos periódicos com medida de Lebesgue nula^{‡‡}. O complemento desse conjunto é um conjunto de pontos que permanecem transversalmente estáveis, do tipo Cantor, fechado e denso, com medida de Lebesgue 1. Portanto, devido à existência de uma órbita caótica densa no atrator A , uma trajetória escolhida aleatoriamente será transversalmente estável com probabilidade unitária. Os pontos fixos \mathbf{r}_\pm pertencem à fronteira entre as bacias do atrator caótico presente no subespaço invariante $M = [0, 1]$ e a bacia do atrator no infinito. A fronteira entre essas duas bacias de atração é fractal para $p < p_c$ e não há crivamento nessa situação. No ponto de bifurcação, entretanto, essa fronteira entre as bacias colide com o atrator, assim como todas as incontáveis infinitas pré imagens de \mathbf{x}_p , resultando num conjunto aberto e denso de línguas que se originam nas pré imagens do ponto fixo \mathbf{x}_p .

Os expoentes finitos máximos de Lyapunov para as Eqs. (2.20) são obtidos a partir da Eq. (2.10), para as direções paralela e transversal [49],

$$\tilde{\lambda}_{\parallel}(x_0, y_0 = 0, n) = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} \ln |4(1 - 2x_n)|, \quad (2.22)$$

^{‡‡}Detalhes sobre conjuntos estão no Ap. A.

$$\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, y_0 = 0, n) = \ln p - \frac{5}{n} \sum_{0}^{n-1} \left(x_n - \frac{3}{4} \right)^2 \equiv \ln p + \mathcal{I}(n). \quad (2.23)$$

Entretanto, para trajetórias caóticas típicas no atrator a densidade natural sobre o atrator é dada por $\rho(x) = 1/(\pi \sqrt{x(1-x)})$ [49], e os termos das Eqs. (2.22) e (2.23) dependentes do tempo independem das condições iniciais. Assim,

$$\lambda_{\parallel} = \lim_{n \rightarrow \infty} = \tilde{\lambda}_{\parallel}(x_0, y_0 = 0, n) = \int_0^1 \rho(x_n) 4(1-2x_n) dx_n = \int_0^1 \frac{4(1-2x_n) dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}} = \ln 2, \quad (2.24)$$

$$\lambda_{\perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} = \tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, y_0 = 0, n) = \ln p - 5 \int_0^1 \frac{(x-3/4)^2 dx}{\pi \sqrt{x(1-x)}} \equiv \ln p - \frac{15}{16}, \quad (2.25)$$

de forma que o atrator caótico perde estabilidade quando λ_{\perp} torna-se positivo, ou seja, em $p = p^* = \exp(15/16) \approx 2.553$. Portanto, para $p_c = 1 < p < p^*$ o valor de λ_{\perp} é negativo para a maioria das condições iniciais pertencentes ao atrator caótico, satisfazendo então a condição 4. Ao mesmo tempo, o expoente transversal máximo de tempo finito pode ser positivo se $\ln p + \mathcal{I} > 0$, o que acontece para parte das condições iniciais $(x_0, y_0 = 0)$ tomadas sobre o subespaço invariante. Isto porque dependendo do valor de n a soma em \mathcal{I} assume valores diferentes conforme se aproxima de órbitas transversalmente instáveis ou estáveis em A . Com isso a condição 5 é satisfeita e conclui-se que a bacia de atração do atrator existente em $y = 0$ é crivada pela bacia do estado $|y| = \infty$.

Capítulo 3

Dinâmica transversal a órbitas caóticas em variedades invariantes

A partir da sincronização de mapas caóticos acoplados é possível mostrar que o subespaço invariante apresenta uma dinâmica transversal de flutuações que podem ser consideradas, numa boa aproximação, como variáveis estatisticamente independentes, obedecendo à equação de difusão de Fokker-Planck. É nesse contexto que Ott *et al.* [4] propõe um modelo estocástico para a distribuição dos expoentes finitos, satisfazendo uma lei de escala cujo expoente varia continuamente com a distância ao ponto de bifurcação e é determinado pela distribuição do expoente finito de Lyapunov do mapa desacoplado.

3.1 Sincronização de caos

Um estado sincronizado, em um forte acoplamento dissipativo, é atingido quando os subsistemas movem-se completamente em fase e com a mesma amplitude. Com a diminuição do fator de acoplamento o regime sincronizado perde estabilidade e os estados instantâneos dos subsistemas passam a ser diferentes. O limite entre estabilidade e instabilidade depende do expoente de Lyapunov do movimento caótico e a perda de estabilidade do regime sincronizado pode ser considerado como uma quebra de simetria. As teorias propostas para bifurcações devido à quebra de simetria falhavam em fornecer uma distribuição da componente assimétrica na forma de lei de potência, como observadas em experimentos numéricos [52, 53]. A teoria proposta por Pikovsky produz tal distribuição em lei de potência, onde o expoente de Lyapunov depende de maneira não trivial dos expoentes finitos.

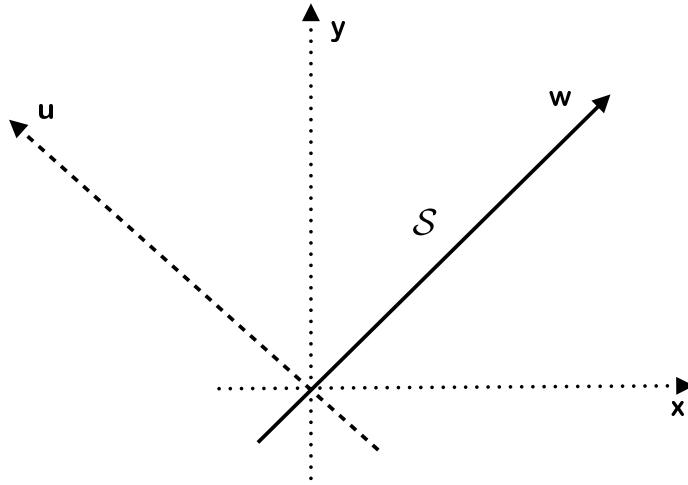


Figura 3.1: Pela transformação de variáveis Eq. (3.2), a análise da estabilidade do regime sincronizado é feita em termos de u e w . A variedade de sincronização \mathcal{S} é caracterizada por $u = 0$; $u \neq 0$ denota a dinâmica transversal à \mathcal{S} , enquanto w descreve a dinâmica em \mathcal{S} .

Considerando dois mapas caóticos (idênticos) acoplados

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n) + \sigma(f(y_n) - f(x_n)), \\ y_{n+1} &= f(y_n) + \sigma(f(x_n) - f(y_n)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

em que f é uma função não linear que governa a dinâmica do sistema isolado e σ é uma constante de acoplamento. O regime sincronizado é atingido quando $x_n = y_n$ para todo n , definindo uma variedade de sincronização \mathcal{S} . Tal variedade de sincronização é invariante, ou seja, o estado sincronizado \mathcal{S} é uma solução de (3.1) e a dinâmica em \mathcal{S} é caótica, como no mapa isolado.

Pela transformação de variáveis,

$$w_n = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad u_n = \frac{x_n - y_n}{2}, \quad (3.2)$$

que é uma rotação dos eixos em 45 graus a menos de um fator de escala, a análise da estabilidade do regime sincronizado é feita em termos de u e w . A variedade de sincronização \mathcal{S} é caracterizada por $u = 0$; $u \neq 0$ denota a dinâmica transversal a \mathcal{S} , enquanto w descreve a dinâmica em \mathcal{S} ,

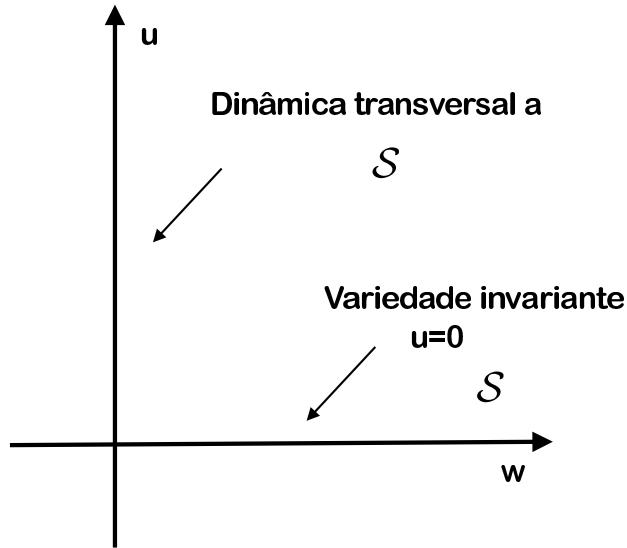


Figura 3.2: A dinâmica em S é independente da variável u_n e os pontos da órbita sobre S são proporcionais aos pontos da órbita do mapa não acoplado sobre S .

$$\begin{cases} w_{n+1} = \frac{1}{2}(f(w_n + u_n) + f(w_n - u_n)) & \text{(dinâmica paralela a } S\text{),} \\ u_{n+1} = (\frac{1}{2} - \sigma)(f(w_n + u_n) - f(w_n - u_n)) & \text{(dinâmica transversal a } S\text{).} \end{cases} \quad (3.3)$$

Em S , $u_n = 0$ e a dinâmica em S é

$$w_{n+1} = f(w_n) \quad (3.4)$$

A dinâmica em S é independente da variável u_n e os pontos da órbita sobre S são proporcionais aos pontos da órbita do mapa não acoplado sobre S .

Linearizando próximo ao estado $u_n = 0$,

$$u_{n+1} = (1 - 2\sigma)f'(w_n)u_n. \quad (3.5)$$

Em termos da variável $z_n = \ln |u_n|$,

$$z_{n+1} = z_n + \ln(1 - 2\sigma) + \ln |f'(w_n)|, \quad (3.6)$$

que pode ser reescrita como

$$z_{n+1} = z_n + \ln |f'(w_n)| + \ln(1 - 2\sigma). \quad (3.7)$$

A condição de estabilidade na dinâmica transversal à variedade de sincronização implica em $z_{n+1} - z_n = 0$ para algum valor crítico da variável de acoplamento $\sigma = \sigma_c$, de onde

$$\varepsilon = \ln(1 - 2\sigma_c) + \lambda_{\sigma_c} = 0, \quad (3.8)$$

sendo $\lambda_{\sigma_c} = \ln |f'(w_n)|$, em $\sigma = \sigma_c$. Quando $\sigma < \sigma_c$ o estado é não sincronizado. Como a região de interesse é a região próxima a σ_c , é conveniente escrever a Eq. (3.7) em função da quantidade ε , que se anula no valor de $\sigma \approx \sigma_c$,

$$z_{n+1} = z_n + \ln |f'(w_n)| + (\varepsilon - \lambda_{\sigma_c}). \quad (3.9)$$

Tomando então o intervalo de σ para o qual $\sigma \approx \sigma_c$,

$$z_{n+1} = z_n + \ln |f'(w_n)|. \quad (3.10)$$

A importância em se obter a Eq. (3.9) está no fato de que esta é a aproximação discreta da equação de Langevin*,

$$z_{n+1} = z_n + \tau f(z_n) + (\tau C)^{1/2} \xi_n. \quad (3.11)$$

τ é o intervalo de tempo usado na discretização do tempo contínuo $t = n\tau$, C é uma constante e ξ_n é um ruído branco, isto é, uma variável aleatória que depende do tempo, cuja média no tempo é nula, a variância é igual à unidade e o valor ξ em cada instante de tempo são independentes, ou seja [54],

$$\langle \xi_n \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle \xi_n^2 \rangle = 1. \quad (3.12)$$

Se $P_n(z_n)$ é a distribuição de probabilidades da variável z_n e $g_n(k)$ a função característica correspondente

$$g_n(k) = \langle e^{ikz_n} \rangle = \int e^{ikz_n} P_n(z_n) dz_n, \quad (3.13)$$

então

$$g_{n+1}(k) = \langle e^{ikz_{n+1}} \rangle = \langle e^{ik[z_n + \tau f(z_n) + \tau \xi_n]} \rangle. \quad (3.14)$$

*A forma diferencial da equação de Langevin é $dx/dt = f(x) + \zeta(t)$. No tempo contínuo t , as propriedades do ruído branco $\zeta(t)$ são $\langle \zeta(t) \rangle = 0$ e $\langle \zeta(t) \rangle \langle \zeta(t') \rangle = C\delta(t - t')$ [54].

Como z_n e ζ_n são variáveis independentes, a Eq. (3.14) pode ser escrita como

$$g_{n+1}(k) = \langle e^{ik[z_n + \tau f(z_n)]} \rangle \langle e^{ik\tau\zeta_n} \rangle. \quad (3.15)$$

Expandindo Eq. (3.15) até os termos em primeira ordem de τ ,

$$g_{n+1}(k) = \langle e^{ikz_n} e^{ik\tau f(z_n)} \rangle \langle e^{ik\tau\zeta_n} \rangle = \langle e^{ikz_n} [1 + ik\tau f(z_n)] \rangle \langle [1 + ik\tau\zeta_n + (ik\tau\zeta_n)^2/2] \rangle.$$

Mas $\langle \zeta_n \rangle = 0$ e $\langle \zeta_n^2 \rangle = C/\tau$,

$$g_{n+1}(k) = g_n(k) + \tau \left\{ ik \langle f(z_n) e^{ikz_n} \rangle - \frac{C}{2} k^2 \langle e^{ikz_n} \rangle \right\}. \quad (3.16)$$

Considerando que

$$ik \langle f(z_n) e^{ikz_n} \rangle = \langle f(z) \frac{d}{dz} e^{ikz} \rangle = - \int e^{ikz} \frac{d}{dz} [f(z) P_n(z)] dz,$$

e

$$-k^2 \langle e^{ikz_n} \rangle = \langle \frac{d^2}{dz^2} e^{ikz} \rangle = \int e^{ikz} \frac{d^2}{dz^2} [P_n(z)] dz,$$

conclui-se que

$$P_{n+1}(z) - P_n(z) = -\tau \frac{d}{dz} [f(z) P_n(z)] + \tau \frac{C}{2} \frac{d^2}{dz^2} P_n(z).$$

No limite de $\tau \rightarrow \infty$,

$$\frac{\partial}{\partial t} P(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} [f(z) P_n(z)] + \frac{C}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} P(z, t), \quad (3.17)$$

que é a evolução temporal da distribuição de probabilidade $P(z, t)$ e é chamada de equação de Fokker-Planck, que determina a distribuição de probabilidade $P(z, t)$ em cada instante $t > 0$, dada a distribuição $P(z, 0)$ no instante $t = 0$. Se no instante inicial a órbita estiver localizada em z_0 , então $P(z, 0) = \delta(z - z_0)$ [54].

Voltando à Eq. (3.10), embora os valores da órbita $\{w_n\}$ não sejam estatisticamente independentes, a função de autocorrelação c_η ,

$$c_\eta = \frac{\langle w_n w_{n-\eta} \rangle - \langle w \rangle^2}{s^2} \quad (3.18)$$

(onde $\eta \ll N$ é o tempo de retardo, $\langle w \rangle$ é o valor médio e s^2 é a variância) decai exponencialmente com o aumento de η se a variável w é de natureza caótica [55]. Consequentemente, as quantidades $\tilde{\lambda} = \ln(|f'(w_n)|)$ também podem ser consideradas, em boa

aproximação, como estatisticamente independentes e correspondem ao expoente de Lyapunov “instantâneo”. Para um intervalo de tempo N , $\Delta z = N\tilde{\lambda}(n)$, onde $\tilde{\lambda}(n)$ é o expoente de Lyapunov de tempo finito

$$\tilde{\lambda}(n) = \frac{1}{N} \sum_1^N \ln(|f'(w_n)|). \quad (3.19)$$

Então se w é uma variável caótica, os incrementos $z_{n+1} - z_n$ são variáveis essencialmente aleatórias. Por outro lado, $\Delta z = \tilde{\lambda}(n)$ e por isso espera-se que $P(\tilde{\lambda}(n))$ seja uma solução da equação de Fokker-Planck (Eq. (3.17)) e para $n \rightarrow \infty$ a distribuição $P(\tilde{\lambda}(n))$ seja da forma gaussiana, com $\lambda_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}(n)$. Dessa forma é possível deduzir as leis de escala do modelo estocástico apresentado a seguir, pois a suposição de que a distribuição dos expoentes de Lyapunov de tempo finito pode ser considerada como uma distribuição de variáveis estatisticamente independentes é uma aproximação válida para a dinâmica transversal ao subespaço invariante.

3.2 Modelo estocástico para expoentes de Lyapunov de tempo finito

Ott *et al.* publicaram em 1994 o trabalho citado na referência [4], no qual apresenta um modelo para o crivamento baseado no passeio aleatório. A dedução do modelo começa com o seguinte mapa bidimensional, definido em $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$,

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}x_n & \text{para } x_n < \alpha \\ \frac{1}{\beta}(x_n - \alpha) & \text{para } x_n > \alpha \end{cases}, \quad y_{n+1} = \begin{cases} \gamma y_n & \text{para } x_n < \alpha \\ \delta y_n & \text{para } x_n > \alpha \end{cases}, \quad (3.20)$$

sendo $0 < \alpha < 1$, $\beta = 1 - \alpha$, $\gamma > 1$ e $0 < \delta < 1$. A Fig. 3.3(a) ilustra o mapa em bidimensional (3.20) e a Fig. 3.3(b) apresenta um esquema ilustrativo do passeio aleatório na direção y . Na direção y , existe a contração e a expansão das órbitas, dadas por δ e γ . Supõe-se a existência de um atrator em alguma região para $y > 1$, de forma que ultrapassado esse valor de y , as órbitas se afastem definitivamente do domínio das Eqs. (3.20). Para $y = 0$, as equações em x garantem para quase todas as condições tomadas no intervalo $I = [0, 1]$ uma órbita caótica que converge para I com probabilidade uniforme. Para condições iniciais tomadas aleatoriamente sobre I , o expoente de Lyapunov da dinâmica sobre I é dado por

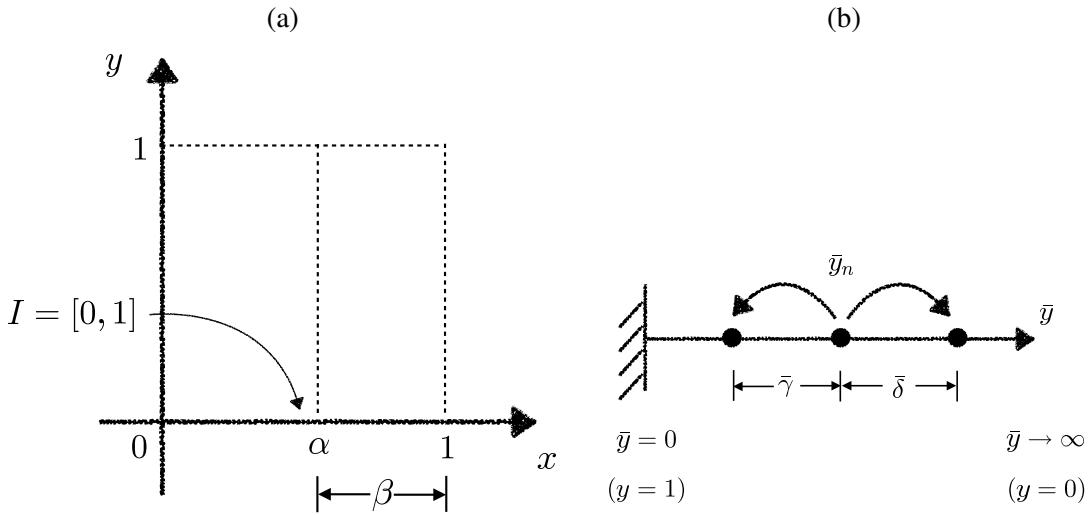


Figura 3.3: (a) Ilustração do mapa (3.20). (b) Ilustração do passeio aleatório [4].

$$\lambda_{\parallel} = \alpha \ln \frac{1}{\alpha} + \beta \ln \frac{1}{\beta} > 0. \quad (3.21)$$

O conjunto I será um atrator caótico no espaço bidimensional se o expoente de Lyapunov na direção y ,

$$\lambda_{\perp} = \alpha \ln \gamma + \beta \ln \delta, \quad (3.22)$$

for negativo[†]. Assim, os parâmetros α , γ e δ determinam se I é um atrator do sistema. Para que a Eq. (3.22) produza $\lambda_{\perp} < 0$, o parâmetro α deve ser menor que um valor crítico α_c dado por

$$\alpha_c = \frac{|\ln \delta|}{\ln \gamma + |\ln \delta|}. \quad (3.23)$$

A fim de entender que para $\lambda_{\perp} < 0$ a bacia do atrator em $y = 0$ é crivada, considere uma órbita iniciada na região $0 \leq x \leq \alpha$ que eventualmente entra na região $y > 1$ sem, no entanto, sair de $0 \leq x \leq \alpha$. Sendo $x_{n+1} = \alpha^{-1}x_n$ e $y_{n+1} = \gamma y_n$, percebe-se que elas se originam nas regiões hachuradas da Fig. 3.4. Além disso, as pré-iteradas dessa condição inicial também estão na bacia do atrator em $y > 1$. A Fig. 3.4 mostra a região original (hachurada) e suas primeiras duas pré-iterações (sombreada). A primeira pré-iteração da região em questão toca o eixo x , na primeira pré-iteração de $x = 0$, no caso $x = \alpha$. O mesmo acontece para as pré-iterações seguintes, formando finas regiões da bacia de atração do atrator em $y > 1$, estendendo-se de $y = 0$ até $y = 1$. Como as pré-iteradas de $x = 0$, $y = 0$ são densas em I , a bacia de atração de $y > 1$ é densa na região $y < 1$. Entretanto, existe

[†]O cálculo analítico dos expoentes de Lyapunov é detalhado no Ap. B.

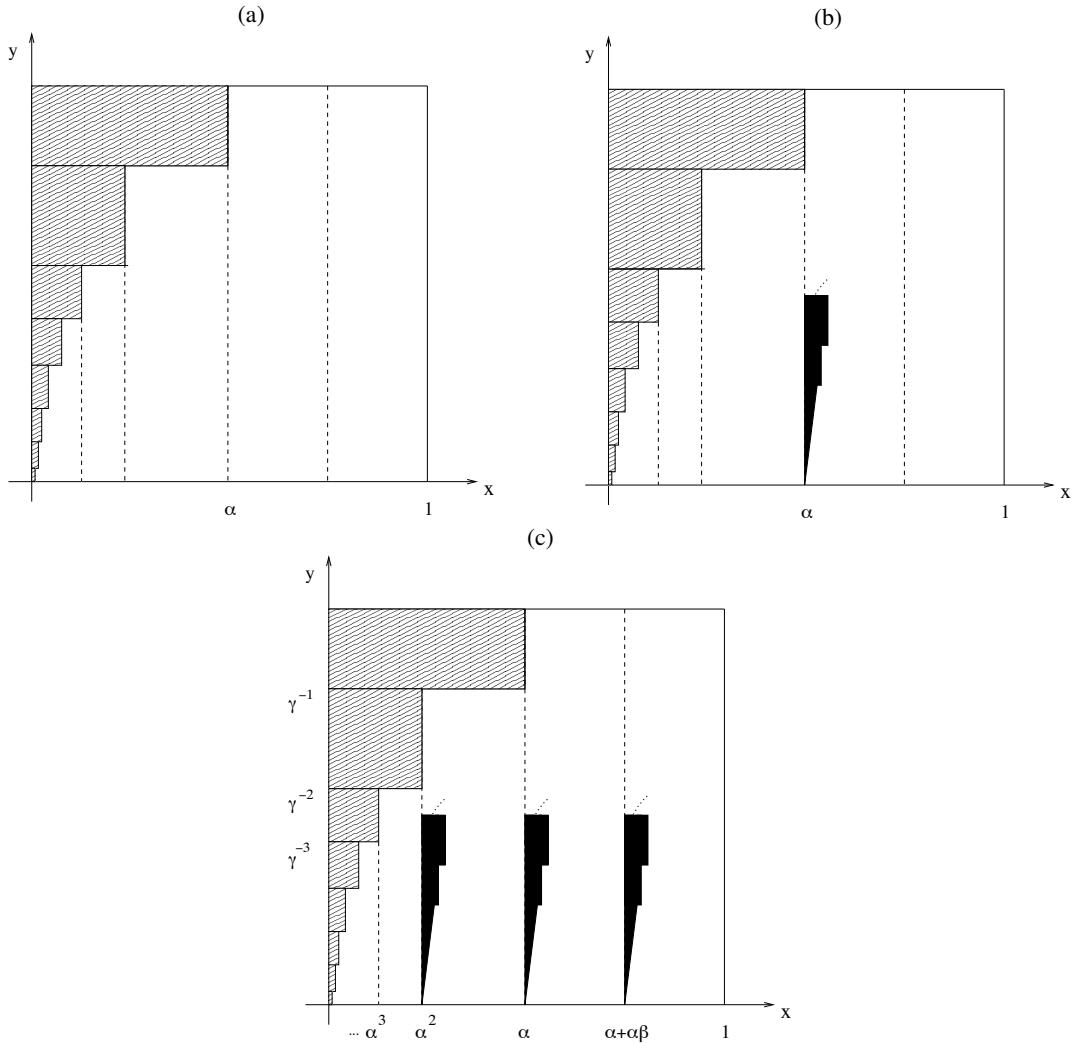


Figura 3.4: Nesse esquema ilustrativo existe uma região hachurada pertencente à bacia de atração de $y > 1$ que se estende a partir de $(x, y) = (0, 0)$ e suas pré-iteradas indicadas pelas partes sombreadas [4]. (a) Após i iterações x_i só permanecerá no intervalo $0 < x_i < \alpha$ se x_0 estiver na região hachurada, pois como $\alpha < 1$ e $x_{n+1} = (1/\alpha)x_n$ tem-se que $x_{n+1} > x_n$, então para que a órbita permaneça em $x < \alpha$ depois de um tempo i x deve ser próximo de zero. Quanto à y , $\gamma > 1$. (b) A primeira pré iteração da região hachurada é a primeira pré iteração de $x = 0$, que está na região $x > \alpha$, precisamente em $x = \alpha$. (c) A segunda pré iteração da região hachurada é a primeira iteração de $x_n = \alpha$, localizada em α^2 e $\alpha + \alpha\beta$. As pré iterações de $x = 0$ tocam o eixo x em $y = 0$ e as pré iterações de $(x = 0, y = 0)$ são densas em I , assim a bacia do atrator $y > 1$ é densa no intervalo I na região $y < 1$.

uma fração não nula da área em $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$, para a qual as condições iniciais são atraídas pelo atrator em $y = 0$. O que leva então ao crivamento da bacia em $y = 0$. A Fig. 3.3 ilustra o mapa (Eq. (3.20)). O mapa em x tem uma medida natural uniformemente distribuída. Ao tomar aleatoriamente uma condição inicial em x_1 , que produzirá uma órbita

$\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$ a probabilidade de que x_n esteja na região $(0, \alpha)$ é α , ao passo que a probabilidade de x_n estar em $(\alpha, 1)$ é $\beta \equiv 1 - \alpha$. Trata-se de um passeio aleatório com probabilidades diferentes. Analisando então a dinâmica em y ,

$$\begin{cases} \text{se } x \in (0, \alpha) : & y \mapsto \gamma y \quad \text{com probabilidade } \alpha \text{ de } y \rightarrow \infty (\gamma > 1), \\ \text{se } x \in (\alpha, 1) : & y \mapsto \delta y \quad \text{com probabilidade } \beta \text{ de } y \rightarrow 0 \quad (\delta < 1). \end{cases} \quad (3.24)$$

Introduzindo uma mudança de variáveis tal que

$$\bar{y} = \ln \frac{1}{y}, \quad \bar{\gamma} = \ln \gamma, \quad \bar{\delta} = \ln \frac{1}{\delta}, \quad (3.25)$$

segue

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n - \bar{\gamma} & \text{com probabilidade } \alpha, \\ \bar{y}_{n+1} = \bar{y}_n + \bar{\delta} & \text{com probabilidade } \beta, \end{cases} \quad (3.26)$$

que leva a seguinte interpretação

$$\begin{cases} \text{se } \bar{y}_n \rightarrow \bar{y} = 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \in \text{bacia de atração de } y > 1, \\ \text{se } \bar{y}_n \rightarrow \bar{y} = \infty \Rightarrow (x_0, y_0) \in \text{bacia de atração de } y = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Numa aproximação para a difusão, os parâmetros básicos são o desvio médio por iteração, v , e a variância por iteração, D . Para um passeio aleatório de passos descorrelacionados,

$$D = \frac{1}{2} \langle (\Delta \bar{y} - \langle \Delta \bar{y} \rangle)^2 \rangle, \quad (3.28)$$

com $\Delta \bar{y}$ sendo igual ao incremento em \bar{y} em um passo de tempo. Para esse modelo,

$$v = \beta \bar{\delta} - \alpha \bar{\gamma} = -\lambda_{\perp}, \quad (3.29)$$

de acordo com a Eq. (3.22), o que leva a

$$D = \frac{1}{2} \alpha \beta (\bar{\delta} + \bar{\gamma})^2. \quad (3.30)$$

Seja $P(\bar{y}, \bar{y}_1, n)$ a função de distribuição de probabilidade para \bar{y} (dado que x_1 é escolhida aleatoriamente no segmento $y = y_1$, $0 \leq x \leq 1$). Considerando n aproximadamente uma variável contínua, $P(\bar{y}, \bar{y}_1, n)$ obedece a equação de difusão-deriva (Fokker-Planck) [54],

$$\frac{\partial P}{\partial n} + v \frac{\partial P}{\partial \bar{y}} = D \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{y}^2}. \quad (3.31)$$

Como todas as condições iniciais começam em $y = y_1$,

$$P(\bar{y}, \bar{y}_1, 0) = \delta(\bar{y} - \bar{y}_1), \quad \bar{y}_1 > 0, \quad (3.32)$$

e como toda órbita que cruza $y = 1$ ($\bar{y} = 0$) é perdida para o atrator em $y > 1$,

$$P(0, \bar{y}_1, n) = 0, \quad (3.33)$$

A aproximação para a difusão possui uma importante propriedade: independente dos parâmetros originais do sistema, a aproximação depende basicamente de v e D , pois existe uma infinidade de conjuntos de parâmetros de tal sistema que produzem os mesmos v e D . Ott *et al.* [4] conjectura a existência de um comportamento universal na vizinhança de transição de um atrator com uma bacia crivada e que esse comportamento é governado pela equação de difusão-deriva e seus parâmetros v e D . Por universal entende-se que o mesmo fenômeno ocorre e é governado quantitativamente por D e v para uma grande classe de sistemas, independentemente de suas características individuais.

Pode-se pensar em D caracterizando o decréscimo na dispersão do expoente de Lyapunov λ_\perp a tempo finito em função do tempo. Suponha que diversos valores iniciais x_1 sejam espalhados uniformemente sobre o atrator, e então estima-se λ_\perp para cada órbita resultante usando as n primeiras iterações da órbita. Para um dado x_1 , o expoente estimado $\tilde{\lambda}_\perp$ será

$$\tilde{\lambda}_\perp(n, x_1) = \frac{n_\alpha(x_1)}{n} \ln \gamma + \frac{n_\beta(x_1)}{n} \ln \delta,$$

sendo $n_\alpha(x_1)$ o número de vezes que a órbita, começando em $x = x_1$, vai para a região $(0, \alpha)$, e $n_\beta(x_1)$ o número de vezes que a órbita vai para a região $(\alpha, 1)$. Com probabilidade unitária, a escolha randômica x_1 , resulta em uma órbita para a qual

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\alpha}{n} = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_\beta}{n} = \beta,$$

de forma que

$$\lambda_\perp = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_\perp(n, x_1).$$

Entretanto, para n finito existem flutuações de $\tilde{\lambda}_\perp$ em torno de λ_\perp . Para $n \rightarrow \infty$, $\langle \tilde{\lambda}_\perp \rangle \equiv \int \tilde{\lambda}_\perp F(\tilde{\lambda}_\perp, n) d\tilde{\lambda}_\perp \rightarrow \lambda_\perp$ e a dispersão em torno da média dada por $\langle (\Delta \tilde{\lambda}_\perp)^2 \rangle^{1/2} = [\int (\tilde{\lambda}_\perp - \langle \tilde{\lambda}_\perp \rangle)^2 F d\tilde{\lambda}_\perp]^{1/2}$ que vai a zero com $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\langle (\Delta \tilde{\lambda}_\perp)^2 \rangle^{1/2} \cong \sqrt{\frac{2D}{n}}, \quad (3.34)$$

ou

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} n \langle (\Delta \tilde{\lambda}_\perp)^2 \rangle, \quad (3.35)$$

que segue de $\tilde{\lambda}_\perp = (\bar{y}_n - \bar{y}_1)/n$.

3.3 Leis de escala

A fim de estabelecer alguns resultados para o comportamento crítico do modelo, quando $\alpha = \alpha_c$, determina-se, dada uma reta $y = y_1$, a fração das órbitas nessa reta que estão na bacia de atração do atrator em $y > 1$, como mostra a Fig. 3.5. Se x_1 é escolhido aleatoriamente em $(0, 1)$, então a probabilidade de que (x_1, y_1) esteja na bacia do atrator em $y > 1$ é a fração do comprimento da reta que está na bacia de atração de $y > 1$, daí é possível aplicar as Eqs. (3.31)-(3.33).

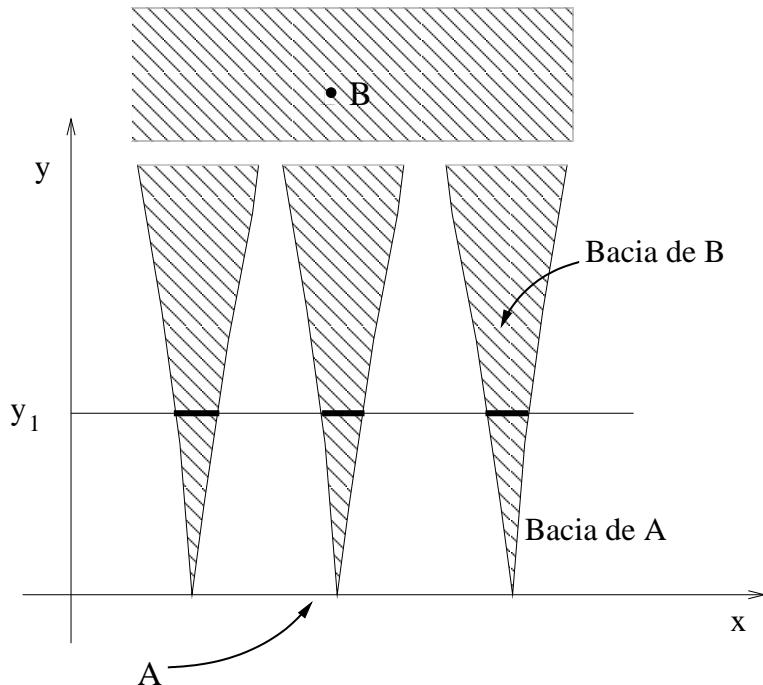


Figura 3.5: Dada uma reta $y = y_1$, pretende-se determinar a fração das órbitas nessa reta que estão na bacia de atração do atrator em $y > 1$. Esse atrator está indicado pelas regiões hachuradas. A região em branco indica a bacia do atrator caótico A.

Seja $\bar{P}(\bar{y}, \bar{y}_1, s)$ a transformada de Laplace de $P(\bar{y}, \bar{y}_1, n)$ em relação a variável contínua n ,

$$\bar{P}(\bar{y}, \bar{y}_1, s) = \int_0^\infty e^{-sn} Pdn.$$

A Eq. (3.31) produz então

$$D \frac{d^2 \bar{P}}{d\bar{y}^2} - \nu \frac{d\bar{P}}{d\bar{y}} - s\bar{P} = -\delta(\bar{y} - \bar{y}_1), \quad (3.36)$$

com a condição de contorno $\bar{P}(0, \bar{y}_1, s) = 0$. A probabilidade de num passeio aleatório a órbita nunca alcançar $\bar{y} = 0$ é

$$1 - P_\star = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty P(\bar{y}, \bar{y}_1, n) d\bar{y},$$

em que P_\star é a fração da reta na bacia de $y > 1$. Através das propriedades das transformadas de Laplace, pode-se escrever $(1 - P_\star)^{\ddagger}$ como

$$1 - P_\star = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^\infty \bar{P}(\bar{y}, \bar{y}_1, s) d\bar{y}. \quad (3.37)$$

Resolvendo a integral, encontra-se $1 - P_\star = 1 - \exp[-\bar{y}_1 \eta]$, com $\eta = \nu/D$. Portanto,

$$P_\star \sim y_1^\eta, \quad \eta = \nu/D. \quad (3.38)$$

Assim a medida da bacia de $y > 1$ aumenta numa lei de potência em y com expoente $\eta = \nu/D$. Combinada à Eq. (3.29), η pode ser escrito em função do expoente máximo transversal finito,

$$\eta = \frac{|\lambda_\perp|}{D}. \quad (3.39)$$

Esse resultado fornece o comprimento total ocupado pelas bacias de atração na reta $y = y_1$, mas não acrescenta nenhuma informação sobre a fina escala de crivamento da bacia do atrator $y = 0$.

A informação desejada sobre a escala fina de crivamento é fornecida pela fração incerta das órbitas. Tomando dois pontos aleatoriamente no mesmo intervalo ε no segmento de reta $y = y_1$, $0 < x < 1$, a probabilidade desses dois pontos pertencerem a diferentes bacias de atração é $p(\varepsilon, x_1, y_1)$, com x_1 no centro do intervalo ε . Agora seja p_0 a probabilidade de uma condição inicial pertencer à bacia do atrator $y = 0$ e $p_1 = 1 - p_0$ a probabilidade de uma condição inicial pertencer à bacia de atração do atrator $y > 1$. Existem quatro resultados possíveis, com dois casos onde tais condições iniciais pertencem a diferentes bacias, de forma que $p = 2p_0p_1$. Como y_1 é pequeno, p_1 também é pequeno e $p \approx 2p_1$. Para determinar p_1 , o mapa é iterado \bar{n} vezes a fim de que o intervalo ε centrado em x_1 mapeie em algum y e cubra o intervalo em x , $0 < x < 1$. A fração do intervalo original ε na

[†]Detalhes no Ap. C.

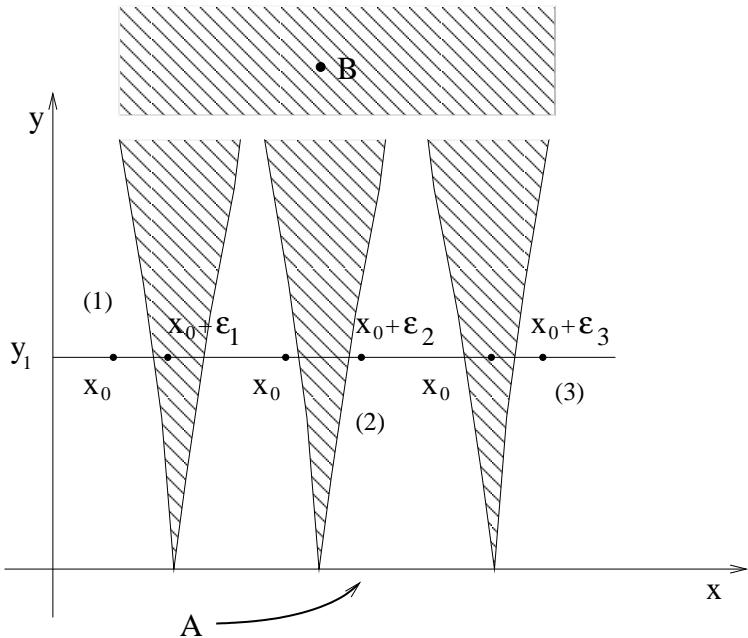


Figura 3.6: Escolhe-se um ponto aleatoriamente sobre a reta $y = y_1$, (x_0, y_1) e um segundo ponto com x_ε escolhido aleatoriamente com probabilidade uniforme no intervalo de comprimento 2ε centrado no primeiro ponto. (1) mostra uma situação onde a condição x_0 pertence à bacia do atrator caótico A mas a condição $x_0 + \varepsilon_1$ pertence à bacia do atrator no infinito. Em (2), tanto x_0 quanto $x_0 + \varepsilon_2$ pertencem à bacia do atrator caótico A e na situação (3) está o inverso de (1): x_0 pertence à bacia do atrator no infinito enquanto $x_0 + \varepsilon_3$ pertence à bacia do atrator caótico A .

bacia de $y > 1$ será y^η e consequentemente $p_1 \sim \exp(-\eta\bar{y})$. Com esses resultados e tomando a média em x_1 , a probabilidade $\langle p \rangle$ é dada por

$$\langle p \rangle \cong \int_0^\infty 2 \exp(-\eta\bar{y}) P(\bar{y}_1, \bar{y}, \bar{n}) d\bar{y} \quad (3.40)$$

A solução dessa integral[§] para $\langle p \rangle$ é $\langle p \rangle \sim \exp((v^2/4D\lambda_{||}) \ln(1/\varepsilon))$ [4], e assim

$$\langle p \rangle \sim \varepsilon^{v^2/4D\lambda_{||}}$$

Por outro lado, pelo cálculo da fração incerta das condições iniciais que pertencem a bacias de atração distintas tem-se

$$\phi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \langle p \rangle}{\ln \varepsilon}. \quad (3.41)$$

Para ε pequeno,

$$\langle p \rangle \sim \varepsilon^\phi, \quad (3.42)$$

[§]Detalhes no Ap. C

de onde determina-se

$$\phi = \frac{\lambda_{\perp}^2}{4D\lambda_{\parallel}}, \quad (3.43)$$

em termos do expoente finito de Lyapunov.

Da Eq. (3.34), tem-se que

$$\eta = \frac{2|\lambda_{\perp}|}{n\sigma^2}, \quad (3.44)$$

$$\phi = \frac{\lambda_{\perp}^2}{2n\sigma^2\lambda_{\parallel}}. \quad (3.45)$$

Tais leis de escala permitem que a caracterização do crivamento possa ser feita também pela distribuição dos expoentes finitos de Lyapunov. Lembrando que as leis de escala são válidas em uma região do parâmetro próxima ao valor em que o expoente de Lyapunov máximo transversal permaneça negativo.

Capítulo 4

Crivamento de bacias em um sistema biológico

Sistemas compostos por espécies que disputam a mesma fonte de alimentos num mesmo ambiente frequentemente exibem *bacias entrelaçadas*, que são bacias de atratores distintos que crivam-se mutuamente. Podem ser considerados o problema de predador-presa ou o problema de competição entre espécies. Do ponto de vista ecológico é importante prever o comportamento dinâmico de espécies que coabitam o mesmo ambiente, a fim de evitar estados de equilíbrio. Hofbauer *et al.* [56] mostrou que um tipo de sistema competitivo de duas espécies pode ser modelado através de um mapa para o qual Kan [57] demonstrou a existência de bacias densas em todos os pontos e entrelaçadas. Tal sistema competitivo é composto por duas espécies de besouros, o *Tribolium castaneum* e o *Tribolium confusum*. Os besouros *Tribolium castaneum* e o *Tribolium confusum* possuem habitats e aparência semelhantes. Ambos atacam produtos obtidos da moagem de grãos, como farinha e cereais; são insetos comuns em moinhos de farinha em diversos países, causando prejuízos para armazéns e fábricas. Experimentos envolvendo a evolução dessas duas espécies mostraram que o resultado final é a extinção de uma das espécies. Qual das espécies é extinta parece depender da população inicial e de condições relativas ao meio de forma extremamente sensível [58].

4.1 Modelo competitivo entre espécies

Embora sistemas competitivos de duas espécies descritos por equações contínuas no tempo apresentem uma dinâmica relativamente simples, o mesmo não acontece quando o tempo é discreto. Para um sistema contínuo regido por equações do tipo $\dot{x}^{(i)} = x^{(i)}\varphi(x^{(1)}, x^{(2)})$,

com ($i = 1, 2$) sendo $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ as populações das duas espécies, a condição

$$\frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial x^{(j)}} < 0 \quad \text{para } i, j = 1, 2, \quad (4.1)$$

é suficiente para restringir a dinâmica. Existem três tipos possíveis de comportamento: coexistência no equilíbrio estável, uma espécie sobrevive à outra ou o sistema apresenta biestabilidade. No caso de sistemas governados por mapas do tipo

$$x^{(i)\prime} = x^{(i)}\varphi^{(i)}(x^{(1)}, x^{(2)}), \quad (4.2)$$

a situação é mais complicada, pois sistemas simples de uma espécie modelados por mapas $x \mapsto x^{(i)\prime} = T(x) = x\varphi(x)$ apresentam comportamentos complexos. Um exemplo típico é o caso do mapa quadrático

$$T(x) = Rx(1 - x), \quad x \in [0, 1]. \quad (4.3)$$

Hofbauer *et al.* [56] traz uma adaptação do modelo de Kan [57] para uma classe de modelos para sistemas competitivos entre duas espécies, rigorosamente provando a existência de bacias entrelaçadas. Seus exemplos partem de perturbações aplicadas a sistemas competitivos do tipo

$$x^{(i)\prime} = x^{(i)}\varphi(x^{(1)} + x^{(2)}), \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Este modelo tem duas características especiais: primeiro,

$$\frac{x^{(2)\prime}}{x^{(1)\prime}} = \frac{x^{(2)}}{x^{(1)}}$$

o que significa que as retas que passam pela origem são invariantes sob a Eq. (4.4) e a proporção de cada espécie no sistema total não muda de uma geração para outra. Segundo, a densidade total da população, $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, muda de acordo com $T(x) = x' = x\varphi(x)$, seu valor na próxima geração depende unicamente do valor presente de x . Considere perturbações da forma

$$\begin{aligned} x^{(1)\prime} &= x^{(1)}\varphi(x^{(1)} + x^{(2)})(1 + \kappa x^{(2)}G(x^{(1)}, x^{(2)})), \\ x^{(2)\prime} &= x^{(2)}\varphi(x^{(1)} + x^{(2)})(1 - \kappa x^{(1)}G(x^{(1)}, x^{(2)})). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Se $\varphi'(x) < 0$ para todo $x \geq 0$ e κ pequeno então as Eqs. (4.5) ainda definem um sistema competitivo seguindo a condição da Eq. (4.1). Introduzindo a mudança de variáveis $x = x^{(1)} + x^{(2)}$, como a densidade total da população, e $y = x^{(1)}/x$, como a proporção da espécie

1 na população total, tem-se uma simplificação das Eqs. (4.5)

$$x' = T(x) = x\varphi(x), \quad (4.6)$$

$$y' = y + \kappa y(1 - y)g(x, y), \quad (4.7)$$

para alguma função contínua $g(x, y) = xG(xy, x(1 - y))$. Hofbauer assume g dependendo exclusivamente de x , $g(x, y) = g(x)$, o que equivale a G depender somente da população total $x^{(1)} + x^{(2)}$.

A fim de obter bacias entrelaçadas a partir das Eqs. (4.5) algumas condições devem ser satisfeitas. Primeiramente, o mapa unidimensional $T(x)$, que governa a dinâmica de cada espécie e da população total, deve possuir um atrator caótico, resultado da união de intervalos e que possui uma medida natural invariante absolutamente contínua μ . Em segundo, os expoentes de Lyapunov transversais aos eixos correspondentes a medida natural μ devem ser negativos. Biologicamente essa condição significa que uma pequena parte dos competidores tipicamente desaparecerá. Matematicamente essa condição implica numa medida positiva de Lebesgue para as duas bacias de atração. Para que essa condição seja garantida, $g(x)$ deve satisfazer $\int g(x)d\mu(x)$ suficientemente próxima de zero [59]. A terceira condição para que o entrelaçamento seja verificado recai sobre os atratores. Os atratores devem ser não-estáveis no sentido de Lyapunov (toda órbita próxima ao atrator deve permanecer sobre o atrator), mas algumas órbitas devem convergir para o outro atrator. Assim, para todo mapa caótico T existem diversas funções g tal que para um $\kappa \neq 0$ o sistema da Eq. (4.5) apresenta bacias entrelaçadas.

4.2 Caracterização de bacias entrelaçadas

O caso para o qual $T(x) = 3x(\text{mod } 1)$ e $g(x) = \cos(2\pi x)$ foi estudado previamente por Kan [57], onde foi provado que as bacias são crivadas quando $\kappa = 1/32$ e tal prova foi extendida ao caso $0 < \kappa < 1$ por Hofbauer e colaboradores [56]. Para a caracterização do crivamento neste trabalho, optou-se por uma modificação do modelo de Hofbauer pela escolha de $T(x)$ dada pelo mapa logístico e com $g(x) = \cos(3\pi x)$ na Eq. (4.7), de forma que o sistema para competição entre espécies é dado por,

$$f(x, y) = \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \\ y_{n+1} = y_n + \kappa y_n(1 - y_n) \cos(3\pi x_n) \end{cases}, \quad (4.8)$$

de forma que a dinâmica em cada subespaço invariante é fortemente caótica. O sistema dado pelas Eqs. (4.8) possui dois subespaços invariantes, $y = 0$ e $y = 1$. Tanto em $y = 0$ quanto em $y = 1$ existe um atrator caótico garantido pelo mapa logístico que governa a dinâmica da população total. Quando $y = 0$, a população total x é constituída unicamente por indivíduos da espécie $x^{(2)}$. No caso de $y = 1$, a espécie x_2 é totalmente extinta e todos os indivíduos da população x pertencem à espécie $x^{(1)}$.

A Fig. 4.1 mostra as bacias de atração do sistema dado pelas Eqs. (4.8), de acordo com diferentes valores do parâmetro κ . Um total de 10^5 condições aleatórias tomadas entre $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e iteradas 10^4 vezes. Considera-se que a condição inicial (x_0, y_0) pertence à bacia de atração de um atrator caso sua posição permanecesse suficientemente próxima do atrator por 10^3 iterações consecutivas. A bacia de atração do atrator em $y = 0$ está em branco e a bacia de atração do atrator em $y = 1$ está em preto.

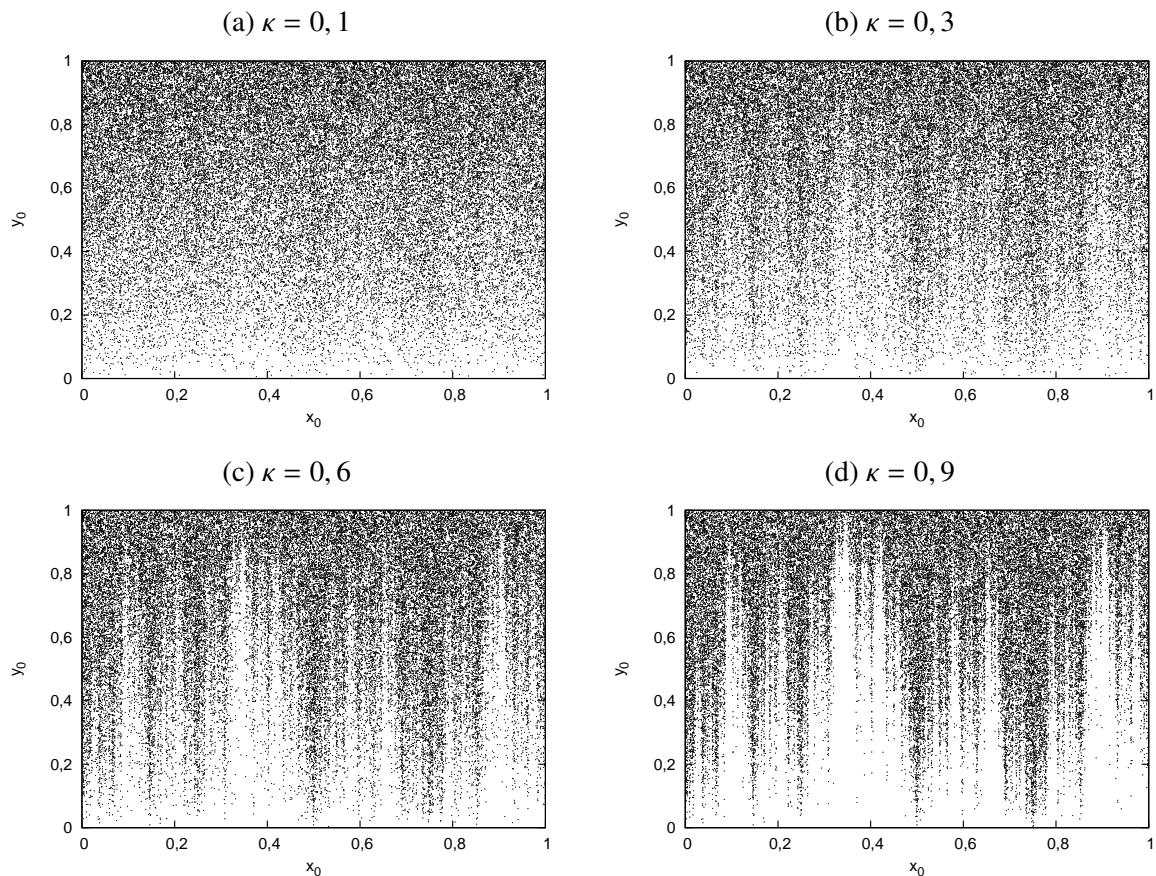


Figura 4.1: 10^5 condições iniciais foram tomadas aleatoriamente em $[0, 1] \times [0, 1]$ e iteradas por 10^4 vezes, para diferentes valores do parâmetro κ . A bacia de atração em branco pertence ao atrator em $y = 0$, ao passo que as condições iniciais pertencentes ao atrator em $y = 1$ estão em preto.

A existência do subespaço invariante $y = 0$, com um atrator caótico presente nesse subespaço e um outro atrator fora de $y = 0$ (em $y = 1$) satisfaz as condições **1**, **2** e **3** da Seç. 2.4, para que a bacia do atrator em $y = 0$ seja crivada pela bacia do atrator em $y = 1$. Mas $y = 1$ é também um subespaço invariante com um atrator caótico, e fora do subespaço invariante $y = 1$ existe um outro atrator em $y = 0$, também satisfazendo as condições **1**, **2** e **3** da Seç. 2.4 para que a bacia do atrator em $y = 1$ seja crivada pela bacia do atrator em $y = 0$. Para que as bacias dos atratores em $y = 0$ e $y = 1$ sejam bacias entrelaçadas, é necessário ainda que os atratores presentes nesses subespaços sejam transversalmente estáveis (condição **4**) e que existam órbitas periódicas instáveis sujeitas à perda de estabilidade transversal (condição **5**).

Para verificação das condições **4** e **5** os expoentes de Lyapunov foram calculados nas direções transversal e paralela aos subespaços invariantes. Da condição **4**, o expoente de Lyapunov na direção perpendicular ao subespaço invariante deve ser negativo para que o atrator caótico seja transversalmente estável. Os autovalores da matriz Jacobiana $\mathbf{D}\mathbf{f}^n(\mathbf{x}_0)$ são dados por

$$\begin{aligned}\xi_x^n &= \prod_{i=0}^{n-1} (4 - 8x_i), \\ \xi_y^n &= \prod_{i=0}^{n-1} [1 + \kappa(1 - 2y_i) \cos(3\pi x_i)].\end{aligned}\tag{4.9}$$

Os autovalores sobre os subespaços invariantes são obtidos através da substituição de y pelos valores 0 e 1 na Eq. (4.9):

$$\begin{aligned}\xi_{y=0}^n &= \prod_{i=0}^{n-1} [1 + \kappa \cos(3\pi x_i)], \\ \xi_{y=1}^n &= \prod_{i=0}^{n-1} [1 - \kappa \cos(3\pi x_i)].\end{aligned}\tag{4.10}$$

Os expoentes de Lyapunov a tempo infinito nas direções transversais aos subespaços invariantes serão

$$\begin{aligned}\lambda_\perp(I_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\xi_{y=0}^n|, \\ \lambda_\perp(I_1) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\xi_{y=1}^n|.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Na direção paralela, o expoente de Lyapunov será [43]

$$\lambda_\parallel = \int_0^1 \frac{4(1-2x)}{\pi \sqrt{x(1-x)}} dx = \ln 2.\tag{4.12}$$

Observa-se que nas expressões dadas pelas Eqs. (4.11), os expoentes dependem exclusivamente do parâmetro e da posição x . Os expoentes infinitos foram calculados na direção transversal iterando o mapa em x e substituindo seu valor na Eq. (4.11). Os resultados, calculados para o expoente máximo transversal (infinito) de Lyapunov estão na Fig. 4.2. Para valores de κ próximos de zero, o expoente transversal também é próximo de zero e quanto mais o parâmetro κ se distancia de zero, o valor do expoente máximo aumenta em módulo. Portanto, para $0 < \kappa < 1$, $\lambda_{\perp}(I_0)$ e $\lambda_{\perp}(I_1)$ assumem valores negativos e os atratores caóticos em $y = 0$ e $y = 1$ são transversalmente estáveis.

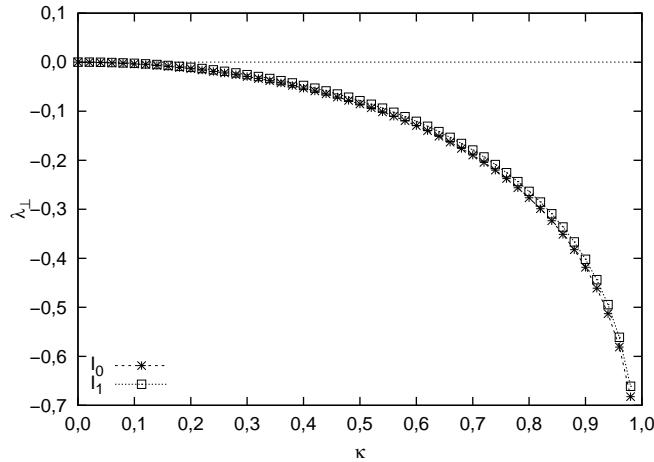


Figura 4.2: Expoentes de Lyapunov infinitos para as órbitas em $y = 0$ (I_0) e $y = 1$ (I_1). O mapa foi iterado em x e os expoentes obtidos segundo as Eqs. (4.11). Para valores de κ próximos de zero, o expoente transversal também é próximo de zero e quanto mais o parâmetro κ se distancia de zero, o valor do expoente máximo aumenta em módulo. Portanto, para $0 < \kappa < 1$, $\lambda_{\perp}(I_0)$ e $\lambda_{\perp}(I_1)$ assumem valores negativos e os atratores caóticos em $y = 0$ e $y = 1$ são transversalmente estáveis.

A existência de órbitas periódicas instáveis é revelada pelas flutuações positivas do expoente máximo de Lyapunov de tempo finito. Na Fig. 4.3 estão as distribuições dos expoentes transversais de Lyapunov de tempo finito. O tempo finito de cálculo do expoente de Lyapunov foi variado, começando em $n = 10$ e indo até $n = 50$, e variou-se também o parâmetro κ . Para uma condição inicial em $x = 0,001$ e $y = 0$, o sistema foi iterado por $6,25 \times 10^6$ tempos, calculando o expoente de Lyapunov de tempo finito nessa trajetória. Obteve-se distribuições gaussianas dos expoentes, como o previsto à partir do modelo desenvolvido por Ott e apresentado no Cap. 2. A dispersão em torno do valor médio diminui com o aumento do tempo finito de cálculo dos expoentes. As flutuações positivas observadas nos histogramas indicam a perda de estabilidade transversal do atrator, uma das condições para o crivamento. Embora os valores médios sejam negativos, os histogramas da Fig. 4.3 mostram as flutuações positivas que indicam a perda de estabilidade transversal

do atrator caótico. Como a dinâmica em $y = 0$ e $y = 1$ é governada pelo mapa logístico, os histogramas obtidos para uma órbita em $y = 0$ são equivalentes aos histogramas de uma órbita em $y = 1$.

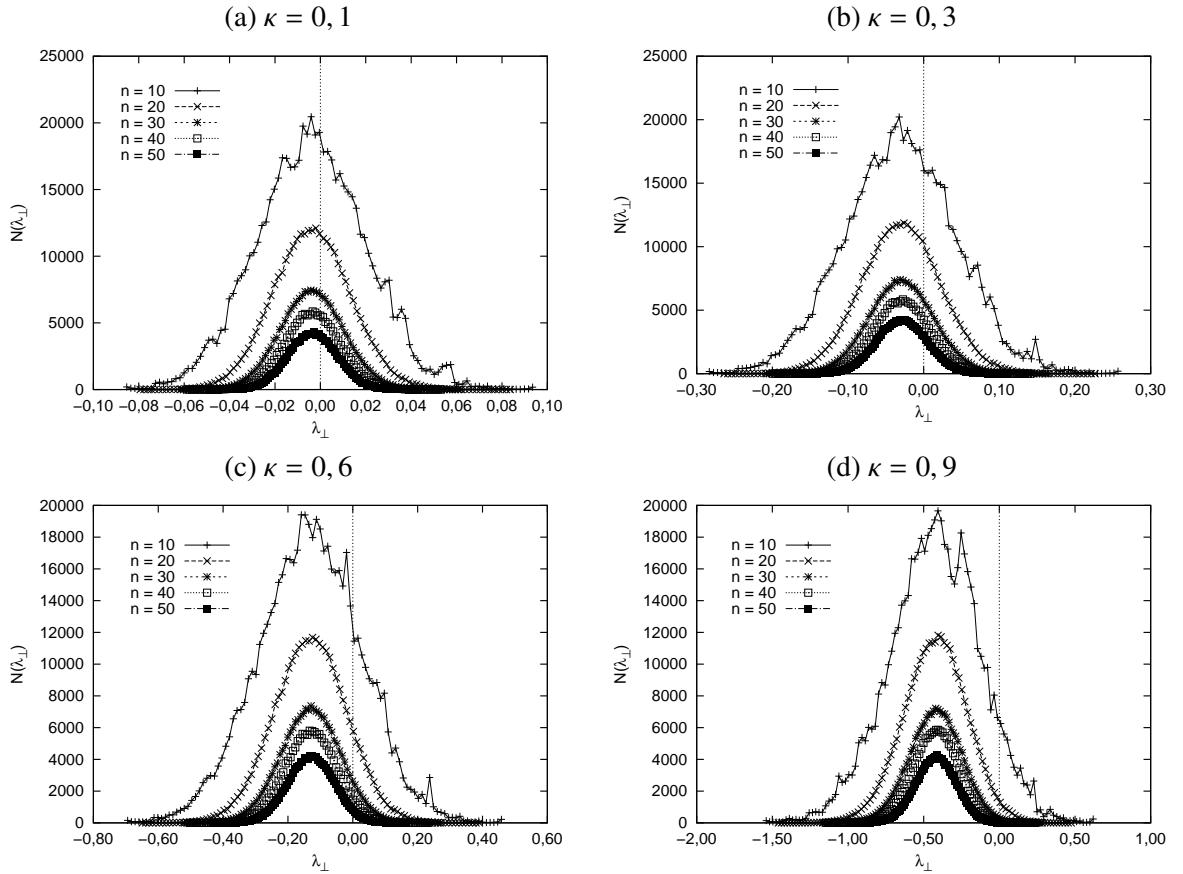


Figura 4.3: Tomada uma condição inicial em $x = 0,001$, itera-se o sistema por $6,25 \times 10^6$ tempos e varia-se o parâmetro κ . Para cada valor do parâmetro calcula-se o expoente transversal de tempo finito de Lyapunov para tempos 10, 20, 30, 40 e 50. De acordo com o modelo apresentado no Cap. 2, as distribuições dos expoentes de tempo finito são distribuições gaussianas. A dispersão em torno do valor médio diminui quando aumenta-se o tempo finito de cálculo dos expoentes. As flutuações positivas observadas nos histogramas indicam a perda de estabilidade transversal do atrator, uma das condições para o crivamento.

A probabilidade de existirem flutuações positivas no expoente máximo de Lyapunov de tempo finito é dada pela fração positiva de tais expoentes. A Fig. 4.4 mostra a variação na fração positiva dos expoentes de Lyapunov para diversos valores de tempo finito com o parâmetro κ . Uma condição inicial aleatória foi escolhida e iterada por $6,25 \times 10^6$ tempos. Para κ aproximadamente igual a zero, a fração dos expoentes positivos é igual a 1/2 e em $\kappa = 1,0$ a fração positiva é zero.

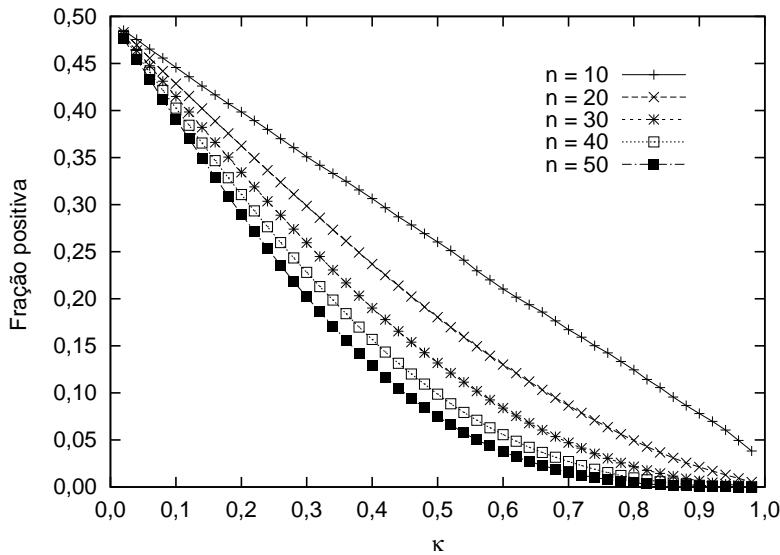


Figura 4.4: Variação na fração positiva dos expoentes de Lyapunov para diversos valores de tempo finito com o parâmetro κ . Uma condição inicial foi escolhida aleatoriamente e iterada por $6,25 \times 10^6$ tempos. Para κ aproximadamente igual a zero, a fração dos expoentes positivos é igual a $1/2$ e em $\kappa = 1,0$ a fração positiva é zero.

Como as condições para crivamento são satisfeitas para as bacias de atração dos dois atratores caóticos, o que ocorre é que a bacia do atrator em $y = 0$ é crivada pela bacia do atrator em $y = 1$ e a bacia do atrator em $y = 1$ é crivada pela bacia do atrator em $y = 0$. Quando as bacias crivam-se mutuamente elas são chamadas de bacias entrelaçadas.

Complementando a caracterização de bacias crivadas, foram calculadas as leis de escala do modelo de Ott *et al.* [4]. Segundo a lei de escala dada pela Eq. (3.38), espera-se que a fração das órbitas que têm seu estado final no atrator localizado em $y = 1$ escale com a distância da partícula ao atrator em $y = 0$, segundo um expoente η . De acordo com o modelo estocástico apresentado por Ott *et al.*, o expoente η está relacionado à difusão dos expoentes de tempo finito,

$$\eta = \frac{v}{D} = \frac{\lambda_{\perp}}{D}.$$

A Fig. 4.5 traz a verificação da lei de escala da Eq. (3.38). Os dados calculados numericamente são representados através de pontos. A condição inicial em y foi variada no intervalo $0 \leq y_0 \leq 1$ e para cada y_0 foram escolhidas 10^5 condições iniciais aleatoriamente no intervalo $0 \leq x_0 \leq 1$. Caso a partícula permanecesse 10^3 iterações sobre o atrator em $y = 0$, considerava-se que essa partícula pertencia à bacia de atração de $y = 0$. Então foi calculada a fração das órbitas que pertenciam à bacia do outro atrator, em $y = 1$, pois é essa fração f que fornece o expoente η . O ajuste para os dados obtidos está indicado pela

linha sólida e forneceu $\eta_{aj} = 1,002$ para $\kappa = 0,1$. O valor teórico previsto pelo modelo, para tempo finito do cálculo dos expoentes igual a 50, é $\eta_{teo} = 0,990$ e está indicado pela linha tracejada. O mesmo foi feito para diferentes valores de tempo finito e do parâmetro κ . Em concordância com o modelo, o resultado numérico é tanto mais próximo da previsão teórica quanto o parâmetro κ é próximo do parâmetro $\kappa_c = 0$.

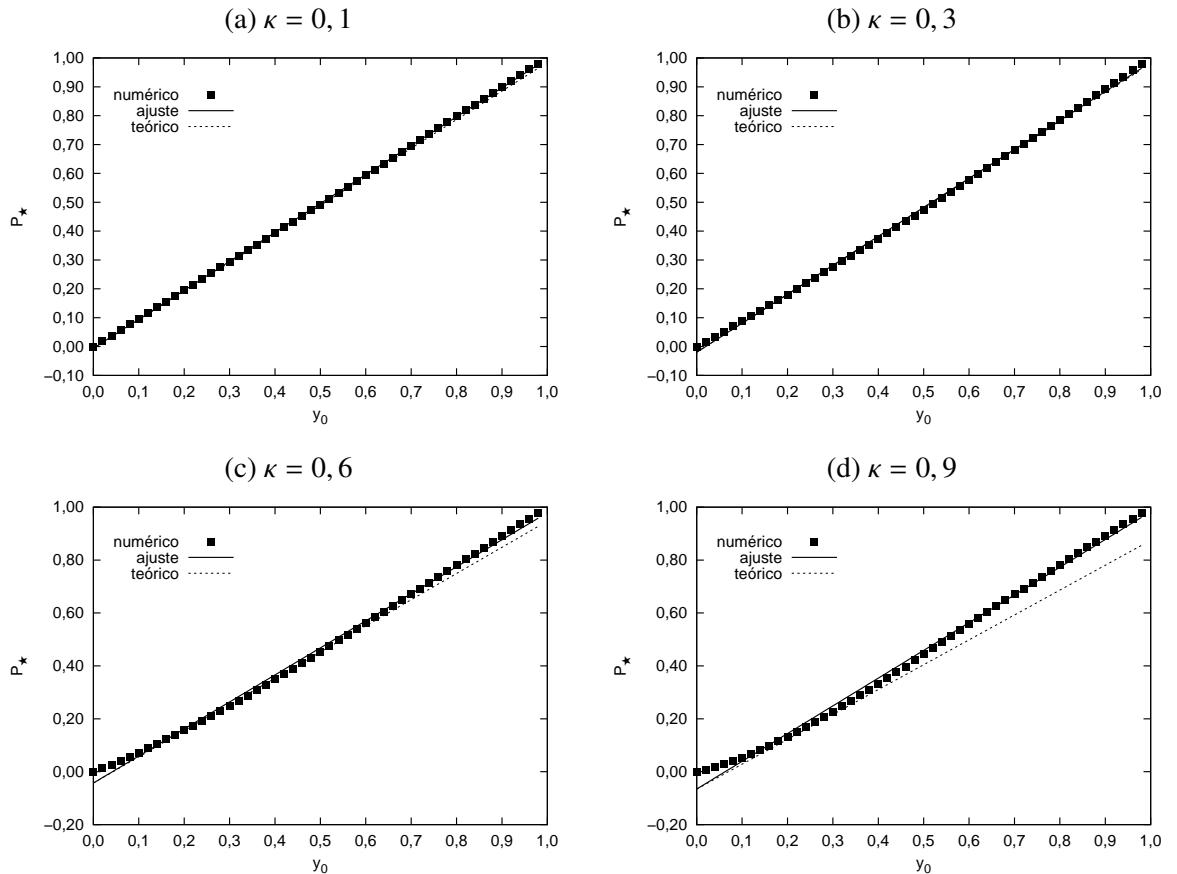


Figura 4.5: Verificação da lei de escala da Eq. (3.38). Os dados calculados numericamente estão representados através dos pontos. Varia-se a condição inicial em y no intervalo $0 \leq y_0 \leq 1$ e para cada y_0 escolhe-se aleatoriamente 10^5 condições iniciais no intervalo $0 \leq x_0 \leq 1$. Caso a partícula permaneça 10^3 iterações sobre o atrator em $y = 0$, considera-se que essa partícula pertence à bacia de atração de $y = 0$. Então determina-se a fração das órbitas que pertenciam à bacia do outro atrator, em $y = 1$, pois é essa fração f que fornece o expoente η . Para (a) tem-se $\eta_{aj} = 1,002$ e $\eta_{teo} = 0,990$; em (b), $\eta_{aj} = 1,003$ e $\eta_{teo} = 1,002$. Para (c) $\eta_{aj} = 1,021$ e $\eta_{teo} = 0,999$ e em (d) $\eta_{aj} = 1,048$ e $\eta_{teo} = 0,940$. Em concordância com o modelo, o resultado numérico é tanto mais próximo da previsão teórica quanto o parâmetro κ é próximo do parâmetro $\kappa_c = 0$.

Para obtermos a segunda lei de escala, dada pela Eq. (3.43), 10^5 condições iniciais foram escolhidas aleatoriamente em $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$. Em seguida, para cada par de coordenadas (x_0, y_0) , escolheu-se também aleatoriamente, um outro valor x_ε , dentro

do intervalo $x_0 - \varepsilon \leq x_\varepsilon \leq x_0 + \varepsilon$ e evoluiu-se as órbitas de (x_0, y_0) e (x_ε, y_0) e assim obtendo a fração $\langle p \rangle$ das órbitas que são ε -incertas, variando ε de 10^{-8} a 10^{-2} . Seguindo a Eq. (3.43) essa fração está relacionada a ε por uma lei de potência, e, de acordo com a Eq. (3.45), pode ser calculada através dos expoentes finitos de Lyapunov. A Fig. 4.6 mostra o resultado numérico, o ajuste está indicado pela linha sólida e o valor teórico pela linha tracejada.

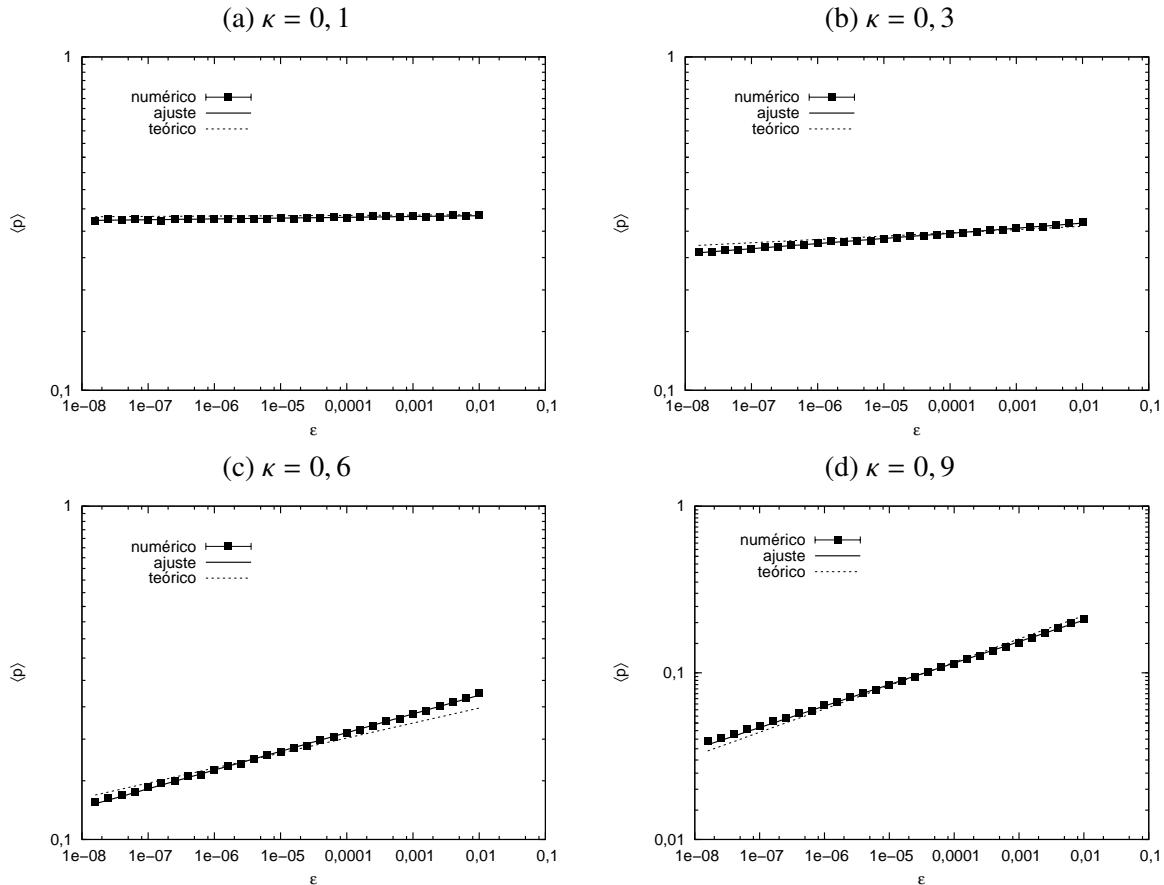


Figura 4.6: Lei de escala da Eq. (3.43). Em todas as figuras, 10^5 condições iniciais foram tomadas aleatoriamente em $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq 1$ e foram iteradas por 10^4 tempos. Para cada par de coordenadas (x_0, y_0) , escolhe-se também aleatoriamente, um outro valor x_ε , dentro do intervalo $x_0 - \varepsilon \leq x_\varepsilon \leq x_0 + \varepsilon$ e itera-se as órbitas de (x_0, y_0) e (x_ε, y_0) , obtendo a fração $\langle p \rangle$ das órbitas que são ε -incertas, variando ε de 10^{-8} a 10^{-2} . Para (a) $\phi_{aj} = 0, 002$ e $\phi_{teo} = 0, 001$ e em (b), $\phi_{aj} = 0, 015$ e $\phi_{teo} = 0, 099$. Para (c) $\phi_{aj} = 0, 056$ e $\phi_{teo} = 0, 045$ e em (d) $\phi_{aj} = 0, 128$ e $\phi_{teo} = 0, 140$. Assim como para a primeira lei de escala, quanto mais próximo do parâmetro crítico $\kappa_c = 0$, maior a concordância entre o valor numérico e a previsão teórica.

O expoente de incerteza ϕ é extremamente pequeno e isto é consistente pois ϕ depende quadraticamente de λ_\perp que, por definição, é muito pequeno próximo do parâmetro κ onde ocorre a transição para o crivamento. E assim como para a primeira lei de escala, quanto

mais próximo do parâmetro crítico $\kappa_c = 0$, maior a concordância entre o valor numérico e a previsão teórica. Lembrando que no Cap. 3 é exigido que o parâmetro de controle do modelo seja próximo de um valor crítico para o qual a dinâmica transversal pode ser aproximada por uma equação discreta de Langevin e que posteriormente permite que a distribuição do expoente transversal máximo de Lyapunov de tempo finito possa ser aproximada por uma gaussiana. Portanto, é justamente para regiões próximas de $\kappa_c = 0$ que o modelo estocástico é válido.

Capítulo 5

Crivamento de bacia em um sistema mecânico

Na Ref. [1], Sommerer desenvolve um exemplo de crivamento a partir de um sistema simples, ilustrando como sistemas clássicos podem ser imprevisíveis. Sommerer começa escrevendo a segunda lei de Newton em uma dimensão, $\sum_i F_i = \ddot{x}(t)$, para uma partícula de massa unitária, com duas forças atuando sobre a partícula: uma força de atrito $-\gamma\dot{x}$ (com $\gamma > 0$) e uma força $-dV(x)/dx$ devido ao potencial escalar $V(x) = x^2$, produzindo a equação de movimento $\ddot{x}(t) + \gamma\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$, que tem solução analítica. A fim de construir um exemplo que parte da situação mais simples e previsível para chegar à situação de crivamento, onde a imprevisibilidade é inerente à dinâmica do sistema, Sommerer adiciona elementos ao seu sistema inicial, como um forçamento externo periódico e modificando o potencial. Mas um sistema com um grau de liberdade não está habilitado a produzir bacias crivadas. Porém, uma partícula que se move em duas dimensões espaciais e com um potencial escalar com uma simetria refletora em y resolve esse problema.

Nos trabalhos de Ott [4] e de Sommerer [1], foi considerado o caso onde o subespaço invariante contém um atrator caótico do tipo exibido pela equação de Duffing com forçamento, obtendo bacias crivadas para um intervalo de parâmetros. Por outro lado, a equação de Duffing pode ser vista como uma aproximação ao comportamento exibido por um pêndulo não linear. Assim, neste capítulo, o potencial escalar (Fig. 5.1) foi escolhido de forma que a dinâmica caótica presente no subespaço invariante é a dinâmica do pêndulo forçado amortecido. O pêndulo forçado amortecido, ilustrado na Fig. 5.2 é um sistema paradigmático no estudo de dinâmica não linear, além de possuir aplicações desde relógios até robôs. Oscilações de membranas elásticas [60] e circuitos elétricos [61] são outros exemplos de aplicações da dinâmica do pêndulo forçado amortecido. Hubbard apresenta um extenso estudo do pêndulo forçado amortecido na Ref. [62].

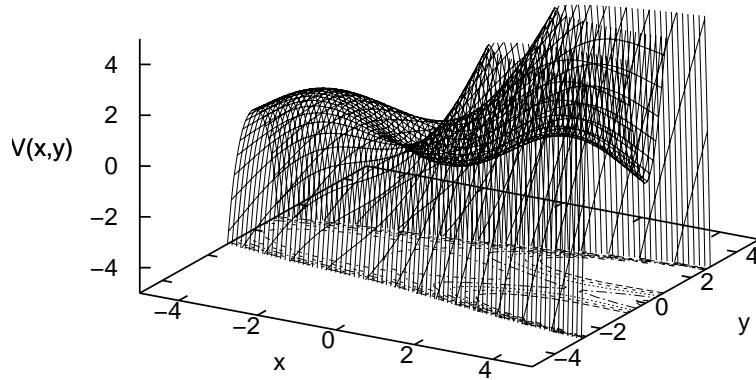


Figura 5.1: Potencial Eq. (5.2) para $a = 1,0$ e $\chi = 2,5$. A simetria do potencial produz um subespaço invariante quando $y = p_y = 0$. Uma órbita iniciada nesse subespaço não o deixará, não importando o tempo de integração observado, enquanto a dinâmica do pêndulo amortecido é obtida nas equações para x .

A equação de movimento para uma partícula de massa unitária movendo-se sob a ação de uma força dissipativa e um forçamento periódico na direção x , é

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + b \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \nabla V = A[\operatorname{sen}(\omega t)]\mathbf{x}, \quad (5.1)$$

em que $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, b é o coeficiente de dissipação, A e ω são a amplitude e a frequência da força periódica. $V = V(x, y)$ é o potencial bidimensional,

$$V(x, y) = -a \cos x + (x + \chi)y^2 - y^4. \quad (5.2)$$

A simetria do potencial produz um subespaço invariante quando $y = p_y = 0$. Uma órbita iniciada nesse subespaço não o deixará, não importando o tempo de integração observado. O potencial está ilustrado na Fig. 5.1. Tomando $y = p_y = 0$ na Eq. (5.3) tem-se as equações de movimento do pêndulo amortecido.

O espaço de fase H desse sistema é pentadimensional, com coordenadas x, p_x, y, p_y, t , em termos das quais a equação de movimento pode ser escrita como o campo vetorial

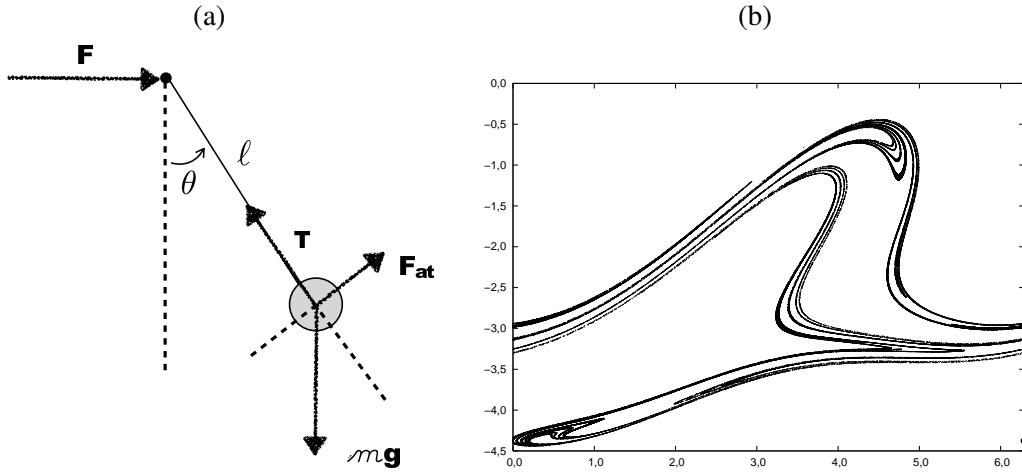


Figura 5.2: (a) Esquema ilustrativo do pêndulo com forçamento periódico \mathbf{F} . Atrator caótico presente no subespaço invariante determinado por $y = p_y = 0$ e os parâmetros $a = 1,0$, $b = 0,22$, $\omega = 1,0$, e $A = 2,7$ nas Eqs. (5.1) [63].

autônomo,

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{dx}{dt}, \\ \frac{dp_x}{dt} &= -bp_x - a\sin(x) - y^2 + A\sin(\omega t), \\ p_y &= \frac{dy}{dt}, \\ \frac{dp_y}{dt} &= -bp_y - 2y(x + \chi) - 4y^3. \end{aligned} \tag{5.3}$$

O atrator caótico presente no subespaço invariante, determinado por $y = p_y = 0$, será um atrator para o sistema pentadimensional se existir um conjunto de pontos com medida de Lebesgue positiva que é atraído ao subespaço invariante, o que de fato ocorre, pois os expoentes de Lyapunov associados a perturbações infinitesimais do plano $y = p_y = 0$ são negativos para a maioria das órbitas sobre o atrator. Porém, existe um conjunto de medida nula de órbitas sobre o atrator para as quais tais perturbações infinitesimais crescem exponencialmente [4]. Essas perturbações indicam que condições iniciais arbitrariamente próximas do atrator em $y = p_y = 0$ movem-se para o atrator $|y| \rightarrow \infty$. Esse comportamento se deve ao termo $(x + \chi)y^2$ no potencial. Para $(x + \chi)y^2 > 0$ existe um poço de potencial y^2 focando as órbitas no plano invariante, enquanto para $(x + \chi)y^2 < 0$ o poço de potencial torna-se um anti-poço. Para uma região de χ órbitas típicas sobre o atrator experimentam as duas situações, sendo uma parte atraída para o subespaço invariante e outra repelida do

espaço invariante.

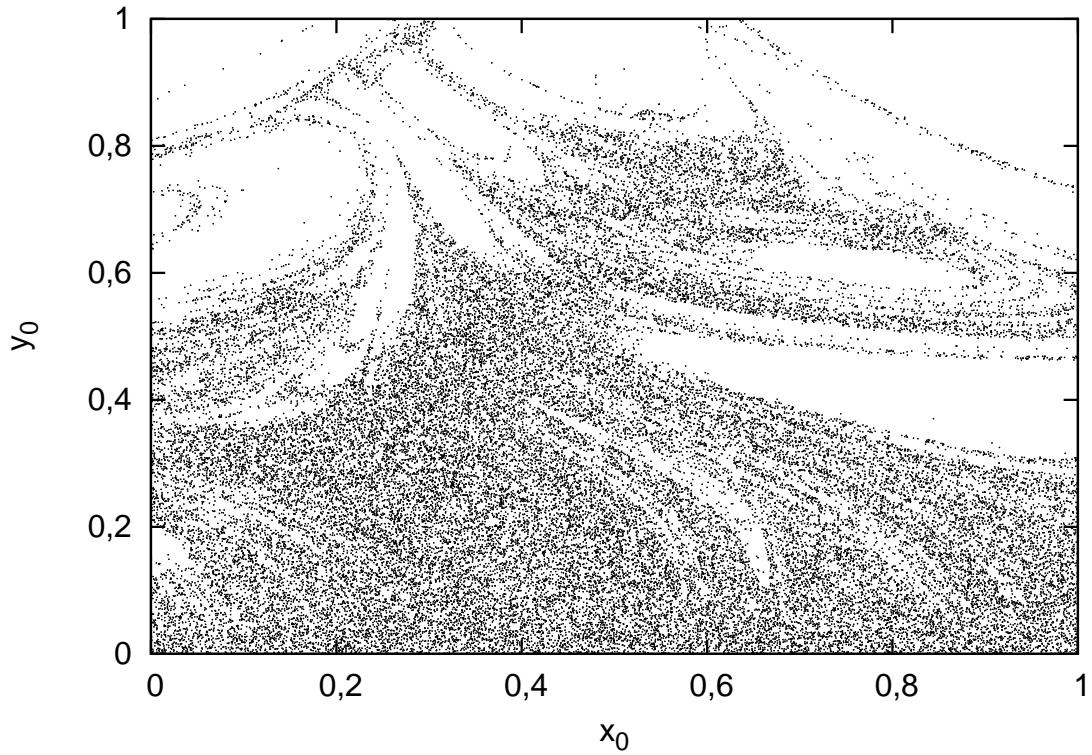


Figura 5.3: Projeção da bacia crivada do sistema dados pela Eq. (5.1), onde 10^5 condições iniciais tomadas aleatoriamente em $[0, 1] \times [0, 1]$ foram integradas por 10^5 tempos. Os pontos pretos compõem bacia de atração do atrator caótico localizado no subespaço invariante $y = p_y = 0$. A região em branco é a bacia de atração do estado assintótico $y \rightarrow \infty$.

A escolha dos parâmetros $a = 1, 0$, $b = 0, 22$, $\omega = 1, 0$, e $A = 2, 7$ garante a existência de um atrator caótico, mostrado na Fig. 5.2(b), no subespaço invariante em $y = p_y = 0$ [63]. A presença de crivamento será determinada pela variação do parâmetro χ . Para uma escolha adequada de χ existirão órbitas periódicas instáveis no atrator caótico contido no subespaço invariante, órbitas que exibirão flutuações positivas no expoente transversal de Lyapunov a tempo finito.

Considerando os tempos $\omega t \bmod 2\pi = 0$ tem-se um mapa discreto que mapeia um ponto no espaço de fase no tempo $t = t_n \equiv 2n\pi/\omega$ em um ponto diferente após um período do forçamento. As simulações das Eqs. (5.3) foram feitas através de um integrador numérico Runge-Kutta de quarta ordem, com passo adaptado [64], por 10^5 tempos. A Fig. 5.3 mostra a bacia de atração do sistema dado pela Eq. (5.1), com 10^5 condições iniciais tomadas aleatoriamente em $[0, 1] \times [0, 1]$ e integradas por 10^5 tempos com $\chi = 2, 5$. Os pontos pretos são a bacia de atração do atrator localizado no subespaço invariante. Embora a

probabilidade de uma condição inicial ser atraída para o subespaço invariante aumente com a proximidade deste subespaço, uma probabilidade não-nula da condição inicial ser atraída para $|y| = \infty$ é sempre verificada. Este fato, associado à determinação numérica do expoente de Lyapunov de órbitas típicas no atrator localizado no plano $y = p_y = 0$ determina que a bacia do atrator $y = 0$ é uma bacia crivada.

Com o aumento do valor de χ em torno do valor crítico $\chi_c \approx 2,3$, o atrator (no hiperplano) é destruído e as condições iniciais sobre o atrator são repelidas para $|y| = \infty$. Tal transição se reflete no espectro de Lyapunov mostrado na Fig. 5.4(a), onde o expoente transversal máximo varia suavemente com o parâmetro χ . O expoente transversal máximo de Lyapunov em função do parâmetro de controle χ e a distribuição do expoente transversal máximo de tempo finito são mostrados na Fig. 5.4. Para $\chi_c \approx 2,3$ o expoente transversal máximo de Lyapunov torna-se negativo, satisfazendo então a a condição 4 da Seç. 2.4, pois como o expoente é negativo o atrator caótico é transversalmente estável. Porém, devido à existência de infinitas órbitas periódicas instáveis imersas no atrator, que é transversalmente estável, observa-se um número de flutuações positivas e negativas no expoente transversal máximo de tempo finito, como pode ser visto na Fig. 5.4(b), onde foi considerado $\chi = 2,5$.

O crivamento nesse sistema é verificado então pela confirmação das condições apresentadas na Seç. 2.4, pois existe um subespaço invariante dado por $y = p_y = 0$, com o atrator caótico observado para o pêndulo forçado amortecido. No atrator encontram-se órbitas transversalmente estáveis, condição indicada pelo expoente transversal máximo de Lyapunov assumir valores negativos. As flutuações positivas para o expoente transversal máximo de Lyapunov a tempo finito demonstram a perda de estabilidade transversal necessária para que a bacia do atrator em $y = p_y = 0$ seja crivada pela bacia de atração do atrator $|y| = \infty$.

5.1 Leis de escala

A fração de uma reta $y = y_0$ que pertence à bacia do atrator $|y| = \infty$ é obtida pela evolução de condições iniciais aleatoriamente distribuídas sobre a reta $y = y_0$ e determinando se tais condições são atraídas ou não para o subespaço invariante. Essa fração de condições iniciais que pertencem à bacia de atração do atrator $|y| = \infty$ escala em forma de lei de potência com a distância ao subespaço invariante. A Fig. 5.5(a) apresenta o cálculo numérico da fração P_\star de órbitas pertencentes à bacia de atração do atrator $|y| = \infty$ em função da distância y_0 ao subespaço invariante. A previsão teórica dada pela Eq. (3.44) é $\eta_{teo} = 0,60$ e o resultado numérico é $\eta_{aju} = 0,72$. A concordância entre esses valores é tanto maior quanto mais próximo de χ_c tomamos o valor de χ . Porém, a integração numérica de equações diferenciais está sujeita a instabilidades numéricas, mais fortemente presentes na

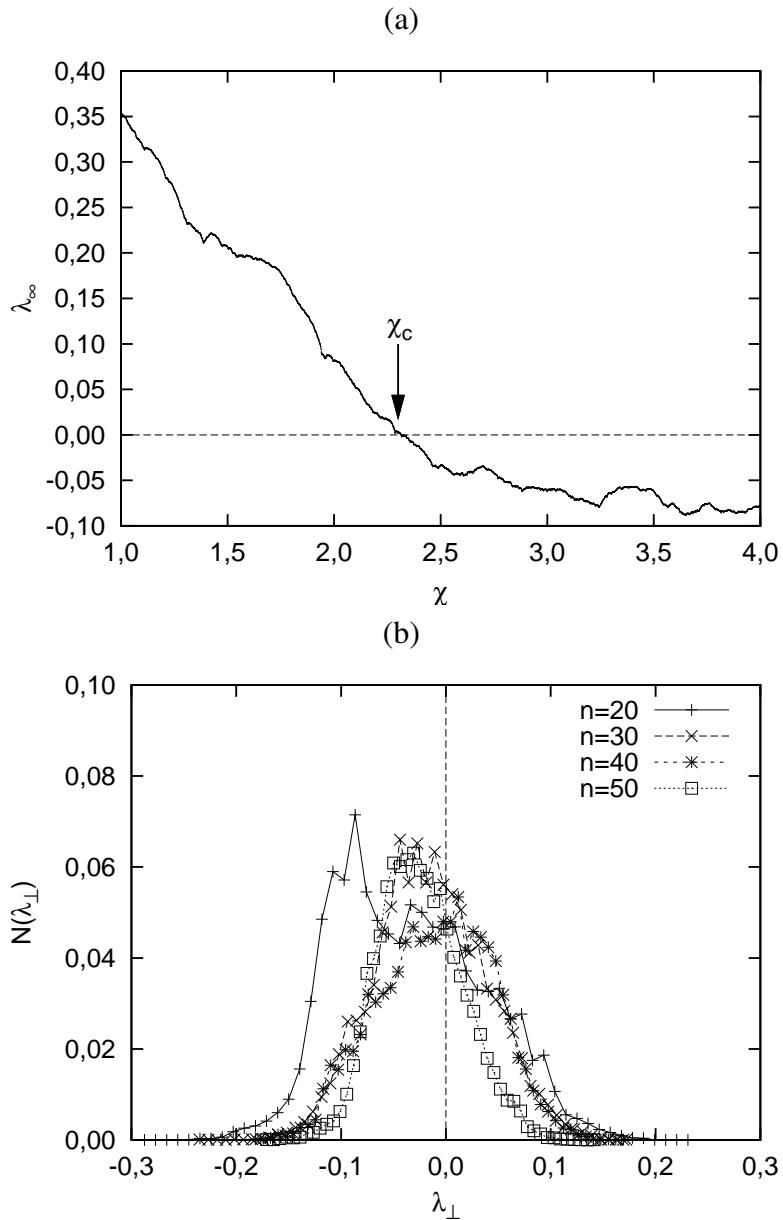


Figura 5.4: (a) Expoente transversal máximo de Lyapunov em função do parâmetro de controle χ . (b) Distribuição dos expoentes transversais máximos de Lyapunov a tempo finito para uma órbita típica no subespaço invariante calculada para diferentes tempos finitos. A existência de um número infinito de órbitas transversalmente instáveis imersas no atrator caótico implica em flutuações positivas e negativas do expoente máximo de tempo finito.

região onde o atrator perde estabilidade transversal.

A estrutura fina de bacia de atração é medida pela dimensão da bacia do atrator caótico em $y = p_y = 0$. Condições iniciais aleatórias são tomadas sobre uma reta $y = y_0$ e para cada condição inicial uma segunda condição é escolhida num intervalo ε distante da primeira. O

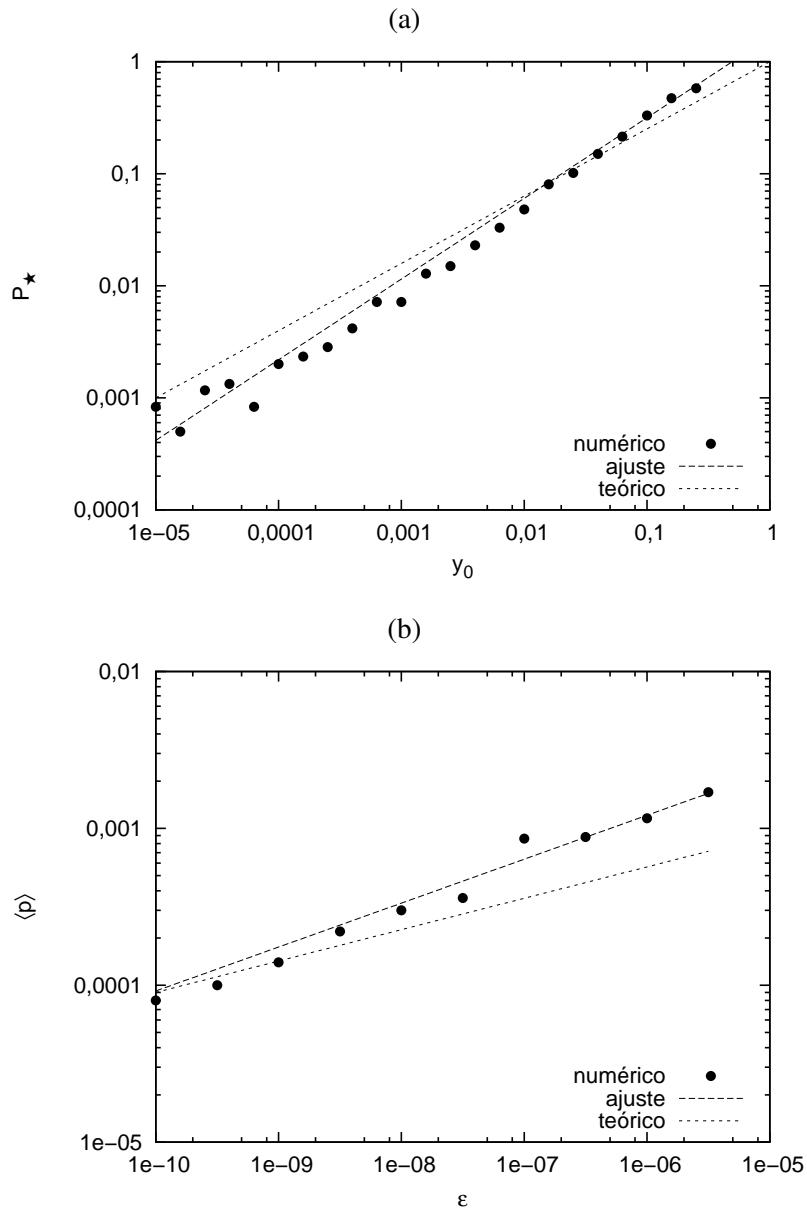


Figura 5.5: (a) Cálculo numérico da fração P^* de órbitas pertencentes à bacia de atração de $|y| = \infty$ em função da distância y_0 ao subespaço invariante. A previsão teórica dada pela Eq. (3.44) é $\eta_{teo} = 0,60$ e o resultado numérico é $\eta_{aju} = 0,72$. (b) Cálculo numérico da fração $\langle p \rangle$ de órbitas incertas, dada uma incerteza de tamanho ε . A previsão teórica dada pela Eq. (3.45) é $\phi_{teo} = 0,1$ e o resultado numérico é $\phi_{aju} = 0,2$.

que se determina nessas condições é se ambas pertencem ao mesmo atrator ou não. Então varia-se ε a fim de obter-se a probabilidade $\langle p \rangle$ de que pares de condições iniciais no mesmo intervalo ε pertençam a diferentes atratores. A Fig. 5.5(b) traz o cálculo numérico da fração $\langle p \rangle$ de órbitas incertas, dada uma incerteza de tamanho ε . A previsão teórica, ϕ_{teo} dada por Eq. (3.45) é $\phi_{teo} = 0,1$ e o resultado numérico é $\phi_{aju} = 0,2$.

Este é um exemplo de como o crivamento acarreta em consequências sérias para a previsibilidade dos sistemas em que ocorre. Mesmo um aumento de 10^{-8} na precisão não é capaz de eliminar a incerteza na determinação do estado final. Comparando com o caso de bacias de atração fractais, a fração incerta de condições escala com a incerteza $f(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha$, onde $0 < \alpha < 1$ é o expoente de incerteza. Se D é a dimensão do espaço de fase e D_0 é a dimensão por contagem de caixas da fronteira da bacia fractal, então tem-se que $\alpha = D - D_0$. Por esse raciocínio, uma bacia crivada está associada a um expoente $\alpha = 0$ (dentro de uma certa precisão), o que leva à conclusão de que a fração incerta é sempre 100%, independente de ε .

Capítulo 6

Estudo da variabilidade da frequência cardíaca

O coração é um órgão ativado por estímulos elétricos, sendo composto por quatro câmaras, que funcionam como uma bomba propulsora de sangue. As paredes musculares de cada câmara se contraem em uma sequência precisa, impulsionando um volume máximo de sangue com o menor consumo possível de energia. A contração das fibras musculares do coração é controlada por uma descarga elétrica que flui através de vias distintas, em uma velocidade controlada. A descarga rítmica que inicia cada batimento cardíaco origina-se no marcapasso natural do coração, chamado de nódulo sinusal ou sinoatrial, situado na parede do átrio direito (Fig. 6.1).

Em linhas gerais, o funcionamento do coração pode ser sintetizado nos seguintes passos: primeiramente o nódulo sinoatrial inicia um impulso elétrico que flui sobre os átrios direito e esquerdo (câmaras superiores) produzindo uma contração. O sangue é então deslocado para os ventrículos (câmaras inferiores) e o impulso elétrico originado no nódulo sinoatrial sofre um ligeiro retardamento ao passar pelo nódulo atrioventricular e, em seguida, dissemina-se ao longo do feixe de His (Fig. 6.1(b)). O impulso atinge os ventrículos promovendo uma contração que permite a saída de sangue do coração [65].

O sangue sem oxigênio vem do corpo pela veia cava superior e é coletado no átrio direito, que bombeia o sangue através do ventrículo direito até os pulmões. O lado esquerdo do coração coleta sangue com oxigênio fornecido pelos pulmões no átrio esquerdo, de onde vai para o ventrículo esquerdo, sendo então bombeado para todo o corpo via artéria aorta. A aorta se divide em três partes e fornece o sangue às partes superiores e inferiores do corpo (Fig. 6.1(a)).

A atividade elétrica é registrada no eletrocardiograma através de eletrodos fixados ao corpo do paciente. O resultado normal é composto por 3 elementos principais (Fig. 6.2(a)):

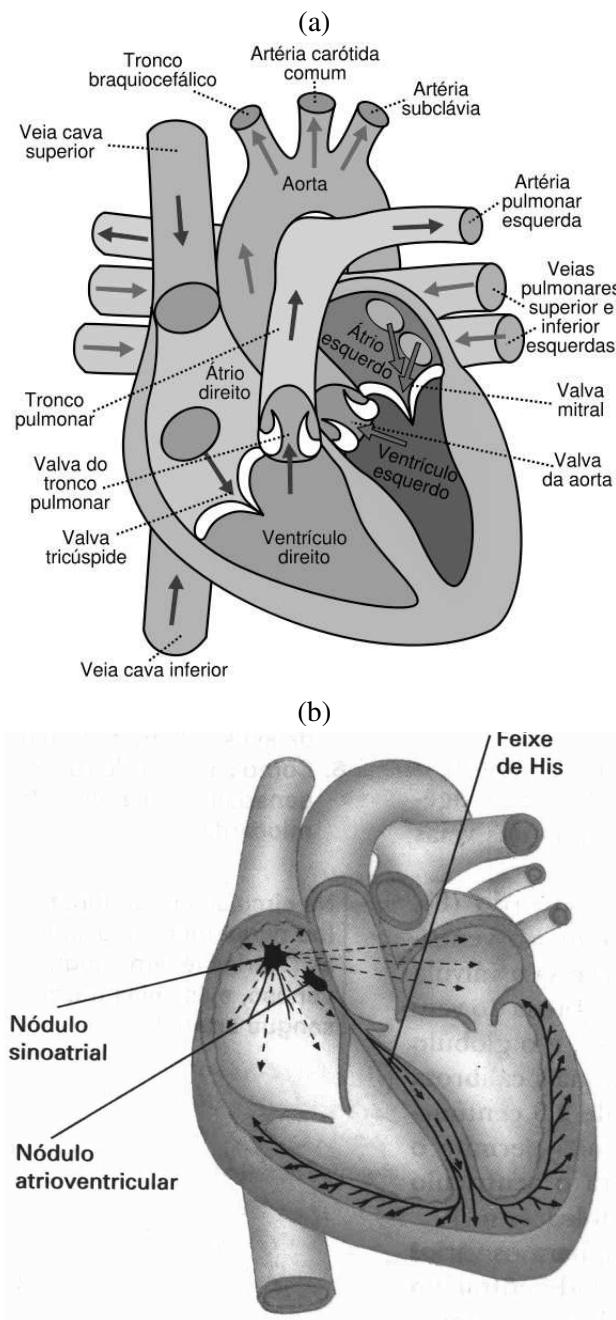


Figura 6.1: Esquemas ilustrativos do funcionamento do coração: o nódulo sinoatrial produz um impulso elétrico que flui sobre os átrios direito e esquerdo produzindo uma contração. O sangue é então deslocado para os ventrículos e o impulso elétrico sofre um retardamento ao passar pelo nódulo atrioventricular e, em seguida, dissemina-se ao longo do Feixe de His. Fontes: (a) <http://commons.wikimedia.org/wiki> (b) <http://portaldocoracao.uol.com.br>.

a onda P que significa a ativação elétrica dos átrios, câmaras menores e superiores do coração; o complexo QRS, que indica a despolarização dos ventrículos, câmaras maiores e

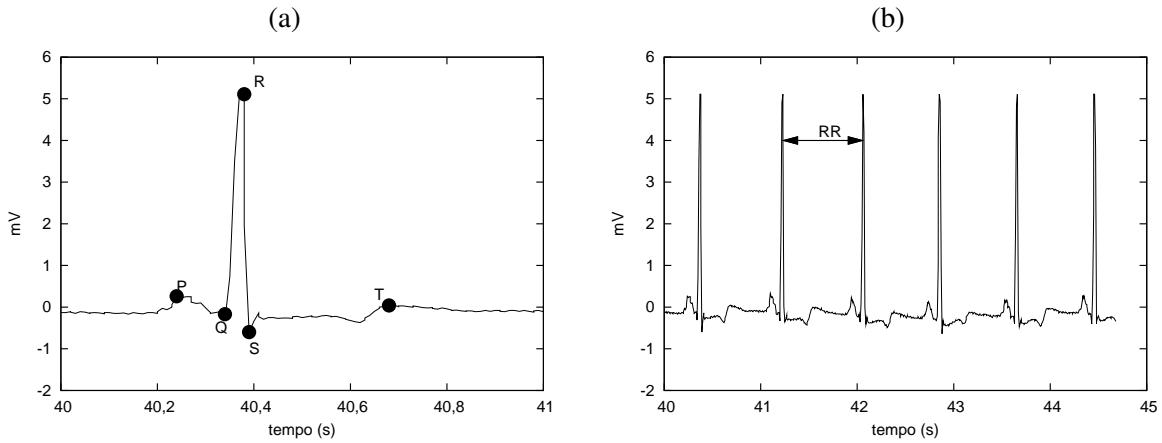


Figura 6.2: Sinal de eletrocardiograma. (a) Destaque para o complexo QRS e as ondas P e T. (b) Os intervalos RR são o tempo entre um pico R e o consecutivo no eletrocardiograma.

inferiores do coração; e a onda T, que representa a repolarização dos ventrículos [65].

Os intervalos de tempo entre batimentos consecutivos do coração são extraídos do eletrocardiograma pela distância entre o início de um complexo QRS até o início do complexo QRS seguinte, de forma que os intervalos poderiam ser chamados de intervalos QQ entre dois batimentos. Porém devido à dificuldade em se assinalar um ponto para o início do complexo QRS na presença de ruído, é apropriado escolher os intervalos RR para o estudo de variabilidade da frequência cardíaca [66].

O termo variabilidade da frequência cardíaca é aceito tanto como o estudo dos intervalos RR quanto da série de batimentos [35]. As flutuações espontâneas da frequência cardíaca representam mais do que oscilações em torno de um valor, sendo uma manifestação de diversas influências como respiração e ritmos autorreguladores. Além da vantagem de ser um método não invasivo, a análise da variabilidade da frequência cardíaca tem sido usada com frequente sucesso como indicador de risco de morte após infarto do miocárdio, quadros de insuficiência cardíaca e fibrilação atrial [67]. A fibrilação atrial (Fig. 6.3(c)) é uma arritmia cardíaca originada nos átrios (câmaras cardíacas superiores) e que podem ser de ocorrência aguda ou permanente, enquanto o termo miocardiopatia dilatada (MCD) (Fig. 6.3(e)) indica um grupo de doenças cardíacas nas quais os ventrículos se dilatam, sendo incapazes de bombear um volume de sangue suficiente para suprir as necessidades metabólicas do organismo, acarretando o quadro de insuficiência cardíaca. A causa identificável mais comum da miocardiopatia dilatada é a doença arterial coronariana, caracterizada por depósitos de gordura na parede das artérias do coração. A doença arterial coronariana leva a uma irrigação sanguínea inadequada ao miocárdio, podendo causar-lhe uma lesão permanente.

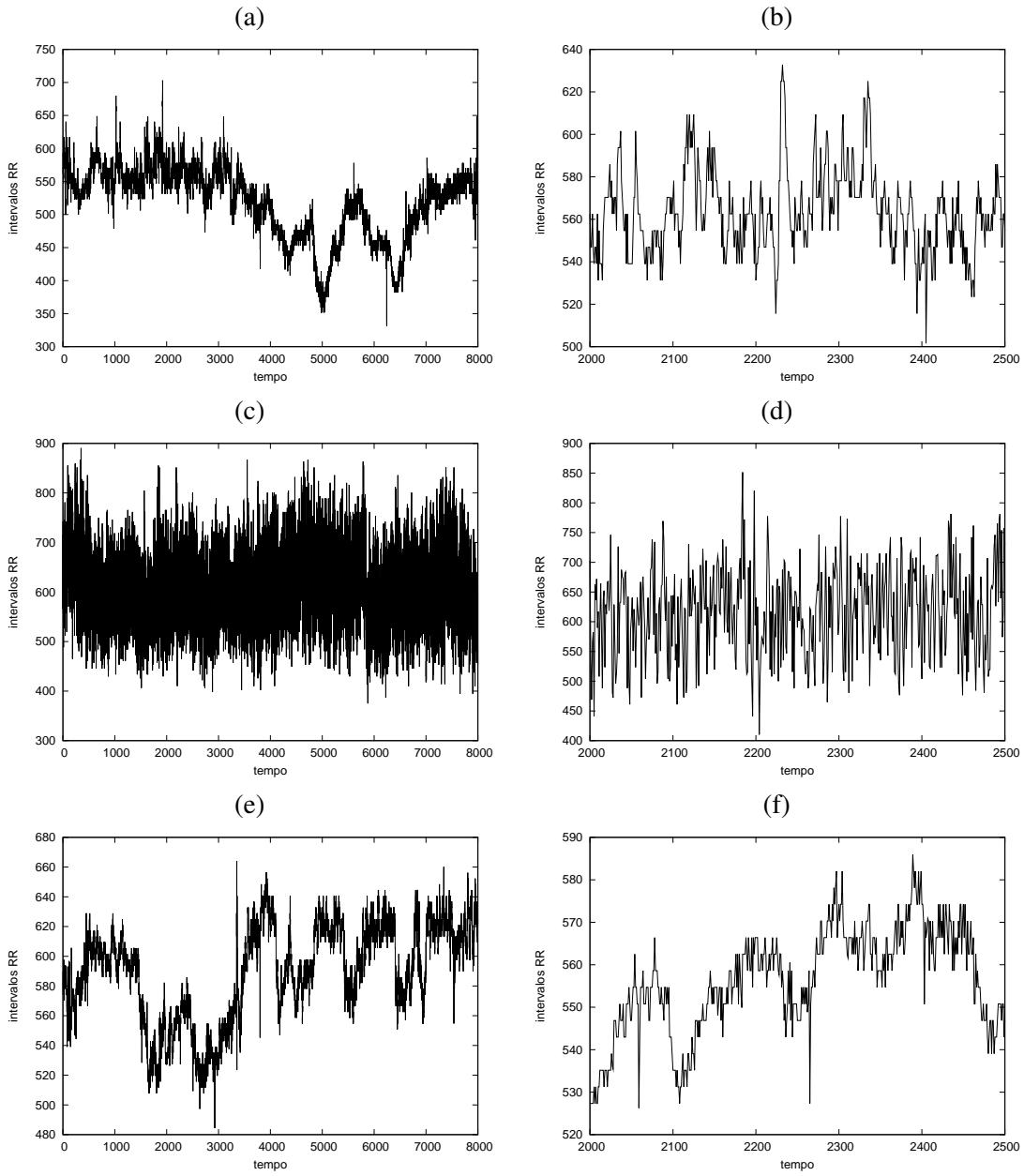


Figura 6.3: Séries de intervalos RR para um sujeito de ritmo cardíaco normal (a) e (b); um paciente com fibrilação atrial (c) e (d); e um outro paciente apresentando miocardiopatia dilatada (e) e (f). As Figs. (b), (d) e (f) mostram o detalhe das Figs. (a), (c) e (e) respectivamente.

Como consequência, a parte do miocárdio não lesada sofre um espessamento para compensar a perda da função de bombeamento do coração. Quando esse espessamento não compensa adequadamente, surge uma dilatação cardíaca [65]. Na Fig. 6.3 há três tipos de série de intervalos RR: na Fig. 6.3(a) o sujeito é saudável, na Fig. 6.3(c) o paciente apresenta fibrilação atrial e na Fig. 6.3(e) um paciente tem miocardiopatia dilatada. As Figs. (b),

(d) e (f) mostram o detalhe das Figs. (a), (c) e (e) respectivamente*.

As séries estudadas nesse capítulo foram fornecidas pelo Prof. Niels Wessel, da Universidade de Potsdam, em colaboração com o Centro de Pesquisas Clínicas do Hospital Charité, em Berlim. Os grupos das séries de curto tempo de observação são constituídos por 27 pacientes portadores de miocardiopatia dilatada (MCD) e 27 sujeitos saudáveis (REF), observados durante cerca de 30 minutos. Além dos intervalos RR obtidos através do sinal de eletrocardiograma, esses dois grupos também foram analisados através dos intervalos obtidos pela medida da pressão arterial. Quanto às observações de tempo longo, foram estudadas as séries de intervalos RR para quatro grupos: um grupo composto por 15 pacientes portadores de fibrilação atrial (FA); um grupo formado por 15 pessoas portadoras de insuficiência cardíaca (IC); um grupo composto por 15 idosos saudáveis (IS) e um grupo composto por 18 jovens saudáveis (JS). Esses quatro grupos foram observados por cerca de 24 horas.

6.1 Exponente máximo de Lyapunov

Na Seç. 2.3 do Cap. 2 há a explicação detalhada do procedimento que Wolf e colaboradores desenvolveram [47] para calcular os expoentes de Lyapunov a partir das equações diferenciais, quando estas são disponíveis. Wolf também propõe um método para obter os expoentes de Lyapunov a partir de séries temporais. Nesse método, primeiro se estabelece as coordenadas de retardo em dimensões adequadas e procura-se pelo ponto da série mais próximo ao primeiro ponto; este é considerado como o início de uma trajetória vizinha, dado pelos vetores reconstruídos. Então calcula-se o aumento da distância entre as duas trajetórias com o tempo. Quando a distância excede um limite, para este ponto procura-se por um novo vizinho, o mais próximo possível sob a condição de pertencer à mesma direção do anterior, que é a direção do autovetor associado ao expoente máximo. A média no tempo do logaritmo do fator de crescimento do vetor fornece o expoente máximo de Lyapunov. Em princípio todos os expoentes de Lyapunov podem ser calculados, pela observação das áreas em vez de vetores, mas praticamente esse método é limitado ao expoente máximo [68]. Mas mesmo para o cálculo do expoente máximo de Lyapunov o método de Wolf e seus colaboradores não produz resultados precisos. No caso de não encontrar uma trajetória vizinha ótima, uma trajetória não ideal deve ser considerada, comprometendo o resultado. Se se optar por utilizar apenas um trecho da série onde encontra-se as trajetórias vizinhas desejadas, perde-se informação sobre a direção instável. Na presença de

*O Ap. D traz as tabelas D.1 com os valores médios para os intervalos RR de cada indivíduo dos grupos de longa observação estudados e a Tab. D.2 com os valores médios para cada grupo.

ruído é necessário que a distância inicial entre as trajetórias seja maior que o nível de ruído, do contrário consideraria-se flutuações devido ao ruído como resultado da dinâmica [68]. Outro ponto de conflito nesse algoritmo é a importância da dimensão de imersão: com a escolha de uma dimensão muito pequena o expoente é superestimado, pois as trajetórias podem divergir pelo simples fato de não serem vizinhas no verdadeiro espaço de fase. Com a escolha de uma dimensão muito grande a execução do algoritmo é prejudicada: tipicamente a distância inicial entre trajetórias vizinhas é maior quanto maior a dimensão de imersão, ao passo que o número de passos no tempo necessários para a busca de uma nova trajetória vizinha diminui, induzindo erros grandes devido a desvios das direções [68].

Alternativas ao algoritmo de Wolf para o cálculo do expoente máximo de Lyapunov a partir de séries temporais foram propostas por Rosenstein *et al.* [69] e por Kantz [68]. Ambos são robustos a variações na dimensão de imersão, nível de ruído e o método de Rosenstein ainda é eficiente quando aplicado em séries curtas, por essa razão o algoritmo adotado para o cálculo do expoente de Lyapunov foi o desenvolvido por Rosenstein.

O método de Rosenstein *et al.* segue diretamente da definição do expoente máximo de Lyapunov. A sua precisão se deve ao fato de incluir toda a série disponível no cálculo do expoente máximo. Trata-se de um algoritmo rápido, de implementação simples e robusto quanto a mudanças na dimensão de imersão, tamanho da série, tempo de retardo de reconstrução e nível de ruído [69].

Enquanto o algoritmo de Wolf exige que a orientação do espaço de fase seja preservada, o algoritmo de Rosenstein dispensa a orientação pois se ocupa somente de calcular o expoente máximo. Uma vez que um sistema caótico apresenta pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, é suficiente que o expoente máximo seja positivo para que se possa considerar a dinâmica do sistema como sendo caótica.

Um vetor de concentração aleatória e condições iniciais aleatórias deve convergir para a variedade “mais instável”, dado que o crescimento exponencial nessa direção domina rapidamente o crescimento ou a expansão promovida ao longo das outras direções associadas aos demais expoentes de Lyapunov. Desse modo, o expoente máximo de Lyapunov pode ser definido pela seguinte equação

$$d(t) = Ce^{\lambda_1 t}, \quad (6.1)$$

em que $d(t)$ é a divergência média no tempo t e C uma constante que normaliza a separação inicial.

O primeiro passo é a reconstrução da dinâmica do atrator através de uma série temporal. A trajetória reconstruída \mathbf{X} pode ser expressa como uma matriz em que cada linha é um

vetor do espaço de fase

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1 \quad \mathbf{X}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{X}_M)^T, \quad (6.2)$$

onde \mathbf{X}_i é o estado do sistema no tempo discreto i . Para uma série de N pontos $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, cada \mathbf{X}_i será dado por

$$\mathbf{X}_i = (x_i \quad x_{i+J} \quad \cdots \quad x_{i+(m-1)J}), \quad (6.3)$$

com J sendo o tempo de retardo e m a dimensão de imersão. Assim \mathbf{X} é uma matriz $M \times m$ e as constantes m, M, J e N estão relacionadas por $M = N - (m - 1)J$. J é determinado com o auxílio da função de autocorrelação, encontrando o valor de latência onde a função é $1 - 1/e$ de seu valor inicial. Assim que a dinâmica está reconstruída, é o momento de se procurar pelos vizinhos mais próximos de cada ponto da trajetória. O vizinho mais próximo, $\mathbf{X}_{\hat{j}}$, é aquele que minimiza a distância ao ponto de referência \mathbf{X}_j , expresso por

$$d_j(i) = \min_{\mathbf{X}_{\hat{j}}} \|\mathbf{X}_j - \mathbf{X}_{\hat{j}}\|, \quad (6.4)$$

onde $d_j(0)$ é a distância inicial do j -ésimo ponto ao seu vizinho mais próximo e $\|\cdot\|$ é a norma Euclidiana. Nesse ponto é imposta a condição de que a menor distância entre as trajetórias vizinhas, $|j - \hat{j}|$, deve ser maior que o período médio da série temporal[†], permitindo assim considerar cada par de vizinhos como as condições iniciais mais próximas para diferentes trajetórias. O trabalho de Rosenstein é baseado no trabalho de Sato *et al.* [70], que estimou λ_1 como

$$\lambda_1(i, k) = \frac{1}{k\Delta t} \frac{1}{(M-k)} \sum_{j=1}^{M-k} \ln \frac{d_j(i+k)}{d_j(i)}, \quad (6.5)$$

com Δt sendo o número de iterações por tempo, $d_j(i)$ a distância entre o j -ésimo par de vizinhos depois de $i\Delta t$ segundos (M é o número de pontos reconstruídos), e k é uma constante introduzida para melhorar a convergência em relação a i .

Rosenstein reescreveu a Eq. (6.5) usando $\langle \cdot \rangle$ para denotar a média sobre todos os valores de j ,

$$\lambda_1(i, k) = \frac{1}{k\Delta t} \left\langle \ln \frac{d_j(i+k)}{d_j(i)} \right\rangle. \quad (6.6)$$

Da definição de λ_1 na Eq. (6.1), pressupõe-se que o j -ésimo par de trajetórias vizinhas divirja aproximadamente na taxa dada pelo expoente máximo de Lyapunov,

$$d_j(i) \approx C_j e^{\lambda_1(i\Delta t)}, \quad (6.7)$$

[†]Obtido através da frequência média do espectro de energia.

onde C_j é a separação inicial. Tomando o logaritmo dos dois lados da Eq. (6.7), obtém-se

$$\ln d_j(i) \approx \ln C_j + \lambda_1(i\Delta t). \quad (6.8)$$

A Eq. (6.8) representa um conjunto de retas aproximadamente paralelas para $j = 1, 2, \dots, M$, cada uma com inclinação proporcional a λ_1 . O expoente máximo de Lyapunov é calculado por um ajuste de mínimos quadrados à reta “média” definida por

$$y(i) = \frac{1}{\Delta t} \langle \ln d_j(i) \rangle \quad (6.9)$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre todos os valores de j . Esse procedimento de cálculo da média é a chave para encontrar valores precisos de λ_1 usando séries curtas e com ruído.

A Fig. 6.4 mostra o resultado da Eq. (6.8) para o grupo de referência (REF) e para o grupo com miocardiopatia dilatada (MCD). Por um ajuste linear de mínimos quadrados obtém-se $\bar{\lambda}_1_{REF} = 0,30(0,03)$ e $\bar{\lambda}_1_{MCD} = 0,29(0,03)$. Para o cálculo das curvas foi utilizada a rotina `lyap_r` do pacote TISEAN [71]. Esses valores não permitem diferenciar os grupos.

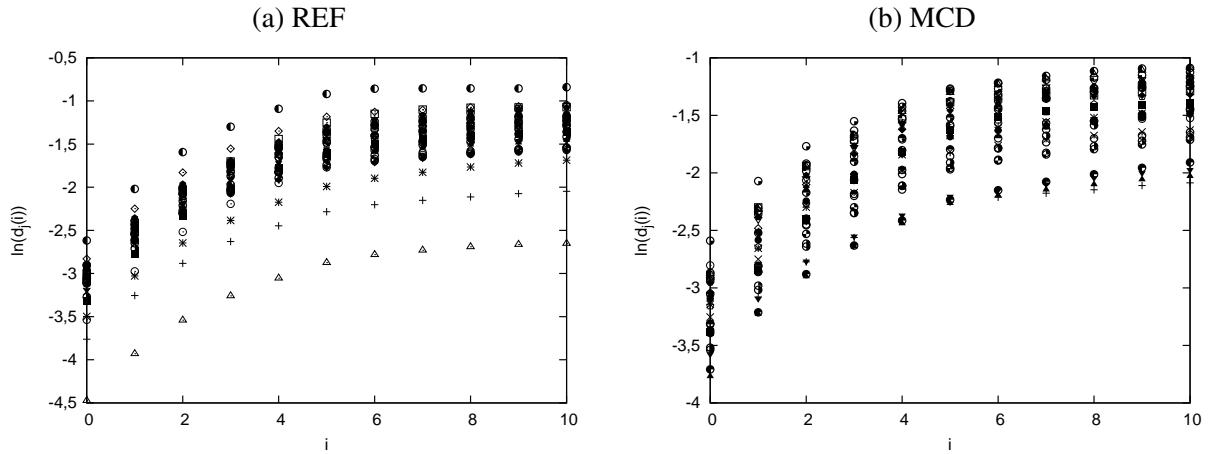


Figura 6.4: O expoente máximo de Lyapunov é calculado por um ajuste de mínimos quadrados à reta “média” definida pela Eq. (6.9) onde $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre todos os valores de j . Esse procedimento de cálculo da média é a chave para encontrar valores precisos de λ_1 usando séries curtas e com ruído. Os valores obtidos foram $\bar{\lambda}_1_{REF} = 0,30(0,03)$ e $\bar{\lambda}_1_{MCD} = 0,29(0,03)$.

6.2 Análise de flutuações depuradas

Apresentada por Peng *et al.* [40] a análise de flutuações depuradas – DFA, em inglês Detrended Fluctuation Analysis – foi desenvolvida para determinar autossimilaridades, pro-

priedades de correlação do tipo fractal. Este método é menos sensível aos efeitos de ruído e não estacionaridade e tem a considerável vantagem de que seus expoentes podem ser calculados sem a remoção de dados discrepantes [41].

Supondo que as flutuações da taxa de batimentos cardíacos são originadas por estímulos descorrelacionados, estas podem ser decompostas das flutuações produzidas pelo sistema dinâmico que aparentemente regula a frequência cardíaca, devendo apresentar diferentes propriedades de correlação. Neste caso, dizer que as flutuações de longo alcance surgem da dinâmica do sistema complexo é uma consideração cabível. Outras respostas devem surgir de diferentes tipos de flutuações e este tipo de “ruído”, embora fisiologicamente importante, pode ser tratado como uma tendência e excluída das flutuações mais sutis que podem revelar propriedades intrínsecas da dinâmica.

Na análise de flutuações depuradas, primeiro a série temporal é integrada

$$y(k) = \sum_{i=1}^k [y_i - \langle y_i \rangle] \quad (6.10)$$

onde y_i é o i -ésimo ponto da série e $\langle y_i \rangle$ a média. Em seguida a série é dividida em caixas de mesmo tamanho n . Para cada caixa é feito um ajuste linear via mínimos quadrados, representando a tendência em cada caixa. O valor y fornecido pela reta ajustada é denotado por $y_n(k)$. As tendências na série integrada são removidas pela subtração de $y_n(k)$. A flutuação, $F(n)$, é dada por

$$F(n) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [y(k) - y_n(k)]^2}. \quad (6.11)$$

Calculando $F(n)$ para diversas escalas de tempo através de diferentes valores de n , obtém-se $F(n)$ em função do tamanho n da caixa. Tipicamente $F(n)$ cresce com o aumento de n . A presença de escala é caracterizada por uma linha reta em um gráfico log-log de $F(n) \times n$ e nessas condições as flutuações são caracterizadas por um expoente de escala α ,

$$F(n) \propto n^\alpha \quad (6.12)$$

Para dados descorrelacionados, como um ruído branco, a série integrada corresponde a um passeio aleatório e $\alpha = 0,5$. Se existem apenas correlações de curto alcance a inclinação inicial pode diferir de 0,5, mas tenderá a $\alpha = 0,5$ para n grande. Um valor de $0,5 \leq \alpha \leq 1,0$ indica a presença de correlações de longo alcance do tipo lei de potência, de forma que um maior intervalo entre batimentos cardíacos (comparado a média) é possivelmente seguido de outro intervalo grande enquanto um intervalo pequeno é seguido de um intervalo

pequeno. Por outro lado $0 < \alpha < 0,5$ indica um tipo de correlação onde intervalos grandes e pequenos se alternam. O caso de $\alpha = 1$ corresponde ao ruído $1/f$. Para $\alpha \geq 1$ correlações existem mas deixam de ser em forma de lei de potência e $\alpha = 1,5$ indica movimento browniano, que é a integração do ruído branco [40]. Em séries longas de intervalos RR de pessoas saudáveis e portadores de deficiência cardíaca a análise de flutuações depuradas mostrou diferenças significativas no comportamento da escala de longo alcance.

É observado que para escalas de tempo curtas existe uma mudança aparente no comportamento de α . Para pessoas saudáveis, quando $n < 10$, α é maior que o calculado para $n > 10$. Provavelmente porque para escalas de tempo curtas as flutuações são dominadas pela oscilação relativamente suave proveniente da respiração, produzindo um valor maior de α . Para escalas maiores de observação as flutuações refletem a dinâmica de sistemas complexos. Em contraste, conjuntos de dados patológicos mostram um outro padrão de mudança. Para escalas curtas as flutuações são próximas de aleatórias. Com o aumento da escala de tempo as flutuações se tornam mais suaves [40].

Em cada conjunto de dados o expoente α foi obtido para duas escalas de tempo, uma curta de uma longa, onde α_1 foi calculado com $4 \leq n \leq 16$ e α_2 com $16 \leq n \leq 64$. Como esses dois expoentes não são extraídos de regiões assintóticas, conjuntos de dados curtos são suficientes, permitindo a aplicação da técnica ao mundo real de dados clínicos. O limite $n = 16$ é indicado nas Figs. 6.5 e 6.6 pela linha vertical tracejada.

A Fig. 6.5 mostra duas séries de dados e seus respectivos gráficos de $F(n) \times n$. Em (a) a série é de intervalos RR de um paciente saudável e em (b) de um paciente portador de miocardiopatia dilatada (MCD). As Figs. 6.5(c) e (d) são o resultado da DFA de (a) e (b). A Fig. 6.6 mostram duas séries de dados da pressão arterial, diastólica na linha sólida e sistólica na linha tracejada, de um paciente saudável (a) e um portador de MCD (b) com seus respectivos gráficos de $F(n) \times n$, (c) e (d). Por último, a Fig. 6.7(a) mostra o gráfico de espalhamento de $\alpha_1 \times \alpha_2$ das séries de intervalos RR de todos os pacientes com MCD (círculos) e dos sujeitos saudáveis (triângulos), enquanto a Fig. 6.7(b) apresenta $\alpha_1 \times \alpha_2$ obtido das séries de pressão arterial[‡]. Não é possível distinguir o grupo de pacientes portadores de miocardiopatia dilatada do grupo de sujeitos saudáveis, embora a nuvem de pontos observada nas Figs. 6.7 indiquem que os valores de α_1 e α_2 são descorrelacionados para ambos. Para as séries de intervalos RR não é possível encontrar valores significativamente diferentes. Para as séries da pressão arterial as diferenças também não são significativas, com exceção do grupo de sujeitos saudáveis. No entanto, em séries longas de observação, existem diferenças significativas entre os valores de α para os grupos de pessoas saudáveis

[‡]Os resultados para as séries curtas de observação estão no Ap. D.

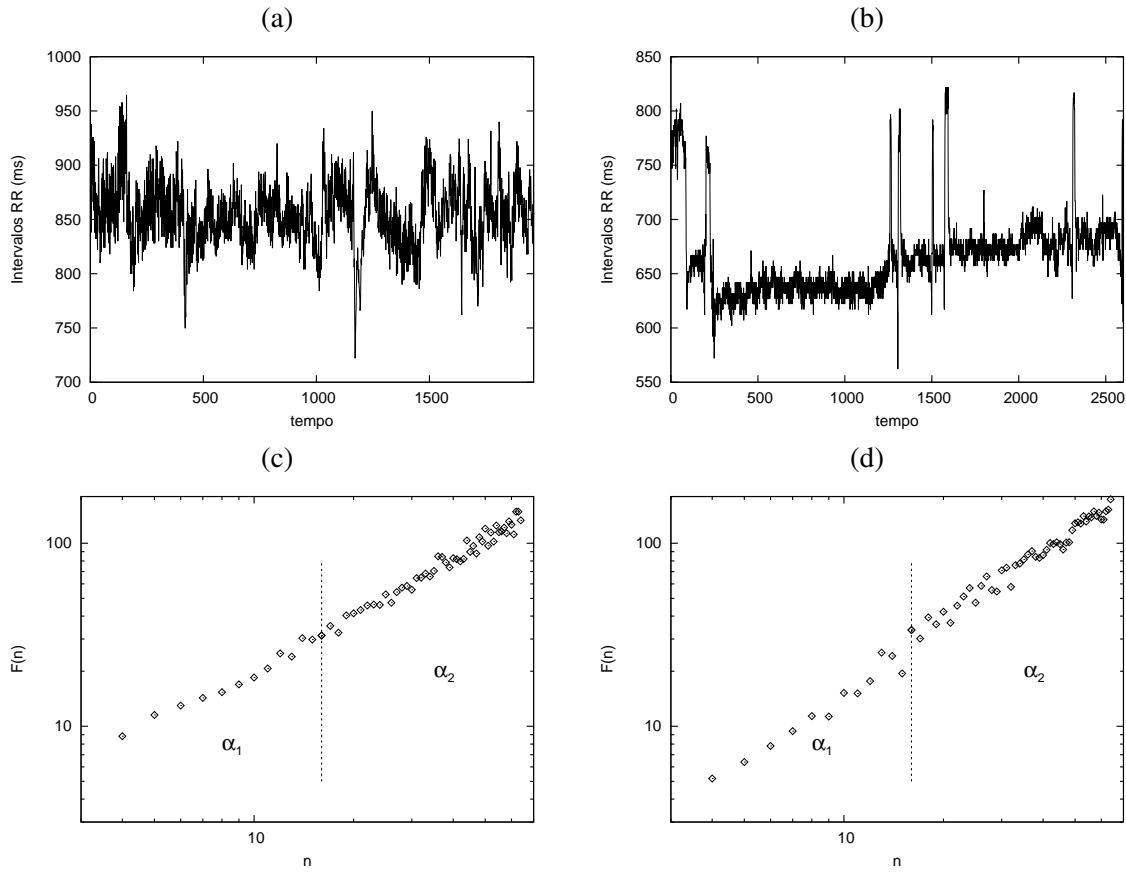


Figura 6.5: (a) Série de intervalos RR de um paciente saudável (REF). (b) Série de intervalos RR de um paciente com miocardiopatia dilatada (MCD). (c) DFA de (a). (d) DFA de (b)

e para os portadores de problemas cardíacos[§]. Assim, tratando-se de exames clínicos de curta duração por exemplo, a análise de flutuações depuradas não revela nem mesmo o comportamento já conhecido para séries longas de observação.

6.3 Segmentação

O método de segmentação de séries foi desenvolvido por Bernaola-Galván e colaboradores [42] e é baseado no nível de significância entre as médias dos segmentos produzidos. Esse método implica em considerar uma série temporal como a união de segmentos estacionários.

O processo de segmentação pode ser descrito em linhas gerais da seguinte maneira: percorre-se a série temporal a fim de encontrar um ponto específico da série onde exista

[§]Como mostra a Tab. D.4, no Ap. D.

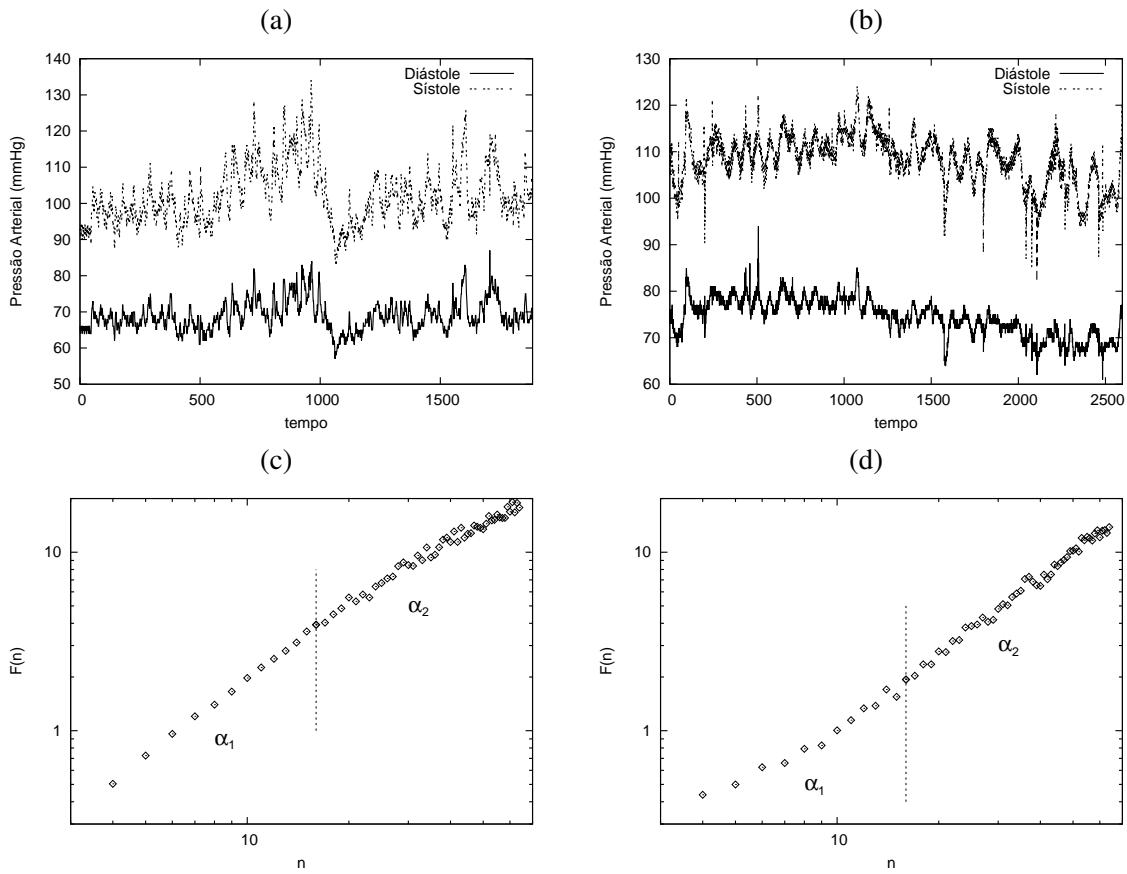


Figura 6.6: (a) Série de intervalos da pressão arterial (sistólica e diastólica) de um paciente saudável (REF). (b) Série de intervalos da pressão arterial (sistólica e diastólica) de um paciente com miocardiopatia dilatada (MCD). (c) DFA de (a). (d) DFA de (b).

uma diferença significativa entre os pontos situados à esquerda e os pontos situados à direita desse ponto específico. Caso esse ponto seja encontrado e satisfaça uma condição pré estabelecida, ele será tomado como divisor entre dois segmentos. Esses dois segmentos serão considerados significativamente diferentes em relação a uma quantidade que pode ser, por exemplo, a média, quantidade escolhida por Bernaola-Galván. A Fig. 6.8 mostra como o trecho de uma série de intervalos RR pode ser dividido em segmentos com médias diferentes. Nas subseções seguintes, (6.3.1) e (6.3.2) o método de segmentação com base em médias diferentes e com base na variância é apresentado em detalhes.

6.3.1 Segmentação baseada na média

Como foi mencionado, o método de segmentação de séries desenvolvido por Bernaola-Galván e colaboradores [42] é baseado no nível de significância entre as médias dos seg-

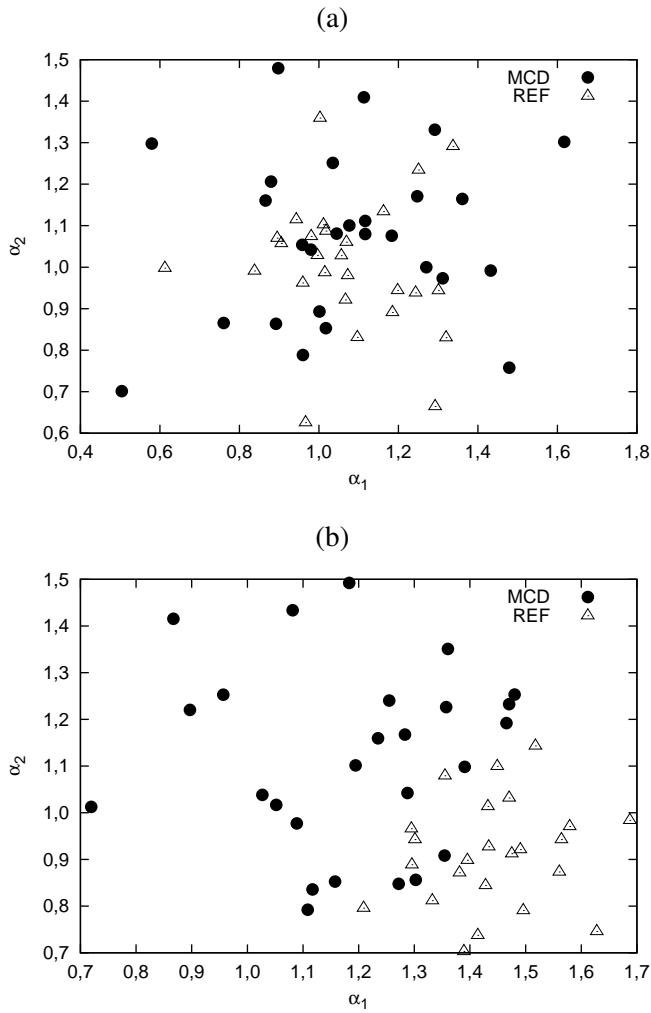


Figura 6.7: Resultado da DFA para os dados apresentados nas Figs. 6.5 e 6.6. Em (a) os dados analisados são de batimentos cardíacos e em (b) dados da pressão arterial.

mentos produzidos.

O processo de segmentação de Bernaola-Galván consiste em calcular a quantidade t ,

$$t = \frac{|\mu_L - \mu_R|}{s_D}, \quad (6.13)$$

com

$$s_D = \left[\frac{(\sigma_L^2 + \sigma_R^2)}{(N_L + N_R - 2)} \left(\frac{1}{N_L} + \frac{1}{N_R} \right) \right]^{1/2} \quad (6.14)$$

para cada ponto na série, com μ_R (μ_L) sendo a média de todos os pontos à direita (esquerda) e σ_R (σ_L) o desvio padrão, enquanto N_R (N_L) é o número de pontos situados à direita (esquerda) do ponto em que se calcula t . Determina-se o valor máximo $t_{max} = \tau$ e

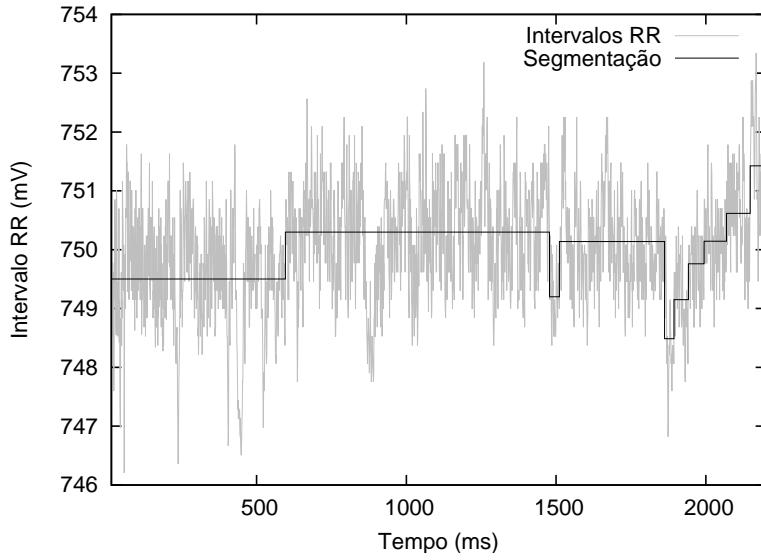


Figura 6.8: Exemplo da segmentação de uma série. Em cinza vê-se o sinal e a linha pontilhada mostra o resultado da segmentação.

se o nível de significância $P(\tau, \nu)$ for maior que um p_0 escolhido, $t_{max} = \tau$ será o ponto de corte. Bernaola-Galván calcula a probabilidade $P(\tau, \nu)$ por uma aproximação obtida através de simulações de 10^5 séries geradas aleatoriamente, com tamanho N e média fixa, fornecendo $P(\tau, \nu) \approx [1 - I_{\nu/(\nu+\tau^2)} \times (\delta\nu, \delta)]^\gamma$ onde $\nu = N - 2$ é o número de graus de liberdade, $\gamma = 4, 19 \ln(N)$, $\delta = 0, 40$ e N é o comprimento do segmento. Se $p > p_0$, a série é separada nesse ponto produzindo dois segmentos com média significativamente diferentes. O processo é repetido para cada novo segmento, até que não existam segmentos com médias significativamente diferentes ou alcance um comprimento mínimo m_0 .

A segmentação está exemplificada na Fig. 6.9. Em (a) calcula-se t (dado pelas Eqs. (6.13 e 6.14)) para todos os pontos da série e determina-se o valor $t_{max} = \tau$. Se $p(\tau) > p_0$ (Eq. (6.16)), a série é dividida em dois segmentos. No segundo passo, em (b), tem-se dois segmentos e t calculado para cada um deles: t_L é o segmento à esquerda do ponto de corte e t_R o segmento à direita do ponto de corte. Em (c), no terceiro passo, a série é segmentada em quatro partes e t é calculado em cada uma delas. (d) mostra o resultado final do processo de segmentação aplicado à série: segmentos cujas médias diferem entre si com nível de significância maior que 95%.

A aplicação do método de segmentação em séries de longo tempo de observação mostrou que a distribuição dos comprimentos dos segmentos segue uma lei de potência, o que significa que os períodos de estacionariedade são livres de escalas. Essa lei de potência foi encontrada tanto para sujeitos saudáveis quanto doentes, sem possibilidade de diferenciar

um grupo do outro. A Fig. 6.10 mostra a probabilidade de se encontrar segmentos com comprimento maior que um dado valor para segmentos obtidos de séries curtas em (a) e séries longas em (b). Para as séries em (a), $\beta_{MCD} = -1, 14$ e $\beta_{REF} = -1, 13$; em (b) os valores ajustados do parâmetro β são: $\beta_{AF} = -1, 27$, $\beta_{IC} = -1, 17$, $\beta_{IS} = \beta_{JS} = -1, 22$.

6.3.2 Segmentação baseada nos coeficientes de variabilidade

Na forma original de Bernaola-Galván [42] o processo de segmentação ocorre de acordo com variações na média da série de intervalos RR. Para basear esse processo de segmentação em outra quantidade, especificamente na variância da série de intervalos RR, foram introduzidas duas novas quantidades obtidas a partir da série original: os coeficientes de

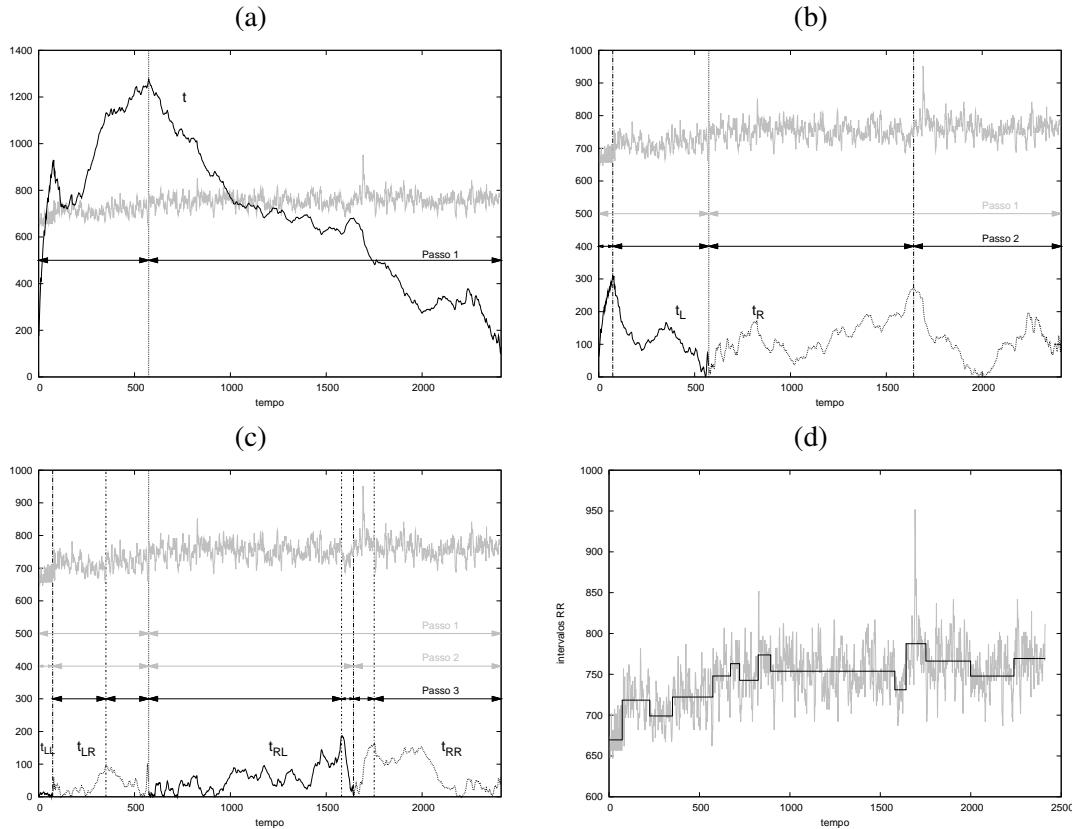


Figura 6.9: Primeiros passos do processo de segmentação. Em (a) calcula-se t para todos os pontos da série e determina-se o valor $t_{max} = \tau$. Se $p(\tau) > p_0$, a série é dividida em dois segmentos. No segundo passo, em (b), tem-se dois segmentos e t calculado para cada um deles: t_L é o segmento à esquerda do ponto de corte e t_R o segmento à direita do ponto de corte. Em (c), no terceiro passo, a série é segmentada em quatro partes e t é calculado em cada uma delas. (d) mostra o resultado final do processo de segmentação aplicado à série: segmentos cujas médias diferem entre si com nível de significância maior que 95%.

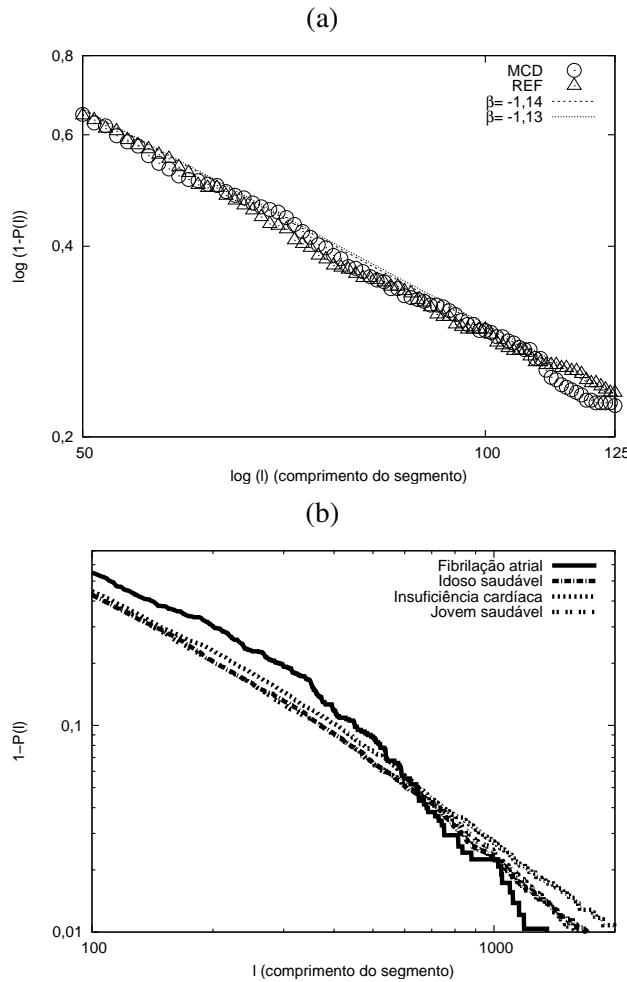


Figura 6.10: Probabilidade de se encontrar segmentos com comprimento maior que um dado valor para segmentos obtidos de séries curtas em (a) e séries longas em (b). Para as séries em (a), $\beta_{MCD} = -1,14$ e $\beta_{REF} = -1,13$; em (b) os valores ajustados do parâmetro β são: $\beta_{AF} = -1,27$, $\beta_{IC} = -1,17$, $\beta_{IS} = \beta_{JS} = -1,22$.

variabilidade. Outra modificação foi feita no cálculo do nível de significância dado pela aproximação $P(\tau)$, sendo substituído pela integração numérica de $p(\tau)$, como será mostrado a seguir e considerando t para distribuições com médias e variâncias distintas, ao contrário de Bernaola-Galván que consideraram apenas médias distintas.

O coeficiente de variabilidade, $CV_{(1)}$, é a razão entre o desvio padrão e a média calculadas dentro de uma janela de tamanho w dentro da série. E $CV_{(2)}$ é a razão entre o desvio padrão quadrático (a variância) e a média calculadas dentro da janela w . Essa janela percorre toda a série, como esquematizada na Fig. 6.11(a), produzindo uma nova série, mostrada na Fig. 6.11(b). O tamanho da janela w foi escolhido como $w = 30$, porque com esse valor estamos avaliando as flutuações na frequência muita baixa de energia do

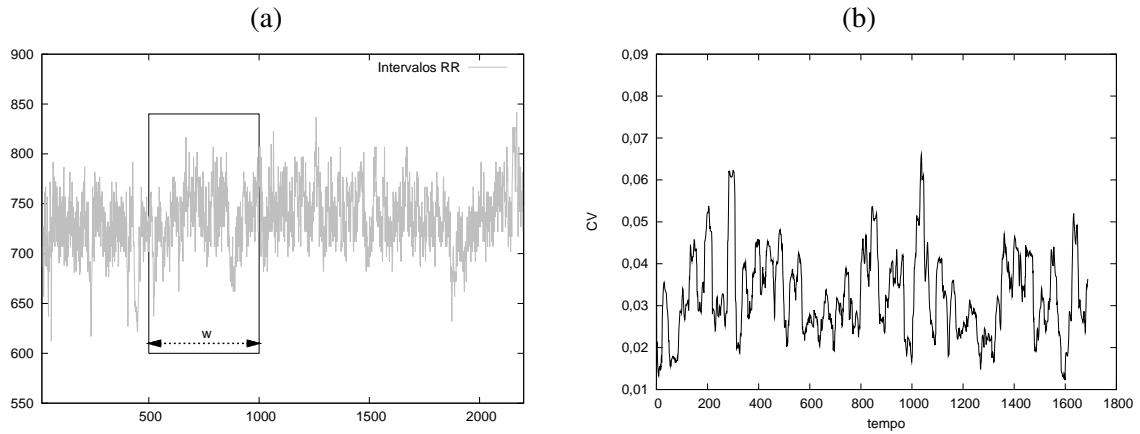


Figura 6.11: Exemplo do coeficiente de variabilidade $CV_{(1)}$ calculado sobre uma série de intervalos RR. $CV_{(1)}$ é a razão $(\sigma/\mu)_w$ e $CV_{(2)}$ é a razão $(\sigma^2/\mu)_w$.

sinal [35].

Além de introduzir essa quantidade na análise das séries de batimentos cardíacos, o método de segmentação foi modificado, pois Bernaola-Galván, ao escolher a Eq. (6.13), considera que as médias das amostras a serem comparadas possuem a mesma dispersão. Nos resultados a seguir, para o cálculo da quantidade t , considera-se o caso em que as amostras possuem dispersão diferentes, com t dado por

$$t = \frac{|\mu_L - \mu_R|}{\sqrt{\frac{\sigma_L^2}{N_L} + \frac{\sigma_R^2}{N_R}}}. \quad (6.15)$$

No cálculo do nível de significância $p(\tau, \nu)$ a seguinte integral,

$$p(\tau, \nu) = 1 - \frac{1}{\nu^{1/2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{\nu}{2}\right)} \int_{-\tau}^{\tau} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dt, \quad (6.16)$$

onde ν é o número de graus de liberdade,

$$\nu = \frac{\left[\frac{\sigma_L}{N_L} + \frac{\sigma_R}{N_R} \right]^2}{\frac{\left[\frac{\sigma_L}{N_L} \right]^2}{N_L} + \frac{\left[\frac{\sigma_R}{N_R} \right]^2}{N_R}}. \quad (6.17)$$

foi integrada numericamente [72]. A análise dos coeficientes de variabilidade revelou diferenças entre as distribuições dos tamanhos dos segmentos dos grupos analisados. Na Fig. 6.12 estão as probabilidades de se encontrar segmentos com comprimento maior que um dado valor para as séries $CV_{(1)}$ da pressão arterial em (a) e das séries $CV_{(2)}$ da pressão arterial em (b). A inclinação β das curvas representam o expoente de escala da relação $1 - P(l) \propto l^\beta$. Na Fig. 6.12(a), $\beta_{MCD} = \beta_{REF} = -1,1$. Para a Fig. 6.12(b), os parâmetros ajustados são $\beta_{MCD} = -1,08$ e $\beta_{REF} = -0,52$.

Devido à curta duração das séries analisadas na Fig. 6.12, não é possível calcular o expoente β para cada paciente individualmente, visto que a maior parte das séries produz de 4 a 6 segmentos somente. Porém existe uma forte indicação que através das séries obtidas dos coeficientes de variabilidade é possível diferenciar o grupo de pacientes portadores de miocardiopatia dilatada dos sujeitos saudáveis. Assim, partiu-se para a análise de tempos longos de observação de quatro grupos: 18 sujeitos jovens saudáveis (JS), 15 sujeitos idosos saudáveis (IS), 15 pacientes com insuficiência cardíaca (IC) e 15 pacientes com fibrilação atrial (FA), onde o cálculo de β para cada sujeito de cada grupo é possível. Com um índice para cada indivíduo, os valores médios de β foram determinados para cada grupo (Tab. 6.1). A Fig. 6.13(a) mostra a probabilidade de se encontrar segmentos com comprimento maior que um dado valor para as séries $CV_{(1)}$. Os valores ajustados do parâmetro β são: $\beta_{AF} = -1,65$, $\beta_{IC} = -1,38$, $\beta_{IS} = -1,53$ e $\beta_{JS} = -1,56$. E na Fig. 6.13(b), para as séries $CV_{(2)}$: $\beta_{AF} = -1,66$, $\beta_{IC} = -1,17$, $\beta_{IS} = -1,45$ e $\beta_{JS} = -1,48$. Os valores médios para cada grupo são mostrados na Tab. 6.1. Para a segmentação baseada em tanto em $CV_{(1)}$ quanto $CV_{(2)}$ temos diferenças significativas entre os grupos, com valores de $p < 0,003$ dados pelo teste de Kruskal-Wallis[¶] para as séries $CV_{(1)}$ e $p < 0,0001$ para as séries $CV_{(2)}$. De acordo com o teste de Kruskal-Wallis para o valor p encontrado é possível afirmar que os quatro grupos provêm de distribuições distintas.

[¶]O teste de Kruskal-Wallis é apresentado no Ap. E.

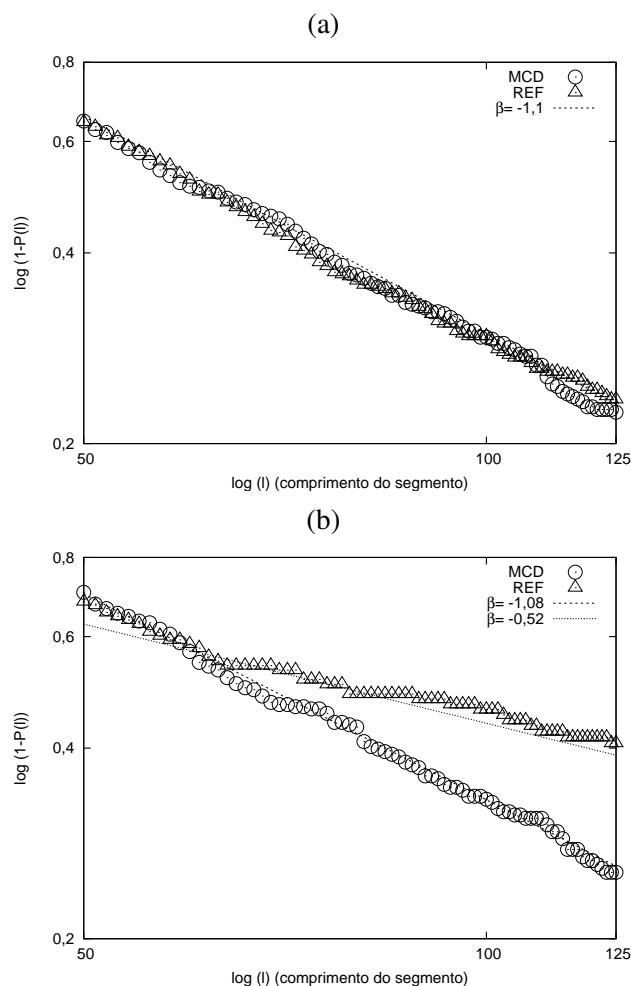


Figura 6.12: Probabilidade de se encontrar segmentos com comprimento maior que um dado valor para segmentos obtidos do coeficiente de variabilidade de séries curtas. Devido ao tamanho das séries, a probabilidade de se encontrar grandes segmentos é bem pequena. Para as séries $CV_{(1)}$ em (a), $\beta_{MCD} = \beta_{REF} = -1,1$. Para $CV_{(2)}$ em (b), os parâmetros ajustados são $\beta_{MCD} = -1,08$ e $\beta_{REF} = -0,52$.

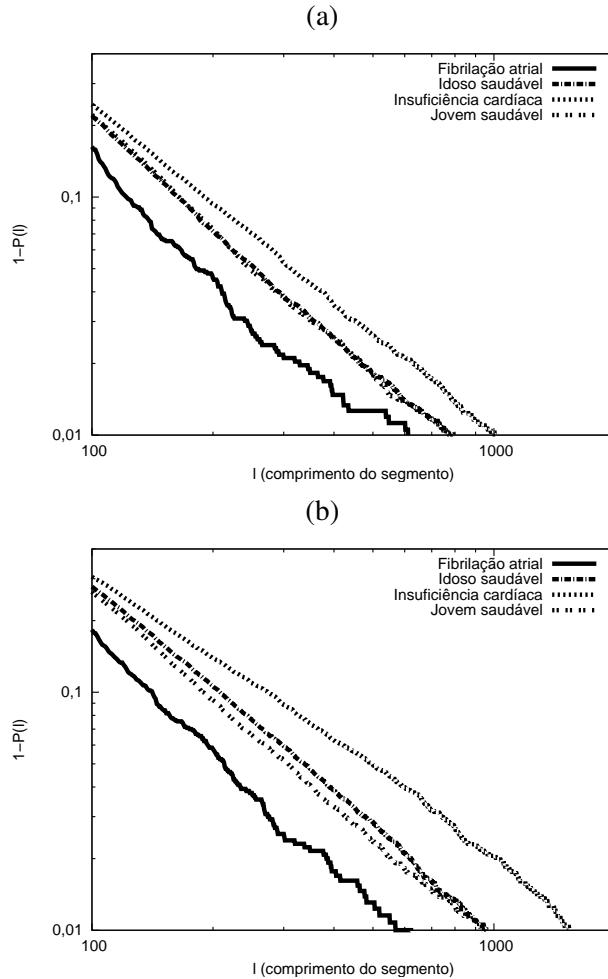


Figura 6.13: Segmentação aplicada às séries de tempo longo. Na Fig. (a), os valores ajustados do parâmetro β para as séries $CV_{(1)}$ são: $\beta_{AF} = -1,65$, $\beta_{IC} = -1,38$, $\beta_{IS} = -1,53$ e $\beta_{JS} = -1,56$. E na Fig. (b), para as séries $CV_{(2)}$: $\beta_{AF} = -1,66$, $\beta_{IC} = -1,17$, $\beta_{IS} = -1,45$ e $\beta_{JS} = -1,48$. Os valores médios para cada grupo são mostrados na Tab. 6.1.

Grupo	β para séries RR	β para séries $CV_{(1)}$	β para séries $CV_{(2)}$
Fibrilação atrial	-0,88 (0,26)	-2,07 (0,57)	-1,72 (0,63)
Insuficiência cardíaca	-0,90 (0,22)	-1,40 (0,20)	-1,11 (0,38)
Idosos saudáveis	-0,96 (0,13)	-1,56 (0,17)	-1,33 (0,15)
Jovens saudáveis	-1,00 (0,13)	-1,49 (0,11)	-1,49 (0,30)

Tabela 6.1: Resultados para séries de tempo longo para grupos de pacientes sofrendo de fibrilação atrial, insuficiência cardíaca, idosos saudáveis e jovens saudáveis. $CV_{(1)}$ refere-se à quantidade obtida pela razão entre desvio padrão e média adaptativos e $CV_{(2)}$ refere-se à razão entre desvio padrão quadrático (variância) e média adaptativos, ambos calculados numa janela de 30 ms que percorre a série original. Para a segmentação baseada em tanto em $CV_{(1)}$ quanto $CV_{(2)}$ temos diferenças significativas entre os grupos, com valores de $p < 0,003$ dados pelo teste de Kruskal-Wallis para as séries $CV_{(1)}$ e $p < 0,0001$ para as séries $CV_{(2)}$.

Capítulo 7

Conclusões e perspectivas

Bacias crivadas ocorrem em sistemas não lineares onde a simetria do espaço de fase permite a existência de um subespaço invariante que apresenta um atrator caótico capaz de atrair e repelir órbitas sobre esse subespaço invariante. Pode-se comprovar a presença de bacias crivadas pela análise do espaço de fase e dos expoentes máximos de Lyapunov de tempo finito e tempo infinito. A caracterização do fenômeno pode ainda ser complementada pelas leis de escala provenientes de um modelo para as flutuações dos expoentes máximos transversais de Lyapunov de tempo finito. O modelo de flutuações é baseado no estudo de sincronização de mapas caóticos idênticos acoplados, cuja sincronização é associada a uma variedade de sincronização. A dinâmica transversal a essa variedade de sincronização apresenta flutuações estocásticas. As flutuações estocásticas permitem a formulação, a partir de um passeio aleatório, de leis de escala para as bacias crivadas.

A primeira lei de escala do modelo estocástico de Ott [3, 4] fornece a relação entre a fração das órbitas atraídas pelo atrator localizado fora do subespaço invariante e a distância ao atrator. Mesmo para regiões muito próximas ao atrator existe uma fração de órbitas que não pertence à bacia de atração deste. A segunda lei de escala é a medida da incerteza na determinação do estado final de uma trajetória e demonstra que aumentar a precisão na determinação da condição inicial em nada melhora a previsibilidade do sistema. Essa é a consequência mais notável de fenômenos que exibem bacias crivadas. Em situações experimentais é de vital importância detectar a presença de crivamento, pois repetições do experimento podem nem mesmo ser possíveis.

Hofbauer *et al.* [56] mostrou que um tipo de sistema competitivo de duas espécies pode ser modelado através de um mapa para o qual Kan [57] demonstrou a existência de bacias densas em todos os pontos e entrelaçadas. Tal sistema competitivo é composto por duas espécies de besouros, o *Tribolium castaneum* e o *Tribolium confusum*. Esse sistema possui dois estados finais, para tempos longos, onde uma das duas espécies é extinta. Neste tra-

Iho, além de escolher uma função específica para o modelo geral de Hofbauer, o crivamento para o sistema competitivo entre espécies foi caracterizado pelas leis de escala do modelo estocástico de Ott.

O sistema mecânico escolhido possui na sua variedade invariante a dinâmica do pêndulo forçado amortecido, enquanto os sistemas mecânicos explorados no estudo de crivamento por Ott [3] são baseados num potencial escalar do tipo quadrático e para a variedade invariante de seus sistemas o atrator caótico é o atrator de Duffing. Os resultados numéricos para as leis de escala são mais sensíveis do que os resultados obtidos para o sistema competitivo entre espécies, que é governado por um mapa. A integração numérica das equações diferenciais não constitui um obstáculo à caracterização pelas leis de escala, mas afeta a concordância entre a previsão teórica e os valores empíricos.

Quando um sistema que apresenta crivamento pode ser quantificado por parâmetros como os obtidos através das leis de escala, seu comportamento pode ser associado ao de outros sistemas que convencionalmente não estariam relacionados, devido ao caráter geral desses parâmetros, associados ao fenômeno da difusão.

Quanto à análise das séries de batimentos cardíacos, os resultados da análise de flutuações depuradas mostraram que no caso de intervalos RR extraídos de eletrocardiogramas a duração curta da observação compromete o objetivo desejado: os valores de α para grupos saudáveis e grupos portadores de insuficiência cardíaca não são significativamente diferentes, tanto para as séries de intervalos RR quanto para as séries extraídas da pressão arterial, embora essas últimas apresentem melhor divisão. A tentativa de caracterizar os grupos via expoente máximo de Lyapunov não se mostrou mais promissora que a análise de flutuações depuradas: também falha em apontar uma quantidade, um indicador, que possa garantir com pequena margem de incerteza que um dado paciente pertença a um grupo ou a outro.

O método de segmentação, da forma como foi inicialmente proposto, não produziu resultados diferentes das outras análises empregadas. Grupo saudável e grupo portador de insuficiência cardíaca terminavam por apresentar o mesmo comportamento, tanto na distribuição do comprimento dos segmentos quanto na distribuição dos saltos (a diferença absoluta entre a média de dois segmentos consecutivos). Entretanto, quando a série segmentada deixou de ser a série de intervalos RR, mas a série calculada à partir dos coeficientes de variabilidade, o método de segmentação foi o único que sinalizou a possibilidade de caracterizar satisfatoriamente os grupos estudados. Mas ainda persiste a questão individual: o expoente de escala β fornecido pela distribuição cumulativa do comprimento dos segmentos se refere ao grupo, à totalidade de diferentes comprimentos dos segmentos obtidos de todas as séries, todos os indivíduos.

Quando a série segmentada tem duração maior então é possível determinar β para cada

um dos indivíduos que compõem os grupos. Os segmentos resultantes de cada série exibem uma gama maior de comprimentos, e a distribuição $(1 - P(l))$ de cada indivíduo é compatível com a distribuição encontrada quando considera-se o resultado da segmentação de todos os componentes do grupo. Salvo a margem de erro, β de uma série de dados é o igual ao β obtido para o grupo. Esses resultados serão submetidos à publicação em breve. Em relação aos coeficientes $CV_{(1)}$ e $CV_{(2)}$, ambos estão habilitados a evidenciar as diferenças entre os grupos analisados, porém como $CV_{(1)}$ é adimensional, os próximos passos na exploração do coeficiente de variabilidade devem ser tomados com base nas séries de $CV_{(1)}$.

A segmentação baseada nos coeficientes de variabilidade abre ainda algumas perspectivas a serem exploradas num futuro bastante breve. A primeira, constitui-se em extrair um segundo índice quantificador, baseado na distribuição dos saltos entre as médias de segmentos consecutivos. A segunda é, através dos resultados da segmentação de séries obtidas de sistemas dinâmicos conhecidos, encontrar modelos para as séries de batimentos cardíacos. Por fim, entender e se possível formular analiticamente a relação da segmentação com outros métodos conhecidos, como por exemplo, a análise de flutuações depuradas e os gráficos de recorrência.

Considerando a sincronização entre os ritmos gerados pelos nódulos sinoatrial e atrioventricular, uma vez que a geração de determinadas disritmias cardíacas está associada com uma perda de sincronização entre os dois nódulos, espera-se que um estudo de crivamento na variedade de sincronização seja possível, através das equações de van der Pol-Liénard forçadas, que têm a vantagem de possuir parâmetros ajustáveis que podem ser variados livremente para investigar a presença de maior ou menor variabilidade da freqüência cardíaca.

Apêndice A

Algumas definições matemáticas

Considerando o domínio dos números reais, \mathbb{R} , um *intervalo aberto*, denotado por (a, b) , é o conjunto de todo x tal que $a < x < b$. Um *intervalo fechado*, denotado por $[a, b]$, é o conjunto de todo x tal que $a \leq x \leq b$, com $b > a$ [43].

Um *ponto interior* P de um conjunto S é um ponto tal que existe uma ε -vizinhança $(P - \varepsilon, P + \varepsilon)$ totalmente contida em S . Um ponto P é um *ponto de fronteira* de S se qualquer ε -vizinhança de P possuir pontos que pertençam a S e pontos que não pertençam a S .

Um ponto P é um *ponto limite* do conjunto S se toda ε -vizinhança de P contém pelo menos um ponto em S , diferente de P . Isto é equivalente à afirmação de que existe uma sequência infinita de pontos distintos x_1, x_2, \dots todos em S tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = P$.

Se um conjunto contém todos os seus pontos limites então ele é chamado de um *conjunto fechado*. O *fecho* ou *clausura* \bar{S} de um conjunto S é o composto pelo próprio conjunto S mais seus pontos limites.

Um conjunto S é *aberto* se todos os seus pontos são pontos interiores. Os dois teoremas seguintes referem-se à estrutura de conjuntos abertos e fechados, subconjuntos dos reais \mathbb{R} .

Teorema 1 *Todo conjunto não vazio limitado e aberto S pode ser representado como a soma de um finito ou um infinito contável de intervalos abertos disjuntos cujos pontos finais não pertencem a S . Isto é,*

$$S = \sum_k (a_k, b_k).$$

A medida de Lebesgue de um conjunto aberto S é

$$\mu(S) = \sum_k (b_k - a_k).$$

Teorema 2 Um conjunto não vazio fechado S é um intervalo fechado ou pode ser obtido de um intervalo fechado pela remoção de uma finita ou contável infinita família de intervalos abertos disjuntos cujos pontos finais pertencem a S .

Assim um conjunto fechado S pode ser escrito como

$$S = [a, b] - \sum_k (a_k, b_k)$$

A medida de Lebesgue de um conjunto fechado S é

$$\mu(S) = (b - a) - \sum_k (b_k - a_k).$$

Em particular, um conjunto tem medida de Lebesgue nula se para qualquer $\varepsilon > 0$ o conjunto pode ser coberto por uma união contável de intervalos tal que a soma do comprimento dos intervalos é menor que ε .

Um conjunto de *Cantor* é um conjunto fechado que consiste inteiramente de pontos de fronteira cada um dos quais é um ponto limite do conjunto. Em geral, conjuntos de Cantor possuem ou medida nula de Lebesgue ou medida positiva e também são incontáveis [43].

Apêndice B

Cálculo analítico dos expoentes de Lyapunov

A densidade invariante natural $\rho(x)$ do mapa das Eqs. (3.20) é $\rho(x_n) = 1$ no intervalo $x \in [0, 1]$. O expoente de Lyapunov λ_{\parallel} é dado por,

$$\lambda_{\parallel} = \int_0^1 \rho(x_n) \ln \left| \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \right| dx_n = \int_0^\alpha \ln \left| \frac{1}{\alpha} \right| dx_n + \int_\alpha^1 \ln \left| \frac{1}{\beta} \right| dx_n \quad (\text{B.1})$$

$$\lambda_{\parallel} = \left(\ln \frac{1}{\alpha} \right) x_n \Big|_0^\alpha + \left(\ln \frac{1}{\beta} \right) x_n \Big|_\alpha^1 = \alpha \ln \frac{1}{\alpha} + (1 - \alpha) \ln \frac{1}{\beta} \quad (\text{B.2})$$

$$\boxed{\lambda_{\parallel} = \alpha \ln \frac{1}{\alpha} + \beta \ln \frac{1}{\beta}} \quad (\text{B.3})$$

E o expoente de Lyapunov λ_{\perp} é dado por,

$$\lambda_{\perp} = \int_0^1 \rho(x_n) \ln \left| \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \right| dy_n = \int_0^\alpha \ln |\gamma| dy_n + \int_\alpha^1 \ln |\delta| dy_n = \alpha \ln \gamma + (1 - \alpha) \ln \delta \quad (\text{B.4})$$

$$\boxed{\lambda_{\perp} = \alpha \ln \gamma + \beta \ln \delta} \quad (\text{B.5})$$

Apêndice C

Detalhes da dedução do modelo estocástico

Cálculo de \bar{P}

Seja a equação de difusão (3.31) dada na Seç. 3.2

$$\frac{\partial P}{\partial n} + \nu \frac{\partial P}{\partial y} = D \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad (\text{C.1})$$

e $P(\bar{y}, \bar{y}_1, n)$ a função de distribuição de probabilidade para \bar{y} , dado que x_1 é escolhida aleatoriamente no segmento $y = y_1$, $0 \leq x \leq 1$, e considerando n aproximadamente uma variável contínua. A transformada de Laplace, $\mathcal{L}(P) = \bar{P}$, da função \bar{P}

$$\bar{P}(\bar{y}, \bar{y}_1, s) = \int_0^\infty e^{-sn} P(\bar{y}, \bar{y}_1, n) dn. \quad (\text{C.2})$$

Sendo δ a função delta de Dirac e substituindo (C.2) em (C.1),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left\{ D \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{y}^2} - \nu \frac{\partial P}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial P}{\partial n} \right\} &= -\delta(\bar{y} - \bar{y}_1) \\ D \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial \bar{y}^2} \right\} - \nu \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial P}{\partial \bar{y}} \right\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial P}{\partial n} \right\} &= \delta(\bar{y} - \bar{y}_1), \\ D \frac{\partial^2}{\partial \bar{y}^2} \mathcal{L}\{P\} - \nu \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \mathcal{L}\{P\} - \mathcal{L} \left\{ \frac{\partial P}{\partial n} \right\} &= \delta(\bar{y} - \bar{y}_1), \end{aligned}$$

e pela propriedade

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0), \quad (\text{C.3})$$

a Eq. (C.1) pode ser escrita na forma

$$D \frac{d^2 \bar{P}}{d\bar{y}^2} - \nu \frac{d\bar{P}}{d\bar{y}} - s\bar{P} = -\delta(\bar{y} - \bar{y}_1), \quad (\text{C.4})$$

com soluções do tipo $\bar{P} = e^{p\bar{y}}$,

$$\bar{P} = e^{p\bar{y}}, \quad \frac{d\bar{P}}{d\bar{y}} = pe^{p\bar{y}}, \quad \frac{d^2\bar{P}}{d\bar{y}^2} = p^2e^{p\bar{y}}. \quad (\text{C.5})$$

Substituindo (C.5) em (C.4) obtém-se

$$p = \frac{\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4Ds}}{2D} = \frac{\nu/D}{2} \pm \sqrt{\frac{\nu^2}{4D^2} + \frac{4Ds}{4D^2}} = \frac{\nu/D}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\nu/D}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{4Ds}{\nu^2}\right)}$$

e definindo η como

$$\eta = \frac{\nu}{D}, \quad (\text{C.6})$$

$$p = \frac{\eta}{2} \pm \frac{\eta}{2} \sqrt{1 + \frac{4Ds}{\nu^2}} \quad \begin{cases} p_1 = \frac{\eta}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4Ds}{\nu^2}} + 1 \right) \\ p_2 = -\frac{\eta}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4Ds}{\nu^2}} - 1 \right) \end{cases}. \quad (\text{C.7})$$

E a solução de (C.4) para $\bar{y} \neq \bar{y}_1$ é escrita na forma:

$$\begin{cases} \bar{P}_I = C_1 e^{p_1 \bar{y}} + C_2 e^{p_2 \bar{y}}, & 0 < \bar{y} < \bar{y}_1, \\ \bar{P}_{II} = C_3 e^{p_1 \bar{y}} + C_4 e^{p_2 \bar{y}}, & \bar{y}_1 < \bar{y} < \infty, \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

com as seguintes condições de contorno

$$\begin{cases} \bar{P}_I(0) = 0, & \Rightarrow \bar{P}_I = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1, \\ \bar{P}_{II}(\infty) = 0, & \Rightarrow C_3 = 0, \\ \bar{P}_I(\bar{y}_1) = \bar{P}_{II}(\bar{y}_1), & \Rightarrow C_1 e^{p_1 \bar{y}_1} + C_2 e^{p_2 \bar{y}_1} = C_4 e^{p_2 \bar{y}_1}, \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

de onde

$$C_1(e^{p_1 \bar{y}_1} - e^{p_2 \bar{y}_1}) = C_4 e^{p_2 \bar{y}_1}. \quad (\text{C.10})$$

Integrando (C.4) num intervalo 2ε em torno de \bar{y}_1

$$\begin{aligned} D \int_{\bar{y}_1-\varepsilon}^{\bar{y}_1+\varepsilon} \frac{d^2 \bar{P}}{d\bar{y}^2} d\bar{y} - \nu \int_{\bar{y}_1-\varepsilon}^{\bar{y}_1+\varepsilon} \frac{d\bar{P}}{d\bar{y}} d\bar{y} - s \int_{\bar{y}_1-\varepsilon}^{\bar{y}_1+\varepsilon} \bar{P} d\bar{y} &= - \int_{\bar{y}_1-\varepsilon}^{\bar{y}_1+\varepsilon} \delta(\bar{y} - \bar{y}_1) d\bar{y} \\ D \int_{\bar{y}_1-\varepsilon}^{\bar{y}_1+\varepsilon} d \frac{d\bar{P}}{d\bar{y}} - \nu \int_{\bar{y}_1-\varepsilon}^{\bar{y}_1+\varepsilon} d\bar{P} - s\bar{P}(\bar{y}_1 - \varepsilon)2\varepsilon &= -1 \\ D[\bar{P}'(\bar{y}_1 + \varepsilon) - \bar{P}'(\bar{y}_1 - \varepsilon)] - \nu[\bar{P}(\bar{y}_1 + \varepsilon) - \bar{P}(\bar{y}_1 - \varepsilon)] - s\bar{P}(\bar{y}_1 - \varepsilon)2\varepsilon &= -1. \end{aligned}$$

Tomando $\lim \varepsilon \rightarrow 0$

$$D[\bar{P}'_H(\bar{y}_1) - \bar{P}'_I(\bar{y}_1)] - \nu[\bar{P}_H(\bar{y}_1) - \bar{P}_I(\bar{y}_1)] - 0 = -1, \quad (\text{C.11})$$

derivando (C.8) e substituindo (C.10) em (C.11),

$$\begin{cases} \bar{P}_I = C_1(e^{p_1\bar{y}} - e^{p_2\bar{y}}), & 0 < \bar{y} < \bar{y}_1, \\ \bar{P}_{II} = C_4 e^{p_2\bar{y}}, & \bar{y}_1 < \bar{y} < \infty. \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

com

$$C_1 = \frac{1}{D(p_1 - p_2)e^{p_1\bar{y}_1}} \quad \text{e} \quad C_4 = \frac{e^{p_1\bar{y}_1} - e^{p_2\bar{y}_1}}{D(p_1 - p_2)e^{p_1\bar{y}_1}e^{p_2\bar{y}_1}}, \quad (\text{C.13})$$

é a solução da Eq. C.4 com condições de contorno C.9.

Lei de escala #1

Com a solução (C.12), a integral (3.37)

$$1 - P_\star = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty P(\bar{y}, \bar{y}_1, n) d\bar{y}, \quad (\text{C.14})$$

onde P_\star é a fração das órbitas pertencentes ao atrator $|y| = \infty$, é resolvida pela aplicação da transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{f(\bar{y})\} = s\mathcal{L}\{\int f(\bar{y}) d\bar{y}\}$

$$\begin{aligned} 1 - P_\star &= \lim_{s \rightarrow 0} s \int_0^\infty \bar{P}(\bar{y}, \bar{y}_1, s) d\bar{y}, \\ 1 - P_\star &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\int_0^{\bar{y}_1} \bar{P}_I(\bar{y}, \bar{y}_1, s) d\bar{y} + \int_{\bar{y}_1}^\infty \bar{P}_{II}(\bar{y}, \bar{y}_1, s) d\bar{y} \right]. \end{aligned}$$

$$1 - P_\star = C_1 \left[\frac{1}{p_1} - \frac{e^{p_1 \bar{y}_1}}{p_1} \right] - C_1 \left[\frac{1}{p_2} - \frac{e^{p_2 \bar{y}_1}}{p_2} \right] + C_4 \left[-\frac{e^{p_2 \bar{y}_1}}{p_2} \right]. \quad (\text{C.15})$$

No $\lim s \rightarrow 0$, $\left(1 + \frac{4D}{v^2}s\right)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{4D}{v^2}s$, e então

$$\begin{aligned} p_1 &\cong \frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{2Ds}{v^2} + 1 \right) = \eta \left(1 + \frac{Ds}{v^2} \right), & p_1 &\cong \eta = \frac{v}{D}, \\ p_2 &\cong -\frac{\eta}{2} \left(1 + \frac{2Ds}{v^2} - 1 \right) = -\left(\frac{v}{2D} \right) \left(\frac{2Ds}{v^2} \right), & p_2 &\cong -\frac{s}{v}. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

De (C.7),

$$p_1 - p_2 = \frac{\eta}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4Ds}{v^2}} + 1 + \sqrt{1 + \frac{4Ds}{v^2}} - 1 \right) = \eta \sqrt{1 + \frac{4Ds}{v^2}}, \quad (\text{C.17})$$

$$p_1 - p_2 = \eta = \frac{v}{D}. \quad (\text{C.18})$$

De (C.13),

$$C_1 = \frac{e^{-p_1 \bar{y}_1}}{D(p_1 - p_2)} \approx \frac{e^{-\eta \bar{y}_1}}{D \frac{v}{D}} \approx \frac{1}{v} e^{-\eta \bar{y}_1}, \quad (\text{C.19})$$

$$C_4 = \frac{e^{p_1 \bar{y}_1} - e^{p_2 \bar{y}_1}}{D(p_1 - p_2) e^{p_1 \bar{y}_1} e^{p_2 \bar{y}_1}} \approx \frac{e^{-(s/v)\bar{y}_1} - e^{\eta \bar{y}_1}}{D \frac{v}{D}} \approx \frac{1}{v} (1 - e^{-\eta \bar{y}_1}), \quad (\text{C.20})$$

Substituindo (C.16), (C.18), (C.19), (C.20), em (C.15),

$$1 - P_\star = \lim_{s \rightarrow 0} s \left\{ \frac{1}{v} e^{-\eta \bar{y}_1} \left[\frac{1}{D} - \frac{e^{-(v/D)\bar{y}_1}}{v} - \frac{1}{-\frac{s}{v}} - \frac{e^{-(s/v)\bar{y}_1}}{-\frac{s}{v}} \right] - \frac{1}{v} (1 - e^{-\eta \bar{y}_1}) \frac{e^{-(s/v)\bar{y}_1}}{-\frac{s}{v}} \right\},$$

$$1 - P_\star = 1 - e^{-\eta \bar{y}_1}, \quad (\text{C.21})$$

$$P_\star \sim e^{-\eta \bar{y}_1}. \quad (\text{C.22})$$

Como

$$\bar{y}_1 = \ln \frac{1}{y_1},$$

$$P_\star \sim e^{-\eta \ln \frac{1}{y_1}} = e^{\ln \left(\frac{1}{y_1} \right)^{-\eta}},$$

$$\boxed{P_\star \cong y_1^\eta}, \quad (\text{C.23})$$

conforme a Eq. (3.38).

Lei de escala #2

Se \bar{n} é o número de vezes que o mapa é aplicado para que um intervalo de tamanho ε em x seja expandido no intervalo $[0, 1]$; ℓ é o número de passos à esquerda e r é o número de passos à direita. Com as seguintes condições,

$$\begin{cases} (1) & \bar{y}_1 - r\bar{\delta} - \ell\bar{\gamma} = \bar{y}, \\ (2) & r + \ell = \bar{n}, \\ (3) & \varepsilon \left(\frac{1}{\alpha} \right)^\ell \left(\frac{1}{\beta} \right)^r = 1. \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

obtém-se a seguinte expressão para n ,

$$\bar{n} = a \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) + b(\bar{y} - \bar{y}_1), \quad a = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\delta}}{\bar{\gamma} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) - \bar{\delta} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)}, \quad b = \frac{\ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) - \ln \left(\frac{1}{\beta} \right)}{\bar{\gamma} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) - \bar{\delta} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right)}. \quad (\text{C.25})$$

Na situação de em que $\lambda_\perp = \alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta}$ é válido $\alpha \approx \alpha_c$,

$$\alpha_c = \frac{\ln |\delta|}{\ln \gamma + \ln |\delta|}. \quad (\text{C.26})$$

Lembrando que $\bar{\gamma} = \ln \gamma$ e $\bar{\delta} = \ln \left(\frac{1}{\delta} \right)$,

$$\lambda_\parallel = \alpha_c \ln \left(\frac{1}{\alpha_c} \right) + \beta_c \ln \left(\frac{1}{\beta_c} \right) = \left(\frac{-\bar{\delta}}{\bar{\gamma} - \bar{\delta}} \right) \ln \frac{1}{\alpha} + \left(1 - \frac{-\bar{\delta}}{\bar{\gamma} - \bar{\delta}} \right) \frac{1}{\beta} \quad (\text{C.27})$$

$$\lambda_\parallel = \frac{1}{\bar{\gamma} - \bar{\delta}} \left[\bar{\gamma} \ln \left(\frac{1}{\beta} \right) - \bar{\delta} \ln \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] \quad (\text{C.28})$$

$$a \cong \frac{1}{\lambda_\parallel} \quad (\text{C.29})$$

$$p_1 \sim e^{-\eta \bar{y}} \quad (\text{C.30})$$

$$\langle p \rangle \cong \int_0^\infty 2e^{-\eta \bar{y}} P(\bar{y}, \bar{y}_1, n) d\bar{y} \quad (\text{C.31})$$

Pela transformada de $\mathcal{L}\{P\} = \bar{P}$,

$$\langle p \rangle \cong 2 \int_0^\infty e^{-\eta \bar{y}} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} \bar{P} e^{s\bar{y}} ds d\bar{y}, \quad (\text{C.32})$$

$$\langle p \rangle \cong \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\sigma}^{+i\infty+\sigma} e^{sa \ln(1/\varepsilon)} \mathcal{L}(s) ds, \quad (\text{C.33})$$

e

$$\mathcal{L}(s) = \int_0^\infty e^{-\eta \bar{y}} e^{(\bar{y}-\bar{y}_1)b} \bar{P} d\bar{y}. \quad (\text{C.34})$$

Através de uma integral de inversão de Mellin, a integral (C.32) é resolvida para uma escolha de σ é feita de forma que as singularidades estão do lado esquerdo do caminho de integração em s e a integral \mathcal{L} converge. De (C.12),

$$\bar{P}(\bar{y}, \bar{y}_1, s) = \begin{cases} C_1(e^{-p_1 \bar{y}} - e^{p_2 \bar{y}}), & 0 < \bar{y} < \bar{y}_1, \\ C_4 e^{-p_1 \bar{y}}, & \bar{y} > \bar{y}_1. \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

A única singularidade de $\mathcal{L}(s)$ é

$$s_* = -\frac{v^2}{4D}, \quad (\text{C.36})$$

do termo $\sqrt{1 + 4Ds/v^2}$ nas Eqs. (C.7). Lembrando que $\mathcal{L}(s)$ independe de ε e para ε pequeno,

$$\langle p \rangle \sim e^{s_* a \ln(1/\varepsilon)} = \varepsilon^{-as_*}. \quad (\text{C.37})$$

Comparando com a Eq. (3.42)

$$\langle p \rangle \sim e^\phi, \quad (\text{C.38})$$

chega-se a

$$\phi = \frac{v^2}{4D\lambda_\parallel}. \quad (\text{C.39})$$

Apêndice D

Tabelas

$\langle RR \rangle$ Valor médio dos intervalos RR

σ_{RR} Desvio padrão da média dos intervalos RR

FA Fibrilação atrial (tempo de observação longo)

IC Insuficiência cardíaca (tempo de observação longo)

IS Idosos saudáveis (tempo de observação longo)

JS Jovens saudáveis (tempo de observação longo)

REF Séries de sujeitos saudáveis (tempo de observação curto)

MCD Séries de pacientes com miocardiopatia dilatada (tempo de observação curto)

Fibrilação Atrial		Insuficiência cardíaca		Idosos saudáveis		Jovens saudáveis	
$\langle RR \rangle$ ms	σ_{RR} ms						
488,68	97,56	931,30	81,27	865,80	178,41	795,29	170,14
557,23	71,13	591,99	55,72	888,43	93,54	912,51	139,78
716,63	93,62	869,04	54,87	776,88	159,18	823,63	138,97
657,68	107,35	650,59	112,12	864,45	145,72	761,17	101,48
627,71	105,30	583,43	49,20	770,27	88,34	729,01	88,74
643,33	98,19	591,90	64,12	730,07	85,23	771,28	131,12
677,19	107,10	759,56	56,52	760,70	70,13	950,69	242,41
689,11	162,01	774,85	57,91	797,01	175,66	826,81	115,67
721,33	128,01	604,11	32,75	876,64	125,55	858,94	210,28
597,15	94,30	473,77	22,81	758,23	109,35	871,00	156,49
558,16	98,02	607,94	82,11	742,58	122,78	738,04	100,71
568,22	99,57	605,47	97,95	731,94	116,27	694,23	114,15
700,25	102,59	607,55	25,89	780,09	119,95	733,93	96,16
631,68	114,95	750,62	68,40	672,23	103,73	730,10	119,50
612,06	81,47	609,62	63,88	777,37	123,48	848,43	100,19
						959,93	133,34
						743,55	99,77
						687,96	130,61

Tabela D.1: Médias e desvios padrão individuais dos grupos de pacientes com fibrilação atrial (FA), insuficiência cardíaca (IC), idosos saudáveis (IS) e jovens saudáveis (JS). Sujeitos saudáveis tipicamente apresentam maior variabilidade da frequência cardíaca.

Fibrilação Atrial		Insuficiência cardíaca	
$\langle RR \rangle_{FA}$	$\langle \sigma_{RR} \rangle_{FA}$	$\langle RR \rangle_{IC}$	$\langle \sigma_{RR} \rangle_{IC}$
630(67)	104(21)	667(123)	62(25)
Idosos saudáveis		Jovens saudáveis	
$\langle RR \rangle_{IS}$	$\langle \sigma_{RR} \rangle_{IS}$	$\langle RR \rangle_{JS}$	$\langle \sigma_{RR} \rangle_{JS}$
786(62)	121(32)	802(84)	133(41)

Tabela D.2: Médias e desvios padrão dos grupos. É possível observar que os grupos saudáveis apresentam desvios padrão mais elevados. O valor declarado pela Força Tarefa da Sociedade Europeia de Cardiologia e da Sociedade Norte Americana de Ritmos e Eletrofisiologia como normais para o desvio padrão dos batimentos é 141(39)ms [35].

	RR				Pressão arterial			
	REF		MCD		REF		MCD	
	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
	0,91	1,06	1,25	1,17	1,21	0,96	0,88	1,50
	1,07	0,98	1,12	1,11	1,44	1,20	1,31	1,25
	1,34	1,29	0,89	0,86	1,62	1,08	1,19	1,05
	1,20	0,94	0,76	0,87	1,34	0,95	0,51	1,00
	1,02	1,09	1,18	1,08	1,41	1,11	1,42	1,35
	1,32	0,83	0,58	1,30	1,34	1,12	0,84	1,46
	1,19	0,89	0,87	1,16	1,54	0,84	1,67	1,31
	1,02	0,99	1,08	1,10	1,33	1,03	1,22	1,10
	0,98	1,07	0,88	1,21	1,39	1,17	0,70	0,68
	1,06	1,03	1,00	0,89	1,44	1,10	1,06	1,06
	1,07	0,92	1,03	1,25	1,12	0,89	1,30	1,22
	1,10	0,83	1,27	1,00	1,47	0,91	1,29	1,12
	1,07	1,06	1,02	0,85	1,69	1,25	1,10	1,09
	1,01	1,10	1,31	0,97	1,19	0,88	1,19	1,01
	1,29	0,66	1,04	1,08	1,68	0,72	1,14	0,88
	1,00	1,36	0,98	1,04	1,07	1,11	0,96	0,94
	1,25	1,23	1,29	1,33	1,40	1,20	1,48	1,20
	0,84	0,99	0,96	0,79	1,41	1,02	1,48	1,21
	0,96	0,96	1,43	0,99	1,36	1,08	1,07	0,97
	1,00	1,03	0,96	1,05	1,56	1,25	1,41	1,34
	0,94	1,11	0,90	1,48	1,49	1,03	0,94	1,37
	0,97	0,63	1,12	1,08	1,48	0,98	1,00	1,11
	0,61	1,00	1,11	1,41	1,40	0,96	0,88	1,32
	1,24	0,94	0,50	0,70	1,47	1,02	0,83	1,30
	1,30	0,94	1,62	1,30	1,76	1,20	1,24	1,25
	1,16	1,13	1,48	0,76	1,14	1,18	1,21	0,76
	0,90	1,07	1,36	1,16	1,47	0,98	1,29	1,27
Média	1,04	0,98	1,07	1,07	1,41	1,04	1,13	1,15
Desvio padrão	0,23	0,22	0,26	0,20	0,17	0,13	0,26	0,20
Valor p	0,16		0,5		$< 10^{-5}$		0,38	

Tabela D.3: Tabela dos valores α_1 e α_2 obtidos pela análise de flutuações depuradas para os intervalos RR e para os dados da pressão arterial em sístole. Os valores de p indicam que não existem diferenças significativas entre os grupos.

	Doentes				Saudáveis			
	Fibrilação atrial		Insuficiência cardíaca		Idosos saudáveis		Jovens saudáveis	
	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
	0,73	0,80	0,96	1,21	1,29	1,01	1,24	0,99
	0,74	0,65	0,70	1,10	1,24	1,15	1,27	1,12
	0,74	0,63	0,93	1,35	1,23	1,07	1,09	1,11
	0,77	0,64	0,85	1,38	1,42	1,04	1,24	1,05
	0,8	0,69	0,90	1,40	1,45	1,14	1,48	0,87
	0,81	0,63	0,73	0,81	1,31	1,14	0,93	0,93
	0,75	0,72	0,79	1,29	1,12	1,11	1,12	1,00
	0,77	0,64	1,20	1,19	1,06	0,98	1,08	0,97
	0,76	0,57	0,74	1,00	1,31	1,04	0,99	1,02
	0,77	0,62	0,78	1,09	1,18	1,20	1,04	1,07
	0,77	0,66	1,11	1,27	1,20	1,05	1,18	0,98
	0,77	0,69	1,28	1,26	1,50	1,09	1,23	0,94
	0,77	0,62	0,63	1,10	1,32	0,94	1,31	0,93
	0,78	0,61	0,69	1,18	1,35	1,10	1,12	1,01
	0,74	0,60	1,11	1,27	1,24	1,14	1,32	1,00
							1,37	0,97
							1,07	0,97
							1,29	0,92
Média	0,76	0,65	0,89	1,19	1,28	1,08	1,19	0,99
Desvio padrão	0,02	0,06	0,20	0,15	0,12	0,07	0,14	0,07
Valor p	$< 10^{-5}$		5×10^{-5}		$< 10^{-5}$		1×10^{-5}	

Tabela D.4: Tabela dos valores α_1 e α_2 obtidos pela análise de flutuações depuradas para os intervalos RR de séries longas de observação. Os valores de p indicam a existência de diferenças significativas entre os grupos.

Apêndice E

Teste de Kruskal-Wallis

O teste de Kruskal-Wallis (William Kruskal e W. Allen Wallis) [73] é um teste não paramétrico utilizado na verificação da igualdade nas medianas entre grupos. Ao contrário de testes paramétricos, onde existe a suposição de uma dada distribuição e consequentemente o ajuste a determinados parâmetros, o teste de Kruskal-Wallis é baseado em posições num ranking construído com os dados que se deseja testar. A única suposição feita em relação aos dados é que eles sejam variáveis estatisticamente independentes.

Para realizar o teste de Kruskal-Wallis, primeiro ordena-se crescentemente todos os valores disponíveis, construindo um ranking. Calcula-se

$$K = \frac{12}{N(N+1)} \sum_i^g \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1), \quad (\text{E.1})$$

onde N é o total de observações, g é o número de grupos, n_i é o número de observações em cada grupo e R_i a soma das posições em cada grupo. A Tab. E.1 mostra como o ordenamento é feito, usando como exemplo os resultados do Cap. 6. Os valores de β obtidos a partir da segmentação das séries originais foram ordenados, em valor absoluto, crescentemente. Nessa ordenação não existe separação prévia entre os grupos. Então calcula-se K dado pela Eq. (E.1) com N observações, g grupos, n_i observações em cada grupo e R_i sendo a soma das posições em cada grupo.

O valor p é aproximadamente a probabilidade de se obter um valor maior que K numa distribuição χ_{g-1}^2 com $g-1$ graus de liberdade.

$$p = 1 - P(x = K) = 1 - \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma\left(\frac{g-1}{2}\right)} (x/2)^{(g-1)/2-1} \exp(-x/2) dx \quad (\text{E.2})$$

Fibrilação atrial		Insuficiência cardíaca		Idoso saudável		Jovem saudável	
β	#	β	#	β	#	β	#
-0,715	10	-1,249	52	-1,184	50	-0,987	32
-0,920	23	-1,046	41	-0,987	33	-1,075	45
-0,864	16	-0,660	7	-1,049	42	-1,225	51
-0,654	5	-0,895	20	-0,986	31	-0,809	15
-1,515	54	-1,034	40	-1,020	38	-1,019	37
-0,507	1	-1,099	47	-0,899	21	-0,891	19
-0,933	24	-0,691	9	-0,953	27	-0,975	29
-0,876	17	-0,584	3	-0,990	34	-0,795	14
-0,684	8	-0,878	18	-0,741	13	-1,279	53
-1,024	39	-1,161	49	-0,949	26	-0,972	28
-0,740	12	-0,937	25	-0,731	11	-0,977	30
-1,133	48	-0,638	4	-1,088	46	-0,900	22
-1,070	43					-1,017	36
-0,996	35					-1,073	44
-0,542	2					-0,660	6

Tabela E.1: Para realizar o teste de Kruskal-Wallis, primeiro ordena-se crescentemente todos os valores disponíveis, construindo um ranking. Calcula-se K dado pela Eq. (E.1) com N observações, g grupos, n_i observações em cada grupo e R_i sendo a soma das posições em cada grupo. Então o valor p é aproximadamente a probabilidade de se obter um valor maior que K numa distribuição χ^2_{g-1} com $g - 1$ graus de liberdade. Para esse conjunto de dados, o valor de p é $p = 0,4$.

Para o conjunto de dados da Tab. E.1, $p = 0,4$. Esse valor de p indica que não é possível que os valores de β sejam de distribuições diferentes. Para valores de $p < 0,05$ diz-se que os valores de β provêm de distribuições diferentes.

Apêndice F

Publicações

2009

R. L. Viana, S. Camargo, R. F. Pereira, M. C. Vergés, S. R. Lopes, and S. E. de S. Pinto, Riddled basins in complex physical and biological systems, Journal of Computational Interdisciplinary Sciences v.1 n2, p.73-82

2008

R. F. Pereira, S. Camargo, S. E. de S. Pinto, S. R. Lopes, and R. L. Viana, Periodic-orbit analysis and scaling laws of intermingled basins of attraction in an ecological dynamical system, PRE 78, 056214

Em preparo:

S. Camargo, R. L. Viana, Riddled basins of attraction in a mechanical system

S. Camargo, M. Riedl, N. Wessel, R. L. Viana, J. Kurths, Segmentation study



Journal of Computational Interdisciplinary Sciences (2009) 1(2): 73-82
© 2009 Pan-American Association of Computational Interdisciplinary Sciences
ISSN 1983-8409
<http://epacis.org>

Riddled basins in complex physical and biological systems

Ricardo Luiz Viana¹, Sabrina Camargo², Rodrigo F. Pereira¹, Marcos César Vergés¹,
Sérgio Roberto Lopes¹ and Sandro Ely S. Pinto³

Manuscript received on November 12, 2008 / accepted on January 10, 2009

ABSTRACT

Complex systems have typically more than one attractor, either periodic or chaotic, and their basin structure ultimately determines the final-state predictability. When certain symmetries exist in the phase space, their basins of attraction may be riddled, which means that they are so densely intertwined that it may be virtually impossible to determine the final state, given a finite uncertainty in the determination of the initial conditions. Riddling occurs in a variety of complex systems of physical and biological interest. We review the mathematical conditions for riddling to occur, and present two illustrative examples of this phenomenon: coupled Lorenz-like piecewise-linear maps and a deterministic model for competitive indeterminacy in populations of flour beetles.

Keywords: riddled basins, basins of attraction, complex systems, chaotic attractors.

Correspondence to: Ricardo Luiz Viana

¹Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990 Curitiba, PR, Brazil.

²Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil.

³Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 84032-900 Ponta Grossa, PR, Brazil.

E-mails: viana@fisica.ufpr.br / sabrina@fisica.ufpr.br / pereira@fisica.ufpr.br / mcverges@fisica.ufpr.br / lopes@fisica.ufpr.br / desouzapinto@gmail.com

1 INTRODUCTION

Chaotic dynamical systems having certain symmetries and quite general mathematical properties may present basins of attraction densely intertwined, a phenomenon called *riddling* (for a recent review covering theoretical and experimental aspects of riddling see Ref. [1]). In this case the system has a chaotic attractor **A** whose basin of attraction is riddled with “holes” (in a measure-theoretical sense) belonging to the basin of another (non necessarily chaotic) attractor **B** [2]. In other words, riddling means that every point in the basin of attractor **A** has pieces of the basin of attractor **B** arbitrarily nearby. The basins are called intermingled, when each basin is riddled with holes belonging to the other basin. For intermingled basins there must be at least two attractors lying in different invariant subspaces [2, 3].

Basin riddling affects our ability of predicting what attractor the trajectory originating from a given initial condition asymptotes to. Let **P** be an arbitrary point belonging to the basin of the chaotic attractor **A**. If the basin of **A** is riddled by the basin of the other attractor **B**, then a small ball of radius ϵ centered at **P** has a nonzero fraction of its volume belonging to the basin of **B**, irrespective of how small the radius ϵ may be. Hence, if we regard this ϵ -ball as an uncertainty neighborhood related to the (numerical or experimental) determination of the initial condition, the resulting trajectory has always a positive probability of falling into the basin of the other attractor. In other words, the probability of escaping from the basin of attractor **A** is nonzero for every uncertainty ϵ . Consequently, in the presence of riddling, the task of predicting what will be the final state of the system becomes much more difficult than in the cases of fractal basins, where the boundary is a fractal curve and the uncertain fraction scales with ϵ as a power-law [4].

There are many examples of riddling in dynamical systems of physical and biological interest, as a forced double-well Duffing oscillator [5, 6, 7], coupled nonlinear electronic circuits [8, 9], coupled elastic arches [10], ecological population models [11], learning dynamical systems [12], chemical reactions of the Belousov-Zhabotinsky type [13], and in models of interdependent open economies [14]. In this paper we describe applications of riddled and intermingled basins in physical and biological complex systems.

This paper is organized as follows: in Section 2 we review the mathematical conditions for the existence of riddled basins. Section 3 deals with riddled basins in coupled piecewise-linear maps which can be viewed as a low-dimensional reduction of coupled Lorenz equations, for which riddling is thought to occur.

Section 4 brings an application of riddling in a dynamical system of biological interest, describing the competitive indeterminacy for two species of a flour beetle, and which presents intermingled basins. The last Section contains our conclusions.

2 MATHEMATICAL CONDITIONS FOR THE EXISTENCE OF RIDDLED BASINS

Let **H** be the phase space in which a discrete-time map $x_{n+1} = F(x_n)$ is defined. Continuous-time flows can be also described by F , if Poincaré sections are taken. A closed subset **A** $\in \mathbf{H}$ is said to be an attractor of F if it satisfies the following conditions:

- (i) **A** has a basin of attraction, denoted $\beta(\mathbf{A})$, of positive Lebesgue measure (volume) in the phase space **H**;
- (ii) **A** is a compact set with a dense orbit. In the Milnor definition of attractor, the basin of attraction does not need to include the whole neighborhood of the attractor.

If the basin of attraction of **A** has positive Lebesgue measure, we call **A** a weak Milnor attractor [15].

The basin of a chaotic attractor **A** is riddled if its complement intersects every disk (in the sense of phase-space volumes of all sizes) of the phase space **H** in a set of positive Lebesgue measure [2]. When the basin of attraction of **A** is riddled with holes belonging to the basin of another attractor **B**, we can say that, if a randomly chosen point has a positive probability of being in $\beta(\mathbf{A})$, then it also has positive probability of not being in $\beta(\mathbf{A})$. In the latter case, the point belongs to the other basin of attraction $\beta(\mathbf{B})$.

This measure-theoretical definition implies the following set of conditions under which riddled basins occur in a dynamical system [6]:

1. there is an invariant subspace **M** $\in \mathbf{H}$;
2. the dynamics on **M** has a chaotic attractor **A**;
3. there is another attractor **B** not belonging to **M**;
4. the attractor **A** is transversely stable in **H**, i.e. for typical orbits on the attractor the Lyapunov exponents for infinitesimal perturbations along the directions transversal to the invariant subspace **M** are all negative;
5. a set of unstable periodic orbits embedded in **A** is transversely unstable. As a consequence, at least one of the Lyapunov exponents along directions transverse to **M** experiences positive finite-time fluctuations.

Condition **1** is a consequence of the system having some symmetry which enables it to display an invariant subspace \mathbf{M} , in the sense that, once an initial condition is exactly placed on \mathbf{M} , the resulting trajectory cannot escape from \mathbf{M} for further times. To have riddling, it is necessary to have a dense set of points with zero Lebesgue measure in the attractor lying in the invariant subspace which are transversely unstable, thus it is necessary that this attractor be chaotic (condition **2**). The existence of another attractor (condition **3**) is necessary for the basin of an attractor to be riddled with holes belonging to the basin of this second attractor.

If the transverse Lyapunov exponents of typical orbits lying in the invariant manifold \mathbf{M} are all negative (condition **4**), then \mathbf{A} is an attractor at least in the weak Milnor sense, and its basin has positive Lebesgue measure. This can be verified by computing the maximal Lyapunov exponent along a transversal direction to \mathbf{M} :

$$\lambda_{\perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n) < 0, \quad (1)$$

where

$$\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0; n) = \frac{1}{n} \ln \|Df^n(x_0) \cdot v_{\perp}\|, \quad (2)$$

is the maximal time- n Lyapunov exponent along a transversal direction (specified by the singular vector v_{\perp}) with respect to the invariant manifold \mathbf{M} , $Df^n(x_0)$ being the Jacobian matrix of the n times iterated map F , with entries evaluated at an initial condition $x_0 \in \mathbf{A}$.

Condition **5** states that, while the invariant manifold \mathbf{M} is still transversely stable, there will be trajectories on the attractor \mathbf{A} that are transversely unstable. Verifying condition **5**, on the other hand, would require the determination of a transversely unstable periodic orbit embedded in the attractor \mathbf{A} . A consequence of these transversely unstable orbits is that there will be typically a number of positive values of the finite-time transversal Lyapunov exponent, or $\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n) > 0$. Hence, this condition can be statistically verified by considering the probability distribution of finite-time transversal exponents $P(\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n))$.

The existence of positive values of $\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n)$ – condition **5** for riddling – implies that there is a fraction of positive values of $\tilde{\lambda}_{\perp}(x_0, n)$ for initial conditions x_0 randomly chosen in the attractor \mathbf{A} , i.e.

$$f(n) = \int_0^{\infty} P(\tilde{\lambda}_{\perp}(n)) d\tilde{\lambda}_{\perp}(n) > 0. \quad (3)$$

assuming that the probability is properly normalized.

3 RIDDLED BASINS IN LORENZ-LIKE MAPS

The modern age of nonlinear dynamics begun in 1963, when Ed Lorenz investigated the dynamics generated by a three-mode reduction of the equations governing thermal convection, that is one of the mechanisms underlying climate changes [16]. Lorenz realized that the chaotic dynamics exhibited by the three-mode differential equations

$$\frac{dx}{dt} = 10(y - x), \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(28 - z) - y, \quad (5)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - \frac{8}{3}z, \quad (6)$$

could be understood in terms of a simpler, low-dimensional discrete map. The so-called Lorenz map is obtained by sampling the local maxima of one of the evolving variables, $h_n = \max_{t=t_n} \{z(t)\}$, so as to yield a first return map $h_{n+1} = L(h_n)$, which is unimodal with a cusp [Fig. 1(a)]. Such maps display a similar dynamical behavior as the tent map ($x_{n+1} = 1 - 2|x_n - 1/2|$) and, in fact, this similarity was used by Lorenz to explain the erratic behavior of orbits belonging to the famous “butterfly attractor” in the three-dimensional phase space [16].

Another piecewise-linear approximation to the Lorenz map is provided by the so-called bungalow-tent map, which has out of four linear segments instead of two, as in the tent function [17, 18]:

$$x_{n+1} = f_a(x_n) = \\ = \begin{cases} \frac{1-a}{a}x_n, & \text{if } x_n \in [0, a], \\ \frac{2a}{1-2a}x_n + \frac{1-3a}{1-2a}, & \text{if } x_n \in [a, \frac{1}{2}], \\ \frac{2a}{1-2a}(1-x_n) + \frac{1-3a}{1-2a}, & \text{if } x_n \in [\frac{1}{2}, 1-a], \\ \frac{1-a}{a}(1-x_n), & \text{if } x_n \in [1-a, 1], \end{cases} \quad (7)$$

where $a \in (0, \frac{1}{2})$ is a control parameter. For $a = \frac{1}{3}$ we obtain the tent map. A linear coordinate transformation $h = 22x + 32$ and the choice $a = 0.45$ furnish a better approximation of the Lorenz map in comparison with the tent function [Fig. 1(b)]. In the following we will refer to the former as the piecewise-linear Lorenz map.

The two fixed points of the bungalow map are $P_1 : x_1^* = 0$ and the right corner point $P_2 : x_2^* = 1 - a$. For all values of the control parameter a , the fixed points are unstable

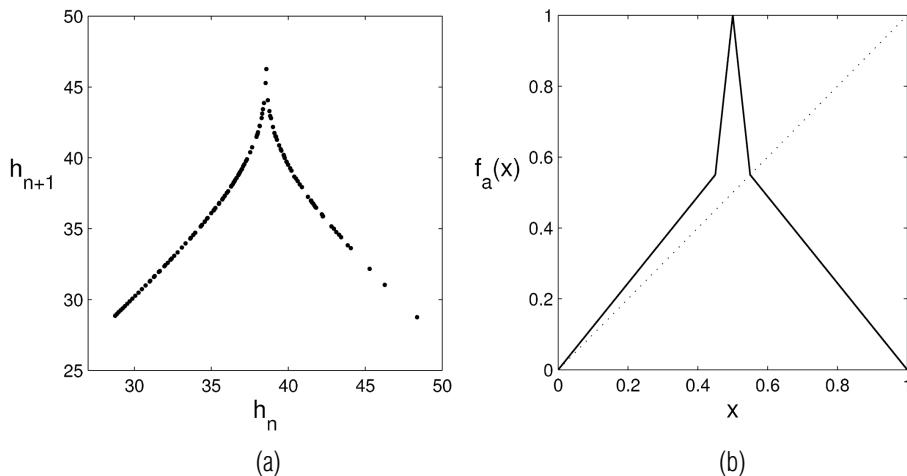


Figure 1 – (a) Lorenz map. (b) Bungalow-tent map for $a = 0.45$.

because the eigenvalues $\delta_{1,2} = (a - 1)/a$ are greater than 1 in modulus. Although the map is non-smooth at the fixed point x_2^* , we can define the map derivative at the right-hand site of x_2^* , because this point belongs to the interval $[1-a, 1]$. Thanks to the piecewise-linearity of this map, it is possible to obtain analytically its Lyapunov exponent for any value of a , namely [17, 18]:

$$\lambda(a) = \frac{1-a}{2-3a} \ln\left(\frac{1-a}{a}\right) + \frac{1-2a}{2-3a} \ln\left(\frac{2a}{1-2a}\right). \quad (8)$$

In particular, for $a = 1/3$ (tent map) we obtain $\lambda = \ln 2$, and, for other values of a , the Lyapunov exponent is always positive, displaying a smooth dependence with a . For the approximation to the Lorenz map which results from $a = 0.45$, we have $\lambda = 0.5078$.

Systems of coupled Lorenz equations have been found numerically to exhibit a suggestive evidence for riddled basins [19], although without a mathematical proof. Such an investigation is indeed quite difficult in view of the high dimensionality of the system and of the rather strong mathematical requirements necessary to characterize riddled basins, as we have seen in the previous Section. Hence we can resort to the one-dimensional reduction performed by taking the Lorenz map and its piecewise-linear counterpart. Hence we can study the presence of riddled basins in coupled Lorenz equations starting from its simplest possible version, which is the coupling of piecewise-linear Lorenz maps in the form

$$x_{n+1} = f_a(x_n) + \delta(x_n - y_n), \quad (9)$$

$$y_{n+1} = f_a(y_n) + \epsilon(y_n - x_n), \quad (10)$$

where f_a is given by Eq. (7), and δ and ε are coupling strengths

which can be different when the coupling is asymmetric, and even vanish for unidirectional coupling (a master-slave configuration). As we will see, the dynamics of the system depends essentially on their sum $d \equiv \delta + \varepsilon$.

It has been known for a long time that two identical coupled chaotic systems, in spite of their characteristic sensitivity on the initial condition, can attain a completely synchronized state characterized by $x_n = y_n$ for all times n [20, 21]. In terms of the two-dimensional phase space \mathbf{H} of the coupled system, the synchronized state defines a synchronization subspace \mathbf{M} , which is the straight line $x = y$. The orbit in the synchronized state is obviously the same as a chaotic orbit from the uncoupled maps. Hence, it turns out that \mathbf{M} is an invariant subspace, thus fulfilling condition **1** for riddling. Moreover, there is a chaotic attractor \mathbf{A} embedded in the synchronization subspace (condition **2**), such that the fixed points in \mathbf{M} are $P_1 = 0$ and $P_2 = 1 - a$, belonging to the intervals $[0, a]$ and $[1 - a, 1]$, respectively. In this case, there is only one transversal direction to \mathbf{M} . Besides the synchronized state, there exists another attractor \mathbf{B} off the manifold \mathbf{M} , that is the attractor at infinity (condition **3**).

In order to verify condition **4** for riddling, we have to investigate for which values of the coupling coefficient d the transversal Lyapunov exponent is negative. The exponent along the transversal direction, on the other hand, can be obtained by applying Birkhoff ergodic theorem as [15]:

$$\begin{aligned}\lambda_{\perp} &= \frac{1}{2-3a} \left[a \ln \left| \frac{1-a}{a} - d \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{2a}{1-2a} - d \right| \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1-2a}{2} \ln \left| \frac{-2a}{1-2a} - d \right| \\
& + \frac{1-2a}{2-3a} \ln \left| \frac{-(1-a)}{a} - d \right|, \quad (11)
\end{aligned}$$

where we have used the invariant density of the isolated map [17, 18].

In Figure 2 we plot the transversal Lyapunov exponent as a function of the coupling strength sum $d = \delta + \varepsilon$ for $a = 0.45$. There are out of four intervals of d for which the transversal Lyapunov exponent is negative, thus fulfilling Condition 4 for riddling. The boundaries of these intervals are the given by the values of d for which $\lambda_{\perp} = 0$, yielding transcendental equations in view of (11). The intervals characterized by negative transversal exponents for the piecewise-linear Lorenz case ($a = 0.45$) are $I_1 = (-1.224, -1.220)$ and $I_2 = (0.689, 1.707)$.

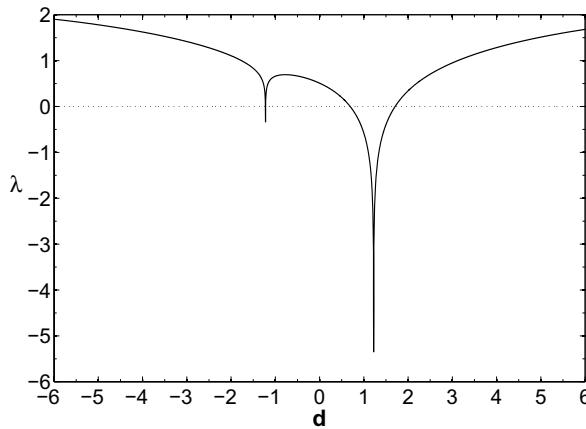


Figure 2 – Transversal Lyapunov exponent for the synchronized attractor of coupled piecewise-linear Lorenz maps with $a = 0.45$ (as a function of the coupling strength d).

We can now verify condition 5 for riddling, that demands that there exist transversely unstable fixed points in the synchronized attractor **A**. In principle, any periodic orbit embedded in **A** can be transversely unstable, so we start by the fixed points. Thanks to the piecewise-linearity of the bungalow-tent map, we can compute analytically the eigenvalues of the fixed points along transversal directions to the synchronization subspace. In Figure 3 we plot the moduli of the transversal eigenvalue μ_2 as a function of the coupling parameter d for the fixed points P_1 and P_2 of the coupled maps. Regardless of the value taken on by d , there will be always some transversely unstable fixed point, i.e. there is at least one transversal eigenvalue having modulus greater than the unity.

For the fixed point $P_1 = 0$ this interval is $d_1 < d < d_2$, where

$$d_{1,2} = \left(\frac{1-a}{a} \right) \mp 1, \quad (12)$$

and for $P_2 = 1 - a$, $-d_2 < d < -d_1$. For $a = 0.45$, as in Figure 3, these intervals are $I_3 = (-2.23, -0.22)$ and $I_4 = (0.22, 2.23)$ for the fixed points P_1 and P_2 , respectively.

Summing up, since condition 5 is verified for any d , the only relevant condition for riddling is 4, i.e. the coupling strength sum d must take on a value belonging to the intervals I_1 or I_2 such that we have riddled basins of attraction.

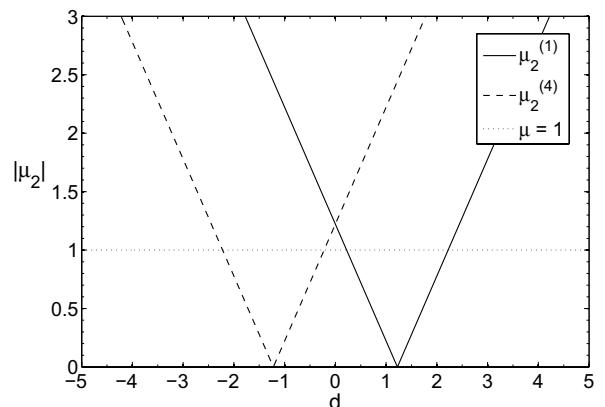


Figure 3 – Moduli of the transversal eigenvalue of the coupled piecewise-linear Lorenz maps as a function of the coupling strength d for the fixed points $P_1 = 0$ and $P_2 = 1 - a$.

An example of a non-riddled basins of synchronization is provided by Figure 4(a), where the black pixels represent initial conditions in the phase plane which asymptote to the synchronized state $x_n = y_n$, whereas white pixels represent initial conditions generating orbits which go to infinity. In fact, the black and white regions do not seem to be densely intertwined, as required for riddled basins, and are actually fractal ones, with a nonetheless involved basin boundary structure. A riddled basin is exemplified in Figure 4(b), for which the value ($d = 1.5$) of the coupling strength is such that $\lambda_T < 0$ (condition 4). The black and white regions are densely intermixed, such that for any point belonging to the basin of the synchronized attractor there exists a neighborhood containing points belonging to the basin of infinity.

4 INTERMINGLED BASINS IN A COMPETITION TWO-SPECIES SYSTEM

Experiments on the competition of two species of flour beetles, *Tribolium castaneum* and *Tribolium confusum* resulted in the eventual extinction of either one of the two competitors [22]. However,

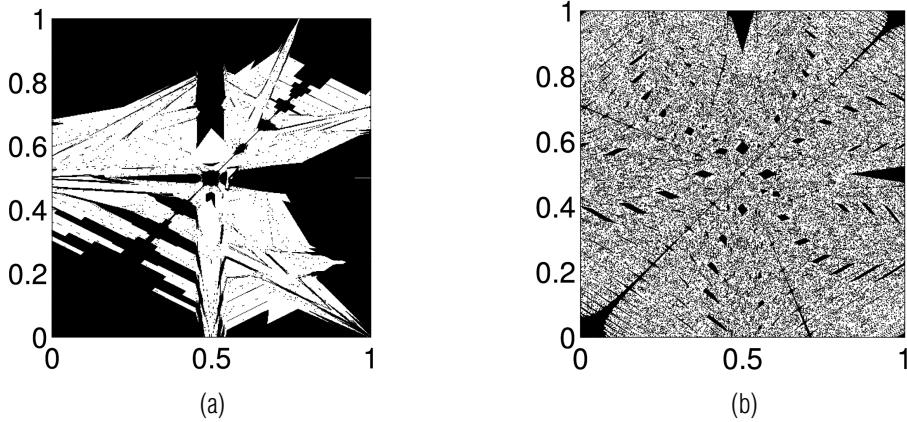


Figure 4 – Initial conditions in the phase plane for $\alpha = 0.45$ and (a) $d = 0.5$ and (b) $d = 1.5$. The black pixels represent initial conditions which converge to a synchronized state, whereas white pixels are initial conditions generating orbits going to infinity.

the particular species to become extinct was found to be extremely sensitive to the initial population and the environmental conditions (such as temperature and humidity) prevailing during the realization of the experiment [23]. Moreover, there are also experimental evidences of chaotic behavior in the time evolution of the populations of single species of *Tribolium* [24]. Hence we may regard the extinction of either species as an asymptotic state with a well-defined attractor in the phase space [25]. The observed extreme sensitivity on the initial condition has led to the hypothesis that the basins of these attractors are riddled [26].

In fact, the basins of attraction are intermingled, for each basin is riddled with holes belonging to the other basin. In this case the two coexisting attractors must lie in different invariant subspaces, and the basin of each attractor is pierced with holes containing initial conditions belonging to the basin of the other attractor [2, 3]. Moreover, these basins are so intertwined that, given an initial condition with a finite uncertainty, the final state cannot be predicted. The sensitivity observed in the *Tribolium sp.* experiments suggests that a mathematical model describing the problem should exhibit intermingled basins, since the initial population in the experiments correspond to an initial condition which is unavoidably plagued with some uncertainty, and thus the outcome becomes uncertain, even if the accuracy is very large in determining the initial condition [25, 26].

Hofbauer and coworkers [25] have developed a class of two-dimensional models in which we consider two species with populations $x_1(n)$ and $x_2(n)$ at (discrete) times $n = 0, 1, 2, \dots$, which labels the insect generation, and satisfying identical evolution equations. We can adapt our conditions for riddling to the case of intermingled basins in this two-dimensional phase space H , as follows:

- 1a. there are two invariant one-dimensional subspaces M_0 and M_1 in the phase plane;
- 2a. the dynamics on the invariant subspaces M_0 and M_1 have chaotic attractors A and B , respectively;
- 3a. the attractors A and B are transversely stable in the phase plane, i.e. for typical orbits on the attractors the Lyapunov exponent for infinitesimal perturbations along the direction transversal to the invariant subspaces M_0 and M_1 , respectively, is negative;
- 4a. a set of unstable periodic orbits embedded in the chaotic attractors A and B are transversely unstable. As a consequence, along the direction transversal to M_0 and M_1 , the Lyapunov exponent experiences positive finite-time fluctuations.

The Hofbauer model starts from the map equations

$$x_1(n+1) = x_1(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)), \quad (13)$$

$$x_2(n+1) = x_2(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)), \quad (14)$$

where $\Phi(\cdot)$ is a function compatible with three biological requirements: (i) the proportion of each species does not change with time, i.e. $x_2(n+1)/x_1(n+1) = x_2(n)/x_1(n)$; (ii) the total population $x = x_1 + x_2$ in a generation depends only on the value at its previous generation; and (iii) $\partial\Phi/\partial x_1 < 0$ and $\partial\Phi/\partial x_2 < 0$.

Perturbations of Eqs. (13)–(14) are included in the model so as to bring about competition effects that may lead to species extinction:

$$\begin{aligned} x_1(n+1) = & x_1(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)) \\ & [1 + \kappa x_1(n)G(x_1(n), x_2(n))], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} x_2(n+1) &= x_2(n)\Phi(x_1(n) + x_2(n)) \\ &\quad [1 - \kappa x_2(n)G(x_1(n), x_2(n))], \end{aligned} \quad (16)$$

where $0 < \kappa < 1$ stands for the strength of the competition between species and, for simplicity, we assume that $G(\cdot)$ depends only on the total population $x = x_1 + x_2$. Changing variables from (x_1, x_2) to $(x, y \equiv x_1/x)$ we obtain, from Eqs. (15)–(16), the following two-dimensional map

$$x(n+1) = T(x(n)) \equiv x(n)\Phi(x(n)), \quad (17)$$

$$y(n+1) = y(n) + \kappa y(n)(1 - y(n))g(x(n)), \quad (18)$$

where $g(x) = xG(xy, x(1 - y))$ satisfies the mathematical requirements stated in Ref. [25]. Within the class of two-dimensional discrete models defined by Eqs. (17)–(18) both functions T (or Φ) and g (or G) have to be determined taking into account the possibility of riddled basins. There must be two possible outcomes: $y = 0$ (extinction of the x_1 species) or $y = 1$ (extinction of the x_2 species). These are the only attractors of the two-dimensional map in the phase plane, denoted as **A** and **B**, respectively. Moreover, their basins of attractions $\beta(\mathbf{A})$ and $\beta(\mathbf{B})$ must be riddled (in fact intermingled), what poses additional requirements in the formulation of the model.

The evolution of the total population, governed by the one-dimensional map $T(x)$, must be chaotic in order to fulfill condition **2a** for intermingled basins, since the only way to have an infinite number of unstable periodic orbits within an attrac-

tor is to ensure the existence of a dense chaotic orbit lying in the invariant manifold. The transversal dynamics (18) has two invariant subspaces: $\mathbf{M}_0 = \{(x, y = 0) | x \in [0, 1]\}$ and $\mathbf{M}_1 = \{(x, y = 1) | x \in [0, 1]\}$, what fulfills condition **1a**. The specific function $g(x)$, on the other hand, must be chosen so as to warrant the proper transverse stability conditions **3a** and **4a**.

The case for which $T(x) = 3x \pmod{1}$ and $g(x) = \cos(2\pi x)$ was previously studied by Kan [26], who proved the existence of intermingled basins when $\kappa = 1/32$. This proof has been extended to the case $0 < \kappa < 1$ by Hofbauer and collaborators [25]. In the present paper we consider a slightly modified version of Kan's model, by choosing

$$x(n+1) = 4x(n)(1 - x(n)), \quad (19)$$

$$y(n+1) = y(n) + \kappa y(n)(1 - y(n))\cos(3\pi x(n)). \quad (20)$$

such that the dynamics in each invariant subspace is strongly chaotic (transitive).

A representative example of the basins of attraction exhibited by this system is depicted in Figure 5(a) for $\kappa = 0.3$. A numerical approximation of the basin of the attractor at \mathbf{M}_0 (\mathbf{M}_1) is represented by the white (black) pixels, and show a fine structure, with tongues of a basin approaching the other attractor at arbitrarily small distances. Moreover, the tongue-like structure of each basin is self-similar, as suggested by the magnification shown in Figure 5(b).

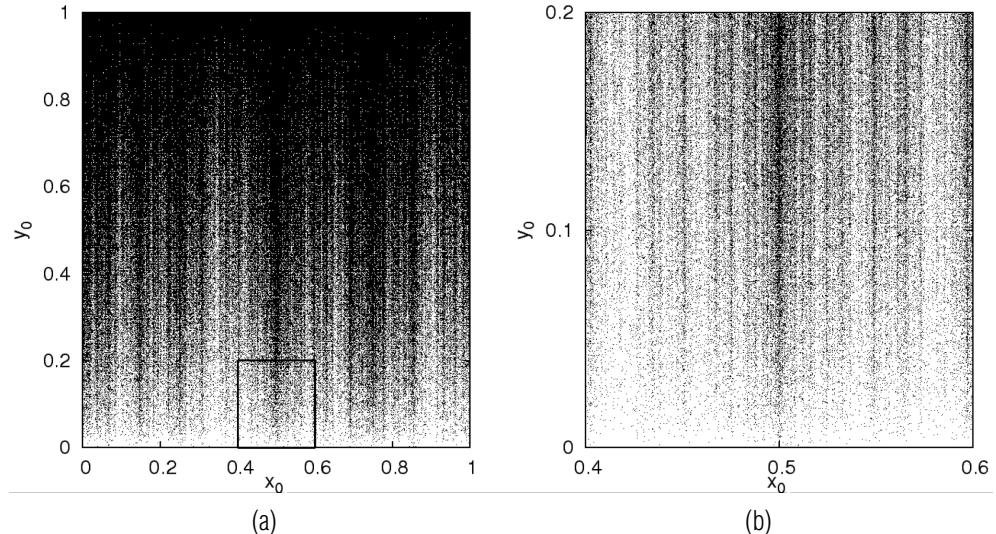


Figure 5 – Basins of the synchronized attractor (white pixels) and of the attractor at infinity (black pixels) when $\kappa = 0.3$.
(b) Magnification of a small region of (a).

In order to discuss conditions **3a** and **4a** for intermingled basins in a quantitative setting, we deal with the finite-time Lyapunov exponents of the two-dimensional map defined by Eqs. (19)–(20). If either attractor has a riddled basin, it must be transversely stable (condition **3a**), such that it is necessary that the infinite-time transversal Lyapunov exponent be negative for **A** and **B**:

$$\begin{aligned}\lambda_{\perp} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \|DF(x_i, y_i) \cdot e_y\| < 0,\end{aligned}\quad (21)$$

where DF is the map Jacobian. In addition, it is also required that both **A** and **B** must contain transversely unstable orbits (condition **4a**). This implies the existence of positive and negative fluctuations of the finite-time transversal exponent, $\tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n)$, what makes useful to work with the probability distribution $P(\tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n))$.

The probability distribution function (PDF) we have numerically obtained for typical chaotic orbits in both attractors is fitted by a Gaussian distribution, with small (and statistically not significant) deviations at its tails. For a Gaussian distribution, it turns out that the infinite-time Lyapunov exponent along the transversal direction is the average finite-time exponent:

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n) \rangle \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\lambda}_{\perp}(n) P(\tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n)) d\tilde{\lambda}_{\perp}(n) = \lambda_{\perp},\end{aligned}\quad (22)$$

provided the PDF is normalized.

In Figure 6(a) we depict (in gray-scale) the dependence on the parameter κ of the numerically obtained probability distribution function $P(\tilde{\lambda}_{\perp})(x(0), y(0), n)$ for the time-24 transverse Lyapunov exponents. The average of these PDFs are always negative for any κ , hence $\tilde{\lambda}_{\perp} < 0$ (condition **3a**). The widths of the PDFs increase with κ , with a marked asymmetry toward negative values of the exponent, as shown by the computed moments of the PDFs as a function of κ [Fig. 6(b)]. We have used in these computations, both typical chaotic orbits in the attractor **A** and atypical unstable period- p orbits embedded in **A** [27], with similar results for the attractor **B**.

Verifying the condition **4a** for intermingled basins amounts to observe a positive fraction of positive values of $\tilde{\lambda}_{\perp}(n)$ for initial conditions $(x(0), y(0))$ randomly chosen in the attractor **A** or **B** [cf. Eq. (3)]. If the PDFs are such that half of their values are positive sign, there results that $f(n) = 1/2$, and the

infinite-time transversal exponent vanishes ($\lambda_{\perp} = 0$), the attractor losing transversal stability (a blowout bifurcation). We remark that the occurrence of a blowout bifurcation marks the endpoint of riddling, since after that the invariant chaotic sets **A** or **B** become transversely unstable.

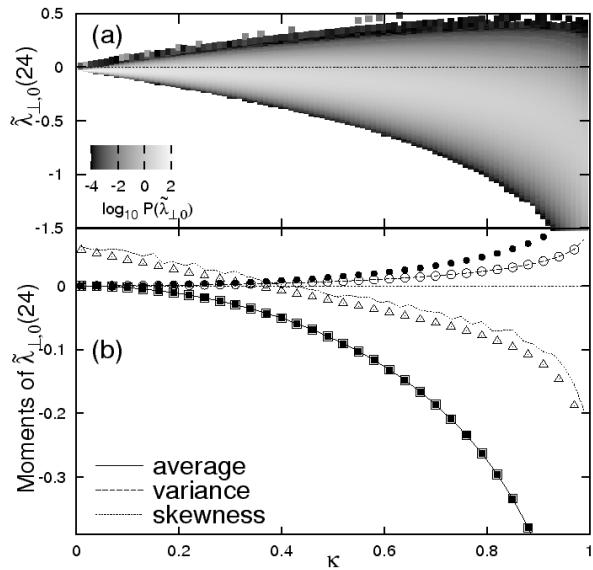


Figure 6 – (a) PDF (in gray-scale) and (b) some of its moments, for time-24 transversal Lyapunov exponents for typical orbits in the subspaces $y = 0$ as a function of the parameter κ . The lines stand for typical chaotic orbits, whereas the symbols represent atypical unstable period- p orbits (open symbols of $p = 24$, filled symbols for $p = 12$).

The dependence of the positive fraction of time- n transverse Lyapunov exponents with κ is depicted in Figure 7(a) for three different values of n . The results indicate that, for $0 < \kappa < 1$ we have a nonzero positive fraction of transversal exponents, on account of the existence of transversely unstable periodic orbits. Since the infinite-time Lyapunov exponent is already negative for this range of parameters there follows that the map always fulfill the conditions for riddling. This result holds for both attractors, so we have intermingled basins for any κ .

Our conclusions are reinforced by computing the so-called contrast measure, that quantifies the relative contribution of the unstable period- p orbits to the natural measure of a chaotic attractor [28],

$$C_p = |\mu_p^u - \mu_p^s|,\quad (23)$$

where μ_p^u and μ_p^s are the contributions of period- p orbits, embedded in the chaotic attractor, which are transversely unstable and stable, respectively. Riddling occurs when the former contribution is nonzero, hence the contrast measure is supposed to

take on values between zero and unity for systems possessing riddled basins. The contrast measure is depicted in Figure 7(b) as a function of the parameter κ for orbits with three different periods. The results confirm those obtained with help of finite-time Lyapunov exponents.

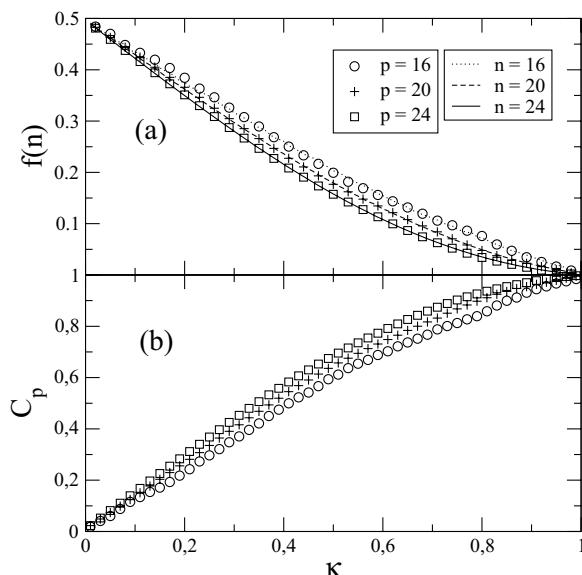


Figure 7 – Dependence with κ of (a) the positive fraction of transversal Lyapunov exponents of attractor A for typical chaotic orbits ($n = 16, 20, 24$) and unstable periodic orbits ($p = 16, 20, 24$); (b) contrast measure for $p = 16, 20, 24$.

5 CONCLUSIONS

Riddled basins, when occurring in complex systems, present many challenges for theoretical and experimental investigations. The extreme sensitivity to initial conditions make those systems highly susceptible to uncertainties of parameter and state determination. On the other hand, the rather stringent mathematical conditions necessary for the occurrence of riddled or intermingled basins (chiefly the mandatory existence of invariant manifolds for each coexisting attractor) limit the horizon of dynamical systems to be investigated. For example, coupled chaotic systems commonly present one such invariant manifold – the synchronization subspace. However, other invariant subspaces would require additional symmetry properties that not all complex systems are able to exhibit.

In spite of these difficulties, it turns out that riddling is quite common in complex systems. In this paper we have shown two representative examples of riddling in systems of physical and biological interest. Coupled Lorenz-like piecewise-linear maps can be viewed as a toy model that is expected to emulate dynamical features of complex systems describing climate change. We

have shown that there are wide parameter values (in this case, the strength of coupling between the systems) for which the basin of the chaotic synchronized attractor is riddled. The advantages here are that we can actually prove that the basins are riddled, by verifying the mathematical requirements for that, which may be unfeasible in a higher-dimensional model. Moreover, since we were able to prove riddling for such a low-dimensional system, it is well likely that higher-dimensional models would also display riddled basins.

The second example studied involves a model for the competition between two species of flour beetles, in which the final states are the extinction of either species. The discrete-time model we used for this problem is simple enough that the mathematical requirements for riddling can be proved to exist for any intensity of the competition between species. Moreover, the basins of both coexisting attractors are mutually riddled, or intermingled. A practical consequence of riddling, in this case, is that the outcome of the species competition is indeterminate, as observed in experiments with populations of *Tribolium sp.* The conventional explanation for this phenomenon has been stochastic, both of genetic and demographic origin, but we showed that intermingled basins offer a new perspective on this phenomenon, since they provide a deterministic origin for the competitive indeterminacy, what can be used to analyze the evolution of other animal populations.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq, CAPES, FAPESP, and Fundação Araucária (Brazilian government agencies).

REFERENCES

- [1] SANJUAN MAF, AGUIRRE J & VIANA RL. 2009. Rev. Mod. Phys., 81: 333.
- [2] ALEXANDER JC, YORKE JA, YOU Z & KAN I. 1992. Int. J. Bifurcat. Chaos, 2: 795.
- [3] LAI YC & GREBOGI C. 1995. Phys. Rev. Lett., 52: R3313.
- [4] McDONALD SW, GREBOGI C & OTT E. 1985. Physica D, 17: 125.
- [5] OTT E & SOMMERER JC. 1993. Nature, 365: 138.
- [6] OTT E, SOMMERER JC, ALEXANDER JC, KAN I & YORKE JA. 1993. Phys. Rev. Lett., 71: 4134.
- [7] OTT E, ALEXANDER JC, KAN I, SOMMERER JC & YORKE JA. 1994. Physica D, 76: 384.
- [8] ASHWIN P, BUESCU J & STEWART I. 1994. Phys. Lett. A, 193: 126.

- [9] HEAGY JF, CARROLL TL & PECORA LM. 1994. Phys. Rev. Lett., 73: 3528.
- [10] WOLTERING M & MARKUS M. 1999. Phys. Lett. A, 260: 453.
- [11] CAZELLES B. 2001. Chaos, Solit. & Fract., 12: 301.
- [12] NAKAJIMA H & UEDA Y. 1996. Physica D, 99: 35–44.
- [13] WOLTERING M & MARKUS M. 2000. Chem. Phys. Lett., 321: 473–478.
- [14] YOUSEFI S, MAISTRENKO Y & POPOVICH S. 2000. Discrete Dynamics in Nature and Society, 5: 161.
- [15] HASLER M & MAISTRENKO YL. 1997. IEEE Trans. Circ. Syst. I 44: 856.
- [16] LORENZ E. 1963. J. Atmospheric Sciences, 20: 130.
- [17] STEEB W-H, VAN WYK MA & STOOP R. 1998. Int. J. Theor. Phys., 37: 2653.
- [18] STOOP R & STEEB W-H. 1997. Phys. Rev. E, 55: 7763.
- [19] KIM C-M, RIM S, KYE W-H, RYU J-W & PARK Y-J. 2003. Phys. Lett. A, 320: 39.
- [20] FUJISAKA H & YAMADA T. 1983. Prog. Theor. Phys., 69: 32.
- [21] PECORA LM & CARROLL TL. 1990. Phys. Rev. Lett., 64: 821.
- [22] PARK T. 1954. Physiol. Zool., 27: 177.
- [23] COSTANTINO RF & DESHARNAIS RA. 1991. Population dynamics and the Tribolium model: genetics and demography. (Springer Verlag, Berlin, 1991), Chap. 8.
- [24] COSTANTINO RF, CUSHING JM, DENNIS B & DESHARNAIS RA. 1997. Nature, 375: 227. COSTANTINO RF, DESHARNAIS RA, CUSHING JM and DENNIS B. 1997. Science, 275: 389.
- [25] HOFBAUER F, HOFBAUER J, RAITH P & STEINBERGER T. 2004. J. Math. Biol., 49: 293.
- [26] KAN I. 1994. Bull. Am. Math. Soc., 31: 68.
- [27] PEREIRA RF, PINTO SES, VIANA RL, LOPES SR & GREBOGI C. 2007. Chaos, 17: 023131.
- [28] LAI Y-C. 1999. Phys. Rev. E, 59: R3807.

Periodic-orbit analysis and scaling laws of intermingled basins of attraction in an ecological dynamical system

R. F. Pereira,¹ S. Camargo,² S. E. de S. Pinto,³ S. R. Lopes,¹ and R. L. Viana^{1,*}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil*

²*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 05315-970, São Paulo, São Paulo, Brazil*

³*Departamento de Física, Universidade Estadual de Ponta Grossa, 84032-900, Ponta Grossa, Paraná, Brazil*

(Received 9 April 2008; revised manuscript received 29 September 2008; published 24 November 2008)

Chaotic dynamical systems with two or more attractors lying on invariant subspaces may, provided certain mathematical conditions are fulfilled, exhibit intermingled basins of attraction: Each basin is riddled with holes belonging to basins of the other attractors. In order to investigate the occurrence of such phenomenon in dynamical systems of ecological interest (two-species competition with extinction) we have characterized quantitatively the intermingled basins using periodic-orbit theory and scaling laws. The latter results agree with a theoretical prediction from a stochastic model, and also with an exact result for the scaling exponent we derived for the specific class of models investigated. We discuss the consequences of the scaling laws in terms of the predictability of a final state (extinction of either species) in an ecological experiment.

DOI: [10.1103/PhysRevE.78.056214](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.056214)

PACS number(s): 05.45.Ac, 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Df

I. INTRODUCTION

Experiments on the competition of two species of flour beetles, *Tribolium castaneum* and *Tribolium confusum* resulted in the eventual extinction of either one of the two competitors [1]. However, the particular species to become extinct was found to be extremely sensitive to the initial population and the environmental conditions (such as temperature and humidity) prevailing during the realization of the experiment [2]. This competitive indeterminacy problem has been extensively investigated: In replicate cultures of *T. castaneum* and *T. confusum*, one species exterminates the other with a probability p inasmuch for other cultures, the other species wins with probability $1-p$ [3].

These features are traditionally explained by means of two types of hypotheses. The first, called genetic stochasticity, attributes the identity of the winning species mainly to the genetic characteristics of the founding populations [3]. This means that, if some species eventually wins, a genetically superior collection of beetles of this species is matched with a relatively inferior population of beetles of the opposite species, and vice versa. The competitive indeterminacy will be due to random sampling among the genotypes distributed from a stock culture [4]. The second hypothesis, called demographic stochasticity, is the variability in the population growth rates arising from random differences among individuals in survival and reproduction within a season. This variability happens even if all individuals have the same expected ability to survive and reproduce, and if the expected rates of survival and reproduction do not change from one generation to the next [3].

Besides these conventional theories based on some kind of stochastic behavior that give a satisfactory explanation to the experiments, there is also an alternative approach based on a different type of competitive indeterminacy caused by deterministic factors, and that will be followed in the present

paper. The starting point is the existence of experimental evidences of chaotic behavior in the time evolution of the populations of single species of *Tribolium* [5]. Since the time evolution of this simple two-species competition system is thought to be deterministic, we may regard the extinction of either species as an asymptotic state with a well-defined attractor in the phase space [6]. The observed extreme sensitivity on the initial condition has led to the hypothesis that the basins of these attractors exhibit an extreme form of fractality called riddling [7].

A dynamical system is said to present riddled basins when it has a chaotic attractor A whose basin of attraction is riddled with holes belonging to the basin of another (unnecessarily chaotic) attractor B [8,9]. Riddling means that every point in the basin of attractor A has pieces of the basin of attractor B arbitrarily nearby. A consequence of riddling is that, no matter how small is the uncertainty with which an initial condition is determined, the asymptotic state of the system remains virtually unpredictable, thus defying the formally deterministic character of the model [10,11].

Riddled basins of attraction have been observed both in mathematical models [8–11] as well as in experiments [12]. In particular, riddling has been described in ecological population models [13]. The basins are called intermingled, when each basin is riddled with holes belonging to the other basin. In this case, there must be at least two attractors lying in different invariant subspaces, and the basin of each attractor is pierced with holes containing initial conditions belonging to the basin of the other attractor [8,14]. Moreover, these basins are so intertwined that, given an initial condition with a finite uncertainty, the final state cannot be predicted. The sensitivity observed in the *Tribolium* sp. experiments suggests that a mathematical model describing the problem exhibits intermingled basins, since the initial population in the experiments correspond to an initial condition which is unavoidably plagued with some uncertainty, and thus with uncertain outcome if the basins are intermingled [6,7].

For intermingled basins to exist there must be chaotic orbits in the invariant subspaces of the two coexisting attrac-

*Corresponding author; viana@fisica.ufpr.br

tors. The natural ergodic measure in each attractor is supported by an infinite number of unstable periodic orbits, and a quantitative characterization of the chaotic orbits is thus furnished by a periodic orbit analysis. Commonly used diagnostic in the latter are the finite-time Lyapunov exponents and the contrast measure [15,16]. However, in order to relate the presence of intermingled basins to some mathematical model of the competition between the *Tribolium* species, it is necessary to explore some quantitative consequences of this basin property, particularly in the form of scaling laws that can be, at least in principle, confirmed by future experiments. Such scaling laws have been derived by Ott and co-workers from a stochastic model with drift and reflecting barrier [17].

In this paper we consider a possible mathematical model of the *Tribolium* experiments based on the previous works of Hofbauer *et al.* [6] and Kan [7], and which presents intermingled basins. We verify the scaling laws for riddled basins and compare the numerical results with the above-mentioned theoretical model [17]. These scaling laws for the intermingled basins represent quantitative characterizations that can be used to establish connections between the existence of such basins in this and other related experiments (the existence of locally intermingled basins has been reported in a system of two coupled Chua circuits [18]). Moreover, a periodic orbit analysis is performed so as to investigate the role of the unstable periodic orbits in the metric properties of the chaotic orbits in the system, since the presence of transversely unstable periodic orbits is the dynamical phenomenon that enables the existence of intermingled basins.

The rest of this paper is organized as follows. In Sec. II we present the mathematical model for the *Tribolium sp.* experiment as well as some of its mathematical properties. Sec. III deals with the characterization of intermingled basins in this model using typical chaotic orbits in the corresponding attractors. The same characterization, but now using periodic orbit analysis (i.e., unstable periodic orbits embedded in the attractors) is the object of Sec. IV. The scaling laws that can be used to identify and investigate intermingled basins are the subject of Sec. V: The fraction of basin areas close to the attractors and the uncertain fraction of initial conditions. The last section is devoted to our conclusions.

II. INTERMINGLED BASINS IN A TWO-SPECIES COMPETITION MODEL

The red flour beetles *Tribolium castaneum* and *Tribolium confusum* have similar habitats and identification. Both primarily attack milled grain products, as flour and cereals. They are a very common insect pest of flour mills in many countries, since they are particularly injurious in warehouses and in factories making starch products. Experiments involving the evolution of these two competing species have shown as the final outcome the extinction of either one of them. What species becomes extinct seem to depend on the initial population and environmental conditions in an extremely sensitive manner [1].

Hofbauer and co-workers [6] have developed a class of two-dimensional models in which we consider two species with populations $x_1(n)$ and $x_2(n)$ at (discrete) times n

$=0, 1, 2, \dots$, which labels the insect generation, and satisfying identical evolution equations

$$x_1(n+1) = x_1(n)\Phi[x_1(n) + x_2(n)], \quad (1)$$

$$x_2(n+1) = x_2(n)\Phi[x_1(n) + x_2(n)], \quad (2)$$

where $\Phi(\dots)$ is a function compatible with three biological requirements: (i) The proportion of each species does not change with time, i.e., $x_2(n+1)/x_1(n+1) = x_2(n)/x_1(n)$; (ii) the total population $x = x_1 + x_2$ in a generation depends only on the value at its previous generation; and (iii) $\partial\Phi/\partial x_1 < 0$ and $\partial\Phi/\partial x_2 < 0$.

In order to exhibit competition and species extinction, this model includes perturbations of Eqs. (1) and (2) in the general form

$$x_1(n+1) = x_1(n)\Phi[x_1(n) + x_2(n)]\{1 + \kappa x_1(n)G[x_1(n), x_2(n)]\}, \quad (3)$$

$$x_2(n+1) = x_2(n)\Phi[x_1(n) + x_2(n)]\{1 - \kappa x_2(n)G[x_1(n), x_2(n)]\}, \quad (4)$$

where $0 < \kappa < 1$ stands for the strength of the competition between species and, for simplicity, we assume that $G(\dots)$ depends only on the total population $x = x_1 + x_2$. Changing variables from (x_1, x_2) to $(x, y \equiv x_1/x)$, we obtain, from Eqs. (3) and (4), the following two-dimensional map

$$x(n+1) = T[x(n)] \equiv x(n)\Phi[x(n)], \quad (5)$$

$$y(n+1) = y(n) + \kappa y(n)[1 - y(n)]g[x(n)], \quad (6)$$

where $g(x) = xG[xy, x(1-y)]$ satisfies the mathematical requirements stated in Ref. [6].

Within the class of two-dimensional discrete models defined by Eqs. (5) and (6) both functions T (or Φ) and g (or G) must be determined taking into account the possibility of riddling basins. There must be two possible outcomes: $y=0$ (extinction of the x_1 species) or $y=1$ (extinction of the x_2 species). Those results show up as the only attractors of the two-dimensional map in the phase plane, denoted as A and B , respectively. Moreover, their basins of attractions, denoted as $\beta(A)$ and $\beta(B)$, must be riddled (in fact intermingled), which poses additional requirements in the formulation of the model.

Let us briefly review the set of conditions defining riddled basins for two-dimensional maps [10]. When the basin of attraction of A is riddled with holes belonging to the basin of another attractor B , we can say that, if a randomly chosen point has a positive probability of being in $\beta(A)$, then it also has positive probability of not being in $\beta(A)$. In the latter case, the point belongs to the other basin of attraction $\beta(B)$.

This measure-theoretical definition and the fact that one basin is riddled by the other one, implies the following set of conditions under which riddled basins occur in such a two-dimensional dynamical system [10]:

(1) There are two invariant one-dimensional subspaces I_0 and I_1 in the phase plane.

(2) The dynamics on the invariant subspaces I_0 and I_1 have chaotic attractors A and B , respectively.

(3) The attractors **A** and **B** are transversely stable in the phase plane, i.e., for typical orbits on the attractors the Lyapunov exponent for infinitesimal perturbations along the direction transversal to the invariant subspaces I_0 and I_1 , respectively, is negative.

(4) A set of unstable periodic orbits embedded in the chaotic attractors **A** and **B** are transversely unstable. As a consequence, along the direction transversal to I_0 and I_1 , the Lyapunov exponent experiences positive finite-time fluctuations.

Condition (1) is a consequence of the system having some symmetry which enables it to display invariant subspaces I_i , $i=0,1$ in the sense that, once an initial condition is exactly placed on I_i , the resulting trajectory cannot escape from I_i for further times. To have riddling (and thus intermingled basins), it is necessary to exist dense sets of points with zero Lebesgue measure in the attractors **A** and **B** lying in the invariant subspaces I_0 and I_1 which are transversely unstable, thus it is necessary that these attractors be chaotic, which is the content of condition (2).

If the transverse Lyapunov exponent of typical orbits lying in the invariant subspaces I_0 and I_1 is negative [condition (3)], then **A** and **B** are attractors at least in the weak Milnor sense, and their basins have positive Lebesgue measure. Condition (4) states that, while the invariant subspaces I_i are still transversely stable, there will be (atypical) trajectories on the attractors **A** and **B** that are transversely unstable. Condition (3) can be quantitatively checked by computing the Lyapunov exponent along the transversal direction to I_i . Verifying condition (4), on the other hand, would require the determination of a transversely unstable periodic orbit embedded in the attractor **A** or **B**. It turns out that this is feasible only for a few dynamical systems [19]. In most situations we shall resort to other ways to verify the existence of finite-time fluctuations by computing the finite-time Lyapunov exponents.

The evolution of the total population, governed by the one-dimensional map $T(x)$, must be chaotic in order to fulfill condition (2) for riddling, since the only way to have an infinite number of unstable periodic orbits within an attractor is to ensure the existence of a dense chaotic orbit lying in the invariant manifold. The transversal dynamics (6) has two invariant subspaces: $I_0=\{(x,y=0)|x\in[0,1]\}$ and $I_1=\{(x,y=1)|x\in[0,1]\}$, which fulfills condition (1). In addition, although this is not a necessary condition, we suppose that the attractors **A** and **B** have measures occupying the whole intervals I_0 and I_1 , respectively. The specific function $g(x)$, on the other hand, must be chosen so as to warrant the proper transverse stability conditions (3) and (4).

The case for which $T(x)=3x \pmod{1}$ and $g(x)=\cos(2\pi x)$ was previously studied by Kan [7], who proved the existence of intermingled basins when $\kappa=1/32$. This proof has been extended to the case $0<\kappa<1$ by Hofbauer and collaborators [6]. In the present paper we consider a slightly modified version of Kan's model, by choosing

$$x(n+1)=4x(n)[1-x(n)], \quad (7)$$

$$y(n+1)=y(n)+\kappa y(n)[1-y(n)]\cos[3\pi x(n)], \quad (8)$$

such that the dynamics in each invariant subspace is strongly chaotic, with natural measure $d\mu(x)=[\pi\sqrt{x(1-x)}]^{-1}dx$.

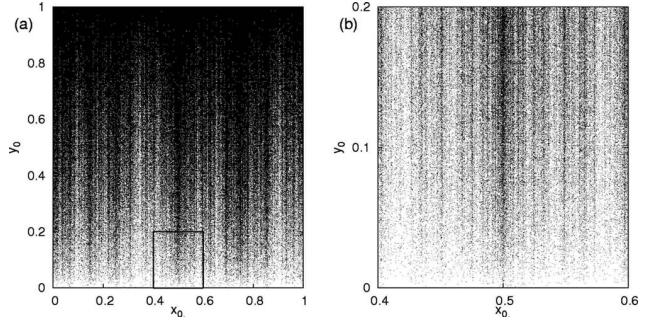


FIG. 1. Basins of the attractor at I_0 , $y=0$ (white pixels) and I_1 , $y=1$ (black pixels) when $\kappa=0.3$. (b) Magnification of a small region of (a).

A representative example of the basins of attraction exhibited by this system is depicted in Fig. 1(a) for $\kappa=0.3$. A numerical approximation of the basin of the attractor at I_0 (I_1) is represented by the white (black) pixels, and show an intertwined structure, with pieces of a basin approaching the other attractor at arbitrarily small distances. Moreover, there is a tonguelike structure of each basin with self-similar character, as suggested by the magnification shown in Fig. 1(b).

Two basic properties of the intermingled basins are apparent in Fig. 1: (i) There are pieces of some basin at distances arbitrarily close to the other attractor; (ii) the vicinity of a point belonging to any basin contains points belonging to the other basins, at small scales. These observations are to be confirmed and quantified by derivation of two scaling laws involving information from the finite-time Lyapunov exponents. Actually, these properties follow from the tonguelike structure of the basin filaments next to the subspaces. The tongues are anchored at transversely unstable periodic orbits belonging to each subspace. Since these orbits form a dense set, the tonguelike structure is likewise dense.

III. CHARACTERIZATION OF INTERMINGLED BASINS BY TYPICAL CHAOTIC ORBITS

In order to discuss conditions (3) and (4) for riddled basins in a quantitative setting, it is useful to work with the finite-time Lyapunov exponents of the two-dimensional map defined by Eqs. (7) and (8). Let n be a positive integer and $\mathbf{DF}^n[x(0),y(0)]$ be the Jacobian matrix of the n times iterated map $\mathbf{F}(x,y)=[4x(1-x),y+\kappa y(1-y)\cos(3\pi x)]$, with entries evaluated at an initial condition $[x(0),y(0)]$. We assume that the singular values of $\mathbf{DF}^n[x(0),y(0)]$ are ordered as $\xi_1[x(0),y(0),n]\geq\xi_2[x(0),y(0),n]$. Then, the time- n Lyapunov exponents for the point $x(0),y(0)$ are defined as [20]

$$\tilde{\lambda}_1[x(0),y(0);n]=\frac{1}{n}\ln\|\mathbf{DF}^n[x(0),y(0)]\cdot\mathbf{v}_1\|, \quad (9)$$

$$\tilde{\lambda}_2[x(0),y(0);n]=\frac{1}{n}\ln\|\mathbf{DF}^n[x(0),y(0)]\cdot\mathbf{v}_2\|, \quad (10)$$

where $\mathbf{v}_{1,2}$ is the singular vector related to $\xi_{1,2}[x(0),y(0),n]$, respectively.

Due to the skew-product structure of Eqs. (7) and (8), as well as of the whole class of maps described by Hofbauer *et al.* [6], the dynamics at direction 1 is not affected by the dynamics at direction 2 (the converse, however, is obviously true). Hence, we may fix $\xi_1 = \xi_{\parallel}$ as being the eigenvalue at directions parallel to the invariant subspaces $I_{0,1}$, with $\xi_2 = \xi_{\perp}$ denoting the transverse direction.

The infinite time-limit of Eqs. (9) and (10) are the usual Lyapunov exponents,

$$\lambda_{\parallel} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\parallel}[x(0), y(0), n] = \int_0^1 \frac{4(1-2x)dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}} = \ln 2, \quad (11)$$

$$\lambda_{\perp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \|\mathbf{DF}(x_i, y_i) \cdot \mathbf{e}_y\|, \quad (12)$$

where the first result comes from considering typical chaotic trajectories in the attractors A or B, for which Birkhoff's ergodic theorem can be applied. Moreover, although the time- n exponent $\tilde{\lambda}_k[x(0), y(0), n]$, $k=1, 2$, has in general a different value, depending on the point we choose, its infinite time limit takes on the same value for almost all $[x(0), y(0)]$ with respect to the natural ergodic measure of the invariant sets A or B.

If an attractor has a riddled basin, it must be transversely stable [condition (3) for riddling], such that it is necessary that $\lambda_{\perp} < 0$. On the other hand, it is also required that the attractor contains transversely unstable orbits [condition (4)]. This is possible because in a transversely stable chaotic attractor there can be an infinite number of transversely unstable orbits. This implies the existence of positive and negative fluctuations of the finite-time transversal exponent, $\tilde{\lambda}_{\perp}$, which makes it useful to work with the probability distribution $P[\tilde{\lambda}_{\perp}(x(0), y(0), n)]$, from which we can obtain the average value of this exponent (assuming proper normalization),

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n] \rangle \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n] P\{\tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n]\} d\tilde{\lambda}_{\perp}(n). \end{aligned} \quad (13)$$

When n is large enough the form of this distribution can be written as [20]

$$P\{\tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n]\} \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_{\perp})}{2\pi}} e^{-nG(\lambda_{\perp})}, \quad (14)$$

where the function $G(\lambda)$ has the following convexity properties:

$$G(\lambda_{\perp}) = G'(\lambda_{\perp}) = 0, \quad G''(\lambda_{\perp}) > 0. \quad (15)$$

Expanding $G(\lambda)$ in the vicinity of λ_{\perp} , the first nonvanishing term is the quadratic one, such that $P\{\tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n]\}$ reduces to a Gaussian distribution

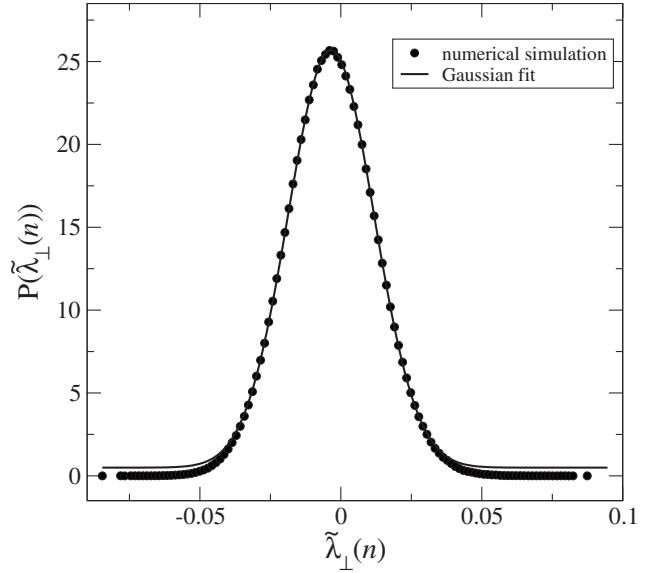


FIG. 2. Probability distribution function $P(\tilde{\lambda}_{\perp})(n)$ for the time-24 transverse Lyapunov exponents of attractor A, with $\kappa = 0.1$.

$$\begin{aligned} P_{\perp}[\tilde{\lambda}_{\perp}(n)] \approx \sqrt{\frac{nG''(\lambda_{\perp})}{2\pi}} \\ \times \exp\left(-\frac{nG''(\lambda_{\perp})}{2}[\tilde{\lambda}_{\perp}(n) - \lambda_{\perp}]^2\right) \quad (n \gg 1), \end{aligned} \quad (16)$$

such that, on substituting into (13) there results

$$\langle \tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n] \rangle = \lambda_{\perp}. \quad (17)$$

Since the standard deviation in the Gaussian approximation approaches zero with $n^{-1/2}$, when $n \gg 1$, we can obtain the corresponding variance as

$$\sigma^2 = \langle [\tilde{\lambda}_{\perp}(n) - \langle \lambda_{\perp} \rangle]^2 \rangle. \quad (18)$$

We show in Fig. 2 the numerically obtained probability distribution function (PDF) $P(\tilde{\lambda}_{\perp})[x(0), y(0)=1, n]$ for the time-24 transverse Lyapunov exponents of the attractor A when $\kappa=0.1$, and compare it with a Gaussian fit given by Eq. (16). The latter gives better results for the bulk of the distribution, with small deviations in its tails. The fraction of the distribution which differs more than 10% from the Gaussian fit is 2.2%. Hence, on supposing a Gaussian diffusive process, we can define a diffusion coefficient

$$D = \frac{2\sigma^2}{n} = \frac{1}{2}G''(\lambda_{\perp}), \quad (19)$$

where we have used Eq. (14) [22].

In Fig. 3(a) we depict (in gray scale) the dependence on the parameter κ of the numerically obtained PDF $P\{\tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0)=1, n]\}$ for the time-24 transverse Lyapunov exponents of the attractor A. The PDFs drift toward negative values as κ increases, hence their average values are negative

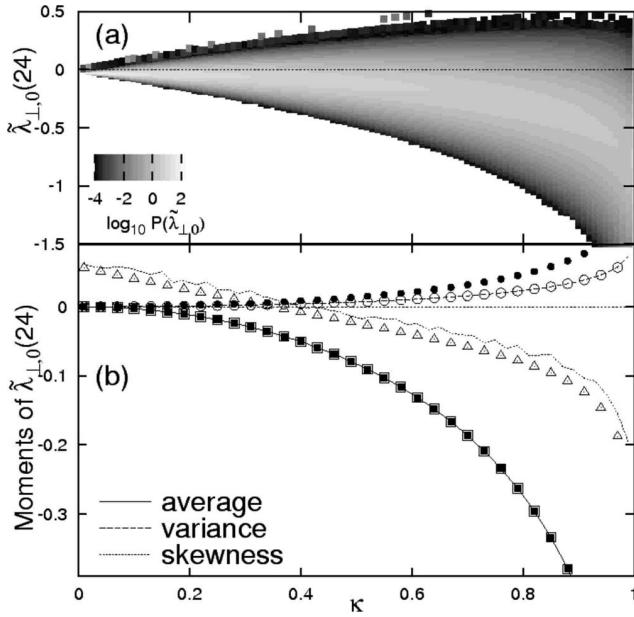


FIG. 3. (a) Probability distribution function (in gray scale) for time-24 transversal Lyapunov exponents for typical orbits in the subspaces $y=0$ as a function of the parameter κ . (b) Moments of the probability distribution function versus κ . The lines stand for typical chaotic orbits, whereas the symbols represent atypical unstable period- p orbits (open symbols of $p=24$, filled symbols for $p=12$).

for any $\kappa > 0$: $\lambda_{\perp} < 0$ [condition (3)]. The width of these PDFs are nearly constant with respect to κ , with a degree of asymmetry varying from negative to positive values, as shown by Fig. 3(b), where some of the moments of the PDFs are depicted as a function of κ . These results were obtained by using typical chaotic orbits, but the observed behavior is supported by the structure of unstable periodic orbits embedded in both attractors [21].

The existence of transversely unstable orbits in the attractors [condition (4)] implies that there is a positive fraction of positive values of $\tilde{\lambda}_{\perp}(n)$ for initial conditions $[x(0), y(0)]$ randomly chosen in the attractor A or B,

$$f(n) = \int_0^\infty P\{\tilde{\lambda}_{\perp}[x(0), y(0), n]\} d\tilde{\lambda}_{\perp}(n) > 0. \quad (20)$$

If the distribution of finite-time exponents is symmetric and so as to have one-half of their values with positive sign, i.e., $f(n)=1/2$, then the infinite-time exponent λ_{\perp} vanishes, and the attractor loses transversal stability, configuring a blowout bifurcation [23]. We remark that the occurrence of a blowout bifurcation marks the end point of riddling, since after that the invariant chaotic sets become transversely unstable.

The dependence of the positive fraction of time- n transverse Lyapunov exponents with κ is depicted in Fig. 4(a) for three different values of n . The results indicate that, for $0 < \kappa < 1$, we have a nonzero positive fraction of transversal exponents, on account of the existence of transversely unstable periodic orbits. Since the infinite-time Lyapunov exponent is already negative for this range of parameters, there

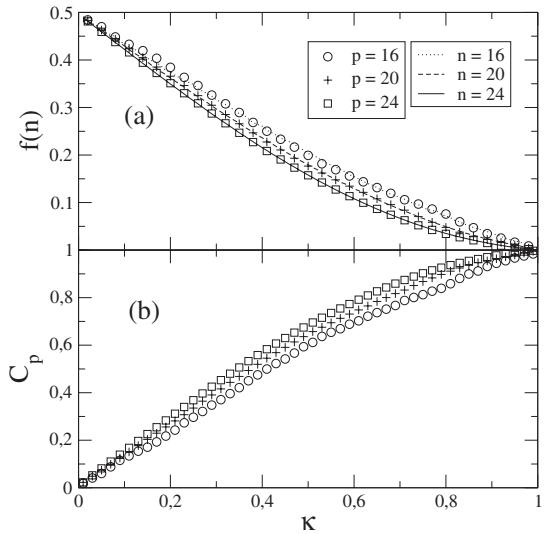


FIG. 4. Dependence with κ of (a) the positive fraction of transversal Lyapunov exponents for typical orbits ($n=16, 20, 24$) and unstable periodic orbits ($p=16, 20, 24$); (b) contrast measure for $p=16, 20, 24$. The orbits have been chosen from the attractor at I_0 , $y=0$, but identical results were found for the other attractor at I_1 , $y=1$.

follows that the map always fulfill the conditions for riddling. This result holds for both attractors A and B, such that their basins of attraction are intermingled.

As κ approaches the unity, the positive fraction goes to zero. In this case the populations keep their proportions unchanged, such that there is no extinction of any population. This marks the onset of a phenomenon called unstable dimension variability (UDV), which underlies the indeterminacy characteristic of the species extinction. A chaotic invariant set possessing UDV has, embedded on it, periodic orbits with a different number of unstable directions [24]. A particularly troublesome consequence of UDV is the lack of adequate shadowability properties of noisy trajectories, such as those obtained by using computers, where the role of noise is played by unavoidable one-step roundoff and truncation errors [25].

If UDV is too severe, it may happen that a noisy trajectory is not closely followed by any fiducial trajectory of the original system for a reasonable time. Hence, the computer-generated trajectories in this case may be just numerical artifacts, and no relevant statistics can be extracted from such orbits [26]. In this case, even though the system is formally a deterministic one, the character of the orbits is, at best, of a stochastic system. In fact, when there is no shadowability at all, the mathematical model itself may be of limited use, and one should resort to experimental data (using embedding techniques, for example) to obtain relevant information about the system dynamics. UDV was first described for a diffeomorphism in $T^2 \times S^2$ [27]. The earliest observation of UDV for a dynamical system of physical interest was reported for the kicked double rotor map [28,29]. The presence of UDV seems to be typical in high-dimensional dynamical systems, as in coupled map lattices [30]. The analysis developed in this section for the *Tribolium* system shows imme-

diately that it exhibits UDV for all values of the parameter $0 < \kappa < 1$.

IV. CHARACTERIZATION OF INTERMINGLED BASINS BY UNSTABLE PERIODIC ORBITS

The natural measure of a chaotic attractor, generated by a typical chaotic orbit, is supported by an infinite number of unstable periodic orbits embedded in that attractor. The latter are thus atypical orbits. Each unstable orbit has thus its own measure with a well-defined contribution to the natural measure. The object of periodic orbit theory is to characterize this contribution in order to elucidate the underlying mechanisms involving global bifurcations like the onset of riddling [21].

For ease of notation we write $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i = 0, 1)$ and, accordingly, denote as $\{\mathbf{x}_1(j), \mathbf{x}_2(j), \dots, \mathbf{x}_p(j)\}$ the points of a j th period- p orbit embedded in the chaotic attractor, where $j = 1, 2, \dots, N_p$, with N_p as the total number of period- p orbits. In this case, $\mathbf{x}_p(j)$ is the j th fixed point of $\mathbf{F}^p(\mathbf{x})$, i.e., $\mathbf{x}_p(j)$ is on a period- r orbit, where r equals either p or a prime factor of p . We can define a transverse Lyapunov exponent for such period- p orbit as [15]

$$\lambda_{\perp}[\mathbf{x}_p(j), p] = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \ln \|\mathbf{DF}[\mathbf{x}_i(j)] \cdot \mathbf{e}_y\|, \quad (21)$$

in such a way that a typical chaotic orbit on either attractor has its natural measure supported by transversely stable and unstable periodic orbits, i.e., those for which $\lambda_{\perp}(p, j)$ is negative and positive, respectively.

We would expect that, the higher the period p , the most likely the atypical measure of the unstable orbit would approach the typical nature measure of the chaotic orbit. This is confirmed by the numerical results summarized in Fig. 3(b). The number of period- p orbits is known to increase exponentially with p , according to the topological entropy of the attractors (in the case of the *Tribolium* system, we have $h_T = \ln 2$ for both attractors), thus reliable statistical results can only be obtained with large periods p .

Some moments of the probability distribution function for unstable orbits of periods $p=12$ and 24 are depicted in Fig. 3(b) as a function of κ , and they agree with the result obtained for the Lyapunov exponents computed from typical chaotic orbits. Likewise, we can compute the positive fraction $f(n)$ of transversal Lyapunov exponents for orbits with different periods, and Fig. 4(a) shows results in agreement with those obtained from typical orbits. By construction, the relative number of transversely unstable orbits is equal to the positive fraction $f(n)$ given by Eq. (20).

Let us denote by $\mu_p(j)$ the natural measure of a typical trajectory in the neighborhood of the j th period- p orbit. The measure $\mu_p(j)$ may be regarded as the probability that a typical chaotic trajectory in the attractor visits the neighborhood of the periodic orbit $\mathbf{x}_p(j)$. This probability becomes smaller as the more unstable the periodic orbit, such that orbits with large unstable eigenvalues have a comparatively smaller contribution to the natural measure.

The (atypical) natural measure associated with the j th period- p orbit is the normalized ratio [16]

$$\mu_p(j) = \frac{1/L_u[\mathbf{x}_p(j)]}{\sum_{\ell=1}^{N_p} \{1/L_u[\mathbf{x}_p(\ell)]\}}, \quad (22)$$

where L_u is the absolute value of the product of eigenvalues related to the unstable directions of \mathbf{DF}^p , computed for the orbit points $\mathbf{x}_p(j)$. The unstable direction along the invariant subspace has usually the greater eigenvalue. Summing up over all unstable period- p orbits embedded in the attractor (\mathbf{A} or \mathbf{B}) gives then its natural measure when the period goes to infinity [31],

$$\mu = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_j \mu_p(j). \quad (23)$$

It is possible to quantify the relative contribution of the period- p orbits to the natural measure of a chaotic attractor by defining the contrast measure [32],

$$C_p = |\mu_p^u - \mu_p^s|, \quad (24)$$

where

$$\mu_p^s = \sum_{i=1}^{N_p^s} \mu_p(i), \quad \mu_p^u = \sum_{i=1}^{N_p^u} \mu_p(i), \quad (25)$$

and $\mu_p(i)$ is given by Eq. (22). The contrast measure is depicted in Fig. 4(b) as a function of the parameter κ for orbits with three different periods. The results confirm those obtained with the help of finite-time Lyapunov exponents [Fig. 4(b)]: The system exhibits riddling (and intermingled basins) and unstable dimension variability for all values of κ .

V. SCALING LAWS FOR RIDDLE BASINS

In the preceding section we have used finite-time Lyapounov exponents and periodic-orbit theory to demonstrate the existence of intermingled basins for our dynamical system for all values of its control parameter κ . Since it is intended to be a model of an ecological experiment, we would be also interested to verify scaling relations characteristic of riddled basins, and that are more amenable to numerical analysis. Such scaling laws have been derived by Ott and co-workers and can be theoretically explained, at least within a specified parameter interval, by a stochastic model consisting of a biased random walk with reflecting barrier. The parameters of the latter model are drawn from the properties of the finite-time Lyapunov exponents that we have presented in the preceding section.

A. Fraction of basin areas in the neighborhood of an attractor

Let us consider the phase portrait of Fig. 1 showing the intermingled basins of the two attractors, focusing on a horizontal line at $y=y_0$, which is the distance to the attractor \mathbf{A} at I_0 . We evaluate the fraction of its length that belongs to the basin of the other attractor \mathbf{B} at I_1 . This fraction will be denoted $P_1(y_0)$, is the probability of a trajectory starting at a distance y_0 from the attractor at I_0 to belong to the basin of the attractor at I_1 .

If the basin of \mathbf{A} is riddled with tongues belonging to the basin of \mathbf{B} , there follows that for any distance y_0 , no matter

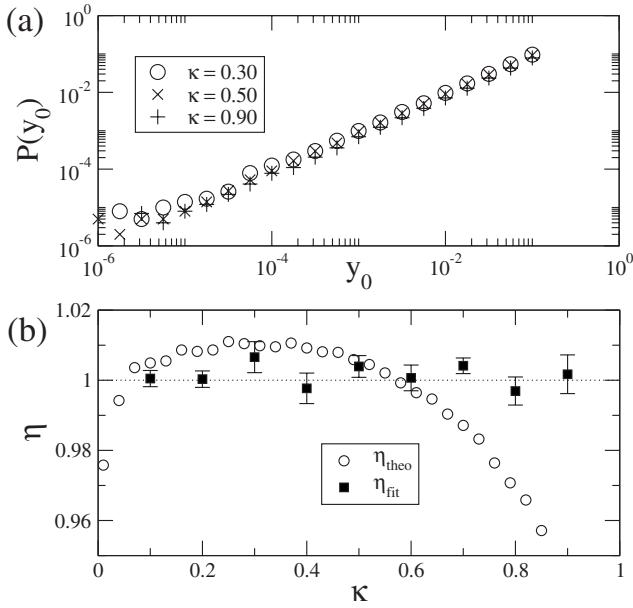


FIG. 5. (a) Fraction of points belonging to the basin of attractor B as a function of the distance to the attractor A, for different values of κ . (b) Variation of the scaling exponent with κ .

how small, there is always a nonzero value of $P_1(y_0)$. Since the pieces of the basin of B are anchored at the invariant manifold $y=0$, this fraction tends to zero as $y_0 \rightarrow 0$ (in the limit it is a Lebesgue measure zero set), and is expected to scale with y_0 as a power law,

$$P_1(y_0) \sim |y_0|^\eta, \quad (26)$$

where $\eta > 0$ is a characteristic scaling exponent. Our numerical results are shown in Fig. 5(a) for three different values of κ , confirming the validity of the scaling law (26) with an exponent $\eta \approx 1$. Figure 5(b) presents the variation of the numerically obtained scaling exponent with κ (filled squares).

The stochastic model of Refs. [10,17] predicts for this scaling exponent the following value [10,17]:

$$\eta = \frac{|\lambda_\perp|}{D}, \quad (27)$$

where D is the diffusion coefficient given by Eq. (19), which was obtained through the variance of the finite-time exponent fluctuations. Figure 5(b) shows that the values obtained from this stochastic model roughly agree with the numerical values but, even so, fails for large κ . The reason for this disagreement is that the stochastic model is expected to work better when the process approaches a random walk, where there are small correlations between the points. The random-walk limit is, strictly speaking, the blowout bifurcation point. The reason for this lies in the periodic-orbit theory: At the blowout point the infinite-time transverse Lyapunov exponent vanishes, meaning that the contribution of the transversely stable orbits embedded in the chaotic attractor counterbalances the contribution of the transversely unstable orbits. Hence, at the blowout point, an orbit in the vicinity of the chaotic attractor is subjected to an equal number of re-

pelling and attracting contribution from the unstable orbits, what is equivalent to a random walk in statistical terms (although the orbit points never cease to have some correlation). We stress that, although $\kappa=0$ is a blowout point, this does not configure a blowout bifurcation, since we have restricted κ to non-negative values.

On the other hand, we argue that the scaling exponent η is exactly equal to the unity, without invoking the stochastic model above. The argument lies on the symmetry of both attractors A and B with respect to their riddling properties, and holds only under these circumstances. Let y_i be the transversal distance to the attractor at I_i , $i=0, 1$, and $P_j(y_i)$ to be the probability of a trajectory, starting from a distance y_i from the attractor at I_i , to belong to the basin of the attractor at I_j , $j \neq i$. Since the distance between the attractors is equal to the unity, $y_0 = 1 - y_1$.

Now we use the fact that the basins are intermingled, and that there are no other basins in the system, in such a way that

$$P_1(y_0) + P_0(y_1) = P_1(y_0) + P_0(1 - y_0) = 1.$$

If we set $P_j(y_i) \sim y_i^\eta$, there follows that

$$y_0^\eta + (1 - y_0)^\eta = 1$$

has the only solution $\eta=1$ for arbitrary y_0 .

B. Uncertain fraction of the initial conditions

The scaling law (26) conveys information on the measure of the basins of both attractors, but not about how riddling does occur in arbitrarily fine scales [10]. In fact, the riddled basin of the chaotic attractor A is a fat fractal, i.e., a fractal set with positive Lebesgue measure, whose fine scale structure can be characterized by the so-called uncertainty exponent [33]. Let us consider again the line $y=y_0$ and choose randomly an initial condition on that line. We now choose randomly another initial condition with uniform probability within an interval of length 2δ and centered at the first initial condition. If both points belong to different basins, they can be referred to as δ uncertain.

The fraction of δ -uncertain points, denoted by $\langle p \rangle$, may be interpreted as the probability of making a mistake when attempting to predict which basin the initial condition is in, given a measurement uncertainty δ , and is expected to scale with the latter as

$$\langle p \rangle \sim \delta^\phi, \quad (28)$$

where $\phi \geq 0$ is the corresponding scaling exponent. We expect, from general grounds, that for riddled basins ϕ takes on typically small values. In the extreme case of $\phi=0$ the uncertain fraction becomes constant, so that no decrease in the uncertain fraction could be achieved regardless of any improvement in the accuracy with which the initial condition is determined. More commonly for riddled basins even a dramatic increase in the accuracy (e.g., many orders of magnitude) has a slight effect in reducing the final-state uncertainty.

Figure 6(a) depicts our numerical result for making the above numerical experiment for $y_0=0.50$ and different values

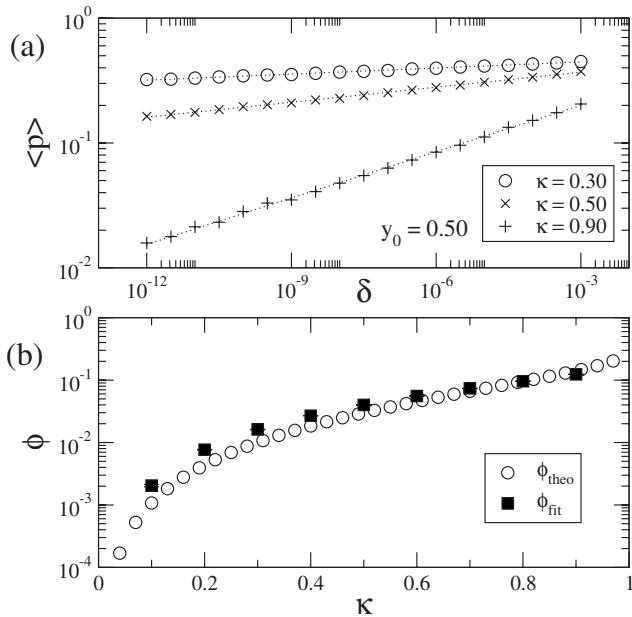


FIG. 6. (a) Fraction of δ -uncertain initial condition versus radius of uncertainty δ for different values of κ . (b) Variation of the scaling exponent with κ .

of κ , confirming the power-law nature of the scaling of $\langle p \rangle$ versus the uncertainty radius δ . The scaling exponent depends on the parameter κ , as shown in Fig. 6(b), and assumes values typically small, of the order of 10^{-2} or even less.

To show the consequences of having a so small value of ϕ , let us suppose, for example, that $\phi=10^{-2}$. If we managed to improve in such a large extent the accuracy with which the initial condition is determined that the uncertainty radius decrease by a factor of 100, the corresponding decrease in the uncertain fraction (or the probability of making a mistake) is only of

$$\frac{|\langle p' \rangle - \langle p \rangle|}{\langle p \rangle} \times 100 \% \approx 5 \% ,$$

in spite of the huge effort employed to improve the accuracy of the measure. This is particularly disappointing when considering the experiments on the populations of *Tribolium* mentioned in Sec. I.

The stochastic model of Ott *et al.* gives for this exponent the following expression in terms of the infinite-time Lyapunov exponents [10,17]:

$$\phi = \frac{\lambda_{\perp}^2}{4D\lambda_{\parallel}} . \quad (29)$$

The results predicted by this expression are compared in Fig. 6(b) with the numerical results, and the agreement is quite good for all values of κ .

VI. CONCLUSIONS

Intermingled basins, when occurring in a chaotic dynamical system, present many challenges for theoretical and ex-

perimental investigation. The extreme sensitivity to initial conditions make those systems highly susceptible to uncertainties of parameter and state determination. On the other hand, the rather stringent mathematical conditions necessary for the existence of intermingled basins (namely, the invariant manifold structure related to each coexisting attractor) limit the horizon of dynamical systems to be investigated. For example, coupled chaotic systems commonly present one such invariant manifold—the synchronization subspace. However, other invariant subspaces would require additional symmetry properties that not all coupled systems are able to exhibit.

One of the relatively few systems possessing these exceptional characteristics is the problem of competition of two species of *Tribolium* sp., for which the two attractors represent extinction of either species. We have analyzed one model belonging to a more general class proposed by Hofbauer and collaborators [6], for which intermingled basins are known to exist for a wide interval of parameters. Our aim was to develop a series of topological and metric characterizations of intermingled basins that may be used in other dynamical systems for which the existence of those basins is not clearly demonstrated. This applies, for example, to coupled circuits and other high-dimensional chaotic systems where intermingled basins have been suggested to occur [18].

Two approaches were used to characterize intermingled basins in the two-species competition model. First we investigated the mathematical conditions for intermingled basins through a topological and metric characterization of orbits in the coexisting attractors. We can use either typical chaotic orbits or atypical unstable periodic orbits embedded in the chaotic attractors. The methodology used in both cases is different: For typical orbits we rely on the properties of the transversal finite-time Lyapunov exponents, whereas atypical trajectories are treated using periodic-orbit analysis, which considers the contribution to the natural measure produced by unstable orbits of different periods. We expect that, if the period is large enough, the results of both procedures converge. We verified this concordance for the moments of the probability distribution function of the finite-time transversal Lyapunov exponent. Moreover, the contrast measure that compares the contribution of transversely stable and unstable periodic orbits reinforce the conclusions obtained with typical chaotic orbits.

A by-product of our analysis is that, besides riddling the *Tribolium* system also exhibits (for all values of the characteristic parameter κ) a strong form of nonhyperbolic behavior called unstable dimension variability, that means the coexistence (in the chaotic attractors) of periodic orbits with a different number of unstable directions. The presence of unstable dimension variability leads to unavoidable and severe problems of shadowability of chaotic trajectories. In particular, the shadowing time may be so small (when κ goes to zero) that individual chaotic trajectories may not be useful for making predictions, even in the short run, since one-step errors are uncontrollably amplified by the nonhyperbolic dynamics.

The application of the methodology just described, specially periodic-orbit analysis, requires some detailed knowl-

edge of the governing equations yielding the coexisting attractors. However, when only information on the basin structure is available, a better characterization of intermingled basins would be furnished by scaling laws. Two of them are considered in this paper: The fraction of the basin area of some attractor in the neighborhood of the other one, and the fraction of uncertain initial condition.

We used a general argument for proving that the first scaling exponent (relating the fraction of basin area) is equal to the unity, using only the symmetry properties of the system + we deal with. This result has been confirmed by our numerical experiments and also compared with the theoretical prediction of a stochastic model proposed by Ott and collaborators [17]. The latter agrees best with the exact result when the nonlinearity parameter κ approaches the value ($\kappa = 0$) for which the unstable dimension variability is the most intense. This can be explained by the nearly equal contribution of transversely stable and unstable orbits in this case. Since the transverse finite-time exponent quantify the average rate of shrinking (for stable) or expansion (for unstable) orbits, an approximately equal contribution of both kinds of orbits makes the statistical behavior of Lyapunov exponents more akin to a random walk, as assumed by the theoretical model of Ref. [17].

The second scaling law (uncertain fraction of initial condition) gives us the probability of making a wrong prediction

about the future behavior of the system, or to what attractor will the system asymptote to. Our numerical results point to a value near zero (more precisely a value between 10^{-3} and 10^{-1}), depending on the κ parameter, in good accordance with the statistical model of Ref. [17], especially in the $\kappa \rightarrow 0$ limit where the exponent vanishes rapidly. The smallness of the scaling exponent, in this case, indicates that even a big improvement in the accuracy of the initial condition has little effect on our ability to predict the eventual outcome of the system (i.e., what species will become extinct). This explains, at least from the formal point of view, why in laboratory experiments with *Tribolium*, the species to become extinct was observed to change very sensitively with the specification of initial conditions and environmental conditions. Similar observations could be made for similar dynamical systems of physical and biological interest which are thought to present intermingled basins.

ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by CNPq, CAPES, and Fundação Araucária (Brazilian government agencies). S.E.S.P. would like to acknowledge Dr. A. M. Saleh for presenting this problem to him.

-
- [1] T. Park, *Physiol. Zool.* **27**, 177 (1954).
 - [2] R. F. Costantino and R. A. Descharnais, *Population Dynamics and the Tribolium Model: Genetics and Demography* (Springer-Verlag, Berlin, 1991), Chap. 8.
 - [3] D. B. Mertz, D. A. Cawthon, and T. Park, *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **73**, 1368 (1976).
 - [4] M. Kimura, *Nature (London)* **217**, 624 (1968); M. Kimura, *The Neutral Theory of Molecular Evolution* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983).
 - [5] R. F. Costantino, J. M. Cushing, B. Dennis, and R. A. Desharnais, *Nature (London)* **375**, 227 (1995); R. F. Costantino, R. A. Desharnais, J. M. Cushing, and B. Dennis, *Science* **275**, 389 (1997).
 - [6] F. Hofbauer, J. Hofbauer, P. Raith, and T. Steinberger, *J. Math. Biol.* **49**, 293 (2004).
 - [7] I. Kan, *Bull., New Ser., Am. Math. Soc.* **31**, 68 (1994).
 - [8] J. C. Alexander, J. A. Yorke, Z. You, and I. Kan, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **2**, 795 (1992). For a recent review see J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán, *Rev. Mod. Phys.* (to be published).
 - [9] A. Pikovsky and P. Grassberger, *J. Phys. A* **24**, 4587 (1991).
 - [10] J. C. Sommerer and E. Ott, *Nature (London)* **365**, 138 (1993).
 - [11] P. Ashwin, J. Buescu, and I. Stewart, *Phys. Lett. A* **193**, 126 (1994).
 - [12] J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3528 (1994).
 - [13] B. Cazelles, *Chaos, Solitons Fractals* **12**, 301 (2001); *Phys. Rev. E* **64**, 032901 (2001).
 - [14] Y.-C. Lai and C. Grebogi, *Phys. Rev. E* **52**, R3313 (1995).
 - [15] Y. Nagai and Y.-C. Lai, *Phys. Rev. E* **56**, 4031 (1997).
 - [16] Y.-C. Lai and C. Grebogi, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **10**, 683 (2000).
 - [17] E. Ott, J. C. Sommerer, J. C. Alexander, I. Kan, and J. A. Yorke, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4134 (1993); E. Ott, J. C. Alexander, I. Kan, J. C. Sommerer, and J. A. Yorke, *Physica D* **76**, 384 (1994).
 - [18] T. Kapitaniak and L. O. Chua, *Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.* **6**, 357 (1996); T. Kapitaniak, L. O. Chua, and G. Q. Zhong, *Chaos, Solitons Fractals* **8**, 1517 (1997).
 - [19] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, and S. C. Venkataramani, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 55 (1996).
 - [20] E. J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, *Physica D* **109**, 81 (1997).
 - [21] R. F. Pereira, S. E. de S. Pinto, R. L. Viana, S. R. Lopes, and C. Grebogi, *Chaos* **17**, 023131 (2007).
 - [22] We used the diffusion approximation, that assumes independent and identically distributed innovations. However, since our definition of diffusion coefficient involves the variance of the population, represented by an infinite-time Lyapunov exponent. The probability distribution of time- n exponent takes samples of length n , the variance of population is n times the variance of the sample. Hence, the diffusion coefficient may also be regarded as characterizing the decrease with increasing time of the dispersion of finite-time estimates of the Lyapunov exponent [17].
 - [23] S. C. Venkataramani, B. R. Hunt, E. Ott, D. J. Gauthier, and J. C. Bienfang, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5361 (1996); S. C. Venkataramani, B. R. Hunt, and E. Ott, *Phys. Rev. E* **54**, 1346 (1996).
 - [24] R. L. Viana, S. E. de S. Pinto, and C. Grebogi, *Phys. Rev. E* **66**, 046213 (2002); R. L. Viana, S. E. de S. Pinto, J. R. R.

- Barbosa, and C. Grebogi, Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng. **13**, 3235 (2003).
- [25] T. Sauer, C. Grebogi, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **79**, 59 (1997).
- [26] Y.-C. Lai, C. Grebogi, and J. Kurths, Phys. Rev. E **59**, 2907 (1999); T. D. Sauer, *ibid.* **65**, 036220 (2002).
- [27] R. Abraham and S. Smale, Proc. Symp. Pure Math. **14**, 5 (1970).
- [28] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott, and W. P. Dayawansa, Physica D **58**, 165 (1992).
- [29] S. P. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer, and J. A. Yorke, Phys. Rev. Lett. **73**, 1927 (1994).
- [30] Y.-C. Lai, D. Lerner, K. Williams, and C. Grebogi, Phys. Rev. E **60**, 5445 (1999).
- [31] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Phys. Rev. A **36**, 3522 (1987); Phys. Rev. A **37**, 1711 (1988).
- [32] Y.-C. Lai, Phys. Rev. E **59**, R3807 (1999).
- [33] S. W. McDonald, C. Grebogi, and E. Ott, Physica D **17**, 125 (1985).

Referências Bibliográficas

- [1] J. C. Sommerer, The end of classical determinism, APL Tech. Dig. **16**, 333 (1995).
- [2] J. C. Alexander, J. A. Yorke, and Z. You, Riddled basins, International Journal of Bifurcation and Chaos , 795 (1992).
- [3] E. Ott, J. C. Sommerer, J. C. Alexander, I. Kan, and J. A. Yorke, Scalling behavior of chaotic systems with riddled basins, Phys. Rev. Lett. , 4134 (1993).
- [4] E. Ott, J. C. Alexander, I. Kan, J. C. Sommerer, and J. A. Yorke, The transition to chaotic attractors with riddled basins, Physica D , 384 (1994).
- [5] P. Ashwin, J. Buesco, and I. Stewart, From attractor to chaotic saddle: A tale of transverse instability, Nonlinearity **9**, 703 (1996).
- [6] P. Ashwin and M. Breakspear, Anisotropic properties of riddled basins, Physics Letters A **280**, 139 (2001).
- [7] P. Ashwin, X.-C. Fu, and J. R. Terry, Riddling and invariance for discontinuous maps preserving Lebesgue measure, Nonlinearity **15**, 633 (2002).
- [8] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. A. Yorke, and S. C. Venkataramani, Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems, Phys. Rev. Lett. **77**, 55 (1996).
- [9] T. Kapitaniak, Y. Maistrenko, A. Stefanski, and J. Brindley, Bifurcations from locally to globally riddled basins, Phys. Rev. E **57**, R6253 (1998).
- [10] H. L. Yang and A. S. Pikovsky, Bifurcations from locally to globally riddled basins, Riddling, bubbling, and Hopf bifurcation in coupled map systems **60**, 5474 (1999).
- [11] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, A., Popovich, and E. Mosekilde, Role of the Absorbing Area in Chaotic Synchronization, Phys. Rev. Lett. **80**, 1638 (1998).

- [12] M. Manscher, M. Nordahn, E. Mosekilde, and Y. L. Maistrenko, Riddled basins of attraction for synchronized type-I intermittency, *Physics Letters A* **238**, 358 (1998).
- [13] T. Kapitaniak and Y. L. Maistrenko, Chaos Synchronization and Riddled Basins in Two Coupled One-dimensional Maps, *Chaos, Solitons, & Fractals* **9**, 271 (1998).
- [14] T. Kapitaniak and Y. Maistrenko, Riddling bifurcations in coupled piecewise linear maps, *Physica D* **126**, 18 (1999).
- [15] Y. L. Maistrenko, V. L. Maistrenko, O. Popovych, and E. Mosekilde, Unfolding of the riddling bifurcation, *Physics Letters A* **262**, 355 (1999).
- [16] Y.-C. Lai, Catastrophe of riddling, *Phys. Rev. E* **62**, R4505 (2000).
- [17] Y.-C. Lai and C. Grebogi, Noise-Induced Riddling in Chaotic Systems, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5047 (1996).
- [18] Y.-C. Lai and C. Grebogi, Characterizing riddled fractal sets, *Phys. Rev. E* **53**, 1371 (1996).
- [19] M. Woltering and M. Markus, Riddled basins of coupled elastic arches, *Physics Letters A* **260**, 453 (1999).
- [20] J.-R. Chazottes and B. Fernandez, editors, *Riddled basins and coupled dynamical systems in Dynamics of Coupled Map Lattices and of Related Spatially Extended Systems*, volume 671, Springer Lecture Notes in Physics, 2005.
- [21] B. Cazelles, Dynamics with riddled basins of attraction in models of interacting populations, *Chaos, Solitons & Fractals* **12**, 301 (2001).
- [22] M. Woltering and M. Markus, Riddled basins in a model for the Belousov-Zhabotinsky reaction, *Chemical Physics Letters* **321**, 473 (2000).
- [23] H. Nakajima and Y. Ueda, Riddled basins of the optimal states in learning dynamical systems, *Physica D* **99**, 35 (1996).
- [24] S. Yousef, Y. Maistrenko, and S. Popovych, Complex dynamics in a simple model of interdependent open economies, *Discrete Dynamics in Nature and Society* **5**, 161 (2000).
- [25] J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora, Experimental and numerical evidence for riddled basins in coupled chaotic systems, *Phys. Rev. Lett.* , 3528 (1994).

- [26] L. Glass, Synchronization and rhythmic processes in physiology, *Nature* **410**, 277 (2001).
- [27] M. I. Rabinovich and H. D. I. Abarbanel, The role of chaos in neural systems, *Neuroscience* **87**, 5 (1998).
- [28] B. van der Pol and J. van der Mark, The heartbeat considered as a relaxation oscillator and an electrical model of the heart, *Philosophical Magazine* **6**, 763 (1928).
- [29] C. R. Katholi, F. Urthaler, J. M. Jr., and T. N. James, A mathematical model of automaticity in the sinus node and AV junction based on weakly coupled relaxation oscillators, *Comp. Biom. Res.* **10**, 529 (1977).
- [30] A. M. D. Santos, S. R. Lopes, and R. L. Viana, Rhythm synchronization and chaotic modulation of coupled Van der Pol oscillators in a model for the heartbeat, *Physica A* , 335 (2004).
- [31] L. Glass, Introduction to controversial topics in nonlinear science: Is the normal heart rate chaotic?, *Chaos* **19**, 028501 (2009).
- [32] N. Wessel, M. Riedl, and J. Kurths, Is the normal heart "chaotic" due to respiration?, *Chaos* **19**, 028508 (2009).
- [33] E. H. Hon and S. Lee, Electronic evaluations of the fetal heart rate patterns preceding fetal death, further observations, *Am. J. Obstet. Gynec.* **87**, 814 (1965).
- [34] D. J. Ewing, C. N. Martin, R. J. Young, and B. F. Clarke, The value of cardiovascular autonomic function tests: 10 years experience in diabetes, *Diabetic Care* **8**, 491 (1985).
- [35] T. Force, Guidelines - Heart rate variability, *European Heart Journal* **17**, 354 (1996).
- [36] M. M. Wolf, G. A. Varigos, D. Hunt, and J. G. Sloman, Sinus arrhythmia in acute myocardial infarction, *Med. J. Australia* **2**, 52 (1978).
- [37] J. S. Perkiomaki, T. H. Makikallio, and H. V. Huikuri, Fractal and complexity measures of heart rate variability, *Clinical and Experimental Hypertension* **27**, 149 (2005).
- [38] J. K. Kanters, M. V. Hojgaard, E. Agner, and N.-H. Holstein-Rathlou, Short- and long-term variations in non-linear dynamics of heart rate variability, *Cardiovascular Research* **31**, 400 (1996).

- [39] T. Neumann, H. Post, R. E. Ganz, M. K. Walz, A. Skyschally, R. Schulz, and G. Heusch, Linear and non-linear dynamics of heart rate variability in brain dead organ donors, *Zeitschrift für Kardiologie* **90**, 484 (2001).
- [40] C.-K. Peng, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series, *Chaos* **5**, 82 (1995).
- [41] N. Wessel, H. Malberg, R. Bauernschmitt, and J. Kurths, Nonlinear methods of cardiovascular physics and their clinical applicability, *International Journal of Bifurcation and Chaos* **17**, 3325 (2007).
- [42] P. Bernaola-Galván, P. C. Ivanov, L. A. N. Amaral, and H. E. Stanley, Scale invariance in the nonstationary of human heart rate, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 168105 (2001).
- [43] E. Ott, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, 2002.
- [44] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, Perseus Publishing Co., 1989.
- [45] K. T. Alligood, T. D. Sauer, and J. A. Yorke, *Chaos, an introduction to dynamical systems*, Springer-Verlag New York, 1996.
- [46] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Fractal basin boundaries, *Phys. D* , 125 (1985).
- [47] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, and J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Phys. D* , 285 (1985).
- [48] E. J. Kostelich, I. Kan, C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Unstable dimension variability: a source of nonhyperbolicity in chaotic systems, *Phys. D* **109**, 81 (1997).
- [49] J. Aguirre, R. L. Viana, and M. A. F. Sanjuán, Fractal structures in nonlinear dynamics, *Rev. Mod. Phys.* **81**, 333 (2009).
- [50] E. Ott and J. C. Sommerer, Blowout bifurcations: the occurrence of riddled basins and on-off intermittency, *Phys. Lett. A* **188**, 39 (1994).
- [51] H. L. Yang, One-side riddled basin below and beyond the blowout bifurcation, *Phys. Rev. E* **62**, R4509 (2000).

- [52] A. S. Pikovsky, Statistics of trajectory separation in noisy dynamical systems, *Physics Letters A* **165**, 33 (1992).
- [53] A. Pikovsky and P. Grassberger, Symmetry breaking bifurcation for coupled chaotic attractors, *Journal of Physics A* **24**, 4587 (1991).
- [54] T. Tomé and M. J. de Oliveira, *Dinâmica estocástica e irreversibilidade*, Edusp, 2001.
- [55] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, 1997.
- [56] F. Hofbauer, J. Hofbauer, P. Raith, and T. Steinberger, Intermingled basins in a two species systems, *J. Math. Biol.* **49**, 293 (2004).
- [57] I. Kan, Open sets of diffeomorphisms having two attractors, each with an everywhere dense basin, *Am. Math. Soc.* **31**, 68 (1994).
- [58] T. Park and M. Lloyd, Natural Selection and the Outcome of Competition, *The American Naturalist* **89**, 235 (1955).
- [59] T. Nowicki and D. Sands, Non-uniform hyperbolicity and universal bounds for S-unimodal maps, *Inventiones Mathematicae* **132**, 633 (1998).
- [60] V. Varlamov and A. Balogh, Forced nonlinear equations of elastic membranes, *Non. An. R. W. Appl.* **7**, 1005 (2006).
- [61] S. T. Thornton and J. B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*, Thomson, 2004.
- [62] J. H. Hubbard, The Forced Damped Pendulum: Chaos, Complication and Control, *The American Mathematical Monthly* **106**, 741–758 (1999).
- [63] C. Grebogi, E. Ott, and J. A. Yorke, Chaos, strange attractors, and fractal basin boundaries in nonlinear dynamics, *Science* , 632 (1987).
- [64] M. Galassi, J. Davies, J. Theiler, B. Gough, G. Jungman, P. Alken, M. Booth, and F. Rossi, *GNU Scientific Library Reference Manual*, Network Theory Ltd., 3rd edition, 2009.
- [65] T. D. Jr., Portal do Coração, <http://portaldocoracao.uol.com.br>.

- [66] A. L. Goldberger, L. A. N. Amaral, L. Glass, J. M. Hausdorff, P. C. Ivanov, R. G. Mark, J. E. Mietus, G. B. Moody, C.-K. Peng, and H. E. Stanley, PhysioBank, PhysioToolkit, and PhysioNet:Components of a New Research Resource for Complex Physiologic Signals, *Circulation* **101**(23), e215–e220 (2000 (June 13)), Circulation Electronic Pages: <http://circ.ahajournals.org/cgi/content/full/101/23/e215>.
- [67] N. Wessel, J. Kurths, W. Ditto, and R. Bauernschmitt, Introduction: cardiovascular physics, *Chaos* **17**, 015101 (2007).
- [68] H. Kantz, A robust method to estimate the maximal Lyapunov exponent of a time series, *Phys. Let. A* **185**, 77 (1994).
- [69] M. T. Rosenstein, J. J. Colins, and C. J. D. Luca, A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets, *Phys. D* **65**, 117 (1993).
- [70] S. Sato, M. Sano, and Y. Sawada, Practical methods of measuring the generalized dimension and the largest Lyapunov exponent in high dimensional chaotic systems, *Prog. Theor. Phys.* **61** (1987).
- [71] R. Hegger, H. Kantz, and T. Schreiber, Practical implementation of nonlinear times series methods: The TISEAN package, *Chaos* **9**, 413 (1999).
- [72] W. H. Press, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 1994.
- [73] W. H. Kruskal and W. A. Wallis, Use of ranks in one-criterion variance analysis, *Jour. Am. Stat. Assoc.* **47**, 583 (1952).