

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3973 ex. 1

O Modelo CP^{N-1} Não-Comutativo em $(2+1)D$.

Alexandre Guimarães Rodrigues.

Tese de Doutorado submetida
ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do título
de doutor em ciências.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes



COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Victor O. Rivelles (IFUSP)
Prof. Dr. Dionisio Bazeia (UFPB)
Prof. Dr. Fernando C. Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. Antônio José Accioly (IFT)

São Paulo
2003



Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação



del. 18/12/03

530.143

R696m

D

Ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Rodrigues, Alexandre Guimarães

O modelo C_p^{n-1} não-comutativo em $(2+1)D$.
São Paulo, 2004.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo O. C. Gomes
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teoria quântica de Campos; 2.
Teoria de Calibre; 3. Teoria não-comutativa

USP/IF/SBI-006/2004

ABSTRACT

In this thesis we investigate possible extensions of the (2+1) dimensional CP^{N-1} model to the noncommutative space. Up to the leading nontrivial order of $1/N$, we prove that the model restricted to the left fundamental representation is renormalizable and does not have dangerous infrared divergences. By contrast, if the principal field ϕ transforms in accord with the adjoint representation, linearly divergent, nonintegrable singularities are present in the two point function of the auxiliary gauge field and also in the leading correction to the self-energy of the ϕ field. It is showed that the inclusion of fermionic matter, minimally coupled to the gauge field, ameliorates this behavior by eliminating infrared divergences in the gauge sector at the leading $1/N$ order. Gauge invariance of the renormalization procedure is also discussed.

RESUMO

Nesta tese estudamos possíveis extensões do modelo CP^{N-1} em $(2 + 1)$ dimensões. Provamos que quando tomado na representação fundamental à esquerda ele é renormalizável e não possui divergências infravermelhas perigosas. O mesmo não ocorre se o campo principal ϕ pertence à representação adjunta. Divergências lineares não-integráveis surgem na função de dois pontos do campo de calibre e também ocorrem como correções dominantes na auto-energia do campo ϕ . Mostramos que a inclusão de férmions, minimamente acoplados ao campo de calibre, traz alguma melhoria no comportamento das divergências infravermelhas no setor de calibre em ordem dominante em $1/N$. Discutimos também a invariância de calibre no procedimento de renormalização.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes pela orientação, pela cobrança e pelo senso crítico apurado na escrita desta tese;
- À FAPESP pelo apoio financeiro;
- Ao grupo de TQC, em especial ao professor Adilson e ao Petrov pelas valiosas contribuições ao longo deste trabalho;
- Ao professor Dionisio Bazeia pelos questionamentos feitos com o objetivo de melhorar o trabalho;
- Ao meu amigo Edson Akira Asano por toda a amizade e lealdade, por toda a convivência, pela parceria no decorrer desta longa jornada, ajudando a “carregar o piano” mesmo nas horas mais difíceis;
- Ao Andrey e ao Cléber pelas consultas, pelo interesse na leitura da tese e pelos papos sempre motivantes;
- Ao Karlúcio (plou!) por toda a afinidade, pelos longos papos, pela garra sempre presente, motivando, clamando pela “Fúria Bicolor” que jamais abandona o guerreiro (e dá-lhe PAPÃO!) ;
- Ao grande Ivens (e aí, Zéé!!) pela sua tranquilidade musashiana contemplando a serenidade que quase nunca o abandona, pelas várias madrugadas em claro no IFUSP, pela gratificante e prestativa convivência (incluindo as incontáveis dicas de computador), enfim, por toda a nossa amizade;
- Ao grande Manoel (égua muleque! eu tô...) pelo ritmo alucinado nas madrugadas e pela grande companhia;
- Ao Reginaldo (vulgo Régis. não, não, não, muleque, esse é o cara!) pela grande companhia e pelo papo sempre alto nível;
- Ao caro Leônidas (grande Leoso Ta-ta-lí-ta-ta-los) pela amizade, pela sempre disposta companhia (incluindo os bons chopps) e por ser o “pai” do cara!;
- Ao grande Ruy (mas, sem detalhes!) pela presença marcante, pelas máximas que já viraram domínio público (já devia estar 1x0!), pela grande amizade, pelo apoio e testemunho ocular do momento mais difícil do doutorado;
- Ao Marcos Anacleto pela convivência e pela troca de idéias sempre tolerante e estimulante;
- Ao agora temporariamente “paulista”, Alan (e aí, garoto!), pela convivência e pelo senso de

humor ímpar que por si só já seria objeto de estudo para uma tese de doutorado;

- Àqueles que me acolheram na física em Sampa, aos amigos Sérgio Vizeu, Van Sérgio e Malacarne;

- À Silvana pelos papos de corredor e por toda a boa vontade de ter disponibilizado sua excelente tese para consulta;

- Aos meus amigos peruanos, em especial ao Alberto, à Sofia e à Angelita pela sua presença sempre leve e sorridente (oi Xandel:)). Um abraço também à minha amiga Zulmara;

- Aos colegas e amigos do departamento de Física-Matemática: Carlos, Fábio Cabral, Marcelo Pires, Fábio Paolini, Luiz Alejandro (ânimo, ânimo!), Saulo, Fernando, Arturo, Ronaldo, Marcelo Leite, José Clerinston, Ivan, João Eduardo e Wilson;

- Aos amigos de outros departamentos e aos que já migraram da fis-mat: Roberto Rivelino pela afinidade extrema em assuntos da mais alta relevância (cuja máxima por não poder ser aqui publicada não será jamais tucanada!), Rômulo, Paulo Valente, Cedric e Alex (a caneta mais rápida da fis-mat agora no IFT);

- Agradecimentos especiais ao pessoal da computação, sempre com boa vontade resolvendo todos os “pepinos e abacaxis” que apareciam no meu computador: João, Sybele, Sérgio e ao professor de Lyra;

- Agradecimentos às “meninas” da secretaria que com leveza e presteza ajudam e muito a tornar nosso ambiente mais saudável: Amélia, Simone, Beth e a professora Cida também;

- Aos meus amigos “espalhados pelos quatro cantos” na tentativa desse difícil projeto de ser físico, em especial: ao grupo “mineiro” McGlennon, Wallon, Moisés, Lúcia e Wilson. Ao Newtão, Marco Antônio, Wal, Cláudio, ...;

- Aos meus amigos de Belém, que por espaço não vou citar aqui, mas que com certeza estão na minha lembrança;

- Ao grupo PET (Física-UFPA) por ter me dado a primeira noção do que é ter uma atmosfera realmente estimulante;

- À Marta por toda a amizade e convivência nesses quase 7 anos de Sampa;

- À todos os meus amigos que direta ou indiretamente estiveram presentes nessa caminhada;

- Ao mestre Bassalo pela amizade, pelo estímulo e confiança em ter me ajudado nos meus primeiros passos na física;

- Agradeço a um amigo cuja a amizade prova não depender da distância. Agradeço enormemente a Breno Cesar de Oliveira Imbiriba (raiz, cara!!!) justamente por mostrar que as coisas importantes da vida não dependem nem do tempo e nem do espaço;

- Agradeço com muito amor, primordialmente à toda a minha família, muito em especial ao meu pai e à minha mãe pelo apoio contínuo, integral, incondicional recebido por mim em todo o instante desta jornada, de modo que de todo o meu coração ofereço a eles esse trabalho;

Dedico este trabalho aos meus pais: Maria Luiza e José.

In Memoriam,
Ao meu querido primo Andrey.

“Só sei que nada sei”.
Sócrates.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	O Modelo CP^{N-1} no Espaço Comutativo.	7
2.1	Leis de transformação e fases do sistema	7
2.2	Propagadores e regras de Feynman.	9
2.3	O grau de divergência superficial	11
2.4	Identities diagramáticas	14
3	Construção de Teorias no Espaço Não-Comutativo.	21
3.1	Operadores de Weyl	21
3.2	O produto estrela e suas propriedades	22
3.3	Exemplos de simetrização e anti-simetrização com o produto estrela	25
3.4	A mistura IV/UV	27
3.5	Simetrias de calibre	32
4	Representação Fundamental	35
4.1	Leis de transformação e invariância da ação.	35
4.2	Regras de Feynman	37
4.3	Grau de divergência superficial e a lagrangeana reparametrizada.	38
4.4	Análise das divergências infravermelhas	41
4.5	Análise das divergências ultravioletas	48
4.6	A invariância de calibre do procedimento de renormalização	52
5	Representação Adjunta	55
5.1	Leis de transformação e lagrangeana	55
5.2	Interações contendo o campo de calibre	56
5.3	Interações contendo o campo λ	57
5.3.1	Caso 1. $a = 0$	57

5.3.2	Caso 2. $a = -b$; $\lambda * [\phi, \phi^\dagger]_*$	58
5.4	Cálculo dos propagadores	58
5.5	Problemas de mistura	61
6	Comentários e Conclusões	64
A	Modelo Sigma Não-Linear	66
B	Tabela de Integrais e Cálculo das Contribuições Divergentes	70
C	O Método de BPHZ	76
	Referências Bibliográficas	77

Capítulo 1

Introdução

O interesse pela teoria quântica de campos em espaços não-comutativos teve um grande impulso na década de 90 por surgir como um certo limite de teorias de cordas na presença de campos de fundo anti-simétricos [1, 2]. Campos em espaços sem comutatividade também aparecem naturalmente na compactificação de teoria de matrizes [3].

A idéia de tratar as divergências ultravioletas postulando a existência de um comprimento mínimo a partir do qual nada poderia ser dito é antiga [4]. Este comprimento seria consequência da não comutatividade entre as coordenadas. Tal programa foi posto de lado em virtude das dificuldades inerentes de se lidar com teorias não locais e do grande sucesso obtido pelo procedimento de renormalização

A não-comutatividade é um conceito fundamental para expressar relações de incerteza em mecânica quântica. Na mecânica quântica usual a não-comutatividade aplica-se ao par de variáveis conjugadas, posição e momento. O espaço de fase deixa de ser contínuo e passa a ser discreto. Deste modo, passamos de um espaço de fase clássico para o quântico ao substituirmos as variáveis canônicas posição e momento, x^i e p^j , respectivamente, por operadores hermitianos \mathbf{x}^i e \mathbf{p}^j obedecendo a relação de comutação de Heisenberg $[\mathbf{x}^i, \mathbf{p}^j] = i\hbar\delta^{ij}$. A constante \hbar passa a definir a “área” mínima no espaço de fase, conhecida como célula de Planck. No limite de $\hbar \rightarrow 0$ retorna-se ao espaço clássico.

Um outro tipo de discretização pode ser aplicado sobre as coordenadas de posição, de modo a obedecerem uma relação de comutação do tipo

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \quad (1.1)$$

em que o parâmetro θ é um tensor anti-simétrico constante com dimensão de (comprimento)². As implicações desta relação em uma teoria física são muito profundas e por vezes surpreendentes. Há várias razões para abordá-las mas há também questões delicadas envolvidas. Um motivo para causar preocupação é que a não-comutatividade do espaço-tempo pode acarretar complicações à invariância de Lorentz e às noções usuais de causalidade quando coordenadas temporais estão envolvidas. Muito embora a relação (1.1) pudesse surgir por diversas considerações físicas (as quais descreveremos a seguir), foram os matemáticos que obtiveram a primazia de uma formulação clara de teorias de campo no espaço não-comutativo envolvendo campos de calibre [3].

Uma dessas considerações em que a não-comutatividade das coordenadas surge procede de um argumento heurístico muito interessante [5]. Ao aplicarmos o princípio de incerteza de Heisenberg à gravitação clássica, teríamos, ao precisarmos uma medida de coordenadas em distâncias muito

pequenas, uma indeterminação no momento perturbando o campo gravitacional nesta região. Temos, segundo a equação de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.2)$$

Uma leitura desta fórmula nos mostra que devido a uma indeterminação no momento, uma energia seria transmitida ao sistema por meio do tensor momento-energia. Isto por sua vez, afetaria o campo gravitacional. Mais claramente, uma medida de posição em uma região a no espaço gera uma indeterminação de ordem $1/a$ no espaço dos momentos. Temos então pela proporcionalidade entre o campo gravitacional e a indeterminação no espaço dos momentos, que, quanto maior a precisão da medida nas coordenadas maior a perturbação do campo gravitacional no ponto de medida. Na situação em que o campo for tão intenso de modo a impedir que a luz ou outros sinais escapem da região de medição a idéia de localização perde o sentido. Tal efeito surgiria em medidas na ordem da escala de Planck ¹. Embora heurístico, tal argumento reforça a suspeita de que uma teoria quântica da gravidade traria consigo a modificação da geometria na escala de Planck de modo a caminhar para uma descrição não-local.

Outra formulação física onde a não-comutatividade surge de maneira natural é obtida por meio de sistemas que contenham campos magnéticos fortes [6]. Em [6] estuda-se o caso de um fluido em presença de um campo magnético muito intenso. Neste caso a não-comutatividade reflete-se pelo fato das componentes da densidade de fluido carregado não mais comutar ². Das considerações iniciais envolvendo a não-comutatividade surgiram várias extrapolações conceituais tanto em mecânica quântica ³ como em teoria quântica de campos. Muitas dessas considerações levam inclusive a predições fenomenológicas em física de altas energias [8].

O estudo da não-comutatividade dentro de um contexto mais amplo revelou que teorias não-comutativas não são variações arbitrárias de teorias usuais de campo, mas sim uma classe de teorias cujas propriedades merecem ser estudadas dentro de uma investigação de auto-consistência. Dentro desse contexto situa-se o estudo desta tese ⁴. Estudamos a não-comutatividade dentro da abordagem da teoria de campos analisando as propriedades e as relações que os modelos guardam no espaço usual e no espaço não-comutativo. É de interesse descobrir que diferenças as teorias não-comutativas apresentam em relação às usuais, ou quais efeitos físicos são particulares à teorias não-comutativas. Atualmente percebe-se na literatura um grande interesse por essa linha de pesquisa (ver [9, 10] e referências lá contidas). Um esforço crucial nesse sentido é o de formular teorias não-comutativas que sejam bem definidas, uma vez que nestas, nem todos os problemas desaparecem quando provamos a renormalizabilidade na região ultravioleta. A não-comutatividade em tais teorias é inserida por meio de um produto especial no lugar do produto ordinário de campos. Este produto, também conhecido como produto Moyal, contém o parâmetro Θ , o qual mede o grau de intensidade da não-comutatividade. Ao invés então de se introduzir variáveis não-comutativas e consequentemente campos não-comutativos, trabalha-se com as coordenadas e funções usuais, mas tendo agora esse novo produto entre campos.

¹No que se refere à distâncias espaciais o comprimento é da ordem de 10^{-33} cm.

²Neste mesmo trabalho foi proposto que uma formulação não-comutativa da eletrodinâmica quântica implicaria em relações de dispersão pelas quais a velocidade da luz depende da direção de propagação relativa ao campo magnético externo.

³Para ver aplicações da não-comutatividade no contexto de mecânica quântica consulte [7] e referências lá contidas.

⁴Para cobrir as várias extensões matemáticas da geometria não-comutativas e também a sua relação com teorias de cordas ver artigos de revisão [9, 10] e referências lá contidas.

Uma das expectativas iniciais de teorias não-comutativas é o retorno às respectivas teorias comutativas quando se toma o limite $\Theta \rightarrow 0$ do parâmetro não-comutativo. Isto nem sempre ocorre devido a presença de novas divergências na região de baixos momentos. Em teorias comutativas sem campos com massa zero as divergências aparecem em grandes valores dos momentos de integração, podendo ser eliminadas, caso as teorias sejam renormalizáveis, por uma escolha adequada de um esquema de renormalização. Algumas dessas divergências não ocorrem em teorias não-comutativas devido a um fator de fase que oscila fortemente quando os momentos de integração tornam-se elevados, tornando deste modo as integrais finitas. Contudo, a dependência do parâmetro não-comutativo na região de baixos momentos externos manifesta-se por um comportamento não-analítico, tornando o limite $\Theta \rightarrow 0$ singular [11]. A divergência que aparece na região de baixos momentos (região de infravermelho) é geralmente de mesma ordem da divergência superficial ultravioleta da teoria comutativa. Esta interessante propriedade das teorias não-comutativas, conhecida como mistura infravermelho/ultravioleta (*IV/UV*), é consequência da não-localidade introduzida pelo produto especial. Por esta razão não basta para uma teoria não-comutativa ser renormalizável no ultravioleta para que seja bem definida. Divergências infravermelhas não-integráveis (lineares ou de ordem superior) destroem o esquema perturbativo tanto na expansão em termos da constante de acoplamento quanto no parâmetro $1/N$. Em geral teorias supersimétricas parecem apresentar um comportamento melhor no que diz respeito a essas misturas *IV/UV* uma vez que normalmente ocorrem cancelamentos das divergências mais altas entre bósons e férmions [12]. Um bom exemplo disso é o modelo sigma não-linear. Quando tomado no espaço não-comutativo é visto que divergências *IV* impossibilitam a expansão perturbativa, mas a correspondente versão supersimétrica mostra-se renormalizável [13, 14].

Como objeto de estudo desta tese, tratamos do modelo CP^{N-1} não-comutativo em dimensão $D = 3$. Tal modelo envolve interações com um campo de calibre que em nível clássico é um campo composto sem dinâmica própria. Entretanto na passagem para a teoria quântica de campos ocorrem fenômenos muito interessantes, tais como, geração dinâmica de massa e quebra espontânea de simetria. Além disso o campo de calibre passa a se propagar com uma dinâmica própria desenvolvida por correções radiativas.

O modelo CP^{N-1} comutativo surgiu como uma generalização do modelo sigma não-linear com simetria $O(N)$. Os modelos sigma linear e não-linear com simetria $O(4)$ foram introduzidos por Gell-Mann e Lévy (1960) em quatro dimensões [15] e tiveram um extenso uso no estudo fenomenológico da interação de núcleons e píons [16]. No modelo sigma linear a simetria quiral é realizada linearmente as expensas da introdução de um campo auxiliar, o campo sigma, o qual não está associado a nenhuma partícula conhecida. Para contornar essa dificuldade Gell-Mann e Lévy propuseram o modelo não-linear com os campos na representação fundamental de $O(4)$ satisfazendo o vínculo $\sum_{i=1}^4 \phi_i^\dagger \phi_i = 1$. Há na literatura numerosas aplicações do modelo sigma [16, 17, 18, 19, 20].

A partir da década de 70 os modelos sigma em duas dimensões despertaram grande interesse devido a semelhanças com teorias de Yang-Mills em 4D. Além da simetria de rotação em $O(N)$ o modelo exhibe uma “simetria dual” [21] a qual origina infinitas leis de conservação não-locais [22]. Essas leis de conservação restringem fortemente a dinâmica implicando que o modelo é integrável

⁵A partir de meados da década de 70 o vínculo $\phi^2 = cte$ ficou conhecido como condição quiral. A “quiralidade” do modelo provavelmente é associada ao grupo simetria original que o modelo continha, $O(4)$, o qual é homomorfo à $SU(2) \otimes SU(2)$, o conhecido grupo de quiralidade. A introdução do vínculo não-linear foi uma maneira de diminuir o número de geradores do grupo (e consequentemente o número de partículas observadas) mantendo a mesma característica de simetria do modelo, no caso, a invariância por rotação.

possuindo uma matriz S exata [20].

Embora possam ser derivados pela lagrangeana dos modelos sigma lineares no limite de acoplamentos fortes ⁶, os modelos sigma não-lineares possuem um comportamento bem peculiar no que diz respeito à renormalizabilidade. Contrariamente ao modelo linear, em $D = 4$ o modelo não-linear é não-renormalizável na expansão perturbativa em laços. O mesmo acontece em $D = 3$. A forma de tornar o modelo renormalizável nesta dimensão é utilizar a expansão $1/N$, ao invés de utilizar a constante de acoplamento como parâmetro perturbativo.

Em 1978 Aref'eva [23] demonstrou que a condição de quiralidade $\phi^2(x) = cte$ é satisfeita em nível quântico na expansão $1/N$ nas dimensões $D = 2$ e $D = 3$. Em $D = 4$ esta condição é violada. Em $D = 3$, entre os casos com grau de divergência maior ou igual a zero há, em princípio, diagramas associados a vértices efetivos que não estão presentes na lagrangeana original. Na linguagem de contratermos isto significa que as divergências não poderiam ser absorvidas por reparametrização das grandezas da lagrangeana original. Entretanto, o cancelamento entre divergências deste tipo ocorre por meio de identidades diagramáticas que correspondem ao vínculo clássico do modelo.

Eichenherr [24] introduziu em duas dimensões o modelo CP^{N-1} como uma das generalizações do modelo sigma não-linear para o caso em que o grupo de simetria é o $SU(N)$. Em [25] D'adda, Vecchia e Lüscher demonstraram que em duas dimensões as partículas fundamentais do modelo estariam confinadas por um potencial tipo Coulomb. Em [26] os mesmos autores estudaram a física de baixas energias de férmions acoplados minimamente ao CP^{N-1} ainda em duas dimensões. Em 1980 foi demonstrado que as identidades diagramáticas permanecem no modelo CP^{N-1} [27] e a sua renormalizabilidade na expansão $1/N$ também foi demonstrada utilizando o procedimento de renormalização de BPHZL [28]. Em $D = 2$ pelo fato do campo básico ter dimensão zero, a princípio, qualquer função de Green com linhas externas do campo básico apresentariam divergências ultravioletas, o que tornaria o modelo não-renormalizável. Além disso, em duas dimensões subsistem divergências infravermelhas perigosas. Entretanto quando considerados apenas o setor dos objetos locais invariantes de calibre estas divergências se cancelam [29].

No espaço não-comutativo a simetria de calibre produz estruturas adicionais em relação ao caso comutativo, uma vez que mesmo o grupo de simetria abeliana $U(1)$ possui no espaço não-comutativo três representações distintas em contrapartida à única maneira realizável no caso comutativo. Por esta razão, nesta tese, consideramos o modelo CP^{N-1} separadamente em duas representações pelas quais os campos básicos se transformam. São estas a representação fundamental à esquerda (similar à representação fundamental à direita) e a representação adjunta do grupo de calibre.

Na representação fundamental do modelo CP^{N-1} levamos os cálculos até a *ordem dominante na expansão* $1/N$, definida como a primeira não-trivial apresentada. Na formulação não-comutativa os gráficos são rearranjados nas classes planar e não-planar e isso modifica propriedades válidas na construção comutativa usual. Uma das consequências deste fato é que no contexto não-comutativo a conjugação de carga não é em geral uma simetria e o Teorema de Furry deixa de ser válido. Apesar disso, o modelo nesta representação mantém a propriedade de renormalizabilidade após a primeira ordem não-trivial em $1/N$ e conserva-se livre de divergências infravermelhas perigosas.

No que diz respeito à representação adjunta as dificuldades aparecem em ordem dominante

⁶Na verdade faz-se $\mu^2 \rightarrow \infty$ (parâmetro associado à massa) e $\lambda \rightarrow \infty$ (parâmetro do acoplamento quártico) com o limite μ^2/λ sendo fixo [17].

por meio de singularidades no infravermelho. Correções de alto-energia do campo principal ϕ apresentam divergências quadráticas no infravermelho que levadas em conta em ordens mais altas destroem a expansão $1/N$. Divergências adicionais surgem também no setor de calibre do modelo. Estas divergências resultam dos novos ordenamentos provocados pela lei de transformação do grupo de calibre. Estes ordenamentos produzem novas interações que modificam os vértices da teoria, e desta forma, ocasionam o surgimento da não-comutatividade de um modo não-trivial já em gráficos de ordem mais baixa. As novas expressões analíticas para os vértices também invalidam as identidades diagramáticas que são decorrentes do campo auxiliar que introduz o vínculo não-linear do modelo. Em todo o decorrer deste trabalho fizemos a opção por um propagador de calibre transversal também conhecido como calibre de Landau.

A apresentação desta tese segue o seguinte roteiro. No capítulo 2 fazemos uma apresentação de algumas propriedades do modelo sigma não-linear. Iniciamos o capítulo fazendo um rápido apanhado sobre a origem do modelo e em seguida apresentamos a generalização da simetria original para o caso em que os campos estão conectados por uma simetria de calibre de segunda espécie, da qual resulta o modelo CP^{N-1} . Seguimos na apresentação do modelo discutindo a questão da geração dinâmica de massa implicada pela quebra espontânea de simetria e apresentando o comportamento dos propagadores. Como pré-requisito à discussão do procedimento de expansão em $1/N$, deduzimos o grau de divergência superficial $d(\gamma)$ e examinamos a ordem em potências de $1/N$ que cada contribuição com $d(\gamma) \geq 0$ possui. Finalizamos o capítulo discutindo o uso das identidades diagramáticas no procedimento de renormalização.

Iniciamos o capítulo 3 apresentando o procedimento de Weyl para obtermos a quantização de campos no espaço tempo usual em termos de objetos definidos no espaço não-comutativo. Após definido este mapa apresentamos o produto estrela entre campos, o qual nada mais é do que uma deformação do produto usual onde a não-comutatividade é levada em conta. Mostramos como as propriedades de derivação e integração são dadas nesta construção. Em seguida expomos alguns exemplos de simetrização e anti-simetrização com o produto estrela para em seguida exemplificarmos o efeito de mistura IV/UV em um caso simples do modelo $\lambda\phi^4$ não-comutativo. Encerramos o capítulo definindo as propriedades necessárias para implementar uma teoria de calibre no espaço não-comutativo.

Uma vez definidos esses requisitos iniciamos o capítulo 4 definindo as possíveis leis de transformação para o modelo CP^{N-1} não-comutativo. Procedemos neste capítulo com uma análise detalhada do modelo sujeito à representação fundamental para o campo principal, examinando tanto os casos de divergência ultravioleta quanto os de divergência infravermelha.

No capítulo 5 o estudo é estendido às funções de Green na situação em que os campos básicos pertencem à representação adjunta. Nesta situação analisamos as consequências de o modelo ter nesta representação mais de um parâmetro para mediar a interação do campo básico com o campo λ que implementa o vínculo no modelo. Esta liberdade de escolha afeta as propriedades dos propagadores efetivos do modelo.

No capítulo 6 apresentamos as conclusões e perspectivas do nosso trabalho. Nos apêndices mostramos algumas propriedades do modelo sigma não-linear e listamos algumas integrais úteis aos cálculos apresentados na tese. No decorrer desta tese consideraremos que a não-comutatividade afeta somente as coordenadas espaciais a fim de evitarmos problemas com a unitariedade e/ou causalidade.

Os principais resultados deste trabalho encontram-se na referência [30]. Nas referências [31, 32]

estão algumas extensões do estudo desta tese⁷.

⁷O assunto tratado na referência [32], o estudo do modelo CP^{N-1} com a inclusão de férmions acoplado minimalmente com o campo de calibre e também a análise do modelo na versão supersimétrica, é referente à tese de doutorado de outro estudante do grupo (E. A. Asano).

Capítulo 2

O Modelo CP^{N-1} no Espaço Comutativo.

2.1 Leis de transformação e fases do sistema

O modelo CP^{N-1} é uma generalização do modelo sigma não linear para o caso em que o campo possui uma simetria no espaço projetivo complexo, sujeito a condição de vínculo

$$\sum_{i=1}^N \phi_i^\dagger \phi_i = \frac{N}{2g}, \quad (2.1)$$

sendo que os pontos do espaço estão conectados por uma simetria de calibre de segunda espécie, ou seja,

$$\phi_i(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \phi_i(x), \quad (2.2)$$

e

$$\phi_i^\dagger(x) \rightarrow e^{-i\alpha(x)} \phi_i^\dagger(x). \quad (2.3)$$

Introduzimos o vínculo na lagrangeana via um campo auxiliar λ , o qual faz o papel de multiplicador de Lagrange. A simetria local $U(1)$ é implementada pelo campo de calibre $A_\mu(x)$ e deste modo passamos da derivada ordinária para a derivada covariante. Com isso a lagrangeana do modelo CP^{N-1} é então dada por ¹

$$\mathcal{L} = \bar{D}_\mu \phi^\dagger D^\mu \phi - \lambda \left(\phi^\dagger \phi - \frac{N}{2g} \right) - m^2 \phi^\dagger \phi, \quad (2.4)$$

sendo a massa m escolhida tal que $\langle \lambda \rangle = 0$ e as derivadas covariantes são dadas por

$$\bar{D}_\mu \phi^\dagger = \partial_\mu \phi^\dagger - i A_\mu \phi^\dagger ; \quad D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + i A_\mu \phi. \quad (2.5)$$

¹Os índices de soma do campo ϕ serão omitidos por simplicidade.

Com isso obtemos a seguinte lagrangeana ²,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi - i \phi^\dagger A_\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \phi - \lambda \phi^\dagger \phi + \lambda \frac{N}{g}. \quad (2.6)$$

Alguns comentários devem ser feitos sobre o problema de geração de massa no modelo. Por meio de uma escolha do valor do campo que minimiza a ação (valor esperado no vácuo do campo), altera-se a função de um ponto dos mesmos e isto afeta a equação de “gap”. As substituições a serem feitas na lagrangeana são as seguintes: $\phi_i \rightarrow \phi_i + v_i$ e $\phi_i^\dagger \rightarrow \phi_i^\dagger + v_i^\dagger$ para os campos de matéria. A translação $\lambda \rightarrow \lambda + \lambda_0$ em que $\lambda_0 = m^2$ já foi feita em (2.4) ³. Devido a essas alterações os “novos” campos passam a ter valor esperado no vácuo igual a zero.

Fazendo na equação (2.6) as alterações mencionadas, obtemos que os seguintes termos contribuirão para as funções de um ponto dos campos λ e ϕ

$$\mathcal{L}_\lambda = -\lambda \phi^\dagger \phi + \lambda \frac{N}{g} + \lambda |v_i|^2 \quad (2.7)$$

$$\mathcal{L}_\phi = m^2 (v_i \phi_i^\dagger + v_i^\dagger \phi_i). \quad (2.8)$$

Pelas condições já impostas, temos então

$$\langle \lambda \rangle = 0 \quad \implies \quad \frac{N}{g} - N \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{i}{k^2 - m^2} + |v_i|^2 = 0, \quad (2.9)$$

$$\langle \phi \rangle = 0 \quad \implies \quad m^2 v_i = 0. \quad (2.10)$$

Da última equação, notamos as duas fases que o modelo apresenta⁴, sendo $m^2 \neq 0$ e $v_i = 0$, ou $m^2 = 0$ e $v_i \neq 0$. Ficaremos com a fase massiva, em que $m^2 \neq 0$.

Da lagrangeana (2.6) tiramos as regras de Feynman mostradas na figura 2.1. Nos vértices mostrados, a linha ondulada representa o propagador do campo de calibre em ordem dominante, a linha cheia o propagador do campo ϕ e a linha tracejada o propagador do campo λ que implementa o vínculo do modelo. Conservando as convenções para as linhas e os fluxos de momentos nos vértices, a figura 2.1 será válida tanto para o caso comutativo (capítulo 2) como para o estudo do caso não comutativo (capítulos 4 e 5).

Obtemos as seguintes regras de Feynman para os vértices de interação

$$\text{vértice} \quad \phi^\dagger A_\mu \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \phi \quad \Leftrightarrow \quad -(2k + p)_\mu \quad (2.11)$$

$$\text{vértice} \quad g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu \phi^\dagger \phi \quad \Leftrightarrow \quad i g_{\mu\nu} \quad (2.12)$$

$$\text{vértice} \quad \lambda \phi^\dagger \phi \quad \Leftrightarrow \quad i \quad (2.13)$$

²O símbolo $\overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu$ definido em (2.6) representa a operação de derivação atuando nos campos ϕ (à direita do operador) e ϕ^\dagger (à esquerda). Quando atua sobre o campo à direita é a derivada usual, enquanto que na derivação em sentido contrário é posto um sinal negativo na frente do campo a ser derivado.

³Este é o conhecido mecanismo de geração de massa para os campos principais.

⁴Na verdade há uma terceira possibilidade, em que $m^2 = 0$ e $v_i = 0$, a qual não apresenta nenhum aspecto interessante.

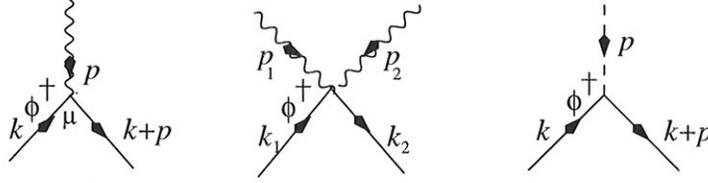


Figura 2.1: Vértices de interação associadas ao modelo CP^{N-1} .

As regras de Feynman para os vértices de interação já levam em conta o fator i que multiplica a lagrangeana de interação na fórmula de Gell-Mann-Low. O termo $i \int d^3x \mathcal{L}_{int}$ é o argumento da exponencial na citada fórmula (ver (2.14)). No lado direito da expressão (2.11) estamos considerando somente o índice de Lorentz associado ao vértice. Ou seja, o índice que falta no lado direito é o que campo de calibre utiliza para fazer a contração com o campo externo de modo que o resultado final da interação trilinear é um escalar. A mesma observação é válida para a interação quadrilinear. Ainda a respeito desse vértice, ressaltamos que o fator de simetria (no caso, as possibilidades de contração com dois campos de calibre) necessita ser posto a mão. De acordo com a figura 2.1 vemos ainda que o fluxo de momento está em sentido contrário ao fluxo de carga ($\phi^\dagger \rightarrow \phi$).

2.2 Propagadores e regras de Feynman.

Para obtermos as funções de Green completas precisamos determinar os propagadores livres e os vértices de interação. O produto ordenado de campos em interação é o objeto de interesse na teoria quântica de campos. Ele é dado pela fórmula de Gell-Mann-Low a qual será frequentemente utilizada neste trabalho.

$$\langle 0|T\varphi(x_1)\dots\varphi(x_N)|0\rangle = \frac{\langle 0|T\varphi_0(x_1)\dots\varphi_0(x_N)e^{i\int d^3x\mathcal{L}_{int}(\varphi_0)}|0\rangle}{\langle 0|Te^{i\int d^3x\mathcal{L}_{int}(\varphi_0)}|0\rangle}. \quad (2.14)$$

Destarte, listamos a seguir os propagadores livres. Para o campo ϕ temos

$$\Delta_{ij}(p) = \frac{i\delta_{ij}}{p^2 - m^2} \equiv \delta_{ij}\Delta(p). \quad (2.15)$$

Do quinto termo da lagrangeana (2.6), vemos que a função própria do campo λ (ver figura 2.2a, pg 11) é dada por

$$F_\lambda(p) = NI(p), \quad (2.16)$$

sendo ⁵ (ver referência [34])

$$I(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} = \frac{i}{8\pi} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{m^2 - p^2x + p^2x^2}} \quad (2.17)$$

⁵Uma análise de valor principal na integral paramétrica revela que o resultado final em (2.17) é válido em ambas as situações; $p^2 > 0$ e $p^2 < 0$. Na primeira, a validade é restrita ao domínio de $p^2 < 4m^2$.

Assim sendo, a função própria do campo λ para momentos grandes corresponde à

$$F_\lambda(p) \approx \frac{iN}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \left(\pi - \frac{4m}{\sqrt{-p^2}} \right) \quad (2.18)$$

A aproximação feita em (2.18) refere-se ao comportamento da função $\text{arctg}(x^2)$ para $x^2 \gg 1$.

A relação entre a função própria e o propagador é dada por ⁶

$$\Delta_\lambda(p) = -1/F_\lambda(p) = -\frac{1}{N} \frac{1}{I(p)} \quad (2.19)$$

Analisando o conjunto de fórmulas (2.16)-(2.19) conclui-se que o propagador do campo auxiliar λ não possui pólo. Assim sendo, não é possível atribuir um caráter de partícula ao campo λ . Graficamente, a menos de um importante sinal negativo, vemos que o propagador deste campo é dado pelo inverso da bolha bosônica (ver figura 2.2a). Esta propriedade pode ser vista como uma manifestação do vínculo em nível quântico e desempenha um papel muito importante na renormalizabilidade do modelo mediante aplicações de identidades diagramáticas como será mostrado em breve.

A expansão da função (2.17) fornece para o propagador $\Delta_\lambda(p)$ o seguinte comportamento assintótico na região $p^2 \gg m^2$

$$\Delta_\lambda(p) \approx \frac{8i\sqrt{-p^2}}{N} \left(1 + \frac{4m}{\pi} \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \right), \quad (2.20)$$

Para a função própria do campo de calibre, temos a contribuição do gráfico com dois vértices trilinares proveniente do quarto termo em (2.6) e do gráfico com um vértice quadrilinear, oriundo do terceiro termo em (2.6) (Ver figura 2.2b).

A expressão analítica correspondente aos gráficos da Figura 2.2b, é dada por

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^A(p) &= N \left[\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(2k+p)_\mu(2k+p)_\nu}{(k^2-m^2)[(k+p)^2-m^2]} - 2g_{\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2-m^2} \right] \\ &= N \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{(2k+p)_\mu(2k+p)_\nu - 2g_{\mu\nu}[(k+p)^2-m^2]}{(k^2-m^2)[(k+p)^2-m^2]} \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Utilizando o truque de Feynman para reescrever a integral com um único denominador e efetuando a mudança de variável implicada por esta ⁷, obtemos

$$F_{\mu\nu}^A(p) = N \int_0^1 dx \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - M^2]^2} \{ 4k_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu (2x-1)^2 - 2g_{\mu\nu} [k^2 + p^2(x-1)^2 - m^2] \}, \quad (2.22)$$

em que

$$M^2 = m^2 - p^2 x(1-x). \quad (2.23)$$

⁶Embora (2.19) esteja particularizada para o campo λ esta é válida para qualquer função própria de dois pontos em que ambas as linhas amputadas pertençam ao mesmo campo.

⁷ $k \rightarrow k - px$, de modo que as integrações lineares em k feitas em todo o espaço mostram-se ímpares e portanto não contribuem.

Após algumas manipulações, chegamos a,

$$F_{\mu\nu}^A(p) = -N \frac{i}{8\pi} (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) F(p). \quad (2.24)$$

sendo $F(p) = \int_0^1 dx \frac{(1-2x)^2}{[m^2 - p^2 x(1-x)]^{1/2}}$.

Em (2.24) há um zero da função própria do campo de calibre para $p = 0$. Temos então que o propagador do campo apresenta um pólo neste ponto. Do ponto de vista do espaço de coordenadas, o propagador apresenta um comportamento divergente para longas distâncias.

Invertendo (2.24) obtemos a expressão do propagador do campo de calibre como sendo

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = -\frac{8\pi i}{N} (g^{\mu\nu} p^2 - p^\mu p^\nu) \frac{1}{p^4 F(p)}. \quad (2.25)$$

Como sabemos, para efetuar a inversão de um termo transversal tal qual (2.24) é necessário a adição de um termo de fixação de calibre na forma $\frac{-1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu)^2$. O resultado em (2.25) é referente à uma escolha em que $\alpha = 0$ conhecida como calibre de Landau. Esta escolha mantém a transversalidade do propagador e mostrará ser útil para os nossos cálculos. Na região de altos momentos, o propagador do campo de calibre comporta-se como

$$\Delta^{\mu\nu}(p) \approx -\frac{16i}{N} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{-p^2}} - \frac{4m}{\pi p^2} \right) \quad (2.26)$$

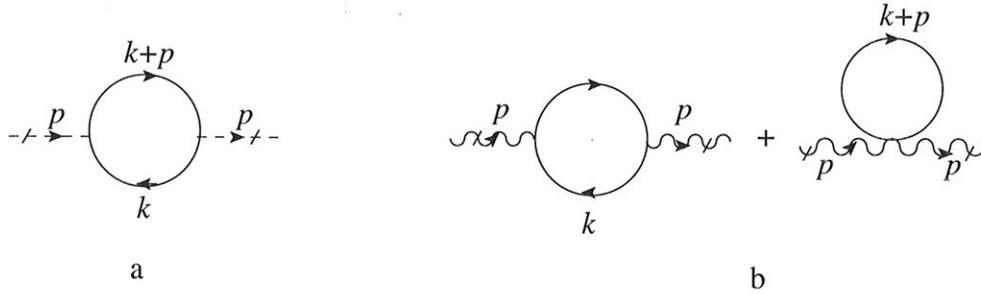


Figura 2.2: Diagramas contribuindo para as funções próprias dos campos λ e A_μ .

2.3 O grau de divergência superficial

O grau de divergência superficial de uma teoria é determinado pelo comportamento que as integrais de Feynman no espaço dos momentos apresentam na região de momentos altos. Se as potências dos momentos de integração no numerador superam ou igualam-se à essas potências no denominador, a integral é dita divergente⁸. Caso contrário é dita convergente. Esse comportamento foi enunciado de forma precisa por Weinberg [33]:

⁸Caso $d(\gamma)$ seja igual a zero, a integral apresenta uma divergência logarítmica, se $d(\gamma) = 1$ a integral diverge linearmente, caso $d(\gamma)$ seja igual a dois, a integral diverge quadraticamente, e assim por diante.

“Uma integral converge superficialmente se o grau de divergência é $d(\gamma) < 0$. Se nenhuma sub-integral diverge, então a integral converge absolutamente.”

O $d(\gamma)$ é então determinado por:

$$d(\gamma) = [\text{soma de potências de } k \text{ no numerador}] - [\text{soma das potências de } k \text{ no denominador}] \quad (2.27)$$

em que $k = \{k_1, \dots, k_L\}$ são os momentos de integração. Esta contagem de potências é definida pelo comportamento que as integrais possuem na região de momentos altos (também conhecido como comportamento assintótico, obtido em $k \rightarrow \infty$).

Em uma teoria renormalizável este número $d(\gamma)$ só depende do número de linhas externas do diagrama e independe da topologia interna do mesmo. Este número parte de uma relação bem determinada entre o número de laços, L , o número de linhas internas, n_i , e o número de vértices, V , válida para qualquer diagrama ⁹.

$$L = n_i - V + 1 \quad (2.28)$$

Precisamos das expressões dos propagadores para determinarmos as contribuições ao integrando. Em $D = 3$ o elemento de integração fornece três potências de k ao numerador. De acordo com as expressões (2.15), (2.20) e (2.25), temos para os campos ϕ , λ e A_μ , respectivamente, os seguintes comportamentos assintóticos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta(k) \approx \frac{1}{k^2} \quad (2.29)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_\lambda(k) \approx \sqrt{k^2} \quad (2.30)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta_{\mu\nu}(k) \approx \frac{1}{\sqrt{k^2}} \quad (2.31)$$

De posse disso, e de acordo com a definição de (2.27), temos as seguintes contribuições: L integrais em d^3k : $+3L$

n_ϕ propagadores do tipo $\Delta(k)$: $-2n_\phi$

n_λ propagadores do tipo Δ_λ : $+n_\lambda$

n_A propagadores do tipo $\Delta_{\mu\nu}$: $-n_A$.

V_A vértices derivativos ¹⁰ do tipo $A_\mu \phi^\dagger \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi$: $+V_A$.

Obtemos então

$$d(\gamma) = 3L + V_A - 2n_\phi - n_A + n_\lambda \quad (2.32)$$

Substituindo a expressão (2.28) em (2.32),

$$d(\gamma) = 3 - 3V + V_A + n_\phi + 4n_\lambda + 2n_A, \quad (2.33)$$

sendo V a soma de todos os tipos de vértice existentes em γ . Designamos, respectivamente, por V_λ , V_A e V_{A^2} os vértices associados ao campo auxiliar λ e os trilineares e quadrilineares associados ao

⁹Essa fórmula é análoga à relação de Euler que estabelece a conexão entre o número de faces em que se divide um polígono (L), com o número de arestas (n_i) e o número de vértices correspondentes (V).

¹⁰Vértices derivativos devem entrar explicitamente na contribuição do fator $d(\gamma)$ pois fornecem potências de momento no numerador.

campo de calibre. Para fixar o grau de divergência precisamos determinar quantas linhas chegam nos vértices. O campo λ só participa do vértice V_λ . A linha externa, designada por N_λ é contada somente uma vez, enquanto que a linha interna por estar entre dois vértices é contada duas vezes. Assim, temos

$$N_\lambda + 2n_\lambda = V_\lambda. \quad (2.34)$$

As linhas do campo de calibre podem contribuir tanto para o vértice trilinear quanto para o quadrilinear, e, uma vez que em um gráfico pode haver os dois vértices, tal contribuição deve ser levada em conta em uma única fórmula. A expressão correta é

$$N_A + 2n_A = V_A + 2V_{A^2} \quad (2.35)$$

Como pode ser verificado por inspeção, as linhas do campo ϕ contribuem igualmente para todos os vértices

$$N_\phi + 2n_\phi = 2V_\lambda + 2V_A + 2V_{A^2} \quad (2.36)$$

Manipulando o sistema (2.34)-(2.36), tiramos que

$$-3V + V_A = -\frac{N_\phi}{2} - 2N_\lambda - N_A - n_\phi - 2n_A - 4n_\lambda. \quad (2.37)$$

Substituindo esse resultado em (2.33), obtemos finalmente

$$d(\gamma) = 3 - \frac{N_\phi}{2} - 2N_\lambda - N_A. \quad (2.38)$$

Uma vez determinada pelo grau de divergência superficial do modelo todas as contribuições divergentes, a chamada *ordem dominante na expansão* $1/N$ é definida como a primeira não trivial apresentada pelo modelo. No estudo das divergências devemos examinar as correções aos vértices contidos na teoria original, além de considerarmos as estruturas divergentes que por acaso não tenham uma contrapartida na lagrangeana inicial. Neste última situação, a presença de divergências deste tipo indicariam que a teoria é não renormalizável. No conjunto das funções de Green com grau de divergência superficial $d(\gamma) \geq 0$, há contribuições dominantes com potências distintas em $1/N$ conforme mostrado na tabela 2.1¹¹. Por exemplo, as divergências dominantes da função de dois pontos do campo ϕ em $D = 3$ são de ordem $1/N$ enquanto que as da função de quatro pontos são de ordem $1/N^2$, e para a função de seis pontos temos gráficos de $\mathcal{O}(1/N^4)$. A construção que usamos leva em conta todas as divergências envolvidas. A chamada ordem subdominante envolve correções à funções de vértice tratadas previamente.

Entre as divergências citadas, temos contribuições das funções com quatro linhas externas e seis linhas externas do campo ϕ , ou seja $N_\phi = 4$ e $N_\phi = 6$, respectivamente. Tais divergências não tem contrapartida na lagrangeana original. O tratamento das divergências que aparecem no modelo, incluindo as citadas, utiliza o conteúdo das figuras 2.4a e 2.4b, as quais são uma manifestação da identidade diagramática 2.3. Tanto em 2.4a quanto em 2.4b, temos como condição para a igualdade que o propagador do campo λ seja o inverso negativo da “bolha”.

¹¹Na tabela 2.1 estão excetuadas as divergências associadas à funções de um ponto, ou seja, gráficos de “tadpole”.

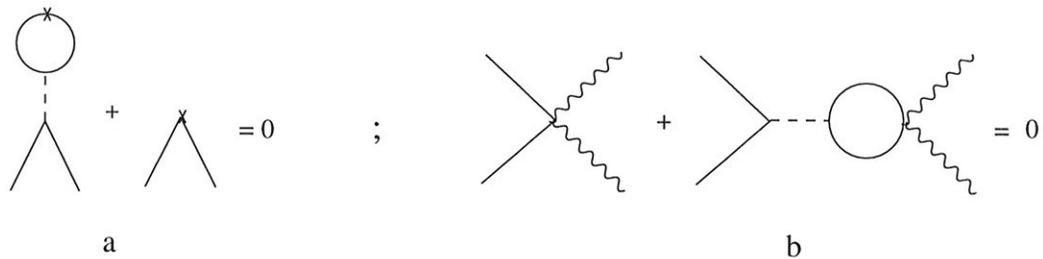


Figura 2.4: Identidades Diagramáticas II

Há mais de uma maneira de se implementar a expansão $1/N$, sendo que as expressões de interesse físico não dependem desta liberdade de opção. Pela nossa escolha os campos principais foram reparametrizados de modo que o fator N passa a ter influência direta no vínculo, conforme expresso na lagrangeana (2.4) ¹². Com isso, o propagador do campo auxiliar λ , bem como o propagador do campo de calibre, passam a ser proporcionais à $1/N$ enquanto que as contrações do laço bosônico do campo principal fornecem um fator N . A teoria passa então a ser definida em termos de contribuições que são potências de $1/N$. Uma peça importante no procedimento de renormalização é o conceito de diagrama expandido. Vejamos essa construção a partir da figura 2.5. Em 2.5a temos um diagrama próprio, isto é, que não pode ser separado em duas partes por um único corte (um diagrama deste tipo será chamado de diagrama original). Em 2.5b temos o diagrama expandido associado ao diagrama original 2.5a. O diagrama expandido é obtido pela junção das linhas externas do campo ϕ em um novo vértice trilinear $\lambda\phi^\dagger\phi$ bifurcando em seguida em um outro vértice do mesmo tipo. O diagrama expandido sempre conterá o diagrama original como subdiagrama ¹³.

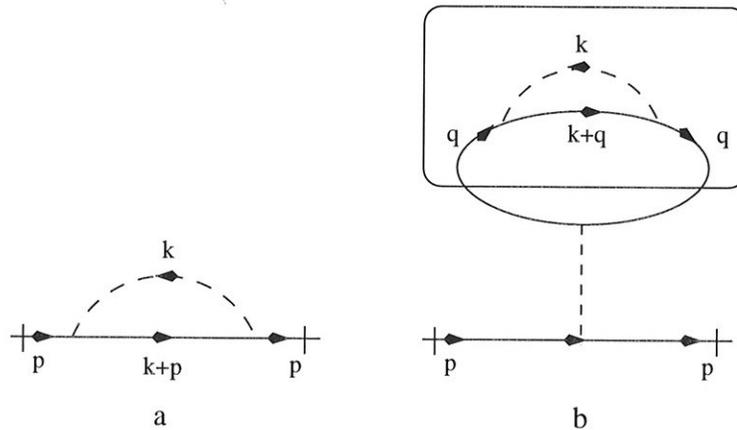


Figura 2.5: Contribuições do diagrama próprio (original) e do diagrama expandido para a função de dois pontos do campo ϕ .

Com o objetivo de entender o mecanismo pelo qual há o cancelamento de divergências, aplique-

¹²Uma outra maneira de introduzir a expansão $1/N$ no modelo CP^{N-1} é inserindo no multiplicador de lagrange uma fator $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Neste caso os vértices de interação participam com $\frac{1}{\sqrt{N}}$ e os propagadores deixam de carregar o fator proporcional a $\frac{1}{N}$. Neste caso a reparametrização do campo de calibre é efetuada à mão, ou seja $A_\mu \rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}A_\mu$ (ver [29])

¹³Neste exemplo o diagrama original em 2.5b está ressaltado pela caixa retangular.

mos nos integrandos dos gráficos 2.5a e 2.5b uma expansão em série de Taylor ¹⁴. Estamos interessados em mostrar que o mecanismo elimina a divergência de ordem mais alta. Para o integrando do gráfico 2.5a, temos

$$I(p) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_\lambda(k) \Delta(k+p). \quad (2.40)$$

O primeiro termo da expansão em Taylor é obtido tomando-se o momento externo p igual a zero. Com isso,

$$I(0) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta_\lambda(k) \Delta(k). \quad (2.41)$$

A representação gráfica de $I(0)$ é dada pela figura 2.6a. O que se entende pela figura é que calculando-se o processo interno (a integral) este é contraído a um ponto (dada pelo fator que contém o ponto em negrito). O resultado total é o processo interno reduzido a um ponto multiplicado pela parte externa com as linhas externas amputadas.

Para o gráfico 2.5b, temos a seguinte expansão analítica

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} I(q) [\Delta(q)]^2 \Delta_\lambda(0) \quad (2.42)$$

Expandindo o integrando em função do momento externo à caixa, ficamos com

$$\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} I(0) [\Delta(q)]^2 \Delta_\lambda(0). \quad (2.43)$$

Vemos que para esta primeira ordem da expansão $I(0)$ é igual a expressão (2.41) usada para definir a expansão do gráfico original. Utilizando para a parte não contida na caixa as fórmulas (2.17) e (2.19), as quais fornecem a relação entre o propagador do campo λ e a parte extra, novamente reduzimos a parte adicional do diagrama a um ponto, mas agora com um sinal negativo (este é o resultado da aplicação da identidade 2.4a sobre o gráfico 2.6b. Ver explicitamente na figura 2.7). Aplicando este resultado em 2.6b mostra-se que o diagrama 2.5b produz o mesmo resultado que o 2.5a, tendo um sinal negativo em relação ao último. Com isto se verifica que a divergência mais alta do gráfico expandido e a do gráfico que o originou cancelam-se entre si.

Como exemplo mais complexo da identidade 2.4a trataremos o gráfico 2.8a que contribui para a função de 4 pontos do campo ϕ , a qual é linearmente divergente. Neste gráfico ocorre uma interação trilinear envolvendo o campo de calibre, o que necessita de um maior cuidado na análise do cancelamento de divergências devido o fator de momento que entra por esse vértice. A expressão analítica para este diagrama é dada por ¹⁵

$$\frac{1}{N^2} \Delta(p_1) \Delta(p_2) \Delta(p_3) \Delta(p_4) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} II(p_{ext}, k) \quad (2.44)$$

sendo

$$II(p_{ext}, k) = \Delta_{\mu\nu}(k) V_{er} \Delta(k+p_1) \Delta(p_2-k) \Delta_\lambda(p_1-p_3+k) \quad (2.45)$$

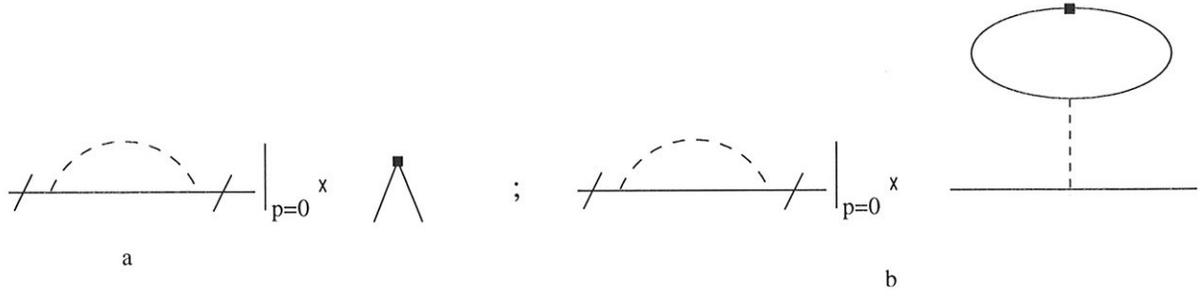


Figura 2.6: Expansão em Taylor dos integrandos 2.4a e 2.4b.

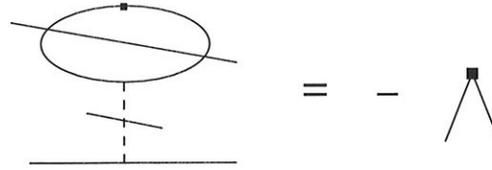


Figura 2.7: Uso da identidade 2.4 no diagrama expandido 2.4b.

Pela regra de Feynman a contribuição dos vértices é designada por $V_{\text{er}} = (2p_2 - k)^\mu (2p_1 + k)^\nu$. A argumentação para o cancelamento da divergência deste gráfico por meio de um diagrama expandido é independente de calibre ¹⁶. Pelo uso da identidade 2.4a temos o diagrama expandido mostrado na figura 2.8b. A expressão analítica correspondente a esse gráfico é

$$\frac{1}{N^2} \Delta(p_1) \Delta(p_2) \Delta(p_3) \Delta(p_4) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} II' \Delta(q + p_1) \Delta(q - p_3) \Delta_\lambda(p_1 - p_3), \quad (2.46)$$

em que

$$II'(p_{\text{ext}}, q, k) = \Delta_{\mu\nu}(k) V'_{\text{er}} \Delta(k + q + p_1) \Delta(p_2 - k) \Delta_\lambda(p_1 - p_3 + k). \quad (2.47)$$

O momento adicional q traz uma pequena modificação para a contribuição do vértice. Passamos a ter $V'_{\text{er}} = (2p_2 - k)^\mu (2p_1 + 2q + k)^\nu$. As considerações sobre o produto do propagador do campo de calibre com os fatores dos vértices trilineares são válidas tanto para o diagrama original quanto para o expandido. O produto de $\Delta_{\mu\nu}(k)$ por uma única potência de k proveniente dos vértices trilineares (o qual geraria uma integral logicamente divergente) fornece um resultado nulo por invariância de Lorentz ¹⁷. A expansão do integrando (2.45) em torno dos momentos externos iguais a zero é

$$II(0, k) = \Delta_{\mu\nu}(k) V_{\text{er}}(0, k) \Delta(k) \Delta(-k) \Delta_\lambda(k). \quad (2.48)$$

¹⁴Considerando somente os integrandos, estamos fatorando os termos comuns aos dois gráficos, que são os propagadores das linhas externas e a potência de $(\frac{1}{N})^1$.

¹⁵Por conservação o momento externo $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$.

¹⁶Entretanto, uma escolha de calibre transversal restringe o número de diagramas preocupantes no que diz respeito à divergências.

¹⁷Não há um vetor disponível para gerar um resultado escalar. Ou, matematicamente, este produto produz uma integral ímpar que quando considerada em todo o espaço é igual a zero. Esta divergência, bem como a mais alta $(\Delta_{\mu\nu}(k) k^\mu k^\nu)$ seria automaticamente evitada por um calibre transversal.

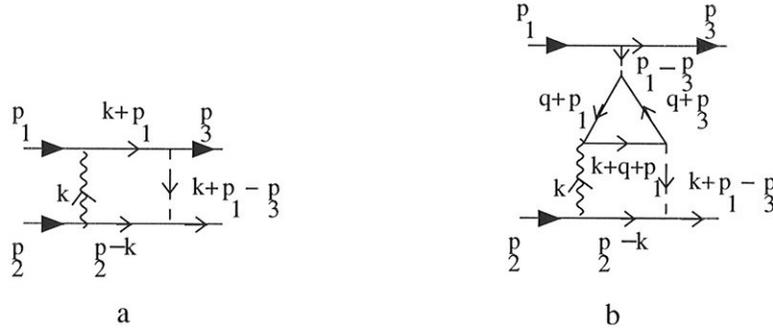


Figura 2.8: Exemplo de contribuição (gráfico original e expandido) para a função $\langle \phi^\dagger \phi^\dagger \phi \phi \rangle$ envolvendo interação trilinear com o campo de calibre

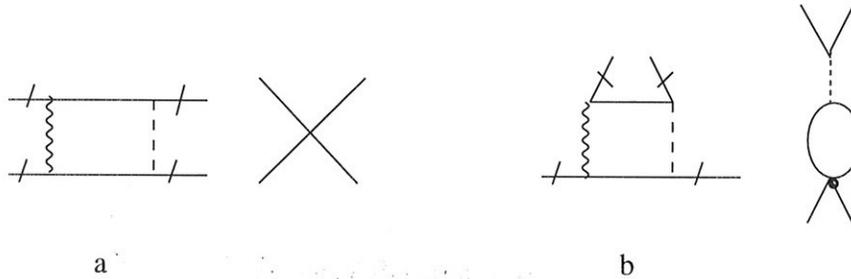


Figura 2.9: Termos de primeira ordem dos diagramas 2.8a e 2.8b

A leitura gráfica deste termo é mostrada na figura 2.9a. Para o gráfico expandido 2.8b o termo de primeira ordem na expansão do integrando é dado por

$$II'(0, 0, k) = \Delta_{\mu\nu}(k) V'_{\text{er}}(0, 0, k) \Delta(k) \Delta(-k) \Delta_\lambda(k). \quad (2.49)$$

Nesta ordem $V'_{\text{er}}(0, 0, k) = V_{\text{er}}(0, k)$. Ou seja, temos o mesmo integrando para o gráfico original e para o expandido. Graficamente, a expansão em primeira ordem do diagrama expandido é mostrada em 2.9b. Toma então lugar o cancelamento entre a parte adicional no diagrama expandido composta pelos últimos três propagadores em (2.46) integrados na variável q . Este cancelamento nada mais é do que a leitura da identidade 2.4 (ver equação (2.39)) no espaço dos momentos. Temos então que pelo corte entre a “bolha” e o propagador do campo λ surge um sinal negativo. Por conter uma divergência linear (sem levar em conta escolhas favoráveis de calibre) temos que nos preocupar com a ordem seguinte da expansão do integrando que é composta pelos termos de primeira derivada nos momentos externos. A equação (2.50) mostra a expansão do fator II' pertencente ao diagrama expandido.

$$II'(p_{\text{ext}}, q, k) = II'(0, 0, k) + q_\alpha^\gamma \frac{\partial}{\partial q_\alpha^\gamma} II' \Big|_{q_\alpha^\gamma=0} \quad (2.50)$$

em que q_α^γ designa os momentos externos do correspondente subgráfico. Entretanto o termo de primeira derivada não contribui pelo mesmo motivo exposto na nota de rodapé 18 (pg. 16).

As outras possibilidades de diagramas expandidos do gráfico 2.8a são determinadas com o uso da identidade 2.4a para as linhas externas inferiores ou ainda tomando simultaneamente o recurso

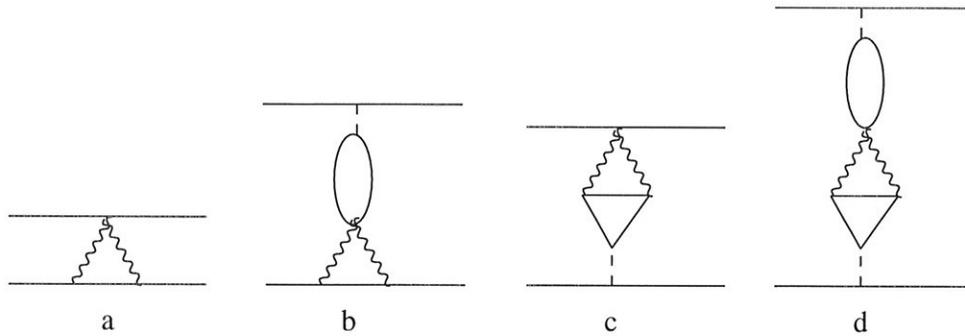


Figura 2.10: Contribuição para a função $\langle \phi^\dagger \phi^\dagger \phi \phi \rangle$ contendo interações trilineares e quadrilineares com o campo de calibre com os correspondentes gráficos expandidos.

citado para as linhas inferiores e superiores ¹⁸. Quando o diagrama expandido utiliza uma vez o recurso da identidade diagramática o termo mais divergente resulta com o sinal contrário ao do diagrama original. Quando a inserção da identidade ocorre em um número par de vezes (duas vezes é o máximo possível para gráficos da função de 4 pontos do campo ϕ) a expressão do gráfico expandido é idêntica a do gráfico original.

Para gráficos envolvendo somente vértices quadrilineares a demonstração do cancelamento é mais direta. Como não há fatores de momento associados a esse vértice (ver regra de Feynman) a bolha adicional gerada a partir deste vértice é formada apenas pelos propagadores do campo ϕ e portanto se cancela sumariamente com o propagador do campo λ . As linhas do campo ϕ deste vértice são unidas em um novo vértice trilinear $\lambda \phi^\dagger \phi$ e após, bifurca-se a linha ϕ novamente. No caso de diagramas contendo interações trilineares e quadrilineares com o campo de calibre podemos focar o cancelamento sob essa propriedade dos vértices quadrilineares. Por exemplo, sejam os diagramas original (a) e expandidos (b,c,d) na figura 2.10. O arranjo do cancelamento utilizando essa propriedade se dá na seguinte maneira. O diagrama 2.10b, conforme explicado, cancela o diagrama 2.10a. Para o diagrama expandido 2.10c (obtido por meio da identidade 2.4a) há o diagrama 2.10d. Deste modo, sempre há o cancelamento aos pares entre os diagramas contendo vértice quadrilinear sem que seja necessária uma análise mais detalhada do integrando.

Com o recurso do diagrama expandido, as contribuições para o contratermo de massa (provenientes das divergências mais altas da função de dois pontos do campo ϕ , obtidas por meio de contribuições dos gráficos com momento externo igual a zero) são suprimidas. Mais geralmente, isto descarta a participação de alguns contratermos presentes na formulação do modelo. De fato, o modelo CP^{N-1} necessita apenas de renormalização de função de onda e da carga [27, 51]. Dessa forma o modelo mostra-se renormalizável em expansão $1/N$ para o caso comutativo.

Na formulação do modelo CP^{N-1} no espaço não comutativo, objeto de estudo desta tese, investigaremos o conteúdo de todas as aplicações possíveis destas identidades para a propriedade da renormalizabilidade do modelo, incluindo os efeitos que a não comutatividade traz para a região de baixos momentos externos (região do infravermelho). Assim sendo, a discussão a respeito do conjunto de gráficos superficialmente divergentes do modelo em primeira ordem não trivial em expansão $1/N$ será feita no capítulo 4, após uma breve introdução produzida no capítulo 3 que

¹⁸Há de se observar que não é qualquer junção entre as linhas externas que é permitida pela expansão $1/N$. Como vimos, os propagadores auxiliares carregam um fator $1/N$. Para compensar este fator é necessário haver um laço somente com o propagador do campo ϕ fornecendo N contrações indistinguíveis.

diz respeito às propriedades de teorias quânticas de campo no espaço não comutativo.

É importante salientar que o uso das identidades da figura 2.4 não quebra o conceito de gráficos 1PI, uma vez que a expressão matemática do propagador de λ (equações (2.19) e (2.17)) não apresenta pólo em seu espectro, não tendo portanto caráter de partícula. Por esse motivo na nossa abordagem não serão consideradas separadamente contribuições da função de um ponto do campo λ , mas sim em conexão com o cômputo da função de dois pontos do campo ϕ . Observação semelhante é válida para as funções de vértice que contam com a presença do campo λ , como por exemplo $\lambda\phi^\dagger\phi$. No capítulo 4 mostraremos que, ainda que não fixemos o contratérmo associado a essa função de vértice, ocorre um cancelamento completo das divergências ultravioletas quando esta função participa como subdiagrama mesmo nos casos que contam com a presença da fase não comutativa.

Capítulo 3

Construção de Teorias no Espaço Não-Comutativo.

3.1 Operadores de Weyl

Vários são os procedimentos para quantizar campos clássicos definidos em um espaço-tempo usual contínuo R^D de dimensão D em termos de um espaço-tempo de coordenadas não-comutantes R_θ^D . Cada procedimento mostra-se particularmente vantajoso em um determinado contexto. A mesma observação aplica-se à base sob a qual definimos as propriedades das funções no espaço não-comutativo. Faremos uso de um procedimento bem conhecido na quantização de teorias de campo ¹. Para obtermos informações advindas da não-comutatividade do espaço-tempo, devemos responder a seguinte pergunta: Qual a relação entre as funções definidas no espaço tempo usual e os objetos definidos no espaço não-comutativo?

Para responder a essa pergunta utilizaremos a construção de Weyl-Wigner. A construção de Weyl-Wigner vale-se do conceito de integral de Fourier, o qual faz a ponte entre funções no sentido clássico e os operadores no espaço não-comutativo. Com isso obteremos uma deformação do produto de campos no espaço comutativo em virtude da não-comutatividade. A idéia é então traçar um mapa entre os dois espaços.

Uma vez definida uma correspondência biunívoca, podemos introduzir as operações para computar os objetos de interesse em teorias quânticas de campos. Como consequência dessa correspondência, a não-comutatividade pode ser revelada na própria álgebra do espaço R_θ^D ou através da modificação da álgebra do espaço comutativo.

Seja então o operador $T(k, \hat{x}) = e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}$, sendo \hat{x} a coordenada não-comutante pertencente à relação (1.1) (página 1). Este operador goza das seguintes propriedades

$$i) \quad T^\dagger(k, \hat{x}) = T(-k, \hat{x}), \quad (3.1)$$

$$ii) \quad T(k, \hat{x})T(k', \hat{x}) = T(k + k')e^{-\frac{i}{2}k_\mu k'_\nu \Theta^{\mu\nu}}, \quad (3.2)$$

$$iii) \quad \text{Tr } T(k, \hat{x}) = (2\pi)^D \prod_{\mu} \delta(k_\mu), \quad (3.3)$$

¹O material expresso nas três primeiras seções deste capítulo é baseado nas notas de aula do prof. M. Gomes [35]

A primeira propriedade é imediatamente verificável a partir da definição do objeto. A segunda decorre da fórmula de Baker-Hausdorff $e^A e^B = e^{A+B} e^{1/2[A,B]}$ para o caso em que $[A, B] = \text{número } c$. A operação de traço cuja normalização é definida em (3.3) é um funcional cíclico de R_θ^D para \mathbb{C} . Por intermédio dessas propriedades serão obtidas as relações entre os dois espaços de modo consistente. Voltaremos a comentar sobre a operação de traço realizada em R_θ^D mais adiante.

Definamos o operador de Weyl $\hat{\Phi}(\hat{x})$ pertencente ao espaço R_θ^D como sendo

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T(k, \hat{x}) \tilde{\phi}(k), \quad (3.4)$$

em que

$$\tilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{-ikx} \phi(x), \quad (3.5)$$

é a transformada de Fourier de $\phi(x)$, e x é a coordenada do espaço comutativo associada à coordenada \hat{x} do espaço não-comutativo. Com isso, a partir de um dado $\phi(x)$ obtemos o operador de Weyl $\hat{\Phi}(\hat{x})$ correspondente, ou seja, estabelecemos a relação $\hat{\Phi}(\hat{x}) \Leftarrow \phi(x)$. Como consequência de (3.3), temos que

$$\text{Tr} \hat{\Phi}(\hat{x}) = \int d^D x \phi(x) \quad (3.6)$$

Esta propriedade, conforme veremos, é de suma importância para traçarmos o mapa entre os espaços R^D e R_θ^D .

Utilizando em (3.4) as propriedades (3.1)-(3.3) e a definição da transformada de Fourier do campo clássico pode-se obter a inversa da equação (3.4),

$$\phi(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ikx} \text{Tr}[\hat{\Phi} T^\dagger(k, \hat{x})]. \quad (3.7)$$

Assim sendo concluímos o mapa de forma unívoca. Agora, dado um operador $\hat{\Phi}(\hat{x})$ obtemos o campo clássico correspondente. Ou seja $\hat{\Phi}(\hat{x}) \Rightarrow \phi(x)$.

A princípio, (3.5) e (3.7) são transformadas de Fourier conjugadas. Entretanto (3.5) é descrita unicamente em termos do espaço usual, enquanto que (3.7) envolve uma operação (Tr) pertencente ao espaço R_θ^D .

As funções $\phi(x)$ obtidas por intermédio de um operador quântico definido desta forma são chamadas funções de distribuição de Wigner [36]. Deste modo estabelecemos um mapa unívoco entre os campos de Wigner e os operadores de Weyl [37], o que é referido como correspondência de Weyl-Wigner, também conhecida como Weyl-Moyal [38].

3.2 O produto estrela e suas propriedades

Conforme vimos, na seção anterior estabelecemos uma relação biunívoca entre os operadores de Weyl e funções clássicas. Por simplicidade de notação representaremos o objeto definido na equação (3.4) como $\hat{\Phi}[\phi]$. A intenção desta seção é mostrar como o produto entre operadores de Weyl modifica o produto de funções no espaço comutativo. De acordo com a definição (3.4),

$$\hat{\Phi}_1[\phi_1] \hat{\Phi}_2[\phi_2] = \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} T(k_1, \hat{x}_1) T(k_2, \hat{x}_2) \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2). \quad (3.8)$$

Utilizando em (3.8) as propriedades definidas em (3.1) e (3.2), obtemos

$$\hat{\Phi}_1[\phi_1]\hat{\Phi}_2[\phi_2] = \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} T(k_1 + k_2) e^{-\frac{i}{2}k_{1\mu}k_{2\nu}\theta^{\mu\nu}} \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2). \quad (3.9)$$

Este resultado pode ser reescrito alterando a regra de multiplicação das funções do espaço comutativo.

$$\hat{\Phi}_1[\phi_1]\hat{\Phi}_2[\phi_2] = \hat{\Phi}[\phi_1 * \phi_2] \quad (3.10)$$

em que,

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} e^{-i(k_1+k_2)_\lambda x^\lambda} e^{k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu} \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2). \quad (3.11)$$

Escrevendo explicitamente em termos dos operadores de Weyl,

$$\phi(x) * \phi(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ikx} \text{Tr}[\hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2 T^\dagger(k)]. \quad (3.12)$$

Aplicando em (3.9) a propriedade (3.3), ficamos com

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\Phi}_1[\phi_1]\hat{\Phi}_2[\phi_2]] &= \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \delta(k_1 + k_2) e^{-\frac{i}{2}k_{1\mu}k_{2\nu}\theta^{\mu\nu}} \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2) \\ &= \int \int \int d^D x \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} e^{i(k_1+k_2)_\lambda x^\lambda} e^{-ik_1 \wedge k_2} \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2), \end{aligned} \quad (3.13)$$

ou seja

$$\text{Tr}[\hat{\Phi}_1[\phi_1]\hat{\Phi}_2[\phi_2]] = \int d^D x \phi_1 * \phi_2. \quad (3.14)$$

em que utilizamos a definição $k_1 \wedge k_2 \equiv \frac{1}{2}k_{1\mu}k_{2\nu}\theta^{\mu\nu}$. Usando esse resultado, vemos facilmente que a parte quadrática da ação de um modelo físico não sofre alteração pela presença do produto Moyal:

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \text{Tr}[\hat{\Phi}_1 \hat{\Phi}_2] = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \text{Tr}[T(k_1)T(k_2)] \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2) \\ &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} e^{[k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu]} \delta(k_1 + k_2) \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2) \\ \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(-k_1) = \int d^D x \phi_1(x)\phi_2(x), \end{aligned} \quad (3.15)$$

pois pela presença da delta $k_2 = -k_1$, logo, a fase $k_2 \wedge k_1 \rightarrow -k_1 \wedge k_1 = 0$. O resultado (3.11) pode ser reescrito na forma

$$\begin{aligned} \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \lim_{y \rightarrow x} e^{[\frac{i}{2}\Theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}]} \phi_1(y)\phi_2(x) \\ &= \phi_1(x)\phi_2(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi_1(x) \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} \phi_2(x) \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde utilizamos a notação de produto-estrela de Groenewold-Moyal [39] para expressar a deformação da lei de produto da álgebra comutativa do espaço usual para um produto não-comutativo. Na expansão (3.16), a qual contém um número ilimitado de derivadas, reside a não-localidade do produto-estrela, o qual é consequência da não-localizabilidade decorrente da equação (1.1) ²

Por intermédio de (3.16), em ordem não trivial mais baixa o produto-estrela fornece

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) \approx \phi_1(x)\phi_2(x) + \theta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_1(x) \partial_\nu \phi_2(x) + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (3.17)$$

Para o caso com três campos

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_3(x) &= \text{Tr}[\Phi_1 \Phi_2 \Phi_3] = \int \prod_{i=1}^3 \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \text{Tr}[\overbrace{T(k_1)T(k_2)}^{T(k_1+k_2)} T(k_3)] \\ \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3) e^{-ik_1 \wedge k_2} e^{-i(k_1+k_2) \wedge k_3} \\ \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3), & \end{aligned} \quad (3.18)$$

Em verdade o termo $e^{-i(k_1+k_2) \wedge k_3}$ não sobrevive, pois pela presença da delta de conservação dos momentos, $k_3 = -k_1 - k_2$. Levando isso em conta no cálculo do produto das exponenciais, temos $-ik_1 \wedge k_2 - i(k_1 + k_2) \wedge (-k_1 - k_2) = -ik_1 \wedge k_2$. Deste modo podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_3(x) &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3) e^{-ik_1 \wedge k_2} \\ \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3). & \end{aligned} \quad (3.19)$$

Generalizando para n campos,

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \dots * \phi_n(x) = \text{Tr}[\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n]. \quad (3.20)$$

Vemos por meio dessa equação a propriedade de invariância do produto Moyal por uma permutação cíclica dos campos. No espaço dos momentos a equação generalizada é escrita como

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) \dots * \phi_n(x) &= \\ \int \prod_{i=1}^n \left(\frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \right) & (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + \dots + k_n) \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) \dots \tilde{\phi}_n(k_n) e^{-i \sum_{i < j} k_i \wedge k_j}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

A contribuição não trivial em relação ao produto de campos usual é a presença do fator de fase que inclui a não-comutatividade, pois de resto é como se trabalhassemos com a equação (3.21) no espaço dos momentos conforme o procedimento padrão.

É importante observar que o comutador-estrela com uma coordenada local x^i pode ser usado para gerar derivadas na forma

$$x^i * \phi(x) - \phi(x) * x^i = i\theta^{ij} \partial_j \phi(x). \quad (3.22)$$

²O exemplo mais simples a se pensar em uma não-localidade envolvendo um número ilimitado de derivadas é a representação exata de uma função em termos de uma série de Taylor. Há várias formas explicitamente não-locais de se escrever o produto Moyal entre campos. Ver por exemplo referência [40]. Em [11] há uma discussão interessante sobre a não-localidade do produto-estrela de campos.

A partir dessa equação, determina-se

$$\partial_i \phi = [-i(\theta^{-1})_{ij} x^j, \phi]_* \quad (3.23)$$

Devido a (3.22) temos então que a translação pode ser escrita como um operador unitário na forma $\phi(x^i + \tilde{\epsilon}^i) = e^{-i\tilde{\epsilon}^i x^i} * \phi(x) * e^{+i\tilde{\epsilon}^i x^i}$, onde $\tilde{\epsilon}^i = \theta^{ij} \epsilon_j$ representa um deslocamento no espaço não-comutativo. Vemos que a expansão em primeira ordem deste operador corresponde à primeira ordem da série de Taylor no parâmetro $\tilde{\epsilon}$.

$$f(\tilde{\epsilon}) = \phi(x^i + \tilde{\epsilon}^i) = e^{+i\theta_{ij} \epsilon^i x^j} * \phi(x) * e^{-i\theta_{ij} \epsilon^i x^j} \quad (3.24)$$

A expansão em série de Taylor em função do parâmetro $\tilde{\epsilon}$ é dada por

$$f(\tilde{\epsilon}) = f(0) + \tilde{\epsilon}_{j_1} \frac{\partial f}{\partial \tilde{\epsilon}_{j_1}} \Big|_{\tilde{\epsilon}=0} + \frac{\tilde{\epsilon}_{j_2} \tilde{\epsilon}_{j_1}}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{\epsilon}_{j_2} \partial \tilde{\epsilon}_{j_1}} \Big|_{\tilde{\epsilon}=0} + \dots$$

mas,

$$\frac{\partial f}{\partial \tilde{\epsilon}_{j_1}} \Big|_{\tilde{\epsilon}=0} = +i x_{j_1} * \phi - i \phi * x_{j_1} = i [x_{j_1}, \phi]_* ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{\epsilon}_{j_2} \partial \tilde{\epsilon}_{j_1}} \Big|_{\tilde{\epsilon}=0} = i [x_{j_2}, \frac{\partial f}{\partial \tilde{\epsilon}_{j_1}}]_* = -[x_{j_2}, [x_{j_1}, \phi]]_*.$$

Esta é a mesma estrutura que surge ao expandirmos em potências de $\tilde{\epsilon}$ a expressão (3.24).

Quanto a “integração” no espaço não-comutativo, vimos que esta operação é realizada por meio do traço Tr definido em (3.3). Por um lado esta operação guarda propriedades de traço, tal como a ciclicidade, por outro, conforme vimos em (3.6) ou na expressão generalizada (3.20), efetivamente implica em integração no espaço usual ³.

3.3 Exemplos de simetrização e anti-simetrização com o produto estrela

Um dos objetivos desta seção é mostrar como se trabalha com a fórmula (3.21) para os casos com três e quatro campos, havendo ou não entre esses, campos indistinguíveis. Havendo, pode-se manipular os fatores de fase, onde está contida a presença da não-comutatividade, e reescrevê-los em termos de funções trigonométricas. Este procedimento é conhecido como simetrização ou anti-simetrização dependendo da estatística a qual os campos envolvidos obedecem. Para o produto de campos bosônicos usa-se a primeira denominação e para o caso com férmions, a segunda.

A questão é mostrar qual é o resultado causado no produto de campos pela permutação de campos indistinguíveis. Veremos que a ordem na qual estes campos indistinguíveis se apresentam modifica o argumento das funções trigonométricas. Vejamos primeiramente o produto de três campos sendo dois indistinguíveis, ou seja $\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x)$. Os rótulos em subscrito designam os tipos de campos e havendo mais de um com o mesmo rótulo significa que eles são indistinguíveis. Usaremos a notação \Leftrightarrow para designar a permutação com respeito ao posicionamento dos campos indistinguíveis a partir da esquerda (por convenção). Para o caso em questão $1 \Leftrightarrow 2$ significa a permutação entre o primeiro e o segundo campo.

³Por esse motivo alguns autores [9] não separam a notação de traço e integral quando se referem à teorias de campo não-comutativas, ou seja, adotam a notação $\int \text{Tr}$.

Por exemplo, escrevendo o produto como

$$\begin{aligned}
\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3) e^{-ik_1 \wedge k_2} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \\
&= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3) [\cos(k_1 \wedge k_2) \\
&\quad - i \sin(k_1 \wedge k_2)] \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

e efetuando na parte que contém função seno a troca $1 \Leftrightarrow 2$ no rótulo dos momentos e a permutação dos campos correspondentemente, vemos que este termo se anula. Logo

$$\begin{aligned}
\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3) \\
&\quad \cos(k_1 \wedge k_2) \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3),
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Isto é devido ao produto de uma parte simétrica pela troca dos índices (a permutação entre os campos bosônicos) com uma função anti-simétrica (a função seno). Assim, apenas a função co-seno sobrevive. Se o produto fosse entre campos fermiônicos, pela argumentação acima exposta, é óbvio que teríamos apenas a função seno.

Vejamos agora algumas situações para o produto com quatro campos. Se todos os campos forem iguais, ou seja, se tivermos $\int d^D x \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) * \phi(x)$, então pode-se efetuar as permutações $1 \Leftrightarrow 2$, $3 \Leftrightarrow 4$; $1 \Leftrightarrow 3$, $2 \Leftrightarrow 4$; $2 \Leftrightarrow 3$, $1 \Leftrightarrow 4$. Para campos bosônicos teremos

$$\begin{aligned}
\int d^D x \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) &= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_4}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \\
&\quad \frac{1}{3} [\cos(k_1 \wedge k_2) \cos(k_3 \wedge k_4) + \cos(k_1 \wedge k_3) \cos(k_2 \wedge k_4) + \cos(k_1 \wedge k_4) \cos(k_2 \wedge k_3)] \\
&\quad \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Para $\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_2(x)$, e seguindo a atribuição do rótulo dos momentos pela posição dos campos no produto (ou seja k_2 referente ao momento do segundo campo, k_3 referente ao momento do terceiro, ...) temos,

$$\begin{aligned}
e^{-ik_1 \wedge k_2} e^{-ik_3 \wedge k_4} &= [\cos(k_1 \wedge k_2) - i \sin(k_1 \wedge k_2)] [\cos(k_3 \wedge k_4) - i \sin(k_3 \wedge k_4)] \\
&= \cos(k_1 \wedge k_2) \cos(k_3 \wedge k_4) - \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4) \\
&\quad + i(\cos(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4) + \cos(k_3 \wedge k_4) \sin(k_1 \wedge k_2)).
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Efetuando a troca $1 \Leftrightarrow 2$ e $3 \Leftrightarrow 4$ desaparecem os termos com a função seno dando como resultado

$$\begin{aligned}
\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_2(x) &= \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \cos(k_1 \wedge k_2) \cos(k_3 \wedge k_4) \\
&\quad (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_1(k_2) \tilde{\phi}_2(k_3) \tilde{\phi}_2(k_4).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Para a situação $\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x)$ vemos que o produto entre as exponenciais não mais cancela o termo $\sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4)$, pois a simetria agora é entre $k_1 \Leftrightarrow k_3$ e $k_2 \Leftrightarrow k_4$. Logo, o argumento da função co-seno para este produto de campos é dado por $\cos[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4]$.

A parte inteiramente anti-simétrica, $i \sin[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4]$ de fato não contribui. Isso pode ser visto levando em consideração as contribuições oriundas da propriedade de ciclicidade do traço.

Com isso, demonstrou-se que

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \cos[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4] (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) \tilde{\phi}_1(k_3) \tilde{\phi}_2(k_4). \quad (3.30)$$

Analogamente para o caso com férmions,

$$\int d^D x \psi_1(x) * \psi_1(x) * \psi_2(x) * \psi_2(x) = -i \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \sin(k_1 \wedge k_2) \sin(k_3 \wedge k_4) (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tilde{\psi}(k_1) \tilde{\psi}(k_2) \tilde{\psi}(k_3) \tilde{\psi}(k_4). \quad (3.31)$$

e

$$\int d^D x \psi_1(x) * \psi_2(x) * \psi_1(x) * \psi_2(x) = -i \int \prod_{i=1}^4 \frac{d^D k_i}{(2\pi)^D} \sin[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4] (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \tilde{\psi}_1(k_1) \tilde{\psi}_1(k_2) \tilde{\psi}_2(k_3) \tilde{\psi}_2(k_4). \quad (3.32)$$

Um comentário importante é quanto a implicação à estatística para o caso dos férmions. As duas últimas expressões não apresentam resultado nulo como ocorre no caso usual. Uma possível interpretação para isso é que em um espaço não-comutativo não há mais o princípio de exclusão de Pauli, o que era de se esperar, já que existe um limite para o conceito de localização.

3.4 A mistura IV/UV

Uma das características mais marcantes de teorias não-comutativas é o entrelaçamento entre escalas: uma pequena indeterminação em uma direção implica em uma grande indeterminação nas outras. A consequência dessa mistura pode ser reavaliada no espaço dos momentos. Neste caso podemos ver como processos virtuais na região de altos momentos (pequenas distâncias) afetam o comportamento de baixas energias da teoria (grandes distâncias). Esse efeito é conhecido como mistura IV/UV [11]. Como exemplo vamos analisar um caso simples da interação $\lambda\phi^4$ [41, 42] onde os campos são escalares e não carregados⁴. A lagrangeana para este caso é dada por

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 - \lambda \phi * \phi * \phi * \phi \quad (3.33)$$

Vejamos então a contribuição para a função de dois pontos dada pelo gráfico da figura 3.1.

Utilizando a fórmula (3.27) para a interação quártica e mantendo a expressão usual para o propagador do campo ϕ dado por $\Delta_\phi = i/(p^2 - m^2 + i\epsilon)$, temos a seguinte expressão analítica para este gráfico⁵

⁴No caso de campos carregados [43] poderíamos ter dois acoplamentos não triviais, $a\phi_1 * \phi_1 * \phi_2 * \phi_2$ (ver (3.29)) e $b\phi_1 * \phi_2 * \phi_1 * \phi_2$ (ver (3.30)).

⁵Daqui em diante nas expressões dos propagadores será omitido o contorno de integração, o qual seguirá a expressão definida no parágrafo de chamada desta nota.

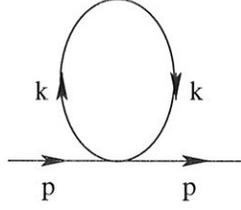


Figura 3.1: Contribuição para a função de 2 pontos da interação $\lambda\phi^4$ escalar.

$$\frac{\lambda}{3} \int [2(\cos^2(k \wedge p)) + 1] \frac{d^4 k}{k^2 - m^2} = \frac{2\lambda}{3} \int \frac{d^4 k}{k^2 - m^2} + \frac{\lambda}{3} \int \frac{\cos 2k \wedge p}{k^2 - m^2} d^4 k \quad (3.34)$$

onde utilizamos que $\cos^2(k \wedge p) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2k \wedge p))$. Explicitamente, temos uma integral onde não há no integrando uma função trigonométrica relacionando o momento externo e o momento de integração (a qual chamaremos de planar) e outra onde isso ocorre (tratada por não-planar). A primeira é uma integração usual de teoria de campos em um espaço comutativo, enquanto que a outra decorre da estrutura do produto Moyal. Em (3.34) designaremos a parte planar por I_{pl} e a não-planar por I_{npl} . Vemos que na parcela envolvendo o cosseno o integrando é invariante pela transformação $k \rightarrow -k$. Logo,

$$I_{pl} = \frac{2\lambda}{3} \int \frac{d^4 k}{k^2 - m^2} \quad (3.35)$$

$$I_{npl} = \frac{\lambda}{3} \int \frac{e^{ik\tilde{p}}}{k^2 - m^2} d^4 k \quad (3.36)$$

em que $\tilde{p}_\mu = \Theta_{\mu\nu} p^\nu$.

Para resolver a integral não-planar, podemos empregar diversas técnicas.

- Tratar o integrando envolvendo a mistura por meio da parametrização de Schwinger, sendo a integração nos momentos realizada como uma integração gaussiana ordinária e a consequente integração paramétrica resultante representa a expressão integral de uma função Bessel modificada, sendo que o regulador na função Bessel é dado por $\Lambda_{mod}^{-2} = \tilde{p}^2 + 1/\Lambda^2$, sendo que Λ é um parâmetro de corte introduzido na integral como um fator de convergência.
- Generalizar a regularização dimensional para teorias não-comutativas [44]. Neste contexto, essas generalizações tratam das integrais básicas que aparecem nas teorias não-comutativas e as integrais envolvendo estruturas tensoriais são calculadas por meio de expansões em série de Taylor e identidades envolvendo funções Bessel.
- Tratar as integrais básicas que aparecem nas teorias de campos no espaço não-comutativo como transformadas de Fourier generalizadas do espaço dos momentos k (usual) para o espaço \tilde{p}_μ .

Estando mais familiarizados com a última abordagem, desenvolveremos os cálculos tratando as integrais características do espaço não-comutativo como transformadas de Fourier generalizadas.

Em todas as abordagens é procedimento padrão efetuar uma rotação de Wick e então obtém-se um resultado em termos de integrais no espaço euclidiano. Uma vez feita a rotação de Wick ⁶ o sinal negativo no denominador é fatorado por $(-1)^{-\alpha}$ e o espaço dos momentos k passa a ter uma parte quadrática euclidiana e positivo-definida. Portanto, $k_E^2 = k_0^2 + \vec{k}^2 = |k|^2$.

Efetuando essa operação em uma integral básica no espaço não-comutativo (por básica queremos dizer que não possui estrutura tensorial), temos ⁷

$$I = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik\tilde{p}}}{(k^2 - M^2)^\alpha} = i(-1)^{-\alpha} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{ik\tilde{p}}}{(k_E^2 + M^2)^\alpha} = i(-1)^{-\alpha} \mathcal{I}_1. \quad (3.37)$$

Temos, de acordo com [45], que a transformada de Fourier da função que desejamos é dada por

$$F[(c^2 + P)^\delta] = \frac{2^{\delta+1} (\sqrt{2\pi})^D c^{\frac{1}{2}n+\delta} K_{\frac{1}{2}n+\delta}(cQ^{\frac{1}{2}})}{\Gamma(-\delta) \sqrt{\Delta} Q^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n+\delta)}}, \quad (3.38)$$

onde F designa a transformada de Fourier da expressão entre colchetes. P é a forma quadrática do espaço de origem, δ e c^2 são constantes, Δ é o determinante dos coeficientes de P . Q é a parte quadrática da forma dual associada e n é a dimensão do espaço.

Aplicando a fórmula (3.38) em (3.36) após efetuar a rotação de Wick, temos que $\delta = -\alpha = -1$. Como a parte quadrática do espaço de origem já foi “euclidianizada”, resulta que P é positivo-definido, logo $\Delta = 1$. Com isso, a resposta em Q também é dada em termos da métrica euclidiana, ou seja, $Q = \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\mu = (\vec{\tilde{p}})^2 = |\Theta|^2 |\vec{p}|^2$. Logo, Q é uma forma quadrática positivo-definida. Reescrevendo este resultado em termos da métrica de Minkowski, temos ⁸,

$$Q = -\tilde{p}^\mu \tilde{p}_\mu = -\tilde{p}^2. \quad (3.39)$$

A parte constante é simplesmente $c^2 = M^2 = m^2$ e $n = 4$.

Temos então que (3.36)

$$I = -\frac{\lambda}{12\pi^2} \frac{1}{\sqrt{Q}} K_1(c\sqrt{Q}) \quad (3.40)$$

Uma expansão de K_1 para altos momentos mostra que a integral é bem definida nesta região. Entretanto, para pequenos argumentos em K_1 , temos $K_1(z) \rightarrow \frac{1}{z} + \frac{z}{2} \ln \frac{z}{2}$. Isto mostra que o limite de $\tilde{p} \rightarrow 0$ é quadraticamente divergente. Este cálculo quando levado em conta em ordens superiores destrói a renormalizabilidade do modelo. A figura 3.2 mostra um exemplo da inserção do diagrama em ordens superiores da expansão. Esse diagrama possui uma divergência infravermelha não-integrável da forma $d^4 k \frac{1}{[k^2]^n}$, sendo n o número de inserções.

⁶A rotação é feita com um ângulo de 90° tomada no sentido anti-horário.

⁷É muito importante observar que a rotação de Wick não altera o produto entre k e \tilde{p} . Por estarmos com $\Theta_{0i} = 0$, não há componente temporal do produto entre esses espaços, logo $k^\mu \tilde{p}_\mu = k_1 \tilde{p}_1 + k_2 \tilde{p}_2$.

⁸Os resultados das integrais não-planares feitas ao longo desta tese estão de acordo com a equação (3.39).

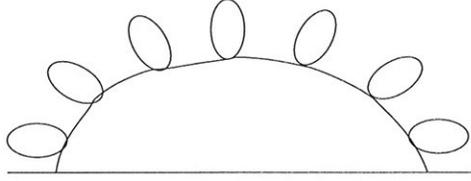


Figura 3.2: Exemplo de inserção de divergências infravermelhas.

Em teorias quânticas locais a permutação entre a operação de ordenação temporal e derivadas de ordem finita no espaço-tempo não tem nenhuma implicação física. Isto porque o comutador entre essas operações dispensa “termos de contato” nas coordenadas temporais. Ou seja, do ponto de vista das funções de Green somente se tem uma contribuição não nula desses termos quando os campos tomam valores no mesmo instante. Sendo a operação de ordenação temporal não definida para tempos iguais podemos nos restringir aos casos em que os campos tomam valores em tempos distintos. Nesse caso o termo adicional não contribui e nenhuma informação física é perdida.

No caso de teorias contendo o produto Moyal com $\Theta_{0i} \neq 0$ este intercambio não se realiza impunemente. Isto porque a exponencial envolvendo a componente temporal implica em uma teoria não-local no tempo. Assim sendo a função é deslocada da origem e o termo adicional passa a contribuir em instantes diferentes. Desse modo, ocorre perda de informação e conseqüentemente à perda de unitariedade. Os primeiros a verificar falha neste procedimento no caso de teorias não-comutativas foram J. Gomis e T. Mehen [46]. Para ilustrar o problema de quebra da unitariedade [46] foi considerada a primeira correção para a função de dois pontos num modelo com auto-interação ϕ^3 em $D = 4$

$$S_{int} = \int d^4x \phi * \phi * \phi \quad (3.41)$$

De acordo com a equação ⁹ (3.26), a amplitude proporcional a esse gráfico é dada por

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1 + \cos(p \wedge k)}{[(k-p)^2 - m^2][k^2 - m^2]} \quad (3.42)$$

No espaço coordenado essa amplitude é proporcional a

$$\Delta_F(x)\Delta_F(x) + \Delta_F(x) * \Delta_F(x) \quad (3.43)$$

A condição de unitariedade do modelo expressa em termos do teorema ótico é mostrada na figura 3.3.

Figura 3.3: Condição de unitariedade para o modelo com auto-interação ϕ^3 expressa em termo do teorema ótico.

⁹Em verdade, (3.41) é um caso particular de (3.26).

Expressando o propagador de Feynman na forma

$$\Delta_F(x) = \theta(x^0)\Delta^+(x) + (1 - \theta(x^0))\Delta^-(x) \quad (3.44)$$

$$\Delta^+(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{2w_k} e^{i(k_0x_0 - \vec{k}\cdot\vec{x})} \quad , \quad \Delta^-(x) = -\Delta^+(-x)$$

e $\theta(x^0)$ a função de Heaviside. De acordo com a expressão diagramática em 3.3, verifica-se então que

$$\Delta_F^2 + \overline{\Delta_F^2} = \Delta_-^2 + \Delta_+^2 \quad (3.45)$$

A ausência do termo cruzado $\Delta_- \Delta_+$ é justificada pelo fato que $\theta(1 - \theta) = 0$. Entretanto, para a parte não-planar (o segundo termo em (3.42))

$$\Delta_F(x) * \Delta_F(x) + \overline{\Delta_F(x) * \Delta_F(x)} = \Delta_+ * \Delta_+ + \Delta_- * \Delta_- + \Delta_{ret} * \Delta_{av} + \Delta_{av} * \Delta_{ret} \quad (3.46)$$

em que Δ_{av} e Δ_{ret} correspondem respectivamente as funções de Green avançada e retardada da teoria livre. A quebra de unitariedade decorre do resultado não nulo do produto dos dois últimos termos em (3.46). Isto acontece porque, devido a presença do produto Moyal coordenadas temporais passam a não comutar com as coordenadas espaciais. Nesse sentido a operação de ordenação temporal (função de Heaviside) não comuta com a contração entre os campos. Na situação em que a não-comutatividade é do tipo espaço-espaço, ou seja $\Theta_{0i} = 0$, temos

$$\Delta_{ret} * \Delta_{av} \approx \theta(1 - \theta)f(x) = 0 \quad (3.47)$$

sendo $f(x)$ é uma função do quadrivetor x . Neste caso a parte não-planar pode ser substituída por $\theta\Delta_+ * \Delta_+ + (1 - \theta)\Delta_- * \Delta_-$. Com isso, ao se considerar a contribuição da parte complexo-conjugada ficamos com $\Delta_+ * \Delta_+ + \Delta_- * \Delta_-$ como contribuição da parte não-planar, de modo que a unitariedade está sendo preservada. Para o caso mais geral envolvendo não-comutatividade espaço-temporal a unitariedade pode então ser reestabelecida calculando primeiramente o produto Moyal das lagrangeanas de interação com a ordenação temporal sendo feita posteriormente [47]. Deste modo a ordenação temporal é separado dos produtos não-locais. Entretanto, conforme discutido nesta seção o procedimento usual de teoria quântica de campos no caso da não-comutatividade não envolver o tempo pode ser utilizado sem que a unitariedade seja afetada ¹⁰.

¹⁰. Além deste procedimento pode-se adotar uma abordagem covariante de teorias perturbativas. A idéia é resolver perturbativamente uma equação inomogênea e não-local (a equação de Yang Feldman). Entretanto, este método mostra-se bastante laborioso [?].

3.5 Simetrias de calibre

Ao longo deste capítulo desenvolvemos a introdução da não-comutatividade via alteração da regra de multiplicação dos campos. Vejamos como ficam as simetrias locais quando submetidas à leis de transformações que são afetadas pela não-comutatividade. Ou seja, analisaremos como se comporta uma simetria de calibre em um espaço não-comutativo. Como vimos, a versão não-comutativa de uma teoria de campo é obtida substituindo o produto usual de campos pelo produto estrela. Quando aplicamos o produto estrela sobre a lei de transformação do campo, temos que ao expandirmos a transformação em uma série, tal expansão passa a não comutar com o campo transformado. Com isso compreende-se que para manter uma teoria invariante por uma transformação local o ordenamento de campos necessita ser bem determinado. Desta maneira, encontrando um ordenamento conveniente, os objetos transformados, e por consequência o produto deles, podem manter a propriedade de invariância pela transformação a que foram submetidos.

Como exemplo olharemos a estrutura da ação da eletrodinâmica escalar não-comutativa com simetria $U(1)$. Temos então,

$$S_{YM} = -\frac{1}{4e^2} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.48)$$

A simetria $U(1)$ não-comutativa é definida por

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = U(x) * A_\mu * U(x)^{-1} + iU(x) * \partial_\mu U(x)^{-1} \quad (3.49)$$

onde

$$U(x) = \exp * (i\Lambda) \equiv 1 + i\Lambda - \frac{1}{2}\Lambda * \Lambda + \dots \quad (3.50)$$

Sob a lei de transformação acima, a transformação de calibre de $F_{\mu\nu}$ é dada por

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = U(x) * F_{\mu\nu} * U(x)^{-1} \quad (3.51)$$

Para provar a invariância da ação usamos as igualdades

$$U(x) * U(x)^{-1} = U(x)^{-1} * U(x) = 1 \quad (3.52)$$

Conjuntamente a isto, utilizamos a propriedade de ciclicidade do produto estrela sob uma integral. Com isso demonstra-se imediatamente que

$$S_{YM} \rightarrow S'_{YM} = -\frac{1}{4e^2} \int d^4x U(x) * F_{\mu\nu} * U(x)^{-1} * U(x) F^{\mu\nu} * U(x)^{-1} \quad (3.53)$$

mantém-se invariante sob a transformação de calibre definida acima.

Mesmo sendo um grupo de simetria abeliano, as interações têm um caráter não abeliano. O papel da constante de estrutura é desempenhado pelo fator $2\text{sen}(\frac{1}{2}p \wedge p')$ [48], o qual é uma consequência do comutador Moyal. Vejamos como exemplo a interação

$$\begin{aligned} [A_\mu, A_\nu]_* &= A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu \\ &= \int d^4p d^4p' A_\mu(p) A_\nu(p') (e^{\frac{i}{2}p \wedge p'} - e^{-\frac{i}{2}p \wedge p'}) e^{i(p+p') \cdot x} \\ &= \int d^4p d^4p' 2i A_\mu(p) A_\nu(p') \text{sen}(\frac{1}{2}p \wedge p') e^{i(p+p') \cdot x} \end{aligned} \quad (3.54)$$

Para estender a invariância de calibre local para os campos de matéria, podem ser definidas leis de transformação para os férmions na forma

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x) * \psi(x) \quad (3.55)$$

e

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) * U^{-1}(x) \quad (3.56)$$

De acordo com essas leis de transformação define-se as derivadas covariantes correspondentes as mesmas.

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i A_\mu * \psi \quad (3.57)$$

$$D^\mu \bar{\psi} = \partial^\mu \bar{\psi} + i \bar{\psi} * A^\mu \quad (3.58)$$

ou seja, (3.57) e (3.58) mantém a mesma propriedade de transformação que os campos que as originaram. Temos também a possibilidade da lei de transformação da representação adjunta

$$\psi = U(x) * \psi * U^{-1}(x) \quad (3.59)$$

e

$$\psi^\dagger = U(x) * \psi^\dagger * U^{-1}(x) \quad (3.60)$$

que geram as seguintes derivadas covariantes,

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - i[A_\mu, \psi]_* \quad (3.61)$$

e

$$\bar{D}_\mu \bar{\psi} = \partial_\mu \bar{\psi} - i[A_\mu, \bar{\psi}]_* \quad (3.62)$$

Com isso podemos definir uma ação não-comutativa correspondente à eletrodinâmica fermiônica na forma [49],

$$S_{fermion} = i \int d^4x (\bar{\psi} \gamma^\mu * D_\mu \psi - m \bar{\psi} * \psi) \quad (3.63)$$

No espaço não-comutativo uma quantização de calibre respeitando invariância de BRST segue o mesmo princípio do produto especial (produto Moyal) utilizado até aqui. Sendo assim, os termos de fixação de calibre e os fantasmas de Faddeev-Popov são, respectivamente, escritos na forma

$$S_{BRST} = \int d^Dx \left(-\frac{1}{2\alpha} \partial_\mu A^\mu * \partial_\nu A^\nu + \frac{1}{2} (i\bar{c} * \partial_\mu D^\mu c - i\partial_\mu D^\mu c * \bar{c}) \right) \quad (3.64)$$

sendo $D^\mu c = \partial^\mu c - i[c, A^\mu]_*$.

Conforme discutimos nesse capítulo, por ser quadrático na presença de campos o termo de fixação de calibre não é alterado pelo produto Moyal. No caso dos fantasmas de Faddeev-Popov o termo de interação com o campo de calibre é não nulo mesmo com simetria de calibre $U(1)$. Isso é devido a presença do comutador Moyal.

Como último comentário, lembramos que numa expansão em laços o efeito da interação com o fantasma necessita ser levado em conta no primeiro cálculo perturbativo da teoria. O modelo CP^{N-1} em $D = 3$, por ser tratável apenas na expansão $1/N$, revela a contribuição do fantasma somente em ordem subdominante, ou seja, é de potência superior em $1/N$ em relação a primeira ordem não trivial (a ordem dominante é utilizada para determinar o propagador efetivo).

Capítulo 4

Representação Fundamental

4.1 Leis de transformação e invariância da ação.

Nos dois capítulos anteriores construímos o alicerce para investigar o modelo CP^{N-1} em um espaço não comutativo. Conforme vimos, os passos para estudar um modelo sob influência da não comutatividade são os seguintes:

- Passar do produto usual de campos para o produto estrela.
- Trabalhar com expansões das leis de transformação seguindo a estrutura do produto Moyal.
- Verificar quais são os ordenamentos de campos que se mantêm invariantes sob uma transformação envolvendo produto Moyal

Como base para o estudo do modelo CP^{N-1} comutativo temos a lagrangeana expressa na fórmula (2.4) e as leis de transformação (2.2) e (2.3), as quais fazem parte da única transformação abeliana possível no espaço comutativo.

Conforme visto no capítulo anterior ¹ a transformação de calibre no espaço não comutativo é dada por

$$U(x) = exp * (i\Lambda) \equiv 1 + i\Lambda - \frac{1}{2}\Lambda * \Lambda + \dots \quad (4.1)$$

Em semelhança com o caso fermiônico abordado no capítulo anterior a transformação Moyal-unitária na representação fundamental à esquerda é designada por

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U(x) * \phi(x) \quad (4.2)$$

e

$$\bar{\phi}(x) \rightarrow \bar{\phi}'(x) = \bar{\phi}(x) * U^{-1}(x) \quad (4.3)$$

é a chamada antifundamental. As transformações (4.2) e (4.3) geram, respectivamente, as seguintes derivadas covariantes

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - iA_\mu * \phi \quad (4.4)$$

¹Ver equação (3.50).

e

$$\bar{D}_\mu \phi^\dagger = \partial_\mu \phi^\dagger + i\phi^\dagger * A_\mu, \quad (4.5)$$

A não-comutatividade do espaço-tempo produz um caráter não abeliano no modelo mesmo para o caso de simetria de calibre $U(1)$. Deste modo passa a se ter como opção os campos se transformando de acordo com a representação adjunta (ver tabela 4.1), a qual é dada por

$$\phi \rightarrow U(x) * \phi * U^{-1}(x) \quad (4.6)$$

e

$$\phi^\dagger \rightarrow U(x) * \phi^\dagger * U^{-1}(x). \quad (4.7)$$

Analogamente ao que foi feito no capítulo anterior, do ponto de vista infinitesimal isto gera derivadas covariantes para os campos na forma,

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i[A_\mu, \phi]_* \quad (4.8)$$

e

$$\bar{D}_\mu \bar{\phi} = \partial \bar{\phi} - i[A_\mu, \bar{\phi}]_* \quad (4.9)$$

O campo de calibre transforma-se de acordo com

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = U(x) * A_\mu * U(x)^{-1} + iU(x) * \partial_\mu U(x)^{-1} \quad (4.10)$$

em qualquer representação (conforme expresso em (3.49).)

Em relação ao campo auxiliar λ há duas possibilidades de transformação que são permitidas, conforme mostrado na tabela 4.1.

Tanto para o caso dos campos principais se transformarem sob a representação fundamental à esquerda quanto a adjunta, trabalharemos com a lei de transformação adjunta para o campo auxiliar λ . Ou seja, para a situação dos campos de matéria se transformando com a representação fundamental, lidaremos com o ordenamento expresso na coluna 8 da tabela 4.1.

Implementando as substituições (4.4) e (4.5) e cumprindo o ordenamento discutido no parágrafo anterior para o campo auxiliar λ , temos que a lagrangeana básica dada por (2.4), no caso da representação fundamental no espaço não-comutativo é expressa por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \phi^\dagger * A_\mu * A^\mu * \phi - i\phi^\dagger * A_\mu * [\partial^\mu \phi] + i[\partial_\mu \phi^\dagger] * A^\mu * \phi \\ & - \lambda * \phi * \phi^\dagger + \lambda \frac{N}{g} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tomamos o campo do multiplicador de Lagrange se transformando com a representação adjunta por simplicidade. Dessa forma evitamos o propagador misto $\Gamma_{\lambda A_\mu}(p)$ originado pelo gráfico da figura 4.1. Com isto mantemos a semelhança com o caso comutativo, onde tal gráfico não contribui. De fato, com essa escolha as fases oriundas da não-comutatividade se cancelam tal que a amplitude associada a esse gráfico é

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(2k+p)_\mu}{[k+p]^2 - m^2][k^2 - m^2]} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int_0^1 dx \frac{p_\mu(1-2x)}{[k^2 - m^2 + p^2 x(1-x)]^2} = 0 \quad (4.12)$$

devido a (anti) simetria do integrando na troca $x \leftrightarrow (1-x)$.

Caso	Transformação do λ	Transformação do ϕ	Invariância da ação
1. $\lambda * \phi^\dagger * \phi$	identidade	fundamental	sim
2. $\lambda * \phi^\dagger * \phi$	adjunta	fundamental	não
3. $\lambda * \phi^\dagger * \phi$	adjunta	adjunta	sim
4. $\lambda * \phi^\dagger * \phi$	identidade	adjunta	não
5. $\lambda * \phi * \phi^\dagger$	adjunta	adjunta	sim
6. $\lambda * \phi * \phi^\dagger$	identidade	adjunta	não
7. $\lambda * \phi * \phi^\dagger$	identidade	fundamental	não
8. $\lambda * \phi * \phi^\dagger$	adjunta	fundamental	sim

Tabela 4.1: Propriedades de transformação dos possíveis ordenamentos envolvendo o campo λ .



Figura 4.1: Gráfico associado ao propagador do campo misto $\Delta(p)_{\lambda A_\mu}$.

4.2 Regras de Feynman

Da lagrangeana (4.11) tiramos as regras de Feynman na representação fundamental. Para as regras de Feynman no espaço não-comutativo temos que especificar quais campos estão participando da regra, a direção do momento que flui em cada linha e a posição que cada linha guarda em relação as outras. Pelo fato da não-comutatividade vir expressa em uma exponencial (ao invés de uma função trigonométrica como seno ou cosseno, conforme veremos a seguir), ocorre que a fase não-comutativa se cancela tanto para os gráficos do propagador efetivo do campo de calibre quanto para o gráfico que contribui para o propagador efetivo do campo auxiliar. Por esta razão os propagadores efetivos nesta representação não sofrem influência da não-comutatividade. Usando (2.14) e a lagrangeana (4.11) temos as contribuições em primeira ordem do termo $\phi^\dagger * A^\mu * A_\mu * \phi$ e em segunda do termo $-i\phi^\dagger * A^\mu * [\partial_\mu \phi] + i[\partial^\mu \phi^\dagger] * A_\mu * \phi$ para os gráficos do campo de calibre ². Para a função própria de dois pontos do campo auxiliar λ , temos em segunda ordem a contribuição do termo $-\lambda * \phi^\dagger * \phi$. Recordando as expressões deduzidas no capítulo 2, as contribuições dominantes nos comportamentos assintóticos dos propagadores dos campos λ e A_μ (no calibre de Landau ³)

²Para o campo de calibre, o fator cosseno proveniente da interação quadrilinear $\phi^\dagger * A^\mu * A_\mu * \phi$ não contribui, por conservação de momento.

³Ver comentários abaixo da fórmula (2.25) na página 11.

são dadas por

$$\Delta_\lambda(p) = \frac{8i\sqrt{-p^2}}{N}, \quad (4.13)$$

$$\Delta^{\mu\nu}(p) = -\frac{16i}{N} \left(g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right) \frac{1}{\sqrt{-p^2}}. \quad (4.14)$$

Em verdade, na representação fundamental à esquerda, excluindo alguns gráficos contendo o vértice quadrilinear, a não-comutatividade só é detectada em gráficos com mais de dois vértices. Veremos isso em detalhe mais adiante.

Para as interações, temos as seguintes regras de Feynman na representação fundamental ⁴

$$iA_\alpha(\phi\partial^\alpha\phi^\dagger - \partial^\alpha\phi\phi^\dagger) \quad \leftrightarrow \quad -i(2k+p)_\alpha e^{-ik\wedge p} \quad (4.15)$$

$$g_{\mu\nu}A^\mu A^\nu\phi\phi^\dagger \quad \leftrightarrow \quad ie^{-ik_1\wedge k_2} \cos(p_1 \wedge p_2)g_{\mu\nu} \quad (4.16)$$

$$\lambda\phi\phi^\dagger \quad \leftrightarrow \quad ie^{-ik\wedge p} \quad (4.17)$$

Com o objetivo de evitar possíveis problemas com causalidade [46, 47, 50] trabalharemos com $\Theta_{0i} = 0$.

4.3 Grau de divergência superficial e a lagrangeana reparametrizada.

Conforme demonstrado no capítulo 2, temos para um diagrama γ 1PI genérico o grau de divergência superficial $d(\gamma)$ dado por ⁵

$$d(\gamma) = 3 - N_A - \frac{N_\phi}{2} - 2N_\lambda - \frac{N_C}{2}. \quad (4.18)$$

em que N_A , N_ϕ , N_λ e N_C são o número de linhas externas associadas aos campos de calibre, ϕ , λ e os campos de fantasma, respectivamente. Os campos de fantasma somente irão contribuir em ordens superiores de $1/N$, não tendo nenhum efeito nos cálculos apresentados nesta tese.

Os termos de renormalização em uma teoria são provenientes de (sub) gráficos com $d(\gamma) \geq 0$. As divergências ultravioletas que contém uma estrutura de contratermo correspondente na lagrangeana são absorvidas pelo esquema usual de reparametrização das grandezas “nuas”.

Um dos objetos de interesse no presente trabalho é observar a invariância (ou não) de calibre sob o procedimento de renormalização. Definindo as quantidades renormalizadas como

$$\phi \rightarrow Z_\phi^{1/2}\phi = (1+b)^{1/2}\phi \quad (4.19)$$

⁴Ver figura 2.1 e comentários acima da seção 2.2 (pg 9).

⁵A demonstração do capítulo 2 não incluiu o cálculo da dimensão do campo do fantasma de Faddeev-Popov, o qual é similar aos demais. Não é difícil perceber (pelo acoplamento trilinear com o campo de calibre) que esse campo tem a mesma dimensão do campo principal.

$$A_\mu \rightarrow Z_A A_\mu = (1 + a)A_\mu \quad (4.20)$$

$$\lambda \rightarrow Z_\lambda^{1/2} \lambda = (1 + c)\lambda \quad (4.21)$$

$$1/g \rightarrow Z_g/g = (1 + d)/g \quad (4.22)$$

obtemos,

$$D_\mu \phi \rightarrow Z_\phi^{1/2} (D_\mu \phi)_R \quad (4.23)$$

onde $(D_\mu \phi)_R = \partial_\mu \phi - iZ_A A_\mu * \phi$ é a derivada covariante renormalizada do campo ϕ . Com essas alterações a lagrangeana total toma a forma,

$$\mathcal{L} = D_\mu \phi^\dagger * D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi + \lambda * \phi * \phi^\dagger + \lambda \frac{N}{g} + \mathcal{L}_{ct} \quad (4.24)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ct} = & b \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi + B(-i \partial_\mu \phi * \phi^\dagger * A^\mu + i \partial^\mu \phi^\dagger * A_\mu \phi) + C(\phi^\dagger * A^\mu * A_\mu * \phi) \\ & - m^2 b \phi^\dagger \phi + D \lambda * \phi * \phi^\dagger - F N \frac{\lambda}{g} \end{aligned} \quad (4.25)$$

sendo

$$B = (1 + a)(1 + b) - 1 \quad (4.26)$$

$$C = (1 + a)^2(1 + b) - 1 \quad (4.27)$$

$$D = (1 + c)(1 + a) - 1 \quad (4.28)$$

$$F = (1 + c)(1 + d) - 1 \quad (4.29)$$

Estes contratermos podem ser usados não só para absorver as divergências ultravioletas das funções de dois pontos do campo ϕ e outras funções vértices envolvendo o campo de calibre A_μ , mas também para impor $\langle \lambda \rangle = 0$ e o parâmetro m como sendo a confirmação da massa física do campo ϕ .

Na análise de renormalização ultravioleta o uso das identidades diagramáticas discutidas no capítulo 2 deve ser levado em conta. Entretanto, não é óbvio que as identidades diagramáticas se mantenham no espaço não-comutativo. Na aplicação deste procedimento observam-se os fatores que permitem o uso dessas identidades tanto no contexto planar (importante na renormalização ultravioleta) quanto no não-planar (que influencia na região do infravermelho). A aplicação da identidade diagramática 2.4b referente aos vértices quadrilineares nos permitiu concluir que para

os gráficos contendo tal vértice ocorre um cancelamento aos pares entre os diagramas originais e os expandidos. Como consequência disso os gráficos contendo vértices quadrilíneos não precisam ser considerados do ponto de vista de divergência ultravioleta ⁶. Ainda assim o contratermo relacionado à função de vértice $\phi^\dagger A^\mu A^\nu \phi$ necessita ser considerado no estudo da invariância de calibre do modelo.

Assim como no caso comutativo, o contratermo de massa do campo ϕ é inócuo uma vez implementada a identidade diagramática do modelo (ver última seção do capítulo 2). O contratermo D associado à função de vértice $\langle \lambda \phi^\dagger \phi \rangle$ também não desempenha função desde que consideremos apenas funções de Green dos campos ϕ e A_μ (sem linhas externas do campo λ). Neste caso a escolha deste contratermo é livre e a renormalização do campo λ é irrelevante. Isto quer dizer que pela nossa abordagem qualquer função contendo o campo λ (ex. “tadpole”, $\langle \lambda \phi^\dagger \phi \rangle$, etc...) serão consideradas apenas quando conectadas às funções de Green com linhas externas de campos com interpretação física definida (campos ϕ e A_μ).

Referente às divergências ultravioletas, podemos dividir a análise em dois grupos. O primeiro composto por processos que contém uma estrutura correspondente na lagrangeana e o segundo onde tal estrutura não existe.

O primeiro é dado por

1. Gráficos com $N_\lambda = 1$; $N_\phi = 2$,
2. Gráficos com $N_\lambda = 0$ e $N_\phi = 2$,
3. Gráficos com $N_A = 1$ e $N_\phi = 2$,
4. Gráficos com $N_A = 2$ e $N_\phi = 2$.

Os casos (2-4) são relacionados com a parte da derivada covariante da lagrangeana e estão portanto conectados pela invariância de calibre.

Para o segundo grupo temos as seguintes possibilidades

5. Gráficos com $N_A = 0$ e $N_\phi = 4$,
6. Gráficos com $N_A = 0$ e $N_\phi = 6$,
7. Gráficos com $N_A = 1$ e $N_\phi = 4$,
8. Gráficos com $N_A = 2$ e $N_\phi = 0$,
9. Gráficos com $N_A = 3$ e $N_\phi = 0$.

Temos ainda uma divergência associada à gráficos contendo $N_\lambda = 1$, $N_\phi = 0$ e $N_A = 1$. Entretanto, conforme frisamos anteriormente, ao tomarmos o campo λ se transformando de acordo com a representação adjunta, evitamos a presença de fase no diagrama 4.1 e com isso mantemos a semelhança com o caso comutativo, onde tal gráfico não contribui, devido a invariância de Lorentz.

Em todos os casos deve-se tomar cuidado com a presença de divergências infravermelhas que possam causar danos ao procedimento perturbativo de renormalização (ou seja, aquelas de ordem superior à logarítmica). Entretanto, antes de um estudo detalhado da invariância de calibre para o primeiro grupo (1-4) torna-se importante examinar a existência de possíveis divergências infravermelhas neste setor.

⁶O diagrama mais a direita em 2.2b aparece como exceção à esta regra devido a impossibilidade de se aplicar a identidade 2.4b sobre o próprio, pois seria gerado como subdiagrama o gráfico de “tadpole” do campo λ , o qual já foi levado em conta.

$$\Sigma(p) = \text{(a)} + \text{(b)} + \text{(c)} + \text{(d)}$$

Figura 4.2: Caso 2. Correções de auto-energia do campo de matéria.

4.4 Análise das divergências infravermelhas

Como sublinhamos na secção anterior o uso das identidades diagramáticas no contexto não-comutativo é um dos focos de observação neste trabalho. A partir do estudo dos diagramas não-planares (em especial aqueles com um mau comportamento no ultravioleta quando a fase não-comutativa não é considerada) é possível concluir que a identidade é válida no contexto não-comutativo e portanto aplica-se aos casos envolvendo divergências infravermelhas. Entre os casos de divergência listados pelo grau de divergência superficial ultravioleta há os que não apresentam as divergências infravermelhas que surgiriam pelo efeito da mistura. São esses os casos 2 e 8 associados aos propagadores do campo ϕ e do campo de calibre respectivamente, e o caso 9 ($N_A = 3$). O caso 2 é inclusive o que exhibe a pior divergência no modelo; é quadrática (ver tabela 2.1 no capítulo 2). Ocorre que nos diagramas de auto-energia do campo ϕ as fases não-comutativas se cancelam e o resultado é o mesmo do caso comutativo. O mesmo vale para a função própria do campo de calibre (caso 8). O caso 9, no contexto comutativo, não contribuiria devido a conjugação de carga (as contribuições são dadas por três linhas do campo A_μ conectadas a um laço bosônico do campo ϕ .) Isto quer dizer, quando adotada a circuitação nos dois percursos de carga, teríamos um resultado nulo. No modelo não-comutativo as contribuições permanecem planares (com a fase dependendo só dos momentos externos). Apesar disso, a fase muda de sinal conforme o caminho da carga, e isto acarreta uma contribuição planar não-nula (porém finita).

Ocorrem no modelo divergências infravermelhas que não são perigosas à renormalizabilidade por serem integráveis na origem (divergências logarítmicas). Estão estas expressas nos casos: 1, 4, 6, 7. As divergências realmente nocivas à renormalizabilidade são dadas pelos casos 3 e 5. O caso 3, o qual envolve o campo de calibre, é feito em detalhe. Neste evento forneceremos o argumento que generaliza o uso da identidade 2.4a tanto para o caso planar quanto para o não-planar na representação fundamental. O caso 5 será tratado minuciosamente na situação dos gráficos planares (divergências ultravioletas) quando será utilizado o esquema de BPHZ para demonstrar o cancelamento total das subdivergências envolvidas na função de 4 pontos do campo ϕ .

4.4.1 Caso 2. Gráficos com $N_\lambda = 0$ e $N_\phi = 2$.

Para o caso 2, gráficos com $N_\lambda = 0$ e $N_\phi = 2$ (auto energia do campo ϕ), as três contribuições na figura 4.2 são puramente planares e portanto são livres da mistura IV/UV . O mesmo ocorre com os diagramas da figura 4.3.

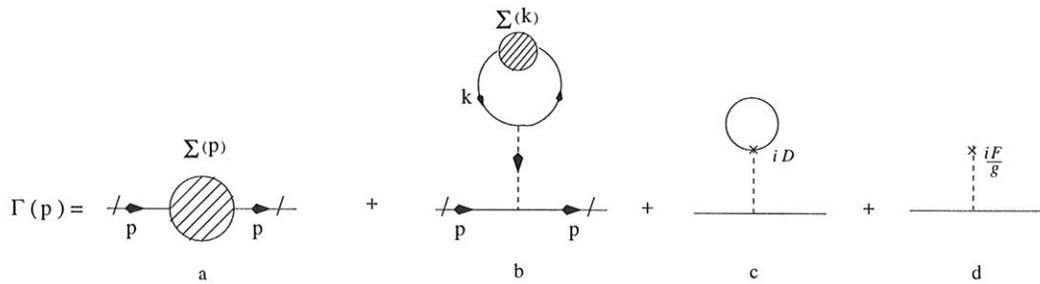


Figura 4.3: Estrutura gráfica da função de dois pontos do campo ϕ . Os diagramas hachurados representam diagramas que são 1PI com respeito a todos os outros campos.

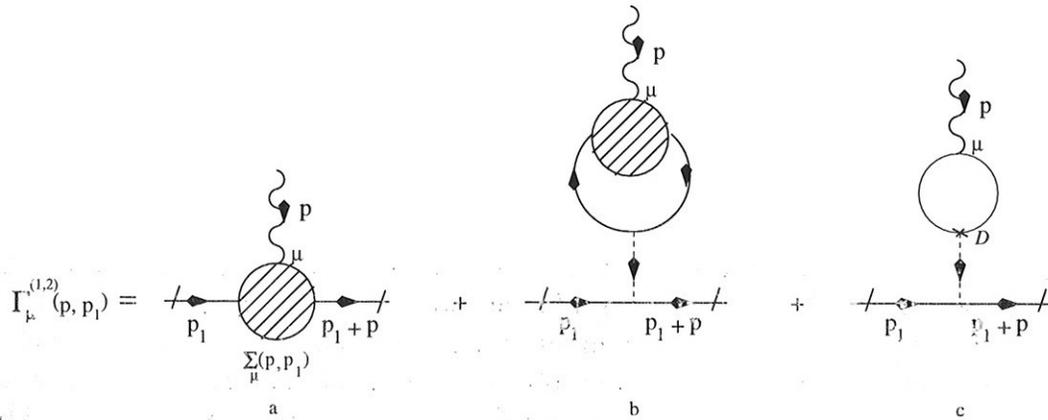


Figura 4.4: Estrutura geral da função de vértice A_μ e ϕ .

4.4.2 Caso 3. Gráficos com $N_A = 1$ e $N_\phi = 2$.

Para o caso 3, a análise é mais complexa. Sabemos que o comportamento da parte não-planar tem uma dependência direta com a correspondente parte planar, no sentido que o comportamento do setor infravermelho também é melhorado pela nossa escolha de um calibre transversal. Um outro fator que restringe o número de diagramas perigosos é a presença de subdiagramas proibidos ou nulos (ver figuras 2.2 e 4.1). Portanto, qualquer gráfico contendo estes diagramas serão considerados como diagramas ilegais.

Quanto aos gráficos contendo uma interação quadrilinear $A^\mu A^\nu \phi^\dagger \phi$ permanece válido o uso da identidade diagramática da figura 2.4b discutida no capítulo 2. Com isso, para a função de três pontos, temos somente os diagramas da figura 4.5. A figura 4.4 contém a estrutura geral dos gráficos que contribuem para a correção da função de vértice $A_\mu \phi^\dagger \phi$. Na figura 4.4b há vários diagramas implícitos, alguns dos quais, estão plotados na figura 4.6.

Vamos em primeira instância nos ater aos diagramas da figura 4.5 por conter todas as contribuições para a parte própria desta função de vértice. Analisando os gráficos deste figura percebe-se que os dois primeiros são puramente não-planares, ou seja, eles não apresentam parte planar e portanto são finitos na região ultravioleta. Em compensação podem originar divergências infravermelhas não-integráveis. Os gráficos restantes podem ser classificados em dois grupos de acordo com a direção do fluxo de carga no laço bosônico superior. Se o fluxo no laço é no sentido horário o diagrama é planar; caso contrário é não-planar. No caso comutativo os gráficos contendo um

número ímpar de linhas de bósons de calibre ligadas a um laço bosônico apresentariam um resultado nulo quando tomadas as contribuições nos dois sentidos de carga (o equivalente bosônico do Teorema de Furry). Isto deixa de ser válido no caso não-comutativo e é uma indicação que a conjugação de carga é perdida neste contexto

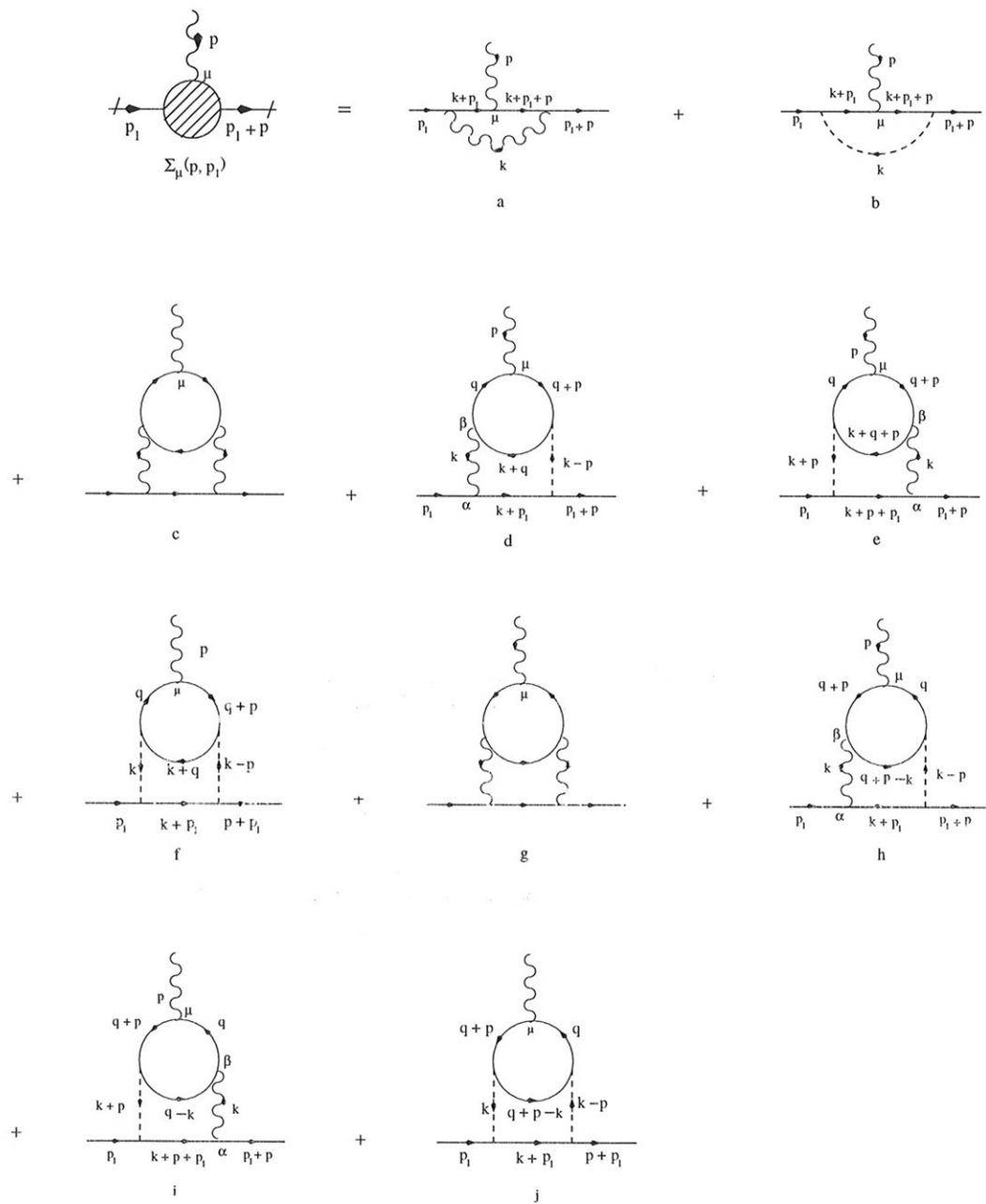


Figura 4.5: Caso 3. Contribuições para a função de vértice $A_\mu \phi^\dagger \phi$.

Considerando o diagrama de um laço 4.5a, temos que este é finito devido a transversalidade do propagador $\Delta_{\rho\sigma}$ (ver fórmula (4.14)) e apresenta uma expressão analítica dada por

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(2k\wedge p - p\wedge p_1)} \frac{[2(k+p_1)+p]_\mu [2(p_1+p)]_\rho 2p_{1\sigma}}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k+p_1+p)^2 - m^2]} \Delta_{\rho\sigma}(k). \quad (4.30)$$

Devido ao comportamento assintótico de $\Delta_{\rho\sigma}(k)$, esta integral é finita mesmo sem a presença do fator de fase e, deste modo, é livre de singularidades infravermelhas. Contrariamente, o gráfico 4.5b é linearmente divergente em $p = 0$. Para entender como se procede o cancelamento desta divergência, escrevamos a amplitude correspondente na forma

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(2k\wedge p - p\wedge p_1)} I_\mu(k, p, p_1) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(2k\wedge p - p\wedge p_1)} [I_\mu(k, 0, 0) + R_\mu(k, p, p_1)], \quad (4.31)$$

onde

$$I_\mu(k, p, p_1) = \frac{[2(k+p_1)+p]_\mu}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k+p_1+p)^2 - m^2]} \Delta_\lambda(k) \quad (4.32)$$

e a integral com $R_\mu(k, p, p_1)$ é no máximo logaritmicamente divergente quando a fase é omitida. Os integrandos não-planares (ou seja, aqueles contendo uma fase misturando momentos interno e externo) são tratados como uma transformada de Fourier generalizada do momento usual para o momento $\tilde{p}^\mu = \Theta^{\mu\nu} p_\nu$ (ver referência [45]). Explicitamente,

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(2k\wedge p - p\wedge p_1)} I_\mu(k, 0, 0) = \text{Cte} \frac{\tilde{p}^\mu}{\tilde{p}^2} e^{ip\wedge p_1}, \quad (4.33)$$

Usamos neste momento a identidade mostrada na figura 2.4a e discutida na análise do propagador do campo λ . O resultado é o gráfico expandido mostrado na figura 4.6a. Este gráfico é obtido a partir do gráfico 4.5b (gráfico original) unindo-se as linhas externas do campo ϕ em um novo vértice trilinear $\lambda\phi^\dagger\phi$ e em seguida bifurcando em um outro vértice trilinear da mesma interação.

O gráfico 4.6a é também divergente no infravermelho pois contém o gráfico 4.5b como subdiagrama, em concordância com a caixa desenhada na figura 4.6a. A amplitude para este diagrama é dada por

$$J_\mu = [-i] \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{-i(2k\wedge p - p\wedge p_1)} I_\mu(k, p, q) \frac{1}{(q^2 - m^2)[(q+p)^2 - m^2]} \Delta_\lambda(p) \quad (4.34)$$

sendo

$$I_\mu(k, p, q) = (2k + 2q + p)_\mu \frac{1}{[(k+q)^2 - m^2][(k+q+p)^2 - m^2]} \Delta_\lambda(k) \quad (4.35)$$

Mantendo o momento interno contido na caixa tracejada, expandimos $I_\mu(k, p, q)$ em torno de $p = q = 0$. Após a expansão, usamos para a parte não contida na caixa as fórmulas (2.17) e (2.19),

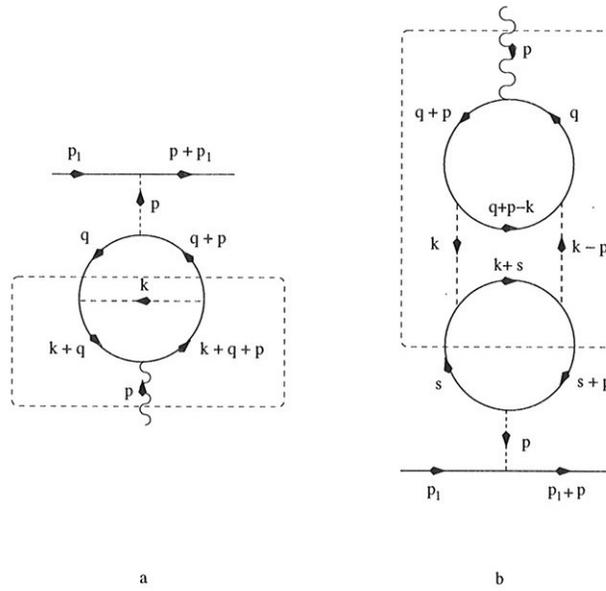


Figura 4.6: Diagramas expandidos dos gráficos 4.5b e 4.5f por meio da identidade 2.4a.

as quais fornecem a relação entre o propagador do campo λ e a parte extra. Reduzimos então a parte adicional do diagrama a um ponto com sinal negativo. Como resultado, obtemos,

$$J_\mu = -\text{Cte} \frac{\tilde{p}^\mu}{\tilde{p}^2} e^{ip \wedge p_1} + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} e^{-i(2k \wedge p - p \wedge p_1)} R_\mu(k, p, q) \frac{1}{(q^2 - m^2) [(q+p)^2 - m^2]} \Delta_\lambda(p) \quad (4.36)$$

Então, adicionando as contribuições (4.33) and (4.36), temos o cancelamento das divergências *IV* nocivas ao modelo. Com isto torna-se clara a correspondência entre os diagramas 4.5b e 4.6a. Este é um uso mais complexo da identidade 2.4a exposta no capítulo 2. Este cancelamento ocorre pelos seguintes motivos. Os gráficos original e expandido tem sempre a mesma fase. Pode ser facilmente verificado que os dois vértices adicionais do gráfico expandido não alteram a fase do gráfico original. Portanto, sem influências não-planares sobre a parte suplementar do gráfico 4.6a, a identidade gráfica 2.4a que relaciona o propagador do campo λ e a “bolha” adicional permanece válida e inclusa na expansão do integrando (4.34).

Baseados nestes argumentos, conclui-se que o cancelamento da divergência mais alta sempre ocorre entre os gráficos original e expandido (não importando se esta é *IV* ou *UV*). Entretanto, em geral, a divergência global do gráfico expandido como um todo é menor que a do gráfico original por uma unidade.

Prosseguindo com o tratamento na região *IV*, temos ainda divergências infravermelhas provenientes da família de gráficos de dois laços da figura 4.5 as quais são, conforme mencionado, produtos da escolha do fluxo de carga no sentido anti-horário para os laços superiores nos diagramas 4.5d, 4.5e e 4.5f. Os dois primeiros contém interações trilineares e o propagador do campo de calibre e portanto tem o grau de divergência decrescido em uma unidade devido a escolha de um calibre transversal. Deste modo, tais diagramas não são perigosos ao modelo.

Para dar conta da perigosa divergência infravermelha proveniente do diagrama 4.5f, temos o gráfico 4.6b e obtemos um cancelamento análogo ao caso anterior dos gráficos 4.5b e 4.6a.

4.4.3 Caso 4. Gráficos com $N_A = 2$ e $N_\phi = 2$.

Esta possibilidade caracteriza gráficos associados a funções de 4 pontos $\langle A_\mu A_\nu \phi^\dagger \phi \rangle$. Pelo grau de divergência superficial dessa função sabe-se que nenhuma divergência maior que logarítmica pode surgir do setor infravermelho. Além disso ao utilizar a identidade 2.4b nos vértices quadrilíneos ocorre um cancelamento total entre os diagramas originais e os expandidos.

A seguir trataremos a região infravermelha do segundo grupo (casos 5-8). Como foi discutido, os gráficos gerados com o objetivo de explorar as identidades 2.4a e 2.4b continuam desempenhando o papel esperado mesmo dentro da formulação não-comutativa quando os campos principais se transformam de acordo com a representação fundamental.

4.4.4 Caso 5. Gráficos com $N_A = 0$ e $N_\phi = 4$.

No que diz respeito a contribuição para a função de quatro pontos do campo ϕ , há dois tipos de contribuições a serem consideradas. Os gráficos na primeira linha da figura 4.7 são linearmente divergentes no ultravioleta, enquanto que os da segunda linha são não-planares e contém o fator de fase oscilante que controla o comportamento ultravioleta destes diagramas.⁷ Vejamos a expressão analítica para o gráfico 4.7b, o qual apresenta a divergência mais perigosa no infravermelho.⁸

$$\Gamma_{4.7a}^{(4)} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Delta(k+p_1) \Delta(k-p_2) \Delta_\lambda(k+p_1-p_3) \Delta_\lambda(k) e^{i[2k \wedge (p_1+p_2-p_3) - p_1 \wedge p_2 - p_1 \wedge p_3 - p_2 \wedge p_3]}. \quad (4.37)$$

Na última seção do capítulo 2 exemplificamos o recurso da identidade diagramática do modelo no cancelamento de divergências da função de quatro pontos do campo ϕ . Entretanto, esta é uma situação em que há mistura entre momentos externos e interno. Conforme visto no caso da função de três pontos $\langle A_\mu \phi^\dagger \phi \rangle$, tratada na subseção 4.4.2, o cancelamento da divergência mais alta entre o diagrama original e expandido ocorre mesmo no caso não-comutativo. Os gráficos expandidos são obtidos semelhantemente ao tratamento do capítulo 2.⁹ Possuindo os diagramas expandidos e o original a mesma fase, o cancelamento da divergência dominante ocorre tal qual o procedimento citado no capítulo 2, valendo o mesmo comentário para os demais diagramas da primeira linha da figura 4.7. A diferença em relação ao caso comutativo é que a invariância de Lorentz não pode ser invocada para justificar a ausência da divergência subdominante proveniente dos termos de primeira derivada da expansão em série de Taylor dos integrandos. Entretanto, conforme exposto, essas divergências são apenas logarítmicas e não comprometem a renormalizabilidade do modelo por serem integráveis na origem. Em complemento ao exposto até aqui sobre a identidade diagramática no caso não-comutativo, temos a dizer que o sentido de carga no laço adicional do diagrama expandido desempenha um papel fundamental na renormalizabilidade do modelo. Para que o diagrama expandido tenha a mesma fase do diagrama original é necessário que o laço adicional tenha a mesma orientação de carga que as linhas externas que o originou.

Há ainda subdivergências ultravioletas contidas na função de quatro pontos. Essas divergências serão tratadas dentro da análise do regime ultravioleta do modelo.

⁷Os casos de divergência ultravioleta serão tratados posteriormente.

⁸Os demais gráficos são beneficiados pela escolha do calibre de Landau.

⁹Ver figura 2.8b. Para o presente caso substitui-se a linha ondulada pela linha tracejada.

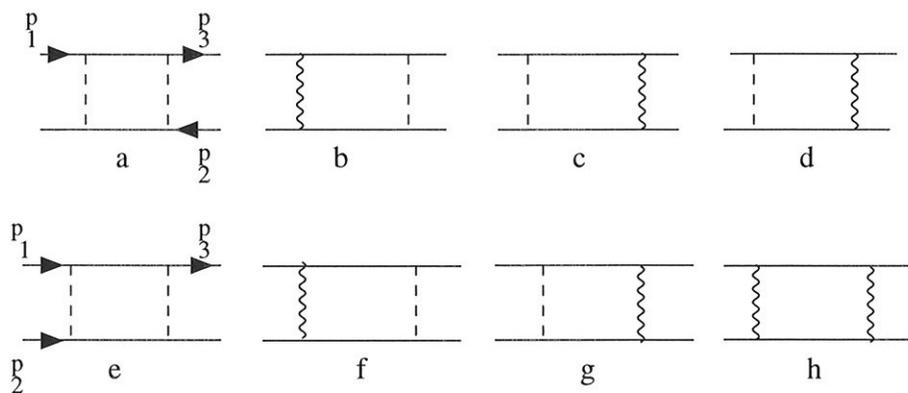


Figura 4.7: Caso 6. Função de quatro pontos do campo de matéria.

4.5 Análise das divergências ultravioletas

Conforme vimos na secção anterior, o estudo sobre o uso das identidades diagramáticas do modelo foi generalizado para o tratamento das divergências infravermelhas. Podemos então tratar de ambos os casos de divergência (ultravioleta e infravermelho) para o grupo de divergências restante. Vejamos como se procede o estudo de renormalizabilidade para o grupo não coberto por uma estrutura de contratermos

4.5.1 Caso 5. Gráficos com $N_A = 0$ e $N_\phi = 4$.

Vejamos as figuras 4.7 e 4.8. A primeira mostra as contribuições para função de 4 pontos excluindo contribuições contendo o vértice quadrilinear $\langle A_\mu A_\nu \phi^\dagger \phi \rangle$. Na figura 4.8 temos o diagrama original (mais a direita) e os diagramas expandidos a partir da identidade 2.4a. Para formar um diagrama expandido é necessário juntar linhas do campo ϕ em um laço completo só contendo este campo a fim de manter a mesma ordem em $1/N$ (ver última secção capítulo 2). Utilizando uma ou duas vezes a identidade 2.4a¹⁰, observa-se o cancelamento da divergência mais alta entre o gráfico original e os diagramas expandidos. No caso comutativo é sabido que o termo contendo uma derivada (termo seguinte na expansão do integrando, responsável pela divergência logaritmica) não contribui devido a invariância de Lorentz. Isto mantém-se válido para a contribuição planar de qualquer diagrama expandido¹¹. Com isso temos o desaparecimento total das divergências ultravioletas para esta função que era o caso mais perigoso do grupo restante. No caso planar, a fase não interfere, e portanto valem os mesmos argumentos para o cancelamento das divergências subdominantes expostos na ultima secção do capítulo 2.

Os gráficos da figura 4.9 envolvem uma estrutura complicada, uma vez que há diagrama de três laços envolvidos no conjunto. O cancelamento total das divergências necessita então ser investigado com maior detalhe. Considerando G como sendo o diagrama de três laços na figura 4.9, temos os seguintes subdiagramas divergentes: γ_1, γ_2 e τ , os quais também ocorrem como subgráficos nos

¹⁰Este é o número de vezes em que é possível construir diagramas expandidos, analogamente ao que foi feito depois da equação (4.33).

¹¹Isto pode ser facilmente visto rotulando para a parte explicitamente própria do diagrama extraído a mesma atribuição de momentos do diagrama original.

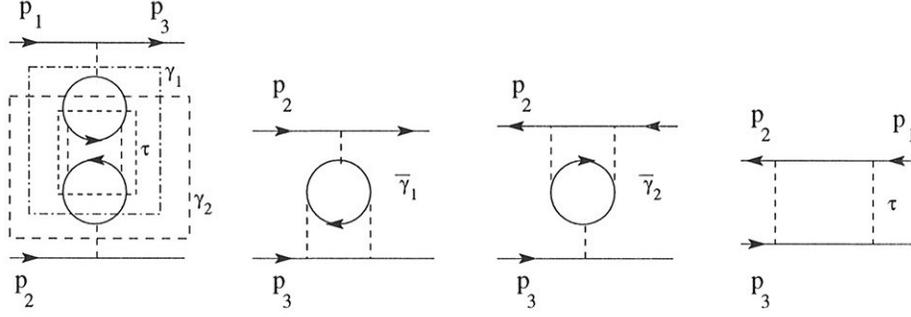


Figura 4.8: Usos possíveis da identidade 2.4a para o primeiro gráfico da figura 4.7.

diagramas $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ e τ conforme a mesma figura. Todos esses diagramas são planares e tem em comum a mesma fase não-comutativa $\exp i[p_1 \wedge p_2 - p_1 \wedge p_3 + p_2 \wedge p_3]$. Deste modo a fase é fator comum na soma desses diagramas. Na composição dos gráficos, γ_1 e γ_2 são acavalados e possuem τ como subgráfico.

No esquema de BPHZ ¹² as florestas de G são $\emptyset, \gamma_1, \gamma_2, \tau, \{\gamma_1, \tau\}$ e $\{\gamma_2, \tau\}$, sendo a amplitude subtraída associada ao gráfico G dada por

$$R_G = I_G - I_{G/\gamma_1} t_{\gamma_1}^0 I_{\gamma_1} - I_{G/\gamma_2} t_{\gamma_2}^0 I_{\gamma_2} - I_{G/\tau} t_{\tau}^1 I_{\tau} + I_{G/\gamma_1} t_{\gamma_1}^0 I_{\gamma_1/\tau} t_{\tau}^1 I_{\tau} + I_{G/\gamma_2} t_{\gamma_2}^0 I_{\gamma_2/\tau} t_{\tau}^1 I_{\tau}, \quad (4.38)$$

em que I_G representa a amplitude associada não renormalizada em relação ao gráfico G . $I_{G/\gamma}$ designa a amplitude associada ao gráfico reduzido G/γ obtido por contração do subgráfico γ de G a um ponto. Para um gráfico γ genérico, d_{γ} é definido como o operador de Taylor de ordem n no momento externo independente à γ com a condição de não atuar sobre o fator de fase não-comutativo. De forma análoga, as amplitudes subtraídas para os gráficos $\bar{\gamma}_1$, $\bar{\gamma}_2$ e τ são,

$$R_{\bar{\gamma}_1} = I_{\bar{\gamma}_1} - I_{\bar{\gamma}_1/\gamma_1} t_{\gamma_1}^0 I_{\gamma_1} - I_{\bar{\gamma}_1/\tau} t_{\tau}^1 I_{\tau} + I_{\bar{\gamma}_1/\gamma_1} t_{\gamma_1}^0 I_{\gamma_1/\tau} t_{\tau}^1 I_{\tau}, \quad (4.39)$$

$$R_{\bar{\gamma}_2} = I_{\bar{\gamma}_2} - I_{\bar{\gamma}_2/\gamma_2} t_{\gamma_2}^0 I_{\gamma_2} - I_{\bar{\gamma}_2/\tau} t_{\tau}^1 I_{\tau} + I_{\bar{\gamma}_2/\gamma_2} t_{\gamma_2}^0 I_{\gamma_2/\tau} t_{\tau}^1 I_{\tau} \quad (4.40)$$

e

$$R_{\tau} = I_{\tau} - t_{\tau}^1 I_{\tau} \quad (4.41)$$

Como consequência da identidade gráfica da figura 2.4a, $I_{G/\gamma_1} = I_{G/\gamma_2} = -I_{\bar{\gamma}_1/\gamma_1} = -I_{\bar{\gamma}_2/\gamma_2}$ e $I_{G/\tau} = -I_{\bar{\gamma}_1/\tau} = -I_{\bar{\gamma}_2/\tau}$.

$I_{G/\tau}$ é o próprio vértice trivial que surge na representação diagramática. Com isto somando-se todas contribuições os termos de subtração desaparecem. Os cancelamentos também incluem o diagrama τ que apresenta uma divergência linear (neste caso, o vértice reduzido associado a contração de τ a um ponto é relacionado a um polinômio linear no momento externo de τ). Isto prova que a soma de diagramas não subtraídos é finita.

¹²Ver detalhes no apêndice C.

4.5.2 Casos 6 e 7. Gráficos com $N_A = 1$ e $N_\phi = 4$; $N_\phi = 6$

Nestes dois casos também seriam válidas o recurso das identidades diagramáticas. Entretanto, quando se levam em conta os processos para esses casos sempre é encontrado a ocorrência de mistura entre momentos externos e internos. Deste modo, esses casos são compostos por gráficos não-planares e portanto, são convergentes na região de altos momentos.

De posse desses argumentos mostramos que o modelo não possui problema com respeito a divergências ultravioletas no esquema perturbativo e também não é afetado pelo efeito de mistura característico de modelos na formulação não-comutativa. Falta-nos então verificar qual a estrutura de contratermos para os casos do grupo (2-4), conseqüentemente, verificar a invariância de calibre do procedimento de renormalização.

4.5.3 Caso 2. Gráficos com $N_\phi = 2$.

As contribuições de ordem subdominante para o propagador do campo ϕ estão mostradas na figura 4.3. Todas elas são puramente planares, sendo que as divergências são inteiramente absorvidas pelos contratermos de massa e de função de onda do campo ϕ . As contribuições para a renormalização de função de onda (quadráticas no momento externo p) são provenientes dos gráficos 4.3a e 4.3b (o integrando em 4.3c não contém dependência com o momento externo).

Usando a regularização dimensional, obtém-se o seguinte resultado ¹³

$$\Sigma_\phi^{(a)}(p) = -i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{[(k+p)^2 - m^2]} \Delta^{\mu\nu}(k) = -i \frac{1}{N} \frac{64p^2}{3\pi^2\epsilon} + \text{termos finitos} \quad (4.42)$$

$$\Sigma_\phi^{(b)}(p) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} \Delta_\lambda(k) = i \frac{1}{N} \frac{4p^2}{3\pi^2\epsilon} + C_{div} + \text{termos finitos} \quad (4.43)$$

sendo $\epsilon = D - 3$ e C_{div} é uma constante infinita que contribuiria para a renormalização de massa do campo ϕ . Entretanto, as contribuições de massa cancelam-se entre as os diagramas 4.3a e 4.3b.

A parte divergente é então eliminada pelo contratermo $\frac{1}{N} \frac{60}{3\pi^2\epsilon} \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi$.

4.5.3 Caso 3. Gráficos com $N_A = 1$ e $N_\phi = 2$.

Para a análise de contratermos, estão dispensados os gráficos 4.5a e 4.5b, por não terem contribuição planar. Conforme comentado anteriormente, para se levar em conta as contribuições planares, o laço superior bosônico é percorrido no sentido horário. Os gráficos com pelo menos um vértice quadrilinear $A_\mu A^\mu \phi^\dagger \phi$ são completamente cancelados pelo uso da identidade gráfica 2.4b.

O gráfico 4.5c é finito pela escolha de calibre empregada. Na sequência listamos as contribuições divergentes provenientes do diagramas 4.5(d-f):

a. Gráfico 4.5d

¹³Os detalhes de cálculo encontram-se no apêndice B.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu(d)}^{(1,2)} &= -i4Ne^{-ip_1 \wedge p} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(2q+p)_\mu q_\beta p_{1\alpha} \Delta^{\alpha\beta}(k) \Delta_\lambda(k-p)}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2](q^2 - m^2)[(q+p)^2 - m^2]} \\
&= i(p_1)_\mu e^{-ip_1 \wedge p} \frac{32}{3N\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termos finitos}
\end{aligned} \tag{4.44}$$

b. Gráfico 4.5e

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu(e)}^{(1,2)} &= -iNe^{-ip_1 \wedge p} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(2q+p)_\mu (k+2q+2p)_\beta (k+2p+2p_1)_\alpha}{[(k+p+p_1)^2 - m^2][(k+q+p)^2 - m^2]} \\
&\quad \times \frac{\Delta^{\alpha\beta}(k) \Delta_\lambda(k+p)}{(q^2 - m^2)[(q+p)^2 - m^2]} \\
&= i(p_1 + p)_\mu e^{-ip_1 \wedge p} \frac{32}{3N\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termos finitos}
\end{aligned} \tag{4.45}$$

c. Gráfico 4.5f

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu(f)}^{(1,2)} &= -iNe^{-ip_1 \wedge p} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{(2q+p)_\mu \Delta_\lambda(k) \Delta_\lambda(k-p)}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} \\
&\quad \times \frac{1}{(q^2 - m^2)[(q+p)^2 - m^2]} \\
&= -i(2p_1 + p)_\mu e^{-ip_1 \wedge p} \frac{2}{3N\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termos finitos}
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Reunindo as três contribuições, temos

$$\Gamma_{\mu(d)}^{(1,2)} + \Gamma_{\mu(e)}^{(1,2)} + \Gamma_{\mu(f)}^{(1,2)} = i(2p_1 + p)_\mu e^{-ip_1 \wedge p} \frac{10}{N\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{termos finitos} \tag{4.47}$$

Uma vez que o termo proporcional ao momento p_μ do campo de calibre não induz contratermo (não temos um termo proporcional à $\partial_\mu A^\mu$ na lagrangiana), temos que a divergência acima é então eliminada por um contratermo na forma $\frac{10i}{N\pi^2\epsilon} A_\mu (\phi \partial_\mu \phi^\dagger - \partial_\mu \phi \phi^\dagger)$, logo $B = \frac{10}{N\pi^2\epsilon}$

Vejamos a consequência dos gráficos expandidos pelo uso da identidade 2.4a para a parte planar dos diagramas 4.5d-f. Ao se levar em conta todas as contribuições dos gráficos expandidos gerados pelos diagramas 4.5d e 4.5e temos que estes se cancelam entre si. No caso comutativo isto é uma consequência trivial da conjugação de carga sobre o laço adicional contendo uma única linha de bóson de calibre. No caso não-comutativo ocorre um outro rearranjo em pares que também proporciona um cancelamento total desses gráficos. Com isso, diferentemente do que veremos na função de 4 pontos, o contratermo da função de três pontos tem então um papel efetivo dentro do modelo.

4.5.4 Caso 4. Gráficos com $N_A = 2$ e $N_\phi = 2$.

Para o caso da função de vértice $\langle A^\mu A_\nu \phi^\dagger \phi \rangle$ levando em conta para cada gráfico o uso das identidades da figura 2.4 (em todas as maneiras possíveis) obtemos o cancelamento total das

divergências, uma vez que, devido o grau de divergência destes gráficos ($d = 0$) não há parte infinita além do termo de ordem dominante. Deste modo, qualquer que seja o contratermo para a função de 4 pontos, este será inócuo dentro do esquema de renormalização pois sempre teremos o cancelamento expresso na figura 2.4b. Uma possível influência de tal contratermo só seria verificada em uma ordem superior na expansão $1/N$. Uma possível detecção seria o estudo da transversalidade do campo de calibre em ordens mais altas do parâmetro da expansão. Em ordens superiores em $1/N$ teríamos a contribuição do vértice quadrilinear expresso em 2.4b contendo agora o valor do contratermo.

4.5.5 Caso 8. Gráficos com $N_A = 3$.

Conforme discutimos na secção 4.4, contribuições em ordem dominante para $\langle A_\mu A_\nu A_\eta \rangle$ (gráficos com três linhas externas do campo de calibre conectadas a um laço bosônico) não contribuiriam no caso comutativo. Nessa situação isso é consequência direta do teorema de Furry. O que acontece é que ao tomar um sentido de carga para percorrer o laço encontramos uma contribuição V_{er} dos fatores de momento nos vértices e ao considerar o sentido contrário obtemos uma contribuição $-V_{er}$. Ao somar as duas contribuições encontra-se um resultado nulo. A diferença para o caso não-comutativo são os fatores de fase. Ao tomar o percurso no sentido horário obtém-se $\exp[-i(p_1 \wedge p_2 + p_1 \wedge p_3 + p_2 \wedge p_3)]$ sendo p_1, p_2, p_3 os momentos externos entrando nos vértices. Ao tomar o percurso no sentido contrário obtemos essa mesma fase com o sinal trocado. Por ser uma fase planar (não misturar momentos internos e externos), esta não influencia a propriedade de paridade do integrando e deste modo a divergência mais alta (a qual é logarítmica e proveniente de uma integração ímpar em todo o espaço) não ocorre. O resultado é portanto, finito.

4.6 A invariância de calibre do procedimento de renormalização

Na equações (4.25)-(4.27) temos duas renormalizações independentes, a e b , que determinarão os contratermos $b\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ e os coeficientes B e C . Uma vez determinada a parte divergente da função de dois e três pontos, o valor do coeficiente de renormalização da função de vértice quadrilinear estará precisamente fixado, e tal relação necessita ser respeitada para preservar a invariância de calibre.

Na formulação não-comutativa temos que levar em conta o produto Moyal para computar a contribuição das partes divergentes. Mas em ambos os casos (comutativo e não-comutativo) o mesmo sistema tem que ser obedecido.

Analisaremos primeiramente a formulação não-comutativa. Como foi mostrado, ambas as formulações tem em comum a parte gráfica e analítica para a função de dois pontos do campo ϕ (ver figura 2.2). O coeficiente da parte divergente para esta função é dado por

$$b = \frac{1}{N} \frac{60}{3\pi^2\epsilon} \quad (4.48)$$

Para a função de três pontos, não contamos com a participação dos gráficos de um laço por serem não-planares. Restam as contribuições de três gráficos para esta função (diagramas 4.5(d-

f)). Fatorando tudo que é inerente a função de três pontos, obtemos $B = \frac{14}{3N\pi^2\epsilon}$ como coeficiente resultante. Com isso, retiramos a renormalização do campo de calibre, $a = B - b = -\frac{46}{3N\pi^2\epsilon}$. Substituindo os valores de b e de a no coeficiente da função de quatro pontos, obtemos $C = b + 2a = \frac{32}{3N\pi^2\epsilon}$. A renormalização do campo de calibre ($a \neq 0$) é um efeito exclusivo da formulação no espaço não-comutativo. Para o caso comutativo a invariância é obtida por outro caminho.

Tratemos então da invariância de calibre no caso comutativo. O valor do coeficiente para a auto-energia do campo ϕ é dado por (4.48). Para a função $\langle TA_\mu\phi^\dagger\phi \rangle$ temos uma mudança radical em relação ao caso não-comutativo. Além do uso das identidades diagramáticas temos também a propriedade da conjugação de carga ¹⁴. Devido a esta propriedade, o gráfico 4.5f que antes tinha participação no regime ultravioleta do caso não-comutativo agora é inócuo quando tomado em consideração os dois sentidos de carga. Com isto, temos então que toda a parte divergente para esta função vem dos diagramas 4.5d, 4.5e e dos gráficos de um laço que no caso não-comutativo não participaram por ser não-planares. A soma desses diagramas produz o mesmo resultado numérico que o da função de dois pontos expresso em (4.48).

Para a função $\langle TA^\mu A_\mu\phi^\dagger\phi \rangle$ temos um balanço distinto do que ocorre no caso não-comutativo, o que acarreta um valor diferente de zero para o coeficiente numérico C . Mais precisamente, como o campo de calibre não sofre renormalização, temos que $C = b + 2a = b$. Isto expressa o fato que na formulação comutativa somente a renormalização de função de onda do campo ϕ é necessária para o termo $D^\mu\phi^\dagger D_\mu\phi$ [51].

Entretanto, a discussão do papel da identidade diagramática para o vértice quadrilinear permanece válida. A identidade 2.4b seria então reobtida atribuindo um fator C comum aos vértices quadrilineares que estão desenhados nesta figura.

¹⁴Isto também é válido para os gráficos de três laços gerados pelo uso da identidade 2.4a.

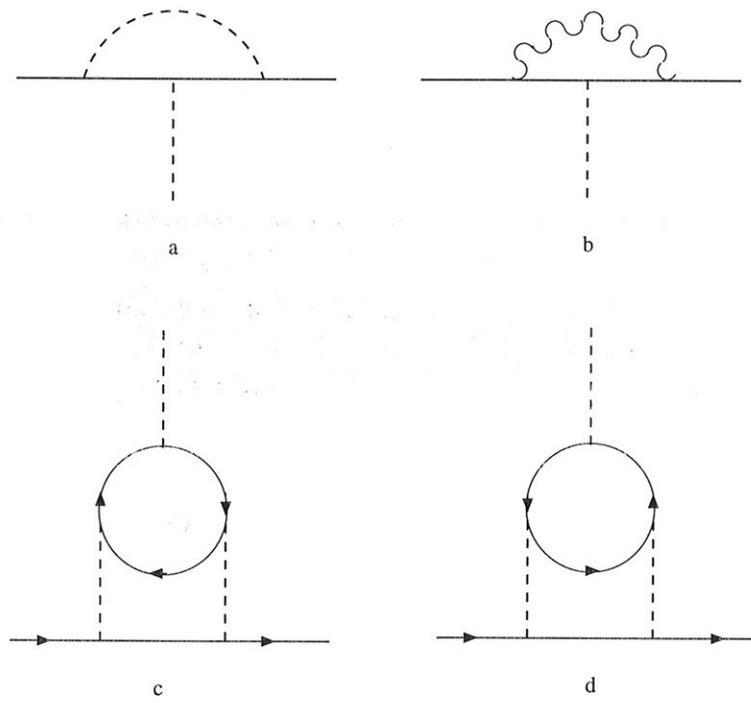


Figura 4.9: Caso 1. Correções ao vértice trilinear $\lambda\phi^\dagger\phi$.

Capítulo 5

Representação Adjunta

5.1 Leis de transformação e lagrangeana

Conforme exposto no capítulo 3, os campos de matéria na representação adjunta são submetidos as seguintes leis de transformação,

$$\phi \rightarrow U(x) * \phi * U^{-1}(x) \quad (5.1)$$

e

$$\phi^\dagger \rightarrow U(x) * \phi^\dagger * U^{-1}(x) \quad (5.2)$$

onde $U(x)$ é definido em (3.50).

Do ponto de vista infinitesimal isto gera derivadas covariantes para os campos na forma,

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - i[A_\mu, \phi]_* \quad (5.3)$$

e

$$\bar{D}_\mu \bar{\phi} = \partial \bar{\phi} - i[A_\mu, \phi^\dagger]_* \quad (5.4)$$

Uma das implicações mais claras causadas pelas leis de transformações a que os campos são submetidos no espaço não-comutativo pode ser vista nas novas interações que surgem por decorrência do novo ordenamento de campos. Isto é mostrado na tabela 4.1 (pág. 37). No caso dos campos básicos se transformarem de acordo com a representação fundamental, escolhamos o campo auxiliar λ que implementa o vínculo transformando-se de acordo com a representação adjunta. Devido a escolha, a regra de Feynman para esta interação gerou o gráfico misto (figura 4.1, pág 37) onde não há mistura entre momentos interno e externo na sua expressão analítica. Deste modo manteve-se a semelhança com o caso comutativo onde tal gráfico não contribui. No caso do campo básico pertencer a representação adjunta existe mais de uma possibilidade. Neste caso, temos dois ordenamentos realizáveis (casos 3 e 5 da tabela 4.1). Em ambas as situações o campo λ pertence a representação adjunta.

O uso ou não das possíveis escolhas para o termo de interação contendo o termo λ afeta as propriedades dos propagadores efetivos do modelo, incluindo o propagador misto que envolve o campo de calibre e o campo λ .

Partimos novamente da lagrangeana básica dada por (2.4). Efetuando as expressões (5.3) e (5.4) das derivadas covariantes e utilizando as possibilidades expressas na tabela 4.1 para o campo auxiliar λ , temos a seguinte lagrangeana para a representação adjunta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\phi^\dagger \partial^2 \phi - i\partial_\mu \phi^\dagger * A_\mu * \phi \\
& + i\partial_\mu \phi^\dagger * \phi * A_\mu - iA_\mu * \phi^\dagger * \partial_\mu \phi + i\phi^\dagger * A_\mu * \partial_\mu \phi \\
& - A_\mu * \phi^\dagger * A_\mu * \phi + A_\mu * \phi^\dagger * \phi * A_\mu \\
& + \phi^\dagger * A_\mu * A_\mu * \phi - \phi^\dagger * A_\mu * \phi * A_\mu \\
& + \lambda * (a\phi^\dagger * \phi + b\phi * \phi^\dagger - (a+b)\frac{N}{g})
\end{aligned} \tag{5.5}$$

sendo a e b parâmetros livres.

5.2 Interações contendo o campo de calibre

Mantendo as convenções expressas na figura 2.4, temos as seguintes regras de Feynman para as interações contendo o campo de calibre:

$$\text{Vértice Trilinear} \iff -2(2k+p)_\mu \text{sen}(k \wedge p) \tag{5.6}$$

$$\text{Vértice Quadrilinear} \iff -4ig^{\mu\nu} [\text{sen}(k_1 \wedge p_1)\text{sen}(k_2 \wedge p_2) + \text{sen}(k_1 \wedge p_2)\text{sen}(k_2 \wedge p_1)] \tag{5.7}$$

Dois comentários são importantes em relação a essas regras. Conforme seria de se esperar, essas interações aparentemente tornam-se nulas no limite comutativo, ou seja, no limite $\theta \rightarrow 0$. Entretanto nota-se que devido a mistura IV/UV o limite pode não existir. Outro aspecto interessante é que apesar de um ordenamento de campos mais complexo na interação quadrilinear a simetria de permutação envolvendo os momentos p_1 e p_2 dos campos de calibre é mantida. Isto é verificado quando levamos em conta todas as possibilidades de contração para obter a regra de Feynman deste vértice de interação.

Tal qual no caso da representação fundamental, os gráficos que contribuem para a função de dois pontos do campo de calibre são dados pela Figura 2.2b. Mas agora a expressão analítica é

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu}(p) = N & 4 \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2k+p)^\mu (2k+p)^\nu}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} \text{sen}^2(k \wedge p) \right. \\
& \left. - 2g^{\mu\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{k^2 - m^2} \text{sen}^2(k \wedge p) \right]
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Vemos que o momento interno e o externo estão presentes no fator trigonométrico decorrente do produto Moyal, do qual resultará uma mistura (IV/UV) conforme descrito por Seiberg [2]. A parte planar difere do caso comutativo por um fator 2.

Tanto as exponenciais de argumento positivo como a de argumento negativo fornecem a mesma contribuição para a parte não-planar, deste modo podemos escrever a parte não-planar do integrando como

$$F_{\mu\nu}(p) = -\frac{N}{2} \int_0^1 dx \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{[k^2 - M^2]^2} \{4k_\mu k_\nu + p_\mu p_\nu (2x-1)^2 - 2g_{\mu\nu} [k^2 + p^2 (x-1)^2 - m^2]\} e^{ik\tilde{p}} \tag{5.9}$$

em que $M^2 = m^2 - p^2 x(1-x)$. De acordo com a referência [45] temos que

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_\alpha \tilde{p}^\alpha}}{[k^2 - M^2]^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{(2)^{-1} (2\pi)^{3/2} M^{-1/2}}{\Gamma(2) \sqrt{\Delta}} \frac{K_{-1/2}[M \sqrt{-\tilde{p}^2}]}{(-\tilde{p}^2)^{-1/4}} \quad (5.10)$$

Sendo

$$K_{\pm 1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^{-1/2} e^{-z} \quad (5.11)$$

temos

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik_\alpha \tilde{p}^\alpha}}{[k^2 - M^2]^2} = \frac{i}{8\pi} \frac{e^{-M \sqrt{-\tilde{p}^2}}}{M} \quad (5.12)$$

A estrutura geral da função de dois pontos própria do campo de calibre é dada por

$$F_{\mu\nu}(p) = a P_{\mu\nu} + b \tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu + c p_\mu p_\nu \quad ; \quad (5.13)$$

em que $P_{\mu\nu} = (g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu)$ e,

$$a = -i \frac{N}{4\pi} \int_0^1 dx (1 - e^{-M \sqrt{-\tilde{p}^2}}) \frac{(1-2x)^2}{(m^2 - p^2 x(1-x))^{1/2}} \quad ; \quad b = -\frac{iN}{4\pi \tilde{p}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{-\tilde{p}^2}} + M \right) e^{-M \sqrt{-\tilde{p}^2}} \quad (5.14)$$

Temos então no coeficiente b uma contribuição puramente não-planar. Entretanto, a não-comutatividade também interfere no comportamento do coeficiente a que contém a contribuição do termo planar. O coeficiente c corresponde ao termo de fixação de calibre. A inversão da função própria para se obter o propagador do campo de calibre está intrinsecamente ligada à escolha dos parâmetros livres a e b da interação com o campo λ . Dependendo do caso pode haver mistura envolvendo A_μ e λ . Nesse caso temos um propagador misto $\Delta_{A_\mu \lambda}$. De qualquer modo, a função própria apresenta uma divergência linear em p quando $p \rightarrow 0$.

5.3 Interações contendo o campo λ .

Conforme vimos na lagrangeana (5.5) temos duas famílias de parâmetros que regem a interação dos campos de matéria com o campo auxiliar λ . Essas interações determinam se há mistura entre os propagadores dos campos λ e A_μ . Analisaremos duas situações particulares que servem como protótipos para o caso geral.

5.3.1 Caso 1. $a = 0$

Tomando $a = 0$ em (5.5) recaímos na interação estudada na representação fundamental. Ou seja, mantemos a mesma regra de Feynman para o vértice $\lambda \phi \phi^\dagger$, de maneira que o cômputo da função de dois pontos do campo λ fornece o mesmo resultado da representação fundamental. Entretanto, ao levarmos em conta a nova regra de Feynman para a interação trilinear contendo

o campo de calibre obtemos que, contrariamente ao que foi obtido no estudo da representação fundamental, o propagador misto não mais é nulo. Em ordem dominante em $1/N$, temos

$$F_\mu(p) = N \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(2k+p)_\mu}{(k^2 - m^2)[(k+p)^2 - m^2]} e^{-i2k \wedge p} = \frac{-1}{4\pi} \frac{N}{\sqrt{-\tilde{p}^2}} \tilde{p}_\mu \int_0^1 e^{-M\sqrt{-\tilde{p}^2}x} dx = d(p)\tilde{p}_\mu \quad (5.15)$$

onde d é uma função de \tilde{p}^2 e p^2 .

5.3.2 Caso 2. $a = -b$; $\lambda * [\phi, \phi^\dagger]_*$.

Neste caso, a relação entre os parâmetros gerou uma estrutura de comutador para a interação. Deste modo há uma anti-simetrização envolvendo os campos principais e daí se obtém um fator de seno tal qual na interação trilinear envolvendo o campo de calibre. Ao se levar em conta os fatores de vértice para compor o gráfico misto temos um integrando composto pelo produto de uma função par proveniente dos vértices $[\text{sen}(k \wedge p)]^2$ com uma função ímpar proveniente da parte “usual” (ver (eq. 4.12)). Disto conclui-se que nesta situação não temos contribuição ao propagador misto. Entretanto a nova regra de Feynman da interação com o comutador Moyal entre ϕ e ϕ^\dagger altera o cálculo da função de dois pontos do campo λ . A parte planar é alterada por um fator 2 e passamos a ter uma contribuição não-planar $F_{(np)\lambda}(p)$. Logo, o valor $e(p)$ dessa função de dois pontos é dado por

$$e(p) = 2F_\lambda(p) + F_{(np)\lambda}(p) \quad (5.16)$$

em que $F_\lambda(p)$ é a parte planar (ver fórmula (2.18)) e a parte não-planar é igual a

$$F_{(np)\lambda}(p) = -\frac{iN}{4\pi} \int_0^1 dx \frac{e^{-M\sqrt{-\tilde{p}^2}x}}{M} \quad (5.17)$$

Uma outra consequência importante da escolha de $a = -b$ em (5.5) é que as identidades geométricas 2.4a deixam de ser válidas. Isto faz com que se tenha muito mais gráficos a serem levados em conta do que no caso da representação fundamental.

Há ainda a se considerar que com esta escolha particular dos parâmetros a e b , é possível explorarmos uma simetria de conjugação de carga no modelo. A lagrangeana passa a ser invariante pelo conjunto de transformações: $\phi \rightarrow \phi^\dagger$, $\phi^\dagger \rightarrow -\phi$, $\lambda \rightarrow -\lambda$ e $A_\mu \rightarrow A_\mu$. Isto nos permite obter conclusões mais gerais a respeito das interações. Por essa simetria de conjugação de carga deixamos de ter contribuições de gráficos com um número ímpar de linhas do campo λ . Deste modo a contribuição de “tadpole” deste campo, em especial o recurso de geração dinâmica de massa deixa de ter justificativa na alteração do valor esperado do vácuo do campo em questão.

5.4 Cálculo dos propagadores

Como vimos, dentro do contexto da representação adjunta há uma situação onde temos uma função dois pontos própria contendo os campos A_μ e λ . Neste caso o propagador dos campos também conterà uma componente de mistura entre os campos λ e A_μ . A relação entre as funções próprias e os propagadores é dada pela equação

$$\begin{pmatrix} F_{\mu\nu} & F_\mu \\ F_\nu & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^{\nu\alpha} & \Delta^\nu \\ \Delta^\alpha & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{1}\delta_\mu^\alpha & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

onde indicamos por F e F_μ as funções próprias dos campos λ e da mistura $\langle \lambda A_\mu \rangle$, respectivamente. A letra grega Δ é usada para representar os propagadores. Quando acompanhada de dois índices é referente ao propagador do campo de calibre. Os casos com somente um índice e sem, referem-se respectivamente ao propagador misto e ao propagador do campo λ . As expressões (5.13) e (5.14) dizem respeito à função própria do campo de calibre. A fórmula (5.15) é referente à função própria do termo misto e (5.16), (5.17) determinam a função de dois pontos do campo λ . Na estrutura tensorial dos propagadores são consideradas as formas mais gerais possíveis,

$$\Delta^{\nu\alpha} = a_1 P^{\nu\alpha} + b_1 \tilde{p}^\nu \tilde{p}^\alpha + c_1 p^\nu p^\alpha + z_1 \tilde{p}^\nu p^\alpha + z_2 \tilde{p}^\alpha p^\nu \quad (5.19)$$

$$\Delta^\nu = d_1 \tilde{p}^\nu + d_2 p^\nu \quad (5.20)$$

$$\Delta = e_1 \quad (5.21)$$

Isto gera o seguinte sistema de equações

$$F_{\mu\nu} \Delta^{\nu\alpha} + F_\mu \Delta^\alpha = -1 \delta_\mu^\alpha \quad (5.22)$$

$$F_{\mu\nu} \Delta^\nu + F_\mu \Delta = 0 \quad (5.23)$$

$$F_\nu \Delta^{\nu\alpha} + F \Delta^\alpha = 0 \quad (5.24)$$

$$F_\nu \Delta^\nu + F \Delta = -1 \quad (5.25)$$

Resolvendo este sistema determina-se os coeficientes dos propagadores como sendo

$$a_1 = \frac{-1}{(p^2)^2 a} \quad (5.26)$$

$$c_1 = \frac{-1}{(p^2)^2 c} ; \quad z_1 = z_2 = d_2 = 0 \quad (5.27)$$

$$e_1 = \frac{1}{e} [-1 - d_1 d \tilde{p}^2] \quad (5.28)$$

$$d_1 = \frac{d}{[e(ap^2 + b\tilde{p}^2) - d^2 \tilde{p}^2]} \quad (5.29)$$

$$b_1 = \frac{-d^2}{[e(ap^2 + b\tilde{p}^2) - d^2 \tilde{p}^2](ap^2 + b\tilde{p}^2)} - \frac{a_1 b p^2}{(ap^2 + b\tilde{p}^2)} \quad (5.30)$$

Algumas considerações gerais devem ser feitas sobre esse resultado. Primeiramente devemos ter em vista que a distinção entre os casos 1 e 2 tratados na sessão anterior pode ser feita pelo

coeficiente d que representa a função própria mista. No caso 1, $d \neq 0$ e no caso 2 este coeficiente é nulo. Como teste para o resultado final, os propagadores na situação sem mistura foram obtidos tanto pela particularização no próprio sistema acima com $d = 0$ quanto pelo método usual.

De acordo com o sistema, a mistura influencia o propagador de calibre por meio do coeficiente b_1 e o propagador do campo λ (coeficiente e_1). O coeficiente c_1 proporcional à fixação de calibre não sofre influência da parte mista. Quanto aos coeficientes nulos, $z_1 = z_2 = 0$ mostra que não há componentes emaranhando p e \tilde{p} ; e $d_2 = 0$, corretamente comprova que o propagador misto não pode possuir uma componente planar.

Com esse resultado podemos estudar o comportamento assintótico que cada propagador possui tanto no infravermelho quanto no ultravioleta. Podemos analisar também qual a influência que a mistura $d \neq 0$ exerce sobre os comportamentos singulares dos propagadores.

Para isso usaremos a tabela 5.1. Ademais, alguns comentários adicionais são necessários. Na região de altos momentos, as contribuições não-planares não alteram o comportamento dos propagadores, pois os coeficientes não-planares das funções próprias sofrem um decaimento exponencial com o momento externo. Então para $p^2 \gg m^2$ (primeira coluna da tabela 5.1) temos em ordem dominante de $1/N$ o comportamento usual do CP^{N-1} por parte dos propagadores.

Na região de baixos momentos surgem distinções importantes por meio de singularidades perigosas. Tal análise não é modificada no caso de $d \neq 0$, ou seja, o comportamento mais singular está concentrado nas parcelas que não contém dependência com este fator. Com isto, a segunda coluna na tabela 5.1 é válida para ambos os casos.

Para entendermos como se processa a diferença entre as funções próprias das representações adjunta e fundamental precisamos analisar o coeficiente a expresso em (5.14), o qual pertence à função própria do campo de calibre na representação adjunta. Conforme vimos, no que tange à forma dos propagadores efetivos, a representação fundamental no espaço não-comutativo não apresenta diferença em relação ao CP^{N-1} usual. Contrariamente a isso, o coeficiente expresso em (5.14) traz uma contribuição não-planar expressa no termo $(1 - e^{M\sqrt{-\tilde{p}^2}})^{-1}$. Ao se considerar a expansão deste termo para valores pequenos de p obtemos um comportamento singular enquanto que este limite no caso comutativo, bem como no caso da representação fundamental, fornece uma constante que é proporcional à massa. É justamente o fator $\frac{1}{\sqrt{-\tilde{p}^2}}$ que gera a singularidade adicional. O propagador do campo A_μ nos casos estudados anteriormente tem um comportamento na região de baixos momentos da ordem de $\frac{1}{p^2}$ ao que passo que na representação adjunta obtemos $\frac{1}{p^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\tilde{p}^2}}$. Para comparação, isto é mais singular que no caso da eletrodinâmica. Entretanto, não se espera dificuldades no infravermelho devido aos fatores de seno nos vértices.

Como sabemos, no limite não relativístico é possível relacionar o conceito de potencial que surge em mecânica quântica ondulatória (e em mecânica clássica também) com o conceito de elemento de matriz S de teoria quântica de campos ¹. A expressão do potencial em termos de um elemento \mathcal{M}_{fi} da matriz S é dada por

$$V = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \mathcal{M}_{fi} e^{ikx} d^3k \quad (5.31)$$

¹Tal conexão é feita por meio do conceito de secção de choque diferencial. Em teoria quântica de campos, no limite não relativístico, obtém-se uma expressão para a secção de choque diferencial que pode ser comparada com a fórmula da secção de choque diferencial obtida por meio da aproximação de Born dentro do formalismo de Schrödinger na mecânica quântica [52].

Coeficientes	$p^2 \gg m^2$	$p \rightarrow 0$
a_1	$\frac{m}{[p^2]^{3/2}}$	$\frac{1}{[p^2]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{-\bar{p}^2}}$
b_1	0	$\frac{1}{p^2 \bar{p}^3}$
c_1 (calibre de Landau)	0	0
d_1	0	m
e_1	m	m

Tabela 5.1: Coeficientes dos Propagadores

Coef. Propagadores	Dim.	Coef.F.P.	Dim.
a_1	Λ^{-3}	a	Λ
b_1	Λ	b	Λ^3
d_1	Λ	d	Λ
e_1	Λ	e	Λ^{-1}

Tabela 5.2: Dimensionalidade dos coeficientes dos propagadores e das funções próprias.

ou seja, o potencial é a transformada de Fourier do elemento \mathcal{M}_{fi} da matriz S em ordem mais baixa.

Tomando como elemento de matriz S o próprio propagador do campo de calibre, interpretamos o potencial associado como sendo o que fornece a expressão analítica no espaço das posições do processo de troca de um *quantum* de energia num espalhamento de duas partículas.

Tendo o propagador um comportamento, no espaço dos momentos, proporcional à $\frac{1}{p^3}$, esperaríamos uma transformada de Fourier que aumentasse linearmente com a distância, o que consequentemente indicaria a presença de uma força de longo alcance confinando os *quanta* do campo ϕ . Entretanto, há ainda os fatores da não-comutatividade interferindo nos vértices. Levando em conta o fator $(\text{sen } k \wedge p)^2$ na transformada de Fourier há um decréscimo na singularidade e passamos a contar com um potencial que depende não do raio, mas sim da direção em que é feita a medida. Isto indica uma certa analogia com forças derivadas de campos magnéticos, o qual é um dos contextos em que surge um caráter de não-comutatividade.

5.5 Problemas de mistura

Para nos determos na análise da correção de auto-energia da função de dois pontos do campo ϕ , precisamos tomar o valor correto dos propagadores dos campos A_μ e λ . A expressão da parte

planar do propagador $\Delta^{\mu\nu}(p)$ é alterada somente por um fator 1/2 em relação ao caso comutativo ². Desta forma, na representação adjunta, o comportamento assintótico do propagador de calibre (no calibre de Landau) para altos momentos é dado por

$$\Delta_{\mu\nu}(p) = -\frac{8i}{N} \left(g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \frac{1}{\sqrt{-p^2}} \quad (5.32)$$

O mesmo acontece em relação à parte planar da função própria do campo λ quando tomamos a interação com o campo auxiliar na forma $\lambda * [\phi, \phi^\dagger]_*$, ou, equivalentemente, $a = -b$, conforme discutido na seção 5.3.2. (ou seja, é duas vezes a da representação fundamental). Com isso o propagador do campo λ é dado por

$$\Delta = \frac{4i}{N} \sqrt{-p^2} \quad (5.33)$$

Os problemas com divergências infravermelhas surgem na representação adjunta quando levados em consideração correções radiativas ao campo ϕ (gráficos de auto-energia da figura 4.2). Escolhendo $a = 0$ ³ mantém-se a mesma regra de Feynman da representação fundamental para a interação contendo campo λ . Consequentemente o gráfico 4.2b permanece planar nesta situação, e portanto, sem a presença de divergências infravermelhas. O gráfico 4.2a, pela presença do fator trigonométrico $\text{sen}^2(k \wedge p)$ (ver regra de Feynman em (5.6) apresenta um comportamento potencialmente perigoso para a região de baixos momentos. Entretanto, tais divergências não ocorrem devido a transversalidade do gauge de Landau. Ou seja, temos na expressão correspondente a este gráfico,

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(2p+k)_\mu (2p+k)_\nu}{(k+p)^2 - m^2} \Delta^{\mu\nu}(k) \text{sen}^2(k \wedge p) = 4p_\mu p_\nu \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} \Delta^{\mu\nu}(k) \text{sen}^2(k \wedge p) \quad (5.34)$$

a qual é apenas logaritmicamente divergente.

O recurso da transversalidade não pode ser invocado para baixar a divergência no caso do gráfico 4.2.c. Utilizando a regra de Feynman (5.7) e o comportamento assintótico dado em (5.33), este gráfico fornece

$$\begin{aligned} \text{Gráfico 4.2c} &= - \int 8i g_{\mu\nu} \text{sen}^2(k \wedge p) \Delta^{\mu\nu} \\ &= -\frac{8^2}{N} \int \frac{1}{\sqrt{k^2}} e^{ik\bar{p}} d^3k \end{aligned} \quad (5.35)$$

Tomando a opção $a = -b$ na lagrangeana da representação adjunta torna-se possível gerar um outro gráfico com o fator $\text{sen}^2(k \wedge p)$ na correção de auto-energia da função de dois pontos do campo ϕ . No caso, isto é feito pelo gráfico 4.2.b. Com a escolha $a = -b = 1$ geramos em cada vértice um fator $2\text{sen}(k \wedge p)$. Levando em conta o comportamento assintótico expresso em (5.33), obtemos a seguinte expressão para o diagrama 4.2.b

$$\text{Gráfico 4.2b} = \frac{4}{N} \int \frac{2\Delta(p)}{[(k+p)^2 - m^2]} \text{sen}^2(k \wedge p) d^3k = \frac{(4)^2}{N} \int \frac{\sqrt{k^2}}{[(k+p)^2 - m^2]} e^{ik\bar{p}} d^3k \quad (5.36)$$

²Ver discussão da função própria do referido campo no primeiro parágrafo após a fórmula (5.8). Entretanto, o mais correto seria obter o resultado (5.32) pela análise do coeficiente (5.26). De todo modo, pelas duas abordagens obtém-se o mesmo resultado.

³Interação na forma estudada na representação fundamental. Ver seção 5.3.1.

Vemos que não há cancelamento da divergência dominante entre as equações (5.35) e (5.36) (momento externo igual $p = 0$ na última) pois os fatores numéricos não coincidem. Uma mudança de fator em a e b seria inócua pois haveria cancelamento de tal fator entre os vértices e o propagador. No modelo não há outra possibilidade de subtrair essa divergência, que, por ser não-integrável e originada como correção ao propagador, é nociva à abordagem perturbativa.

Os resultados discutidos nesta tese vem sendo estendidos com a inclusão de férmions [53]. Os resultados obtidos até o momento mostram que a contribuição fermiônica atua de modo a cancelar a parte divergente em potência de \tilde{p}^{-1} na função de dois pontos do campo citado. Tomando-se a escolha de uma interação do tipo $\lambda * [\phi^\dagger, \phi]_*$ para o campo auxiliar o modelo mantém-se livre da mistura $\Delta_{A_\mu \lambda}$ de modo similar ao caso sem a presença de férmions. Nesse contexto também foi verificado a indução de um termo de Chern-Simons.

Embora a presença do campo fermiônico tenha alterado de forma significativa o setor de calibre, estas modificações não foram suficientes para cancelar as divergências destrutivas da função de dois pontos do campo bosônico. Partiu-se então para a versão supersimétrica do modelo CP^{N-1} no formalismo de supercampos ⁴. Em ordem dominante de $1/N$ o modelo supersimétrico mostra-se livre de divergências IV/UV nocivas à renormalizabilidade, o que indica que o modelo supersimétrico é um modelo consistente do ponto de vista perturbativo.

⁴Essas extensões (acoplamento minimal e versão supersimétrica) são referentes a tese de outro estudante do grupo (E. A. Asano).

Capítulo 6

Comentários e Conclusões

Apresentamos nos capítulos anteriores desta tese um estudo sobre o modelo CP^{N-1} no espaço não-comutativo. Nesse estudo consideramos os campos de matéria se transformando tanto na representação fundamental como na adjunta. Para o campo auxiliar λ tomamos a representação adjunta, o que, no caso da representação fundamental, permitiu o não-surgimento de um propagador misto $\Delta_{\lambda A_\mu}$.

Na representação fundamental verificamos até ordem dominante em $1/N$ o cancelamento de todas as divergências infravermelhas danosas ao esquema perturbativo. Também verificamos que as divergências ultravioletas podem ser absorvidas por contratermos que preservam a forma da lagrangeana original. A invariância de calibre é então mantida no procedimento de renormalização. Entretanto, esta invariância é preservada por um modo bastante diferente em relação ao caso comutativo. Alguns gráficos que antes contribuíam com parte divergente no caso comutativo passam agora a ter um bom comportamento ultravioleta na formulação não-comutativa. Em contrapartida, o teorema de Furry deixa de ser válido no caso não-comutativo. Com isso passa-se a ter contribuições divergentes de gráficos que não participavam no caso comutativo. Esse novo arranjo altera as relações entre os coeficientes b , B e C referentes, respectivamente, às funções de dois, três e quatro pontos do produto de derivadas covariantes que ocorre na ação do modelo. No caso comutativo esses três coeficientes possuem o mesmo valor, o que determina que o campo de calibre não sofre renormalização. No presente estudo, esse balanceamento entre os coeficientes é alterado e resulta em uma renormalização para o campo A_μ , e, embora inócuo, um contratermo para o vértice $A^\mu A_\mu \phi^\dagger \phi$ é induzido.

No estudo da representação adjunta a não-planaridade ocorre já em ordem trivial em $1/N$ e as identidades gráficas do modelo deixam de ser válidas. Com isso o número de diagramas a serem considerados cresce significativamente. Tal qual no estudo da representação fundamental, o limite de $\Theta \rightarrow 0$ não pode ser obtido nas funções de Green devido às singularidades infravermelhas. A primeira vista essas singularidades indicam confinamento dos quanta do campo ϕ , como ocorre no modelo comutativo bidimensional [26]. Entretanto, devido a presença do comutador com produto Moyal a singularidade no setor de calibre não é suficientemente forte para causar o confinamento. Procurando esclarecer essa questão um estudo do potencial não-relativístico correspondente é desenvolvido em [31].

Na representação adjunta, estas passam a ser perigosas ao procedimento de renormalização por serem não-integráveis. Isto acontece quando consideradas correções radiativas à função de dois pontos do campo ϕ . O mau comportamento infravermelho também se estende à função de

dois pontos do campo A_μ .

Uma peculiaridade da representação adjunta é a existência de interações adicionais originadas em virtude dos novos ordenamentos dos campos. Sendo possível dois ordenamentos para a interação com o campo λ ($\lambda * \phi^\dagger * \phi$ e $\lambda * \phi * \phi^\dagger$), a mistura entre os campos λ e A_μ pode ser evitada mediante uma interação do tipo $\lambda * [\phi, \phi^\dagger]$. Entretanto, as divergências infravermelhas que ocorrem nas correções da função de dois pontos do campo ϕ permanecem e em ordem mais alta levam à quebra da expansão.

Uma sequência natural aos estudos apresentados nesta tese [30] concerne a inclusão de férmions [32]. Os resultados obtidos em [32] mostram que no caso do acoplamento minimal dos férmions o setor de calibre apresenta um melhor comportamento infravermelho. Todavia as divergências quadráticas na função de dois pontos do campo ϕ subsistem e somente são eliminadas quando considerado o modelo supersimétrico.

Dessa forma, como acontece com outros modelos a supersimetria comparece como ingrediente essencial para a construção de teorias não-comutativas.

Apêndice A

Modelo Sigma Não-Linear

A partir das referências [17] e [54] deduziremos algumas propriedades dos modelos sigma não lineares para os casos com simetria $O(N)$ e $SU(N)$.

O ponto de partida é dado pela lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2f} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (\text{A.1})$$

Uma escolha simples diminuir o número de campos independentes na lagrangeana (A.1) é dado pelo vínculo

$$\sum_{i=1}^{i=N} |\phi_i(x)|^2 = cte \quad (\text{A.2})$$

ou seja ϕ é um vetor N dimensional de módulo constante.

A interpretação física da lagrangeana (A.1) sujeita ao vínculo acima é dada por uma descrição fenomenológica de um sistema com simetria $O(N)$ espontaneamente quebrada pelo valor esperado no vácuo de um campo que transforma-se como um vetor em $O(N)$.

A maneira mais simples de expressar o que são os modelos sigma não lineares é utilizando a parametrização da esfera. Para isso parametrizamos o campo ϕ por

$$\phi(x) = D(g(x))\mathbf{u} \quad (\text{A.3})$$

sendo $\mathbf{u} = (1, 0, \dots, 0)$ é um vetor fixo N -dimensional e $g(x)$ é um elemento de $O(N)$ dependendo de x e $D(g(x))$ é uma representação matricial correspondente.

Facilmente se conclui que o subgrupo de $O(N)$ que deixa \mathbf{u} (grupo estabilizador) invariante é $O(N-1)$. Ou seja, efetuando sobre \mathbf{u} uma multiplicação por qualquer elemento $g(x)$ pertencente a $O(N-1)$ mantem-se (A.3) invariante. A relação (A.3) exhibe o isomorfismo entre o espaço quociente homogêneo $O(N)/O(N-1)$ onde ϕ toma valores e a esfera S_{N-1} .

Parametrizando a esfera em termos de variáveis independentes, adota-se

$$\phi(x) = \begin{cases} \sigma(x) \\ \pi(x) \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

sendo que $\pi(x)$ é um componente com $(N - 1)$ componentes. Portanto $\sigma(x)$ é uma função de $\pi(x)$ por meio da equação (A.2). Se $\sigma(x)$ é positivo,

$$\sigma(x) = (1 - \pi(x)^2)^{1/2} \quad (\text{A.5})$$

Com isto visualisa-se que o grupo estabilizador $O(N - 1)$ atua linearmente sobre $\pi(x)$ e a lei de transformação do campo σ , consequência de (A.5), é dada por uma função não linear do campo $\pi(x)$.

A realização matemática destes modelos revela-se em uma classe especial de espaços homogêneos, chamados espaços simétricos, definidos como o espaço quociente G/H no qual G é grupo de Lie simples, possuindo um automorfismo involutivo e H é o subgrupo maximal de G invariante sob esse automorfismo.

O automorfismo involutivo de um grupo G é um mapeamento de G em G em que a operação estrela define esse automorfismo tal que

$$(g_1 g_2)^* = g_1^* g_2^* \quad (\text{A.6})$$

$$(g^*)^* = g \quad (\text{A.7})$$

Seja g_0 um elemento fixo de G satisfazendo ¹

$$g_0 g_0^* = \alpha I \quad (\text{A.8})$$

Define-se H como sendo o subgrupo de G invariante pelo seguinte automorfismo involutivo

$$h \in G \implies h = g_0^{-1} h^* g_0 \quad (\text{A.9})$$

Deduz-se então que sendo ²

$$g_0 h(x) = h^* g_0 \implies (h^*)^{-1} g_0 h(x) = (h^*)^{-1} h^* g_0 = e^* g_0 \quad (\text{A.10})$$

os elementos de H são tais que deixam g_0 invariante, ou seja ³

$$g_0 = (h^{-1})^* g_0 h \quad (\text{A.11})$$

Aplicando a condição $(h^*)^* = h$ se conclui que o elemento fixo g_0 pertencente a G satisfaz a condição

$$g_0^* g_0 = \lambda \mathbf{1} \quad (\text{A.12})$$

e portanto pertence ao centro do grupo.

Os elementos do espaço quociente G/H são então definidos como

$$g = (h^{-1})^* g_0 h \quad (\text{A.13})$$

¹ A constante α pode ser absorvida na definição de g_0

² e é o elemento identidade

³ Para isso utiliza-se a propriedade $e^* = e$.

e satisfazem

$$gg^* = \alpha I \quad (\text{A.14})$$

Tomando o caso particular em que o automorfismo é a própria identidade,

$$g_o^* = g_o \quad g^* = g \quad h^* = h \quad (\text{A.15})$$

ou seja, $g_o^2 = \alpha I$.

Lidaremos com dois casos específicos

Caso $G = O(N)$.

Neste caso, g_o é uma matriz ortogonal $n \times n$ e, com $\alpha = 1$ podemos tomar g_o como sendo diagonal e contendo p auto-valores iguais a $+1$ e os restantes $(n - p)$ iguais a -1 .

$$g_o = \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \vphantom{\left(\right)} \\ \vphantom{\left(\right)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} p \\ n - p \end{array} \quad (\text{A.16})$$

Deste modo, o subconjunto de $O(N)$ que deixa este g_o invariante é $H = O(p) \times O(n - p)$, com os elementos $h = g_o^{\text{tr}} h g_o$. O espaço simétrico onde $g(x)$ toma valores é então $\frac{G}{H} = \frac{O(N)}{O(p) \times O(n-p)}$. Em particular, para $p = 1$ ou $(n - 1)$, recaímos nos modelos sigma não lineares com simetria $O(N)$.

Caso $G = U(N)$.

As matrizes passam a ser unitárias, ou seja, $u^{-1} = u^\dagger$; $g_o^{-1} = g_o^\dagger$; $h^{-1} = h^\dagger$. A fase α pode ser absorvida numa redefinição de g_o . Com isso voltamos a ter uma situação em que g_o é diagonal com p autovalores iguais a $+1$ e $(n - p)$ iguais a -1 . O subgrupo $H = U(p) \times U(n - p)$ é o invariante do espaço quociente $\frac{G}{H} = \frac{U(n)}{U(p) \times U(n-p)}$. Particularizando para $p = 1$ ou $(n - 1)$,

$$g_o = \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \end{array} \right) \quad (\text{A.17})$$

o espaço simétrico passa a ser o espaço complexo projetivo $(n - 1)$ dimensional, ou seja, o modelo CP^{N-1} dimensional proposto por Eichenherr.

Neste caso o modelo pode ser escrito em termos dos vetores complexos de raio unitário sujeitos ao vínculo $z_i z_i = 1$. O campo de calibre surge para implementar a equivalência entre os campos z e z' relacionados pela transformação

$$z'(x) = e^{i\Lambda(x)} z(x) \quad (\text{A.18})$$

Escrito em termo de z , o campo de calibre é dado por $A_\mu \frac{i}{2}(\bar{z}\partial_\mu z)$. Pela transformação (A.18), obtemos a lei de transformação para o campo de calibre $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$. Deste modo, podemos escrever a lagrangeana do modelo na seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{n}{2f} \overline{D_\mu z} D_\mu z \quad (\text{A.19})$$

onde $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$.

Apêndice B

Tabela de Integrais e Cálculo das Contribuições Divergentes

Integrais Planares

Para tratar as divergências das integrais planares, utilizamos o recurso da regularização dimensional [55]. O procedimento da regularização dimensional preserva a simetria de calibre da teoria. A idéia deste procedimento consiste em alterar a dimensionalidade d do espaço-tempo da função analítica correspondente ao gráfico de Feynman divergente. Para um d suficientemente pequeno a integral torna-se convergente. Ao final do processo é tomado o limite para a dimensionalidade original da integral. Segue abaixo algumas fórmulas de interesse de integrais regularizadas dimensionalmente.

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{-(1)^n i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2}} \quad (\text{B.1})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{-(1)^{n-1} i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2} - 1} \quad (\text{B.2})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{-(1)^{n-1} i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{g^{\mu\nu}}{2} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 1)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2} - 1} \quad (\text{B.3})$$

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(k^2)^2}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{-(1)^n i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{D(D+2)}{4} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2} - 2} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{(k^2 - \Delta)^n} &= \frac{-(1)^n i}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{D}{2} - 2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n - \frac{D}{2} - 2} \\ &\times \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Nas fórmulas (B.3) e (B.5) foram usadas propriedades de simetria

$$k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{D} k^2 g^{\mu\nu}$$

$$k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma \rightarrow \frac{1}{D(D+2)} (k^2)^2 (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \quad (\text{B.6})$$

válidas no caso do numerador ser parte de um integrando simétrico.

Parametrização de Feynman

Para utilizar o formulário da regularização dimensional é necessário trabalhar com um único denominador para cada integral. Com esse objetivo é introduzido as integrais sobre os parâmetros de Feynman

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i - 1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)} \quad (\text{B.7})$$

A fórmula acima é válida mesmo no caso em m_i não são inteiros. Surgem como decorrência da parametrização de Feynman a função beta $B(\alpha, \beta)$ (também conhecida como integral de Euler do primeiro tipo)

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (\text{B.8})$$

A relação funcional mais conveniente para os nossos cálculos envolvendo a função beta é dada por

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = B(\beta, \alpha) \quad (\text{B.9})$$

A função $\Gamma(z)$ possui pólos isolados quando o argumento assume valores inteiros negativos ou igual a zero. Nos outros casos a função fornece valores finitos. Para os nossos cálculos basta-nos ter em mãos os seguintes casos particulares:

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{e} \quad \Gamma(1/2) = \pi. \quad (\text{B.10})$$

Os outros casos de interesse são obtidos pela relação

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (\text{B.11})$$

Em $D = 2 + 1$ o pólo surge na forma

$$\Gamma(3/2 - D/2) = \Gamma(\epsilon/2) \quad (\text{B.12})$$

sendo $\epsilon = 3 - D$. Fazemos então uso da expansão¹

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} + \Gamma'(1) + O(\epsilon) \quad (\text{B.13})$$

e

$$\frac{1}{[\Delta]^{\epsilon/2}} = e^{\epsilon/2 \ln(1/\Delta)} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{1}{\Delta}\right) + O(\epsilon^2) \quad (\text{B.14})$$

para o termo de massa expresso nas fórmulas (B.1)-(B.5).

¹ $\Gamma'(1) \approx -0,5772$ é a constante de Euler-Mascheroni.

Integrais Não-Planares no Cálculo de um Loop

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-ik\tilde{p}}}{[k^2 + M^2]^2} = \frac{1}{8\pi M} e^{-M\sqrt{-\tilde{p}^2}} \quad (\text{B.15})$$

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{[k^2 + M^2]^2} e^{-ik\tilde{p}} = \frac{1}{8\pi} \left(-M + \frac{2}{\sqrt{-\tilde{p}^2}} \right) e^{-M\sqrt{-\tilde{p}^2}} \quad (\text{B.16})$$

$$\int \frac{k_\mu k_\nu}{[k^2 + M^2]^2} e^{-ik\tilde{p}} = \frac{1}{8\pi} \left(\frac{g_{\mu\nu}}{\sqrt{-\tilde{p}^2}} - \frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{\tilde{p}^2 \sqrt{-\tilde{p}^2}} - \frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{\tilde{p}^2} M \right) e^{-M\sqrt{-\tilde{p}^2}} \quad (\text{B.17})$$

Função de dois pontos do campo λ .

Antes de analisarmos as divergências logarítmicas presentes na função de dois pontos do campo ϕ é oportuno olhar com mais detalhe o integrando (2.17) que surge no cálculo da função de dois pontos do campo λ . Como resultado da integração de (2.17) no espaço dos momentos temos algo proporcional à

$$I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{m^2 - p^2 x + p^2 x^2}} = \int_0^1 dx \frac{1}{\sqrt{a + bx + cx^2}} \quad (\text{B.18})$$

sendo $c = p^2$, $b = -p^2$, $a = m^2$. Definindo $\Delta = 4ac - b^2$, temos para o nosso caso que $\Delta = p^2(4m^2 - p^2)$. A integral (B.18) possui expressões distintas para $\Delta > 0$ e $\Delta < 0$, que, no caso, é função de p^2 . Temos então

$$I(p) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{m^2 - p^2 x + p^2 x^2}} = \begin{cases} \frac{1}{c} \ln(2\sqrt{cR} + 2cx + b) & ; p^2 > 0 \\ \frac{-1}{-c} \arcsen \frac{2cx+b}{\sqrt{-\Delta}} & ; p^2 < 0, \Delta < 0 \end{cases} \quad (\text{B.19})$$

Na métrica de Minkowski essa integral possui dois ramos para o limite $|p^2| \gg 4m^2$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{R} = \begin{cases} \frac{i\pi}{\sqrt{p^2}} & ; p^2 > 0 \\ \frac{\pi}{\sqrt{-p^2}} & ; p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

Quando tomamos essa expressão no espaço euclidiano (ou seja, efetuando a rotação de Wick), obtemos

$$\int_0^1 \frac{dx}{R} = \begin{cases} \frac{\pi}{\sqrt{p_E^2}} & ; p^2 > 0 \\ \frac{\pi}{\sqrt{p_E^2}} & ; p^2 < 0 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

ou seja, as contribuições distintas do espaço de Minkowski, quando tomadas no espaço euclidiano fornecem o mesmo resultado. O formulário utilizado nesta tese (fórmula (2.17) e subsequentes) é ajustado para o caso em que $p^2 < 0$.

Divergências da função de dois pontos do campo ϕ .

Neste apêndice vamos apresentar o cálculo das divergências logarítmicas dos gráficos 4.3a e 4.3b

O gráfico 4.3a possui a seguinte expressão analítica

$$\Sigma_{\phi}^{(a)}(p) = -i \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{(2p+k)_{\mu}(2p+k)_{\nu}}{[(k+p)^2 - m^2]} \Delta^{\mu\nu}(k) \quad (\text{B.22})$$

Trabalhando com o termo dominante no comportamento assintótico do propagador de calibre (ver fórmula (4.13)), obtemos

$$\Sigma_{\phi}^{(a)}(p) = \frac{64}{N} p_{\mu} p_{\nu} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(g^{\mu\nu} - \frac{k^{\mu} k^{\nu}}{k^2} \right) \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \frac{1}{[(k+p)^2 - m^2]} \quad (\text{B.23})$$

Devido a escolha de um calibre transversal este gráfico passa a apresentar somente uma divergência logarítmica. Utilizando algumas propriedades de integração dimensional podemos escrever esta expressão na forma

$$\Sigma_{\phi}^{(a)}(p) = \frac{64}{N} p_{\mu} p_{\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} g^{\mu\nu} \frac{(D-1)}{D} \frac{1}{\sqrt{-k^2}} \frac{1}{[k^2 - m^2]} = \frac{64}{N} \frac{p^2}{(-1)^{1/2}} p_{\mu} p_{\nu} g^{\mu\nu} \frac{(D-1)}{D} I_a \quad (\text{B.24})$$

Efetuada a parametrização de Feynman (caso particular de (B.7) em que $m_1 = 1/2$ e $m_2 = 1$) no integrando I_a

$$I_a = \int_0^1 dx x^{-1/2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[k^2 - M^2]^{3/2}} \quad (\text{B.25})$$

Aplicando a regularização dimensional (caso particular da equação (B.1) sendo $D = 3/2$), efetuando a integração paramétrica e as expansões (B.13) e (B.14)

Realizando a integração paramétrica em x e substituindo as expressões acima, obtemos

$$\Sigma_{\phi}^{(a)}(p) = \frac{64}{N} p^2 \frac{2}{3} (-1)^{3/2} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\Gamma(3/2)} \frac{1}{[M^2]^{\epsilon/2}} = -i \frac{1}{N} \frac{64 p^2}{3\pi^2 \epsilon} + \text{termos finitos} \quad (\text{B.26})$$

No diagrama 4.3b a contribuição para a renormalização da função de onda do campo ϕ é proveniente do termo de segunda ordem na expansão em Taylor, ou seja

$$p_{\mu} p_{\nu} \frac{\partial^2}{\partial p^{\mu} \partial p^{\nu}} \Sigma_{\phi}^{(b)}(p) = \left(\frac{1}{2!} \right) \frac{8}{N} p^{\mu} p^{\nu} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[\frac{8 k^{\mu} k^{\nu}}{[k^2 - m^2]^3} - \frac{2 g^{\mu\nu}}{[k^2 - m^2]^2} \right] \sqrt{-k^2} \quad (\text{B.27})$$

De forma análoga ao cálculo precedente e usando a regularização dimensional, obtém-se

$$\Sigma_{\phi}^{(b)}(p) = -i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} \Delta_{\lambda}(k) = i \frac{1}{N} \frac{4 p^2}{3\pi^2 \epsilon} + \text{termos finitos} \quad (\text{B.28})$$

sendo $\epsilon = D - 3$. Somando as duas contribuições vemos que a divergência para a função de onda é eliminada pelo contratermo

$$b = \frac{1}{N} \frac{60}{3\pi^2 \epsilon} \partial_{\mu} \phi^{\dagger} \partial^{\mu} \phi. \quad (\text{B.29})$$

Contribuições divergentes da função de vértice $A_\mu \phi^\dagger \phi$.

De acordo com a análise da seção 4.5.3, as contribuições divergentes no ultravioleta para a função de três pontos envolvendo o campo de calibre concentram-se nos diagramas 4.5(d-f). Dos três diagramas em questão o diagrama (4.5f) é o mais trabalhoso por não apresentar contribuição divergente em ordem dominante. Assim sendo, temos que tratar os termos de primeira derivada nos momentos externos. Referente a este gráfico, temos a seguinte expressão analítica

$$(-i)N \iint \frac{d^3k}{(2\pi)^D} \frac{d^3q}{(2\pi)^D} F(k, q, p, p_1, m) \quad (\text{B.30})$$

sendo

$$F(k, q, p, p_1, m) = \frac{\Delta_\lambda(k)\Delta_\lambda(k-p)}{[(k+p_1)^2 - m^2][(k+q)^2 - m^2]} (2q+p)_\mu \quad (\text{B.31})$$

a qual fornece a seguinte expansão em Taylor

$$I = F(k, q, p, p_1, m)|_{p=p_1=0} + p_\alpha \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \Big|_{p=p_1=0} + p_{1\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_{1\alpha}} \Big|_{p=p_1=0} \quad (\text{B.32})$$

O termo de primeira derivada em p_1 fornece,

$$p_{\mu 1} \frac{\partial F}{\partial p_{\mu 1}} = -4 \text{ cte } p_{\mu 1} \left[\frac{k^2}{[k^2 - m^2]^2} \frac{1}{[(k+q)^2 - m^2]} \frac{1}{[q^2 - m^2]^2} k_\mu q_\alpha \right] \quad (\text{B.33})$$

Temos então a calcular,

$$-4 \text{ cte } p_{\mu 1} e^{-ip \wedge p_1} \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k_\mu}{[k^2 - m^2]^2} \right] \left[\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\alpha}{[(k+q)^2 - m^2][q^2 - m^2]^2} \right] \quad (\text{B.34})$$

Efetuando a parametrização de Feynman na variável q ,

$$-4 \text{ cte } p_{\mu 1} \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)\Gamma(1)} \int dx(1-x)x \left[\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^2 k_\mu k_\alpha}{[k^2 - m^2]^2} \int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{q_\alpha}{[q^2 - M^2]^3} \right] \quad (\text{B.35})$$

sendo $M^2 = m^2 - k^2 x(1-x)$. A integral em q fornece

$$\int \frac{d^D q}{(2\pi)^D} \frac{1}{[q^2 - M^2]^3} = \frac{(-1)^3}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} i \frac{\Gamma(3 - \frac{D}{2})}{\Gamma(3)} \left(\frac{1}{M^2} \right)^{3 - \frac{D}{2}} \quad (\text{B.36})$$

Seguindo,

$$-4 \text{ cte } p_{\mu 1} \frac{(-1)^3}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} i \Gamma(3 - \frac{D}{2}) \int dx(1-x)x \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \left[m^2 \frac{k_\mu k_\alpha}{[k^2 - m^2]^2} - \frac{k_\mu k_\alpha}{[k^2 - m^2]} \right] \frac{1}{[m^2 - k^2 x(1-x)]^{3 - \frac{D}{2}}} \quad (\text{B.37})$$

Parametrizando novamente,

$$\frac{1}{[k^2 - m^2][m^2 - k^2 x(1-x)]^{3 - \frac{D}{2}}} = \int dy y^{2 - \frac{D}{2}} \frac{1}{(-1)^{3 - \frac{D}{2}}} \frac{1}{[x(1-x)]^{3 - \frac{D}{2}}} \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(3 - \frac{D}{2})} \frac{\Gamma(4 - \frac{D}{2})}{[k^2 - M'^2]^{4 - \frac{D}{2}}} \quad (\text{B.38})$$

A integral em k fornece

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} k_\mu k_\alpha [k^2 - m^2]^{4-\frac{D}{2}} = (-1)^{3-\frac{D}{2}} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{D}{2}}} \frac{g^{\mu\alpha}}{2} \frac{\Gamma(3-D)}{\Gamma(4-\frac{D}{2})} \left(\frac{1}{M'^2}\right)^{3-D} \quad (\text{B.39})$$

segundo

$$\frac{4}{(4\pi)^D} \text{cte } i p_{\mu 1} \int dx [(1-x)x]^{\frac{D}{2}-2} \int dy y^{2-\frac{D}{2}} \Gamma(3-D) \left(\frac{1}{M'^2}\right)^{3-D} \quad (\text{B.40})$$

A integração paramétrica em x é uma função Beta na forma $B(\frac{D}{2}-1, \frac{D}{2}-1)$. Em $D=3$ a equação acima fornece o valor

$$\frac{-i}{N} \frac{4}{3\pi^2} \frac{1}{\epsilon} p_{\mu 1} e^{-ip \wedge p_1} \quad (\text{B.41})$$

Apêndice C

O Método de BPHZ

O esquema de renormalização de BPHZ [56]¹ emprega operadores de Taylor para gerar os termos de subtração. Sabe-se que, sendo Γ um diagrama 1PI correspondendo a um integrando não subtraído $I_\Gamma(k, p)$ onde k é a variável de integração e p o momento externo, a subtração dos n primeiros termos da série de Taylor $I_\Gamma(k, p)$ em torno de $p = 0$ abaixa o grau de divergência superficial do diagrama 1PI de, pelo menos, $(n + 1)$. Deste modo, para se obter um resultado convergente basta fazer subtrações até $n \geq d$, onde d é o grau de divergência do diagrama. Considerando o caso onde a integral (diagrama) é composta por subintegrações (subdiagramas), o método de BPHZ é então considerado uma generalização deste procedimento de subtração onde o integrando não subtraído é substituído por um integrando subtraído em que todas as subintegrações envolvidas na integral resultante são superficialmente convergentes.

Para descrever formalmente o método precisamos introduzir alguns conceitos, em termos dos quais o objeto que efetua a subtração das divergências é definido.

1. Dois diagramas são não acavalados se $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$ ou $\gamma_1 \subset \gamma_2$ ou $\gamma_1 \supset \gamma_2$.
2. Um diagrama é trivial se este for constituído por um único vértice.

Para formalizar o método é fundamental estabelecermos o conceito de “floresta”.

Floresta: Uma floresta, U , de um dado diagrama, G , é um conjunto de subgráficos de G (incluindo possivelmente G) não acavalados, próprios² (1PI) e não triviais.

Seja I_G o integrando não subtraído associado ao gráfico G . O integrando subtraído é então dado em termos da fórmula da floresta

$$R_G = \sum_{U \in \mathcal{F}} \prod_{\gamma \in U} (-t_\gamma^{d(\gamma)}) I_G \quad (\text{C.1})$$

Na expressão (C.1), o somatório é aplicado sobre todas as florestas de G ; \mathcal{F} representa o conjunto de todas as florestas de G ; $t_\gamma^{d(\gamma)}$ é o operador de Taylor até a ordem $d(\gamma)$ na variável correspondente ao momento externo à γ . Este operador é tomado igual a zero se γ não é uma parte de renormalização. Além disso, se $\gamma_1 \subset \gamma_2$, então $t_{\gamma_1}^{d(\gamma_1)}$ deve ser escrito à direita do termo respectivo a γ_2 .

¹Bogoliubov, Parasink, Hepp, Zimmermann

²Um diagrama é próprio se não puder ser separado em dois diagramas disjuntos pelo corte de uma única linha. Diagramas disjuntos são tais que $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$.

Bibliografia

- [1] CONNES, A., DOUGLAS, M., SCHWARZ, A., “Noncommutative Geometry and Matrix Theory: Compactification on Tori.” *JHEP* 9802, 003, (1998), hep-th/9711162
DOUGLAS, M., HULL, C. M, “ D-Branes and the Noncommutative Torus.” *JHEP* 9802, 008, (1998), hep-th/9711165.
- [2] SEIBERG, N., WITTEN, E., “String Theory and Noncommutative Geometry”, *JHEP* 9909, 032 (1999), hep-th/9908142.
- [3] CONNES, A., RIEFFEL, M.A., “Yang-Mills for Noncommutative Two-Tori”. *Contemp.Math.***62**:237-266, 1987.
- [4] SNYDER, H. S., “ Quantized Space-time.” *Phys. Rev.* **71**: 38 1947.
- [5] DOPLICHER, S., FREDENHAGEN, K.; ROBERTS, J. E., “ The Quantum Structure of Space-Time at the Planck Scale and Quantum Fields.”, *Commun.Math.Phys.***172**:187-220; 1995, hep-th/0303037.
- [6] GURALNIK, Z., JACKIW, R., PI, S.Y., POLYCHRONAKOS, A. P, “Testing Non-commutative QED, Constructing Non-commutative MHD” . *Phys.Lett. B* **517**, 450, (2001), hep-th/0106044.
- [7] GIROTTI, H., O., “Noncommutative Quantum Field Theories” . *Lectures delivered at the XII Jorge Andre Swieca Summar School, Section Particles and Fields, Campos de Jordao, Brazil, 2003.*
- [8] CHAICHIAN, M., PRESNADJER, P., SHEIKH-JABBARI, M. M, TUREANU, A., DEMICHEV, A., “Aharonov-Bohm Effect in Noncommutative Spaces” ., *Phys.Lett. B* **527**, 149 (2002), hep-th/0012175.
CHAICHIAN, M., PRESNADJER, P., SHEIKH-JABBARI, M. M, TUREANU, A., “Non-commutative Standard Model: Model Building”, *Eur. Phys. J.*, **C29**, 413 (2003), hep-th/0107055.
LIAO, Y., DEHNE, C. “Some Phenomenological Consequences of the Time-ordered Perturbation Theory of QED on Noncommutative Space” . *Eur.Phys.J.*, **C29**, 125 (2003), hep-ph/0211425.
CHAICHIAN, M., SHEIKH-JABBARI, M. M, TUREANU, A., “Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED” . *Phys.Rev.Lett.* **86**, 2716, (2001), hep-th/0010175.
- [9] DOUGLAS, M. R., NEKRASOV, N. A., “ Noncommutative Field Theory.” *Rev.Mod.Phys.* **73** :977-1029,2001.

- [10] SZABO, R. J., "Quantum Field Theory on Noncommutative Spaces." *Phys.Rept.***378**:207-299,2003.
- [11] MINWALLA, S., RAAMSDONK, M. V., SEIBERG, N., "Noncommutative Perturbative Dynamics" *JHEP* **02**: 020, 2000., hep-th/9912072.
- [12] GIROTTI, H.O., GOMES, M., RIVELLES V.O., DA SILVA, A.J., "A Consistent Noncommutative Field Theory: The Wess-Zumino Model". *Nuclear Physics* B587, 299 (2000), hep-th/0005272.
GIROTTI, H.O., GOMES, M., RIVELLES, V.O, DA SILVA, A.J., "The Low Energy Limit of the Noncommutative Wess-Zumino Model", *JHEP* 0205, 040 2002, hep-th/0101159.
BUCHBINDER,I.L., GOMES, M., RIVELLES, V.O., DA SILVA, A.J., "Superfield Effective Action in the Noncommutative Wess-Zumino Model". "*Phys.Lett.B***517**,191-202, 2001.
- [13] GIROTTI, H.O., GOMES, M., RIVELLES, V.O., DA SILVA A.J., "The Noncommutative Supersymmetric Nonlinear Sigma Model", *Int. J. Mod. Phys.* A17 1503, 2002, hep-th/0102101 ; AKHMEDOV, E. T., DEBOER, P., SEMENOFF, G. W. *JHEP* 0106, 009 2001, hep-th/0103199
- [14] RIVELLES, V., "Noncommutative Supersymmetric Field Theories", hep-th/0103131;
GIROTTI, H. O., GOMES, M., PETROV, A. Yu., RIVELLES, V. G., DA SILVA, A. J., "The Three-Dimensional Noncommutative Nonlinear Sigma Model in Superspace". *Phys. Lett.* B521, 119, 2001
- [15] GELL-MANN, M., LÉVI, M. "The Axial Vector Current in Beta Decay". *Nuovo Cimento* **16**, 705, 1960.
- [16] LEE, B. W, "*Chiral Dynamics*". New York Gordon and Breach Science Publishers, 1972.
- [17] ZINN-JUSTIN, J., "*Quantum Field Theory and Critical Phenomena*". Oxford Science Publication, 1989.
- [18] MIRANSKI, V. A., "*Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theory*". World Scientific.
- [19] ZARKRZEWSKI, W. J, "*Low Dimensional Sigma Models*". Adam Hilger.
- [20] RAJAMARAN, R. "*Solitons and Confinement*". North-Holland Publishing Company.
- [21] POHLMAYER, K., "Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints". *Commun.Math.Phys.***46**:207-221, 1976.
- [22] FORGER, M., EICHENHERR, H., "On the Dual Symmetry of the Nonlinear Sigma Models". *Nucl.Phys.B***155**:381, 1979.
- [23] AREF'EVA, I. Ya., "Phase transition in the three-dimensional chiral field." *Annals Phys.***117**:393-406,1979.
- [24] EICHENHERR, H., "*SU(N) Invariant Nonlinear Sigma Models*". *Ph.D thesis* (Heidelberg 1978),*Nucl.Phys.B***146**:215-223, 1978.

- [25] D'ADDA, A., LÜSCHER, M., DI VECCHIA, P., "A $1/N$ Expandable Series of Nonlinear Sigma Models With Instantons". *Nucl. Phys.* **B146**, 63 1978.
- [26] D'ADDA, A., LÜSCHER, M., DI VECCHIA, P., "Confinement and Chiral Symmetry Breaking in CP^{N-1} Models With Quarks". *Nucl.Phys.B***152**:125-144 1979.
- [27] AREF'EVA, I. Ya., AZAKOV, S. I., "Renormalization and phase transition in the quantum $CP^{(N-1)}$ Model ($D = 2, 3$)" *Nucl Phys.* **B162**, 298 1980;
- [28] AREF'EVA, I. Ya., NISSIMOV, E.R., PACHEVA, S.J., "BPHZL renormalization of $1/N$ expansion and critical behavior of the three-dimensional chiral field." *Commun.Math.Phys.* **71**:213,1980.
- [29] COBRA, B. B, GOMES, M., "On the Infrared Divergences of the $CP^{(N-1)}$ Models.", *Rev.Bras.Fis.***12**:693-705, 1982.
- [30] ASANO, E. A., GOMES, M., RODRIGUES, A. G, DA SILVA, A. J., "(2+1)D Noncommutative CP^{N-1} Model.", hep-th/0307114. Aceito no *Phys. Rev. D* (a ser publicado no volume **69**).
- [31] ASANO, E. A., GOMES, M., PETROV, A. Yu, RODRIGUES, A. G, DA SILVA, A. J., "Low energy limit of the three-dimensional noncommutative CP^{N-1} Model." (em preparação).
- [32] ASANO, E. A., GIROTTI, H. O, GOMES, M., PETROV, A. Yu, RODRIGUES, A. G, DA SILVA, A. J., "The Coupling of Fermions to the Three-Dimensional Noncommutative CP^{N-1} Model: Minimal and Supersymmetric Extensions.", hep-th/0402013 (submetido ao *Phys. Rev. D*)
- [33] WEINBERG, S. "High-Energy Behavior in Quantum Field Theory." *Phys.Rev.* **118**, 838, 1960.
- [34] GRADSHTEYN, I.S., RYZHIK, I.M., "*Table of Integrals, Series and Products*", 4th edition, Academic Press, 1980.
- [35] GOMES, M., Renormalization in Noncommutative Field Theory. XI Jorge André Swieca Summer School on Fields and Particles (2001).
- [36] WIGNER, E. P., "On The Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium." *Phys. Rev.* **40** 749, 1932.
- [37] WEYL, H., *The Theory of the Groups and Quantum Mechanics*. Ed. Dover, New York, 1931.
- [38] WEYL, H., "Quantum Mechanics and Group Theory." *Z. Physik* **46**, 1 1949.
- [39] GROENEWOLD, H. J., "On The Principles of Elementary Quantum Mechanics." *Physica* **12** 405, 1946.;
MOYAL, J. E., "Quantum Mechanics as a Statistical Theory." *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** , 99 (1949).
- [40] BOZKAYA, H., FISCHER, P., GROSSE, H., PITSCHMANN, M., PUTZ, V., SCHWEDA, M., WULKENHAR, R., "Space-Time Noncommutative Field Theories and Causality"., *Eur.Phys.J.* **C29**, 133 (2003).

- [41] AREF'EVA, I. Ya., BELOV, D. M., KOSHELEV, A. S., RYCHOV, O.A., "Renormalizability and UV/IR mixing in noncommutative theories with scalar fields." *Phys.Lett.* **B487**:357-365,2000.
AREF'EVA, I. Ya., BELOV, D. M., KOSHELEV, A. S., RYCHOV, O.A., " UV/IR mixing for noncommutative complex scalar field theory. 2. (interaction with gauge fields)". *Nucl.Phys.Proc.Suppl.* **102**:11-17,2001, hep-th/0003176.
- [42] MICU, A., SHEIKH-JABBARI, M.M, "Noncommutative Φ^4 Thory at Two Loops"., *JHEP* **0101**:025,2001.
- [43] AREF'EVA, I. Ya., BELOV, D. M., KOSHELEV, A. S., RYCHOV, O.A., "A note on UV/IR for Noncommutative Complex Scalar Field.", hep-th/0001215.
- [44] BRANDT, F. T., DAS, A., FRENKEL, J., "General Structure of The Photon Selfenergy in Noncommutative QED". *Phys.Rev.* **D65** 085017, 2002.
- [45] GEL'FAND, I. M., SHILOV, G. E., "*Generalized Functions*", Vol. 1. Academic Press, 1964 .
- [46] GOMIS, J., MEHEN, T., "Space-Time Noncommutative Field Theories and Unitarity". *Nucl. Phys.* **B 591**, 265 2000, hep-th/0005129.
- [47] BAHNS, D., DOPLICHER, S., FREDENHAGEN, K., PIACITELLI, G., "On The Unitarity Problem in Space-Time Noncommutative Theories". *Phys. Lett.* **B533**, 178 2002, hep-th/0201222.
- [48] MARIZ, T., PIRES, C. A. de S., RIBEIRO, R. F., "Ward identity in noncommutative QED"., hep-th/0211416.
- [49] HAYAKAWA, M., "Perturbative Analysis on Infrared Aspects of Noncommutative QED on R^4 ". *Phys. Lett.* **B478**, 394 2000, hep-th/9912094.
- [50] BASSETTO, A., GRIGUOLO, L., NARDELLI, L. G., VIAN, F., "On The Unitarity of Quantum Gauge Theories on Noncommutative Spaces". *JHEP* **0107**, 008 2001, hep-th/0105257.
- [51] PARK, S. H., "Theta Term Renormalization in $(2+1)$ -Dimensional $CP^{(N-1)}$ Model With a Theta Term.", *Phys. Rev. D* **45**, 3332 1992.
PARK, S. H., "Critical Behavior of $(2+1)$ -Dimensional $CP^{(N-1)}$ Model With a Chern-Simons Term." *Mod.Phys.Lett.* **A7**:1579-1587 1992.
- [52] SAKURAI, J. J., "*Advanced Quantum Mechanics*". Addison-Wesley Publishing Company, 1967.
- [53] GIROTTI, H.O., ASANO, E. A., RODRIGUES, G. A., PETROV, A. Yu, GOMES, M., RIVELLES V.O., DA SILVA, A.J., "The coupling of fermions to the three-dimensional noncommutative CP^{N-1} model: minimal and supersymmetric extensions."
- [54] COBRA, B., B., "*Cancelamento de divergências infravermelhas nos modelos CP^{N-1}* ." Dissertação de Mestrado. IFUSP (1982).

- [55] T' HOOFT, G., VELTMAN, M. "Regularization and Renormalization of Gauge Fields." *Nucl. Phys. B* **44**, 189, 1972.
BOLLINI, C. G., GIAMBIAGI, J. J. "Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter". *Il Nuovo Cimento* **12B**, 20, 1972; *Phys. Lett.* **40B**, 566, 1972.
- [56] PARASIUK, O.S., BOGULIOBOV, N. N, " On The Multiplication of the causal Function in the Quantum Theory of Fields". *Acta Math.* **97**, 227, 1957.
BOGULIOBOV, N. N, SHIRKOV, D. V. "Introduction to the Theory of Quantized Fields". John Wiley Sons Inc., 1980.
HEPP, K. "Proof of the Boguliobov-Parasiuk Theorem on Renormalization." *Comm. Math. Phys.* **2**, 301, 1966.
ZIMMERMANN, W. "Composite Operators in Perturbation Theory of Renormalizable Interactions." *Ann. Phys.* **77**, 536, 1973.
GOMES, M., LOWENSTEIN, J. H., ZIMMERMANN, W., "Generalizations of the Momentum-Space Subtraction Procedure for Renormalized Perturbation Theory." *Comm. Math. Phys.* **39**, 81, 1974.