Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Estudo do raio de turnaround em teorias $f(R)$

Rafael Christ de Castro Lopes

Orientador: Prof. Dr. L. Raul Abramo
Co-orientador: Prof. Dr. Laerte Sodré Jr.

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a
obtenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Raul Weber Abramo - Orientador (IFUSP)
Prof. Dr. Marcos Lima (IFUSP)
Prof. Dr. Alberto V. Saa (UNICAMP)
Prof. Dr. Rogerio Rosenfeld (IFT/UNESP)
Prof. Dr. Miguel Quartin (UFRJ)

São Paulo
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Lopes, Rafael Christ de Castro

Estudo do raio de turnaround em teorias $f(R)$. São Paulo, 2019.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, Instituto de Física. Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo
Área de Concentração: Cosmologia

Unitermos: 1.Relatividade (Física); 2.Gravitação; 3.Cosmologia.

USP/IF/SBI-012/2019

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Study of turnaround radius in $f(R)$ theories

Rafael Christ de Castro Lopes

Advisor: Prof. Dr. L. Raul Abramo

Co-advisor: Prof. Dr. Laerte Sodré Jr.

Thesis of Phd submitted to the Instituto de Física da Universidade de São Paulo to obtain the title of Doctor of Science.

Examination Board:

Prof. Dr. Luiz Raul Weber Abramo - Orientador (IFUSP)

Prof. Dr. Marcos Lima (IFUSP)

Prof. Dr. Alberto V. Saa (UNICAMP)

Prof. Dr. Rogerio Rosenfeld (IFT/UNESP)

Prof. Dr. Miguel Quartin (UFRJ)

São Paulo
2018

Dedico àquele cujo medo de dizer que falhei
foi um grande motivador para continuar em
frente, meu filho Levi Christ.

Agradecimentos

Agradeço ao meu Deus em cuja fé me sustentou e me manteve acreditando que seria possível alcançar esse sonho;

Tenho profunda gratidão ao meu orientador Raul Abramo que me aceitou mesmo sabendo da dificuldade que seria me formar como um pesquisador em cosmologia sendo que não era da área. Além disso, sou profundamente grato pelo exemplo que recebi de rigor científico, responsabilidade e determinação. Hoje, seguramente tenho um bom exemplo de pesquisador a seguir;

Ao professor Laerte Sodré Jr. deixo meu agradecimento e reconhecimento, pois, literalmente, sem ele eu não estaria na USP. Fora seu e-mail me aconselhando a vir para esta universidade, mesmo sem orientador e se comprometendo a encontrar um para mim, o que cumpriu, que me deu a segurança para vir. E ao chegar, durante o primeiro ano, o mais difícil, ele me fez sentir acolhido com sua conversa e a participação nas reuniões em seu grupo de pesquisa. Eu nunca o esquecerei;

Agradeço a minha esposa, por ter vindo junto com meu filho me acompanhar e fortalecer durante esse período incógnito. Apesar de todas as dificuldades e debates, foram os dias mais felizes da minha vida. Obrigado queridinha;

Não posso deixar de reconhecer a importância daquele que me apresentou a ferramenta do cálculo computacional no momento em que eu mais precisava, o Rafael Marcondes, cujo coração e solicitude foram mais do que comprovados. Você foi um bálsamo providencial durante todo o primeiro ano.

Outro participante fundamental nesse processo que não posso deixar de reconhecer foi um garoto de inteligência e bondade singular, o Rodrigo Voivodic, meu "terceiro

orientador”. Foi uma experiência sublime trabalhar com você, aprender a não temer desafios e ser cientificamente rigoroso. Sem você esse trabalho, pelo menos com o rigor e profundidade que possui, nunca seria possível.

Gostaria de expressar também meu agradecimento ao Prof. Marcos Lima, que de forma paciente me apoiou e aconselhou em todos os momentos que precisei, especialmente durante o primeiro ano, quando fiz suas duas disciplinas de Cosmologia Física;

Agradeço aos meus familiares que mesmo longe, nunca deixaram de acreditar e me motivar a superar os desafios dessa jornada. Meu pai Nonato, minha mãe Ariadne, minha irmã Jocasta, minha irmã Camila e meus sobrinhos Ághata e João. Além desses, mais ainda pertencendo aos meus familiares, quero agradecer a minha madrinha Maximira, que sempre se interessou e acompanhou o meu progresso.

Quero também reconhecer o apoio que todos os meus colegas da pós-graduação em física da USP me deram ao me ouvir, aconselhar e ensinar. Obrigado Hugo Camacho, Henrique Rubira, Leandro Beraldo, Carolina Queiroz e Leonardo Perico.

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Maranhão - Campus Santa Inês, pelo apoio financeiro, sob o projeto Proqualis;

“Abre os meus olhos para que eu veja as maravilhas da tua lei.”

(Bíblia Nova Versão Internacional, Salmos 119:18)

RESUMO

Nós investigamos o raio de turnaround R_t , a distância do centro da estrutura cósmica até a casca que está se descolando do fluxo de Hubble em um dado tempo, no contexto do modelo de colapso esférico, tanto em Relatividade Geral e em Gravidade Modificada, em particular no cenário $f(R)$ chamado de modelo de Hu-Sawicki. As fases do colapso esférico são marcadas pelo contraste de densidade não-linear no instante de turnaround δ_t e pelo contraste de densidade linear no momento do colapso δ_c . Nós encontramos que a massa efetiva do grau de liberdade escalar extra, o qual surge em modelos de gravidade modificada, tem um impacto no δ_t de até $\sim 16\%$, e que δ_c pode aumentar por $\sim 2.3\%$, para estruturas com massa de $\simeq 10^{13} h^{-1} M_\odot$ em $z \simeq 0$. Nós calculamos o raio de turnaround no contexto do modelo de gravidade modificada, R_t , e mostramos que esse observável pode aumentar por até $\sim 6\%$.

O próximo passo foi investigar a relação entre R_t e a massa de virial M_v de estruturas cósmicas no contexto do modelo Λ CDM e no modelo $f(R)$ de gravidade modificada. A massa de virial é definida, para este trabalho, como a massa inserida dentro do volume onde a densidade é 200 vezes a densidade média de matéria. Nós implementamos uma nova abordagem considerando que, em média, os sistemas gravitacionalmente ligados (por exemplo, galáxias, grupos e aglomerados de galáxias) seguem, em sua região mais interna, um perfil de densidade tipo Navarro-Frenk-White, enquanto que para além do limite do raio de virial (R_v) o perfil é bem aproximado pelo termo de 2-halos da função de correlação. Combinando essas duas componentes junto

com a informação obtida a partir da solução de colapso esférico para as estruturas, nós pudemos conectar esses dois observáveis que podem ser medidos diretamente em estruturas cósmicas: o raio de turnaround e a massa de virial. Em particular, nós mostramos que, em Λ CDM, a massa de turnaround em $z = 0$ é relacionada com a massa de virial daquela mesma estrutura por $M_t \simeq 3.07 M_v$, enquanto que em termos dos raios nós temos que $R_t \simeq 3.7 R_v$ (para massas de virial de $10^{13} h^{-1} M_\odot$). No modelo $f(R)$, por outro lado, tomando o parâmetro $|f_{R0}| = 10^{-6}$, nós temos $M_t \simeq 3.43 M_v$ e $R_t \simeq 4.1 R_v$, para essa mesma escala de massa. Desse modo, a diferença entre Λ CDM e $f(R)$ em termos dessas relações entre observáveis é da ordem de $\sim 10 - 20\%$, mesmo para um parâmetro relativamente fraco de gravidade modificada. Para o raio de turnaround nós encontramos uma diferença de $\sim 9\%$ entre a gravidade mais fracamente modificada considerada neste trabalho ($|f_{R0}| = 10^{-6}$) e Λ CDM, para uma massa de $10^{13} h^{-1} M_\odot$.

Uma vez que as observações permitam uma precisão desta ordem ou melhor em medidas do raio de turnaround R_t , bem como da massa do virial (e/ou raio do virial R_v), essas quantidades poderão se tornar poderosos testes de gravidade modificada.

Palavras-chave – Gravitação Modificada, Energia Escura, Modelo $f(R)$, Raio de Turnaround

ABSTRACT

We investigate the turnaround radius R_t , the distance from the center of the cosmic structure to the shell that is detaching from the Hubble flow at a given time, in the context of the spherical collapse model, both in General Relativity and in modified gravity, in particular $f(R)$ scenarios – namely the Hu-Sawicki model. The phases of spherical collapse are marked by the non-linear density contrast in the instant of turnaround δ_t , and by the linear density contrast in the moment of collapse, δ_c . We find that the effective mass of the extra scalar degree of freedom which arises in modified gravity models has an impact on δ_t of up to $\sim 16\%$, and that δ_c can increase by $\sim 2.3\%$, for structures with mass $\simeq 10^{13} h^{-1} M_\odot$ at $z \simeq 0$. We also compute the turnaround radius in the context of modified gravity models, showing that R_t can increase by up to $\sim 6\%$.

The next step was to investigate the relationship R_t and the virial mass M_v of cosmic structures in the context of Λ CDM model and in an $f(R)$ model of modified gravity. The virial mass is defined, in this work, as the mass enclosed within the volume where the density is 200 times the background density. We employ a new approach by considering that, on average, gravitationally bound astrophysical systems (e.g., galaxies, groups and clusters of galaxies) follow, in their innermost region, a Navarro-Frenk-White density profile, while beyond the virial radius (R_v) the profile is well approximated by the 2-halo term of the matter correlation function. By combining these two properties together with the information drawn from solving the spherical collapse for the structures,

we are able to connect two observables that can be readily measured in cosmic structures: the turnaround radius and the virial mass. In particular, we show that, in Λ CDM, the turnaround mass at $z = 0$ is related to the virial mass of that same structure by $M_t \simeq 3.07 M_v$, while in terms of the radii we have that $R_t \simeq 3.7 R_v$ (for virial masses of $10^{13} h^{-1} M_\odot$). In the $f(R)$ model, on the other hand, we have $M_t \simeq 3.43 M_v$ and $R_t \simeq 4.1 R_v$, for $|f_{R0}| = 10^{-6}$ and the same mass scale. Therefore, the difference between Λ CDM and $f(R)$ in terms of these observable relations is of order $\sim 10 - 20\%$ even for a relatively mild strength of the modification of gravity ($|f_{R0}| = 10^{-6}$). For the turnaround radius itself we find a difference of $\sim 9\%$ between the weakest modification of gravity considered in this work ($|f_{R0}| = 10^{-6}$) and Λ CDM, for a mass of $10^{13} h^{-1} M_\odot$. Once observations allow precisions of this order or better in measurements of the turnaround R_t , as well as the virial mass M_v (and/or the virial radius R_v), these quantities will become powerful tests of modified gravity.

Keywords – Modified Gravity, Dark Energy, $f(R)$ Model, Turnaround Radius

Índice

Agradecimentos	v
1 Introdução	1
2 Teoria da Relatividade Geral	7
2.1 Introdução	7
2.2 Princípio de equivalência	8
2.3 A Geometria do Espaço-Tempo	9
2.4 A Física do Espaço-Tempo	11
2.5 Limite para campos fracos	12
2.6 Equações fundamentais da Teoria da Relatividade Geral	13
2.7 Solução de Schwarzschild	16
2.7.1 Teorema de Birkhoff	16
3 Modelo Cosmológico Padrão	19
3.1 Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker	19
3.2 Expansão do Universo	20
3.3 História Cósmica	25
3.4 Distâncias Cósmicas	29
3.4.1 Distâncias Física e Comóvel	30
3.4.2 Distância de Luminosidade	31
3.4.3 Distância de Diâmetro Angular	33
3.5 Teoria de perturbação cosmológica linear	33
3.6 Teoria de perturbação cosmológica não-linear	36

3.6.1	Estudo da equação linear para o contraste de densidade	38
3.7	Estruturas em Larga Escala	39
3.7.1	Função de Correlação	40
3.7.2	Espectro de Potência e Variância	42
3.8	Observações Cosmológicas	46
3.8.1	Medidas de Supernovas Tipo Ia	46
3.8.2	Radiação Cósmica de Fundo	47
3.8.3	Oscilações Acústicas de Bárions	48
4	Formação de Estruturas	51
4.1	Modelo de Colapso Esférico	51
4.1.1	Colapso esférico em um universo Einstein-de Sitter	52
4.1.2	Colapso esférico em um universo Λ CDM	57
4.1.3	Propriedades do modelo de colapso esférico	59
4.2	Modelo de Halos	63
4.2.1	Perfil de densidade radial dos Halos	65
4.2.2	Função de Massa e Bias	67
4.2.3	Funções de Correlação e Espectros dos halos	69
5	Teorias de gravitação $f(R)$	71
5.1	Modificações na Teoria da Relatividade Geral	71
5.2	Teorias $f(R)$	72
5.3	Condições para Modelos $f(R)$	77
5.4	Mecanismos de Blindagem	77
5.5	Modelo de Hu-Sawicki	78
5.6	Parametrização da massa do campo escalar m_{f_R}	79
5.7	A dependência de $\epsilon(a, k)$ com a escala	80
6	Colapso Esférico em $f(R)$	83
6.1	Equações do Colapso Esférico Modificadas	83

6.2	Perfil Inicial	85
6.3	Propriedades do Colapso esférico em $f(R)$	87
6.4	Limite de Campo Fraco e Limite de Campo Forte	88
6.5	Efeitos de $f(R)$ no colapso	91
6.5.1	Dependência de δ_c com o tempo	93
6.5.2	Dependência de δ_c com a massa	94
6.6	Efeitos de $f(R)$ no turnaround	95
6.6.1	Dependência de δ_t com o tempo	95
6.6.2	Dependência de δ_t com a massa	96
7	Raio de Turnaround (R_t) em $f(R)$	99
7.1	R_t como dependente do tempo	100
7.2	R_t como dependente da massa	101
7.3	Relação entre o raio de turnaround e a massa de virial no modelo $f(R)$. .	103
7.3.1	Raios de turnaround e as massas das estruturas	104
7.3.2	Razão entre o Raio de Turnaround e o Raio de Virial	106
7.3.3	Razão entre a Massa de Turnaround e a Massa de Virial	108
7.4	Raio de Turnaround para estruturas realísticas em $f(R)$	110
7.4.1	Comparação com dados	111
8	Conclusões	115
A	Perfil inicial Físico	119
B	Evolução dos perfis de densidade	121
C	Raio de Turnaround e Raio de Turnaround Máximo	123
D	Perfil de densidade em $f(R)$	125

Lista de Figuras

3.1	Medidas da constante de Hubble apresentadas como resultado final do HST.	21
3.2	O Fator de escala em termos do tempo de Hubble para o modelo cosmológico padrão. Figura retirada de [1].	30
3.3	Densidade, em relação a densidade crítica hoje, em função do fator de escala para cada uma das componentes energéticas, radiação, matéria e constante cosmológica. Figura retirada de [2].	31
3.4	Espectro de Potência do SDSS para um reshift $\bar{z} = 0.1$. Figura retirada de [3].	44
3.5	A raiz da variância das flutuações de densidade para $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$.	45
3.6	O espectro de potência da temperatura da RCF $(\delta T/T)_l^2 \equiv l(l+1)C_l/2\pi$ versus o multipolo e o comprimento angular θ . Os pontos vermelhos são os dados do Planck e a curva verde representa o melhor ajuste para o modelo Λ CDM. Figura extraída da colaboração Planck [4].	49
3.7	Função de correlação medida pela BOSS para a amostra de galáxias CMASS. Figura extraída da colaboração Planck [5].	50
4.1	Evolução do raio no modelo de colapso esférico, linha contínua. A linha tracejada apresenta o colapso em uma singularidade. A linha pontilhada representa uma evolução que segue o fluxo de Hubble. Figura extraída das notas do Prof. Gastão B. Lima Neto [6].	55
4.2	Comportamento da densidade da perturbação e do campo de fundo nas fases de expansão, contração e virialização de estruturas gravitacionalmente ligadas. Figura extraída de [7].	57

4.3	Evolução do contraste de densidade nos regimes linear (azul-tracejada) e não-linear(vermelha-contínua) para uma estrutura cujas condições iniciais geram um colapso hoje, $a = 1.0$	60
4.4	Comparação entre os valores de δ_c , δ_t e Δ_v para estruturas colapsando em diferentes redshifts no universo Einstein-de Sitter(linha azul-pontilhada) e no universo Λ CDM (linha preta-tracejada).	64
4.5	Perfil de densidade normalizado para massas de $10^{11} h^{-1} M_\odot < M < 10^{16} h^{-1} M_\odot$ e com cosmologia $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$	67
5.1	Gráficos de $\epsilon(a, k)$ para $ f_{R0} = 10^{-4}$, $ f_{R0} = 10^{-5}$ e $ f_{R0} = 10^{-6}$. A linha vermelha delimita a região do raio de Compton.	81
5.2	Gráficos $\epsilon(\log_{10} k, \log_{10} f_{R0})$ para $a = 0.5$, $a = 0.8$ e $a = 1.0$. A linha vermelha delimita a região do raio de Compton.	82
6.1	Evolução do contraste de densidade não-linear nos regimes para limite de campo fraco (vermelha-contínua) e limite de campo forte (azul-tracejada) para uma estrutura cujas condições iniciais gerariam um colapso hoje $a = 1.0$ no limite de campo fraco.	88
6.2	Densidade linear crítica δ_c de estruturas com massas $M = 10^{14} h^{-1} M_\odot$ que colapsam em diferentes momentos, para o limite de campo fraco ($\epsilon = 0$, linha preta-tracejada) e de campo forte ($\epsilon = 1/3$, azul), para os perfis Tanh (esquerda) e Phy (direita). A baixo é apresentado a diferença relativa entre os valores em cada limite	90
6.3	Contraste de densidade não-linear no turanorund, δ_t , para estruturas com massas $M = 10^{14} h^{-1} M_\odot$, as quais atingem o turnaround em momentos diferentes. As legendas são as mesmas que na Fig. 6.2.	91
6.4	Evolução do contraste de densidade nos regimes linear (vermelha) e não-linear (zul) para estruturas cujas condições iniciais geram um colapso hoje $a = 1.0$ nos limites de campo forte $\epsilon = 1/3$ e de campo fraco $\epsilon = 0$	92

6.5	Painéis superiores da esquerda pra direita: valores de δ_c para os perfis Tanh e Phy, respectivamente, for $0 < z < 3$, e para os parâmetros de GM $ f_{R0} = 10^{-4}$ (laranja), $ f_{R0} = 10^{-5}$ (vermelho), $ f_{R0} = 10^{-6}$ (azul) Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto) e $\epsilon = 1/3$ (cinza). O perfil Tanh com inclinações $s = 0.8$ (linhas pontilhadas) e $s = 0.8$ (linhas sólidas). Painel inferior: diferença relativa entre os valores apresentados nos painéis superiores com respeito aos valores em Λ CDM.	94
6.6	Painéis superiores da esquerda pra direita: valores de δ_c para os perfis Tanh e Phy, respectivamente, como uma função da massa. As legendas são idênticas àquelas da Fig. 6.5.	96
6.7	Gráficos superiores: Contraste de densidade não-linear no turnaround, para os perfis Tanh (esquerda) e Phy (direita), em $0 < z < 3$. Gráficos inferiores: diferença relativa entre os valores apresentados nos painéis superiores com respeito aos valores em Λ CDM.	97
6.8	Contraste de densidade no turaround como uma função da massa, para os perfis Tanh (esquerda) e Phy (direita).	98
7.1	Raio de turnaround como uma função do redshift para estruturas com massa de $M = 10^{14} h^{-1} M_\odot$, para os perfis iniciais Tanh (esquerda) e Phy (direita).	102
7.2	Painel Superior: raio de turnaround R_t para massas no intervalo $10^{11} h^{-1} M_\odot < M < 10^{16} h^{-1} M_\odot$, para os perfis Phy (esquerda) e Tanh (direita) para estruturas com turnaroud hoje. As convenções para cores e linhas são as mesmas das figuras anteriores.	103

- 7.3 Painéis superiores, da esquerda pra direita: razão R_t/R_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $10^{12} h^{-1} M_\odot < M_v < 10^{15} h^{-1} M_\odot$, e para os parâmetros $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul), e para Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais ingrime ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para Λ CDM. 107
- 7.4 Painéis superiores, da esquerda pra direita: valores para R_t/R_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $0 < R_v < 2.5h^{-1}\text{Mpc}$, e para os parâmetros de GM $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul) Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais ingrime ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para Λ CDM. 108
- 7.5 Painéis superiores, da esquerda pra direita: razão M_t/M_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $10^{12} h^{-1} M_\odot < M_v < 10^{15} h^{-1} M_\odot$, e para os parâmetros $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul), e para Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto). Como nos gráficos anteriores, o perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais ingrime ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para Λ CDM. 109
- 7.6 Painéis superiores, da esquerda pra direita: valores para M_t/M_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $0 < R_v < 2.5h^{-1}\text{Mpc}$, e para os parâmetros de GM $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul) Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais ingrime ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para Λ CDM. 110

7.7	Painéis superiores, da esquerda para direita: valores de R_t para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, para $10^{12}h^{-1}M_{\odot} < M_v < 10^{15}h^{-1}M_{\odot}$ e para os parâmetros de GM $ f_{R0} = 10^{-4}$ (laranja), $ f_{R0} = 10^{-5}$ (vermelho), $ f_{R0} = 10^{-6}$ (azul) Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais íngreme ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para Λ CDM.	111
7.8	Predições teóricas para o raio de turnaround para Λ CDM (linha contínua pretas) e GM (linhas coloridas contínuas), incluindo o “raio de turnaround máximo” (linha contínua ciano). Os dados são obtidos das referências [8–10].	114
B.1	Evolução do perfil de densidade inicial, Tanh (painel a esquerda) e Phy (painel a direita), nos momentos inicial (sólida), intermediário(tracejado) e de colapso (pontilhado), para RG (azul) e limite de campo forte.	122
C.1	Raio de turnaround de uma estrutura para a condição inicial $\delta_0 = 0.005$ (azul), $\delta_0 = 0.0055$ (vermelho), $\delta_0 = 0.006$ (laranja) e 0.0065 (verde), in Λ CDM. Com o raio de turnaround máximo $R_{t,max}$ (cinza).	124
D.1	Painel superior: O perfil de densidade composto pelo perfil NFW e o termo de 2-halos para $M_v = 10^{14}h^{-1}M_{\odot}$ e $z = 0$, considerando os parâmetros de GM $ f_{R0} = 10^{-4}$ (laranja), $ f_{R0} = 10^{-5}$ (vermelho), $ f_{R0} = 10^{-6}$ (azul), o limite de campo fraco $\epsilon = 0$ (Λ CDM, preto) e o limite de campo forte $\epsilon = 1/3$ (cinza). Painel inferior: diferença relativa entre os valores do painel acima com respeito a Λ CDM.	126

Lista de Tabelas

4.1	Valores obtidos numericamente para os parâmetros do modelo do colapso esférico a_c , δ_c , a_t , δ_t e Δ_v no contexto de uma cosmologia referente ao universo Einstein-de Sitter (linha superior) e ao modelo padrão Λ CDM (linha inferior) quando o colapso ocorre em $a = 1$	62
6.1	Valores obtidos numericamente para os parâmetros do modelo do colapso esférico a_c , a_t , δ_t e δ_c para os dois limites, campo fraco $\epsilon = 0$ e campo forte $\epsilon = 1/3$, para estruturas de $M \approx 10^{14} h^{-1} M_\odot$ cujo o turnaround e colapso ocorra em $a = 1$ ($z = 0$), para o perfil Tanh com $s = 0.4$ e para o perfil Phy. Δ_{rel} representa a diferença relativa entre os valores obtidos com respeito aquele calculado para $\epsilon = 0$	89

Capítulo 1

Introdução

Desde 1915, quando a Teoria da Relatividade Geral (RG) foi formulada, se tornou possível estabelecer um arcabouço teórico que permitiu descrever a maneira como a interação gravitacional rege o universo e seus constituintes em diversas escalas clássicas. A partir de então, seguindo possíveis soluções das equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu},$$

muitas propostas para modelo do universo passaram a ser apresentadas. Inclusive o próprio Einstein, em 1917, formulou um modelo de universo estático no qual ele precisou incluir uma constante cosmológica que gerasse pressão negativa para contrabalancear os efeitos gravitacionais da matéria normal (fria). Entretanto, foi a partir de 1929, com a descoberta da expansão do universo realizada por Hubble e Lemaitre [11, 12], através da observação de que as galáxias estavam se afastando, uma das outras, cada vez mais rápido à medida que estavam mais distantes, que um modelo cosmológico mais preciso e em harmonia com os dados passou a ser considerado.

Porém, uma nova reviravolta no cenário da cosmologia aconteceu em 1998 com o anúncio da descoberta de que o universo encontra-se em expansão acelerada, através de dados oriundos de medidas de Supernova do tipo Ia [13, 14]. Tal descoberta gerou o desafio de explicar a causa desse efeito. E, seguindo a abordagem tradicional, que toma a teoria da Relatividade Geral de Einstein como a descrição da gravitação, a proposta que melhor se adequou aos dados foi aquela na qual o surge uma nova componente energética

com pressão negativa conhecida como energia escura (EE), cuja melhor candidata é a chamada constante cosmológica (Λ). A constante cosmológica corresponde a uma densidade de energia constante, o que a diferencia de todas as demais componentes – matéria bariônica, radiação e matéria escura. Esta última passou a ser incluída após observações da cinemática de galáxias [15] e de curvas de rotação de galáxias [16], que requerem uma massa gravitante muito maior do que a massa luminosa.

O modelo cosmológico, baseado na RG, acrescido do Princípio Cosmológico¹, com componentes de radiação, matéria bariônica, matéria escura e constante cosmológica, é conhecido como Modelo Cosmológico Padrão ou Modelo Λ CDM. Este modelo tem se adequadado aos dados das diversas observações cosmológicas existentes até agora, tais como Supernovas Tipo Ia [13, 14, 17, 18], o espectro de potência da matéria do Sloan Digital Sky Survey (SDSS) [3], as flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo (CMB) [19], oscilações acústicas de bárions (BAO) [20] e assim por diante. Entretanto ainda há algumas lacunas que servem de motivação para pensarmos em alternativas:

- A discrepância de 80-120 ordens de magnitude entre o valor de Λ e a energia quântica do vácuo esperada no modelo padrão de partículas e campos.
- A coincidência cósmica. Comparado à idade do universo, o período em que a densidade de energia da matéria e a densidade de energia da constante cosmológica teriam a mesma ordem de grandeza é muito recente, redshift $z \sim 0.55$, de forma que é “curioso” que esse tempo seja tão recente.

Esse conjunto de questões compõem o conhecido “Problema da Constante Cosmológica” [21], o qual sugere que o modelo Λ CDM não deve ser a descrição final de como o universo funciona. Tais limitações compõem uma razão suficiente para a busca de alternativas para explicar a aceleração cósmica. Em particular, uma das linhas de pesquisa que atacam essa questão investiga a possibilidade de a RG não ser a teoria de gravitação em sua forma final, mas uma aproximação.

¹Este princípio assume que não há nem posição (homogeneidade) ou direção (isotropia) privilegiada no universo em escalas suficientemente grandes.

Propostas de alteração na RG começaram a ser sugeridas logo após sua apresentação [22, 23], mas essas modificações eram motivadas por mera curiosidade científica e não com vistas a resolver algum problema ou limitação que essa teoria apresentasse. Porém, a partir de 1960, motivações teóricas surgiram, pois a RG não é renormalizável e, por isso, não quantizável. Em 1962 Utiyama e Dewitt [24] demonstraram que a renormalização em um loop requer que a ação seja suplantada com termos de curvaturas de ordem mais alta. De forma análoga, Stelle [25] demonstrou que ações com termos de ordem mais alta são renormalizáveis, mas não unitárias. Alguns outros resultados [26, 27] demonstraram que, quando correções quânticas ou a teoria de cordas são consideradas, a ação gravitacional possui termos de ordem mais alta na curvatura. A referência [28] faz uma revisão de vários destes resultados. Porém, essas correções foram consideradas importantes apenas em regimes de alta gravidade próximos à escala de Planck, por exemplo, no universo primordial, ou próximos às singularidades de buracos negros. Portanto, elas não afetariam a fenomenologia gravitacional em grandes escalas e no universo recente.

Carrol et al. [29] demonstram que a inclusão de termos de curvatura de ordem mais alta na ação podem gerar uma expansão acelerada, dessa forma, explorar alternativas para a teoria de gravidade padrão por meio da inclusão de termos como esses é uma maneira de abordar o problema de explicar a origem da aceleração cósmica que encontra motivação tanto teórica como observacional.

A forma mais simples de construir uma Teoria de Gravitação Modificada (TGM ou apenas GM) é substituindo o escalar de curvatura R na integral da ação de Einstein-Hilbert por uma função da curvatura $f(R)$ adicionada a esse escalar R . Através dessa redefinição é possível se fazer uma exploração de diversos testes que avaliem, frente aos dados disponíveis, a possibilidade de que estes modelos de gravitação modificada descrevam o quadro cosmológico que é obtido a partir dos dados. Trabalhos que seguem essa linha de investigação tem sido desenvolvidos em diversas áreas: formação e evolução de estrelas [30, 31], aglomerados de galáxias [32, 33], supernovas tipo Ia [34], espectro de potência [35], formação de estruturas [36] e vazios (“voids”) [37]. Para uma referência

mais ampla de testes ver [38].

O objetivo do presente trabalho é investigar possíveis diferenças entre a cosmologia do modelo Λ CDM e o modelo $f(R)$, segundo a prescrição de Hu-Sawick [39, 40], no contexto do Modelo de Colapso Esférico (MCE) de formação de estruturas, que sirvam como instrumento de diferenciação entre o modelo $f(R)$ em questão e o modelo padrão da cosmologia. Segundo esse modelo, a formação de estruturas gravitacionais pode ser descrita como a evolução de uma perturbação esférica inicial que cresce até atingir um máximo e então colapsa até um estágio de virialização no qual se estabiliza. Diversos trabalhos têm estudado o modelo de colapso esférico em gravitação modificada [41–48], em particular sob a perspectiva do modelo $f(R)$ [49–52].

Entretanto, a maioria desses trabalhos se concentra em propriedades relativas ao estado de colapso, onde busca-se calcular o efeito do modelo $f(R)$ sobre o contraste de densidade crítico δ_c , uma quantidade que indica o valor do contraste de densidade linear da matéria, δ_m , no instante em que uma perturbação primordial colapsa, formando uma estrutura gravitacionalmente ligada. Em problemas que envolvam contagens de estruturas e estudo da aglomeração dos halos (bias), esse valor tem um papel fundamental.

Outra quantidade oriunda do modelo de colapso esférico é o contraste de densidade não-linear no momento do *turnaround*, o instante em que a perturbação de densidade atinge seu tamanho máximo, designado por δ_t . Este trabalho explora especialmente esse momento e calcula outra propriedade presente no MCE: o raio máximo que uma perturbação de densidade atinge antes de iniciar o colapso, R_t , chamado de raio de turnaround, o qual tem recebido atenção como um observacional possível de ser usado para testar modelos cosmológicos [9, 53–55]. De fato, uma possível violação do limite máximo para o raio de turnaround, $R_{t(max)}$, em uma cosmologia Λ CDM foi possivelmente detectada em observações do grupo de galáxias NGC 5353/4 [56], embora este ainda seja um resultado estatisticamente limitado por estudar apenas um grupo de galáxias. É importante destacar que os trabalhos relativos ao estudo do momento de turnaround se concentram no $R_{t(max)}$, caracterizado pela distância do centro até a região onde a aceleração é nula, $\ddot{r} = 0$,

enquanto que aquilo que seria diretamente observável é a região de velocidade radial nula, $\dot{r} = 0$ – ou seja, o raio R_t definido aqui.

Na análise apresentada nesta pesquisa, o contraste de densidade no momento do turnaround δ_t se mostrou sensível a mudanças no modelo cosmológico. Sendo essa a motivação para o cálculo do raio de turnaround R_t no contexto do modelo $f(R)$.

Os resultados presentes nesta tese foram publicados na forma de dois artigos em co-autoria com Rodrigo Voivodic, Prof. Dr. Luis Raul Abramo (orientador) e o Prof. Dr. Laerte Sodré Jr. (coorientador) Os artigos são:

- **“Turnaround radius in $f(R)$ model”** [57];
- **“Relation between the Turnaround radius and virial mass in $f(R)$ model”** [58];

sendo o primeiro publicado e o segundo em fase de implementação das modificações sugeridas pelo referee.

O presente trabalho está organizado da seguinte forma: No capítulo 2 são apresentados os fundamentos da teoria da Relatividade Geral, a teoria de gravidade padrão. O capítulo 3 faz uma revisão do modelo cosmológico padrão, comumente conhecido como modelo Λ CDM. São também aplicadas as teorias de perturbações cosmológicas linear e não-linear, bem como as ferramentas estatísticas utilizadas para descrever o universo em larga escala. O próximo capítulo (4) desenvolve o modelo de colapso esférico com suas propriedades consideradas neste trabalho e o modelo de halos usado para descrever a distribuição de matéria escura. No capítulo 5 é desenvolvido o modelo alternativo de gravidade $f(R)$, onde são apresentadas as equações de campo modificadas e a parametrização específica para o modelo utilizado no presente trabalho, o modelo de Hu-Sawicki. No capítulo 6 as equações e parametrizações do modelo $f(R)$ são aplicadas ao modelo de colapso esférico. Naquele capítulo avaliamos os efeitos da proposta de alteração na teoria de gravidade sobre δ_c e δ_t . Já no capítulo 7 estudamos o efeito dessa proposta específica de modificação na gravidade sobre o cálculo do raio máximo de expansão de uma estrutura esférica que

agora inicia o seu colapso, chamado de raio de turnaround, para três valores do parâmetro que caracteriza a intensidade da divergência do presente modelo com o modelo padrão. Lá também apresentamos uma relação entre o R_t e a massa de virial M_v . Por fim, o capítulo 8 resume os principais resultados obtidos nesta pesquisa. Como apêndices, apresentamos a expressão para cálculo do perfil inicial físico A, em seguida a evolução dos perfis iniciais aplicados são comparadas no apêndice B, no próximo apêndice nossa preocupação foi em comparar o nosso resultado com o valor do raio de turnaround máximo C e no último apêndice D demonstramos como o perfil de densidade é afetado pela proposta de GM estudada nessa tese.

Capítulo 2

Teoria da Relatividade Geral

Como apresentado no capítulo anterior, o objetivo desta tese é avaliar a viabilidade de usar um novo observável, o raio de turnaround, para testar modelos de gravidade modificada. Por essa razão, é de fundamental importância destacarmos as características mais fundamentais e relevantes da teoria de gravidade padrão, a Teoria da Relatividade Geral. Este é o objetivo do presente capítulo.

2.1 Introdução

Até o advento da RG em 1915, a teoria que descrevia a interação gravitacional fora desenvolvida por Isaac Newton (1642-1727) [59]. Aquela teoria define essa interação como uma força de atração entre dois corpos, cuja intensidade era diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância de separação entre elas. Esse arcabouço conceitual foi efetivamente muito eficiente em explicar os movimentos observados tanto de planetas como dos cometas e luas, assim como também explicava as interações da Terra com a Lua e da Terra com os corpos em sua superfície. Essa descrição unificada de fenômenos terrestres e celestes, chamada depois de *Síntese Newtoniana*, se fundamenta em dois conceitos chaves: o primeiro era que o espaço onde os processos físicos se davam era uma entidade absoluta e não afetada pela presença de corpos massivos; e o segundo era que a massa de um corpo reage a efeitos da inércia da mesma forma que reage a efeitos gravitacionais, esse último conhecido como Princípio da Equivalência Fraco.

Apesar de ser aceita plenamente pela comunidade científica como a melhor teoria de gravidade construída até então, a teoria de Newton não estava isenta de questionamentos e limitações. Mesmo no século 18 já houve um debate entre Leibniz e Clarke [60], cujo enfoque se dava a respeito do conceito de espaço absoluto. Essa mesma questão foi o enfoque das ideias desenvolvidas por Ernst Mach (1838-1916) em 1893, a qual foi chamada por Einstein de “*Princípio de Mach*”. Mach buscava redefinir a inércia como um efeito relativo à massa dos outros corpos celestes e não a um movimento em espaço absoluto. Além dessas questões teóricas, do ponto de vista experimental a teoria de gravidade proposta por Newton não conseguia prever a precessão do periélio de Mercúrio, medida por Le Verrier em 1855 como sendo de 35 segundos de arco por século, e aprimorada por Simon Newcomb em 1882, que encontrou um valor de 43 segundos de arco por século [61]. Outra motivação para uma revisão na teoria da gravidade newtoniana adveio do sucesso da teoria da relatividade restrita (RR) proposta por Einstein em 1905 [62, 63], pois um dos seus postulados afirmava que a velocidade da luz era a velocidade limite para propagação de qualquer interação [64], e essa característica da natureza entrava em confronto com a interação instantânea entre dois corpos.

Com base nas motivações descritas e no advento do cálculo diferencial absoluto desenvolvido por Riemann, Gauss, Ricci e outros, que descreve um cálculo diferencial e integral referenciado na geometria intrínseca da variedade na qual o cálculo é aplicado, Einstein apresenta em 1915 uma nova teoria para descrever a interação gravitacional, a RG. A RG demonstrou sua eficácia e abrangência ao prever com precisão a precessão da órbita de Mercúrio, ao obter a deflexão da luz causada pelo Sol na trajetória de raios de luz [65], e ao descrever os resultados já explicados pela teoria newtoniana no regime conhecido como campo fraco, o qual será comentado mais adiante.

2.2 Princípio de equivalência

Um dos pilares da nova teoria de gravidade proposta por Einstein é a generalização do princípio de equivalência de Newton. Esse princípio estabelece que a massa de um

corpo que regula a maneira como ele reagirá a uma força, depois chamada de *massa inercial*, é igual à massa que responde à força de gravidade, a *massa gravitacional*. A primeira consequência dessa equivalência é a impossibilidade de se distinguir a presença de um campo gravitacional em um referencial que esteja em queda livre nesse campo. Isso, apenas se considerarmos um referencial pequeno o suficiente para desconsiderar possíveis efeitos de maré. Portanto, para esse referencial, as leis da RR seriam válidas. Esta versão do princípio da equivalência ficou conhecida como princípio da equivalência fraco. Entretanto, Einstein propôs uma versão mais geral para esse princípio, conhecida como Princípio da Equivalência Forte, que estabelece que não há qualquer experimentos, não apenas mecânicos, realizados em um dado referencial, que permitam a observadores naquele referencial distinguir se estão numa região do espaço com campo gravitacional nulo, ou se estão em queda livre num campo gravitacional uniforme.

2.3 A Geometria do Espaço-Tempo

Essa nova perspectiva da força de gravidade permitiu a Einstein identificar essa interação como um efeito geométrico, ou seja, como resultante de alterações na estrutura do espaço-tempo. Tal interpretação fica mais evidente ao formular o princípio de equivalência como: Em qualquer ponto do espaço-tempo é possível encontrar um referencial localmente inercial para o qual a métrica válida é a métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, uma métrica de um espaço-tempo plano, que rege a RR. Semelhantemente, o axioma de Gauss da geometria diferencial assevera que em qualquer ponto de uma superfície curva é possível encontrar uma superfície pequena o suficiente para ser descrita por uma geometria plana euclidiana [66]. Apesar de Einstein ser o primeiro a formalizar uma teoria de gravidade com base na geometria do espaço-tempo, foi Riemann o primeiro a sugerir que universo deveria ser representado por um espaço-tempo curvo e cuja curvatura deveria ser determinada pelos dados astronômicos [67].

Ao interpretar a gravidade como um efeito da geometria do espaço-tempo, este passa a ser descrito por uma variedade e sua métrica $g_{\mu\nu}$ (de assinatura Lorentziana). A métrica

do espaço-tempo é um tensor de ordem-2 simétrico a partir do qual diversas outras propriedades são construídas. O elemento de caminho sobre a variedade do espaço tempo é calculado como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde dx^μ é um deslocamento infinitesimal na direção x^μ . Em uma variedade a derivada covariante da métrica é nula tal que

$$\nabla_\mu g^{\nu\rho} = \partial_\mu g^{\nu\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu g^{\lambda\rho} + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g^{\nu\lambda} = 0, \quad (2.2)$$

onde $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ é a conexão de Levi-Civita. Através de (2.2) pode se estabelecer uma relação entre a métrica do espaço-tempo e a conexão

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.3)$$

Uma vez que a métrica é dada, a curvatura da variedade é expressa pelo tensor de Riemann, ou tensor de curvatura,

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} \equiv \partial_\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\sigma\mu}^\rho + \Gamma_{\lambda\mu}^\rho \Gamma_{\sigma\nu}^\lambda - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda, \quad (2.4)$$

o qual é obtido ao realizarmos um transporte paralelo em um vetor através de um pequeno loop descrito por dois vetores. Este tensor obedece às seguintes propriedades

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \quad (2.5)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad (2.6)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (2.7)$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0, \quad (2.8)$$

além da *Identidade de Bianchi*:

$$\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu} = 0. \quad (2.9)$$

A contração do tensor de Riemann permite obter quantidades muito importantes na RG;

o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}, \quad (2.10)$$

que por sua vez define o escalar de Ricci de curvatura, ou escalar de Ricci

$$R \equiv R_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.11)$$

2.4 A Física do Espaço-Tempo

Com base na generalização do princípios de equivalência e da relatividade, e no princípio da covariância, Einstein postulou que a interação gravitacional é resultante da curvatura do espaço-tempo ocasionada pela presença de matéria-energia. Desta forma um corpo livre da ação de forças não gravitacionais cairá em queda livre seguindo uma trajetória geodésica descrita pela equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \frac{dz^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dz^{\beta}}{d\lambda} = 0, \quad (2.12)$$

onde $x^{\alpha}(\lambda)$ é a trajetória e λ é um parâmetro afim, que frequentemente pode ser escolhido como sendo o tempo próprio de uma partícula que segue aquela trajetória.

Ao considerarmos escalas muito maiores que as partículas que preenchem o espaço-tempo contínuo, pode-se utilizar também uma representação 4-dimensional para tratar o conteúdo de matéria-energia presente nesse contínuo como um fluido. O tensor de energia-momento $T_{\mu\nu}$ é uma quantidade utilizada para representar o conteúdo de matéria no universo. Esse fluido é tratado como sendo composto por várias espécies como: fótons, neutrinos, bárions, matéria escura e energia escura. Para um fluido genérico o tensor de energia-momento é escrito como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu} + 2q_{\mu}u_{\nu} + \pi_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

onde ρ e p são a densidade de energia e a pressão do fluido, q_{μ} é o vetor fluxo de calor, $\pi_{\mu\nu}$ é o tensor stress-anisotrópico e u_{μ} é a 4-velocidade de um fluido definida como $u_{\mu} = \frac{dx^{\mu}}{\sqrt{-ds^2}}$ com a propriedade de $u_{\mu}u^{\mu} = -1$. Para uma representação do conteúdo material e energético do universo consideraremos que o mesmo é representado por um fluido perfeito,

portanto não possui fluxo de calor q_μ e nem tensor de stress $\pi_{\mu\nu}$, resultando no tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

A equação de continuidade implica que o tensor energia-momento seja conservado

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.15)$$

Portanto, com o objetivo de relacionar a curvatura do espaço-tempo com o conteúdo energético que o preenche, Einstein precisava construir um tensor de ordem 2 a partir do tensor de curvatura de Riemann e que obedecesse a equação de conservação. Após uma primeira tentativa fracassada ¹, Einstein apresentou uma equação covariante que relaciona o conteúdo de matéria-energia presente no universo com a curvatura da variedade espaço-tempo

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein. O tensor de Einstein pode ser obtido após a contração da identidade de Bianchi [66] tal que

$$g^{\mu\lambda}g_{\nu\sigma}(\nabla_\lambda R_{\rho\sigma\mu\nu} + \nabla_\rho R_{\sigma\lambda\mu\nu} + \nabla_\sigma R_{\lambda\rho\mu\nu}) = 0, \quad (2.17)$$

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0,$$

$$\underbrace{\nabla^\mu (R_{\rho\mu} - \frac{1}{2}g_{\rho\mu}R)}_{G_{\rho\mu}} = 0,$$

do qual se obtém um tensor com os termos de curvatura que obedece a equação de conservação.

2.5 Limite para campos fracos

Uma das característica essenciais que a nova teoria de Einstein deveria possuir era reproduzir a gravitação de Newton. Para demonstrar essa característica partiremos de um tensor energia-momento para matéria fria (bárions ou matéria escura), $T^\mu_\nu =$

¹A primeira proposta de Einstein foi escrever $R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{2}T_{\mu\nu}$, a qual não obedece a equação de conservação pois $\nabla_\mu R^{\mu\nu} \neq 0$.

$diag(-\rho, 0, 0, 0)$, e da métrica de Minkowisk $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$. Calculando o traço da equação de Einstein (2.16) obtêm-se

$$\begin{aligned} Tr(G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}), \\ R = \kappa\rho, \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde $\kappa = 8\pi G$. Isso que permite expressar, através da componente 00 da equação de Einstein, que $R_{00} = \frac{1}{2}\kappa\rho$. Essa mesma componente do tensor de Ricci pode ser obtida por meio da definição desse tensor

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{0\lambda 0}^\lambda = R_{0i0}^i = \delta_{ij}\partial^j\Gamma_{00}^i, \\ R_{00} &= -\frac{1}{2}\partial^i\partial_i g_{00}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Se escrevermos a métrica como a métrica de Minkowisk perturbada $g_{00} = -1 + h_{00}$, a expressão anterior pode ser escrita como

$$R_{00} = -\frac{\nabla^2 h_{00}}{2}, \tag{2.20}$$

logo

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa\rho. \tag{2.21}$$

Se identificarmos h_{00} como -2Φ , onde Φ é o potencial gravitacional newtoniano, obtemos a equação de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G\rho. \tag{2.22}$$

Portanto, a gravitação de Einstein se reduz à gravitação newtoniana no limite de campo fraco.

2.6 Equações fundamentais da Teoria da Relatividade Geral

Antes mesmo de Einstein apresentar suas equações de campo da RG, Hilbert, mesmo sem compreender completamente suas implicações, construiu uma dedução destas via

princípio variacional partindo de uma ação conhecida hoje como ação de Einstein-Hilbert, que descreve a interação gravitacional. Seguindo a abordagem de [65], a ação de Einstein-Hilbert S_{EH} e a ação que descreve os campos de matéria S_M podem ser compostas na ação:

$$S = S_{EH} + S_M, \quad (2.23)$$

sendo que

$$S = \overbrace{\frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R}^{S_{EH}} + \underbrace{\int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m(\psi_m, g_{\mu\nu})}_{S_M}, \quad (2.24)$$

onde tomamos unidades tais que $c = 1$, g é o determinante do tensor métrico $g_{\mu\nu}$, R é o escalar de Ricci, e $\mathcal{L}_m(\psi_m, g_{\mu\nu})$ é a densidade lagrangeana da matéria descrita através de um campo ψ . Para implementar o princípio variacional aplicaremos a variação das ações separadamente. Ao variar a ação S_{EH} com respeito a métrica $g^{\mu\nu}$ obtemos

$$\begin{aligned} \delta S_{EH} &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \delta(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2\kappa} \int d^4x [\delta(\sqrt{-g}) g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta(g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu})]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Ao analisar cada termo variacional podemos expressá-los em termos da variação do campo da métrica. O primeiro termo pode ser escrito tal que

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g}) &= -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{g}{2\sqrt{-g}} g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}) \\ &= \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} \delta(g_{\mu\nu}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Quanto à variação do tensor de Ricci podemos escrever:

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda \delta \Gamma_{\nu\mu}^\lambda - \nabla_\nu \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda, \quad (2.27)$$

dessa forma a sua contração com a métrica pode ser escrita como

$$g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \nabla_\sigma [g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\nu\mu}^\sigma - g^{\mu\sigma} \delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda], \quad (2.28)$$

tal que ao aplicarmos o teorema de Stokes, esse termo se transformará em um termo de superfície que pode ser considerado nulo no infinito. Sendo assim esse termo não contribui para a variação da ação. Portanto a variação da ação S_{EH} pode ser reescrita como

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \right] \delta(g^{\mu\nu}). \quad (2.29)$$

Quanto à variação da ação referente à matéria teremos

$$\begin{aligned} \delta S_M &= \int d^4x \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\mu\nu}} \delta(g^{\mu\nu}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

onde o tensor energia-momento é definido por

$$T_{\mu\nu} \equiv \mathcal{L}_m g_{\mu\nu} - 2 \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (2.31)$$

Portanto, ao reunir a variação das ações S_{EH} e S_M e aplicar o princípio de mínima ação obtém-se:

$$\frac{1}{2\kappa} \int \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) d^4x \sqrt{-g} \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} T_{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = 0, \quad (2.32)$$

permitindo obter as equações de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.33)$$

As equações de Einstein descrevem a gravidade como um efeito resultante da curvatura do espaço-tempo causada pela presença de matéria e energia. Elas também descrevem a propagação de perturbações de caráter puramente gravitacionais - as ondas gravitacionais. O lado esquerdo contém termos puramente geométricos, isto é, a métrica e suas derivadas, enquanto que o lado direito especifica o conteúdo de energia que existe no universo. Portanto, com a especificação do tensor energia-momento e da métrica é possível construir um conjunto concreto de equações de Einstein para a cosmologia.

2.7 Solução de Schwarzschild

Uma maneira inicial de visualizar uma aplicação para as equações de campo de Einstein é considerar a métrica mais simples, após a métrica de um espaço plano de Minkowski, conhecida como solução de Schwarzschild [65, 66], a qual descreve o campo gravitacional estático para um sistema esfericamente simétrico no vácuo. Em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , o elemento de linha nesse espaço-tempo é escrito como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.34)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin\theta d\phi^2$ e M é a variável correspondente à massa do corpo responsável pela deformação do espaço-tempo. O comportamento estático da métrica (2.34) fica explicitado pela ausência da dependência temporal em suas componentes temporais e espaciais. Além disso outra característica fundamental é que para $M \rightarrow 0$, ou $r \rightarrow \infty$ a métrica plana de Minkowski é recuperada.

2.7.1 Teorema de Birkhoff

O teorema de Birkhoff, mas que fora apresentado dois anos antes de Birkhoff por Jebsen [68], estabelece que a única solução, para o espaço vazio, esfericamente simétrica é a métrica de Schwarzschild. Nesta tese não apresentaremos uma demonstração explícita deste teorema, a qual pode ser vista em [68], mas o nosso objetivo é apresentar sua característica e consequência, pois ao tratarmos nos capítulos posteriores de modelos de gravidade modificada e suas consequências faremos referência a esse teorema.

O teorema de Birkhoff apresenta em RG o mesmo resultado descrito por Newton para o campo gravitacional; de que um campo gravitacional gerado por um corpo esfericamente simétrico se comporta como se toda a massa estivesse concentrada no centro do corpo. Um corolário fundamental desse teorema, e de maior interesse para a presente tese, advém de sua aplicação no interior de uma casca esférica. Como no interior, incluindo em $r = 0$, não pode haver singularidade, logo nesta região a métrica resultante deve ser aquela para a qual $M \rightarrow 0$, ou seja, para o interior de uma cavidade esfericamente simétrica a métrica

é a de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. E como esse é um teorema local, este corolário não dependerá do que ocorre em $r \rightarrow \infty$ [66]. Em resumo, as cascas externas não afetam as cascas internas, tal como descrito na teoria newtoniana.

Capítulo 3

Modelo Cosmológico Padrão

Após apresentar os fundamentos da teoria de gravidade padrão, a Teoria da Relatividade Geral, o próximo passo é compreender como o atual modelo do universo foi construído a partir da RG. Partindo de uma métrica que obedece o princípio cosmológico, obteremos as equações de Friedmann, cujas soluções representam a evolução das componentes energéticas e que, por sua vez, determinarão a evolução da métrica do universo. Em seguida, apresentaremos alguns dos métodos observacionais que deram a base experimental para a construção do Modelo Cosmológico Padrão (MCP).

3.1 Métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

Com base em observações do universo no regime de grandes escalas (> 100 Mpc [7]), como por exemplo os dados da Radiação Cósmica de Fundo (RCF), sobre a qual falaremos mais a seguir, é possível atribuir-lhe duas propriedades importantes: homogeneidade e isotropia, as quais compõem o que conhecemos como princípio cosmológico. Tais propriedades podem ser traduzidas através da métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), cuja dedução pode ser encontrada em [66], de tal forma que a distância geodésica $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, em quatro dimensões, é dada por:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right], \quad (3.1)$$

onde k é a curvatura da seção espacial. A parte espacial, que caracteriza a geometria de um espaço-tempo para t constante, precisa obedecer ao princípio cosmológico. A

dinâmica desta métrica é definida pelo termo $a(t)$, o fator de escala, o qual determina a evolução de todas as distâncias físicas. A coordenada temporal t é o tempo próprio de um observador comóvel, um observador em um referencial que acompanha a evolução temporal da métrica.

Seguindo [69], uma outra maneira comum de expressar a métrica FLRW é reescrevê-la parametrizando a coordenada radial r como

$$r = f_k(\chi) \equiv \begin{cases} \sin \chi & k = +1, \\ \chi & k = 0, \\ \sinh \chi & k = -1, \end{cases} \quad (3.2)$$

ou de forma mais sucinta

$$r = f_k(\chi) = \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh(\sqrt{-k}\chi). \quad (3.3)$$

Através dessa maneira de representar podemos notar que se $k = +1$, os valores de χ serão limitados por π , portanto a parte espacial da métrica representará uma esfera tridimensional (universo fechado) cujo raio físico, ou seja, o raio do universo, será proporcional ao fator de escala. Por outro lado, se $k = 0$, a geometria da métrica será plana; e caso $k = -1$ a variável χ não será limitada e a geometria espacial será do tipo hiperbólica (nesse contexto o universo é do tipo aberto).

A partir da dinâmica do fator de escala o universo pode se expandir pra sempre, iniciar um colapso ou manter-se estacionário, e quem determinará como será a evolução desta métrica será o conteúdo energético do universo via as equações de Einstein Eq. (2.33). É por meio do fator de escala que podemos expressar uma relação entre as distâncias comóveis X , as quais não sofrem o efeito da dinâmica de $a(t)$, com as distâncias físicas $R(t)$, cujo comprimento é definido por

$$R(t) = a(t)X. \quad (3.4)$$

3.2 Expansão do Universo

A observação da dinâmica do universo começou a ser desenvolvida logo no início do século XX com os resultados de Slipher em 1912 [70]. Essas observações foram as primeiras

evidências de que o universo estava se expandindo. Mas foram os resultados de Hubble e Lemaître [11, 71] que confirmaram que o universo não só possuía um comportamento dinâmico, mas que este causava o afastamento das galáxias uma das outras com uma velocidade proporcional à distância entre elas. Segundo foi observado, o comprimento de onda da luz oriunda das galáxias sofria um alargamento, caracterizado pelo deslocamento das linhas espectrais.

Ao analisar os dados obtidos, Hubble em 1929 [71] relacionou a variação da distância física com o tempo através do que conhecemos hoje por lei de Hubble-Lemaître, e que descreve a relação entre as velocidades das galáxias e a distância até um dado observador:

$$\dot{R}(t) = H(t)R, \quad (3.5)$$

onde $H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ é o parâmetro de Hubble. A manifestação desse comportamento pode ser observada através dos gráficos apresentados no resultado final do *Hubble Space Telescope Key Project* (HST) para o parâmetro de Hubble hoje (H_0) [72] mostrados na figura 3.1.

Figura 3.1: Medidas da constante de Hubble apresentadas como resultado final do HST.

A a maneira como Hubble obteve a velocidade radial das galáxias foi através da medida do deslocamento das linhas espectrais da luz advinda das galáxias, conhecido como *redshift* (z). Este pode ser relacionado à razão entre os fatores de escala nos momentos da emissão

e observação do raio de luz [66],

$$z \equiv \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{a(t_o)}{a(t_e)} - 1, \quad (3.6)$$

onde λ_o é o comprimento de onda observado e λ_e é o comprimento de onda emitido pela fonte. Seguindo essa metodologia, o parâmetro de Hubble, com base nos dados do Planck [73], é estimado por:

$$H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (3.7)$$

$$h = 0.678 \pm 0.0077.$$

onde $1 \text{ Mpc} = 3.09 \times 10^{19} \text{ km}^1$.

Quanto à métrica, por meio da Eq. (3.1) ela pode ser escrita, no caso de curvatura espacial nula, como

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Através dessa métrica deduzimos que o tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ possui componentes não-nulas apenas na diagonal. Essa propriedade justifica o uso de um tensor energia-momento para um fluido perfeito que também é homogêneo e isotrópico (2.14), e assim ρ e p devem depender apenas do tempo. Em coordenadas comóveis, a quadri-velocidade é escrita como $u = (1, 0, 0, 0)$, e como consequência a Eq. (2.14) torna-se

$$T^\mu_\nu = \text{Diag}[-\rho(t), p(t), p(t), p(t)]. \quad (3.9)$$

Calculando as componentes temporais e espaciais do tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ e do tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ (2.14), e os substituindo na equação de Einstein (2.33), obtém-se as equações de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \sum_i \rho_i - \frac{k}{a^2}, \quad (3.10)$$

¹A maior parte dos resultados apresentados nesta tese serão escritos em termos de h .

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = \frac{-4\pi G}{3} \sum_i (\rho_i + 3p_i), \quad (3.11)$$

onde o índice i diz respeito a todos os diferentes tipos de matéria e energia. Estas equações demonstram como a densidade e a pressão dos componentes da matéria caracterizam a geometria e a dinâmica do espaço-tempo. Contudo, para obter as soluções da equação de Friedmann é preciso saber como as diversas componentes ρ_i evoluem com o tempo.

Partindo da equação para a conservação do tensor energia-momento, Eq. (2.15), aplicada ao tensor Eq. (3.9), obtém-se a equação da conservação da energia:

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0. \quad (3.12)$$

Podemos obter soluções explícitas para esta última equação por meio da especificação de uma equação de estado que relacione a pressão p e a densidade ρ :

$$p = w\rho, \quad (3.13)$$

onde w é o parâmetro da equação de estado. Ao ser aplicada à Eq. (3.12) e supondo w constante, esta relação permite obter uma solução geral para a equação de conservação da energia (3.12), dada por:

$$\rho_i = \rho_i(t_0)(a/a_0)^{-3(1+w_i)} \quad (3.14)$$

onde o subíndice 0 representa o presente momento.

Há três diferentes componentes principais da energia no universo: a radiação, que descreve um gás de partículas relativísticas, caracterizada por $w = 1/3$; a matéria, a qual inclui bárions e matéria escura não relativística, descrita por $w = 0$; e a última componente proposta, a energia escura, na forma de uma constante cosmológica Λ , que possui uma equação de estado dada por $w = -1$. Na seção seguinte apresentaremos, com base na mecânica estatística, as razões pelas quais o parâmetro da equação de estado w assume esses valores.

Com base na equação de Friedmann (3.11) é possível definir uma densidade crítica,

em qualquer tempo, para a qual o universo é plano ($k = 0$):

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.15)$$

O valor atual pode ser calculado a partir dos valores obtidos para a taxa de expansão H_0 , Eq. (3.7), de forma que

$$\begin{aligned} \rho_c(t_0) &\equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 h^2 10^{-29} \text{ g/cm}^3 \\ &= 2.77 \times 10^{11} h^2 M_\odot/\text{Mpc}^3 \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $M_\odot = 1.989 \times 10^3 \text{ Kg}$ é a massa solar. A partir de ρ_c define-se uma quantidade adimensional chamada parâmetro de densidade, escrita como:

$$\Omega_i(t) \equiv \frac{\rho_i(t)}{\rho_c(t)}. \quad (3.17)$$

Esta permite reescrever a Eq. (3.10) como

$$\Omega_{total} - 1 = \frac{k}{(a_0 H_0)^2}, \quad (3.18)$$

a qual conduz a uma relação entre a densidade de energia total e a geometria local do universo

$$\begin{aligned} \Omega_t &> 1 \Leftrightarrow k > 0, \\ \Omega_t &= 1 \Leftrightarrow k = 0, \\ \Omega_t &< 1 \Leftrightarrow k < 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A constante cosmológica foi reintroduzida na cosmologia com a finalidade de explicar a expansão acelerada do universo medida na década de 90 [13, 14] e hoje compõe o que é conhecido como o Modelo Padrão da Cosmologia, ou melhor, o modelo Λ CDM. A adição desta nova componente às equações de Einstein pode ser realizada através da inclusão de um termo adicional no tensor energia-momento

$$T_{\mu\nu}(\Lambda) = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu}. \quad (3.20)$$

Isso corresponde a um fluido perfeito de densidade e pressão dadas por

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (3.21)$$

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda.$$

Similarmente, o termo relativo à curvatura do espaço-tempo pode ser reescrito como uma componente energética tal que

$$\begin{aligned} \rho_k &= \frac{-3k}{8\pi G a^2}, \\ p_k &= \frac{k}{8\pi G a^2}, \\ \Omega_k &= -\frac{k}{(a_0 H_0)^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Reunindo essas redefinições e parametrizando o valor do fator de escala hoje para $a_0 = 1$ pode-se reescrever a equação de Friedmann como

$$H^2(t) = H_0^2 [\Omega_{r0} a^{-4} + \Omega_{m0} a^{-3} + \Omega_{k0} a^{-2} + \Omega_{\Lambda 0}]. \quad (3.23)$$

3.3 História Cósmica

A fim de compreender a evolução cósmica descrita na Eq. (3.23) é necessário conhecer as propriedades e os valores atuais relativos aos componentes energéticos do universo – veja, por exemplo, a Ref. [69]. O ponto de partida é a mecânica estatística, que descreve os diversos componentes de matéria como fluidos constituídos por partículas com massa m e momento $\vec{p}$ em termos de uma função de distribuição dada por

$$f(p) = \frac{1}{\exp(E - \mu)/T \pm 1}, \quad (3.24)$$

onde $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, $p \equiv |\vec{p}|$ e μ é o potencial químico. Essa distribuição não apresenta qualquer dependência com a posição $\vec{x}$ graças ao princípio cosmológico. O sinal positivo ou negativo no denominador faz referência ao *spin* das partículas: se o fluido é constituído por férmions o sinal é “+” (e a distribuição responde pelo nome de Fermi-Dirac), caso sejam bósons é “-” (e nesse caso temos a distribuição de Bose-Einstein). Com base nessa

função de distribuição, a densidade e pressão podem ser calculadas, respectivamente, como

$$\rho = \frac{g_*}{2\pi^2} \int dE \frac{(E^2 - m^2)^{1/2}}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} E^2 \quad (3.25)$$

$$p = \frac{g_*}{6\pi^2} \int dE \frac{(E^2 - m^2)^{3/2}}{\exp[(E - \mu)/T] \pm 1} E^2 \quad (3.26)$$

onde $g_* = 2s + 1$ é o número de graus de liberdade internos das partículas de spin s .

Quando consideramos partículas relativísticas, $T \gg m$, chegamos à relação entre a pressão e a densidade dada por $p = \rho/3$, portanto, este resultado demonstra o que foi apenas declarado anteriormente: o parâmetro da equação de densidade para os fótons e neutrinos (desde que estes seja efetivamente relativísticos) é $w = 1/3$, o que os torna parte do fluido de radiação que preenche o universo. Aplicando esse valor a (3.14) observamos que a densidade do fluido de radiação evoluirá segundo

$$\rho_r = \rho(t_0) a^{-4}. \quad (3.27)$$

Definindo a temperatura como sendo aquela determinada pelos fótons, a densidade de energia das espécies relativísticas fica dada por:

$$\rho = \begin{cases} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, & \text{Bósons} \\ \frac{7}{8} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, & \text{Férmions.} \end{cases} \quad (3.28)$$

Ao comparar com o a Eq. (3.27), podemos notar que a temperatura e o fator de escala possuem uma relação tal que $T \propto \frac{1}{a} = 1 + z$. Portanto, a expansão conduz ao esfriamento do universo.

O satélite COBE permitiu obter a temperatura dos fótons através de medidas da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) [74], tal que $T = 2.725 \pm 0.002\text{K}$, e a densidade dos fótons hoje seria $\rho_\gamma^0 = 4.641 \times 10^{-34} \text{g/cm}^3$, o que em termos do parâmetro de densidade é expresso como $\Omega_\gamma^0 = 2.469 \times 10^{-5} h^{-2}$. Enquanto que para os neutrinos, sua temperatura pode ser inferida a partir da temperatura dos fótons e por meio da inclusão do processo de aniquilação dos elétrons e pósitrons ocorrido por volta da época da Nucleosíntese Primordial, resultando em $T_\nu/T_\gamma = (4/11)^{1/3}$ [66]. Analogamente, podemos relacionar as densidades dessas duas espécies, $\rho_\nu = N_{eff}(7/8)(4/11)^{4/3} \rho_\mu$, onde N_{eff} é o número

efetivo de espécies de neutrinos. Com os dados do WMAP 5 year constraint [75] temos $N_{eff} = 3.04$ e $h = 0.68$, o que conduz a um parâmetro de densidade para a radiação (fótons e neutrinos) de:

$$\Omega_r = 9.026 \times 10^{-5}. \quad (3.29)$$

Em um processo conhecido como nucleossíntese primordial os elementos leves (principalmente Hélio e Deutério) foram sendo formados a partir de prótons e nêutrons durante os três primeiros minutos da história cósmica. A longo desse intervalo de tempo, boa parte dos nêutrons foram decaindo em prótons (mais anti-neutrinos e fótons) através do decaimento β , e portanto não puderam sequer participar da formação do primeiro elemento mais pesado – o Deutério. Apenas os nêutrons que não sofrem esse decaimento são capazes de participar da síntese dos elementos mais pesados, em particular do Hélio. Por outro lado, a taxa de formação desses elementos é diretamente sensível à densidade de bárions Ω_b , já que a nucleossíntese ocorre mais rapidamente se houver maior disponibilidade de prótons e neutrons [69]. Portanto, medidas da abundância de Hélio e Deutério permitem estimar a densidade de bárions primordiais. Além da Nucleossíntese Primordial, os processos envolvidos na formação da radiação cósmica de fundo também são muito sensíveis a Ω_b . Pequenas mudanças nessa quantidade alteram a velocidade do som do fluido de fótons e bárions, o que afetaria a altura do primeiro pico observado na RCF. Hoje o valor mais aceito [76] é $\Omega_b = 0.0483 \pm 0.0003$.

Para o caso do fluido formado por partículas não-relativísticas, ao qual nos referiremos simplesmente como “matéria”, que incluirá bárions e matéria escura fria, tal que $T \ll m$, a densidade e pressão serão, respectivamente

$$\rho = mn \quad (3.30)$$

$$p = 0, \quad (3.31)$$

onde m é a massa da partícula e n é a densidade em número (número de partículas por

unidade de volume). Isso implica em uma evolução da densidade da matéria descrita por

$$\rho_m = \rho(t_0)a^{-3}. \quad (3.32)$$

Assim, para obter uma estimativa da densidade de matéria no universo não é suficiente partir apenas de medidas de temperatura da radiação de fundo ou da Nucleossíntese Primordial: é necessário obtermos medidas da densidade de matéria não-relativística diretamente das observações.

De fato, a principal componente de matéria não relativística, a matéria escura, foi inferida inicialmente através dos trabalhos de Zwicky [77] e Vera Rubin [16]. Estudos recentes também demonstram que a matéria bariônica não pode ser a única responsável pela formações das estruturas observadas hoje [2]. A nomenclatura padrão para esse tipo de matéria é Matéria Escura Fria (CDM, da sigla em inglês), pois o modelo atual de evolução cósmica considera que a matéria escura é não-relativística desde há muito tempo – certamente desde o momento em que os fótons desacoplaram do fluido formado por fótons, bárions, elétrons e matéria escura. Os dados atuais da colaboração Planck [76] apontam, com nível de confiança de 68%, que o parâmetro de densidade de matéria escura fria deve ser $\Omega_c = 0.2575 \pm 0.0020$. Portanto, o valor do parâmetro de densidade de matéria incluindo bárions e matéria escura fria será

$$\Omega_m = 0.3103 \pm 0.0057. \quad (3.33)$$

Se considerarmos os constituintes até agora descritos, a radiação formada por fótons e neutrinos e a matéria formada de bárions e matéria escura, os dados não explicariam duas observações essenciais. A primeira é que, segundo a RCF, a geometria apresentada pelo universo é fortemente próxima de uma geometria plana; e a segunda observação diz respeito à presente aceleração cósmica [13, 14]. A fim de explicar esse dados, foi necessário a inclusão de uma nova forma energética de composição desconhecida, a Energia Escura (DE, da sigla em inglês), que segundo o modelo cosmológico padrão se manifesta na forma de uma constante cosmológica Λ , cujos dados recentes indicam compor o seguinte

percentual da densidade do universo atual por

$$\Omega_{\Lambda} = 0.6897 \pm 0.0057. \quad (3.34)$$

Mais adiante comentaremos a respeito das observações que dão suporte ao modelo padrão cosmológico e que indicam o valor para Ω_{Λ} aqui apresentado.

Ao aplicarmos os valores para os parâmetros de densidade de cada componente energética descrita acima na Eq. (3.23), a evolução do universo pode ser caracterizada pela Fig. 3.2 que descreve a evolução do fator de escala em termos do tempo de Hubble [1]. Além dessa, uma outra representação que nos auxilia a visualizar a história cósmica é a evolução da densidade energética de cada componente aqui descrita, radiação, matéria e constante cosmológica. Ao observarmos esses gráficos fica notório a existência de 3 fases distintas na evolução cósmica. A primeira fase é caracterizada pelo domínio da radiação, que inclui o período durante o qual ocorre a formação dos primeiros elementos leves na nucleossíntese primordial. No momento em que a densidade de radiação e a densidade de matéria são equivalentes, indexado por $t_{rm} = 4.7 \times 10^4 \text{yr}$ na Fig. 3.2 ou $a_{eq} = 2.8 \times 10^{-4}$ na Fig. 3.3, a expansão passa a ser um pouco menos desacelerada, o que permanece até uma época relativamente recente, $t_{m\Lambda} = 9.8 \text{Gyr}$ [1] na Fig. 3.2. Finalmente, a partir daquele instante passamos a ter uma expansão acelerada, que no caso de uma energia escura dada pela Constante Cosmológica, tenderá uma dependência exponencial do fator de escala com o tempo.

3.4 Distâncias Cósmicas

Com o objetivo de compreender os atuais dados observacionais que servem de base para a elaboração do modelo padrão atualmente usado em cosmologia é fundamental entendermos como as distâncias cósmicas são definidas e medidas. Do ponto de vista formal, a principal dificuldade em se definir distâncias advém da necessidade de considerarmos os efeitos da geometria da curvatura espacial e da expansão cósmica. Nesse contexto, existem duas formas básicas de medir distâncias em cosmologia: a distância comóvel, a

Figura 3.2: O Fator de escala em termos do tempo de Hubble para o modelo cosmológico padrão. Figura retirada de [1].

qual não é afetada pela expansão, e a distância física. A primeira será base para definição das outras distâncias.

3.4.1 Distâncias Física e Comóvel

Partindo da parametrização da métrica FLRW descrita em (3.2) e (3.3), podemos escrever o elemento de caminho tridimensional como

$$dl^2 = d\chi^2 + f_k(\chi)^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.35)$$

Seguindo a prescrição usada em [69] e considerando que um fóton que segue uma trajetória radial viaja ao longo de χ , logo $d\Omega = 0$, e satisfazendo a equação $ds^2 = 0$, teremos que a distância comóvel (d_c) pode ser definida por

$$d_c \equiv \chi = \int_0^\chi d\chi' = \int_t^{t_0} \frac{c}{a(t')} dt'. \quad (3.36)$$

Ao aplicarmos a relação do fator de escala com o redshift e com o parâmetro de Hubble, podemos escrever

$$d_c \equiv \chi = \int_0^z \frac{cdz'}{H(1+z')} = \frac{c}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')(1+z')}, \quad (3.37)$$

Figura 3.3: Densidade, em relação a densidade crítica hoje, em função do fator de escala para cada uma das componentes energéticas, radiação, matéria e constante cosmológica. Figura retirada de [2].

onde $E(z) \equiv \frac{H(z)}{H_0}$. Para $z \ll 1$ pode-se aplicar a expansão de Taylor e escrever $d_c \approx \frac{c}{H_0}z$, tal que a Lei de Hubble $d_f \approx \frac{v}{H_0}$ pode ser reproduzida. Ou seja, a lei de Hubble, nesta forma, somente é válida para baixos redshifts. Partindo da distância comóvel definiremos outras distâncias com base em outras propriedades.

3.4.2 Distância de Luminosidade

A distância de luminosidade (d_L) é fundamentada no princípio de que, ao conhecermos a luminosidade inerente de uma fonte e o fluxo de luz que um determinado observador recebe, é possível inferir a distância deste observador a fonte luminosa. A distância d_L é calculada, por exemplo, a partir de dados de supernovas do tipo Ia, e foi a base para a descoberta da aceleração cósmica do universo. A distância de luminosidade é expressa como:

$$d_L^2 \equiv \frac{L_e}{4\pi f_o}, \quad (3.38)$$

onde os índices “e” e “o” se referem a emitido e observado, respectivamente. Dessa forma L_e é a luminosidade emitida, ou intrínseca, e f_o é o fluxo observado, o qual é definido como $f \equiv \frac{L_o}{S}$ onde S é a superfície da 2-esfera de raio χ , dada por $S = 4\pi f_k(\chi)^2$. Levando em conta que a luminosidade emitida é a energia emitida por intervalo de tempo ($\Delta E_o/\Delta t$)

e sabendo que a energia é inversamente proporcional ao comprimento de onda, pode-se escrever a razão entre a energia emitida e observada como

$$\frac{\Delta E_e}{\Delta E_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e} = 1 + z. \quad (3.39)$$

Da mesma forma pode-se escrever a razão entre as frequências da luz na emissão e na observação:

$$\frac{\Delta \nu_e}{\Delta \nu_o} = \frac{\lambda_o}{\lambda_e}. \quad (3.40)$$

Já a razão as luminosidades pode ser escrita em termos do raio da 2-esfera, o que acarreta um fator de $a^2(t)$ entre a emissão e a observação, e portanto:

$$\frac{L_e}{L_o} = (1 + z)^2. \quad (3.41)$$

Através destes resultados pode-se escrever a distância de luminosidade como

$$d_L = f_k(\chi)(1 + z). \quad (3.42)$$

Implementando as expressões de $f_k(\chi)$ e da distância comóvel teremos

$$d_L = \frac{c(1 + z)}{H_0 \sqrt{\Omega_{k0}}} \sinh \left(\sqrt{\Omega_{k0}} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')} \right). \quad (3.43)$$

Para o universo local, $z \ll 1$, as distâncias comóvel e de luminosidade são análogas, $d_L \cong d_c$ — de fato, no limite de pequenas distâncias tanto a geometria da seção espacial quanto a expansão podem ser desprezados, e todas as medidas de distância coincidem com a Euclideana. No caso de um universo plano a expressão anterior pode ser reescrita como

$$d_L = \frac{c(1 + z)}{H_0} \int_0^z \frac{dz'}{E(z')}. \quad (3.44)$$

Se invertermos essa expressão podemos expressar a taxa de expansão em termos da distância de luminosidade

$$H(z) = \left[\frac{d}{dz} \left(\frac{d_L(z)}{1 + z} \right) \right]^{-1}. \quad (3.45)$$

O que evidencia a possibilidade de medir a taxa de expansão do universo a partir de observações da distância de luminosidade.

3.4.3 Distância de Diâmetro Angular

Uma outra maneira de obter distâncias no universo é a distância de diâmetro angular (d_A) calculada a partir do ângulo $\Delta\theta$ gerado por um comprimento ortogonal Δx a linha de visão conhecido tal que

$$d_A \equiv \frac{\Delta x}{\Delta\theta}. \quad (3.46)$$

Sendo que se considerarmos a fonte em repouso sobre a superfície de uma esfera de raio χ no tempo t , com o observador no centro, segundo a métrica FLRW, o comprimento Δx será dado por

$$\Delta x = a(t)f_k(\chi)\Delta\theta. \quad (3.47)$$

Portanto, a distância de diâmetro angular será

$$d_A = \frac{c}{H_0(1+z)\sqrt{\Omega_{k0}}} \sinh\left(\sqrt{\Omega_{k0}} \int_0^z \frac{dz}{E(z)}\right). \quad (3.48)$$

Se compararmos esse resultado com a distância de luminosidade obteremos a relação de dualidade ou reciprocidade, ou relação de Etherington [78]

$$d_L = (1+z)^2 d_A, \quad (3.49)$$

que é válida para toda métrica onde o número de fótons é preservado.

3.5 Teoria de perturbação cosmológica linear

Até o presente momento, todo tratamento desenvolvido se concentrou em descrever um universo homogêneo. Porém, essa consideração é aproximadamente correta apenas para escalas $\gtrsim 100$ Mpc. Abaixo disso, as inomogeneidades passam a ser essenciais para qualquer descrição. A fim de incluir tais inomogeneidades, o passo inicial é utilizar a teoria de perturbações lineares para introduzir flutuações no campo de fundo, e então obter as equações para os observáveis. Contudo, é necessário ressaltar que mesmo a teoria linear é limitada: no universo atual, a partir de escalas menores que ~ 50 Mpc os termos não-lineares passam a ser relevantes, e em escalas $\lesssim 10$ Mpc já estamos seguramente no regime

não-linear [79].

Existem três tipos de perturbações que podem ser implementadas no campo de fundo: escalares, vetoriais e tensoriais. O estudo em separado de cada uma destas é garantido pelo teorema da decomposição, o qual afirma que cada uma das perturbações evoluem de forma independente uma das outras (ao menos no regime linear)[80].

Para o estudo presente, somente as perturbações escalares serão relevantes, pois as perturbações vetoriais são rapidamente suprimidas em relação às outras, e as perturbações tensoriais, apesar de afetarem o universo primordial e possuírem sinais na CMB, especificamente no modo- B de polarização, também decaem rapidamente com o tempo e são irrelevantes para o processo de formação de estruturas.

A implementação de perturbações escalares em um universo plano pode ser realizada, por exemplo, através do *gauge* (calibre) pseudo-newtoniano. Nesse gauge o elemento de distância pode ser escrito como

$$ds^2 = - (1 + 2\Psi) dt^2 + a^2(t) (1 - 2\Phi) \delta_{ij} dx^i dx^j \quad (3.50)$$

onde $\Psi(x, t)$ é o potencial gravitacional newtoniano (perturbação métrica tipo tempo-tempo) e $\Phi(x, t)$ é o potencial de curvatura (perturbação métrica tipo espaço-espaço).

O outro elemento a ser analisado quanto ao efeito de perturbações é o tensor energia-momento, o qual, considerando a aproximação de fluido para o universo, possui os seguinte termos perturbativos:

$$\delta T_0^0 = -\delta\rho \quad (3.51)$$

$$\delta T_0^i = (\rho + p) \partial v^i \quad (3.52)$$

$$\delta T_j^i = \delta p \delta_j^i \quad (3.53)$$

onde $v^i = a \frac{dx^i}{dt}$ é a velocidade das perturbações, $\delta\rho$ é a perturbação de energia e δp é a perturbação de pressão (aqui não consideramos o estresse anisotrópico).

Ao aplicar essas perturbações nas equações de Einstein (2.16), obtêm-se as equações

de Einstein perturbadas

$$3aH \left(aH\Psi + a\dot{\Phi} \right) - \nabla^2\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho, \quad (3.54)$$

$$-\nabla^2(a\dot{\Phi} + aH\Psi) = 4\pi Ga^2(\rho + 3p)\theta, \quad (3.55)$$

$$-a^2 \left(H\dot{\Psi} + \ddot{\Phi} \right) - aH\dot{\Psi} - ((aH)^2 + 2aH) \Psi = -4\pi Ga^2\delta. \quad (3.56)$$

$$\Psi = \Phi, \quad (3.57)$$

onde $\theta \equiv \nabla_i v^i$. Combinando as equações (3.54) e (3.55), no espaço de Fourier, e considerando perturbações na matéria, encontra-se a equação de Poisson:

$$-k^2\Phi = 4\pi Ga^2\bar{\rho} \left[\delta + \frac{3aH\theta}{k^2} \right], \quad (3.58)$$

onde $\delta = \delta\rho/\bar{\rho}$ é o contraste de densidade.

Como o interesse do presente projeto se concentra em estudar a evolução de perturbações no campo de densidade da matéria, o passo seguinte é construir uma equação que descreva a evolução de δ . Para tanto, basta partir da equação para a conservação do tensor energia-momento, Eq. (2.15), e obter a equação de continuidade e a equação de Euler, as quais respectivamente são:

$$\dot{\delta} = -\frac{\theta}{a} + 3\dot{\Phi}, \quad (3.59)$$

e

$$\dot{\theta} + H = -\frac{\nabla^2\Psi}{a}. \quad (3.60)$$

Ao combinar as equações (3.58), (3.60) e (3.59), considerando o limite sub-horizonte $k \gg H$ e a aproximação quase estática, a qual afirma que as derivadas temporais dos potenciais são muito pequenas quando comparadas com as derivadas espaciais, obtêm-se a equação

$$\delta'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{E'}{E} \right) \delta' = \frac{3}{2} \frac{\Omega_{m0} a^{-5}}{E^2} \delta, \quad (3.61)$$

onde $' = d/da$ e $E = H/H_0$. As soluções desta equação, bem como suas propriedades,

serão abordadas na próxima seção.

3.6 Teoria de perturbação cosmológica não-linear

A fim de descrever a evolução das perturbações no campo de matéria em escalas nas quais as não-linearidades já são relevantes, pode-se utilizar a aproximação de um fluido sem viscosidade e fluxos de calor, a qual descreve o conteúdo do universo através das variáveis hidrodinâmicas densidade $\rho(\vec{x}, t)$, pressão $p(\vec{r}, t)$ e velocidade $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Tal tratamento é realizado no contexto da gravitação newtoniana descrita através do potencial gravitacional $\Phi(\vec{r}, t)$ e é conhecido como “Cosmologia Pseudo-Newtoniana”. A correspondência dessa descrição com aquela desenvolvida a partir das equações de Einstein é revisada em [79].

As equações hidrodinâmicas para um fluido (equação de continuidade e equação de Euler) junto com a equação de Poisson, formam o conjunto de equações:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_r + \nabla_r(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.62)$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\right)_r + (\mathbf{v} \nabla_r) \mathbf{v} + \frac{\nabla_r p}{\rho} = -\nabla_r \Phi \quad (3.63)$$

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (3.64)$$

onde o sub-índice $\mathbf{r}$ representa coordenadas físicas (distâncias físicas), e $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ representa a velocidade própria. Se for considerado que o fluido segue a expansão do universo, pode-se reescrever as equações anteriores em termos de coordenadas comóveis $\mathbf{x} = \mathbf{r}/a$, o que ocasiona as redefinições

$$\mathbf{r} = a\mathbf{x}, \quad (3.65a)$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{a}\mathbf{x}, \quad (3.65b)$$

$$\nabla_r = \frac{1}{a} \nabla_x, \quad (3.65c)$$

$$\nabla_r^2 = \frac{1}{a^2} \nabla_x^2, \quad (3.65d)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + \frac{\dot{a}}{a} (\vec{x} \cdot \nabla_x) \quad (3.65e)$$

Com a aplicação destas redefinições, as equações hidrodinâmicas passam a ser escritas como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}(x^i \nabla_i) \rho + \frac{1}{a} \nabla_i (\rho v^i) = 0, \quad (3.66)$$

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a}(x^j \nabla_j) v^i + (v^j \frac{1}{a} \nabla_j) v^i + \frac{1}{a} \frac{\nabla^i p}{\rho} = -\frac{1}{a} \nabla^i \Phi, \quad (3.67)$$

$$\nabla^2 \Phi = a^2 4\pi G(\rho + 3p), \quad (3.68)$$

onde o sub-índice x , que indica derivadas parciais com a distância comóvel, foi suprimido por simplicidade.

Antes de implementar perturbações é necessário encontrar o comportamento dos campos de fundo. Primeiramente, pode-se tomar $\Phi = \bar{\phi}$, onde $\bar{\phi}$ é o potencial atribuído a um universo cuja distribuição de matéria seja homogênea e isotrópica. Submetendo as equações hidrodinâmicas a essas condições, num universo contendo apenas matéria não-relativística, obtêm-se exatamente a equação de continuidade da seção anterior no caso de matéria sem pressão:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\dot{a}}{a} 3\bar{\rho} = 0. \quad (3.69)$$

Também obtêm-se uma expressão para o potencial do campo de fundo:

$$\bar{\phi} = \frac{1}{2} a \ddot{a} \mathbf{x}^2, \quad (3.70)$$

o qual satisfaz a equação de Poisson $\nabla^2 \bar{\phi} = 4\pi G a^2 (\bar{\rho} + 3\bar{p})$. Note-se que esse potencial não tem nenhum papel na formação de estruturas, correspondendo simplesmente a uma solução de fundo na aproximação Pseudo-Newtoniana.

De modo a incluir os efeitos das inhomogeneidades observadas no universo, introduz-se perturbações nas variáveis $\rho(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ e $\phi(\mathbf{x}, t)$, as quais podem ser escritas como

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\mathbf{x}, t), \quad (3.71)$$

$$p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(t) + \delta p(t), \quad (3.72)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \dot{a}\mathbf{x} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \quad (3.73)$$

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \Phi(\mathbf{x}, t), \quad (3.74)$$

onde o segundo termo do lado direito são as perturbações. Incluindo essas expressões nas equações (3.66), (3.67) e (3.68) chega-se às equações [79]:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot (1 + \delta) \mathbf{v} = 0, \quad (3.75)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + H \mathbf{v} = -\frac{c_s^2}{a} \nabla \delta - \frac{1}{a} \nabla \Phi, \quad (3.76)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta, \quad (3.77)$$

onde $c_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \rho}$ é a velocidade do som adiabática. Considerando o regime linear, essas equações permitem obter a equação para a evolução linear do contraste de densidade δ , escrita como:

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{c_s^2}{a^2} \nabla^2 \delta - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0, \quad (3.78)$$

a qual assume a forma, no espaço de Fourier, dada por:

$$\ddot{\tilde{\delta}} + 2H\dot{\tilde{\delta}} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right) \tilde{\delta} = 0. \quad (3.79)$$

Daqui em diante, por trabalharmos, em geral, no espaço de Fourier, suprimiremos o ‘ $\sim$ ’.

3.6.1 Estudo da equação linear para o contraste de densidade

Uma análise da Eq. (3.79) demonstra que o segundo termo é do tipo fricção, ocasionado pela expansão do universo. Ou seja, quanto maior for a taxa de expansão H , maior é o amortecimento de δ . Em um primeiro estudo pode-se avaliar a equação sem esse termo:

$$\ddot{\delta} + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} - 4\pi G \bar{\rho} \right) \delta = 0. \quad (3.80)$$

Nesse caso, a evolução do contraste de densidade num universo estático obedecerá uma equação de onda, a qual dependerá do termo entre parênteses. Esse termo é composto por uma parte relativo à pressão, ou melhor, à variação desta, $\frac{c_s^2 k^2}{a^2}$, e outra oriunda da força gravitacional, $4\pi G \bar{\rho}$. É a relação entre esses dois termos que determinará o

comportamento da solução $\delta(t)$. Nesse contexto define-se o comprimento comóvel de Jeans (λ_j) o comprimento para o qual esses termos se equilibram, de forma que:

$$\lambda_j = \frac{c_s}{a} \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}}, \quad (3.81)$$

e o comprimento físico de Jeans como $\lambda_j^r = a\lambda_j$. O comprimento de Jeans expressa a distância que uma onda de som pode viajar durante um tempo de queda-livre $\left[t_{QL} = \left(\frac{\pi}{G\bar{\rho}}\right)^{1/2}\right]$ [81]. Para os modos em que os comprimentos de onda são inferiores ao comprimento de Jeans, ou seja $\lambda < \lambda_j$, a solução da Eq. (3.80) será uma onda de som. Para o caso $\lambda > \lambda_j$ a solução geral será composta por duas soluções exponenciais, uma crescente e outra decrescente. Quanto aos bárions, como o comprimento de Jeans λ_j é proporcional à velocidade do fluido, até o desacoplamento dos bárions com os fótons, a velocidade do fluido bárions-fótons é muito alta devido à pressão dos fótons, o que impede o crescimento das perturbações. Entretanto, após o desacoplamento a velocidade do som diminui, de forma que o comprimento de Jeans fica menor, o que permite que as perturbações em escalas grandes, $\lambda > \lambda_j$, possam crescer. Para a matéria escura, como a velocidade do som é desprezível, o crescimento das perturbações não é afetado pela recombinação.

Quando inclui-se o termo de fricção $2H\delta$ o comportamento das soluções continuará dependendo da relação entre o comprimento dos modos e, portanto, do comprimento de Jeans. Entretanto o termo de fricção acarretará num amortecimento de ambas as soluções, crescente e decrescente. Como a taxa de expansão se torna acelerada na era de dominação da constante cosmológica, durante este período o crescimento das perturbações é interrompido [80].

3.7 Estruturas em Larga Escala

Na seção anterior descrevemos a evolução temporal da perturbação de densidade no campo de fundo homogêneo como $\delta(\mathbf{x}) = \delta\rho(\mathbf{x})/\bar{\rho}_m$. A fim de descrever as propriedades do universo como um todo de forma a permitir uma conexão entre os resultados teóricos e os dados observacionais este campo de densidade precisa ser descrito via ferramentas

estatísticas, as quais serão descritas nesta seção.

3.7.1 Função de Correlação

Seguindo a prescrição de [79, 82], segundo os dados do satélite Planck [73], o campo δ segue uma estatística essencialmente Gaussiana, portanto sua descrição é completamente especificada pela função de correlação de dois pontos (entretanto, para baixos redshifts nos quais a formação de estruturas entra na fase não-linear, essa aproximação não é mais adequada). A função de correlação é definida como o valor esperado do produto de um campo $\delta(\mathbf{x})$ em dois pontos, tal que

$$\xi(r) \equiv \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (3.82)$$

o que deve ser uma função apenas da distância de separação entre os pontos $r \equiv |\mathbf{r}|$ devido à homogeneidade e isotropia do universo. A fim de compreender o significado físico da função de correlação, partiremos do conceito de um campo discreto de contagens de galáxias que é caracterizado pelo contraste de densidade numérica de galáxias

$$\delta_g(\mathbf{x}) \equiv \frac{\delta n_g(\mathbf{x})}{\bar{n}_g}, \quad (3.83)$$

onde n_g é a densidade numérica de galáxias. É importante lembrar que a relação entre o campo contínuo do contraste de densidade de matéria δ e um campo discreto de contagem de galáxias embute aproximações e hipóteses que têm de ser verificadas cuidadosamente. Em particular, observa-se que existe um fator que determina a relação entre os dois contrastes de densidade chamado *bias* b , de tal forma que $\delta_g = b\delta$. Entretanto, por simplicidade tomaremos por enquanto $b = 1$.

Dados dois elementos de volume dV_1 e dV_2 separados por uma distância r , onde cada um contém dN_1 e dN_2 galáxias, respectivamente, e considerando que as galáxias estão distribuídas aleatoriamente (distribuição poissoniana), o número esperado de pares de galáxias dN_{par} separados por uma distância r , será:

$$dN_{par|Poisson} = \langle dN_1 dN_2 \rangle = \langle n_g dV_1 n_g dV_2 \rangle = (\bar{n}_g^2 + \bar{n}_g \delta_{12}) dV_1 dV_2. \quad (3.84)$$

Na expressão acima, o primeiro termo é o valor médio esperado da contagem de galáxias, enquanto o segundo termo denota a flutuação de Poisson na contagem de galáxias no mesmo volume (quando dV_1 coincide com dV_2 , daí a função delta, δ_{12}). No limite em que temos um número médio de galáxias muito grande, esse segundo termo (também conhecido como “shot noise”) pode ser desprezado.

As flutuações estatísticas que mais nos interessam são aquelas devidas tanto às propriedades do campo de densidades primordial, quanto aos efeitos da gravidade no campo de densidade. Ambos efeitos fazem com que a contagem de pares de galáxias em dois pontos diferentes do espaço passe a depender da posição. Considerando as flutuações em torno de um valor médio, redefinimos a contagem de galáxias como $n_g(\mathbf{x}) \rightarrow \bar{n}_g(1 + \delta_g(\mathbf{x}))$, de tal forma que o número médio de pares de galáxias passa a ser

$$dN_{par} = \langle \bar{n}_g^2 [1 + \delta_g(\mathbf{x}) + \delta_g(\mathbf{x} + \mathbf{r}) + \delta_g(\mathbf{x})\delta_g(\mathbf{x} + \mathbf{r})] dV_1 dV_2. \quad (3.85)$$

Como pela própria definição do contraste de densidade temos que $\langle \delta_g(\mathbf{x}) \rangle = 0$, logo

$$dN_{par} = \bar{n}_g^2 [1 + \xi_g(r)] dV_1 dV_2, \quad (3.86)$$

que podemos reescrever simplesmente como

$$dN_{par} = d\bar{N}_{par} [1 + \xi_g(r)]. \quad (3.87)$$

Portanto, essa última expressão permite compreender que a função de correlação determinará como a distribuição de galáxias separadas por uma distância r em um campo de densidade preenchido por perturbações $\delta_g(\mathbf{x})$ diferirá de um campo com distribuição aleatório de galáxias.

Uma outra forma de interpretar esse resultado é considerar que haja uma única galáxia no volume dV_1 , de forma que dN_{par} representará o número de galáxias em um volume dV_2 a uma distância r daquela galáxia. Ou seja,

$$\frac{dN(r)}{\bar{n}_1 dV_1} = \frac{dN(r)}{1} = \bar{n}_2 [1 + \xi_g(r)] dV_2. \quad (3.88)$$

Como o número total de galáxias é $\int dN = \int \bar{n}_2 dV_2$, temos o vínculo de que $\int dV \xi_g(r) = 0$.

Podemos também expressar a probabilidade de encontrar um certo número de galáxias a uma distância r de uma galáxia escolhida aleatoriamente:

$$dP(r) = \frac{dN(r)}{\bar{n}_g \times V} = [1 + \xi_g(r)] \frac{dV}{V}. \quad (3.89)$$

Portanto, $\xi_g(r)$ mede a probabilidade por unidade de volume de se medir uma certa quantidade de galáxias acima da média. Quando $\xi_g(r) > 0$, isso implica em um aumento da probabilidade de encontrar mais galáxias a uma distância r em relação à probabilidade média – e nesse caso dizemos que as galáxias estão correlacionadas. Enquanto que no caso de $\xi_g(r) < 0$, estas galáxias guardam uma relação de anti-correlação, ou seja, há menor chance de encontrar uma galáxia a uma distância r de outra qualquer do que a média.

Partindo da normalização da probabilidade $dP(r)$, ou seja a integral sobre todo o volume é igual a unidade, o que implica em

$$\int dP = \int [1 + \xi_g(r)] \frac{dV}{V} = 1 + \frac{4\pi}{V} \int dr r^2 \xi_g(r) = 1, \quad (3.90)$$

logo, obtemos novamente o vínculo sobre a função de correlação:

$$\int dr r^2 \xi_g(r) = 0. \quad (3.91)$$

Similarmente podemos definir uma quantidade que descreve o quanto dois campos de densidade estão correlacionados, por exemplo, o campo de galáxias e o campo de matéria. A função de correlação cruzada permite a conexão entre duas populações A e B.

$$\xi_{AB}(r) = \langle \delta_A(\mathbf{x}) \delta_B(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle, \quad (3.92)$$

onde devemos lembrar que os campos descritos pelas populações A e B estão relacionados através do bias $b_{AB} = \delta_A / \delta_B$.

3.7.2 Espectro de Potência e Variância

Em muitos casos é mais conveniente medir o contraste de densidade no espaço de Fourier $\delta(k)$. Para tanto, em cosmologia a conversão mais comum para a transformada

de Fourier usada é

$$\tilde{\delta}(\mathbf{k}) = \int d^3\mathbf{x} \delta(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (3.93)$$

$$\delta(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \tilde{\delta}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}. \quad (3.94)$$

Pela sua natureza é evidente que o campo de densidade é real, logo $\delta(\mathbf{x}) = \delta^*(\mathbf{x})$, o que implica que $\delta(\mathbf{k}) = \delta^*(-\mathbf{k})$. Desta maneira, se calcularmos o análogo da função de correlação, mas no espaço de Fourier, obteremos o *Espectro de Potência* $P(k)$, tal que

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \langle \tilde{\delta}(\mathbf{k}) \tilde{\delta}^*(\mathbf{k}') \rangle = \delta_D^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') P(k). \quad (3.95)$$

Desta maneira, a função de correlação e o espectro de potência formam um par de Fourier

$$P(k) = \int d^3\mathbf{r} \xi(r) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (3.96)$$

$$\xi(r) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} P(k) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (3.97)$$

Portanto da função de correlação e do espectro de potência provém a mesma informação, sendo assim a escolha de qual ferramenta usar será segundo a conveniência de cada caso. A relação entre $\xi(r)$ e $P(k)$ pode ser simplificada de tal forma que

$$\xi(r) = \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k) \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad (3.98)$$

onde utilizamos a isotropia do espaço, escolhendo $\mathbf{k} = k\hat{z}$ na integração das variáveis angulares. Na Fig. 3.4 temos uma medida do espectro de potência do survey SDSS (Sloan Digital Sky Survey) [3] em reshift $\bar{z} = 0.1$, e que serve para ilustrar o comportamento deste observável estatístico.

Outra quantidade estatística utilizada para caracterizar o campo de densidade é a sua *Variância* σ^2 a qual é calculada a partir do espectro de potência e corresponde à função de correlação na vizinhança da origem, $r = 0$. Porém, como a integral

$$\sigma_0^2 = \xi(r = 0) = \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k) \quad (3.99)$$

diverge, trabalhamos com uma função-janela $W(\mathbf{x}, R)$ que faz uma média do contraste de

Figura 3.4: Espectro de Potência do SDSS para um resshift $\bar{z} = 0.1$. Figura retirada de [3].

densidade dentro de uma escala R . Esse campo “filtrado” é obtido através da convolução entre $\delta(\mathbf{x})$ e $W(\mathbf{x}, R)$, isto é,

$$\delta_R(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{x}' \delta(\mathbf{x}') W(\mathbf{x} - \mathbf{x}', R). \quad (3.100)$$

Nesse caso a variância será calculada em relação a escala R , tal que

$$\sigma_R^2 = \int \frac{dk}{2\pi^2} k^2 P(k) |\tilde{W}(kR)|^2, \quad (3.101)$$

onde $\tilde{W}(kR)$ é a transformada de Fourier da função janela. Há diversas formas usadas para a função janela $W(\mathbf{x}, R)$, mas dentre elas uma das mais usadas, por sua simplicidade, é a do tipo *Top-Hat*, definida através de

$$W_{TH}(\mathbf{x}, R) = \begin{cases} 1 & r \leq R, \\ 0 & r \geq R, \end{cases} \quad (3.102)$$

onde $r = |\mathbf{x}|$, que delimitará um volume esférico de $V_{TH} = 4\pi R^3/3$ e cuja transformada de Fourier será

$$\tilde{W}_{TH}(kR) = \frac{3}{(kR)^2} \left(\frac{\sin kR}{kR} - \cos kR \right). \quad (3.103)$$

Outra forma comum para a função janela é a gaussiana, definida por

$$W_G(\mathbf{x}, R) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} R^3} e^{-r^2/(2R^2)} \quad (3.104)$$

com transformada de Fourier

$$\tilde{W}_G(kR) = e^{-(kR)^2/2}. \quad (3.105)$$

Ao considerar uma escala através da função filtro, a variância pode ser expressa em termos da massa contida no volume delimitado pela função janela, que no caso da função top-hat será uma esfera de raio R imersa em um campo de fundo de densidade média $\bar{\rho}_m$, $M = 4\pi R^3 \bar{\rho}_m/3$. Sendo assim, a variância para uma escala de massa M para uma função filtro tipo top-hat será $\sigma_{TH}^2(M) = \sigma_{TH}^2(R = [3M/4\pi\bar{\rho}_m]^{1/3})$. A quantidade σ_8 é a raiz da variância das flutuações de densidade em uma esfera de raio $8 h^{-1} Mpc$ e é frequentemente usada para normalizar o espectro de potência. A figura 3.5 apresenta o comportamento de $\sigma_{TH}(M)$ (azul) em $z = 0$ para a cosmologia $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$, bem como o valor do contraste de densidade linear no momento do colapso $\delta_c = 1.686$ para um universo do tipo Einstein-de Sitter (laranja), $\Omega_m = 1.0$ (essa quantidade será discutida em grande detalhe mais adiante).

Figura 3.5: A raiz da variância das flutuações de densidade para $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$.

3.8 Observações Cosmológicas

Como já fora apresentado, medidas cosmológicas atestaram que o universo está em expansão acelerada e o modelo que mais se ajusta aos dados descreve esse comportamento através da proposição da existência de uma componente energética com pressão negativa conhecida como Energia Escura (EE). Esse fenômeno de aceleração cósmica é um processo recente ($z < 1$) e nesta Seção apresentaremos algumas estratégias observacionais utilizadas para fundamentar e testar o modelo cosmológico padrão. Uma descrição mais ampla e aprofundada pode ser encontrada em [83].

3.8.1 Medidas de Supernovas Tipo Ia

As Supernovas (SN) são explosões estelares extremamente luminosas, provavelmente geradas quando uma estrela tipo anã branca atinge o limite de massa de Chandrasekhar [84] ($M \sim 1.4M_{\odot}$). Estima-se que as Supernovas Tipo Ia são o estágio final da evolução estelar de um sistema binário formado por uma estrela da sequência principal e uma companheira compacta — provavelmente um anã branca. Quando a estrela mais massiva atinge o estágio de gigante vermelha, a estrela compacta passa a acretar cada vez mais massa da companheira, aumentando sua temperatura e sua massa. Ao alcançar o limite de Chandrasekhar a estrela compacta então sofre um processo de detonação termonuclear, cuja luminosidade, no pico da explosão, pode superar a emissão produzida por uma galáxia inteira.

A característica essencial que permite o uso das SNs Ia é que, já que a explosão ocorre em uma mesma escala de massa, sua luminosidade intrínseca é basicamente a mesma, e o conhecimento desta, junto com a medida do fluxo que chega até nós, possibilita uma medida da distância-luminosidade até aquele objeto. Em outras palavras: a magnitude absoluta M está relacionada com a distância de luminosidade e a magnitude aparente m , por meio da relação conhecida como módulo de distância μ :

$$\mu = m - M = 5 \log_{10} \left(\frac{d_L}{Mpc} \right) + 25, \quad (3.106)$$

onde os fatores numéricos são advindos de conversões astronômicas na definição de M e m . A obtenção do redshift fica ao encargo de medidas espectroscópicas. Assim, através de $d_L(z)$, pode-se calcular o parâmetro de Hubble $H(z)$ usando a equação (3.45). Aplicando esse processo para um conjunto de dados de SNs Ia, dois times de pesquisadores, Riess et al. [13] e Perlmutter et al. [14], de forma independente, mediram d_L e concluíram que o universo passa hoje por um processo de expansão acelerada. O melhor ajuste dos modelos teóricos indicavam que o parâmetro de densidade da matéria, incluindo matéria escura e bárions, é $\Omega_m \simeq 0.29$ e que a componente energética restante seria a energia escura Ω_Λ .

3.8.2 Radiação Cósmica de Fundo

A RCF foi observada por A. Penzias e R. Wilson em 1965 [85] e é considerada a melhor evidência do modelo do “Big Bang quente” – a idéia de que o universo evoluiu de um plasma primordial em equilíbrio térmico. As observações da RCF permitem estudar o período em que o universo possuía menos de 400 mil anos de idade. Até essa época as componentes visíveis da matéria do universo formavam um plasma ionizado de radiação, elétrons, prótons e nêutrons. Entretanto, com a expansão do universo a temperatura foi diminuindo, o que permitiu que os primeiros átomos fossem formados, tornando o universo neutro e transparente. Isso permitiu o desacoplamento dos fótons com os elétrons e a matéria bariônica, e levou à formação da radiação de fundo observada hoje.

Como um corpo quente em equilíbrio térmico deve produzir uma radiação de corpo negro, é de se esperar que a RCF também possua uma distribuição espectral de corpo negro, o que foi confirmado pelas observações. Esses fótons carregam as “impressões digitais” das inhomogeneidades primordiais e se medirmos a temperatura de um ponto no céu caracterizado pela posição angular (θ, ϕ) podemos escrever as anisotropias na temperatura como

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \frac{T(\theta, \phi) - \langle T \rangle}{\langle T \rangle} \quad (3.107)$$

onde a temperatura média medida hoje é $\langle T \rangle = \frac{1}{4\pi} \int T(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \simeq 2.75K$. Medidas da RCF indicam que os desvios de temperatura média são $\delta T/T \lesssim 10^{-5}$ o que implica

na isotropia em grandes escalas no universo primordial. Essa grande uniformidade, além de permitir vínculos mais restritivos nos parâmetros cosmológicos, serve como uma prova robusta a favor do modelo cosmológico padrão. De fato, medidas oriundas dos satélites WMAP [19] e Planck [73] permitiram o estudo da RCF com alta precisão. Para tanto, as anisotropias na RCF são decompostas em harmônicos esféricos tal que

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l a_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (3.108)$$

Por essa razão a quantidade estatística mais importante em medidas da RCF é a função de correlação angular

$$c(\theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}') \right\rangle_{\hat{n} \cdot \hat{n}' = \cos \theta}. \quad (3.109)$$

No espaço dos multipolos l , o espectro angular de potência é dado por:

$$C_l = \int d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) c(\theta).$$

Dado que as flutuações primordiais são, em excelente aproximação, Gaussianas, os valores de C_l , para l diferentes, são independentes. Neste contexto, para pequenos ângulos no céu, o espectro de potência das temperaturas reflete a anisotropia angular tal que $(\delta T/T)_l^2 \equiv l(l+1)C_l/2\pi$ (potência por intervalo logarítmico no número de onda $l \gg 1$), onde $l \sim 2\pi/\theta$. O cálculo completo dos C_l para um dado conjunto de parâmetros requer a solução das equações acopladas de Einstein-Boltzmann, o qual é comumente realizado através de códigos numéricos como CAMB [86] ou o CLASS [87]. Portanto, medidas das flutuações na temperatura da RCF são um poderoso instrumento para fundamentar o modelo cosmológico padrão bem como para testar novos candidatos a explicar a expansão cósmica. A figura 3.6 apresenta as anisotropias na temperatura dos dados do Planck [4] junto com o melhor ajuste (verde) para os dados (pontos vermelhos).

3.8.3 Oscilações Acústicas de Bárions

J. Peebles e J. Yu [88] e, independentemente, R. Sunyaev e Y. Zeldovich [89] calcularam a existências de assinaturas de oscilações acústicas no espectro de potência, conhecidas

Figura 3.6: O espectro de potência da temperatura da RCF $(\delta T/T)_l^2 \equiv l(l+1)C_l/2\pi$ versus o multipolo e o comprimento angular θ . Os pontos vermelhos são os dados do Planck e a curva verde representa o melhor ajuste para o modelo Λ CDM. Figura extraída da colaboração Planck [4].

por BAO (da sigla em inglês). Segundo o modelo padrão, a pressão causada pelos fótons do plasma primordial contrabalanceava o crescimento gravitacional das perturbações de densidade o que resultava na formação de ondas sonoras. Com o resfriamento e posterior desacoplamento dos fótons, essas ondas ficaram impressas na distribuição de densidade tal que hoje podem ser observadas na forma de sobre-densidades em uma escala específica (a escala acústica), o que é explicitado na função de correlação de dois pontos, bem como no espectro de potência. A manifestação dessa sobre-densidade se apresenta em escalas de $r \sim 100 Mpc h^{-1}$ como pode ser visto na figura 3.7 extraída de [5]. A detecção desses sinais acústicos impressos no espectro de potência é outro poderoso instrumento para testar modelos cosmológicos e estimar seus parâmetros além, de ser uma forte evidência a favor do modelo padrão.

Figura 3.7: Função de correlação medida pela BOSS para a amostra de galáxias CMASS. Figura extraída da colaboração Planck [5].

Capítulo 4

Formação de Estruturas

A pesquisa em cosmologia é, em boa parte, dedicada à descrição de processos gravitacionais no regime linear. Entretanto, à medida que as perturbações crescem por meio da força da gravidade, elas alcançam regimes não lineares, formando objetos astrofísicos tais como aglomerados, galáxias, buracos negros, estrelas etc. Esse regime não linear começa a ficar importante quando o contraste de densidade $\delta > 1$, porém a teoria linear já não funciona bem um pouco antes do instante em que $|\delta| \sim \mathcal{O}(1)$. A partir desse momento, outros processos e interações locais passam a dominar, de maneira que os efeitos cosmológicos ficam cada vez mais diluídos. Apesar disso, ainda é possível desenvolver modelos para a formação de estruturas que permitam compreender como as propriedades dos parâmetros cosmológicos se manifestam nessas estruturas colapsadas. Neste capítulo apresentamos dois modelos complementares que visam permitir descrever a formação de estruturas em regimes não-lineares.

4.1 Modelo de Colapso Esférico

Com o objetivo de se obter uma compreensão do processo de formação de estruturas em escalas não-lineares, pode-se aplicar um procedimento que, apesar de ser uma idealização, permite obter propriedades importantes de estruturas cosmológicas. Esse modelo, conhecido como Colapso Esférico, e inicialmente proposto por James E. Gunn et al. [90], consiste em considerar que as perturbações iniciais δ possuem um perfil de densidade do tipo top-hat. A forma desse perfil se mantém ao longo de todo o processo de evolução

da estrutura, o que é garantido pelo teorema de Birkhoff – ver Seção 2.7.1. Assim, o processo de formação de uma estrutura gravitacionalmente ligada inicia-se por uma etapa de expansão que acompanha o fluxo de Hubble; contudo, ao atingir um tamanho máximo característico a perturbação se descola do campo de fundo e a estrutura passa a se contrair, devido à força gravitacional, em direção a um colapso. Na prática, em estruturas realísticas tanto o perfil inicial quanto o campo de velocidades peculiares não apresenta uma simetria esférica exata, de modo que a aproximação é quebrada perto do colapso, e o sistema alcança um estado de estabilidade caracterizado por um equilíbrio dinâmico expresso pelo Teorema do Virial, onde a energia cinética é metade da potencial.

4.1.1 Colapso esférico em um universo Einstein-de Sitter

Seguindo o procedimento de [69], modelamos a perturbação de densidade em termos de uma esfera preenchida isotrópica e homogeneamente por um fluido com densidade constante. Essa esfera está imersa em um campo de fundo de densidade média $\bar{\rho}$, e considerando a validade do Teorema de Birkhoff 2.7.1 em RG, a região interna pode ser representada como um universo de Einstein-de Sitter com curvatura positiva, onde o raio da esfera corresponde ao fator de escala na equação de Friedmann (3.23). Dessa maneira, a evolução da perturbação pode ser modelada pela equação

$$\frac{1}{r} \frac{dr}{dt} = H_0 [\Omega_{m,0} r^{-3} + (1 - \Omega_{m,0}) r^{-2}]^{1/2}. \quad (4.1)$$

Essa mesma equação também pode ser obtida por meio de um formalismo Pseudo-Newtoniano, através da conservação da energia. Considerando r como o raio de uma casca esférica da perturbação, a conservação da energia pode ser expressa como

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} = E = \text{const.} \quad (4.2)$$

Se expressarmos a massa interna ao raio r como $M = \frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}_m$, obteremos

$$\left(\frac{\dot{r}}{r} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \bar{\rho}_m + \text{const}/r^2, \quad (4.3)$$

que corresponde à equação de Friedmann (4.1). Devemos considerar que a equação ante-

rior (4.3) também pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2GM}{r} - C, \quad (4.4)$$

que corresponde à equação da cicloide, cuja solução para $C > 0$ pode ser parametrizada por

$$r = GM \frac{1 - \cos(\theta)}{C}, \quad (4.5)$$

$$t = GM \frac{\theta - \sin(\theta)}{C^{3/2}}, \quad (4.6)$$

onde θ é uma variável angular. Outra maneira de apresentar essa solução é escrever as constantes em termos do valor máximo de r (r_m) e do tempo em que é alcançado t_m , tal que

$$\frac{r}{r_m} = \frac{1 - \cos(\theta)}{2}, \quad (4.7)$$

$$\frac{t}{t_m} = \frac{\theta - \sin(\theta)}{\pi}. \quad (4.8)$$

Como para a matéria a densidade do campo evolui como $\bar{\rho} = [3M(r_0)/4\pi][r_0 a(t)]^{-3}$, onde r_0 é o tamanho inicial da perturbação, podemos escrever o contraste de densidade como

$$\delta = \left[\frac{a(t)r_0}{r} \right]^3 - 1. \quad (4.9)$$

Onde C é calculado através da condição $\delta(\theta = 0) = 0$. Essa última expressão pode ser escrita em termos de θ

$$\delta = \frac{9}{2} \frac{[\theta - \sin(\theta)]^2}{[1 - \cos(\theta)]^3} - 1, \quad (4.10)$$

onde usamos

$$a(t) = a_0(t/t_0)^{2/3}. \quad (4.11)$$

Note que a versão linearizada de (4.10) é aquela que segue da equação para perturbações de matéria no regime linear, $\delta_{lin} \sim a(t)$, e portanto, acertando as constantes do problema temos:

$$\delta_{lin} = \frac{3}{5} \left[\frac{3}{4}(\theta - \sin(\theta)) \right]^{2/3}. \quad (4.12)$$

É importante notar que em todo o desenvolvimento consideramos que a massa $M(< r)$ é constante, portanto, as informações obtidas são válidas até o cruzamento de duas cascas esféricas (*shells*) – o que, no modelo “top-hat”, só ocorre no instante do colapso. Podemos então compreender, tal como indicado pela equação (4.1), que a perturbação de densidade δ (ou equivalentemente o raio r) inicialmente cresce de modo discreto; essa evolução continua até que a força da gravidade finalmente faz com que a estrutura pare de se expandir; e a partir daí a estrutura segue em direção ao colapso e à virialização.

O chamado *momento de turnaround* (t_m ou a_t) ocorre quando uma perturbação alcança o seu tamanho máximo, conhecido como *raio de turnaround* (r_m ou R_t) o qual possui contraste de densidade $\delta_t = \delta(t_m)$. Na próxima fase, a perturbação começa a colapsar até atingir o *momento de colapso* (t_c ou a_c), caracterizado por um contraste de densidade que formalmente diverge no modelo “top-hat”, mas que pode ser expresso em termos do contraste de densidade linearizado no momento “crítico” do colapso, $\delta_c = \delta_{lin}(t_c)$. Como já apontamos, o estágio final do colapso não é propriamente físico, pois devido às assimetrias do perfil de densidade inicial e à dispersão de velocidades, as partículas que perfazem o fluido de matéria não acabam se acumulando em um único local. Em vez disso, a fase seguinte é uma “relaxação violenta”, a qual conduzirá o sistema ao equilíbrio do virial, o *momento de virialização* (t_v ou a_v). Ao atingir esse equilíbrio, a energia cinética T pode ser relacionada com a energia potencial U por $T = U/2$. Como a energia cinética no instante do turnaround se anula, podemos aplicar a conservação de energia aos estados de turnaround e virializado, obtendo que

$$U_t = U_v + T_v = U_v/2. \quad (4.13)$$

Portanto, como para uma esfera uniforme de raio R a energia potencial será $U = -3GM/5R$, a relação entre o raio de turnaround e de virial será $R_v = R_t/2$.

A figura 4.1 apresenta a evolução do raio de uma perturbação esférica em um modelo de colapso esférico. A linha contínua apresenta a evolução, expansão, seguida por uma contração e finalizando com a virialização (relaxação), a qual é representada pelas oscilações.

A linha tracejada apresenta o colapso sem virialização. A linha pontilhada representa o fluxo de Hubble, quando $r(t) \sim a(t)$.

Figura 4.1: Evolução do raio no modelo de colapso esférico, linha contínua. A linha tracejada apresenta o colapso em uma singularidade. A linha pontilhada representa uma evolução que segue o fluxo de Hubble. Figura extraída das notas do Prof. Gastão B. Lima Neto [6].

Em termos da equação paramétrica, podemos caracterizar o momento de turnaround como aquele em que $\theta = \pi$, logo, partindo de (4.10), temos

$$\delta_t = \delta(\pi) \approx 4.552. \quad (4.14)$$

Por outro lado, o momento em que o sistema atinge o estágio do colapso será caracterizado pelo ângulo paramétrico $\theta = 2\pi$, exatamente o dobro do tempo de turnaround, logo

$$\delta_c = \delta_{lin}(2\pi) \approx 1.686. \quad (4.15)$$

Este último resultado é uma das propriedades do colapso esférico mais explorada, pois é utilizado para quantificar a barreira para formação de estruturas gravitacionais, sendo aplicado em particular na função de massa, para calcular a abundância de objetos colapsados no universo. É importante também notar que, além dos estágios descritos acima, podemos estimar o momento em que os efeitos não-lineares passam a ser preponderantes (t_{nl} ou a_{nl}), definido por $\delta = 1$, o que corresponde a $\theta = 2\pi/3$ e $\delta_{lin} \approx 0.57$.

Por fim, tal como apresentado em [6], sabendo que as densidades no interior da per-

turbaco no momento da virializaco e de turnaround se relacionam por

$$\rho(t_v) = \left(\frac{r_m}{r_v}\right)^3 \rho(t_m) = 8\rho(t_m), \quad (4.16)$$

e notando densidade da estrutura se relaciona com a densidade média por meio da relao $\rho = \bar{\rho}(1 + \delta)$, podemos escrever

$$\rho(t_v) = 44.416 \times \bar{\rho}(t_m), \quad (4.17)$$

onde usamos $\rho \propto r^{-3}$. Lembrando que, para um universo do tipo EdS a densidade evolui com o fator de escala com $\rho \propto a^{-3}$ e este se relaciona ao tempo csmico por $a \propto t^{2/3}$. Além disso, implementaremos a aproximao de que o momento de colapso  muito prximo ao momento de virializaco, de tal forma que podemos escrever

$$\bar{\rho}(t_m) = \left(\frac{t_c}{t_m}\right)^2 \bar{\rho}(t_c) \quad (4.18)$$

logo, aplicando em (4.17),

$$\bar{\rho}(t_v) = 44.416 \times 4 \times \bar{\rho}(t_c). \quad (4.19)$$

Implementando esse resultado em termos do contraste de densidade δ obtemos

$$\delta_v = 176.7, \quad (4.20)$$

que costuma ser escrito em termos da sobredensidade

$$\Delta_v = 1 + \delta_v \approx 178. \quad (4.21)$$

O comportamento da densidade da perturbao bem como do campo de fundo (médio) em termos do fator de escala  apresentado na figura 4.2. Nela, as fases anteriormente descritas so bem discriminadas, bem como esto detalhados a comparao entre os momentos de transio da fase linear para no-linear, o momento de turnaround, o início do colapso, e a posterior formao de estruturas gravitacionais. Todos esses resultados seguem do uso das solues paramétricas (4.7) e da relao (4.11), que nos permitem estabelecer uma relao entre os momentos de transio.

Figura 4.2: Comportamento da densidade da perturbação e do campo de fundo nas fases de expansão, contração e virialização de estruturas gravitacionalmente ligadas. Figura extraída de [7].

É de se notar que o universo do tipo Einstein-de Sitter implica em δ_t , δ_c e Δ_v constantes, contudo, como demonstraremos na próxima seção, para um universo do tipo Λ CDM, essas propriedades passam a possuir dependência temporal. Quando implementamos modelos de gravidade modificada, como o estudado nessa tese, surge também uma dependência com a escala de massa.

4.1.2 Colapso esférico em um universo Λ CDM

Afim de estender a discussão da seção anterior ao modelo Λ CDM, implementaremos a condição de colapso esférico ao sistema de equações acopladas (3.75), (3.76) e (3.77):

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a} \nabla \cdot (1 + \delta) \mathbf{v} = 0, \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{a} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + H \mathbf{v} = -\frac{\nabla \Phi}{a}, \quad (4.23)$$

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \bar{\rho} \delta. \quad (4.24)$$

Estas equações possibilitarão obter o campo de velocidades $\mathbf{v}$, o potencial Φ e o contraste de densidade δ . O procedimento seguinte para construir essa solução seguirá o tratamento apresentado no apêndice de [91].

Derivando a equação (4.22) com respeito ao tempo obtém-se

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - \frac{H \nabla \cdot (1 + \delta) \mathbf{v}}{a} + \frac{1}{a} + \frac{\nabla \cdot (1 + \delta) \dot{\mathbf{v}}}{a} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \mathbf{v} \right) = 0. \quad (4.25)$$

Tomando $\dot{\mathbf{v}}$ da Eq. (4.23) junto com (4.22), a equação pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\nabla [\nabla \cdot (1 + \delta) \mathbf{v}] \cdot \mathbf{v}}{a^2} - \frac{\nabla \cdot (1 + \delta) (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}}{a^2} = \\ = \frac{1}{a^2} \nabla \cdot (1 + \delta) \nabla \Phi. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ou, rearranjando os produtos escalares chega-se a

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{1}{a^2} (1 + \delta) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} v^j v^i = \frac{1}{a^2} \nabla \cdot (1 + \delta) \nabla \Phi. \quad (4.27)$$

Para lidar com essa equação implementa-se a aproximação de top-hat descrita anteriormente. Neste caso, o campo de velocidades possui apenas dependência radial e temporal

$$\mathbf{v}(r, t) = A(t) \mathbf{r}. \quad (4.28)$$

A qual implica, segundo a Eq. (4.22), em:

$$A = \frac{-a}{3(1 + \delta)} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right). \quad (4.29)$$

Através dessa redefinição para $\mathbf{v}$, a derivada de segunda ordem presente na Eq. (4.27) é reescrita como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} v^j v^i &= A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} v^j v^i = A^2 (\delta_{ij} \delta_{ij} + \delta_{ii} \delta_{jj}) \\ &= 12A^2 = \frac{4a^2}{3(1 + \delta)^2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Usando esse resultado na Eq. (4.27) chega-se a

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{4}{3(1 + \delta)^2} \left(\frac{\partial \delta}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{a^2} \cdot (1 + \delta) \nabla^2 \Phi. \quad (4.31)$$

Esta equação junto com a Eq. (4.24) formam um conjunto completo. Contudo, há uma forma mais prática de escrever (4.31) como função do fator de escala:

$$\delta'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{E'}{E} \right) \delta' - \frac{4\delta'^2}{3(1+\delta)} = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m a^{-5} \delta (1+\delta)}{E^2}, \quad (4.32)$$

onde $' = d/da$, $E = H/H_0$ e foram usadas as seguintes identidades:

$$\frac{H'}{H} = \frac{E'}{E}, \quad (4.33)$$

$$\frac{4\pi G \rho_m}{H^2} = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m a^{-3}}{E^2}. \quad (4.34)$$

A Eq. (4.32) linearizada assume a forma

$$\delta'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{E'}{E} \right) \delta' = \frac{3}{2} \frac{\Omega_m a^{-5} \delta}{E^2}. \quad (4.35)$$

4.1.3 Propriedades do modelo de colapso esférico

A fim de se obter a evolução do contraste de densidade δ e as propriedades do colapso esférico é necessário resolver tanto a equação linear (4.35) como a não-linear (4.32), o que é viável apenas numericamente. Para tanto, precisa-se estabelecer as condições iniciais apropriadas. Seguindo o procedimento presente em [91, 92], toma-se um valor suficientemente alto para o contraste de densidade não-linear, δ_{nl} , que caracterize a iminência do colapso (porque neste momento $\delta_{nl} \rightarrow \infty$). Em seguida, busca-se as condições iniciais necessárias para que o colapso ocorra em algum instante (por exemplo, em $z = 0$, ou $a = 1$), e através delas evolui-se o contraste de densidade linear δ_l .

Considerando o modelo Λ CDM com os parâmetros cosmológicos $\Omega_m = 0.31$ e $\Omega_\Lambda = 0.69$, a evolução do contraste de densidade nos regimes linear e não-linear pode ser representada pela figura (4.3).

Um dos parâmetros a ser obtido é o contraste de densidade linear no momento do colapso $\delta_c = \delta_l(a_c)$ o qual é alcançado através do comportamento do δ_{nl} que define o momento do colapso a_c . Outro parâmetro de interesse é aquele que define o contraste de densidade não-linear no momento em que a estrutura para de expandir e atinge tamanho máximo δ_t . Para obter o fator de escala no momento do turnaround pode-se utilizar a

Figura 4.3: Evolução do contraste de densidade nos regimes linear (azul-tracejada) e não-linear (vermelha-contínua) para uma estrutura cujas condições iniciais geram um colapso hoje, $a = 1.0$.

equação para a massa de uma estrutura top-hat

$$M = \frac{4\pi}{3} r^3 \bar{\rho}_0 a^{-3} (1 + \delta). \quad (4.36)$$

Como M é constante ao longo de toda evolução, a derivada com respeito ao fator de escala é nula. Se for utilizada a definição de que no momento do turnaround a estrutura encontra-se parada, ou seja, $dr/da = 0$, obtém-se a equação:

$$\frac{3}{a_t} (\delta_t + 1) = \delta'_t, \quad (4.37)$$

onde o sub-índice refere-se ao momento do turnaround. A igualdade acima assinala o instante a_t e permite calcular $\delta_t = \delta(a_t)$.

O terceiro parâmetro relativo ao modelo do colapso esférico a ser calculado é a sobre-densidade no momento da virialização, Δ_v . Para isso, partindo da definição

$$\Delta_v \equiv \frac{\rho(a_{vir})}{\bar{\rho}(a_c)}, \quad (4.38)$$

onde $\rho(a_{vir})$ é a densidade no interior da perturbação top-hat no instante da virialização, e $\bar{\rho}(a_c)$ é a densidade média (*background*) naquele mesmo instante. Utilizando o fato de que dentro da estrutura de perfil top-hat temos $\rho \propto r^{-3}$, que $\rho(a) = \bar{\rho}(a) [1 + \delta_{nl}(a)]$, e

que $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 a^{-3}$, pode-se reescrever Δ_v como

$$\Delta_v = \left(\frac{a_c}{a_t} \right)^3 [1 + \delta_{nl}(a_t)] \left(\frac{r_t}{r_v} \right)^3. \quad (4.39)$$

Para calcular o termo r_t/r_v é necessário estabelecer uma relação entre o estado da estrutura no momento do turnaround e no momento da virialização. Na virialização, o sistema atingiu um estado em que sua energia cinética T e potencial $U \propto r^n$ obedecem ao teorema de virial, $T = \frac{n}{2}U$. A energia potencial gravitacional e a energia potencial associada à constante cosmológica podem ser escritas, respectivamente, como [45, 91]

$$U_g = -\frac{3}{5} \frac{GM}{r} \quad (4.40)$$

e

$$U_\Lambda = -\frac{4\pi G\rho_\Lambda}{5} M r^2. \quad (4.41)$$

Com a aplicação do teorema do virial, a energia total do sistema nesse momento pode ser escrita como $E_{vir} = \frac{1}{2}U_{g(vir)} + 2U_{\Lambda(vir)}$. Por conservação de energia, essa energia será a mesma no momento de máxima expansão $E_t = U_{g(t)} + U_{\Lambda(t)}$. Dessa forma, a relação pode ser expressa como

$$4\pi\rho_\Lambda M r_t^2 + \frac{GM^2}{r_t} = \frac{3}{2} \frac{GM^2}{r_v} 8\pi\rho_\Lambda M r_v^2. \quad (4.42)$$

Aplicando as definições:

$$\eta \equiv \frac{8\pi\rho_\Lambda r_v^2}{3M} = \frac{2\rho_\Lambda}{\rho_m} = \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_{m0}a_t^{-3}(1 + \delta_{nl}(a_t))} \quad (4.43)$$

e

$$s \equiv \frac{r_v}{r_t}, \quad (4.44)$$

a relação (4.41) pode ser reescrita como

$$1 + 2\eta s^3 = 3s + \eta s \quad (4.45)$$

a qual permite obter $s(\eta)$, de forma que:

$$\Delta_v = \left(\frac{a_c}{a_t}\right)^3 [1 + \delta_{nl}(a_t)] \frac{1}{s^3}. \quad (4.46)$$

Com a definição dos parâmetros do modelo do colapso esférico a_c , δ_c , a_t , δ_t e Δ_v pode-se calcular os seus valores no contexto de um universo Einstein-de Sitter, também num modelo Λ CDM, através de um cálculo numérico. Para isso, foi desenvolvido um código no Mathematica para descrever estruturas cujo colapso ocorra em qualquer instante. Os resultados para $a = 1$ podem ser vistos na tabela 4.1. Os valores obtidos para o universo EdS servem de teste de consistência para o procedimento seguido aqui, pois ele são independentes do tempo de colapso.

	a_c	a_t	δ_t	δ_c	Δ_v
EdS	1.0	0.626	4.55	1.686	177.5
Λ CDM	1.0	0.565	5.80	1.676	334.62

Tabela 4.1: Valores obtidos numericamente para os parâmetros do modelo do colapso esférico a_c , δ_c , a_t , δ_t e Δ_v no contexto de uma cosmologia referente ao universo Einstein-de Sitter (linha superior) e ao modelo padrão Λ CDM (linha inferior) quando o colapso ocorre em $a = 1$.

Além de conhecer os valores dos parâmetros do colapso esférico para uma estrutura que virializa hoje, é interessante compreender como esses parâmetros mudam para diferentes momentos de colapso. Para observar esse efeito a estratégia escolhida foi variar as condições iniciais de forma a ter estruturas que estejam colapsando desde $z = 5$ até hoje ($z = 0$). O resultado pode ser observado na figura 4.4.

Observa-se que o efeito de incluir uma constante cosmológica, com a consequente diminuição da quantidade de matéria disponível, é um rebaixamento do contraste de densidade no momento do colapso à medida que a constante cosmológica passa a dominar. Isso pode ser explicado pelo fato de uma estrutura, com uma dada massa, sofrer uma ação menos intensa da gravidade no contexto de uma cosmologia Λ CDM do que no caso de outra em EdS. Como resultado, passado o tempo de colapso, essa estrutura terá gerado menor agregação de matéria do que no caso EdS, resultando em um menor contraste de densidade.

O δ_t sofre um aumento em épocas mais recentes em relação ao seu valor calculado em um universo EdS, a explicação para este comportamento pode ser obtida considerando que para que duas estruturas atinjam o turnaround no mesmo momento, aquela que possui mais matéria, e portanto maior gravidade, precisará possuir um contraste de densidade inicial (δ_i) menor do que no caso de estar sob uma cosmologia Λ CDM, e essa diferença não é alterada até o momento do turnaround, mas se inverte no momento do colapso, como será mostrado em capítulos posteriores. Essa mesma razão justifica o aumento no valor de Δ_v em Λ CDM com respeito ao universo preenchido apenas com matéria. O comportamento de δ_t é oposto ao de δ_c , porém é análogo ao de Δ_v , pois a modificação na gravidade leva a existência da quinta força que ocasiona uma diminuição do valor deste último para qualquer momento de colapso. Isso se dá pelo fato desta propriedade possuir uma dependência direta com o contraste de densidade não-linear no momento do turnaround, como demonstrado pela Eq. (4.39), assim como para δ_t . Para que o colapso ocorra no mesmo momento em ambos os limites o contraste de densidade não-linear inicial precisa ser menor para o modelo que possua uma força de gravidade aumentada.

4.2 Modelo de Halos

Uma maneira de modelar os efeitos estatísticos que descrevem a distribuição das perturbações no campo de matéria é postular que esse campo é composto por blocos fundamentais chamados *halos* de matéria escura (para uma revisão ver [93]). Estes receberam esse nome em virtude da morfologia inferida a partir dos dados de rotação de galáxias. O pressuposto fundamental da teoria dos halos é que toda matéria escura está contida nestes blocos. Portanto, o universo é composto por halos e estruturas vazias (conhecidas por voids). Cada halo é caracterizado pela posição de seu centro e o raio de sua borda. Os halos interagem entre si e com a matéria bariônica via interação gravitacional somente, sendo que o campo de distribuição dos halos δ_h possui sua própria estatística, tais como ξ_h e $P_h(k)$.

Segundo esse modelo, as propriedades básicas necessárias para descrever o campo de

Figura 4.4: Comparação entre os valores de δ_c , δ_t e Δ_v para estruturas colapsando em diferentes redshifts no universo Einstein-de Sitter (linha azul-pontilhada) e no universo Λ CDM (linha preta-tracejada).

matéria são:

- O perfil de densidade radial, responsável por dizer como a matéria escura estará distribuída nos halos que a contém.
- A função de massa $n(M)$, a qual descreve a abundância de halos para um dado bin de massa.
- O bias dos halos (b_h), que explica quão mais aglomerados estão os halos em relação a matéria, em escalas lineares.

Entretanto, seguindo o escopo proposto nesta tese, nos focaremos na distribuição de matéria intra halo e extra halo. Ou seja, nosso interesse principal é como a matéria está distribuída. De acordo com proposta do modelo de halos, a distribuição de massa em pequenas escalas é prioritariamente determinada pela estrutura interna dos halos, enquanto que o campo de matéria em grandes escalas é majoritariamente afetado pela distribuição espacial dos halos.

4.2.1 Perfil de densidade radial dos Halos

Halos podem ser considerados como picos no campo de densidade. Deste modo, halos mais massivos corresponde a mais altos picos no campo de flutuações iniciais. A prescrição do Modelo de Colapso Esférico apresenta objetos virializados como possuindo um excesso de densidade de Δ_v comparado com a distribuição uniforme do campo de fundo. A esfera dentro da qual a densidade média é Δ_v é limitada pelo raio de virial R_v e contém a massa total do halo M_v . A distribuição radial esfericamente simétrica é chamada de *perfil de densidade radial*. Estudos de simulações indicam que essa distribuição de matéria é bem aproximada por um perfil radial proposto por Navarro et al.[94, 95] (que representaremos daqui em diante por NFW, sigla para Navarro-Frenk-White).

$$\rho(r|M) = \frac{\rho_s}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2}, \quad (4.47)$$

onde ρ_s e r_s são parâmetros de escala. O primeiro é calculado através da condição

$$M_v = \int_0^{R_v} \rho(r|M) 4\pi r^2 dr, \quad (4.48)$$

que conduz a

$$\rho_s = \frac{M}{4\pi r_s^3 \left(\ln(1 + c(M_v)) - \frac{c(M_v)}{1+c(M_v)} \right)}. \quad (4.49)$$

onde introduzimos parâmetro de concentração $c(M_v) = r_{vir}/r_s$. Este novo parâmetro permite representar esse perfil como

$$\rho(r|M) = \frac{\rho_s}{(cr/R_v)(1 + cr/R_v)^2}, \quad (4.50)$$

onde o raio de virial se relaciona com a massa através da sobredensidade no momento do virial por $\Delta_v = 3M/(4\pi\bar{\rho}_m R_v^3)$. O parâmetro de concentração pode ser fitado de simulações [96] tal que

$$c(z, M_v) = 9 a \left(\frac{M_v}{M^*} \right)^{-0.13}, \quad (4.51)$$

onde M^* é a massa para a qual $\sigma(M^*) = \delta_c$. Através do perfil de NFW podemos obter a massa no interior de uma raio máximo R_{max} integrando o perfil até esse raio o que resulta em

$$M(< R_{max}) = \int_0^{R_{max}} 4\pi r^2 \rho_{NFW} dr = 4\pi \rho_s r_s^3 \left[\ln \left(\frac{r_s + R_{max}}{r_s} \right) - \frac{R_{max}}{r_s + R_{max}} \right]. \quad (4.52)$$

É importante notar que o perfil NFW não converge, porém, como o halo não se estende até o infinito é preciso truncar a massa até uma raio de referência. Isto pode ser alcançado ao calcular a massa contida em um halo até o limite do raio de virial

$$M(R_{max}, M_v, z) = 4\pi \rho_s \left[\frac{R_v}{c(z, M_v)} \right]^3 \left[\ln \left(1 + c(z, M_v) \frac{R_{max}}{R_v} \right) - \frac{c(z, M_v)}{c(z, M_v) + \frac{R_v}{R_{max}}} \right]. \quad (4.53)$$

Podemos escrever uma forma normalizada para o perfil de densidade

$$u(r|M) = \frac{\rho(r|M)}{M} \quad (4.54)$$

tal que $\int dr 4\pi r^2 u(r|M) = 1$. Este perfil normalizado no espaço de Fourier possui a forma

$$\tilde{u}(k|M) = \int d^3\mathbf{x} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(r|M), \quad (4.55)$$

o que implica em $\tilde{u}(k \rightarrow 0|M) = 1$. Essa transformada do perfil normalizado pode ser visualizada no gráfico da figura 4.5 para uma cosmologia $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_\Lambda = 0.7$ e massas de $10^{11} h^{-1} M_\odot < M < 10^{16} h^{-1} M_\odot$. Se considerarmos os perfis esfericamente simétricos e realizarmos as integrais angulares obteremos

$$\tilde{u}(k|M) = \int_0^{R_v} dr 4\pi r^2 \frac{\sin kr}{kr} \frac{\rho(r|M)}{M}. \quad (4.56)$$

Figura 4.5: Perfil de densidade normalizado para massas de $10^{11} h^{-1} M_{\odot} < M < 10^{16} h^{-1} M_{\odot}$ e com cosmologia $\Omega_m = 0.3$ e $\Omega_{\Lambda} = 0.7$.

4.2.2 Função de Massa e Bias

A densidade numérica de halos em regiões colapsadas, em escala logarítmica, quando escrita em termos de $\nu \equiv \frac{\delta_c}{\sigma(M_v)}$, é representada através da função de massa $n_{\ln M_v}(M_v, z)$ como

$$n_{\ln M_v}(M_v, z) \equiv \frac{dn}{d \ln M_v} = \frac{\bar{\rho}_m}{M_v} f(\nu) \frac{d\nu}{d \ln M_v}. \quad (4.57)$$

A função $f(\nu)$ pode ser obtida de diferentes formas, a primeira estratégia usada foi uma construção fundamentada no formalismo de colapso esférico conhecido como Formalismo de Press & Schechter [97]

$$f_{PS}(\nu) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left[-\frac{\nu^2}{2}\right]. \quad (4.58)$$

Implementando um colapso elipsoidal Seth & Tormen [98] desenvolveram uma expressão que melhor representa os resultados de simulações de N-corpos

$$\nu f_{ST}(\nu) = A \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \nu^2 [1 + (a \nu^2)^{-p}] \exp\left[\frac{-a \nu^2}{2}\right], \quad (4.59)$$

onde $A = 0,3222$, $a=0,707$ e $p=0,3$. Além desses modelos analítico e semi-analítico, outros modelos baseados unicamente em ajustes de resultados de simulações de N-corpos

foram propostos. Dentre estes destacamos dois, o modelo de Jenkins [99] que provê uma função de massa para sobredensidade

$$f_J(\sigma) = 0.315 \exp(-|\ln \sigma^{-1} + 0.61|^3 .8), \quad (4.60)$$

e o modelo de Tinker et al [100] que ajusta uma função de massa para simulações de N-corpos em alta resolução utilizando a técnica de *Spherical Overdensity* (SO)

$$f_T(\sigma) = A \left[\left(\frac{\sigma}{b} \right)^{-a} + 1 \right] \exp \left[-\frac{c}{\sigma^2} \right], \quad (4.61)$$

sendo $A = 0.186$, $a = 1.47$, $b = 2.57$ e $c = 1.19$ para uma sobredensidade na virialização de $\Delta_v = 200$.

Para obtermos a densidade numérica dos halos é necessário considerar a conexão entre o campo de perturbações da matéria com a distribuição dos halos realizada através do bias linear ($k \rightarrow 0$) a qual será

$$b_h(M, z) \equiv \delta_h / \delta_m = 1 - \frac{1}{\sigma} \frac{d \ln f}{d \nu}. \quad (4.62)$$

Que no contexto do modelo de Press & Schechter será dado por

$$b_{h(PS)}(M, z) = 1 + \frac{\nu^2 - 1}{2\delta_c}, \quad (4.63)$$

enquanto que Seth & Tormen propuseram

$$b_{h(ST)}(M, z) = 1 + \frac{a\nu^2 - 1}{2\delta_c} + \frac{2p}{\delta_c [1 + (a\nu^2)^p]}. \quad (4.64)$$

Segundo a proposta de Tinker et al [101], o bias pode ser escrito por

$$b_{h(T)}(M, z) = 1 - A \frac{\nu^a}{\nu^a + \delta_c^a} + B\nu^b + C\nu^c, \quad (4.65)$$

com

$$A = 1.0 + 0.24y \exp \left[-(4/y)^4 \right] \quad (4.66)$$

$$a = 0.44y - 0.88$$

$$B = 0.183$$

$$b = 1.5$$

$$C = 0.019 + 0.0107y + 0.19 \exp \left[-(4/y)^4 \right]$$

$$c = 2.4$$

para $y \equiv \log_{10} \Delta_v$. Sendo este o modelo para o bias linear que faremos uso nessa tese.

4.2.3 Funções de Correlação e Espectros dos halos

No contexto do modelo de halos já definimos o perfil radial de densidade que determina como a massa está distribuída no interior dos halo, entretanto é necessário também, especialmente para o trabalho desenvolvido nessa tese, conhecer como a massa está distribuída em regiões além do limite dos halos. Para tanto, é preciso conhecer o número médio de halos, o que já estabelecemos através da função de massa, e a função de correlação dos halos com a matéria, pois esta descreve o perfil médio de densidade radial observado desde o centro dos halos $\langle \rho_{obs}(r) \rangle$, o que incluirá tanto as regiões interiores como exteriores. Desta forma, halos com massa M em redshift z podem ser caracterizados por uma função de correlação cruzada halo-matéria definida como

$$\xi_{hm}(r) \equiv \langle \delta_h(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle = \frac{\langle \rho_{obs}(r) \rangle}{\bar{\rho}_m} - 1 \quad (4.67)$$

onde $r = |\mathbf{r}|$. Por outro lado, segundo 3.7.1, a função de correlação é a transformada inversa do espectro de potência de forma que

$$\xi_{hm}(r) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} P_{hm}(k) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} = \xi_{hm}^{1h}(r) + \xi_{hm}^{2h}(r). \quad (4.68)$$

Os índices superiores "1h" e "2h" se referem a separação entre a contribuição advinda da correlação do halo com a matéria em seu interior, referenciada pelo termo de 1-halo (1h), e da correlação do halo com a matéria distribuída além do limite do halo. Por conseguinte, a construção de um perfil de densidade que vá além do R_v dependerá do espectro de potência linear cruzado de halos-matéria $P_{hm}(k)$. De acordo com a prescrição do modelo de halos, tal como exposto em [91, 93, 102, 103], podemos escrever a função de correlação

halo-matéria como

$$\xi_{hm}(r) = \frac{\rho_{NFW}(r)}{\bar{\rho}_m} + b_L(M_v) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k y(k) P_L(k) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \quad (4.69)$$

onde o primeiro termo $\rho_{NFW}(r)$ refere-se a contribuição do termo de 1-halo e o segundo ao termo de 2-halo e

$$y(k) = \int d \ln M_v n_{\ln M_v} \frac{M_v}{\bar{\rho}_m} u(k, M_v) b_L(M_v). \quad (4.70)$$

Devemos notar que, partindo do bias e da função de massa como definidos anteriormente, para escalas maiores $k \rightarrow 0$ e $y(k) \rightarrow 1$. Desta forma podemos escrever a função de correlação como

$$\xi_{hm}(r) = \frac{\rho_{NFW}(r)}{\bar{\rho}_m} + b_L(M_v) \xi_m^L(r). \quad (4.71)$$

Desta maneira, podemos escrever a sobredensidade para região intra e extra halos como

$$\delta_{\rho_{h,obs}} = \langle \rho_{obs}(r) \rangle - \bar{\rho}_m = \rho_{1h}(r) + \rho_{2h}(r) = \rho_{NFW}(r) + b_L(M_v) \bar{\rho}_m \xi_m^L(r). \quad (4.72)$$

Onde o termo $\rho_{1h}(r)$ se refere a contribuição para o perfil oriunda do termo de 1-halo e $\rho_{2h}(r)$ ao efeito sobre a distribuição de massa causado pelo termo de 2-halos. Este último resultado será essencial para as aplicações desenvolvidas nesta tese.

Capítulo 5

Teorias de gravitação $f(R)$

Junto à Mecânica Quântica, a teoria da Relatividade Geral é uma das teorias de maior sucesso preditivo e mais bem testadas do último século. A recente detecção de ondas gravitacionais [104] é mais um exemplo do poder desta teoria. Desde sua formulação, a RG é assumida como a teoria de gravidade padrão. Entretanto, logo após sua apresentação, já foram registradas propostas de alterações em sua formulação [22, 23], mesmo que sem motivação observacional ou teórica. Porém, ao longo do tempo outras questões levaram ao surgimento de linhas de pesquisas que exploram a possibilidade da RG não ser a teoria de gravitação em sua versão final.

5.1 Modificações na Teoria da Relatividade Geral

Uma das primeiras dificuldades apresentadas pela RG é a existência de divergências em suas soluções, fato incômodo para qualquer teoria física. Outra motivação teórica para a investigação de teorias de gravitação alternativas é a, aparente, não renormalizabilidade da RG o que impossibilita, pelo menos a princípio, sua quantização e, por conseguinte, uma unificação com a teoria quântica. O terceiro motivo para se propor novas teorias de gravitação reside na necessidade de explicar a causa da aceleração cósmica observada na década de 90 [13, 14], a qual pode ser explicada tanto por modificações na RG quanto pela inclusão de uma nova componente energética com pressão negativa a Energia Escura e representada por uma constante cosmológica Λ , como explicado no capítulo (3).

Um ponto importante a ser destacado é a necessidade de que qualquer modelo de gra-

vitação alternativo precisa ser bem sucedido em todos os testes onde a RG foi submetida, o que inclui testes no sistema solar, regiões de alta curvatura ou alta densidade, medidas da história de expansão do universo, medidas da CMB e crescimento de estruturas. Outra característica de possíveis candidatos a modelos alternativos de gravidade é a inclusão de novos graus de liberdade. Isto ocorre pela RG ser a única teoria de gravidade que descreve a propagação de uma partícula sem massa de spin-2 [105–108], o gráviton. De modo geral, extensões dessa teoria geram novos graus de liberdade - cuja escolha é, em geral, escalares.

5.2 Teorias $f(R)$

Modificações na RG em termos de uma mudança na ação como função da curvatura não são recentes. Desde 1962 diversas propostas teóricas surgiram contendo termos de curvatura com ordem mais alta, objetivando a renormalização da RG [24–27]. Além disso, correções advindas de teorias mais fundamentais, como a teoria de cordas, geram ações com termos de curvatura de ordem mais alta. Entretanto, a maior e mais recente motivação para propor modelos de gravitação modificada com base em mudanças na forma como a ação depende da curvatura advém da possibilidade destas alterações explicarem a aceleração cósmica do universo [29, 109].

A proposta mais simples para se estudar os efeitos de alterações na ação em função de mudanças nos termos de curvatura é conhecida como *Teorias $f(R)$* - para uma revisão, veja [110]. No contexto destes modelos a ação de Einstein-Hilbert é escrita como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R + f(R)}{16\pi G} + \mathcal{L}_m \right], \quad (5.1)$$

onde R é o escalar de curvatura de Ricci e $\mathcal{L}_m$ é a Lagrangeana da matéria.

Implementando a variação da ação com respeito à métrica e considerando sua minimização, obtêm-se a equação de Einstein modificada

$$G_{\alpha\beta} + f_R R_{\alpha\beta} - \left(\frac{f}{2} - \square f_R \right) g_{\alpha\beta} - \nabla_\alpha \nabla_\beta f_R = 8\pi G T_{\alpha\beta}, \quad (5.2)$$

onde $f_R \equiv \frac{df(R)}{dR}$, $G_{\alpha\beta}$ é o tensor de Einstein não modificado (2.16) e $T_{\alpha\beta}$ é o tensor energia-momento. É notório que para $f(R) = -2\Lambda$ revertermos às equações de Einstein para um universo Λ CDM. Considerando a métrica FLRW (3.1), obtêm-se a equação de Friedmann modificada

$$H^2 + \frac{f}{6} - \frac{\ddot{a}}{a}f_R + H\dot{f}_R = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (5.3)$$

e a equação da aceleração

$$\frac{\ddot{a}}{a} - f_R H^2 + \frac{f}{6} + \frac{\ddot{f}}{2} = -\frac{8\pi G}{6}(\rho + 3p). \quad (5.4)$$

A aceleração cósmica pode ser explicada através dos termos extras relativos a $f(R)$. Além disso, a contribuição desses termos pode ser interpretada através da presença de um fluido efetivo com um parâmetro da equação de estado dado por [109]:

$$w_{ef} = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3} \frac{\left(f_R H^2 - \frac{f}{6} - H\dot{f}_R - \frac{\ddot{f}}{2}\right)}{\left(-f_R H^2 - \frac{f}{6} - H\dot{f}_R + \frac{1}{6}\ddot{f}_R R\right)}. \quad (5.5)$$

Um fato importante a ser notado é que esta última equação pode ser usada como uma equação para determinar $f(R)$. Pois, dado o conteúdo de matéria no universo e a história cósmica, w_{ef} pode ser vinculado, e a Eq. (5.5) resolvida para $f(R)$. Como é uma equação de segunda ordem, haverá um conjunto de soluções que descreverão a evolução cósmica desejada, o que gera uma degenerescência entre os diversos modelos de $f(R)$ no nível do background. Essa, por sua vez, pode ser desfeita através do estudo dos efeitos deste modelo de gravitação modificada no crescimento de perturbações.

O traço da Eq. (5.2) produz uma equação tipo Klein-Gordon para o campo escalar f_R acoplado com a métrica

$$3\Box f_R - R + f_R R - 2f = -8\pi GT, \quad (5.6)$$

onde T é o traço do tensor energia momento, $T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$. Esta equação é de segunda ordem para f_R , com um termo cinético canônico e um potencial efetivo definido como

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial f_R} \equiv \Box f_R = \frac{1}{3}(R - f_R R + 2f - 8\pi GT). \quad (5.7)$$

O fato da Eq. (5.6) expressar uma relação diferencial entre R e T demonstra que as equações de campo no contexto de $f(R)$ vão admitir um conjunto maior de soluções do que no caso da RG [110]. Modelos $f(R)$ viáveis precisam descrever a evolução cósmica, mas também devem satisfazer as condições $|f| \ll R$ e $|f_R| \ll 1$, que serão explicadas mais adiante. Nestes limites, o extremo do potencial efetivo conduz aos mesmos resultados da RG, $R = 8\pi GT$. O conhecimento da natureza desses extremos da curvatura é obtido através da segunda derivada do potencial efetivo, a qual é definida como o quadrado da massa efetiva do campo escalar

$$m_{f_R}^2 \equiv \frac{\partial^2 V_{\text{eff}}}{\partial f_R^2} = \frac{1}{3} \left[\frac{1 + f_R}{f_{RR}} - R \right]. \quad (5.8)$$

Considerando que $|Rf_{RR}| \cong f_R \ll 1$, $m_{f_R}^2$ pode ser aproximada para

$$m_{f_R}^2 \approx \frac{1}{3f_{RR}}. \quad (5.9)$$

A condição $f_{RR} > 0$ é requerida para que a evolução em regimes de alta curvatura seja estável sob pequenas perturbações [111, 112].

O campo escalar é o responsável pela chamada “quinta força”, cujo raio de ação é determinado pelo comprimento de onda de Compton comóvel:

$$\lambda_c \equiv \frac{1}{m_{f_R}}. \quad (5.10)$$

O alcance λ_c é definido pela massa do campo escalar e, para escalas cosmológicas, onde a densidade é baixa, o comprimento de Compton aumenta. Porém, em regiões de alta densidade m_{f_R} aumenta e o efeito da “quinta força” é reduzido. Esse processo é chamado de *mecanismo camaleão* [113, 114]. Esse mecanismo é responsável pela supressão dos desvios da relatividade geral em teorias de gravidade modificada, quando um campo, tipicamente escalar, possui uma massa que depende da densidade do ambiente. Em regiões de grande densidade, relativo ao valor da constante cosmológica, as teorias que manifestam esse mecanismo reproduzem os resultados da RG.

Partindo da Eq. (5.6) pode-se obter uma equação tipo Poisson para o campo escalar.

Para tanto, usa-se a condição de que $f_R \ll 1$, o que resulta em

$$\square f_R = \frac{1}{3} [R + 2f - 8\pi G(\rho_m + 4\rho_\Lambda)]. \quad (5.11)$$

Subtraindo esta expressão de seu valor médio no campo de fundo (indicado por uma barra superior), chega-se a

$$\square \delta f_R = \frac{1}{3} [\delta R + 2\delta f - 8\pi G\delta\rho_m], \quad (5.12)$$

onde $\delta f_R = f_R(R) - f_R(\bar{R})$, $\delta R = R - \bar{R}$ e $\delta\rho_m = \rho_m - \bar{\rho}_m$. Se a aproximação $\delta f = f_R\delta R$ for considerada e levando em conta a aproximação quase-estática, na qual as variações espaciais são muito mais relevantes do que a variação na coordenadas temporal, a expressão anterior, em coordenadas comóveis, assume a forma

$$\nabla^2 \delta f_R = \frac{a^2}{3} [\delta R - 8\pi G\delta\rho_m]. \quad (5.13)$$

Para compreender a evolução das perturbações no campo de matéria precisa-se considerar a métrica perturbada (3.50) e a equação de Einstein modificada (5.2) no contexto do modelo $f(R)$. Tal como na RG, a teoria $f(R)$ é uma teoria métrica, ou seja, as partículas de matéria escura seguem geodésicas da métrica. Entretanto, um efeito notório nesse modelo de gravitação modificada é que o campo f_R distingue entre os dois potenciais Ψ e Φ [36]. Tal que a relação entre esses potenciais no espaço de Fourier pode ser escrita como:

$$\Psi = \frac{1 + \epsilon(k, a)}{1 - \epsilon(k, a)} \Phi. \quad (5.14)$$

Partindo das componentes tipo tempo-tempo, é possível escrever uma equação de Poisson para um modelo $f(R)$, em coordenadas comóveis, dada por

$$\nabla^2 \Phi = \frac{16\pi G}{3} a^2 \delta\rho_m - \frac{a^2}{6} \delta R(f_R). \quad (5.15)$$

As equações (5.13) e (5.15) formam um conjunto completo de equações para o potencial newtoniano dado um campo de densidade de matéria. A fim de resolver esse sistema é

muito mais prático trabalhar no espaço de Fourier, no qual obtêm-se, para (5.13)

$$-k^2 \delta f_R = \frac{a^2}{3} \left[\left(\frac{1}{f_{RR}} \right) \delta f_R - 8\pi G \delta \rho_m \right], \quad (5.16)$$

onde foi implementada a aproximação linear $\delta R \approx \left(\frac{\partial R}{\partial f_R} \right) \delta f_R$, aplicável quando a flutuação no campo é pequena. Usando a expressão para a massa do campo escalar (5.9) pode-se expressar a variação do campo f_R por

$$\delta f_R = \left(\frac{1}{a^2 m_{f_R}^2 + k^2} \right) \left(\frac{8\pi G}{3} \right) a^2 \delta \rho_m. \quad (5.17)$$

Utilizando ambas as equações (5.13) e (5.15), obtêm-se uma expressão conjugada, a qual, no espaço de Fourier, pode ser escrita como

$$-k^2 \Phi = 4\pi G a^2 \delta \rho_m + \frac{k^2}{2} \delta f_R. \quad (5.18)$$

Através do uso da expressão (5.17) chega-se a

$$-k^2 \Phi = (1 + \epsilon(a, k)) 4\pi G a^2 \delta \rho_m, \quad (5.19)$$

onde

$$\epsilon(a, k) \equiv \frac{1}{3} \left(\frac{k^2}{a^2 m_{f_R}^2 + k^2} \right). \quad (5.20)$$

Através desse último resultado fica claro o desvio da relatividade advindo da inclusão de um campo escalar f_R . Pois, para $\epsilon(a, k) = 0$, recuperam-se os resultados da RG. Esse limite pode ser alcançado dependendo da relação entre a massa do campo escalar m_{f_R} , que definirá o comprimento de Compton λ_c , e o número de onda k , que determina a escala λ de observação. Para fins de facilitação da interpretação dos regimes de análise, é melhor expressar $\epsilon(a, k)$ como

$$\epsilon(a, k) \equiv \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\frac{a^2 m_{f_R}^2}{k^2} + 1} \right). \quad (5.21)$$

Nesta representação, observa-se que o mesmo comportamento descrito na RG é obtido quando $a^2 m_{f_R}^2 \gg k^2$, ou seja, $\lambda_{c(f_R)} \ll \lambda$, regime conhecido como *limite de campo fraco*. Por outro lado, o efeito de f_R é maximizado, fazendo com que $\epsilon(a, k) = \frac{1}{3}$, quando $a^2 m_{f_R}^2 \ll k^2$, de forma que $\lambda_{c(f_R)} \gg \lambda$, esse caso é comumente denominado como *limite*

de campo forte.

5.3 Condições para Modelos $f(R)$

Antes de apresentar o modelo $f(R)$ utilizado neste trabalho, é necessário descrever um breve resumo de quais condições um modelo $f(R)$ deve obedecer afim de ser viável teórica e observacionalmente. Elas são [109]:

1. $f_{RR} > 0$ para $R \gg f_{RR}$. Esta condição advém da necessidade de estabilidade para regiões de alta curvatura. Ou de outra forma, é uma condição que busca evitar instabilidades do tipo Dolgov-Kawasaki [111].
2. $1 + f_R > 0$ para todo R . Para compreender a natureza dessa condição, basta saber que os efeitos de $f(R)$ sobre a gravidade podem ser interpretados como uma modificação na constante da gravitação, de forma a reescrevê-la como uma constante efetiva $G_{ef} = G/(1 + f_R)$. Portanto, essa condição surge como uma forma de evitar uma alteração no sinal de G [115].
3. $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{f(R)}{R} = 0$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} f_R = 0$. Como o modelo Λ CDM explica com precisão a era da radiação e da matéria, onde R é grande, para regiões de alta curvatura o modelo $f(R)$ precisa tender a Λ CDM.
4. $|f(R)| < 1$. Para satisfazer os testes locais de gravidade e a evolução cósmica do universo [39].

5.4 Mecanismos de Blindagem

Uma condição bem conhecida a que todos os modelos de gravitação modificada devem obedecer para serem considerados viáveis é que, em pequenas escalas e em regiões de alta densidade, o comportamento descrito deve ser o mesmo daquele apresentado na RG. Portanto, todos os modelos devem ser dotados de um mecanismo que faça uma blindagem dos efeitos do grau de liberdade extra advindo com a teoria de GM. Esse processo é chamado de *mecanismo de blindagem* e pode ser classificado em três categorias [114]:

- Baseado em Φ_N . Quando o potencial newtoniano Φ_N excede um valor limite $\Phi \gtrsim \Lambda$ a quinta força é inibida. Portanto, é o potencial gravitacional de uma região que servirá de mapeamento para determinar quais regiões sofrerão a blindagem. Nesse caso pode ocorrer tanto o enfraquecimento do acoplamento com a matéria ou o aumento da massa do campo escalar. Essa categoria inclui o *mecanismo camaleão* [113], o qual aparece em algumas teorias escalar-tensoriais, tal como o modelo objeto de estudo desta tese, $f(R)$. Além desse, os mecanismos symmetrons e dilatons também se baseiam nesse princípio.
- Baseado em $\partial\Phi$. Há outra forma de mimetizar a RG, é através do comportamento da aceleração $-\nabla\Phi_N$. Quando esta supera um valor crítico, $|\nabla\Phi| \gtrsim \Lambda^2$, a “quinta força” é “desligada”. Um exemplo de mecanismo desse tipo é o k-Mouflage. Desta maneira uma forma de determinar qual região é blindada é mapear a aceleração em uma dada escala.
- Através de $\partial^2\Phi$. Nesse caso, a inibição da força gerada pelo campo escalar ocorre quando a curvatura ($R \sim \vec{\nabla}^2\Phi$) excede um valor crítico, $|\nabla^2\Phi| \gtrsim \Lambda^3$. Em regiões de grande curvatura, ou grande densidade, esse mecanismo é ativado e os efeitos de GM são suprimidos e a RG é recuperada. Um exemplo de mecanismo construído com base nesse comportamento é o mecanismo de Vainshtein.

5.5 Modelo de Hu-Sawicki

Um modelo fenomenologicamente viável proposto em [39, 40], conhecido como modelo de Hu-Sawicki, o qual é objeto de investigação nessa tese, é escrito como

$$f(R) = -m^2 \frac{c_1(R/m^2)^n}{c_2(R/m^2)^n + 1}, \quad (5.22)$$

onde c_1 , c_2 e n são parâmetros livres adimensionais, e

$$m^2 \equiv \frac{8\pi G \bar{\rho}_0}{3} = (8315 \text{Mpc})^{-2} \left(\frac{\Omega_m h^2}{0.13} \right) \quad (5.23)$$

Os parâmetros c_1 , c_2 e n são escolhidos de forma a descrever a expansão do universo

tal como o modelo cosmológico padrão. Isso implica que o valor do campo escalar no background hoje, $\bar{f}_{R0}$, seja pequeno, ou seja, $R_0 \gg m^2$. Com essa condição a forma de (5.22) pode ser aproximada para

$$f(R) \approx -\frac{c_1}{c_2}m^2 + \frac{c_1}{c_2}m^2 \left(\frac{m^2}{R}\right)^n, \quad (5.24)$$

a qual, para $n = 1$ pode ser expressa em termos da constante cosmológica como

$$f(R) \approx -16\pi G\rho_\Lambda - f_{R0}\frac{\bar{R}_0^2}{R}, \quad (5.25)$$

onde $\bar{R}_0 = \bar{R}(z = 0)$ e $\bar{f}_{R0} = f_R(\bar{R}_0)$, tal que as barras representam os valores médios obtidos espacialmente. Esta última expressão explicita o comportamento de $f(R)$ em reproduzir a dinâmica do modelo Λ CDM para $|\bar{f}_{R0}| \ll 1$.

5.6 Parametrização da massa do campo escalar m_{f_R}

Com o intuito de implementar o modelo de Hu-Sawicki e estudar seus efeitos, o passo inicial consiste em parametrizar a massa do campo escalar m_{f_R} em termos dos parâmetros deste modelo. Para tanto, basta lembrar que a massa, partindo de (5.9), é escrita como $m_{f_R} \approx \left(\frac{1}{3f_{RR}}\right)^{-1/2}$. Dessa forma, a partir do modelo Hu-Sawicki (5.25), pode-se expressar a massa como

$$m_{f_R} \approx \left(6|f_{R0}|\frac{\bar{R}_0^2}{R^3}\right)^{-1/2}. \quad (5.26)$$

Considerando que a curvatura do background pode ser aproximada para

$$\bar{R} \approx 3H_0^2 [\Omega_{m0}(1+z)^3 + 4\Omega_\Lambda], \quad (5.27)$$

onde H_0 é dado por (3.7), a massa m_{f_R} pode então ser parametrizada como

$$m_{f_R} \approx \frac{H_0}{c} \left(\frac{\Omega_{m0} + 4\Omega_\Lambda}{2|f_{R0}|}\right)^{1/2} \left(\frac{\Omega_{m0}(1+z)^3 + 4\Omega_\Lambda}{\Omega_{m0} + 4\Omega_\Lambda}\right)^{3/2}, \quad (5.28)$$

onde escolheu-se explicitar a velocidade da luz c apenas para correspondência com as equações (17) e (A1) de [36].

Este último resultado permite a implementação direta dos parâmetros do modelo Hu-

Sawicki nas equações modificadas, tais como (5.19), e então investigar seus efeitos nos observáveis cosmológicos. É importante notar que ao usar a aproximação (5.27) em (5.26) quebra-se a dependência da massa com a curvatura local, o que inibe efeitos de blindagem.

5.7 A dependência de $\epsilon(a, k)$ com a escala

A fim de compreender o efeito da escala em $\epsilon(a, k)$, foram gerados os gráficos 5.1 para três valores de $|f_{R0}|$: 10^{-4} , 10^{-5} e 10^{-6} , que exploram a dependência dessa função com respeito ao tempo, parametrizado pelo fator de escala a , e sua dependência em termos da escala, parametrizada por $\log_{10} k$. Além disso, também é apresentado, através da linha vermelha, o comprimento de Compton k_c , o qual, como especificado na seção 5.2, delinea o raio de ação do campo escalar f_R . Dessa forma o efeito de GM é maximizado para escalas correspondentes a $k \geq k_c$. Estes resultados demonstram que os efeitos de GM alcançam escalas cada vez maiores (k menores) em tempos mais recentes, para os três valores de $|f_{R0}|$. Entretanto, para $|f_{R0}| = 10^{-6}$ o valor máximo de $\epsilon(a, k)$ já é obtido em escalas de $k \approx 2.0$, ou seja, aproximadamente $\sim 3.14\text{Mpc}$, a partir de $a > 0.6$, e a força da gravidade já é aumentada cerca de 20% em escalas de $\sim 2\text{Mpc}$, ($k \approx 0.3$).

Além da análise do efeito do tempo e da escala sobre a função $\epsilon(a, k)$, é fundamental avaliar o grau de degenerescência entre a escala λ e o parâmetro $|f_{R0}|$. Para tanto, na figura 5.2, são apresentados os gráficos de $\epsilon(\log_{10} k, \log_{10} |f_{R0}|)$ para $a = 0.5$, $a = 0.8$ e $a = 1.0$. O comportamento desta função ressalta a degenerescência entre $|f_{R0}|$ e k , demonstrando que o efeito de GM é máximo quando estes dois parâmetros são aumentados. Pode-se observar que para $|f_{R0}| = 10^{-6}$ em escalas equivalentes a $k = 0.5$ ($\sim 3.16\text{Mpc}$) o acréscimo sobre a força de gravidade já será de 20% em estruturas observadas em $a = 1.0$.

No próximo capítulo, serão estudados os efeitos do modelo Hu-Sawicki sobre as propriedades do modelo de colapso esférico e sua viabilidade como critério de distinção entre o modelo cosmológico padrão e o modelo de gravitação modificada $f(R)$.

Figura 5.1: Gráficos de $\epsilon(a, k)$ para $|f_{R0}| = 10^{-4}$, $|f_{R0}| = 10^{-5}$ e $|f_{R0}| = 10^{-6}$. A linha vermelha delimita a região do raio de Compton.

Figura 5.2: Gráficos $\epsilon(\log_{10} k, \log_{10} |f_{R0}|)$ para $a = 0.5$, $a = 0.8$ e $a = 1.0$. A linha vermelha delimita a região do raio de Compton.

Capítulo 6

Colapso Esférico em $f(R)$

Os resultados presentes neste capítulo e em parte do capítulo seguinte foram publicados no artigo “**Turnaround radius in $f(R)$ model**” [57]. Na secção 4 foi apresentado o modelo de colapso esférico, o qual é utilizado para descrever de maneira sintética o processo de formação de estruturas em regime não linear. Como mencionado anteriormente, os modelos de gravidade modificadas devem reproduzir os mesmos resultados da RG no que diz respeito à história da evolução cósmica bem como àqueles apresentados em testes no sistema solar. Por outro lado esses modelos apresentam diferenças no que diz respeito aos estudos relativos a formação de estruturas [38, 116, 117]. Por essa razão, o presente capítulo se propõe a investigar os efeitos do modelo de gravidade modificada $f(R)$, segundo a proposta feita por Hu & Sawicki [39, 40], nas propriedades do modelo de colapso esférico.

6.1 Equações do Colapso Esférico Modificadas

No processo de desenvolvimento deste modelo utilizou-se como ponto de partida a equação de Euler e a equação de continuidade para um fluido não-relativístico sem pressão para as quais foi assumido um perfil de densidade inicial esfericamente simétrico. A fim de implementar o modelo de GM que é estudado nessa tese podemos reescrever a Eq. (4.32) para o contraste de densidade como

$$\delta'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{H'}{H} \right) \delta' - \frac{4\delta'^2}{3(1+\delta)} = \frac{1+\delta}{H^2 a^4} \nabla^2 \Phi, \quad (6.1)$$

onde $' = d/da$.

Baseado no procedimento seguido por [36], parte-se da equação de Poisson modificada, Eq. (5.19), pode-se escrever o potencial Φ , no espaço real comóvel, como

$$\Phi(\mathbf{x}, a) = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{dk^3}{k^2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} (1 + \epsilon(k, a)) \delta(\mathbf{k}, a), \quad (6.2)$$

onde $\delta(k, a) = \int d\mathbf{x}^3 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}, a)$. A qual pode ser reduzida, considerando a simetria esférica, a

$$\Phi(\mathbf{x}, a) = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk (1 + \epsilon(k, a)) \delta(k, a) 4\pi \frac{\sin kx}{kx}, \quad (6.3)$$

pela implementação das integrais angulares. Em seguida, utilizando as redefinições $4\pi G = \frac{3H_0^2}{2a}$ e $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_{m0} a^{-3}$ e aplicando o operador ∇^2 ao potencial é possível escrever:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{x}, a) = \frac{3H_0^2}{2a} \frac{\Omega_{m0}}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dk (1 + \epsilon(k, a)) \delta(k, a) 4\pi k^2 \frac{\sin kx}{kx}. \quad (6.4)$$

Por fim, a equação que rege a evolução de uma perturbação de densidade será dada por:

$$\delta'' + \left(\frac{3}{a} + \frac{E'}{E} \right) \delta' - \frac{4\delta'^2}{3(1+\delta)} = \frac{3(1+\delta)}{2E^2 2\pi^2} \Omega_{m0} a^{-5} \int_0^\infty dk k^2 (1 + \epsilon(k, a)) \delta(k, a) \frac{\sin(kr)}{kr}, \quad (6.5)$$

onde $H(a) = H_0 E(a)$.

Portanto, resolvendo a equação (6.5), bem como sua versão linearizada, poderemos determinar todas as propriedades relevantes do colapso esférico no modelo de gravidade modificada $f(R)$. Entretanto, para obtermos a evolução temporal do campo $\delta(r, a)$ é necessário partir de um perfil inicial $\delta_i(r, a)$ em seguida calcular sua transformada de Fourier $\delta(k, a)$ e só então resolver a integral que compõe o termo do lado direito de (6.5) até o momento do colapso. Essa dependência radial explicita a quebra do teorema de Birkhoff apresentado em 2.7.1 em gravidade modificada, pois as cascas esféricas não mais evoluem independentemente, mas cada uma é afetada pela evolução de todas as outras. Por essa razão, o processo computacional da solução dessa equação requererá a evolução concomitante de todas as cascas.

Por outro lado, como a evolução da equação requererá o campo $\delta(r, a)$ em cada instante

e este está relacionado com duas integrações, a evolução não poderá ocorrer apenas de um ponto inicial até o colapso, mas será composta por pequenas evoluções temporais, onde o perfil inicial que cada uma receberá, com exceção do primeiro caso, será o resultado da evolução anterior. Este, por sua vez, é construído pelos pontos r que individualmente sofrem a evolução temporal descrita na equação. Esse processo continuará até atingir o momento de turnaround - ou o colapso.

A resolução numérica da equação (6.5) foi implementada via método de Runge-Kutta de 4ª ordem para as integrais no espaço de Fourier e através do método de Romberg $R(n, 2)$ e $R(n, 3)$ calculamos as integrais no espaço real. Além dessa implementação, por ser necessário realizar a evolução, através do cálculo de duas integrais, de cada passo no tempo para cada ponto do perfil de densidade radial e cujos valores considerados são altos, foi necessário ajustar alguns parâmetros como o tamanho dos passos no tempo e a escolha dos pontos de onde calcular o perfil.

Devido a instabilidades numéricas, a estratégia que usamos nesta tese é que em nosso caso o colapso será determinado quando a casca mais interna ($r = 0$) possuir um contraste de densidade não linear $\delta_c = 200$, um valor já utilizado tanto no contexto de simulações como de observações e que apresenta consonância com o fit de funções de massa em simulações de N-corpos - ver [118].

A cosmologia aplicada ao longo do estudo da evolução da perturbação de densidade daqui em diante, salvo alguma exceção indicada, será $\Omega_m = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$, $\sigma_8 = 0.86$ e $n_s = 0.96$.

6.2 Perfil Inicial

Com o objetivo de descrever a evolução do perfil de densidade foi considerado $z_i = 500$, pois nesse momento os modelos de gravidade modificada e o modelo padrão são indistinguíveis, até o momento do colapso a pesquisa apresentada nessa tese seguiu a implementação realizada em [50]. Primeiramente utilizamos como perfil inicial um perfil do tipo top-hat caracterizado por uma amplitude $\delta_{i,0}$ e raio r_b , entretanto a evolução

do mesmo apresentou uma anomalia; o crescimento de uma sobredensidade próximo as bordas, mesmo antes de atingir o colapso. O passo seguinte foi propor um outro perfil inicial cuja evolução não apresentasse esse comportamento. Para este fim implementou-se dois tipos de perfis, o primeiro escolhido foi uma função do tipo Tangente-hiperbólica (Tanh), caracterizada pelo raio característico de uma estrutura tipo top-hat r_b e pela inclinação da transição s entre a região delimitada pelo perfil a densidade média do campo de fundo, tal que quando $s \rightarrow 0$ o perfil top-hat é restaurado. Por essa razão buscou-se um valor de s que fosse pequeno o suficiente para se aproximar de um perfil top-hat mas grande o bastante para não gerar acúmulo de matéria fora do centro antes de colapso. Após alguns testes definimos como valor padrão $s = 0.4$, entretanto, durante o desenvolvimento desta pesquisa foi investigado o efeito da variação do parâmetro s sobre os resultados obtidos calculando-os para $s = 0.8$ nas seções seguintes. O perfil Tanh é escrito como:

$$\delta_i(r) = \frac{\delta_{i,0}}{2} \left[1 - \tanh \left(\frac{r/r_b - 1}{s} \right) \right]. \quad (6.6)$$

A massa dentro do perfil é caracterizada, com boa aproximação, por $M_b = (4\pi/3)\bar{\rho}_0 r_b^3$, uma vez que a contribuição extra de $\delta(r)$ para a densidade média da região esférica é insignificante no momento inicial.

Seguindo a metodologia desenvolvida em [50], o segundo perfil utilizado foi desenvolvido em [119]. Este perfil é um perfil de densidade média físico (Phy, do inglês) em torno de pico de densidade gaussiana de altura $\nu \equiv \delta_{i,0}/\sigma_i(R)$:

$$\delta_i(r, R) = \langle \delta(z_i, \mathbf{x}, R) | peak, \nu \rangle \quad (6.7)$$

onde $\delta(z_i, \mathbf{x}, R)$ é um campo aleatório Gaussiano dado pela convolução, no espaço de Fourier, entre um perfil primordial $\delta_0(k, R)$, com uma função janela tipo top-hat $W(kR)$ e com a função de transferência da matéria. O perfil $\delta_0(k, R)$ é dado por [50]:

$$\delta_0(k, R) = \delta_{i,0} \frac{1}{4} \pi (n_s + 5) R^3 e^{-k^2 R^2} (kR)^{n_s} \cdot F(\nu, n_s, k, R), \quad (6.8)$$

onde n_s é o índice espectral e a expressão para a função $F(\nu, n_s, k, R)$ é apresentada no

Apêndice A. Para mais detalhes a respeito da construção desse perfil inicial sugerimos ver o apêndice C em [50]. É importante destacar que este perfil é a média entre muitos perfis de densidade em torno de picos do campo de densidade, obtidos de uma realização gaussiana. Tanto para cálculo do perfil inicial como para obter outros resultados, foi necessário gerar o espectro de potência em $z = 500$ tanto em Λ CDM como em gravidade modificada através do código numérico MGCAMB [86, 120].

6.3 Propriedades do Colapso esférico em $f(R)$

Tal como descrito na seção 4.1.3, o momento de turnaround é definido pela condição de que a velocidade seja nula $\dot{r}|_{a_t} = 0$, a qual leva a equação para o fator de escala nesse instante

$$\frac{3}{a_t} (\delta_t + 1) = \delta'_t. \quad (6.9)$$

e com a_t podemos obter o contraste de densidade no momento de turnaround, porém, no caso presente é preciso definir em qual posição o contraste de densidade será calculado. Após alguns testes e seguindo a proposta de [50], escolheu-se usar a casca mais interna $\delta_t = \delta(a_t, r = 0)$.

O próximo estágio na evolução da estrutura é o seu colapso, o qual ocorre em a_c . Este momento, diferentemente do caso Λ CDM em 4.1.3, é definido como sendo o momento em que $\delta_c = 200$. O que foi necessário devido a instabilidades numéricas. Estudos com simulações de N-corpos e testes que desenvolvemos demonstram ser esse valor um bom parâmetro para o contraste de densidade linear δ_c . Além disso, uma vez que o foco de nosso estudo é o momento de turnaround, o valor desse parâmetro não afeta substancialmente nosso resultado, mas serve como um teste de consistência. Quanto ao estágio de virialização, não efetuaremos uma avaliação da sobredensidade no momento da virialização Δ_v , pois este valor é escolhido segundo a conveniência de cada proposta de investigação. Para o caso desta tese, será considerado daqui em diante $\Delta_v \approx 200$.

6.4 Limite de Campo Fraco e Limite de Campo Forte

No fim da seção 5.2 foi demonstrado que os efeitos da modificação na teoria de gravidade podem ser parametrizados através de dois limites: o limite de campo fraco $\epsilon = 0$, onde não há qualquer efeito sobre G , portanto a descrição é a mesma daquela presente no modelo Λ CDM e o limite de campo forte $\epsilon = 1/3$, o qual maximiza o efeito de $f(R)$ sobre a força de gravidade, evidenciando a existência da quinta força. De forma resumida, pode-se descrever o efeito da modificação na gravidade como um aumento de $1/3$ na força de gravidade. É importante notar que em ambos os limites a aproximação *top-hat* é conservada, o que demonstra que tais efeitos independem da escala e massa consideradas.

Em uma primeira análise dos efeitos da GM no modelo de colapso esférico deve-se observar o efeito sobre a evolução do contraste de densidade não-linear δ_{nl} . Esse efeito pode ser observado no gráfico 6.1. O aumento da força de gravidade em um fator de $1/3$

Figura 6.1: Evolução do contraste de densidade não-linear nos regimes para limite de campo fraco (vermelha-contínua) e limite de campo forte (azul-tracejada) para uma estrutura cujas condições iniciais gerariam um colapso hoje $a = 1.0$ no limite de campo fraco.

acelera a agregação de massa, ocasionando um adiantamento do colapso. Portanto, ao observar as estruturas em redshift z cada vez maiores era de se esperar, caso o modelo de gravidade $f(R)$ seja aquele que corresponda à realidade, que o número de estruturas que

estejam em processo de colapso seja maior do que aquele previsto pelo modelo Λ CDM, como foi de fato constatado através de simulações no trabalho [91].

Os efeitos da modificação na gravidade podem também ser expressos pelos valores de a_c , a_t , δ_t e δ_c , para estruturas que colapsam ou atingem o turnaround em $a = 1$ ($z = 0$). Estes valores são observados na tabela 6.1 para estruturas de massa $M \approx 10^{14} h^{-1} M_\odot$ para o perfil Tanh com $s = 0.4$ e para o perfil Phy. Além dos valores destas propriedades, também estão as diferenças relativas Δ_{rel} entre os valores obtidos com respeito àquele calculado para $\epsilon = 0$.

Através dos resultados mostrados na tabela 6.1 podemos notar que o contraste de densidade linear no momento do colapso δ_c é aumentado por $\sim 1.0\%$. Por outro lado, o contraste de densidade no momento de turnaround, δ_t , diminui em $\sim 20\%$, em ambos os perfis.

Tanh(s=0.4)/Phy	a_c	a_t	δ_t	δ_c
$\epsilon = 0$	1.0	0.609/0.609	6.1025/6.1104	1.598/1.598
$\epsilon = 1/3$	1.0	0.614/0.613	4.930/4.928	1.609/1.609
Δ_{rel}	—	—	0.192/0.194	0.0069/0.0069
$\epsilon = 0$	1.810/1.811	1.0	10.912/10.912	1.586/1.586
$\epsilon = 1/3$	1.822/1.824	1.0	8.641/8.647	1.597/1.598
Δ_{rel}	—	—	0.208/0.208	0.0068/0.0076

Tabela 6.1: Valores obtidos numericamente para os parâmetros do modelo do colapso esférico a_c , a_t , δ_t e δ_c para os dois limites, campo fraco $\epsilon = 0$ e campo forte $\epsilon = 1/3$, para estruturas de $M \approx 10^{14} h^{-1} M_\odot$ cujo o turnaround e colapso ocorra em $a = 1$ ($z = 0$), para o perfil Tanh com $s = 0.4$ e para o perfil Phy. Δ_{rel} representa a diferença relativa entre os valores obtidos com respeito aquele calculado para $\epsilon = 0$.

O resultado apresentado até aqui demonstrou os efeitos do aumento da interação gravitacional sobre uma estrutura que venha a colapsar ou alcance seu tamanho máximo hoje, contudo, é necessário compreender a forma como tais efeitos são influenciados por uma mudança nesses momentos. Para obter tal comportamento basta alterar as condições iniciais, fazendo com que o turnaround e colapso ocorram cada vez mais cedo. Reunindo os resultados para cada uma das propriedades do colapso esférico é possível construir um gráfico que demonstra como seus valores são alterados para diferentes momentos de turnaround/colapso. Estes resultados podem ser vistos através das figuras 6.2 e 6.3. Além

Figura 6.2: Densidade linear crítica δ_c de estruturas com massas $M = 10^{14} h^{-1} M_\odot$ que colapsam em diferentes momentos, para o limite de campo fraco ($\epsilon = 0$, linha preta-tracejada) e de campo forte ($\epsilon = 1/3$, azul), para os perfis Tanh (esquerda) e Phy (direita). A baixo é apresentado a diferença relativa entre os valores em cada limite

desta “evolução” dos valores de δ_c e δ_t para ambos os perfis, também são apresentados, embaixo de cada gráfico, os respectivos valores da diferença relativa entre os valores para cada um dos limites, campo fraco e campo forte, e o valor no campo fraco, o qual corresponde a inexistência de efeitos de modificação na gravidade. As pequenas ondulações observadas nesses gráficos e nos subsequentes surgem devido a discretização de nossa integração numérica mas não afetam o comportamento médio dos parâmetros.

Pode ser observado na figura 6.2 que δ_c é maior, até $\sim 1.0\%$, quando $\epsilon = 1/3$ em $z_c = 0$. Como já explicado antes, isso decorre do aumento na força de gravidade, por um fator de $1/3$, que leva a uma maior agregação de matéria. Os resultados para ambos os perfis são muito similares, como deveria ser em vista de o teorema de Birkhoff ser conservado nesses limites, e qualquer diferença deve-se a efeitos numéricos. A figura B.1 do apêndice B apresenta a evolução dos perfis Tanh e Phy para os limites de campo forte e fraco normalizados pela densidade central.

Figura 6.3: Contraste de densidade não-linear no turanorund, δ_t , para estruturas com massas $M = 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$, as quais atingem o turnaround em momentos diferentes. As legendas são as mesmas que na Fig. 6.2.

Em relação ao δ_t nota-se que seus valores são mais sensíveis a efeitos da força extra, pois sua diferença relativa é bem maior em um mesmo intervalo de z , chegando a ser de $\sim 21\%$ em redshifts próximos. Outra informação interessante é que δ_t diminui no caso em que há força extra, comparado com o caso em que não há alteração na gravidade (limite de campo fraco). Isso se dá em virtude de que no limite de campo forte para que uma estrutura colapse no mesmo momento de outra semelhante que não sofre efeitos de força extra, é necessário que aquela deva possuir uma perturbação inicial menor do que essa, de forma que, para diferentes momentos de colapso, o $\delta_t(\epsilon = 1/3)$ será sempre menor do que o $\delta_t(\epsilon = 0)$, como demonstrado na figura 6.4.

6.5 Efeitos de $f(R)$ no colapso

Até agora as propriedades do colapso esférico foram calculadas apenas no contexto dos limites de campo forte e fraco, caracterizados por $\epsilon = 1/3$ e $\epsilon = 0$, respectivamente.

Figura 6.4: Evolução do contraste de densidade nos regimes linear (vermelha) e não-linear (zul) para estruturas cujas condições iniciais geram um colapso hoje $a = 1.0$ nos limites de campo forte $\epsilon = 1/3$ e de campo fraco $\epsilon = 0$

Entretanto, os efeitos de GM sobre o colapso esférico em diferentes escalas mudam com o tempo $\epsilon = \epsilon(k, a)$.

Quando incluímos a dependência com a escala e com o tempo a solução da Eq. (6.5) tornar-se mais complexa, como já dito anteriormente, pois requererá o cálculo de transformadas de Fourier a cada passo no tempo. De outra forma, cada escala irá ser afetada por todas as outras escalas, comportamento não observado na solução do modelo de colapso esférico padrão. A abordagem desenvolvida aqui foi baseada em [36] no contexto do modelo de colapso esférico em GM através da implementação dos perfis propostos em [50]. Deste modo, a dependência de δ_c e δ_t com o parâmetro $|f_{R0}|$, o qual descreve a intensidade do campo escalar f_R hoje, e deste modo o campo gravitacional, deve ser explorada junto com a dependência com a massa, uma vez o que o teorema de Birkhoff não se aplica a GM.

Para $|f_{R0}|$, os valores escolhidos foram 10^{-4} , 10^{-5} e 10^{-6} por eles cobrirem os intervalos de valores usualmente testados em modelos de GM. Quanto a massa, o intervalo considerado foi $10^{11} M_{\odot} h^{-1} < M < 10^{16} M_{\odot} h^{-1}$, o qual inclui as estruturas de interesse no

universo próximo. É importante notar que neste intervalo de massa deveríamos esperar efeitos devido ao mecanismo camaleão, porém, em vista da aproximação linear que fora usada e que a sobredensidade no momento do turnaround é da ordem da unidade, tal efeito não é considerado.

6.5.1 Dependência de δ_c com o tempo

A figura 6.5 mostra δ_c para os parâmetros de GM: $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul), $\epsilon = 0$ (preto) e $\epsilon = 1/3$ (cinza). Para o perfil Tanh, a esquerda, nós também estudamos o efeito de como a forma do perfil afeta o turnaround e o colapso através de dois valores para a inclinação $s = 0.4$ (linha sólida) e $s = 0.8$ (linha pontilhada).

Um primeiro efeito observado neste trabalho, e também notado em [36, 37, 49, 50] é que os valores de δ_c estão abaixo do limite de campo fraco. Esse comportamento demonstra que, ao considerar a dependência temporal e espacial em $\epsilon(a, k)$, nós somos capazes de identificar efeitos que são suprimidos quando considerados os dois limites extremos descritos anteriormente. Como será demonstrado na próxima seção, o contraste de densidade no momento de turnaround não apresenta essa violação dos limites, o que indica que a origem de tal efeito deve-se a extrapolação da equação para δ (6.5) em sua versão linearizada desde as condições iniciais até o momento do colapso, o que não é realizado para o caso de δ_t .

Além disso, a diferença relativa de δ_c em GM com respeito a Λ CDM atinge um máximo de $\sim 3.0\%$ para $|f_{R0}| = 10^{-5}$ com $s = 0.4$, enquanto que para $|f_{R0}| = 10^{-6}$ ele não excede $\sim 2.7\%$. Também foi observado que a influência da inclinação é maior em $z \sim 0$ para $|f_{R0}| = 10^{-4}$, alcançando $\sim 2.0\%$ para $s = 0.8$, e menor para $|f_{R0}| = 10^{-6}$, quando a variação relativa é no máximo $\sim 2.5\%$ com $s = 0.8$.

Outra manifestação da modificação na teoria de gravidade apresenta-se no fato de as curvas na figura 6.5 cruzarem-se umas com as outras. Esse efeito pode ser entendido como o resultado da relação dinâmica entre o comprimento de onda de Compton do campo escalar λ_c que depende tanto de f_{R0} , como do tempo e do tamanho das perturbações. O

efeito em δ_c depende da relação entre a escala de comprimento e do tempo em consideração.

Figura 6.5: Painéis superiores da esquerda pra direita: valores de δ_c para os perfis Tanh e Phy, respectivamente, for $0 < z < 3$, e para os parâmetros de GM $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul) Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto) e $\epsilon = 1/3$ (cinza). O perfil Tanh com inclinações $s = 0.8$ (linhas pontilhadas) e $s = 0.8$ (linhas sólidas). Painel inferior: diferença relativa entre os valores apresentados nos painéis superiores com respeito aos valores em Λ CDM.

6.5.2 Dependência de δ_c com a massa

Outra característica de δ_c é a sua dependência com a massa, cujos resultados de nossa investigação são apresentados em 6.6. A sensibilidade aos efeitos de GM alteram os valores desta propriedade em $\sim 2.7\%$, o que conduz a $\delta_c \sim 1.55$, para escalas de massa de $\sim 2 \times 10^{13} M_\odot h^{-1}$ quando $|f_{R0}| = 10^{-6}$, $M \sim 5 \times 10^{15} M_\odot h^{-1}$ para $|f_{R0}| = 10^{-5}$, e

$M \gtrsim 5 \times 10^{15} M_{\odot} h^{-1}$ com $|f_{R0}| = 10^{-4}$. Esse valor mínimo demonstra não depender de s . E não é coincidentemente que as massas no interior de um volume esférico cujo raio corresponde ao comprimento de onda de Compton do campo escalar é $\sim 1.2 \times 10^{13} M_{\odot} h^{-1}$ quando $|f_{R0}| = 10^{-6}$, $\sim 3.8 \times 10^{14} M_{\odot} h^{-1}$ quando $|f_{R0}| = 10^{-5}$, e $\sim 1.2 \times 10^{16} M_{\odot} h^{-1}$ quando $|f_{R0}| = 10^{-4}$. Uma vez que a influência da GM é máxima quando essa escala de massa é próxima a massa do halo essas escalas determinarão o ponto de inversão da figura 6.6. Além disso, esses gráficos também mostram como a variação da inclinação s do perfil impacta em δ_c , com efeitos maiores aparecendo para perfis mais suaves ($s = 0.8$). Esse efeito é também uma consequência da dependência com a escala da força oriunda da GM e da concentração do perfil inicial. Tal como na seção anterior, o limite de campo fraco é violado. Vale ressaltar que as oscilações observadas nos gráficos são causadas por erros numéricos cuja solução completa inviabilizaria a obtenção dos resultados pretendidos.

6.6 Efeitos de $f(R)$ no turnaround

Esta seção objetiva apresentar os efeitos de propormos uma teoria de gravidade modificada segundo a proposta de Hu & Sawicki sobre o contraste de densidade não linear no momento em que a perturbação, após se expandir com o fluxo de Hubble, atinge o seu tamanho máximo. Diferentemente da seção anterior, após determinar o momento em que isso ocorre através da equação (6.9), esse tempo a_t é aplicado sobre a solução da equação não-linear(6.5).

6.6.1 Dependência de δ_t com o tempo

O contraste de densidade δ_t em função do tempo descrito na figura 6.7 é menor quando comparado aos valores obtidos em Λ CDM por aproximadamente $\sim 20\%$, $\sim 18\%$ e $\sim 10\%$ para $|f_{R0}| = 10^{-4}$, $|f_{R0}| = 10^{-5}$ e $|f_{R0}| = 10^{-6}$, respectivamente, em $z \simeq 0$. Entretanto, diferentemente de δ_c , o limite de campo fraco não é ultrapassado e há uma considerável consistência das densidades no turnaround entre os perfis estudados.

Todavia os efeitos em δ_t de modificar a gravidade são levemente diferentes para diferentes valores de s e se tornam mais acentuados para maiores valores de $|f_{R0}|$. Outro

Figura 6.6: Painéis superiores da esquerda pra direita: valores de δ_c para os perfis Tanh e Phy, respectivamente, como uma função da massa. As legendas são idênticas àquelas da Fig. 6.5.

fato fundamental é que a diferença relativa ao modelo padrão aumenta para redshifts menores. Portanto, os efeitos sobre o turnaround são mais acentuados em épocas recentes. Esses resultados mostram a sensibilidade de observáveis relacionados a δ_t e que por essa razão devem ser explorados com o objetivo de distinguir entre modelos de GM e o modelo Λ CDM.

6.6.2 Dependência de δ_t com a massa

A dependência de δ_t com a massa é apresentada na figura 6.8. A sensibilidade quanto aos parâmetros de GM é maior para os menores valores de massa considerados, sendo que todos os valores de $|f_{R0}|$ se aproximam do limite de campo forte, o qual é cerca de $\sim 20\%$

Figura 6.7: Gráficos superiores: Contraste de densidade não-linear no turnaround, para os perfis Tanh (esquerda) e Phy (direita), em $0 < z < 3$. Gráficos inferiores: diferença relativa entre os valores apresentados nos painéis superiores com respeito aos valores em Λ CDM.

menor do que o valor de Λ CDM, para essas massas. Esses gráficos também demonstram que a inclinação do perfil inicial tem um efeito maior para massas maiores e as maiores diferenças com respeito a Λ CDM ocorrem quando $s = 0.4$.

Figura 6.8: Contraste de densidade no turaround como uma função da massa, para os perfis Tanh (esquerda) e Phy (direita).

Capítulo 7

Raio de Turnaround (R_t) em $f(R)$

Através dos resultados apresentados anteriormente foi possível obter uma importante informação: o momento em que a estrutura atinge sua expansão máxima, conhecido como turnaround, é sensível a mudanças na teoria da gravidade. Nós temos definido R_t como o raio da casca esférica em torno de uma estrutura que separa os objetos que caem em direção ao centro daqueles que seguem o fluxo de Hubble. Observacionalmente, o raio de turnaround delimita uma superfície esférica caracterizada por $\dot{r} = 0$. Na prática, a formação hierárquica das estruturas implica que o turnaround vai ocorrendo de escalas menores para escalas maiores, com frequência longe de ter uma simetria esférica e em regiões que incluem estruturas menores (sub-halos).

Entretanto, a despeito destas limitações do modelo de colapso esférico, o raio de turnaround tem sido proposto como uma ferramenta útil para testar modelos cosmológicos [9, 53–55], incluindo testes de modelo de gravidade modificada como DGP [121]. Contudo, esse trabalhos tem focado principalmente no que é chamado de *Raio de Turnaround Máximo* ($R_{t,max} = \left(\frac{3GM}{\Lambda c^2}\right)^{1/3}$) - o tamanho da superfície onde a aceleração é nula, $\ddot{r} = 0$, a qual corresponde a um limite superior para o valor do raio de turnaround. Nesse contexto que Capozziello et al. [122] recentemente encontraram uma expressão para $R_{t,max}$ para qualquer modelo $f(R)$, incluindo condições para a viabilidade para esta classe de modelos de GM. Da perspectiva observacional, Lee et al. 2015 [56] estimou um raio de turnaround para o grupo de galáxias NGC 5353/4 o qual se apresentou como violando o valor máximo para o R_t permitido para o modelo Λ CDM. Em outro trabalho mais recente

Lee [123] mediu R_t para outros 6 grupos de galáxias e encontrou que 3 deles apresentavam um valor do raio de turnaround que violava o limite máximo estabelecido pelo modelo padrão.

A principal motivação para o desenvolvimento desta investigação é a real possibilidade de que medidas do R_t de estruturas poderiam ser usadas como um meio para distinguir entre o modelo $f(R)$ em questão nesta tese e o modelo Λ CDM. Tais observações proveem medidas locais da força de gravidade como função tanto do tempo como da massa em regiões de menor densidade, $\delta \approx 10$, onde o mecanismo camaleão deve ter um efeito muito menor. Além disso, com o objetivo de comparar somente os efeitos de GM no crescimento das estruturas, nós implementamos um modelo onde a evolução do campo de fundo é idêntica àquela do modelo Λ CDM. Portanto, todos os resultados apresentados aqui que se desviam do modelo cosmológico padrão são devido a modificações na lei da gravidade e não em diferentes equações de estado para a evolução do campo de fundo.

7.1 R_t como dependente do tempo

No capítulo anterior vimos que as propriedades do turnaround e colapso das estruturas cósmicas são sensíveis às modificações de gravidade introduzidas no modelo $f(R)$ de Hu-Sawicki. Na figura 7.1 é apresentado o raio de turnaround como uma função do redshift no intervalo $0 < z < 3$, para estruturas com massa $M \sim 10^{14} h^{-1} M_\odot$ e para os casos considerados: o limite de campo forte ($\epsilon = 1/3$), $|f_{R0}| = 10^{-4}$, 10^{-5} , 10^{-6} e o limite de campo fraco 0. Tal como antes, os resultados são apresentados para ambos os perfis iniciais, Tanh (painel da esquerda), com dois valores de inclinação $s = 0.8$ (linha pontilhada) and $s = 0.4$ (linha contínua), e Phy (painel da direita).

Uma vez que a densidade de uma estrutura esfericamente simétrica com uma massa interna constante pode ser escrita como $\rho_m(a) = 3M/4\pi R^3(a)$, o raio de turnaround físico pode ser expresso como:

$$R_t(a, M) = \left[\frac{3}{4\pi\Omega_{m0}\rho_c[1 + \delta_t(a, M)]} \right]^{1/3} a M^{1/3}, \quad (7.1)$$

onde foi usada $\rho_m(a) = \bar{\rho}_m(a)[1 + \delta(a, M)]$, com $\bar{\rho}(a) = \rho_{m0} a^{-3}$ e $\rho_c = 2.77 h^2 M_\odot \text{Mpc}^{-3}$. O raio de turnaround $R_t(a, M)$ representa o raio de uma casca esférica cuja massa interna é M , e cujo contraste de densidade $\delta_t(a, M)$ é o contraste de densidade quando a primeira casca, próxima ao centro do perfil, alcança sua expansão máxima. Este momento corresponde a um fator de escala a_t , tal que usamos a seguinte notação $R(a_t, M) \rightarrow R_t(a, M)$, analogamente $\delta(a_t, M) \rightarrow \delta_t(a, M)$.

Nos painéis superiores da figura 7.1 pode se observar que o tamanho máximo dessas estruturas é sempre maior no limite de campo fraco (ΛCDM). Isso pode ser explicado como um aumento na intensidade na força gravitacional, a qual leva ao alcance maior da gravidade. Contudo, como aconteceu com δ_t , esta mudança está confinada entre os casos limites de campo forte e fraco. Na parte inferior são expostas as diferenças relativas entre os valores para os raios de turnaround com e sem as modificações na gravidade. As maiores diferenças ocorrem em $z = 0$, onde ΔR_t é aproximadamente 7.0%, $\sim 6.0\%$ e $\sim 3.0\%$ maior que os valores em ΛCDM para $|f_{R0}| = 10^{-4}$, $|f_{R0}| = 10^{-5}$ e $|f_{R0}| = 10^{-6}$, respectivamente. Outro interessante resultado é que se diminuirmos a inclinação do perfil, aumentando s , obtemos um aumento para R_t .

Deste modo, a principal conclusão que podemos tirar até agora com esses gráficos é que medidas do raio de turnaround que alcance precisão de $\mathcal{O}(5 - 10\%)$ em $z \sim 0$ podem ser usadas para um teste do modelo de Hu-Sawicki.

7.2 R_t como dependente da massa

Uma forma muito útil é expressar o raio de turnaround através da relação entre R_t e a massa da estrutura M interna a esse raio, tal como em [9, 53]. Com o objetivo de estudar os efeitos da dependência com a massa e intensidade dos parâmetros de gravidade modificada, nós reunimos os dados obtidos nos gráficos da figura 7.2 para o intervalo de massas $10^{11} h^{-1} M_\odot < M < 10^{16} h^{-1} M_\odot$, para estruturas cujo turnaround é atingido hoje em $z \simeq 0$. Como antes, os valores dos parâmetros de GM considerados foram $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul), $\epsilon = 0$ (preto), o limite de campo

Figura 7.1: Raio de turnaround como uma função do redshift para estruturas com massa de $M = 10^{14} h^{-1} M_\odot$, para os perfis iniciais Tanh (esquerda) e Phy (direita).

fraco, e $\epsilon = 1/3$ (limite de campo forte - cinza), ambos para os perfis Tanh (esquerda) com inclinação $s = 0.8$ (pontilhado) e $s = 0.4$ (contínuo), e Phy (painéis da direita).

A figura 7.2 mostra que o aumento em R_t é maior para massas menores, em todos os valores dos parâmetros de GM considerados neste trabalho. Para massas menores, correspondendo a $M \simeq 10^{12} h^{-1} M_\odot$, os desvios de R_t chegam a $\sim 7\%$ com relação aos valores em gravidade padrão, para todos os valores de $|f_{R0}|$ em ambos os perfis. Quanto a dependência com a inclinação do perfil inicial, o raio de turnaround é maior para maiores valores de s , mas nunca excede $\sim 7\%$ do valor padrão. Por esta razão, observações de estruturas com massa de $\sim 10^{12} h^{-1} M_\odot$ a $\sim 10^{14} h^{-1} M_\odot$, que alcancem uma precisão de

4 – 8%, ou melhor, podem servir como um teste do modelo de GM considerado aqui.

Figura 7.2: PaineL Superior: raio de turnaround R_t para massas no intervalo $10^{11} h^{-1} M_\odot < M < 10^{16} h^{-1} M_\odot$, para os perfis Phy (esquerda) e Tanh (direita) para estruturas com turnaround hoje. As convenções para cores e linhas são as mesmas das figuras anteriores.

7.3 Relação entre o raio de turnaround e a massa de virial no modelo $f(R)$

Os resultados presentes neste capítulo e em parte do capítulo seguinte foram publicados no artigo “**Relation between the Turnaround radius and virial mass in $f(R)$ model**” [58]. Na seção anterior foi apresentado os efeitos advindos da proposta de GM

aqui estudada sobre o raio de turnaround. Através dos gráficos foi demonstrado como a dependência de R_t com o redshift z e com a massa são afetadas. Entretanto, para fins de comparação com dados observacionais, é fundamental que tanto o raio de turnaround como a massa interna a casca esférica determinada por esse raio de turnaround, a qual chamaremos de massa de turnaround M_t , sejam determinados de forma independente. Contudo, a relação R_t e M_t é muito difícil de medir, especialmente medidas diretas de M_t parecem inatingíveis. Sabendo que o processo de colapso acontece casca por casca: em cada momento em que cascas mais internas estão próximas da virialização, uma casca externa estará experimentando o turnaround. De fato, para qualquer estrutura onde se detecta o local e o tempo do turnaround, a massa que pode ser mais facilmente observada não será M_t , mas a massa da região que está mais próxima da virialização. Daqui em diante caracterizaremos essa massa virializada M_v em termos de uma certa densidade de Δ vezes a densidade do campo de fundo – e nesse contexto seguiremos a literatura, fazendo $\Delta = 200$. Desta forma, o objetivo que seguimos daqui em diante é fazer uma conexão entre os cálculos realizados em Λ CDM e GM e as observações reais de estruturas cósmicas, através de uma relação do raio de turnaround R_t com a massa de virial M_v . Segundo essa abordagem, podemos reescrever a equação (7.1) de forma a explicitar as dependências com a massa de virial, tal que:

$$R_t(a, M_v) = a \left[\frac{3M_t(R_t, M_v)}{4\pi\Omega_{m0}\rho_c(1 + \delta_t[a, M_t(R_t, M_v)])} \right]^{1/3}. \quad (7.2)$$

7.3.1 Raios de turnaround e as massas das estruturas

Segundo o Modelo de Colapso Esférico a formação de estruturas gravitacionais ocorre casca por casca, com cada casca alcançando o turnaround e, subsequentemente, o colapso [81]. Embora na RG cada casca evolui independentemente, devido ao Teorema de Birkhoff, ver seção 2.7.1, isso não é mais verdade no contexto da GM, uma vez que esse teorema não é mais válido [124]. Portanto, o comportamento de cada casca será afetado por todas as outras, como mostrado em [36, 49, 50, 125]. Afim de relacionar a casca próxima a virialização e a casca em turnaround nós podemos, partir da Eq. (7.2), escrever a razão

M_t/M_v como

$$\frac{M_t}{M_v} = \left(\frac{R_t}{R_v} \right)^3 \left(\frac{1 + \delta_t(a_t, M_t)}{\Delta} \right). \quad (7.3)$$

Partindo de um perfil tipo top-hat, as referências [126, 127] apresentaram uma expressão para R_t/R_v , todavia nesses trabalhos a dependência com a massa, ou com o raio, não foi considerada.

Com o objetivo de relacionar a massa de turnaround com a massa de virial de sistemas auto-gravitantes, podemos partir da concepção de que as regiões centrais das estruturas são bem aproximadas pelo perfil de densidade NFW, ver seção 4.2.1, enquanto que as regiões mais externas podem ser caracterizadas pelo termo de 2-halos (2h), ver 4.2.3.. Nesse contexto, a massa de turnaround pode ser expressa como uma função da massa do virial por

$$M_t = 4\pi \int_0^{R_t} dr r^2 [\rho_{NFW}(r|M_v) + \rho_{2h}(r|M_v)], \quad (7.4)$$

ou, aplicando as Eqs. (4.53)-(4.72),

$$\begin{aligned} M_t = 4\pi\rho_s \left[\frac{R_v}{c(z, M_v)} \right]^3 & \left\{ \ln \left[1 + c(z, M_v) \frac{R_t}{R_v} \right] - \frac{c(z, M_v) \frac{R_t}{R_v}}{c(z, M_v) \frac{R_t}{R_v} + 1} \right\} \\ & + 4\pi\bar{\rho}_m b^L(M_v) \int_0^{R_t} dr r^2 \xi_m^L(r). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Considerando que a massa de virial da estrutura pode ser calculada através de (4.53), nós podemos reescrever a normalização ρ_s , em termos de da massa de virial, tal que a massa de turnaround é

$$\begin{aligned} M_t = M_v & \left\{ \frac{\ln \left[1 + c(z, M_v) \frac{R_t}{R_v} \right] - \frac{c(z, M_v) \frac{R_t}{R_v}}{c(z, M_v) \frac{R_t}{R_v} + 1}}{\ln [1 + c(z, M_v)] - \frac{c(z, M_v)}{c(z, M_v) + 1}} \right\} + \\ & + \frac{2}{\pi} \Omega_{m0} \rho_{cr0} b^L(M_v) R_t \int_0^\infty dk \left[\frac{\sin(kR_t)}{kR_t} - \cos(kR_t) \right] P(k). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Combinando essa equação com a Eq. (7.2), é possível encontrar R_t/R_v para cada massa do virial M_v . Além disso, através da equação (7.3) podemos expressar M_t em termos de M_v .

7.3.2 Razão entre o Raio de Turnaround e o Raio de Virial

Como previamente estabelecido, em nossa metodologia consideramos a sobredensidade de $\Delta = 200$, comumente utilizada na prática observacional. A Fig. 7.3 mostra como R_t/R_v depende da massa M_v para os perfis iniciais Tanh (a esquerda) e Phy (a direita), para massas variando de $10^{12}h^{-1}M_\odot$ (pequenos grupos de galáxias) para $10^{15}h^{-1}M_\odot$ (aglomerados massivos), os quais incluem a maioria das estruturas de interesse. Nosso foco estará em estruturas com massas de $10^{13}h^{-1}M_\odot$ (grupos de galáxias) porque elas, a princípio, são mais sensíveis a estudos dos efeitos no raio de Turnaround [54]: de fato, testes relacionados ao turnaround são mais sensíveis em pequenas escalas, onde os efeitos de GM são amplificados, porém, é necessário que consideramos estruturas cujo turnaround pode ser determinado com boa precisão, o qual é alcançado através de pequenos grupos de galáxias [54].

Para a obtenção dos dados da Fig. 7.3, foram usados os seguintes valores para os parâmetros de GM, $f_{R0} = 10^{-6}$ (azul), $f_{R0} = 10^{-5}$ (vermelho), $f_{R0} = 10^{-4}$ (laranja), bem como modelo Λ CDM ($f_{R0} \rightarrow 0$, ou $\epsilon \rightarrow 0$ – preto). No caso do perfil inicial Tanh usamos os valores para a inclinação de $s = 0.4$ (linhas contínuas) and $s = 0.8$ (linhas pontilhadas), mas o comportamento em ambos os casos é muito similar ao obtido através do perfil inicial físico Phy. A razão R_t/R_v aumenta para pequenas massas, e é maior em GM comparado com Λ CDM – para a escala de massa de referência $M = 10^{13}h^{-1}M_\odot$, $R_t = 4.1R_v$ para $f_{R0} = 10^{-6}$, e $R_t = 3.7R_v$ para Λ CDM.

Interessantemente, nós obtivemos valores para R_t/R_v que concordam com as medidas da Ref. [128]. Esse autores estimaram o raio da superfície de velocidade zero, R_t , através dos dados de distâncias e velocidades radiais das galáxias no Grupo Local, e para um empilhamento de 14 grupos próximos, mostrando que $R_t \approx (3 - 4)R_v$. Contudo, precisamos de observações mais precisas se desejamos distinguir Λ CDM do modelo de GM considerado em nosso trabalho.

Na parte inferior da Fig. 7.3, são plotados as diferenças relativas de razão entre os raios como função da massa do virial. Mesmo para pequenos desvios da RG, $f_{R0} = 10^{-6}$,

a diferença relativa com respeito a massa em consideração $M = 10^{13} h^{-1} M_{\odot}$ é $\sim 10\%$, enquanto que para $f_{R0} = 10^{-5}$ a diferença é $\sim 18\%$. Portanto, se for possível medir o raio de turnaround e o raio de virial independentemente, com precisão de $\simeq 10\%$ nessa razão, então poderíamos usar essas medidas para vincular essa classe de modelos de GM para $f_{R0} = 10^{-6}$, o qual é um resultado muito competitivo [116].

Figura 7.3: Painéis superiores, da esquerda pra direita: razão R_t/R_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $10^{12} h^{-1} M_{\odot} < M_v < 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$, e para os parâmetros $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul), e para Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais íngreme ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para Λ CDM.

Outra interessante informação sobre R_t/R_v pode ser obtida através da figura 7.4 a qual mostra a dependência desta razão com o raio da casca próximo ao estado de virialização. Nós podemos observar que a razão atinge valores menores quando o raio de virial é $1 h^{-1} \text{Mpc}$ para Λ CDM e aumenta para maiores valores de f_{R0} , por exemplo, para $|f_{R0}| = 10^{-6}$ nós temos $R_t = 3.7 R_v$ quando $R_v = 1.5 h^{-1} \text{Mpc}$. Enquanto que a diferença relativa cresce para valores menores do raio de virial.

Figura 7.4: Painéis superiores, da esquerda pra direita: valores para R_t/R_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $0 < R_v < 2.5h^{-1}\text{Mpc}$, e para os parâmetros de GM $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul) ΛCDM , $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais íngreme ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para ΛCDM .

7.3.3 Razão entre a Massa de Turnaround e a Massa de Virial

Tal como feito para o raio de turnaround e o raio de virial, é também possível obter uma relação entre a massa de turnaround e a massa de virial usando a equação (7.3). Os resultados deste processo estão presentes na figura 7.5, onde nós podemos ver de qual maneira M_t/M_v depende da massa de virial das estruturas gravitacionais. Dentro do intervalo de massa considerado, esta razão alcança um mínimo em escalas de massa de $M \simeq 10^{13.5} h^{-1} M_\odot$ para ΛCDM ($M_t/M_v \simeq 2.9$), e em massas de $M \simeq 10^{13.8} h^{-1} M_\odot$ para $|f_{R0}| = 10^{-6}$ ($M_t/M_v \simeq 3.0$). Nós podemos notar que M_t/M_v e R_t/R_v são funções íngremes da massa do virial na extremidade inferior, comparado com a cosmologia padrão. Para estrutura de massa $M = 10^{13} h^{-1} M_\odot$ a relação é $M_t = 3.07M_v$ para ΛCDM , enquanto que para $|f_{R0}| = 10^{-6}$ ela é $M_t = 3.43M_v$. Considerando a escala de massa usada como referência, a diferença relativa com respeito a ΛCDM alcança os valores $\simeq 11\%$, $\simeq 22\%$ e

$\simeq 34\%$ para $|f_{R0}| = 10^{-6}$, $|f_{R0}| = 10^{-5}$ e $|f_{R0}| = 10^{-4}$, respectivamente.

Figura 7.5: Painéis superiores, da esquerda pra direita: razão M_t/M_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $10^{12} h^{-1} M_\odot < M_v < 10^{15} h^{-1} M_\odot$, e para os parâmetros $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul), e para ΛCDM , $\epsilon = 0$ (preto). Como nos gráficos anteriores, o perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais ingreme ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para ΛCDM .

Além da dependência com a massa do virial, outra informação útil é saber como M_t/M_v depende do raio da estrutura próxima a virialização. Esse resultado aparece na figura 7.6. Podemos concluir que se a estrutura tem $R_v = 1 h^{-1} \text{Mpc}$ a relação entre as massas será $M_t/M_v = 2.9, 3.0, 3.2$ e 3.34 , para ΛCDM , $|f_{R0}| = 10^{-6}$, $|f_{R0}| = 10^{-5}$ e $|f_{R0}| = 10^{-4}$, respectivamente. Contudo, para $R_v < 1 h^{-1} \text{Mpc}$ a razão irá ser maior. Um interessante comportamento ocorre para $R_v = 2.0 h^{-1} \text{Mpc}$, a razão para ΛCDM é maior que para GM $|f_{R0}| = 10^{-6}$. Considerando o mesmo $R_v = 1 h^{-1} \text{Mpc}$, a diferença com respeito a ΛCDM alcança somente $\simeq 3.4\%$ para $|f_{R0}| = 10^{-6}$, mas alcança $\simeq 9.7\%$ para $|f_{R0}| = 10^{-5}$ e $\simeq 14.8\%$ para $|f_{R0}| = 10^{-4}$.

Figura 7.6: Painéis superiores, da esquerda pra direita: valores para M_t/M_v para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, no intervalo $0 < R_v < 2.5h^{-1}\text{Mpc}$, e para os parâmetros de GM $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul) ΛCDM , $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais íngreme ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para ΛCDM .

7.4 Raio de Turnaround para estruturas realísticas em $f(R)$

Com o fim de viabilizar uma comparação com os dados observacionais, as variáveis mais convenientes de serem relacionadas são o raio de turnaround R_t e a massa de virial M_v . Essa relação pode ser obtida através da equação (7.2). A forma como o raio de turnaround depende da massa do virial é o resultado mais importante deste trabalho, pois ele é quem permitirá, caso seja viável, o uso destes observáveis como meio para distinção entre o modelo de GM aqui avaliado e o modelo padrão. A figura 7.7 apresenta os resultados obtidos neste trabalho para as três variações do modelo de GM estudado. Outro resultado que fora omitido nos gráficos anteriores, por questões de brevidade, mas é apresentado nesta figura é o limite de campo forte, correspondente a caso $\epsilon = 1/3$. Podemos observar que as grandes diferenças com respeito ao modelos ΛCDM são resultantes também da

diferença entre os perfis de densidade (ver apêndice D).

Os resultados obtidos aqui podem ser usados para testar o modelo estudado tanto com medidas atuais bem como comparado com simulações. De fato, analisando os painéis inferiores da figura 7.7, pode-se notar a partir da diferença com respeito a Λ CDM, para a escala de massa de $10^{13} h^{-1} M_{\odot}$, que o raio de turnaround sofre um aumento de $\simeq 9\%$, $\simeq 14\%$ e $\simeq 18\%$, para $|f_{R0}| = 10^{-6}$, $|f_{R0}| = 10^{-5}$ e $|f_{R0}| = 10^{-4}$, respectivamente.

Figura 7.7: Painéis superiores, da esquerda para direita: valores de R_t para os perfis iniciais Tanh e Phy, respectivamente, para $10^{12} h^{-1} M_{\odot} < M_v < 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$ e para os parâmetros de GM $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul) Λ CDM, $\epsilon = 0$ (preto). O perfil Tanh com uma curva suave ($s = 0.8$) é plotado como linhas pontilhadas e a curva mais ingreme ($s = 0.4$) é designada por linhas sólidas. Painéis inferiores: diferença relativa entre os valores para GM e o valor para Λ CDM.

7.4.1 Comparação com dados

A conexão entre o raio de turnaround observável (definido em termos da superfície de velocidade nula) e a massa de virial das estruturas colapsadas a qual fora deduzida previamente permite-nos comparar os resultados obtidos com os dados já presentes na literatura. Para tanto reunimos dados obtidos em diferentes conjuntos de medidas do fluxo de Hubble dentro do universo próximo apresentadas nas referências de Rines &

Diaferio 2006 [8], Pavlidou & Tomaras 2014 [9], e Lee 2017 [10].

Através da figura 7.8 apresentamos uma comparação entre os resultados teóricos desenvolvidos neste trabalho (linhas contínuas) e os dados para a massa correspondente do sistema. Seguindo o padrão usado até aqui, são apresentados os valores esperados para RG e para o modelo de Hu-Sawicki com os parâmetros de intensidade do desvio da RG f_{R0} , incluindo o caso extremo $\epsilon = 1/3$. Para fins de completeza, nós incluímos a predição teórica para raio de turnaround máximo $R_{t,max}$, o limite que pode ser derivado a partir da cosmologia padrão [129–131].

Os dados apresentados em Lee 2017 [10] são medições do fluxo de Hubble em torno de grupos do universo local com massas de $[0.3 - 1] \times 10^{14} M_{\odot}$, os quais apresentam incertezas no raio de turnaround da ordem de 25 – 50%. Tais medidas possuem uma inconsistência com o raio de turnaround em Λ CDM ou em qualquer modelo de GM considerado aqui, além de violar o limite máximo para o raio de turnaround das referências [129–131]. O mesmo ocorre com as medidas obtidas em [10], cujos raios de turnaround medidos são maiores que aqueles propostos no modelo. Os dados citados por Pavlidou & Tomaras 2014 [9] indicam raios de turnaround substancialmente menores que das predições. Por outro lado, os dados obtidos em Rines and Diaferio 2006 [8] estimam R_t para um grande número de grupos e aglomerados usando tanto um ajuste teórico quanto uma estimativa do valor “máximo” para o raio da região cáustica correspondente a velocidade peculiar nula. Com base nessa metodologia nós usamos como incerteza o intervalo entre o ajuste teórico e o valor máximo do turnaround.

Uma ponderação e cautela são necessárias nesse momento, pois tanto os dados como a teoria, não podem ser superestimados. Primeiro, sob o ponto de vista de simulações, sistemas realísticos não são esfericamente simétricos, uma suposição central em nossos resultados, nem os perfis iniciais são necessariamente bem representados pelos perfis Tanh e Phy que aplicamos. Contudo, o peso da influências desses fatores pode ser avaliado ao comparar os resultados produzidos neste trabalho com medidas de R_t em simulações de N-corpos em Λ CDM e GM. Segundo, do ponto de vista observacional, com frequência

há muitos erros sistemáticos os quais podem somente ser controlados e identificados via medidas com mais acurácia e precisão. Essas medidas devem cobrir um amplo intervalo de massa, e idealmente, deveriam focar em estruturas mais isoladas possíveis. Se alcançarmos esses aprimoramentos nas medidas, nós seremos capazes de obter incertezas com baixo percentual para sistemas empilhados em bins de massa do virial entre $10^{13} - 10^{15} h^{-1} M_{\odot}$, então estaremos em condição de impor robusto e competitivo vínculos em GM usando o raio de turnaround.

Através da investigação do raio de turnaround em simulações de N-corpos será possível também abordar uma questão de saber como esse observável se relaciona, ou se há alguma relação, como o raio de splashback R_s . Este último raio determina a transição entre o termo de 1-halo e dois 2-halo [132], enquanto o R_t expressa a escala em que o halo desacopla do campo de fundo [133]. Na literatura não é claro qual é o raio mais apropriado para caracterizar o halo, sendo R_s um bom candidato [134]. Há outros trabalhos que apresentam uma conexão entre R_s e o campo de velocidades [135] e que essa escala é alterada em diferentes teorias de gravidade e energia escura [136]. Deste modo, uma relação entre os dois raios permitirá alcançar mais informações tanto sobre o campo de velocidade como o perfil de densidade.

Figura 7.8: Predições teóricas para o raio de turnaround para Λ CDM (linha contínua pretas) e GM (linhas coloridas contínuas), incluindo o “raio de turnaround máximo” (linha contínua ciano). Os dados são obtidos das referências [8–10].

Capítulo 8

Conclusões

Esta tese investigou o cenário de gravidade modificada (GM) conhecido como modelo de $f(R)$, segundo a prescrição de Hu & Sawicki, sobre as propriedades do modelo de formação de estruturas chamado de colapso esférico. Os dois principais parâmetros que determinam a evolução dessas estruturas são o contraste de densidade no momento do turnaround, δ_t , e o contraste de densidade linear no momento do colapso, δ_c . Inicialmente consideramos os limites de campo forte e campo fraco, caracterizados por $\epsilon = 0$ e $\epsilon = 1/3$, onde o primeiro descreve um sistema tal como delineado pelo modelo cosmológico padrão, o Λ CDM, e o segundo representa um modelo no qual a gravidade é aumentada por um fator de $1/3$, resultando em um modelo cuja mudança pode ser expressa através da alteração da constante da gravitação universal para $G_{f_R} = 4/3 G$. No intervalo entre dois limites demonstramos que as propriedades do modelo de colapso esférico são afetadas pela existência de uma *quinta força*, causada pelo campo escalar introduzido pelo modelo $f(R)$, a qual intensifica a gravidade. Entretanto, os efeitos mais notórios foram registrados sobre δ_t , já que a GM causou uma alteração de $\sim 21\%$ sobre esse mesmo valor quando calculado no modelo padrão, enquanto que para δ_c a mudança foi de $\sim 8\%$. Esses resultados servem como fortes indicadores do potencial do uso de observáveis cosmológicos que dependam de δ_t como testes para teorias de gravidade modificada.

Em seguida, investigamos o efeito de $\epsilon(a, k)$ em sua forma completa. Esse parâmetro determina a intensidade da alteração na constante gravitacional no modelo de GM em questão, $G_{f_R} = (1 + \epsilon(a, k)) G$, não apenas nos limites de campo forte e fraco como foi

descrito no parágrafo anterior. De fato, a dependência com a escala torna o modelo de colapso esférico muito mais complexo, devido à não-validade do teorema de Birkhoff. Em contraste com o modelo de colapso esférico padrão, o desenvolvimento em GM conduz a uma dependência de δ_c e δ_t com a massa e com o perfil de densidade. Neste caso, δ_t apresentou valores menores do que aqueles no contexto do modelo Λ CDM em até $\sim 17\%$ para o valor de $|f_{R0}| = 10^{-5}$, para estruturas de massa $\sim 10^{14} h^{-1} M_\odot$ e que alcancem o turnaround hoje ($z = 0$).

Com base nos resultados anteriores e em trabalhos recentes que propõem o uso de medidas do raio de turnaround, R_t , como testes locais para o modelo Λ CDM, foram implementados os resultados para δ_t em uma expressão, obtida a partir da conservação da massa, para o cálculo de R_t . Inicialmente, aplicando os resultados aos limites de campo fraco e campo forte foi possível verificar o aumento do raio de turnaround em todo o intervalo de redshift considerado ($0 < z < 3$), bem como para o intervalo de massa $10^{11} h^{-1} M_\odot < M < 10^{16} h^{-1} M_\odot$. O efeito no valor de R_t obtido para o parâmetro de gravidade mais fraco considerado, $|f_{R0}| = 10^{-6}$, chega a ser $\sim 7\%$ maior, para $z = 0$, do que aquele calculado segundo o modelo Λ CDM, para massa de $M \sim 10^{12} h^{-1} M_\odot$. Tais resultados reafirmam que observações de regiões que estejam atravessando o momento de turnaround podem se constituir em ferramentas poderosas para testes de gravidade em escalas de grupos de galáxias. Além disso, o uso de medidas de R_t para testes de gravidade modificada é estimulado pelo número crescente de dados observacionais com medidas desses sistemas. Também é vantajoso que as regiões onde essas medidas estão sendo realizadas são de menor densidade, $\delta \approx 10$, e portanto os efeitos do mecanismo camaleão (que suprime os efeitos de GM) deve ser reduzido.

Deve-se notar que até essa fase dos nossos estudos a massa da qual depende δ_t e R_t havia sido definida como a massa de turnaround M_t – ou seja, a massa interna à esfera delimitada por R_t . Porém, o modelo de formação de estruturas hierárquico aponta que o turnaround ocorrerá continuamente em torno de estruturas que já estejam próximas à virialização. Ou seja, as regiões experimentando turnaround geralmente se encontram em

torno de halos colapsados (virializados). Portanto, a massa cuja medida é mais viável não seria a massa de turnaround, mas a massa do virial M_v da estrutura colapsada. Neste trabalho essa massa foi definida como a massa interna a uma região cuja a densidade é $\Delta = 200$ vezes a densidade do campo de fundo. Essa observação é reforçada em [128], o qual conclui que o número de galáxias entre R_v e R_t é $\sim 15\%$ do número de galáxias dentro de R_t , implicando que a massa da estrutura virializada encontra-se muito mais concentrada, em um ambiente de mais alta densidade, e portanto é muito mais fácil de ser observada do que a massa de turnaround.

Portanto, obter uma relação entre R_t e M_v é um passo extremamente importante para viabilizar testes de modelos de gravidade modificada por meio do turnaround. Devemos notar que uma relação entre R_t e R_v é apresentada em [127]; contudo, aquele resultado foi obtido através da implementação do modelo de colapso esférico padrão (de perfil de densidade tipo *top-hat*), sem considerar nenhum perfil específico. Nosso resultado é, portanto, mais rigoroso e mais realístico.

Seguindo o objetivo de construir uma relação entre o raio da casca em turnaround e a estrutura interna em equilíbrio do virial, mostramos que para estruturas com massa de virial $10^{13} h^{-1} M_\odot$, o raio de turnaround e o raio de virial estão relacionados por $R_t \approx 3.7 R_v$ e $M_t \approx 3.07 M_v$ para a cosmologia do modelo padrão, enquanto que para o modelo de GM de Hu & Sawicki, parametrizado por $|f_{R0}| = 10^{-6}$, essas relações tornam-se $R_t \approx 4.1 R_v$ and $M_t \approx 3.43 M_v$. Ou seja, as diferenças relativas entre GM e o modelo Λ CDM são de $\sim 10\%$ para os raios e $\sim 11\%$ para as massas, o que possibilita que medidas com acurácia $\lesssim 10\%$ sejam capazes de realizar testes em teorias de GM para $|f_{R0}| = 10^{-6}$.

O principal resultado apresentado nesta tese foi a construção de uma relação direta entre o raio de turnaround R_t e a massa do halo M_v para o modelo de GM aqui avaliado. Esses dois observáveis já são mensuráveis e permitem uma comparação direta com os modelos de GM. Nós obtivemos que o raio de turnaround apresenta um aumento de 9% para uma massa de virial de $10^{13} h^{-1} M_\odot$, no contexto da menor modificação na teoria de gravidade considerada aqui, ($f_{R0} = 10^{-6}$). Apesar de já existirem observações

dessa natureza, ainda será necessário implementar diversos aperfeiçoamentos tanto na qualidade das observações, quantidade de sistemas observados, na compreensão de efeitos sistemáticos, e mesmo em aspectos teóricos que tornem a descrição desses sistemas mais realística.

Através desses resultados para R_t em GM o próximo passo é sua estimativa através de simulações numéricas de N-corpos (*N-body simulations*) em $f(R)$, afim de comparar os resultados previstos e aqueles advindos das simulações. Além disso, através das simulações é possível prever melhor a acurácia das observações necessárias, a área dos surveys, a profundidade e a precisão dos redshifts que permitirão testes robustos de GM. Essas observações poderão ser feitas por meio de levantamentos espectroscópicos como o DESI [137], ou até mesmo com levantamentos fotométricos de muitas bandas estreitas tais como o JPAS [138].

Apêndice A

Perfil inicial Físico

Nós seguimos a mesma abordagem presente no apêndice C do [50] para construir o perfil inicial físico, o qual foi construído usando a teoria de picos de Bardeen *et al.*, 1986. [119]. Nesse apêndice nós faremos uma breve descrição da construção desse perfil apenas por questões de completeza.

Nós estamos interessados no perfil de densidade médio em torno de algum pico de altura $\nu = \delta_0/\sigma(R)$ de algum campo gaussiano, que pode ser totalmente caracterizado pelo seu espectro de potência $P(k, R)$ suavizado em alguma escala R por uma função janela $W(kR)$ (para esse cálculo foi usado uma função janela tipo gaussiana).

Seguindo essas ideias, a função $F(\nu, n_s, k, R)$, que é usada para calcular o perfil de densidade inicial em (6.8), é dada por:

$$\begin{aligned} F(\nu, n_s, k, R) = & \left(\frac{e^{-\frac{1}{8}\left(\frac{n_s+3}{n_s+5}\right)^{3/2}\nu^2} \left((12n_s + 60)e^{\frac{1}{8}\left(\frac{n_s+3}{n_s+5}\right)^{3/2}\nu^2} + (0.632n_s + 13.52)n_s + 44.6 \right)}{(n_s + 5)^2 \left(2\sqrt{\frac{(0.25n_s+0.75)\nu^2+0.45n_s+8.25}{n_s+5}} \sqrt{\frac{n_s+3}{n_s+5}}\nu \right)} + \sqrt{\frac{n_s+3}{n_s+5}}\nu \right) \\ & \cdot \left(\frac{\sqrt{\frac{n_s+3}{n_s+5}}}{\nu\Gamma\left(\frac{n_s+5}{2}\right)} \right) (2k^2R^2 - n_s - 3) + \frac{(n_s+3)(-2k^2R^2 + n_s+3)}{2\Gamma\left(\frac{n_s+7}{2}\right)} + \frac{4}{(n_s+5)\Gamma\left(\frac{n_s+3}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Apêndice B

Evolução dos perfis de densidade

Na Fig. B.1 é apresentada a forma dos perfis iniciais, para uma massa de $M = 1.26 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$, bem como os perfis em dois outros instantes de tempos ao longo da evolução da estrutura, um momento próximo ao momento de turnaround e outro próximo ao colapso. O perfil evoluído em RG (limite de campo fraco das teorias de GM) é descrito em azul, enquanto que em vermelho é apresentado o perfil referente ao limite de campo forte, tanto no caso do perfil de Tanh (esquerda, com inclinação $s = 0.4$) como Phy (direita). Os momentos na evolução foram selecionados com base no valor do contraste de densidade no centro, o que demonstra explicitamente que os perfis seguem evoluções bem similares, mas com velocidades diferentes em cada limite. Deve-se notar, como já mencionado anteriormente, que as diferenças nos redshifts entre os dois perfis se deve a dificuldades numéricas para evoluir (6.5), especialmente no caso do perfil Phy

Figura B.1: Evolução do perfil de densidade inicial, Tanh (painel a esquerda) e Phy (painel a direita), nos momentos inicial (sólida), intermediário(tracejado) e de colapso (pontilhado), para RG (azul) e limite de campo forte.

Apêndice C

Raio de Turnaround e Raio de Turnaround Máximo

Com o fim de entender o comportamento das cascas de uma dada estrutura, quatro perfis iniciais Tanh foram evoluídos, todos com $s = 0.4$, sendo que cada um fora submetido a condições iniciais diferentes, $\delta_0 = 0.005$ (azul), $\delta_0 = 0.0055$ (vermelho), $\delta_0 = 0.006$ (laranja) e 0.0065 (verde), em Λ CDM, em com $r_b = 7$, onde a casca próxima ao centro atinge o turnaround em $a_t = 1.87$, $a_t = 0.95$, $a_t = 0.76$ e $a_t = 0.65$, respectivamente. A figura C.1 mostra o raio físico de cada casca no momento do turnaround como uma função da massa inserida nesta casca. Além disso, também é exibido o raio de turnaround máximo obtido a partir da expressão $R_{t,max} = (3GM/\Lambda c^2)^{1/3}$ [53] (cinza). Fica claro que não há qualquer violação do limite máximo mesmo para estruturas cuja casca central chegue ao turnaround primeiro.

Figura C.1: Raio de turnaround de uma estrutura para a condição inicial $\delta_0 = 0.005$ (azul), $\delta_0 = 0.0055$ (vermelho), $\delta_0 = 0.006$ (laranja) e 0.0065 (verde), in Λ CDM. Com o raio de turnaround máximo $R_{t,max}$ (cinza).

Apêndice D

Perfil de densidade em $f(R)$

Na Fig. D.1 é apresentado o perfil de densidade (4.72) para um halo com massa $M = 1.26 \times 10^{14} h^{-1} M_{\odot}$ at $z = 0$. Esse resultado é composto pelos perfis para os cinco diferentes parâmetros de gravidade modificada explorados neste trabalhos, incluindo os limites de campo forte e campo fraco. O gráfico inferior mostra a diferença relativa dos perfis com relação ao caso Λ CDM.

É notório que há dois efeitos de modificar a gravidade segundo a proposta estudada nesse trabalho: o $M_{\star}$ da relação de concentração de Bullock *et al.* [96] e o termo de 2-halos por causa no espectro de potência linear de GM que fora implementado.

O efeito sobre $M_{\star}$ é consequência de que o contrastes de densidade linear δ_c no momento do colapso depende da massa do halo, além desse efeito, a variância do campo linear $S(M) = \sigma^2(M)$ irá também sofrer alterações devido a implementação de um espectro de potência modificado segundo GM. Como resultado, o $M_{\star}$ aumentará a medida que a intensidade da modificação da gravidade cresce, o que implica em um halo mais concentrado. Este efeito se mostra em um aumento de $\approx 10\%$ na região interna do perfil do halo.

O efeito da GM no espectro de potência linear da matéria afeta também a região mais externa através de modificações no termo de 2-halos, onde o novo $\sigma(R)$ leva a um novo bias linear do halo (ainda que usássemos os mesmos parâmetros de Λ CDM), e da função de correlação. O bias é aumentado quanto maior for a modificação na teoria de gravidade com respeito ao modelo padrão, enquanto que a função de correlação irá ser

menor, em grandes escalas, para compensar a maior concentração de matéria em pequenas escalas, o que resulta em um efeito da GM não uniforme com r . Tais diferenças podem ser acompanhadas ao observarmos as partes mais externas do halo na Fig. D.1, onde $r > R_v$ (delimitada pela linha vertical laranja), com uma diferença relativa de $\approx 20\%$ para raios grandes.

Após uma observação da Fig. D.1 podemos concluir que o perfil de densidade em GM tem uma pequena, mas não desprezível, diferença com relação ao perfil do modelo Λ CDM. Isso implica que os perfis em GM trazem efeitos que precisam ser levados em conta no cálculo da massa interna dos halos.

Figura D.1: Painel superior: O perfil de densidade composto pelo perfil NFW e o termo de 2-halos para $M_v = 10^{14} h^{-1} M_\odot$ e $z = 0$, considerando os parâmetros de GM $|f_{R0}| = 10^{-4}$ (laranja), $|f_{R0}| = 10^{-5}$ (vermelho), $|f_{R0}| = 10^{-6}$ (azul), o limite de campo fraco $\epsilon = 0$ (Λ CDM, preto) e o limite de campo forte $\epsilon = 1/3$ (cinza). Painel inferior: diferença relativa entre os valores do painel acima com respeito a Λ CDM.

Referências Bibliográficas

- [1] Barbara Ryden. *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2016.
- [2] Scott Dodelson. *Modern cosmology*. Elsevier, 2003.
- [3] Max Tegmark, Michael R Blanton, Michael A Strauss, Fiona Hoyle, David Schlegel, Roman Scoccimarro, Michael S Vogeley, David H Weinberg, Idit Zehavi, Andreas Berlind, et al. The three-dimensional power spectrum of galaxies from the sloan digital sky survey. *The Astrophysical Journal*, 606(2):702, 2004.
- [4] PAR Ade, N Aghanim, M Arnaud, M Ashdown, J Aumont, Carlo Baccigalupi, Anthony J Banday, RB Barreiro, JG Bartlett, E Battaner, et al. Planck intermediate results-xvi. profile likelihoods for cosmological parameters. *Astronomy & Astrophysics*, 566:A54, 2014.
- [5] Lauren Anderson, Eric Aubourg, Stephen Bailey, Florian Beutler, Adam S Bolton, Jon Brinkmann, Joel R Brownstein, Chia-Hsun Chuang, Antonio J Cuesta, Kyle S Dawson, et al. The clustering of galaxies in the sdss-iii baryon oscillation spectroscopic survey: measuring d_A and h at $z=0.57$ from the baryon acoustic peak in the data release 9 spectroscopic galaxy sample. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 439(1):83–101, 2014.
- [6] Gastão B. Lima Neto. *Notas de aula de Astronomia Extragaláctica*. 2018.
- [7] Thanu Padmanabhan. *Structure formation in the universe*. Cambridge university press, 1993.

- [8] K. Rines and A. Diaferio. Cirs: Cluster infall regions in the sloan digital sky survey. i. infall patterns and mass profiles. *The Astronomical Journal*, 132:1275–1297, September 2006.
- [9] V. Pavlidou, N. Tetradis, and T. N. Tomaras. Constraining Dark Energy through the Stability of Cosmic Structures. *JCAP*, 1405:017, 2014.
- [10] J. Lee. Estimating the Turn-Around Radii of Six Isolated Galaxy Groups in the Local Universe. *ArXiv e-prints*, September 2017.
- [11] Georges Lemaître. Un univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. In *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, volume 47, pages 49–59, 1927.
- [12] Edwin Hubble. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the national academy of sciences*, 15(3):168–173, 1929.
- [13] Adam G. Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *The Astronomical Journal*, 116(3):1009, 1998.
- [14] et al. Perlmutter. Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae. *The Astrophysical Journal*, 517(2):565, 1999.
- [15] Fritz Zwicky. The redshift of extragalactic nebulae. *Helv. Phys. Acta*, 6:110, 1933.
- [16] Vera C Rubin and W Kent Ford Jr. Rotation of the andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions. *The Astrophysical Journal*, 159:379, 1970.
- [17] Pierre Astier et al. The Supernova legacy survey: Measurement of $\omega(m)$, $\omega(\lambda)$ and W from the first year data set. *Astron. Astrophys.*, 447:31–48, 2006.
- [18] N Suzuki, D Rubin, C Lidman, G Aldering, R Amanullah, K Barbary, LF Barrientos, J Botyanszki, M Brodwin, N Connolly, et al. The hubble space telescope cluster supernova survey. v. improving the dark-energy constraints above $z \lesssim 1$ and

- building an early-type-hosted supernova sample based in part on observations made with the nasa/esa hubble space telescope, obtained from the data archive at the space telescope institute. *The Astrophysical Journal*, 746(1):85, 2012.
- [19] G Hinshaw, D Larson, E Komatsu, DN Spergel, CL Bennett, J Dunkley, MR Nolta, M Halpern, RS Hill, N Odegard, et al. Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: cosmological parameter results. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 208(2):19, 2013.
- [20] Chris Blake, Eyal A Kazin, Florian Beutler, Tamara M Davis, David Parkinson, Sarah Brough, Matthew Colless, Carlos Contreras, Warrick Couch, Scott Croom, et al. The wigglez dark energy survey: mapping the distance–redshift relation with baryon acoustic oscillations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 418(3):1707–1724, 2011.
- [21] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, 61(1):1, 1989.
- [22] H. Weyl. A New Extension of Relativity Theory. *Annalen Phys.*, 59:101–133, 1919. [Annalen Phys.364,101(1919)].
- [23] A. S. Eddington. The mathematical theory of relativity. *Cambridge University Press*, 1923.
- [24] R. Utiyama and Bryce S. DeWitt. Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields. *J. Math. Phys.*, 3:608–618, 1962.
- [25] K. S. Stelle. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D16:953–969, 1977.
- [26] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1984.

- [27] Hans A. Buchdahl. Non-linear Lagrangians and cosmological theory. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 150:1, 1970.
- [28] Hans-Jurgen Schmidt. Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology. *eConf*, C0602061:12, 2006. [Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.4,209(2007)].
- [29] Sean M Carroll, Vikram Duvvuri, Mark Trodden, and Michael S Turner. Is cosmic speed-up due to new gravitational physics? *Physical Review D*, 70(4):043528, 2004.
- [30] S. Capozziello, M. De Laurentis, I. De Martino, M. Formisano, and S. D. Odintsov. Jeans analysis of self-gravitating systems in $f(R)$ -gravity. *Phys. Rev.*, D85:044022, 2012.
- [31] Artyom V. Astashenok, Salvatore Capozziello, and Sergei D. Odintsov. Magnetic Neutron Stars in $f(R)$ gravity. *Astrophys. Space Sci.*, 355(2):333–341, 2015.
- [32] Simone Ferraro, Fabian Schmidt, and Wayne Hu. Cluster Abundance in $f(R)$ Gravity Models. *Phys. Rev.*, D83:063503, 2011.
- [33] Matteo Cataneo, David Rapetti, Fabian Schmidt, Adam B. Mantz, Steven W. Allen, Douglas E. Applegate, Patrick L. Kelly, Anja von der Linden, and R. Glenn Morris. New constraints on $f(r)$ gravity from clusters of galaxies. *Phys. Rev. D*, 92:044009, Aug 2015.
- [34] Álvaro de la Cruz-Dombriz, Peter K. S. Dunsby, Sulona Kandhai, and Diego Sáez-Gómez. Theoretical and observational constraints of viable $f(r)$ theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 93:084016, Apr 2016.
- [35] Hiroaki Oyaizu, Marcos Lima, and Wayne Hu. Nonlinear evolution of $f(r)$ cosmologies. ii. power spectrum. *Physical Review D*, 78(12):123524, 2008.
- [36] Philippe Brax and Patrick Valageas. Structure formation in modified gravity scenarios. *Physical Review D*, 86(6):063512, 2012.

- [37] Rodrigo Voivodic, Marcos Lima, Claudio Llinares, and David F. Mota. Modelling Void Abundance in Modified Gravity. *Phys. Rev.*, D95(2):024018, 2017.
- [38] Kazuya Koyama. Cosmological tests of modified gravity. *Reports on Progress in Physics*, 79(4):046902, 2016.
- [39] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of $f(r)$ cosmic acceleration that evade solar system tests. *Physical Review D*, 76(6):064004, 2007.
- [40] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Parametrized post-friedmann framework for modified gravity. *Physical Review D*, 76(10):104043, 2007.
- [41] Matthew C. Martino, Hans F. Stabenau, and Ravi K. Sheth. Spherical collapse and cluster counts in modified gravity models. *Phys. Rev. D*, 79:084013, Apr 2009.
- [42] Spyros Basilakos, Juan Carlos Bueno Sanchez, and Leandros Perivolaropoulos. Spherical collapse model and cluster formation beyond the Λ cosmology: Indications for a clustered dark energy? *Phys. Rev. D*, 80:043530, Aug 2009.
- [43] F. Pace, J.-C. Waizmann, and M. Bartelmann. Spherical collapse model in dark-energy cosmologies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406(3):1865–1874, 2010.
- [44] Marilena LoVerde. Spherical collapse in $\nu\Lambda$ CDM. *Phys. Rev. D*, 90:083518, Oct 2014.
- [45] Fabian Schmidt, Wayne Hu, and Marcos Lima. Spherical collapse and the halo model in braneworld gravity. *Phys. Rev. D*, 81:063005, Mar 2010.
- [46] Björn Malte Schäfer and Kazuya Koyama. Spherical collapse in modified gravity with the birkhoff theorem. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 385(1):411–422, 2008.
- [47] Laura Taddei, Riccardo Catena, and Massimo Pietroni. Spherical collapse and halo mass function in the symmetron model. *Phys. Rev. D*, 89:023523, Jan 2014.

- [48] Yize Fan, Puxun Wu, and Hongwei Yu. Spherical collapse in the extended quintessence cosmological models. *Phys. Rev. D*, 92:083529, Oct 2015.
- [49] Alexander Borisov, Bhuvnesh Jain, and Pengjie Zhang. Spherical collapse in $f(r)$ gravity. *Phys. Rev. D*, 85:063518, Mar 2012.
- [50] Michael Kopp, Stephen A. Appleby, Ixandra Achitouv, and Jochen Weller. Spherical collapse and halo mass function in $f(r)$ theories. *Phys. Rev. D*, 88:084015, Oct 2013.
- [51] Soumya Chakrabarti and Narayan Banerjee. Spherical collapse in vacuum $f(r)$ gravity. *Astrophysics and Space Science*, 354(2):571–576, 2014.
- [52] JAR Cembranos, A de la Cruz-Dombriz, and B Montes Nunez. Gravitational collapse in $f(r)$ theories. *Journal of cosmology and astroparticle physics*, 2012(04):021, 2012.
- [53] Vasiliki Pavlidou and Theodore N. Tomaras. Where the world stands still: turnaround as a strong test of Λ CDM cosmology. *JCAP*, 1409:020, 2014.
- [54] Dimitrios Tanoglidis, Vasiliki Pavlidou, and Theodore Tomaras. Testing Λ CDM cosmology at turnaround: where to look for violations of the bound? *JCAP*, 1512(12):060, 2015.
- [55] Dimitrios Tanoglidis, Vasiliki Pavlidou, and Theodore Tomaras. Turnaround overdensity as a cosmological observable: the case for a local measurement of Λ . *arXiv*, 2016.
- [56] Jounghun Lee, Suk Kim, and Soo-Chang Rey. A Bound Violation on the Galaxy Group Scale: the Turn-Around Radius of NGC 5353/4. *The Astrophysical Journal*, 815(1):43, 2015.
- [57] Rafael CC Lopes, Rodrigo Voivodic, L Raul Abramo, and Laerte Sodré Jr. Turnaround radius in $f(r)$ model. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2018(09):010, 2018.

- [58] Rafael CC Lopes, Rodrigo Voivodic, L Raul Abramo, and Laerte Sodré Jr. Relation between the turnaround radius and virial mass in $f(r)$ model. *arXiv preprint arXiv:1809.10321*, 2018.
- [59] Isaac Newton. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of California Press, 1999.
- [60] Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz and Samuel Clarke. *The Leibniz-Clarke Correspondence: Together With Extracts from Newton's Principia and Opticks*. Manchester University Press, 1998.
- [61] N. T. Roseveare. Mercury's perihelion from le verrier to einstein. *British Journal for the Philosophy of Science*, 35(2):188–191, 1984.
- [62] Albert Einstein et al. On the electrodynamics of moving bodies. *Annalen der Physik*, 17(891):50, 1905.
- [63] Albert Einstein. Does the inertia of a body depend upon its energy-content. *Annalen der Physik*, 18(13):639–641, 1905.
- [64] Robert Resnick. Introduction to special relativity. 1971.
- [65] Sean M Carrol. Spacetime and geometry. *An Introduction to General Relativity Addison-Wesley*, 2004.
- [66] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*, volume 1. Wiley New York, 1972.
- [67] Luther Pfahler Eisenhart. *Riemannian geometry*. Princeton university press, 2016.
- [68] Salvatore Capozziello and Valerio Faraoni. *Beyond Einstein gravity: A Survey of gravitational theories for cosmology and astrophysics*, volume 170. Springer Science & Business Media, 2010.
- [69] Luca Amendola and Shinji Tsujikawa. *Dark energy: theory and observations*. Cambridge University Press, 2010.

- [70] Vesto Melvin Slipher. On the spectrum of the nebula in the pleiades. *Lowell Observatory Bulletin*, 2:26–27, 1912.
- [71] E. Hubble. A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae. *Proceedings of the National Academy of Science*, 15:168–173, March 1929.
- [72] Wendy L. Freedman, Barry F. Madore, Brad K. Gibson, Laura Ferrarese, Daniel D. Kelson, Shoko Sakai, Jeremy R. Mould, Jr. Robert C. Kennicutt, Holland C. Ford, John A. Graham, John P. Huchra, Shaun M. G. Hughes, Garth D. Illingworth, Lucas M. Macri, and Peter B. Stetson. Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant. *The Astrophysical Journal*, 553(1):47, 2001.
- [73] Planck Collaboration et al. Planck 2013 results. xvi. cosmological parameters. *A&A*, 571:A16, 2014.
- [74] George F Smoot, Charles L Bennett, A Kogut, EL Wright, J Aymon, NW Boggess, ES Cheng, G De Amici, S Gulkis, MG Hauser, et al. Structure in the coBE differential microwave radiometer first-year maps. *The Astrophysical Journal*, 396:L1–L5, 1992.
- [75] Eiichiro Komatsu, J Dunkley, MR Nolta, CL Bennett, B Gold, G Hinshaw, N Jarosik, D Larson, M Limon, L Page, et al. Five-year wilkinson microwave anisotropy probe* observations: cosmological interpretation. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 180(2):330, 2009.
- [76] N Aghanim, Y Akrami, M Ashdown, J Aumont, C Baccigalupi, M Ballardini, AJ Banday, RB Barreiro, N Bartolo, S Basak, et al. Planck 2018 results. vi. cosmological parameters. *arXiv preprint arXiv:1807.06209*, 2018.
- [77] F Zwicky. Helvetica physica acta, 6, 110. *Google Scholar*, 1933.
- [78] IMH Etherington. Republication of: Lx. on the definition of distance in general relativity. *General Relativity and Gravitation*, 39(7):1055–1067, 2007.

- [79] Phillip James Edwin Peebles. *The large-scale structure of the universe*. Princeton university press, 1980.
- [80] Viatcheslav Mukhanov. *Physical foundations of cosmology*. Cambridge university press, 2005.
- [81] Houjun Mo, Frank Van den Bosch, and Simon White. *Galaxy formation and evolution*. Cambridge University Press, 2010.
- [82] Marcos Lima. *Notas de aula de Physical Cosmology I e II*. 2014.
- [83] David H Weinberg, Michael J Mortonson, Daniel J Eisenstein, Christopher Hirata, Adam G Riess, and Eduardo Roza. Observational probes of cosmic acceleration. *Physics reports*, 530(2):87–255, 2013.
- [84] Subrahmanyan Chandrasekhar. The maximum mass of ideal white dwarfs. *The Astrophysical Journal*, 74:81, 1931.
- [85] Arno A Penzias and Robert Woodrow Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *The Astrophysical Journal*, 142:419–421, 1965.
- [86] Antony Lewis, Anthony Challinor, and Anthony Lasenby. Efficient computation of cosmic microwave background anisotropies in closed friedmann-robertson-walker models. *The Astrophysical Journal*, 538(2):473, 2000.
- [87] Diego Blas, Julien Lesgourgues, and Thomas Tram. The cosmic linear anisotropy solving system (class). part ii: approximation schemes. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(07):034, 2011.
- [88] Philip JE Peebles and JT Yu. Primeval adiabatic perturbation in an expanding universe. *The Astrophysical Journal*, 162:815, 1970.
- [89] Rashid A Sunyaev and Ya B Zeldovich. Small-scale fluctuations of relic radiation. *Astrophysics and Space Science*, 7(1):3–19, 1970.

- [90] James E Gunn and J Richard Gott III. On the infall of matter into clusters of galaxies and some effects on their evolution. *The Astrophysical Journal*, 176:1, 1972.
- [91] Fabian Schmidt, Marcos Lima, Hiroaki Oyaizu, and Wayne Hu. Nonlinear evolution of $f(r)$ cosmologies. iii. halo statistics. *Physical Review D*, 79(8):083518, 2009.
- [92] F Pace, J-C Waizmann, and M Bartelmann. Spherical collapse model in dark-energy cosmologies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 406(3):1865–1874, 2010.
- [93] Asantha Cooray and Ravi Sheth. Halo models of large scale structure. *Physics Reports*, 372(1):1–129, 2002.
- [94] Julio F Navarro, Carlos S Frenk, and Simon DM White. A universal density profile from hierarchical clustering. *The Astrophysical Journal*, 490(2):493, 1997.
- [95] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk, and Simon D. M. White. The Structure of cold dark matter halos. *Astrophys. J.*, 462:563–575, 1996.
- [96] James S Bullock, Tsafir S Kolatt, Yair Sigad, Rachel S Somerville, Andrey V Kravtsov, Anatoly A Klypin, Joel R Primack, and Avishai Dekel. Profiles of dark haloes: evolution, scatter and environment. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 321(3):559–575, 2001.
- [97] William H Press and Paul Schechter. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *The Astrophysical Journal*, 187:425–438, 1974.
- [98] Ravi K Sheth and Giuseppe Tormen. Large-scale bias and the peak background split. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 308(1):119–126, 1999.
- [99] Adrian Jenkins, CS Frenk, Simon DM White, JM Colberg, Shaun Cole, August E

- Evrard, HMP Couchman, and N Yoshida. The mass function of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 321(2):372–384, 2001.
- [100] Jeremy Tinker, Andrey V Kravtsov, Anatoly Klypin, Kevork Abazajian, Michael Warren, Gustavo Yepes, Stefan Gottlöber, and Daniel E Holz. Toward a halo mass function for precision cosmology: the limits of universality. *The Astrophysical Journal*, 688(2):709, 2008.
- [101] Jeremy L Tinker, Brant E Robertson, Andrey V Kravtsov, Anatoly Klypin, Michael S Warren, Gustavo Yepes, and Stefan Gottlöber. The large-scale bias of dark matter halos: numerical calibration and model tests. *The Astrophysical Journal*, 724(2):878, 2010.
- [102] Leandro J Beraldo e Silva, Marcos Lima, and Laerte Sodré. Testing phenomenological and theoretical models of dark matter density profiles with galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 436(3):2616–2624, 2013.
- [103] Eric Hayashi and Simon DM White. Understanding the halo-mass and galaxy-mass cross-correlation functions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 388(1):2–14, 2008.
- [104] BP Abbott, R Abbott, MR Abernathy, RX Adhikari, SB Anderson, K Arai, MC Araya, JC Barayoga, BC Barish, BK Berger, et al. Tests of general relativity with gw150914. *Physical Review Letters*, 116(22):Art–No, 2016.
- [105] S. Weinberg. Photons and gravitons in perturbation theory: Derivation of maxwell’s and einstein’s equations. *Phys. Rev. B*, 138:988–1002, 1965.
- [106] S. Deser. Self-interaction and gauge invariance. *Gen. Relativ. Gravit.*, 1:9–18, 1970.
- [107] R. P. Feynman, F. B. Morinigo, and W. G. Wagner. *Feynman Lectures on Gravitation*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.

- [108] D. G. Boulware and S. Deser. Classical general relativity derived from quantum gravity. *Ann. Phys. (N.Y.)*, 89:193, 1975.
- [109] Alessandra Silvestri and Mark Trodden. Approaches to understanding cosmic acceleration. *Reports on Progress in Physics*, 72(9):096901, 2009.
- [110] Thomas P Sotiriou and Valerio Faraoni. $f(r)$ theories of gravity. *Reviews of Modern Physics*, 82(1):451, 2010.
- [111] Alexander D Dolgov and Masahiro Kawasaki. Can modified gravity explain accelerated cosmic expansion? *Physics Letters B*, 573:1–4, 2003.
- [112] Ignacy Sawicki and Wayne Hu. Stability of cosmological solutions in $f(r)$ models of gravity. *Physical Review D*, 75(12):127502, 2007.
- [113] Andrea Zanzi. Chameleonic theories: a short review. *Universe*, 1(3):446–475, 2015.
- [114] Austin Joyce, Bhuvnesh Jain, Justin Khoury, and Mark Trodden. Beyond the cosmological standard model. *Physics Reports*, 568:1–98, 2015.
- [115] Alvaro Nunez and Slava Solganik. The content of $f(r)$ gravity. *arXiv preprint hep-th/0403159*, 2004.
- [116] Clare Burrage and Jeremy Sakstein. Tests of chameleon gravity. *Living reviews in relativity*, 21(1):1, 2018.
- [117] Matteo Cataneo and David Rapetti. Tests of gravity with galaxy clusters. *International Journal of Modern Physics D*, 2018.
- [118] P Valageas. Mass functions and bias of dark matter halos. *Astronomy & Astrophysics*, 508(1):93–106, 2009.
- [119] James M Bardeen, JR Bond, Nick Kaiser, and AS Szalay. The statistics of peaks of gaussian random fields. *The Astrophysical Journal*, 304:15–61, 1986.

- [120] Alireza Hojjati, Levon Pogossian, and Gong-Bo Zhao. Testing gravity with camb and cosmomc. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2011(08):005, 2011.
- [121] Jounghun Lee and Baojiu Li. The Effect of Modified Gravity on the Odds of the Bound Violations of the Turn-Around Radii. *arXiv preprint arXiv:1610.07268*, 2016.
- [122] Salvatore Capozziello, Konstantinos F Dialektopoulos, and Orlando Luongo. Maximum turnaround radius in $f(r)$ gravity. *arXiv preprint arXiv:1805.01233*, 2018.
- [123] Jounghun Lee. Estimating the turn-around radii of six isolated galaxy groups in the local universe. *The Astrophysical Journal*, 856(1):57, 2018.
- [124] V. Faraoni and S. Capozziello. *Beyond Einstein Gravity: A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*. 2011.
- [125] Matthew C Martino, Hans F Stabenau, and Ravi K Sheth. Spherical collapse and cluster counts in modified gravity models. *Physical Review D*, 79(8):084013, 2009.
- [126] Guido Cupani, Marino Mezzetti, and Fabio Mardirossian. Mass estimation in the outer non-equilibrium region of galaxy clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 390(2):645–654, 2008.
- [127] Vincent R Eke, Shaun Cole, and Carlos S Frenk. Cluster evolution as a diagnostic for ω . *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 282(1):263–280, 1996.
- [128] Olga G Kashibadze and Igor D Karachentsev. Cosmic flow around local massive galaxies. *Astronomy & Astrophysics*, 609:A11, 2018.
- [129] Sourav Bhattacharya and Theodore N Tomaras. Cosmic structure sizes in generic dark energy models. *The European Physical Journal C*, 77(8):526, 2017.
- [130] Jounghun Lee and Baojiu Li. The effect of modified gravity on the odds of the bound violations of the turn-around radii. *The Astrophysical Journal*, 842(1):2, 2017.

- [131] Sourav Bhattacharya, Konstantinos F Dialektopoulos, Antonio Enea Romano, Constantinos Skordis, and Theodore N Tomaras. The maximum sizes of large scale structures in alternative theories of gravity. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2017(07):018, 2017.
- [132] O. N. Snaith, J. Bailin, A. Knebe, G. Stinson, J. Wadsley, and H. Couchman. Haloes at the ragged edge: the importance of the splashback radius. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 472:2694–2712, December 2017.
- [133] C. Chang, E. Baxter, B. Jain, C. Sánchez, S. Adhikari, T. N. Varga, Y. Fang, E. Rozo, E. S. Rykoff, A. Kravtsov, D. Gruen, W. Hartley, E. M. Huff, M. Jarvis, A. G. Kim, J. Prat, N. MacCrann, T. McClintock, A. Palmese, D. Rapetti, R. P. Rollins, S. Samuroff, E. Sheldon, M. A. Troxel, R. H. Wechsler, Y. Zhang, J. Zuntz, T. M. C. Abbott, F. B. Abdalla, S. Allam, J. Annis, K. Bechtol, A. Benoit-Lévy, G. M. Bernstein, D. Brooks, E. Buckley-Geer, A. Carnero Rosell, M. Carrasco Kind, J. Carretero, C. B. DAndrea, L. N. da Costa, C. Davis, S. Desai, H. T. Diehl, J. P. Dietrich, A. Drlica-Wagner, T. F. Eifler, B. Flaugher, P. Fosalba, J. Frieman, J. García-Bellido, E. Gaztanaga, D. W. Gerdes, R. A. Gruendl, J. Gschwend, G. Gutierrez, K. Honscheid, D. J. James, T. Jeltema, E. Krause, K. Kuehn, O. Lahav, M. Lima, M. March, J. L. Marshall, P. Martini, P. Melchior, F. Menanteau, R. Miquel, J. J. Mohr, B. Nord, R. L. C. Ogando, A. A. Plazas, E. Sanchez, V. Scarpine, R. Schindler, M. Schubnell, I. Sevilla-Noarbe, M. Smith, R. C. Smith, M. Soares-Santos, F. Sobreira, E. Suchyta, M. E. C. Swanson, G. Tarle, J. Weller, and DES Collaboration. The Splashback Feature around DES Galaxy Clusters: Galaxy Density and Weak Lensing Profiles. *The Astrophysical Journal*, 864:83, September 2018.
- [134] S. More, B. Diemer, and A. V. Kravtsov. The Splashback Radius as a Physical Halo Boundary and the Growth of Halo Mass. *The Astrophysical Journal*, 810:36, September 2015.
- [135] T. Okumura, T. Nishimichi, K. Umetsu, and K. Osato. Splashback radius of

- nonspherical dark matter halos from cosmic density and velocity fields. *Physical Review D*, 98(2):023523, July 2018.
- [136] S. Adhikari, J. Sakstein, B. Jain, N. Dalal, and B. Li. Splashback in galaxy clusters as a probe of cosmic expansion and gravity. *ArXiv e-prints*, June 2018.
- [137] DESI Collaboration, A. Aghamousa, J. Aguilar, S. Ahlen, S. Alam, L. E. Allen, C. Allende Prieto, J. Annis, S. Bailey, C. Balland, and et al. The DESI Experiment Part I: Science, Targeting, and Survey Design. *ArXiv e-prints*, October 2016.
- [138] N. Benitez, R. Dupke, M. Moles, L. Sodre, J. Cenarro, A. Marin-Franch, K. Taylor, D. Cristobal, A. Fernandez-Soto, C. Mendes de Oliveira, J. Cepa-Nogue, L. R. Abramo, J. S. Alcaniz, R. Overzier, C. Hernandez-Monteagudo, E. J. Alfaro, A. Kanaan, J. M. Carvano, R. R. R. Reis, E. Martinez Gonzalez, B. Ascaso, F. Ballesteros, H. S. Xavier, J. Varela, A. Ederoclite, H. Vazquez Ramio, T. Broadhurst, E. Cypriano, R. Angulo, J. M. Diego, A. Zandivarez, E. Diaz, P. Melchior, K. Umetsu, P. F. Spinelli, A. Zitrin, D. Coe, G. Yepes, P. Vielva, V. Sahni, A. Marcos-Caballero, F. Shu Kitaura, A. L. Maroto, M. Masip, S. Tsujikawa, S. Carneiro, J. Gonzalez Nuevo, G. C. Carvalho, M. J. Reboucas, J. C. Carvalho, E. Abdalla, A. Bernui, C. Pigozzo, E. G. M. Ferreira, N. Chandrachani Devi, C. A. P. Bengaly, Jr., M. Campista, A. Amorim, N. V. Asari, A. Bongiovanni, S. Bonoli, G. Bruzual, N. Cardiel, A. Cava, R. Cid Fernandes, P. Coelho, A. Cortesi, R. G. Delgado, L. Diaz Garcia, J. M. R. Espinosa, E. Galliano, J. I. Gonzalez-Serrano, J. Falcon-Barroso, J. Fritz, C. Fernandes, J. Gorgas, C. Hoyos, Y. Jimenez-Teja, J. A. Lopez-Aguerri, C. Lopez-San Juan, A. Mateus, A. Molino, P. Novais, A. OMill, I. Oteo, P. G. Perez-Gonzalez, B. Poggianti, R. Proctor, E. Ricciardelli, P. Sanchez-Blazquez, T. Storchi-Bergmann, E. Telles, W. Schoennell, N. Trujillo, A. Vazdekis, K. Viironen, S. Daflon, T. Aparicio-Villegas, D. Rocha, T. Ribeiro, M. Borges, S. L. Martins, W. Marcolino, D. Martinez-Delgado, M. A. Perez-Torres, B. B. Siffert, M. O. Calvao, M. Sako, R. Kessler, A. Alvarez-Candal, M. De Pra, F. Roig, D. Lazzaro,

J. Gorosabel, R. Lopes de Oliveira, G. B. Lima-Neto, J. Irwin, J. F. Liu, E. Alvarez, I. Balmes, S. Chueca, M. V. Costa-Duarte, A. A. da Costa, M. L. L. Dantas, A. Y. Diaz, J. Fabregat, F. Ferrari, B. Gavela, S. G. Gracia, N. Gruel, J. L. L. Gutierrez, R. Guzman, J. D. Hernandez-Fernandez, D. Herranz, L. Hurtado-Gil, F. Jablonsky, R. Laporte, L. L. Le Tiran, J. Licandro, M. Lima, E. Martin, V. Martinez, J. J. C. Montero, P. Penteado, C. B. Pereira, V. Peris, V. Quilis, M. Sanchez-Portal, A. C. Soja, E. Solano, J. Torra, and L. Valdivielso. J-PAS: The Javalambre-Physics of the Accelerated Universe Astrophysical Survey. *ArXiv e-prints*, March 2014.