# Universidade de São Paulo Instituto de Física

### ESTUDO SOBRE O FLUXO DIRIGIDO

Arthur Luciano Vezzoni Ramos dos Reis

Orientador: Profa. Dra. Frederique Marie-Brigitte Sylvie Grassi

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Doutor em Ciências

Comissão Examinadora:

Profa. Dra. Frederique Marie-Brigitte Sylvie Grassi (IFUSP)

Prof. Dr. Alexandre Alarcon do Passo Suaide (IFUSP)

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IFUSP)

Prof. Dr. Otavio Socolowski Junior (UFRGS)

Prof. Dr. Sandra dos Santos Padula(UNESP)

São Paulo, 2010.

### FICHA CATALOGRÁFICA Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Reis, Arthur Luciano Vezzoni Ramos dos

Estudo sobre o fluxo dirigido. São Paulo, 2010.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física – Dept<sup>o</sup> de Física Matemática

Orientador: Profa. Dra. Frederique Grassi Área de Concentração: Física das Partículas Elementares e Campos

Unitermos: 1. Acelerador de partículas; 2. Detecção de partículas; 3. Física de altas energias; 4. Mecânica dos fluidos.

USP/IF/SBI-061/2010

"Entre nous deux y'aura pas mieux Que l'éternel instant présent Ferme les yeux qu'est-ce que tu veux? Qu'est-ce que tu vois? Moi c'est toi"

Para Taís, je t'aime.

Começo agradecendo os meus amigos e colegas. O povo da física, em especial aos integrantes do GRHAFITE, professores e alunos, e ao nosso pequeno grupo de hidrodinâmica relativística. Também desejo agradecer os Thesards, a Barca Encalhada, o povo do Domingo Feliz, os meus colegas do francês. Um agradecimento especial aos meus amigos mais recentes, Cris, Lia, Fabinho. Todos vocês foram importantes na minha vida, seja bebendo no bar, jogando papo fora, em jogatinas nerdisticas, nos seus conselhos e em tudo o mais.

Agradeço a grande paciênciencia que a minha orientadora Frederique Grassi e o meu orientador na França Jean-Yves Ollitrault tiveram comigo. Me mostrando claramente o que devia estudar. Me guiando quando chegava no que parecia um beco sem saída. Me apresentando uma nova física e renovando o meu gosto por esta área.

A todos os meus familiares, em especial aos meus pais, Aroldo e Edna. Boa parte do que eu sou se deve a vocês. Agradeço por terem sempre me incentivado e por terem me dado as oportunidades que me permitiram terminar esta tese e o meu curso de doutorado. Ao meu irmão Amadeo e aos meus finados irmãos Lau e Ana Carolina.

Aos meus sogros Jarbas e Ana Maria, que são como segundos pais para mim.

Também agradeço à Capes, por ter financiado este trabalho e à CNPq por ter financiado meu doutorado sanduíche na França.

### Resumo

Nesta tese estudamos o fluxo dirigido, a primeira componente na expansão de Fourier da distribuição azimutal das partículas emitidas. Diferente do fluxo elíptico, que é muito bem estudado e descrito na literatura, a física que gera este observável ainda não é muito conhecida. Mostramos que este observável é altamente sensível a condições iniciais, comparando vários resultados numéricos para diferentes condições iniciais, entre analíticas e numéricas. Propomos que o fluxo dirigido também é sensível à aceleração longitudinal e formulamos um modelo analítico baseado nesta hipótese. Este modelo sugere quais ingredientes são relevantes para o fluxo dirigido. Ele é confrontado com sucesso com cálculos numéricos, resultados experimentais e cálculos que não incluem a aceleração longitudinal.

### Abstract

In this thesis we study the directed flow, the first component in the Fourier's expansion of the azimuthal distribution of emitted particles. Unlike the elliptic flow, which is well studied and described in the literature, the physics that generates this observable is not yet well described. We show that this observable is highly sensible to the initial conditions, comparing several numeric results with different initial conditions, between analytic and numeric ones. We propose that the directed flow is also sensitive to the longitudinal acceleration and we formulate an analytic model based in this hypothesis. This model suggests which ingredients are relevant to the directed flow. It is confronted with success against numeric calculus, experimental results, and calculus that do not include the longitudinal acceleration.

# Sumário

1	Introdução					
<b>2</b>	Modelo hidrodinâmico clássico					
	2.1	Equação de Euler e conservação da massa	15			
	2.2 Conservação do momento e da energia e equação da onda					
3	Modelo hidrodinâmico relativístico					
	3.1	Equações da hidrodinâmica relativística	22			
		3.1.1 Conservação do número bariônico	22			
		3.1.2 Tensor de energia-momento	23			
	3.2	Equação de estado				
	3.3	Emissão de partículas	30			
4	neRIO	37				
	4.1	Método SPH	39			
5	Esc	oamentos anisotrópicos - origem física				
6	Resultados obtidos com o NeXSPheRIO					
	6.1	5.1 Fluxo elíptico, ajustes nas condições iniciais e na temperatura de de-				
		sacoplamento	51			
		6.1.1 Fluxo dirigido	53			
7	Modelo simplificado para estimar o fluxo dirigido 6					

		7.0.2	Derivação do modelo	61		
		7.0.3	Teste do modelo simplificado	65		
	7.1	Estudo	o de condições iniciais com <i>"tilt"</i>	70		
		7.1.1	O papel do <i>"tilt"</i>	70		
		7.1.2	O papel da "skewness"	72		
8	Con	dições	iniciais físicas	79		
	8.1	Condi	ções iniciais tipo Hirano-Tsuda	79		
		8.1.1	O efeito da inclusão de platôs nas condições iniciais	81		
8.2 Condições iniciais tipo Adil-Gyulassy				85		
		8.2.1	Voltando às condições iniciais do NeXus	89		
9	Conclusão					
$\mathbf{A}$	Conservação da entropia					
в	Equação de Euler relativística e limite clássico					
$\mathbf{C}$	Equivalência entre a ação e as equações hidrodinâmicas					
D	Equações do movimento no SPheRIO 10					

### Capítulo 1

### Introdução

A colisão de íons a altíssimas energias é uma ótima ferramenta para estudar uma das leis fundamentais da natureza, a força forte. Uma das principais características da força forte é o fato de sua constante de acoplamento diminuir com a distância. Assim, a intensidade da força que une os constituintes dos hádrons (os quarks e os glúons) é pequena quando esses se encontram a distâncias menores que 1fm  $(10^{-15}m)$ . E ela cresce rapidamente conforme as distâncias aumentam. Então, esse efeito impede a observação direta de quarks e glúons livres. Podemos, porém, observar efeitos indiretos que mostram a existência dessas partículas elementares, como, por exemplo, nos choques altamente inelásticos de prótons com prótons. Similarmente, conforme aumentamos a energia dos íons numa colisão, conseguimos discriminar regiões cada vez menores dentro deles. A teoria que descreve a força entre quarks e glúons é a Cromodinâmica Quântica ou QCD, na sua sigla em inglês[1].

Nos instantes iniciais do universo primordial, até aproximadamente  $10^{-5}s$  após o Big Bang, acredita-se que, devido à altíssima densidade de energia do universo, e por consequência, elevada temperatura, os quarks e glúons se encontravam livres. Eles formavam um estado da matéria chamado Plasma de Quarks e Glúons ou QGP, sua sigla em inglês. A existência desse novo estado da matéria foi prevista nos anos 1970. Também acredita-se que esse estado de matéria se encontra nas estrelas de nêutrons. Nestas estrelas, a densidade é tão alta que os nêutrons se dissolvem em seus subconstituintes, os quarks e glúons. Pode também ocorrer a criação do Plasma de Quarks e Glúons nas colisões de raios cósmicos de alta energia com a atmosfera.

Aqui na Terra, uma maneira de produzir essas altíssimas densidades são as colisões de altas energias de íons pesados. Esta, aliás, é a maneira mais sistemática de estudar o QGP e tentar aprender mais sobre a interação forte. Essas colisões começaram nos anos 1980 com o AGS (Brookhaven's Alternate Gradiente Synchroton) com colisões de ouro e silício, entre outros, e energias no centro de massa de 5 GeVA. Na mesma época, elas foram estudadas com o acelerador SPS (Super Proton Synchroton) do CERN, na Suíça, com colisões de 17 GeVA de, entre outros núcleos, núcleos de enxofre e de chumbo. O próximo grande acelerador de íons pesados foi o RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider), que começou a funcionar em 2000, com colisões de cobre e de ouro e energias no centro de massa indo de 19,6 a 200 GeV. O acelerador RHIC possui quatro detectores: PHOBOS, que detecta partículas em quase todos os ângulos e observa correlações entre elas; STAR, que praticamente tira uma foto tridimensional das colisões; BRAHMS, que observa as partículas identificadas; PHENIX, que busca partículas formadas no início da colisão e que não interagiram muito com a bola de fogo produzida na colisão. Esta tese descreve observáveis vistas no acelerador RHIC. Em 2009, um novo acelerador de partículas entrou em funcionamento, o LHC (Large Hadron Collider). Esse acelerador irá colidir núcleos de chumbo, com a energia do centro de massa chegando a 14 TeVA.

A densidade de energia de repouso de um próton é 1  $GeV/fm^3$ . Se uma densidade de energia tão elevada prevalecesse sobre um volume maior, acredita-se que os quarks e glúons ignorariam as fronteiras do seu nucleon pai, e poderiam interagir com as outras partículas dentro do volume inteiro. Essa hipótese vem de resultados da QCD na rede<sup>1</sup>, que indica que a densidade para o deconfinamento deve ser da ordem de 1  $GeV/fm^3$ . Por essa razão, as colisões de íons pesados a altas energias são usadas para estudar o Plasma de Quaks e Glúons.

O primeiro modelo de hidrodinâmica relativístico para colisões hadrônicas foi pro-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Um método numérico de resolver as equações da QCD.

posto por Landau em 1955[2]. Nas colisões de íons pesados ultra relativísticas do RHIC, o número de partículas alcança facilmente a casa de milhares num volume pequeno. Assim, espera-se que ocorram bastante colisões e os modelos hidrodinâmicos seriam uma das possíveis ferramentas para descrever tais colisões. Não temos uma assinatura clara de que a termalização seja alcançada e, caso ela ocorra, que ela seja alcançada rapidamente. Porém, supondo que a termalização ocorre, se a temperatura for alta o suficiente, acreditamos que o fluido atinge a fase de QGP, onde os quarks e glúons estão desconfinados. Quando o fluido esfriar, ele volta para a fase hadrônica. Esta descrição funciona bem no RHIC, como veremos.

Duas fortes evidências indicam que a matéria que se forma nessas colisões interage fortemente, o que é necessário para ocorrer a termalização. Uma das evidências é conhecida como *Jet Quenching*. Em um espalhamento duro<sup>2</sup> de dois prótons ou de dêuterons com ouro, observa-se a formação de dois jatos de partículas de grande momento transversal, com direções opostas. Em colisões de íons pesados, observamos somente um dos jatos. Uma possível explicação seria que, quando os dois jatos são criados próximos à borda, um dos jatos é absorvido pelo meio formado na colisão. Para que isso aconteça, é necessário que o meio esteja denso de modo a conseguir "brecar" as partículas de alto momento que estão tentando atravessá-lo.

A outra evidência é a observação de que a distribuição angular de partículas na direção transversal ao eixo da colisão tem uma forma elíptica. Caso a densidade da matéria formada na colisão fosse pequena, ela se comportaria como um gás. Para um gás, todas as partículas são emitidas isotropicamente e assim a distribuição angular é circular. Chamamos de fluxo elíptico o alongamento da distribuição angular. Ele é então relacionado com o grau de interação entre as partículas.

A partir destas observações conclui-se [3] que a matéria formada é aparentemente a que mais se aproxima de um fluido ideal, tendo uma viscosidade muito baixa. Foi sugerido pelas teorias de campo que o limite inferior da viscosidade (dividida pela densidade de entropia) é:  $\eta/s > 1/(4\pi)$ ; modelos hidrodinâmicos em duas dimensões

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Colisões onde há uma grande troca de energia entre o alvo e o projeto.

descrevem dados de fluxo elíptico da colaboração STAR usando:  $\eta/s > 0.1$ , próximo de  $\eta/s > 1/(4\pi)$ . Para comparação, esse valor é 10 vezes maior que a viscosidade da água.

Este trabalho visa estudar a fundo um outro fluxo, o dirigido. Até o momento, a descrição teórica dessa quantidade é quase inexistente. Ou seja, a física que gera esse escoamento não foi ainda bem descrita nas energias do RHIC. Propomos, nesta tese, um modelo para o comportamento desse observável e comparamos os resultados, analíticos e numéricos, com dados experimentais.

No capítulo 2 é feita uma introdução à hidrodinâmica clássica. Em seguida, no capítulo 3, descrevemos o caso relativístico, incluindo quais ingredientes usamos no nosso modelo hidrodinâmico. O método numérico usado para resolver as equações hidrodinâmicas relativísticas em 3 + 1 dimensões é mostrado no capítulo 4. Apresentamos as variáveis ligadas aos movimentos coletivos no capítulo 5. Os resultados, tanto para o fluxo elíptico, quanto para o fluxo dirigido, usando o método NeXSPheRIO<sup>3</sup> são mostrados no capítulo 6. O nosso modelo analítico para o fluxo dirigido é apresentado no capítulo 7. No capítulo 8 usamos o nosso modelo para estudar algumas condições iniciais encontradas na literatura. Terminamos com uma conclusão, no capítulo 9, sobre os avanços obtidos neste trabalho. Nos apêndices A, B, C e D são mostrados detalhes de contas citadas no corpo da tese.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Acoplamento dos códigos NeXus [4] e SPheRIO[5].

### Capítulo 2

### Modelo hidrodinâmico clássico

Antes de descrever o modelo hidrodinâmico relativístico, relembramos o modelo clássico para um fluido ideal, resumindo partes dos capítulos 1 e 8 de [6]. Essa revisão visa relembrar alguns conceitos e também facilitar a compreensão do caso relativístico.

#### 2.1 Equação de Euler e conservação da massa

A hidrodinâmica descreve os comportamentos de fluidos (líquidos, gases e plasmas) de forma macroscópica. Isso quer dizer que não nos ocupamos com o comportamento individual dos constituintes do fluido, ele é considerado como um meio contínuo. É bom ressaltar que quando descrevemos o comportamento de uma certa parcela do fluido, digamos, uma partícula do fluido, ela também é tratada como um fluido. Isso quer dizer que assumimos que o número de partículas dentro desta partícula ainda é muito grande.

Para descrever o fluido, precisamos obter sua velocidade,  $\vec{v}(x, y, z, t)$ , e duas outras quantidades macroscópicas, como por exemplo a sua densidade de massa,  $\rho(x, y, z, t)$ , e pressão, p(x, y, z, t). Aqui, essas quantidades são definidas para um dado ponto fixo no espaço, e não para as coordenadas de partículas elementares dentro do fluido. Segundo o tipo de hidrodinâmica, pode-se usar coordenadas fixas no laboratório ou ligadas ao fluido. O comportamento da densidade do fluido é descrito pela sua equação de continuidade. Para obtê-la, igualamos a quantidade de massa do fluido que sai de um dado volume ( $V_0$ ) com a perda de massa, em função do tempo, dentro deste mesmo volume. Com um pouco de álgebra, chegamos na equação da continuidade da massa dada por:

$$\frac{d\rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0. \tag{2.1}$$

Chamamos o termo  $\rho \vec{v}$  de fluxo da densidade de massa. Este vetor aponta na direção do movimento do fluido e a sua magnitude é igual à massa que atravessa uma unidade de área perpendicular à velocidade por unidade de tempo.

Para obter a velocidade do fluido, usamos diretamente a primeira lei de Newton  $(\vec{F} = m d\vec{v}/dt)$  para um dado elemento de volume dentro do fluido. A força total  $\vec{F}$  exercida sobre o volume  $V_0$  é dada pelo oposto da integral da pressão sobre a superfície deste volume. Devemos relembrar que desejamos obter a velocidade para um conjunto de coordenadas fixas no espaço, e não no fluido. A derivada  $d\vec{v}/dt$  na lei de Newton diz respeito ao pedaço de fluido  $V_0$  que está em movimento. Por isso, devemos separá-la em duas partes. Uma que dá a variação da velocidade em função do tempo num dado ponto do espaço. Outra que é a diferença de velocidade no mesmo instante de dois pontos do espaço separados por uma distância  $d\vec{r}$ , onde  $d\vec{r}$  é a distância percorrida pelo fluido no tempo dt. Assim, obtemos a equação de movimento chamada equação de Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \ \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p.$$
(2.2)

A hipótese de fluido ideal é que não ocorre dissipação de energia devido a fricções internas (viscosidade zero) e nem troca de calor entre diferentes partes do fluido (condutividade térmica desprezível). Assim, o movimento do fluido é adiabático. Como consequência, a densidade de entropia de uma certa parcela do fluido, s, é constante, ds/dt = 0. Reescrevendo a derivada total como derivadas parciais, podemos obter outra equação de conservação, a equação da continuidade da entropia:

$$\frac{d\rho s}{\partial t} + \nabla(\rho s \vec{v}) = 0.$$
(2.3)

Para obter (2.3) usamos a equação da continuidade da massa.

As equações (2.1) a (2.3) são as equações de base obedecidas por um fluido perfeito. Elas formam um sistema de cinco equações com seis incógnitas, que é fechado escolhendo uma equação de estado.

# 2.2 Conservação do momento e da energia e equação da onda

A conservação da energia e do momento num fluido satisfaz as equações de base (2.1) a (2.3). A energia por unidade de volume é  $1/2\rho v^2 + \rho \epsilon$ . Pode-se mostrar que a integração sobre um volume da variação da energia é:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int (\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\epsilon) dV = -\oint \rho \vec{v} (\frac{1}{2}\rho v^2 + w) \cdot d\vec{f}, \qquad (2.4)$$

onde  $\epsilon$  é a energia interna por unidade de massa e w é a entalpia. O lado esquerdo dá a mudança de energia ao longo do tempo dentro de um dado volume. O lado direito é a quantidade de energia que atravessa a superfície do volume neste mesmo tempo. Assim, o termo  $\rho \vec{v}(\frac{1}{2}v^2 + w)$  dentro da integral da direita é o vetor densidade do fluxo de energia. Esse vetor depende da entalpia e não da densidade de energia interna. Para esclarecer, usando a definição da entalpia,  $w = \epsilon + p/\rho$  no vetor de fluxo da energia, temos:

$$-\oint \rho \vec{v} (\frac{1}{2}v^2 + \epsilon) \cdot d\vec{f} - \oint p \vec{v} \cdot d\vec{f}.$$
(2.5)

Dessa forma fica fácil notar que o primeiro termo é a energia, cinética e interna, que atravessa uma superfície fechada por unidade de tempo. Já o segundo é o trabalho devido às forças de pressão sobre a superfície.

Um raciocínio similar pode ser feito para o momento do fluido. Como o momento é um vetor, o fluxo de momento que atravessa a superfície do volume V é um tensor de ranque 2. Usamos a notação de Einstein, ou seja, quando repetidos em uma multiplicação, os símbolos i e k (que denotam as direções  $x, y \in z$  dos vetores), substituem o símbolo de soma,  $\Sigma$ . Com essa notação, o fluxo de momento tem uma forma similar ao fluxo de energia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho v_i dV = -\oint \Pi_{ik} df_k, \qquad (2.6)$$

com

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k.^1 \tag{2.7}$$

A interpretação da equação (2.6) também é similar à do fluxo de energia. O lado esquerdo descreve a variação no tempo da componente *i* do momento dentro do volume V. O lado direito representa a quantidade de momento que atravessa a superfície por unidade de tempo. Reescrevemos  $d\vec{f}$  como  $dn_k f$ , onde  $\hat{n}$  é um vetor unitário normal ao volume V que aponta para fora. Com essa notação, o fluxo da i-ésima componente do momento que atravessa uma unidade de superfície é  $\Pi_{ik}n_k$ .

Finalmente, é útil introduzir a propagação de pequenas perturbações num fluido.

 $<sup>{}^{1}\</sup>delta_{ik}$  é chamado de tensor unidade. Ele tem o valor igual a 1 quando  $i = k \in 0$  para  $i \neq k$ .

Pequenas oscilações em fluidos compressíveis são chamadas de ondas de som. Em função do potencial de velocidade,  $\vec{v} = \nabla \phi$ , a equação de uma onda propagando dentro de um fluido ideal é dada por:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - c_S^2 \Delta \phi = 0, \qquad (2.8)$$

onde a velocidade do som dentro do fluido satisfaz:

$$c_S = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}}\bigg|_s.$$
 (2.9)

As outras quantidades,  $\vec{v},\,p,\,\rho,$  satisfazem também equações do tipo (2.8).

### Capítulo 3

### Modelo hidrodinâmico relativístico

O uso da relatividade é necessário quando as velocidades são da ordem da velocidade da luz. As velocidades na mecânica dos fluidos são as do fluido, que aparecem diretamente nas equações da hidrodinâmica, e as velocidades térmicas das partículas. No RHIC, os núcleos são acelerados a 99,995% da velocidade da luz, de modo que o fluido também deve ter velocidade relativística. As velocidades térmicas estão "escondidas" nas quantidades macroscópicas p,  $\epsilon$ , etc. Por exemplo, para uma partícula obedecendo a estatística de Maxwell-Boltzman, a velocidade média é  $\sqrt{8T/\pi m}$  (com k = 1). Tomando que a massa e a temperatura típicas num gás de píons são ~ 100MeV, essa velocidade seria maior que a da luz. Por isso, além de tratar os píons como objetos que obedecem a mecânica quântica, devemos sempre tratá-los também de forma relativística. Assim, temos que usar uma prescrição que inclua a relatividade na hidrodinâmica.

Os modelos hidrodinâmicos relativísticos para colisões nucleares de altas energias seguem o seguinte roteiro:

- As condições iniciais para a colisão são escolhidas.
- A evolução do fluido é calculada usando as equações hidrodinâmicas relativísticas, completadas pela equação de estado.
- As partículas sofrem um desacoplamento do fluido e são emitidas.

Cada um dos quatro elementos, condições iniciais, equações da hidrodinâmica relativística, equação de estado e desacoplamento podem ser tratados mais ou menos de forma independente. Isso quer dizer que podemos mudar um deles e verificar como isso afeta os observáveis. Destes quatro elementos, revisaremos três nesta seção, as equações hidrodinâmicas, equação de estado e o desacoplamento. A discussão sobre as condições iniciais, por ser o ponto mais relevante no nosso modelo para o escoamento dirigido, é tratada ao longo da segunda metade dessa tese, se estendendo do capítulo 5 até o capítulo 8. Na revisão sobre hidrodinâmica relativística que se segue, fazemos um resumo do capítulo 15 do livro [6], do segundo capítulo da dissertação [7] e do artigo de revisão de hidrodinâmica [8].

#### 3.1 Equações da hidrodinâmica relativística

#### 3.1.1 Conservação do número bariônico

Para obter o equivalente relativístico da conservação da continuidade (2.6) para a densidade de massa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0, \qquad (3.1)$$

temos que levar em consideração a contração de Lorentz do volume por um fator  $u_0$ , a primeira componente da quadri-velocidade do fluido (visto por exemplo do laboratório),  $u^{\mu} = (\gamma, \gamma \vec{v})$ . O quadrado da quadri-velocidade  $u^{\mu}$  é:

$$u^{\mu}u_{\nu} = (u^0)^2 - (\vec{u})^2 = 1.$$
(3.2)

De modo que  $u^{\mu}$  só tem três componentes independentes. No caso relativístico, a massa não é uma quantidade conservada. Assim, vamos considerar uma quantidade que se conserve ao longo de toda evolução, como por exemplo o número bariônico. Vamos chamar a sua densidade no referencial de repouso de n. Esta densidade em um referencial em movimento será:  $nu_0$ . Substituindo a densidade de massa  $\rho$  por  $nu_0$ , e usando a nossa notação para a parte espacial da quadri-velocidade,  $\vec{u} = \gamma \vec{v}$ , podemos reescrever (3.1):

$$\frac{\partial(nu^{\mu})}{\partial u^{\mu}} = 0. \tag{3.3}$$

Temos assim a equação da continuidade obdecida pelo quadri-vetor  $nu^{\mu}$ , sendo  $nu^{0}$ a densidade bariônica e  $n\vec{u}$  o seu fluxo.

Nas colisões nucleares relativísticas, existem também outras quantidades (estranheza, carga elétrica) que são conservadas. Mas elas são tratadas de maneira diferente (confira 3.2).

#### 3.1.2 Tensor de energia-momento

Neste ponto, gostaríamos de escrever uma generalização relativística da equação de movimento de Euler (2.2). Se quisermos usar forças, não é claro se devemos começar com  $\partial \vec{p}/dt$  ou  $\partial \vec{p}/d\tau$ . O caminho usual é raciocinar em termos da conservação de energia e momento. Esta conservação gera quatro equações de conservação local, que são análogas às da conservação da carga (3.3). Como a energia e o momento também são um quadri-vetor, suas correntes associadas se tornam um tensor,  $T^{\mu\nu}$ .

Definimos os valores deste tensor da seguinte forma:

- $T^{00}$  é a densidade de energia.
- $T^{0j}$  é a densidade da j-ésima componente do momento, com j = 1, 2, 3.
- $T^{i0}$  é o fluxo de energia na direção do eixo i.
- $T^{ij}$  é o fluxo da j-ésima componente do momento na direção do eixo i.

As equações da conservação do tensor energia-momento são:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{3.4}$$

A hipótese de equilíbrio térmico local nos dá alguns vínculos sobre o tensor  $T^{\mu\nu}$ . Este vínculo implica que não há fluxo de energia, nem densidade de momento no referencial de repouso do fluido, ou seja, que as componentes  $T^{i0} \in T^{0j}$  do tensor são nulas. A componente da força sobre um elemento de área  $d\vec{s}$  é dada por  $T^{ij}ds_j$ . Assim, no referencial de repouso,  $T^{ij}ds_j = Pds_j$ , ou seja,  $T^{ij} = P\delta^{ij}$ . Aplicando estas restrições, temos que  $T^{\mu\nu}$  fica com a seguinte forma (no referencial de repouso do fluido):

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$
 (3.5)

Para passar deste referencial para um outro qualquer devemos fazer a transformação de Lorentz deste tensor, o que significa fazer a seguinte conta:

$$T^{\prime\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}T^{\alpha\beta}, \qquad (3.6)$$

onde, em primeira ordem na velocidade, a matriz da transformação de Lorentz é dada por:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & v_x & v_y & v_z \\ v_x & 1 & 0 & 0 \\ v_y & 0 & 1 & 0 \\ v_z & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(3.7)

Calculando (3.6) com (3.7) e guardando somente os termos em primeira ordem na velocidade, o tensor energia-momento neste novo referencial, T', fica com a seguinte

forma:

$$\mathbf{T}' = \begin{pmatrix} \epsilon & (\epsilon + P)v_x & (\epsilon + P)v_y & (\epsilon + P)v_z \\ (\epsilon + P)v_x & P & 0 & 0 \\ (\epsilon + P)v_y & 0 & P & 0 \\ (\epsilon + P)v_z & 0 & 0 & P \end{pmatrix}.$$
 (3.8)

Podemos reescrever a matriz (3.8) de uma forma mais compacta:

$$T'^{\mu\nu} = (\epsilon + P)u^{\mu}u^{\nu} - Pg^{\mu\nu}, \qquad (3.9)$$

com

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
 (3.10)

Como (3.9) é válida no referencial de repouso e ambos os lados da equação são tensores, ela é válida em qualquer referencial em movimento, não só naqueles de pequena velocidade<sup>1</sup>.

O apêndice A mostra como a conservação do tensor de energia-momento implica a conservação da entropia

$$\frac{\partial(su^{\nu})}{\partial x^{\nu}} = 0. \tag{3.11}$$

No apêndice B mostramos como podemos reobter as versões clássicas das equações de Euler, partindo de (3.4).

Como no caso clássico, as pequenas oscilações também obedecem uma equação de

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Uma maneira alternativa de mostrar que (3.9) vale em qualquer referencial inercial é substituir em (3.6) a transformação de Lorentz adequada para passar do referencial de repouso ao referencial inercial.

onda do tipo (2.8)[8].

#### 3.2 Equação de estado

O sistema de equações formado por (3.3) e (3.4) contém cinco equações, com seis incógnitas. Para fechar este sistema, escolhemos uma equação de estado.

Estão implementadas no SPheRIO três equações de estado. A primeira equação de estado corresponde a um plasma de quarks e glúons longe do desconfinamento. Ela é útil para estudar fenômenos onde só o comportamento inicial do fluido importa. De um modo geral a bola de fogo (a matéria criada na colisão) pode ser descrita pelo seu volume V (que desaparece quando se consideram somente as densidades das quantidades extensivas), pela sua temperatura T e potenciais químicos para cada quantidade conservada: número bariônico, estranheza e carga elétrica.

Na fase de plasma, os principais constituintes são os glúons (que são bósons sem massas), os quarks  $u \in d$  (férmions leves) e o quark s (férmion massivo). Assim introduzimos os potenciais  $\mu_u$ ,  $\mu_d \in \mu_s$ . É comum considerar que os quarks  $u \in d$  não têm massa e têm o mesmo potencial:  $\mu_q = \mu_u = \mu_d$ .

À temperatura muito alta, as interações entre os quarks e glúons são desprezíveis devido à liberdade assintótica. Como temos em vista colisões do RHIC onde a densidade bariônica é pequena (região de rapidez média), temos  $\mu_q = \mu_{\bar{q}} = 0$ . Além disto, as massas também são desprezíveis. Com essas restrições, temos que a equação de estado é dada por ([9] e [10]):

$$p(T) = g \frac{\pi^2}{90} T^4$$

$$s(T) = g \frac{2\pi^2}{45} T^3$$

$$\epsilon(T) = g \frac{\pi^2}{30} T^4.$$
(3.12)

O fator g é a degeneres cência:  $g = g_g + 7/8(g_q + g_{\bar{q}})$ , com  $g_g = 8 \times 2$ , o fator de degenerescência para os glúons e  $g_q = g_{\bar{q}} = 3 \times 2 \times N_f$  o fator de degenerescência para os quarks, onde  $N_f$  é o número de sabores de quarks. Se  $N_f = 2$  temos que  $g \sim 40$ .

As duas outras equações de estado implementadas se aplicam a todo o intervalo de temperatura. Para temperaturas mais baixas, em particular perto do confinamento, as interações entre os constituintes são importantes. Uma maneira comum de levar isso em conta é usar o modelo de sacola do MIT. Este modelo foi desenvolvido para descrever hádrons e permite reproduzir bem os dados, como por exemplo, o espectro de massa desses hádrons. Nele, os hádrons são descritos como um conjunto de quarks livres, sem massa, mantidos juntos numa sacola. Uma energia constante é associada a essa sacola, *B*. Este modelo, para alguns quarks num hádron, pode ser extrapolado para muitos quarks (e para glúons) perto do confinamento. É feita a hipótese de que a densidade de energia da matéria de quarks e glúons é composta da soma de um termo referente a um gás livre mais um termo referente à sacola:

$$\epsilon_Q = g \frac{\pi^2}{30} T^4 + B. \tag{3.13}$$

Para que os quarks permaneçam na sacola, a pressão associada a eles é balanceada por um termo -B:

$$p_Q = g \frac{\pi^2}{90} T^4 - B. \tag{3.14}$$

A densidade de entropia tem a mesma forma da densidade de entropia dos quarks e glúons livres:

$$s_Q = 2g \frac{\pi^2}{45} T^3. \tag{3.15}$$

Se quisermos levar em conta o potencial bariônico, para glúons e dois sabores de quarks

 $(u \in d)$ , a equação de estado é dada por:

$$\epsilon_Q = \frac{\mu_B^4}{54\pi^2} + \frac{T^2\mu_B^2}{3} + \frac{37\pi^2T^4}{30} + \mathbf{B}$$
(3.16)  
$$p_Q = \frac{\mu_B^4}{162\pi^2} + \frac{T^2\mu_B^2}{9} + \frac{37\pi^2T^4}{90} - \mathbf{B}$$
$$n_Q = \frac{2\mu_B^3}{8\pi^2} + \frac{2\mu_B}{9}T^2$$
$$s_Q = \frac{2\mu_B^2}{9}T + \frac{74\pi^2}{45}T^3.$$

Para temperaturas mais baixas, a matéria consiste de hádrons. Podemos supor que eles não interagem e são pontuais. No regime do RHIC, todas as partículas podem ser tratadas com a estatística de Boltzmann, exceto os píons. Além disso, é comum introduzir no lugar dos potenciais  $\mu_q$  e  $\mu_s$ , os potenciais  $\mu_B$  e  $\mu_S$ , tal que  $\mu_q = \mu_B/3$  e  $\mu_s = \mu_B/3 - \mu_S$ . Como não estudaremos a produção de partículas estranhas, podemos supor  $\mu_S = 0$ , de modo que uma partícula  $\Lambda$  será considerada como um próton com massa maior. Se quiséssemos estudar as propriedades das partículas estranhas, poderíamos impor que a estranheza total é nula (número igual de quarks *s* e  $\bar{s}$ ). Isso permitiria obter  $\mu_S(\mu_B, T)$  e, assim, resolver uma equação de conservação da estranheza. Podemos agora escrever a pressão na fase hádrons como:

$$p_{iH}(T,\mu_B) \approx \sum_{i} \frac{g_i}{2\pi^2} exp\left(\frac{B_i\mu_B}{T}\right) T^2 m_i^2 K_2\left(\frac{m_i}{T}\right) + \frac{g_\pi}{2\pi^2} T^2 m_\pi^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_2\left(\frac{m_\pi}{T}(1+l)\right)}{(1+l)^2},$$
(3.17)

onde  $K_2$  é a função de Bessel modificada,  $B_i$  é o número bariônico da partícula,  $m_i$  a sua massa e  $g_i$  a sua degenerescência. O segundo termo à direita, conforme explicado, corresponde aos píons.

A equação de estado para um gás ideal não leva em conta o efeito da repulsão a pequenas distâncias dos hádrons. Esta repulsão acaba aumentando o volume das partículas. A forma como essa modificação foi implementada no SPheRIO se encontra



Figura 3.1: Esquerda: Transição de fase de primeira ordem. Direita: Transição de fase com ponto crítico.

em [5].

A diferença entre as duas equações de estado implementadas no SPheRIO se dá na forma em que é feita a junção das duas fases. Ou seja, da fase de quarks e glúons, usando a equação de estado do tipo sacola do MIT com a fase de hádrons. No primeiro caso, supõe-se que há uma transição de fase de primeira ordem entre o plasma de quarks e glúons e o gás de hádrons. Na transição,  $p_H(T_t, \mu_{Bt}) = p_Q(T_t, \mu_{Bt})$ , mas outras quantidades, como a densidade de entropia, tem descontinuidade. A figura 3.1 à esquerda mostra esquematicamente o conjunto de pontos  $(T_t, \mu_{Bt})$  obtido igualando as pressões da fase de quarks e glúons e da fase de hádrons. Sobre a linha contínua há coexistência das duas fases.

O segundo caso incorpora ideias mais recentes sobre a mudança de fase. Simulações de QCD na rede parecem indicar que a transição de fase seja de segunda ordem para Tgrande e  $\mu_B$  pequeno. Por outro lado, a transição continuaria sendo de primeira ordem para T pequeno e  $\mu_B$  grande. Assim, existiria um ponto crítico, onde se passaria do regime de transição de fase de primeira ordem para o de transição de fase de segunda ordem. Essa possibilidade é ilustrada pela figura 3.1 à direita. Numa transição de segunda ordem a entropia varia continuamente, mas não as suas derivadas. Pode ser que para T muito grande a transição não seja de segunda ordem, mas seja um *crossover*: todas as derivadas seriam contínuas. Uma equação de estado com uma parametrização que incorpora essas características foi descrita em [11].

#### 3.3 Emissão de partículas

A expansão da matéria quente e densa criada numa colisão é descrita resolvendo as equações da hidrodinâmica com o uso de uma equação de estado. Quando a matéria está suficientemente diluída, as equações da hidrodinâmica não valem mais e as partículas param de interagir. Elas conservam seus momentos até serem detectadas (caso não ocorram decaimentos após o fim do estágio hidrodinâmico).

A maneira tradicional de descrever a emissão de partículas pelo fluido é supor que isso acontece de maneira repentina quando um certo critério de diluição é satisfeito. Um critério muito usado é que o fluido atinja uma dada temperatura ou densidade de energia. Um outro critério, mais físico, é exigir que o tempo entre interações fique maior do que o tempo típico de expansão do fluido ou o tempo médio para atingir a borda do fluido. Também foi sugerido que há um "freeze-out" químico, onde as abundâncias das partículas são fixadas (não ocorrendo mais interações inelásticas), seguido por um "freeze-out" térmico, onde os momentos das partículas são congelados (as interações elásticas cessam). Porém, a hipótese de que as partículas param de interagir de maneira repentina é um pouco arbitrária. Para incorporar a possibilidade que em qualquer instante, ou ponto do fluido, uma partícula tem uma certa possibilidade de parar de interagir, foi desenvolvido o mecanismo de "emissão contínua". Uma outra alternativa é supor que, após um certo instante (normalmente logo após a formação de hádrons a partir do plasma), as interações entre as partículas são descritas por um código microscópico, como UrQMD[12], RQMD[13], etc.

No SPheRIO, há dois modos principais de incluir o desacoplamento na evolução hidrodinâmica do fluido: pelo mecanismo de emissão por "frezee-out" à temperatura constante, FO, ou através da emissão contínua[14]. O mecanismo de emissão por FO é o mais usado na literatura, por ser bem mais simples de implementar que o de emissão contínua. Nosso grupo está trabalhando no momento numa melhor implementação numérica do mecanismo de emissão contínua, porém, como este projeto ainda não está finalizado, iremos usar nesta tese o mecanismo de emissão por FO. Este mecanismo é



Figura 3.2: Prescrição de Copper-Frye para o desacoplamento [7].

implementado através da prescrição de Cooper-Frye[15] na forma:

$$E\frac{dN}{d^3k} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_{\Sigma} \frac{k^{\mu} d\sigma_{\mu}}{exp[(k^{\mu}u_{\mu}(x) - \mu(x)/T(x)] \pm 1]},$$
(3.18)

sendo  $\Sigma$  uma hipersuperfície de, no nosso caso, temperatura constante, e  $d\sigma_{\mu}$ , elemento de superfície desta hipersuperfície. O sinal positivo está ligado aos férmions e o negativo aos bósons. Obtemos a hipersuperfície através da condição  $T(x) = T_{FO}$ , que é a temperatura de "frezee-out". Desconsideramos o caso onde uma partícula que tenha sido emitida após o FO possa retornar ao fluido, o que é permitido pela fórmula de Cooper-Frye, mas não tem sentido físico. O desenho na figura 3.2 representa esquematicamente a prescrição de Copper-Frye, onde representamos o fato de as partículas serem consideradas livres assim que atravessam a hipersuperfície.

Para entender melhor a equação (3.18) iremos estudar o caso de uma partícula que obedece a estatística de Boltzmann emitida numa certa  $T_{FO}$ . Além disso, supomos uma simetria cilíndrica e que a expansão ao longo do eixo da colisão é invariante por "boost" de Lorentz. Pode se mostrar que neste caso[16]:

$$\frac{dN}{p_{\perp}dp_{\perp}} \propto m_{\perp}K_1\left(\frac{m_{\perp}cosh\rho}{T_{FO}}\right) I_0\left(\frac{p_{\perp}sinh\rho}{T_{FO}}\right),\tag{3.19}$$

onde a velocidade transversal<sup>2</sup> do fluido no "freeze-out" é  $v_{\perp FO} = tanh\rho$  e  $m_{\perp} = \sqrt{p_{\perp}^2 + m^2}$  é a massa transversal da partícula de massa m e momento transversal  $p_{\perp}$ , lembrando que  $I_0(x)$  e  $K_1(x)$  são funções de Bessel modificadas de primeira e segunda ordem.

Para  $p_{\perp} \gg m$ ,

$$\frac{dN}{p_{\perp}dp_{\perp}} \sim exp\left(\frac{-p_{\perp}}{T_{FO}e^{\rho}}\right).$$
(3.20)

Assim o espectro de partículas em relação ao momento transversal cai exponencialmente e a sua inclinação é dada pelo inverso da temperatura de *freeze-out* efetiva:  $T_{FO}^{eff} = T_{FO} \ e^{\rho}$ . Essa parametrização também é conhecida como "blast wave".

Existem dois efeitos que influenciam em sentidos opostos a inclinação  $-1/T_{FO}^{eff}$ . Vamos supor que a temperatura de "freeze-out" decresce: a energia cinética das partícula associadas à agitação térmica decresce, o  $p_t$  médio decresce e a inclinação da distribuição de  $p_t$  é maior. Por outro lado, a velocidade transversal no "freeze-out" aumenta, já que o fluido se expande por um tempo maior. Assim, o momento transversal médio cresce e a distribuição de  $p_t$  fica mais horizontal. No final, a inclinação  $-1/T_{FO}^{eff}$ não é extremamente sensível à mudança da temperatura de "freeze-out" (para condições iniciais fixas).

As colisões nucleares podem ser centrais (sobreposição total dos núcleos colidindo, o que implica um parâmetro de impacto praticamente nulo) até periféricas (quando os núcleos apenas se tocam e o parâmetro de impacto é da ordem de duas vezes o raio nuclear). É comum então classificar as colisões seguindo a sua centralidade:  $C = b^2/(2R)^2$ com  $R \sim 1.3A^{1/3}$  e b o parâmetro de impacto. Como os físicos experimentais não têm

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Na direção perpendicular ao eixo da colisão.



Figura 3.3: Número de participantes em relação ao parâmetro de impacto para 1000 colisões de núcleos de cobre a 200 AGeV de energia no centro de massa.

acesso direto ao parâmetro de impacto, eles definem a centralidade de uma colisão, por exemplo, a partir do número de partículas que participaram desta colisão[17]. Estas duas definições não coincidem: quando o valor do parâmetro de impacto é fixo, o número de nucleons que colidem flutua de colisão para colisão. Uma estimativa deste efeito é mostrada na figura 3.3 (para essa estimativa foi usado o código NeXus). Apesar das definições teórica e experimental da centralidade serem diferentes, o efeito nas variáveis, mesmo não sendo totalmente desprezível, não é muito grande.

Quando as condições iniciais são geradas pelo NeXus, pode-se usar a definição experimental para a centralidade. Quando as condições iniciais são dadas em função do parâmetro de impacto, usa-se a definição teórica da centralidade.

Na figura 3.4, mostramos as temperaturas de FO que permitem reproduzir os



Figura 3.4: Multiplicidade de partículas carregadas em relação ao momento transverso para várias centralidades em colisões de dois núcleos de cobre, com a energia no centro de massa igual a 200 AGeV.

espectros de  $p_t$  nas janelas de centralidade usadas por PHOBOS[18] para colisões de núcleos de cobre a 200*AGeV*. Vemos que a temperatura de *FO* aumenta para colisões mais periféricas. Um comportamento similar é obtido por STAR, usando ajustes inspirados da hidrodinâmica para analisar seus dados[19].

Nosso grupo obteve o mesmo comportamento para colisões de dois núcleos de ouro a 200*AGEV*[20]. Quando comparamos os espectros de momento transversal para esses dois sistemas, colisões de ouro[21] e de cobre[18], vemos que a quantidade de partículas produzidas é bem menor nas colisões de cobre em relação às colisões de ouro. Para uma dada centralidade, as colisões de cobre produzem em torno de quatro vezes menos partículas que as colisões de ouro. Isso ocorre porque a densidade de energia produzida em colisões de núcleos de ouro é muito superior àquela produzida em colisões de núcleos


Figura 3.5: Comparação de espectros de momentos transversais dos dados de PHOBOS para colisões de ouro[21] e de cobre[18].

de cobre.

Este comportamento da temperatura de FO com a centralidade é esperado fisicamente. Nas colisões mais centrais, temperaturas iniciais mais altas são atingidas e então a matéria deve se expandir mais até o FO, chegando até um raio  $R_{FO}$ . Quando o FO acontece, o livre caminho médio  $\lambda$  deve ser da ordem de grandeza do raio  $R_{FO}$ :  $\lambda \approx R_{FO}$ . Como  $\lambda$  cresce se  $T_{FO}$  decresce, maior  $R_{FO}$  implica menor  $T_{FO}$ . Esse argumento é similar ao usado em [22] para discutir o comportamento da  $T_{FO}$  com a energia da colisão.

## Capítulo 4

## **SPheRIO**

As soluções analíticas para as equações hidrodinâmicas só existem para certos casos, dependendo fortemente de simetrias e de equações de estado muito específicas. Assim, estas soluções não são gerais o suficiente para descrever os resultados das colisões de íons pesados ultra relativísticos. Devemos resolver numericamente as equações hidrodinâmicas.

O método usual para isto é escolher uma grade no espaço-tempo e resolver as equações diferenciais parciais não lineares, sobre essa grade. Como essa grade é fixa, devemos escolhê-la grande o suficiente para levar em conta a expansão do fluido. Isso já gera uma dificuldade numérica. No método usual, as equações diferenciais são resolvidas através do método da diferença finita, porém como o fluido está se expandindo, esse método acaba, por exemplo, calculando a variação da pressão para um ponto fixo no espaço ao longo do tempo, enquanto o que nos interessa é a variação da pressão de um dado elemento do fluido. Esse exemplo já demonstra que, usando os métodos usuais, é difícil acompanhar a evolução ao longo do tempo de elementos desse fluido. Estas dificuldades são ilustradas na figura<sup>1</sup> 4.1, que mostra um fluido expandindo em uma grade fixa. Também é difícil de incorporar geometrias irregulares, que devem ocorrer em colisões nucleares relativísticas, no método que utiliza uma grade fixa.

Existe um método mais adequado para tratar essas geometrias, o "Smoothed Parti-

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>As figuras 4.1 e 4.2 foram cedidas pelo Professor Otavio Socolowski Jr.



Figura 4.1: Ilustração de dois momentos na expansão de um fluido sobre uma grade fixa. Os destaques em vermelho demonstram que a derivada é calculada em um dado ponto fixo e não em relação a um elemento do fluido.



Figura 4.2: Ilustração da discretização do fluido no método SPH.

*cle Hydrodynamics*" (SPH). Ele é uma generalização de um método desenvolvido para a astrofísica[23] e adaptado por um grupo brasileiro para colisões nucleares de altas energias[5]. A implementação numérica deste método é o código SPheRIO (Smoothed Particle hydrodynamics evolution of Relativistic Ion collision). Neste método discretizamos o fluido e seguimos a evolução hidrodinâmica destes elementos de fluido que chamamos de partículas SPH, como é ilustrado na figura 4.2.

#### 4.1 Método SPH

Apresentamos uma breve descrição deste modelo ([5] e [7]). Primeiro, fazemos um "alisamento" das quantidades físicas, como a densidade de entropia:

$$a(\vec{x},t) = \int a(\vec{x}',t)\delta(\vec{x}-\vec{x}')d^3x \to \tilde{a}(\vec{x},t) = \int a(\vec{x}')W(\vec{x}-\vec{x}',h)dx', \quad (4.1)$$

onde  $W(\vec{x} - \vec{x}', h)$  é uma função de alisamento normalizada de largura característica h. Depois fazemos uma discretização:

$$\tilde{a}(\vec{x},t) = \int a(\vec{x}') W(\vec{x} - \vec{x}', h) dx' \to a_{SPH}(\vec{x}) = \sum_{i} A_{i} W(\vec{x} - \vec{x}_{i}, h), \qquad (4.2)$$

os pesos  $A_i$  são escolhidos para minimizar a diferença entre  $a_{SPH}$  e  $\tilde{a}$ .

A vantagem deste método é que os gradientes tomam a forma:

$$\vec{\nabla}a_{SPH}(\vec{r},t) = \sum A_i \vec{\nabla}W(\vec{r}-\vec{r}_i,h), \qquad (4.3)$$

e são mais simples de calcular que no método convencional, no qual calculamos numericamente as derivadas de a.

Estudamos brevemente a formulação das equações hidrodinâmicas quando usamos o método SPH num referencial fixo no espaço, como o do laboratório.

$$a^{*}(\vec{r},t) = \sum_{i} \alpha_{i} W(\vec{r} - \vec{r_{i}}(t);h), \qquad (4.4)$$

onde  $a^*(\vec{r}, t)$  é a densidade de uma quantidade extensiva, por exemplo a entropia, e  $\alpha_i$ é um conjunto de constantes. Podemos considerar que  $a^*(\vec{r}, t)$  é obtido fazendo uma soma do seu valor nos pedaços de fluidos de tamanho  $h^3$  localizados nos  $\vec{r}_i(t)$  ao redor de  $\vec{r}$ , cada um desses pedaços contribuindo com  $\alpha$ . Escolhe-se uma função positiva para  $W(\vec{r}-\vec{r_i}(t);h)$ e que satisfaça:

$$\int W(\vec{r} - \vec{r_i}(t); h) d^3 \vec{r} = 1$$
(4.5)

е

$$\lim_{h \to 0} W(\vec{r} - \vec{r_i}(t); h) = \delta^3(\vec{r} - \vec{r_i}(t)).$$
(4.6)

Obtemos o valor total da grandeza extensiva A, integrando  $a^*$  em todo o espaço,

$$A^{(tot)} = \int a^*(\vec{r}, t) d^3 \vec{r} = \sum_i \alpha_i.$$
(4.7)

De (4.7) podemos ver que a quantidade extensiva A pode ser descrita pela soma das quantidades discretas  $\alpha_i$ .

A parametrização SPH implica automaticamente a conservação da quantidade extensiva A.

$$\frac{\partial a^*(\vec{r},t)}{\partial t} = \sum_i \alpha_i \frac{d}{dt} W(\vec{r} - \vec{r}_i(t);h)$$

$$= -\sum_i \alpha_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{\nabla} W(\vec{r} - \vec{r}_i(t);h).$$
(4.8)

Tirando o gradiente da somatória, visto que quando feita a regra do produto e ele for aplicado ao termo derivado pelo tempo este termo vai dar zero, temos:

$$\frac{\partial a^*(\vec{r},t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \sum_i \alpha_i \frac{d\vec{r_i}}{dt} W(\vec{r} - \vec{r_i}(t);h).$$
(4.9)

A velocidade da partícula SPH no ponto  $r_i$  do fluido é  $\vec{v}_i = d\vec{r}_i/dt.$  Podemos escrever

a corrente da quantidade extensiva A como:

$$\vec{J}_{A} = \sum_{i} \alpha_{i} \vec{v}_{i} W(\vec{r} = \vec{r}_{i}(t); h).$$
(4.10)

Colocando (4.10) em (4.9), obtemos:

$$\frac{\partial a^*}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_A,\tag{4.11}$$

ou seja, a equação de continuidade para A é satisfeita.

No apêndice D a equação de movimento do fluido relativístico é deduzida usando a parametrização SPH. A fórmula (D.22) é para a métrica de Minkowski,  $g^{\mu\nu} = (1,-1,-1,-1,-1)$ . Ela pode ser expandida para um sistema de coordenadas generalizadas, como é mostrado em [5]. Um sistema em especial, que é muito conveniente para colisões nucleares de altas energias, é o que substitui o tempo e a coordenada ao longo da direção da colisão pelo tempo próprio e a rapidez espacial:

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \tag{4.12}$$

$$\eta_s = \frac{1}{2} ln \left( \frac{t+z}{t-z} \right) = tanh^{-1} \left( \frac{z}{t} \right)$$
(4.13)

junto com

$$\vec{r}_T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Neste sistema de coordenadas as equações do movimento, (D.22), ficam:

$$\frac{d\vec{\pi}_i}{d\tau} = -\frac{1}{\tau} \sum_j \beta_i \beta_j \left(\frac{p_i}{(s_i^*)^2} + \frac{p_j}{(s_j^*)^2}\right) \nabla_i W ij, \qquad (4.15)$$

com

$$\vec{\pi} = \tau^2 \beta \gamma \left(\frac{\epsilon + p}{s}\right) \frac{d\eta_s}{d\tau} \hat{\eta}_s + \beta \gamma \left(\frac{\epsilon + p}{s}\right) \frac{d\vec{r}_T}{d\tau}$$
(4.16)

е

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_T^2 - \tau^2 v_{\eta_s}^2}}.$$
(4.17)

Sendo  $\widehat{\eta}_s$ o versor na direção de  $\eta_s.$ 

## Capítulo 5

# Escoamentos anisotrópicos - origem física

Como explicado no capítulo 3, a distribuição de momento no plano transversal ao eixo da colisão fornece informações sobre a temperatura,  $T_{FO}$ , e velocidade transversal do fluido,  $v_{\perp FO}$ , no "freeze-out"<sup>1</sup>. Quando consideramos a distribuição  $dN/p_t dp_t$ , ela já foi integrada sobre todos os ângulos de emissão  $\phi$  das partículas no plano transversal. É muito interessante, porém, olhar as distribuições ainda não integradas em  $\phi$ :  $dN/p_t dp_t d\phi$ ,  $dN/d\phi$  ou  $dN/d\eta d\phi$ .

Se as colisões nucleares fossem uma superposição de colisões independentes e isotrópicas de prótons com prótons, esperaríamos que  $dN/d\phi$  também fosse isotrópico, como mostrado na figura 5.1. Isso aconteceria mesmo se a região ocupada pela matéria densa não fosse simétrica. Por outro lado, se a região ocupada pela matéria densa não for simétrica e houver algumas interações,  $dN/d\phi$  será deformado (isto é, deixará de ser constante). Mesmo se uma região tem inicialmente uma certa simetria, ela pode se perder com a expansão, conforme veremos no caso do fluxo dirigido.

Dentre as variáveis ligadas à deformação de  $dN/d\phi$ , vamos descrever duas delas: o escoamento elíptico,  $v_2$ , e o escoamento dirigido,  $v_1$ . O primeiro já foi extensivamente estudado na literatura (pelo nosso grupo em [11], [24], [25], [26], [27] e [28] e por outros

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Na parametrização do tipo "blast wave", a  $T_{FO}$  e a  $v_{\perp FO}$  são independentes uma da outra. Já nos modelos hidrodinâmicos, uma é ligada à outra.



Figura 5.1: Desenho esquemático da distribuição angular no plano transversal na ausência de interação, zé o eixo da colisão

grupos em [29], já o segundo é ainda muito pouco pesquisado.

Definimos  $v_1$ ,  $v_2$ , e outros coeficientes a partir da distribuição das partículas no plano transversal. Consideramos uma colisão não central entre dois núcleos. O parâmetro de impacto,  $\vec{b}$ , define uma direção no plano transversal. Chamamos de  $\phi$  o ângulo entre o momento transversal de uma partícula e o parâmetro de impacto. Assim, podemos expandir em uma série de Fourier a distribuição de partículas produzidas em função de  $\phi$ :

$$\frac{dN}{d\phi} \propto 1 + \sum_{n} 2v_n \cos(n\phi),^2 \tag{5.1}$$

Os coeficientes  $v_n$  são dados por:

$$v_n = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \frac{dN}{d\phi} cosn\phi}{\int_0^{2\pi} d\phi \frac{dN}{d\phi}}.$$
(5.2)

Podemos também definir  $v_n(\eta)$ ,  $v_n(p_t)$ , etc. Para energias muito altas (as produzidas

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Caso tenhamos que  $dN/d\phi|_{\phi} = dN/d\phi|_{-\phi}$ , não temos termos em seno.



Figura 5.2: Região de interação vista no plano transversal.

em colisões de íons pesados relativísticos), o termo dominante entre os coeficientes  $v_n$  da expansão de  $dN/d\phi$  é  $v_2$ .

Na figura 5.2, a região de interação entre os dois núcleos está destacada. As partículas criadas pela colisão são as que formam o fluido. Esta região de interação tem uma forma elipsoidal. Interações entre as partículas resultam numa pressão maior no centro dessa "amêndoa" e numa pressão nula fora dela. Como temos uma distância entre a origem e a fronteira da região termalizada maior na direção de y do que na direção de x, o gradiente da pressão na direção do parâmetro de impacto, x, é maior do que na direção perpendicular. Como  $-\vec{\nabla}p$  é igual à força por unidade de volume, ocorre uma maior geração de partículas na direção do parâmetro de impacto do que na direção perpendicular. Essa maior produção de partículas alonga a distribuição nesta direção (figura 5.3) e  $v_2$  é uma medida deste alongamento.

Nos modelos microscópicos, onde não ocorre, a priori, a termalização, mas onde ocorrem colisões, também deve aparecer um valor diferente de zero para o fluxo elíp-



Figura 5.3: Distribuição angular de partículas produzidas em relação ao parâmetro de impacto.



Figura 5.4:  $v_2$  para diferentes centralidades: dados das colaborações PHOBOS e STAR, comparados com previsões de um modelo hidrodinâmico e um modelo microscópico.



Figura 5.5: Comparação entre dados hidrodinâmicos e um modelo partônico[31] com seção de choque crescendo de baixo para cima.

tico. Porém, espera-se que o fluxo elíptico seja maior em modelos com termalização. Na figura 5.4 dados das colaborações STAR e PHOBOS[30] para  $v_2$  em função das centralidades são apresentados junto com uma previsão do modelo microscópico RQMD e de um modelo hidrodinâmico, que usou a hipótese de fluido perfeito. Na figura, podemos ver que o modelo microscópico RQMD não fornece suficiente  $v_2$ , enquanto o modelo hidrodinâmico, sim. Assim, dados sobre o escoamento elíptico no RHIC fornecem evidência de que ocorre uma rápida termalização local após a colisão ultra relativística de íons pesados, e que a hidrodinâmica se aplica. Além disso, como a viscosidade afetaria o valor do fluxo elíptico, pode-se concluir que ele tem que ser muito pequeno. Como indicado na introdução, o Plasma de Quarks e Glúons seria o fluido mais perfeito conhecido.

Para obter um fluido termalizado, a seção de choque entre os participantes da interação tem que ser grande. Isso é ilustrado na figura 5.5. Por essa razão o Plasma de Quarks e Glúons foi rebatizado de "Plasma de Quarks e Glúons Fortemente Interagente", sQGP em sua sigla em inglês. Notamos também que os modelos hidrodinâ-



Figura 5.6: (a) Possível distribuição da matéria interagente no plano transversal. (b) Distribuição azimutal das partículas emitidas, omitindo o fluxo elíptico, para  $v_1 > 0$ .

micos que reproduzem dados sobre  $v_2$  têm que usar uma matéria tão densa e quente nas condições iniciais que deve ser o Plasma de Quarks e Glúons.

O fluxo dirigido  $v_1$  tem como origem uma assimetria entre os lados esquerdo e direito da região de interação, que tem uma forma elíptica, como mostrado em 5.6a. O argumento é similar ao usado para entender  $v_2$ :o maior gradiente de pressão, com sinal negativo,  $-\vec{\nabla}p$ , do lado direito empurra a matéria para a direita, como ilustrado na figura 5.6b. O fluxo dirigido é uma medida da deformação entre o lado esquerdo e direito vista na figura 5.6b.

A questão é: "Como se chega fisicamente à situação mostrada na figura 5.6a?". Não é preciso supor que as condições iniciais sejam como a figura 5.6a, esta situação pode ocorrer dinamicamente. Numa fatia transversal ao plano da colisão, se  $\langle p_x \rangle = \langle p_y \rangle = 0$  inicialmente e se não houver aceleração longitudinal, os momentos médios transversais devem continuar nulos. Mesmo que haja uma aceleração longitudinal, caso ela atue da mesma maneira em todos os pontos do fluido, os momentos transversais continuaram nulos. Mas, caso a aceleração longitudinal aja de maneira diferente nos vários pontos do plano transversal, isso pode gerar uma situação como a mostrada na figura 5.6a.

Descrevemos agora, de forma detalhada, um possível cenário para esta aparição



Figura 5.7: O freamento para x > 0 e x < 0 é diferente. Essa diferença entre os freamentos provoca uma inclinação da região de interação ( $\eta_s = arctanh(z/t)$ ).

dinâmica do fluxo dirigido. Primeiro notamos[32] que o freamento é diferente para nucleons em x > 0 e x < 0. A figura 5.7(a) mostra o plano da reação<sup>3</sup> de uma colisão não central. A parte (b) desta mesma figura mostra um zoom da região de interação. Tomando o núcleo da esquerda<sup>4</sup>, podemos ver que os seus hádrons que estão na região de x negativo colidem com mais nucleons do outro núcleo. Os hádrons na região de x > 0 encontram menos nucleons. Dessa forma, os hádrons na direção de xnegativo serão mais freados que os hádrons de x positivo. Devido a essa diferença entre os freamentos das partículas, a região de interação, que é um elipsoide no plano da reação, sofre um leve "tilt". Assim, o máximo da densidade de energia,  $x_{max}$ , para um dado valor de  $\eta_s$ , não é mais x = 0, mas varia com  $\eta_s$  (linha pontilhada na figura 5.8). A condição inicial da colisão deve levar em conta essa inclinação, e a sua expansão irá prosseguir, como indicado na figura 5.8.

A distribuição de matéria numa fatia de  $\eta_s$  fixo pode ou não ser simétrica em relação ao seu máximo,  $x_{max}(\eta_s)$ . De toda maneira, ao decompor  $\vec{v}_{fl}^+ \in \vec{v}_{fl}^-$  (nas suas componentes paralelas e perpendiculares a  $\eta_s$ ), vemos que suas componentes ao longo de  $\eta_s$  têm direção oposta. Com o tempo, isto cria a mesma assimetria que é vista na figura 5.6a e mostra que a magnitude de  $v_1$  na direção do eixo da colisão deve ser ligada à termalização nesta direção.

Em resumo, o fluxo dirigido tem sua origem numa assimetria na elipse centrada

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup>Definido pelo parâmetro de impacto  $\vec{b}$  e o eixo da colisão.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>A discussão pode ser refeita para o núcleo da direita.



Figura 5.8: Expansão da matéria formada após a colisão quando se inclui a inclinação nas suas condições iniciais.

em  $(x_{max}(\eta_s), y = 0)$ . Esta assimetria pode aparecer dinamicamente ou existir nas condições iniciais. Observamos que o fluxo dirigido deve ser muito sensível à forma precisa da distribuição inicial da matéria.

## Capítulo 6

## Resultados obtidos com o NeXSPheRIO

## 6.1 Fluxo elíptico, ajustes nas condições iniciais e na temperatura de desacoplamento

Com um código numérico, não podemos nos restringir a descrever só um tipo de dado, como por exemplo  $v_1$ . Devemos ter uma visão global. Apresentamos primeiro exemplos de condições iniciais obtidas com o código gerador de condições iniciais NeXus[4]. Esse código pode gerar dois tipos de condições iniciais: (i) Condições iniciais flutuantes, onde são gerados vários eventos, simulando colisões independentes (EBE). (ii) Condições iniciais suaves, que obtemos fazendo uma média de várias condições iniciais flutuantes (<ci>). As figuras 6.1 e 6.2 mostram esses dois tipos de condições iniciais para colisões de núcleos de ouro e de núcleos de cobre. A primeira mostra as densidades de energia no plano transversal e a segunda, no plano da reação.

A figura 6.3 mostra a projeção da densidade de energia no plano da reação. Notamos que, para condições iniciais suaves, podemos ver que as curvas de nível da densidade de energia geradas pelo código NeXus são quase paralelas ao eixo da colisão, para valores pequenos de  $\eta$ .

Vemos que em todos os casos a densidade de energia é muito superior à necessária



Figura 6.1: Densidade de energia em  $GeV/fm^3$  no plano  $\eta = 0$ , na janela de centralidade 6-15% em colisões de 200 AGeV. A) Um evento aleatório para Au+Au, b) Condição inicial média para Au+Au, c) Um evento aleatório para Cu+Cu, d) Condição inicial média para CuCu.

 $(\sim 1 GeV/fm^3)$  para o aparecimento do Plasma de Quarks e Glúons.

Os valores dos observáveis para as condições iniciais evento por evento são obtidos fazendo uma média do que acontece em várias colisões. Dessa forma, buscamos simular de modo mais próximo o que deve ocorrer nas experiências do RHIC. Uma análise sobre a diferença entre esses dois tipos de condições iniciais (flutuantes e suaves) pode ser encontrado em [24]. Na versão que usamos do NeXus, precisamos ajustar (com um fator multiplicativo) as condições iniciais para descrever os dados de  $dN/d\eta$ . O ajuste para colisões de núcleos de cobre a 200AGeV é mostrado na figura 6.4. Também escolhemos as temperaturas de "freeze-out" de modo a reproduzir  $dN/p_t dp_t$ . O resultado para condições iniciais flutuantes de colisões de núcleos de cobre a 200AGeVfoi mostrado na figura 3.4. Para as colisões de núcleo de ouro a 200AGeV usamos os mesmos parâmetros da referência [20].

O fluxo elíptico em colisões de núcleos de ouro foi estudado pelo nosso grupo nas



Figura 6.2: Densidade de energia em  $GeV/fm^3$  no plano y = 0, na janela de centralidade 6-15% em colisões de 200 AGeV. A) Um evento aleatório para Au+Au, b) Condição inicial média para Au+Au, c) Um evento aleatório para Cu+Cu, d) Condição inicial média para Cu+Cu.

referências [11], [24], [26], [27] e [28]. As figuras 6.5-6.7 mostram resultados novos, obtidos para colisões de cobre, do fluxo elíptico em função da pseudo-rapidez e do momento transversal. Esses resultados são mostrados usando o método de cálculo do fluxo elíptico apresentado em [25].

Podemos perceber nestas figuras que o NeXSPheRIO reproduz os dados de  $v_2$  em relação a  $\eta$  e para valores moderados de  $p_t$ . O fato de  $v_2(p_t)$  desviar dos dados para grandes momentos transversais pode ser ligado à dificuldade de partículas de grande  $p_t$ termalizarem. A descrição do fluxo elíptico para Cu+Cu é boa como no caso Au+Au. Isto não era garantido, pois Cu+Cu é um sistema menor onde a termalização pode ser mais difícil de atingir.

#### 6.1.1 Fluxo dirigido

Apresentamos agora resultados para o fluxo dirigido usando as condições iniciais EBE geradas pelo NeXus. Nestes cálculos foi utilizada a equação de estado com ponto



Figura 6.3: Projeção no plano da reação da densidade de energia em  $GeV/fm^3$  no plano y = 0, na janela de centralidade 6-15% em colisões de 200 AGeV. A) Um evento aleatório para Au+Au, b) Condição inicial média para Au+Au, c) Um evento aleatório para Cu+Cu, d) Condição inicial média para Cu+Cu.

crítico. Estes resultados estão em acordo qualitativo com os dados de PHOBOS para todas as pseudo-rapidezes, e em acordo quantitativo para  $|\eta| < 3$ , como pode ser visto na figura 6.8.

Os resultados do NeXSPheRIO estão em acordo qualitativo com os dados de STAR para  $|\eta| < 3$  (figura 6.9). Mas o "turn over" (ponto onde a inclinação da curva muda de sinal) acontece para  $\eta$  menor.

Um resultado surpreendente a priori, obtido pela colaboração STAR é que  $v_1(\eta)$ é o mesmo para colisões de núcleos de ouro e colisões de núcleos de cobre para uma mesma janela de centralidade. Uma colisão central de ouro envolve mais participantes do que uma de cobre, o que gera uma maior densidade de energia e, por consequência, uma quantidade maior de partículas é gerada. Para se ter uma ideia, a densidade



Figura 6.4: (a) Espectro de partículas carregadas em função de  $\eta$ , produzidas usando condições iniciais flutuantes, para colisões de núcleos de cobre a 200AGeV, comparado com os dados de PHOBOS[33].

inicial é :

$$\frac{dN}{dzdxdy} \sim \frac{dN}{\tau_0 d\eta_s (r_0 A^{1/3})^2}.$$
(6.1)

Assim, a razão entre as densidades para colisões de núcleos de cobre, e colisões de núcleos de ouro é:  $(64/197)^{2/3} \sim 0.5$ . A física envolvida, numa dada janela de centralidade, deveria ser diferente para esses dois sistemas (colisões de núcleos de ouro e de núcleos de cobre). Em contraste, o fluxo elíptico é o mesmo para colisões de cobre e de ouro, para uma janela que contenha o mesmo número de participantes<sup>1</sup> (figura 6.10), mas não é o mesmo para uma janela de centralidade fixa.

A independência do fluxo dirigido em relação à janela de centralidade, para colisões

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Normalizada pela excentricidade.



Figura 6.5:  $v_2^{\Psi_2}$  em função de  $\eta$  para colisões de núcleos de cobre na janela de centralidade 0 - 40%. Comparado com dados de [34].



Figura 6.6:  $v_2^{\Psi_2}$  em função de  $p_t$  para colisões de núcleos de cobre na janela de centralidade 0 - 20%. Comparado com dados de [35].



Figura 6.7:  $v_2^{\Psi_2}$  em função de  $p_t$  para colisões de núcleos de cobre na janela de centralidade 20 - 40%. Comparado com dados de [35].



Figura 6.8:  $v_1(\eta)$ , comparação entre dados de PHOBOS[36] e hidrodinâmica.



Figura 6.9:  $v_1(\eta)$ , comparação entre dados de STAR[37] e hidrodinâmica.



Figura 6.10: Comparação entre dados experimentais de colisões de cobre e ouro para o fluxo elíptico[38].



Figura 6.11:  $v_1(\eta)$ , comparação entre dados de STAR[39] e hidrodinâmica.

de núcleos de cobre e de núcleos de ouro, foi reproduzida grosseiramente no NeXSPhe-RIO. A figura 6.11 mostra esse resultado, comparando com resultados da colaboração STAR para a energia no centro de massa de 200AGeV e janela de centralidade de 30 - 60%.

Na região de pseudo-rapidez onde  $v_1(\eta)$  do NeXSPheRIO e de STAR estão em acordo ( $|\eta| < 3.0$ ), o resultado para  $v_1(p_t)$  do NeXSPheRIO também está em acordo com os dados (figura 6.12). O resultado do NeXSPheRIO tem o efeito de "turn over" de  $v_1(p_t)$  visto nos dados, mas um pouco mais intenso.



Figura 6.12:  $v_1(p_t)$ , comparação entre dados de STAR[40] e hidrodinâmica.

## Capítulo 7

# Modelo simplificado para estimar o fluxo dirigido

#### 7.0.2 Derivação do modelo

Apresentamos nesta seção um modelo simples para entender melhor o fluxo dirigido. Começamos estudando a dependência na rapidez  $Y = tanh^{-1}v_z$ . Aproximamos o fluxo dirigido para uma dada rapidez pela componente x da velocidade da fatia do fluido no tempo próprio de "freeze-out":

$$v_1(Y) \cong \frac{p_x(\tau_f)}{E(\tau_f)},\tag{7.1}$$

onde  $p_x(\tau_f)$  é o momento ao longo do parâmetro de impacto na fatia de matéria localizada na rapidez Y, no instante do "freeze-out", e  $E(\tau_f)$  é a energia que essa fatia contém<sup>1</sup>.

No tempo inicial, o momento  $p_x$  da fatia é suposto nulo (esta hipótese é usual), mas ele pode mudar com o tempo:

$$p_x(\tau_f) = \int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau \frac{dp_x}{d\tau}.$$
(7.2)

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>A aproximação em (7.1) que fazemos significa atribuirmos  $v_1$  a  $< p_x > \neq 0$  e não simplesmente  $< x > \neq 0$ . Testaremos esta hipótese mais tarde.

O termo  $dp_x/d\tau$  é a força resultante do gradiente de pressão P, de modo que podemos reescrever (7.2) (para  $\eta_s \sim 0$ ) como:

$$p_x(\tau_f) = -\int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau \tau \int dx \, dy \, d\eta_S \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{y,\eta_s}.$$
(7.3)

Podemos mudar das variáveis  $x, y \in \eta_s$  para  $x, y \in Y$  e escrever:

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{y,\eta_s} = \frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{y,Y} + \frac{\partial P}{\partial Y}\Big|_{x,y}\frac{\partial Y}{\partial x}\Big|_{y,\eta_s}.$$
(7.4)

O primeiro termo à direita de (7.4), integrado de  $x = -\infty$  a  $x = \infty$ , dá zero, assim:

$$p_x(\tau_f) = -\int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau \tau \int dx \, dy \, d\eta_S \left. \frac{\partial P}{\partial Y} \right|_{x,y} \frac{\partial Y}{\partial x} \bigg|_{y,\eta_s}.$$
(7.5)

Temos também:

$$E(\tau_f) = \int dx \, dy \, \tau_f \int d\eta_S \, \epsilon(\tau_f).$$
(7.6)

Para estimar  $\partial P/\partial Y|_{x,y}$  e  $\partial Y/\partial x|_{y,\eta_s}$ , estudamos as equações hidrodinâmicas na direção longitudinal (a expansão longitudinal é o que domina no inicio da evolução hidrodinâmica):

$$\begin{cases} \partial_{\mu}T^{\mu0} = 0\\ \partial_{\mu}T^{\mu z} = 0 \end{cases}$$

$$(7.7)$$

com  $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}$  e  $u^{\mu} = \gamma(1, v)$ . Supomos que no momento  $\tau_0$ :  $Y(\tau_0) = \eta_s$ .

Como v = tanhY e estamos interessados na região do fluido próxima de  $\eta_s \sim 0$ , podemos assumir inicialmente que  $v \sim 0$  e, assim, que a quadrivelociade possa ser escrita como:  $u^{\mu} \sim (1, v)$ . Utilizando essas hipóteses, as equações hidrodinâmicas (7.7) se tornam:

$$\begin{cases} \partial_{\mu}T^{\mu 0} = \partial_{t}\epsilon + (\epsilon + p)\partial_{z}v = 0\\ \partial_{\mu}T^{\mu z} = (\epsilon + p)\partial_{t}v + \partial_{z}p = 0. \end{cases}$$
(7.8)

Mudando das variáveis t e z para  $\tau e \eta_s$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial_{\tau}\epsilon}{\epsilon+p} + \frac{1}{\tau}\partial_{\eta_s}v = 0\\ \partial_{\tau}v + \frac{1}{\tau}\frac{\partial_{\eta_s}p}{\epsilon+p} = 0. \end{cases}$$
(7.9)

Enquanto o valor de Y é aproximadamente igual ao de  $\eta_s \sim 0$ , podemos assumir que a velocidade é aproximadamente igual à rapidez ( $v = tanhY \sim Y$ ). Com essa hipótese, o sistema de equações (7.9) se torna:

$$\begin{cases} \frac{\partial_{\tau}\epsilon}{\epsilon+p} + \frac{1}{\tau}\partial_{\eta_s}Y = 0\\ \partial_{\tau}Y + \frac{1}{\tau}\frac{\partial_{\eta_s}p}{\epsilon+p} = 0 \end{cases}$$
(7.10)

Para um processo isentrópico:

$$\frac{d\epsilon}{\epsilon+p} = \frac{ds}{s},\tag{7.11}$$

onde s é a densidade de entropia. E, usando também a hipótese de que a velocidade do som  $(c_s = \sqrt{\partial p/\partial \epsilon})$  é constante, as equações hidrodinâmicas (7.11) são escritas como:

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} \partial_{\eta_s} Y + \partial_{\tau} lns = 0\\ \partial_{\tau} Y + c_s^2 \frac{1}{\tau} \partial_{\eta_s} lns = 0. \end{cases}$$
(7.12)

Obtemos como solução para as equações hidrodinâmicas (7.12) (<br/> usando $\eta_s \sim 0$  e

 $\partial_{\eta_s} Y \sim 1)$ :

$$\begin{cases} s \ \tau = f(\eta_s) & ^2 \\ Y(\tau, \eta_S) = \eta_S - c_s^2 ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \frac{\partial lns}{\partial \eta_S} \end{cases}$$
(7.13)

Esta forma para  $Y(\tau, \eta_s)$  foi obtida em [8]. No caso onde as condições iniciais não dependem de  $\eta_s$ , reobtemos a conhecida solução de Bjorken[41]:

$$\begin{cases} s \ \tau = constante \\ Y(\tau) = \eta_S, \end{cases}$$
(7.14)

para qualquer tempo próprio. Por outro lado, se a densidade de entropia depende da rapidez espacial inicialmente, haverá uma aceleração longitudinal, isto é:  $Y(\tau_0) =$  $\eta_S \rightarrow Y(\tau, \eta_S) = \eta_S - c_s^2 ln (\tau/\tau_0) \partial lns / \partial \eta_S$ , e dessa forma, obtemos para as duas derivadas em (7.5):

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial Y}\Big|_{x,y} \sim c_s^2 \frac{\partial \epsilon}{\partial \eta_s}\Big|_{x,y} = c_s^2 (1+c_s^2) \left(\frac{\tau_f}{\tau}\right)^{1+c_s^2} \epsilon_f \partial_{\eta_s} lns \\ \frac{\partial Y}{\partial x}\Big|_{y,\eta_s} = -c_s^2 ln \frac{\tau}{\tau_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial lns}{\partial \eta_s}. \end{cases}$$
(7.15)

Substituindo (7.15) em (7.5) e escrevendo a energia como a integral da sua densidade em todo o volume, temos que a nossa forma analítica para o fluxo dirigido, equação (7.1), é dada por:

$$v_1(Y) \sim \frac{\left[c_s^4(1+c_s^2)\right] \left[\int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau \left(\frac{\tau_f}{\tau}\right)^{c_s^2} ln\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)\right] \left[\int dx dy d\eta_S \ \epsilon_f \frac{\partial lns}{\partial \eta_S} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial lns}{\partial \eta_S}\right]}{\int dx dy d\eta_S \ \epsilon_f}.$$
 (7.16)

O primeiro termo entre colchetes é sensível à equação de estado. O segundo termo entre colchetes, é ligado à duração da expansão. E o terceiro termo, com os logaritmos na densidade de entropia, é relacionado principalmente às condições iniciais.

 $^{2}\partial_{\eta_{s}}lns$  não depende de  $\tau$ .

#### 7.0.3 Teste do modelo simplificado

Para se ter uma ideia mais precisa do comportamento de  $v_1(\eta)$ , consideramos primeiramente uma condição inicial suave que sofrerá um *"tilt"* no plano da reação. Para incluir o *"tilt"* na condição inicial, introduzimos um termo cruzado em  $x \in \eta_s$ :

$$s(x, y, \eta_S) = s_0 exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta_S^2}{2\sigma_{\eta_S}^2} + \theta \frac{x\eta_S}{\sigma_x \sigma_{\eta_S}}\right).$$
 (7.17)

Usando essa condição inicial, assumindo que o parâmetro  $\theta$  é pequeno, podemos integrar (7.16) no tempo próprio e no espaço, obtendo:

$$v_1(Y) \cong c_s^4 \tau_f \frac{1+c_s^2}{1-c_s^2} \left[ ln\left(\frac{\tau_f}{\tau_0}\right) + \frac{1}{1-c_s^2} \left( \left(\frac{\tau_0}{\tau_f}\right)^{1-c_s^2} - 1 \right) \right] \left[ \frac{-\theta}{\sigma_{\eta_S}^3 \sigma_x} Y \right].$$
(7.18)

A partir desta equação podemos prever que, em acordo com os dados para  $\eta_s \sim 0$ (confira figuras 6.8, 6.9 e 6.11), o fluxo dirigido tem inclinação negativa e comportamento linear com a rapidez espacial. A equação também nos mostra, novamente como visto nos dados, que o fluxo dirigido diminui com o aumento da energia da colisão, já que o parâmetro  $\sigma_{\eta_s}$  cresce com a energia no centro de massa ( $\sqrt{s}$ ) [37]. Outro detalhe mostrado pela equação é que o fluxo dirigido cresce para colisões menos centrais devido à dependência em  $1/\sigma_x$ , que diminui para colisões menos centrais. Isto também está em acordo com os dados (confira a figura 6.9). Por fim, a dependência do fluxo dirigido com o número de massa A é dada aproximadamente pelo termo  $\tau_f \theta/\sigma_x$ . Porém, ambos os parâmetros  $\tau_f$  e  $\sigma_x$  crescem com  $A^{1/3}$ . Assim, se  $\theta$  for independente do número de massa, o fluxo dirigido também será.

Para poder estimar quantativamente o fluxo dirigido usando (7.18) devemos antes definir todos os seus parâmetros. Começamos com as larguras das gaussianas ao longo do plano transversal ( $\sigma_x \in \sigma_y$ ). A densidade da matéria nuclear pode ser aproximada pela fórmula de Woods-Saxon:

$$\rho(x, y, z) = \frac{\rho_0}{exp\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - R_0}{\delta}\right) + 1},$$
(7.19)

onde  $\rho_0 = 0.17 fm^{-1}$ ,  $R_0 = 1.12A^{1/3} - 0.86A^{-1/3} fm \in \delta = 0.54 fm$ .

Aproximamos a fórmula de Woods-Saxon como uma gaussiana:

$$\rho(x, y, z) \sim exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x'^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y'^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z'^2}\right),$$
(7.20)

de modo a podermos fazer cálculos analíticos. Usamos como origem o ponto x = b/2, assim, numa colisão, a densidade dos dois núcleos será dada por  $\rho(x - b/2, y, z)$  e  $\rho(x + b/2, y, z)$  respectivamente. A densidade da matéria formada nessa colisão será:

$$\rho(x - b/2, y, z)\rho(x + b/2, y, z) \propto exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2}\right),$$
(7.21)

 $\operatorname{com} \, \sigma_i^2 = 1/2\sigma_i^{\prime 2}.$ 

Esse resultado sugere que a nossa aproximação de usar uma gaussiana

$$s(x, y, \eta - s) = s_0 exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta_s^2}{2\sigma_{\eta_s}^2}\right),$$
(7.22)

é razoavél. O termo em  $\eta_s$  é inspirado no fato de que gaussianas em  $\eta_s$  ajustam bem os dados de espectro de partículas produzidas por pseudo-rapidez  $(dN/d\eta)$ . Dessa forma, podemos usar a formula de Woods-Saxons (ou a sua integral em z) para o cálculo das larguras  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ .

A colaboração BRAHMS[42] observou que a distribuição em rapidez exibe um comportamento quase gaussiano. Eles mostram que, para colisões de núcleos de ouro com  $\sqrt{s} = 200 A GeV$ , as larguras são  $\sigma_{\eta\pi^+} = 2.25 \pm 0.02$  e  $\sigma_{\eta\pi^-} = 2.29 \pm 0.02$ . Uma simplificação do modelo de Landau feita por [43] obtém a seguinte fórmula (já



Figura 7.1: Colisão de dois cilindros de matéria numa posição transversal dada.

estendida para colisões entre núcleos):

$$\sigma_{\eta_s}^2 = ln\gamma_{beam} = ln\frac{\sqrt{s}}{2m_p},\tag{7.23}$$

onde  $m_p$  é a massa do próton. A colaboração BRAHMS mostra no artigo acima citado que essa fórmula dá um resultado bem próximo dos dados (tendo uma discrepância com os dados de aproximadamente 5%). Para colisões com  $\sqrt{s} = 200 A GeV$ , obtemos com (7.23)  $\sigma_{\eta_s} = 2.16$ . Usaremos esse valor, pois pretendemos estender os nossos cálculos para outras energias.

Para calcular  $\theta$  seguimos a referência [44]. Durante uma colisão entre núcleos, numa posição transversal (x, y) dada, dois cilindros de matéria se chocam (figura 7.1). A rapidez do centro de massa desses dois cilindros é dada por:

$$\eta_{cms} = \frac{1}{2} ln \frac{E_{tot} + p_{z \ tot}}{E_{tot} - p_{z \ tot}} = \frac{1}{2} ln \frac{(T_{-} + T_{+}) + (T_{-} - T_{+})v}{(T_{-} + T_{+}) - (T_{-} - T_{+})v} \sim \frac{1}{2} ln \frac{1 - x(T'/T)}{1 + x(T'/T)} \sim -x \frac{T'}{T},$$
(7.25)

para pequenos x. Com v a velocidade do centro de massa e a "espessura"  $T_{\pm}$ :

$$T_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} dz \ \rho(x \pm b/2, y, z).$$
 (7.26)

A distribuição de matéria criada na colisão dos dois cilindros é centrada neste  $\eta_{cms}$ , e pode-se supor que ela é uma gaussiana centrada neste valor. Dessa forma, podemos escrever a densidade de entropia como:

$$s(x, y, \eta) = s_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{(\eta_s - \eta_{cms})^2}{2\sigma_{\eta_s}^2}\right) \\ \sim s_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta_s^2}{2\sigma_{\eta_s}^2} + \left[-x\frac{T'}{T}\right]\frac{\eta_s}{\sigma_{\eta_s}^2}\right).$$
(7.27)

Comparando com (7.17), temos:

$$\theta = -\frac{\sigma_x}{\sigma_{\eta_s}} \frac{T'}{T}.$$
(7.28)

Novamente, usamos a distribuição de Woods-Saxon para obter T(b/2) e T'(b/2), junto com os resultados obtidos para  $\sigma_x$  e  $\sigma_{\eta_s}$ . Os valores obtidos estão na tabela 7.1.

Agora só falta estimar um valor para a duração da evolução hidrodinâmica,  $\tau_f$ . Quando usamos o NeXSPheRIO para reproduzir dados do RHIC, um valor típico para a densidade de energia inicial é ~ 10  $GeV/fm^3$ . Para densidades de energia muito altas, podemos assumir que a velocidade do som do regime perturbativo da QCD é  $c_s = 1/\sqrt{3}$ e também para o modelo de sacola do MIT. Quando a matéria hadroniza, a velocidade do som diminui, de modo que o termo dominante em (7.18) deve ser devido à fase de plasma. Dessa forma podemos estimar o tempo final na evolução hidrodinâmica usando:  $\tau_f/\tau \sim (\epsilon_0/\epsilon_f)^{3/4}$ , com  $\epsilon_0 \sim 10 \ GeV/fm^3$  e  $\epsilon_f \sim 1 \ GeV/fm^3$ , obtemos  $\tau_f/\tau_0 \sim 5$ . Esse último parâmetro será o único relativamente livre. Devido à grande incerteza sobre a sua estimativa, vamos variá-lo levemente de modo a melhor reproduzir os dados. O valor encontrado foi:  $\tau_f/\tau_0 = 4$ . A tabela 7.1 recapitula todos os parâmetros usados nos cálculos analíticos para o fluxo dirigido.

Centralidades	$\sigma_x$	$\sigma_y$	$\theta$
00-06%	2,7805	2,9158	0,0447
06-15%	2,4041	2,7862	0,0816
15 - 25%	2,0435	2,6143	0,1172
25 - 35%	1,7577	$2,\!4360$	0,1588
35-45%	1,5361	2,2619	0,2161
45-55%	1,3631	2,0911	0,3028

Tabela 7.1: Parâmetros para o cálculo do fluxo dirigido analítico e numérico (usando uma condição inicial gaussiana) para colisões de núcleos de ouro a 200AGeV. A duração da evolução hidrodinâmica foi escolhida como sendo  $\tau_f/\tau_0 = 4 \ fm$  e a largura da gaussiana na direção do eixo da colisão como  $\sigma_{\eta_s} = 2.16$ .



Figura 7.2: (a)  $v_1(\eta)$  calculado com (7.18) comparado com cálculo numérico usando o SPheRIO (e mesma condição inicial) para colisões de Au+Au a 200 GeV. (b) Zoom para  $\eta$  pequeno. Nos dados,  $\eta$  é a pseudo-rapidez e não a rapidez espacial, e na ausência de massa,  $\eta$  se reduz à rapidez Y.

Vamos agora comparar nossa fórmula analítica e aproximada para  $v_1(Y)$  (7.18) com o fluxo dirigido obtido numericamente (para as mesmas condições iniciais). Para facilitar a comparação, os gráficos que serão mostrados a seguir utilizaram uma equação de estado sem transição de fase e com  $c_s^2 = 1/3$ . Como a velocidade do som é maior na fase de quarks do que na hadrônica, essa equação de estado implica uma evolução hidrodinâmica mais curta, ou seja, o desacoplamento ocorre mais rapidamente. Dessa forma, o fluxo dirigido obtido com essa equação de estado é um pouco menor do que o obtido quando usamos a equação de estado com transição de fase (e ponto crítico).

A figura 7.2a mostra uma comparação entre a fórmula analítica (7.18) e os resultados numéricos para fluxo dirigido. Vemos na figura 7.2b que o acordo é razoável na região de  $\eta$  pequeno, onde o nosso modelo se aplica.

Assim, olhando (7.16), concluímos que a física que dita o comportamento do fluxo

dirigido é de fato a aceleração longitudinal (gradiente de  $\partial_{\eta_s} s$  que leva a  $Y(\tau, \eta_s) \neq \eta_s$ , confira (7.13), e  $\partial p/\partial Y \neq 0$ , confira (7.15)) e que as condições iniciais precisam ter uma dependência simultânea em  $x \in \eta$  (termo cruzado  $\partial^2 s/\partial x \partial_{\eta_s}$  que introduz uma dependência em  $x \in Y(\tau, \eta_0)$ , confira (7.15)). Passamos agora a estudar quais características nas condições iniciais levam a um melhor acordo com os dados.

#### 7.1 Estudo de condições iniciais com *"tilt"*

#### 7.1.1 O papel do "tilt"

Refazemos agora uma comparação com os dados, como feito no capítulo 6, mas usando a condição inicial com "tilt" no lugar da condição inicial gerada pelo NeXus. Estas condições iniciais analíticas têm a vantagem de serem mais transparentes, principalmente em relação ao fato de podermos medir diretamente o efeito de cada parâmetro no resultado final. A constante de normalização  $s_0$  é ajustada de modo a obter o valor experimental do espectro de partículas produzidas por pseudo-rapidez  $(dN/d\eta)$ . Supomos nula a densidade bariônica (ela é pequena, para pequenos valores de rapidez, nas experiências feitas no RHIC). A velocidade inicial é escolhida como sendo nula na direção transversal e satisfaz:  $Y(\tau_0) = \eta_s$  na direção longitudinal. Por fim, o critério para o "freeze-out" à temperatura constante é usado como antes: a temperatura onde ocorre o desacoplamento é escolhida para reproduzir razoavelmente a inclinação do espectro de partículas carregadas produzidas em relação ao momento transversal.

Calculamos  $v_1(\eta)$  para várias centralidades como mostrado na figura 7.3. Usamos essas curvas para obter resultados nas janelas de centralidade dos dados experimentais. Esta comparação com os dados é mostrado na figura 7.4. Na região para  $|\eta| < 1.3$ , em destaque na figura 7.4b, o acordo é razoável, mas para  $2.5 < |\eta| < 4.0$ , o nosso valor obtido para  $|v_1|$  é pequeno demais.

Na figura 7.5 mostramos que os dados de fluxo dirigido integrados em duas regiões de  $\eta$  são lineares em relação ao parâmetro de impacto *b*. Isto é diferente de outras quantidades, como o fluxo elíptico, que varia com o quadrado do parâmetro de impacto.


Figura 7.3:  $v_1(\eta)$  para várias centralidades.



de [39]. (b) Zoom para  $\eta$  pequeno.



Figura 7.5: Integração de  $v_1(\eta)$  para várias centralidades comparada com os dados de [39]. Como esperado, para  $2.5 < |\eta| < 4.0$ ,  $|v_1|$  é subestimado, confira a figura 7.4.

Numericamente, também obtemos um comportamento linear (com  $|v_1|$  subestimado para  $2.5 < |\eta| 4.0$ , como esperado)

Investigamos agora a dependência em  $p_t$  de  $v_1$  para as condições iniciais com "tilt". As figuras 7.6 e 7.7 mostram, tanto para a janela de centralidade mais central quanto para a mais periférica, que os nossos resultados são em geral decrescentes, ao contrário dos dados experimentais, que saturam ou voltam a crescer. Poderíamos achar que as partículas de grande momento transversal não são termalizadas, mas o "turn-over" de  $v_1(p_t)$  para a centralidade de 00 - 06% acontece para  $p_t \sim 0.5 GeV$ , um regime que deve ser descrito pela hidrodinâmica. Essa falha em descrever o "turn-over" para o fluxo dirigido em função do momento transversal aponta que falta algum "ingrediente" nas condições iniciais com "tilt".

#### 7.1.2 O papel da "skewness"

Na referência [45] foi feito um estudo sobre o comportamento do fluxo dirigido em função do momento transversal, e apontado que uma assimetria, como a da figura 5.6



Figura 7.6:  $v_1(p_t)$  em comparação com os dados de [39] para a centralidade mais central, usando a condição inicial dada por (7.17).



Figura 7.7:  $v_1(p_t)$  em comparação com os dados de [39] para a centralidade mais periférica, usando a condição inicial dada por (7.17).



Figura 7.8: Densidade de entropia para  $\eta > 0$ , y fixo, em função de x. Linha preta pontilhada: caso sem "skewness" (confira equação (7.17). Linha vermelha cheia: caso com "skewness".

ou da figura 7.8, era importante para se ter o "turn-over". A razão é que o lado com maior gradiente de entropia (x > 0 na figura 7.8) emite mais partículas de grande momento transversal. Como este lado é de x > 0,  $v_1(p_t)$  será positivo para grande momento transversal. O lado com menor gradiente (x < 0 na figura 7.8) produz mais partículas com pequeno momento transversal. Como este lado é o de x < 0,  $v_1(p_t)$ será negativo para pequeno momento transversal, daí termos o "turn-over".

Nós incorporamos, então, essa ideia nas condições iniciais com "tilt". Supomos que a gaussiana em x tinha "skewness" negativa, isto é, caía mais rápida para o lado direito (em relação ao ponto de máximo) como na figura 7.8. Para incorporar esse efeito, reescrevemos

$$s(x, y, \eta_S) = s_0 exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta_S^2}{2\sigma_{\eta_S}^2} + \theta \frac{x\eta_S}{\sigma_x \sigma_{\eta_S}}\right),$$
(7.29)

de modo a evidenciar onde ela está centrada em x (usamos o fato de que  $\theta$  é pequeno:)

$$s(x, y, \eta_S) = s_0 exp\left(-\frac{(x - x_0(\eta_S))^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta_S^2}{2\sigma_{\eta_S}^2}\right),$$
(7.30)

com  $x_0(\eta_S) = \theta \frac{\sigma_x}{\sigma_{\eta_S}} \eta_S$ . Se  $\eta_s > 0$ , mantemos esta forma para x < 0 e usamos para



Figura 7.9:  $v_1(p_t)$  em comparação com os dados de [39] para a centralidade mais central, usando a condição inicial dada por (7.30) e (7.31).

x > 0:

$$s(x, y, \eta_S) = s_0 exp\left(-\frac{(x - x_0(\eta_S))^2}{2\sigma_x^2}\left(1 + \lambda\theta\frac{|\eta_S|}{\sigma_{\eta_S}}\right) - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta_S^2}{2\sigma_{\eta_S}^2}\right).$$
 (7.31)

Se  $\eta < 0$ , a equação (7.30) é usada para x > 0 e a equação (7.31) para x < 0. Vemos que (7.31) corresponde a uma semi-gaussiana com

$$\sigma_x^{\prime 2} = \frac{\sigma_x^2}{1 + \lambda \theta \frac{|\eta_s|}{\sigma_{\eta_s}}},\tag{7.32}$$

onde fica claro que a gaussiana se estreita conforme  $\eta_s$  cresce. O parâmetro  $\lambda$  é suposto pequeno de modo a não afetar os resultados anteriores sobre  $v_1(\eta) \in v_1(b)$ .

Para ilustrar o efeito da "skewness" sobre  $v_1(p_t)$ , escolhemos  $\lambda = 0.75$  e verificamos que os resultados para  $v_1(\eta)$  não eram modificados. Mostramos nas figuras 7.9 e 7.10 os resultados para  $v_1(p_t)$ , quando incluimos a "skewness". Mostramos, em comparação com os resultados das figuras 7.6 e 7.7, que há um melhor acordo qualitativo.



Figura 7.10:  $v_1(p_t)$  em comparação com os dados de [39] para a centralidade mais periférica, usando a condição inicial dada por (7.30) e (7.31).

#### "Skewness" positiva

Uma outra condição inicial que pode apresentar fluxo dirigido com sinal negativo é uma que possua "skewness" positiva (no lugar de "tilt"). Para verificar este efeito, primeiro escrevemos esta condição inicial como:

$$s(x, y, \eta_S) = s_0 exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2(1-\lambda|\eta|)} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{\eta_S^2}{2\sigma_{\eta_S}^2}\right),$$
(7.33)

com $\lambda$ ob<br/>decendo:

Ao usarmos (7.33) como condição inicial em (7.16) obtemos a seguinte forma para o



Figura 7.11: Comparação entre o fluxo dirigido obtido pelo cálculo numérico e o cálculo analítico para uma condição inicial com "skewness" positiva.

fluxo dirigido:

$$v_1(Y) \cong c_s^4 \tau_f \frac{1+c_s^2}{1-c_s^2} \left[ ln\left(\frac{\tau_f}{\tau_0}\right) + \frac{1}{1-c_s^2} \left( \left(\frac{\tau_0}{\tau_f}\right)^{1-c_s^2} - 1 \right) \right] \frac{-\lambda}{\sigma_{\eta_s}^2 \sigma_x} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2\pi}} Y.$$
(7.34)

Na figura 8.13 mostramos o bom acordo entre o resultado numérico e o cálculo analítico para pequena pseudo-rapidez, demonstrando assim que o modelo analítico prevê bem como será o comportamento do fluxo dirigido para diferentes condições iniciais.

## Capítulo 8

#### Condições iniciais físicas

O nosso modelo para o fluxo dirigido nos permite prever como será esse observável para as diferentes condições iniciais (para colisões de íons pesados relativísticos) encontrados na literatura. Podemos verificar o nosso entendimento de como detalhes nessas condições iniciais, tais como a inclusão ou ausência da "skewness", do "tilt" e de platô irão modificar a forma de  $v_1(\eta)$ ,  $v_1(p_t) \in v_1(b)$ . Neste capítulo mostramos os nossos resultados para duas condições iniciais: Hirano-Tsuda[44] e Adil-Gyulassy[46], além de reanalisar o fluxo dirigido obtido pela condição inicial gerada pelo NeXus.

#### 8.1 Condições iniciais tipo Hirano-Tsuda

A primeira condição inicial que usamos, que iremos chamar de condição inicial Hirano-Tsuda[44], foi muito usada na literatura. Essa condição inicial inclui o *"tilt"* na densidade de energia (ou entropia) no plano da reação. Ela também possuiu um platô. Ela é escrita como:

$$E(x, y, \eta_s) = E_{max}W(x, y; b)H(\eta_s), \qquad (8.1)$$

onde o perfil na direção transversal é proporcional ao número de colisões binárias:

$$W(x, y, b) \propto T_{+}T_{-}, \tag{8.2}$$



Figura 8.1: (a) Densidade de energia gerada a partir da equação 8.1. Com parâmetros escolhidos de modo a simular uma colisões ouro-ouro de 200AGeV e janela de centralidade de 15 - 25%.

com a função "espessura",  $T_{\pm} = T(x \pm b/2, y)$ , dada novamente por Woods-Saxon, equações (7.19) e (7.26). O perfil na direção longitudinal é dado por

$$H(\eta_S) = exp\left[-\frac{(|\eta_s - \eta_{s0}| - \eta_f/2)^2}{2\sigma_\eta^2}\theta(|\eta_s - \eta_{s0}| - \eta_f/2)\right],$$
(8.3)

com a rapidez do centro de massa,  $\eta_{s0}$ , dada por (7.24).

A normalização da densidade de energia inicial,  $E_{max}$ , foi escolhida de modo a reproduzir o espectro de pseudo-rapidez de partículas produzidas. A largura do platô foi modificada em relação à referência de modo a obedecer a mudança na escala de energia (passando de  $\sqrt{s} = 130 A GeV$  para  $\sqrt{s} = 200 A GeV$ ). Seu valor é  $\eta_f = 6.3$ . O denominador da gaussiana não precisou ser modificado e continua sendo  $\sigma_{\eta} = 0.2$ .

Na figura 8.1(a) vemos a forma da densidade de energia gerada por essa condição inicial. Na figura 8.1(b) vemos os perfis ao longo do plano da reação para vários valores de  $\eta_s$  (e y = 0). Essa figura deixa claro o efeito do "tilt" e do platô, assim como a "skewness" positiva desta condição inicial.

O cálculo numérico para  $v_1(\eta)$  usando essa condição inicial é mostrado na figura 8.2<sup>1</sup> (quadrados pretos). Vemos que o sinal do fluxo dirigido é contrário ao observado nos experimentos. Isso se deve à presença do platô na condição inicial. Tanto que,

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>Como novamente iremos comparar resultados numéricos com os obtidos pela nossa fórmula analítica, utilizamos mais uma vez a equação de estado sem transição de fase com  $c_s^2 = 1/3$ .



Figura 8.2: Fluxo dirigido em função de  $\eta$  para a condição inicial do tipo Hirano-Tsuda, com e sem platô.

como visto na figura, se retirarmos o platô da condição inicial, escolhendo  $\eta_f = 0.0$ , reobtemos o sinal correto para o fluxo dirigido (círculos vermelhos). Ao fazer essa modificação, de modo a continuar reproduzindo os espectros de partículas produzidas, tivemos que modificar também o parâmetro que rege a largura da gaussiana na direção longitudinal, passando  $\sigma_{\eta}$  de 0.2 para 2.5. Sem o platô, a condição inicial do tipo Hirano-Tsuda é praticamente a nossa gaussiana com "tilt", só que com uma "skweness" positiva.

Como a "skewness" nesta condição inicial é positiva, já é esperado que o fluxo dirigido em função do momento transversal não tenha um bom comportamento. Isso é visto na figura 8.3, tanto para o caso com platô, que tem um  $v_1(p_t)$  sempre positivo, quanto para o caso sem o platô, que mostra um resultado similar ao estudo que fizemos com a gaussiana sem "skewness" (figura 7.7), ou seja, um fluxo dirigido que não apresenta o "turn-over".

#### 8.1.1 O efeito da inclusão de platôs nas condições iniciais

O único ingrediente nessa condição inicial que ainda não foi discutido anteriormente é a presença de um platô em  $\eta_s$ . Nosso próximo passo foi então entender o porquê



Figura 8.3: Fluxo dirigido em função de momento transversal para a condição inicial do tipo Hirano-Tsuda, com e sem platô.

de a inclusão de um platô ao longo de  $\eta$  poder gerar uma inclinação positiva no fluxo dirigido. Retornamos ao nosso modelo, relação (7.16), e calculamos o  $v_1(Y)$  analítico quando usamos como condição inicial uma fórmula inspirada em (8.1). Para simplificar a conta analítica, usamos gaussianas no lugar de  $T_{\pm}$  em (8.2) e  $\eta_{s0} = \theta (\sigma_{\eta}/\sigma_x) x$ em (8.3). O resultado deste cálculo para a parte dependente da condição inicial é (os termos dependentes da equação de estado e do tempo da expansão continuam iguais):

$$w_{1}(Y) \propto -\frac{\theta}{\sigma_{\eta}^{4}} \left[ \left(Y - \frac{\eta_{f}}{2}\right) exp\left(-\frac{\left(Y - \frac{\eta_{f}}{2}\right)^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}\right) erfc\left(-\frac{Y - \frac{\eta_{f}}{2}}{\sqrt{2}\sigma_{x}\theta}\right) + \left(Y + \frac{\eta_{f}}{2}\right) exp\left(-\frac{\left(Y + \frac{\eta_{f}}{2}\right)^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}\right) erfc\left(\frac{Y + \frac{\eta_{f}}{2}}{\sqrt{2}\sigma_{x}\theta}\right) \right] \right/$$

$$\left[ exp\left(-\frac{\left(Y - \frac{\eta_{f}}{2}\right)^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}\right) erfc\left(-\frac{Y - \frac{\eta_{f}}{2}}{\sqrt{2}\sigma_{x}\theta}\right) + erf\left(-\frac{Y - \frac{\eta_{f}}{2}}{\sqrt{2}\sigma_{x}\theta}\right) + exp\left(-\frac{\left(Y + \frac{\eta_{f}}{2}\right)^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}\right) erfc\left(\frac{Y + \frac{\eta_{f}}{2}}{\sqrt{2}\sigma_{x}\theta}\right) + erf\left(\frac{Y + \frac{\eta_{f}}{2}}{\sqrt{2}\sigma_{x}\theta}\right) \right]. \quad (8.4)$$



Figura 8.4: Comparação entre cálculos numéricos e analíticos para condição inicial com "tilt" e platô para dois conjuntos de parâmetros.

Lembrando que a função erfc é a função erro complementar, e ela é dada por:

$$erfc(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{z}^{\infty} e^{-t^2} dt.$$
(8.5)

Este resultado analítico possui o mesmo sinal para o fluxo dirigido que o visto no cálculo numérico utilizando a condição inicial Hirano-Tsuda. Porém ele não reproduz muito bem a forma do  $v_1$ . Para melhor entender o porquê, primeiro vamos simplificar a equação (8.4) para  $\theta$  pequeno,  $\eta_f$  grande e rapidez positiva (usando as relações  $erfc(z) \sim e^{-z^2}/\sqrt{\pi z}$  e  $erf(z) \sim 1 - e^{-z^2}/\sqrt{\pi z}$  para  $z \to \infty$ ):

$$v_1(Y_+) \propto \frac{\theta^2}{\sigma_\eta^4} \frac{\sigma_x}{\sqrt{2\pi}} exp\left[-\left(Y_+ - \frac{\eta_f}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2\sigma_\eta^2} + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma_x^2\theta}\right)\right]$$
(8.6)

Vemos assim que este o fluxo dirigido não dependeria mais linearmente da rapidez, e que ele seria proporcional a  $(\theta/\sigma_{\eta}^2)^2$ . Este resultado analítico se mostra assim muito sensível a modificações no parâmetros  $\theta \in \sigma_{\eta}$ . Ele também é aproximadamente uma gaussiana centrada em  $\eta_f/2$ , que no caso em que  $\theta$  fosse pequeno, seria bem estreita. Estas ponderações são ilustradas na figura 8.4, onde comparamos este resultado analítico com um cálculo numérico.



Figura 8.5: Cálculo numérico do fluxo dirigido em função da pseudo-rapidez usando um código bidimensional.

Uma hipótese para explicar o porquê de o cálculo analítico não reproduzir tão bem o resultado numérico é a influência da expansão transversal. Para testar esta hipótese usamos um código hidrodinâmico (que também utiliza o modelo SPH), bidimensional, com expansão transversal, mas  $Y = \eta_s$  (para qualquer instante), ou seja, sem aceleração longitudinal.

O resultado deste cálculo, para diferentes tipos de condições iniciais, pode ser visto na figura 8.5. Como esperávamos, a condição inicial que inclui somente o *"tilt"* não produz fluxo dirigido quando temos somente a expansão transversal. Vemos que a condição inicial que inclui o efeito de *"skewness"* positiva produz um fluxo dirigido com inclinação positivo. Uma inclinação positiva também é vista quando usamos a condição com *"tilt"* que possui um platô (que é uma versão simplificada da condição inicial do tipo Hirano-Tsuda). Esta última condição inicial produz um tipo de platô para pequeno  $\eta$ .

Na figura 8.6 mostramos duas comparações entre os cálculos numéricos bidimensionais (só com expansão transversal e  $Y(\tau) = \eta_s$ ), tridimensionais e o cálculo analítico (com expansão longitudinal). Ambas as figuras são para uma condição inicial com "tilt" e platô. Foram usados dois conjuntos diferentes de parâmetros. Na figura à esquerda,



Figura 8.6: Comparação entre cálculos numéricos bidimensionais e tridimensionais para uma condição inicial com "tilt" e platô. (a) Parâmetros que reproduzem  $dN/d\eta$ . (b) Parâmetros que produzem curvas similares.

os parâmetros escolhidos reproduzem o espectro de partículas produzidas. Na figura à direita foi buscado um conjunto de parâmetros onde a "altura" e a forma de  $v_1$  nas três curvas fosse similar. Fica clara a alta sensibilidade aos parâmetros do cálculo analítico, dando um fluxo dirigido ordens de grandeza maior e muito mais "estreito". Vemos também que os cálculos com somente expansão transversal são mais compatíveis com o cálculo tridimensional do que a fórmula analítica. Mas não explicam todo o comportamento do fluxo dirigido.

O ponto principal deste estudo é que condições iniciais com platô grande e *"tilt"*, de modo geral, produzem um fluxo dirigido errado e podem ser excluídas. Este é o caso das condições iniciais do tipo Hirano-Tsuda.

#### 8.2 Condições iniciais tipo Adil-Gyulassy

Continuamos o nosso estudo sobre condições iniciais encontradas na literatura com a condição inicial da referência [46]. Essa condição inicial é baseada no modelo proposto em [47]. A forma desta condição inicial, para colisões entre núcleos de mesmo número



Figura 8.7: (a) Densidade de energia gerada a partir da equação 8.7, com parâmetros escolhidos de modo a simular uma colisão de ouro-ouro a 200AGeV e janela de centralidade de 15 - 25%.

atômico, é:

$$s(x, y, \eta) = \frac{s_0}{2Y_{max}} exp\left[\frac{-\eta^2}{\sigma_\eta^2}\right] \theta(Y_{max} - |\eta|) \\ \left[\frac{dN_{Part}^+}{dxdy}(Y_{max} - \eta) + \frac{dN_{Part}^-}{dxdy}(Y_{max} + \eta)\right],$$
(8.7)

com  $Y_{max} = 5 e \sigma_{\eta}$  dado por (7.23). As densidades de participantes no plano transversal são dadas por:

$$\frac{dN_{Part}^{+}}{dxdy} = T_{+}[1 - exp(-\sigma_{in}T_{-})]$$

$$\frac{dN_{Part}^{-}}{dxdy} = T_{-}[1 - exp(-\sigma_{in}T_{+})],$$
(8.8)

onde, novamente, as funções  $T_{\pm}$  são dadas por (7.26) e  $\sigma_{in} = 42 \ fm$ .

A forma dessa condição inicial no plano da reação é mostrada na figura 8.7a. Na figura 8.7b vemos os perfis da densidade de energia para vários valores de  $\eta_s$ , novamente para y = 0.

Fica claro nestas duas figuras que a condição inicial Adil-Gyualssy possui "tilt" e "skewness" negativa. Assim esperamos que o comportamento do fluxo dirigido, quando feito o cálculo numérico com esta condição inicial, seja similar ao comportamento indicado pelo cálculo analítico para condição inicial gaussiana com "tilt" e "skewness"



Figura 8.8: Comparação entre o  $v_1(\eta)$  obtido a partir da condição inicial dada por 8.7 e os dados de [39].

negativa, ou seja, fluxo dirigido em função da rapidez com sinal negativo e "turn-over" no fluxo dirigido em função do momento transversal. Foi o que observamos nos nossos cálculos, como mostramos nas figuras  $8.8 \ a \ 8.10^2$ .

Como esperado, na hidrodinâmica aparece, em geral, mais fluxo nos resultados numéricos do que visto nos dados (onde a termalização pode não ser completa). A figura 8.10 mostra o comportamento do fluxo dirigido em função do parâmetro de impacto. Vemos que a condição inicial do tipo Adil-Gyulassy produz um comportamento não linear, em desacordo com os dados.

Verificamos também que as condições iniciais do tipo Hirano-Tsuda produzem  $dN/d\eta$ ,  $dN/dp_t$  e  $v_2$  em acordo com os dados (o acordo do fluxo elíptico com os dados é somente razoável). De modo geral, concluímos que condições iniciais com "tilt" e "skewness" produzem um fluxo dirigido com características compatíveis com os dados.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup>Como estamos interessados em verificar quantativamente o comportamento desta condição inicial, e não mais comparar os resultados numéricos com a fórmula analítica (já que essa comparação já foi feita na figura 7.2), a equação de estado usada é a mais realista que inclui transição de fase e ponto crítico.



Figura 8.9: Comparação entre o  $v_1(p_t)$  para  $\eta < 1.3$  obtido a partir da condição inicial dada por 8.7 e os dados de [39].



Figura 8.10: Comparação entre o  $v_1(p_t)$  para  $2.5 > \eta > 4.0$  obtido a partir da condição inicial dada por 8.7 e os dados de [39].



Figura 8.11: Comparação entre o  $v_1(b)$  obtido a partir da condição inicial dada por 8.7 e os dados de [39].

#### 8.2.1 Voltando às condições iniciais do NeXus

Usamos o que temos aprendido até agora para reanalisar as condições iniciais geradas pelo NeXus e apontar seu efeito sobre o fluxo dirigido. Utilizamos nesta seção condições iniciais suaves. Na figura 8.12 mostramos perfis da densidade de energia para o plano y = 0, e vários valores de  $\eta_s$ . Essa figura foi feita para uma janela um pouco mais periférica, de modo a ressaltar os efeitos esperados que geram o fluxo dirigido. Também foi usada uma condição inicial gerada a partir de muito mais eventos aleatórios do NeXus<sup>3</sup> (6000 eventos), de modo a deixá-la bem suave.

Nesta figura fica bem claro que, para pequenos valores de  $\eta$  ( $|\eta| < 3$ ), os valores de máxima densidade de energia praticamente coincidem com o eixo  $\eta$ , ou seja, aparenta também possuir um pequeno platô. As condições iniciais geradas pelo NeXus também produzem um pequeno "tilt", que se traduz pelo deslocamento dos máximos da densidade de energia em função de x para pseudo-rapidez crescente. Também se pode ver este deslocamento nas figuras 6.3b e d. A inclinação de  $v_1(Y)$  para as condições iniciais geradas pelo NeXus irão assim depender do tamanho deste platô. Para condições

 $<sup>^3\</sup>rm Esta$  condição inicial bem suave do NeXus foi cedida pelo aluno de doutorado R. P. G. de Andrade, que integra o nosso grupo.



Figura 8.12: Perfis da densidade de energia para colisões de núcleo de ouro, usando condição inicial média gerada pelo NeXus para a janela de centralidade de 15-25% no plano y = 0. As curvas são para vários valores de  $\eta$ .

iniciais suaves, este platô é um pouco maior, pois ao se fazer a média para vários eventos, cada um com *"tilts"* levemente diferentes entre si, acaba-se gerando um platô um pouco maior. O efeito deste platô se mostra maior quando usamos uma equação de estado realista <sup>4</sup>, no lugar da equação de estado sem transição de fase. Isto ocorre pois a equação de estado com ponto crítico, por ter uma velocidade do som menor (na fase de hádrons), tem uma maior evolução hidrodinâmica. Esta maior evolução hidrodinâmica permite o aumento do efeito da expansão transversal que age sobre o platô.

Para deixar este efeito claro, a figura 8.13 mostra uma comparação entre a condição inicial suave e a condição inicial com flutuação, e a diferença quando usamos as diferentes equações de estado. Quando usamos a equação de estado sem transição de fase (chamada de EOS QGP na figura 6.4), a evolução hidrodinâmica é menor, a aceleração longitudinal ainda é dominante, e assim não há grande diferença entre as duas condições iniciais. Também é interessante notar que a inclinação do fluxo dirigido é negativa, o que é de se esperar, já que o efeito dominante ainda é originado pelo "*tilt*". Ao usarmos a equação de estado com transição de fase (chamada EOS CP na figura

 $<sup>^4{\</sup>rm Foi}$ usada a equação de estado com transição de fase e ponto crítico



Figura 8.13: Comparação entre a condição inicial flutuante e suave gerada pelo NeXus, para a equação de estado com e sem transição de fase.

6.4), vemos que o aumento da evolução hidrodinâmica permite a expansão transversal dominar sobre a aceleração longitudinal. Ela consegue inclusive inverter o sinal do fluxo dirigido. Também vemos uma indicação de que o platô na condição inicial média é maior que na condição inicial flutuante, já que a inclinação da primeira é maior que a da segunda. Podemos ver na figura 8.12 (principalmente para  $|\eta| \ge 3$ ) que as condições iniciais geradas pelo NeXus produzem o efeito de "skewness" negativa, o que resulta na aparição de "turn-over" para  $v_1(p_t)$  (confira a figura 6.12).

### Capítulo 9

## Conclusão

O código hidrodinâmico NeXSPheRIO foi usado para estudar vários problemas relacionados com colisões nucleares de alta energia: efeitos das flutuações nas condições iniciais [48], dependência da temperatura efetiva dos káons na energia da colisão [49], interferometria no RHIC [50], distribuição de massa transversal no SPS para partículas estranhas e não estranhas [51], efeito da escolha das janelas de centralidade usando o número de participantes ou o parâmetro de impacto [17], efeito da natureza da transição e do mecanismo de emissão [11], comparação entre a maneira teórica e experimental de obter  $v_2$  [24], produção de partículas estranhas no RHIC [52], flutuações do fluxo elíptico [26], comparação entre hidrodinâmica com condições iniciais médias e evento por evento [27].

Os resultados obtidos nos artigos mencionados acima foram para Au+Au. Um primeiro passo neste trabalho foi estender alguns destes cálculos também para Cu+Cu. O objetivo era verificar quando a hidrodinâmica se aplica ou não, bem como ver a influência da geometria e outros fatores nos observáveis. Foi observado que a hidrodinâmica também permite descrever neste sistema menor:  $dN/d\eta$ ,  $d^2N/p_t d\eta dp_t$ ,  $v_2$  e  $v_1$ . Em relação ao fluxo dirigido, nossos cálculos numéricos exibem o mesmo comportamento visto nos experimentos, ou seja:  $v_1(\eta)$  para uma dada janela de centralidade em colisão de Au+Au e Cu+Cu são aproximadamente iguais.

Em seguida passamos a um estudo mais geral onde buscamos um modelo que

descrevesse as várias características observadas no fluxo dirigido. Propusemos um modelo analítico que usa a hipótese de o fluxo dirigido ser proporcional à velocidade na direção x de uma fatia de matéria com Y fixo. Este modelo mostrou que a aceleração longitudinal junto com uma assimetria no plano da reação (*"tilt"*)seriam as responsáveis pelo surgimento de  $v_1(Y)$ . Este modelo dá o sinal correto de  $v_1$  e, para a região de pequeno  $\eta$ , está em acordo quantitativo com os dados e cálculos numéricos. A introdução de *"skewness"* negativa permite obter o comportamento de  $v_2(p_t)$ .

O nosso modelo também sugere uma razão para a independência de sistema no fluxo dirigido. O fluxo dirigido é proporcional a  $\theta$ , parâmetro que representa o tamanho do *"tilt"* nas condições iniciais. Obtivemos indicações de que  $\theta$  é o mesmo tanto para Au+Au quanto para Cu+Cu (para NeXSPheRIO).

Este modelo foi generalizado para outros tipos de condições iniciais. Ele está em acordo com o resultado numérico no caso da condição inicial com *"tilt"* ou com *"skewness"* positiva. No caso onde a condição inicial inclui um platô, a fórmula analítica mostra o sinal correto, mas difere na forma final das curvas, assim como na sensibilidade em relação aos parâmetros. A expansão transversal demonstrou-se importante para este tipo de condição inicial. Porém, de qualquer forma, este tipo de condição inicial produz um fluxo dirigido com sinal oposto ao dos dados.

Dessa forma, podemos agora utilizar o nosso modelo para prever quais condições iniciais propostas na literatura reproduzirão corretamente o fluxo dirigido. Além disso, mostramos que dados sobre o fluxo dirigido fornecem informações únicas sobre a geometria inicial da matéria criada nas colisões de íons pesados relativísticos.

## Apêndice A

#### Conservação da entropia

Um fluido ideal por definição parece isotrópico no seu referencial de repouso. Assim, não possui viscosidade, nem condutividade térmica. A entropia de uma partícula deste fluido será conservada durante o seu movimento no espaço.

Neste apêndice, mostraremos que as equações de conservação (3.5) com a forma (3.9) para o tensor  $T^{\mu\nu}$  implicam a conservação da entropia. Essa demonstração é baseada nos textos [6]-[7].

Vamos começar mostrando a conservação da entropia. Primeiro abrimos (3.4), usando (3.9), substituindo  $(\epsilon + P)$  por w:

$$u^{\mu}\frac{\partial(wu^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + wu_{\nu}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial p}{dx^{\mu}} = 0.$$
 (A.1)

Projetamos (A.1) na direção da quadri-velocidade, ou seja, multiplicamos por  $u_{\mu}$ :

$$u_{\mu}u^{\mu}\frac{\partial(wu^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + wu_{\mu}u_{\nu}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\nu}} - u_{\mu}\frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} = 0.$$
(A.2)

Usando as relações  $u^{\mu}u_{\mu} = 1$  e

$$u_{\mu}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = g_{\mu\beta}u^{\beta}\frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\underbrace{(g_{\mu\beta}u^{\beta}u^{\mu})}_{1} = 0, \qquad (A.3)$$

temos:

$$\frac{\partial(wu^{\nu})}{\partial x^{\nu}} - u_{\nu}\frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} = 0.$$
(A.4)

Reescrevendo (A.4) como:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{w}{n_B} n_B u^{\nu}\right) - \frac{1}{n_B} n_B u_{\nu} \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$n_B u^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(\frac{w}{n_B}\right) + \frac{w}{n_B} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left(n_B u^{\nu}\right) - \frac{1}{n_B} n_B u_{\nu} \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} = 0, \qquad (A.5)$$

usando a conservação do número bariônico, (3.3), tem-se:

$$n_B u^{\nu} \left[ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{w}{n_B} \right) - \frac{1}{n_B} \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} \right] = 0.$$
 (A.6)

Usando a seguinte relação termodinâmica

$$d\left(\frac{w}{n_B}\right) - \frac{1}{n_B}dp = Td\left(\frac{\sigma}{n_B}\right) \tag{A.7}$$

em (A.6) obtemos:

$$n_B u^{\nu} T \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{\sigma}{n_B} \right) = 0, \tag{A.8}$$

percebendo que:

$$\frac{\partial(\sigma u^{\nu})}{\partial u^{\nu}} = \frac{\partial}{\partial u^{\nu}} \left( \frac{\sigma}{n_B} n_B u^{\nu} \right)$$

$$= n_B u^{\nu} \frac{\partial}{\partial u^{\nu}} \left( \frac{\sigma}{n_B} \right) + \frac{\sigma}{n_B} \frac{\partial}{\partial u^{\nu}} \left( n_B u^{\nu} \right)^{\bullet}$$

$$= n_B u^{\nu} \frac{\partial}{\partial u^{\nu}} \left( \frac{\sigma}{n_B} \right), \quad (A.9)$$

vemos que a entropia é conservada:

$$\frac{\partial(\sigma u^{\nu})}{\partial u^{\nu}} = 0. \tag{A.10}$$

## Apêndice B

# Equação de Euler relativística e limite clássico

Neste apêndice vamos obter as equações de Euler relativísticas e demonstrar que no limite clássico elas recaem em (2.2). Novamente, este texto é baseado em [6].

Usando as equações de conservação (3.4), e projetando-as na direção perpendicular à velocidade, temos:

$$\frac{\partial T^{\nu}_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - u_{\mu}u^{\nu}\frac{T^{\alpha}_{\nu}}{\partial x^{\alpha}} = 0.$$
(B.1)

Usando a forma (3.9) para  $T^{\mu\nu}$  (onde substituímos  $\epsilon + p$  por w).

$$\frac{\partial w u_{\mu} u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial p g_{\mu}^{\nu}}{\partial x^{\nu}} - u_{\mu} u^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} (w u^{\alpha} u_{\nu} - p g_{\nu}^{\alpha}) = 0$$

$$\underbrace{u_{\mu} \frac{\partial (w u^{\nu})}{\partial x^{\nu}}}_{\partial x^{\nu}} + w u^{\nu} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} - u_{\mu} \underbrace{u^{\nu} u_{\nu}}_{1} \underbrace{\frac{\partial (w u^{\alpha})}{\partial x^{\alpha}}}_{0} - u_{\mu} w u^{\alpha} \underbrace{u^{\nu} \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x^{\alpha}}}_{0} + u_{\mu} u^{\nu} \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$w u^{\nu} \frac{\partial u_{\mu}}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} - u_{\mu} u^{\nu} \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}}.$$
(B.2)

As 3 componentes espaciais de (B.2) são a generalização relativística da equação de Euler. Podemos ver isso, separando a parte espacial da parte temporal da quadrivelocidade, ou seja  $u^{\mu} = (\gamma, \gamma \vec{v})$ .

$$(\epsilon + p)u^{0}\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x^{0}} + (\epsilon + p)u^{i}\frac{\partial u_{\mu}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial p}{\partial x^{\mu}} - u_{\mu}u^{0}\frac{\partial p}{\partial x^{0}} - u_{\mu}u^{i}\frac{\partial p}{\partial x^{i}}$$
(B.3)

A componente temporal é:

$$(\epsilon + p)\gamma \frac{\partial \gamma}{\partial t} + (\epsilon + p)\gamma(\vec{v} \cdot \nabla)\gamma = +\frac{\partial p}{\partial t} - \gamma^2 \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma^2(\vec{v} \cdot \nabla)p \tag{B.4}$$

e as componentes espaciais:

$$-(\epsilon+p)\gamma\frac{\partial(\gamma\vec{v})}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma(\vec{v}\cdot\nabla)(\gamma\vec{v}) = \nabla p + \gamma^2\vec{v}\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma^2\vec{v}(\vec{v}\cdot\nabla)p \qquad (B.5)$$

Expandindo as derivadas de  $\gamma \vec{v}$  de (B.5):

$$-(\epsilon+p)\gamma^2\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma\vec{v}\frac{\partial\gamma}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma^2(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - (\epsilon+p)\gamma\vec{v}(\vec{v}\cdot\nabla)\gamma = \nabla p + \gamma^2\vec{v}\frac{\partial p}{\partial t} + \gamma^2\vec{v}(\vec{v}\cdot\nabla)p. \quad (B.6)$$

Separando o termo $\gamma^2(\vec{v}\cdot\nabla)p$  de (B.4):

$$\gamma^2(\vec{v}\cdot\nabla)p = -(\epsilon+p)\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma(\vec{v}\cdot\nabla)\gamma + \frac{\partial p}{\partial t} - \gamma^2\frac{\partial p}{\partial t}$$
(B.7)

Substituindo (B.7) em (B.6):

$$-(\epsilon+p)\gamma^{2}\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma\vec{v}\frac{\partial\gamma}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma^{2}(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} - (\epsilon+p)\gamma\vec{v}(\vec{v}\cdot\nabla)\gamma =$$

$$\nabla p + \gamma^{2}\vec{v}\frac{\partial\rho}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma\vec{v}\frac{\partial\gamma}{\partial t} - (\epsilon+p)\gamma\vec{v}(\vec{v}\cdot\nabla)\gamma + \vec{v}\frac{\partial p}{\partial t} - \gamma^{2}\vec{v}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$-(\epsilon+p)\gamma^{2}\left[\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}\right] = \nabla p + \vec{v}\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{(\epsilon+p)\gamma^{2}}\left[\vec{\nabla}p + \vec{v}\frac{\partial p}{\partial t}\right].$$
(B.8)

Estas equações são a versão relativística da equação de Euler. De fato, obtemos o limite clássico, (2.2), fazendo  $|\vec{v}| \ll c, p \gg \epsilon$  e  $\epsilon \sim \rho$ , com  $\rho$  sendo a densidade de massa.

## Apêndice C

## Equivalência entre a ação e as equações hidrodinâmicas

Neste apêndice vamos demonstrar a equivalência entre minimizar a ação dada por (D.9), restringida pelos vínculos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_B u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} &= 0\\ \frac{\partial s u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} &= 0\\ u^{\nu} u_{\nu} &= 1, \end{aligned} \tag{C.1}$$

com as equações hidrodinâmicas. Este texto está baseado em [7] e [53]. Começamos escrevendo a variação da ação com os vínculos já incluídos:

$$\delta I = \delta \int \left[ -\epsilon(n_B, s) + \lambda \frac{\partial(n_B u^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + \zeta \frac{\partial(s_B u^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + \omega \frac{1}{2} (u^{\nu} u_{\nu} - 1) \right] d^4 x = 0, \quad (C.2)$$

sendo  $\lambda$ ,  $\zeta \in \omega$  os multiplicadores de Lagrange. Podemos assim obter as equações de Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{\partial L_{ef}}{\partial (\partial_{\nu} \eta_j)} \right) - \frac{\partial L_{ef}}{\partial \eta_j} = 0, \tag{C.3}$$

com a densidade de lagrangiana efetiva

$$L_{ef}(\vec{\eta}) = -\epsilon(n_B, s) + \lambda \frac{\partial(n_B u^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + \zeta \frac{\partial(s_B u^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + \omega \frac{1}{2}(u^{\nu} u_{\nu} - 1), \qquad (C.4)$$

onde o vetor  $\vec{\eta}$  é dado por

$$\vec{\eta} = (n_B, s, u^{\nu}, \lambda, \zeta, \omega). \tag{C.5}$$

Vamos considerar as variáveis do vetor  $\vec{\eta}$  independentes. As equações de Lagrange para as coordenadas  $\lambda$ ,  $\zeta \in \omega$  são os vínculos já citados, (C.1). A equação de Lagrange no caso da variável  $n_B$  é:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{\partial L_{ef}}{\partial (\partial_{\nu} n_B)} \right) - \frac{\partial L_{ef}}{\partial n_B} = 0$$

$$\frac{\partial (\lambda u^{\nu})}{\partial x^{\nu}} - \lambda \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} = 0$$

$$\lambda \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + u^{\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\nu}} - \lambda \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} = 0$$

$$\mu + u^{\nu} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\nu}} = 0, \qquad (C.6)$$

onde usamos a relação termodinâmica

$$\mu = \left(\frac{\partial \epsilon}{n_B}\right)_s.\tag{C.7}$$

Para a variável s temos:

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{\partial L_{ef}}{\partial (\partial_{\nu} s)} \right) - \frac{\partial L_{ef}}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial (\zeta u^{\nu})}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \epsilon}{\partial s} - \zeta \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$\zeta \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} + u^{\nu} \frac{\partial \zeta}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \epsilon}{\partial s} - \zeta \frac{\partial u^{\nu}}{\partial x^{\nu}} = 0$$

$$u^{\nu} \frac{\partial (\zeta)}{\partial x^{\nu}} + T = 0.$$
(C.8)

Neste caso também foi usada uma das relações termodinâmicas:

$$T = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s}\right)_{n_B}.\tag{C.9}$$

Por fim, obtemos a equação de Lagrange para a variável  $u^{\nu}$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left( \frac{\partial L_{ef}}{\partial (\partial_{\nu} u^{\nu})} \right) - \frac{\partial L_{ef}}{\partial u^{\nu}} = 0$$
  
$$\frac{\partial (\lambda n_B)}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial (\zeta s)}{\partial x^{\nu}} + \omega u_{\nu} - \lambda \frac{\partial n_B}{\partial x^{\nu}} - \zeta \frac{\partial s}{\partial x^{\nu}} = 0$$
  
$$n_B \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\nu}} + s \frac{\partial \zeta}{\partial x^{\nu}} + \omega u_{\nu} = 0.$$
(C.10)

Multiplicando (C.10) por  $u^{\nu}$  e usando os resultados (C.6) e (C.8), temos:

$$u^{\nu}n_{b}\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\nu}} + u^{\nu}s\frac{\partial\zeta}{\partial x^{\nu}} + \omega = 0$$
  
-n\_{b}\mu - Ts + \omega = 0  
\omega = n\_{B} + Ts, (C.11)

que pode ser reconhecida como sendo a densidade de entalpia. Assim, podemos escrevê-

la também como

$$\omega = \epsilon + p, \tag{C.12}$$

onde pé a pressão. Agora multiplicamos (C.10) por  $u_{\sigma}$ e isolamos a densidade de entalpia

$$\omega u_{\sigma} u_{\nu} = -n_B u_{\sigma} \frac{\partial \lambda}{\partial x^{\nu}} - s u_{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial x^{\nu}}.$$
 (C.13)

De modo que

$$\frac{\partial(\omega u_{\sigma} u_{\nu})}{\partial x_{\sigma}} = -\frac{\partial \lambda}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial(n_{B} u_{\sigma})}{\partial x_{\sigma}} - n_{B} u_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^{\nu}}\right) - \frac{\partial \zeta}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial(s u_{\sigma})}{\partial x_{\sigma}} - s u_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x^{\nu}}\right) \\ \frac{\partial(\omega u_{\sigma} u_{\nu})}{\partial x_{\sigma}} = -n_{B} u_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x^{\nu}}\right) - s u_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x_{\sigma}} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x^{\nu}}\right).$$
(C.14)

Expandindo o primeiro termo do lado direito, usando relações do tipo  $a\partial_{\nu}(b\partial^{\sigma}c) = a(\partial_{\nu}b)(\partial^{\sigma}c) + ab\partial_{\nu}^{\sigma}c \rightarrow ab\partial_{\nu}^{\sigma}c = a\partial_{\nu}(b\partial^{\sigma}c) - a(\partial_{\nu}b)(\partial^{\sigma}c)$ , usando o resultado (C.6), temos:

$$n_{B}u_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\nu}}\right) = n_{B}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(u_{\sigma}\frac{\partial\lambda}{\partial x_{\sigma}}\right) - n_{B}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial u_{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right)$$
$$= -n_{b}\frac{\partial\mu}{\partial x^{\nu}} - n_{B}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial u_{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right). \tag{C.15}$$

Fazendo passos similares para o segundo termo:

$$su_{\sigma}\frac{\partial}{\partial x_{\sigma}}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x^{\nu}}\right) = -s\frac{\partial T}{\partial x^{\nu}} - s\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x_{\sigma}}\right)\left(\frac{\partial u_{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right).$$
 (C.16)

Colocando as duas relações acima em (C.14):

$$\frac{\partial(\omega u_{\sigma} u_{\nu})}{\partial x_{\sigma}} = n_b \frac{\partial \mu}{\partial x^{\nu}} + s \frac{\partial T}{\partial x^{\nu}} + \left(\frac{\partial u_{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right) \left[n_B \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x_{\sigma}}\right) + s \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_{\sigma}}\right)\right].$$
(C.17)
Usando (C.10),

$$\frac{\partial(\omega u_{\sigma} u_{\nu})}{\partial x_{\sigma}} = n_b \frac{\partial \mu}{\partial x^{\nu}} + s \frac{\partial T}{\partial x^{\nu}} - \left(\frac{\partial u_{\sigma}}{\partial x^{\nu}}\right) u^{\sigma} \omega.$$
(C.18)

Usando a relação de Gibbs-Duhem,  $dp = sdT + n_B d\mu$ , e (A.3), obtemos finalmente as equações hidrodinâmicas:

$$\frac{\partial(\omega u_{\sigma} u_{\nu})}{\partial x_{\sigma}} = \frac{\partial p}{\partial x^{\nu}}.$$
(C.19)

Podemos agrupar esta relação na forma do tensor de energia-momento do fluido ideal, (3.4),

$$\frac{\partial T_{\sigma\nu}}{\partial x_{\sigma}} = 0, \tag{C.20}$$

 $\operatorname{com}$ 

$$T_{\sigma\nu} = w u_{\sigma} u_{\nu} - g_{\sigma\nu} p. \tag{C.21}$$

## Apêndice D

## Equações do movimento no SPheRIO

Vamos agora obter as equações do movimento usando esta parametrização SPH. Para isso vamos reescrever a ação e os seus vínculos. Começamos pelo número bariônico e pela entropia. Usando a parametrização SPH, podemos reescrever ambas como

$$n_B^*(\vec{r},t) = \sum_i \nu_i W(\vec{r} - \vec{r_i}(t);h)$$
(D.1)

е

$$s^{*}(\vec{r},t) = \sum_{i} \beta_{i} W(\vec{r} - \vec{r}_{i}(t);h), \qquad (D.2)$$

onde  $\nu_i$  é a parcela do número bariônico carregada pela partícula SPH e  $\beta_i$  a parcela da entropia. A equação (4.11) garante que ambas as quantidades são conservadas.

A quadri-velocidade de um pedaço do fluido pode ser reescrita como

$$u_i = (\gamma_i, \gamma_i \vec{v}_i), \tag{D.3}$$

com

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}_i^2}}.\tag{D.4}$$

Para cada partícula SPH, esta quadri-velocidade obedece  $u^{\mu}u_{\mu} = 1$ . A densidade de energia própria,  $\epsilon$ , tem a forma na representação SPH,

$$\epsilon(\vec{r},t) = \sum_{i} \xi_i W(\vec{r} - \vec{r_i}(t);h), \qquad (D.5)$$

onde

$$\xi_i = \frac{E_i}{\gamma_i}.\tag{D.6}$$

O fator  $\gamma_i$ vem do fato de  $\epsilon$  estar definida no referencial de repouso.

Na equação (D.6) a energia  $E_i$  é a energia interna (ou própria) da i-ésima partícula SPH. A energia interna não é uma constante no tempo. Sua variação é dada por:

$$\Delta E_i = -p_i \delta V_i, \tag{D.7}$$

onde  $V_i$  é obtida com  $s_i = \frac{\beta_i}{V_i}$ .

$$V_{i} \equiv \frac{\beta_{i}}{s_{i}}$$
$$= \frac{\beta_{i}}{\gamma^{-1}s_{i}^{*}}, \qquad (D.8)$$

com  $\beta_i$  sastifazendo (D.2).

Com todos estes elementos, podemos agora calcular a variação da ação

$$I = \int [-\epsilon(n_B, s)] d^4x, \qquad (D.9)$$

o que nos dará as equações do movimento (confira no apêndice C). Inserimos a nossa nova definição de energia interna, (D.5) e (D.6), na ação (D.9). Usamos a relação (4.5) para eliminar as integrais espaciais, obtendo:

$$I_{SPH} = -\int \sum_{i} \frac{E_i}{\gamma_i} dt.$$
 (D.10)

Usando o princípio variacional, essa ação deve satisfazer

$$\delta I_{SPH} = 0. \tag{D.11}$$

Substituindo (D.11) em (D.10):

$$\delta I_{SPH} = -\int \sum_{i} \delta\left(\frac{E_{i}}{\gamma_{i}}\right) dt$$

$$= -\int \sum_{i} \frac{\gamma_{i} \, \delta(E_{i}) - E_{i} \, \delta(\gamma_{i})}{\gamma_{i}^{2}} dt$$

$$= \int \sum_{i} \frac{\gamma_{i} \, p_{i} \, \delta(V_{i}) + E_{i} \, \delta(\gamma_{i})}{\gamma_{i}^{2}} dt. \qquad (D.12)$$

Na última linha usamos a relação (D.7).

Expandindo as variações no fator de Lorentz e no volume temos

$$\delta\gamma_i = \delta\left(\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}_i^2}}\right) = \frac{\vec{v}_i \delta \vec{v}_i}{(1-\vec{v}_i^2)^{3/2}} = \vec{v}_i \delta \vec{v}_i \gamma_i^3.$$
 (D.13)

е

$$\delta V_{i} = \delta \left(\frac{\beta_{i} \gamma_{i}}{s_{i}^{*}}\right)$$

$$= \beta_{i} \frac{s_{i}^{*} \delta \gamma_{i} - \gamma_{i} \delta s_{i}^{*}}{(s_{i}^{*})^{2}}$$

$$= \frac{\beta_{i} \gamma_{i}}{s_{i}^{*}} \left(\frac{\delta \gamma_{i}}{\gamma_{i}} - \frac{\delta s_{i}^{*}}{s_{i}^{*}}\right)$$

$$= -\frac{\beta_{i} \gamma_{i}}{s_{i}^{*}} \left\{-\vec{v}_{i} \delta \vec{v}_{i} \gamma_{i}^{2} + \frac{1}{s_{i}^{*}} \left[\sum_{j} \beta_{j} (\delta \vec{r}_{i} - \delta \vec{r}_{j}) \cdot \nabla_{i} W_{ij}\right]\right\},$$
(D.14)

onde

$$W_{ij} \equiv W(\vec{r}_i - \vec{r}_j; h). \tag{D.15}$$

Aplicando estas variações na equação (D.12), substituindo a energia pela sua densidade,  $E_i = \epsilon_i V_i = \epsilon_i \frac{\beta_i \gamma_i}{s_i^*}$ , e reagrupando os termos, temos

$$\int \sum_{i} \vec{v}_{i} \cdot \delta \vec{v}_{i} \gamma_{i}^{2} \beta_{i} \left(\frac{\epsilon_{i} + p_{i}}{s_{i}^{*}}\right) dt - \int \sum_{i} \frac{\beta_{i} p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} \left[\sum_{j} \beta_{j} (\delta \vec{r}_{i} - \delta \vec{r}_{j}) \cdot \nabla_{i} W_{ij}\right] dt$$
$$= 0(D.16)$$

Integrando por partes a primeira integral,

$$\int \sum_{i} \vec{v_i} \cdot \delta \vec{v_i} \gamma_i^2 \beta_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i^*}\right) dt = -\int \sum_{i} \frac{d}{dt} \left[\gamma_i^2 \beta_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i^*}\right) \vec{v_i} \cdot \right] \delta \vec{r_i} dt. \quad (D.17)$$

Para por em evidência a variação em  $r_i$  também na segunda integral, fazemos os seguintes passos:

$$\int \sum_{i} \frac{\beta_{i} p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} \Big[ \sum_{j} \beta_{j} (\delta \vec{r}_{i} - \delta \vec{r}_{j}) \cdot \nabla_{i} W_{ij} \Big] dt$$
$$= \int \sum_{i} \sum_{j} \frac{\beta_{i} \beta_{j} p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} \nabla_{i} W_{ij} \cdot \delta \vec{r}_{i} dt - \int \sum_{i} \sum_{j} \frac{\beta_{i} \beta_{j} p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} \nabla_{i} W_{ij} \cdot \delta \vec{r}_{j} dt. \quad (D.18)$$

Como pode ser conferido em (D.15), trocar o índice *i* por *j* no gradiente só muda o sinal, ou seja,  $\nabla_i W_{ij} = -\nabla_j W_{ij}$ 

$$\int \sum_{i} \sum_{j} \frac{\beta_{i} \beta_{j} p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} \nabla_{i} W_{ij} \cdot \delta \vec{r}_{j} dt = -\int \sum_{j} \sum_{i} \frac{\beta_{i} \beta_{j} p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} \nabla_{j} W_{ij} \cdot \delta \vec{r}_{j} dt$$
$$= -\int \sum_{i} \sum_{j} \frac{\beta_{j} \beta_{i} p_{j}}{(s_{j}^{*})^{2}} \nabla_{i} W_{ji} \cdot \delta \vec{r}_{i} dt. \quad (D.19)$$

Usando este resultado em (D.19) e impondo  $W_{ij} = W_{ji}$ ,

$$\int \sum_{i} \sum_{j} \frac{\beta_{i} \beta_{j} p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} \nabla_{i} W_{ij} \cdot \delta \vec{r_{i}} dt + \int \sum_{i} \sum_{j} \frac{\beta_{j} \beta_{i} p_{j}}{(s_{j}^{*})^{2}} \nabla_{i} W_{ij} \cdot \delta \vec{r_{i}} dt$$
$$= \int \sum_{i} \sum_{j} \beta_{i} \beta_{j} \Big( \frac{p_{i}}{(s_{i}^{*})^{2}} + \frac{p_{j}}{(s_{j}^{*})^{2}} \Big) \nabla_{i} W_{ij} \cdot \delta \vec{r_{i}} dt. \quad (D.20)$$

Agora podemos substituir (D.17) e (D.20) em (D.16),

$$\int \sum_{i} \left\{ \frac{d}{dt} \left[ \gamma_i^2 \beta_i \left( \frac{\epsilon_i + p_i}{s_i^*} \right) \vec{v}_i \right] + \sum_{j} \beta_i \beta_j \left( \frac{p_i}{(s_i^*)^2} + \frac{p_j}{(s_j^*)^2} \right) \nabla_i W_{ij} \right\} \cdot \delta \vec{r}_i dt = 0.$$
(D.21)

Como a variação em  $r_i$  é arbitrária, temos finalmente as equações do movimento do fluido relativístico usando a parametrização SPH:

$$\frac{d}{dt} \left[ \gamma_i^2 \beta_i \left( \frac{\epsilon_i + p_i}{s_i^*} \right) \vec{v}_i \right] = -\sum_j \beta_i \beta_j \left( \frac{p_i}{(s_i^*)^2} + \frac{p_j}{(s_j^*)^2} \right) \nabla_i W_{ij}.$$
(D.22)

## Referências Bibliográficas

- Foram usados como base para essa introdução os seguintes artigos de divulgação científica:
   "Os Primeiros Microssegundos", M. Riordan e w. A. Zajc, Scientific American Brasil 49, 40 (2006);
   "What have We Learned From the Relativistic Heavy Ion Collider?". T. Ludlam e L. McLerran, Physics Today 56, 48 (2003); Também foram retiradas informações que se encontram na página da internet do colisor RHIC (http://www.bnl.gov/rhic/default.asp).
- [2] L. D. Landau, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. 17, 51 (1953); S. Z. Belenkij e L. D. Landau,
   Usp. Fiz. Nauk. 56, 309 (1955).
- [3] P. Kovtun, D. T. Son e A. O. Starinets, Phys. Rev. Lett. 94, 111601 (2005).
- [4] H. J. Drescher, S. Ostapchenko, T. Pierog e K. Werner, Phys. Rev. C65, 054902 (2002).
- [5] C. E. Aguiar, T. Kodama, T. Osada e Y. Hama, J. Phys. G27, 75 (2001); Braz. j. Phys. 35, 24 (2005); O. Socolowski Jr., F. Grassi, Y. Hama e T. Kodama, Phys. rev. Lett. 93, 182301 (2004).
- [6] "Fluid Mechanics", E. M. Lifshitz e L. D. Landau, Pergamon, Oxford, 1987.
- [7] Um estudo hidrodinâmico do fluxo elíptico em colisões nucleares relativísticas, R. P. G. de Andrade, dissertação de mestrado defendida no IFUSP, (2006).
- [8] J. Ollitrault, Eur. J. Phys. 29, 275, (2008).
- [9] "Statistical Physics", E. M. Lifshitz e L. D. Landau, Pergamon, Oxford, (1980).
- [10] "Introduction to High-Energy Heavy-Ion Collision", C. Wong, World Scientific, Sigapore, (1994).

- [11] Y. Hama et al., Nucl. Phys. A774, 169 (2006); AIP Conf. Proc. 828, 485 (2006).
- [12] S.A. Bass et al., Prog. Part. Nucl. Phys., 41, 225 (1998); M. Bleicher et al., J. Phys. G25, 1959 (1999).
- [13] H. Sorge, Phys. Rev. C52, 3291 (1995); H. Sorge, Z. Phys. C 67, 479 (1995); M. Berenguer, H. Sorge e W. Greiner, Phys. Lett. B332, 15 (1994).
- [14] F. Grassi, Y. Hama e T. Kodama, Phys. Lett. B355, 9 (1995); Z. Phys. C73, 153 (1996).
- [15] F. Cooper e G. Frye, Phys. Rev. D10, 186 (1974).
- [16] "Advanced Series on Directions in High energy Physics Vol.6 Quark-Gluon Plasma, editado por R. Hwa, Singapore, 1988", U. Heinz, K. S. Lee e E. Schnedermann, 519.
- [17] C. E. Aguiar, R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, T.Osada e O. Socolowski Jr., Braz. J. Phys. 34, 319 (2004).
- [18] B. Alver et al., Colaboração PHOBOS, Phys. Rev. Lett. 96, 212301 (2006).
- [19] J. Adams et al., Colaboração STAR, Nucl. Phys. A757, 102 (2005).
- [20] W.-L. Qian, R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, arXiv:0709.0845v2.
- [21] B. B. Back et al., Colaboração Phobos, Phys. Rev. Lett. B578, 297 (2004).
- [22] Y. Hama e F. S. Navarra, Z. Phys. C53, 501 (1992).
- [23] R. A. Gingold e J. J. Monaghan, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. 181, 375 (1977).
- [24] R. P. G. Andrade, A. L. V. R.dos Reis, F. Grassi, Y. Hama, W. L. Qian, T. Kodama e J. -Y. Ollitrault, Acta.Phys. Pol. B40, 993 (2009).
- [25] R. Andrade, F. Grassi, Yogiro Hama, T. Kodama, O. Socolowski, Int. J. Mod. Phys. E16 1806, (2007).
- [26] Y. Hama, R. P. G. de Andrade, F. Grassi, W. -L. Qian, T. Osada, C. E. Aguiar e T. Kodama, Phys. Atom. Nucl. 71, 1558 (2008).

- [27] R. P. G. de Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama e W. -L. Qian, Phys. Rev. Lett. 101, 112301 (2008).
- [28] Y. Hama, R. P. G. Andrade, F. Grassi, W.-L. Qian e T. Kodama, Acta Phys. Polon. B40 931, (2009); W -L. Qian, R. Andrade, A. dos Reis, Y. Hama, F. Grassi e T. Kodama, J. Phys. G36, 064075 (2009); A. L. V. R. dos Reis, F. Grassi, R. P. G. de Andrade e Y. Hama, Int. J. Phys. E16, 2970 (2007); R. Andrade, F. Grassi, Yogiro Hama, T. Kodama e O. Socolowski, Braz. J. Phys. 37, 717 (2007); R. P. G. Andrade, Y. Hama, F. Grassi, , O. Socolowski Jr. e T. Kodama, Braz. J. Phys. 37, 99 (2007); R. P. G. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, B. Tavares e O. Socolowski, Nukleonika 51, S17 (2006); R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, B. Tavares e O. Socolowski, Jr., Phys. Rev. Lett. 97, 202302 (2006); R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama e O. Socolowski, Jr. e B. Tavares, Eur. Phys. J. A29, 23 (2006); C. E. Aguiar, T. Kodama, R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, O. Socolowski e T. Osada, AIP Conf. Proc. 739, 613 (2005); C. E. Aguiar, Y. Hama, T. Kodama e T. Osada, Nucl. Phys. A698, 639c (2002).
- [29] Uma pequena amostra de artigos que tratam de fluxo elíptico encontrados na literatura: A. Monnai e T. Hirano, Nucl. Phys. A830, 471C (2009); F. -M. Liu, T. Hirano, K. Werner e Yan Zhu, Nucl. Phys. A830 587C (2009); T. Hirano e Y. Nara, Nucl. Phys. A830, 191C (2009); T. Hirano, Acta Phys. Polon. Supp. 1, 567 (2008); T. Hirano e Yasushi Nara, Phys. Rev. C79, 064904 (2009); Yu. B. Ivanov, I. N. Mishustin, V. N. Russkikh e L. M. Satarov, Phys. Rev. C80, 064904 (2009); H. Petersen e M. Bleicher, Phys. Rev. C81, 044906 (2010); Phys. Rev. bf C79, 054904 (2009); Eur. Phys. J. C49, 91 (2007); H. Petersen, J. Steinheimer, G. Burau e M. Bleicher, Nucl. Phys. A830, 283C (2009); Eur. Phys. J. C62, 31 (2009); X. Zhu, H. Petersen e M. Bleicher, J. Phys. G32, S365 (2006); P. Bozek, Acta Phys. Polon. B41, 837 (2010); P. Bozek e I. Wyskiel, PoS EPS-HEP-2009, 039 (2009); H. Song e U. W. Heinz, Phys. Rev. C81, 024905 (2010); U. W. Heinz, J. S. Moreland e H. Song, Phys. Rev. C80, 061901 (2009); U. W. Heinz, Nucl. Phys. A830, 287C (2009); D. Molnar e P. Huovinen, J. Phys. G35, 104125 (2008); P. Huovinen, Eur. Phys. J. A37, 121 (2008); P. Huovinen, Nucl. Phys. A761, 296 (2005); R. A. Lacey, A. Taranenko, R. Wei, N. N. Ajitanand, J. M. Alexander, J. Jia, R. Pak, D. H. Rischke, D. Teaney e K. Dusling, arXiv:1005.4979; K. Dusling, G. D. Moore e D. Teaney,

arXiv:0909.0754; D. Teaney, Prog. Part. Nucl. Phys. 62, 451 (2009); Nucl. Phys. A830, 891C (2009).

- [30] K. H. Ackermann, et al. [STAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. 86, 402 (2001); B. Back et al, [PHOBOS Collaboration], Phys. Rev. Lett. 89 222301 (2002).
- [31] D. Molnar e M. Gyulassy, Nucl. Phys. A697 495, (2002); Erratum-ibid, Nucl. Phys. A703 893, (2002).
- [32] R. J. M. Snellings, H. Sorge, S. A. Voloshin e N. Xu, Phys. Rev. Lett. 84, 2903 (2000).
- [33] B. Back et al., colaboração PHOBOS, Phys. Rev. Lett. 91, 0523031 (2003).
- [34] B. Alver et al., colaboração PHOBOS, Phys. Rev. Lett. 98, 242302 (2007).
- [35] R. Nouicer et al., colaboração PHOBOS, J. Phys. G34, S887 (2007).
- [36] B. Back et al., colaboração PHOBOS, Phys. Rev. Lett. 97, 012301 (2006).
- [37] G. Wang et al., colaboração STAR, Nucl. Phys. A774, 515 (2006).
- [38] S. Manly et al., colaboração PHOBOS, Nucl. Phys. A774, 523 (2006).
- [39] B. L. Abelev et al., colaboração STAR, Phys. Rev. Lett. 101, 252301 (2008).
- [40] G. Wang et al., STAR Colaboration, J. Phys. G34, S1093 (2007).
- [41] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **D27**, 140 (1983).
- [42] I. G. Bearden et al., colaboração BRAHMS, Phys. Rev. Lett. 94, 162301 (2005).
- [43] P. Carruthers e M. Duong-van, Phys. Lett B41, 587 (1972); Phys. Rev. D8, 859 (1973).
- [44] T. Hirano e K. Tsuda, Phys. Rec. C 66, 054905 (2002).
- [45] U. W. Heinz e P. F. Kolb, J. Phys. G30, S1229 (2004).
- [46] A. Adil e M. Gyulassy Phys. Rev. C72, 034907 (2005).
- [47] S. J. Brodsky, J. F. Gunion e J. H. Kuhn Phys. Rev. Lett. 39, 1120 (1977).

- [48] C. E. Aguiar, Y. Hama, T. Kodama e T. Osada, Nucl. Phys. A698, 639c (2002).
- [49] Y. Hama, F. Grassi, O. Socolowski Jr., T. Kodama, M. Gazdzicki e M.I. Gorenstein, Acta Phys. Pol. B35, 179 (2004).
- [50] O. Socolowski Jr., F. Grassi, Y. Hama e T. Kodama, Phys. Rev. Lett. 93, 182301 (2004).
- [51] F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama e O. Socolowski Jr., J. Phys. G31, S1041 (2005).
- [52] W. -L. Qian, R. Andrade, F. Grassi, O. Socolowski Jr., T. Kodama e Y. Hama, Int. J. Mod. Phys. E16, (1877) 2007; W. -L. Qian, R. Andrade, O. Socolowski Jr., F. Grassi, T. Kodama e Y. Hama, Braz. J. Phys. 37, 767 (2007).
- [53] H.-T. Elze, Y. Hama, T. Kodama, M. Makler e J. Rafelski, J. Phys. G25, 1935 (1999).