Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física Aplicada

**Teoria e Modelamento Computacional de
Aquecimento de
Plasma por Ondas de Alfvén no Tokamak TCABR**

Edgar Rodolfo Rondán Sanabria

Prof. Dr. Artour G. Elfimov (IFUSP) (Orientador)

Profa. Dra. Maria Virginia Alves (INPE)

Profa. Dra. Célia Ramos de Andrade (INPE)

Prof. Dr. Álvaro Vannucci (IFUSP)

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (IFUSP)

Tese apresentada ao IFUSP
para a obtenção do título
de Doutor em Ciências.

São Paulo - Junho de 2006

Resumo

Neste trabalho apresentamos o estudo da possibilidade de melhores regimes para o uso dos experimentos de aquecimento e geração de corrente e fluxo de plasma no tokamak TCABR. Apresentamos um estudo dos efeitos de rotação de plasma em baixa frequência (*low-frequency* (LF)), penetração de campo eletromagnético, absorção e forças ponderomotoras no “Tokamak Chauffage Alfvén Brésilien” (TCABR) com ênfase na faixa de frequências de $0,5\text{--}10,0\text{kHz}$. Os campos de LF são dirigidos pelo limitador magnético ergódico (*ergodic magnetic limiter* (EML)) no TCABR. Foi feito um estudo analítico das ondas de Alfvén e ressonância usando modelos simples. Um estudo numérico também foi realizado utilizando três códigos, quais sejam, o código cinético toroidal, o código cilíndrico e o código ALTOK.

Abstract

In this work we present the study of the determination the best regimes and parameters for the heating experiments and current generation and plasma flow in the tokamak TCABR. Study of effects of plasma rotation in low frequency (LF), field penetration, absorption and ponderomotive forces in “Tokamak Chauffage Alfvén Brésilien” (TCABR) is investigated with emphasis in the frequency range of $0,5\text{--}10,0\text{kHz}$. The fields of LF are driven by the ergodic magnetic limiter (EML) in TCABR. A qualitative analytical study of the Alfvén waves and their resonances is performed using simple models. A numeric study was carried out using through three codes, called the kinetic totoidal code, the cylindrical code and the ALTOK code.

Dedico este trabalho a minha esposa:

Marcia de Almeida Medeiros Rondán

e a meus pais:

Don Pedro Edgar Rondán Escobar

e Dona Paquita Sanabria de Rondán

Agradecimentos

Desejo agradecer:

Ao professor Dr. Artour G. Elfimov pela sua ajuda, sua orientação, e por estar sempre prestes a me ajudar nos momentos difíceis da pesquisa e elaboração desta tese,

Ao Carlos Pires pela sua grande ajuda na correção desta tese e pelas suas sugestões que foram de muita importância (obrigação Carlos),

A minha esposa Marcia pela sua ajuda, pelo apoio moral, pela sua compreensão nos momentos de estresse no decorrer destes anos,

A minha irmã Gerby,

Aos professores do grupo de Física de plasmas pelo apoio brindado,

Aos meus amigos do grupo de pesquisa,

A todos meus amigos, sem citações porque por desventura poderia esquecer de algum deles, e

Um agradecimento especial À **FAPESP** pela ajuda financeira, sem a qual não seria possível a realização deste trabalho.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Proposta e Estrutura da Tese	6
2	Teoria das Ondas de Alfvén em Plasmas Magnetizados	8
2.1	Tensor Dielétrico em Coordenadas Cilíndricas	8
2.2	Ondas de Alfvén em Plasmas Cilíndricos Homogêneos	12
2.3	Ondas de Alfvén em Plasma Cilíndrico Inomogêneo	15
2.3.1	Exemplo de uma Teoria de Conversão de Modos num Ponto de Ressonância	18
2.3.2	Efeito de Conversão de Modos em Dois Pontos de Ressonância . . .	22
2.3.3	Potência Dissipada	28
2.4	Cálculos Numéricos de Absorção e Excitação de Campos Eletromagnéticos de Frequências Baixas	28
2.4.1	Código Cilíndrico	29
2.4.2	Código Toroidal ALTOK	34
2.4.3	Discussão dos Resultados Numéricos	34
3	Estudo do Código Cinético Toroidal	36
3.1	Histórico	37
3.2	O código	37
3.3	Parâmetros do TCABR	41
3.4	Dissipação da onda de Alfvén	42
3.5	Problemas do Código Cinético em $k_{\parallel} = 0$	50

3.6	Discussão dos Resultados Numéricos	55
4	Efeitos de Rotação em Plasmas Colisionais	57
4.1	Campos de LF	59
4.2	Campos LF excitados pelo EML	60
4.3	Cálculos Numéricos de Excitação e Absorção de Campos Eletromagnéticos	
	LF em Plasma Colisional com Rotação	63
4.3.1	Efeitos da rotação do plasma na dissipação da energia e excitação dos campos de LF	64
4.3.2	Efeitos da frequência na dissipação da energia e excitação dos campos de LF	67
4.3.3	Efeitos da densidade na dissipação da energia e excitação dos campos de LF	70
4.3.4	Efeitos da temperatura na dissipação da energia e excitação dos campos de LF	72
5	Forças Ponderomotoras	76
5.1	Forças Viscosas de Amortecimento	79
5.2	Forças Ponderomotoras	80
6	Conclusões	87
6.1	Trabalho futuro	89
	Bibliografia	90
	Apêndice	97
A		97
A.1	Equação de Onda em Coordenadas Cilíndricas	97
A.2	Tensor Dielétrico em Coordenadas Cilíndricas	98
A.3	Expansão em Séries de Taylor dos Coeficientes Inomogêneos	105
A.4	Potência Dissipada	107

B	Tensor Dielétrico Utilizado no Código Cinético Toroidal	110
C	Parâmetros básicos do tokamak TCABR	114
D	Diagramas de Fluxo do Código Cilíndrico	115
E	Construção do Código Toroidal 2D	119
E.0.1	Equação da onda	122
E.0.2	Transformada de Fourier	123
E.0.3	Conservação de Energia	125
E.1	Cálculo da Equação de Onda	125
E.1.1	Componente radial	127
E.1.2	Componente perpendicular	129
E.1.3	Caso Aproximado	137
E.1.4	Caso Exato	137
E.1.5	Eliminando $E_{\parallel}$	140
E.2	Diagramas de Fluxo do Código	142
F	Forças Ponderomotoras	144
F.0.1	Força Viscosa Poloidal	147

Capítulo 1

Introdução

Ondas eletromagnéticas de baixa frequência (*Low-Frequency* (LF)) em um fluido altamente condutor, submetido a um campo magnético uniforme, $\mathbf{B}$, foram estudadas por Hannes Alfvén em 1942[1] (Alfvén demonstrou a existência de um novo tipo de onda que se propaga em fluidos condutores magnetizados, que ele denominou *ondas eletromagnéticas-hidrodinâmicas* chamadas, posteriormente, de “ondas de Alfvén”). Estas ondas com frequências na banda $f < 10MHz$ (ou seja, menores que a frequência de cíclotron de íons, $\omega < \omega_{ci}$, onde $\omega = 2\pi f$) propagam-se ao longo do campo magnético, com número de onda paralelo, $k_{\parallel}$, que satisfaz a relação de dispersão $\omega = k_{\parallel}c_A$ onde $c_A = B/\sqrt{4\pi\rho}$ é a velocidade de Alfvén e ρ é a densidade das partículas. Estas ondas (chamadas de ondas de Alfvén torsionais) têm relação de dispersão dependente do produto escalar $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}$. Na magnetohidrodinâmica (MHD) existem dois tipos de ondas de Alfvén: a onda rápida e a onda lenta (seção 2.2). A onda rápida se propaga na direção do vetor de propagação $\mathbf{k}$, comprimindo as linhas de campo magnético e deslocando-se para regiões de maior densidade do plasma. Por outro lado, a onda lenta propaga-se ao longo da direção das linhas de campo magnético, ao redor da ressonância local de Alfvén (RLA, $\omega = k_{\parallel}c_A$), e acaba dissipando a sua energia no plasma. O esquema básico de aquecimento via ondas de Alfvén [2, 3], baseia-se na conversão de modos da onda rápida para a onda lenta, numa superfície ressonante chamada superfície de ressonância local de Alfvén, no interior da coluna de plasma (seção 2.3).

Em um plasma não-uniforme, a descrição da onda de Alfvén torna-se mais complicada [2, 3]. A equação de onda para um plasma uniforme, em um campo magnético não-uniforme estratificado, na referência [4] foi derivada das equações MHD ideais incompressíveis linearizadas. Trata-se de uma equação diferencial de segunda ordem a qual tem uma singularidade em $\omega = k_{\parallel} c_A$ que é freqüentemente chamada de ressonância local de Alfvén. Para um valor fixo de $k_{\parallel}$, $\omega = k_{\parallel} c_A$ possui um espectro contínuo determinado pela variação de c_A devido ao campo magnético ou densidade do plasma não-uniformes [2, 4]. Este conceito de contínuo de Alfvén pode ser generalizado para um plasma de tokamak com campo magnético poloidal e densidade de plasma não-uniformes [5–8]. A excitação de modos dentro do contínuo de Alfvén é um método de aquecimento de plasma que emprega processos de absorção [9–16]. A energia da onda é absorvida em uma camada de ressonância por troca de fase [5–7, 12].

As equações MHD ideais não contêm mecanismos de dissipação. A absorção das ondas de Alfvén pode ser explicada por um processo de conversão de modos [2]. Quando a singularidade na equação de onda é eliminada pela inclusão do raio finito de Larmor dos íons e, correções de massa finita dos elétrons, uma nova onda de Alfvén aparece que chama-se onda de Alfvén cinética [6, 17, 18] ou onda eletrostática de Alfvén [19] (seção 2.2). Então, o mecanismo de amortecimento da onda no contínuo de Alfvén fica claro: a energia da onda de Alfvén torsional se converte na onda de Alfvén cinética que tem comprimento muito curto e pode ser absorvida no plasma pelos elétrons por amortecimento de Landau, ou amortecimento colisional ao redor das superfícies ressonantes, promovendo o aquecimento de toda a coluna do plasma por termocondutividade. Os elétrons próximos da superfície ressonante absorvem energia da onda devido à velocidade de Alfvén ser próxima à velocidade térmica dos elétrons, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$. Na superfície ressonante, o modo rápido converte-se na onda cinética de Alfvén que, em condições usuais, se propaga na direção perpendicular à superfície ressonante, em direção ao centro da coluna de plasma ($v_{Te} > c_A$) ou no modo eletrostático de Alfvén ($c_A > v_{Te}$) que se propaga em direção à borda do plasma (seção 2.2).

A onda lenta não pode ser excitada diretamente a partir da periferia da coluna de

plasma, para penetrar até a superfície ressonante, devido ao seu comprimento de onda ser pequeno na borda da coluna de plasma. Desta forma, na borda do plasma, o vetor de onda transversal à superfície ressonante tem um valor muito alto e, se a onda for excitada diretamente, ela será totalmente absorvida localmente na periferia. Então, a única maneira de excitar e absorver a onda lenta é por via indireta, excitando uma onda rápida na borda da coluna de plasma para que se propague até o interior da coluna e, através da conversão de modos, transforma-se em uma onda lenta. Portanto, a essência do esquema básico de aquecimento por ondas de Alfvén é a conversão da onda rápida em onda lenta.

A função da frequência sobre o raio da coluna do plasma, $\omega(r) = k_{\parallel} c_A$, tem um valor mínimo em alguma posição radial do plasma. Automodos com frequências ligeiramente abaixo deste mínimo são possíveis. Eles são chamados de automodos globais de Alfvén (GA) [20, 21] ou onda de Alfvén discreta (DAW) [19, 22]. Estes modos, que não estão dentro no contínuo de Alfvén e não são amortecidos, podem ser excitados através de íons energéticos [23].

Há uma degenerescência no contínuo de Alfvén por automodos toroidais de Alfvén (TAEs). Ondas com diferentes números m podem ter a mesma frequência em um ponto $r = r_m$ onde $q(r_m) = (m + 1/2)/n$. Tem-se então $\omega = k_{\parallel m} c_A = -k_{\parallel m+1} c_A = c_A/2qR = \omega_{TAE}$, onde $q(r)$ é o fator de segurança. Em um plasma cilíndrico estes modos não integram. Os modos de Alfvén podem ser fortemente amortecidos no contínuo de Alfvén. Porém, quando um acoplamento de modos toroidais ocorre, surge uma banda no espectro de frequências de Alfvén [24]. Automodos com frequências dentro da banda podem existir; eles são chamados de automodos de banda de Alfvén, ou simplesmente automodos toroidais de Alfvén (TAE). Estes modos podem evitar amortecimento numa faixa do contínuo, e podem ser excitados facilmente através de íons energéticos.

A banda TAE é produzida pelo acoplamento toroidal entre os harmônicos poloidais m e $(m + 1)$. A TAE é normalmente especificada por um número de modo toroidal n . A estrutura do modo geralmente é expressa como uma superposição de muitos harmônicos poloidais. Os campos na banda TAE com modos m e n altos tem um pico próximo do

valor $q = m/n$ (Cheng 1991[25]). Para esses TAEs as autofunções podem ser obtidas de um formalismo inflado (*ballooning*) [26]. Para TAEs com valores baixos de m e n é necessário utilizar computação numérica para resolver as equações MHD na geometria toroidal [27]. Quando os harmônicos poloidais têm um número considerável de picos ao longo do raio da coluna de plasma, a estrutura dos modos ocupa uma grande fração do volume do plasma, e isto é chamado de modo TAE global. Os harmônicos poloidais e o espectro do contínuo de Alfvén para um modo TAE global $n = 3$ é mostrado na figura 1.1. Quando a estrutura do modo é altamente localizada dentro de uma simples banda TAE próximo a $q = m/n$, isto faz com que haja dois harmônicos poloidais dominantes, m e $m + 1$ (Capítulo 3).

Figura 1.1: Estrutura dos automodos toroidais de Alfvén (TAEs) para $n = 3$. (a) Espectro do contínuo de Alfvén, onde $c_A = c_A(0)/q(a)R$. (b) Deslocamento radial de vários harmônicos poloidais em função do raio menor do plasma [28]

Além do aquecimento é sempre muito importante melhorar o confinamento do plasma. Nas experiências iniciais em tokamaks logo se constatou a necessidade óbvia do controle da estabilidade do plasma, de aquecimento auxiliar e do controle de impurezas para se poder conseguir condições relevantes para tornar viável a fusão. O limitador magnético ergódico (EML (*ergodic magnetic limiter*)) e o divertor ergódico (ED) [29] foram propostos como

esquemas eficazes para a exaustão do calor e para o confinamento do plasma. Alguns resultados promissores [29] foram obtidos já nas experiências no Tore Supra com corrente estacionária na bobina do ED e rotação de campos magnéticos a baixas frequências foi usada no tokamak Hybtok-II [30]. Um EML foi instalado também no Tokamak Chauffage Alfvén Brésilien (TCABR) [31] com o objetivo principal de agir no plasma na superfície racional magnética $q = 3$.

Análises teóricas de absorção pelo plasma de campos de rotação de baixa frequência (RLF) e efeitos de forças ponderomotoras produzidos por correntes da bobina do EML e do DED na borda do plasma já foram anteriormente realizadas [31–33]. Mostrou-se que a rotação dos campos de LF podem produzir aquecimento adicional e fluxo de plasma na ressonância local das ondas de Alfvén com $\omega = |k_{\parallel}|c_A$,

A geração não indutiva de correntes em tokamaks é um mecanismo essencial para a viabilização de reatores termonucleares e a investigação nesta área tem uma longa história [34–36]. Recentemente, melhorias no confinamento do plasma foram alcançadas com barreiras de transporte internas (ITB), criadas através da injeção de partículas neutras (NB) e por aquecimento por ondas na faixa da frequência cíclotron de íons (ICRF) em todos os grandes tokamaks, como o Doublet-III-D, o Join European Torus (JET), o TFTR e outros.

As esperanças de uma geração de corrente eficiente foram renovadas com o trabalho de Ohkawa [37] que demonstrou a geração de corrente por injeção de helicidade. Esta idéia foi desenvolvida por Taylor [38], no limite MHD, e um modelo cinético foi apresentado por Elfimov [39]. Em plasmas magnetizados, a corrente de injeção de helicidade pode ser mantida por forças ponderomotoras que agem nos elétrons, dependendo da amplitude dos gradientes dos campos de RF. No caso de ondas rápidas, foi demonstrado que também há corrente induzida por gradientes de densidade de equilíbrio e temperatura [39]. A força ponderomotora, em um modelo MHD de dois fluidos, para plasmas magnetizados, foi derivada por Klima para geometria plana [40]. O quadro geral destas forças, produzido por ondas de RF em íons e elétrons, foi derivado na Ref.[41] para plasmas cilíndricos, e na Ref.[42] para uma geometria toroidal geral.

1.1 Proposta e Estrutura da Tese

A proposta deste trabalho é o estudo analítico (usando modelo simplificado de plasma (trapezoidal)) e simulação numérica da dissipação de ondas de Alfvén em plasmas do TCABR. Em particular, estudamos os efeitos de rotação do plasma, penetração dos campos, absorção e forças ponderomotoras para o TCABR com ênfase na faixa de baixas frequências de $0,5\text{--}10\text{kHz}$. Esses campos de LF supostamente podem ser gerados pelo EML no TCABR. Cálculos numéricos foram feitos com código cilíndrico [41, 43]. Para o presente trabalho foi necessário reconstruir totalmente o código, incluindo rotação de plasma, colisões elétron-íon e troca de cargas. O estudo dos efeitos de rotação de plasma em baixa frequência foi baseado nos artigos do autor [44, 45].

Alem disso, recalculamos absorção das ondas de Alfvén, anteriormente calculados na tese de doutorado do Gesil Amarante [46], na banda das frequências ($4\text{--}5\text{MHz}$) permitida pelo gerador de radiofrequência com alta potência e com parâmetros de plasma do TCABR diagnosticados recentemente nos trabalhos de tese de doutorado do Ernesto Lerche [47] e do mestrado do Antonio Fonseca [48]. Para a análise numérica começamos utilizando o código cinético toroidal (seção (3.1)). Este código tem um bom funcionamento para certos parâmetros de plasma, mas para o caso de valores $k_{\parallel} \approx 0$ (frequências baixas) há divergências numéricas, como mostraremos na seção (3.5).[†]

Havia uma documentação pobre, o que demandou o estudo do código para se chegar às conclusões acerca das mudanças que poderiam e deveriam ser introduzidas. No transcorrer do trabalho, foram introduzidas outras modificações, rotação de plasma, colisões de elétrons-íons, troca de carga e forças ponderomotoras.

O segundo capítulo da tese apresenta a teoria de ondas de Alfvén. De início, é fornecida uma introdução básica até a derivação do tensor dielétrico com termos cinéticos em primeira ordem. A relação de dispersão para plasmas homogêneos é obtida a fim de servir de introdução à seção seguinte que mostra o efeito de conversão de modos. Seguem-se

[†]Os resultados obtidos na Ref. [46] na banda de $4\text{--}5\text{MHz}$, foram feitas para parâmetros do TCABR diferentes aos apresentados aqui. Na Ref. [46] não foram feitas simulação com baixas frequências. Instabilidades numéricas, no caso de baixas frequências (em $k_{\parallel} = 0$) não foram relatadas em [46].

os cálculos do aquecimento, usando os códigos ALTOK e cilíndrico (seção (2.4.2)), como uma forma de comprovação dos resultados analíticos. Para testar os efeitos toroidais usamos o código ALTOK e comparar com os resultados do código cilíndrico.

No terceiro capítulo é introduzido o código cinético toroidal. As principais modificações provocadas pelos efeitos toroidais são mostradas e analisadas. Fazemos um recálculo da dissipação das ondas de Alfvén [46] utilizando os novos parâmetros do TCABR obtidos recentemente [47, 48]. A seguir, mostramos os problemas encontrados neste código.

No quarto capítulo são apresentados os principais resultados numéricos dos efeitos da rotação em plasmas colisionais no aquecimento e absorção dos campos LF perto da ressonância local de Alfvén $|\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}| = |k_{\parallel} c_A|$, onde ω e $\mathbf{k}$ são a frequência e o vetor de onda, respectivamente. A velocidade de rotação ao longo das superfícies magnéticas é levada em conta no tensor dielétrico, o que modifica fortemente os campos de LF e a potência dissipada. Mostramos também a dependência da frequência, densidade e temperatura no aquecimento e absorção dos campos em plasma com rotação usando o código cilíndrico.

No quinto capítulo, teoria e resultados numéricos, usando o código cilíndrico, das forças ponderomotoras, em plasma com rotação, são apresentadas.

O sexto e último capítulo apresenta uma síntese dos resultados obtidos ao longo desta tese, correspondendo às conclusões do trabalho.

As unidades utilizadas nesta tese é o sistema Gaussiano.

Capítulo 2

Teoria das Ondas de Alfvén em Plasmas Magnetizados

Para um entendimento qualitativo dos fenômenos referentes ao aquecimento de plasmas e geração de corrente por meio de ondas de Alfvén no TCABR, é necessário fazer as seguintes considerações: aproximar o toróide por um cilindro e linearizar as equações diferenciais parciais não-lineares. Com isto o sistema de equações torna-se analiticamente solúvel permitindo-nos obter de uma forma não muito complexa os elementos do tensor dielétrico $\vec{\epsilon}$. As informações sobre a resposta do meio material, contidas em $\vec{\epsilon}$, e as informações sobre a geometria do problema permitem compor o perfil dos campos eletromagnéticos dentro do plasma e então calcular todas as grandezas físicas pertinentes ao estudo da ação das ondas.

2.1 Tensor Dielétrico em Coordenadas Cilíndricas

Os tokamaks são sistemas toroidais de confinamento magnético que utilizam uma corrente de equilíbrio, criada na direção toroidal, como sistema principal de aquecimento por efeito Joule. Devido à toroidicidade do sistema as superfícies magnéticas adquirem uma forma parecida com as mostradas na figura 2.1 (desconsiderando o deslocamento de Shafranov). No caso do TCABR as superfícies magnéticas podem ser consideradas como cilindros

Figura 2.1: *Superfícies magnéticas num tokamak.*

concêntricos, como as mostradas na figura 2.2. Em certas circunstâncias, pode-se simplificar ainda mais o modelo a ser estudado. Se os efeitos de curvatura toroidal e da variação do campo magnético com o raio maior R ($B_z \simeq B_0/R$) forem pequenos, a geometria do problema se reduz a uma configuração cilíndrica periódica, como se mostra na figura 2.3.

Figura 2.2: *Superfícies magnéticas cilíndricas concêntricas.*

No estudo do aquecimento e geração de corrente via radio frequência (RF) em plasmas colisionais é usado o modelo cinético de plasmas [3, 16]. Plasmas de laboratório ou espaciais são fracamente colisionais, o que significa que a frequência de colisão elétron-íon é menor que a frequência da onda, ou seja, $\nu_{ei} \ll \omega$, e o comprimento de onda paralelo às linhas do campo magnético ($2\pi/k_{\parallel}$) é menor que o livre caminho médio dos elétrons, ou seja, $2\pi/k_{\parallel} \ll v_{Te}/\nu_{ei}$, onde $k_{\parallel}$ é a componente do vetor número de onda paralela ao campo magnético e v_{Te} é a velocidade térmica dos elétrons. Para estes plasmas, a sua dinâmica pode ser estudada pelas equações de Vlasov-Maxwell junto com a equação de Boltzmann,

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] \right\} \cdot \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = \hat{S}t[F_{\alpha}]; \quad (2.1)$$

Figura 2.3: Aproximação cilíndrica.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (2.2)$$

Aqui, α define a espécie de partícula (elétrons, íons ou impurezas), F_α , e_α , m_α , são a função de distribuição, a carga e a massa de íons ou elétrons, respectivamente, c é a velocidade da luz no vácuo, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$, são os vetores de coordenadas do espaço de configurações, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}$, $\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \tilde{\mathbf{j}}$, são os campos elétrico, magnético e a densidade de corrente, respectivamente, compostas de uma parcela estacionária ($\mathbf{B}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{j}_0$) e de uma parcela oscilatória ($\tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{j}}$), sendo $|\mathbf{j}_0| \gg |\tilde{\mathbf{j}}|$. $\hat{S}t[F_\alpha]$ é o operador de colisão na forma de Krook [49].

A função de distribuição depende de sete variáveis, ou seja, $F = F(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$. Além disso, é necessário incluir o efeito específico dos movimentos periódicos dos íons e elétrons ao longo das linhas do campo magnético [50]. Para obter alguns resultados aproximados destas últimas equações, fazemos as seguintes aproximações:

- A equação de Vlasov (2.1) é escrita numa geometria adequada (neste caso em coordenadas cilíndricas) e, então, o tensor dielétrico pode ser calculado (no Apêndice A.2 mostram-se os detalhes do cálculo).

- Levando em conta as expressões analíticas obtidas para o tensor dielétrico no passo anterior, é necessário resolver as equações de Maxwell (2.2) para se estudar a estrutura dos campos eletromagnéticos da onda e avaliar a potência dissipada. Isto é mostrado na seção (2.3.2) para um modelo de plasma trapezoidal onde analisamos a estrutura dos campos e a potência dissipada na região de ressonância local de Alfvén, perto da borda do plasma.

Para descrever a ação das ondas de RF no plasma, é necessário compor o objeto matemático através do qual a resposta do plasma pela presença dos campos eletromagnéticos é modelada. Este objeto é chamado de *tensor de permissividade dielétrica* ou *tensor dielétrico* $\vec{\epsilon}$. Das equações de Maxwell e da Lei de Ohm $\vec{\mathbf{j}} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{E}}$, pode-se obter a equação de onda

$$\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \vec{\mathbf{E}} - \nabla \times \nabla \times \vec{\mathbf{E}} = 0, \quad (2.3)$$

onde foi usado um modelo de onda eletromagnética da forma $\sim \exp[i(m\theta + k_z z - \omega t)]$, com uma frequência fixa, que se propaga na direção toroidal, escolhida como coordenada z , e na direção poloidal, escolhida como coordenada θ .

Tomamos como *hipótese* que os íons não se movem sob a ação dos campos de RF. Esta aproximação é válida para $m_e/m_i \ll 1$, sendo m_e e m_i a massa dos elétrons e íons, respectivamente. Usando a aproximação $\omega \ll \omega_{c\alpha}$ de plasma magnetizado, e $\rho_\alpha dE_i/dr \ll E_i$, onde $\omega_{c\alpha}$ é a frequência de cíclotron e $\rho_\alpha = v_{T\alpha}/\omega_{c\alpha}$ é o raio de Larmor, os elementos do tensor dielétrico podem ser obtidos

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2} + 2 \frac{k_b^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2} (\Lambda_{\alpha} - 1) \right]; \\ \epsilon_{13} &= -\epsilon_{31} = -i \frac{k_b}{k_{\parallel}} \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega \omega_{c\alpha}} \left\{ \Lambda_{\alpha} - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{2\omega \omega_{c\alpha}} [\chi_T + 2\chi_N \Lambda_{\alpha} + \chi_T (1 + 2z_{\alpha}^2) \Lambda_{\alpha}] \right\}; \\ \epsilon_{21} &= -\epsilon_{12} = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega^2} \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} \left\{ \frac{4}{r} (\Lambda_{\alpha} - 1) - 2\chi_N \Lambda_{\alpha} - \chi_T [(1 + 2z_{\alpha}^2) \Lambda_{\alpha} - 1] \right\}; \\ \epsilon_{22} &= \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2} - 2 \frac{v_{T\alpha}^2}{\omega^2} (\Lambda_{\alpha} - 1) \frac{\partial}{\partial r} r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \dots \right) \right] - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\chi_N v_{T\alpha}^2}{r\omega^2} \left[1 + 2(\Lambda_\alpha - 1) \frac{\partial}{\partial r}(r\ldots) \right] - \frac{\chi_T v_{T\alpha}^2}{r\omega^2} \left[1 - [1 - (1 + 2z_\alpha^2)\Lambda_\alpha] \frac{\partial}{\partial r}(r\ldots) \right] \Big\}; \\
\epsilon_{23} &= \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left\{ \Lambda_\alpha \frac{1}{k_\parallel} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\chi_N}{k_\parallel} \Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2k_\parallel} [1 - (1 - 2z_\alpha^2)\Lambda_\alpha] \right\}; \\
\epsilon_{32} &= \frac{-1}{k_\parallel r} \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left\{ \Lambda_\alpha - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \{ \chi_N \Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2} [1 + (1 + 2Z_\alpha^2)\Lambda_\alpha] \} \right\} \frac{\partial}{\partial r}(r\ldots); \\
\epsilon_{33} &= \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{k_\parallel^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ \Lambda_\alpha - \frac{\chi_N k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \Lambda_\alpha - \frac{\chi_T k_b v_{T\alpha}^2}{2\omega\omega_{c\alpha}} [1 - (1 - 2z_\alpha^2)\Lambda_\alpha] \right\};
\end{aligned}$$

onde $\omega_{P\alpha}^2 = 4\pi N_{0\alpha} e_\alpha^2 / M_\alpha$ é a frequência do plasma e também:

$$\Lambda_\alpha = 1 + i\sqrt{\pi} z_\alpha W(z_\alpha), \quad z_\alpha = \frac{\omega}{\sqrt{2} k_\parallel v_{T\alpha}}$$

$$W(z_\alpha) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} Z(z_\alpha) = \exp(-z_\alpha^2) \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_\alpha} \exp(t^2) dt \right],$$

sendo que $Z(z_\alpha)$ é a função de dispersão do plasma, $\omega_{c\alpha}$ é a frequência de cíclotron das partículas, $v_{T\alpha}$ é a velocidade térmica das partículas, k_b é a componente binormal do vetor de onda ($k_b = -k_z h_\theta + \frac{m}{r} h_z$, onde $h_z = B_z/B$ e $h_\theta = B_\theta/B$), $W(z_\alpha)$ é a função de Kramp e χ_1, χ_N, χ_T são os parâmetros de inomogeneidade radial do campo magnético poloidal, densidade e temperatura, respectivamente. Estes parâmetros de inomogeneidade são definidos da seguinte forma:

$$\chi_1 = r h_z^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_\theta}{r h_z} \right), \quad \chi_N = \frac{\partial}{\partial r} \ln N_0, \quad \chi_T = \frac{\partial}{\partial r} \ln T.$$

2.2 Ondas de Alfvén em Plasmas Cilíndricos Homogêneos

A partir da equação de onda e usando um modelo de onda plana $\exp[i(k_\perp \theta + k_\parallel z - \omega t)]$, sendo $k_\parallel$ e $k_\perp$ as componentes paralela e perpendicular do vetor número de onda $\mathbf{k}$, respectivamente, obtemos a relação de dispersão do plasma. Mostramos os dois ramos da solução da equação de dispersão com o intuito de ilustrar a proximidade das soluções em

torno da ressonância local de Alfvén (RLA). Da equação (2.3) obtém-se a expressão:

$$k^2 \mathbf{E} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (2.4)$$

sendo

$$k^2 = k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2. \quad (2.5)$$

Usando (2.5), obtemos as componentes de (2.4):

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{\parallel}^2 E_x - k_{\perp} k_{\parallel} E_z = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{11} E_x + \epsilon_{12} E_y); \\ (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) E_y = \frac{\omega^2}{c^2} (-\epsilon_{12} E_x + \epsilon_{22} E_y + \epsilon_{23} E_z); \\ (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) E_z - k_{\parallel} (k_{\parallel} E_z + k_{\perp} E_x) = \frac{\omega^2}{c^2} (-\epsilon_{23} E_y + \epsilon_{33} E_z). \end{array} \right\} \quad (2.6)$$

Resolvendo o sistema de equações (2.6) e utilizando a condição de velocidade de fase paralela muito menor que a velocidade térmica de íons ($k_{\parallel}/\omega \ll v_{Ti}$), obtém-se a relação para a componente perpendicular do vetor de onda (ignoramos as componentes ϵ_{23} , já que $\epsilon_{33} \gg \epsilon_{23}$)[‡]:

$$k_{\perp}^2 = \frac{1}{2} - \left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_{11}} \epsilon_{12} - k_{\parallel}^2 \left(1 - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \right) - D \left(\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} + \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \right) \right] \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\omega^2}{c^2} \frac{\epsilon_{12}}{\epsilon_{11}} \epsilon_{12} - k_{\parallel}^2 \left(1 - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \right) + D \left(\frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} - \frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{11}} \right) \right]^2 + 4 \left[D k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_{12}^2 - D \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{22} \right] \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}} \quad (2.7)$$

onde $D = (k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11})$.

Fazendo $\epsilon_{22} \simeq \epsilon_{11}$, válido quando se supõe $k_{\perp}^2 v_{T\alpha}^2 / \omega_{c\alpha}^2 = k_{\perp}^2 \rho_{\alpha}^2 \ll 1$, e incluindo apenas os termos proporcionais a $\epsilon_{33}/\epsilon_{11}$, temos:

$$k_{\perp}^2 = -\frac{D}{2} \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \pm \frac{D}{2} \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \sqrt{1 - \frac{4}{D^2} \left[D k_{\parallel}^2 + \frac{\omega^4}{c^4} \epsilon_{12}^2 - D \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} \right] \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}}, \quad (2.8)$$

Como $\epsilon_{33}/\epsilon_{11} \simeq \omega_{c\alpha}^2 / k_{\parallel}^2 v_{T\alpha}^2 \gg 1$, a equação anterior é simplificada na forma

[‡]Fazendo uma comparação dos termos ϵ_{23} e ϵ_{33} temos $\epsilon_{23}/\epsilon_{33} = \omega \omega_{c\alpha} / k_{\parallel} v_{T\alpha}$, onde $\omega/k_{\parallel} \ll v_{T\alpha}$, então $\epsilon_{33} \gg \epsilon_{23}$.

$$k_{\perp}^2 = \frac{D}{2} \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \left\{ -1 \pm \left(1 - \frac{2}{D} \left[k_{\parallel}^2 + \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\epsilon_{12}^2}{D} - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} \right] \frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}} \right) \right\}. \quad (2.9)$$

A expressão com sinal negativo corresponde à solução das ondas de Alfvén Cinéticas (KAW), no caso $v_{Te} \ll \omega/k_{\parallel}$, ou Quase-Eletrostática Lentas, no caso $v_{Te} \gg \omega/k_{\parallel}$, (SQEAW)[†]:

$$k_{\perp}^2 = -D \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} + D + \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\epsilon_{12}^2}{D} \simeq \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}} \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} - k_{\parallel}^2 \right). \quad (2.10)$$

Em uma primeira aproximação, para $\omega/\omega_{c\alpha} \ll 1$, ϵ_{11} se resume a c^2/c_A^2 e $\omega^2 = c_A^2 k_{\parallel}^2$ é a relação de dispersão da onda de Alfvén torsional.

A expressão (2.9), com sinal positivo, corresponde às soluções das ondas de Alfvén Rápidas (FAW ou FMSW)[‡]:

$$k_{\perp}^2 = -k_{\parallel}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} - \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\epsilon_{12}^2}{D} = -k_{\parallel}^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} + \frac{\omega^4}{c^4} \frac{\epsilon_{12}^2}{\left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} - k_{\parallel}^2 \right)}. \quad (2.11)$$

Para estas soluções, a expressão para a onda rápida (solução MHD) diverge e não é apropriada para a descrição do comportamento dos campos próximo a $\omega^2 = c_A^2 k_{\parallel}^2$ (RLA).

Variando a densidade de partículas do plasma e simulando um plasma inhomogêneo, é necessário superpor as duas soluções (onda rápida e lenta) para verificar que na ressonância ambas têm a mesma ordem de grandeza, permitindo o efeito de *conversão de modos*. Mostra-se isto no esquema da figura 2.4 para as ondas SQEAW (plasma frio $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$), FAW (MHD) e FMSW em torno da ressonância de Alfvén ($D = 0$). Pode-se notar que as duas soluções se cruzam próximo à ressonância, permitindo que a onda sofra uma conversão de modos. Na seção seguinte mostramos em detalhe a conversão de modos em plasmas inhomogêneos.

[†] *Kinetic Alfvén Wave (KAW) or Slow Quasi-Electrostatic Alfvén Wave (SQEAW)*

[‡] *Fast Alfvén Wave, Onda Magnetoacústica de Alfvén ou Fast Magnetosonic Wave.*

Figura 2.4: Esquema dos ramos de ondas no plasma fora da ressonância local de Alfvén (esta última na região de cor cinza, com espessura Δn , em torno da ressonância local de Alfvén, $D = 0$). Soluções da equação (2.8) de dispersão para SQEAW (plasma frio, $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$) e FAW (MHD).

2.3 Ondas de Alfvén em Plasma Cilíndrico Inomogêneo

Modelo de plasma não-homogêneo (modelo trapezoidal) é usado para analisar a estrutura dos campos das ondas de Alfvén a baixas frequências em uma coluna de plasma cilíndrica de raio a [3, 41, 51, 52].

Inicialmente, apresentamos um método de solução simplificada para a análise da estrutura dos campos que foi desenvolvido por Elfimov [52] (seção 2.3.1). Depois, utilizamos este método no caso mais complicado, com dois pontos da ressonância local de Alfvén (seção 2.3.2).

É escolhido um modelo de plasma trapezoidal com o intuito de evitar fórmulas matemáticas complexas na análise analítica da conversão de modos. O efeito Hall e o campo magnético poloidal são considerados pequenos ($B_{\theta} \simeq 0$), de tal forma que é escolhido a forma diagonal do tensor dielétrico mostrada na equação (2.15) ($\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} =$

0). Ao longo das linhas do campo magnético a temperatura e a densidade são consideradas homogêneas e trapezoidais ao longo do raio com uma pequena queda na borda do plasma, $\delta n = n_0(a_1 - a)/L_r$ (como é mostrado na figura 2.5):

$$\begin{aligned} n_e &= n_0, & r < r_t; \\ n_e &= n_0 \frac{a_1 - r}{L_r}, & r_t < r < a < a_1, \quad a_1 - a \ll L_r; \\ n_e &= 0, & a < r < c; \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde o parâmetro característico da inomogeneidade do plasma é $L_r = a_1 - r_t$. A frequência de RF supõe-se que esteja na região $k_{\parallel} c_A(r_t) < \omega < k_{\parallel} c_A(a)$ (contínuo de Alfvén), significando que na região da inomogeneidade do plasma ($r_t < r_A < a$) encontra-se o ponto de conversão.

Figura 2.5: Perfil radial trapezoidal da densidade e temperatura (com um ponto de ressonância r_A).

Para tokamaks com parâmetro de toroidicidade pequeno ($a/R \ll 1$, onde a é o raio menor e R o raio maior do tokamak) com baixa pressão de plasma ($\beta \ll 1$) o modelo proposto é razoável. É considerado um plasma magnetizado, de forma que a inomogeneidade radial dos parâmetros do plasma ($v_{Te}/\omega_{ce,i} \ll L_r = n/(dn/dr)$, $T_e/(dT_e/dr)$) é maior que o raio de Larmor dos elétrons e supõe-se ainda $T_i \ll T_e$ (íons frios). Suponhamos uma antena he-

licoidal com raio b com densidade de corrente $j_{\theta,z} = \sum_{MN} J_{\theta,z,M,N} \delta(r-b) e^{i(M\theta+Nz/R_0-\omega t)}$, onde $J_{\theta,z,M,N}$ é a amplitude constante do harmônico (M,N) e ω é a frequência do gerador. Esta antena está situada na região de vácuo entre o plasma e uma parede condutora com raio c_w . Nas Refs.[16, 19, 53] é discutido um modelo bem similar ao proposto. As equações de Maxwell-Vlasov descrevem a estrutura no plasma dos campos de RF produzido por uma antena. Numa aproximação linear o tensor dielétrico e campo elétrico de RF podem expressar a corrente oscilatória induzida por uma onda plana:

$$\tilde{j}_s = -i \frac{\Omega}{4\pi} \epsilon_{sq} \tilde{E}_q, \quad \tilde{E}_{r\theta z} = E_{r,\theta,z}(r) e^{i(m\theta+k_z z-\Omega t)},$$

sendo Ω a frequência real da fonte de RF.

São escolhidos como não-nulos os números de onda poloidal ($m \neq 0$) e axial ($k_z \neq 0$). Na aproximação da ótica geométrica (eikonal) [3, 19, 54]), as componentes radial, binormal e paralela do campo de RF em função do raio estão definidas como:

$$E_{r,b,\parallel} = \mathcal{E}_{r,b,\parallel} e^{i \int_0^r k_r dr}. \quad (2.13)$$

Como visto na seção anterior, para a equação (2.7) podem ser obtidos dois ramos das oscilações de plasma: a onda rápida (FAW) e a onda cinética (KAW/SQEA). Sendo que as relações de dispersão modificadas são definidas da forma,

$$k_{rF}^2 \simeq \epsilon_{11} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2 - k_b^2 + \frac{\epsilon_{12}^2 \omega^4 / c^4}{\epsilon_{11} \omega^2 / c^2 - k_{\parallel}^2} \quad e \quad k_{rK}^2 \simeq (\epsilon_{11} \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\parallel}^2) \frac{\epsilon_{33}}{\epsilon_{11}}, \quad (2.14)$$

respectivamente. Essas relações de dispersão são válidas longe da ressonância local de Alfvén ($|r - r_A| \gg c_s / \omega_{ci}$ onde $c_s = \sqrt{T_e / m_i}$ é a velocidade acústica dos íons, r_A é a posição radial da ressonância de Alfvén, e $D = k_{\parallel}^2 - \epsilon_{11} \omega^2 / c^2 = 0$). Fazendo-se $k_{\perp}^2 = k_b^2 + k_r^2$ e $k_{\perp}^2 \gg k_b^2$, estas quantidades, das equações (2.10) e (2.11), são obtidas. Devemos encontrar a solução das equações de Maxwell, válidas ao redor da RLA, e combiná-la com o resultado da aproximação da ótica geométrica nas equações (2.13 e 2.14) longe da RLA ($|r - r_A| \gg c_s / \omega_{ci}$), para obtermos a solução do problema de uma forma completa.

Anteriormente, na aproximação local de plasma magnetizado, as componentes cinéticas do tensor dielétrico foram apresentadas como:

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} = \epsilon_{22} &= \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} \right), & \epsilon_{33}^{(e)} &= \frac{\omega_{pe}^2}{k_{\parallel}^2 v_{Te}^2} (1 - \eta_e) + \delta\epsilon_{33}^{(col)}; \\ \eta_e &= \frac{Z_e}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-S^2}}{Z_e - S} dS, & Z_e &= \frac{\omega}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{Te}}; & \delta\epsilon_{33}^{(col)} &= i \frac{\omega_{pe}^2 \nu_{ei}}{\omega^3}.\end{aligned}\quad (2.15)$$

Também, além do amortecimento de Landau, foi considerada a dissipação colisional fraca das ondas via $\delta\epsilon_{33}^{(col)}$ ($\nu_{ei} \ll \omega$, onde ν_{ei} é a frequência de colisão elétron-íon, e ω é a frequência das ondas). Perto da borda do plasma esta dissipação é muito importante, onde o amortecimento de Landau das ondas de Alfvén é muito fraco e a temperatura dos elétrons é baixa. No limite $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$ o termo colisional é muito importante, e a integração da função de dispersão do plasma (η_e) resulta em $\epsilon_{33}^{(e)} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\Omega - i\nu_{ei})} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_{ei})} \simeq \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} (1 + \frac{\nu_{ei}}{\omega})$.

2.3.1 Exemplo de uma Teoria de Conversão de Modos num Ponto de Ressonância

Usando o modelo trapezoidal definido na seção anterior figura 2.5 aqui apresentamos um exemplo de teoria de conversão de modos num ponto de ressonância [52]. É utilizado um modelo trapezoidal para simplificar a matemática. Nesta última referência é mostrado que a equação de onda (2.3) em coordenadas cilíndricas, pode ser reduzida à forma

$$\left[\frac{m^2}{r^2} + (k_{\parallel}^2 - \epsilon_{11} \frac{\omega^2}{c^2}) \right] E_r = -i \frac{d}{dr} \left[\frac{m}{r} E_{\theta} + k_{\parallel} E_{\parallel} \right], \quad E_{\parallel} \simeq i \frac{k_{\parallel} c^2}{\epsilon_{33} \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} (E_r), \quad (2.16)$$

aqui, diferente das equações (2.6) que não tem derivadas radiais, as derivadas radiais não são nulas, por causa da inomogeneidade do plasma.

Como próximo passo fazemos uma expansão de Taylor dos coeficientes inomogêneos da equação (2.16) em torno de $r = r_A$, supondo-se $L_r \gg c_s/\omega_{ci}$; $|r - r_A| \ll r_A$, obtendo-se

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\epsilon_{11,A}}{\epsilon_{33,A}} \right) \frac{d^2 E_r}{dx^2} - k_{\parallel}^2 L_r^2 \frac{x}{x_a} E_r \right] \simeq 0, \quad (2.17)$$

onde $\epsilon_{jj,A} = \epsilon_{jj}|_{r=r_A}$, $x_a = (a_1 - r_A)/L_r$, e a variável $x = (r - r_A)/L_r$ é utilizada.

A solução MHD ideal com ressonância local de Alfvén, $E_r \sim 1/x$, pode ser obtida de (2.17) no limite de “*plasma de condutividade infinita*” ($\epsilon_{33} \gg \epsilon_{11}$, pois com condutividade infinita não há $E_{\parallel}$). Integrando (2.17) na variável x , a equação de Airy inhomogênea na variável adimensional τ pode ser obtida,

$$\ddot{\mathcal{E}} - \tau \mathcal{E} = \mp \frac{1}{\pi}, \quad \tau = g^{1/3} x, \quad g = \frac{k_{\parallel}^2 L_r^2}{x_a} \frac{\epsilon_{33,A}}{\epsilon_{11,A}}. \quad (2.18)$$

Notamos que o parâmetro $|g|$ é bastante grande ($\frac{\epsilon_{33,A}}{\epsilon_{11,A}} \gg 1$, $\frac{k_{\parallel}^2 L_r^2}{x_a} \gg 1$). Então a solução completa de (2.17) pode ser descrita via funções de Airy [55] na forma:

$$E_r = A_1 Ai(\tau) + B_1 Bi(\tau) + C_1 \mathcal{E}(\tau), \quad (2.19)$$

onde A_1, B_1 e C_1 são coeficientes arbitrários e $\mathcal{E}$ é uma das duas soluções $[Hi(\tau), Gi(\tau)]$ da equação inhomogênea de Airy [55]. Estas duas soluções são normalizadas pela relação $Gi(\tau) + Hi(\tau) = Bi(\tau)$. A função Gi é limitada, ou seja:

$$Gi(\tau) \sim \frac{1}{\pi\tau}, \quad Gi(-\tau) \sim \frac{-1}{\pi\tau} + \pi^{-1/2} \tau^{-1/4} \cos\left(\frac{2}{3}\tau^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right), \quad (2.20)$$

e a função $Hi(\tau)$ é ilimitada quando $\tau \rightarrow -\infty$. No caso de $|g| \gg 1$, a solução geral da equação (2.18) será:

$$E_r = A_1 Ai(\tau) + C_1 Gi(\tau), \quad (2.21)$$

onde o efeito de conversão de modos é representado pela função Gi e $Ai(\tau)$ é a autofunção dos modos.

No caso de plasmas quentes (velocidades de fase $\omega/k_{\parallel} \ll v_{Te}$), a SQEAW [56] aparece na região de maior densidade do plasma, $x < 0$. No caso de plasmas “frios” (velocidades de fase $\omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}$), a solução oscilatória relativa à SQEAW [19, 51, 54] aparece na região

do plasma entre o ponto de conversão e a borda da coluna de plasma, $r_A < r < a$. Aqui, dois tipos de ondas aparecem, uma que é excitada pela componente paralela do campo elétrico no vácuo e a outra gerada via efeito de conversão de modo. Note, em (2.21) (quando $\epsilon_{33} \rightarrow \infty$), que não há limite para a solução MHD ideal ($\sim 1/\tau$), como discutido em [54].

Casando a solução de (2.21) com a solução para a região de plasma homogêneo, $E_r \sim r^{|m|-1}$, obtém-se a relação entre os coeficientes, $C_1/A_1 \simeq [\tau Ai']_{\tau=\tau_t}$, onde $\tau_t = g^{1/3}(r - r_A)/L_r$. Finalmente, a condição de ressonância (ver, por exemplo, [51]) para a excitação da SQEAW pode ser escrita como:

$$\left[\frac{d}{dx} Ai(\tau) - \tau_t Ai'(\tau) \Big|_{\tau=\tau_t} \frac{d}{dx} Gi(\tau) \right]_{x=(a-r_A)/L_r} = 0.$$

A solução dada em (2.21) é dramaticamente modificada se for tomado em consideração o efeito de dissipação da onda, que se relaciona com a parte imaginária do tensor dielétrico, $Im\epsilon_{33}$. Neste caso, para a solução particular de (2.18), a função $\pi^{-1}e_0(-\tau)$ pode ser escolhida, onde a função generalizada de Airy,

$$e_0(-\tau) = \int_0^\infty \exp\left(\tau t - \frac{t^3}{3}\right) dt, \quad (2.22)$$

já foi obtida em [57]. Esta função é limitada através do eixo imaginário, decresce assintoticamente com $\sim 1/\tau$ (quando $|\tau| \rightarrow \infty$, $-2\pi/3 < \arg \tau < 2\pi/3$), é uma solução particular é única. Em (2.18), o valor de g é complexo porque a componente complexa do tensor dielétrico, ϵ_{33} , e a raiz de $g^{1/3}$ devem ser tais que o argumento, $\arg \tau = \arg g^{1/3} = \alpha$, pertença ao setor duplo $\pi/3 < |\alpha| < 2\pi/3$. As soluções $h_1(\tau)$ e $h_2(\tau)$ da equação homogênea de Airy podem ser descritas como uma combinação das funções de Airy, $h_{1,2}(-\tau) = Bi(-\tau) \pm iAi(-\tau)$, porque estas combinações produzem funções que crescem exponencialmente nas duas direções. Para as condições do plasma “frio”, $\omega/k_\parallel \gg v_{Te}$, os

comportamentos assintóticos destas funções [55] são:

$$h_{1,2}(-\tau) \sim \frac{1}{2\pi^{1/2}}\tau^{-1/4} \exp \pm \left(\frac{2}{3}|\tau|^{3/2} \sin \frac{\arg g}{2} - i \cos \frac{\arg g}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \text{ para } x > 0;$$

$$h_{1,2}(-\tau) \sim \frac{1}{2\pi^{1/2}}\tau^{-1/4} \exp \mp \left(\frac{2}{3}|\tau|^{3/2} \cos \frac{\arg g}{2} - i \sin \frac{\arg g}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \text{ para } x < 0;$$

Finalmente, quando $|g^{1/3}| \gg 1$ e x está no intervalo, $(r_t - r_A)/L_r < x < (a - r_A)/L_r$, a solução de (2.18) é

$$E_r = A_1 h_1(-\tau) + C_1 \pi^{-1} e_0(-\tau). \quad (2.23)$$

Na equação acima, a solução da equação homogênea de Airy, $h_1(-\tau)$, representa a parte dissipativa do campo de RF na periferia do plasma e a solução $e_0(-\tau)$ representa a parte de conversão de modo do campo de RF no ponto de RLA, $r = r_A$. Para expor a RLA, a condição deve ser:

$$\frac{2}{3} \left(\frac{a - r_A}{L_r} \right)^{3/2} \text{Im } g^{1/2} \gg 1.$$

Usando este limite e supondo um efeito de dissipação fraco, $\text{Im } g \ll \text{Re } g$, obtém-se que a solução é parecida com a solução MHD ideal, $E_r \sim g^{-1/3} x^{-1}$. A meia-largura da ressonância δr , onde a dissipação é forte, é da ordem de $g^{-1/3} L_r$.

Note que no caso de um perfil de densidade arbitrário as condições para o limite de MHD ideal podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \int_{r_A}^a |\text{Im } k_r| dr &\gg 1, \quad \omega/k_{\parallel} \gg v_{Te}; \\ \int_0^{r_A} |\text{Im } k_{rK}| dr &\gg 1, \quad \omega/k_{\parallel} \ll v_{Te}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde k_{rK} é dado pela equação (2.14).

Integrando (2.16) e usando a propriedade da função e_0 no plano complexo [57],

$$\int_0^\infty \text{Re } e_0(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2},$$

obtém-se o comportamento da componente E_θ no limite MHD [3, 25]:

$$\begin{aligned} E_\theta &\sim 1 + \frac{r_A - r_t}{r_A} \ln \left| \frac{r_A - r}{r_A - r_t} \right|, \text{ para } x > 0; \\ E_\theta &\sim 1 + \frac{r_A - r_t}{r_A} \ln \left| \frac{r_A - r}{r_A - r_t} \right| + i\pi, \text{ para } x < 0 \end{aligned} \quad (2.25)$$

Usando a expressão assintótica pode-se obter o valor da potência dissipada[25] na RLA através do teorema de Poynting, como mostramos na seção seguinte. Substituindo a expressão (2.25) na primeira equação de (2.16) pode-se obter o campo E_r .

2.3.2 Efeito de Conversão de Modos em Dois Pontos de Ressonância

Considerando como ponto de partida a Ref. [52], nesta seção mostraremos uma análise dos efeitos de conversão de modos considerando dois pontos de ressonância. De igual forma à seção anterior, aqui usaremos um modelo de plasma simplificado (trapezoidal) com o intuito de simplificar a matemática. Consideramos o campo magnético poloidal pequeno ($B_\theta \simeq 0$), de tal forma que pode ser escolhida a forma diagonal do tensor dielétrico ($\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0$). A densidade e a temperatura do plasma são consideradas homogêneas ao longo das linhas de campo magnético e trapezoidais ao longo do raio com uma pequena queda, $\delta n = n_0(a_1 - a)/L_r$, na borda do plasma como se mostra na figura 2.6:

$$\begin{aligned} n_e &= n_0, & r < r_t; \\ n_e &= n_0 \frac{a_1 - r}{L_r}, & r_t < r < a < a_1, \quad a_1 - a \ll L_r; \\ n_e &= 0, & a < r < r_c; \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde, $L_r = a_1 - r_t$, é o parâmetro característico da inomogeneidade do plasma. Consideramos que a frequência de RF esteja no contínuo de Alfvén, perto da superfície racional magnética r_s , onde $q = M/N$, o que implica a existência de dois pontos de conversão $R_{A1,A2}$ na região de inomogeneidade do plasma ($r_t < r_{A1} < r_s < r_{A2} < a$).

Figura 2.6: Perfil da densidade e temperatura em função de r , com dois pontos de ressonância $r_{1,2}$.

A seguir, faremos a aproximação cinética na vizinhança dos pontos de conversão usando a aproximação: $E_b \approx E_\theta$ e $k_b \approx m/r \gg k_\parallel$, com a qual temos:

$$\left[\frac{m^2}{r^2} + (k_\parallel^2 - \epsilon_{11} \frac{\omega^2}{c^2}) \right] E_r = -i \left[\frac{m}{r^2} \frac{d(r E_b)}{dr} + \frac{d(k_\parallel E_\parallel)}{dr} \right],$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dE_b}{dr} \right) \approx i m \frac{d}{dr} \left(\frac{E_r}{r} \right), \quad e \quad E_\parallel \approx i \frac{k_\parallel c^2}{\epsilon_{33} \omega^2} \frac{dE_r}{dr}. \quad (2.27)$$

Da combinação destas equações obtemos

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{k_\parallel^2 c^2}{\epsilon_{33} \omega^2} \frac{d^2 E_r}{dr^2} - \left(k_\parallel^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} \right) E_r \right] \approx 0. \quad (2.28)$$

Usando a expansão em série de Taylor nos coeficientes inhomogêneos, $k_\parallel(r)$ e $\epsilon_{11}(r)$, na equação (2.28)[†] em $r = r_s$, obtemos uma equação parabólica inhomogênea [55] (no Apêndice A.3 mostra-se em detalhes o cálculo),

$$\frac{d^2 E_r}{d\eta^2} + (\sqrt{\lambda} - \eta)(\sqrt{\lambda} + \eta) E_r = C, \quad (2.29)$$

[†]Não é feita uma expansão em série de Taylor de $\epsilon_{33}(r)$, porque a sua variação em torno a $r = r_s$ é muito menor em comparação à variação de $\epsilon_{11}(r)$.

onde C é uma constante, $\eta = \Upsilon(r - r_s)/r_s$, $\eta = \pm\sqrt{\lambda}$ são as ressonâncias locais de Alfvén, adimensionais, e

$$\Upsilon = \left(\frac{k_z^2 s_s^2 r_s^2}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \quad \varepsilon = \frac{\epsilon_{11,s}}{\epsilon_{33,s}}, \quad \lambda = \frac{\omega^2 r_s^2}{v_{A,s}^2} \left(\frac{1}{\varepsilon k_z^2 s_s^2 r_s^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

A solução da equação homogênea é a função Polinomial de Hermite,

$$E_{r_n}(\eta) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\eta^2}{2}} H_n(\eta), \quad (2.30)$$

onde $\lambda = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e o autovalor da frequência é

$$\omega_n = v_{A,s} \sqrt{\frac{(2n+1)k_z \varrho}{r_s}} \left(\frac{\epsilon_{11,s}}{\epsilon_{33,s}} \right)^{\frac{1}{4}}. \quad (2.31)$$

Para resolver a equação (2.27) entre as ressonâncias locais ($r_{A1} < r < r_{A2}$), podemos usar o método padrão (ver, por exemplo, [58]) da ótica geométrica (WKB). O campo de RF ao longo da coordenada radial pode ser representado na forma:

$$E_{r,b,\parallel} = \mathcal{E}_{r,b,\parallel} \exp(i \int_0^r k_r dr + \psi) \quad (2.32)$$

onde ψ é uma fase arbitrária. Substituindo esta forma de solução no sistema de equações (2.27) com o tensor cinético paralelo (2.15), temos a equação de dispersão para a onda cinética de Alfvén $k_r^2 = (\epsilon_{11}\omega^2/c^2 - k_{\parallel}^2)\epsilon_{33}/\epsilon_{11}$. Notamos que a solução (2.32) não é válida nos pontos de conversão de modos $r_{A1,A2}$, pois $k_r = 0$.

Usando (2.32), a solução geral da equação (2.29) é:

$$E_r = \mathcal{E}_r \kappa_r^{-\frac{1}{2}} \sin \left(\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\eta} \kappa_r d\eta + \psi \right) = \mathcal{E}_r \kappa_r^{-\frac{1}{2}} \sin \left(\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\eta} \sqrt{(\sqrt{\lambda} - \eta)(\sqrt{\lambda} + \eta)} d\eta + \psi \right). \quad (2.33)$$

A equação (2.29) pode ser reduzida à equação de Airy com solução geral $E_r \propto Ai(y)$ [55] num dos dois pontos de conversão $\eta = \pm\sqrt{\lambda}$ (ou $r = r_{A1,A2}$). A solução assintótica da equação de Airy homogênea será então:

$$E_r = A(2\sqrt{\lambda} y)^{-\frac{1}{4}} \sin \left[\frac{2}{3}(2\sqrt{\lambda})^{\frac{1}{2}} y^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4} \right], \quad (2.34)$$

onde $\kappa_r^2 = 2\sqrt{\lambda} y$, $y = \sqrt{\lambda} - \eta$. Comparando esta solução com (2.33), achamos que $\psi = \pi/4$ e $A = \mathcal{E}_r$. Integrando κ_r em (2.33) entre os dois pontos de reflexão,

$$\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \text{Re}[\kappa_r] d\eta = l\pi, \quad l = 1, 2, 3 \dots$$

obtemos a frequência de ressonância (2.31). Na figura 2.7 mostramos a distribuição da componente E_r do campo LF calculado com a aproximação WKB, fora das superfícies de ressonância, em comparação com a solução dos polinômios de Hermite (2.30). Podemos observar um comportamento similar nas soluções.

Figura 2.7: Comparação do automodo do campo $\text{Re}[E_r]$ calculado para o modelo de plasma trapezoidal (solução por polinômios de Hermite) e solução pelo método WKB da equação (2.27) para plasmas do TCABR em função de $(r - r_s)/L$, com dissipação muito fraca $v_{Te} \gg c_A$ ao redor $r = r_s$.

Podemos também calcular a variação espacial dos campos de LF excitados por fontes externas em $r = r_{A2}$, por uma frequência real ($\gamma = 0$),

$$E_r = B(\lambda - \eta^2)^{-\frac{1}{4}} \sin \left\{ \frac{1}{2} \left[\eta \sqrt{\lambda - \eta^2} + \lambda \sin^{-1} \left(\frac{\eta}{|\sqrt{\lambda}|} \right) \right] + \frac{\pi}{4} \right\} \times \exp \left\{ \frac{1}{4} \frac{Im[\epsilon_{33}]}{Re[\epsilon_{33}]} \left[\eta \sqrt{\lambda - \eta^2} + \lambda \sin^{-1} \left(\frac{\eta}{|\sqrt{\lambda}|} \right) \right] \right\}. \quad (2.35)$$

Na figura 2.8, apresentamos a distribuição da componente E_r do campo de LF, levando em conta a dissipação de Landau dos elétrons e para parâmetros do TCABR.

Figura 2.8: Comportamento do campo $Re E_r$ calculado pelo método WKB da equação (2.27), para plasmas do TCABR com dissipação cinética $v_{Te} = 2c_A$ em $r = r_s$.

Se a componente paralela do tensor dielétrico é complexa, mas a parte imaginária é pequena ($Im[\epsilon_{33}] \ll Re[\epsilon_{33}]$), o método WKB [58] pode permitir também o cálculo da razão amortecimento/crescimento (*damping/growth*), γ , dos automodos, para $Im[k_r] = 0$,

$$\gamma = -\frac{c^2}{2Re[\omega]} \frac{\int_{r_{A1}}^{r_{A2}} \frac{Im[\epsilon_{33}]}{Re[\epsilon_{33}]} k_r dr}{\int_{r_{A1}}^{r_{A2}} \frac{Re[\epsilon_{33}]}{k_r^2} dr}.$$

Para apresentar a solução do problema de uma forma completa, nós devemos encontrar a solução das equações de Maxwell, o que é válido ao redor da RLA, e casá-la com o

resultado da aproximação da ótica geométrica das regiões II, III e IV, longe da RLA (figura 2.6).

Consideremos as regiões V e VI como vácuo. As equações que descrevem o comportamento dos campos nestas regiões podem ser obtidas das equações de Maxwell, sendo

$$E_r = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{\omega}{c} \frac{m}{r} B_z - i k_z \frac{dE_z}{dr} \right), \quad (2.36)$$

$$E_\theta = \frac{1}{\kappa^2} \left(k_z \frac{m}{r} E_z + i \frac{\omega}{c} \frac{dB_z}{dr} \right), \quad (2.37)$$

$$B_r = -\frac{1}{\kappa^2} \left(i k_z \frac{dB_z}{dr} + \frac{\omega}{c} \frac{m}{r} E_z \right), \quad (2.38)$$

$$B_\theta = \frac{1}{\kappa^2} \left(k_z \frac{m}{r} B_z - i \frac{\omega}{c} \frac{dE_z}{dr} \right), \quad (2.39)$$

onde $\kappa^2 = k_z^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$. As componentes $E_z, B_z = \psi$ satisfazem a equação

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} - \left(\kappa^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) \right] \psi = 0, \quad (2.40)$$

cuja solução é

$$E_z^V = C_1 I_m(|\kappa r|) + C_2 K_m(|\kappa r|), \quad (2.41)$$

$$E_z^{VI} = C_3 I_m(|\kappa r|) + C_4 K_m(|\kappa r|), \quad (2.42)$$

$$B_z^V = D_1 I_m(|\kappa r|) + D_2 K_m(|\kappa r|), \quad (2.43)$$

$$B_z^{VI} = D_1 I_m(|\kappa r|) + D_2 K_m(|\kappa r|), \quad (2.44)$$

onde I_m e K_m são as funções de Bessel modificadas:

$$I_\nu(x) = e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(xe^{\frac{i\pi}{2}}), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin(\nu\pi)}.$$

Introduzindo estas soluções de E_z e B_z em (2.36-2.39) obtemos todas as componentes do campo.

Para as soluções na região I, onde o plasma é homogêneo, consideramos que o tensor

dielétrico é constante ($\vec{\epsilon} = \epsilon_I$). Então as equações que descrevem os campos serão as mesmas que as das regiões V e VI , mas a solução para as componentes E_z e B_z são diferentes:

$$E_z^I = F_1 I_m(|\kappa r|) , \quad (2.45)$$

$$B_z^I = F_2 I_m(|\kappa r|) . \quad (2.46)$$

Aqui eliminamos K_m , pois $K_m(r = 0) = \infty$.

2.3.3 Potência Dissipada

A expressão da energia eletromagnética é dada por

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dV , \quad (2.47)$$

onde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{c}{8\pi\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) , \quad (2.48)$$

é o vetor de Poynting. Depois de alguns cálculos chega-se a (ver Apêndice A.4)

$$Re \frac{1}{2} \int \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dv = \frac{m}{r_A} \frac{\pi r^2 c^2}{4\mu_0 \omega (k_z^2 + k_y^2)} |E_y|^2 \frac{r_A - r_t}{r_A} , \quad (2.49)$$

Esta expressão representa o valor da potência dissipada na região de ressonância local de Alfvén.

2.4 Cálculos Numéricos de Absorção e Excitação de Campos Eletromagnéticos de Frequências Baixas

Nesta seção mostraremos resultados numéricos usando o código cilíndrico com o intuito de fazermos uma comparação com os cálculos analíticos mostrados nas seções 2.3.1 e 2.3.2. Logo faremos uma comparação de resultados numéricos do código cilíndrico com o código ALTOK toroidal, para vermos se os efeitos toroidais, deste último código, tem alguma

contribuição significativa na região de baixas frequências.

2.4.1 Código Cilíndrico

O código utilizado está baseado no código unidimensional cinético de Dmitrieva *et al* [41, 43]. Este código, com configuração de plasma cilíndrica, foi convertido no modelo multifluido de duas espécies para o cálculo da dissipação e dispersão das ondas de Alfvén. Para os campos de RF induzidos por uma antena externa à coluna de plasma magnetizada, este código de forma semelhante a outros códigos relacionados ao tema [16, 19, 59], resolve o conjunto linearizado de equações de Maxwell-Vlasov, posto como um problema de contorno. É considerado um plasma cilíndrico de raio a e, em torno deste, há uma região de vácuo que se estende até a parede condutora de raio c_w . Na região de vácuo está a antena com corrente superficial localizada em uma superfície de raio b . Analisaremos os efeitos de penetração dos campos LF e da absorção de energia que são induzidos pelo EML (figura 2.9b), perto da superfície racional $q = M/N$, dentro de uma aproximação linear da amplitude da onda.

Figura 2.9: (a) Superfícies magnéticas do TCABR, (b) Esquema do EML no TCABR (E. C. da Silva et. al. [60]), e (c) Corrente na superfície enrolada do EML

A bobina do EML é representada como uma corrente laminar em $r = b$ (figura 2.9c), expandida em Série de Fourier com números de onda poloidal M e toroidal N . Nos cálculos usamos um modelo cilíndrico (figura 2.9a) para o EML [61] que pode ser representado na

forma modificada utilizando uma corrente oscilatoria, $\sim \exp(-i\omega t)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \approx & \sum_{s,N} \mathbf{e}_z \frac{2M_0 L I_L}{\pi^2 R_0 b} \cos(sM_0\theta) \left[1 + 2 \cos\left(\frac{Nz}{R_0}\right) \right] e^{-i\omega t} + \\ & \mathbf{e}_\theta \frac{4 L I_L}{(\pi R_0)^2} \frac{N}{s} \sin(sM_0\theta) \sin\left(\frac{Nz}{R_0}\right) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

onde $N = 1, 2, 3, \dots$, R_0 é o raio maior, L é a largura da bobina, I_L é a amplitude da corrente na bobina, $s = 1, 3, 5, \dots$ e θ, z são as coordenadas cilíndricas. Em nossos cálculos para $N \neq 0$, a corrente da bobina do EML pode ser representada como uma corrente de superfície para cada par M/N dos harmônicos helicoidais,[†]

$$j_{\theta,z} = \sum_{MN} J_{\theta,z,M,N} \delta(r-b) e^{i(M\theta + Nz/R_0 - \omega t)},$$

onde $J_{\theta,z,M,N}$ é a amplitude constante do harmônico (M,N), e ω é a frequência do gerador.

O código cilíndrico está baseado na aproximação que ρ_e e ρ_i , raio de Larmor dos elétrons e íons, respectivamente, são muito menores que L_r e λ_r , onde L_r é o comprimento característico da inomogeneidade radial do plasma e λ_r é o comprimento característico da variação radial do campo de RF. Além desta aproximação e sob as condições características de tokamaks médios como o TCABR, o tensor dielétrico, sem rotação do plasma, é reduzido ao seguinte forma:

$$\overset{\leftrightarrow}{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.51)$$

onde as componentes não nulas são dadas pela equação[‡]

[†]C. J. A. Pires [61] desenvolveu uma teoria do EML mais geral à considerada neste trabalho, incluindo distribuição poloidal dos condutores do limitador, uniforme e com distribuição não uniforme. Neste trabalho efeitos poloidais não são considerados.

[‡]No código cilíndrico as componentes do tensor dielétrico ϵ_{12} e ϵ_{21} não são nulas. Estas componentes, na seções 2.3.1 e 2.3.2 foram consideradas como nulas para simplificar a matemática dos cálculos analíticos.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = \\
&1 + \sum_{\alpha=i} \frac{\omega_{p\alpha}^2 [\omega + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha)]}{\omega [\omega_{c\alpha}^2 - (\omega + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha))^2]} + \frac{\omega_{pe}^2 [\omega + i\nu_{ef}]}{\omega_{ce}^2 \omega}, \\
\epsilon_{12} &= -\epsilon_{21} = \\
&i \sum_{\alpha=i} \frac{\omega_{p\alpha}^2(\omega) \omega_{c\alpha}}{\omega^2 [\omega_{c\alpha}^2 - (\omega + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha))^2]} + i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} - i \frac{\chi k_{\parallel} c^2}{\omega^2}, \\
\epsilon_{33} &= 1 - \sum_{\alpha=i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega [\omega + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha)]} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega [\omega + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha)]}, \\
\epsilon_{23} &= \epsilon_{32} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

onde χ é o termo de cisalhamento do campo magnético $\chi = r \frac{B_z^2}{B^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta}{r B_z} \right)$, $\nu_{ef} = 2.91 \times 10^{-6} n_e \ln \Lambda / T_e^{3/2}$.

A seguir mostramos os resultados obtidos com o código cilíndrico no regime MHD ($\frac{\omega}{k_{\parallel}} \gg v_{Te}$) para as características e parâmetros do TCABR (Apêndice C) e modos toroidal/poloidal $N/M = 1/ - 3^\dagger$. Supomos superfícies magnéticas circulares, com perfil de temperatura parabólico $T_{e,i} = T_{e,i0} [1 - (r/a)^2]^{1.85} + T_{e,ia}$ com pedestal, onde a temperatura central de elétrons e íons é 500 eV , $T_{ea} = 15 \text{ eV}$ e $T_{ia} = 15 \text{ eV}$ respectivamente. A densidade de elétrons é dada por $n_e = n_0 [(1 - (r/a)^2)]^{0.9} + n_a$, com $n_0 = 3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ e $n_a = 1 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$. A densidade de íons n_i é tomada de maneira a satisfazer a condição de neutralidade $n_i = n_e$. O perfil de corrente é dado por $j = j_0 [1 - (r/a)^2]^{2.5}$, e os valores do fator de segurança são $q_{r=0} = 1,00$, $q_{r=16} = 3$ e $q_{r=a} = 3,5$. Geralmente, para números grandes dos modos poloidal/toroidal (exceto $M/N = 3/1$) temos baixa dissipação [62].

Na figura 2.10 mostramos a distribuição da potência dissipada em função do raio do plasma para frequências na faixa de 1kHz – 100kHz . Na figura 2.11 mostramos as componentes do campo elétrico LF, radial (E_r), poloidal (E_θ) e toroidal (E_z) para os modos poloidal/toroidal $M/N = 3/1$ da antena, para a frequência $f = 12\text{kHz}$.

[†]Resultados numéricos mais amplos, relacionados aos efeitos de impurezas na dissipação de ondas de Alfvén, usando o código cilíndrico unidimensional foram reportados por Elfimov *et al* [41].

Figura 2.10: Distribuição da potência dissipada da onda, em função do raio normalizado pelo raio da coluna de plasma a , para frequências baixas no intervalo de $1\text{kHz} - 100\text{kHz}$

Nesta figura vemos que para uma frequência de 100kHz aparece dois picos da ressonância, a qual esta em concordância com o análise teorico mostrado na seção 2.3.2. Vemos tambem que a medida que se aumenta a frequência a potência dissipada tambem aumenta na região de RLA.

Figura 2.11: Campo elétrico radial E_r , poloidal E_θ e paralelo E_z em função do raio normalizado pelo raio da coluna do plasma a , com $f = 12 \text{ kHz}$ e $M/N = 3/1$.

Nestas figuras vemos claramente que há ressonância do campo elétrico na região de RLA perto da borda do plasma, como previsto pela teoria analítica em 2.3.1 e 2.3.2.

2.4.2 Código Toroidal ALTOK

Para testar os efeitos toroidais, que faltam no código cilíndrico da seção anterior (2.4.1), para analisar a dissipação da onda de frequências baixas perto da superfície racional $q = M/N = 3/1$, usamos o código ALTOK (código bi-dimensional que inclui efeitos toroidais e deslocamento de Shafranov de $\sim 1,6cm$, escrito por S. A. Galkin e colaboradores [63]). Usamos este código para compararmos com os resultados do código cilíndrico e analisar os efeitos toroidais. O código está baseado num modelo de plasma multi-fluido (elétrons e íons) com colisões entre si, que é válido no caso de plasma frio ($v_{Te} < \omega/k_{\parallel}$) perto da borda do plasma, entre $r = 0,6a$ e $r = a$. A representação dos perfis do plasma no código ALTOK é um pouco diferente da representação do código cilíndrico. As distribuições da densidade de partículas e de corrente usadas neste código são $n = n_0(1 - \Psi^{0,7})$, e $j = j_0(1 - \Psi^{0,85})^{1,6}$, onde Ψ é o fluxo magnético poloidal. Nos cálculos é assumida parâmetros característicos do TCABR (como os usados na seção anterior no caso do código cilíndrico). Na figura 2.12 mostramos curvas do campo elétrico LF correspondentes, apenas às componente E_r e E_{θ} .

2.4.3 Discussão dos Resultados Numéricos

Comparando os resultados dos códigos cilíndrico e ALTOK podemos concluir que os efeitos toroidais, com frequências baixas, são muito fracos na região de ressonância local de Alfvén. Como podemos ver da figura 2.12 há um vizinho de ressonância local em $r/a \approx 0,73$, devido ao acoplamento dos harmônicos poloidais, onde $q = m/n = 2$. Mas o tamanho do pico é muito pequeno em comparação aos picos de ressonância local em $r/a \approx 0,93$. Então podemos concluir que o uso do código cilíndrico para frequências baixas é válido onde os efeitos toroidais são quase nulos no caso do código ALTOK.

Das figuras 2.11 (código cilíndrico) e 2.12 (código ALTOK) podemos ver que o comportamento do campo elétrico radial E_r é semelhante na região de ressonância local de Alfvén em $r/a \approx 0,93$. De igual maneira a parte imaginária do campo elétrico poloidal E_{θ} tem comportamento semelhante na região de ressonância local de Alfvén em $r/a \approx 0,93$.

Figura 2.12: Campo elétrico radial E_r (a) e poloidal E_θ (b) em função do raio normalizado excitados pelo EML do TCABR com $f = 12 \text{ kHz}$ e $M/N = 3/1$.

Este comportamento dos campos na região de ressonância local de Alfvén, como se pode ver, foi prevista pela análise analítica (seção 2.3.2).

Da figura 2.10 vê-se que o campo LF induzido pela antena dissipa-se efetivamente na região de ressonância local de Alfvén na superfície racional magnética $q_r = 3$. Podemos concluir que os campos estacionários gerados pelo EML podem também dissipar energia na região de ressonância local de Alfvén; e a maior eficácia de dissipação dos campos é produzida na superfície racional $q_r = 3$ (figura 2.12) para os modos básicos $M = 3$, $N = 1$ do EML.

O código cinético mostra diferenças significativas na dissipação dos campos eletromagnéticos, e no perfil da potência dissipada, mostrados em detalhe na Ref. [46].

Capítulo 3

Estudo do Código Cinético Toroidal

Nesta seção mostramos uma descrição do código cinético toroidal 2D e os problemas encontrados na tentativa da implementação da velocidade de rotação do plasma e simulações com baixas frequências menores a $100kHz$. Este código já tinha sido usado anteriormente no trabalho de doutorado do Gesil Amarante [46] para a simulação do aquecimento de plasmas por ondas de Alfvén com frequências na faixa de $4-5MHz$, campos de RF induzidas por antenas helicoidais de um conjunto de semi-círculos poloidais em fase [64, 65] e, com parâmetros do TCABR diferentes aos usados aqui. Como uma continuação desse trabalho intentou-se implementar no código velocidade de rotação do plasma. Mas, não se teve sucesso, já que esta implementação implicava em modificar muitas partes do código, sendo inviável para o tempo que se tinha. Posteriormente passamos à simulação com baixas frequências e, desafortunadamente o código gerava divergências numéricas perto da condição $k_{\parallel} = 0$ (seção 3.5), também intentou-se modificar o código para sanar este problema e de igual forma, a modificação do código implicaria em modificar muitas subrotinas.

A seguir mostramos uma descrição do código, mostrado em [46], com o intuito de entendermos o funcionamento do código e posteriormente compreendermos os problemas referentes às instabilidades numéricas perto da condição $k_{\parallel} = 0$. Também, faremos um recálculo, como foi feito em [46], da dissipação das ondas de Alfvén utilizando os novos parâmetros característicos do TCABR (Apêndice C) obtidos recentemente [47, 48].

3.1 Histórico

Este código foi escrito em sua versão cilíndrica inicial, por G. L. Chen e D. W. Ross em 1981, e sofreu várias correções até a inclusão dos termos de impurezas por W. Q. Li em 1987. Em 1991 o código foi finalmente adaptado por W. Q. Li para o acoplamento de três modos poloidais dos parâmetros de equilíbrio. Sua forma bidimensional foi definida com modificações introduzidas por D. W. Ross, W. H. Miner, J. C. Wiley e R. R. Mett em 1992. Foi trazido para o Instituto de Física da USP em Novembro de 1997 por G. S. Amarante Segundo, após um estágio na Universidade de Texas Austin, onde o código foi desenvolvido. Este último introduziu algumas outras modificações, principalmente relacionadas à inclusão do módulo de cálculo de forças ponderomotoras e elaborando uma documentação detalhada do código [46].

Nesta seção mostramos um resumo do funcionamento do código (com os cálculos apresentados no Apêndice E) e são listados e discutidos os principais resultados.

3.2 O código

O código é baseado no modelo toroidal de plasma simplificado apresentando através de superfícies magnéticas circulares e concêntricas. No código é usado coordenadas pseudo-toroidais (definidas via transformações $R = R_0 + r \cos \theta$, ζ e $Z = r \sin \theta$), onde R_0 é o raio maior da seção transversal da coluna de plasma de raio menor a , ζ é a coordenada toroidal e Z é a coordenada azimutal do sistema toroidal, conforme mostrado na figura 3.1. O código calcula os campos das ondas de Alfvén e a dissipação em plasmas magnetizados com duas espécies de íons.

As equações de onda perturbada com oscilações periódicas de frequência ω foram definidas na equação (2.3), como sendo da forma:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (3.1)$$

e são resolvidas no sistema de coordenadas descrito acima. Usando a aproximação de

Figura 3.1: Esquema das coordenadas toroidais do código bidimensional.

pequena toroidicidade, $\epsilon = r/R_0 \ll 1$ a análise matemática é simplificada. Sendo que, a componente do campo magnético de equilíbrio podem ser representada na forma:

$$\mathbf{B} \approx B_0 \left(\hat{\zeta} + \hat{\theta} \delta \right) (1 - \epsilon \cos \theta), \quad (3.2)$$

onde $\delta = \epsilon/q$, $q = rB_0/(R_0B_\theta)$ e $\hat{\zeta}$, $\hat{\theta}$, são os vetores unitários nas direções toroidal e poloidal, respectivamente. Os efeitos das colisões, do raio iônico de Larmor finito ($\rho_L = v_{Ti}/\omega_{ci}$), de ω/ω_{ci} finito (onde ω_{ci} é a frequência de ciclotron dos íons), do amortecimento de Landau eletrônico, e de “*transit time magnetic pumping*” (relacionado com a dissipação da componente paralela do campo magnético odulatório, $B_\parallel$) são levados em consideração na dispersão e dissipação da onda. Todavia, é feita a hipótese de que os raios de Larmor eletrônico e iônico são ambos muito menores que o comprimento radial característico das quantidades de equilíbrio e dos campos de RF. Apesar do código toroidal, na aproximação utilizada, acoplar apenas os modos principais e seus vizinhos mais imediatos, m e $m \pm 1$, um número arbitrário de modos (não acoplados) pode ser usado para revelar efeitos cinéticos na excitação dos campos de RF. Com a aproximação de pequena toroidicidade, o tensor dielétrico, $\vec{\epsilon}$, é reduzido à sua forma local cilíndrica [19] com correções toroidais de primeira ordem (mostrado no Apêndice B).

O sistema dado pela equação (3.1) pode ser descrito por um operador matricial usando um sistema de coordenadas local com coordenadas paralela e perpendicular às linhas de campo magnético. Os vetores unitários correspondentes são:

$$\hat{e}_{\parallel} = \frac{\hat{\zeta} + \hat{\theta}\delta}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \quad \text{e} \quad \hat{e}_{\perp} = \hat{e}_{\parallel} \times \hat{e}_r. \quad (3.3)$$

A álgebra é simplificada usando a condição de corrente fechada,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} r R J_r + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} R J_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_{\zeta} = 0, \quad (3.4)$$

onde $J_{\zeta} = (B_{\zeta} J_{\parallel} - B_{\theta} J_{\perp})/B$ e $J_{\theta} = (B_{\zeta} J_{\perp} + B_{\theta} J_{\parallel})/B$ são componentes da densidade de correntes excitadas pela onda. Da lei de Ampère, com a corrente de deslocamento desprezada, a corrente do plasma é dada por:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{i\mu_0\omega} \frac{\omega^2}{c^2} \vec{\chi} \cdot \mathbf{E}. \quad (3.5)$$

Usando a equação (3.4), $E_{\parallel}$ pode ser expressa em termos de E_r e $E_{\perp}$, e a componente $E_{\parallel}$ na equação (3.1) pode ser eliminada, reduzindo a ordem do sistema de equações. Este problema é resolvido como um problema de valor de contorno para as componentes E_j do campo de RF no plasma. Tal tarefa é levada a cabo construindo-se uma equação matricial para representar as equações diferenciais de segunda ordem acopladas na forma:

$$\frac{A_{ij}(r)}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} E_j + B_{ij}(r) \frac{\partial}{\partial r} E_j + C_{ij}(r) E_j = S_i(r), \quad (3.6)$$

onde A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} são os coeficientes da matriz que operam sobre as componentes do campo elétrico e S_i é um vetor de fonte onde são incluídas as condições de contorno. O campo elétrico está definido da forma:

$$\mathbf{E} = \sum_m \mathbf{E}(r) e^{i(m\theta - l\zeta)}.$$

A notação compacta resultante do conjunto de equações matriciais é determinada por:

$$\hat{L}\mathbf{E} = \hat{L}_0\mathbf{E} + \left(2\frac{r}{R_0} \cos \theta \hat{L}_S + 2\frac{r}{R_0} \sin \theta \hat{L}_A \right) \mathbf{E} = 0, \quad (3.7)$$

as quais consistem em uma parte cilíndrica e duas partes toroidais proporcionais a r/R_0 . Os operadores $\hat{L}_0$, $\hat{L}_S$, e $\hat{L}_A$ são explicitados na Ref.[19]. As equações sofrem uma transformação de Fourier e, como resultado, podem ser representadas na forma de uma equação matricial 6×6 com acoplamento harmônico poloidal de primeira ordem,

$$\begin{pmatrix} \hat{L}_{0rr}^{m-1} & \hat{L}_{0r\perp}^{m-1} & \hat{e}(L^-)_{rr}^m & \hat{e}(L^-)_{r\perp}^m & 0 & 0 \\ \hat{L}_{0\perp r}^{m-1} & \hat{L}_{0\perp\perp}^{m-1} & \hat{e}(L^-)_{\perp r}^m & \hat{e}(L^-)_{\perp\perp}^m & 0 & 0 \\ \hat{e}(L^+)_{rr}^{m-1} & \hat{e}(L^+)_{r\perp}^{m-1} & \hat{L}_{0rr}^m & \hat{L}_{0r\perp}^m & \hat{e}(L^-)_{rr}^{m+1} & \hat{e}(L^-)_{r\perp}^{m+1} \\ \hat{e}(L^+)_{\perp r}^{m-1} & \hat{e}(L^+)_{\perp\perp}^{m-1} & \hat{L}_{0\perp r}^m & \hat{L}_{0\perp\perp}^m & \hat{e}(L^-)_{\perp r}^{m+1} & \hat{e}(L^-)_{\perp\perp}^{m+1} \\ 0 & 0 & \hat{e}(L^+)_{rr}^m & \hat{e}(L^+)_{r\perp}^m & \hat{L}_{0rr}^{m+1} & \hat{L}_{0r\perp}^{m+1} \\ 0 & 0 & \hat{e}(L^+)_{\perp r}^m & \hat{e}(L^+)_{\perp\perp}^m & \hat{L}_{0\perp r}^{m+1} & \hat{L}_{0\perp\perp}^{m+1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_r^{m-1} \\ E_{\perp}^{m-1} \\ E_r^m \\ E_{\perp}^m \\ E_r^{m+1} \\ E_{\perp}^{m+1} \end{pmatrix} = S_i^m, \quad (3.8)$$

onde $L^+ = \hat{L}_S + \hat{L}_A$; $L^- = \hat{L}_S - \hat{L}_A$. Há um forte efeito de acoplamento dos modos poloidais como podemos observar da equação 3.8. As condições de contorno são especificadas no vetor S_i^m e o problema é resolvido, finalmente, por uma rotina B-Spline-Galerkin Cúbica [19]. Nos cálculos mostrados aqui, são usados 3500 pontos radiais, a disposição dos pontos pode ser configurável, ou seja, pode-se definir um maior número de pontos em certa região do raio. O código gera os perfis das componentes dos campos elétrico e magnético e o perfil de deposição de energia ($\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}^* \cdot \overleftrightarrow{\chi} \cdot \mathbf{E}$). Realizando uma integração radial, a impedância da antena pode ser diretamente calculada.

Supõe-se que os campos de RF são produzidos por uma antena de corrente superficial no limite cilíndrico (com modos poloidal e toroidal de números M e N , respectivamente). As componentes ζ e θ da corrente superficial, situada em uma superfície de raio b , tem a representação

$$J_{\zeta,\theta} = J_{\zeta,\theta}^{(M,N)} \delta(r-b) \exp[i(M\theta + N\zeta - \omega t)], \quad (3.9)$$

onde $J_{\zeta,\theta}^{(M,N)}$ é a amplitude constante do harmônico M, N e ω é a frequência do gerador. A corrente na antena é especificada através de condições de contorno nas componentes do campo magnético de RF nas espiras de raio b . Em torno da superfície da antena há uma região de vácuo envolta por uma parede condutora de raio d . Os campos no vácuo

são calculados analiticamente e normalizam os campos de plasma através de condições de contorno apropriadas no raio a .

No código, as componentes do campo elétrico e os coeficientes da equação diferencial são expandidas em termos de um conjunto de funções *B-spline* cúbicas $[\Psi_k(x)]$ [19],

$$E_r = \sum_{k=1}^{s+2} \gamma_r^k \Psi_k(x), \quad E_\perp = \sum_{k=1}^{s+2} \gamma_\perp^k \Psi_k(x), \quad (3.10)$$

onde s é o número de pontos do spline no intervalo de dois pontos de contorno, α , β e γ^k são a expansão dos coeficientes constantes. É aplicado um operador de projeção $\int_\alpha^\beta dx \Psi_j(x)$ na equação diferencial que é integrada com condições de fronteira apropriadas. No caso de plasma cilíndrico temos, $x = r/a$ e $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. Para um problema de autovalores, o sistema de equações diferenciais acopladas pode finalmente ser reduzido pelo procedimento de *Galerkin* [19] à forma

$$G \cdot \gamma = 0,$$

onde a matriz G tem uma dependência muito complicada sob os parâmetros do plasma e fatores geométricos, e $\gamma = (\gamma_r^k, \gamma_\perp^k)$. Logo, os autovalores são as raízes do $\det[G] = 0$, e as correspondentes autofunções são determinadas por iteração inversa.

3.3 Parâmetros do TCABR

Nas simulações é utilizado os parâmetros característicos do TCABR (Apêndice C) [47, 48]. Corrente ohmica do plasma de $85kA$. Os cálculos são obtidos supondo um perfil de temperatura dado por $T_\alpha = T_{\alpha 0}(1 - r^2/a^2)^2$, com $\alpha = e, i$, $T_{e0} = 500 \text{ eV}$ e $T_{i0} = 200 \text{ eV}$, respectivamente; a temperatura na borda de $T_{ea} = 20 \text{ eV}$ e $T_{ia} = 10 \text{ eV}$, respectivamente. O perfil da densidade de elétrons é suposta sendo da forma $n_e = n_0(1 - r^2/a^2) + n_a$, com $n_0 = 3 \times 10^{19} m^{-3}$ no centro da coluna do plasma e $n_a = 1 \times 10^{18} m^{-3}$ na borda do plasma [47]. É escolhido um valor alto para a densidade de pedestal n_a para evitar múltiplas ressonâncias da onda de Alfvén e ressonância híbrida baixa ($\epsilon_{11} = 0$), na borda do plasma.

A densidade dos íons é escolhida de forma a satisfazer a exigência de neutralidade da carga, $Zn_Z + n_i = n_e$, onde n_Z e n_i designam as densidades das impurezas e os íons de hidrogênio (ou deutério), respectivamente. O perfil da densidade de impurezas pode ser especificado arbitrariamente, porém, nos cálculos mostrados neste trabalho, os perfis da impureza são proporcionais aos dos íons. Finalmente, supõe-se o perfil da densidade de corrente da forma $j = j_0(1 - r^2/a^2)^{2.5}$ e os valores para o fator de segurança na faixa de $0,8 \leq q_0 \leq 1,6$, no eixo magnético, e $3,2 \leq q_a \leq 6,4$, na borda.

Nas simulações mostradas a continuação é considerado o caso do plasma de hidrogênio puro.

3.4 Dissipação da onda de Alfvén

Na figura 3.2 é apresentada a curva da impedância da antena Z_{MN} , plotada como função da frequência do gerador e normalizada à frequência mínima (limiar) do contínuo de Alfvén para cada modo,

$$\omega_{th} = \frac{k_{\parallel} c_A}{\sqrt{1 + (k_{\parallel} c_A)^2 / \omega_{ci}^2}}, \quad (3.11)$$

para diferentes números de modo toroidal, N , do espectro de antena. Nesta expressão $k_{\parallel} = (n + m/q)/R_0$ é o numero de onda paralelo, m e n são os números de onda poloidal e toroidal, respectivamente, $c_A = B_0/\sqrt{\mu_0 m_i n_i}$ é a velocidade de Alfvén. Os números de onda toroidal e poloidal são representados através de letras maiúsculas quando citado o modo principal da antena e por minúsculas quando citados os modos de fato excitados no plasma.

Como esperado, a ressonância da onda GA $m = -1$ divide-se em três ressonâncias globais (com números dos modos equivalentes a $m = 0, -1, -2$). Estes modos globais podem ser vistos mais claramente na figura 3.6 como picos da impedância, devido ao acoplamento dos modos poloidais. É importante notar que a impedância da antena aumenta com os números de onda toroidal N a partir do modo $N = -4$ (como pode-se ser visto na figura 3.2) e que o modo $N = -6$ tem uma eficiência mais alta na deposição

Figura 3.2: Impedância da antena para um plasma de hidrogênio em função da: (a) frequência, (b) frequência normalizada para a frequência mínima do contínuo de cada modo (ω_{th}). As curvas de impedância (espaçada, sólida e pontilhada) correspondem aos números de onda toroidal $N = -2, -4, -6$, respectivamente, do espectro da antena para número de onda poloidal fixo $M = -1$. Os parâmetros do plasma são $n_0 = 3 \times 10^{19} m^{-3}$, $T_{e0} = 500 eV$, $B_t = 1,1 T$, $q_0 = 1,1$ e $q_a = 4,4$.

de energia no plasma como pode ser visto na figura 3.3. A impedância da antena para o modo toroidal $N = -2$ é muito diferente ao apresentado em [46], enquanto que para os modos $N = -4, -6$ a impedância tem um comportamento bem parecido,. A forte diferença no modo toroidal $N = -2$ é devido à utilização dos novos parâmetros do TCABR [47, 48]. A eficiência mais alta na deposição de energia no plasma continua sendo com o modo $N = -6$ com maior dissipação da energia perto do centro da coluna do plasma. Enquanto que para o modo $N = -4$ a maior dissipação é perto da borda e com o modo $N = -2$ a maior dissipação é na borda (como pode-se se ver na figura 3.3). Há uma forte diferença entre os novos resultados obtidos aqui, com os resultados obtidos em [46]. Esta diferença é refente à ordem de grandeza da impedância, onde, a impedância usando os novos parâmetros do TCABR é muito maior aos obtidos em [46].

Figura 3.3: Potência depositada em função do raio da coluna do plasma normalizada para ressonâncias GA com $N = -2, -4, -6$ e $m = -1$, que são representadas na figura 3.2a (com as frequências 5,02 MHz, 5,10 MHz e 6,19 MHz, respectivamente).

O efeito da absorção ressonante dos modos vizinhos, acoplados no perfil de potência absorvida, pode ser avaliado prontamente considerando-se a distribuição da potência dissipada nos picos das ressonâncias GA correspondentes a $m = 0, -1, -2$, mostrados na

figura 3.2. Este efeito é mostrado na figura 3.4 para modo $N = -4$.[†] Claramente, o amortecimento do contínuo na ressonância local para $m = 0$ supera o amortecimento de Landau da ressonância GA principal $m = -1$, causando um perfil largo de deposição de energia perto da borda do plasma. A deposição de potência central para $m = 0$ é um efeito puramente toroidal que não pode ser previsto através de cálculos envolvendo a geometria cilíndrica.[†] Para um valor alto do número de onda toroidal, $N = -6$, o modo vizinho mais distante move-se em direção à ressonância principal e pode acontecer uma sobreposição das ressonâncias globais e locais, o que resultaria num perfil de deposição de potência mais largo do modo de ressonância principal [46].

Figura 3.4: Distribuição radial da potência dissipada em função da raio da coluna do plasma normalizado para ressonâncias GA com $N = -4$ e $m = 0, -1, -2$, que são apresentadas na figura 3.2 (com as frequências 4,43 MHz, 5,10 MHz e 6,15 MHz, respectivamente).

A competição entre o contínuo dos modos vizinhos e o amortecimento direto da onda

[†]O efeito da absorção ressonante dos modos vizinhos mostrado na figura 3.4 para o modo toroidal $N = -4$, é similar ao obtido em [46], só tendo uma ligeira variação na amplitude dos picos, por causa dos novos parâmetros usados do TCABR.

[†]Na figura 2.10 (código cilíndrico) podemos ver que não há acoplamento de modos vizinhos, onde os picos da potência dissipada são bem localizados, enquanto que na figura 3.4 há varios picos da dissipação, por causa dos modos acoplados.

global pode ser enfatizada considerando uma temperatura dos elétrons muito baixa. A distribuição da dissipação de potência, para temperatura dos elétrons no centro do plasma de $T_{0e} = 90\text{eV}$ e $T_{0i} = 50\text{eV}$, é mostrada na figura 3.5. Todos os outros parâmetros são iguais aos da figura 3.4. Estas duas figuras tem um perfil muito semelhante ao obtido em [46] onde a diferença substancial é na amplitude dos picos da potência dissipada.

Figura 3.5: Distribuição radial da potência dissipada em função da raio da coluna do plasma normalizado para ressonâncias GA mostradas na figura 3.4, com $T_{0e} = 90\text{ eV}$ e $T_{0i} = 50\text{ eV}$.

Para temperaturas mais baixas, a estrutura de deposição de energia de todos os modos é fortemente afetada, diminuindo-se os efeitos cinéticos na ressonância principal e aumentando o valor do pico de amortecimento de ressonância no contínuo do modo vizinho, em comparação com o caso $T_{0e} = 500\text{eV}$. Para $m \neq 0$, a onda Cinética de Alfvén, que se propaga a partir de uma superfície ressonante, tem uma largura de dissipação $l_r \approx (ac^2v_{Te}^4)^{1/3}/(\omega_{pe}^2c_A^4)^{1/3} \approx 1\text{cm}$ [66], que é menor que a distância entre as ressonâncias de Alfvén locais e o centro do plasma [46]. Então a estrutura radial dos modos cinéticos não aparece. Como previamente mencionado, os efeitos toroidais não modificam substancialmente a posição dos picos de ressonância na curva de impedância da antena prevista pelo modelo cilíndrico. Isto pode ser visto variando-se o valor do fator de segurança

q_0 , mantendo-se os outros parâmetros fixos. Pode-se ver a impedância da antena como função da frequência do gerador para diferentes valores de q_0 na figura 3.6. Neste caso a frequência não é normalizada porque a frequência do limiar do contínuo varia com o valor de q_0 . Devido ao acoplamento dos modos poloidais, podemos observar um pico da ressonância GA do modo $m = 0$. A posição desta ressonância não depende do parâmetro q , como indicado na figura 3.6. Para cada modo poloidal $m \neq 0$, a frequência da ressonância GA varia de acordo com a dependência da frequência do limiar do contínuo de onda paralelo, $k_{\parallel} = (n + m/q(r))/R_0$. Como pode-se observar na figura 3.6, o valor da impedância diminui com o aumento de q_0 , semelhantemente como foi obtido em [46], mas com amplitudes dos picos da impedância e a sua posição diferentes. Da mesma forma, a potência total depositada diminui com o aumento do fator de segurança q_0 , e a dissipação de energia é maior na região de ressonância local de Alfvén, como pode-se ver na figura 3.7.

Figura 3.6: Comportamento da impedância da antena versus frequência do gerador, para $N = -4$ com fator de segurança $q_0 = 0, 8; 1, 1; 1, 6$ e $q_a = 3, 2; 4, 4; 6, 4$, respectivamente; n_0 , $T_e 0$, e B_0 são os mesmos da figura 3.2.

Nota-se que as curvas de impedância nas figuras 3.2 e 3.6 são calculadas usando-se três harmônicos, mas estas curvas não dependem do número de modos vizinhos (este efeito foi verificado com até ± 10 modos vizinhos) no intervalo de frequências que começa da

Figura 3.7: Distribuição radial da potência da onda dissipada para $q_0 = 0,8$, $q_0 = 1,1$ e $q_0 = 1,6$, para ressonâncias GA para $N = -4$, $m = -1$, que são apresentadas na figura 3.6 (com as frequências 5,25MHz, 5,10MHz e 4,95MHz, respectivamente)

frequência do pico de ressonância GA do modo $m = 0$ até o modo $m = -3$. Isto pode ser visto na figura 3.8. De igual forma a dissipação de energia não é afetada para modos altos.

Figura 3.8: Impedância da antena para um plasma de hidrogênio em função da frequência. Para o número de onda toroidal $N = -4$, do espectro da antena para número de onda poloidal fixo $M = -1$, com modos vizinhos $m = -2, -1, 0$ (curva sólida) e $m = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ (curva pontilhada). Os parâmetros do plasma são $n_0 = 3 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $T_{e0} = 500 \text{ eV}$, $B_t = 1, 1 \text{ T}$, $q_0 = 1, 1$ e $q_a = 4, 4$.

Na figura 3.9 a posição $r_A/a \approx 0,75$ da ressonância local de Alfvén do modo $m = 0$, definida por um máximo da parte real da componente do campo elétrico E_r , tem coincidência com o mesmo valor calculado da equação 3.11. As componentes do campo magnético podem ser obtidos usando-se a Lei de Faraday (2.2).

Figura 3.9: Distribuição radial das componentes do campo E em função de r para $q(0) = 1,1$. Onde 1 : ReE_r , 2 : ImE_r , 3 : $ReE_{\parallel}$, 4 : $ImE_{\parallel}$, 5 : $ReE_{\perp}$ e 6 : $ImE_{\perp}$.

3.5 Problemas do Código Cinético em $k_{\parallel} = 0$

Tentou-se modificar o código para sanar a divergência, mas percebemos que grande parte das sub-rotinas serão afetadas pela divergência numérica e sua modificação implicaria em modificar toda a estrutura do código. Assim, fomos obrigados a usar outro código, que chamamos de “código cilíndrico” multi-fluido o qual não apresenta divergência numérica referente ao limite $k_{\parallel} \rightarrow 0$.

Autores anteriores deste código, D.W. Ross e co-autores, já alertaram sobre possíveis problemas dos resultados obtidos na condição $k_{\parallel} = 0$ (figura 3.10).

Para os mesmos valores dos parâmetros usados na seção anterior, e usando 12000 pontos radiais mostramos a distribuição dos campos ao longo do raio da coluna do plasma

(usamos maior número de pontos para ter melhor resolução do comportamento dos campos em intervalos pequenos do raio). Procedemos desta forma para mostrarmos as divergências numéricas na condição $k_{\parallel} = 0$. Mostramos na figura 3.10 as curvas de $k_{\parallel}$ e $|k_{\parallel}|$, na figura 3.11 campo elétrico paralelo $E_{\parallel}$, nas figuras 3.12 as componentes do campo magnético e na figura 3.15 a potência dissipada.

Figura 3.10: Número de onda paralelo $k_{\parallel}$ e $|k_{\parallel}|$ em função do raio normalizado, para uma frequência de $60kHz$ e $q_0 = 0,8$.

Vê-se claramente das figuras 3.11, 3.15 e 3.12, que há uma divergência numérica nos pontos perto de $k_{\parallel} = 0$. Na figura 3.15 a divergência numérica na distribuição da potência dissipada na região $k_{\parallel} = 0$ é acarretada pelas divergências dos campos E e B (como mostrado nas figuras 3.11, 3.12) isto porque S_r é função dos campos E , B ($S_r = \frac{c}{4\pi}(E_{\perp}B_{\parallel} - E_{\parallel}B_{\perp})$). Na figura 3.15 podemos ver que, no caso do código cinético, a distribuição de potência dissipada tem um comportamento fora da realidade nos pontos ao redor de $k_{\parallel} = 0$, sendo o problema também acarretado pelas divergências numéricas dos campos nessa região.

A equação de onda (3.1) que descreve o comportamento dos campos utilizando os elementos do tensor dielétrico mostrados no Apêndice E [19], é de sexta ordem no operador

Figura 3.11: Distribuição do campo elétrico paralelo $E_{\parallel}$ em função do raio normalizado, para uma frequência de 60kHz e $q_0 = 0,8$.

Figura 3.12: Distribuição do campo magnético (a) radial B_r , (b) paralelo $B_{\parallel}$, e (c) perpendicular $B_{\perp}$, em função do raio normalizado, para uma frequência de 60kHz e $q_0 = 0,8$.

$\partial/\partial r$ por causa do efeito de raio de Larmor. No código cinético, a equação (3.1) é usada com a condição $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, sendo assim reduzida até a quarta ordem no operador $\partial/\partial r$. Neste caso a dependência do campo $E_{\parallel}$ em função de $k_{\parallel}$ é da forma

$$\imath k_{\parallel} \varepsilon_{33} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{ci}^2} \right) E_{\parallel} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{c^2}{c_A^2} \left(E_r + \imath \frac{\omega}{\omega_{ci}} E_{\perp} \right) + \imath k_{\perp} \frac{c^2}{c_A^2} \left(E_{\perp} - \imath \frac{\omega}{\omega_{ci}} E_r \right) = 0. \quad (3.12)$$

O código inicialmente calcula os campos $E_{r,\perp}$ (pelo método B-spline cúbico), as componentes do tensor dielétrico e os demais parâmetros. Depois calcula $E_{\parallel}$ de (3.12), sendo que $E_{\parallel} \sim k_{\parallel}^{-1}$. Portanto, para valores perto de $k_{\parallel} = 0$, temos uma divergência numérica. Para contornarmos o problema recorreremos às seguintes soluções possíveis:

- **$k_{\parallel}$ pequeno**

Para evitarmos as divergências $1/(k_{\parallel} = 0)$ impomos a condição que $k_{\parallel}$ tem um valor finito e muito pequeno, da ordem $k_{\parallel,s} \sim 10^{-9}$. Porém, após fazermos as mudanças no código, observamos que divergências numéricas na região perto de $k_{\parallel} = 0$ não diminuiram.

- **$k_{\parallel}$ com distribuição suave**

Ao fazermos um truncamento de $k_{\parallel}$ criamos pontos não contínuos (ver figura 3.14), onde as derivadas d/dr de $k_{\parallel}$ (da equação de Maxwell (3.1)) criam divergências numéricas ainda maiores nestes pontos não contínuos. Então propomos uma variação de $k_{\parallel}$ suave, da forma $|k_{\parallel}| = \sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\parallel,s}^2}$ (figura 3.14). Com a distribuição suave de $k_{\parallel}$ os problemas de divergência numérica não foram eliminados. Podemos ver isto na figura 3.13

Como mencionado anteriormente, pela equação (3.10) o código calcula os campos E_r e $E_{\perp}$ utilizando o método B-spline cúbico e procedimento de Galerkin, para depois calcular a componente paralela do campo elétrico $E_{\parallel}$ a partir da equação (3.12). Como o campo magnético é calculado a partir da equação de Faraday (2.2), então o campo magnético é função de $E_{\parallel}$, assim como também a potência dissipada é função de $E_{\parallel}$ [19]. Por conseguinte, oscilações numéricas no campo $E_{\parallel}$ acarretam oscilações numéricas no campo magnético, como foi mostrado na figura 3.12. Para evitar os problemas da divergência

Figura 3.13: Força poloidal em função do raio da coluna do plasma normalizado, para uma frequência de $60kHz$ e $q_0 = 0,8$.

Figura 3.14: $|k_{\parallel}|$ truncado e suave em função do raio normalizado, para uma frequência de $60kHz$ e $q_0 = 0,8$.

de maneira prática é necessário colocar $|k_{\parallel}|$ acima do valor 0. Este efeito pode ser visto na figura 3.15. Nesta figura vemos que, para 5000 pontos ao longo do raio da coluna do plasma, os efeitos para valores de $|k_{\parallel}|$ próximos de $3,0 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ acarreta uma divergência numérica, mas a partir de valores $|k_{\parallel}| > 3,0 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, as divergências numéricas são evitadas.

Figura 3.15: Potência depositada em função do raio da coluna do plasma normalizado, para valores mínimos do $|k_{\parallel}|$ em $3,0 \times 10^{-8} \text{ cm}^{-1}$ e $3,0 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, utilizando 5000 pontos ao longo do raio. Para uma frequência de 60 kHz e $q_0 = 0,8$.

3.6 Discussão dos Resultados Numéricos

Da utilização dos novos parâmetros do TCABR [47, 48], podemos ver, dos resultados numéricos da dissipação das ondas de Alfvén mostradas na seção 3.4, que não há variações significativas na dissipação de energia e curvas da impedância da antena, comparadas aos resultados obtidos anteriormente por Gesil [46]. Porém, para o modo toroidal $N = -2$ (figura 3.2) observa-se uma forte diferença na curva da impedância, comparada com [46]. Isto, por causa da utilização de novos parâmetros do TCABR neste trabalho.

Em resumo, a aproximação $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, feita no código, acarreta divergências numéricas perto de $k_{\parallel} = 0$. Para contornar o problema é necessário fazer várias estimativas do corte de $k_{\parallel}$ de forma a evitarmos as divergências e obtermos resultados satisfatórios. Determinando desta forma um valor mínimo de aproximadamente $3,0 \times 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, que possibilita evitar as divergências.

Capítulo 4

Efeitos de Rotação em Plasmas Colisionais

Experiências iniciais [67] em tokamaks já tinham mostrado a necessidade óbvia do controle da estabilidade do plasma, de aquecimento auxiliar e do controle de impurezas a fim de se atingir condições relevantes de reator para tornar viável a fusão. O EML e o divertor ergódico (ED) [29, 68] foram propostos como esquemas eficazes para a exaustão do calor e para o confinamento do plasma. Alguns resultados promissores [29] foram obtidos já nas experiências no Tore Supra com corrente estacionária na bobina do ED e, a rotação de campos magnéticos a baixas frequências, foi usada no tokamak Hybtok-II [30]. Um EML foi instalado também no Tokamak Chauffage Alfvén Brésilien (TCABR) [31] com o objetivo principal de agir no plasma na superfície racional magnética, $q = 3$. Recentemente, no divertor ergódico dinâmico (DED) instalado no tokamak TEXTOR, foi caracterizada uma penetração relativamente profunda dos campos oscilatórios do modo investigado $M/N = \pm 3/\pm 1$ [69]. Um efeito de rotação assimétrica foi observado também experimentalmente [30, 69].

Análises teóricas de absorção de campos de rotação de LF e efeitos de forças ponderomotoras produzidos por correntes da bobina do EML e do DED na borda do plasma foram apresentadas em [31–33]. Mostrou-se que a rotação dos campos de LF podem produzir aquecimento adicional e fluxo de plasma na ressonância local das ondas de Alfvén

$\omega = |k_{\parallel}|c_A$, onde ω é a frequência, $k_{\parallel} = (m/r)B_{\theta}/B_0 + (N/R_0)B_z/B_0$ é a componente paralela do vetor número de onda e $c_A = B_t/(4\pi n_i m_i)^{1/2}$ é a velocidade de Alfvén, na faixa de frequência de 1–10 kHz no TCABR e TEXTOR [45]. A posição desta superfície racional é escolhida perto da borda do plasma.

Neste capítulo analisaremos efeitos de penetração dos campos de RF e absorção de energia gerada pelos campos de LF, que são induzidos pelo EML, perto da superfície racional $q = M/N$, dentro de uma aproximação linear da amplitude da onda. As simulações são feitas com ênfase na faixa de frequências de 0,5–20,0 kHz . A bobina do EML é representada como uma corrente laminar em $r = b$, expandida em Série de Fourier com números de onda poloidal M e toroidal N da onda. Nos cálculos usamos um modelo cilíndrico para o EML, como descrito na figura 2.9, que pode ser representado na forma da equação (2.50). Em nossos cálculos para $N \neq 0$, a corrente da bobina do EML pode ser representada como uma corrente de superfície para cada par M/N dos harmônicos helicoidais,

$$j_{\theta,z} = \sum_{MN} J_{\theta,z,M,N} \delta(r - b) e^{i(M\theta + Nz/R_0 - \omega t)},$$

em comparação ao modelo que já havia sido usado nos cálculos dos campos de LF induzidos pelo DED do TEXTOR [32, 33, 69].

Ate o momento não houve experimentos para a medição de rotação do plasma no TCABR. Neste capítulo analisamos a absorção do campo de LF em plasmas de tokamak com rotação toroidal usando cálculos analíticos e numéricos. Para a análise numérica usamos o código cilíndrico multi-fluido [41] (no Apêndice D apresentamos um fluxograma do código), adaptado para incluir efeito de rotação do plasma. O modelo padrão do plasma inclui equações de Maxwell e o tensor dielétrico com rotação toroidal na aproximação local [70]. O código calcula a distribuição dos campos eletromagnéticos sobre o raio, os perfis de absorção e a impedância da antena helicoidal com números de vetor de onda toroidal N e poloidal M , para uma dada frequência ω do gerador, para um plasma magnetizado de duas espécies de íons com superfícies magnéticas concêntricas circulares. O modelo inclui colisões elétron-íon e a inércia de elétrons na componente paralela do

tensor dielétrico [70] que são válidas para a análise da absorção do campo de LF em plasmas frios com rotação e/ou colisionais. No código, os campos eletromagnéticos de LF podem ser representados por uma soma dos harmônicos poloidal e toroidal de Fourier, da forma $\exp[i(M\theta + Nz/R_0 - \omega t)]$. A densidade da energia absorvida pelos elétrons e pelos íons é calculada usando a equação $W^{(e,i)} = (\mathbf{j}^{(e,i)} \cdot \mathbf{E})$ e, para o cálculo de campos LF, é suposto $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ no modelo da antena helicoidal.

Na seção 4.1 mostramos o modelo de plasma colisional e seu limite MHD que é valido para calcular o comportamento dos campos de LF na borda do plasma no TCABR. Na seção 4.2 mostramos a construção dos elementos do tensor dielétrico numa aproximação local e o perfil do campo elétrico na vizinhança da superfície ressonante perto da borda do plasma. Na seção 4.3 mostramos os resultados numéricos dos perfis da impedância, dos campos e dissipação de energia.

4.1 Campos de LF

As condições para a validade do código cilíndrico são satisfeitas na região da periferia do plasma (plasma frio) em uma largura que é aproximadamente um terço do raio menor, numa faixa de frequências que é determinado pela desigualdade $\omega > k_{\parallel} v_{Te}$. Na superfície racional, $k_{\parallel} \approx 0$, o modelo escolhido transfere-se num plasma MHD colisional. Nestes casos, o código cilíndrico multi-fluido é valido para as condições

$$k_{\parallel} v_{Ti} \ll \nu_{ii}, \omega*, \quad k_{\parallel} v_{Te} < \omega \approx k_{\parallel} c_A \ll \nu_{ei} \quad (4.1)$$

onde $v_{Ti,e}$ é a velocidade térmica dos elétrons e íons, ν_{ii} e ν_{ei} são as frequências de colisões íon-íon e elétron-íon respectivamente, e $\omega*$ é a frequência de deriva dos elétrons, $\omega* = \rho_e v_{Te} (m/r) \partial(\ln n_e) / \partial r$. Na figura 4.1 mostramos as dependências dos parâmetros característicos do plasma em função do raio menor do TCABR. Nesta figura podemos observar na região da borda do plasma, que a frequência de colisões dos íons é da ordem da frequência do campo eletromagnético e possivelmente tem um papel importante na

avaliação da absorção dos campos de LF.

Figura 4.1: *Frequência de colisões de íons ν_{ii} , deriva de elétrons ω_e^* , local de Alfvén $k_{\parallel} c_A$ e acústica de íons $k_{\parallel} c_s$ em função do raio, correspondendo a um ângulo poloidal de 90° , para parâmetros típicos do TCABR.*

4.2 Campos LF excitados pelo EML

Levar em conta as colisões de partículas, frequência de troca de cargas ν_{cx} , velocidade de rotação do plasma $\mathbf{U}$ e densidade de corrente axial $\mathbf{j} = -en_e \mathbf{V}_e$, num gás completamente ionizado, torna muito difícil a obtenção dos elementos do tensor dielétrico. Na região colisional apresentada na equação 4.1, que é válida para $\nu_{ef} m_e / m_i < \omega < \omega_{ci}$ é mostrada na figura 4.1, foram usadas as componentes do tensor dielétrico descritos em [70] como modelo, que são da forma

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 (\omega - k_z U_{z\alpha})^2}{\omega^2 [(\omega - k_z U_{z\alpha})^2 - \omega_{c\alpha}^2]}, \\
 \epsilon_{12} &= -\epsilon_{21} = -i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 (\omega - k_z U_{z\alpha}) \omega_{c\alpha}}{\omega^2 [(\omega - k_z U_{z\alpha})^2 - \omega_{c\alpha}^2]}, \\
 \epsilon_{33} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{(\omega - k_z U_{z\alpha})^2}, \\
 \epsilon_{13} &= \epsilon_{31} = \epsilon_{23} = \epsilon_{32} = 0,
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

para perturbações do tipo $\sim \exp[i(M\theta + Nz/R_0 - \omega t)]$.

Usando o modelo de dois fluidos junto com a equação de continuidade

$$-i\omega\tilde{n}_\alpha + \nu_{cx}\tilde{n}_\alpha + n_{0\alpha}\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}}_\alpha + i\tilde{n}_\alpha\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (4.3)$$

$$-i(\omega - k_\parallel U_{0\alpha} - i\nu_\alpha)\tilde{\mathbf{U}} = \frac{e}{m_\alpha}\tilde{\mathbf{E}} + \frac{e}{m_\alpha}(\tilde{\mathbf{U}} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{U}_0 \times \tilde{\mathbf{B}}_\perp), \quad (4.4)$$

onde ν_{cx} é a frequência de troca de cargas, $\nu_{i\parallel} = 0$, $\nu_e = \nu_{ef}$, $\bar{\omega} = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + i\nu_\alpha$, $\omega' = \omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$ e o campo magnético perpendicular está definido como $\tilde{\mathbf{B}}_\perp = \tilde{\mathbf{B}}_b + \tilde{\mathbf{B}}_r$.

Obtemos as variações das velocidade:

$$\tilde{U}_r = \frac{e}{m_\alpha(\omega_{c\alpha}^2 - \bar{\omega}^2)} \left[-i\bar{\omega} \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}}{\omega} \right) E_r + \omega_{c\alpha} \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}}{\omega} \right) E_b \right], \quad (4.5)$$

$$\tilde{U}_b = \frac{e}{m_\alpha(\omega_{c\alpha}^2 - \bar{\omega}^2)} \left[-i\bar{\omega} \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}}{\omega} \right) E_b - \omega_{c\alpha} \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}}{\omega} \right) E_r \right]. \quad (4.6)$$

Usando a expressão da corrente $j_i = -\frac{\omega}{4\pi}(\delta_{ij} - \epsilon_{ij})E_j$, e $\mathbf{j} = e(n_0\tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0\tilde{n})$, finalmente um novo tensor dielétrico que inclui a frequência de troca de cargas, ν_{cx} , a velocidade de rotação do plasma, $\mathbf{U}_0$ e a densidade de corrente axial na forma:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = \\ &1 + \sum_{\alpha=i} \frac{\omega_{p\alpha}^2 [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + i\nu_{cx} + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha)] [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}]}{\omega^2 [\omega_{c\alpha}^2 - (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha))^2]} + \\ &\frac{\omega_{pe}^2 [\omega - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{V}_e)] [\omega - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{V}_e) + i\nu_{ef}]}{\omega_{ce}^2 \omega^2}, \\ \epsilon_{12} &= -\epsilon_{21} = \\ &i \sum_{\alpha=i} \frac{\omega_{p\alpha}^2 (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + i\nu_{cx}) \omega_{c\alpha}}{\omega^2 [\omega_{c\alpha}^2 - (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha))^2]} + i \frac{\omega_{pe}^2 [\omega - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{V}_e)]}{\omega^2 \omega_{ce}} \\ &- i \frac{\chi k_\parallel c^2}{\omega^2}, \\ \epsilon_{33} &= 1 - \sum_{\alpha=i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{[\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + i\nu_{cx}] [\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha)]} - \\ &\frac{\omega_{pe}^2}{[\omega - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{V}_e)] [\omega - \mathbf{k} \cdot (\mathbf{U} + \mathbf{V}_e) + i\nu_{ef}(m_e/m_\alpha)]}, \\ \epsilon_{23} &= \epsilon_{32} = \epsilon_{13} = \epsilon_{31} = 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

onde χ é o termo de cisalhamento do campo magnético $\chi = r \frac{B_\theta^2}{B^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{B_\theta}{r B_z} \right)$, $\nu_{ef} = 2.91 \times 10^{-6} n_e \ln \Lambda / T_e^{3/2}$ e $\nu_{cx} = n_n < \sigma v >$ é a frequência de troca de cargas discutida em [32]. Mesmo que ν_{cx} seja pequena nos tokamaks com densidade e temperatura alta a consideração de ν_{cx} é muito importante para eliminar as divergências na componente ϵ_{33} do tensor dielétrico, quando $\omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$. Notemos que as componentes ϵ_{12} e ϵ_{21} não podem ser negligenciadas no estudo teórico porque o efeito da rotação pode ser forte para $\omega < |\mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}_e|$.

Nós apresentamos algumas estimativas teóricas de excitação de campos LF usando um modelo de plasma cilíndrico na seção (2.3.1). Em estudos iniciais de aquecimento por ondas de Alfvén em tokamaks [19], foi mostrado que ondas do contínuo de Alfvén têm a dependência da frequência $|\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}| = |k_\parallel| c_A$. Neste caso, a ressonância local de Alfvén aparece perto da superfície magnética racional $q = M/N$, onde a onda lenta quase-eletrostática de Alfvén (QEAW) [41] com relação de dispersão $k_r^2 = \epsilon_{33}[\omega^2/c^2 - k_\parallel^2/\epsilon_{11}]$ e absorção por colisões, é excitada pelo efeito de conversão de modos, na superfície magnética ressonante $r = r_A$ sem rotação, definida pela condição $\omega = |k_\parallel| c_A$. Perto da superfície magnética racional ($q_t = M/N$), onde $k_\parallel = 0$, dois pontos de ressonâncias locais de Alfvén podem aparecer ($r_{A1,2}$). Expandindo os parâmetros do plasma das equações de Maxwell em séries de Taylor no ponto $r = r_A$, como foi analisada na seção (2.3.1), obtemos a equação (2.17). A solução em $r_{A1,2}$ pode ser apresentada via função de Airy (seção 2.22). O comprimento de dissipação colisional $\Delta r_{dis} \approx 0,6 \text{ cm}$ é estimado para o TCABR usando a condição $Im[\tau_{dis}] = 1$. Nesta escala, a solução assintótica tem a forma apresentada na equação (2.25). Esta mesma solução, como em (2.25), pode ser usada no segundo ponto de conversão de modos r_{A2} de ressonância $\omega = |k_\parallel| c_A$. Neste caso, expandindo a equação de Soloviev [71] em séries de Taylor ao redor da superfície racional r_s , onde $k_\parallel = 0$, a solução MHD pode ser encontrada na forma [52],

$$\begin{aligned} E_\theta &\propto 1 + \frac{r_s - a}{r_s} \ln \left| \frac{r_{A1} - r}{r_{A2} - r} \right| ; & \text{para } r > r_{A2} ; \\ E_\theta &\propto 1 + \frac{r_s - a}{r_s} \ln \left| \frac{r_{A1} - r}{r_{A2} - r} \right| + i\pi ; & \text{para } r_{A1} < r < r_{A2} . \end{aligned} \quad (4.8)$$

Desta equação podemos concluir que o campo LF tem máximos em dois pontos de ressonância local de Alfvén. Se o comprimento de dissipação Δr_{dis} é maior que a distância entre estes pontos de ressonância, QEAW pode mudar o perfil dos dois picos apresentados na equação (4.8) para um modo global QEAW [52].

4.3 Cálculos Numéricos de Excitação e Absorção de Campos Eletromagnéticos LF em Plasma Colisional com Rotação

Para uma compreensão quantitativa dos fenômenos relacionados à dissipação de energia e geração de corrente por ondas de Alfvén em plasmas com rotação no tokamak TCABR, as seguintes condições são usadas: primeiro o tokamak é aproximado a um cilindro (r, θ, z) com uma corrente axial, e são usadas as equações de Maxwell linearizadas com parâmetros constantes localmente (seção 4.1) para descrever os campos e absorção numa banda de frequências de $0,2\text{--}15,0\text{ kHz}$ para diferentes velocidades toroidais na banda de $(-15 \times 10^5, +15 \times 10^5)\text{ ms}^{-1}$ com a condição de *força livre* ($\mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0$) discutido na seção (5.2).

Mostramos resultados obtidos com o código cilíndrico para plasma frio ($\frac{\omega}{k_{\parallel}} \gg v_{Te}$) com características e parâmetros do TCABR (Apêndice C) e modos toroidal/poloidal $N/M = \pm 1/\mp 3$. Supomos superfícies magnéticas circulares, com perfil de temperatura parabólico $T_{e,i} = T_{0e,i}[1 - (r/a)^2]^{1,85} + T_{ae,i}$ com pedestal $T_{ae,i} = 15\text{ eV}$, onde a temperatura central de elétrons e íons são $T_{0e} = 500\text{ eV}$ e $T_{0i} = 150\text{ eV}$, respectivamente. O perfil da velocidade é definido como $U_i = U_0[1 - (r/a)^2]$ e $U_e = (m_i/m_e)U_i$, com velocidade no centro do plasma $U_0 = 3 \times 10^2\text{ km s}^{-1}$.[†] A densidade de elétrons é dada por $n_e = n_0[(1 - (r/a)^2)]^{0,9} + n_a$, com $n_0 = 3 \times 10^{19}\text{ m}^{-3}$ e $n_a = 1 \times 10^{18}\text{ m}^{-3}$. A densidade de íons n_i é adotada para satisfazer a condição de neutralidade $n_i = n_e$. O perfil de corrente é dado por $j = j_0[1 - (r/a)^2]^{2,5}$, e os valores do fator de segurança são $q_{r=0} = 1,0$, $q_{r=16} = 3,0$ e $q_{r=a} = 3,5$. Estes parâmetros

[†]Experiências resentes no TEXTOR [69] mostraram medições de rotação da coluna do plasma, geradas pela injeção de partículas neutras, na ordem de $30 - 300\text{ km/s}$. Aqui supomos uma velocidade de $U_0 = 3 \times 10^2\text{ km s}^{-1}$ no centro do plasma do TCABR por serem estes dois tokamaks com características semelhantes.

padrões: densidade, temperatura, velocidade e fator de segurança, definidos acima serão usados nos cálculos numéricos. No caso de variações destes parâmetros informaremos oportunamente. Geralmente, para números grandes dos modos poloidal/toroidal (exceto $M/N = 3/1$) temos baixa dissipação [62]. Todas as figuras mostradas a seguir estão divididas em duas colunas, relacionadas, respectivamente, aos resultados para modos poloidal/toroidal $M/N = +3/-1$ e modos $M/N = -3/+1$.

4.3.1 Efeitos da rotação do plasma na dissipação da energia e excitação dos campos de LF

Nesta seção mostramos resultados numéricos dos efeitos da rotação do plasma, com velocidades no intervalo de $(0-15) \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$ e frequências na faixa de $(0, 2-250, 0) \text{ kHz}$; na dissipação de energia, impedância e perfil dos campos para os modos poloidal e toroidal $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente. Na figura 4.2 mostramos curvas da impedância para alguns valores da velocidade de rotação (no intervalo definido acima) em função da frequência, sendo as figuras (a, c) para frequências na faixa de $(0, 2-5, 0) \text{ kHz}$, e as figuras (b, d) para frequências na faixa de $(5, 0-250, 0) \text{ kHz}$, para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente. Na figura 4.3, sendo as figuras (a, c) e (b, d) curvas da potência dissipada e da parte real da componente radial do campo elétrico ($Re[E_r]$), respectivamente, em função do raio da coluna do plasma normalizada, para alguns valores da velocidade de rotação no intervalo de $(0-3, 0) \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$.

Notemos que o valor da velocidade de rotação do plasma na região da superfície racional $q = 3$ é menor do que U_0 (velocidade no centro da coluna do plasma) por causa do perfil parabólico da velocidade na forma $U = U_0[1 - (r/a)^2]$.

Figura 4.2: Impedância em função da frequência, (a,c) para frequências na faixa de $(0, 2-5, 0) \text{ kHz}$ e (b,d) para frequências na faixa de $(5, 0-250, 0) \text{ kHz}$ para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente. Para valores da velocidade U_0 no intervalo $(0-15) \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$.

Comparando as figuras 4.2a,b e 4.2c,d podemos ver que a impedância em função da frequência tem uma forte dependência da velocidade de rotação perto da região da superfície racional $q = 3$. Também vemos que, só há picos da impedância na configuração da bobina do EML com modo poloidal/toroidal $M/N = +3/-1$, enquanto que na configuração $M/N = -3/+1$ não aparecem picos da impedância na faixa de frequências mostrada na figura. Observa-se, também, que mesmo com $U_0 = 0$ aparecem picos da impedância no caso $M/N = +3/-1$ (figura 4.2b). Para configurações $M/N = +3/-1$ da bobina do EML a impedância é maior, aproximadamente uma ordem de grandeza

maior que a da configuração $M/N = -3/+1$, fora da largura dos picos de ressonância. Na configuração $M/N = +3/-1$ e frequências na faixa de $(0, 2-5, 0)kHz$ aparecem picos nas curvas da impedância e, na faixa de $5, 0-250, 0kHz$ também aparecem picos da impedância. Estes picos aumentam junto com o aumento da frequência. Isto também ocorre para a dissipação de energia como veremos no parágrafo seguinte. As amplitudes dos picos e suas posições variam com o valor da velocidade, os quais parecem ser modos de ressonâncias estáveis de Suydam [72], $(B_\theta/B)^4 < M^2/4[(\ln(1/q))/(\ln r)]$, modificados pela rotação do plasma.

Figura 4.3: (a, c) Potência dissipada e (b, d) parte real da componente radial do campo elétrico $\text{Re}[E_r]$, em função do raio normalizado da coluna do plasma, para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, correspondentes a valores da velocidade U_0 no intervalo $(0-3, 0) \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$ e $f = 1 \text{ kHz}$.

Das figuras 4.3a, c podemos ver que a potência dissipada, na superfície racional $q_r = 3$, para uma frequência de $1kHz$, é fortemente dependente da variação da velocidade de rotação, tanto para configurações da bobina do EML $M/N = +3/-1$, quanto para $M/N = -3/+1$. Das figuras 4.3a, c, observamos no caso $M/N = +3/-1$ medida que a velocidade aumenta a potência dissipada também aumenta, enquanto que no caso $M/N = -3/+1$ a potência dissipada aumenta até um certo valor, para depois decair com o aumento da velocidade. Das figuras 4.3b, d vemos que a distribuição do campo elétrico é modificado com a variação da velocidade na região de ressonância local de Alfvén. Vemos das figuras 4.3b, d que para propagações opostas da onda, a distribuição do campo é assimétrica por causa do efeito Doppler.

4.3.2 Efeitos da frequência na dissipação da energia e excitação dos campos de LF

Nesta seção mostramos efeitos da frequência, na faixa de $(0, 7-15, 0)kHz$, na dissipação da energia e impedância para modos poloidal/toroidal $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$. Para esta faixa de frequências mostramos nas figuras 4.4a, b as curvas da impedância em função da velocidade U_0 e, nas figuras 4.5a, b, mostramos as curvas da potência dissipada (considerando velocidade fixa $U_0 = 3 \times 10^2 km s^{-1}$)[†] para os modos poloidal/toroidal $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$.

- **Frequências na faixa de $(0, 7-1, 5)kHz$**

Na figura 4.2 vimos o comportamento da impedância em função da frequência para apenas quatro valores da velocidade; e não foi mostrado com muito detalhe os efeitos da velocidade. Nas figuras 4.4a, b vemos mais claramente os efeitos da velocidade na impedância. Podemos observar nessas figuras que a impedância tem uma forte dependência da velocidade de rotação e os picos da impedância crescem à medida que a frequência aumenta; isto tanto no caso $M/N = +3/-1$ como no caso $M/N = -3/+1$. Observamos também que a posição dos picos da impedância varia com a frequência na configuração

[†]Pesquisas recentes no TEXTOR mostraram velocidades de rotação da ordem de

Figura 4.4: Impedância em função da velocidade para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para frequências na faixa de $(0, 7-1, 5)kHz$.

$M/N = +3/-1$; mas, no caso $M/N = -3/+1$, a posição dos picos não muda com a variação da frequência. Podemos ver também, que os picos da impedância são maiores no caso de ondas se propagando na direção $M/N = +3/-1$ em comparação à direção $M/N = -3/+1$. Para frequências na faixa $(0, 7-1, 5)kHz$ observa-se que a posição dos picos da impedância (figura 4.6a caso $M/N = +3/-1$) caminha no sentido positivo do eixo das velocidades, à medida que se aumenta a frequência, até sair do intervalo das velocidades em estudo. E, no caso da configuração $M/N = -3/+1$ (figura 4.6b), os picos da impedância vão ficando cada vez mais suaves à medida que a frequência aumenta. Observa-se para as frequências mais altas que os picos da impedância ficam quase constantes e a velocidade de rotação não tem quase nenhum efeito. Das figuras 4.4 e 4.6, observamos que no intervalo de velocidades analisado, só há picos da impedância para frequências bem baixas $f \lesssim 2,0kHz$.

Para uma velocidade fixa de $U_0 = 3 \times 10^2 km s^{-1}$ a potência dissipada é fortemente afetada com a variação da frequência, como podemos observar na figura 4.5. Os efeitos da frequência, na faixa definida na figura 4.5, são contrários, considerando a dissipação de energia na superfície racional $q_r = 3$, ou seja, os picos da potência dissipada diminuem e depois aumentam à medida que se aumenta a frequência na configuração $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente.

Figura 4.5: Potência dissipada em função do raio normalizado da coluna do plasma para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para frequências na faixa de $(0,7-1,5)kHz$ e velocidade $U_0 = 3 \times 10^2 km.s^{-1}$.

- Frequências na faixa de $(1,5-15,0)kHz$

Figura 4.6: Impedância em função da velocidade para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para frequências na faixa de $(1,5-15,0)kHz$.

4.3.3 Efeitos da densidade na dissipação da energia e excitação dos campos de LF

Nesta seção mostramos os efeitos da densidade n_0 no intervalo $(0, 1-1, 5) \times 10^{14} \text{cm}^{-3}$. A densidade da borda do plasma é considerada como $n_a = n_0/250$. Para uma velocidade fixa $U_0 = 3 \times 10^2 \text{km s}^{-1}$ mostramos curvas da impedância em função da frequência, figuras 4.7a, c na faixa de $(0, 1-1, 5) \text{kHz}$, figuras 4.7b, d na faixa de $(1, 5-200, 0) \text{kHz}$, para os modos poloidal/toroidal $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente. Nas figuras 4.8a, b mostramos a impedância em função da velocidade, para frequência $f = 1 \text{kHz}$ e modos poloidal/toroidal $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente. E a figura 4.9 mostra a potência dissipada no plasma em função do raio do plasma para velocidade fixa $U_0 = 3 \times 10^2 \text{km s}^{-1}$ e frequência $f = 1 \text{kHz}$.

Figura 4.7: Impedância em função da frequência, (a, c) para frequências na faixa de $(0, 1-1, 5) \text{kHz}$ e (b, d) para frequências na faixa de $(1, 5-200, 0) \text{kHz}$ para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para valores da densidade n_0 no intervalo $(0, 1-1, 5) \times 10^{14} \text{cm}^{-3}$ e $U_0 = 3 \times 10^2 \text{km s}^{-1}$.

Das figuras 4.7a, b e 4.7c, d podemos ver que a impedância em função da frequência tem uma forte dependência com relação à variação da densidade na região da superfície racional $q = 3$, devido à ressonância local de Alfvén $|\omega_A - k_{\parallel} U| = |k_{\parallel} c_A|$, onde c_A é função da densidade. No intervalo de frequências analisado, observamos que a impedância tem forte dependência da densidade, sendo mais notória esta dependência na configuração $M/N = +3/-1$ da bobina do EML, onde aparecem picos da impedância, enquanto que na configuração $M/N = -3/+1$ não aparecem picos da impedância e não há muita dependência à variação da densidade no intervalo de frequências analisado.

Figura 4.8: Impedância em função da velocidade para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para densidades n_0 no intervalo $(0, 1-1, 5) \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ e $f = 1 \text{ kHz}$.

Para a frequência do gerador de $f = 1 \text{ kHz}$ e aumentando gradativamente a densidade do centro do plasma (partindo de uma densidade baixa, comparado ao valor característico do TCABR $n_0 = 3,0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$) aparecem picos da impedância com posições em velocidades diferentes, como se pode observar nas figuras 4.8a, b. Destas figuras observa-se que a posição dos picos sofre um deslocamento de uma configuração à outra, de aproximadamente $\Delta U_0 \approx 3 \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$. O tamanho dos picos de ambas configurações é aproximadamente igual. Observamos também, que à medida que a densidade n_0 aumenta a posição dos picos caminha na direção de velocidades menores e suas amplitudes diminuem.

Figura 4.9: Potência dissipada em função do raio da coluna do plasma normalizada para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para densidades n_0 no intervalo $(0, 1-1, 5) \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $f = 1 \text{ kHz}$ e $U_0 = 3 \times 10^2 \text{ km/s}$.

Na configuração $M/N = +3/-1$, velocidade de rotação $U_0 = 3 \times 10^2 \text{ km/s}$ e frequência do gerador de $f = 1 \text{ kHz}$, a deposição de energia não é muito afetada com a variação da densidade, como pode-se ver na figura 4.9a. Mas, na configuração $M/N = -3/+1$ a deposição de energia varia muito com a variação da densidade como podemos observar na figura 4.9b. Nesta última figura, à medida que se aumenta a densidade a potência dissipada diminui.

4.3.4 Efeitos da temperatura na dissipação da energia e excitação dos campos de LF

Nesta seção mostramos efeitos, na impedância e potência dissipada, gerados pela variação da temperatura no intervalo $(0, 2-1, 0) \text{ keV}$ para modos poloidal/toroidal $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$. A temperatura na borda do plasma é $T_a = T_0/33$. Os efeitos da temperatura aparecem por causa da frequência das colisões $\nu \sim n/T_e^{3/2}$. Nas figuras 4.10 mostramos curvas da impedância em função da frequência (considerando $U_0 = 3 \times 10^2 \text{ km/s}$), intervalo $(0, 1-1, 5) \text{ kHz}$ figuras 4.10a, c e $(1, 5-200, 0) \text{ kHz}$ figuras 4.10b, d. Nas figuras 4.11a, c mostramos as curvas da impedância em função da velocidade e nas figuras

4.11b, d mostramos a potência dissipada em função do raio da coluna do plasma.

Figura 4.10: Impedância em função da frequência, (a, c) frequências na faixa $(0, 1-1, 5)kHz$ e (b, d) frequências na faixa $(1, 5-200, 0)kHz$, para os modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para valores da temperatura T_0 no intervalo de $(0, 2-1, 0)keV$, $U_0 = 3 \times 10^2 km/s$ e $f = 1kHz$.

Da comparação das figuras 4.10a, b e 4.10c, d vê-se que só há picos da impedância para ondas com modos $M/N = +3/-1$ e a posição e tamanho destes picos varia com a variação da temperatura. Para frequências bem baixas no intervalo de $(0, 1-1, 5)kHz$ a amplitude dos picos diminui à medida que se aumenta a temperatura (que significa diminuição da frequência de colisões). Para frequências maiores que $1, 5kHz$ o tamanho dos picos aumenta com o aumento da temperatura.

Das figuras 4.11a, c vê-se que há picos da impedância tanto para configurações $M/N = +3/-1$ como $M/N = -3/+1$. A posição dos picos de uma configuração à outra tem um deslocamento na velocidade de aproximadamente $\Delta U_0 \approx 2,7 \times 10^2 km/s$, da

configuração $M/N = +3/-1$ à $M/N = -3/+1$. Vemos nestas figuras que o tamanho dos picos da impedância diminui ao aumentarmos a temperatura, e a posição dos picos também varia com a variação da temperatura. Comparando as figuras 4.11b com 4.11d observa-se que há maior dissipação de energia na região de ressonância local de Alfvén, na configuração $M/N = +3/-1$ que no caso $M/N = -3/+1$. Vemos também no caso de $M/N = +3/-1$ a potência dissipada diminui ao aumentarmos a temperatura, mas o processo inverso acontece no caso $M/N = -3/+1$.

Figura 4.11: (a, c) impedância em função da velocidade, (b, d) potência dissipada em função do raio da coluna do plasma normalizado, para modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para valores da temperatura no intervalo de 0, 1–1,5) keV, $U_0 = 3 \times 10^2$ km/s e $f = 1$ kHz.

Enfim, podemos concluir que um aumento da velocidade provoca, em geral, aumento da absorção do campo LF nas ressonâncias locais de Alfvén nos casos tratados; que o deslocamento dos picos da impedância de modos $M/N = +3/-1$ está em concordância

com o efeito Doppler mesmo com alargamento das ressonâncias locais de Alfvén no caso de modos $M/N = -3/+1$ mostrado na figura 4.3(*c, d*). Uma diminuição da temperatura de elétrons provoca diminuição e alargamento dos picos ressonantes por causa das colisões elétron-íons.

Capítulo 5

Forças Ponderomotoras

Nesta seção apresentamos uma teoria das forças ponderomotoras desenvolvido por Elfimov *et. al.* [73]. Esta teoria das forças ponderomotoras é usada no código cilíndrico para a implementação da subrotina “forças ponderomotoras” [†].

Geração de corrente é uma parte muito importante no programa experimental em tokamaks e tem uma longa historia (ver *reviews* [34, 35]). Experimentos anteriores mostraram que geração de corrente pode ser produzida por diferentes tipos de ondas (cíclotron de elétrons, ondas híbridas inferiores, rápidas e de Alfvén). Foram alcançadas recentemente melhorias no confinamento do plasma com barreiras de transporte internas (ITBs, Internal Transport Barriers), criadas através da injeção de partículas neutras (NB) e por aquecimento por ondas na faixa da frequência cíclotron de íons (ICRF), em todos os grandes tokamaks, como Doublet-III-D, Join European Torus (JET), TFTR e outros (ver, por exemplo [74] e o *review* [75]). Os ITBs aparecem pela metade do raio menor da caluna do plasma com um cisalhamento negativo. As características de dispersão de ondas de baixa frequências (como ondas de Alfvén de deriva) também podem ser modificadas (inclusive com a supressão de instabilidades) por causa do termo de convecção $\mathbf{U} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{u}}$, onde $\mathbf{U}$ é a velocidade de fluxo do plasma e $\tilde{\mathbf{u}}$ é a velocidade oscilatória.

Aquecimento e geração de corrente via ondas de Alfvén é atrativo para tokamaks e stellarators (ver, por exemplo [3, 15, 19]), por causa da disponibilidade de geradores

[†]Esta mesma teoria foi também utilizada por Gesil [46] no trabalho de doutorado, para o cálculo numérico das forças ponderomotoras via código cinético toroidal.

de RF de alta potência e a simplicidade da estrutura das ondas geradas. Geração de corrente e fluxo de plasma via ondas de Alfvén foi demonstrado no tokamak Phaedrus-T [76, 77]. Rotação poloidal durante o aquecimento via ondas de Alfvén foi também observado nos experimentos no *Tokamak Chaffage Alfvén* (TCA) [78]. Aquecimento e geração de corrente por ondas de Alfvén continua sendo investigado no TCABR [64].

O modelo simples de geração de corrente em fluxos no plasma está baseado no efeito da transferência do momento ($\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$) da onda com energia $\varepsilon = \hbar\omega$, para momento dos elétrons do plasma que, é amortecido devido às colisões elétron-íon, $m_e\nu_{ei}n_eU_e$. A força motriz produzida pela potência dissipada para N fótons é expressa pela equação $\mathbf{F} = W\mathbf{k}/\omega$. Finalmente, em condições estacionárias, o equilíbrio do momento conduz ao valor da densidade de corrente e fluxo gerados, j_{cd} e U , que são governados pelas equações:

$$j_{cd} = \frac{eW^{(e)}}{m_e\nu_{ei}v_{ph}}, \quad \mathbf{U} = \frac{\tau_E W}{\omega m_i n_i} \mathbf{k},$$

onde τ_E é a vida média do momento das partículas, a velocidade de fase $v_{ph} = \omega/k$ tem valor próximo ao da velocidade de Alfvén c_A , ν_{ei} é a frequência de colisão elétron-íon, $W^{(e)}$ é a densidade de potência dissipada nos elétrons, e é a carga dos elétrons e n_α , m_α são a densidade e a massa de elétrons ou íons, respectivamente. Esta equação simples é válida quando a velocidade de fase é menor que a velocidade térmica dos elétrons, $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$. O resultado, válido para uma gama inteira de velocidades de fase, foi calculado na Ref.[79], onde alta eficiência na geração de corrente foi demonstrada para ondas de Alfvén com velocidade de fase muito pequena, $v_{ph} \ll v_{Te}$, como também para velocidades de fase muito grandes $v_{ph} \gg v_{Te}$.

É sabido que há dificuldades significativas para o uso da geração de corrente por ondas de Alfvén em um reator-tokamak. No caso de baixas velocidades de fase, foi ressaltado nas Refs.[35, 80, 81] que a eficiência de geração de corrente cai no regime de banana como resultado da absorção do momento da onda pelas partículas aprisionadas por causa da forte fricção entre elétrons livres, que forma a corrente, com os elétrons aprisionados e íons.

As esperanças de uma geração de corrente eficiente foram renovadas com o trabalho de Ohkawa [37] sobre geração de corrente por injeção de helicidade. Esta idéia foi desenvolvida por Taylor [38], no limite MHD e, um modelo cinético foi apresentado por Elfimov [39]. Em plasmas magnetizados, a corrente de injeção de helicidade pode ser mantida por forças ponderomotoras que agem nos elétrons, dependendo da amplitude dos gradientes dos campos de RF. No caso de ondas rápidas [39], foi demonstrado que também há corrente induzida por gradientes de densidade de equilíbrio e temperatura. A força ponderomotora, em um modelo MHD de dois fluidos, para plasmas magnetizados, foi derivada por Klima [40] para geometria plana. O quadro geral destas forças, produzido por ondas de RF em íons e elétrons, foi derivado na Ref.[41] para plasmas cilíndricos e, na Ref.[42] para uma geometria toroidal geral.

Aqui é considerado o uso de ondas de Alfvén como esquema para geração de corrente e a criação de ITBs gerados pelo EML do TCABR. São propostos dois tipos de ondas de Alfvén para este propósito: ondas Globais de Alfvén (GAW) e onda Cinética de Alfvén (KAW), ou onda lenta quase-eletrostática de Alfvén (SQAW). Note que as ondas magnetosônicas rápidas podem ser tratadas da mesma maneira que as ondas GAW. A deposição de energia de KAW e SQAW se dá em faixas radiais pequenas. Assim, é possível induzir a geração de um perfil de corrente oco para configurações de cisalhamento magnético invertido [3] e, simultaneamente, criar fluxos de plasma fortemente cisalhados [82] para suprimir a turbulência do plasma e manter a ITB. O que torna estes tipos de ondas especiais é que podem ser induzidos ambos os tipos de efeitos na mesma região do raio do plasma no tokamak.

Ondas eletromagnéticas geradas por fontes externas ao plasma são muito usadas como meio de aquecimento de plasmas magnetizados confinados (ver [83, 84]). Desde que as ondas eletromagnéticas transfiram momento [85, 86] e/ou momento angular [87] para as partículas do plasma, corrente elétrica toroidal pode ser gerada por onda incidentes [85]-[88]. Uma das mais importantes questões de aplicabilidade dos vários esquemas de aquecimento de plasma é, como as ondas eletromagnéticas modificam a difusão do plasma.

Forças ponderomotoras são tipicamente chamadas de não-ressonantes porque elas

atuam sobre o volume do plasma em vez de atuar sobre um grupo de partículas ressonantes com a velocidade de fase da onda.

As forças ponderomotoras de dois fluidos foram descritas em forma geral por Klíma [40]. Estas forças foram ultimamente usadas por Klíma e Petržílka [40, 89] para o estudo de geração de corrente por ondas de RF em plasmas cilíndricos.

Seguindo Elfimov *et.al.*[90], nas próximas sessões será feita uma análise das médias temporais das equações MHD para plasmas com dois fluidos em condição quase-estacionária. Equilibrando a força motora de RF nos elétrons e íons, $\langle \tilde{F}_{\theta,\zeta}^{(e,i)} \rangle$, contra as forças viscosas $F_{\theta,\zeta}^\pi$ (Ref. [91]) nas direções poloidal e toroidal, são obtidas as equações

$$F_{\theta}^\pi + \langle \tilde{F}_{\theta}^{(e)} \rangle + \langle \tilde{F}_{\theta}^{(i)} \rangle = 0, \quad F_{\zeta}^\pi + \langle \tilde{F}_{\zeta}^{(e)} \rangle + \langle \tilde{F}_{\zeta}^{(i)} \rangle = 0,$$

que são as condições locais para análise de fluxo de plasma quase-estacionário.

Na próxima parte deste capítulo, usando a aproximação da ótica geométrica para ondas de Alfvén, são apresentadas estimativas para as forças ponderomotoras, forças viscosas e de RF, toroidais e poloidais. Posteriormente mostraremos cálculos numéricos destas forças para parâmetros do TCABR usando o código cilíndrico.

5.1 Forças Viscosas de Amortecimento

Aqui consideramos as forças viscosas que estão relacionadas com a modulação do campo magnético toroidal nas direções poloidal e toroidal,

$$B = B_0 \left[1 - \frac{r}{R} \cos(\theta) + \delta \cos(N\zeta) \right],$$

onde r/R é o parâmetro de toroidicidade e δ e N são os parâmetros de oscilação do campo magnético ondulado (*ripple*) na direção toroidal. Estas forças foram calculadas por muitos autores (como o *review* de Hirshamn e Sigmar [92]) e podem ser apresentadas

na forma da Ref.[91]

$$F_\theta^\pi = -m_i n_i \chi_\theta (U_{i\theta} - \kappa U_T) \quad \text{e} \quad F_\zeta^\pi = -m_i n_i \chi_\zeta U_{i\zeta} ,$$

onde κU_T é a rotação poloidal residual relacionada a uma deriva macroscópica cT'/eB , causada pelo gradiente térmico. Neste trabalho é suposto que esta rotação é desprezível em comparação com a velocidade poloidal, $U_{i\theta}$. Os coeficientes de viscosidade $\chi_{\theta,\zeta}$ podem ser representados (nos regimes colisional, *plateau* e *banana*, respectivamente) na forma:

$$\chi_\theta = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{v_{Ti}^2}{\nu_i R_0^2} & \text{para } \nu_i > \frac{v_{Ti}}{qR_0} \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{q v_{Ti}}{R_0} & \text{para } \frac{v_{Ti}}{qR_0} > \nu_i > \frac{(r/R)^{3/2} v_{Ti}}{qR_0} \\ \frac{\nu_i q^2}{(r/R)^{3/2}} & \text{para } \nu_i < \frac{(r/R)^{3/2} v_{Ti}}{qR_0} . \end{cases}$$

e

$$\chi_\zeta = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{v_{Ti}^2}{\nu_i R_0^2} (\delta N)^2 & \text{para } \nu_i > \frac{v_{Ti} N}{R_0} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_{Ti} N \delta^2}{R_0} & \text{para } \frac{v_{Ti} N \delta^{3/2}}{R_0} < \nu_i < \frac{v_{Ti} N}{R_0} . \end{cases}$$

5.2 Forças Ponderomotoras

O estudo das forças ponderomotoras induzidas pelas ondas de Alfvén rápidas é feito no limite cilíndrico, porque as correções toroidais [42] são bastante pequenas, $\sim (r/R)^2$. As componentes dos campos elétricos de RF e correntes oscilatórias $\mathbf{A} = \{\tilde{\mathbf{E}}(r)\tilde{\mathbf{j}}(r)\}$ são tomadas como $\tilde{\mathbf{E}}(r); \tilde{\mathbf{j}}(r) \sim \exp[i(kz + m\theta - \omega t)]$. Por causa do campo magnético helicoidal, o conjunto dos vetores $\mathbf{A}$ é transformado das componentes cilíndricas A_r , A_θ e A_ζ para as componentes normal, binormal e paralela, respectivamente,

$$A_1 = A_r , \quad A_2 \equiv A_b = A_\theta h_\zeta - A_\zeta h_\theta , \quad A_3 \equiv A_\parallel = A_\zeta h_\zeta + A_\theta h_\theta ,$$

através das componentes poloidal e toroidal $h_{\theta,\zeta}$ do vetor unitário do campo magnético.

De acordo com a teoria de efeitos ponderomotores em um plasma de dois-fluidos, as

forças ponderomotoras podem ser expressas calculando-se a média temporal das equações MHD para dois fluidos:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_{\theta,\zeta}^{(\alpha)}) + \nabla(m_\alpha n_\alpha \mathbf{V}^{(\alpha)} \mathbf{V}_{\theta,\zeta}^{(\alpha)}) = (e_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{j}^{(\alpha)} \times \mathbf{B})_{\theta,\zeta} - \nabla_s \pi_{s,\zeta,\theta}^{(\alpha)}, \quad (5.1)$$

onde m_α , e_α são a massa e a carga das partículas e, é suposta uma pressão cinética homogênea ao longo das superfícies magnéticas ($\nabla_{\theta,\zeta} P^{(\alpha)} = 0$). Qualquer variável física Φ (densidade n_α , velocidade $\mathbf{V}^{(\alpha)}$, corrente $\mathbf{j}^{(\alpha)} = e_\alpha n_\alpha \mathbf{V}^{(\alpha)}$, campo elétrico $\mathbf{E}$ e magnético $\mathbf{B}$) e uma parte oscilatória ($\tilde{\Phi}$). A parte oscilatória é representada como um harmônico na forma $\tilde{\Phi} = \Phi \exp[i(\int_0^r k_r dr + m\theta + n\zeta - \omega t)]$, onde ω é a frequência da onda, m , n são os números da onda poloidal e toroidal. Também é utilizada a aproximação eikonal para a dependência radial ($|k_r \Phi| \gg |\partial \Phi / \partial r|$ e $|k_r| \gg |m/r|, |n/R_0|$). Finalmente é usado o limite cilíndrico ($r/R_0 \ll 1$) das coordenadas pseudo-toroidais (r, θ, ζ) com superfícies magnéticas coaxiais. Segundo o procedimento habitual de calcular a média da equação (5.1) sobre as oscilações da onda e usando a aproximação desenvolvida na Ref. [90] e tomando em conta a dissipação da onda, calculamos as forças ponderomotoras criadas pela onda de RF obtendo as expressões:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{FD,\theta,\zeta}^{(\alpha)} &= -\nabla \left\langle m_\alpha n_\alpha \tilde{\mathbf{V}}^{(\alpha)} \tilde{V}_{\theta,\zeta}^{(\alpha)} \right\rangle, & \mathbf{F}_{EM,\theta,\zeta}^{(\alpha)} &= \left\langle e_\alpha \tilde{n}_\alpha \tilde{\mathbf{E}} + \frac{\tilde{\mathbf{j}}^\alpha \times \tilde{\mathbf{B}}}{c} \right\rangle_{\theta,\zeta}, \\ \mathbf{F}_{V,\theta,\zeta}^{(\alpha)} &= -\left\langle \nabla_s \pi_{s,\zeta,\theta}^{(\alpha)} \right\rangle, \end{aligned} \quad (5.2)$$

onde a primeira força é produzida pela tensão dinâmica do fluido, a segunda força é produzida pela tensão eletromagnética e a última força é produzida pela tensão da viscosidade.

Usando as equações de continuidade e de indução, a força de tensão eletromagnética, $F_{EM,\theta,\zeta}^{(\alpha)}$, pode ser representada como a soma [41, 73] de uma parte de gradiente, $\mathbf{F}_{\partial,\theta}^{(\alpha)} = 1/(2r\omega) \text{Im} \nabla_r (r \tilde{j}_r E_\theta^*)$ e $\mathbf{F}_{\partial,\zeta}^{(\alpha)} = 1/(2\omega) \text{Im} \nabla_r (\tilde{j}_r E_\zeta^*)$ e uma força de transferência de momento da onda, $W^{(\alpha)} \mathbf{k} / \omega$, que é proporcional à dissipação da onda, $W^{(\alpha)} = \tilde{j}^{(\alpha)} \cdot \tilde{E}$, onde

as componentes das correntes oscilatórias podem se expressas pela relação,

$$\tilde{j}_s^{(\alpha)} = -i \frac{\omega}{4\pi} \sum_p \varepsilon_{sp}^{(\alpha)} \tilde{E}_p.$$

Neste trabalho foram usadas as expressões mostradas abaixo para as componentes da força ponderomotora agindo sobre as partículas α (elétrons ou íons) do plasma (Apêndice F):

$$\langle \tilde{F}_\theta^{(\alpha)} \rangle \equiv F_{\theta,P}^{(\alpha)} + F_{\theta,\partial}^{(\alpha)} = \frac{m}{r\omega} P^{(\alpha)} + \text{Re} \left\{ \frac{1}{8\pi r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{r,s}^{(\alpha)} \tilde{E}_s \left(\tilde{E}_\theta^* - \frac{4\pi\omega}{\omega_{p\alpha}^2} \tilde{j}_\theta^{(\alpha)*} \right) \right] \right\}, \quad (5.3)$$

$$\langle \tilde{F}_\zeta^{(\alpha)} \rangle \equiv F_{\zeta,P}^{(\alpha)} + F_{\zeta,\partial}^{(\alpha)} = \frac{k}{r\omega} P^{(\alpha)} + \text{Re} \left\{ \frac{1}{8\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \sum_{s=1}^3 \varepsilon_{r,s}^{(\alpha)} \tilde{E}_s \left(\tilde{E}_\zeta^* - \frac{4\pi\omega}{\omega_{p\alpha}^2} \tilde{j}_\zeta^{(\alpha)*} \right) \right] \right\}. \quad (5.4)$$

onde os índices ($s = 1, 2, 3$) são usados para designar os índices do tensor relacionados com as componentes radial (r), binormal (b) e paralela ($\parallel$).

Nas equações acima o primeiro termo é a força motriz de transferência de momento, $F_{\theta,\zeta,P}^{(\alpha)}$, que age via dissipação da onda, e o segundo termo, $F_{\theta,\zeta,\partial}^{(\alpha)}$, é uma mistura da força de gradiente que é relacionada ao gradiente dos parâmetros de equilíbrio do plasma com a força de injeção de helicidade (Ref.[39]), que está relacionada ao gradiente da amplitude da onda. $P^{(e)}$ é a média temporal da densidade de potência de RF absorvida pelos elétrons, $\text{Re}\langle \tilde{\mathbf{E}} \cdot \tilde{\mathbf{j}}^{(e)*} \rangle / 2$

Aqui ressaltamos que a principal parte da força na equação (5.2) pode ser apresentada como força de transferência de momento, $F_{\theta P} = F_{\zeta P}(R_0 M / r_s N) = PM / r_s \omega$ e, o gradiente da força é pequena [32] para campos de LF na condição 4.1 de plasmas colisional.

Para calcular forças ponderomotoras numericamente para o TCABR no regime de campos de LF gerados pelo EML, é usado o código cilíndrico de multi-fluido descrito no capítulo anterior. Nos cálculos usamos os mesmo parâmetros usados no capítulo anterior. Para evitar perturbações do equilíbrio pelo forte efeito da rotação toroidal [69], com campo elétrico radial $\mathbf{E}_r = \mathbf{U}_z \times \mathbf{B}_\theta / c$, iremos analisar forças geradas na aproximação da *força livre*, $\mathbf{F} \times \mathbf{B} = 0$, a qual requer só o cálculo da componente paralela da força

$F_{\parallel} = k_{\parallel}P/\omega$. Neste caso, as componentes do fluxo de plasma induzido toroidal UB_z/B e poloidal UB_{θ}/B também satisfazem a condição livre de força $\mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0$. Efeitos com rotação toroidal puros [69] estão atualmente sob estudo com condições de equilíbrio apropriadas e, os resultados oportunamente serão reportados. Mostramos a distribuição radial da força ponderomotora paralela gerada por campos de LF com modos poloidal/toroidal $M/N = \pm 3/\mp 1$ da antena e nas condições (4.1) de plasmas colisionais, nas figuras 5.1a, b, 5.2a, b, 5.3a, b e 5.4a, b, para valores da velocidade no intervalo $(-3, 0, +3, 0) \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$, frequências na faixa $(1, 5-15, 0) \text{ kHz}$, densidades no intervalo $(0, 2-1, 0) \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ e temperaturas no intervalo $(0, 2-1, 0) \text{ keV}$, respectivamente.

Figura 5.1: Componente paralela da força ponderomotora ($F_{\parallel}$) em função do raio do plasma normalizado para modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para velocidades no intervalo $(-3, 0, +3, 0) \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$ e $f = 1 \text{ kHz}$.

Os cálculos mostram que a dissipação de campos LF com densidade de potência $P_{\pm} \approx (\omega/8\pi) \text{Im} \epsilon_{33, \pm} |E_{\parallel}|^2$ para P_+ co-girando (velocidade de fase no sentido da rotação do plasma) diferem da dissipação P_- da onda contra-girando por causa do efeito de Doppler (como se pode ver nas figuras 4.3a, c), mas os campos elétricos induzidos pelas bobinas têm aproximadamente o mesmo valor (como se pode ver nas figuras 4.3b, d). No caso de uma onda com frequência $|k_{\parallel}(U + Ve)|$ e $\omega < \nu_{ef}$, no TCABR, nós podemos apresentar

a força toroidal induzida como uma diferença de duas forças

$$F_{\parallel} = \frac{1}{\omega}(k_{\parallel}P_{+} - k_{\parallel}P_{-}) = \frac{\omega_{pe}^2 k_{\parallel}(U + V_e)|E_{\parallel}|^2}{4\pi[\omega^2 - k_{\parallel}^2(U + V_e)]\nu_{ef}}. \quad (5.5)$$

Para efeito Doppler pequeno, $\omega \gg |k_{\parallel}(U + V_e)|$, esta força é inversamente proporcional ao quadrado da frequência e dirige-se no sentido de rotação do elétron $\mathbf{U} + \mathbf{V}_e$. No caso oposto ($\omega < |k_{\parallel}(U + V_e)|$), o fluxo do plasma pode ser instável e a força tem o sentido oposto. Isto não depende dos parâmetros da onda e seu valor é inversamente proporcional à velocidade de rotação dos elétrons $\mathbf{U} + \mathbf{V}_e$. Para uma única onda que se propaga com frequência e efeito Doppler pequenos ($|k_{\parallel}(U + V_e)| < \omega < \nu_{ef}$), temos

$$F_{\parallel} = \frac{k_{\parallel}}{\omega}P \approx \frac{\omega_{pe}^2 k_{\parallel}|E_{\parallel}|^2}{8\pi[\omega - k_{\parallel}(U + V_e)]\nu_{ef}}.$$

Esta equação mostra que a força só pode aumentar a rotação do plasma no caso de co-rotação. Usualmente, nós temos duas ressonâncias locais de AW com sinais opostos de $k_{\parallel}$ que definem o sentido da força e da estrutura da onda perto da superfície magnética racional $q = 3$, nas circunstâncias nas quais foi discutido na equação (2.25). Para uma forte rotação do plasma $\omega < |k_{\parallel}U|$, o fluxo do plasma pode ser instável; a força induzida tem um sentido oposto à velocidade de rotação dos elétrons e não depende da frequência e número de onda.

Mantendo fixa a velocidade ($|k_{\parallel}(U + V_e)| = \text{constante}$) e variando a frequência em uma faixa $(1, 5-15, 0)kHz$, observamos das figuras 5.2a, b que a força toroidal diminui fortemente com o aumento da frequência. Para ondas se propagando, com a configuração $M/N = +3/-1$, a força toroidal não provoca uma grande variação da densidade, como podemos ver na figura 5.3a. Isto por causa dos termos ω_{pe} , V_e e ν_{ef} (equação (5.5)) no numerador e denominador, respectivamente, onde estes termos são função da densidade e, para os parâmetros usados, estes termos de alguma forma fazem com que a razão da equação (5.5) seja aproximadamente constante.

Variando a temperatura no intervalo $(0, 2-1, 0)keV$ (figura 5.4), vemos que à medida que T_e aumenta a força toroidal diminui. A equação (5.5) depende de $T_e^{3/2}$ (no nune-

Figura 5.2: Componente paralela da força ponderomotora ($F_{\parallel}$) em função do raio do plasma normalizado para modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para frequências na faixa (1, 5–15, 0) kHz e $U_0 = 3 \times 10^2 \text{ km s}^{-1}$.

Figura 5.3: Componente paralela da força ponderomotora ($F_{\parallel}$) em função do raio do plasma normalizado para modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para densidades no intervalo (0, 2–1, 0) $\times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, $U_0 = 3 \times 10^2 \text{ km/s}$ e $f = 1 \text{ kHz}$.

Figura 5.4: Componente paralela da força ponderomotora $F_{\parallel}$ em função do raio do plasma normalizado para modos $M/N = +3/-1$ e $M/N = -3/+1$, respectivamente, para temperaturas no intervalo $(0, 2-1, 0) \text{ keV}$, $U_0 = 3 \times 10^2 \text{ km/s}$ e $f = 1 \text{ kHz}$.

rador), então, se aumentarmos a temperatura, a força também deveria aumentar, mas consequentemente observamos uma diminuição da força. Esta diminuição é porque $E_{\parallel}$ depende da temperatura e, pelos resultados obtidos, podemos dizer que este termo diminui muito mais rapidamente que a frequência de colisões, ao aumentarmos a temperatura.

Capítulo 6

Conclusões

Apresentamos um resumo da teoria de aquecimento de plasmas por ondas de Alfvén, para plasmas magnetizados com base no efeito de conversão de modos, para plasmas inhomogêneos em configurações cilíndricas e toroidais.

Analiticamente, foram analisados os efeitos de conversão do modo rápido no modo lento de Alfvén em um modelo trapezoidal simplificado do perfil da coluna do plasma. Foram mostrados efeitos na dissipação dos campos LF perto da superfície racional provocado pelo modo eletrostático de Alfvén em dois pontos de conversão. Esse efeito foi confirmado em cálculos com o código cilíndrico.

Foi desenvolvido o código cilíndrico de dois fluidos com rotação de plasma e colisões elétron-íon e troca de carga.

Foi mostrado que o modelo cinético toroidal produz a divisão da onda GA de modo $M = -1$ [19] em três ressonâncias, que são equivalentes às ressonâncias cilíndricas $m = -2, -1, 0$. No caso de um plasma puro de hidrogênio, com as ressonâncias GA $m = -1, -2$, o campo de RF é dissipado principalmente na ressonância local de Alfvén dos modos vizinhos na periferia do plasma. Estas ressonâncias locais são equivalentes às ressonâncias do modelo cilíndrico com números de modo $m = 0, -1$, respectivamente. A ressonância GA com modo $m = 0$ que, só aparece no modelo toroidal, dissipa sua energia principalmente perto do centro da coluna do plasma. Também é mostrado que o modo da antena com $N = -6$ é melhor para o aquecimento do plasma com ondas de RF para

o TCABR. Para os modos toroidais $N = -4, -6$, concluímos que, a utilização dos novos parâmetros do TCABR [47, 48], não gera variações significativas na dissipação das ondas de Alfvén e curvas da impedância da antena 3.4, comparadas aos resultados obtidos em [46]. Mas, para o modo toroidal $N = -2$ (figura 3.2) há uma forte diferença na curva da impedância, comparada com [46].

Da comparação dos resultados numéricos dos códigos cilíndrico e ALTOK concluímos que, os efeitos toroidais são muito fracos na região de ressonância local de Alfvén para frequências baixas na banda de $1\text{--}50\text{kHz}$. Como podemos ver da figura 2.12, há um vizinho de ressonância local ($q = 2$) em $r/a \approx 0,73$, mas o tamanho do pico desta ressonância é muito pequeno em comparação aos picos de ressonância local ($q = 3$) em $r/a \approx 0,93$. Das figuras 2.11 (código cilíndrico) e 2.12 (código ALTOK) podemos ver que o comportamento do campo elétrico radial E_r tem uma semelhança na região de ressonância local de Alfvén em $r/a \approx 0,93$. Este comportamento dos campos LF na região de ressonância local de Alfvén foi previsto pela análise analítica (seção 2.3.2). Concluímos que a análise teórica e simulações, com o modelo do código cilíndrico e ALTOK têm, boa concordância.

Usando o código cilíndrico desenvolvido, nós concluímos que, absorção de campos de LF, excitados pelo EML, é modificada devido à rotação toroidal do plasma na região da ressonância local de Alfvén em plasmas do tokamak TCABR, como podemos ver na figura 4.3. A absorção em plasmas com velocidade de rotação $15,9 \times 10^2 \text{km s}^{-1}$ (figura 4.3) produzidos pela configuração $M/N = +3/-1$ do EML na superfície racional $q = 3$, mostra o valor máximo correspondente aos modos de ressonâncias estáveis de Suydam. Com base nos resultados do quarto capítulo, concluímos que os campos de LF induzidos pelo EML são efetivamente dissipados na região de ressonâncias locais de Alfvén, próximas às superfícies magnéticas racionais ($q = 3$). Este efeito depende da velocidade de rotação do plasma. O efeito da absorção das ondas de Alfvén perto da superfície racional permite modificar o perfil da corrente e rotação do plasma e prevenir a formação de ilhas magnéticas perto das superfícies racionais, impedindo possíveis disrupções do plasma, o que também é muito importante para a formação das barreiras de transporte no plasma.

Concluimos que a velocidade de rotação afeta fortemente as forças ponderomotoras, como podemos ver nas figuras 5.1. De igual forma a variação da frequência também afeta fortemente as forças ponderomotoras, o que pode ser visto na figura 5.2, concluimos que para uma frequência de $f = 1,5kHz$ o pico da força ponderomotora é maior. Para uma densidade de $n_0 = 4 \times 10^{13}cm^{-3}$, $f = 1kHz$ e $U_0 = 3 \times 10^2km\ s^{-1}$ o pico da força ponderomotora é maior, em comparação aos outros picos com densidades diferentes. Podemos dizer que, para frequência de $1kHz$ e velocidade de rotação no centro do plasma de $U_0 = 3 \times 10^2km\ s^{-1}$, os picos da força ponderomotora paralela diminuem quando a temperatura também diminui (o que quer dizer que a frequência de colisões aumenta), como podemos ver na figura 5.4.

6.1 Trabalho futuro

Como desenvolvimento futuro do presente trabalho poderíamos considerar os seguintes:

- Implementação de velocidade de rotação do plasma no código cinético toroidal.
- Refazer o código cinético toroidal considerando $\nabla \cdot \mathbf{j} \neq 0$, para evitar divergências em $k_{\parallel} = 0$.
- Inteligir os códigos cinético toroidal ou código cilíndrico com códigos de transporte com balanceamento de energia e momento, como o ASTRA (*Automatic System for Transport Analysis*).

Bibliografia

- [1] H. Alfvén, *Nature*, **150**, 450 (1942).
- [2] V. V. Dalgopolov, K. N. Stepanov, *Nucl. Fusion*, **5**, 276 (1965).
- [3] A. G. Elfimov, A. G. Kirov, V. P. Sidorov, em *High Frequency of Plasma Heating.*, edited by A. G. Litvak (Transl. Series, AIP, New York, 1992) p. 239.
- [4] C. Uberoi, *Phys. Fluids*, **15**, 1673 (1972).
- [5] A. Hasegawa e L. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **32**, 454, (1974).
- [6] A. Hasegawa e L. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **35**, 370, (1975).
- [7] A. Hasegawa e L. Chen, *Phys. Fluids*, **19**, 1924, (1976).
- [8] K. Appert, R. Gruber, e J. Vaclavik, *Phys. Fluids*, **17**, 1471 (1974).
- [9] J. A. Tataronis e W. Grossmann, *Z. Phys.*, **261**, 203 (1973).
- [10] J. A. Tataronis e W. Grossmann, *Z. Phys.*, **261**, 217 (1973).
- [11] J. A. Tataronis e W. Grossmann, *Nucl. Fusion*, **16**, 667 (1976).
- [12] W. Grossmann, M. Kaufmann e J. Neuhauser, *Nucl. Fusion*, **13**, 462 (1973).
- [13] J. A. Tataronis, *J. Plasma Phys.*, **13**, 87 (1975).
- [14] B. Joye, A. Lietti, J. B. Lister, J. -M. Moret, e W. Simm, *Phys. Rev. Lett.*, **56**, 2481 (1986).

- [15] G. A. Collins, F. Hofmann, B. Joye, R. Keller, A. Lietti, J. B. Lister, e A. Pochelon, *Phys. Fluids*, **29**, 2260 (1986).
- [16] J. Vaclavik e K. Appert, *Nucl. Fusion*, **31**, 1945 (1991).
- [17] H. Weisen, K. Appert, G. G. Borg, B. Joye, A. J. Knight, J. B. Lister, e J. Vaclavik, *Phys. Rev. Lett.*, **63**, 2476 (1989).
- [18] T. H. Stix, “Waves in Plasmas”, (New York: American Institute of Physics) (1992).
- [19] D. W. Ross, G. L. Chen and S. M. Mahajan, *Phys. Fluids*, **25**, 652 (1982).
- [20] K. Appert, R. Gruber, F. Troyon e J. Vaclavik, *Plasma Phys.*, **24**, No. 9, 1147 (1982).
- [21] K. Appert, G. A. Collins, F. Hofmann, R. Keller, A. Lietti, J. B. Lister, A. Pochelon, e L. Villard, *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1671 (1985).
- [22] S. M. Mahajan, David W. Ross e Gwo-Liang Chen, *Phys. Fluids*, **26**, 2195 (1983).
- [23] Yan Ming Li, Swadesh M. Mahajan, e David W. Ross, *Phys. Fluids*, **30**, 1466 (1987).
- [24] C. E. Kieras e J. A. Tataronis, *J. Plasma Phys.*, **28**, 395 (1982).
- [25] C. Z. Cheng, *Phys. Fluids B*, **3**, 2463 (1991).
- [26] C. Z. Cheng, Liu Chen e M. S. Chance, *Ann. Phys.*, (N.Y.) **161**, 21 (1985).
- [27] C. Z. Cheng and M. S. Chance, *Phys. Fluids*, **29**, 3695 (1986).
- [28] G. Y. Fu, C. Z. Cheng, R. Budny, Z. Chang, D. S. Darrow, E. Fredrickson, E. Mazzucato, R. Nazikian, K. L. Wong e S. Zweben, *Phys. Plasmas*, **3**, 4036 (1996).
- [29] Ghendrih Ph., A. Grosman, and H. Capes, *Plasma Phys. & Contr. Fusion*, **38**, 1653 (1996).

- [30] Kikuchi Y., Uesushi Y., Takamura S. and Elfimov A.G., *Nucl. Fusion (Special issue)*, **44**, S28 (2004).
- [31] C.J.A. Pires, *et al*, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **47**, 1609 (2005).
- [32] A.G. Elfimov, *et al*, *Nucl. Fusion*, **44**, S28 (2004).
- [33] I.M. Pankratov, A.Ya. Omelchenko, V.V. Olshansky and K.H. Finken, *Nucl. Fusion*, **44**, S37 (2004).
- [34] A. Becoulet, *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **38**, A1-A11 (1996).
- [35] Kolesnichenko Ya I., Parail V. V., Pereversev G. V., *Rev. Plasma Phys.*, edited by Kadomtsev B. B., (Consultan Bureau, New York, 1990), **17**, pp.1-191.
- [36] G. M. Staebler, R. E. Waltz e J. C. Wiley, *Nuclear Fusion*, **37**, 287 (1997).
- [37] T. Ohkawa, *Comm. Plasma Phys. Cont. Fufion*, **12**, 165 (1989).
- [38] J. B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.*, **63**, 1384 (1989).
- [39] A. G. Elfimov, *Sov. J. Plasma Phys.*, **17**(3), 223 (1991).
- [40] R. Klíma, *Czech. J. Phys.*, **B30**, 874 (1980).
- [41] A. G. Elfimov, J. A. Tataronis and N. Hershkowitz, *Physics of Plasmas*, **1**, 2637 (1994).
- [42] V. S. Tsypin, A. G. Elfimov, C. A. Azevedo, A. S. de Assis, *Physical Review E*, **51**, 2662 (1995).
- [43] M. V. Dmitrieva, S. Yu. Medvedev, G. A. Pestryakova, A. G. Elfimov, G. G. Komoshvili, e V. P. Siderov, *Proceedings of the 16th EPS Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics*, Venice, edited by S. Segre, H. Knoepfel, e E. Sindone (European Physical Society), **Vol. III**, 423 (1989).
- [44] E. R. Rondán, A. G. Elfimov, R. M. O. Galvão e C. J. A. Pires, *Brazilian J. Phys.*, **34**, No. 4B, 1677, (2004).

- [45] E. R. Rondán, A. G. Elfimov, R. M. O. Galvão e C. J. A. Pires, *Nucl. Fusion*, **46**, S154, (2006), *2nd workshop on stochasticity in fusion plasmas (SFP) held in Juelich, Germany, 15-17 March 2005*.
- [46] Amarante-Segundo G. S. , “Análise numérica do aquecimento de plasma, geração de corrente de fluxo por ondas de Alfvén no tokamak TCABR”, *Tese de doutorado apresentada no IFUSP*, (1999).
- [47] Lerche E. A., “Aquecimento do plasma por ondas de Alfvén no tokamak TCABR”, *Tese de doutorado apresentada no IFUSP*, (2003).
- [48] Fonseca A. M. M., “Alguns aspectos do desempenho do tokamak TCABR : modelagem, simulações e resultados experimentais”, *Disertação apresentada no IFUSP*, (2000).
- [49] V. V. Braginskii, *Rev. Plasma Phys.*, edited by V. S. Leontovich, (New York, Consultants Bureau, 1965), **1**, 205.
- [50] F. M. Nekrasov, *Sov. Journ. Plasma Phys.*, **18**, 520 (1992).
- [51] A. G. Kirov, V. P. Sidorov, A. G. Elfimov and em et. al., In *The Proceedings of the 13th International Conference on Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research.*, Kioto (1986), (International Atomic Energy Agency, Viena 1987), **Vol. 1**, p. 645.
- [52] A. G. Elfimov, *Comments on Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion*, **17**, 145 (1996).
- [53] D. Grekov, K. N. Stepanov and J. Tataronis, *Sov. J. Plasma Phys.*, **7**, 411 (1981)
- [54] P. M. Bellan, *Physics of Plasmas*, **1**, 3523 (1994).
- [55] M. Abramowitz, I. A. Stegun, “Handbook of Mathematical Functions”, dover publication Inc., New York (1972), pp. 446-452.
- [56] Akira Hasegawa and Chanchal Uberoi, “The Alfvén Wave”, (Technical Information Center U.S. DOE, 1982).

- [57] L. N. Nosova and S. A. Tumarkin, “Tables of Generalized Airy Functions for the Asymptotic Solution of the Differential Equations”, (Pergamon Press. Oxford, 1965) pp. IX-XV.
- [58] A.B. Mikhailovskii, *Reviews of Plasma Physics*, ed. M.A.Leontovich, **3** p.159 (New York: Consultants Bureau, 1967).
- [59] Wann-Quan Li, David W. Ross, e Swadesh M. Mahajan, *Phys. Fluids B*, **1**, 2353 (1989).
- [60] E. C. Silva, et al., *Braz. J. Phys*, **32**, 39-45 (2002).
- [61] Carlos José Amado Pires, “Tese de mestrado apresentado no IFUSP”, (2003).
- [62] A. G. Elfimov, R. M. O. Galvão, 29th EPS Conference on Plasma Phys. and Contr. Fusion, 17-21 june 2002, Montrex, Switzerland,ECA Vol. **26B**, P-4.108 (2002).
- [63] S. A. Galkin, A. A. Ivanov, S. Yu. Medvedev, and A. G. Elfimov, *Comp. Phys. Communications*, **143**, 29-47 (2002).
- [64] L. Ruchko, M. C. R. Andrade, *et al.* In Proceedings of the 10th International Conference on Plasma Physics. Foz do Iguaçu, November 1994, Brazil, **1**, pp.365.
- [65] L. F. Ruchko, E. Ozono, R. M. O. Galvão, I. C. Nascimento, F. T. Degasperi and E. Lerche, *Fusion Engineering and Design*, **43**, 15 (1998).
- [66] A. G. Elfimov, C. A. Azevedo de Assis, *Solar Phys.*, **167**, 203 (1996).
- [67] Ghendrih Ph., *et. al.*, *Nucl. Fusion*, **42**, 1221 (2002).
- [68] Lippmann, S., Finkenthal, M., Moos, H.W., McCool, S.C., Wootton, A.J., *Nuclear Fusion*, **31** (11), 2131 (1991).
- [69] K.H. Finken, *et al*, *Plasma Phys. Control. Fusion*, **46**, B143 (2004).
- [70] A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich e A. A. Runkhadze, “Principles of Plasma Electrodynamics”, Springer-Verlag 1984.

- [71] L. S. Soloviev, *Reviews of Plasma Physics*, ed. M.A.Leontovich, **6** 239 (New York: Consultants Bureau, 1975).
- [72] B.B.Kadomtsev, *Reviews of Plasma Physics*, ed. M.A.Leontovich, **2** p.153 (New York: Consultants Bureau, 1966).
- [73] A. G. Elfimov, R. M. O. Galvão, I. C. Nascimento and G. Amarante-Segundo *Plasma Phys. Contr. Fusion*, **40**, 451 (1998).
- [74] Synakowski E. J., Batha S. H., Beer M. A., *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 2972 (1997).
- [75] Burrell K. H., *Phys. Plasmas*, **4**, 1499 (1997).
- [76] Wukitch S., Vukovic M., *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.*, **74**, 2240 (1995).
- [77] Wukitch S., Litwin C., Harper M., Perker R. and Hershkovitz N., *Phys. Rev. Lett.*, **77**, 294 (1996).
- [78] Duval B. P. Joye B. and Marchal B., *Nuclear Fusion*, **32**, 1405 (1992).
- [79] N. J. Fisch e C. F. F. Karney, *Phys. Fluids*, **24**, 27 (1981)
- [80] D. A. Ehst and C. F. F. Karney. *Nucl. Fusion*,**31**(10), 1933 (1991).
- [81] A. G. Elfimov and S. Puri, *Nuclear Fusion*, **30**, 1215 (1990).
- [82] V. S. Tsypin, A. G. Elfimov, C. A. Azevedo, A. S. de Assis, *Phys. Plasmas*, **3**, 4606 (1996).
- [83] T. Consoli, *in* 8th Eur. Conf. Contr. Fusion & Plasma Phys., Prague, **Vol. II**, 201 (1977).
- [84] E. Canobbio, Rep. EUR-CEA-FC-968, Fontenay-aux-Roses (France) 1978.
- [85] T. Ohkawa, *Nucl. Fusion*, **10**, 185 (1970).
- [86] R. Klima, *Plasma Phys.*, **15**, 1031 (1973).
- [87] R. Klima, *Czech. J. Phys.*, **B24**, 846 (1974).

- [88] K. L. Wong, *Phys. Rev. Lett.*, **43**, 438 (1979).
- [89] R. Klíma, Petržílka V. A., *Czech. J. Phys.*, **B30**, 1003 (1980).
- [90] A. G. Elfimov, V. Petržílka, J. A. Tataronis, *Phys. Plasmas*, **1**, 2882 (1994).
- [91] A. B. Mikhailovskii and V. S. Tsypin, *Sov. J. Plasma Phys.*, **10**, 142 (1984).
- [92] S. P. Hirshman and D. J. Sigmar, *Nuclear Fusion*, **10**, 1079 (1984).

Apêndice A

A.1 Equação de Onda em Coordenadas Cilíndricas

$$\frac{\omega^2}{c^2} \vec{\epsilon} \cdot \mathbf{E} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \mathbf{E} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Componente radial (r)

$$\begin{aligned} & (k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2) E_r + i \frac{d}{dr} (k_{\perp} E_{\perp} + k_{\parallel} E_{\parallel}) + i \frac{2m}{r^2} (h_z E_{\perp} + h_{\theta} E_{\parallel}) \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{11} E_r + \epsilon_{12} E_{\perp} + \epsilon_{13} E_{\parallel}). \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Componente binormal ($\perp$)

$$\begin{aligned} & i \frac{k_{\perp}}{r} \frac{d}{dr} (r E_r) - i \frac{2m}{r^2} h_z E_r - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d E_{\perp}}{dr} \right) + \left(k_{\parallel}^2 + \dot{h}_z^2 + \dot{h}_{\theta}^2 + \frac{h_z^2}{r^2} \right) E_{\perp} \\ & + 2 \left(h_{\theta} \dot{h}_z - h_z \dot{h}_{\theta} \right) \frac{d E_{\parallel}}{dr} + \left(-k_{\parallel} k_{\perp} + \frac{h_z h_{\theta}}{r^2} + \frac{h_{\theta} \dot{h}_z - h_z \dot{h}_{\theta}^2}{r} + \ddot{h}_z h_{\theta} - \ddot{h}_{\theta} h_z \right) E_{\parallel} \\ &= \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{21} E_r + \epsilon_{22} E_{\perp} + \epsilon_{23} E_{\parallel}). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Componente paralela ($\parallel$)

$$\begin{aligned} & i \frac{k_{\parallel}}{r} \frac{d}{dr} (r E_r) - i \frac{2m}{r^2} h_{\theta} E_r - 2 \left(h_{\theta} \dot{h}_z - h_z \dot{h}_{\theta} \right) \frac{d E_{\perp}}{dr} \\ & + \left(-k_{\parallel} k_{\perp} + \frac{h_{\theta} h_z}{r^2} - \frac{h_{\theta} \dot{h}_z - h_z \dot{h}_{\theta}}{r} + \ddot{h}_{\theta} h_z - h_{\theta} \ddot{h}_z \right) E_{\perp} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r E_{\parallel}) \\ & \left(k_{\perp}^2 + \dot{h}_z^2 + \dot{h}_{\theta}^2 + \frac{h_{\theta}^2}{r^2} \right) E_{\parallel} = \frac{\omega^2}{c^2} (\epsilon_{31} E_r + \epsilon_{32} E_{\perp} + \epsilon_{33} E_{\parallel}). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Onde:

$$\begin{aligned} k_{\parallel} &= k_z h_z + k_{\theta} h_{\theta} , & k_z &= k_{\parallel} h_z - k_{\perp} h_{\theta} , \\ k_{\perp} &= -k_z h_{\theta} + k_{\theta} h_z , & k_{\theta} &= \frac{m}{r} = k_{\parallel} h_{\theta} + k_{\perp} h_z . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dk_{\parallel}}{dr} &= k_{\perp} \left(h_z \dot{h}_{\theta} - h_{\theta} \dot{h}_z - \frac{h_{\theta} h_z}{r} \right) - k_{\parallel} \frac{h_{\theta}^2}{r} = k_{\perp} \aleph_1 - k_{\parallel} \frac{h_{\theta}^2}{r} , \\ \frac{dk_{\perp}}{dr} &= k_{\parallel} \left(h_{\theta} \dot{h}_z - h_z \dot{h}_{\theta} - \frac{h_z h_{\theta}}{r} \right) - k_{\perp} \frac{h_z^2}{r} = -k_{\parallel} \aleph_2 - k_{\perp} \frac{h_z^2}{r} . \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} h_{\theta}^2 + h_z^2 &= 1 , & h_{\theta} &= \frac{B_{\theta}}{B} , & h_z &= \frac{B_z}{B} , & \text{e} \\ \aleph_1 &= h_z \dot{h}_{\theta} - h_{\theta} \dot{h}_z - \frac{h_{\theta} h_z}{r} , & \aleph_2 &= h_{\theta} \dot{h}_z - h_z \dot{h}_{\theta} - \frac{h_z h_{\theta}}{r} . \end{aligned}$$

A.2 Tensor Dielétrico em Coordenadas Cilíndricas

Primeiramente faremos a transformação da equação de Vlasov (2.1) para coordenadas cilíndricas, supondo as seguintes relações:

$$X = r \cos(\theta) \qquad Y = r \sin(\theta) \qquad Z = z .$$

$$v_x = v_r \cos(\theta) - v_{\theta} \sin(\theta) \qquad v_y = v_r \sin(\theta) + v_{\theta} \cos(\theta) \qquad v_z = v_{\parallel} ,$$

e inserindo-as na equação de Vlasov (2.1) obtemos, após algumas contas,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + v_r \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \theta} + \frac{v_{\theta}}{r} \left(v_{\theta} \frac{\partial}{\partial v_r} - v_r \frac{\partial}{\partial v_{\theta}} \right) F_{\alpha} + v_z \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial z} \\ & + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \left(E_r + \frac{1}{c} [B_z v_{\theta} - B_{\theta} v_z] \right) \frac{\partial}{\partial v_r} + \left(E_{\theta} + \frac{1}{c} [B_r v_z - B_z v_r] \right) \frac{\partial}{\partial v_{\theta}} \right\} F_{\alpha} \\ & + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\{ \left(E_z + \frac{1}{c} [B_{\theta} v_r - B_r v_{\theta}] \right) \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \right\} F_{\alpha} = \hat{S}t[F_{\alpha}] . \end{aligned} \tag{A.5}$$

Definimos agora um novo sistema de coordenadas para a velocidade, baseado no campo

magnético de equilíbrio e considerando o ângulo σ , definindo a partir da direção deste campo $\mathbf{B}_{0,z} = B_0 \hat{z}$, mais as direções paralela e perpendicular a $\mathbf{B}_0$:

$$v_r = v_\perp \cos(\sigma) \quad v_\theta = v_\perp \sin(\sigma) \quad v_z = v_\parallel ,$$

$$0 \leq v_\perp < \infty \quad 0 \leq \sigma < 2\pi \quad -\infty < v_\parallel < \infty$$

Introduzindo estas relações na equação (A.5) e, depois de alguns cálculos, obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + v_\perp \cos(\sigma) \frac{\partial F_\alpha}{\partial r} + \frac{v_\perp}{r} \sin(\sigma) \frac{\partial F_\alpha}{\partial \theta} + v_\parallel \frac{\partial F_\alpha}{\partial z} - \left(\omega_{c\alpha} + \frac{v_\parallel}{r} \sin(\sigma) \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma} \\ & + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left[\left(E_r - \frac{v_\parallel}{c} B_\theta \right) \cos(\sigma) + \left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c} B_r \right) \sin(\sigma) \right] \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\perp} \\ & + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left[\frac{v_\perp}{c} (B_\theta \cos(\sigma) - B_r \sin(\sigma)) + E_z \right] \frac{\partial F_\alpha}{\partial v_\parallel} \\ & + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left[\left(E_\theta + \frac{v_\parallel}{c} B_r \right) \cos(\sigma) - \left(E_r - \frac{v_\parallel}{c} B_\theta \right) \sin(\sigma) \right] \frac{\partial F_\alpha}{v_\perp \partial \sigma} = \hat{S}t[F_\alpha] , \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

onde $\omega_{c\alpha} \simeq (e_\alpha/cm_\alpha)B_\parallel$ é a frequência de ciclotron das partículas.

Consideraremos que o campo magnético estacionário é dado por [19]:

$$B_{0,r} = 0 \quad B_{0,\theta} = B_0 \hat{\theta} \quad B_{0,z} = B_0 \hat{z} .$$

Supondo que, no equilíbrio, os parâmetros não variam com o tempo e que o plasma apresenta homogeneidade na direção poloidal ($\hat{\theta}$), e axial ($\hat{z}$), então toda dependência do tempo e das coordenadas poloidal e axial dos campos perturbados magnético e elétrico ($\tilde{\mathbf{E}}$ e $\tilde{\mathbf{B}}$), na aproximação linear, tem a dependência $\exp[i(m\theta + k_\parallel z - \Omega t)]$, isto é devido à homogeneidade sobre estas variáveis. Aqui Ω é a frequência da onda, m/r e $k_\parallel$ são o vetor de onda na direção poloidal e paralela ao campo magnético respectivamente.

Para linearizarmos a equação de Vlasov (2.1), devemos dividir a função de distribuição em duas partes, $F_\alpha = F_{0\alpha} + \tilde{f}_\alpha$ (a função de distribuição do equilíbrio $F_{0\alpha}$ e a perturbada $\tilde{f}_\alpha$).

Podemos representar as funções de distribuição de equilíbrio e perturbada em séries

de Fourier da forma:

$$F_{0\alpha} = F_{M\alpha} + \sum_{l \neq 0} [F_{\alpha_b, l} \text{sen}(\sigma l) + F_{\alpha_r, l} \cos(\sigma l)] , \quad (\text{A.7})$$

$$\tilde{f}_\alpha = \left\{ f_{\alpha_0} + \sum_{l \neq 0} [f_{\alpha_b, l} \text{sen}(\sigma l) + f_{\alpha_r, l} \cos(\sigma l)] \right\} e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} , \quad (\text{A.8})$$

Tomando termos só até a primeira ordem, ou seja, da forma

$$\begin{aligned} F_\alpha &= F_{M\alpha} + F_{\alpha_b} \text{sen}(\sigma) + F_{\alpha_r} \cos(\sigma) \\ &+ [f_{\alpha_0} + f_{\alpha_b} \text{sen}(\sigma) + f_{\alpha_r} \cos(\sigma)] e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} , \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde $F_{M\alpha}$, F_{α_b} , F_{α_r} são as componentes da função de distribuição de equilíbrio, maxwelliana, na direção binormal e radial, respectivamente. Os coeficientes f_{α_0} , f_{α_b} , f_{α_r} são os mais importantes para a avaliação do tensor dielétrico, sendo que f_{α_0} está relacionado à função de distribuição perturbada das partículas que giram em torno das linhas do campo magnético e f_{α_b} , f_{α_r} são correções da função de distribuição perturbada.

É feita também a hipótese de que $\hat{S}t[F_\alpha]$ é dado pelo operador colisional de *Krook*, que é da forma $\hat{S}t[F_\alpha] = -\nu_\alpha \hat{f}_\alpha$, onde ν_α é a frequência de relaxação do plasma.

Substituindo a equação (A.9) na equação (A.6), e igualando termos do primeiro membro com o do segundo membro, ou seja, igualando termos que não dependem de σ , termos que dependem de $\cos(\sigma)$ e $\text{sen}(\sigma)$ (termos que contem $\cos(2\sigma)$ e $\text{sen}(\sigma)\cos(\sigma)$ não são considerados), depois de alguns cálculos obtemos:

$$\begin{aligned}
& - \nu_e f_0 e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} = \frac{v_{\perp}}{2} \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{v_{\perp}}{2r} F_r + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_{\theta} + \frac{1}{c} B_r v_{\parallel}) \frac{F_b}{v_{\perp}} + \frac{e_{\alpha}}{2m_{\alpha}} (E_r - \frac{1}{c} B_{\theta} v_{\parallel}) \frac{F_r}{r} \\
& + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\parallel} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\parallel}} + \frac{e_{\alpha}}{2m_{\alpha}} (E_r - \frac{1}{c} B_{\theta} v_{\parallel}) \frac{\partial F_r}{\partial v_{\perp}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_{\theta} + \frac{1}{c} B_r v_{\parallel}) \frac{\partial F_b}{\partial v_{\perp}} + \frac{e_{\alpha}}{2cm_{\alpha}} B_{\theta} v_{\perp} \frac{\partial F_r}{\partial v_{\parallel}} \\
& - \frac{e_{\alpha}}{2cm_{\alpha}} B_r v_{\perp} \frac{\partial F_b}{\partial v_{\parallel}} + \left\{ -i\Omega f_0 + v v_{\parallel} k_{\parallel} f_0 + \frac{v_{\perp}}{2} \frac{\partial f_r}{\partial r} + \frac{v_{\perp}}{2r} f_r + i \frac{m v_{\perp}}{2r} f_b \right. \\
& + \frac{e_{\alpha}}{2m_{\alpha}} (E_r - \frac{1}{c} B_{\theta} v_{\parallel}) \frac{\partial f_r}{\partial v_{\perp}} + \frac{e_{\alpha}}{2m_{\alpha}} (E_{\theta} + \frac{1}{c} B_r v_{\parallel}) \frac{\partial f_b}{\partial v_{\perp}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_{\theta} + \frac{1}{c} B_r v_{\parallel}) \frac{f_b}{v_{\perp}} - \omega_{c\alpha} \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \\
& \left. - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_r - \frac{1}{c} B_{\theta} v_{\parallel}) \frac{f_r}{v_{\perp}} + \frac{e_{\alpha}}{2cm_{\alpha}} B_{\theta} v_{\perp} \frac{\partial f_r}{\partial v_{\parallel}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\parallel} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} - \frac{e_{\alpha}}{2cm_{\alpha}} B_r v_{\perp} \frac{\partial f_b}{\partial v_{\parallel}} \right\} \times \\
& e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} , \tag{A.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \nu_e f_r e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} = v_{\perp} \frac{\partial F_M}{\partial r} - \omega_{c\alpha} F_b + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_r - \frac{1}{c} B_{\theta} v_{\parallel}) \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} + \frac{e_{\alpha}}{cm_{\alpha}} B_{\theta} v_{\perp} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\parallel}} \\
& + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\parallel} \frac{\partial F_r}{\partial v_{\parallel}} + \left\{ -i\Omega f_r + v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial r} - \omega_{c\alpha} f_b + i k_{\parallel} v_{\parallel} f_r + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_r - \frac{1}{c} B_{\theta} v_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \right. \\
& \left. + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_{\theta} + \frac{1}{c} B_r v_{\parallel}) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\parallel} \frac{\partial f_r}{\partial v_{\parallel}} + \frac{e_{\alpha}}{cm_{\alpha}} B_{\theta} v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \right\} e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} , \tag{A.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \nu_e f_b e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} = \omega_{c\alpha} F_r + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_{\theta} + \frac{1}{c} B_r v_{\parallel}) \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} - \frac{e_{\alpha}}{cm_{\alpha}} B_r v_{\perp} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} \\
& + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\parallel} \frac{\partial F_b}{\partial v_{\parallel}} + \left\{ -i\Omega f_b + \omega_{c\alpha} f_r + v v_{\parallel} k_{\parallel} f_b + i \frac{m}{r} v_{\perp} f_0 + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_{\theta} + \frac{1}{c} B_r v_{\parallel}) \frac{\partial f_0}{\partial v_{\perp}} \right. \\
& \left. - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} (E_r - \frac{1}{c} B_{\theta} v_{\parallel}) \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\parallel} \frac{\partial f_b}{\partial v_{\parallel}} - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} B_r v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial v_{\parallel}} \right\} e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} . \tag{A.12}
\end{aligned}$$

Daqui em diante omitiremos os sub-índices α para simplificar a escrita das equações.

Nas equação (A.10,A.11,A.12) os campos são definidos da forma

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 + \tilde{\mathbf{E}}_{(r,\theta,z)} e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} , & \mathbf{E}_0 &= 0 , \\
\mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}_{(r,\theta,z)} e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)} .
\end{aligned}$$

Da equação (A.11) pegamos os termos independentes do tempo, e usando a identidade

$$v_{\perp} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\parallel}} = v_{\parallel} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}},$$

obtemos

$$v_{\parallel} \frac{\partial F_M}{\partial r} - \omega_{c\alpha} F_b + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_{\parallel} \frac{\partial F_r}{\partial v_{\parallel}} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Considerando o caso em que $F_r = 0$, de (A.13) obtemos

$$v_{\parallel} \frac{\partial F_M}{\partial r} - \omega_{c\alpha} F_b.$$

Então a correção para a função de distribuição no equilíbrio é

$$F_{0\alpha} = F_M + F_b \sin(\sigma).$$

Da equação (A.10) pegamos os termos só até a primeira harmônica ($e^{i(m\theta + k_{\parallel} z - \Omega t)}$), e usando a identidade

$$v_{\perp} \frac{\partial F_b}{\partial v_{\parallel}} = v_{\parallel} \frac{\partial F_b}{\partial v_{\perp}},$$

obtemos, depois de alguns cálculos, o seguinte

$$\begin{aligned} & i(v_{\parallel} k_{\parallel} - \omega) f_0 + \frac{v_{\perp}}{2} \left(\frac{df_r}{dr} + \frac{f_r}{r} + i \frac{m}{r} f_b \right) \\ = & -\frac{e}{m_{\alpha}} \left[E_{\parallel} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\parallel}} + \frac{E_{\theta}}{\omega_c} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F_M}{2} + \frac{v_{\perp}}{2} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} \right) + \frac{v_{\parallel}}{2cv_{\perp}} B_r F_b \right]; \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\omega_c f_b = -i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) f_r + v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[E_r \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} - \frac{B_{\parallel}}{c} F_b \right]; \quad (\text{A.15})$$

$$\omega_c f_r = i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) f_b - ik_b v_{\perp} f_0 - \frac{e}{m_{\alpha}} \left[E_{\theta} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} + E_{\parallel} \frac{\partial F_b}{\partial v_{\parallel}} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Nestas equações usamos uma nova variável $\omega \rightarrow \Omega + \nu_e$.

Multiplicando a equação (A.15) por $\omega_{c\alpha}$ e a equação (A.16) por $-i(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel})$ e, depois somando os resultados, obtém-se (fazemos isto para obtermos f_b só em função de f_0)

$$\begin{aligned}
(\omega_{c\alpha}^2 - (\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2) f_b &= \omega_{c\alpha}v_{\perp} \frac{\partial f_0}{\partial r} + \imath(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[E_{\theta} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} + E_{\parallel} \frac{\partial F_b}{\partial v_{\parallel}} \right] - \\
&(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) k_b v_{\perp} f_0 + \frac{\omega_{c\alpha}e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[E_r \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} - \frac{B_{\parallel}}{c} F_b \right]. \quad (\text{A.17})
\end{aligned}$$

Para obtermos f_r só em função de f_0 , fazemos como no caso anterior, ou seja, multiplicamos a equação (A.15) por $\imath(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})$ e, a equação (A.16) por $\omega_{c\alpha}$ e, depois somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned}
(\omega_{c\alpha}^2 - (\omega - k_{\parallel}v_{\parallel})^2) f_r &= \imath \left((\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) v_{\perp} \frac{\partial}{\partial r} - \omega_{c\alpha} k_b v_{\perp} \right) f_0 - \\
&\frac{\omega_{c\alpha}e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[E_{\theta} \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} + E_{\parallel} \frac{\partial F_b}{\partial v_{\parallel}} \right] + \imath(\omega - k_{\parallel}v_{\parallel}) \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[E_r \frac{\partial F_M}{\partial v_{\perp}} - \frac{B_{\parallel}}{c} F_b \right]. \quad (\text{A.18})
\end{aligned}$$

Agora passamos ao cálculo do tensor dielétrico. Para isto temos primeiro que determinar a densidade de corrente oscilatória, devido à perturbação dos campos de RF. Da lei de Ohm $\tilde{\mathbf{j}} = \overleftrightarrow{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{E}}$ e das equações de Maxwell (2.2) obtemos,

$$4\pi j_i = -\imath\Omega(\delta_{ij} - \epsilon_{ij})E_j. \quad (\text{A.19})$$

Vemos desta equação que, para se determinar o tensor dielétrico, é preciso determinar primeiro a densidade de corrente oscilatória, que tem como definição

$$\tilde{\mathbf{j}} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} \tilde{f}_{\alpha} d^3v, \quad d^3v = v_{\perp} dv_{\perp} dv_{\parallel} d\sigma.$$

A densidade de corrente oscilatória para cada componente é dada por

$$\begin{aligned}
j_r &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int_0^{2\pi} d\sigma \cos\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 \tilde{f}_{\alpha} dv_{\perp} \\
&= \pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} v_{\perp}^2 f_r^{(\alpha)} dv_{\perp}; \quad (\text{A.20})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j_\theta &= \sum_\alpha e_\alpha \int_0^{2\pi} d\sigma \sin\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 \tilde{f}_\alpha dv_\perp \\
&= \pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp^2 f_b^{(\alpha)} dv_\perp;
\end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\begin{aligned}
j_\parallel &= \sum_\alpha e_\alpha \int_0^{2\pi} d\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} v_\parallel dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp \tilde{f}_\alpha dv_\perp \\
&= 2\pi \sum_\alpha e_\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} v_\parallel dv_\parallel \int_0^\infty v_\perp f_0^{(\alpha)} dv_\perp.
\end{aligned} \tag{A.22}$$

Colocando nestas integrais os coeficientes f_0 , f_r e f_b , dados nas equações (A.14,A.17,A.18), e calculando as integrais (A.20,A.21,A.22) que depois serão introduzidas na equação (A.19), obtemos os elementos do tensor dielétrico:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= 1 + \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2} + 2 \frac{k_b^2 v_{T\alpha}^2}{\omega^2} (\Lambda_\alpha - 1) \right]; \\
\epsilon_{12} &= \sum_\alpha \frac{i\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2} - \frac{(\chi_N + \chi_T)k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} + \frac{2k_b v_{T\alpha}^2}{r\omega\omega_{c\alpha}} (\Lambda_\alpha - 1) \frac{\partial}{\partial r}(r...) \right]; \\
\epsilon_{13} &= -i \frac{k_b}{k_\parallel} \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left\{ \Lambda_\alpha - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{2\omega\omega_{c\alpha}} [\chi_T + 2\chi_N \Lambda_\alpha + \chi_T(1 + 2z_\alpha^2) \Lambda_\alpha] \right\}; \\
\epsilon_{21} &= -\epsilon_{12} - i \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega^2} \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} \left\{ \frac{4}{r} (\Lambda_\alpha - 1) - 2\chi_N \Lambda_\alpha - \chi_T [(1 + 2z_\alpha^2) \Lambda_\alpha - 1] \right\}; \\
\epsilon_{22} &= \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega_{c\alpha}^2} \left\{ 1 + \frac{\omega^2}{\omega_{c\alpha}^2} - 2 \frac{v_{T\alpha}^2}{\omega^2} (\Lambda_\alpha - 1) \frac{\partial}{\partial r} r \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \dots \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\chi_N v_{T\alpha}^2}{r\omega^2} \left[1 + 2(\Lambda_\alpha - 1) \frac{\partial}{\partial r}(r...) \right] - \frac{\chi_T v_{T\alpha}^2}{r\omega^2} \left[1 - [1 - (1 + 2z_\alpha^2) \Lambda_\alpha] \frac{\partial}{\partial r}(r...) \right] \right\}; \\
\epsilon_{23} &= \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left\{ \Lambda_\alpha \frac{1}{k_\parallel} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\chi_N}{k_\parallel} \Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2k_\parallel} [1 - (1 - 2z_\alpha^2) \Lambda_\alpha] \right\}; \\
\epsilon_{31} &= -\epsilon_{13} + i \frac{k_b}{k_\parallel} \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left[(1 - \Lambda_\alpha) \frac{k_\parallel v_{0\alpha}}{\omega} \right]; \\
\epsilon_{32} &= \frac{-1}{k_\parallel r} \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left\{ \Lambda_\alpha - \frac{k_b v_{T\alpha}^2}{\omega\omega_{c\alpha}} \left\{ \chi_N \Lambda_\alpha + \frac{\chi_T}{2} [1 + (1 + 2Z_\alpha^2) \Lambda_\alpha] \right\} \right\} \frac{\partial}{\partial r}(r...);
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{33} = \sum_{\alpha} \frac{\omega_{P\alpha}^2}{k_{\parallel}^2 v_{T\alpha}^2} \left\{ \Lambda_{\alpha} - \frac{\chi_N k_b v_{T\alpha}^2}{\omega \omega_{c\alpha}} \Lambda_{\alpha} - \frac{\chi_T k_b v_{T\alpha}^2}{2\omega \omega_{c\alpha}} [1 - (1 - 2z_{\alpha}^2) \Lambda_{\alpha}] \right\};$$

onde $\omega_{P\alpha}^2 = 4\pi N_{0\alpha} e_{\alpha}^2 / M_{\alpha}$ é a frequência do plasma e

$$\Lambda_{\alpha} = 1 + i\sqrt{\pi} z_{\alpha} W(z_{\alpha}), \quad z_{\alpha} = \frac{\omega}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{T\alpha}}$$

$$W(z_{\alpha}) = -\frac{i}{\sqrt{\pi}} Z(z_{\alpha}) = \exp(-z_{\alpha}^2) \left[1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_{\alpha}} \exp(t^2) dt \right],$$

$Z(z_{\alpha})$ é a usual função de dispersão do plasma, $\omega_{c\alpha}$ é a frequência de ciclotron das partículas, $v_{T\alpha}$ é a velocidade térmica das partículas, $W(z_{\alpha})$ é a função de Kramp e χ_1, χ_N, χ_T são os parâmetros de inomogeneidade radial do campo magnético poloidal, densidade e temperatura, respectivamente. Estes parâmetros de inomogeneidade são definidos da seguinte forma

$$\chi_1 = r h_z^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{h_{\theta}}{r h_z} \right), \quad \chi_N = \frac{\partial}{\partial r} \ln N_0, \quad \chi_T = \frac{\partial}{\partial r} \ln T.$$

A.3 Expansão em Séries de Taylor dos Coeficientes Inomogêneos

Partindo da equação

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\epsilon_{33} \omega^2} r \frac{d^2 E_r}{dr^2} - \left(k_{\parallel}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{11} \right) r E_r \right] \approx 0. \quad (\text{A.23})$$

- Para a componente do tensor dielétrico ϵ_{11} .

$$\epsilon_{11} = \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{c_i}^2 - \omega^2} \approx \frac{\omega_{p_i}^2}{\omega_{c_i}^2} = \frac{c^2}{c_A^2(r)},$$

onde consideramos $\omega_{c_i} \gg \omega$, expandindo em séries de Taylor

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11} &= \frac{c^2}{c_A^2(0)} \frac{1}{n_0} \left[n(r)|_{r=r_s} + (r - r_s) \frac{dn(r)}{dr} \Big|_{r=r_s} \right] \\
&= \frac{c^2}{c_A^2(r_s) n(r_s)} \left[n(r_s) + (r - r_s) \frac{n_0}{L_r} \right].
\end{aligned}$$

Finalmente temos

$$\epsilon_{11} = \frac{c^2}{c_A^2(r_s)} \left[1 - \frac{r - r_s}{a_1 - r_s} \right] \approx \frac{c^2}{c_A^2(r_s)}. \quad (\text{A.24})$$

sendo que

$$c_A(r) = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 m n(r)}} = c_A(0) \sqrt{\frac{n_0}{n(r)}} = c_A(r_s) \sqrt{\frac{n(r_s)}{n(r)}}$$

é a velocidade de Alfvén.

• Para o vetor número de onda paralelo $k_{\parallel}$.

$$k_{\parallel} = h_z k_z + h_{\theta} k_{\theta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta}} \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{qR} \right) \approx \left(\frac{n}{m} + \frac{m}{qR} \right), \quad (\text{A.25})$$

com

$$\begin{aligned}
k_z &= \frac{n}{R}, & k_{\theta} &= \frac{m}{r}, & h_z &= \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}}, \\
h_{\theta} &= \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}}, & \delta &= \frac{r}{qR}, & q &= \frac{r B_z}{R B_{\theta}}.
\end{aligned}$$

onde $\delta^2 \ll 1$, com q como fator de segurança. Expandindo $k_{\parallel}$ em séries de Taylor em torno de r_s

$$k_{\parallel} = k_{\parallel}|_{r=r_s} + (r - r_s) \frac{dk_{\parallel}}{dr} \Big|_{r=r_s} = (r - r_s) \frac{dk_{\parallel}}{dr} \Big|_{r=r_s},$$

onde $k(r = r_s) = 0$. Elevando ao quadrado $k_{\parallel}$ e usando a sua definição (A.25) obtemos

$$k_{\parallel}^2 = \left[(r - r_s) \frac{dk_{\parallel}}{dr} \Big|_{r=r_s} \right]^2 = k_z^2 \frac{(r - r_s)^2}{r_s^2} \varrho^2, \quad (\text{A.26})$$

onde

$$\varrho = \left[q r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{q} \right) \right]_{r=r_s} ,$$

é o parâmetro de cisalhamento.

Introduzindo as equações (A.24) e (A.26) em (A.23) e usando a mudança de variável $x = (r - r_s)/r_s$ obtemos

$$\frac{d}{dx} \left[\left(\frac{\epsilon_{11,s}}{\epsilon_{33,s}} \right) \frac{d^2 E_r}{dx^2} - \left(k_z^2 \varrho^2 r_s^2 x^2 - \frac{\omega^2 r_s^2}{v_{A,s}^2} \right) E_r \right] \approx 0 , \quad (\text{A.27})$$

onde $\epsilon_{jj,s} = \epsilon_{jj}|_{r=r_s}$, $v_{A,s} = c_A(r)|_{r=r_s}$ e, na superfície racional, supomos que o tensor dielétrico $\epsilon_{11,s} \approx \left[\frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} \right]_{r=r_s}$.

Agora podemos levar esta última equação à forma de uma equação parabólica inhomogênea [55]

$$\frac{d^2 E_r}{d\eta^2} + (\lambda - \eta^2) E_r \approx C , \quad (\text{A.28})$$

onde C é uma constante e

$$\eta = \Upsilon x , \quad \Upsilon = \left(\frac{k_z^2 \varrho^2 r_s^2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{4}} , \quad \epsilon = \frac{\epsilon_{11,s}}{\epsilon_{33,s}} , \quad \lambda = \frac{\omega^2 r_s^2}{c_{A,s}^2} \left(\frac{1}{\epsilon k_z^2 \varrho^2 r_s^2} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

A.4 Potência Dissipada

A equação de continuidade ou lei de conservação da energia eletromagnética é dada por

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dV , \quad (\text{A.29})$$

onde

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \frac{c}{8\pi\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) , \quad (\text{A.30})$$

é o vetor de Poynting. De $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}$ obtemos

$$\mathbf{B} = \frac{-ic}{\omega} [-ik_z E_y, ik_z E_x, -ik_y E_x] . \quad (\text{A.31})$$

Como $ik_y E'_y \simeq -E_x (k_z^2 + k_y^2)$, então (A.31) fica na forma

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} \left[-k_z E_y, ik_z E_x, -i \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} E'_y \right], \quad (\text{A.32})$$

e seu complexo conjugado é

$$\mathbf{B}^* = \frac{c}{\omega} \left[-k_z E_y^*, -ik_z E_x^*, i \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} E_y'^* \right]. \quad (\text{A.33})$$

Substituindo (A.33) no vetor de Poynting (A.30), obtemos

$$\mathbf{S} = \frac{c^2}{8\pi\mu_0\omega} \left(i \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} E_y E_y'^*, -i \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} E_x E_y'^*, k_z E_x E_x^* + k_z E_y E_y^* \right). \quad (\text{A.34})$$

Pode-se mostrar que

$$\text{Re} \left\{ \oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{S} \right\} = -\frac{L_y L_z c^2}{8\pi\mu_0\omega} \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} \text{Im} (E_y E_y'^*) . \quad (\text{A.35})$$

Das equações de Maxwell temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \frac{c}{4\pi} \left(i \frac{\omega}{c} \epsilon_0 \mathbf{E} + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}^* \right) \\ &= \frac{c^2}{4\pi\mu_0\omega} \left(i \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \mu_0 \mathbf{E} + \left\{ 0, -ik_z^2 E_y - i \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} E_y'', k_z E'_x + ik_y k_z E_y \right\} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

e

$$\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} = \frac{c^2}{4\pi\mu_0\omega} \left(-i \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \mu_0 (E_x^* E_x + E_y^* E_y) + ik_z^2 E_y^* E_y - i \frac{k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} E_y''^* E_y \right). \quad (\text{A.37})$$

Então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dV &= \frac{L_y L_z c^2}{8\pi\mu_0\omega} \int \left(-\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \mu_0 E_x^* \frac{k_y}{k_z^2 + k_y^2} E_y' - i \left(\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_0 \mu_0 - k_z^2 \right) E_y^* E_y + \frac{E_x^*}{k_y} E_y k_z^2 \right) dx \\
&= \frac{L_y L_z c^2}{8\pi\mu_0\omega k_y} \left(-\frac{k_y^2 k_z^2}{k_z^2 + k_y^2} \epsilon_0 \mu_0 \int E_x^* E_y' dx + k_z^2 \int E_x^* E_y dx \right).
\end{aligned}$$

Como

$$\int E_x' E_y dx = E_y^* E_y - \int E_x^* E_y' dx = i \frac{k_y}{k_z^2 + k_y^2} E_y^* E_y - \int E_x^* E_y' dx,$$

podemos chegar a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_V \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dV &= i \frac{L_y L_z c^2}{8\pi\mu_0\omega (k_{\parallel}^2 + k_y^2)} E_y^* E_y - \frac{L_y L_z c^2 k_{\parallel}^2}{8\pi\mu_0\omega k_y} \left(\frac{k_y^2}{k_{\parallel}^2 + k_y^2} \int E_x^* E_y' dx - \int E_x^* E_y' dx \right) \\
&\simeq i \frac{L_y L_z c^2}{8\pi\mu_0\omega (k_{\parallel}^2 + k_y^2)} E_y^* E_y
\end{aligned}$$

Usando as relações (2.25), chega-se a

$$Re \frac{1}{2} \int \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E} dv = \frac{L_x L_y c^2}{8\pi\mu_0\omega (k_z^2 + k_y^2)} |E_y|^2 \pi \frac{r_A - r_t}{r_A}, \quad (\text{A.38})$$

Esta expressão representa o valor da potência dissipada na ressonância do modo de Alfvén local. Onde L_x e L_y são a inomogeneidade do meio, com $L_x = r$ e $L_y = 2\pi r$.

Apêndice B

Tensor Dielétrico Utilizado no Código Cinético Toroidal

Listamos a expressão completa do tensor de susceptibilidade magnética utilizado no código cinético toroidal 2D [46]. Algumas funções, *flags* e parâmetros de inclusão de efeitos opcionais são mantidos da forma em que são introduzidos no código. Estes são:

- Função de dispersão do plasma $PDF[x] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{Z_{\alpha}-x} dx$.
- F : Razão n_{imp}/n_e .
- $COUP1$: Termo que sinaliza a existência ou não de impurezas tipo 1.
- $COUP2$: Termo que sinaliza a existência ou não de impurezas tipo 2.
- $YZCOUP$: Termo de acoplamento dos elementos $r\parallel$ e $\perp\parallel$ do tensor dielétrico.
- $BICOUP$: Termo que sinaliza os efeitos de raio de Larmor finito.
- $YYCOUP$: Termo de acoplamento dos termos de correção íon-acústica no elemento $\perp\perp$ do tensor dielétrico.

$$\begin{aligned}
\epsilon_{rr} = & \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ \frac{\omega^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r) - k_\perp^2(r) \left[\frac{3}{2} \rho_i^2(r) \frac{\omega^2}{c_A^2} \alpha_i(r) - \frac{3}{4} \rho_{imp}^2(r) F \frac{\omega \omega_{p,imp}(r)}{c^2 |k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right. \right. \\
& \left. \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] \right) \cdot COUP1 \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} \rho_i^2(r) \frac{\omega \omega_{p,i}^2(r)}{c^2 |k_\parallel(r)| v_{Ti}(r)} \left(PDF \left[\frac{\omega - 2\Omega_i(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Ti}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + 2\Omega_i(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Ti}(r)} \right] \right) \cdot BICOUP \right] \\
& \frac{1}{2a^2} \left[\frac{d}{dr} \left(\rho_i^2(r) \frac{\omega^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r) + \rho_{imp}^2(r) ZPI1(I, J) - \rho_i^2(r) ZPI3 \right) \left(\frac{a}{r} + \frac{d}{dr} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{a^2} RIW1SQ \left(-\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\omega \omega_{p,imp}(r)}{c^2 |k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] \right. \\
& \left. \left. + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] \right) \cdot COUP1 \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\perp r} = & -i \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ \frac{\omega}{\Omega_i(r)} \frac{\omega^2}{c_A^2} \alpha_i(r) - RIW1SQ \frac{k_\perp(r)}{a} \left(\frac{a}{r} + \frac{d}{dr} \right) \right. \\
& + \frac{k_\perp(r)}{a} \frac{d}{dr} \left(\frac{3}{2} \rho_i^2(r) \frac{\omega^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r) + \frac{3}{2} \rho_{imp}^2(r) ZPI1(I, J) - \rho_i^2(r) ZPI3 \right) \\
& + RIW3SQ \frac{dk_\perp(r)}{dr} + RIW3SQ \frac{k_\perp(r)}{a} \frac{d}{dr} + \left[\frac{1}{2} \frac{\omega \omega_{p,imp}(r) F}{c^2 |k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right. \\
& \left. \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] \right) - \frac{\omega \omega_{p,imp}(r) F}{\Omega_{imp}(r) c^2} \right] \cdot COUP2 \left. \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{r\perp} = & i \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ \frac{\omega}{\Omega_i(r)} \frac{\omega^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r) - RIW3SQ \frac{k_\perp(r)}{a} \left(\frac{a}{r} + \frac{d}{dr} \right) \right. \\
& \frac{1}{2} \frac{k_\perp}{a} \frac{d}{dr} \left(\rho_i^2(r) \frac{\omega^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r) + \rho_{imp}^2(r) ZPI1(I, J) - \rho_i^2(r) ZPI3 \right) \\
& + RIW1SQ \frac{dk_\perp(r)}{dr} + RIW1SQ \frac{k_\perp(r)}{a} \frac{d}{dr} + \left[\frac{1}{2} \frac{\omega \omega_{p,imp}(r) F}{c^2 |k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right. \\
& \left. \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_\parallel(r)| v_{Timp}(r)} \right] \right) - \frac{\omega \omega_{p,imp}(r) F}{\Omega_{imp}(r) c^2} \right] \cdot COUP2 \left. \right\} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\perp\perp} = & \frac{c^2}{\omega^2} \left\{ \frac{\omega^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r) - RIW1SQ k_\perp^2(r) + DBBI2 \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{r} + \frac{d}{dr} \right) \right. \\
& \left. + RIW3SQ \frac{1}{a^2} \left(-\frac{a^2}{r^2} + \frac{a}{r} \frac{d}{dr} + \frac{d^2}{dr^2} \right) + ZIP1 \right\} .
\end{aligned}$$

$$\epsilon_{r\parallel} = \epsilon_{\parallel r} = -ik_{\perp}(r) \frac{c^2}{c_A^2(r)} \frac{\Omega_i(0)Z_i}{k_{\parallel}(r)\omega} \left(1 + \frac{\omega}{k_{\parallel}(r)v_{Te}} PDF \left[\frac{\omega}{|k_{\parallel}(r)|v_{Te}} \right] \right) \cdot YZCOUP.$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{\perp\parallel} = & -\frac{1}{a} \left\{ \frac{c^2}{c_A^2(r)} \frac{\Omega_i(0)Z_i}{|k_{\parallel}(r)|\omega} \left(1 + \frac{\omega}{k_{\parallel}(r)v_{Te}} PDF \left[\frac{\omega}{|k_{\parallel}(r)|v_{Te}} \right] \right) \cdot YZCOUP \frac{d}{dr} \right. \\ & \left. + \frac{d}{dr} \left[\frac{c^2}{c_A^2(r)} \frac{\Omega_i(0)Z_i}{k_{\parallel}(r)\omega} \left(1 + \frac{\omega}{k_{\parallel}(r)v_{Te}} PDF \left[\frac{\omega}{|k_{\parallel}(r)|v_{Te}} \right] \right) \cdot YZCOUP \right] \right\}. \end{aligned}$$

$$\epsilon_{\parallel\perp} = \frac{1}{a} \left[\frac{c^2}{c_A^2(r)} \frac{\Omega_i(0)Z_i}{k_{\parallel}(r)\omega} \left(1 + \frac{\omega}{k_{\parallel}(r)v_{Te}} PDF \left[\frac{\omega}{|k_{\parallel}(r)|v_{Te}} \right] \right) \cdot YZCOUP \right] \left[\frac{a}{r} + \frac{d}{dr} \right].$$

$$\epsilon_{\parallel\parallel} = \frac{\frac{c^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r)}{\frac{k_{\parallel}^2(r) \rho_e^2(r) \frac{m_p}{m_e} \alpha_i(r) [1 - Z_{imp}(r)F] A_i}{\left(1 - \sqrt{\frac{2r}{R}} \cdot RKeff \right) (1 + B_1) \frac{ZPX1}{ZPX2} Z_i}}.$$

onde

$$\begin{aligned} RIW1SQ(I, J) = & \frac{1}{2} \rho_i^2(r) \frac{c^2}{c_A^2(r)} \alpha_i(r) + \frac{1}{4} \rho_{imp}^2(r) \frac{\omega \omega_{p,imp}(r) F}{c^2 |k_{\parallel}(r)| v_{Timp}(r)} \times \\ & \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)| v_{Timp}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)| v_{Timp}(r)} \right] \right) COUP1 \\ & - \frac{1}{4} \rho_i^2(r) \frac{\omega \omega_{p,i} F}{c^2 |k_{\parallel}(r)| v_{Ti}(r)} \times \\ & \left(PDF \left[\frac{\omega - 2\Omega_i(r)}{|k_{\parallel}(r)| v_{Ti}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + 2\Omega_i(r)}{|k_{\parallel}(r)| v_{Ti}(r)} \right] \right) BICOUP, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
RIE3SQ(I, J) = & \frac{3}{2}\rho_i^2(r)\frac{\omega^2}{c_A^2(r)}\alpha_i(r) + \frac{3}{4}\rho_{imp}^2(r)\frac{\omega\omega_{p,imp}(r)F}{c^2|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \times \\
& \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \right] \right) COUP1 \\
& - \frac{1}{4}\rho_i^2(r)\frac{\omega\omega_{p,i}F}{c^2|k_{\parallel}(r)|v_{Ti}(r)} \times \\
& \left(PDF \left[\frac{\omega - 2\Omega_i(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Ti}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + 2\Omega_i(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Ti}(r)} \right] \right) BICOUP,
\end{aligned}$$

$$ZPI1(I, J) = \frac{1}{2} \frac{\omega\omega_{p,imp}(r)F}{c^2|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \right] \right) COUP1.$$

$$\begin{aligned}
ZPI2(I, J) = & \left\{ \frac{1}{2} \frac{\omega\omega_{p,imp}(r)F}{c^2|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - PDF \left[\frac{\omega + \Omega_{imp}(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Timp}(r)} \right] \right) - \frac{\omega\omega_{p,imp}(r)F}{\Omega_{imp}(r)c^2} \right\} COUP2,
\end{aligned}$$

$$ZPI3(I, J) = \frac{1}{2} \frac{\omega\omega_{p,i}(r)}{c^2|k_{\parallel}(r)|v_{Ti}(r)} \left(PDF \left[\frac{\omega - \Omega_i(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Ti}(r)} \right] + PDF \left[\frac{\omega + \Omega_i(r)}{|k_{\parallel}(r)|v_{Ti}(r)} \right] \right),$$

$$\alpha_i(r) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_i^2}}.$$

Apêndice C

Parâmetros básicos do tokamak TCABR

	TCABR
raio maior (R_0)	61,5 <i>cm</i>
raio menor (a)	18,0 <i>cm</i>
raio da parede (d)	24,0 <i>cm</i>
raio da antena (b)	20,0 <i>cm</i>
corrente na antena (I_p)	1,0 <i>kA</i>
campo magnético (B_t)	1,11 <i>T</i>
fator de segurança na borda (q_a)	3,5
densidade no centro do plasma ($n_{0e,i}$)	$3 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$
densidade na borda do plasma ($n_{ae,i}$)	$1 \times 10^{11} \text{ cm}^{-3}$
temperatura no centro do plasma ($T_{0e,i}$)	500 <i>eV</i>
temperatura na borda do plasma ($T_{ae,i}$)	15 <i>eV</i>
velocidade no centro do plasma (U_0)	$0,001 \times c$
velocidade na borda do plasma (U_a)	0

Tabela C.1: *Parâmetros característicos do tokamak TCABR [47, 48].*

onde c é a velocidade da luz.

Apêndice D

Diagramas de Fluxo do Código Cilíndrico

Apêndice E

Construção do Código Toroidal 2D

Neste Apêndice, são mostrados alguns dos cálculos realizados quando da elaboração do código toroidal 2D [46], relatado no Capítulo 3.

Em primeiro lugar, é necessário apresentar o sistema de coordenadas em que o código está baseado: $(r, \theta, z) \rightarrow (r, \theta, \zeta)$

Figura E.1: *Esquema das coordenadas toroidais.*

Estas coordenadas podem ser transformadas segundo as expressões

$$\begin{aligned} Z &= R_0 \zeta, \\ R &= R_0 + r \cdot \cos \theta \end{aligned} \tag{E.1}$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
i\omega B_r &= (\nabla \times \mathbf{E})_r = -\frac{1}{R} \frac{\partial E_\theta}{\partial \zeta} + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} (RE_z) \\
i\omega B_\theta &= (\nabla \times \mathbf{E})_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial E_r}{\partial \zeta} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} (RE_z) \\
i\omega B_\zeta &= (\nabla \times \mathbf{E})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rE_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{E.2}$$

As componentes de $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla \times \mathbf{E})_\theta + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} [R(\nabla \times \mathbf{E})_z] \\
&= -\left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial \theta} \right) E_r + \\
&\quad \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} rE_\theta + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} RE_z;
\end{aligned} \tag{E.3}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\theta &= -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\nabla \times \mathbf{E})_r - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} [R(\nabla \times \mathbf{E})_z] \\
&= \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} E_r - \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \right) E_\theta + \\
&\quad \frac{1}{rR^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} RE_z;
\end{aligned} \tag{E.4}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r (\nabla \times \mathbf{E})_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\nabla \times \mathbf{E})_r \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} E_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} E_\theta \\
&\quad - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} R + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} R \right) E_z.
\end{aligned} \tag{E.5}$$

Campo magnético de equilíbrio

O campo magnético de equilíbrio bidimensional é dado por

$$\mathbf{B}_0 = \frac{B_0 \left(\hat{z} + \frac{r}{qR_0} \hat{\theta} \right)}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \tag{E.6}$$

que satisfaz

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_0 = 0. \quad (\text{E.7})$$

Note que

$$B_z = \frac{B_0 R_0}{R}, \quad B_\theta = B_0 \frac{r}{qR} = B_z \frac{r}{qR_0}, \quad (\text{E.8})$$

e

$$\hat{e}_\parallel = \frac{\hat{z} + \delta \hat{\theta}}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, \quad \hat{e}_\perp = \hat{e}_\parallel \times \hat{e}_r, \quad \delta = \frac{r}{R_0 q}. \quad (\text{E.9})$$

Os vetores unitários não são mudados pelos efeitos toroidais e a magnitude de $\mathbf{B}_0$ é modificado pela curvatura toroidal

$$|\mathbf{B}_0| = \frac{B_0 \left(1 + \left(\frac{r}{qR_0} \right)^2 \right)^{1/2}}{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta} \quad (\text{E.10})$$

As transformações de coordenadas das componentes do campo elétrico são dadas por

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{E_\perp + \delta E_\parallel}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, & E_\perp &= \frac{E_\theta - \delta E_z}{(1 + \delta^2)^{1/2}}; \\ E_z &= \frac{E_\parallel - \delta E_\perp}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, & E_\parallel &= \frac{E_\theta - \delta E_z}{(1 + \delta^2)^{1/2}}; \\ k_\theta &= \frac{k_\perp + \delta k_\parallel}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, & k_\perp &= \frac{k_\theta - \delta k_z}{(1 + \delta^2)^{1/2}}; \\ k_z &= \frac{k_\parallel - \delta k_\perp}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, & k_\parallel &= \frac{k_\theta - \delta k_z}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

onde

$$\delta = \frac{r}{qR_0}.$$

Fazendo a evolução dos termos da equação de onda,

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r &= - \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial \theta} \right) E_r \\
&+ \left(\frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{(1 + \delta^2)^{1/2}} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta R}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \right) E_\perp \quad (\text{E.12}) \\
&+ \left(\frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{(1 + \delta^2)^{1/2}} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \right) E_\parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\perp &= \left[\frac{1}{R(1 + \delta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta R}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
&- \left[\frac{1}{R(1 + \delta^2)^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R \delta \right) \frac{1}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{R(1 + \delta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{(1 + \delta^2)^{1/2}} + \frac{\delta}{r(1 + \delta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta R}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \right] E_\perp \\
&- \left[\frac{1}{R(1 + \delta^2)^{1/2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{R}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{R(1 + \delta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{(1 + \delta^2)^{1/2}} - \frac{\delta}{r(1 + \delta^2)^{1/2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{(1 + \delta^2)^{1/2}} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

E.0.1 Equação da onda

O código resolve a equação:

$$\frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (\text{E.13})$$

onde $\overleftrightarrow{\epsilon}$ é o tensor dielétrico.

Ao invés de $(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\parallel$, é usado

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} r R J_r + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} R J_\theta + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \quad (\text{E.14})$$

onde a toroidicidade é desprezada, e

$$R = R_0, \quad (\text{E.15})$$

então, chega-se à expressão

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0, \quad (\text{E.16})$$

e

$$\hat{e}_\parallel = \frac{\hat{z} + \delta \hat{\theta}}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, \quad \hat{e}_\perp = \hat{e}_\parallel \times \hat{e}_r, \quad e \quad \delta = \frac{r}{Rq} \quad (\text{E.17})$$

$$i (k_\parallel J_\parallel + k_\perp J_\perp) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r = 0. \quad (\text{E.18})$$

É então usada a equação

$$\mathbf{J} = \frac{1}{i\mu_0\omega} \frac{\omega^2}{c^2} \overleftrightarrow{\epsilon} \cdot \mathbf{E} \quad (\text{E.19})$$

para expressar $E_\parallel$ em termos de E_r e $E_\perp$.

A toroidicidade é levada em conta por meio das seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right), \\ \frac{1}{R^2} &= \frac{1}{R_0^2} \left(1 - 2 \frac{r}{R_0} \cos \theta \right). \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

E.0.2 Transformada de Fourier

Depois de ter expandido todas as componentes da equação da onda, separando-as nas partes cilíndricas e nas partes de correção toroidal, os coeficientes da equação são separados nos operadores $\hat{L}_0$, $\hat{L}_S$ e $\hat{L}_A$:

$$\hat{L}\mathbf{E} = \hat{L}_0\mathbf{E} \text{ (parte cilíndrica)} + \left(2 \frac{r}{R_0} \cos \theta \hat{L}_S + 2 \frac{r}{R_0} \sin \theta \hat{L}_A \right) \mathbf{E} = 0. \quad (\text{E.21})$$

e, com

$$\mathbf{E} = \sum_m \mathbf{E}_m(r) \exp i (m\theta - l\zeta). \quad (\text{E.22})$$

É efetuada uma transformação de Fourier para os primeiros modos poloidais vizinhos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \sum_{m'} \int_0^{2\pi} \widehat{L}_0 \mathbf{E}_{m'}(r) e^{i(m'\theta - l\zeta)} e^{-im\theta} d\theta \\
& + \frac{1}{2\pi} \frac{r}{R_0} \sum_{m'} \int_0^{2\pi} (\widehat{L}_S + \widehat{L}_A) \mathbf{E}_{m'}(r) e^{i(m'\theta - l\zeta)} e^{-i(m-1)\theta} d\theta \\
& + \frac{1}{2\pi} \frac{r}{R_0} \sum_{m'} \int_0^{2\pi} (\widehat{L}_S - \widehat{L}_A) \mathbf{E}_{m'}(r) e^{i(m'\theta - l\zeta)} e^{-i(m+1)\theta} d\theta \\
& = 0,
\end{aligned} \tag{E.23}$$

o que leva a

$$\begin{aligned}
& \widehat{L}_{0m} \mathbf{E}_m(r) e^{i(m\theta - l\zeta)} + \frac{r}{R_0} (\widehat{L}_S + \widehat{L}_A) \mathbf{E}_{m-1}(r) e^{i((m-1)\theta - l\zeta)} \\
& + \frac{r}{R_0} (\widehat{L}_S - \widehat{L}_A) \mathbf{E}_{m+1}(r) e^{i((m+1)\theta - l\zeta)} = 0.
\end{aligned} \tag{E.24}$$

Para $\hat{e} = \frac{r}{R_0}$, não nulo, é considerado o acoplamento de 3 modos poloidais e um sistema de sexta ordem é resolvido:

$$\begin{pmatrix}
\widehat{L}_{0rr}^{m-1} & \widehat{L}_{0r\perp}^{m-1} & \hat{e}(L^-)_{rr}^m & \hat{e}(L^-)_{r\perp}^m & 0 & 0 \\
\widehat{L}_{0\perp r}^{m-1} & \widehat{L}_{0\perp\perp}^{m-1} & \hat{e}(L^-)_{\perp r}^m & \hat{e}(L^-)_{\perp\perp}^m & 0 & 0 \\
\hat{e}(L^+)_{rr}^{m-1} & \hat{e}(L^+)_{r\perp}^{m-1} & \widehat{L}_{0rr}^m & \widehat{L}_{0r\perp}^m & \hat{e}(L^-)_{rr}^{m+1} & \hat{e}(L^-)_{r\perp}^{m+1} \\
\hat{e}(L^+)_{\perp r}^{m-1} & \hat{e}(L^+)_{\perp\perp}^{m-1} & \widehat{L}_{0\perp r}^m & \widehat{L}_{0\perp\perp}^m & \hat{e}(L^-)_{\perp r}^{m+1} & \hat{e}(L^-)_{\perp\perp}^{m+1} \\
0 & 0 & \hat{e}(L^+)_{rr}^m & \hat{e}(L^+)_{r\perp}^m & \widehat{L}_{0rr}^{m+1} & \widehat{L}_{0r\perp}^{m+1} \\
0 & 0 & \hat{e}(L^+)_{\perp r}^m & \hat{e}(L^+)_{\perp\perp}^m & \widehat{L}_{0\perp r}^{m+1} & \widehat{L}_{0\perp\perp}^{m+1}
\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_r^{m-1} \\ E_{\perp}^{m-1} \\ E_r^m \\ E_{\perp}^m \\ E_r^{m+1} \\ E_{\perp}^{m+1} \end{pmatrix} = S_i^m, \tag{E.25}$$

onde $L^+ = \widehat{L}_S + \widehat{L}_A$; $L^- = \widehat{L}_S - \widehat{L}_A$.

Este sistema é resolvido com uma B-spline cúbica e é obtido como resposta o perfil das componentes radial e perpendicular do campo elétrico. A componente paralela é então calculada pela hipótese de incompressibilidade expressa na equação (E.14).

E.0.3 Conservação de Energia

Do teorema de Poynting:

$$Re \int \nabla \cdot \mathbf{S} dv = Re \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dv$$

ou

$$Re \int S_r dA = Re \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dv$$

onde

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*}{\mu_0}; \quad dv = r R dr d\theta d\zeta; \quad dA = r R d\theta d\zeta.$$

Finalmente obtemos

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi r R_0}{\mu_0} Re \left[(\mathbf{E}_m \times \mathbf{B}_m^*)_r + \frac{\hat{e}}{2} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{B}_{m+1}^*)_r + \frac{\hat{e}}{2} (\mathbf{E}_m \times \mathbf{B}_{m-1}^*)_r \right. \\ & + \frac{\hat{e}}{2} (\mathbf{E}_{m+1} \times \mathbf{B}_{m+1}^*)_r + \frac{\hat{e}}{2} (\mathbf{E}_{m+1} \times \mathbf{B}_m^*)_r \\ & \left. + \frac{\hat{e}}{2} (\mathbf{E}_{m-1} \times \mathbf{B}_{m-1}^*)_r + \frac{\hat{e}}{2} (\mathbf{E}_{m-1} \times \mathbf{B}_m^*)_r \right] \\ & = \frac{2\pi\omega R_0}{\mu_0 c^2} Im \left[\int \mathbf{E}_m \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_m^* \cdot \mathbf{E}_m^* r dr + \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_m \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_{m+1}^* \cdot \mathbf{E}_{m+1}^* \hat{e} r dr \right. \\ & + \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_m \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_{m-1}^* \cdot \mathbf{E}_{m-1}^* \hat{e} r dr \\ & + \int \mathbf{E}_{m+1} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_{m+1}^* \cdot \mathbf{E}_{m+1}^* \hat{e} r dr + \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_{m+1} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_m^* \cdot \mathbf{E}_m^* \hat{e} r dr \\ & \left. + \int \mathbf{E}_{m-1} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_{m-1}^* \cdot \mathbf{E}_{m-1}^* \hat{e} r dr + \frac{1}{2} \int \mathbf{E}_{m-1} \cdot \overset{\leftrightarrow}{\epsilon}_m^* \cdot \mathbf{E}_m^* \hat{e} r dr \right] \end{aligned}$$

No código, algumas componentes na expressão da deposição de energia (chamado Fluxo Cinético) são movidas para a o fluxo de Poynting para assegurar que a deposição de energia é positiva.

E.1 Cálculo da Equação de Onda

Da equação de onda,

$$\frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (\text{E.26})$$

onde

$$\begin{aligned} E_\theta &= \frac{E_\perp + \delta E_\parallel}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, & E_\perp &= \frac{E_\theta - \delta E_z}{(1 + \delta^2)^{1/2}}; \\ E_z &= \frac{E_\parallel - \delta E_\perp}{(1 + \delta^2)^{1/2}}, & E_\parallel &= \frac{E_z + \delta E_\theta}{(1 + \delta^2)^{1/2}}; \end{aligned}$$

Separando as componentes do lado direito,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r &= - \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\ &\quad \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{E_\perp + \delta E_\parallel}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \left(R \frac{E_\parallel - \delta E_\perp}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right) \quad (\text{E.27}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r &= - \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\ &\quad \left[\frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta R}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_\perp + \\ &\quad \left[\frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_\parallel \quad (\text{E.28}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\perp &= \frac{(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\theta - \delta (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_z}{\sqrt{1 + \delta^2}} = \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left[\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} E_r - \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) E_\theta + \frac{1}{r R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial \theta} R E_z \right] \quad (\text{E.29}) \\ &\quad - \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} E_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} E_\theta - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} R + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \right) E_z \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\perp &= \left[\frac{1}{R \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r - \\ &\quad \left[\frac{1}{R \sqrt{1 + \delta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta R \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{R \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta R}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_\perp + \\ &\quad \left[\frac{1}{R \sqrt{1 + \delta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\delta}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{R}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{R \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_\parallel \quad (\text{E.30}) \end{aligned}$$

A partir de agora serão feitas as transformações para correção toroidal na equação (E.20) e usando $\delta = \frac{r}{Rq} = \frac{r}{R_0 q}$.

E.1.1 Componente radial

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r = & - \left[\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\
& \left[\frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta R}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\perp + \\
& \left[\frac{1}{r^2 R} \frac{\partial}{\partial \theta} R \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r = & - \left[\frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r^2 R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\
& \left[\frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r^2 R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\perp + \\
& \left[\frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r^2 R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r = & - \left[\frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\
& \left[\left(\frac{(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \sin \theta}{r R_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \right. \\
& \left. - \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_\perp + \\
& \left[\left(\frac{(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \sin \theta}{r R_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}} \right. \\
& \left. + \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r = & - \left[\frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\
& \left[\left(\frac{(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \sin \theta}{r R_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \right. \\
& \left. \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \left(\frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\cos \theta}{R_0} + (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \left(\frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)' + \frac{\delta(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_\perp + \\
& \left[\left(\frac{(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \sin \theta}{r R_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\cos \theta}{R_0} + (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)' + \frac{(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r = & - \left[\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\cos^2 \theta}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\
& \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta - \frac{r}{R_0} \cos \theta \sin \theta}{r R_0} - \frac{\cos^2 \theta}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\left(\frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)' + \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) - \right. \\
& \left. \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \left((1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \left(\frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)' + \frac{\delta(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\cos \theta}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_\perp + \\
& \left[\left(\frac{(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta)}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta - \frac{r}{R_0} \cos \theta \sin \theta}{r R_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0^2} \left((1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right)' + \frac{(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\cos \theta}{R_0} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

Desprezando termos proporcionais à segunda ordem em θ , é obtida a expressão

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_r = & - \left[\frac{1}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{2 \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] E_r + \\
& \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r R_0} \right) \left(\left(\frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \right)' + \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \right. \\
& \frac{2 \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \left\{ \left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right)' + \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\} \frac{\partial}{\partial \zeta} \\
& \left. - \frac{1}{R_0} \left(\left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \left(\frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right)' + \frac{\delta (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\cos \theta}{R_0} \right) \right] E_\perp + \\
& \left[\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r R_0} \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta r}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{2 \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2} \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \right)' + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \right\} \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_0^2} \left\{ \left(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \right)' + \frac{(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\cos \theta}{R_0} \right\} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

E.1.2 Componente perpendicular

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\perp = & \left[\frac{1}{R \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r - \\
& \left[\frac{1}{R \sqrt{1+\delta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta R \right) \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{1}{R \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta R}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\perp + \\
& \left[\frac{1}{R \sqrt{1+\delta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\delta}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{1}{R \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial r} \frac{R}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\perp = & \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r (1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r - \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 \sqrt{1+\delta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \right) \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r (1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\perp + \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 \sqrt{1+\delta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{\delta}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta) \right) \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r (1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_\parallel
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = & \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r - \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta R}{r} \left(-\frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} R \right) \right) \times \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R_0(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\perp} + \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta R}{r} \left(-\frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} R \right) \right) \times \right. \\
& \left. \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \right. \\
& \left. \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = & \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r - \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0(1 + \delta^2)} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta}{R} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R_0(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) + \right. \\
& \left. \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\perp} + \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0(1 + \delta^2)} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta}{R} \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) + \right. \\
& \left. \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = & \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left(\frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \right. \\
& \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left(\frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{(1 - 2 \frac{r}{R_0} \cos \theta) \cos \theta}{R_0^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \Big] E_r - \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 (1 + \delta^2)} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta}{R} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) + \right. \\
& \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r (1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \Big] E_{\perp} + \\
& \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 (1 + \delta^2)} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta}{R} \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) + \right. \\
& \left. \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r (1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

Desprezando os termos proporcionais à segunda ordem em θ , obtemos

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = & \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta (1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\delta (1 - 2 \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
- & \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 (1 + \delta^2)} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta}{R} \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \right. \\
& + \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& + \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{\delta (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \Big] E_{\perp} \\
+ & \left[\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0 (1 + \delta^2)} \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta}{R} \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0 (1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) \right. \\
& + \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& - \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \Big] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = \\
& \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\delta(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
& - \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \right. \\
& + \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& + \left. \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left(\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{\delta(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\perp} \\
& + \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) \right. \\
& + \left\{ \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& - \left. \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = \\
& \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\delta(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
& - \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \right. \\
& + \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& + \left. \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\perp} \\
& + \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0(1 + \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) \right. \\
& + \left\{ \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& - \left. \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = \\
& \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\delta(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
& - \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \right. \\
& + \left(\frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& + \left. \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\perp} \\
& + \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) \right. \\
& + \left\{ \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right\} \frac{r \delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
& - \left. \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

Fazendo a simplificação

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \\
& \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) + \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
& + \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \\
& = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) + \delta \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
& + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \\
& \frac{1}{q} \left(\delta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - 2\delta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \cos \theta \right) + \delta \sin \theta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \delta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \\
& = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + 2\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \left(2\delta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \delta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \delta \cos \theta \right) \\
& = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + 2\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{q} \left(\delta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \sin \theta \right) = \\
& \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\
& \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \sin \theta \right) \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
= & \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \\
& \delta \sin \theta \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \\
& \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right) + \left(\sin \theta - \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \left(\cos \theta + 2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \\
& \left(\delta^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{1}{q} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \left(\delta^2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \cos \theta \frac{1}{q} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right) + \\
& \sin \theta (1 + \delta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} - (1 - \delta^2) \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)
\end{aligned}$$

com

$$-\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}$$

em

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right\} + \frac{\cos \theta}{R_0 \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
= & \left(\frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{r}{\sqrt{1 + \delta^2}},
\end{aligned}$$

e também fazendo

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r = \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}$$

em

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{R_0} \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} r - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
= & \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{R_0} \cos \theta \left(2 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) - \frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \\
= & \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{r}{R_0} \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) \right\} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} = \\
= & \frac{\delta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{\delta \cos \theta}{r \sqrt{1 + \delta^2}} \frac{r}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{\delta^2}{r^2 (1 + \delta^2)} \frac{r}{R_0} \cos \theta
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = \\
& \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\delta(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
& - \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2 + 2\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{q} \left(\delta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \delta \cos \theta \right) \right\} \right. \\
& + \left(\frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta \cos \theta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{r}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
& + \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} + 2 \frac{\delta \cos \theta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{r}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta^2}{r^2 (1 + \delta^2)} \frac{r}{R_0} \cos \theta \left. \right] E_{\perp} \\
& + \left[\frac{1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right) + \sin \theta (1 + \delta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} - (1 - \delta^2) \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \right. \right. \\
& \frac{1}{q} \left(\cos \theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left. \right\} + \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \right\} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \\
& - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta \cos \theta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{r}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta}{r^2 (1 + \delta^2)} \frac{r}{R_0} \cos \theta \left. \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = \\
& \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\delta(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
& - \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2}{R_0^2 (1 + \delta^2)} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right. \\
& - \frac{2\frac{r}{R_0} \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2}{R_0^2 (1 + \delta^2)} + \frac{2\delta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)}{R_0^2 (1 + \delta^2)} - \frac{\delta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}}{q R_0^2 (1 + \delta^2)} - \frac{\delta \cos \theta}{q R_0^2 (1 + \delta^2)} \\
& + \frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\frac{r}{R_0} \delta \cos \theta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\frac{r}{R_0} \delta^2}{r^2 (1 + \delta^2)} \cos \theta \left. \right] E_{\perp} \\
& + \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right)}{R_0^2 (1 + \delta^2)} - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right. \\
& - \frac{2\frac{r}{R_0} \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right)}{R_0^2 (1 + \delta^2)} + \frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{1}{R_0^2 (1 + \delta^2)} \left\{ \sin \theta (1 + \delta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} - \right. \\
& (1 - \delta^2) \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left. \right\} - \frac{\frac{r}{R_0} \delta \cos \theta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left. \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = & \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta)}{R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\delta(1 - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta)}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
- & \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2}{R_0^2 (1+\delta^2)} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{2\frac{r}{R_0} \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}}{R_0^2 (1+\delta^2)} \right. \\
+ & \left. \frac{2\delta \frac{r}{R_0} \cos \theta}{r R_0 (1+\delta^2)} \frac{\partial}{\partial \theta} r - \frac{\delta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}}{q R_0^2 (1+\delta^2)} + \frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\frac{r}{R_0} \delta \cos \theta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_{\perp} \\
+ & \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right)}{R_0^2 (1+\delta^2)} - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right. \\
- & \left. \frac{2\frac{r}{R_0} \cos \theta \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right)}{R_0^2 (1+\delta^2)} + \frac{\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\frac{r}{R_0} \delta \cos \theta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \right. \\
+ & \left. \frac{1}{R_0^2 (1+\delta^2)} \left\{ \sin \theta (1+\delta^2) \frac{\partial}{\partial \zeta} - (1-\delta^2) \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right\} \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_{\perp} = & \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\delta}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\delta}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
+ & \frac{2\frac{r}{R_0} \cos \theta}{\sqrt{1+\delta^2}} \left[\frac{1}{2r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\delta}{2R_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{\delta}{r R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \right] E_r \\
- & \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)^2}{R_0^2 (1+\delta^2)} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_{\perp} \\
+ & 2\frac{r}{R_0} \sin \theta \left[\frac{\delta^2 \frac{\partial}{\partial \theta}}{2r^2 (1+\delta^2)} \right] E_{\perp} - 2\frac{r}{R_0} \cos \theta \left[-\frac{\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}}{R_0^2 (1+\delta^2)} + \frac{\delta}{r R_0 (1+\delta^2)} \frac{\partial}{\partial \theta} r \right. \\
+ & \left. \frac{1}{2\sqrt{1+\delta^2}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{\delta}{2r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_{\perp} \\
+ & \left[\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right)}{R_0^2 (1+\delta^2)} - \frac{\delta}{r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} \right] E_{\parallel} \\
+ & 2\frac{r}{R_0} \cos \theta \left[\frac{\frac{1}{2r^2}}{\sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r \delta}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\delta}{2r \sqrt{1+\delta^2}} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\sqrt{1+\delta^2}} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left(\delta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{R_0}{r} \right)}{R_0^2 (1+\delta^2)} + \right. \\
- & \left. \frac{1}{r R_0 (1+\delta^2)} \left\{ \frac{(1-\delta^2)}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right\} \right] E_{\parallel} + 2\frac{r}{R_0} \sin \theta \left[\frac{1}{2r R_0} \left(\frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{q(1+\delta^2)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] E_{\parallel}
\end{aligned}$$

E.1.3 Caso Aproximado

Eliminando $E_{\parallel}$ através de $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} r R J_r + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} R J_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \quad (\text{E.31})$$

onde a toroidicidade é desprezada, e

$$R = R_0, \quad (\text{E.32})$$

então,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_{\theta} + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0, \quad (\text{E.33})$$

ou

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + i k_{\theta} J_{\theta} + i k_z J_z = 0, \quad (\text{E.34})$$

Substituindo as transformações definidas no início deste Apêndice, chegamos a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + i (k_{\perp} + \delta k_{\parallel}) / \sqrt{1 + \delta^2} J_{\theta} + i (k_{\parallel} - \delta k_{\perp}) / \sqrt{1 + \delta^2} J_z = 0, \quad (\text{E.35})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + i \frac{(k_{\perp} + \delta k_{\parallel})}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{(J_{\perp} + \delta J_{\parallel})}{\sqrt{1 + \delta^2}} + i \frac{(k_{\parallel} - \delta k_{\perp})}{\sqrt{1 + \delta^2}} \frac{(J_{\parallel} - \delta J_{\perp})}{\sqrt{1 + \delta^2}} = 0, \quad (\text{E.36})$$

simplificando, temos

$$i (k_{\parallel} J_{\parallel} + k_{\perp} J_{\perp}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r = 0. \quad (\text{E.37})$$

E.1.4 Caso Exato

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} r R J_r + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} R J_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \quad (\text{E.38})$$

$$R = R_0 + r \cdot \cos \theta \quad (\text{E.39})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J} = & \frac{1}{r (R_0 + r \cdot \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial r} r (R_0 + r \cdot \cos \theta) J_r + \\ & \frac{1}{r (R_0 + r \cdot \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_0 + r \cdot \cos \theta) J_{\theta} + \frac{1}{(R_0 + r \cdot \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(R_0 + r \cdot \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial r} (R_0 + r \cdot \cos \theta) J_r + \frac{1}{r} J_r + \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta - \frac{\sin \theta}{(R_0 + r \cdot \cos \theta)} J_\theta + \\ & \frac{1}{(R_0 + r \cdot \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} J_r + \frac{1}{r} J_r + \frac{\cos \theta}{(R_0 + r \cdot \cos \theta)} J_r + \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta - \frac{\sin \theta}{(R_0 + r \cdot \cos \theta)} J_\theta + \frac{1}{(R_0 + r \cdot \cos \theta)} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (R_0 + r \cdot \cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} J_r + \frac{(R_0 + r \cdot \cos \theta)}{r} J_r + \cos \theta J_r + \\ & \frac{(R_0 + r \cdot \cos \theta)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta - \sin \theta J_\theta + \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \end{aligned}$$

$$R_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta + \frac{1}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z \right) + r \cdot \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \frac{1}{r} J_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} J_\theta \right) - \sin \theta J_\theta = 0 \quad (\text{E.40})$$

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + i k_{\parallel} J_{\parallel} + i k_{\perp} J_{\perp} \right) + \frac{r \cos \theta}{R_0} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \frac{1}{r} J_r + i k_{\theta} J_{\theta} \right) - \frac{\sin \theta}{R_0} \cdot J_{\theta} = 0 \quad (\text{E.41})$$

$$\begin{aligned} E_{\theta} &= (E_{\perp} + \delta E_{\parallel}) / \sqrt{1 + \delta^2} & E_{\perp} &= (E_{\theta} - \delta E_z) / \sqrt{1 + \delta^2} \\ E_z &= (E_{\parallel} - \delta E_{\perp}) / \sqrt{1 + \delta^2} & E_{\parallel} &= (E_z + \delta E_{\theta}) / \sqrt{1 + \delta^2} \\ k_{\theta} &= (k_{\perp} + \delta k_{\parallel}) / \sqrt{1 + \delta^2} & k_{\perp} &= (k_{\theta} - \delta k_z) / \sqrt{1 + \delta^2} \\ k_z &= (k_{\parallel} - \delta k_{\perp}) / \sqrt{1 + \delta^2} & k_{\parallel} &= (k_z + \delta k_{\theta}) / \sqrt{1 + \delta^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_z J_z + k_{\theta} J_{\theta} &= \frac{k_{\parallel} - \delta k_{\perp}}{\sqrt{1 + \delta^2}} J_z + \frac{k_{\perp} + \delta k_{\parallel}}{\sqrt{1 + \delta^2}} J_{\theta} = \frac{k_{\parallel} - \delta k_{\perp}}{\sqrt{1 + \delta^2}} \cdot \frac{J_{\parallel} - \delta J_{\perp}}{\sqrt{1 + \delta^2}} + \frac{k_{\perp} + \delta k_{\parallel}}{\sqrt{1 + \delta^2}} \cdot \frac{J_{\perp} + \delta J_{\parallel}}{\sqrt{1 + \delta^2}} = \\ & \frac{(1 + \delta^2) k_{\parallel} J_{\parallel} + (1 + \delta^2) k_{\perp} J_{\perp}}{1 + \delta^2} = k_{\parallel} J_{\parallel} + k_{\perp} J_{\perp} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + i k_{\parallel} J_{\parallel} + i k_{\perp} J_{\perp} + \\ & \frac{r \cos \theta}{R_0} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \frac{1}{r} J_r + i \frac{k_{\perp} + \delta k_{\parallel}}{\sqrt{1 + \delta^2}} \cdot \frac{J_{\perp} + \delta J_{\parallel}}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right) - \frac{\sin \theta}{R_0} \cdot \frac{J_{\perp} + \delta J_{\parallel}}{\sqrt{1 + \delta^2}} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + i k_{\parallel} J_{\parallel} + i k_{\perp} J_{\perp} + \frac{r \cos \theta}{R_0} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \frac{1}{r} J_r + i \frac{k_{\perp} J_{\perp} + \delta (k_{\perp} J_{\parallel} + J_{\perp} k_{\parallel}) + \delta^2 k_{\parallel} J_{\parallel}}{1 + \delta^2} \right) - \frac{\sin \theta}{R_0} \cdot \frac{J_{\perp} + \delta J_{\parallel}}{\sqrt{1 + \delta^2}} = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(1 + \frac{r \cos \theta}{R_0} \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{\cos \theta}{R_0} \right] J_r \\ & + \left(i k_{\parallel} + i \cos \theta \frac{r}{R_0} \frac{\delta k_{\perp} + \delta^2 k_{\parallel}}{1 + \delta^2} - \frac{\sin \theta}{R_0} \frac{\delta}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right) J_{\parallel} \\ & + \left(i k_{\perp} + i \cos \theta \frac{r}{R_0} \frac{k_{\perp} + \delta k_{\parallel}}{1 + \delta^2} - \frac{\sin \theta}{R_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta^2}} \right) J_{\perp} = 0 \end{aligned}$$

Aproximando, por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_0} \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right), \quad (\text{E.42})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial r} r R J_r + \frac{1}{rR} \frac{\partial}{\partial \theta} R J_{\theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \quad (\text{E.43})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)}{R_0 r} \frac{\partial}{\partial r} r (R_0 + r \cdot \cos \theta) J_r + \\ & \frac{\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)}{R_0 r} \frac{\partial}{\partial \theta} (R_0 + r \cdot \cos \theta) J_{\theta} + \frac{\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \left(1 + \frac{r}{R_0} \cdot \cos \theta \right) J_r + \\ & \frac{\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(1 + \frac{r}{R_0} \cdot \cos \theta \right) J_{\theta} + \frac{\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \right) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r J_r + \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \left(1 + \frac{2r}{R_0} \cdot \cos \theta \right) \frac{J_r}{r} + \\ & \frac{1}{r} \left[\left(1 - \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2 \theta \right) \frac{\partial}{\partial \theta} - \left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right) \frac{r}{R_0} \cdot \sin \theta \right] J_{\theta} + \frac{\left(1 - \frac{r}{R_0} \cos \theta \right)}{R_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} J_z = 0 \end{aligned}$$

E.1.5 Eliminando $E_{\parallel}$

De

$$\mathbf{J} = \frac{1}{i\mu_0\omega} \frac{\omega^2}{c^2} \overset{\leftrightarrow}{\epsilon} \cdot \mathbf{E}, \quad (\text{E.44})$$

ou

$$\begin{aligned} J_r &= \frac{\omega}{i\mu_0 c^2} [\epsilon_{rr} E_r + \epsilon_{r\perp} E_{\perp} + \epsilon_{r\parallel} E_{\parallel}] \\ J_{\perp} &= \frac{\omega}{i\mu_0 c^2} [\epsilon_{\perp r} E_r + \epsilon_{\perp\perp} E_{\perp} + \epsilon_{\perp\parallel} E_{\parallel}] \\ J_{\parallel} &= \frac{\omega}{i\mu_0 c^2} [\epsilon_{\parallel r} E_r + \epsilon_{\parallel\perp} E_{\perp} + \epsilon_{\parallel\parallel} E_{\parallel}], \end{aligned} \quad (\text{E.45})$$

temos:

$$\begin{aligned} &k_{\parallel} [\epsilon_{\parallel r} E_r + \epsilon_{\parallel\perp} E_{\perp} + \epsilon_{\parallel\parallel} E_{\parallel}] + k_{\perp} [\epsilon_{\perp r} E_r + \epsilon_{\perp\perp} E_{\perp} + \epsilon_{\perp\parallel} E_{\parallel}] + \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ir [\epsilon_{rr} E_r + \epsilon_{r\perp} E_{\perp} + \epsilon_{r\parallel} E_{\parallel}]) \end{aligned} \quad (\text{E.46})$$

Com esta última expressão, podemos eliminar a componente paralela do campo elétrico das expressões $(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})$, reduzindo então o sistema a ser resolvido pelo código.

A seguir listamos uma versão simples das componentes do tensor dielétrico. Usando seus elementos e mais as equações (E.45), e introduzindo as expressões desenvolvidas neste Apêndice para as componentes perpendiculares e radial de $(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})$, devidamente transformadas com a eliminação de $E_{\parallel}$, pode-se finalmente compor as expressões finais da equação (E.26), com base nas quais o código foi criado.

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{rr} &= \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i + 2\hat{\epsilon} \cos \theta \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r\perp} &= -i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i + 3i \cos \theta \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i - ik_{\parallel} \frac{(r\delta)'}{r(1+\delta^2)} \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp r} &= i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i - 3i \cos \theta \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i + ik_{\parallel} \frac{(r\delta)'}{r(1+\delta^2)} \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp\perp} &= \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i + 2\hat{\epsilon} \cos \theta \frac{\omega^2}{v_A^2} \alpha_i \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r\parallel} &= ik_{\perp} \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{\omega_{ci}}{\omega |k_{\parallel}|} [1 + \rho_e Z(\rho_e)] \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel r} &= -\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{r\parallel} \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\perp\parallel} &= -\frac{d}{dr} \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{\omega_{ci}}{\omega |k_{\parallel}|} [1 + \rho_e Z(\rho_e)] \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel\perp} &= \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{\omega_{ci}}{\omega |k_{\parallel}|} [1 + \rho_e Z(\rho_e)] \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \\
\frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{\parallel\parallel} &= \frac{\omega^2}{v_A^2} \frac{1 + \rho Z(\rho)}{k_{\parallel}^2 \rho_s^2 \left[1 + \frac{i\nu}{|k_{\parallel}| v_{Te}} Z(\rho) \right]}
\end{aligned} \tag{E.47}$$

onde

$$\rho_e = \frac{\omega}{|k_{\parallel}| v_{Te}}, \quad \rho = \frac{\omega + i\nu}{|k_{\parallel}| v_{Te}}, \quad \nu \propto \frac{n_e}{T_e^{3/2}}$$

E.2 Diagramas de Fluxo do Código

Apêndice F

Forças Ponderomotoras

Mostramos aqui cálculos analíticos das forças ponderomotoras desenvolvido na Ref. [46].

A partir da equação de continuidade,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha) + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= 0, \\ \mathbf{v}_\alpha \frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha) + \mathbf{v}_\alpha \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) - m_\alpha n_\alpha \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v}_\alpha + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) - m_\alpha n_\alpha (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha &= 0,\end{aligned}$$

a equação de momento é dada por:

$$\begin{aligned}m_\alpha n_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} &= -\nabla P_\alpha - \nabla \Pi_\alpha + Z_\alpha n_\alpha e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] \right) + R_\alpha, \\ m_\alpha n_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_\alpha &= -\nabla P_\alpha - \nabla \Pi_\alpha + Z_\alpha n_\alpha e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] \right) + R_\alpha, \\ \frac{\partial}{\partial t} (m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + \nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= -\nabla P_\alpha - \nabla \Pi_\alpha + Z_\alpha n_\alpha e_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}] \right) + R_\alpha.\end{aligned}$$

Supondo pressão isotrópica, $\nabla P_\alpha = 0$, $Z_\alpha = 1$, e $R_\alpha = 0$,

$$\langle F_\alpha \rangle = Re \left\{ -\nabla \cdot (m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha) + n_\alpha e_\alpha \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J}_\alpha \times \mathbf{B} \right\} - \nabla \Pi_\alpha.$$

Sendo que

$$m_\alpha n_\alpha \mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha \equiv \frac{m_\alpha}{n_\alpha e_\alpha^2} \mathbf{J}_\alpha \mathbf{J}_\alpha = \frac{1}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \mathbf{J}_\alpha \mathbf{J}_\alpha$$

$$\frac{1}{c} \mathbf{J}_\alpha \times \mathbf{B} \equiv \frac{1}{c} \mathbf{J}_\alpha \times \left(-\frac{ic}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} \right) = \frac{1}{i\omega} \mathbf{J}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{E})$$

Então F fica da forma

$$F = Re \left\{ -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \mathbf{J}_\alpha \mathbf{J}_\alpha \right) + e_\alpha \left[n_\alpha \mathbf{E} + \frac{1}{i\omega e_\alpha} \mathbf{J}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{E}) \right] \right\} - \nabla \Pi_\alpha$$

Da equação de continuidade, $i\omega n_\alpha = \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{J}_\alpha}{e_\alpha} \right)$, por conseguinte, obtemos

$$F = Re \left\{ -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \mathbf{J}_\alpha \mathbf{J}_\alpha \right) + \frac{1}{i\omega} [\mathbf{E} \nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha + \mathbf{J}_\alpha \times (\nabla \times \mathbf{E})] \right\} - \nabla \Pi_\alpha.$$

O campo elétrico e a corrente tem a forma,

$$\mathbf{J}_\alpha = \frac{1}{2} \mathbf{J}_\alpha(r) e^{i(m\theta + kz - \omega t)} + cc.$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{E}(r) e^{i(m\theta + kz - \omega t)} + cc.$$

Então F é dado por:

$$F_\alpha = Re \left\{ -\nabla \cdot \left(\frac{1}{4\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \mathbf{J}_\alpha^* \mathbf{J}_\alpha \right) + \frac{1}{4i\omega} [\mathbf{E}^* (\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha) + \mathbf{J}_\alpha^* \times (\nabla \times \mathbf{E})] + cc. \right\} - \nabla \Pi_\alpha$$

$$\begin{aligned} F_\alpha = & -Re \left\{ \mathbf{J}_\alpha^* \left(\nabla \cdot \frac{1}{4\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \mathbf{J}_\alpha \right) + \left(\frac{1}{4\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \mathbf{J}_\alpha^* \cdot \nabla \right) \mathbf{J}_\alpha \right\} \\ & + Re \left\{ \frac{1}{4i\omega} [\mathbf{E}^* (\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha) + \mathbf{J}_\alpha^* \times (\nabla \times \mathbf{E})] + cc. \right\} - \nabla \Pi_\alpha. \end{aligned}$$

Pegando a componente θ :

$$F_{\theta\alpha} = -\frac{1}{4}Re \left\{ J_{\theta\alpha}^* \left(\nabla \cdot \frac{\mathbf{J}_\alpha}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) + \left(\frac{\mathbf{J}_\alpha^* \cdot \nabla}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) J_{\theta\alpha} + \frac{J_{\theta\alpha}^* J_{r\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2 r} \right. \\ \left. - \frac{1}{i\omega} [E_\theta^* (\nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha) + J_{z\alpha}^* (\nabla \times \mathbf{E})_r - J_{r\alpha}^* (\nabla \times \mathbf{E})_z] + cc. \right\} - \nabla \Pi_\alpha$$

$$F_{\theta\alpha} = -\frac{1}{4}Re \left\{ J_{\theta\alpha}^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r J_{r\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) + i \frac{m}{r} \frac{J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} + i k \frac{J_{z\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) \right. \\ \left. + \frac{J_{\theta\alpha}^* J_{r\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2 r} + \frac{(J_{r\alpha}^* \frac{\partial}{\partial r} + i J_{\theta\alpha}^* \frac{m}{r} + i J_{z\alpha}^* k)}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} J_{\theta\alpha} \right. \\ \left. - \frac{1}{i\omega} \left[E_\theta^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{r\alpha}) + i \frac{m}{r} J_{\theta\alpha} + i k J_{z\alpha} \right) + i J_{z\alpha}^* \left(\frac{m}{r} E_z - k E_\theta \right) \right] \right\} \\ + \frac{1}{4} Re \left\{ \left[J_{r\alpha}^* \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) - i \frac{m}{r} E_r \right) \right] + cc. \right\} - \nabla \Pi_\alpha$$

onde

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 J_{r\alpha}^* J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) = \frac{J_{\theta\alpha}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r J_{r\alpha}^*}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) + \frac{J_{r\alpha}^*}{r \epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{\theta\alpha}) \\ = \frac{J_{\theta\alpha}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r J_{r\alpha}^*}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) + \frac{J_{r\alpha}^*}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \frac{\partial}{\partial r} (J_{\theta\alpha}) + \frac{J_{r\alpha}^* J_{\theta\alpha}}{r \epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2};$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 J_{r\alpha}^* E_\theta) = \frac{E_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{r\alpha}^*) + \frac{J_{r\alpha}^*}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta);$$

$$Re \{i A^* B\} = Re \{-i A B^*\}.$$

Finalmente temos

$$\begin{aligned}
F_{\theta\alpha} &\approx -\frac{1}{4}Re \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 J_{r\alpha}^* J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) - \frac{1}{i\omega} \left[\frac{E_\theta^*}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{r\alpha}) - \frac{J_{r\alpha}^*}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right] \right\} \\
&\quad + \frac{1}{4}Re \left\{ \frac{m}{\omega r} (E_\theta^* J_{\theta\alpha} + J_{r\alpha}^* E_r + J_{z\alpha}^* E_z) + cc. \right\} - \nabla \Pi_\alpha \\
&= -\frac{1}{4}Re \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r^2 J_{r\alpha}^* J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} \right) + \frac{1}{i\omega} \left[\frac{E_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r J_{r\alpha}^*) + \frac{J_{r\alpha}^*}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_\theta) \right] + cc. \right\} \\
&\quad - \nabla \Pi_\alpha + \frac{mRe}{\omega r} \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_\alpha^*}{2} \right) \\
&= \frac{m}{\omega r} P_\alpha - Re \left\{ \frac{1}{4r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \left(\frac{J_{r\alpha}^* J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} + \frac{J_{r\alpha}^* E_\theta}{i\omega} \right) \right] + cc. \right\} - \nabla \Pi_\alpha \\
&= \frac{m}{\omega r} P_\alpha - Re \left\{ \frac{1}{4r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 J_{r\alpha}^* \left(\frac{J_{\theta\alpha}}{\epsilon_0 \omega_{p\alpha}^2} + \frac{E_\theta}{i\omega} \right) \right] + cc. \right\} - \nabla \Pi_\alpha
\end{aligned}$$

F.0.1 Força Viscosa Poloidal

Para ondas cinéticas:

Da equação de continuidade

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{n} = -\nabla \cdot (n\mathbf{v}),$$

sendo:

$$\tilde{n}_\alpha = \frac{(k_r j_{\alpha r} + k_b j_{\alpha b})}{e_\alpha \omega}.$$

A média da força de giro-viscosidade:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \langle \Pi_{\theta r} \rangle_i &= \frac{1}{2} m_i \rho_i^2 \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial r} \left\langle \tilde{n}_i \left(\frac{\partial \hat{V}_r^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{V}_\theta^{(i)}}{r \partial \theta} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega} 2 \frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{(k_r j_{ir} + k_b j_{ib})}{e_i} \left(\frac{\partial \hat{V}_r^{(i)}}{\partial r} - \frac{\partial \hat{V}_\theta^{(i)}}{r \partial \theta} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega e_i^2} 2 \frac{\partial}{\partial r} \left\langle (k_r j_{ir} + k_b j_{ib}) \frac{1}{n_i} \left(i k_r n_i e_i \hat{V}_r^{(i)} - i k_b n_i e_i \hat{V}_\theta^{(i)} \right) \right\rangle \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega e_i^2} 2 \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{n_i} (k_r j_{ir} + k_b j_{ib}) (i k_r j_{ir} - i k_b j_{i\theta}) \right] \\
&= \frac{\omega_{ci} m_i \rho_i^2}{4\omega e_i^2} Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{n_i} (k_r j_{ir} + k_b j_{ib})^* (i k_r j_{ir} - i k_b j_{i\theta}) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi\omega_{ci}\rho_i^2}{4\omega} \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m_i}{4\pi n_i e_i^2} (k_r j_{ir} + k_b j_{ib})^* (i k_r j_{ir} - i k_b j_{i\theta}) \right) \right] \\
&= \frac{\omega_{ci}}{\omega} \pi \rho_i^2 \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\omega_{pi}^2} (k_r j_{ir} + k_b j_{ib})^* (i k_r j_{ir} - i k_b j_{i\theta}) \right) \right] \\
&= -\frac{\omega_{ci}}{\omega} \pi \rho_i^2 \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\omega_{pi}^2} \{ |k_r j_{ir}|^2 - |k_b j_{ib}|^2 + k_b j_{ib}^* k_r j_{ir} - k_r^* j_{ir}^* k_b j_{i\theta} \} \right] \\
&= -\frac{\omega_{ci}}{\omega} \pi \rho_i^2 \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\omega_{pi}^2} (|k_r j_{ir}|^2 - |k_b j_{ib}|^2 + k_b j_{ib}^* k_r j_{ir} - k_r j_{ir}^* k_b j_{i\theta}) \right\} \right] \\
&= -\frac{2\omega_{ci}}{\omega} \pi \rho_i^2 \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\omega_{pi}^2} k_r j_{ir} k_b j_{i\theta}^* \right\} \right].
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
j_{ir} &= -i \frac{\omega}{4\pi} (\varepsilon_{12} E_b + \varepsilon_{11} E_r), \\
j_{ib} &= -i \frac{\omega}{4\pi} (\varepsilon_{21} E_r + \varepsilon_{22} E_b),
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \langle \Pi_{\theta r} \rangle_i &= -\frac{2\omega_{ci}}{\omega} \left(\frac{\omega}{4\pi} \right)^2 \pi \rho_i^2 \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\omega_{pi}^2} k_b k_r \left(\varepsilon_{12}^{(i)} E_b + \varepsilon_{11}^{(i)} E_r \right) \left(\varepsilon_{21}^{(i)*} E_r^* + \varepsilon_{22}^{(i)*} E_b^* \right) \right\} \right] \\
&= -\frac{\omega\omega_{ci}}{8\pi} \rho_i^2 \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{\omega_{pi}^2} k_b k_r \varepsilon_{12}^{(i)} \left(\varepsilon_{12}^{(i)} E_b E_r^* + \varepsilon_{11}^{(i)} |E_r|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*} |E_b|^2 + \frac{\varepsilon_{11}^{(i)} \varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}} E_r E_b^* \right) \right\} \right] \\
&= -\frac{\omega\omega_{ci}}{8\pi} \rho_i^2 \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_{12}^{(i)}}{\omega_{pi}^2} \left(\varepsilon_{12}^{(i)} E_b E_r^* + \varepsilon_{11}^{(i)} |E_r|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*} |E_b|^2 + \frac{\varepsilon_{11}^{(i)} \varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}} E_r E_b^* \right) \right\} \right]
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{12}^{(i)} &= -\varepsilon_{21}^{(i)} = i \varepsilon_1^{(i)} \frac{\omega_{ci}}{\omega}; \\
\varepsilon_{11}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)} \left(1 - \frac{3}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right); \\
\varepsilon_{22}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)} \left(1 - \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right); \\
\frac{E_r}{E_b} &\approx \frac{k_r}{k_b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \langle \Pi_{\theta r} \rangle_i &= -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 \times \\
&Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)}}{\omega_{pi}^2} \left(\varepsilon_{12}^{(i)} \frac{k_r^*}{k_b} + \varepsilon_1^{(i)} \left| \frac{k_r}{k_b} \right|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*} + \varepsilon_{11}^{(i)} \frac{\varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}} \frac{k_r}{k_b} \right) |E_b|^2 \right\} \right] \\
&\approx -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{2(i)}}{\omega_{pi}^2} \left(\left| \frac{k_r}{k_b} \right|^2 + i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{k_r^*}{k_b} + 1 - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{k_r}{k_b} \right) |E_b|^2 \right\} \right] \\
&= -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{2(i)}}{\omega_{pi}^2} \left(\left| \frac{k_r}{k_b} \right|^2 + i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{k_r^*}{k_b} + 1 - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{k_r}{k_b} \right) |E_b|^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

Como $\omega_{ci} \gg \omega$, temos que

$$\begin{aligned}
i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{k_r^*}{k_b} + 1 - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{k_r}{k_b} &= \frac{i \omega_{ci}^2 k_r^* + \omega k_b \omega_{ci} - i \omega^2 k_r}{\omega k_b \omega_{ci}} \\
&= \frac{i \omega_{ci}^2 (Re k_r - i Im k_r) + \omega k_b \omega_{ci} - i \omega^2 (Re k_r + i Im k_r)}{\omega k_b \omega_{ci}} \\
&= \frac{\omega_{ci}^2 (i Re k_r + Im k_r) + \omega k_b \omega_{ci} - \omega^2 (i Re k_r - Im k_r)}{\omega k_b \omega_{ci}} \\
&\approx \frac{\omega_{ci} (Im k_r + i Re k_r)}{\omega k_b}
\end{aligned}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial r} \langle \Pi_{\theta r} \rangle_i = -\frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{2(i)}}{\omega_{pi}^2} \left(\left| \frac{k_r}{k_b} \right|^2 + \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{(Im k_r + i Re k_r)}{k_b} \right) |E_b|^2 \right\} \right]$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial r} \approx 2 Im(k_r),$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \langle \Pi_{\theta r} \rangle_i &= -\frac{\omega_{ci}^2 \varepsilon_1^{2(i)}}{8\pi \omega_{pi}^2} \rho_i^2 k_b Im(k_r) k_r \left[\left(\frac{|k_r|^2}{k_b} + \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{Im(k_r)}{k_b} \right) |E_b|^2 \right] \\
&= \frac{\omega_{ci}^2 \varepsilon_1^{2(i)}}{8\pi \omega_{pi}^2} \rho_i^2 k_b Im(k_r^2) \left[\left(\frac{|k_r|^2}{k_b} + \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{Im(k_r)}{k_b} \right) |E_b|^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{k_b}{8\pi} Im \varepsilon_3 |E_{\parallel}|^2 = \frac{k_b}{8\pi} Im \varepsilon_3 \frac{\left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1 - k_{\parallel}^2 \right)^2}{k_{\parallel}^4} \|E_b\|^2$$

Ondas magnetosônicas rápidas:

Repetindo a equação (F.1),

$$\frac{\partial}{\partial r} \langle \Pi_{\theta r} \rangle_i = -\frac{\omega \omega_{ci}}{8\pi} \rho_i^2 \text{Im} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_{12}^{(i)}}{\omega_{pi}^2} \left(\varepsilon_{12}^{(i)} E_b E_r^* + \varepsilon_{11}^{(i)} |E_r|^2 + \varepsilon_{22}^{(i)*} |E_b|^2 + \frac{\varepsilon_{11}^{(i)} \varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}} E_r E_b^* \right) \right\} \right],$$

substituindo as expressões

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}^{(i)} &= -\varepsilon_{21}^{(i)} = i\varepsilon_1^{(i)} \frac{\omega_{ci}}{\omega}; \\ \varepsilon_{11}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)} \left(1 - \frac{3}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right); \\ \varepsilon_{22}^{(i)} &= \varepsilon_1^{(i)} \left(1 - \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right); \\ \frac{E_r}{E_b} &\approx -\frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}}{k_r^2}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \langle \Pi_{\theta r} \rangle_i &= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)}}{\omega_{pi}^2} \left(\varepsilon_{12}^{(i)} \frac{k_r^* k_b + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}^*}{k_r^2} - \varepsilon_1^{(i)} \left| \frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}}{k_r^2} \right|^2 - \varepsilon_{22}^{(i)*} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \varepsilon_{11}^{(i)} \frac{\varepsilon_{22}^{(i)*}}{\varepsilon_{12}^{(i)}} \frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}}{k_r^2} \right) |E_b|^2 \right\} \right] \\ &\approx \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 \times \text{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2} \left(i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{k_r^* k_b + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}^*}{k_r^2} - \left| \frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}}{k_r^2} \right|^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - \left(1 - \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right) - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \left(1 - \frac{3}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right) \left(1 - \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right) \frac{k_r k_b + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{12}}{k_r^2} \right) |E_b|^2 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Com

$$k_r^2 \approx \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_1^{(i)},$$

$$\text{Im} k_r \ll k_r,$$

obtemos finalmente

$$\begin{aligned}
&= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 \times Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2} \left(i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \left(\frac{k_b}{k_r} - i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \right) - \left| \frac{k_b}{k_r} + i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \right|^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 1 + \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \left(1 - \frac{3}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right) \left(1 - \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right) \left(\frac{k_b}{k_r} + i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \right) \right) |E_b|^2 \right\} \right] \\
&= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2} \left(i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{k_b}{k_r} + \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} - \frac{k_b^2}{k_r^2} - \frac{\omega_{ci}^2}{\omega^2} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 1 + \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \left(1 - \frac{7}{2} k_r^2 \rho_i^2 + \frac{33}{16} k_r^4 \rho_i^4 \right) \left(\frac{k_b}{k_r} - i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \right) \right) |E_b|^2 \right\} \right] \\
&= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2} \left(i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{k_b}{k_r} - \frac{k_b^2}{k_r^2} - 1 + \frac{11}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \left(1 - \frac{7}{2} k_r^2 \rho_i^2 + \frac{33}{16} k_r^4 \rho_i^4 \right) \left(\frac{k_b}{k_r} + i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \right) \right) |E_b|^2 \right\} \right] \\
&= \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 Re \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2} \left(-\frac{k_b^2}{k_r^2} - \frac{3}{4} k_r^2 \rho_i^2 + i \frac{\omega_{ci}}{\omega} \frac{k_b}{k_r} - i \frac{\omega}{\omega_{ci}} \frac{k_b}{k_r} + i \frac{7}{2} \frac{\omega}{\omega_{ci}} k_r k_b \rho_i^2 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - O(\rho_i^4) \dots \right) |E_b|^2 \right\} \right] \\
&\approx \frac{\omega_{ci}^2}{8\pi} \rho_i^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{k_b k_r \varepsilon_1^{(i)2}}{\omega_{pi}^2} \left(-\frac{k_b^2}{k_r^2} - \frac{3}{4} k_r^2 \rho_i^2 \right) |E_b|^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$