Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Transporte Caótico em Plasmas

Eduardo Roberto De Lascio

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção do título
de Mestre em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP)

Prof. Dr. Mauro Sérgio Dorsa Cattani (IF-USP)

Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato (IF-UFRGS)

São Paulo
2008

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

De Lascio, Eduardo Roberto
Transporte Caótico em Plasmas - São Paulo, 2008.
Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo. Instituto de Física – Depto. de Física Aplicada
Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas
Área de Concentração: Física
Unitermos: 1. Física de Plasmas; 2. Fenômeno de Transporte; 3. Turbulência Eletrostática; 4. Caos.
USP/IF/SBI-017/2008

一、誠の道を守ること

“Seguir o caminho da verdade” (Dojo Kun)

Eu dedico este trabalho a meus pais.

Agradecimentos

Eu gostaria de agradecer a ajuda a todos os que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

Eu agradeço o apoio da minha família, meus pais Sueli e Paschoal e minhas irmãs Juliana e Victoria.

Agradeço a meu orientador, Professor Iberê, pelo esforço e aos alunos do "grupo caótico", Adriane, Alberto, Gustavo, René, Silvio, Stafusa e Zwinglio, bem como à Lia e à Inês, pela ajuda.

Agradeço o apoio dos diversos amigos que me ajudaram a completar o trabalho e a todos os que contribuíram com a minha formação pessoal ao longo destes anos, entre os quais estão os Professores Éboli, Burdman, Nussenzveig, França e Funchal, o sensei Sasaki e meus amigos do dojo (Akemi, Paula, Ernesto, Takuma, entre outros), meus amigos do IF e de fora.

Agradeço o apoio financeiro da Fapesp.

Espero sinceramente que todos aqueles que não foram citados explicitamente encontrem sua contribuição e meu reconhecimento nestas palavras e no trabalho desenvolvido.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre o transporte de partículas através da borda de um plasma confinado em tokamak. É introduzido um modelo, no qual infinitas ondas de deriva estão sobrepostas a um potencial eletrostático de equilíbrio, com campo magnético uniforme, que coloca o problema na forma de mapas. São analisados dois mapas, a saber, o mapa padrão e o mapa padrão não-*twist*. Resultados numéricos são apresentados para o transporte radial de partículas no mapa padrão. Para o mapa padrão não-*twist*, além da análise do transporte, é realizado um estudo sobre variedades de pontos hiperbólicos e a relação da configuração destas com o transporte, mostrando alteração no transporte de partículas quando ocorre reconexão de variedades.

Abstract

This work presents a study of the particle transport through the edge of a plasma confined in a tokamak. A model, with an infinite number of drift waves superposed to an equilibrium electrostatic potential, in addition to an uniform magnetic field, is introduced, what puts the problem in the form of mappings. Two mappings are analysed, viz. the standard map and the standard non-twist map. Numerical results for the radial particle transport in the standard map are presented. For the standard non-twist map besides the transport analysis, a study of the manifolds of hyperbolic points and of the relation of their configuration with the transport is carried out, showing that the particle transport is changed when the manifold reconnection occurs.

Conteúdo

1	Introdução	1
2	Plasma	5
2.1	Conceito de plasma	5
2.2	Órbitas de partículas	6
2.3	Ondas de deriva	9
2.4	Confinamento do plasma	10
3	Mapa de Onda de Deriva	15
3.1	Discretização do movimento	15
3.2	Propriedades dos mapas	18
3.3	Potenciais de equilíbrio	24
4	Mapa Padrão	27
4.1	Evolução do sistema	27
4.2	Transporte	31
5	Mapa Padrão Não-<i>Twist</i>	37
5.1	Características principais	37
5.2	Variedades	44

5.3 Transporte	48
6 Conclusão	55
Bibliografia	59
Índice	61

Capítulo 1

Introdução

Atualmente é conhecido que o transporte de partículas na borda de um plasma confinado em um tokamak é dominado por flutuações de ondas de deriva¹. O objetivo da presente dissertação é através da introdução de um modelo de campo elétrico, composto por ondas de deriva e um componente de equilíbrio (com dependência apenas na posição), estudar o transporte de partículas num plasma idealizado sujeito a um campo magnético uniforme, possibilitando a verificação do modelo, por posteriores comparações com resultados experimentais.

O modelo a ser usado aparece na referência [2], onde é introduzido o mapa de onda de deriva considerado nesta dissertação. Em geral, é utilizado um potencial eletrostático composto por um componente de equilíbrio dependente apenas da coordenada e uma superposição de ondas de deriva de frequências, amplitudes e números de onda variados. Para o mapa de onda de deriva aqui empregado, é introduzida a hipótese de que as ondas são infinitas em número, com todas as amplitudes e números de onda iguais e que todos os valores de frequências são múltiplos inteiros de um valor determinado. É este modelo para o potencial eletrostático que será explorado ao longo deste trabalho.

O modelo de infinitas ondas introduz mapas conhecidos, mas há outras abordagens ao problema de transporte devido a ondas de deriva. Por exemplo, a referência [3] trabalha o problema para uma e duas ondas de deriva

¹Conforme a referência [1].

com parâmetros distintos.

A análise do transporte começa com uma revisão de algumas propriedades do plasma, em particular do plasma confinado num tokamak. É introduzido o modelo de infinitas ondas de deriva sobrepostas a um campo elétrico de equilíbrio e são obtidos mapas a partir do modelo de campo elétrico. Também são estudadas características gerais de mapas, sendo as informações aplicadas aos casos do mapa padrão e do mapa padrão não-*twist*, que são analisados numericamente. São introduzidos métodos relevantes para o cálculo do transporte e explorações numéricas de resultados por estes métodos são realizadas. O estudo segue através do cálculo de aproximações para as variedades de pontos hiperbólicos e da relação de reconexão de variedades com os coeficientes que caracterizam o transporte, como apontado na referência [4].

A dissertação contém seis capítulos. No segundo capítulo são mostradas algumas características do plasma; também é obtida a deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ através do estudo do movimento de uma partícula carregada em campos eletromagnéticos. Esta deriva representa a forma com a qual são introduzidas as ondas de deriva. Por fim é considerada a relação entre coordenadas cartesianas e coordenadas toroidais, mais adequadas para descrever o tokamak.

O terceiro capítulo traz a obtenção dos mapas a partir do modelo de infinitas ondas e um estudo de características gerais de mapas. No quarto capítulo, o mapa padrão, bem explorado na literatura (refs. [5] e [6]), é analisado numericamente quanto a seus regimes e o surgimento de caos. Neste capítulo é introduzido o conceito de transporte, com a definição de sua principal forma de cálculo (conforme aqui utilizado), a saber, o cálculo do desvio quadrático médio das posições dos centros de guia. Também são calculados os coeficientes de transporte, através do ajuste de uma função da forma $\mathcal{F}(n) \equiv \beta n^\alpha$ (onde n é a n -ésima iteração do mapa) aos valores numéricos do desvio. Para o mapa padrão são calculados alguns casos, para os quais é possível perceber uma tendência a um comportamento difusivo em regimes de caos intenso.

O quinto capítulo apresenta a análise do mapa padrão não-*twist* (ref. [7]), através do estudo numérico de diversos casos de interesse. Em seguida são abordadas as variedades deste mapa, para as quais é conhecido o fenômeno de reconexão de variedades (de acordo com a referência [4]). Este fenômeno, posteriormente é associado a mudanças no transporte e pode portanto fornecer

informação sobre o mapa quando o caos domina. Finalmente os coeficientes de $\mathcal{F}$ são calculados para alguns casos exemplares e são introduzidos dois outros conceitos associados ao transporte, a fração de pontos que atravessam uma região do mapa e o tempo necessário para que uma dada região fique sem os pontos colocados inicialmente no seu interior.

Os casos calculados numericamente foram escolhidos por representarem modelos de comportamento caótico no plasma, permitindo a aplicação da análise desenvolvida nesta dissertação a dados experimentais.

Capítulo 2

Plasma

Neste capítulo são apresentadas generalidades sobre plasmas. Algumas de suas propriedades peculiares são estudadas sucintamente. Dentre as formulações para a descrição do comportamento do plasma, a formulação de órbitas das partículas será o ponto de partida para a análise do transporte através da borda de um plasma confinado magneticamente. Esta formulação leva aos mapas para o sistema dinâmico, no contexto do modelo utilizado.

2.1 Conceito de plasma

Plasma é a designação de um sistema macroscopicamente neutro, composto por íons (positivos), elétrons e partículas neutras (átomos e moléculas), obtido da ionização de gases. Por possuir partículas carregadas em sua composição, o plasma difere de um gás, devido às interações coulombianas no primeiro, em contraposição às interações essencialmente dipolares no segundo.

Seja rotulado pelo índice α cada tipo de partícula, q_α e n_α denotam a carga e a densidade de número (número de partículas por unidade de volume) correspondente. Então, a condição de neutralidade macroscópica significa, na ausência de perturbações externas, que num volume suficientemente grande vale:

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} = 0. \quad (2.1)$$

Desvios da neutralidade implicam em campos elétricos relativamente intensos. As partículas podem se mover com pouca resistência, como no gás, sendo os desvios então neutralizados devido ao movimento resultante das partículas carregadas.

Como os elétrons e íons possuem massas diferentes, as acelerações dos diversos tipos de partículas serão, em geral, diferentes quando for aplicado um campo externo, levando a energias cinéticas diferentes e implicando em temperaturas distintas para cada tipo de partícula.

Um outro efeito característico é a blindagem de cargas localizadas no interior do plasma. Este efeito está estreitamente relacionado à neutralidade macroscópica do plasma e esclarece o significado de macroscópico, neste caso. Quando uma carga de prova é introduzida no plasma, as cargas de sinal oposto são por esta atraídas. Assim o campo elétrico produzido pela carga de prova (q) será parcialmente compensado pelo campo produzido devido ao acúmulo de cargas ao seu redor.

Através da teoria cinética dos gases, com a solução da equação de Boltzmann¹ aplicada à solução da equação de Poisson da eletrostática, pode ser verificado que o potencial gerado pela carga de prova é da forma²:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-r/a}. \quad (2.2)$$

A quantidade a é chamada de raio de Debye. Isto mostra que o potencial de uma carga de prova é significativo para $r < a$. Então, além do raio de Debye, o plasma pode ser considerado macroscopicamente neutro.

2.2 Órbitas de partículas

O restante do presente trabalho será baseado na formulação de órbitas de partículas, segundo a qual os fenômenos do plasma são analisados de acordo com seu efeito sobre cada partícula de forma independente, desprezando as interações entre as partículas e considerando somente as interações destas com campos externos. Seguindo esta orientação, é útil estudar o movimento

¹Conforme a referência [8], p. 78.

²Os cálculos são mostrados em detalhe na referência [9], p. 23.

de uma partícula carregada em campos eletromagnéticos, servindo este estudo também para precisar conceitos e definir alguma notação.

Seja uma partícula de massa m e carga elétrica q , cujo vetor de posição é dado por $\vec{R}$ num referencial galileano S . Na presença de um campo eletromagnético, a equação de movimento da partícula é:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = q(\vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}). \quad (2.3)$$

Com a separação de componentes em 2.3, surgem as equações:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = q \left(E_x + \frac{dY}{dt} B_z - \frac{dZ}{dt} B_y \right), \quad (2.4)$$

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = q \left(E_y + \frac{dZ}{dt} B_x - \frac{dX}{dt} B_z \right), \quad (2.5)$$

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = q \left(E_z + \frac{dX}{dt} B_y - \frac{dY}{dt} B_x \right). \quad (2.6)$$

Para simplificar a solução, é introduzida a hipótese (a ser considerada como parte do modelo) de que o campo magnético dominante é representado por B_z , sendo as outras componentes de $\vec{B}$ muito menores do que esta e portanto serão desprezadas. Então, omitindo o índice z ($B_z = B$) as equações se tornam:

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = q \left(E_x + \frac{dY}{dt} B \right), \quad (2.7)$$

$$m \frac{d^2 Y}{dt^2} = q \left(E_y - \frac{dX}{dt} B \right), \quad (2.8)$$

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} = q E_z. \quad (2.9)$$

No caso em que os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ são constantes, com a definição da frequência (de Larmor):

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad (2.10)$$

seja:

$$\varphi = -(\omega t + \theta), \quad (2.11)$$

a trajetória da partícula é dada por³:

$$X(t) = x(t) + D \cos(\varphi), \quad (2.12)$$

$$Y(t) = y(t) + D \sin(\varphi) \quad (2.13)$$

e

$$Z(t) = z(t), \quad (2.14)$$

com:

$$x(t) = C_x + \frac{E_y}{B}t, \quad (2.15)$$

$$y(t) = C_y - \frac{E_x}{B}t \quad (2.16)$$

e

$$z(t) = Z_0 + V_{z0}t + \frac{qE_z}{2m}t^2, \quad (2.17)$$

sendo θ , D , C_x , C_y , Z_0 e V_{z0} constantes dependentes das condições iniciais.

Estes resultados mostram que a partícula executa um movimento circular, de frequência $\omega/2\pi$ e sentido dependente do sinal da carga, em torno do ponto cujas coordenadas são dadas por 2.15, 2.16 e 2.17. Este ponto é chamado de centro de guia (CG).

Das equações que definem a posição do centro de guia, são obtidas para sua velocidade:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{E_y}{B}, \quad (2.18)$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{E_x}{B} \quad (2.19)$$

e

$$\frac{dz}{dt} = V_{z0} + \frac{qE_z}{m}t. \quad (2.20)$$

Destas, pode ser notado que vale, para a componente da velocidade ortogonal ao campo magnético:

$$\vec{v} - \frac{\vec{v} \cdot \vec{B}}{B^2} \vec{B} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \equiv \vec{v}_d, \quad (2.21)$$

a velocidade $\vec{v}_d$, com a qual se move a projeção da posição do centro de guia no plano xy de S , é chamada velocidade de deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ e não havendo risco de confusão, simplesmente velocidade de deriva.

³Conforme a referência [10], p. 144.

Para o confinamento de partículas numa região⁴ xy o movimento relevante é devido à velocidade de deriva, uma vez que o movimento circular em torno do centro de guia eventualmente leva de volta as partículas à região determinada. A velocidade na direção $\hat{z}$ não é relevante para o confinamento na referida região xy e não será considerada.

Poderiam ser introduzidas outras derivas, como por exemplo a deriva devida à curvatura do campo magnético, para uma melhor representação das condições no plasma (conforme a referência [9]). Entretanto, considerando evidências experimentais (ref. [1]) que indicam que a deriva dominante para o transporte na borda do plasma é a deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, o objetivo do presente trabalho é estudar apenas este efeito dominante.

Os efeitos dos termos desconsiderados na solução da equação 2.3 (como por exemplo dependências temporais do campo elétrico ou outras derivas) não serão aqui estudados. O esperado é uma descrição realista do comportamento do plasma sem estas correções.

2.3 Ondas de deriva

Ondas de deriva, de acordo com o uso neste trabalho, são definidas como oscilações em um dos campos que causam a deriva de partículas.

Um modelo para ondas no plasma é a equação de Hasegawa-Mima, dada por:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla_{\perp}^2 \phi - \phi) - [(\nabla_{\perp} \phi \times \hat{z}) \cdot \nabla_{\perp}] \left[\nabla_{\perp}^2 \phi - \ln \left(\frac{n_0}{\omega_{ei}} \right) \right] = 0, \quad (2.22)$$

onde ϕ é o potencial eletrostático ao qual está sujeito o plasma, $\omega_{ei} = eB/cm_i$, m_i é a massa de um íon, e:

$$\nabla_{\perp} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y}.$$

Na presença de não-homogeneidades no potencial, a equação de Hasegawa-Mima admite linearização para pequenas amplitudes.

⁴Mais precisamente o confinamento de partículas nesta região do plano significa a restrição das coordenadas x e y a um certo domínio conveniente, para quaisquer outros valores de z .

A onda então se propaga num plasma magnetizado e não-homogêneo (com densidade $n_0(x)$), com relação de dispersão $\omega = \vec{k} \cdot \vec{v}_d$, onde ω é a frequência angular da onda, $\vec{k}$ é o seu vetor correspondente e $\vec{v}_d$ é a velocidade de deriva diamagnética (conforme a referência [11]), definida por:

$$\vec{v}_d = \hat{z} \times \nabla \ln(n_0 c T_e / e B)$$

sendo T_e a temperatura dos elétrons e $\hat{z}$ o vetor perpendicular a $\vec{k}$.

2.4 Confinamento do plasma

O plasma obtido do aquecimento de um gás a altíssimas temperaturas ($T \sim 10^6$) deve ser confinado magneticamente. Surgiram alguns dispositivos para esta tarefa, entre eles o tokamak (câmara toroidal de confinamento magnético), que tem sido muito utilizado para estudar o plasma e para buscar a realização da fusão nuclear controlada.

O tokamak consiste em um toro dentro do qual fica confinado o plasma, seguindo a forma toroidal do recipiente (mas sem entrar em contato com suas paredes), sendo aplicado um campo magnético externo gerado por uma corrente elétrica que se desloca ao longo do eixo de simetria do toro. O plasma se movimenta em torno deste eixo, gerando na direção de seu movimento uma corrente elétrica (pois os elétrons e íons se movem em sentidos opostos quando é aplicado um campo elétrico).

O plasma não é apenas um corpo rígido com bordas bem definidas e que não variam temporalmente, mas é um sistema complexo que obedece equações não-lineares, composto por um grande número de partículas. Portanto aparecem dificuldades para o seu confinamento. A principal região de interesse, neste trabalho, é a borda, pois é nesta região que o escape de partículas ocorre.

As partículas escapam pois as equações não-lineares levam a soluções caóticas (como será observado ao longo deste trabalho) para as suas órbitas, devido a ondas presentes na borda, ondas (principalmente eletrostáticas) observadas experimentalmente⁵. Também escapam devido à difusão por causa

⁵Conforme a referência [1].

das colisões entre as partículas e a pequenos defeitos inerentes à fabricação de peças do tokamak.

Conforme as partículas escapam pela borda, elas colidem com as paredes do tokamak, diminuindo a densidade do plasma e contaminando sua composição, dificultando assim a realização da fusão nuclear controlada.

O tokamak é ilustrado esquematicamente na figura 2.1 onde também são definidas as coordenadas toroidais convenientes. A partir destas, são feitas algumas aproximações para o uso de coordenadas cartesianas.

Figura 2.1: Ilustração do tokamak e definição das coordenadas toroidais.

Como indicado na figura 2.1, são usadas três coordenadas para descrever a posição de um ponto com respeito a uma origem no eixo de simetria, distante R do centro de um círculo de uma seção transversal do toro e no mesmo plano de dois destes centros (R é a distância do eixo de simetria a um destes centros), a saber r , θ e φ , respectivamente a coordenada radial, o ângulo poloidal e o toroidal. O intervalo de interesse para r é: $0 \leq r \leq A_1$, onde A_1 , indicado na figura, é o raio do plasma. Seja a parametrização da

posição de um ponto de acordo com estas coordenadas, a partir da origem no eixo de simetria, dada por: $\vec{r} = r\hat{\rho} + R(\hat{\varphi} \times \hat{i})$, onde $\hat{i}$ é um vetor normalizado direcionado ao longo do eixo de simetria, $\hat{\rho}$ ao longo da direção de aumento de r e $\hat{\varphi}$ ao longo da direção de aumento de φ .

Se $R \gg A_1$, isto é na escala do problema, qualquer deslocamento apreciável (na escala temporal de interesse) $\Delta L = R\Delta\varphi$, ao longo da direção toroidal, implica em uma variação desprezível de φ ; então é aproximadamente válido que a direção $\hat{\varphi}$ é constante e que o toro seja substituído por um cilindro, com condições de contorno periódicas. Assim, são obtidas as relações entre as coordenadas toroidais e cilíndricas:

$$z = R\varphi,$$

$$\rho = r$$

e θ é mantido sem alterações. O efeito principal da aproximação é desprezar a curvatura do toróide.

Seja $\rho = \rho' + \rho_0$. Como na aproximação de coordenadas toroidais por cilíndricas, seja $\rho_0 \gg |\rho'|$ (região da borda do plasma). Então, qualquer deslocamento (na escala de deslocamentos apreciáveis ao longo de $\hat{\rho}$) ao longo da direção $\hat{\theta}$, $\Delta l = \rho\Delta\theta$ implica numa pequena variação de θ .

Lembrando as relações entre as coordenadas cilíndricas e cartesianas $x' = \rho \cos \theta$, $y' = \rho \sin \theta$, $z = z$. Para valores pequenos de θ e de ρ' valem:

$$x' = \rho_0 + \rho',$$

$$y' = \rho_0\theta,$$

com z inalterado (foram tomados apenas os primeiros termos não nulos na série dos senos e cossenos). Por fim, sejam definidas as coordenadas $x = x' - \rho_0$ e $y = y'$, resultam:

$$x = \rho',$$

$$y = \rho_0\theta$$

e

$$z = z.$$

Assim, com condições de contorno periódicas para y , o efeito principal da aproximação é desprezar a curvatura do cilindro.

Uma vez caracterizado o plasma e as aproximações sobre sua composição (descrição de órbitas de partículas sujeitas a campos externos) e sobre as coordenadas convenientes ao tokamak, será utilizada a deriva $\vec{E} \times \vec{B}$ como forma de introduzir ondas na borda do plasma e transformar o problema do movimento decorrente no estudo de mapas.

Capítulo 3

Mapa de Onda de Deriva

Neste capítulo são introduzidos mapas, para estudar a deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, que sofrem as partículas carregadas, num campo magnético uniforme com um campo elétrico perpendicular ao magnético. A forma mais geral de mapas a ser tratada será obtida pela introdução de uma superposição de ondas, a partir da equação para a velocidade de deriva (2.21). Os modelos de potencial de equilíbrio apresentados levam, em seguida, ao mapa padrão e ao mapa padrão não-*twist*.

3.1 Discretização do movimento

Assumindo um campo eletrostático (no plano xy) compatível com as condições do plasma confinado, o campo possui a forma:

$$\vec{E} = -\nabla\phi(x, y, t). \quad (3.1)$$

O potencial ϕ depende apenas do tempo e das coordenadas x e y .

A substituição da equação 3.1 nas equações 2.18 e 2.19 resulta em:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{B} \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (3.2)$$

e

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{B} \frac{\partial\phi}{\partial x}. \quad (3.3)$$

Sendo $\mathcal{H}(q, p, t)$ a hamiltoniana de um certo sistema, onde q e p são as variáveis canônicas conjugadas, as equações de Hamilton são:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \quad (3.4)$$

e

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \quad (3.5)$$

Comparação entre as equações de Hamilton e as equações 3.2 e 3.3 mostra que o centro de guia, na presença de um tal potencial, forma um sistema hamiltoniano de 1 grau e meio de liberdade (1 grau de liberdade com hamiltoniana dependente do tempo), com hamiltoniana:

$$\mathcal{H}(y, x, t) = \frac{\phi}{B}, \quad (3.6)$$

com $p = x$ e $q = y$.

O estudo do movimento de uma partícula em campos eletromagnéticos será aplicado à descrição de um plasma. Para isto, o plasma será considerado um conjunto de partículas carregadas. A natureza destas partículas não será detalhada, pois o movimento estudado será devido à velocidade de deriva, que independe da carga ($q \neq 0$) ou da massa das mesmas (conforme a equação 2.21), podem mesmo ser elementos de fluido.

O confinamento do plasma significa, nesta descrição, a limitação das partículas das quais é composto a uma região finita determinada. Será estudado um potencial eletrostático com ondas de deriva, sabendo que as ondas de deriva que surgem de gradientes de densidade num plasma, produzem transporte anômalo de partículas através do campo magnético que as confina (conforme a referência [12]).

O potencial a ser estudado é dado por uma superposição de infinitas ondas de deriva, de mesma amplitude e um potencial de equilíbrio $H(x)$:

$$\phi(x, y, t) = H(x) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} A \cos(k_y y - j\omega_0 t), \quad (3.7)$$

que pode também ser escrito como:

$$\phi(x, y, t) = H(x) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} A [\cos(k_y y) \cos(j\omega_0 t) + \sin(k_y y) \sin(j\omega_0 t)].$$

A série de Fourier da função delta de Dirac, com período $T = 2\pi/\omega_0$ é:

$$\delta(\omega_0 t - 2\pi j) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \cos(k\omega_0 t), \quad \frac{2\pi j}{\omega_0} - \frac{T}{2} \leq t < \frac{2\pi j}{\omega_0} + \frac{T}{2}. \quad (3.8)$$

Para estender a validade da série a todos os reais, deve ser considerada a periodicidade da mesma nos intervalos e somar portanto sobre os j , usando do lado direito o resultado $\cos(k\omega_0 t) = \cos(-k\omega_0 t)$, o que leva a:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_0 j t) = 2\pi \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi j), \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.9)$$

Com isto e com o uso da igualdade $\sin(k\omega_0 t) = -\sin(-k\omega_0 t)$, o potencial se torna:

$$\phi(x, y, t) = H(x) + 2\pi A \cos(k_y y) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi j). \quad (3.10)$$

Para $(j-1)T < t < jT$ apenas o termo $H(x)$ é diferente de zero, de forma que $x(t)$ para t neste intervalo é constante, pela equação 3.2 e será denotado por:

$$x(t) = x_n, \quad (n-1)T < t \leq nT, \quad (3.11)$$

com a definição:

$$x(nT) = \lim_{t \rightarrow nT^-} x(t) = x_n, \quad (3.12)$$

para que a função fique definida neste ponto, visto que a posição deve estar definida para todos os instantes. Não é possível exigir a continuidade de $x(t)$, pois a simplificação de um potencial impulsivo distorce o problema. Para $y(t)$, de acordo com a equação 3.3, vale:

$$y(t) = y_n + \frac{1}{B} \frac{dH}{dx} \Big|_{x=x_n} (t - nT), \quad (n-1)T < t \leq nT, \quad (3.13)$$

onde analogamente ao caso de $x(nT)$ é feita a definição:

$$y(nT) = \lim_{t \rightarrow nT^-} y(t) = y_n. \quad (3.14)$$

As diferenças entre x_{n+1} e x_n , y_{n+1} e y_n , devem ser obtidas integrando as equações de movimento (3.2 e 3.3) no intervalo: $nT - \epsilon < t < (n+1)T - \epsilon$,

com $\epsilon \rightarrow 0$ e o potencial dado pela equação 3.10, ou seja:

$$x_{n+1} = x_n + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{nT-\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} \frac{2\pi A k_y}{B} \sin(k_y y) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi j) dt,$$

$$y_{n+1} = y_n + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{nT-\epsilon}^{(n+1)T-\epsilon} \left(\frac{1}{B} \frac{dH}{dx} + \frac{2\pi A}{B} \cos(k_y y) \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \delta(\omega_0 t - 2\pi j) \right) dt.$$

O cálculo destas integrais leva às equações para o mapa:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{2\pi A k_y}{\omega_0 B} \sin(k_y y_n), \quad (3.15)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{2\pi}{\omega_0 B} \frac{dH}{dx} \Big|_{x=x_{n+1}}. \quad (3.16)$$

As equações 3.15 e 3.16 descrevem a posição do centro de guia, no plano xy , a cada período T . Estas equações representam o mapa que será utilizado para descrever o movimento do centro de guia, para um dado potencial de equilíbrio $H(x)$.

3.2 Propriedades dos mapas

Mapa é um sistema de duas equações a diferenças (ou seja, uma relação recursiva). Ocasionalmente será usado o termo mapa para o gráfico produzido por este sistema de equações, obtido a partir de um conjunto de pontos iniciais que são iterados um certo número de vezes.

Conforme a referência [13], transformações canônicas preservam a área e a evolução temporal é uma transformação canônica. Desta forma, para qualquer sistema hamiltoniano, o jacobiano entre variáveis canônicas $(p_i$ e $q_i)$ em instantes distintos deve valer 1.

Para um sistema de um grau de liberdade (duas variáveis canônicas p e q) o jacobiano assume a forma:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial p_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial p_{n+1}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial q_{n+1}}{\partial p_n} & \frac{\partial q_{n+1}}{\partial q_n} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Valendo as equações 3.15 e 3.16, com $p = x$ e $q = y$ e com as definições:

$$\mathcal{A}(y_n) = \left(\frac{2\pi A k_y^2}{\omega_0 B} \right) \cos(k_y y_n) \quad (3.18)$$

e

$$\mathcal{B}(x_{n+1}) = \left(\frac{2\pi}{\omega_0 B} \right) \left(\frac{d^2 H}{dx^2} \right) \Big|_{x=x_{n+1}} \quad (3.19)$$

o jacobiano se torna:

$$J = \det \begin{pmatrix} 1 & \mathcal{A}(y_n) \\ \mathcal{B}(x_{n+1}) & 1 + \mathcal{A}(y_n)\mathcal{B}(x_{n+1}) \end{pmatrix} = 1, \quad (3.20)$$

confirmando que o mapa, resultando de um sistema hamiltoniano, conserva a área.

Como explicado na seção 2.4, as coordenadas cartesianas são associadas às coordenadas toroidais, para explicitar a aplicação do mapa a um tokamak. Tendo em vista a associação de y com o ângulo poloidal, foram impostas condições de contorno periódicas sobre y à equação 3.16 e às equações que desta são obtidas, a saber 3.47 e 3.53.

O mapa dado pelas equações 3.15 e 3.16 possui a forma:

$$p_{n+1} = p_n + f(q_n), \quad (3.21)$$

$$q_{n+1} = q_n + \alpha(p_{n+1}), \quad \text{mod } 1. \quad (3.22)$$

A quantidade α é denominada número de rotação, sendo a razão das frequências dos ângulos, para a hamiltoniana integrável correspondente (sistema não-perturbado, sem ondas de deriva), quando o problema é colocado na forma de uma hamiltoniana com dois graus de liberdade (sem dependência temporal) utilizando variáveis de ação-ângulo¹.

¹De acordo com a referência [5]. Para a transformação para dois graus de liberdade, eliminando o tempo, página 15. Para a relação entre o número de rotação e as frequências, página 164.

Podem ser diferenciados dois tipos de mapas, no que diz respeito a α . O primeiro é o chamado mapa *twist* para o qual α é uma função monotônica de p , valendo:

$$\frac{d\alpha}{dp} \neq 0, \quad \forall p \in \mathcal{D} \quad (3.23)$$

onde $\mathcal{D}$ é o domínio da variável p . O segundo tipo é o chamado mapa não-*twist*, para o qual a condição 3.23 é violada.

Esta condição tem grande influência na forma do mapa. No primeiro caso, um exemplo de α linear é mostrado na figura 3.1. O segundo caso é exemplificado para $\alpha = 1 - p^2$, mostrado na figura 3.2.

Figura 3.1: Número de rotação para mapa *twist*, $\alpha = p$.

Das equações para o mapa na forma 3.21 e 3.22 fica evidente que, para o número de rotação monotônico, apenas um valor de α corresponde a cada p e q evolui, conforme o mapa é iterado, de forma distinta para cada p diferente, o que implica em uma evolução distinta também para p .

No caso não-monotônico, pode haver mais de um valor de p para cada α e no exemplo mostrado na figura 3.2 que corresponde ao mapa padrão não-*twist*, há dois valores. Isto implica, como será verificado numericamente, em

Figura 3.2: Número de rotação para mapa não-*twist*, $\alpha = 1 - p^2$.

um tipo de simetria na ocorrência de estruturas como cadeias (dimerizadas) de ilhas, com respeito a $p = 0$.

Uma das características principais de um mapa são seus pontos periódicos. Representando o par p, q por um vetor:

$$\mathbf{u}_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

e as transformações do mapa (equações 3.21 e 3.22) pelo operador $\mathbf{T}$ de tal forma que:

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{T}(\mathbf{u}_n), \quad (3.25)$$

um ponto periódico fica definido por:

$$\mathbf{T}^m(\mathbf{u}_n^*) = \mathbf{u}_n^*, \quad (3.26)$$

onde m é o menor valor inteiro positivo para o qual vale a igualdade. Assim, m é denominado período do ponto periódico.

O ponto periódico é denominado ponto fixo se $m = 1$, neste caso:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}_n^*) = \mathbf{u}_n^*. \quad (3.27)$$

O ponto fixo pode ser escrito também utilizando $x = p$ e $y = q$, equivalentemente:

$$x_{n+1} = x_n, \quad (3.28)$$

$$y_{n+1} = y_n, \quad \text{mod } 1. \quad (3.29)$$

Estes pontos podem ser classificados de acordo com a sua estabilidade, que é determinada pela linearização do mapa em torno do ponto fixo. Sendo $\mathbf{u}^*$ um ponto fixo, um ponto próximo será dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* + \Delta\mathbf{u},$$

neste caso a linearização (mantendo apenas termos de primeira ordem em $\Delta\mathbf{u}$) se escreve como:

$$\Delta\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{J}\Delta\mathbf{u}_n, \quad (3.30)$$

onde $\mathbf{J}$ é a matriz jacobiana calculada no ponto fixo (o determinante $J = \det \mathbf{J}$ é o jacobiano definido pela equação 3.20).

Os auto-valores da matriz $\mathbf{J}$, calculados no ponto fixo em questão são dados por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr} \mathbf{J}}{2} \pm i \sqrt{1 - \left(\frac{\text{Tr} \mathbf{J}}{2} \right)^2}, \quad (3.31)$$

de onde pode ser verificado que $\lambda_1 \lambda_2 = J = 1$ e que $\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr} \mathbf{J}$, sendo que $\text{Tr} \mathbf{J} \in \mathbb{R}$. Mais explicitamente $\text{Tr} \mathbf{J} = 2 + \mathcal{A}\mathcal{B}$ com $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dados pelas equações 3.18 e 3.19 respectivamente.

Há três possibilidades para os valores de $\lambda_{1,2}$. Sejam então as definições:

- O ponto é elíptico se valer:

$$\lambda_{1,2} = e^{\pm i\sigma}, \quad (3.32)$$

com:

$$\text{Tr} \mathbf{J} = 2 \cos \sigma \quad (3.33)$$

e

$$|\text{Tr} \mathbf{J}| < 2. \quad (3.34)$$

O movimento linearizado (cf. a referência [5], página 205) em torno do ponto elíptico então é dado por elipses. Os pontos elípticos podem ser reconhecidos, no mapa, por pontos cercados de ilhas (para pequenas distâncias estas são elipses).

- O ponto é hiperbólico se valer:

$$\lambda_2 = \lambda_1^{-1} \quad (3.35)$$

com $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ e:

$$|\lambda_{1,2}| = e^{\pm\sigma} \quad (3.36)$$

e também

$$|\text{Tr} \mathbf{J}| = |2 \cosh \sigma| > 2. \quad (3.37)$$

As iterações dos pontos próximos ao ponto hiperbólico seguem hipérboles, com os pontos iterados permanecendo em um dos ramos ou alternando entre os dois.

- Caso:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \pm 1, \quad (3.38)$$

é dito que o ponto fixo sofre uma transição entre a estabilidade e a instabilidade. Seja então denominado ponto de transição (ou parabólico).

Assim pode ser mostrado que² o movimento pode ser classificado com respeito a sua estabilidade, de acordo com o comportamento dos pontos em torno de um ponto fixo, através dos auto-valores da matriz $\mathbf{J}$. Uma classificação análoga pode ser feita para pontos periódicos em geral.

Muitos sistemas em mecânica clássica apresentam comportamento desordenado, devido a suas equações não-lineares. Quando o movimento evolui de maneira muito diferente, para condições iniciais aproximadamente iguais é dito que há caos neste sistema ou que o movimento é caótico. Neste caso o sistema é muito sensível a condições iniciais e sendo estas conhecidas com uma precisão finita, o movimento se torna imprevisível e mostra comportamento aparentemente aleatório apesar de se tratar de um sistema determinístico.

O mapa correspondente a este sistema também reflete seu comportamento caótico, através de regiões onde os pontos não se distribuem em curvas (de nível ou ilhas), mas se apresentam com uma distribuição desordenada. Posteriormente, através de exemplos, serão reconhecidas estas regiões. Para os propósitos deste trabalho, esta definição, ainda que imprecisa, será suficiente pois servirá para indicar as regiões de onde é interessante calcular o transporte, ou para indicar o comportamento do plasma em dado local.

²Conforme a referência [5], página 205.

A definição de trajetória caótica pode se tornar mais precisa, com o auxílio do chamado expoente de Liapunov [13]. A divergência entre duas trajetórias separadas inicialmente por uma distância d_0 é medida pela distância num instante t posterior que é dada por:

$$d(t) \sim d_0 e^{\lambda t}. \quad (3.39)$$

O coeficiente λ é chamado expoente de Liapunov.

Para $\lambda > 0$ as trajetórias são caóticas. Se o sistema é descrito por um mapa, então a definição é modificada para:

$$d(n) \sim d_0 e^{\lambda n}, \quad (3.40)$$

onde n é o número da iteração.

3.3 Potenciais de equilíbrio

$H(x)$ é definido como o potencial de equilíbrio, isto é, a parte do potencial que não é composta de ondas de deriva na equação 3.7. Isto implica que a forma deste potencial determina a forma do campo elétrico dominante (conforme a equação 3.1).

Para que o campo elétrico (e o mapa) fique determinado, é necessário conhecer a forma de $H(x)$. Serão estudados dois modelos, a saber:

$$H(x) = bx^2 \quad (3.41)$$

e

$$H(x) = c_1 x + c_2 x^3. \quad (3.42)$$

Se $H(x)$ for expresso pela equação 3.41 (caso A), fazendo a transformação:

$$x' = \frac{2bk_y}{\omega_0 B} x, \quad (3.43)$$

para x e usando a equação:

$$y' = \frac{k_y}{2\pi} y, \quad (3.44)$$

para y , com a definição:

$$K = \frac{4\pi b A k_y^2}{(\omega_0 B)^2}, \quad (3.45)$$

segue o mapa padrão:

$$x'_{n+1} = x'_n + K \sin(2\pi y'_n), \quad (3.46)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + x'_{n+1}. \quad (3.47)$$

Para $H(x)$ dado pela equação 3.42 (caso B), com $c_1 < 0$ e $c_2 > 0$, resultam, com a transformação para x :

$$x' = \sqrt{\frac{3c_2}{-c_1}} x, \quad (3.48)$$

para y :

$$y' = \frac{-k_y}{2\pi} y \quad (3.49)$$

e das definições:

$$a = \frac{-c_1}{\omega_0 B} \quad (3.50)$$

e

$$b = \frac{2\pi A k_y}{\omega_0 B} \sqrt{\frac{3c_2}{-c_1}}, \quad (3.51)$$

as equações para o mapa padrão não-*twist*:

$$x'_{n+1} = x'_n - b \sin(2\pi y'_n), \quad (3.52)$$

$$y'_{n+1} = y'_n + a(1 - x'^2_{n+1}). \quad (3.53)$$

As equações para os mapas foram obtidas através da deriva $\vec{E} \times \vec{B}$. Foi introduzido o modelo a ser utilizado, de uma superposição de infinitas ondas de deriva, que levaram à forma geral do mapa para um potencial qualquer $H(x)$. Algumas propriedades de mapas, que serão utilizadas nos demais capítulos, foram introduzidas e por fim foram mostradas as formas de potencial a serem estudadas, estas que levam ao mapa padrão e ao mapa padrão não-*twist*. Estes mapas foram escolhidos pois apresentam características desejáveis para um modelo de tokamak, exibem barreiras e o transporte variando de acordo com os parâmetros das ondas de deriva, além de haver grande quantidade de informação sobre estes mapas na literatura. No próximo capítulo será estudado o mapa padrão, o primeiro e mais conhecido destes e que serve de aproximação para outros mapas sob determinadas condições.

Capítulo 4

Mapa Padrão

Neste capítulo são estudados o mapa padrão e o transporte num sistema por ele descrito. A evolução do sistema é mostrada através de gráficos das órbitas no mapa a cada período T , conforme o parâmetro K é variado. A partir destes gráficos são identificadas características do mapa. São localizados os pontos hiperbólicos e o transporte em regiões caóticas é calculado. Neste capítulo são definidos conceitos gerais que serão utilizados posteriormente.

4.1 Evolução do sistema

Retomando as equações para o mapa padrão (3.46 e 3.47):

$$x_{n+1} = x_n + K \sin(2\pi y_n), \quad (4.1)$$

$$y_{n+1} = y_n + x_{n+1}, \quad \text{mod } 1, \quad (4.2)$$

pode ser notado que este mapa possui número de rotação monotônico, mostrado na figura 3.1. Após alguns testes foi escolhido como domínio (onde aparecem as propriedades mais interessantes) para as variáveis do mapa: $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y < 1$.

Os pontos fixos são dados, para este mapa, por $x = n$, $y = 0$ ou $y = 0,5$ com $n \in \mathbb{Z}$, de acordo com as equações 3.28 e 3.29. Como o intervalo de interesse a ser estudado para x é $0 \leq x \leq 1$, os pontos fixos neste intervalo possuem $x = 0$ ou $x = 1$.

Para obter os mapas (figuras) desta seção, foi seguido o procedimento: pontos iniciais foram distribuídos numa grade retangular, de lados l_x e l_y a partir de um vértice inicial $P_0 = (x^*; y^*)$ determinado, com espaçamento uniforme entre os pontos, espaçamento horizontal: $\Delta y = l_y / (N_y - 1)$, vertical: $\Delta x = l_x / (N_x - 1)$ (para $N_x \neq 1$ ou $N_y \neq 1$; se não valer alguma desigualdade, não há espaçamento na dada direção e os pontos ficam dispostos ao longo do segmento com a correspondente coordenada do vértice constante), sendo que $N = N_x N_y$ representa o número total de condições iniciais. Cada ponto inicial nesta grade foi iterado um certo número (i) de vezes, tal qual foi considerado mais conveniente para a visualização, todas as iterações foram marcadas no gráfico (inclusive as próprias condições iniciais). Eventualmente foi utilizada mais de uma grade retangular, para melhorar o aspecto do gráfico, mas isto será indicado conforme a necessidade.

Pode ser observado o comportamento dos pontos obtidos do mapa variando o parâmetro K . Inicialmente, para K pequeno, é observado um mapa composto predominantemente por curvas de nível, na figura 4.1. Uma curva de nível é uma curva aberta que divide o mapa, se estendendo por todo o domínio de y , podendo haver várias próximas e que constituem uma barreira, visto que pontos acima ou abaixo de uma curva deste tipo não podem atravessá-la. Por outro lado, uma ilha é uma curva fechada, que separa uma região finita (que não se estende por todo o domínio de y ou de x) do mapa das demais regiões (mais precisamente uma das curvas fechadas de um conjunto, em torno de um ponto elíptico).

A figura 4.1 foi feita utilizando $l_x = l_y = 1$, $P_0 = (0; 0)$, $N_x = 12$, $N_y = 1$ e $i = 2000$. Nesta figura as condições iniciais foram destacadas. O mapa possui ilhas, apesar de não estarem perceptíveis na figura 4.1. Isto fica mais evidente para $K = 0,04$, como é mostrado na figura 4.2. Neste caso surgem três cadeias de ilhas, uma central e duas em torno desta, entre as quais existem curvas de nível.

Para a figura 4.2 foram utilizados $l_x = 1$, $l_y = 0,4$, $P_0 = (0; 0,3)$, $N_x = 9$, $N_y = 4$ e $i = 3000$. Novamente as condições iniciais foram destacadas.

Aumentando o valor de K para $K = 0,125$, como mostrado na figura 4.3, surgem diversas cadeias de ilhas e ainda restam muitas curvas de nível, mas aparecem regiões caóticas em torno das ilhas superior e inferior. Lembrando que de acordo com a seção 3.2 a região será considerada caótica se posuir

Figura 4.1: Mapa Padrão, $K = 10^{-3}$.

Figura 4.2: Mapa Padrão, $K = 0,04$.

distribuição desordenada de pontos.

O caos se espalha pelo mapa, com o aumento de K , de forma que para

Figura 4.3: Mapa Padrão, $K = 0,125$.

$K = 0,15464 \lesssim K^*$ (localizado com o auxílio da referência [6], página 83) restam apenas dois conjuntos de curvas de nível. Se K for aumentado ainda mais estes são rompidos e pontos inicialmente em regiões inferiores podem chegar a regiões superiores e reciprocamente. Por esta razão K^* é chamado de coeficiente crítico. O gráfico correspondente é mostrado na figura 4.4 *a*.

O próximo gráfico, 4.4 *b* mostra a situação após a quebra das últimas curvas de nível, para $K = 0,25$. Pode ser notado que permanecem diversas ilhas, mas o caos domina o mapa.

Muitas ilhas desaparecem quando K chega a $K = 0,5$, permanecendo quatro ilhas e o restante do mapa é caótico, conforme a figura 4.4 *c*. Posteriores aumentos de K levam ao desaparecimento das ilhas e finalmente o mapa se torna completamente caótico. A situação de caos global é mostrada na figura 4.4 *d*, para $K = 4$.

(a)

$$K \approx 0,15464$$

(b)

$$K = 0,25$$

(c)

$$K = 0,5$$

(d)

$$K = 4$$

Figura 4.4: Evolução do mapa padrão.

4.2 Transporte

O transporte mais relevante para o confinamento do plasma (num tokamak) é aquele que ocorre através de sua borda, ou seja, pela direção x . Desta forma, seja definido o desvio quadrático médio das posições pela equação:

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2}{N} - \left[\sum_{j=1}^N \frac{(x_n^{(j)} - x_0^{(j)})}{N} \right]^2, \quad (4.3)$$

onde n é o número da iteração (que é equivalente ao tempo) a partir do ponto inicial identificado pelo índice 0, N é o número de pontos iniciais considerados na região onde se deve determinar o desvio, j distingue os pontos considerados

uns dos outros (a partir da classificação dos pontos iniciais).

Como o plasma é um fluido (com propriedades particulares, conforme a seção 2.1) e para um fluido o desvio quadrático médio é proporcional ao produto do tempo pelo coeficiente de difusão¹, será utilizado como principal fonte de informação sobre o transporte o desvio quadrático médio, definido pela equação 4.3. No caso de fluidos o transporte é difusivo. Para desvios deste tipo de transporte é utilizado o termo transporte anômalo.

A análise do transporte será feita com o ajuste de uma função do tipo:

$$\mathcal{F}(n) \equiv \beta n^\alpha \quad (4.4)$$

aos dados numéricos (valores de σ^2 e os valores de n correspondentes), sendo então possível classificar os regimes de transporte e estudar as variações dos coeficientes com os parâmetros dos mapas.

Com o ajuste de $\mathcal{F}(n)$ o transporte é classificado em três casos, a saber: $\alpha > 1$ para o qual o transporte é classificado como super-difusivo, $\alpha = 1$ e o transporte é difusivo (como no caso do fluido) ou $\alpha < 1$ sendo então o transporte sub-difusivo. A observação do transporte anômalo na borda do plasma será melhor descrita para parâmetros dos mapas para os quais $\alpha > 1$. Caso sejam encontrados parâmetros e regiões que levem a $\alpha < 1$ pode ser considerado que tais combinações de fatores levam a um melhor confinamento do plasma.

Caso o transporte seja difusivo, para que β seja proporcional ao coeficiente de difusão deve ser avaliado o comportamento assintótico, dado por $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2$, pois o transporte num fluido considera pontos para $r \rightarrow \infty$, que precisam de um tempo muito grande para que sejam atingidos. Enquanto a equação 4.4 define o coeficiente de difusão local, para avaliar o comportamento assintótico, na prática, serão eliminadas as primeiras iterações. Extendendo esta noção de comportamento assintótico a casos com α qualquer, o ajuste de $\mathcal{F}(n)$ será feito a partir de $n > n^*$, com n^* um valor fixo a ser determinado ($n^* \sim 10^3$), de forma que seja satisfeita a hipótese de eliminação do comportamento não-assintótico.

Para o cálculo numérico, pontos foram inicialmente distribuídos numa grade retangular, como no procedimento para os mapas, explicado no iní-

¹Conforme a referência [14], página 235.

cio da seção 4.1. Entretanto, o valor de σ^2 foi calculado, de acordo com a fórmula 4.3, a cada iteração. Sendo obtido o valor de $\sigma^2(n)$ como função de n , o número da iteração, foi feito um ajuste seguindo o método dos mínimos quadrados², de uma função da forma dada pela equação 4.4, aos valores numéricos obtidos. Seguindo a orientação deste trabalho, de estudar o transporte através da borda do plasma, os casos de interesse ocorrem para $K > K^*$, quando não há mais curvas de nível no mapa.

Considerando o caso $K = 0,17$, pode ser observado no mapa a seguir a distribuição dos pontos, após $i = 4000$ iterações. O procedimento seguido para sua obtenção foi ligeiramente diferente. Pontos foram inicialmente distribuídos ao longo de duas grades retangulares (destacadas por cores diferentes) em duas regiões do mapa, para que fosse observada, após o dado número de iterações, a distribuição de pontos e seu comportamento na região onde estavam as últimas curvas de nível (denominada daqui por diante de zona central) para $K = K^*$.

A figura 4.5 mostra esta distribuição. Os pontos inicialmente abaixo da zona central (colocados no retângulo em azul claro) são mostrados em azul. Os pontos inicialmente acima da zona central (em verde) são mostrados em vermelho.

É clara a mistura de pontos originalmente acima e abaixo da zona central, explicitando a quebra das últimas curvas de nível e possibilitando a representação do comportamento observado no tokamak, quando ocorre o transporte de partículas para além da borda do plasma.

O cálculo de σ^2 como função de n leva à figura 4.6. Os pontos foram inicialmente distribuídos em uma grade uniforme, como na obtenção dos mapas (início da seção 4.1) com vértice inicial $P_0 = (0, 27; 0, 27)$ e com $l_x = l_y = 0,01$. Foram utilizados $N = 2500$ pontos iniciais distribuídos na grade.

Na figura são mostrados 5000 pontos (em azul). Para o ajuste da função $\mathcal{F}(n)$, dada pela equação 4.4, foram utilizados os últimos 2000 pontos ($3001 \leq n \leq 5000$) com o objetivo de obter o comportamento assintótico. Tal intervalo para n foi escolhido pois a distribuição de pontos sugere um

²O software utilizado, *GNUPLLOT*, ajusta a função aos dados de acordo com uma versão do método dos mínimos quadrados, a incerteza foi estimada de acordo com um modelo linear.

Figura 4.5: Mapa Padrão, $K = 0,17$.

comportamento comum a este conjunto, sendo adequado que o ajuste considere todos eles. Este ajuste de $\mathcal{F}(n)$ levou a coeficientes, para $K = 0,17$; $\alpha = 0,2244(21)$ e $\beta = 0,01175(20)$. Os valores de σ^2 são mostrados entre $0 \leq n \leq 5000$ e a função ajustada apenas no seu intervalo de validade. Deve ser enfatizada a possibilidade de variação dos coeficientes do ajuste de acordo com o intervalo para n .

O mapa, para este valor de K , apresenta transporte sub-difusivo, pois $\alpha < 1$. Este é então um bom exemplo de combinação de parâmetros para os quais o confinamento do plasma é bastante melhorado, com respeito ao comportamento difusivo³.

Utilizando $4200 \leq n \leq 5000$ (pois a distribuição de pontos exibe um comportamento comum neste intervalo), com a mesma grade de pontos iniciais, são obtidos os valores dos coeficientes para $K = 0,25$, $\alpha = 0,98932(58)$ e $\beta = 0,0017591(84)$ transporte próximo ao difusivo. Com o uso do intervalo $4100 \leq n \leq 5000$ para $K = 0,5$ os coeficientes são $\alpha = 0,9112(16)$ e $\beta = 0,2179(29)$ transporte próximo ao difusivo, os mapas para estes valores

³Valores de $K < K^*$ apresentam curvas de nível que impedem o transporte de partículas e portanto não fornecem uma descrição muito realista do plasma.

Figura 4.6: Desvio quadrático médio para o Mapa Padrão, $K = 0,17$, dados (pontos em azul) e ajuste (curva vermelha).

de K são mostrados nas figuras 4.4 *b* e *c* respectivamente.

Para $K = 4$, o gráfico 4.7, análogo ao 4.6, mostra os valores de σ^2 e do ajuste correspondente a todos os pontos. Os valores dos coeficientes são $\alpha = 0,99362(45)$ e $\beta = 11,340(42)$, que correspondem a um transporte próximo ao transporte difusivo, com um coeficiente de difusão mais alto do que os casos anteriores.

Os valores dos coeficientes de transporte obtidos são mostrados na tabela 4.1.

Os dados da tabela mostram que o expoente α tem variações conforme K é aumentado, devido à presença de ilhas no mapa. Há influência devido à região escolhida como origem dos pontos, que representa apenas uma fração da área do mapa, determinada pelo domínio das variáveis x e y . Entretanto, conforme o caos se estabelece, o coeficiente β tende a aumentar conforme K aumenta, enquanto o expoente α se aproxima de 1, caso de transporte difusivo.

Figura 4.7: Desvio quadrático médio para o Mapa Padrão, $K = 4$, dados (pontos em azul) e ajuste (curva vermelha).

K	α	β
0,17	0,2244(21)	0,01175(20)
0,25	0,98932(58)	0,0017591(84)
0,5	0,9112(16)	0,2179(29)
4	0,99362(45)	11,340(42)

Tabela 4.1: Coeficientes de transporte obtidos para o mapa padrão.

Foram estudadas propriedades gerais de mapas, como ilhas, curvas de nível e caos, estas aplicadas ao mapa padrão. Também foram introduzidos conceitos relacionados ao transporte de partículas e estes aplicados ao mapa, sendo obtidos resultados interessantes para o confinamento de plasmas caso o mapa padrão seja válido para alguma combinação de parâmetros num tokamak. Em seguida serão aplicados os conceitos gerais de mapas e transporte ao mapa padrão não-*twist*.

Capítulo 5

Mapa Padrão Não-*Twist*

O mapa padrão não-*twist* e o transporte que ocorre neste mapa são os objetos de estudo deste capítulo. Os regimes do mapa são estudados através de gráficos das órbitas dos centros de guia no mapa a cada período T . Ao contrário do mapa padrão, este mapa possui dois parâmetros independentes. São estudados casos que exemplificam tipos de regime descritos pelo mapa. Para estes casos, com o auxílio dos respectivos gráficos, são reconhecidas regiões caóticas e localizadas as curvas de nível. A partir da localização dos pontos hiperbólicos são obtidas as suas variedades e estudada a estrutura das mesmas. O transporte é calculado, sendo relacionado com a disposição das variedades.

5.1 Características principais

O uso de um polinômio cúbico para $H(x)$ leva ao Mapa Padrão Não-*Twist* (MPNT), conforme obtido na seção 3.3. As equações para o mapa são:

$$x_{n+1} = x_n - b \sin(2\pi y_n), \quad (5.1)$$

$$y_{n+1} = y_n + a(1 - x_{n+1}^2), \quad \text{mod } 1. \quad (5.2)$$

Após alguns testes, foi escolhido como domínio para as variáveis do mapa: $-2 \leq x \leq 2$ e $-0,5 \leq y < 0,5$.

De acordo com as equações 3.28 e 3.29, seus pontos fixos são dados por:

$$x^* = \pm \sqrt{1 - n/a}, \quad (5.3)$$

com $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n/a \leq 1$ e $y^* = -0,5$ ou $y^* = 0$.

Este mapa exibe algumas características que não figuram no mapa padrão. Como será verificado, existem regiões de concentração de pontos que resultam da quebra de curvas de nível. Também será verificada a ocorrência de reconexão de separatrizes, que leva ao surgimento de cadeias dimerizadas de ilhas e à colisão de pontos fixos, chegando em seguida à aniquilação das cadeias de ilhas. Estas características não estavam presentes no mapa padrão devido ao fato de neste último ser monotônico o número de rotação.

O mapa apresenta uma simetria, conforme discutido na seção 3.2 pp. 20 e 21, a saber, pontos (x_n, y_n) e (x'_n, y'_n) tais que $x'_n = -x_n$ e $y'_n = y_n \pm 0,5$ evoluem pelo mapa para pontos com $x'_{n+1} = -x_{n+1}$ e $y'_{n+1} = y_{n+1} \pm 0,5$, como pode ser verificado imediatamente pelas equações 5.1 e 5.2. Isto significa que o mapa é idêntico sob as transformações $p \rightarrow -p$ e $q \rightarrow q \pm 0,5$ (lembrando as correspondências entre p e x e entre q e y , pp. 21 e 22) ou equivalentemente estas transformações formam uma simetria do mapa padrão não-*twist*.

A condição 3.23 é violada na linha $x = 0$, portanto desvios de comportamento com respeito ao mapa padrão são esperados na região onde $x \approx 0$. O número de rotação para o mapa padrão não-*twist* é exemplificado pela figura 3.2, para $a = 1$ (e $p = x_{n+1}$).

Neste mapa é possível discernir, no que se refere aos deslocamentos das partículas inseridas (mais precisamente dos centros de guia das partículas), alguns casos com clareza. O primeiro a ser notado ocorre quando os parâmetros são pequenos (tais que as curvas de nível não foram quebradas), conforme a figura 5.1 (todos os gráficos desta seção foram feitos conforme a descrição do início da seção 4.1). As condições iniciais foram destacadas.

A figura 5.1 foi obtida com o uso de N condições iniciais e mostra que as partículas, uma vez colocadas numa certa posição, se mantêm com x praticamente constante e com y variando (pode ser notado que $a = 10^4 \cdot b$). Além disto, para esta figura foram utilizados $N_x = 14$, $N_y = 13$ e $i = 1000$.

Um pouco mais interessante é o caso para o qual aparecem ilhas, mostrado

Figura 5.1: Mapa padrão não-*twist*, $a = 10^{-2}$, $b = 10^{-6}$.

Figura 5.2: Mapa padrão não-*twist*, $a = 0, 1$, $b = 0, 02$.

na figura 5.2, quando os dois parâmetros são aumentados. Podem ser notados pontos elípticos e as ilhas em torno destes, bem como pontos hiperbólicos e

curvas de nível. Para esta figura foram utilizadas cinco grades de pontos iniciais (as condições iniciais estão marcadas com x no gráfico). Duas têm $N_x = 3$, $N_y = 1$ e $i = 1000$, para os vértices colocados em $P_0 = (x_0; y_0) = (-2; -0,5)$ e $(1,4; -0,5)$ com $l_x = 0,65$ e $l_x = 0,6$ respectivamente (em todos os casos $l_y = 1$). Uma grade possui $N_x = 4$, $N_y = 1$ e $i = 2500$, com o vértice em $P_0 = (-0,7; -0,5)$ com $l_x = 1,2$. Outras duas possuem $N_x = 3$, $N_y = 5$ e $i = 2500$, $l_x = 0,4$ para os vértices colocados em $P_0 = (-1,2; -0,5)$ e $(0,8; -0,5)$.

A origem das duas cadeias de ilhas é o fato de não ser monotônico o número de rotação do mapa (ref. [7]), ao contrário do que ocorre com o mapa padrão, como visto na seção 3.2. Os dois casos precedentes possuem apenas curvas, não sendo preenchida caoticamente nenhuma região bidimensional (visível) do mapa¹.

(a)

Mapa para $-2 \leq x \leq 2$.

(b)

Cadeias centrais em detalhe.

Figura 5.3: Mapa padrão não-*twist*, $a = 1,07$, $b = 0,055$

Com o aumento dos valores dos coeficientes aparecem outras características deste mapa, a saber, surgem regiões caóticas em torno de pontos hiperbólicos, enquanto muitas curvas de nível e ilhas permanecem. A figura 5.3 *a* mostra além destas regiões caóticas duas cadeias centrais de ilhas.

As separatrizes para estas cadeias não coincidem como fica evidente pelas

¹Conforme visto na seção 3.2, a região é caótica se possuir distribuição desordenada de pontos, tal que os pontos não estejam dispostos em curvas mas preencham a região de forma irregular.

curvas de nível que separam as duas. As cadeias podem ser vistas em maior detalhe na figura 5.3 *b*, onde aparecem destacadas, sendo os parâmetros os mesmos utilizados na figura 5.3 *a*.

A partir desta situação ocorrem dois fenômenos notáveis com as cadeias centrais. Com a diminuição sucessiva de a , mantendo $b = 0,055$, são obtidas as figuras 5.4 *a* a 5.4 *d*.

(a)

$$a \approx 1,05668, b = 0,055$$

(b)

$$a = 1,04, b = 0,055$$

(c)

$$a = 1, b = 0,055$$

(d)

$$a = 0,98, b = 0,055$$

Figura 5.4: Processo de reconexão-colisão no mapa padrão não-*twist*

A figura 5.4 *a* mostra a reconexão das separatrizes das duas cadeias, ou seja as duas separatrizes se tornam uma, para $a \approx 1,05668$. Diminuindo um pouco mais o valor de a , ocorre a troca dos pontos hiperbólicos pertencentes às cadeias superior e inferior, surgindo as cadeias dimerizadas de ilhas, no caso b , $a = 1,04$.

Com posterior diminuição de a , para $a = 1$ (caso c), como resulta da equação 5.3, os pontos fixos com mesmo valor de y e com valores opostos de x coincidem, sendo o fato descrito como colisão de pontos fixos (colisão entre um ponto hiperbólico e um ponto elíptico). Por fim, não há mais cadeias centrais de ilhas para $a < 1$, as duas cadeias se aniquilaram e a situação é mostrada na figura 5.4 d .

Como o espaço de parâmetros do mapa é bidimensional, algumas características interessantes são obtidas com a variação dos dois parâmetros simultaneamente. A figura 5.5 mostra o mapa para $a = 0,2$, $b = 0,2$. Pontos periódicos surgem com períodos $m > 1$ ($1 =$ período do ponto fixo), correspondentemente surgem cadeias com números pares de ilhas. Também podem ser notadas regiões caóticas e pontos hiperbólicos em meio a algumas destas regiões (como pode ser verificado a partir da equação 5.3 com $n = 0$).

Figura 5.5: Mapa padrão não-*twist*, $a = 0,2$, $b = 0,2$.

Outro regime característico do mapa é encontrado com a variação dos dois parâmetros. A figura 5.6 a , mostra o mapa para $a = 0,4$, $b = 0,5$. Com o aumento de a e de b , surgem grandes regiões onde o caos domina, acima e abaixo de curvas de nível centrais. Nestas regiões caóticas encontram-se imersas algumas ilhas.

Com $a = 0,4$, o aumento de b para $b = 0,89 \lesssim b^*$, valor pouco menor do que o necessário para romper a última barreira central, é obtida a figura 5.6 *b*. Podem ser observadas algumas ilhas ainda e o caos domina a maior parte do mapa.

(a)

$$a = 0,4, b = 0,5$$

(b)

$$a = 0,4, b = 0,89$$

(c)

$$a = 0,3978873577, b = 1$$

(d)

$$a = 0,3060671983, b = 1,3$$

Figura 5.6: Modelos de comportamento do mapa padrão não-*twist*.

Este valor crítico de b foi encontrado aproximadamente (para $b = 0,95$ a barreira já está rompida), entretanto, como há dois parâmetros, este valor de b^* está associado a um a^* determinado. É esperado que pares de parâmetros críticos portanto ocorram em grande número (possivelmente numa curva $b^* = f(a^*)$), uma vez que as barreiras centrais ocorrem para valores de a e b variados e podem eventualmente ser rompidas com a variação de um dos parâmetros. Pode ser notada uma região de concentração de pontos em

torno da barreira central.

Variando os parâmetros ainda mais, é obtida a figura 5.6 *c* que mostra, após a quebra da última curva de nível, uma região central de concentração de pontos (zonal central) remanescente. A existência de uma tal região permite o cálculo do transporte, neste mapa, de formas variadas, que serão introduzidas na seção 5.3.

A zona central desaparece com o aumento de b e diminuição de a , como mostrado na figura 5.6 *d*. Aparentemente o caos domina uniformemente o mapa, mas será verificado que de fato, o caos não é uniforme, há ainda uma zonal central que separa (não completamente) os pontos inicialmente acima e abaixo desta zona.

5.2 Variedades

A idéia de variedade é importante para o transporte e para o estudo dos mapas em geral, porque elas trazem informações sobre as trajetórias seguidas por partículas em regimes caóticos, também sobre o caos, em torno de certos pontos onde há o encontro de variedades e finalmente sobre o próprio transporte, que se altera de acordo com a mudança na estrutura das variedades.

Num ponto hiperbólico ($\mathbf{u}^*$) quatro curvas se encontram (ref. [5]), sendo duas denominadas ramos da variedade estável (H^+) (cada variedade é representada pelo conjunto dos dois ramos), para as quais vale a relação:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{T}^n(\mathbf{u}^+) = \mathbf{u}^*, \quad \forall \mathbf{u}^+ \in H^+ \quad (5.4)$$

e duas denominadas ramos da variedade instável (H^-) que satisfazem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{T}^{-1})^n(\mathbf{u}^-) = \mathbf{u}^*, \quad \forall \mathbf{u}^- \in H^-. \quad (5.5)$$

As variedades serão aproximadas seguindo o procedimento: uma vez localizado o ponto hiperbólico, é distribuída uma grade com um número N de pontos iniciais em torno do mesmo, a grade possuindo dimensões da ordem da precisão numérica com a qual é possível determinar o ponto hiperbólico durante os cálculos intermediários (δ_x e δ_y sendo os lados do retângulo paralelos ao eixo correspondente).

Após algumas iterações i ($i \sim 10$) os pontos já se distribuem aproximadamente ao longo de uma curva. Esta curva será a aproximação para a variedade. Por este processo, na verdade os pontos se distribuem ao longo de duas curvas que se unem no ponto hiperbólico. Estas duas curvas são as aproximações para os ramos da variedade instável se o mapa foi iterado com $i > 0$ e são aproximações para os ramos da variedade estável se $i < 0$.

O significado de $i < 0$ é que o mapa foi invertido, de tal forma que, na notação da equação 3.25, $\mathbf{u}_n = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}_{n+1})$. É este mapa, $\mathbf{T}^{-1}$, que é iterado $|i|$ vezes para as aproximações das variedades estáveis.

As aproximações foram escolhidas desta forma porque, sendo $\mathbf{u}^*$ o ponto hiperbólico, pontos ($\mathbf{v}$) na variedade estável satisfazem $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}^*$ com $t \rightarrow \infty$ e pontos na variedade instável satisfazem $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}^*$ com $t \rightarrow -\infty$. Assim, quando pontos são distribuídos numa grade em torno do ponto hiperbólico e iterados com $i > 0$, a imagem resultante é (aproximadamente) a dos pontos que para $t \rightarrow -\infty$ estavam no ponto hiperbólico² ou seja, a aproximação para a variedade instável. O argumento vale *mutatis mutandi* para a variedade estável.

As variedades de dois pontos hiperbólicos são mostradas na figura 5.7. Caso *a* para o ponto $(x_1; y_1) = (-1; -0,5)$, caso *b* para o ponto $(x_2; y_2) = (1; 0)$. Seguindo a notação do início da seção 4.1, foram utilizados $N = 2,5 \cdot 10^5$ ($N_x = N_y = 500$) pontos distribuídos na grade de pontos iniciais e estes foram iterados $i = 13$ vezes. A grade possui lados $l_x = l_y = 2 \cdot 10^{-9}$, com o ponto hiperbólico aproximadamente ao centro.

Quando variedades se encontram, é usual a classificação dos pontos onde há o encontro. Um ponto pertencente à variedade estável (de um ponto hiperbólico) e à variedade instável do mesmo, é denominado ponto homoclínico. Se a variedade estável e a instável pertencerem a pontos hiperbólicos distintos, os pontos de encontro são classificados como heteroclínicos.

Sejam dois pontos hiperbólicos distintos, $P_1 = (-1; -0.5)$ e $P_2 = (1; 0)$ que possuem o valor $n = 0$ na equação 5.3, para os valores $a = 0,3978873577$ e $b = 1$. A figura 5.8 *a* mostra a variedade instável do primeiro e a variedade estável do segundo, os pontos hiperbólicos correspondentes estão destacados

²Considerando uma certa precisão em torno do ponto hiperbólico e considerando também que o número de iterações é finito representando apenas aproximadamente $t \rightarrow \infty$.

(a)

Variedades de $(x_1; y_1) = (-1; -0, 5)$

(b)

Variedades de $(x_2; y_2) = (1; 0)$

Figura 5.7: Variedades para $a = 0,3978873577$, $b = 1$, estáveis (curvas azuis) e instáveis (vermelhas), os pontos hiperbólicos correspondentes estão destacados em verde.

em verde. A principal característica a ser notada é que não há cruzamento entre elas, pelo menos na aproximação feita (foram usadas 13 iterações para aproximar cada variedade). Também deve ser observado que o mapa correspondente se apresenta completamente caótico (conforme figura 5.6 c).

(a)

Variedades de P_1 e P_2

(b)

Mapa, condições iniciais concentradas.

Figura 5.8: a: Variedade instável (curvas vermelhas) de P_1 e estável (azuis) de P_2 , $a = 0,3978873577$, $b = 1$. b: Mapa para condições iniciais localizadas em torno dos pontos hiperbólicos.

Como mencionado anteriormente, o caos no mapa não é uniforme, como pode ser verificado na figura 5.8 *b*, onde é mostrado o mapa correspondente à figura 5.8 *a*, com grades de condições iniciais em torno dos pontos fixos P_1 e P_2 . Para as condições iniciais em verde os pontos correspondentes são mostrados em vermelho. Condições iniciais em azul claro correspondem a pontos iterados em azul.

O fenômeno conhecido como reconexão de variedades é observado quando as (aproximações das) variedades passam a se cruzar, com a mudança dos parâmetros do mapa, sendo de fato estes cruzamentos muito freqüentes. Então ocorre uma mudança na estrutura das variedades³, fornecendo esta mudança informação sobre o mapa mesmo em um regime onde o caos domina. Para os parâmetros $a = 0,3060671983$ e $b = 1,3$ a figura 5.9 *a* mostra a situação das variedades após a reconexão, sendo ilustradas novamente a variedade instável do ponto (fixo) P_1 e a variedade estável do ponto P_2 .

O mapa correspondente, mostrando que o caos não é uniforme pois possui ainda uma região que serve parcialmente como barreira, é mostrado na figura 5.9 *b*. O procedimento para a obtenção deste gráfico é o mesmo seguido para o gráfico 5.8 *b*.

(a)

Variedades de P_1 e P_2

(b)

Mapa, condições iniciais concentradas.

Figura 5.9: *a*: Variedade instável (curvas vermelhas) de P_1 e estável (azuis) de P_2 , $a = 0,3060671983$, $b = 1,3$. *b*: Mapa para condições iniciais localizadas em torno dos pontos hiperbólicos.

³Seguindo a referência [4].

Tendo em vista as diferenças que ocorrem com o mapa, mesmo em regime caótico, será aproveitada a informação conseguida com as variedades para buscar regimes de transporte distintos e associar as mudanças ocorridas com a estrutura das variedades a mudanças no transporte.

5.3 Transporte

A principal medida do transporte é o desvio quadrático médio, dado pela equação 4.3:

$$\sigma^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(x_n^{(j)} - x_0^{(j)})^2}{N} - \left[\sum_{j=1}^N \frac{(x_n^{(j)} - x_0^{(j)})}{N} \right]^2,$$

conforme discutido na seção 4.2, cujo método de cálculo foi utilizado novamente aqui. Então, para o cálculo de σ^2 , foram utilizados $N = 2500$ pontos iniciais distribuídos uniformemente numa grade de lados $l_x = l_y = 0,01$, com vértice inicial $P_0 = (-1, 51; -0, 26)$.

Será estudado o transporte no mapa padrão não-*twist* e simultaneamente será procurada uma relação entre a estrutura das variedades e o transporte. Para isto, tomando o caso onde ainda não ocorreu a reconexão de variedades, mostrado na figura 5.8 b, $a = 0,3978873577$ e $b = 1$, é apresentado na figura 5.10, σ^2 como função de n . Na figura são mostrados 5000 pontos (em azul) e o ajuste em vermelho. Para o ajuste da função $\mathcal{F}(n) \equiv \beta n^\alpha$, dada pela equação 4.4, foram utilizados apenas os últimos 1400 pontos ($3601 \leq n \leq 5000$), sendo este o intervalo de validade do ajuste. Os valores dos coeficientes são $\alpha = 1,1164(24)$ e $\beta = 0,1637(33)$.

Usando o intervalo $3400 \leq n \leq 5000$, mais adequado ao próximo caso e com a mesma grade de pontos iniciais, são obtidos os valores dos coeficientes para $a = 0,3060671983$ e $b = 1,3$ (após a reconexão de variedades), $\alpha = 0,9454(18)$ e $\beta = 1,307(20)$. Quando o caos é mais intenso, para $a = 0,3060671983$ e $b = 5$, os valores dos coeficientes são $\alpha = 1,11029(73)$ e $\beta = 5,123(31)$, para o intervalo $3000 \leq n \leq 5000$. Deve ser enfatizado que os coeficientes do ajuste variam com o intervalo escolhido para n e que os intervalos escolhidos não são os mesmos para os três ajustes. Convém notar também que o valor de α está próximo de 1 em todos os casos.

Figura 5.10: Desvio quadrático médio para o mapa padrão não-*twist*, $a = 0,3978873577$, $b = 1$, dados (pontos em azul) e ajuste (curva vermelha).

A tabela 5.1 mostra os resultados obtidos para os coeficientes de transporte no mapa padrão não-*twist*.

a	b	α	β
0,3978873577	1	1,1164(24)	0,1637(33)
0,3060671983	1,3	0,9454(18)	1,307(20)
0,3060671983	5	1,11029(73)	5,123(31)

Tabela 5.1: Coeficientes de transporte obtidos para o mapa padrão não-*twist*.

Então o cálculo de σ^2 fornece informação sobre o transporte e permite identificar a ocorrência de reconexão de variedades, devido ao aumento do coeficiente β em uma ordem de grandeza. Como forma de complementar o estudo do transporte são introduzidos dois novos conceitos.

O primeiro é a fração de pontos que atravessa a zona central. A zona central fica definida pela condição $x \approx 0$. Seja então $\delta \approx 0$. A fração se-

gue de uma analogia com um gás confinado, cujas moléculas sofrem evolução temporal de acordo com o mapa. O gás fica confinado entre os limites $-2 \leq x \leq \delta$, com condições de contorno periódicas em y . Quando as partículas do gás colidem com as paredes em $x = -2$ ou $x \approx 0$ ($x = \delta$) são refletidas. Após um certo intervalo de tempo a parede superior é removida de forma que, uma vez estabelecido um estado estacionário no gás, algumas partículas escapem para além de $x = \delta$. É esta fração de partículas que escaparam que dará informação sobre o transporte.

O procedimento para obtenção da fração é o seguinte: N pontos são distribuídos uniformemente numa grade de pontos iniciais. Esta grade se estende por $-2 \leq x \leq \delta$ e $-0.5 \leq y < 0.5$. Os pontos são iterados de acordo com as equações para o mapa padrão não-*twist*, de forma a estabelecer um regime estacionário no conjunto de pontos. Valem as condições de contorno $y \bmod 1$ e $x_{n+1} = x_n$ se $x_{n+1} < -2$ ou $x_{n+1} > \delta$. Para um determinado valor de iteração i , deixa de valer a última condição sobre x e o número de pontos m que possuem $x_i > \delta$ é contado, sendo então calculada a fração ($F(i)$) de pontos que atravessou a zona central.

Será utilizado $\delta = 0,4$ e com este valor será calculada a fração para os coeficientes do mapa que correspondem à situação antes da reconexão de variedades e após a reconexão, com os mapas correspondentes dados pelas figuras 5.8 *b* e 5.9 *b* respectivamente. Para determinar a partir de qual iteração é atingido o regime estacionário, são mostradas, na figura 5.11 as frações como funções de i , para os dois conjuntos de parâmetros do mapa que serão utilizados. Nesta figura, os pontos em vermelho mostram o caso anterior à reconexão e em azul o caso posterior.

A figura mostra que a partir da iteração $i \approx 850$, o regime estacionário foi estabelecido. Portanto, tomando o valor de $i = 850$, seja o ajuste para os 150 últimos pontos $i \leq n \leq 999$ da forma $F(x) \equiv Ax + B$. Então, os valores de B representam o transporte através da zona central e $A \approx 0$. Estes dados são mostrados na tabela 5.2.

O segundo conceito é o tempo de "decaimento" de pontos colocados numa certa região. O objetivo é encontrar o tempo para o qual o número de pontos colocados numa determinada região do mapa foi reduzido a uma fração de $1/e$ do total inicial.

Figura 5.11: Fração de pontos que atravessaram a zona central, antes da reconexão (em vermelho) e após a reconexão (em azul).

a	b	B (Fração)	A
0,3978873577	1	0,0289(17)	$-2,1(19).10^{-6}$
0,3060671983	1,3	0,0560(10)	$0,5(11).10^{-6}$

Tabela 5.2: Fração de pontos (B) que atravessaram a zona central.

O procedimento é similar ao usado na obtenção do mapa. São distribuídos $N = N(0)$ pontos uniformemente numa grade, localizada numa faixa horizontal ($x_{min} \leq x \leq x_{max}$ e $-0,5 \leq y < 0,5$, com $y \bmod 1$). É então calculada a fração de pontos ($N(n)/N(0)$) que permanecem dentro desta faixa após cada iteração n do mapa ($0 \leq n \leq i$), para um valor máximo de iteração i . Uma vez obtidos os valores de $N(n)/N(0)$, é ajustada uma função da forma:

$$f \equiv e^{-n/\nu}, \quad (5.6)$$

aos dados numéricos.

Para $x_{max} = -x_{min} = 0,4$, são calculados os parâmetros ν para os mesmos casos mostrados na tabela 5.2, ou seja antes e depois da reconexão

de variedades. O gráfico 5.12 mostra os valores da fração e o ajuste para $a = 0,3978873577$ e $b = 1$. Os valores de ν , para os casos antes e depois da reconexão de variedades, são mostrados na tabela 5.3. Para os dois casos foram usados $N = 10^6$ pontos iniciais. O ajuste foi baseado em $i = 1000$ iterações.

Figura 5.12: Fração de pontos remanescentes na faixa $-0,4 \leq x \leq 0,4$ como função de n . Valores numéricos (em azul) e ajuste (em vermelho), para $a = 0,3978873577$ e $b = 1$.

a	b	ν
0,3978873577	1	0,611(15)
0,3060671983	1,3	0,520(13)

Tabela 5.3: Coeficiente ν do ajuste $e^{-n/\nu}$.

Os métodos que levaram às duas últimas tabelas podem ser explorados pelo teste de um número maior de parâmetros do mapa, tornando possível a obtenção de gráficos das grandezas que quantificam o transporte como função destes parâmetros, de forma a possibilitar a exploração e o reconhecimento de regimes distintos e permitir a identificação de transições entre regimes,

por exemplo, devido a variações dos coeficientes angulares de retas tangentes aos gráficos (ou seja "descontinuidades" nas derivadas).

A comparação dos resultados das tabelas 5.1 a 5.3 com os gráficos 5.8 *a* e 5.9 *a*, mostra que antes da reconexão o transporte é super-difusivo, com um coeficiente de transporte β menor do que para o caso logo após a reconexão, que é sub-difusivo. Quando o caos aumenta, para $b = 5$, o transporte é super-difusivo, com um coeficiente β ainda maior. Também fica verificado que a fração de pontos que atravessa a barreira é menor antes da reconexão de variedades do que depois. Por fim o tempo de decaimento ν é maior para o caso anterior à reconexão, acusando a mudança de regime caótico no mapa.

Capítulo 6

Conclusão

Os objetivos propostos para este trabalho são: aplicação de um modelo de infinitas ondas de deriva num plasma, para obtenção de mapas que descrevem o transporte de partículas na borda do plasma confinado em um tokamak, estudo dos mapas para obtenção de informações essenciais como a existência de ilhas, de curvas de nível e de caos. Também analisar variedades de pontos hiperbólicos como forma de estudar o regime caótico e analisar o transporte em dois mapas conhecidos, a saber o mapa padrão e o mapa padrão não-*twist*.

Foi utilizado um modelo para a propagação de ondas de deriva num tokamak. No contexto de partículas independentes, estudando o efeito da deriva $\vec{E} \times \vec{B}$, com um campo magnético uniforme e o campo elétrico composto de um campo devido a um potencial de equilíbrio e uma superposição de infinitas ondas de deriva, foi obtida uma forma de mapa dependente do potencial de equilíbrio. Com a escolha de duas formas particulares para este potencial foram obtidos dois mapas estudados na literatura, o mapa padrão e o mapa padrão não-*twist*.

Estes mapas foram estudados em suas características básicas, como a conservação de área, seus pontos fixos, coeficientes críticos para o rompimento de barreiras ao caos global, surgimento e destruição de ilhas. Estas características foram determinantes para a escolha de parâmetros para o estudo do transporte, principal ligação entre o modelo (mapa) e resultados experimentais. Através do conhecimento de que uma região é caótica, ou que há barreiras impedindo a transmissão de partículas, pode ser formulado o

critério de semelhança entre o mapa e o comportamento num tokamak, para possibilitar a aplicação da análise numérica a dados experimentais.

Em regiões onde o caos domina, o estudo da estrutura de variedades de pontos hiperbólicos presentes na região caótica pode fornecer mais informação sobre o mapa, visto que diferentes configurações de variedades implicam em mudanças no transporte. Os resultados numéricos mostram que os coeficientes de transporte sofrem alterações consideráveis quando ocorre o cruzamento de variedades de pontos hiperbólicos distintos, quando comparados com os coeficientes antes da reconexão. Portanto, em lugar de apenas calcular coeficientes de transporte para incontáveis combinações de parâmetros, este estudo permite selecionar parâmetros que apresentem as características procuradas para a representação do plasma.

O transporte de partículas pelo plasma é um dos conceitos mais importantes que faz parte deste trabalho. Ele representa a relação de toda a análise numérica aqui apresentada com dados experimentais, pois é através da comparação da difusão num tokamak, ou do tempo que leva uma partícula para escapar da borda do plasma que se pode verificar a extensão validade do modelo de infinitas ondas (cujos parâmetros como frequência e amplitude podem ser medidos) e do potencial de equilíbrio.

Para este propósito, foram introduzidas ferramentas para o cálculo de propriedades interessantes de partículas sujeitas a mapas. Estas ferramentas são o cálculo do desvio quadrático médio da coordenada radial (x), a fração de partículas que atravessam uma zona central de concentração de pontos (uma barreira parcial ao transporte das partículas) e o tempo de decaimento para que partículas deixem uma certa região do mapa.

Todos os resultados numéricos explorados confirmam a relação entre a reconexão de variedades e a alteração nos coeficientes de transporte. O mapa padrão apresentou transporte sub-difusivo, em três dos casos apenas fracamente sub-difusivo (considerando a precisão estimada), entretanto, em todos os casos estudados o transporte tende a um transporte difusivo com o aumento de K . Para o transporte no mapa padrão não-*twist* dois dos casos estudados correspondem a transporte levemente super-difusivo, novamente considerando a precisão estimada, ficando à disposição da comparação com valores experimentais para o transporte, a determinação do potencial de equilíbrio mais adequado, bem como dos parâmetros que melhor modelam o

plasma por cada um destes potenciais.

O mapa padrão não-*twist*, por apresentar uma barreira parcial ao transporte de partículas, pode sugerir a aplicação de um potencial de equilíbrio com dependência radial cúbica, como o mostrado na equação 3.42, a um tokamak, de forma a reproduzir a barreira e melhorar o confinamento do plasma. Assim, além de possibilitar a verificação da validade do modelo e introduzir ferramentas para o cálculo do transporte, o presente trabalho indica a melhoria do confinamento, uma vez que seja estabelecida a validade do modelo de infinitas ondas, pela aplicação do potencial de equilíbrio conveniente.

Havendo cumprido os objetivos propostos, fica aberta a possibilidade de aplicação dos métodos estudados e dos resultados obtidos a dados experimentais, bem como o uso de outros perfis de equilíbrio para modelar o plasma de acordo com a necessidade ou conveniência.

Bibliografia

- [1] Ritz, Ch. P., *et al.*, *Fluctuation-Induced Energy Flux in the Tokamak Edge*, Physical Review Letters **62** 1844, 1989.
- [2] Osipenkov, I., *Diffusion in Chaotic Systems*, M. Sc. dissertation, Report IFSR#885, The University of Texas at Austin, 2000.
- [3] Marcus, F. A., *Instabilidade Dinâmica das Flutuações Eletrostáticas em Tokamaks*, dissertação de mestrado, IF-USP, 2002.
- [4] Corso, G., Rizzato, F. B., *Manifold Reconnection in Chaotic Regimes*, Physical Review E **58** 8013, 1998.
- [5] Lichtenberg, A. J., Lieberman, M. A., *Regular and Chaotic Dynamics*, segunda edição, Springer-Verlag, 1992.
- [6] Reichl, L. E., *The Transition to Chaos*, segunda edição, Springer, 2004.
- [7] del-Castillo-Negrete, D, Greene, J. M., Morrison, P. J., *Area Preserving Nontwist Maps: Periodic Orbits and Transition to Chaos*, Physica D, **91** 1, 1996.
- [8] Huang, K., *Statistical Mechanics*, segunda edição, Wiley, 1987.
- [9] Sitenko, A., Malnev, V., *Plasma Physics Theory*, Chapman & Hall, 1995.
- [10] Symon, K. R., *Mechanics*, terceira edição, Addison - Wesley, 1971.
- [11] Horton, W., Hasegawa, A., *Quasi-Two-Dimensional Dynamics of Plasmas and Fluids*, Chaos **4** 227, 1994.

- [12] Horton, W., *Drift Waves and transport*, Reviews of Modern Physics **71** 735, 1999.
- [13] Goldstein, H., Poole, C. P., Safko, J., *Classical Mechanics*, terceira edição, Addison-Wesley, 2002.
- [14] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics*, segunda edição, Butterworth-Heinemann, 1987.
- [15] Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, terceira edição, Wiley, 1998.
- [16] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Mécanique*, segunda edição, MIR, 1966.
- [17] Wurm, A., Apte, A., Fuchss, K., Morrison, P. J., *Meanders and Reconnection-Collision Sequences in the Standard Nontwist Map*, Chaos **15** 023108, 2005.
- [18] Nascimento, I. C., Kuznetsov, Yu. K., Guimarães Filho, Z. O., El Chamaa-Neto, I., Usuriaga, O., Fonseca, A. M. M., Galvão, R. M. O., Caldas, I. L., Severo, J. H. F., Semenov, I. B., Heller, M. V. A. P., Bellintani, V., Elizondo, J. I., Sanada, E., *Suppression and Excitation of MHD Activity with Electrically polarized electrode at the TCABR Tokamak Plasma Edge*, Nuclear Fusion, aceito para publicação.
- [19] Marcus, F. A., Kroetz, T., Roberto, M., Caldas, I. L., Da Silva, E. C., Viana, R. L., Guimarães Filho, Z. O., *Chaotic Transport in Reversed-Shear Tokamaks*, Nuclear Fusion, aceito para publicação.

Índice

- Cadeia de ilhas, 28
- Cadeias dimerizadas de ilhas, 38, 41
- Caos, 23
- Centro de guia, 8, 16, 18
- Condições de contorno, 19
- Coordenadas toroidais, 11
- Curva de nível, 28, 37
- Delta de Dirac, 17
- Deriva
 - Ondas de, 9, 16
 - Velocidade de, 8, 15
- Desvio quadrático médio, 31, 48
- Equação
 - de Hamilton, 16
 - de Hasegawa-Mima, 9
 - de movimento, 7, 17
- Expoente de Liapunov, 24
- Fração de pontos, 49
- Frequência, 19
 - de Larmor, 7
- Grade, 28, 44
- Ilha, 28, 38
- Jacobiano, 19
- Mapa, 18
 - Padrão, 27
- Padrão não-*twist*, 37
- Número de rotação, 19, 40
- Partícula independente, 6
- Plasma, 5
 - Confinamento do, 16
- Ponto
 - de transição, 23
 - Elíptico, 22, 28, 39
 - Fixo, 21, 27, 38
 - Hiperbólico, 23, 27, 37, 39, 40, 44
 - Periódico, 21, 42
- Potencial de equilíbrio, 16, 24
- Precisão, 44
- Raio de Debye, 6
- Região caótica, 23, 37, 40
- Série de Fourier, 17
- Tempo de decaimento, 50
- Tokamak, 10
- Transporte, 5, 31, 37, 48
 - Anômalo, 16, 32
- Variedade, 37, 44
 - Estável, 44, 45
 - Instável, 44, 45
- Zona central, 33, 44