Universidade de São Paulo

Instituto de Física

**Espalhamento Compton e medida absoluta
da energia de fótons marcados**

Uma simulação Monte Carlo

Washington Rodrigues de Carvalho Junior

Orientador: Prof. Dr. Airton Deppman

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção do
título de mestre em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Airton Deppman (orientador) - IFUSP

Prof. Dr. Manoel Tiago F. da Cruz - IFUSP

Prof. Dr. Adimir dos Santos - IPEN

São Paulo

2005

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL
DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU
ELETRÔNICO, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Carvalho Jr, Washington Rodrigues de

Espalhamento Compton e Medida Absoluta de
Energia de Fótons Marcados – Uma Simulação Monte
Carlo. São Paulo - 2005

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Departamento de Física
Experimental

Orientador: Prof. Dr. Airton Deppman
Área de Concentração: Física

Unitermos

1. Instrumentação (Física);
2. Física Experimental - Fotometria;
3. Física Nuclear.

USP/IF/SBI-019/2005

In Memoriam

Vladimir Petrovich Likhachev (1946-2004)

*“If we knew what we were doing, it
wouldn’t be called research, would it?”*

Albert Einstein

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Vladimir Petrovich Likhachev, que muito me ensinou durante os anos que passei sob sua orientação.

Ao Prof. Dr. Airton Deppman, pela orientação *impromptu* quando do falecimento do Prof. Likhachev.

Ao Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães e seu irmão César de Oliveira Guimarães, pelas inúmeras conversas que geraram muitas das idéias apresentadas nesse trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro que tornou possível este trabalho.

Resumo

Uma simulação baseada em métodos Monte Carlo foi criada com o intuito de avaliar a potencialidade da utilização do espalhamento Compton em altas energias para a obtenção de medidas absolutas e de alta precisão da energia de fótons marcados. Esse método se baseia em medidas angulares dos produtos desse espalhamento para reconstruir a energia dos fótons incidentes, utilizando a cinemática do espalhamento Compton em aproximação de impulso. A simulação inclui vários efeitos relevantes à medida, como espalhamento múltiplo de elétrons, momento interno dos elétrons nos átomos do alvo, resolução do detetor e vários parâmetros geométricos do arranjo experimental. Através da simulação de um experimento que utiliza esse método para a calibração em energia de um feixe de fótons marcados, foi possível identificar duas fontes de erros sistemáticos. Métodos de análise que minimiza um desses erros sistemáticos foram desenvolvidos, bem como métodos para a criação de correções para as medidas de energia. Verificou-se que, pelo menos no arranjo experimental estudado, é possível obter medidas da energia dos fótons incidentes com precisão da ordem de 0.07%.

Abstract

A simulation based on Monte Carlo methods was created in order to evaluate the potentiality of using Compton scattering at high energies to obtain high precision absolute measurements of tagged photon energies. This method is based on angular measurements of the scattering products to reconstruct the incident photon energy using the kinematics of Compton scattering in impulse approximation. The simulation includes several effects that are relevant to the measurement, such as electron multiple scattering, internal momentum of the electrons in the atoms of the target, detector resolution and several geometrical parameters of the experimental setup. Through simulation of an experiment that uses this method for energy calibration of a tagged photon beam, it was possible to identify two sources of systematic errors. Analysis methods that minimize one of these systematic errors were developed, as well as methods for the creation of corrections to the energy measurements. Our results show that, at least in the studied experimental setup, it is possible to obtain energy measurements with a precision in the order of 0.07%.

Sumário

I	Introdução	17
1	Medida de energia	19
2	Espalhamento Compton e medida absoluta de energia de fótons marcados	23
3	Teoria	29
3.1	Distribuição de momento interno dos elétrons no átomo de <i>Be</i>	29
3.2	Espalhamento múltiplo de elétrons.	30
4	Objetivos	33
II	Método	35
5	Simulação	37
5.1	Filtros no experimento “real”.	37
5.2	Descrição geral da simulação	38
5.3	Geometria do experimento e sistemas de coordenadas utilizados	41
5.3.1	Caracterização geométrica do feixe de fótons.	41
5.3.2	Sistemas de coordenadas utilizados na simulação	42
5.4	Geração do ponto P_{ea} de entrada no alvo.	44
5.5	Geração do ponto de interação P_c	45
5.6	Simulação do espalhamento Compton.	47

5.6.1	Cinemática relativística em aproximação de impulso.	47
5.6.2	Geração do ângulo de espalhamento θ_γ e da direção $\hat{k}_2$ do fóton espalhado.	49
5.6.3	Cálculo do momento interno $\vec{p}_{in}$ dos elétrons	49
5.6.4	Cálculo dos momentos $\vec{p}_e$ e $\vec{k}_2$	50
5.7	Espalhamento múltiplo de elétrons no alvo e geração da direção final do elétron $\vec{p}_{ef}$	52
5.8	Simulação da detecção das partículas	54
5.8.1	O detetor <i>Hybrid Calorimeter (HyCal)</i>	54
5.8.2	Geração de leituras de posição	56
5.9	Corte de aceitação do detetor.	58
5.10	Estimativa do número de eventos Compton detectados.	59
6	Análise	63
6.1	Reconstrução dos ângulos de espalhamento	63
6.1.1	Erro Sistemático nas medidas angulares.	65
6.2	Corte cinemático	68
6.3	Espectro da energia reconstruída	72
6.3.1	Assimetria do espectro e não linearidade da expressão para a energia	73
6.4	Descrição dos métodos utilizados para a análise	78
6.4.1	Método do ajuste gaussiano ao espectro	79
6.4.2	Método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro	80
6.4.3	Método do ajuste da expressão de energia aos ângulos de espalha- mento	84
6.5	Distribuição de erros e fator de correção para os resultados do ajuste . .	85
6.6	Análise do efeito do corte cinemático na incerteza da medida de posição do máximo do espectro.	87

III	Resultados, discussão e conclusão	93
7	Resultados	95
7.1	Comparação entre os efeitos estudados	95
7.2	<i>Benchmark</i>	98
7.3	Resultados Finais	101
7.3.1	Resultados pelo método do ajuste gaussiano ao espectro sem corte cinemático.	102
7.3.2	Resultados pelo método do ajuste gaussiano ao espectro com corte cinemático.	105
7.3.3	Resultados pelo método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro sem corte cinemático.	108
7.3.4	Resultados pelo método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro com corte cinemático.	111
7.3.5	Resultados pelo método do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático.	115
7.3.6	Resultados pelo método do ajuste da expressão de energia com corte cinemático.	118
8	Comparação entre os resultados e discussão	121
9	Conclusão	125
	Apêndices	130
A	Alguns resultados com um feixe não monocromático	131
B	Dedução da expressão 2.2 de energia	133
C	A pequena biblioteca <i>Likhalib</i>	135
C.1	Função <i>Boxmuller</i>	135

C.2	Subrotina carttospher	136
C.3	Subrotina sphertocart	136
C.4	Subrotina subgenisotropic	136
C.5	Subrotina rotate	137
C.6	Subrotina multscatt	137
C.7	função knint	138
C.8	subrotina genhycaldetpoint	138
D	Descrição de alguns métodos Monte Carlo utilizados na simulação	139
D.1	Algoritmo de <i>Box-Müller</i> e sua variante <i>Polar-Marsaglia</i>	139
D.2	Método de <i>Neumann</i> ou método da rejeição para amostragem de distri- buições	140
D.3	Método da inversão para amostragem de distribuições	141
D.4	Geração de direções isotrópicas	141
E	Algumas sugestões para a continuação desse trabalho	143
E.1	Correções radiativas e Compton duplo	143
E.2	Estrutura do alvo	145

Parte I

Introdução

Capítulo 1

Medida de energia

Na maioria dos experimentos de física nuclear que utilizam um feixe de fótons, a grandeza que se deseja medir está diretamente relacionada com a energia dos fótons do feixe. Por exemplo a medida da seção de choque diferencial de uma reação foto-nuclear. Nesse tipo de experimento deseja-se que o feixe seja aproximadamente monocromático, ou seja, todos os fótons do feixe possuam aproximadamente uma mesma energia E_γ . Desse modo, se pudermos detectar os produtos dessa reação, podemos obter o número N de produtos detectados em função da energia E_γ dos fótons incidentes. Essa curva de N em função de E_γ está diretamente relacionada com a seção de choque que queremos medir.

Para altas energias, o método mais usado atualmente para a criação de um feixe de fótons utiliza *bremsstrahlung*: Um feixe de elétrons de energia E_0 incide sobre um alvo onde os elétrons são “freados” pelo campo Coulombiano dos núcleos, emitindo assim fótons de energia aproximadamente igual à energia perdida pelo elétron nessa interação. Como a energia perdida por cada elétron pode variar continuamente de 0 a E_0 , os fótons emitidos possuem um espectro contínuo nesse intervalo de energia. Essa radiação pode ser colimada, formando assim um feixe de fótons não monocromático.

A energia E_γ do fóton emitido por um elétron pode ser obtida através de uma medida da energia final desse elétron: $E_\gamma = E_0 - E_e$, onde E_e é a energia do elétron após a interação. Essa é a base da técnica de marcação de fótons (*photon tagging*). Cada

elétron é defletido por um campo magnético conhecido e incide sobre cintiladores que marcam sua posição de incidência, permitindo assim uma medida do raio de curvatura de sua trajetória e, como o campo magnético é conhecido, sua energia. Desse modo, a partir de uma medida de posição de incidência do elétron, obtemos sua energia e conseqüentemente a energia do fóton emitido por ele.

Para emular um feixe de fótons monocromáticos de energia E_γ , o sistema de detecção do experimento somente é ligado quando um elétron é detectado pelos cintiladores em uma determinada posição, compatível com a emissão de um fóton de energia E_γ . Porém, como toda grandeza medida experimentalmente, essa medida de E_γ está sujeita a incertezas. Desse modo o feixe “monocromático” emulado é na verdade quase monocromático, com uma certa distribuição estreita de energia em torno de um valor próximo do valor de E_γ medido.

Em muitos casos, a medida de E_γ obtida do marcador de fótons (*photon tagger*) é suficientemente precisa, porém em alguns casos específicos seria interessante refinar essa medida, utilizando outra técnica. Um desses casos específicos é o experimento *PrimEx*[1], que pretende medir indiretamente e com alta precisão o tempo de vida do π^0 , utilizando a seção de choque do efeito *Primakoff*[2], foto-produção coerente de π^0 no campo Colombiano do núcleo:

$$\frac{d\sigma_p}{d\Omega} = \Gamma_{\gamma\gamma} \frac{8\alpha Z^2}{m^3} \beta^2 \frac{E_\gamma^4}{Q^4} |F_{em}(Q)|^2 \sin^2 \theta_\pi \quad , \quad (1.1)$$

onde $\Gamma_{\gamma\gamma}$ é a largura do decaimento do π^0 , Z é o número atômico, m , β , θ_π são a massa, velocidade e ângulo de produção do pión, E_γ é a energia do fóton incidente, Q é o momento transferido ao núcleo e $F_{em}(Q)$ é o fator de forma eletromagnético nuclear. Nesse caso, a dependência da seção de choque é com E_γ^4 . Desse modo, pequenas incertezas nessa energia geram incertezas consideráveis na medida de $\Gamma_{\gamma\gamma}$, que é a grandeza que se deseja medir.

Esse trabalho pretende estudar a viabilidade da utilização do espalhamento Compton

para obter medidas absolutas e de alta precisão da energia dos fótons marcados de um feixe, aumentando assim a resolução em energia de um *photon tagger*. Esse método utiliza apenas medidas angulares dos produtos do espalhamento Compton no alvo para reconstruir, a partir da cinemática desse processo, a energia do fóton incidente.

Capítulo 2

Espalhamento Compton e medida absoluta de energia de fótons marcados

O espalhamento Compton[3] é o espalhamento de fótons por elétrons livres ($\gamma + e \rightarrow \gamma' + e'$). O diagrama de Feynman de primeira ordem para o espalhamento Compton é mostrado na figura 2.1.

O diagrama de momentos, no caso de elétrons livres e inicialmente em repouso, pode ser visto na figura 2.2, onde $\vec{k}_1$ é o momento inicial do fóton, $\vec{k}_2$ é o momento do fóton espalhado e $\vec{p}_e$ o momento transferido, que neste caso é igual ao momento final do elétron.

Figura 2.1: Diagrama de Feynman de primeira ordem para o efeito Compton.

O plano definido por esses momentos é o plano da reação.

A conhecida expressão 2.1 relaciona o ângulo de espalhamento θ_γ com a diferença dos comprimentos de onda do elétron antes e após o espalhamento, λ_0 e λ , respectivamente.

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta_\gamma) \quad (2.1)$$

onde m_e é a massa do elétron. Essa expressão pode ser facilmente deduzida do diagrama de momentos utilizando-se apenas conservação de energia e momento.

Figura 2.2: Diagrama de momentos do espalhamento Compton, no caso do elétron livre e em repouso.

Partindo da expressão 2.1 e do diagrama de momentos, podemos obter uma relação entre os ângulos θ_γ e θ_e , e a energia do fóton inicial E_0 :

$$E_0(\theta_\gamma, \theta_e) = m_e c^2 \left(\cot \frac{\theta_\gamma}{2} \cot \theta_e - 1 \right) \quad (2.2)$$

Desse modo os ângulos θ_γ e θ_e determinam univocamente a energia inicial do fóton. Essa expressão, cuja dedução pode ser vista no apêndice B, é a base do método de medida da energia dos fótons incidentes utilizando medidas angulares dos produtos do espalhamento Compton.

A figura 2.3 mostra um gráfico $\theta_e \times \theta_\gamma$ para uma energia do fóton incidente de 5GeV , na região de ângulos pequenos¹.

¹Essa é a região de interesse no caso do experimento *PrimEx* e representa a aceitância angular do detector *HyCal*, utilizado nesse experimento, a $9m$ do alvo.

Figura 2.3: Gráfico de θ_e em função de θ_γ para uma energia $E_0 = 5\text{GeV}$ do fóton incidente, na região de ângulos pequenos.

A seção de choque diferencial do processo Compton para elétrons livres tem, no sistema do laboratório, a seguinte forma[4, 5]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos\theta_\gamma)]^2} \left[1 + \cos^2\theta_\gamma + \frac{\gamma^2(1 - \cos\theta_\gamma)^2}{1 + \gamma(1 - \cos\theta_\gamma)} \right] \quad , \quad (2.3)$$

onde $\gamma = E_\gamma/m_e c^2$, θ_γ é o ângulo de espalhamento do fóton, E_γ é a energia inicial do fóton, m_e é a massa de elétron e r_e é o raio clássico do elétron.

Essa seção de choque tem, para altas energias, um intenso pico para ângulos frontais. A figura 2.4 mostra um gráfico da seção de choque diferencial em função do ângulo de espalhamento θ_γ para uma energia $E_\gamma = 5\text{GeV}$.

A expressão 2.2 é a base do método para a medida absoluta da energia de fótons utilizando o espalhamento Compton. A partir de medidas angulares dos produtos do espalhamento, podemos reconstruir a energia do fóton incidente. Um esquema simplificado do arranjo experimental está na figura 2.5. Essa figura mostra o eixo do arranjo experimental alinhado com o feixe de fótons. Cada fóton do feixe que sofre espalhamento Compton no alvo gera um par $e' - \gamma'$, que contém informação sobre a energia do fóton incidente. Esse par pode incidir sobre o detetor, permitindo medidas de posição

Figura 2.4: Gráfico da seção de choque diferencial de Klein-Nishina em função do ângulo de espalhamento θ_γ para uma energia $E_\gamma = 5 \text{ GeV}$.

e conseqüentemente medidas dos ângulos θ_γ e θ_e , que são colocados na expressão 2.2 para a obtenção da energia do fóton incidente. Vale notar que esse método permite uma medida absoluta, isto é, não há necessidade de calibração de energia, já que depende somente de medidas de posição.

Figura 2.5: Esquema simplificado do arranjo experimental.

Porém, experimentos de alta energia criam uma infinidade de partículas, produzidas

por vários tipos de interação, que criam um fundo que deve ser separado dos pares $e' - \gamma'$, provenientes do espalhamento Compton no alvo. Do ponto de vista experimental, para separar este fundo precisamos de uma estimativa da energia dos fótons incidentes, que pode ser obtida por um marcador de fótons (*photon tagger*). Essa estimativa permite, utilizando entre outros fatores a cinemática do espalhamento Compton (ver seção 5.1), identificar os pares $e' - \gamma'$ relevantes para a medida de energia. Assim, a principal aplicação desse método é aumentar a resolução da medida de energia obtida de um *photon tagger*.

Mas a equação 2.2 vale somente no caso de elétrons livres e inicialmente em repouso. Do ponto de vista experimental, vários efeitos produzem uma dispersão na Eq.2.2:

1. Os elétrons no alvo não são livres, nem estão em repouso. Esse movimento de elétrons atômicos piora a resolução em energia na Eq. 2.2.
2. O processo de espalhamento múltiplo acompanha a passagem de elétrons secundários através do alvo e modifica a direção inicial, piorando a resolução em energia. Este efeito é muito importante, especialmente para elétrons de baixa energia.
3. Vários efeitos geométricos influem na precisão de definição de energia inicial de fótons, entre eles as aceitâncias angulares do detector, a distribuição de intensidades (forma) do feixe de fótons, além de possíveis desalinhamentos entre feixe e detector.
4. A resolução espacial do detector é muito importante, já que as incertezas nas medidas angulares são muito sensíveis a essa resolução.

Para levar em conta esses efeitos e obter a dispersão causada por eles na equação 2.2 foi criada uma simulação usando métodos Monte Carlo.

Algumas características desejáveis do arranjo experimental, para a utilização desse método são:

1. Utilização de um alvo fino e de Z baixo, minimizando assim os efeitos devido a espalhamento múltiplo de elétrons no alvo (ver seção 5.7).

2. Utilização de um detetor com alta resolução espacial.
3. Bom alinhamento entre feixe e detetor.

Algumas vantagens da utilização desse método para medição da energia de fótons marcados são:

1. É um método absoluto, desse modo não necessita de calibração.
2. Pode ser utilizado para aumentar a resolução de medidas de energia de um *photon tagger* em um experimento que utiliza um feixe de fótons de alta energia com um mínimo de impacto no arranjo experimental original, ou até mesmo com aquisição simultânea² com esse experimento principal.

²Caso a espessura do alvo, seu material e a distância ao detetor bem como sua resolução espacial sejam compatíveis com a utilização desse método de fotometria.

Capítulo 3

Teoria

A seguir descrevemos sucintamente os modelos teóricos, obtidos da literatura, que foram utilizados na simulação.

3.1 Distribuição de momento interno dos elétrons no átomo de Be .

A distribuição do momento interno dos elétrons nas camadas K e L pode ser descrita¹ analiticamente por [6]:

$$I_i(p_{in}) = \frac{32}{\pi} \sum_{j=1}^2 \frac{A_{ij} \xi_{ij}^5 p^2}{(\xi_{ij}^2 + p^2)^4}, \quad (i = K, L) \quad , \quad (3.1)$$

onde, para o Be , temos:

camada	A_{i1}	A_{i2}	ξ_{i1}	ξ_{i2}
K	0.9042	0.0958	3.4634	5.3326
L	0.9397	0.0603	0.5648	3.4130

Tabela 3.1: Parâmetros A_{ij} e ξ_{ij} da eq. 3.1, referentes ao Be .

Esta expressão foi proposta por *Chen et. al.*[6] e é baseada na superposição de

¹em unidades atômicas de momento (au)

densidades de momento de átomos hidrogenóides ([6], eq. 3), que difere dos resultados obtidos pela abordagem *Hartree-Fock* (HF) por no máximo 2% para a camada K e 6% para a camada L . Os parâmetros da equação foram obtidos de um ajuste, forçando os quatro primeiros momentos dessa distribuição a serem iguais aos obtidos por HF. Segundo os autores[6], a concordância dos resultados obtidos pela eq. 3.1 com os obtidos por métodos HF é excelente, muito melhor que os 2-6% da aproximação hidrogenóide.

3.2 Espalhamento múltiplo de elétrons.

O espalhamento múltiplo trata da alteração da direção inicial de elétrons, ou outras partículas carregadas, que atravessam um material. A teoria do espalhamento múltiplo foi desenvolvida em detalhes por vários autores, entre eles *Molière*² e *Goudsmit-Sanderson*.

Porém utilizamos em nossa simulação um modelo mais simples, desenvolvido inicialmente por *Rossi-Greisner*[7] e posteriormente modificado por *Highland*[8], já que, apesar de relevante, a influência do espalhamento múltiplo de elétrons no experimento é relativamente pequena, se comparada a outros efeitos. Assim, a precisão inerente aos outros modelos mais complexos não é necessária.

A direção inicial do elétron é modificada devido a espalhamentos múltiplos no material do alvo. A maior parte dos desvios angulares é devido ao espalhamento Coulombiano, que é bem representado pela teoria de *Molière*. Essa distribuição angular é aproximadamente gaussiana para pequenos ângulos:

$$P(\theta_{scat}) = \frac{1}{\sigma_{scat}\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-\theta_{scat}^2}{2\sigma_{scat}^2} .$$

A expressão³ de *Rossi-Greisner*[7] para o desvio-padrão σ_{scat} é

²Posteriormente modificada e expandida por *Bethe*

³A expressão de *Rossi-Greisner*, com $\beta = 1$ e $p \gg m_e$ é a utilizada pelo grupo do *Jlab* [2] em sua simulação.

$$\sigma_{scat} = \frac{E_s}{p\beta} \sqrt{\frac{x}{L}} \quad , \quad (3.2)$$

onde p é o momento inicial do elétron em MeV/c , β é a velocidade do elétron em unidades de c , x é a espessura do material percorrido, L é o comprimento de radiação do material e $E_s = 21MeV$.

Essa expressão foi modificada por *Highland*[8, 9, 10], com a inclusão de um termo de atenuação de energia, que representa a perda de energia do elétron ao longo de sua trajetória:

$$\sigma_{scat} = \frac{S_2}{p\beta} \sqrt{\frac{x}{L}} \left[1 + \epsilon \log_{10} \frac{x}{0.1L} \right] \quad , \quad (3.3)$$

onde $S_2 = 17.5MeV$ e $\epsilon = 1/8$ são as constantes originalmente utilizadas por *Highland*.

Em alguns artigos consultados ([8, 9, 10]), as constantes são apresentadas na forma E_{sx} para ângulos projetados, que se relacionam com as constantes E_s para ângulos espaciais da seguinte forma:

$$E_{sx} = \frac{\sqrt{2}}{2} E_s \quad .$$

Mesmo utilizando essa transformação, existem divergências consideráveis entre as constantes apresentadas em cada artigo. Uma pequena discussão sobre as diferenças entre essas constantes na literatura pode ser vista em [9].

A expressão utilizada na simulação é a apresentada pelo *Particle Data Group* [10], com a inclusão de um fator $\sqrt{2}$ para transformar a constante “rms” para ângulos projetados em uma constante para ângulos espaciais:

$$\sigma_{scat} = \frac{\sqrt{2} \cdot 13.6MeV}{\beta p} z \sqrt{\frac{t}{L}} \left[1 + 0.038 \ln \frac{t}{L} \right] \quad , \quad (3.4)$$

onde $z = 1$ é o número de carga do projétil (elétron) e t é a espessura do material percorrido. A velocidade β é calculada a partir da energia cinética E_e do elétron ($\hbar =$

$c = 1$) da seguinte forma:

$$\beta = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \quad \gamma = \frac{E_e}{m_e} + 1 \quad .$$

Para todo Z e na região $10^{-3} < t/L < 100$, essa expressão difere de um ajuste gaussiano da parte central (98%) da distribuição de *Molière* por no máximo 11%. Porém, no caso específico do Be e $t = 10^{-3}L$, usados na simulação, essa diferença é da ordem de 4% ([9], Fig. 1). Porém vale notar que estamos no limite de aplicabilidade da teoria de espalhamento múltiplo, assim não podemos diminuir muito a espessura do alvo em relação ao valor “base” de $10^{-3}L$ utilizado na simulação, pois entraríamos na região de espalhamento plural, que não é bem descrito nem mesmo pela teoria de *Molière*.

Nesse formalismo, o Z do material é relevante para a obtenção do comprimento de radiação L . Embora os valores de L utilizados na simulação sejam tabelados, para tornar clara a dependência de L com Z , podemos citar a expressão de *Dahl* [10]:

$$L = \frac{716.4 \text{ g cm}^{-2} A}{Z(Z + 1) \ln(287/\sqrt{Z})} \quad ,$$

o que mostra que em geral L é tão maior quanto menor o Z do material. Das expressões 3.2 e 3.3, vemos que σ_{scat} é tão maior quanto menor L . Desse modo, o efeito do espalhamento múltiplo de elétrons em um alvo de Z baixo é menor que o efeito em um alvo de mesma espessura (em unidades de comprimento) com Z mais alto.

Capítulo 4

Objetivos

O objetivo principal desse trabalho é estudar a potencialidade do processo Compton para a definição absoluta e com alta precisão da energia inicial de fótons marcados. Deseja-se também estudar eventuais efeitos e erros sistemáticos inerentes a esse método.

Para esta finalidade foi desenvolvida uma simulação original, em FORTRAN-77[11], utilizando métodos Monte Carlo para simular um experimento de fotometria baseado na utilização do espalhamento Compton para a obtenção de medidas absolutas da energia dos fótons incidentes. Essa simulação utiliza uma pequena biblioteca chamada *Likhalib*¹, também original, com funções e subrotinas muito utilizadas em simulações Monte Carlo.

Os resultados apresentados nesse trabalho foram obtidos de uma simulação da calibração de energia pelo método Compton no experimento *Primex*, que tem como objetivo medir o tempo de vida do méson π^0 com alta precisão (1.4%). Essa simulação leva em conta as características físicas e geométricas relevantes desse arranjo experimental. Assim acreditamos que ela reflita as condições reais do experimento.

Além da parte de simulação, foram também desenvolvidos métodos para a análise de dados da simulação. Esses métodos de análise de dados foram implementados em C++[12], utilizando o *ROOT System*[13].

¹Em homenagem a meu orientador, Vladimir Likhachev, falecido em Fevereiro de 2004.

Parte II

Método

Capítulo 5

Simulação

5.1 Filtros no experimento “real”.¹

Como discutido na seção 2, um experimento de alta energia deve gerar um número enorme de eventos detectados, porém somente uma pequena parcela desses eventos, os pares $e' - \gamma'$ provenientes do espalhamento Compton no alvo, carregam informação sobre a energia do fóton incidente em um formato utilizável pela expressão 2.2, que é a base de nossa análise. Todos outros eventos detectados podem ser tomados como sendo um fundo (*background*) de eventos não relevantes para nossa medida de energia. Desse modo é necessário que exista uma maneira de filtrar esse fundo, que são todos os outros eventos não relevantes para nossa medida.

O detetor *HyCal* (ver seção 5.8.1) permite obter medidas de energia e posição com boa resolução. Desse modo, dada uma estimativa para a energia do fóton incidente, podemos reconhecer os produtos da interação Compton² no alvo utilizando os seguintes “filtros”:

- coincidência $e^- \gamma'$

¹Entenda-se por experimento “real” um experimento de fato, e não uma simulação.

²Eventos Compton seguidos ou precedidos de outra interação, como criação de pares, também são filtrados, já que não são mais compatíveis com a cinemática de um único espalhamento Compton no alvo.

- coplanaridade entre e^- , eixo z e γ'
- correlação angular e energética de acordo com a cinemática da reação

Esses filtros permitem isolar os eventos provenientes de um único espalhamento Compton, que são os eventos relevantes para nossa análise. Assim, assumindo que é possível aplicar esses filtros no experimento “real” (em contrapartida ao experimento “simulado”) com uma eficiência próxima a 100%, podemos simular somente as interações Compton no alvo, onde o fóton incidente sofre apenas um espalhamento e então é detectado.

Porém, como discutido na seção 2, esses eventos estão sujeitos aos efeitos do espalhamento múltiplo de elétrons, momento inicial (p_{in}) dos elétrons nos átomos do alvo, tamanho finito do feixe, resolução do detetor e outros efeitos geométricos, que são inerentes ao arranjo experimental. Desse modo, se esses efeitos forem incluídos na simulação, podemos estimar sua influência na medida de energia. Esse é o verdadeiro propósito da simulação.

5.2 Descrição geral da simulação

A figura 5.1 mostra um esquema simplificado do arranjo experimental, que consiste basicamente de um feixe monocromático de fótons, de um alvo fino de Be e da parte central do detetor *HyCal*. Fótons de energia E_γ incidem sobre o alvo e sofrem espalhamento Compton, cada um gerando um fóton γ' e um elétron. Essas partículas são então detectadas em coincidência, obtendo-se assim os ângulos θ_γ e θ_e , que possibilitam a reconstrução da energia inicial E_γ utilizando-se a expressão 2.2.

A simulação é constituída por dois blocos: um escrito em FORTRAN-77[11], responsável pela simulação e transporte das partículas; e o outro em C++[12], utilizando o *ROOT System*[13], responsável pelos cortes cinemáticos, pela geração de gráficos, assim como pela análise de dados.

Figura 5.1: Esquema simplificado do arranjo experimental, constituído pelo feixe, pelo alvo fino de Be de espessura t e pelo detetor a uma distância D do alvo. O alvo e o detetor são paralelos e perpendiculares ao eixo z do sistema do laboratório.

A simulação constrói histórias para fótons que sofrem apenas um espalhamento Compton no alvo e consiste de vários passos simples que serão descritos sucintamente a seguir³(Fig. 5.2).

Inicialmente, utilizando-se as características do feixe, gera-se um ponto de entrada P_{ea} onde um fóton com direção $\hat{k}_1$ incide sobre o alvo (ver seção 5.4). Em seguida, um ponto de interação P_C , onde ocorre o espalhamento, é gerado dentro do alvo a partir do ponto P_{ea} e ao longo da direção $\hat{k}_1$ (ver seção 5.5). Nesse ponto o processo Compton é simulado (ver seção 5.6), obtendo-se assim os momentos do fóton espalhado e do elétron, $\vec{k}_2$ e $\vec{p}_e$ respectivamente, logo após a interação. Ao contrário do fóton, que não sofre mais interações até ser detectado, o elétron sofre espalhamento múltiplo até sair do alvo (ver seção 5.7). Os efeitos desse espalhamento múltiplo são incluídos nesse ponto

³Durante a aquisição e análise do experimento real, todos os eventos que não são compatíveis com eventos Compton no alvo são descartados, isso nos permite simular somente esses eventos (ver seção 5.1).

Figura 5.2: Esquema geométrico dos passos que compõem a história para o fóton incidente.

da simulação, obtendo-se o momento final do elétron $\vec{p}_{ef}$. A seguir, a partir do ponto P_C onde ocorre o espalhamento, da distância D entre o alvo e o plano do detetor e das direções finais das partículas, são obtidos os pontos $P_{\gamma_{inc}}$ e $P_{e_{inc}}$ onde o fóton espalhado e o elétron incidem sobre o detetor, respectivamente. A partir desses pontos, da energia das partículas e das características do detetor, são geradas leituras de posição (ver seção 5.8) tanto para o fóton espalhado ($P_{\gamma_{det}}$) quanto para o elétron ($P_{e_{det}}$). Finalmente os ângulos θ_γ e θ_e são obtidos e a energia reconstruída para esse evento é calculada. Esses procedimentos são repetidos até obter-se o número desejado de histórias. Esse bloco da simulação provou ser suficientemente rápido, gerando 25000 eventos Compton em menos de 7s em um PC PIII.

O gerador de números pseudo-aleatórios *Mersenne Twister* [14] foi utilizado na simulação. O período desse gerador é 2^{19937} , que para todas as finalidades práticas é infinito. Desse modo não é necessário se preocupar com repetições de séries e pseudo convergências.

A segunda parte da simulação é descrita no capítulo 6. Ela verifica se cada evento, isto é, cada par de leituras $P_{\gamma_{det}}$ e $P_{e_{det}}$ em coincidência, encontra-se dentro das regiões permitidas pelos cortes cinemáticos aplicados (ver seção 6.2). Em caso positivo esse evento é adicionado aos dados aceitos, que são analisados. Esse segundo bloco também permite construir gráficos de cada variável relevante da simulação, automaticamente.

5.3 Geometria do experimento e sistemas de coordenadas utilizados

O arranjo experimental simplificado, como visto na figura 5.1, foi o utilizado na simulação. Consiste do feixe de fótons, do alvo fino de Be de espessura t e da parte central do detetor *HyCal*, cuja face encontra-se a uma distância D da origem do sistema do laboratório. O alvo e a face exposta do detetor são planos, paralelos entre si e perpendiculares ao eixo de simetria experimental, que é o eixo z do sistema do laboratório. Desse modo podemos descrever as faces do alvo como os planos $z = 0$ e $z = t$, e a face do detetor como o plano $z = D$, nesse sistema.

5.3.1 Caracterização geométrica do feixe de fótons.

O feixe utilizado no experimento *PrimEx*, que é o experimento que tomamos como exemplo, é o feixe de fótons marcados do hall B do *Jefferson Laboratory* (*JLab*). A distribuição transversal de intensidade desse feixe, na região do alvo, pode ser descrita por distribuições gaussianas em x e y de desvios-padrão $\sigma_x = \sigma_y = 0.7mm$ em torno do eixo do feixe. Para efeitos de simulação, considera-se o feixe como monocromático⁴ e sem abertura, ou seja, todos os fótons têm a mesma direção $\hat{k}_1$ e energia E_γ .

Para descrever desalinhamentos entre o feixe e o detetor, utilizam-se dois parâmetros (Fig. 5.3): A direção $\hat{k}_1$, que não é necessariamente paralela ao eixo de simetria do

⁴A simulação pode utilizar uma distribuição de energia para os fótons do feixe, mas tomamos aqui o feixe como monocromático por simplicidade. O apêndice A mostra alguns resultados para um feixe não monocromático.

arranjo experimental, descreve desvios angulares; e o ponto P_b , sobre o plano $z = 0$, onde o eixo do feixe cruza o plano do alvo. Esse ponto, que não necessariamente coincide com a origem do sistema do laboratório, descreve translações do eixo do feixe.

Figura 5.3: Direção $\hat{k}_1$ e ponto P_b que descrevem desalinhamentos entre o feixe e o eixo de simetria do arranjo experimental. O ponto P_b , onde o eixo do feixe cruza o plano do alvo, é a origem do sistema B .

5.3.2 Sistemas de coordenadas utilizados na simulação

A abordagem utilizada na simulação foi a de resolver os pequenos passos que a compõem no sistema de coordenadas mais adequado a cada um desses pequenos problemas, simplificando ao máximo cada um dos componentes da simulação. Para tornar essa abordagem factível, foram utilizados vários sistemas de coordenadas relacionados entre si por transformações lineares[15].

Na simulação foram utilizados quatro sistemas de coordenadas: Sistema do laboratório (sistema L), sistema do momento transferido (sistema Q), sistema do feixe (sistema B) e sistema do elétron (sistema E^-).

No sistema L , o eixo z coincide com o eixo do equipamento experimental e é perpendicular ao detetor e ao alvo, enquanto que o eixo y é vertical. A origem desse sistema é a intersecção entre o eixo de simetria experimental e a face do alvo que é exposta ao

feixe, como pode ser visto nas figuras 5.1 e 5.3.

No sistema Q , o eixo z coincide com a direção do momento transferido $\vec{q}$. Esse sistema Q está relacionado com o sistema do laboratório L por duas rotações: uma em torno do eixo z de ϕ_q , e outra em torno do novo eixo y de θ_q , onde ϕ_q e θ_q são os ângulos que definem a direção do momento transferido $\vec{q}$ no sistema L . O sistema Q é utilizado para definir o momento interno $\vec{p}_{in}$ em relação ao momento transferido $\vec{q}$. Como esse sistema não é utilizado para descrever pontos, mas somente vetores (direções), a posição de sua origem é irrelevante.

No sistema E^- , o eixo z coincide com a direção do elétron ejetado, antes do espalhamento múltiplo no alvo. Esse sistema E^- está relacionado com o sistema L pelos ângulos ϕ_{pe} e θ_{pe} , que definem a direção do elétron no sistema do laboratório. Esse sistema é utilizado para descrever o momento final $\vec{p}_{ef}$ do elétron após o espalhamento múltiplo. Como esse sistema não é utilizado para descrever pontos, mas somente vetores (direções), a posição de sua origem é irrelevante.

No sistema B , o eixo z coincide com a direção $\hat{k}_1$ do eixo de simetria do feixe. Esse sistema B está relacionado com o sistema L por duas rotações e uma translação. Uma rotação em torno do eixo z de ϕ_{k_1} , outra em torno do novo eixo y de θ_{k_1} , onde ϕ_{k_1} e θ_{k_1} são os ângulos que definem a direção do eixo de simetria do feixe no sistema L . A translação é de $\vec{P}_b$, que é o vetor que define o ponto P_b no sistema L . A origem desse sistema é o próprio ponto P_b , onde o eixo do feixe cruza o plano do alvo.

As duas rotações que relacionam os sistemas Q , B e E^- ao sistema L , podem ser descritas pela matriz de rotação[15, 16]:

$$R(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

onde θ e ϕ são os ângulos de rotação.

A matriz 5.1 foi utilizada para transformar vetores dos sistemas E , Q e B para o

sistema L . Por exemplo, um vetor $\vec{v}_E$, descrito no sistema E , pode ser transformado para o sistema L da seguinte forma:

$$\vec{v}_L = R(\theta_e, \phi_e) \cdot \vec{v}_E$$

No caso de pontos descritos no sistema B , uma translação ainda deve ser acrescentada à transformação. Por exemplo, um ponto P_B , descrito no sistema B pode ser transformado para o sistema L da seguinte forma:

$$\vec{P}_L = [R(\theta_{k_1}, \phi_{k_1}) \cdot \vec{P}_B] + \vec{P}_b$$

onde o ponto $\vec{P}_b$ é a origem do sistema B descrito no sistema L (Fig. 5.3).

5.4 Geração do ponto P_{ea} de entrada no alvo.

A área iluminada do alvo sofre deslocamentos e distorções em sua forma devido a translações e desvios angulares do eixo do feixe, respectivamente. Para se levar em conta esses efeitos de maneira simples, utiliza-se o sistema do feixe B . Nesse sistema, o plano $z_B = 0$ é tomado como sendo um “pseudo-alvo” sobre o qual é gerado o ponto P_{pB} seguindo a distribuição⁵ gaussiana de intensidades do feixe $\sigma_x = \sigma_y = 0.7mm$, utilizando-se o método *polar-Marsaglia*[17, 18, 19], sucintamente descrito no apêndice D. Em seguida o ponto P_{pB} sobre o “pseudo-alvo” é transformado do sistema B para o sistema L , como descrito na seção 5.3.2, obtendo-se o ponto P_{pL} que então é projetado sobre o alvo real ($z_L = 0$), obtendo-se o ponto de entrada P_{ea} da seguinte forma:

$$\vec{P}_{ea} = \vec{P}_{pL} + \lambda \hat{k}_1 \quad \lambda = -\frac{P_{pLz}}{k_{1z}}$$

⁵Essa distribuição em coordenadas cartesianas é equivalente a uma distribuição gaussiana em coordenadas cilíndricas com $\sigma_\rho = 0.7mm$ e ϕ igualmente distribuído entre 0 e 2π . Essa transformação torna a geração computacionalmente mais econômica pois requer apenas três números pseudo-aleatórios.

onde P_{pLz} e k_{1z} são as coordenadas z do ponto P_{pL} e da direção $\hat{k}_1$, respectivamente.

A figura⁶ 5.4 mostra gráficos com 25000 pontos P_{ea} gerados dessa forma para diferentes parâmetros de alinhamento do feixe. Como esperado, o efeito da distorção da área iluminada no resultado final da simulação provou ser desprezível devido aos pequenos desvios angulares do feixe.

Figura 5.4: Gráficos dos pontos P_{ea} gerados. (A) Feixe alinhado com eixo experimental. (B) Feixe transladado com $P_b = (1, 1, 0)mm$ (C) Feixe transladado com $P_b = (1, 1, 0)mm$ e com desvio angular dado por $\theta_{k_1} = \phi_{k_1} = 0.8rad$.

5.5 Geração do ponto de interação P_c .

O ponto P_c é o ponto onde ocorre a interação Compton dentro do alvo. Ele deve ser gerado a partir do ponto de entrada P_{ea} ao longo da direção $\hat{k}_1$. A distribuição da distância α onde ocorre o espalhamento depende da seção de choque total para o espalhamento Compton e da densidade n de centros espalhadores:

$$\sigma = \frac{dp}{n d\alpha} \Rightarrow \mu = \frac{dp}{d\alpha} = n\sigma$$

onde μ é a seção de choque macroscópica. Como o fóton incidente é de alta energia ($E_\gamma \sim 5GeV$), a seção de choque Compton é muito baixa ($\sigma \sim 0.2647mb$), logo μ é

⁶O desvio angular foi propositalmente exagerado para melhor ilustrar a distorção da região iluminada pelo feixe. O desvio angular máximo esperado é da ordem de $10^{-4}rad$.

muito pequeno.

A probabilidade de um fóton não interagir após percorrer uma distância α é dada pela probabilidade de sobrevivência $P_s(\alpha) = e^{-\mu\alpha}$. Assim a probabilidade de ocorrer pelo menos uma interação até α é dada pela função densidade cumulativa (FDC)⁷:

$$C(\alpha) = 1 - P_s(\alpha) = 1 - e^{-\mu\alpha}$$

A função densidade de probabilidade (FDP) $P(\alpha)$, que define a probabilidade de interação por unidade de comprimento é dada por:

$$P(\alpha) = \frac{dC(\alpha)}{d\alpha} = \mu e^{-\mu\alpha} = \mu P_s(\alpha) \cong P(0) + \alpha \left| \frac{dP(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

Como $\mu \ll 1$, essa FDP é aproximadamente constante para um alvo fino, pois:

$$\frac{dP(\alpha)}{d\alpha} = -\mu^2 e^{-\mu\alpha} \rightarrow 0$$

Considerando a distância percorrida α igualmente distribuída, podemos gerar uma profundidade d onde ocorre o espalhamento no alvo também igualmente distribuída entre 0 e t , e em seguida obter P_c , que se encontra na intersecção da trajetória do fóton com o plano $z = d$:

$$\vec{P}_c = \vec{P}_{ea} + \lambda \hat{k}_1 \quad \lambda = \frac{d - P_{eaz}}{k_{1z}}$$

onde P_{eaz} e k_{1z} são as coordenadas z do ponto P_{ea} e da direção k_1 , respectivamente.

⁷Válido somente para meios homogêneos e infinitos. No caso de meios finitos [20] deve-se considerar uma fronteira em $\alpha = t$, $\mu = \mu(\alpha) = 0$ para $\alpha > t$ e somar um termo $P_s(t)\theta(\alpha - t)$ para a conservação de probabilidade, o que leva a $P(\alpha) = \mu(\alpha)P_s(\alpha) + P_s(t)\delta(\alpha - t)$. Porém isso não alteraria nossa discussão aqui, já que estamos forçando todos fótons simulados a sofrerem espalhamento.

5.6 Simulação do espalhamento Compton.

Nesse ponto da simulação estamos interessados em obter os momentos das partículas que emergem do espalhamento, levando em conta o efeito do momento interno dos elétrons nos átomos de Be . Para isso utilizamos a cinemática da reação para calcular o módulo do momento transferido $\vec{q}$, o módulo do momento $\vec{p}_e$ do elétron ejetado e o módulo do momento $\vec{k}_2$ do fóton espalhado.

5.6.1 Cinemática relativística em aproximação de impulso.

A figura 5.5 mostra o diagrama de momentos para o espalhamento Compton, em aproximação de impulso. Esse diagrama leva em conta o momento interno dos elétrons atômicos. Os vetores $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ são os momentos inicial e final do fóton, $\vec{q}$ é o momento transferido, $\vec{p}_{in}$ é o momento interno do elétron e $\vec{p}_e$ é o momento final do elétron. Note que $\vec{p}_{in}$ e $\vec{p}_e$ não necessariamente pertencem ao plano da reação, definido pelos vetores $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$.

Figura 5.5: Diagrama de momentos para o espalhamento Compton em aproximação de impulso, levando em conta o momento interno dos elétrons. $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ são os momentos inicial e final do fóton, $\vec{q}$ é o momento transferido, $\vec{p}_{in}$ é o momento interno do elétron e $\vec{p}_e$ é o momento final do elétron.

As energias inicial e final do fóton são dadas por $\omega_1 = k_1$ e $\omega_2 = k_2$, respectivamente.

A energia final do elétron E_e é dada por ($\hbar = c = 1$):

$$E_e = \sqrt{p_e^2 + m_e^2} - m_e \quad , \quad (5.2)$$

onde m_e é a massa do elétron.

Em aproximação de impulso, a energia do átomo residual é dada por:

$$E_r = \sqrt{p_{in}^2 + M^2} - M \quad , \quad (5.3)$$

onde M é a massa do átomo.

Da conservação de energia pode-se obter a energia ω_2 do fóton espalhado:

$$\omega_2 = \omega_1 - E_e - E_r - B \quad , \quad (5.4)$$

onde B é a energia de ligação do elétron.

Da conservação de momento, diretamente da figura 5.5, obtém-se:

$$q = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \cos \theta_\gamma} \quad (5.5)$$

$$p_e = \sqrt{q^2 + p_{in}^2 + 2qp_{in} \cos \theta_{in}} \quad (5.6)$$

Das equações 5.4, 5.5 e 5.6 pode-se obter uma equação de segundo grau em q , temos então:

$$q = \frac{-B1 + \sqrt{\Delta}}{2A1} \quad \Delta = B1^2 - 4A1 \cdot C1$$

onde:

$$A1 = 1 - \left(\frac{p_{in} \cos \theta_{in}}{\gamma} \right)^2$$

$$B1 = 2p_{in} \cos \theta_{in} - \frac{\beta p_{in} \cos \theta_{in}}{\gamma^2}$$

$$C1 = p_{in}^2 + m_e^2 - \left(\frac{\beta}{2\gamma}\right)^2$$

$$\alpha = k_1 + m_e - E_r - B$$

$$\beta = k_1^2 + \alpha^2 + p_{in}^2 + m_e^2 - 2k_1\alpha \cos \theta_\gamma$$

$$\gamma = \alpha - k_1 \cos \theta_\gamma$$

Assim é possível calcular o módulo de $\vec{q}$ facilmente a partir dos módulos de $\vec{k}_1$, $\vec{p}_{in}$, das constantes M e m_e , e dos ângulos θ_γ e θ_{in} .

5.6.2 Geração do ângulo de espalhamento θ_γ e da direção $\hat{k}_2$ do fóton espalhado.

O ângulo de espalhamento θ_γ é gerado no sistema B , no intervalo $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ ⁸ seguindo a seção de choque diferencial⁹ do processo Compton (fórmula de *Klein-Nishina* [4]), utilizando-se o método de *Neumann*¹⁰[17, 20, 19, 18]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos \theta_\gamma)]^2} \left[1 + \cos^2 \theta_\gamma + \frac{\gamma^2 (1 - \cos \theta_\gamma)^2}{1 + \gamma(1 - \cos \theta_\gamma)} \right] \quad (5.7)$$

A figura 5.6 mostra um histograma típico dos valores amostrados para $\theta_{\gamma B}$.

O ângulo $\phi_{\gamma B}$ é gerado isotropicamente entre 0 e 2π que, juntamente com $\theta_{\gamma B}$, definem a direção $\hat{k}_{2B}$ no sistema B . Essa direção é então transformada para o sistema L , obtendo-se assim $\hat{k}_2$.

5.6.3 Cálculo do momento interno $\vec{p}_{in}$ dos elétrons

A distribuição do momento interno dos elétrons nas camadas K e L , descrita na seção 3.1 é utilizada para a geração do módulo de p_{in} . Para cada camada do Be , temos

⁸Esse intervalo representa os valores de θ_γ compatíveis com a aceitação angular do detector.

⁹Essa distribuição angular é aproximada, pois não leva em conta o efeito do momento interno dos elétrons atômicos. Porém os módulos dos momentos são calculados utilizando-se a cinemática da reação, incluindo assim esse efeito.

¹⁰Esse método é sucintamente descrito no apêndice D.

Figura 5.6: Histograma dos valores amostrados para $\theta_{\gamma B}$. A função ajustada é $N \frac{d\sigma}{d\Omega}$.

uma energia de ligação B tabelada [21] e uma distribuição $I_i(p_{in})$ (eq. 3.1). Como a configuração eletrônica do Be é $1s^2 2s^2$, assumiu-se que a probabilidade de interação é a mesma para ambas camadas. Assim, sorteando-se com igual probabilidade uma camada para o elétron da interação, obtém-se um valor para B e uma distribuição para p_{in} .

A seguir a distribuição relevante para p_{in} foi amostrada, utilizando-se o método de *Neumann*. A figura 5.7 mostra um histograma dos valores amostrados para p_{in} .

A direção $\hat{p}_{in}$ de $\vec{p}_{in}$ é gerada isotropicamente¹¹ no sistema do momento transferido Q , pois consideramos que os átomos do alvo não estão alinhados.

5.6.4 Cálculo dos momentos $\vec{p}_e$ e $\vec{k}_2$.

A partir do ângulo de espalhamento θ_{γ} , do módulo do momento interno do elétron p_{in} , da energia de ligação B , do ângulo $\theta_{p_{in}Q}$ entre $\vec{p}_{in}$ e $\vec{q}$ e da energia inicial do fóton

¹¹O que equivale a $\phi_{p_{in}Q}$ e $\cos\theta_{p_{in}Q}$ igualmente distribuídos entre 0 e 2π e -1 e 1 , respectivamente (ver apêndiceD).

Figura 5.7: Histograma dos valores amostrados para p_{in} . A função ajustada é $N [I_K(p_{in}) + I_L(p_{in})]$, que é a soma das distribuições 3.1.

k_1 , utilizando-se a equação cinemática descrita na seção 5.6.1, obtém-se o módulo de $\vec{q}$. Os módulos de $\vec{p}_e$ e $\vec{k}_2$ são então calculados utilizando-se as expressões 5.6 e 5.4, respectivamente, e a energia cinética do elétron a eq. 5.2. A figura 5.8 mostra os espectros de energia do fóton espalhado e do elétron obtidos da simulação para $k_1 = 5\text{GeV}$. Como a direção $\hat{k}_2$ do fóton espalhado já foi amostrada, o momento/energia do fóton fica bem definido:

$$\vec{k}_2 = k_2 \hat{k}_2$$

Do diagrama de momentos (Fig. 5.5), utilizando $\vec{k}_1$ e $\vec{k}_2$ obtemos $\vec{q}$ no sistema L :

$$\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_2$$

Com o cálculo de $\vec{q}$, a transformação entre os sistemas Q e L fica bem definida e

Figura 5.8: Espectros de energia do fóton espalhado e do elétron obtidos da simulação para $k_1 = 5\text{GeV}$.

podemos então transformar $\vec{p}_{in_Q}$ para o sistema L , e encontrar o momento $\vec{p}_e$ no sistema do laboratório, também utilizando o diagrama de momentos (Fig. 5.5):

$$\vec{p}_e = \left[R(\theta_q, \phi_q) \cdot \vec{p}_{in_Q} \right] + \vec{q}$$

5.7 Espalhamento múltiplo de elétrons no alvo e geração da direção final do elétron $\vec{p}_{ef}$.

A direção inicial do elétron ejetado é modificada devido a espalhamentos múltiplos no material do alvo. Para avaliar esse efeito foi utilizada uma técnica de história condensada de apenas um passo¹², a partir do modelo simples apresentado na seção 5.7, onde o ângulo de espalhamento θ_{scat} entre as direções inicial e final do elétron segue uma distribuição gaussiana de largura σ_{scat} :

$$P(\theta_{scat}) = \frac{1}{\sigma_{scat}\sqrt{2\pi}} \exp \frac{-\theta_{scat}^2}{2\sigma_{scat}^2} , \quad (5.8)$$

onde σ_{scat} é dada pela expressão 3.4

¹²Utiliza-se somente um passo, pois a espessura do alvo é bem pequena

Inicialmente, o comprimento t_{eff} da trajetória do elétron dentro do alvo é calculado (ver Fig. 5.9):

$$t_{eff} = \frac{t - d}{\cos \theta_e} \quad ,$$

onde t é a espessura do alvo, θ_e é o ângulo entre a direção do elétron ejetado e o eixo z do sistema L e d é a profundidade no alvo onde ocorre o espalhamento (coordenada z do ponto P_C).

Figura 5.9: Comprimento t_{eff} da trajetória do elétron dentro do alvo. O elétron “nasce” no ponto P_C , onde ocorre o espalhamento Compton, com momento $\vec{p}_e$, cuja direção coincide com o eixo z do sistema E^- . O ângulo θ_e é o ângulo entre $\vec{p}_e$ e o eixo z do sistema L .

A direção final do elétron, em relação à sua direção inicial (eixo z do sistema E^-), é obtida gerando-se o ângulo $\theta_{scat} > 0$ seguindo a parte positiva da distribuição 5.8 com desvio padrão dado pela equação 3.4 com $x = t_{eff}$, utilizando-se o método *Polar-marsaglia* [18, 17, 19], e o ângulo ϕ_{scat} , gerado isotropicamente entre 0 e 2π . Esses ângulos definem a direção final do elétron no sistema E^- , que é então transformada para o sistema L , obtendo-se $\vec{p}_{ef}$ ¹³. A figura 5.10 mostra histogramas de t_{eff} , σ_{scat} e θ_{scat} obtidos da simulação para $k_1 = 5\text{GeV}$ com feixe alinhado em relação ao eixo experimental.

¹³A perda de energia do elétron no espalhamento múltiplo é desprezível para as finalidades da simulação (geração de leituras de posição), desse modo $\|\vec{p}_e\| = \|\vec{p}_{ef}\|$.

Figura 5.10: Histogramas de t_{eff} , σ_{scat} e θ_{scat} obtidos da simulação para $k_1 = 5GeV$ e $t = 0.352mm$ com feixe alinhado em relação ao eixo experimental.

5.8 Simulação da detecção das partículas

A partir do momento $\vec{p}_{ef}$ do elétron após o espalhamento múltiplo, do momento $\vec{k}_2$ do fóton espalhado, do ponto P_C onde ocorre o espalhamento e da distância D entre o alvo e o plano do detector, são obtidos os pontos $P_{\gamma inc}$ e $P_{e inc}$, onde o fóton espalhado e o elétron incidem sobre o detector, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\gamma inc} &= \vec{P}_C + \lambda_\gamma \hat{k}_2 & \lambda_\gamma &= \frac{D - P_{Cz}}{k_{2z}} , \\ \vec{P}_{e inc} &= \vec{P}_C + \lambda_e \hat{p}_{ef} & \lambda_e &= \frac{D - P_{Cz}}{p_{efz}} , \end{aligned}$$

onde P_{Cz} , k_{2z} e p_{efz} são as coordenadas z do ponto P_C , da direção $\hat{k}_2$ do fóton espalhado e da direção $\hat{p}_{ef}$ do elétron após o espalhamento múltiplo, respectivamente.

O detector *HyCal* não é simulado *per se*, mas leituras de posição são geradas seguindo suas características.

5.8.1 O detector *Hybrid Calorimeter (HyCal)*

O detector *HyCal* [2, 22] é do tipo cintilador inorgânico[23] e cobre uma área de aproximadamente $120 \times 120 cm^2$ perpendicular ao feixe. É constituído por uma parte central com-

posta por uma matriz 34×34 de cristais de $PbWO_4$ de dimensões $2.05 \times 2.05 \times 18.00 cm^3$ com um orifício central de 2×2 cristais. Essa região central é rodeada por uma região periférica com aproximadamente 600 cristais de vidro dopado com chumbo (*lead glass detectors*) de dimensões $3.8 \times 3.8 \times 45 cm^3$, com menor resolução que a parte central. Uma foto do detetor é mostrada na figura 5.11. Para o experimento de calibração em energia do feixe, somente a parte central do detetor é utilizada.

Figura 5.11: Foto do detetor *HyCal*.

A parte central do detetor apresenta uma resolução em posição de alguns *mm*, fortemente dependente da energia da partícula incidente e da posição de incidência; e uma resolução em energia $\sigma_E/E \sim 1.3\%$.

Partículas incidentes criam uma cascata eletromagnética (EM), que se espalha pelo cristal onde incidiu a partícula e pelos cristais vizinhos. Fotomultiplicadoras na parte traseira dos cristais captam a luz resultante da cascata EM e geram um sinal. A quantidade de luz emitida é proporcional a energia depositada. As leituras de posição são obtidas através da análise da quantidade de energia depositada no cristal sobre o qual incide a partícula em relação à quantidade de energia depositada nos cristais vizinhos. Assim a resolução em posição é melhor na região de fronteira entre os cristais, pois a

cascata EM é igualmente distribuída entre eles, e pior na região central do cristal, devido ao pequeno sinal obtido dos cristais vizinhos em relação ao cristal onde a partícula incide. A primeira fileira de cristais em torno do orifício central e a última fileira em torno do limite periférico do detetor¹⁴ são retiradas da aceitância do detetor, pois essas fileiras não apresentam cristais vizinhos em pelo menos um dos lados, o que resulta em uma resolução muito pior. Ou seja, os cristais dessas fileiras ainda continuam ligados, e seus sinais são analisados, porém caso uma leitura de posição remonte a uma dessas fileiras, esta leitura é descartada.

As resoluções em posição do detetor para as coordenadas x e y , σ_x e σ_y , respectivamente, dependem da energia da partícula incidente e da posição de incidência, e são dadas por¹⁵:

$$\sigma_x = \frac{3}{\sqrt{E}} \left[1.0 + 0.2 \sin \left(\frac{2\pi x_0}{20.5} + \frac{3}{2}\pi \right) \right] \quad (mm) \quad , \quad (5.9)$$

$$\sigma_y = \frac{3}{\sqrt{E}} \left[1.0 + 0.2 \sin \left(\frac{2\pi y_0}{20.5} + \frac{3}{2}\pi \right) \right] \quad (mm) \quad , \quad (5.10)$$

onde (x_0, y_0) é a posição de incidência da partícula e E sua energia em GeV .

5.8.2 Geração de leituras de posição

Dada uma posição detectada x_d a posição “real” x_r é

$$x_r = x_d - \epsilon \quad ,$$

onde ϵ é o erro. Assim, se assumirmos erros “gaussianos”, temos que a distribuição de ϵ é simétrica. Se conhecemos o desvio-padrão σ_ϵ da distribuição de erros, podemos então

¹⁴Doravante *detetor* denominará apenas a parte central do *HyCal*, que é a utilizada no experimento.

¹⁵Essas expressões foram obtidas de testes de calibração dos cristais de $PbWO_4$ [2].

gerar medidas x_d a partir da posição real x_r e de uma amostragem gaussiana de ϵ :

$$x_d = x_r + \epsilon \quad ,$$

o que é equivalente a gerar x_d a partir de uma distribuição gaussiana de média x_r e desvio σ_ϵ .

Partindo desse princípio, foram então geradas leituras de posição $P_{\gamma_{det}}$ para o fóton e $P_{e_{det}}$ para o elétron, a partir dos pontos de incidência $\vec{P}_{\gamma_{inc}} = (x_{0_\gamma}, y_{0_\gamma}, D)$ e $\vec{P}_{e_{inc}} = (x_{0_e}, y_{0_e}, D)$, e das energias E_e e k_2 . Inicialmente, as resoluções σ_{x_γ} e σ_{y_γ} para o fóton e σ_{x_e} e σ_{y_e} para o elétron são calculadas, utilizando-se as expressões 5.9 e 5.10 com $E = k_2$, $x_0 = x_{0_\gamma}$ e $y_0 = y_{0_\gamma}$ no caso do fóton; e $E = E_e$, $x_0 = x_{0_e}$ e $y_0 = y_{0_e}$ no caso do elétron. Em seguida x_{d_γ} , y_{d_γ} , x_{d_e} e y_{d_e} são amostrados de distribuições gaussianas de desvios-padrão σ_{x_γ} , σ_{y_γ} , σ_{x_e} e σ_{y_e} ; e médias x_{0_γ} , y_{0_γ} , x_{0_e} e y_{0_e} , respectivamente, pelo método *polar-Marsaglia*. Temos então o resultado final dessa parte da simulação, que são as leituras de posição $P_{\gamma_{det}} = (x_{d_\gamma}, y_{d_\gamma})$ e $P_{e_{det}} = (x_{d_e}, y_{d_e})$. A figura 5.12 mostra pontos $P_{\gamma_{det}}$ e $P_{e_{det}}$ obtidos da simulação de 25000 eventos com $k_1 = 5GeV$ sem desalinhamento do feixe. A região entre os quadrados é a aceitação do detetor, como discutido na seção 5.8.1.

Figura 5.12: Pontos $P_{\gamma_{det}}$ (esquerda) e $P_{e_{det}}$ (direita) obtidos da simulação de 25000 eventos com $k_1 = 5\text{GeV}$, sem desalinhamento do feixe. A região entre os quadrados é a aceitação do detetor.

5.9 Corte de aceitação do detetor.

Cada par de leituras $P_{\gamma_{det}}$ e $P_{e_{det}}$ é analisado em coincidência, ou seja, caso pelo menos um desses pontos estiver fora da região aceita, toda a história relativa ao par é descartada. O principal corte, que deve ser aplicado em todos os casos, independentemente da aplicação de cortes cinemáticos (seção 6.2), é o corte de aceitação do detetor, como discutido na seção 5.8.1. A figura 5.13 mostra o mesmo jogo de dados mostrado na figura 5.12 após a aplicação do corte de aceitação do detetor, representada pela região entre os quadrados. Esse corte equivale a uma medida em coincidência no *HyCal* das partículas geradas pela simulação.

Figura 5.13: Pontos $P_{\gamma_{det}}$ (esquerda) e $P_{e_{det}}$ (direita) obtidos da simulação de 25000 eventos com $k_1 = 5\text{GeV}$, sem desalinhamento do feixe, após o corte de aceitação do detector, representada pela região entre os quadrados.

5.10 Estimativa do número de eventos Compton detectados.

Para estimar o número de eventos Compton detectados durante o período de aquisição, um pequeno programa de integração Monte Carlo foi desenvolvido, baseado na função *knint* da pequena biblioteca *Likhalib* (ver apêndice C), que integra a seção de choque diferencial *Klein-Nishina* em um ângulo sólido definido pelos ângulos θ_{min} e θ_{max} e para todo φ , isotropicamente:

$$I_{kn} = \int_0^{2\pi} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin\theta d\theta d\varphi \quad .$$

onde $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ é a expressão de *Klein-Nishina* (eq. 5.7).

A seção de choque total para a criação de pares, um dos processos dominantes na região de energia de alguns GeV , também foi utilizada para verificar que proporção dos fótons que sofrem espalhamento Compton também criam pares, destruindo assim a informação sobre a energia do fóton incidente. Para energias acima de 20MeV , temos[24,

25]:

$$\sigma_{pair} = 4\alpha r_e^2 Z^2 \left(\frac{7}{9} \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} - \frac{1}{54} \right) \text{ cm}^2/\text{átomo} \quad ,$$

onde r_e é o raio clássico do elétron, α é a constante de estrutura fina e Z é o número atômico do material do alvo.

O número de eventos Compton N_{Comp} esperados pode ser aproximado por:

$$N_{Comp} = N_\gamma \cdot N_e \cdot I_{kn} \cdot \epsilon \cdot t \quad ,$$

onde N_γ é o fluxo de fótons (fótons/s) dentro do bin do *photon tagger*, ϵ é a eficiência do detetor, t é o tempo de aquisição (s) e

$$N_e = Z\rho L \frac{N_A}{A} \text{ elétrons/cm}^2 \quad ,$$

é a densidade (superficial) de elétrons no alvo, ρ é a densidade do material do alvo, A sua massa atômica, L a espessura do alvo e N_A o número de avogadro.

Com a exclusão dos eventos Compton que também criam pares, temos que o número de eventos detectado N_{ev} pode ser aproximado por

$$N_{ev} = N_{Comp} - (N_{Comp} \cdot N_{atoms} \cdot \sigma_{pair}) \quad ,$$

onde

$$N_{atoms} = \rho \cdot L \frac{N_A}{A} \quad .$$

Apesar da seção de choque de criação de pares ser ordens de grandeza maior que a seção de choque Compton, verificou-se que, como esperado, o número de fótons que sofrem as duas interações é desprezível. Desse modo o número de eventos detectados é aproximadamente o número de eventos Compton, ou seja, $N_{ev} \cong N_{Comp}$.

A tabela 5.1 mostra os parâmetros de entrada e os resultados para a estimativa de eventos detectados, no caso específico do experimento de calibração de energia do *PrimEx*[22].

Parâmetros de entrada	
E	$5000 MeV$
θ_{min}	$1.71 \cdot 10^{-3} rad$
θ_{max}	$4.10 \cdot 10^{-2} rad$
ρ	$1.848 g/cm^2$
N_{γ}	$2200 \text{ fótons}/s$
t	6 dias
A	9
Z	4
L	$35.28 \cdot 10^{-3} cm$
Resultados	
I_{kn}	$6.857 \cdot 10^{-2} mbarn$
σ_{pair}	$15.14 mbarn$
N_{Comp}	13368.8
N_{ev}	13367.9

Tabela 5.1: Parâmetros de entrada e resultados para a estimativa do número de eventos detectados.

Capítulo 6

Análise

O objetivo do experimento é obter a energia média dos fótons do feixe a partir da detecção dos produtos do espalhamento Compton. A seguir descreveremos passo a passo a análise dos dados obtidos da simulação e os métodos utilizados.

Para a análise foram criados pequenos programas em C++, utilizando o *ROOT System*.

6.1 Reconstrução dos ângulos de espalhamento

Como vimos na seção 2, a energia do fóton incidente está relacionada com os ângulos de espalhamento θ_γ e θ_e do fóton e do elétron provenientes do espalhamento Compton no alvo, respectivamente. Essa relação é descrita pela expressão 2.2, reproduzida aqui em unidades naturais ($\hbar = c = 1$):

$$E_\gamma(\theta_\gamma, \theta_e) = m_e \left(\cot \frac{\theta_\gamma}{2} \cot \theta_e - 1 \right) \quad (6.1)$$

Desse modo, a energia do fóton incidente para cada evento Compton pode ser reconstruída a partir de cada par $(\theta_\gamma, \theta_e)$ desses ângulos de espalhamento, que são obtidos experimentalmente da posição no detetor $P_{e_{det}} = (x_e, y_e)$ e $P_{\gamma_{det}} = (x_\gamma, y_\gamma)$ dos produtos do espalhamento, em coincidência, e da distância D entre alvo e detetor, da seguinte

forma (ver Fig. 6.1):

$$\theta_\gamma = \arctan \frac{\sqrt{x_\gamma^2 + y_\gamma^2}}{D} ,$$

$$\theta_e = \arctan \frac{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}}{D} .$$

Figura 6.1: Relação entre o ângulo de espalhamento θ , a posição de detecção $P = (x, y)$ e a distância D entre alvo e detector.

Uma estimativa da incerteza nessas medidas angulares pode ser obtida a partir das medidas de energia E_{eHyCal} e $E_{\gamma HyCal}$ das partículas espalhadas, também obtidas do detector *HyCal*, e da resolução espacial (σ_x, σ_y) do detector (ver seção 5.8.1). Para isso fazemos a aproximação $\tan \theta \sim \theta$, pois os ângulos medidos são pequenos ($\theta < 1.6^\circ$). Calculamos então as incertezas σ_{x_γ} e σ_{y_γ} na medida de posição do fóton detectado a partir da energia medida $E_{\gamma HyCal}$, utilizando as expressões 5.9 e 5.10. De modo análogo calculamos as incertezas σ_{x_e} e σ_{y_e} na medida de posição do elétron a partir de E_{eHyCal} . Em seguida propagamos essas incertezas na posição para as medidas angulares θ_γ e θ_e :

$$\sigma_{\theta_\gamma} = \frac{\sqrt{x_\gamma^2 \sigma_{x_\gamma}^2 + y_\gamma^2 \sigma_{y_\gamma}^2}}{D \sqrt{x_\gamma^2 + y_\gamma^2}} \quad \text{e} \quad \sigma_{\theta_e} = \frac{\sqrt{x_e^2 \sigma_{x_e}^2 + y_e^2 \sigma_{y_e}^2}}{D \sqrt{x_e^2 + y_e^2}} \quad .$$

6.1.1 Erro Sistemático nas medidas angulares.

Como discutido anteriormente (seção 6.1), as medidas dos ângulos de espalhamento θ_γ e θ_e são obtidas de medidas de posição sobre o detector do fóton e elétron espalhados. A maior contribuição para a incerteza na posição das partículas detectadas é proveniente das características do detector. Como visto na seção 5.8.1, as incertezas na posição de detecção σ_x e σ_y são dadas pelas expressões 5.9 e 5.10, respectivamente. Embora essas incertezas não sejam necessariamente iguais entre si ($\sigma_x \neq \sigma_y$), pois dependem do ponto de incidência e da energia das partículas sobre o detector, elas são simétricas, ou seja,

$$P(x = x_o + \Delta_x) = P(x = x_o - \Delta_x) \quad \text{e}$$

$$P(y = y_o + \Delta_y) = P(y = y_o - \Delta_y) \quad .$$

Embora as incertezas de detecção σ_x e σ_y sejam simétricas, devido a fatores puramente geométricos elas implicam em uma incerteza angular assimétrica. A partir do ponto de incidência (x_0, y_0) e da distância D entre alvo e detector, o ângulo de espalhamento θ_0 da partícula em questão é calculado, porém, devido a essa assimetria, as incertezas σ_x e σ_y levam, em média, a medidas angulares θ maiores que o ângulo “real” θ_0 de incidência.

Vamos agora tomar o caso¹ específico onde $\sigma_x = \sigma_y$. A figura 6.2 mostra o centro do detector (+), um círculo que representa o ângulo θ_0 (círculo tracejado) e um círculo centrado no ponto (x) de incidência (x_0, y_0) , de raio $\sigma_x = \sigma_y$ (círculo cheio e círculo ampliado), que representa a área no detector onde espera-se encontrar, com probabilidade

¹Tomou-se o caso específico onde $\sigma_x = \sigma_y$ apenas por simplicidade. As conclusões obtidas também se aplicam no caso geral $\sigma_x \neq \sigma_y$.

Figura 6.2: Centro do detetor (+), círculo que representa o ângulo θ_0 (círculo tracejado) e círculo centrado no ponto ($\mathbf{x}$) de incidência (x_0, y_0) , de raio $\sigma_x = \sigma_y$ (círculo cheio e círculo ampliado), que representa a área no detetor onde espera-se encontrar, com probabilidade de $\sim 68\%$, a leitura de posição para o ponto “real” de incidência ($\mathbf{x}$). A área A é maior que a área B, logo, ângulos maiores são privilegiados.

de $\sim 68\%$, a leitura de posição para o ponto “real” de incidência ($\mathbf{x}$). Pode-se observar que a “linha de referência” para $\theta = \theta_0$ divide o círculo em duas áreas: A e B. Como a área A é maior que a área B, temos que a probabilidade de que a leitura de posição esteja dentro da área A é maior que a probabilidade de que a leitura de posição esteja dentro da área B. Assim, como todos os pontos da área A estão além da “linha de referência”, temos que é maior a probabilidade de se obter uma leitura de posição que leva a um ângulo medido θ maior que θ_0 , privilegiando assim ângulos maiores, ou seja,

$$A > B \Rightarrow P(\theta > \theta_0) > P(\theta \leq \theta_0) \ .$$

Desse modo espera-se que, em média, o valor obtido para θ seja maior que o ângulo “real” de incidência θ_0 . Como a energia calculada para o fóton incidente (eq. 6.1) é tão menor quanto maior os ângulos θ_γ e θ_e , esse efeito leva a uma energia reconstruída E menor que a energia “real” E_0 do fóton incidente.

$$\langle \theta \rangle > \theta_0 \ , \ \frac{\partial E}{\partial \theta_{e,\gamma}} < 0 \Rightarrow \langle E \rangle < E_0$$

Figura 6.3: Círculo centrado no ponto $(\mathbf{x})$ de incidência (x_0, y_0) , de raio $\sigma_x = \sigma_y$, que representa a área no detetor onde espera-se encontrar, com probabilidade de $\sim 68\%$, a leitura de posição para o ponto “real” de incidência $(\mathbf{x})$, em dois casos: θ_0 pequeno (região central do detetor) e θ_0 grande (região periférica). A diferença entre as áreas delimitadas pelas “linhas de referência” é tão menor quanto maior o ângulo “real” de incidência θ_0 .

Esse efeito não é constante em todo o detetor, mas varia de acordo com o ângulo θ_0 da partícula incidente. Para ângulos θ_0 pequenos, isto é, para partículas que incidem na região mais central do detetor, esse efeito é maior, pois quanto menor o ângulo θ_0 , maior a diferença entre as áreas A e B. A figura 6.3 ilustra esse efeito. Sejam A e B as áreas delimitadas pelas “linhas de referência” no caso θ_0 pequeno (região central do detetor) e A' e B' no caso θ_0 grande (região periférica), temos que

$$\frac{A}{B} > \frac{A'}{B'} ,$$

levando a uma menor contribuição desse efeito no caso de ângulos grandes. A figura 6.4 mostra o resultado de uma simulação simples. O erro médio $\epsilon_\theta = \langle \theta \rangle - \theta_0$ foi obtido em função do ângulo de espalhamento θ_0 . Para isso foram geradas 10^5 leituras de posição, seguindo as características do detetor² para partículas de 1GeV , para cada ponto de incidência (x_0, y_0) , definido pelos ângulos θ_0 e $\varphi = 0$, isto é, foi varrida uma linha horizontal ao longo do detetor. Além da marcante diminuição de ϵ_θ com o aumento de θ_0 , pode-se também notar uma estrutura periódica, devido à variação periódica de σ_x

²Neste caso $\sigma_x \neq \sigma_y$.

em função de x_0 (expressão 5.9).

Figura 6.4: Erro médio $\epsilon_{\theta} = \langle \theta \rangle - \theta_0$ em função do ângulo de espalhamento θ_0 .

Vale a pena notar também que, devido à cinemática da reação, quando o ângulo de espalhamento θ_e do elétron é pequeno, o ângulo de espalhamento θ_{γ} do fóton é grande (fig. 2.3), e vice versa. Assim, como cada medida de energia depende desses dois ângulos, pelo menos uma das partículas incidentes estará na região onde o efeito desse erro sistemático é grande.

Foram desenvolvidos métodos para se estimar a contribuição desse erro sistemático, inerente ao experimento, utilizando a própria simulação. Dessa forma pode-se criar um fator de correção que é posteriormente aplicado ao resultado da análise (ver seção 6.5).

6.2 Corte cinemático

A energia reconstruída do fóton incidente é muito sensível a desalinhamentos do feixe. Como do ponto de vista experimental não há como diminuir a incerteza no alinhamento do feixe além de um certo limite, é necessária a inclusão de um outro tipo de corte para

os eventos, que minimizaria esse efeito de desalinhamento. A expressão 6.1, utilizada para reconstruir a energia do fóton incidente, pode ser reescrita como

$$\frac{E(\theta_\gamma, \theta_e)}{m_e} = f(\theta_\gamma, \theta_e) = \cot \frac{\theta_\gamma}{2} \cot \theta_e - 1 \quad .$$

Sabemos que as direções do fóton incidente (paralela ao eixo do feixe), do elétron e fóton espalhados são aproximadamente coplanares³ (plano da reação). Podemos então fazer uma mudança de variáveis, utilizando o ângulo $\psi = \theta_\gamma + \theta_e$ entre as direções do fóton e elétron espalhados (ver figura 6.5⁴).

$$f(\theta_\gamma, \theta_e) = \alpha(\psi, \theta_\gamma) = \cot \frac{\theta_\gamma}{2} \cot (\psi - \theta_\gamma) - 1 \quad \text{e}$$

$$f(\theta_\gamma, \theta_e) = \beta(\theta_e, \psi) = \cot \frac{(\psi - \theta_e)}{2} \cot \theta_e - 1 \quad .$$

O ângulo ψ depende somente da cinemática da reação e não é alterado por desalinhamentos do feixe, desse modo toda a “sujeira” devido ao desalinhamento pode ser colocada em apenas um dos ângulos, somando-se o efeito Δ devido a esse desalinhamento. Logo, a medida de energia reconstruída, no caso de um desalinhamento do feixe, pode ser dada por:

$$\alpha(\psi, \theta_\gamma + \Delta) \cong \alpha(\psi, \theta_\gamma) + \Delta \frac{\partial \alpha(\psi, \theta_\gamma)}{\partial \theta_\gamma} + O(\Delta^2) \quad \text{e}$$

$$\beta(\theta_e - \Delta, \psi) \cong \beta(\theta_e, \psi) - \Delta \frac{\partial \beta(\theta_e, \psi)}{\partial \theta_e} + O(\Delta^2) \quad .$$

³Não são exatamente coplanares devido ao efeito do momento interno do elétron p_{in} e ao efeito do espalhamento múltiplo de elétrons no alvo.

⁴A figura mostra apenas um caso específico para desvios do feixe no plano da reação. De modo geral, a alteração Δ no ângulo medido não será necessariamente igual ao desvio do feixe, como nesse caso.

Figura 6.5: Alteração Δ nos ângulos medidos θ_γ e θ_e devido a um desalinhamento do feixe sobre o plano da reação: (A) Sem desalinhamento (B) Mesmo evento, medido com um desalinhamento angular sobre o plano da reação.

onde:

$$\frac{\partial \alpha(\psi, \theta_\gamma)}{\partial \theta_\gamma} = \frac{\cot(\theta_\gamma/2)}{\sin^2(\psi - \theta_\gamma)} - \frac{\cot(\psi - \theta_\gamma)}{2 \sin^2(\theta_\gamma/2)} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \beta(\theta_e, \psi)}{\partial \theta_e} = \frac{\cot \theta_e}{\sin^2\left(\frac{\psi - \theta_e}{2}\right)} - \frac{\cot\left(\frac{\psi - \theta_e}{2}\right)}{2 \sin^2 \theta_e} \quad .$$

Assim, na região onde $\frac{\partial \alpha(\psi, \theta_\gamma)}{\partial \theta_\gamma} \cong 0$ e $\frac{\partial \beta(\theta_e, \psi)}{\partial \theta_e} \cong 0$, a influência do desalinhamento na medida de energia é mínima, pois:

$$\frac{\partial E(\psi, \theta_\gamma)}{\partial \theta_\gamma} = m_e \frac{\partial \alpha(\psi, \theta_\gamma)}{\partial \theta_\gamma} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial E(\theta_e, \psi)}{\partial \theta_e} = m_e \frac{\partial \beta(\theta_e, \psi)}{\partial \theta_e} \quad .$$

As figuras 6.6 e 6.7 mostram gráficos de $\frac{\partial E}{\partial \theta_\gamma}/E$ (por 10^{-4}rad) em função de θ_γ e

$\frac{\partial E}{\partial \theta_e}/E$ (por $10^{-4}rad$) em função de θ_e para $k_1 = 5GeV$. Pode-se notar que os gráficos são bem semelhantes

Figura 6.6: Gráfico de $\frac{\partial E}{\partial \theta_\gamma}/E$ em função de θ_γ para $k_1 = 5GeV$.

Figura 6.7: Gráfico de $\frac{\partial E}{\partial \theta_e}/E$ em função de θ_e para $k_1 = 5GeV$.

Podemos pensar nessa região que minimiza o efeito de desalinhamento do feixe com $\theta_\gamma \sim 0.8^\circ$ e $\theta_e \sim 0.8^\circ$ como sendo uma nova aceitação angular para o experimento.

Desse modo, ao aplicarmos o corte cinemático aceitamos apenas dados com ângulos de espalhamento no intervalo

$$0.4^\circ < \theta_e < 1.6^\circ \quad \text{e} \quad 0.4^\circ < \theta_\gamma < 1.6^\circ \quad .$$

que representa a região onde o módulo de $\frac{\partial E}{\partial \theta_\gamma}/E$ e $\frac{\partial E}{\partial \theta_e}/E$ são menores que 0.01 (ver Figs 6.7 e 6.6).

Um estudo mais aprofundado dos efeitos causados por esse corte cinemático ainda será descrito na seção 6.6, pois além de causar uma diminuição na dispersão do espectro também diminui o número de eventos. Desse modo não haverá necessariamente uma diminuição na incerteza da média de E .

6.3 Espectro da energia reconstruída

Para cada evento Compton detectado, a energia do fóton incidente é reconstruída a partir do par θ_γ - θ_e , utilizando-se a expressão 6.1. As energias obtidas dos eventos são então colocadas em um histograma, que é o espectro da energia reconstruída. Como será discutido posteriormente (seção 6.4), foram desenvolvidos três métodos distintos para a análise dos dados. Dois deles, o método do ajuste gaussiano ao espectro e o método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro, utilizam esse espectro para obter a energia dos fótons incidentes.

Devido ao erro sistemático nas medidas angulares, discutido na seção 6.1.1, as energias reconstruídas são, em média, menores que as energias “reais” dos fótons incidentes. Desse modo, o espectro de energias reconstruídas é deslocado para energias menores. Tomamos a posição do máximo desse espectro como a medida de energia dos fótons incidentes, ao invés da média das energias reconstruídas, devido à assimetria inerente a esse espectro, que é uma consequência da não linearidade da expressão para a energia e será discutida a seguir (6.3.1). Como o espectro está deslocado para energias menores,

há um erro sistemático que leva a uma medida de energia menor.

6.3.1 Assimetria do espectro e não linearidade da expressão para a energia

Quando temos uma grandeza física medida experimentalmente, isto é, com uma certa incerteza experimental, e desejamos calcular uma outra grandeza que se relaciona com a primeira através de uma expressão não linear, estamos sujeitos a erros sistemáticos ligados a essa não linearidade. Esse é o caso da relação entre os ângulos de espalhamento θ_γ e θ_e e a energia reconstruída E do fóton incidente.

Para ilustrar esse efeito, vamos tomar uma grandeza x , obtida experimentalmente com uma certa incerteza σ_x . Vamos considerar que essa grandeza x se relaciona com a grandeza y através da relação $y = x^3$. Consideremos agora dois pontos experimentais $x_1 = 2.5$ e $x_2 = 3.5$, ao redor do valor verdadeiro $x_v = 3.0$. A média dos valores medidos é $\langle x \rangle = (x_1 + x_2)/2 = 3.0 = x_v$, o que levaria a $y = 3^3 = 27$, que é o valor verdadeiro de y . Porém, quando calcularmos um valor y para cada valor de x obtido obtemos $y_1 = x_1^3 = 15.625$ e $y_2 = x_2^3 = 42.875$, cuja média $\langle y \rangle = (y_1 + y_2)/2 = 29.25$, que é maior que o valor $y_v = 27$ esperado. Isso é ilustrado na figura 6.8. Vemos que um intervalo simétrico em x leva a um intervalo assimétrico em y . Desse modo, mesmo incertezas σ_x simétricas levam a incertezas σ_y assimétricas e a um erro sistemático em $\langle y \rangle$, caso y seja calculado para cada valor de x .

Esse efeito é tão maior quanto maior for a incerteza σ_x . Ou seja, para intervalos pequenos em x (σ_x pequeno), o erro sistemático em $\langle y \rangle$ é pequeno, enquanto que para σ_x grande teríamos um grande erro sistemático.

Embora a expressão 6.1 que relaciona a energia do fóton incidente aos ângulos de espalhamento seja bidimensional, devido à sua não linearidade em θ_γ e θ_e o mesmo efeito está presente. Desse modo, ao se calcular as energias E que compõem o espectro a partir de cada par $(\theta_\gamma, \theta_e)$, cria-se um espectro assimétrico. Como no exemplo simples anterior,

Figura 6.8: Erro sistemático na média de $y = x^3$: $\langle x \rangle = x_v = 3$, $\langle y \rangle \neq \langle x \rangle^3$. A linha horizontal indica $\langle y \rangle$.

esse efeito é tão maior quanto mais distante as medidas dos ângulos de espalhamento estiverem dos seus respectivos valores “verdadeiros”. Como

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \theta_e^2} > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \theta_\gamma^2} > 0 \quad ,$$

ângulos medidos menores que os ângulos verdadeiros levam a energias mais distantes da energia verdadeira que no caso inverso, quando os ângulos medidos são maiores, criando um erro sistemático na média da energia, ou seja,

$$\frac{E(\theta_\gamma + \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e) + E(\theta_\gamma - \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e)}{2} > E(\theta_\gamma, \theta_e) \quad \text{e} \quad (6.2)$$

$$\frac{E(\theta_\gamma, \theta_e + \sigma_{\theta_e}) + E(\theta_\gamma, \theta_e - \sigma_{\theta_e})}{2} > E(\theta_\gamma, \theta_e) \quad . \quad (6.3)$$

A figura 6.9 é ilustrativa da expressão 6.2 e mostra um gráfico de $E \times \theta_\gamma$. A curva superior é $E(\theta_\gamma - \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e)$, a inferior é $E(\theta_\gamma + \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e)$ e a central é a média, para $\sigma_{\theta_\gamma} = 10^{-4} \text{ rad}$ na região do corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$. Nota-se o aumento da média, principalmente para ângulos θ_γ menores. Esse efeito ainda deve ser amplificado devido

à seção de choque Compton, já que ângulos θ_γ menores são privilegiados.

Figura 6.9: $E \times \theta_\gamma$. A curva superior é $E(\theta_\gamma - \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e)$, a inferior é $E(\theta_\gamma + \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e)$ e a central é a média, para $\sigma_{\theta_\gamma} = 10^{-4} \text{ rad}$ na região do corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$.

A figura 6.10 é ilustrativa da expressão 6.3 e mostra um gráfico de $E \times \theta_e$. A curva superior é $E(\theta_\gamma, \theta_e - \sigma_e)$, a inferior é $E(\theta_\gamma, \theta_e + \sigma_e)$ e a central é a média, para $\sigma_e = 10^{-4} \text{ rad}$ na região do corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$.

Os gráficos a seguir ilustram a não linearidade da função 6.1 para θ_e e θ_γ em duas regiões próximas aos limites dados pelo corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$.

Fixando-se $\theta_e = \theta_{0e}$ e variando-se θ_γ , temos (figuras 6.11 e 6.12):

$$E(\theta_\gamma, \theta_{0e}) = k_1 \cot \frac{\theta_\gamma}{2} - 1 \quad k_1 = \cot \theta_{0e} = (1 + E/m_e) \tan \frac{\theta_{0\gamma}}{2} \quad (6.4)$$

Fixando-se $\theta_\gamma = \theta_{0\gamma}$ e variando-se θ_e , temos (figuras 6.13 e 6.14):

$$E(\theta_{0\gamma}, \theta_e) = k_2 \cot \theta_e - 1 \quad k_2 = \cot \frac{\theta_{0\gamma}}{2} = (1 + E/m_e) \tan \theta_{0e} \quad (6.5)$$

Essa não linearidade causa um espectro de energia reconstruída assimétrico, com os

Figura 6.10: $E \times \theta_e$. A curva superior é $E(\theta_\gamma, \theta_e - \sigma_e)$, a inferior é $E(\theta_\gamma, \theta_e + \sigma_e)$ e a central é a média, para $\sigma_e = 10^{-4} rad$ na região do corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$.

Figura 6.11: $E \times \theta_\gamma$ para $\theta_{0\gamma} = 2.5 \cdot 10^{-2} rad$ e $E_0 = 5000 MeV$, segundo a eq. 6.4. A linha tracejada é uma reta.

eventos do lado direito (maior energia) mais distantes do máximo do espectro. Desse modo a média das energias do espectro é sistematicamente maior que a posição do máximo do espectro, relacionado com a energia “real” E_0 . Esse efeito se contrapõe ao

Figura 6.12: $E \times \theta_\gamma$ para $\theta_{0\gamma} = 8 \cdot 10^{-3}$ e $E_0 = 5000 \text{ MeV}$, segundo a eq. 6.4. A linha tracejada é uma reta.

Figura 6.13: $E \times \theta_e$ para $\theta_{0\gamma} = 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ e $E_0 = 5000 \text{ MeV}$, segundo a eq. 6.5. A linha tracejada é uma reta.

efeito causado pelo erro sistemático nas medidas angulares, discutido na seção 6.1.1. Enquanto o efeito da não linearidade tende a aumentar a média da energia, o efeito do erro sistemático nas medidas angulares tende a diminuí-la. Como o efeito da não linearidade da expressão da energia é tão maior quanto maior o “erro” angular, esse efeito é predominante nas extremidades do espectro, enquanto que o efeito do erro

Figura 6.14: $E \times \theta_e$ para $\theta_{0\gamma} = 8 \cdot 10^{-3} \text{rad}$ e $E_0 = 5000 \text{MeV}$, segundo a eq. 6.5. A linha tracejada é uma reta.

sistemático nas medidas angulares é predominante na parte central do espectro, onde se encontra o máximo e a contribuição da não linearidade é menor. Assim, apesar da média das energias no espectro ser maior⁵ que E_0 devido à contribuição das extremidades do espectro, a posição do máximo é menor que a energia “real” E_0 devido ao erro sistemático nas medidas angulares. Com o intuito de analisar as consequências desses erros sistemáticos na medida de energia, foram desenvolvidos alguns métodos distintos de análise para os dados da simulação.

6.4 Descrição dos métodos utilizados para a análise

Foram utilizados e comparados três métodos distintos para a análise dos dados:

1. Método do ajuste gaussiano ao espectro
2. Método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro

⁵Dependendo dos parâmetros geométricos utilizados, como a distância D entre alvo e detetor, ou da não aplicação de cortes cinemáticos, o efeito do erro sistemático nas medidas angulares pode superar o efeito da assimetria do espectro. Assim, em alguns casos, embora a média das energias do espectro ainda seja maior que a posição do máximo, ela pode ser menor que a energia “real” E_0 .

3. Método do ajuste da expressão de energia aos ângulos de espalhamento

Os dois primeiros métodos utilizam o espectro de energia reconstruída (seção 6.3), enquanto que o terceiro utiliza apenas os ângulos de espalhamento reconstruídos e suas respectivas incertezas (seção 6.1). A seguir descrevemos detalhadamente cada um deles.

6.4.1 Método do ajuste gaussiano ao espectro

Esse é o mais simples dos três métodos e é o utilizado pelo *Jlab* nas suas referências [2, 22]. Ele consiste em ajustar uma gaussiana ao espectro da energia reconstruída:

$$G(E) = C \cdot \exp \frac{-(E - \langle E \rangle)^2}{2\sigma^2} ,$$

onde são ajustados os parâmetros C (normalização), $\langle E \rangle$ (média da energia) e σ (largura do espectro). Para os ajustes foi utilizado o “pacote” de minimização MINUIT⁶, parte do *ROOT System*[13]. Esse pacote descarta do ajuste bins com incerteza nula. Assim, para evitar problemas com espectros contendo bins vazios, cuja incerteza é automaticamente tomada como zero pelo *ROOT System* e retirada do ajuste, as incertezas nos bins do espectro foram estimadas da seguinte forma: Inicialmente, uma gaussiana preliminar $G_p(E)$ é obtida a partir da média E_m das energias no espectro, da largura W dos bins, do RMS ⁷ do espectro e do número N de eventos no espectro⁸ :

$$G_p(E) = \frac{NW}{\sqrt{2\pi}RMS} \exp \frac{-(E - E_m)^2}{2RMS^2} ,$$

e a partir dessa gaussiana, as incertezas nos bins de energia E são calculados:

$$\sigma(E) = \sqrt{G_p(E)} .$$

⁶O MINUIT foi originalmente desenvolvido em FORTRAN, porém foi transformado em uma classe C++ e incluído no *ROOT System*.

⁷ $RMS = \sqrt{\frac{(E - E_m)^2}{N}}$.

⁸Os valores de E_m , W , RMS e N não são ajustados, mas obtidos diretamente dos dados no espectro, automaticamente, pelo *ROOT System*.

A gaussiana final $G(E)$ pode agora ser ajustada ao espectro. A medida de energia é tomada como sendo o máximo da gaussiana ajustada, isto é, $\langle E \rangle$. A incerteza $\sigma_{\langle E \rangle}$ na posição do máximo é obtida do ajuste. Porém, essa incerteza pode ser também estimada a partir da largura σ do espectro e do número N de dados presentes no espectro:

$$\sigma_{\langle E \rangle} \cong \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \quad . \quad (6.6)$$

Porém esse método apresenta problemas. Como discutido na seção 6.3.1 o espectro de energia reconstruída não é simétrico, apresentando os dados à direita (maior energia) mais distantes do máximo do espectro. Assim, ao se ajustar uma função simétrica, como a gaussiana nesse caso, essa será ligeiramente deslocada para a direita. Isso leva a medidas de energia sistematicamente maiores que a posição do máximo da distribuição. A figura 6.15 mostra um exemplo desse ajuste gaussiano a um espectro⁹ criado a partir da simulação com $E_0 = 5000 MeV$. Pode-se observar que o ajuste é ligeiramente deslocado para a direita em relação ao máximo do espectro.

Desse modo acreditamos que este método não seja adequado para a análise dos dados em todos os casos, já que esse erro sistemático devido à assimetria do espectro pode ser evitado, utilizando os outros métodos de análise desenvolvidos nesse trabalho, que são descritos nas seções 6.4.2 e 6.4.3 a seguir.

6.4.2 Método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro

Esse método é semelhante ao método anterior, onde uma gaussiana é ajustada ao espectro das energias reconstruídas, e consiste na aplicação de uma correção polinomial à função gaussiana, antes do ajuste. A função ajustada é

$$F(E) = P_5(E) \cdot C \cdot \exp \frac{-(E - G_m)^2}{2\sigma^2} \quad , \quad (6.7)$$

⁹Esse espectro contém um número muito maior de dados que o número de contagens esperadas no experimento real, mas foi utilizado para tornar visível o efeito em questão.

Figura 6.15: Exemplo de ajuste gaussiano ao espectro criado pela simulação com $E_0 = 5000 \text{ MeV}$. Pode-se observar que o ajuste é ligeiramente deslocado para a direita em relação ao máximo do espectro.

onde $P_5(E)$ é um polinômio de quinto grau:

$$P_5(E) = p_0 + p_1(E - E_m) + p_2(E - E_m)^2 + p_3(E - E_m)^3 + p_4(E - E_m)^4 + p_5(E - E_m)^5 \quad ,$$

onde E_m é a média das energias do espectro.

A correção polinomial representa a forma do espectro e é obtida utilizando-se dados da simulação. Assim esse método utiliza a própria simulação para refinar o ajuste gaussiano, obtendo as características do espectro esperado através de um número muito grande de dados gerados.

Para se obter um espectro representativo são gerados aproximadamente 10^7 dados, utilizando-se a simulação. Esse espectro é a base para a obtenção da correção polinomial. Para isso uma gaussiana é ajustada ao espectro criado a partir desses dados, como no método anterior¹⁰. Chamaremos essa gaussiana “preliminar” de $G_p(E)$. Em seguida,

¹⁰Aqui também é utilizado o método para estimar as incertezas nos bins de energia, como descrito em 6.4.1.

para cada bin do espectro, é calculado um “resíduo multiplicativo”, que chamaremos de $R(E)$, e sua respectiva incerteza $\sigma_R(E)$, da seguinte forma:

$$R(E) = \frac{N(E)}{G_p(E)} \quad \text{e} \quad \sigma_R(E) = \frac{\sigma_N(E)}{G_p(E)} \quad .$$

onde $N(E)$ é o número de dados no bin de energia E e $\sigma_N(E)$ sua respectiva incerteza. Dessa forma um espectro de resíduos é obtido. Em seguida um polinômio “preliminar” $P_{p5}(E)$ é ajustado a esse espectro de resíduos, obtendo-se assim estimativas iniciais para os parâmetros p_0 a p_5 . A figura 6.16 mostra um exemplo desse tipo de espectro com um ajuste polinomial de quinto grau.

Figura 6.16: Exemplo de ajuste polinomial de quinto grau ao espectro de resíduos.

Os parâmetros preliminares ajustados σ_p , $\langle E \rangle_p$, C_p de $G_p(E)$ e p_0 a p_5 de $P_{p5}(E)$ são colocados como parâmetros iniciais em $F(E)$ (expressão 6.7). Essa função é agora ajustada como um todo ao espectro inicial, obtendo-se assim os parâmetros finais p_0 a p_5 da correção polinomial $P_5(E)$. A figura 6.17 mostra um ajuste de $F(E)$ ao espectro, seguindo esse método. Em todos os ajustes foi utilizado o pacote MINUIT, parte do

ROOT System[13].

Figura 6.17: Exemplo de ajuste gaussiano corrigido ($F(E)$) ao espectro característico.

A qualidade desse ajuste gaussiano corrigido é muito melhor que o ajuste gaussiano simples, o que pode ser constatado visualmente e através da comparação dos $\chi^2/\text{ndf} = \chi_{red}^2$ dos dois ajustes (ver figuras 6.15 e 6.17). Isso se deve também ao fato de que a função ajustada $F(E)$ não é mais simétrica, e já contém informação sobre a forma esperada do espectro, contida em $P_5(E)$.

Para a análise de um espectro “normal”, isto é, um espectro com um número de dados compatível com o número de eventos Compton esperado durante o período de aquisição no experimento real, os parâmetros p_0 a p_5 de $F(E)$ são fixados e os parâmetros restantes são ajustados. Em seguida o máximo do ajuste é obtido utilizando-se ferramentas do *ROOT System*[13]. Uma estimativa para a incerteza na posição do ajuste é estimada a partir da incerteza no parâmetro ajustado G_m , da parte gaussiana de $F(E)$, como no caso anterior. Veremos que essa incerteza terá um fator de correção posterior (seção 6.5).

Acreditamos que esse método é bem superior ao método do ajuste gaussiano sim-

ples. Ele permite obter com maior acuidade a posição do máximo do espectro, que é a medida da energia dos fótons incidentes, levando em conta a característica assimétrica do espectro.

6.4.3 Método do ajuste da expressão de energia aos ângulos de espalhamento

Com o intuito de eliminar da análise erros relacionados com a não linearidade da expressão da energia, ou seja, a assimetria inerente ao espectro de energias reconstruídas (ver seção 6.3.1), foi desenvolvido um método de análise simples e direto, que permite a obtenção da medida de energia dos fótons incidentes sem a utilização desse espectro. Esse método consiste em ajustar a expressão 6.1, que relaciona a energia com os ângulos de espalhamento, a um gráfico de $\theta_\gamma \times \theta_e$. Esses ângulos são reconstruídos a partir das medidas de posição, como descrito na seção 6.1.

Inicialmente o gráfico de $\theta_\gamma \times \theta_e$ é construído. Cada ponto desse gráfico representa um par θ_γ - θ_e , com suas respectivas incertezas. Sobre esse gráfico é ajustado, também utilizando o pacote MINUIT, o parâmetro E da função 6.1, que é tomado como a medida de energia. A figura 6.18 é um exemplo desse ajuste.

Os resultados obtidos por esse método são semelhantes aos obtidos pelo método do ajuste gaussiano corrido, isto é, os resultados para E obtidos por esse método são, em média, menores que o valor de E_0 , mostrando que a correção polinomial aplicada à gaussiana tende a eliminar os erros sistemáticos relacionados à assimetria do espectro. Porém esse método é computacionalmente bem mais caro que os métodos anteriores.

Figura 6.18: Exemplo de ajuste do parâmetro E da expressão da energia (eq. 6.1) sobre o gráfico $\theta_\gamma \times \theta_e$.

6.5 Distribuição de erros e fator de correção para os resultados do ajuste

Uma das vantagens da utilização de simulações Monte Carlo é a possibilidade de criação de fatores de correção. Isso é possível pois podemos criar dados a partir das características do experimento, como a energia E_0 dos fótons do feixe, e verificar como os resultados obtidos desses dados se relacionam com os parâmetros de entrada utilizados.

Como discutido anteriormente, existem algumas fontes de erros sistemáticos inerentes à geometria do arranjo experimental e à construção do espectro. Embora alguns métodos de ajuste minimizem a contribuição do efeito da assimetria do espectro das energias reconstruídas, o efeito dos erros sistemáticos nas medidas angulares não pode ser eliminado através dos ajustes, e é fortemente dependente dos parâmetros geométricos. Para estimar a contribuição desses erros e criar um fator de correção para os resultados do ajuste, a distribuição de erros é obtida, utilizando-se muitos jogos de dados criados a

partir da simulação.

Para isso são criados N conjuntos de dados ($N \sim 3 \times 10^3$), cada um deles com um número N_{ev} de eventos, que é o número de eventos Compton esperado dentro da aceitância utilizada para o período de aquisição (ver seção 5.10). Utilizando-se um dos métodos de ajuste descritos na seção 6.4, a medida de energia E com respectiva incerteza σ_E é obtida e um erro ϵ ,

$$\epsilon = E - E_0 \quad ,$$

é calculado para cada um dos N conjuntos de dados, onde E_0 é a energia dos fótons do feixe utilizada como parâmetro de entrada da simulação. Assim, após a análise de todos os conjuntos de dados, obtém-se a distribuição dos erros ϵ e a distribuição das incertezas σ_E . Vale notar que como E_0 é fixo, a distribuição de erros ϵ é a própria distribuição dos valores de E medidos, apenas deslocada de E_0 para a esquerda. Sobre essas distribuições são ajustadas as gaussianas:

$$G(\epsilon) = C \cdot \exp \frac{-(\epsilon - \langle \epsilon \rangle)^2}{2\sigma_\epsilon^2} \quad e$$

$$G_\sigma(\sigma_E) = C_\sigma \cdot \exp \frac{-(\sigma_E - \langle \sigma_E \rangle)^2}{2\sigma_\sigma^2} \quad .$$

A figura 6.19 é um exemplo da distribuição de erros com o ajuste gaussiano.

O fator de correção para a energia é tomado como sendo $C = -\langle \epsilon \rangle$, e o fator de correção para a incerteza de E como sendo $\lambda = \sigma_\epsilon / \langle \sigma_E \rangle$. Assim, uma medida E , com respectiva incerteza σ_E é corrigida da seguinte forma:

$$E_f = E - \langle \epsilon \rangle \quad e \quad \sigma_{E_f} = \sqrt{\lambda \cdot \sigma_E^2 + \sigma_{\langle \epsilon \rangle}^2} \quad (6.8)$$

onde E_f é a medida corrigida final para a energia dos fótons incidentes, σ_{E_f} sua respectiva incerteza e $\sigma_{\langle \epsilon \rangle}$ é a incerteza, obtida do ajuste, para o parâmetro $\langle \epsilon \rangle$.

Como será discutido posteriormente (seção 8), a distribuição de erros, além de ser

Figura 6.19: Exemplo da distribuição de erros com o ajuste gaussiano.

utilizada para obter os fatores de correção, também é utilizada para verificar que efeito sistemático é predominante em determinada situação experimental, e para comparar quantitativamente os métodos de ajuste utilizados.

6.6 Análise do efeito do corte cinemático na incerteza da medida de posição do máximo do espectro.

Como discutido na seção 6.2, o corte cinemático é utilizado para minimizar a influência de desvios do feixe nas medidas de energia. A figura 6.20 mostra um exemplo da aplicação do corte cinemático. Os espectros de energia mostrados foram obtidos com um desvio angular do feixe de $\theta_{k_1} = 10^{-4} \text{rad}$ e $\phi_{k_1} = 0.687 \text{rad}$ sem corte cinemático (A), e com um corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$ (B). Pode-se observar que a largura do

espectro, assim como o número de dados no histograma, é diminuída¹¹. Desse modo a incerteza na posição do máximo (nesse caso $\langle E \rangle$) aumentou de 0.93 para 0.95 quando foi utilizado o corte cinemático.

Figura 6.20: Exemplo da aplicação do corte cinemático. Os espectros de energia foram obtidos com um desvio angular do feixe com $\theta_{k_1} = 10^{-4} \text{ rad}$ e $\phi_{k_1} = 0.687 \text{ rad}$. (A) sem corte cinemático (B) com um corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$.

Porém deseja-se saber se existe alguma influência do número de dados do espectro na razão entre as incertezas da medida de energia com corte cinemático e sem corte cinemático. Para isso foi desenvolvido um pequeno programa de análise que utiliza dados gerados pela simulação. Esse programa cria vários espectros, com e sem a aplicação do corte cinemático, e analisa a razão das incertezas na posição do máximo com e sem o corte cinemático em função do número de dados.

Seja σ e N a largura e o número de eventos do espectro sem a utilização do corte cinemático; e σ' e N' a largura e o número de eventos do espectro com a utilização do corte. A razão $\alpha = N'/N$ (ver Fig. 6.21) deve ser independente do número de eventos no espectro, dependendo somente da seção de choque diferencial para o efeito Compton e da razão das áreas determinadas pelas aceitâncias com e sem o corte cinemático. A razão entre as incertezas da média de E com e sem o corte cinemático pode ser estimada por:

¹¹O método do ajuste gaussiano foi utilizado nesse exemplo.

$$\frac{\sigma_{<E>}}{\sigma'_{<E>}} = \frac{\sigma\sqrt{N'}}{\sigma'\sqrt{N}} = \frac{\sigma}{\sigma'}\sqrt{\alpha} . \quad (6.9)$$

A razão σ/σ' também deve ser independente do número de eventos no espectro e é proporcional a $\sigma_{<E>}/\sigma'_{<E>}$. A figura 6.21 mostra um exemplo da razão $\alpha = N'/N$ em função de N . Pode-se observar que essa razão, como esperado, é compatível com uma constante. Cada ponto é a média e respectivo desvio padrão da média da análise de 50 espectros sem corte cinemático e 50 espectros com corte cinemático, criados a partir de jogos de N eventos¹² independentes.

Figura 6.21: Exemplo de análise da razão N'/N . Essa razão é compatível com uma constante.

A figura 6.22 mostra um exemplo da razão σ'/σ em função de N . Como na figura anterior, cada ponto é a média e respectivo desvio padrão da média da análise de 50 espectros com e sem corte cinemático criados a partir de jogos de N eventos independentes. Essa razão também é compatível com uma constante.

A figura 6.23 é obtida do ajuste da figura 6.21 aplicado aos dados da figura 6.22 utilizando a expressão 6.9. As incertezas mostradas foram propagadas da maneira usual[26]. Pode-se observar que, no caso específico desse exemplo, a aplicação do corte cinemático

¹²No caso de espectros com corte cinemático, o número de eventos no espectro é menor que N , já que parte dos N eventos é descartada pelo corte cinemático.

Figura 6.22: Exemplo de análise da razão σ'/σ . Essa razão também é compatível com uma constante.

aumenta a incerteza na posição do máximo do espectro em aproximadamente 3%, já que $\sigma'_{<E>}/\sigma_{<E>}$ obtido do ajuste é 1.03 para os parâmetros de entrada utilizados. Isso se deve ao menor número de eventos acumulados no caso da utilização do corte cinemático.

Deve-se notar também, como será discutido na seção 8, que o corte cinemático influencia o efeito do erro sistemático angular (seção 6.1.1) na medida da energia, pois impede a utilização de ângulos muito pequenos ($\theta < 0.4^\circ$), onde o efeito do erro sistemático nas medidas angulares é mais pronunciado.

Figura 6.23: Exemplo de análise da razão $\sigma'_{<E>}/\sigma_{<E>}$. Essa razão também é compatível com uma constante. Esta figura é obtida do ajuste da figura 6.21 aplicado aos dados da figura 6.22 utilizando a expressão 6.9.

Parte III

Resultados, discussão e conclusão

Capítulo 7

Resultados

7.1 Comparação entre os efeitos estudados

Como discutido na seção 2, os efeitos estudados que causam o alargamento do espectro medido são: o tamanho finito do feixe, o espalhamento múltiplo de elétrons no alvo, o momento interno dos elétrons nos átomos do alvo, a resolução espacial do detector *HyCal* e desvios angulares e lineares (translações) do feixe. As figuras a seguir, obtidas dos dados da simulação, mostram o alargamento do espectro devido a esses efeitos, separadamente. Os parâmetros de entrada utilizados em todas as figuras foram a energia dos fótons incidentes $E_0 = 5000.00 MeV$, a distância entre alvo e detector $D = 9.0m$ e a espessura do alvo $t = 10^{-3}L$, onde L é o comprimento de radiação do *Be*. Houve somente a aplicação do corte de aceitação do detector.

A figura 7.1 mostra os resultados obtidos sem a inclusão de efeitos (esquerda) e com o efeito do tamanho finito do feixe (direita). Pode-se observar que, como esperado, a ausência de efeitos resulta na obtenção de um espectro “delta”, apenas com uma energia, que é a energia E_0 dos fótons incidentes.

A figura 7.2 mostra os resultados obtidos com um desvio angular do feixe dado por $\theta = 10^{-4}rad$, $\varphi = 0.758rad$ (esquerda) e com¹ espalhamento múltiplo de elétrons no alvo

¹As figuras 7.1 a 7.4 mostram os efeitos de modo não cumulativo, com exceção da 7.4(direita), com todos os efeitos simultaneamente.

Figura 7.1: Resultados obtidos sem a inclusão de efeitos (esquerda) e com o efeito do tamanho finito do feixe (direita).

(direita).

Figura 7.2: Resultados obtidos com um desvio angular $\theta = 10^{-4}rad$, $\varphi = 0.758rad$ do feixe (esquerda) e com o efeito do espalhamento múltiplo de elétrons no alvo (direita).

A figura 7.3 mostra os resultados obtidos com um desvio linear (translação) do feixe com $\Delta x = \Delta y = 1mm^2$ (esquerda) e com o efeito do momento interno dos elétrons nos átomos do alvo (direita).

² $\Delta x = \Delta y = 1mm$ equivale a $P_b = (1,1)$ (ver 5.3.1). Esse tipo de desvio pode causar variações sistemáticas na energia medida, dependentes dos parâmetros Δx e Δy utilizados.

Figura 7.3: Resultados obtidos com um desvio linear (translação) do feixe com $\Delta x = \Delta y = 1mm$ (esquerda) e com o efeito do momento interno dos elétrons nos átomos do alvo (direita).

A figura 7.4 mostra os resultados obtidos com a resolução espacial do detector (esquerda) e com todos efeitos simultaneamente (direita).

Figura 7.4: Resultados obtidos com a resolução espacial do detector (esquerda) e com todos efeitos simultaneamente (direita).

Como esperado, a maior contribuição na largura do espectro deve-se ao efeito da resolução espacial do detector, como pode ser observado na figura 7.4 (esquerda). Desse modo, o aumento da distância D entre alvo e detector deve diminuir a largura do espectro.

Por outro lado, ao se distanciar o detetor diminuimos sua aceitância angular e com isso o número de contagens, que já é pequeno devido à baixa seção de choque Compton em altas energias.

7.2 *Benchmark*

Com o intuito de verificar os resultados de nossa simulação, foram utilizados como *Benchmarks* alguns resultados da simulação desenvolvida pelo *Jlab*[2, 22], que utiliza o software *GEANT*[27]. Os parâmetros de entrada por nós utilizados são os mesmos utilizados na simulação do *Jlab*³. O método de análise utilizado para as comparações foi o do ajuste gaussiano simples ao espectro. Nesse caso não foi utilizado o método de estimativa de incertezas descrito na seção 6.4.1, ou seja os bins vazios têm incerteza nula e são retirados do ajuste. Esse foi o método de análise utilizado pelo *Jlab* em suas referências [2, 22].

O *benchmark* utilizado foi obtido da figura 38 da referência [22], e é reproduzido aqui na figura 7.6. A figura 7.5 mostra nossos resultados para um alvo de *Be* com espessura 10^{-3} comprimentos de radiação, distribuição de intensidade do feixe $\sigma_x = \sigma_y = 0.7mm$, desalinhamento do feixe dado por $P_b = (1,1)mm$, $\theta_{k_1} = 10^{-4}rad$ e $\varphi_{k_1} = 0.785rad$ com o *HYCAL* a $9m$ do alvo e para energias do fóton incidente 4995, 5000, 5005 e 5010 MeV. Um corte cinemático $0.4^\circ < \theta_\gamma, \theta_e < 1.6^\circ$ foi aplicado. Esses resultados podem ser comparados com a figura 7.6, obtida da referência [22].

A tabela 7.1 mostra uma comparação entre nossos resultados (fig. 7.5) e os obtidos pelo *Jlab* (fig. 7.6). Todas as energias são em *MeV* e os índices *b* denotam resultados obtidos pelo *Jlab*. Pode-se observar que os resultados são compatíveis dentro de⁴ 1σ .

³Não tivemos acesso ao número de eventos no espectro obtido pelo *Jlab*. O número de eventos foi então estimado a partir do $\langle E \rangle$ e $\sigma_{\langle E \rangle}$ dos ajustes, utilizando-se a eq. 6.6.

⁴A única exceção é no caso de σ e σ_b para $E_0 = 5000MeV$, compatíveis dentro de $1.5\sigma_\sigma$.

Figura 7.5: Resultados de nossa simulação para energias dos fótons incidentes de 4995, 5000, 5005 e 5010 MeV. Esses resultados podem ser comparados com a figura 7.6.

E_0	$\langle E \rangle$	$\langle E \rangle_b$	σ	σ_b
4995	4996(1)	4997(1)	136.7(9)	135.6(13)
5000	5001(1)	4999(1)	136.1(9)	138.8(13)
5005	5006(1)	5006(1)	136.5(9)	136.6(13)
5010	5011(1)	5009(1)	136.7(9)	138.0(13)

Tabela 7.1: Parâmetros ajustados das figuras 7.5 e 7.6 (índice b) e respectivas incertezas.

Figura 7.6: Resultados obtidos pelo *Jlab* para energias dos fótons incidentes de 4995, 5000, 5005 e 5010 MeV. Essa figura foi obtida da referência [22].

7.3 Resultados Finais

A seguir apresentamos nossos resultados finais, incluindo as correções, como discutido na seção 6.4. Os dados da simulação foram gerados seguindo os parâmetros de entrada⁵ de acordo com a referência [22], mostrados na tabela 7.2. Os parâmetros do feixe e do detetor, também obtidos da referência [22] são os mostrados nas seções 5.3.1 e 5.8.1.

Parâmetro	Valor	Descrição
E_0	$5000MeV$	Energia dos fótons incidentes
t	$10^{-3}L$	Espessura do alvo
D	$9m$	Distância entre alvo e detetor
θ_{k1}	$10^{-4}rad$	Desvio angular do feixe
φ_{k1}	$0.785rad$	Direção do feixe
Δx	$1mm$	Desvio linear do feixe em x
Δy	$1mm$	Desvio linear do feixe em y

Tabela 7.2: Parâmetros de entrada utilizados na simulação (ver [22]).

Os resultados serão apresentados de acordo com o método de análise utilizado e da utilização ou não do corte cinemático:

- seção 7.3.1 (pág. 102) - método gaussiano sem corte cinemático.
- seção 7.3.2 (pág. 105) - método gaussiano com corte cinemático.
- seção 7.3.3 (pág. 108) - método gaussiano corrigido sem corte cinemático.
- seção 7.3.4 (pág. 111) - método gaussiano corrigido com corte cinemático.
- seção 7.3.5 (pág. 115) - método da expressão de energia sem corte cinemático.
- seção 7.3.6 (pág. 118) - método da expressão de energia com corte cinemático.

⁵Parâmetro t em unidades de comprimento de radiação do Be : $L = 352.8mm$. Os parâmetros $\Delta x = \Delta y = 1mm$ equivalem a $\vec{P}_b = (1,1)mm$.

7.3.1 Resultados pelo método do ajuste gaussiano ao espectro sem corte cinemático.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos utilizando-se o método do ajuste gaussiano ao espectro (ver seção 6.4.1), sem a utilização do corte cinemático (seção 6.2). O espectro “característico”⁶, que é a soma de 2501 espectros de 15000 eventos cada, é mostrado na figura 7.7.

Figura 7.7: Espectro característico com ajuste gaussiano sem corte cinemático.

A figura 7.8 mostra a distribuição de erros (ver seção 6.5) obtida utilizando-se os mesmos 2501 espectros.

A figura 7.9 mostra a distribuição das incertezas (ver seção 6.5) nos 2501 espectros analisados. Cada evento é obtido da incerteza do parâmetro $\langle E \rangle$ do respectivo ajuste gaussiano.

A partir das distribuições de erros e de incertezas, os fatores de correção (seção 6.5) $\sigma_{\langle \epsilon \rangle}$, $C = - \langle \epsilon \rangle$ e $\lambda = \sigma_{\epsilon} / \langle \sigma \rangle$ são calculados. Os fatores de correção obtidos no

⁶Esse é o espectro com um número muito maior de dados que o número esperado de eventos Compton detectados.

Figura 7.8: Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano sem corte cinemático obtida utilizando-se 2501 espectros com 15000 eventos cada.

Figura 7.9: Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano sem corte cinemático, que é a incerteza do parâmetro $\langle E \rangle$ de cada um dos 2501 espectros.

caso do ajuste gaussiano sem corte cinemático são mostrados na tabela 7.3.

Fator de correção	Valor
C	$0.50 MeV$
$\sigma_{<\epsilon>}$	$0.03 MeV$
λ	1.01

Tabela 7.3: Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano sem corte cinemático (ver seção 6.5).

A figura 7.10 mostra um dos 2501 espectros analisados.

Figura 7.10: Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano sem corte cinemático.

Para esse espectro, o resultado inicial⁷, bem como o resultado corrigido, são mostrados na tabela 7.4.

⁷Obtido diretamente do ajuste a esse espectro.

Resultado	valor	incerteza
E	5001.0MeV	1.3MeV
E_f	5001.5MeV	1.3MeV

Tabela 7.4: Resultado inicial E e resultado corrigido E_f (eq. 6.8) com respectivas incertezas, para o caso do ajuste gaussiano sem corte cinemático.

7.3.2 Resultados pelo método do ajuste gaussiano ao espectro com corte cinemático.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos utilizando-se o método do ajuste gaussiano ao espectro (ver seção 6.4.1), com a utilização do corte cinemático (seção 6.2). O espectro “característico”, que é a soma de 2501 espectros criados a partir de 15000 eventos cada⁸, é mostrado na figura 7.11. Os dados aqui utilizados são os mesmos utilizados para a construção do espectro no caso anterior (Fig. 7.7).

Figura 7.11: Espectro característico com ajuste gaussiano e corte cinemático.

A figura 7.12 mostra a distribuição de erros obtida utilizando-se os mesmos 2501

⁸Os espectros não têm 15000 entradas pois, devido ao corte cinemático, parte desses eventos é descartada.

espectros.

Figura 7.12: Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano com corte cinemático, obtida utilizando-se 2501 espectros.

A figura 7.13 mostra a distribuição das incertezas nos 2501 espectros analisados. Cada evento é obtido da incerteza do parâmetro $\langle E \rangle$ do respectivo ajuste gaussiano.

A partir das distribuições de erros e de incertezas, os fatores de correção (seção 6.5) $\sigma_{\langle \epsilon \rangle}$, $C = -\langle \epsilon \rangle$ e $\lambda = \sigma_\epsilon / \langle \sigma \rangle$ são calculados. Os fatores de correção obtidos no caso do ajuste gaussiano com corte cinemático são mostrados na tabela 7.5.

Fator de correção	Valor
C	-2.57 MeV
$\sigma_{\langle \epsilon \rangle}$	0.03 MeV
λ	1.01

Tabela 7.5: Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano com corte cinemático (ver seção 6.5).

A figura 7.14 mostra um dos 2501 espectros analisados. Os dados utilizados nesse espectro são os mesmos utilizados na fig. 7.10, permitindo uma comparação direta entre

Figura 7.13: Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano com corte cinemático, que é a incerteza do parâmetro $\langle E \rangle$ de cada um dos 2501 espectros.

os dois resultados, com e sem o corte cinemático.

Figura 7.14: Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano com corte cinemático.

Para esse espectro, o resultado inicial, bem como o resultado corrigido, são mostrados na tabela 7.6.

Resultado	valor	incerteza
E	$5002.7MeV$	$1.3MeV$
E_f	$5000.1MeV$	$1.3MeV$

Tabela 7.6: Resultado inicial E e resultado corrigido E_f (eq. 6.8) com respectivas incertezas, para o caso do ajuste gaussiano com corte cinemático.

7.3.3 Resultados pelo método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro sem corte cinemático.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos utilizando-se o método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro (ver seção 6.4.2), sem a utilização do corte cinemático (seção 6.2). O espectro de resíduos, mostrado na figura 7.15, foi criado a partir do espectro característico com ajuste gaussiano (fig. 7.7), e é utilizado para a obtenção da estimativa para a correção polinomial.

O espectro “característico”, que é a soma de 2501 espectros de 15000 eventos cada, é mostrado na figura 7.16, juntamente com o ajuste gaussiano corrigido.

A figura 7.17 mostra a distribuição de erros obtida utilizando-se os mesmos 2501 espectros.

A figura 7.18 mostra a distribuição das incertezas nos 2501 espectros analisados. Cada evento é obtido da incerteza no máximo da função corrigida $F(E)$ (eq. 6.7) ajustada (ver seção 6.4.2).

A partir das distribuições de erros e de incertezas, os fatores de correção (seção 6.5) $\sigma_{<\epsilon>}$, $C = - <\epsilon>$ e $\lambda = \sigma_{\epsilon}/<\sigma>$ são calculados. Os fatores de correção obtidos no caso do ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático são mostrados na tabela 7.7.

A figura 7.19 mostra um dos 2501 espectros analisados.

Para esse espectro, o resultado inicial, bem como o resultado corrigido, são mostrados na tabela 7.8.

Figura 7.15: Espectro de resíduos sem corte cinemático. A estimativa inicial para a correção polinomial são os parâmetros ajustados p_0 a p_5 . O parâmetro E_m é a média do espectro característico e é fixo.

Figura 7.16: Espectro característico com ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático.

Figura 7.17: Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático, obtida utilizando-se 2501 espectros com 15000 eventos cada.

Figura 7.18: Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático, que é a incerteza no máximo da função corrigida $F(E)$ (eq. 6.7) ajustado a cada um dos 2501 espectros.

Fator de correção	Valor
C	$7.67 MeV$
$\sigma_{<\epsilon>}$	$0.03 MeV$
λ	0.86

Tabela 7.7: Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano corrigido sem corte cinemático (ver seção 6.5).

Figura 7.19: Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático.

Resultado	valor	incerteza
E	$4993.6 MeV$	$1.5 MeV$
E_f	$5001.3 MeV$	$1.3 MeV$

Tabela 7.8: Resultado inicial E e resultado corrigido E_f (eq. 6.8) com respectivas incertezas, para o caso do ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático.

7.3.4 Resultados pelo método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro com corte cinemático.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos utilizando-se o método do ajuste gaussiano corrigido ao espectro (ver seção 6.4.2), nesse caso com a utilização do corte cinemá-

tico (seção 6.2). O espectro de resíduos, mostrado na figura 7.20, foi criado a partir do espectro característico com ajuste gaussiano (fig. 7.11), e é utilizado para a obtenção da estimativa para a correção polinomial.

Figura 7.20: Espectro de resíduos com corte cinemático. A estimativa inicial para a correção polinomial são os parâmetros ajustados p_0 a p_5 . O parâmetro E_m é a média do espectro característico e é fixo.

O espectro “característico”, que é a soma de 2501 espectros, cada um deles criado a partir de 15000 eventos, é mostrado na figura 7.21, juntamente com o ajuste gaussiano corrigido.

A figura 7.22 mostra a distribuição de erros obtida utilizando-se os mesmos 2501 espectros.

A figura 7.23 mostra a distribuição das incertezas nos 2501 espectros analisados. Cada evento é obtido da incerteza no máximo da função corrigida $F(E)$ (eq. 6.7) ajustada (ver seção 6.4.2).

A partir das distribuições de erros e de incertezas, os fatores de correção (seção 6.5) $\sigma_{\langle \epsilon \rangle}$, $C = - \langle \epsilon \rangle$ e $\lambda = \sigma_{\epsilon} / \langle \sigma \rangle$ são calculados. Os fatores de correção obtidos no caso do ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático são mostrados na tabela 7.9.

Figura 7.21: Espectro característico com ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático.

Figura 7.22: Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático, obtida utilizando-se os 2501 espectros estudados.

Figura 7.23: Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático, que é a incerteza no máximo da função corrigida $F(E)$ (eq. 6.7) ajustado a cada um dos 2501 espectros.

Fator de correção	Valor
C	$4.75 MeV$
$\sigma_{<\epsilon>}$	$0.03 MeV$
λ	0.99

Tabela 7.9: Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano corrigido com corte cinemático (ver seção 6.5).

A figura 7.24 mostra um dos 2501 espectros analisados. Vale a pena notar que o espectro tem menos que 15000 eventos, já que parte dos 15000 dados utilizados foi descartada pelo corte cinemático.

Para esse espectro, o resultado inicial, bem como o resultado corrigido, são mostrados na tabela 7.10.

Figura 7.24: Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático.

Resultado	valor	incerteza
E	4996.1MeV	1.4MeV
E_f	5000.8MeV	1.4MeV

Tabela 7.10: Resultado inicial E e resultado corrigido E_f (eq. 6.8) com respectivas incertezas, para o caso do ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático.

7.3.5 Resultados pelo método do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos utilizando-se o método do ajuste da expressão de energia aos ângulos de espalhamento (ver seção 6.4.3), sem a utilização do corte cinemático (seção 6.2). Foram analisados nesse caso apenas 939 jogos de dados, cada um com 15000 eventos Compton. A figura 7.25 mostra a distribuição de erros obtida utilizando-se esses 939 jogos de dados.

A figura 7.26 mostra a distribuição das incertezas nos 939 jogos de dados analisados.

A partir das distribuições de erros e de incertezas, os fatores de correção (seção 6.5)

Figura 7.25: Distribuição de erros para o caso de ajuste da expressão de energia sem corte cinemático, obtida utilizando-se 939 jogos de dados com 15000 eventos cada.

Figura 7.26: Distribuição das incertezas para o caso de ajuste da expressão de energia sem corte cinemático, que é um histograma das incertezas nos 939 ajustes.

$\sigma_{\langle\epsilon\rangle}$, $C = -\langle\epsilon\rangle$ e $\lambda = \sigma_{\epsilon}/\langle\sigma\rangle$ são calculados. Os fatores de correção obtidos no caso do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático são mostrados na tabela 7.11.

Fator de correção	Valor
C	$7.41 MeV$
$\sigma_{\langle\epsilon\rangle}$	$0.04 MeV$
λ	1.28

Tabela 7.11: Fatores de correção obtidos para o caso do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático (ver seção 6.5).

A figura 7.27 mostra um dos 939 jogos de dados analisados.

Figura 7.27: Um dos jogos de dados analisados analisados pelo método do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático.

Para esse jogo de 15000 dados, o resultado inicial, bem como o resultado corrigido, são mostrados na tabela 7.12.

Resultado	valor	incerteza
E	$4990.47 MeV$	$0.94 MeV$
E_f	$4997.9 MeV$	$1.2 MeV$

Tabela 7.12: Resultados inicial E e corrigido E_f (eq. 6.8) e respectivas incertezas para o caso do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático.

7.3.6 Resultados pelo método do ajuste da expressão de energia com corte cinemático.

Os resultados aqui apresentados foram obtidos utilizando-se o método do ajuste da expressão de energia aos ângulos de espalhamento (ver seção 6.4.3), com a utilização do corte cinemático (seção 6.2). Foram analisados nesse caso apenas 939 jogos de dados, cada um criado a partir de 15000 eventos Compton. Cada um desses 939 jogos de dados apresenta menos de 15000 dados, já que parte dos dados foi descartada pelo corte cinemático. A figura 7.28 mostra a distribuição de erros obtida utilizando-se esses 939 jogos de dados.

Figura 7.28: Distribuição de erros para o caso de ajuste da expressão de energia com corte cinemático, obtida utilizando-se 939 jogos de dados criados a partir de 15000 eventos cada.

A figura 7.29 mostra a distribuição das incertezas nos 939 jogos de dados analisados.

Figura 7.29: Distribuição das incertezas para o caso de ajuste da expressão de energia com corte cinemático, que é um histograma das incertezas nos 939 ajustes.

A partir das distribuições de erros e de incertezas, os fatores de correção (seção 6.5) $\sigma_{<\epsilon>}$, $C = -<\epsilon>$ e $\lambda = \sigma_{\epsilon} / <\sigma>$ são calculados. Os fatores de correção obtidos no caso do ajuste da expressão de energia com corte cinemático são mostrados na tabela 7.13.

Fator de correção	Valor
C	$3.18 MeV$
$\sigma_{<\epsilon>}$	$0.04 MeV$
λ	1.26

Tabela 7.13: Fatores de correção obtidos para o caso do ajuste da expressão de energia com corte cinemático (ver seção 6.5).

A figura 7.30 mostra um dos 939 jogos de dados analisados.

Para esse jogo criado a partir de 15000 eventos Compton, o resultado inicial, bem como o resultado corrigido, são mostrados na tabela 7.14.

Figura 7.30: Um dos jogos de dados analisados analisados pelo método do ajuste da expressão de energia com corte cinemático.

Resultado	valor	incerteza
E	$4995.2 MeV$	$1.1 MeV$
E_f	$4998.4 MeV$	$1.3 MeV$

Tabela 7.14: Resultados inicial E e corrigido E_f (eq. 6.8) e respectivas incertezas para o caso do ajuste da expressão de energia com corte cinemático.

Capítulo 8

Comparação entre os resultados e discussão

A tabela 8.1 mostra os resultados obtidos pelos vários métodos, onde $\langle \epsilon \rangle$ é o erro médio, σ_ϵ é a largura da gaussiana ajustada à distribuição de erros (ver seção 6.5) e E_f (eq. 6.8) é o resultado final para um jogo de dados analisado. Como o jogo de 15000 dados utilizado para obter E_f é o mesmo em todos os casos, podemos fazer uma comparação direta entre os resultados. Vale a pena notar também que como $\epsilon = E - E_0$, e $E_0 = 5000$ é fixo, a distribuição de erros é a própria distribuição de resultados E , apenas deslocada de E_0 para a esquerda. Desse modo σ_ϵ representa também a largura da distribuição de resultados E , e é uma boa medida da incerteza estatística nos valores obtidos de E .

Método		$\langle \epsilon \rangle = -C$	σ_ϵ	$E_f = E - \langle \epsilon \rangle$
gaussiano	sem corte	$-0.50(3)MeV$	$1.29(2)MeV$	$5001.5(13)MeV$
	com corte	$2.57(3)MeV$	$1.34(2)MeV$	$5000.1(13)MeV$
gaussiano corrigido	sem corte	$-7.67(3)MeV$	$1.33(2)MeV$	$5001.3(13)MeV$
	com corte	$-4.75(3)MeV$	$1.35(2)MeV$	$5000.8(14)MeV$
expressão da energia	sem corte	$-7.41(4)MeV$	$1.21(3)MeV$	$4997.9(12)MeV$
	com corte	$-3.18(4)MeV$	$1.32(3)MeV$	$4998.4(13)MeV$

Tabela 8.1: Tabela comparativa dos resultados.

Todos os resultados finais E_f , para o mesmo jogo de dados analisado em todos os casos, são compatíveis com o valor real E_0 dentro de no máximo 1.6σ .

Pode-se notar que a aplicação do corte cinemático desloca o erro médio $\langle \epsilon \rangle$ para valores maiores¹ em todos os casos, isto é, os resultados obtidos com corte cinemático são em média maiores que os obtidos sem a aplicação do corte. Isso pode ser explicado pelo efeito da aplicação do corte cinemático no erro sistemático nas medidas angulares, como discutido na seção 6.1.1. Esse erro é maior na região central do detetor, ou seja, é maior para ângulos pequenos. Como o corte cinemático descarta medidas angulares menores que um certo valor, ele diminui esse erro sistemático. Nos casos onde não foi aplicado o corte cinemático, esse é o efeito sistemático preponderante, já que todos os valores de $\langle \epsilon \rangle$ são negativos, ou seja, os valores de E obtidos são, em média, menores que o valor “real” de E_0 . A tabela 8.2 mostra a variação de $\langle \epsilon \rangle$ devido à aplicação do corte cinemático em todos os métodos. Verifica-se que os valores de $\Delta \langle \epsilon \rangle$ para os dois métodos gaussianos, que utilizam o espectro de energia (ver seção 6.4), são compatíveis dentro de 2σ .

Método	$\Delta \langle \epsilon \rangle$
Gaussiano	$3.07(4)MeV$
Gaussiano corrigido	$2.92(4)MeV$
expressão de energia	$4.23(6)MeV$

Tabela 8.2: Variação $\Delta \langle \epsilon \rangle$ dos valores de $\langle \epsilon \rangle$ devido à aplicação do corte cinemático para todos os métodos.

Outro efeito da aplicação do corte cinemático, que pode ser observado na tabela 8.1, é o aumento da largura σ_ϵ da distribuição dos erros ϵ , que é a incerteza estatística em cada medida E . Desse modo, a aplicação do corte cinemático aumenta a incerteza nas medidas de E , como discutido na seção 6.6. Desse modo, a aplicação do corte cinemático por um lado é positiva, diminuindo o efeito do erro sistemático nas medidas angulares, que tende a diminuir o valor de E obtido; e por outro lado negativa, já que aumenta a incerteza nos valores de E , pois diminui o número de eventos utilizáveis na análise.

¹Mas não necessariamente maiores em módulo.

O efeito da outra fonte importante de erros sistemáticos no experimento, que se deve à assimetria inerente ao espectro de energias reconstruídas (seção 6.3.1), tende a aumentar as medidas de E , e se contrapõe ao erro devido a medidas angulares, que tende a diminuí-las. Esse efeito pode ser claramente observado no caso da análise gaussiana (ver figura 7.7), devido ao visível deslocamento da gaussiana em relação ao espectro. Nesse método, o erro sistemático devido à assimetria do espectro passa a dominar quando aplicamos o corte cinemático, o que pode ser observado pelo valor positivo de $\langle \epsilon \rangle$ na tabela 8.1. Nos outros métodos de análise, construídos de forma a minimizar ou eliminar esse efeito da assimetria do espectro, verifica-se que $\langle \epsilon \rangle$, mesmo com a aplicação do corte cinemático, é sempre negativo, mostrando a preponderância do efeito dos erros sistemáticos nas medidas angulares sobre o da assimetria do espectro.

O apêndice A mostra alguns resultados utilizando uma distribuição para as energias dos fótons do feixe ao redor de E_0 . Com a inclusão dessa distribuição ($\sigma_{k_1} = 25 \text{ MeV}$), há um pequeno aumento na incerteza das medidas de E , da ordem de 0.8% no caso dos métodos gaussianos. Esse aumento em σ_ϵ não altera significativamente nossos resultados, já que é da mesma ordem de grandeza da incerteza em σ_ϵ .

É claro que se modificarmos as características do arranjo experimental, podemos obter pesos diferentes para os principais efeitos sistemáticos, além de novos fatores de correção. Esses resultados apresentados são exemplos apenas. Devemos em cada caso específico utilizar a simulação para estimar os erros sistemáticos e obter as correções necessárias, aplicáveis aos dados “reais” de um experimento. Vale notar também que o procedimento de análise dos dados “reais” deve ser estritamente o mesmo² aplicado aos dados da simulação.

A utilização da simulação também permite comparar os métodos de análise, permitindo a escolha do método mais adequado em determinada situação. Essa escolha pode ser baseada, por exemplo, no tamanho do fator de correção calculado ou na precisão estimada para cada método.

²Por exemplo, através da utilização de um mesmo programa de análise.

Os resultados mostram que é possível obter uma medida para a energia dos fótons incidentes com uma incerteza relativa $\frac{\sigma_E}{E}$ da ordem de 0.03%, o que equivale a uma precisão $\frac{\Delta_E}{E}$ (FWHM³) da ordem de 0.07%, caso a simulação seja utilizada para analisar os erros sistemáticos e criar fatores de correção.

³*Full width at half maximum*, onde $\Delta_E \cong 2.355 \sigma_E$

Capítulo 9

Conclusão

Foi desenvolvida uma simulação original em FORTRAN-77, utilizando métodos Monte Carlo, capaz de simular arranjos experimentais que utilizam o espalhamento Compton para obter medidas absolutas da energia de fótons. Essa simulação leva em conta efeitos físicos e geométricos, como o momento interno dos elétrons nos átomos do alvo, espalhamento múltiplo de elétrons no alvo, a resolução espacial e posição do detetor, desalinhamentos entre feixe e detetor e distribuição de intensidades (forma) do feixe. A simulação utiliza uma pequena biblioteca chamada *Likhalib*, também original, com subrotinas e funções úteis¹ em simulações Monte Carlo.

Com o auxílio dessa simulação foram encontradas duas fontes de erros sistemáticos inerentes ao método. Um deles é o erro sistemático nas medidas angulares, proveniente principalmente da resolução espacial do detetor, que tende a gerar medidas de energia E menores que o valor verdadeiro. O outro é o erro sistemático na medida de energia devido à assimetria do espectro de energias reconstruídas, que tende a gerar medidas de energia E maiores que o valor verdadeiro.

Com o intuito de diminuir o efeito do erros sistemáticos na medida de energia devido à assimetria do espectro de energias reconstruídas, foram desenvolvidos métodos de análise que minimizam esse efeito. Foram também elaborados métodos que utilizam a

¹Algumas funções ainda são muito específicas a essa simulação, mas podem ser facilmente generalizadas para utilização em outros problemas.

simulação para quantificar os efeitos devido a erros sistemáticos, criando assim fatores de correção para experimentos que utilizam o espalhamento Compton para obter medidas da energia de fótons.

Utilizando essas ferramentas, foi possível verificar a aplicabilidade da utilização do espalhamento Compton para obter medidas absolutas da energia de fótons marcados. No caso específico do arranjo experimental analisado como exemplo, o da calibração Compton da energia do feixe do Hall b do *Jlab* no experimento *PrimEx*, acreditamos que é possível obter uma medida de energia com uma precisão (FWHM) da ordem de 0.07%.

Referências Bibliográficas

- [1] *The Primakoff Experiment at Jefferson Lab*, <http://www.jlab.org/primex/>
- [2] L. Gan et. al. *Forward Electron Compton Scattering and Absolute Energy Calibration of the Tagged Photon Beam in Hall B (Letter of Intent)*, http://www.jlab.org/primex/documents/2002_05_05/compton_loi.ps, (2002)
- [3] A. H. Compton, *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, Phys. Rev., 21, 483 (1923)
- [4] O. Klein, Y. Nishina, Z. Phys., 52, 853 (1929).
- [5] I. Tamm, Z. Phys., 62, 545 (1930).
- [6] Y.F. Chen, C.M. Kwei, C.J. Tung *Analytic functions for atomic momentum-density distributions and Compton profiles of K and L shells*, Physical Review A, Volume 47, Number 5, (1993)
- [7] Bruno Rossi *High-Energy Particles* Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs,N.J.,1952
- [8] V. L. Highland *Some practical remarks on multiple scattering* Nucl. Instr. and Meth. 129 (1975) 497-499
- [9] G. R. Lynch, O. I. Dahl *Approximations to multiple Coulomb scattering*, Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B58, (1991) 6-10
- [10] R. M. Barnett et al., *Review of particle properties*, Phys.Rev. D54, 1 (1996)

- [11] M. E. Hehl *Linguagem de programação estruturada FORTRAN 77*, McGraw-Hill, São Paulo, 1986.
- [12] B. Stroustrup *The C++ Programming Language*, Addison-Wesley publishing Company, Reading, MA, 3rd edition, 1997
- [13] *ROOT System - An Object-Oriented Data Analysis Framework*, <http://root.cern.ch/>
- [14] M. Matsumoto and T. Nishimura, *Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator*, ACM Trans. on modelling and Computer Simulations, Vol 8, No 1, pp.3-30, January 1998.
- [15] S. Friedberg, A. Insel *Introduction to linear algebra with applications* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1986
- [16] H. Goldstein *Classical Mechanics* Addison-Wesley Publishing Company, 2a edição, Reading - Massachusetts, 1980
- [17] B.J.T. Morgan, *Elements of Simulation*, Chapman and Hall, London, 1984
- [18] M. H. Kalos, P. A. Whitlock *Monte Carlo Methods - vol.1* John Wiley & sons, New York, 1986
- [19] D. E. Knuth *The art of computer programing - Seminumerical Algorithms - Vol 2* Addison-Wesley Publishing Company, Reading - Massachusetts, 1969
- [20] A. F. Bielajew *Fundamentals of the Monte Carlo Method for Neutral and Charged Particle Transport²*, The University of Michigan, 1998.
- [21] F. B. Larkins, At. Data and Nucl. Data tables 20, 313 (1977)

²Disponível em <http://www-personal.engin.umich.edu/~bielajew/MCBook/book.pdf>

- [22] Readiness Review Documentation for E-02-103 - A Precision Measurement of the Neutral Pion Lifetime via the Primakoff Effect:
http://www.jlab.org/primex/documents/2003_11_20/readiness_report.pdf
- [23] G. F. Knoll *Radiation Detection and Measurement* John Wiley & sons, 2a edição, New York, 1989.
- [24] W. Heitler *The Quantum Theory of Radiation* Dover Publications, Inc., 3a edição, London, 1984
- [25] H. Bethe *On the stopping of fast particles and on the creation of positive electrons*, Proc. Roy. Soc. London A146, 83-112 (1934)
- [26] O. Helene, V. Vanin, *Tratamento estatístico de dados em física experimental*, Edgard Blucher, 2a edição, São Paulo, 1991
- [27] *GEANT - Detector Description and Simulation Tool*,
<http://wwwasd.web.cern.ch/wwwasd/geant/>
- [28] G. E. P. Box, M. E. Muller *A note on the generation of random normal deviates*, Annals Math. Stat, V. 29, pp. (1958) 610-611
- [29] M. Ram, P. Y. Wang, Phys. Rev. Lett., *Calculation of the Total Cross Section for Double Compton Scattering*, 26, 476 (1971).
- [30] M. Ram, P. Y. Wang, Phys. Rev. Lett., *ERRATA* 26, 1210 (E) (1971).
- [31] K. Mork, H. Olsen, *Radiative Corrections I. High-Energy Bremsstrahlung and Pair Production* Phys. Rev, 140, B1661 (1965)
- [32] K. J. Mork, Phys. Rev., *Radiative Corrections II. Compton Effect* A4, 917 (1971).
- [33] F. Mandl, T. H. R. Skyrme, *The theory of the double Compton effect*, Proc. Roy. Soc., Ser. A 215, 497 (1952)

- [34] L. M. Brown, R. P. Feynman, *Radiative Corrections to Compton Scattering*, Phys. Rev. 85, 231 (1952)
- [35] R. J. Gould, *Soft-photon emission effects and radiative corrections for electromagnetic processes at very high energies*, Astrophys. J. 230, 967 (1979)
- [36] A. T. Goshaw et al., *Compton electron scattering in the 0.1 to 5.0 GeV energy range*, Phys. Rev. D18, 1351,(1978)
- [37] I. Sobol *O método de Monte Carlo* Editora Mir, Moscou, 1983

Apêndice A

Alguns resultados com um feixe não monocromático

Como descrito na seção 5.3.1, a simulação pode utilizar uma distribuição para a energia dos fótons do feixe, ao invés de um feixe monocromático. A inclusão dessa distribuição, como esperado, causa um pequeno aumento nas incertezas das medidas de E . Segundo [2], a incerteza na energia dentro do bin do *photon tagger* utilizado no experimento *PrimEx* é de $\sim 1\%$. Tomando essa incerteza como FWHM, e assumindo uma distribuição gaussiana para a distribuição de energia dentro do bin, para $E = 5\text{GeV}$ teríamos uma gaussiana com $\sigma_{k_1} \cong 25\text{MeV}$.

A tabela A.1 mostra os resultados obtidos para a largura σ_ϵ da distribuição de erros, que é a melhor medida das incertezas em E de cada um dos 2501 espectros analisados. Os parâmetros de entrada utilizados, com exceção dos desvios-padrão $\sigma_{k_1} \neq 0$ da distribuição de energia no bin do *photon tagger*, são os mesmos utilizados para a obtenção dos resultados apresentados na seção 7.3.

Pode-se observar que um aumento na largura da distribuição de energia dos fótons do feixe aumenta ligeiramente a incerteza das medidas de E . Esse aumento, no caso de uma distribuição compatível com a incerteza do *photon tagger* utilizado no experimento *PrimEx* ($\sigma_{k_1} = 25\text{MeV}$), é de $\sim 0.8\%$ no caso dos métodos gaussianos e $\sim 3\%$ para

largura σ_{k_1}		$\sigma_{k_1} = 0$		$\sigma_{k_1} = 25MeV$		$\sigma_{k_1} = 50MeV$	
Método		$\langle \epsilon \rangle$	σ_ϵ	$\langle \epsilon \rangle$	σ_ϵ	$\langle \epsilon \rangle$	σ_ϵ
gaussiano	s/ corte	-0.50(3)	1.29(2)	-0.34(3)	1.30(2)	-0.24(3)	1.37(2)
	c/ corte	2.57(3)	1.34(2)	2.67(3)	1.35(2)	2.86(3)	1.42(2)
gaus. corr.	s/ corte	-7.67(3)	1.33(2)	-7.81(3)	1.33(2)	-8.31(3)	1.40(2)
	c/ corte	-4.75(3)	1.35(2)	-4.79(3)	1.36(2)	-4.87(3)	1.44(2)
expr. energia	s/ corte	-7.41(4)	1.21(3)	-7.50(4)	1.25(3)	-7.71(4)	1.29(3)
	c/ corte	-3.18(4)	1.32(3)	-3.24(4)	1.37(3)	-3.29(4)	1.41(3)

Tabela A.1: Resultados de $\langle \epsilon \rangle$ e σ_ϵ obtidos para um feixe com $\sigma_{k_1} = 0, 25$ e $50MeV$. Todos resultados em MeV .

o método do ajuste da expressão de energia. Esses aumentos são da mesma ordem de grandeza da incerteza em σ_ϵ .

A tabela A.2 mostra os resultados obtidos para a distribuição de erros, com respectivas incertezas, para uma largura $\sigma_{k_1} = 25MeV$ da distribuição de energia dos fótons do feixe para energias E_0 de 4990, 5000 e 5010 MeV.

Energia E_0		$E_0 = 4990MeV$		$E_0 = 5000MeV$		$E_0 = 5010MeV$	
Método		$\langle \epsilon \rangle$	σ_ϵ	$\langle \epsilon \rangle$	σ_ϵ	$\langle \epsilon \rangle$	σ_ϵ
gaussiano	s/ corte	-0.31(3)	1.30(2)	-0.34(3)	1.30(2)	-0.37(3)	1.32(2)
	c/ corte	2.74(3)	1.35(2)	2.67(3)	1.35(2)	2.59(3)	1.35(2)
gaussiano corrigido	s/ corte	-7.78(3)	1.33(2)	-7.81(3)	1.33(2)	-7.85(3)	1.35(2)
	c/ corte	-4.82(3)	1.36(2)	-4.79(3)	1.36(2)	-4.76(3)	1.37(2)

Tabela A.2: Resultados de $\langle \epsilon \rangle$ e σ_ϵ obtidos para um feixe não monocromático com $\sigma_{k_1} = 25MeV$ e energias E_0 de 4990, 5000 e 5010MeV. Todos resultados em MeV .

Pode-se observar que para uma mesma largura da distribuição de energia dos fótons do feixe e uma variação pequena (0.4%) na média E_0 dessa energia, não há uma variação significativa de σ_ϵ . Nota-se também que a variação no erro¹ médio $\langle \epsilon \rangle$ é muito menor que a variação da energia E_0 , mostrando que é possível diferenciar as várias energias E_0 .

¹Lembramos que a distribuição de ϵ é a própria distribuição dos resultados E , apenas deslocada de E_0 para a esquerda.

Apêndice B

Dedução da expressão 2.2 de energia

Partindo da equação do comprimento de onda Compton:

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta_\gamma) \quad ,$$

temos:

$$\lambda = \frac{ch}{E} \Rightarrow ch \left(\frac{1}{E} - \frac{1}{E_0} \right) = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta_\gamma) \Rightarrow \frac{1}{E} = \frac{(1 - \cos \theta_\gamma)}{m_e c^2} + \frac{1}{E_0} \Rightarrow$$

$$\frac{E_0}{E} = \alpha (1 - \cos \theta_\gamma) + 1 \quad \alpha = \frac{E_0}{m_e c^2}$$

Figura B.1: Diagrama de momentos do espalhamento Compton, no caso do elétron livre e em repouso.

Do diagrama de momentos B.1, temos:

$$p_e \sin \theta_e = k_2 \sin \theta_\gamma$$

$$p_e \cos \theta_e = k_1 - k_2 \cos \theta_\gamma$$

logo:

$$\tan \theta_e = \frac{k_2 \sin \theta_\gamma}{k_1 - k_2 \cos \theta_\gamma} \Rightarrow \cot \theta_e = \frac{k_1/k_2 - \cos \theta_\gamma}{\sin \theta_\gamma} = \frac{[1 + \alpha (1 - \cos \theta_\gamma)] - \cos \theta_\gamma}{\sin \theta_\gamma} =$$

$$= \frac{(1 + \alpha) (1 - \cos \theta_\gamma)}{\sin \theta_\gamma} = (1 + \alpha) \frac{2 \sin^2 (\theta_\gamma/2)}{\sin \theta_\gamma} = (1 + \alpha) \frac{2 \sin^2 (\theta_\gamma/2)}{2 \sin (\theta_\gamma/2) \cos (\theta_\gamma/2)} \Rightarrow$$

$$\cot \theta_e = (1 + \alpha) \tan (\theta_\gamma/2) \Rightarrow \alpha = \cot \theta_e \cot (\theta_\gamma/2) - 1 \Rightarrow$$

$$E_0(\theta_\gamma, \theta_e) = m_e c^2 \left(\cot \frac{\theta_\gamma}{2} \cot \theta_e - 1 \right)$$

Apêndice C

A pequena biblioteca *Likhalib*

A *Likhalib*, uma pequena biblioteca de funções e subrotinas muito úteis na criação de simulações Monte Carlo, está sendo desenvolvida. O nome *Likhalib* é uma homenagem a Vladimir Likhachev, meu orientador, falecido em fevereiro de 2004.

Nesse apêndice descrevemos apenas algumas das subrotinas dessa biblioteca que foram utilizadas na simulação. Algumas dessas subrotinas, ainda muito específicas aos problemas da simulação descrita nesse trabalho, estão sendo generalizadas para utilização em casos mais gerais.

C.1 Função *Boxmuller*

Amostra uma distribuição gaussiana, usando o algoritmo *Polar-Marsaglia*, uma variante do algoritmo *Box-muller* (ver apêndice D).

entrada:

- σ - Desvio-padrão da distribuição gaussiana.
- mean - Média da distribuição gaussiana.

saída:

- *boxmuller* - valor amostrado.

C.2 Subrotina carttospher

Transforma uma direção dada por um vetor em coordenadas cartesianas em uma direção em coordenadas esféricas.

entrada:

- $\vec{v}$ - vetor cartesiano.

saída:

- θ, φ - Direção em coordenadas esféricas.

C.3 Subrotina sphertocart

Transforma uma direção em coordenadas esféricas em um vetor cartesiano unitário.

entrada:

- θ, φ - Direção em coordenadas esféricas.

saída:

- $\vec{v}$ - vetor cartesiano unitário.

C.4 Subrotina subgenisotropic

Gera uma direção isotrópica, dentro da região definida por um ângulo polar na região $[0, \theta_{max}]$, usando o método descrito no apêndice D.

entrada:

- θ_{max} - ângulo polar máximo.

saída:

- θ, φ - direção isotrópica.

C.5 Subrotina rotate

Transforma um vetor cartesiano de um sistema de coordenadas para outro, utilizando a matriz de rotação 5.1.

entrada:

- $\vec{v}_i$ - vetor cartesiano no sistema de coordenadas inicial.
- θ - ângulo entre os eixos Z dos dois sistemas.
- φ - ângulo entre os eixos Y dos dois sistemas.

saída:

- $\vec{v}_f$ - vetor cartesiano no sistema de coordenadas final.

C.6 Subrotina multscatt

Calcula o efeito do espalhamento múltiplo de elétrons de acordo com uma distribuição gaussiana dos ângulos de espalhamento no sistema do elétron e transforma a direção final do elétron para o sistema do laboratório.

entrada:

- σ_{scat} - desvio-padrão da distribuição dos ângulos de espalhamento¹.
- $\vec{p}_e$ - direção inicial do elétron no sistema do laboratório.

saída:

- $\vec{p}_{ef}$ - direção final do elétron no sistema do laboratório.

¹calculado a partir da expressão de *Rossi-Greisner* (eq. 3.2), ou de *Highland* (eq. 3.3).

C.7 função knint

Integra a seção de choque diferencial *Klein-Nishina* no ângulo sólido definido pelo intervalo $[\theta_{min}, \theta_{max}]$ e $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, pelo método direto de integração Monte Carlo[17, 20].

entrada:

- θ_{min} - ângulo polar mínimo.
- θ_{max} - ângulo polar máximo.
- E - energia do fóton incidente.
- N_{mc} - número de amostragens Monte Carlo.

saída:

- I_{kn} - Integral: $\int_0^{2\pi} \int_{\theta_{min}}^{\theta_{max}} \frac{d\sigma}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\varphi$.

C.8 subrotina genhycaldetpoint

Gera leitura de posição no detetor *HyCal*, segundo suas características.

entrada:

- $\vec{p}_0$ - Ponto “real” de incidência.
- E - Energia da partícula incidente.
- d - distância entre origem e detetor (opcional)².

saída:

- $\vec{p}_{det}$ - Leitura de posição.

²Caso d seja fornecido, a saída será um vetor tridimensional que descreve o ponto detectado em relação a origem.

Apêndice D

Descrição de alguns métodos Monte Carlo utilizados na simulação

A seguir descrevemos sucintamente alguns dos métodos Monte Carlo utilizados na simulação.

D.1 Algoritmo de *Box-Müller* e sua variante *Polar-Marsaglia*

O conhecido algoritmo de *Box-Müller* [28] é um método para a amostragem de distribuições gaussianas. Dados dois números aleatórios ξ_1 e ξ_2 entre 0 e 1, obtemos duas amostragens x_1 e x_2 de uma distribuição gaussiana de desvio-padrão σ e média x_0 :

$$x_1 = x_0 + \sigma \sqrt{-2 \ln \xi_1} \cos(2\pi \xi_2) \quad ,$$

$$x_2 = x_0 + \sigma \sqrt{-2 \ln \xi_1} \sin(2\pi \xi_2) \quad .$$

Uma variante desse método, muito mais eficiente do ponto de vista computacional, é o método *Polar-Marsaglia*, que basicamente resolve geometricamente a parte trigonométrica do algoritmo de *Box-Müller*:

1. $v_1 = 2\xi_1 - 1$

$$v_2 = 2\xi_2 - 1$$

$$w = v_1^2 + v_2^2$$

2. se $w \leq 1$ aceito w , senão volto para 1.

3. $x_1 = x_0 + \sigma v_1 \sqrt{\frac{-2 \ln w}{w}}$

$$x_2 = x_0 + \sigma v_2 \sqrt{\frac{-2 \ln w}{w}}$$

Esse foi o método implementado na função *boxmuller* da *Likhalib* (apêndice C).

D.2 Método de *Neumann* ou método da rejeição para amostragem de distribuições

Esse é um dos mais simples métodos Monte Carlo de amostragem de distribuições. Para amostrar valores de x de uma função densidade de probabilidade (FDP) $f(x)$ com máximo f_{max} no intervalo $a \leq x \leq b$ utilizam-se dois números (pseudo) aleatórios ξ_1 e ξ_2 entre 0 e 1:

1. $A = a + \xi_1(b - a)$

$$filtro = \xi_2 f_{max}$$

2. Se $filtro \leq f(A)$ aceito A como valor amostrado, senão volto para 1.

A eficiência ϵ desse método é a razão entre a integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ e a área do retângulo de lados f_{max} e $(b - a)$:

$$\epsilon = \frac{\int_a^b f(x) dx}{f_{max}(b - a)}$$

Caso seja difícil encontrar o máximo f_{max} da FDP no intervalo, podemos utilizar um majorante $M > f_{max}$, porém diminuiremos a eficiência do método.

D.3 Método da inversão para amostragem de distribuições

Esse método é mais eficiente que o método da rejeição, porém implica na inversão de uma distribuição cumulativa, o que pode ser extremamente difícil analiticamente ou caro computacionalmente, caso se utilize métodos numéricos para efetuar essa inversão. Dada uma FDP normalizada no intervalo $[a, b]$, a função distribuição cumulativa de $f(x)$ é

$$c(x) = \int_a^x f(x') dx' \quad .$$

Dado um número (pseudo) aleatório ξ , podemos obter uma amostra A da distribuição da seguinte forma:

$$A = c^{-1}(\xi) \quad ,$$

onde $c^{-1}(x)$ é a inversa da distribuição cumulativa $c(x)$ de $f(x)$.

D.4 Geração de direções isotrópicas

Esse é um exemplo da aplicação do método da inversão e é o método utilizado na subrotina subgenisotropic da *Likhalib* (apêndice C). Gerar uma direção isotrópica é gerar um ponto Ω sobre uma superfície esférica unitária, onde Ω é uniformemente distribuído sobre essa superfície[37]. A direção isotrópica é dada então pelo vetor que liga a origem a Ω . Desse modo, a probabilidade de Ω se encontrar em um elemento de área dS é $\frac{dS}{4\pi}$. Em coordenadas esféricas temos então:

$$P(\theta, \phi) d\theta d\phi = \frac{dS}{4\pi} \Rightarrow P(\theta, \phi) = \frac{\sin\theta}{4\pi}$$

Dessa distribuição bidimensional obtemos duas unidimensionais independentes, por integração:

$$p_{\theta}(\theta) = \int_0^{2\pi} P(\theta, \phi) d\phi = \frac{\sin \theta}{2}$$

$$p_{\phi}(\phi) = \int_0^{\pi} P(\theta, \phi) d\theta = \frac{1}{2\pi}$$

Desse modo, a partir de dois números (pseudo) aleatórios ξ_1 e ξ_2 , obtemos as amostras A_{θ} e A_{ϕ} , pelo método da inversão:

$$c(\phi) = \int_0^{\phi} \frac{1}{2\pi} d\phi' = \frac{\phi}{2\pi} \Rightarrow A_{\phi} = 2\pi\xi_1$$

$$c(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\sin \theta}{2} d\theta' = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta) \Rightarrow A_{\theta} = \arccos(1 - 2\xi_2)$$

Apêndice E

Algumas sugestões para a continuação desse trabalho

E.1 Correções radiativas e Compton duplo

A seção de choque *Klein-Nishina* leva em conta apenas os diagramas de ordem mais baixa para o espalhamento Compton. Para energias mais altas, a contribuição de diagramas de segunda ordem no espalhamento Compton também aumenta. Podemos separar esses diagramas em dois grupos: correções radiativas, com apenas um fóton no estado final, e espalhamento Compton duplo, com dois fótons no estado final. A figura E.1 mostra um exemplo de cada tipo desses diagramas.

Interferência entre os diagramas de primeira e segunda ordem alteram a seção de

Figura E.1: Diagramas de Feynman de segunda ordem para o efeito Compton: (a) Compton duplo. (b) Correções radiativas.

choque diferencial de *Klein-Nishina*. Essas correções, seguindo o tipo do diagrama de segunda ordem, podem ser divididas em correções radiativas e correções devido a Compton duplo. O efeito das correções radiativas diminui a seção de choque total, enquanto que o efeito da correção devido a Compton duplo a aumenta. Algumas referências interessantes sobre essas correções são [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35].

A seção de choque para o espalhamento Compton duplo diverge quando a energia de um dos fótons no estado final tende a zero, levando a uma catástrofe do infra-vermelho [34, 33]. Essa divergência é compensada por outra divergência similar nas correções radiativas, desse modo esses dois processos são inseparáveis, já que cada uma das seções de choque, separadamente, não tem sentido físico. Como esses efeitos são inseparáveis, as correções se cancelam em grande parte, levando a pequenas variações de alguns pontos percentuais na seção de choque total para o espalhamento Compton [36, 35].

Do ponto de vista de experimentos que utilizam o método descrito nesse trabalho, uma alteração na seção de choque total do processo Compton não é tão relevante, especialmente por ser uma alteração pequena, e o seu efeito na simulação alteraria apenas o número de eventos detectados. Muito mais relevante é a alteração na seção de choque diferencial.

Como vimos, nossa simulação utiliza a seção de choque diferencial para gerar ângulos de espalhamento θ_γ . A partir desse ângulo, e da cinemática do espalhamento Compton simples, incluindo o momento inicial do elétron, o ângulo de espalhamento do elétron é calculado. Correções radiativas podem alterar a distribuição de θ_γ , porém a relação entre θ_γ e θ_e continua válida, dentro da aproximação de impulso. Desse modo o principal efeito da correção radiativa seria o de alterar o “peso” das regiões do detetor, pois altera θ_γ . Por outro lado, o espalhamento Compton duplo, com dois fótons no estado final, alteraria também a relação entre os ângulos θ_γ e θ_e e conseqüentemente a medida de energia, já que a cinemática utilizada na simulação já não seria válida.

A seção de choque para o espalhamento Compton duplo, como discutido anteriormente, é muito grande na região onde um dos fótons no estado final tem energia muito

baixa. Podemos pensar nesse segundo fóton de baixíssima energia como um “vazamento” de energia e momento na cinemática onde temos apenas um fóton no estado final. Dessa maneira, quando a energia desse segundo fóton for extremamente baixa, o efeito devido ao espalhamento Compton duplo na relação entre os ângulos de espalhamento é também extremamente pequena, causando apenas uma alteração desprezível na medida de energia. Quando a energia do segundo fóton não for desprezível em relação a energia do primeiro fóton, o que é menos provável segundo a seção de choque, esse evento específico é descartado pelos filtros cinemáticos (seção 5.1). O maior problema é quando a energia desse segundo fóton é grande o suficiente para causar uma alteração significativa na relação entre os ângulos de espalhamento, alterando a energia medida, porém é pequeno o suficiente para não ser descartado pelos filtros cinemáticos. Desse modo seria interessante saber exatamente qual é essa região de energia do segundo fóton que causa uma alteração na medida da energia porém não pode ser descartado pelos filtros (o que depende do arranjo experimental, principalmente da resolução em energia do detetor), e conhecer a seção de choque diferencial para o Compton duplo nessa região. Assim esse segundo fóton poderia ser simulado e seu efeito na medida de energia incluído.

De qualquer maneira acreditamos que esse efeito é muito pequeno, e a inclusão dessas correções aumentaria muito a complexidade da simulação, já que as seções de choque envolvidas são de cálculo extremamente difícil.

E.2 Estrutura do alvo

Como vimos na seção 5.6.3, a geração do momento inicial do elétron é baseado na distribuição de momentos dos elétrons nos átomos do material do alvo. Não foi levada em conta a probabilidade do espalhamento ocorrer em um elétron da banda de condução, que tem uma distribuição de momentos dependente da temperatura do alvo. Vimos também que a direção de $\vec{p}_{in}$ foi gerada isotropicamente, descartando qualquer anisotropia devido à estrutura cristalina do material do alvo. Também acreditamos que esses efeitos devam

ser pequenos, porém uma investigação nessa área pode provar ser também interessante.

Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros A_{ij} e ξ_{ij} da eq. 3.1, referentes ao Be	29
5.1	Parâmetros de entrada e resultados para a estimativa do número de eventos detectados.	61
7.1	Parâmetros ajustados das figuras 7.5 e 7.6 e respectivas incertezas.	99
7.2	Parâmetros de entrada utilizados na simulação.	101
7.3	Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano sem corte cinemático .	104
7.4	Resultados para o caso do ajuste gaussiano	105
7.5	Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano com corte cinemático .	106
7.6	Resultados para o caso do ajuste gaussiano com corte cinemático	108
7.7	Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano corrigido sem corte cinemático	111
7.8	Resultados para o caso do ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático	111
7.9	Fatores de correção obtidos para o caso gaussiano corrigido com corte cinemático	114
7.10	Resultados para o caso do ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático	115
7.11	Fatores de correção obtidos para o caso do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático	117
7.12	Resultados para o caso do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático	118

7.13	Fatores de correção obtidos para o caso do ajuste da expressão de energia com corte cinemático	119
7.14	Resultados para o caso do ajuste da expressão de energia com corte cinemático	120
8.1	Tabela comparativa dos resultados.	121
8.2	Variação $\Delta < \epsilon >$ dos valores de $< \epsilon >$ devido à aplicação do corte cinemático para todos os métodos.	122
A.1	Resultados de $< \epsilon >$ e σ_ϵ obtidos para um feixe não monocromático. . . .	132
A.2	Resultados de $< \epsilon >$ e σ_ϵ obtidos para um feixe não monocromático com $\sigma_{k1} = 25MeV$ e energias E_0 de 4990, 5000 e 5010MeV. Todos resultados em MeV.	132

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de Feynman de primeira ordem para o efeito Compton.	23
2.2	Diagrama de momentos do espalhamento Compton, no caso do elétron livre e em repouso.	24
2.3	Gráfico de θ_e em função de θ_γ para uma energia $E_0 = 5GeV$ do fóton incidente.	25
2.4	Gráfico da seção de choque diferencial de Klein-Nishina em função do ângulo de espalhamento θ_γ para uma energia $E_\gamma = 5GeV$	26
2.5	Esquema simplificado do arranjo experimental.	26
5.1	Esquema simplificado do arranjo experimental	39
5.2	Esquema geométrico dos passos que compõem a história para o fóton incidente.	40
5.3	Parâmetros $\hat{k}_1$ e P_b que descrevem desalinhamentos entre o feixe e o eixo de simetria experimental	42
5.4	Gráficos dos pontos P_{ea} gerados.	45
5.5	Diagrama de momentos para o espalhamento Compton em aproximação de impulso.	47
5.6	Histograma dos valores amostrados para $\theta_{\gamma B}$	50
5.7	Histograma dos valores amostrados para p_{in}	51
5.8	Espectros de energia do fóton espalhado e do elétron	52
5.9	Comprimento t_{eff} da trajetória do elétron dentro do alvo.	53
5.10	Histogramas de t_{eff} , σ_{scat} e θ_{scat}	54

5.11 Foto do detetor <i>HyCal</i>	55
5.12 Pontos $P_{\gamma_{det}}$ e $P_{e_{det}}$ sem corte de aceitância do detetor	58
5.13 Pontos $P_{\gamma_{det}}$ e $P_{e_{det}}$ com corte de aceitância do detetor	59
6.1 Relação entre o ângulo de espalhamento, posição de detecção e distância D entre alvo e detetor.	64
6.2 A região de detecção dividida em duas áreas diferentes pela curva θ_0 . . .	66
6.3 Relação entre a razão das áreas e θ_0	67
6.4 Erro médio ϵ em função de θ_0	68
6.5 Alteração nos ângulos medidos devido a um desalinhamento do feixe. . .	70
6.6 Gráfico de $\frac{\partial E}{\partial \theta_\gamma}/E$ em função de θ_γ para $k_1 = 5GeV$	71
6.7 Gráfico de $\frac{\partial E}{\partial \theta_e}/E$ em função de θ_e para $k_1 = 5GeV$	71
6.8 Erro sistemático na média de $y = x^3$	74
6.9 Curvas $E(\theta_\gamma - \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e)$ e $E(\theta_\gamma + \sigma_{\theta_\gamma}, \theta_e)$ e sua média	75
6.10 Curvas $E(\theta_\gamma, \theta_e - \sigma_e)$ e $E(\theta_\gamma, \theta_e + \sigma_e)$ e sua média	76
6.11 $E \times \theta_\gamma$ para $\theta_{0\gamma} = 2.5 \cdot 10^{-2}rad$ e $E_0 = 5000MeV$	76
6.12 $E \times \theta_\gamma$ para $\theta_{0\gamma} = 8 \cdot 10^{-3}$ e $E_0 = 5000MeV$	77
6.13 $E \times \theta_e$ para $\theta_{0\gamma} = 2.5 \cdot 10^{-2}rad$ e $E_0 = 5000MeV$	77
6.14 $E \times \theta_e$ para $\theta_{0\gamma} = 8 \cdot 10^{-3}rad$ e $E_0 = 5000MeV$	78
6.15 Exemplo de ajuste gaussiano ao espectro	81
6.16 Exemplo de ajuste polinomial de quinto grau ao espectro de resíduos. . .	82
6.17 Exemplo de ajuste gaussiano corrigido ($F(E)$) ao espectro característico. .	83
6.18 Exemplo de ajuste do parâmetro E da expressão da energia (eq. 6.1) . .	85
6.19 Exemplo da distribuição de erros com o ajuste gaussiano.	87
6.20 Exemplo da aplicação do corte cinemático	88
6.21 Exemplo de análise da razão N'/N	89
6.22 Exemplo de análise da razão σ'/σ	90
6.23 Exemplo de análise da razão $\sigma'_{<E>}/\sigma_{<E>}$	91

7.1	Resultados sem a inclusão de efeitos e com o efeito do tamanho finito do feixe.	96
7.2	Resultados com desvio angular do feixe e com espalhamento múltiplo. . .	96
7.3	Resultados com desvio linear do feixe e com o momento interno dos elétrons.	97
7.4	Resultados com a resolução espacial do detetor e com todos efeitos simultaneamente.	97
7.5	Resultados de nossa simulação para energias dos fótons incidentes de 4995, 5000, 5005 e 5010 MeV.	99
7.6	Resultados obtidos pelo <i>Jlab</i> para energias dos fótons incidentes de 4995, 5000, 5005 e 5010 MeV.	100
7.7	Espectro característico com ajuste gaussiano sem corte cinemático. . . .	102
7.8	Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano sem corte cinemático.	103
7.9	Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano sem corte cinemático.	103
7.10	Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano sem corte cinemático.	104
7.11	Espectro característico com ajuste gaussiano e corte cinemático.	105
7.12	Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano com corte cinemático.	106
7.13	Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano com corte cinemático.	107
7.14	Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano com corte cinemático.	107
7.15	Espectro de resíduos sem corte cinemático. A estimativa inicial para a correção polinomial são os parâmetros ajustados p_0 a p_5 . O parâmetro E_m é a média do espectro característico e é fixo.	109
7.16	Espectro característico com ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático.	109
7.17	Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático.	110

7.18	Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático.	110
7.19	Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano corrigido sem corte cinemático.	111
7.20	Espectro de resíduos com corte cinemático. A estimativa inicial para a correção polinomial são os parâmetros ajustados p_0 a p_5 . O parâmetro E_m é a média do espectro característico e é fixo.	112
7.21	Espectro característico com ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático.	113
7.22	Distribuição de erros para o caso de ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático.	113
7.23	Distribuição das incertezas para o caso de ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático.	114
7.24	Um dos espectros analisados pelo método do ajuste gaussiano corrigido com corte cinemático.	115
7.25	Distribuição de erros para o caso de ajuste da expressão de energia sem corte cinemático.	116
7.26	Distribuição das incertezas para o caso de ajuste da expressão de energia sem corte cinemático.	116
7.27	Um dos jogos de dados analisados analisados pelo método do ajuste da expressão de energia sem corte cinemático.	117
7.28	Distribuição de erros para o caso de ajuste da expressão de energia com corte cinemático.	118
7.29	Distribuição das incertezas para o caso de ajuste da expressão de energia com corte cinemático.	119
7.30	Um dos jogos de dados analisados analisados pelo método do ajuste da expressão de energia com corte cinemático.	120

B.1	Diagrama de momentos do espalhamento Compton, no caso do elétron livre e em repouso.	133
E.1	Diagramas de Feynman de segunda ordem para o efeito Compton: (a) Compton duplo. (b) Correções radiativas.	143