Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Momento Magnético
Anômalo do Múon e $\mu \rightarrow e\gamma$
Além do Modelo Padrão**

Luighi Pierre Santos Leal

Orientadora:

Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal.

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal (IF/USP)

Prof. Dr. Alex Gomes Dias (CCNH/UFABC)

Prof. Dr. Chee Sheng Fong (CCNH/UFABC)

São Paulo
2021

University of São Paulo
Physics Institute

**Muon Anomalous
Magnetic Moment and $\mu \rightarrow e\gamma$
Beyond the Standard Model**

Luighi Pierre Santos Leal

Supervisor:

Prof. Dr. Renata Zukanovich Funchal.

Dissertation submitted to the Physics Institute of the
University of São Paulo in partial fulfillment of the
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Renata Zukanovich Funchal (IF/USP)

Prof. Dr. Alex Gomes Dias (CCNH/UFABC)

Prof. Dr. Chee Sheng Fong (CCNH/UFABC)

São Paulo
2021

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus pais que sempre me deram amor, me incentivaram a seguir no caminho dos estudos e me apoiaram de todas as formas possíveis, mesmo nos momentos mais difíceis. Dedico essa dissertação a eles. Gostaria de agradecer também toda minha família por serem sempre um lugar de conforto, acolhimento e paz, em especial às minhas avós por sempre acreditarem e torcerem por mim.

À minha namorada, Monalisa, por estar sempre ao meu lado, me acalmar nos momentos de preocupação, pelo apoio, incentivo e carinho que me dá.

À minha orientadora, Renata, por ter aceitado me orientar, pelo tempo dedicado, pela atenção, pelas incontáveis conversas sobre física que me ensinaram muito e me motivaram a ir mais adiante, por ser um exemplo para mim tanto no campo da pesquisa quanto no ensino de física.

Aos meus amigos de colégio, Gabriel, Cássio e Gabriela pelos muitos momentos juntos e por continuarem ao meu lado mesmo quando estivemos mais distantes.

Aos meus amigos de graduação, Francisco, Rodrigo, Nathália, Gabriel, Breno, entre outros, por estarem comigo durante esses anos, compartilhando muitos momentos dentro e fora da universidade.

Aos meus amigos de pós-graduação, em particular ao Gustavo, pelas discussões sobre física, conversas sobre monitoria que me acrescentaram muito, e ao Matheus, com quem dividi muitos momentos, relacionados ou não à física, sempre muito agradáveis, pelos incontáveis almoços no restaurante universitário e risadas juntos.

Aos muitos amigos que fiz nas equipes esportivas de Atletismo e Handball, onde sempre fui muito bem acolhido. Vocês fizeram minha passagem pela universidade ser mais leve e alegre.

A todos estudantes com quem tive contato durante as monitorias e trabalhos dirigidos, aprendi muito com vocês.

A todos os professores com quem tive aula e que contribuíram para minha formação.

Aos funcionários do Instituto de Física pela assistência durante os últimos anos.

Por fim, agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro para essa pesquisa (processo nº 2019/00667-1).

Resumo

Os experimentos de alta precisão em física de partículas servem como testes rigorosos do Modelo Padrão. A medida experimental do momento magnético anômalo do múon indica uma diferença significativa entre esse valor e a previsão do Modelo Padrão, o que pode ser um indicativo de nova física. Além disso, muitas teorias que se propõem a explicar essa discrepância podem gerar contribuições para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ com magnitudes muito superiores à previsão do Modelo Padrão, o que pode ser medido experimentalmente em experimentos futuros. Nesse trabalho formalizamos como obter essas contribuições em Teoria Quântica de Campos, destacando a relação entre esses observáveis. Introduzimos também as integrais de Passarino-Veltman, bem como a ferramenta dos projetores, que foram utilizadas no cálculo das contribuições. Com isso, estudamos diversas contribuições eletrofracas para esses observáveis, incluindo interações com bósons escalares e vetoriais, neutros e carregados, de onde obtivemos expressões analíticas para essas contribuições e discutimos os casos em que elas podem explicar o valor experimental do momento magnético do múon, respeitando os limites experimentais do decaimento. Por fim, aplicamos os resultados obtidos em uma teoria com simetria *left-right*, onde estudamos dois tipos de mecanismos de *seesaw* que podem surgir no contexto desse modelo e analisamos o efeito das novas partículas nos observáveis em que estamos interessados.

Palavras-Chave: Momento magnético do múon; Decaimento do múon em elétron e fóton; Simetria *left-right*; Mecanismo de *seesaw*.

Abstract

The high-precision experiments in particle physics serve as rigorous tests of the Standard Model. The experimental measurement of muon anomalous magnetic moment indicates a significant difference between this value and the Standard Model prediction, which may be indicative of new physics. In addition, many theories that propose to explain this discrepancy can generate contributions to $\mu \rightarrow e\gamma$ decay with magnitudes much bigger than Standard Model prediction, which can be measured experimentally in future experiments. In this work, we formalized how to obtain these contributions in Quantum Field Theory, highlighting the relationship between these observables. We also introduced the Passarino-Veltman integrals, as well as the projectors tool, which were used in the calculation of these contributions. With that, we studied several electroweak contributions to these observables, including interactions with scalar and vector bosons, neutral and charged, from where we obtained analytical expressions for these contributions and discussed the cases in which they can explain the experimental value of muon magnetic moment, respecting the decay experimental limits. Finally, we applied our results in a theory with left-right symmetry, where we studied two types of seesaw mechanisms that can arise in the context of this model context and analyzed the effect of new particles on the observables that we are interested in.

Keywords: Muon magnetic moment; Muon decay to electron and photon; Left-right symmetry; Seesaw mechanism.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama que ilustra uma correção de vértice genérica que contribui para a_i	9
1.2	Diagrama da QED que contribui para a_i a nível de árvore.	11
1.3	Contribuição da QED para a_i a nível de 1-loop.	12
1.4	Contribuições a nível de 1-loop do bósons de Higgs, W , Z e da parte hadrônica para a_i	12
1.5	Diagramas relacionados aos decaimentos $l_i \rightarrow l_f \gamma$	14
1.6	Decaimento $\mu \rightarrow e \gamma$ no MP com neutrinos massivos.	16
2.1	Diagrama geral com n linhas internas	20
2.2	Contribuição da QED para a_i a nível de 1-loop.	30
3.1	Diagrama com troca de escalar neutro.	35
3.2	Dependência de a_μ^{NS} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)$ (gráfico da direita) com os acoplamentos g_s , g_p e com a massa m_ϕ . No gráfico de a_μ^{NS} a representação da contribuição por meio de uma linha tracejada corresponde à valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $ a_\mu^{\text{NS}} = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da mesma ordem do que é necessário para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita corresponde à região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].	38
3.3	Diagrama com troca de escalar carregado.	39
3.4	Dependência de a_μ^{CS} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)$ (gráfico da direita) com g_s , g_p , m_{ϕ^+} e M . No gráfico de a_μ^{CS} a representação das contribuições a partir de uma linha tracejada corresponde à valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $ a_\mu^{\text{CS}} = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem necessária para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita representa a região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].	43
3.5	Diagramas com troca de escalar duplamente carregado.	44
3.6	Dependência de a_μ^{DCS} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)$ (gráfico da direita) com os acoplamentos g_s , g_p e com $m_{\phi^{++}}$. No gráfico de a_μ^{DCS} a representação da contribuição a partir de uma linha tracejada corresponde a valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $ a_\mu^{\text{DCS}} = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem necessária para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita representa a região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].	47
3.7	Diagrama com troca de bóson carregado.	48

3.8	Dependência de a_μ^{CGB} (esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (direita) com os acoplamentos g_v , g_a , $m_{W'}$ e M . A parte cinza no gráfico da direita representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1]. No gráfico de a_μ^{CGB} a representação das contribuições a partir de uma linha tracejada corresponde a um valor negativo para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $ a_\mu^{\text{CGB}} = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem daquelas capazes de explicar a_μ^{exp}	51
3.9	Diagrama com troca de bóson neutro e férmions carregados no loop.	52
3.10	Dependência de a_μ^{NGB} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (gráfico da direita) com os acoplamentos g_v e g_a e com a massa $m_{Z'}$. A parte cinza no gráfico da direita representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1]. No gráfico de a_μ^{NGB} a representação das contribuições a partir de uma linha tracejada corresponde a um valor negativo para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $ a_\mu^{\text{NGB}} = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição tenha a ordem relevante para explicação de a_μ^{exp}	55
3.11	Diagramas com troca de bóson e férmions carregados no <i>loop</i>	56
3.12	Dependência de $a_\mu^{\text{CGB}^2}$ (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (gráfico da direita) com g_v , g_a , $\tilde{m}$ e m_V . No gráfico de $a_\mu^{\text{CGB}^2}$ a representação da contribuição a partir de uma linha tracejada corresponde a valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $ a_\mu^{\text{CGB}^2} = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem necessária para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita representa a região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].	59
3.13	Contribuições a nível de 1- <i>loop</i> de h , Z e W para a_i	62
4.1	Diagrama com troca de H_0^0 , H_1^0 e A_1^0	83
4.2	Diagrama com troca de H_1^+ e H_2^+	84
4.3	Diagramas com troca de $\delta_{L,R}^+$	86
4.4	Diagrama com troca de bósons de gauge carregados.	87
4.5	Diagrama com troca de bóson de gauge neutro.	88
4.6	Contribuições para a anomalia a_μ nesse modelo. Do lado esquerdo temos aquelas geradas por H_1^+ , δ_L^{++} e δ_R^{++} , onde foram apresentadas suas dependências com h_M , enquanto no gráfico da direita temos as contribuições devido a H_1^0 , A_1^0 , H_2^+ , W_R^+ e Z' e suas dependências com $\mathcal{O}(M_D)$. As contribuições representadas por linhas pontilhadas correspondem a valores negativos. Além disso, em ambos os gráficos a linha pontilhada preta em $ a_\mu = 10^{-10}$ corresponde a ordem mínima necessária para que a contribuição seja significativa para explicar a_μ^{exp} . Utilizamos todas as massas em seus menores valores permitidos, ou seja, $m_{H_1^0} = 15$ TeV, $m_{A_1^0} = 15$ TeV, $m_{H_1^+} = 237$ GeV, $m_{H_2^+} = 15$ TeV, $m_{\delta_L^{++}} = 770$ GeV, $m_{\delta_R^{++}} = 660$ GeV, $m_{W_R} = 5$ TeV e $m_{Z'} = 5.9$ TeV.	90

4.7	Contribuições para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ nesse modelo. Naquelas relacionadas às partículas H_1^+ , δ_L^{++} e δ_R^{++} (gráfico da esquerda) foi apresentada a dependência com h_M , enquanto nas contribuições associadas a H_1^0 , A_1^0 , H_2^+ e W_R^+ foram destacadas suas dependências com $\mathcal{O}(M_D)$. A parte cinza nos gráficos representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) > 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1]. As massas das partículas são as mesmas da Fig. 4.6. No gráfico da esquerda temos as contribuições de δ_L^{++} (roxa) e δ_R^{++} (verde) sobrepostas.	91
4.8	Dependência de a_μ (esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (direita) com os acoplamentos $(h_M)_{ij}$ e com a massa m_δ na situação com simetria de paridade. A parte cinza no gráfico da direita representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) > 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1] e a linha pontilhada roxa indica a sensibilidade futura de MEG II [2]. No gráfico de a_μ a linha vermelha contínua (pontilhada) indica contribuição da ordem de 2σ (1σ) de Δa_μ (1.31). Além disso, a linha pontilhada preta em $ a_\mu = 10^{-10}$ representa o valor mínimo para que a contribuição seja da ordem da magnitude relevante para a_μ^{exp} . . .	93
4.9	Dependência de a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ com a soma da massa dos neutrinos leves e com m_δ no ordenamento normal (esquerda) e invertido (direita). A parte cinza nos gráficos representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) > 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1] e a linha pontilhada roxa indica a sensibilidade futura de MEG II [2]. Além disso, a linha vermelha contínua (pontilhada) indica contribuição da ordem de 2σ (1σ) de Δa_μ (1.31). A linha pontilhada preta em $ a_\mu = 10^{-10}$ representa o valor mínimo para que a contribuição seja da ordem da magnitude relevante para a_μ^{exp}	95
1	Diagramas envolvidos na transição nuclear $\mu N \rightarrow eN$ (esquerda) e no decaimento $\mu \rightarrow 3e$ (direita). A área hachurada representa as diferentes interações a nível de 1-loop no vértice $\mu - e - \gamma$ já discutidas no Capítulo 4.	98
B.1	Diagrama de interação geral com momento inicial p_i e final p_f	103
D.1	Caminho C' no plano complexo, onde $\times$ representam as singularidades da Eq. (D.2).	109

Lista de Tabelas

1.1	Medidas experimentais de a_μ de 1957 a 2006.	14
2.1	Decomposição das funções escalares retirada de [3]	23
3.1	Massa dos férmions carregados	38
3.2	Sinal das diferentes contribuições para a_μ	66
4.1	Massas quadradas dos campos escalares na aproximação $v_R \gg \kappa_+ \gg v_L$	78
4.2	Massas dos campos escalares no regime $\epsilon \rightarrow 0$	82

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	v
Lista de Figuras	vii
Lista de Tabelas	xi
Introdução	1
1 Momento Magnético anômalo e o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$	6
1.1 Momento Magnético	6
1.1.1 Momento magnético na Teoria de Dirac	6
1.1.2 Momento Magnético em Teoria Quântica de Campos	9
1.1.3 Contribuições da Eletrodinâmica Quântica (QED)	11
1.1.4 Contribuições no Modelo Padrão (MP)	12
1.1.5 Momento magnético anômalo do múon	13
1.2 Decaimentos $l_i \rightarrow l_f \gamma$	14
2 Algumas Ferramentas Técnicas Necessárias	18
2.1 Breve discussão sobre regularização dimensional	18
2.2 Forma Geral das integrais de 1-loop	19
2.3 Integrais Tensoriais e suas decomposições	20
2.4 Integrais Escalares	23
2.4.1 Parametrização de Feynman	23
2.4.2 $A_0(m_0^2)$	24
2.4.3 $B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2)$	25
2.4.4 $C_0(p_1^2, r_{12}^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2)$	26
2.5 Projetores	28
2.5.1 Projetores para a_i	28
2.5.2 Contribuição da QED para a_i a 1-loop	30
2.5.3 Projetores no caso geral	32

3	Contribuições genéricas para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$	34
3.1	Escalares Neutros	34
3.2	Escalares Carregados	39
3.3	Escalar Duplamente Carregado	43
3.4	Bóson de Gauge Carregado com Férmion Neutro	47
3.5	Bóson de Gauge Neutro	51
3.6	Bóson Carregado com Férmion Duplamente Carregado	55
3.7	Contribuições para a_i no MP	59
4	Modelo $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$	67
4.1	Estrutura do Modelo Mínimo	67
4.2	Setor Escalar	68
4.3	Setor de Gauge na base de Massa	70
4.4	Setor Leptônico na base de Massa	73
4.5	Setor Escalar na base de massas	75
4.5.1	Diagonalização do setor dos escalares neutros	75
4.5.2	Diagonalização dos escalares carregados	76
4.6	Considerações sobre as simetria $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$	77
4.6.1	Simetria de paridade $\mathcal{P}$	78
4.6.2	Simetria de conjugação de carga $\mathcal{C}$	80
4.7	Estudo Fenomenológico	81
4.7.1	Contribuições para a_μ e para $\mu \rightarrow e\gamma$	82
4.7.2	Análise das contribuições	89
4.7.3	Fenomenologia com simetria $\mathcal{P}$	92
4.7.4	Fenomenologia com simetria $\mathcal{C}$ e $M_D = 0$	93
	Conclusão e Perspectivas Futuras	96
A	Propriedades das soluções da equação de Dirac e das matrizes γ^μ	99
A.1	Matrizes de Dirac	99
A.2	Soluções da equação de Dirac	100
A.3	Polarização dos fótons	101
B	Forma geral da amplitude e identidades	102
B.1	Amplitude no contexto de a_i	103
B.2	Amplitude no contexto do decaimento $l_i \rightarrow l_j \gamma$	104
C	Espaço de fase de duas partículas	106
D	Integrais em d dimensões e a função Γ	108
D.1	Rotação de Wick	108
D.2	Parte Angular	109
D.3	Parte Radial	110
D.4	Função Γ	111
E	Bloco Diagonalização de Matrizes	113

Introdução

Na eletrodinâmica clássica, cargas em movimento, como por exemplo em uma espira, e objetos magnetizados podem ser associados a um momento magnético $\vec{\mu}$, definido a partir do torque $\vec{\tau}$ sofrido por esses sistemas quando submetidos a um campo magnético externo $\vec{B}$, escrito como

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}, \quad (1)$$

o que explica efeitos macroscópicos como, por exemplo, o funcionamento de uma bússola, onde esse torque gera uma rotação na agulha magnetizada que leva ao alinhamento entre o momento magnético desse objeto e o campo magnético terrestre.

Entretanto, quando tratamos de partículas elementares, além de um momento magnético atrelado às situações como as discutidas acima temos também uma componente que tem como origem uma propriedade intrínseca das partículas: o spin.

Devido a natureza quântica do spin, ele assume apenas valores inteiros e semi-inteiros, determinado pelos diferentes tipos de partículas presentes na natureza. Por causa da proporcionalidade entre o momento angular de spin e o momento magnético intrínseco dessas partículas (vide Eq. (2)), esse último também possui a característica da quantização, observada pela primeira vez em 1922 no experimento de Stern-Gerlach [4], em que um feixe de átomos de prata foi submetido a um campo magnético variante que o separou em duas partes devido a essa quantização.

Ainda que nesse primeiro momento a quantização do momento magnético tenha sido associada aos átomos de prata como um todo, mais tarde em 1927 R. Fraser [5] mostrou que o momento magnético orbital do átomo de prata no estado de menor energia era zero, o que contribuiu para a ideia de que a quantização observada em 1922 estava relacionada ao momento magnético intrínseco dos elétrons. Isso foi reforçado mais tarde em 1927 a partir da observação, por T. E. Phipps Jr. e J. B. Taylor, do mesmo efeito em átomos de hidrogênio [6], novamente com momento angular orbital nulo no seu estado de mais baixa energia.

O momento angular intrínseco das partículas, formalizado por Pauli em 1927 [7] no contexto da mecânica quântica não relativística, foi descrito relativisticamente por Dirac em 1928 [8], em que ele propôs uma equação que descreve a dinâmica relativística de partículas de spin 1/2, como o elétron, e massa m . Como veremos mais adiante, essa equação inclui um termo interagente entre $\vec{\mu}$ e $\vec{B}$ associado a uma Hamiltoniana da forma

$$H_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

onde a relação do momento magnético com o spin $\vec{S}$ pode ser escrita como

$$\vec{\mu}_{\text{spin}} = \frac{g e}{2m} \vec{S}, \quad (2)$$

onde g é fator giromagnético.

A equação de Dirac prediz $g = 2$, além de outros efeitos físicos como, por exemplo, mudanças no espectro do átomo de Hidrogênio não previstas pela teoria quântica não relativística mas observadas experimentalmente.

Entretanto, com o avanço da precisão experimental, em 1947 surgiram experimentos que apresentavam resultados diferentes daqueles previstos por essa equação, como por exemplo o desvio de Lamb observado por W. E. Lamb e R. C. Retherford [9], que indicou uma separação entre os níveis de energia $2S_{1/2}$ e $2P_{1/2}$ do átomo de hidrogênio não prevista na teoria de Dirac, além de outros desvios na estrutura hiperfina desse átomo observados por Nafe, Nelson e Rabin [10].

Em setembro desse mesmo ano, G. Breit propôs que essas características do espectro de hidrogênio poderiam ser explicadas por uma correção no fator giromagnético do elétron g_e da ordem da constante de estrutura fina $\alpha_{e.m.}$ [11]. Essa correção foi observada experimentalmente em novembro daquele mesmo ano por P. Kusch e H. M. Foley a partir do estudo do efeito Zeeman em um átomo de gálio, de onde foi obtido o valor de $a_e \equiv (g_e - 2)/2 = 0.00119(5)$ [12].

Essa anomalia foi explicada teoricamente por Schwinger em dezembro do mesmo ano, em que ele tratou os problemas das divergências da eletrodinâmica quântica (QED) em primeira ordem para obter $a_i = \alpha_{e.m.}/(2\pi) \simeq 0.00116$ [13], que é consistente com a medição obtida anteriormente.

Com o avanço experimental, em 1956 foi medido um valor para a anomalia do elétron sensível a correções de segunda ordem da QED [14], as quais foram obtidas teoricamente no ano seguinte a partir do cálculo de sete diferentes diagramas de Feynman [15, 16]. Dessa forma, esses experimentos se mostraram como ótimos testes de precisão da QED, em um primeiro momento, e posteriormente do Modelo Padrão (MP).

Ainda que tenham sido feitos muitos avanços experimentais nessa época, havia uma limitação de precisão por esses experimentos serem realizados com elétrons ligados a núcleos atômicos [17]. Em 1953, ainda que com precisão experimental menor do que outros experimentos da época, Louisell, Pidd e Crane [18] realizaram a primeira medida de g_e a partir de elétrons livres, onde feixes polarizados de elétrons foram sujeitos a dois espalhamentos consecutivos, separados por uma região de campo magnético constante que era responsável por rodar o spin dessas partículas.

Em 1973 H. Dehmelt [19] propôs o aprisionamento de elétrons em uma armadilha de Penning, a partir de onde seria possível obter o valor do fator giromagnético dessa partícula por meio do estudo de diferentes frequências de oscilação do elétron na armadilha. Essa ideia foi aplicada por ele em conjunto com outros colaboradores durante os anos seguintes até 1987 [20–22], em que foi obtido um valor experimental que perdurou por cerca de 20 anos como a medida mais precisa de g_e e contribuiu para o recebimento do prêmio Nobel de 1989 pelo “desenvolvimento da técnica de armadilha de íons”.

Entre 2006 e 2008 foram realizados experimentos em Harvard [23, 24] baseados nessa mesma ideia, obtendo-se

$$a_e^{\text{exp}} = 115965218073(28) \times 10^{-14}. \quad (3)$$

Essa medida é o teste mais preciso do MP feito até hoje, com sensibilidade experimental de 0.65 partes por bilhão, a partir de onde vem também, assumindo que o MP explica a anomalia a_e , o valor mais preciso de $\alpha_{e.m.}$ [24].

Além dos elétrons, os múons também são partículas de spin 1/2 com momento magnético intrínseco dado pela Eq. (2). A primeira medição de g_μ foi realizada em 1957 com base em um experimento que realizava o freamento dessas partículas [25] para obtenção do fator giromagnético.

Entretanto, em 1961 [26] começaram a ser realizados experimentos em que os múons eram submetidos, em um aparato linear, a um campo magnético constante para estudar a precessão do spin a partir de sua relação com a direção dos elétrons emitidos no decaimento dessas partículas. Em 1966 começaram a surgir experimentos no CERN [27] em que, no lugar de um aparato linear, os múons eram armazenados em um anel.

Esse tipo de armazenamento foi também utilizados no experimento mais recente realizado no *Brookhaven National Laboratory* (BNL) [28], onde a frequência de precessão anômala e sua relação com a anomalia a_μ pode ser escrita como [29]

$$\vec{\omega}_a \equiv \vec{\omega}_s - \vec{\omega}_c = \frac{e}{m_{\text{múon}}} \left[a_\mu \vec{B} - \left(a_\mu - \frac{1}{\gamma^2 - 1} \right) \vec{v} \times \vec{E} \right], \quad (4)$$

onde $\vec{\omega}_c$ é a frequência do ciclotron, $\vec{\omega}_s$ é a frequência de precessão do spin, $m_{\text{múon}}$ é a massa do múon, $e > 0$ é a carga elementar e $\gamma = (1 - v^2)^{-1/2}$ é o fator de Lorentz. Esse experimento se baseou em selecionar partículas com velocidades relacionadas a um valor de γ que anula o segundo termo dessa expressão, e consequentemente torna a frequência de precessão independente do campo elétrico utilizado.

Essa estratégia está sendo também utilizada no experimento E989 [30] realizado no Fermilab que utiliza o mesmo tipo de anel de armazenamento usado no experimento E821 no BNL. Além disso, nos próximos anos será realizado um experimento no *Japan Proton Accelerator Research Complex* (J-PARC) [31], que também se baseia no estudo da precessão do spin de múons percorrendo órbitas circulares, mas diferentemente daquele realizado no Fermilab esse experimento pretende utilizar campo elétrico nulo para zerar o segundo termo da Eq. (4).

Em particular, o estudo de g_μ é muito interessante pois, como veremos mais detalhadamente nessa dissertação, esse fator é mais sensível a nova física envolvendo partículas pesadas do que g_e já que a massa do múon é cerca de 200 vezes maior do que a do elétron. Além disso, quando comparamos os resultados experimentais com a previsão teórica do MP encontramos

$$\Delta a_\mu = (28.7 \pm 8.0) \times 10^{-10} \quad [32], \quad (5)$$

$$\Delta a_\mu = (26.1 \pm 8.0) \times 10^{-10} \quad [33], \quad (6)$$

onde $\Delta a_\mu \equiv a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{teo}}$ e a diferença entre esses valores se deve a diferentes cálculos teóricos no setor hadrônico do MP. Em ambos os casos a discrepância entre o valor experimental e teórico é maior do que 3σ , o que pode ser um indicativo de física além do MP.

A ideia de que os múons e os elétrons fariam parte de uma mesma família surgiu em 1947 com Pontecorvo [34] e foi reforçada mais tarde naquele ano pela observação do decaimento $\pi \rightarrow \mu \rightarrow e$ [35], o que levou a diversas propostas de experimentos que procuravam decaimentos de múons em elétrons e partículas neutras.

Em vista disso, em 1948 começaram as primeiras buscas por esses decaimentos [36], ainda que nesse primeiro momento não fosse possível fazer a distinção entre os diferentes tipos de partículas neutras no estado final. No ano de 1955 foi feita a primeira busca pelo decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$, o que permitiu colocar o limite sobre a taxa de ramificação $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) < 2 \times 10^{-5}$ [37].

Entre 1957 e 1958 alguns experimentos apontaram para uma estrutura $V - A$ nas interações eletrofracas [38,39], e com isso surgiram modelos propondo novos mediadores para explicá-las [40,41]. Com base nisso, em 1958 Feinberg calculou [42] que, por meio de *loops* envolvendo os mediadores

carregados propostos e neutrinos, decaimentos do tipo $\mu \rightarrow e\gamma$ teriam uma taxa de ramificação $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq 10^{-4}$, valor já excluído pelos experimentos de 1955.

Esse valor previsto teóricamente se baseava em apenas uma família de neutrinos, de forma que a não observação desses decaimentos levou a ideia de que, assim como no setor de léptons carregados, poderíamos ter mais de uma geração de neutrinos, o que impediria esse tipo de processo. De fato, em 1962 o neutrino do múon foi descoberto pelo grupo de L. Lederman, M. Schwartz e J. Steinberger [43], que recebeu o prêmio Nobel de 1988 pela descoberta dessa partícula. Em 1975, com a observação do férmion τ [44] foram observadas três famílias de léptons carregados, o que era necessário no MP para garantir que a teoria fosse livre de anomalias [45].

Ainda que tenham sido observadas mais de uma família de neutrinos, em 1967 Pontecorvo propôs [46–48] que os neutrinos poderiam oscilar entre os sabores $\nu_e \leftrightarrow \nu_\mu$. De fato, em 1998 o experimento Super-Kamiokande [49] obteve evidências contundentes da oscilação de neutrinos a partir do desaparecimento de neutrinos muônicos de forma consistente com a oscilação entre os sabores $\nu_\mu \leftrightarrow \nu_\tau$, ainda que a terceira família de neutrinos só tenha sido descoberta no ano de 2000 com a observação de ν_τ pelo experimento DONUT [50]. Entendemos hoje que neutrinos autoestados de massa e autoestados de sabor não são os mesmos, o que possibilita o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ a partir da mistura leptônica nesse setor, ainda que com uma taxa de ramificação muito inferior à sensibilidade experimental atual [51, 52].

No contexto do MP, que considera essas três famílias leptônicas, esse decaimento é previsto com $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq 10^{-54}$ [37]. Entretanto, o experimento mais recente que buscou por esse processo colocou o limite $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) < 4.2 \times 10^{-13}$ [1], de modo que ainda estamos muito longe de medir esse tipo de decaimento considerando apenas efeitos do MP. Dessa forma, caso seja observado algum sinal desse processo em experimentos em um futuro próximo, como MEG II [2], teremos um sinal claro de física além do MP.

O decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$, como veremos no Capítulo 1, tem grande relação com as contribuições para g_μ . Nesse primeiro capítulo iremos introduzir o fator giromagnético, calculá-lo no contexto da equação de Dirac bem como formalizar, em Teoria Quântica de Campos, a obtenção das anomalias a_i , associadas aos léptons carregados $i = e, \mu, \tau$, e das taxas de ramificação $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ de uma forma independente de modelo.

No Capítulo 2 iremos discutir algumas ferramentas que serão utilizadas para calcular as diferentes contribuições para esses processos. Definiremos as integrais de Passarino-Veltman [53] e discutiremos a decomposição tensorial dessas integrais em uma combinação de funções escalares, bem como algumas de suas propriedades. Além disso, será apresentado o conceito de projetores que utilizaremos na obtenção das partes desejadas das amplitudes de espalhamento, que serão utilizadas nos cálculos de a_i e $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$.

No Capítulo 3 iremos apresentar diferentes contribuições para a_i e $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ originadas das possíveis interações dos léptons carregados com bósons escalares e vetoriais, neutros e carregados, que podem ser encontrados em muitas teorias além do MP. Discutiremos também o comportamento dessas contribuições para os dois observáveis. Mostraremos como obter a partir desse estudo as contribuições eletrofracas para a_μ a nível de 1-loop no MP.

No Capítulo 4 iremos então aplicar o que foi aprendido nos capítulos anteriores em uma teoria que se baseia na simetria $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_Y$, que será discutida no caso em que temos simetria de paridade e também quando temos simetria de conjugação de carga. Em ambos os casos apresentaremos as contribuições para a_μ e para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ a fim de entender em que situações esse modelo pode explicar a discrepância Δa_μ e ainda gerar sinais em buscas por esse

decaimento.

Terminaremos com as nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 1

Momento Magnético anômalo e o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$

A fim de entender o problema da anomalia a_μ , na primeira parte desse capítulo será feita uma discussão sobre momento magnético de partículas com spin $1/2$, a partir de onde introduziremos o conceito de fator giromagnético g e formalizaremos a obtenção das contribuições para a anomalia do férmion i de uma forma independente de modelo.

Na segunda parte iremos estudar os decaimentos do tipo $l_i \rightarrow l_f\gamma$, em particular $\mu \rightarrow e\gamma$ que pode ser relacionado com a_μ , novamente de modo independente de modelo.

1.1 Momento Magnético

1.1.1 Momento magnético na Teoria de Dirac

Para estudar a interação de férmions de massa m e spin $1/2$ com o campo magnético temos que primeiro introduzir uma equação quântica que descreva o comportamento de partículas com essas propriedades. A equação de Dirac [8] surge nesse contexto como uma forma de contornar os problemas associados a equação de Klein-Gordon [54, 55], que se propõe a dar um tratamento relativístico à mecânica quântica mas leva a densidades de probabilidade negativas. Dirac procurou uma equação que fosse linear em $\partial/\partial t$ e ainda assim covariante, dada por¹

$$H\Psi = (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)\Psi, \quad (1.1)$$

em que H representa a Hamiltoniana e $\vec{p}$ o momento do férmion.

Além disso, para descrever uma partícula essa equação deveria respeitar a relação de energia e momento relativística

$$H^2\Psi = (\vec{P}^2 + m^2)\Psi. \quad (1.2)$$

Para que as Eqs. (1.1) e (1.2) sejam satisfeitas simultaneamente os α 's e β não podem ser números, devem possuir uma estrutura mais complexa que obedece às relações de anticomutação

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0. \quad (1.3)$$

¹Durante essa dissertação iremos utilizar o sistema de unidades naturais em que $c = \hbar = 1$ e o sistema Heaviside de unidades para o eletromagnetismo.

Os objetos de menor dimensão que satisfazem essas regras de anticomutação são matrizes 4×4 , que nesse caso podem ser representadas por mais de uma forma (ver Apêndice A).

Utilizando a identificação $H = i\partial/\partial t$ e $\vec{p} = -i\nabla$ na Eq. (1.1) e multiplicando essa equação por β podemos escrever a equação de Dirac para partículas de massa m como

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \quad (1.4)$$

em que $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha})$, Ψ é um espinor de quatro componentes que recebe o nome de espinor de Dirac e $\partial_\mu \equiv (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}) = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

Para introduzir na equação de Dirac a interação de uma partícula de carga q com o campo eletromagnético podemos fazer a chamada “substituição mínima”, isto é, fazendo a substituição $p_\mu \rightarrow p_\mu - qA_\mu$, que no espaço das posições é escrita como $-i\partial_\mu \rightarrow -i\partial_\mu - qA_\mu$, onde $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ é um quadrvetor com a primeira componente dada pelo potencial escalar do campo eletromagnético ϕ e as demais relacionadas ao potencial vetor $\vec{A}$. No caso do elétron a equação de Dirac assume a forma

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)\Psi = (i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\Psi = 0 \quad \text{com} \quad \cancel{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu, \quad (1.5)$$

onde utilizamos $q_{\text{elétron}} = -e$ com $e > 0$ a carga elétrica elementar.

Multiplicando essa expressão por $(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} + m)$ obtemos

$$((i\partial_\mu - eA_\mu)^2 - \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - m^2)\Psi = 0, \quad \text{com} \quad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad \text{e} \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (1.6)$$

Para identificarmos nessa expressão a interação do campo magnético com o spin iremos utilizar as relações

$$\begin{aligned} (\vec{B})_i &= (\nabla \times \vec{A})_i = \epsilon_{ijk}\partial_j(\vec{A})_k = -\epsilon_{ijk}\partial_j A_k = \frac{1}{2}(-\epsilon_{ijk}\partial_j A_k + \epsilon_{ikj}\partial_j A_k) \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\partial_j A_k - \partial_k A_j) = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F_{jk}, \end{aligned}$$

$$(\vec{E})_i = -(\nabla\phi)_i - \partial_0(\vec{A})_i = -\partial_i A_0 + \partial_0 A_i = F_{0i},$$

$$\sigma^{0i} = \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{i}{2} \left\{ \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} \right\} = -i \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix},$$

$$\sigma^{ij} = \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right] = -\frac{i}{2} \left\{ \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} \right\} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix},$$

onde expressamos as matrizes γ^μ na representação de Weyl (ver Apêndice A). Podemos então escrever

$$\begin{aligned} F_{0i}\sigma^{0i} &= -iF_{0i} \begin{pmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \vec{E} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{E} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \\ F_{ij}\sigma^{ij} &= F_{ij} \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = F_{ij} \epsilon_{kij} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = -2(\vec{B})_k \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} \vec{B} \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{B} \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = F_{0i}\sigma^{0i} + F_{i0}\sigma^{i0} + F_{ij}\sigma^{ij} = 2F_{0i}\sigma^{0i} + F_{ij}\sigma^{ij} = -2 \begin{pmatrix} (\vec{B} + i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & (\vec{B} - i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix},$$

onde utilizamos que $F_{\mu\nu}$ e $\sigma^{\mu\nu}$ são tensores antissimétricos, o que leva à $F_{\mu\mu} = \sigma^{\mu\mu} = 0$. Nosso operador de spin é $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ e portanto podemos escrever a Eq. (1.6) como

$$\left((\partial_\mu + ieA_\mu)^2 - 2e \begin{pmatrix} (\vec{B} + i\vec{E}) \cdot \vec{S} & 0 \\ 0 & (\vec{B} - i\vec{E}) \cdot \vec{S} \end{pmatrix} + m^2 \right) \Psi = 0 \quad \text{com} \quad \Psi = \begin{pmatrix} \Psi_- \\ \Psi_+ \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

que no espaço dos momentos, dividindo por $2m$, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \left(\frac{m}{2} + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - \frac{2e}{2m} \vec{B} \cdot \vec{S} \pm i \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \vec{S} \right) \Psi_\pm &= \frac{(E - e\phi)^2}{2m} \Psi_\pm \simeq \left(\frac{m}{2} + E_{NR} - e\phi \right) \Psi_\pm \\ \Rightarrow E_{NR} \Psi_\pm &\simeq \left(\frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + e\phi - \frac{2e}{2m} \vec{B} \cdot \vec{S} \pm i \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \vec{S} \right) \Psi_\pm, \end{aligned} \quad (1.9)$$

em que consideramos o limite não relativístico com $E_{NR} = (E - m) \ll m$ e $e\phi \ll m$ nas aproximações. Nesse limite podemos definir o momento magnético dessa partícula como sendo o termo que se relaciona, na Hamiltoniana de interação, com o campo magnético a partir de

$$H_{\text{int}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \quad (1.10)$$

De modo geral o momento magnético pode ter duas origens: uma associada ao movimento orbital de uma partícula carregada que dá origem a um momento de dipolo magnético que interage com $\vec{B}$ e outra relacionada à interação do spin com o campo magnético. Aqui estamos interessados nessa última forma, de onde podemos identificar na nossa expressão que

$$\vec{\mu}_{\text{spin}} = \frac{e}{m} \vec{S} = \frac{g e}{2m} \vec{S}, \quad (1.11)$$

onde introduzimos explicitamente o fator giromagnético g .

Esse fator surge como uma forma de comparar essa constante de proporcionalidade que relaciona $\vec{S}$ e $\vec{\mu}_{\text{spin}}$ com a constante de proporcionalidade entre o momento magnético orbital e o momento angular [56] (que também pode ser obtida da Eq. (1.9) olhando para o termo com $\vec{p} \cdot \vec{A}$), relação dada por

$$\vec{\mu}_{\text{orb}} = \frac{e}{2m} \vec{L} \equiv \mu_B \vec{L}, \quad (1.12)$$

onde μ_B representa o magneton de Bohr, constante definida para representar essa relação no caso do elétron. Aqui é importante percebermos que, partindo da equação de Dirac, concluímos que $g = 2$ para qualquer férmion.

Seis anos após a publicação da equação de Dirac foi feita a primeira medição indireta, a partir do efeito Zeeman, que indicava elétrons com $g_e = 2$ [57]. Entretanto, em 1947 J. E. Nafe, E. B. Nelson e I. I. Rabi [10] perceberam a partir do estudo da estrutura hiperfina dos átomos de hidrogênio e de deutério uma discrepância entre a previsão de Dirac e o valor experimental de g_e , que mais tarde naquele ano foi confirmada por P. Kusch e H. M. Foley [12].

Na próxima seção iremos discutir a origem dessa diferença e também como podemos calcular essas correções no contexto da Teoria Quântica de Campos.

1.1.2 Momento Magnético em Teoria Quântica de Campos

Ainda que a teoria de Dirac tenha se mostrado correta nas primeiras medições do fator giromagnético, ela não foi capaz de explicar o fato de que g_e não é exatamente igual a dois². Isso se deve pois fora do contexto da Teoria Quântica de Campos a equação de Dirac não comporta criação e aniquilação de partículas, algo muito importante para explicarmos de forma precisa a interação das partículas com o campo eletromagnético.

De forma geral esse tipo de correção aparece em Teoria Quântica de Campos através das chamadas correções de *loop* no vértice de interação com o campo eletromagnético. O objetivo dessa seção é entender como identificar essas contribuições a partir das amplitudes de espalhamento de uma forma independente de modelo.

Figura 1.1: Diagrama que ilustra uma correção de vértice genérica que contribui para a_i .

A interação de um férmion com o campo eletromagnético pode ser representada por um diagrama como o apresentado na Fig. 1.1, em que a área hachurada representa qualquer correção de *loop*. A amplitude mais geral possível associada a essas correções pode ser escrita como ³

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = \epsilon_\mu \mathcal{M}^\mu = & -\epsilon_\mu(q) \bar{u}(p_f) e \left[F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right. \\ & \left. + G_1(q^2) (q^2 \gamma^\mu - 2mq^\mu) \frac{\gamma^5}{2m} + G_2(q^2) \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5}{2m} \right] u(p_i), \end{aligned} \quad (1.13)$$

onde p_i e p_f representam, respectivamente, o momento inicial e final do férmion, $q \equiv p_f - p_i$, as funções $F_1(q^2)$, $F_2(q^2)$, $G_1(q^2)$ e $G_2(q^2)$ são chamadas de fatores de forma, $\epsilon_\mu(q)$ é o vetor de polarização do fóton, $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e m é a massa do férmion. As contribuições relativas a interação do spin com o campo magnético estão relacionadas ao termo com $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ nessa amplitude como veremos a seguir.

Primeiro iremos utilizar a identidade de Gordon (ver Apêndice B) para modificar o primeiro termo dessa expressão a partir de

$$\bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) = \bar{u}(p_f) \left[\frac{(p_i^\mu + p_f^\mu)}{2m} + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right] u(p_i), \quad (1.14)$$

²Veremos mais adiante que por mais que a teoria de Dirac preveja $g = 2$ para todo férmion, o fator giromagnético depende da partícula estudada.

³Para uma discussão mais detalhada sobre a forma mais geral dessa amplitude ver Apêndice B

de onde vem que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^\mu = & -e \bar{u}(p_f) \left[\frac{(p_i^\mu + p_f^\mu)}{2m} F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (F_1(q^2) + F_2(q^2)) \right. \\ & \left. + G_1(q^2) (q^2 \gamma^\mu - 2mq^\mu) \frac{\gamma^5}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} \gamma^5 q_\nu}{2m} G_2(q^2) \right] u(p_i).\end{aligned}\quad (1.15)$$

Para identificar a relação do termo $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$ com g iremos trabalhar na representação de Dirac (ver Apêndice A) e tomar o limite não relativístico. Podemos então escrever

$$\begin{aligned}\sigma^{0i} &= \frac{i}{2} [\gamma^0, \gamma^i] = \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{i}{2} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \right\} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma^{ij} &= \frac{i}{2} [\gamma^i, \gamma^j] = \frac{i}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ -\sigma_j & 0 \end{pmatrix} \right] = -\frac{i}{2} \left\{ \begin{pmatrix} [\sigma_i, \sigma_j] & 0 \\ 0 & [\sigma_i, \sigma_j] \end{pmatrix} \right\} = \epsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix},\end{aligned}$$

e ainda olhando para o espinor de Dirac das partículas no limite não relativístico obtemos

$$\begin{aligned}u(p) &= \sqrt{E+m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \xrightarrow{p \rightarrow 0} \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\Psi} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \bar{u}(p') &\xrightarrow{p \rightarrow 0} (\tilde{\Psi}^\dagger \ 0) \quad \text{com} \quad \chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

de onde vem que nesse limite os termos responsáveis pela interação do spin com o campo magnético são da forma

$$\mathcal{M}^0 \supset \frac{e}{2m} q_i (F_1(0) + F_2(0)) (\tilde{\Psi}^\dagger \ 0) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi} \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^i &\supset -i \frac{e}{2m} \epsilon_{ijk} q_j (F_1(0) + F_2(0)) (\tilde{\Psi}^\dagger \ 0) \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\Psi} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -i \frac{e}{2m} \epsilon_{ijk} q_j (F_1(0) + F_2(0)) \tilde{\Psi}^\dagger \sigma_k \tilde{\Psi}.\end{aligned}\quad (1.17)$$

Podemos agora pensar nessa interação com o campo eletromagnético no espaço dos momentos, onde usando que $q_j = (\hat{E}, -\hat{q}) = i(\partial/\partial t, \nabla) = i\partial_\mu$ vem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{int}} &\supset \mathcal{M}^\mu A_\mu \supset \mathcal{M}^i A_i \supset \frac{e}{2m} \epsilon_{ijk} \partial_j A_i (F_1(0) + F_2(0)) \tilde{\Psi}^\dagger \sigma_k \tilde{\Psi} \\ &= \frac{e}{2m} \left(\vec{B} \right)_k (F_1(0) + F_2(0)) \tilde{\Psi}^\dagger \sigma_k \tilde{\Psi} = \frac{e}{2m} (F_1(0) + F_2(0)) \tilde{\Psi}^\dagger \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \tilde{\Psi}.\end{aligned}\quad (1.18)$$

A Hamiltoniana associada a essa interação é dada por

$$H_{\text{int}} = -\frac{e}{m} \tilde{\Psi}^\dagger (F_1(0) + F_2(0)) \left(\vec{B} \cdot \vec{S} \right) \tilde{\Psi} \equiv -\tilde{\Psi}^\dagger \left(\vec{\mu} \cdot \vec{B} \right) \tilde{\Psi}, \quad (1.19)$$

de onde podemos reconhecer o momento magnético no contexto de Teoria Quântica de Campos como

$$\vec{\mu} = \frac{e}{m} (F_1(0) + F_2(0)) \vec{S} \Rightarrow g = 2 (F_1(0) + F_2(0)). \quad (1.20)$$

É importante notar que da Eq. (1.13) temos que $F_1(q^2 \rightarrow 0)$ está relacionado ao valor da carga elétrica no regime não relativístico. Aqui iremos tomar nosso esquema de renormalização de modo que e seja a carga elétrica justamente nesse regime, o que implica em $F_1(0) = 1$. Dessa forma a expressão para o fator giromagnético é dada por

$$g = 2(1 + F_2(0)), \quad (1.21)$$

no que fica claro que $F_2(0)$ representa as correções quânticas nesse contexto e contém toda a informação sobre as interações envolvidas nesse vértice.

Vale também notar que a interação a *tree-level* de um férmion carregado, como representado na Fig. 1.2, tem amplitude

$$i\mathcal{M}^\mu = -ie\bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i), \quad (1.22)$$

que nos dá $F_1(0) = 1$ e $F_2(0) = 0$. Como era esperado, nesse caso em que não temos correções de *loop* obtivemos um valor de $g = 2$, o mesmo obtido a partir da equação de Dirac sem a utilização de Teoria Quântica de Campos.

Figura 1.2: Diagrama da QED que contribui para a_i a nível de árvore.

1.1.3 Contribuições da Eletrodinâmica Quântica (QED)

Ainda que a teoria de Dirac tenha se mostrado bem sucedida para obtenção de $g = 2$, vimos na seção anterior que ao introduzirmos flutuações quânticas novas contribuições para esse valor podem surgir. De fato, em 1947 P. Kusch e H. M. Foley mediram experimentalmente, a partir do efeito Zeeman em um átomo de gálio, o valor de $a_e \equiv (g_e - 2)/2 = 0.00119(5)$ [12], em que a_i indica a anomalia do momento magnético do lépton i e tem como função indicar o quanto o fator giromagnético desvia de 2.

Nesse mesmo ano, J. Schwinger fez uso da QED para calcular teoricamente a principal contribuição dessa teoria para o momento magnético dos léptons carregados a partir do diagrama apresentado na Fig. 1.3, obtendo o valor de $a_i = \alpha_{\text{e.m.}}/(2\pi) \simeq 0.00116$ [13] capaz de explicar o resultado experimental apresentado anteriormente naquele ano. Aqui vale destacar que essa contribuição a nível de 1-*loop* da QED é a mesma para todos os diferentes léptons carregados.

De forma mais geral podemos escrever as contribuições da QED para o momento magnético do elétron como

$$a_e^{\text{QED}} = A_1 + A_2(m_e/m_\mu) + A_2(m_e/m_\tau) + A_3(m_e/m_\mu, m_e/m_\tau), \quad (1.23)$$

onde m_e , m_μ e m_τ são as massas do elétron, múon e tau, respectivamente, e cada um dos A_i 's podem ser escritos a partir de

$$A_i = A_i^{(2)} \left(\frac{\alpha_{\text{e.m.}}}{\pi} \right) + A_i^{(4)} \left(\frac{\alpha_{\text{e.m.}}}{\pi} \right)^2 + \dots, \quad (1.24)$$

Figura 1.3: Contribuição da QED para a_i a nível de 1-loop.

com $\alpha_{\text{e.m.}} = e^2/4\pi$ e n em $A_i^{(n)}$ a ordem da contribuição. Atualmente essas contribuições para a_e foram obtidas numericamente [58, 59] até a ordem 10, o que envolve o cálculo de mais de 12000 diagramas diferentes e equivale a atual precisão experimental [24].

1.1.4 Contribuições no Modelo Padrão (MP)

As contribuições para g_e na teoria eletrofraca (EW), que envolvem interações com os bósons de Higgs, Z e $W^\pm$, são muito pequenas já que elas vêm tipicamente com um fator supressor de $(m_e/m_{\text{bóson}})^2$ que leva à $a_e^{\text{EW}} = 0.02973(23) \times 10^{-12}$ [60]. Dessa forma, como a contribuição da parte hadrônica, que considera as interações com quarks e hádrons, fornece $a_e^{\text{Had}} = 1.694(12) \times 10^{-12}$ [61], a QED tem papel principal nas contribuições para g_e . Sendo assim, a previsão teórica desse valor é muito sensível a precisão de $\alpha_{\text{e.m.}}$, que por sua vez é obtido com base em experimentos envolvendo recuo atômico e fornece, a partir dos átomos de Rb [62] e Cs [63], os valores teóricos de

$$a_e^{\text{teo}}(\alpha_{\text{Rb}}) = 1\,159\,652\,182.037(720)(11)(12) \times 10^{-12}, \quad (1.25)$$

$$a_e^{\text{teo}}(\alpha_{\text{Cs}}) = 1\,159\,652\,181.606(229)(11)(12) \times 10^{-12}, \quad (1.26)$$

onde a primeira incerteza se origina do valor de $\alpha_{\text{e.m.}}$, a segunda da QED e a terceira da parte hadrônica.

Ainda que as contribuições da teoria eletrofraca sejam pouco relevantes para obtenção de a_e , quando estudamos o caso do múon a supressão dos diagramas envolvidos é menor e essa parte passa a ter maior importância.

Os primeiros cálculos envolvendo essas contribuições foram realizados por diversos grupos em 1972 [64–66] e tem como base os diagramas presentes na Fig. 1.4.

Figura 1.4: Contribuições a nível de 1-loop dos bósons de Higgs, W , Z e da parte hadrônica para a_i

É importante destacar que como essas contribuições dependem da massa do lépton carregado envolvido, no caso do múon com $m_\mu/m_e \simeq 210$ elas tem valor de $a_\mu^{1-loop(EW)} = 194.80(1) \times 10^{-11}$. Quando levamos em conta as contribuições de *2-loops* esse valor diminui para $a_\mu^{2-loops(EW)} = 153.6(1) \times 10^{-11}$, sendo as de *3-loops* inferiores à sensibilidade experimental atual [67].

Além disso temos também contribuições hadrônicas, com a principal delas representada na Fig. 1.4. É importante destacar que essas contribuições representam a maior fonte de incerteza para a_μ , que junto com a QED e a parte eletrofraca nos fornece valores teóricos de

$$a_\mu^{\text{teo}} = 116591802(2)(42)(26) \times 10^{-11} \quad [32], \quad (1.27)$$

$$a_\mu^{\text{teo}} = 116591828(2)(43)(26) \times 10^{-11} \quad [33], \quad (1.28)$$

em que a primeira incerteza tem como origem a QED, a segunda as contribuições hadrônicas de primeira ordem e a terceira as contribuições hadrônicas de ordem superior. A discrepância entre esses dois valores se deve a diferentes cálculos das contribuições de primeira ordem envolvendo a parte hadrônica.

1.1.5 Momento magnético anômalo do múon

Ao compararmos os valores experimentais de a_e com a_μ

$$a_e^{\text{exp}} = 115965218073(28) \times 10^{-14} \quad [24], \quad (1.29)$$

$$a_\mu^{\text{exp}} = 116592080(63) \times 10^{-11} \quad [28], \quad (1.30)$$

pode parecer em um primeiro momento que experimentos envolvendo o momento magnético do elétron são mais sensíveis a nova física já que o mais preciso deles tem precisão de $\sigma_{a_e}/a_e \simeq 0.65$ parte por bilhão (ppb) enquanto o experimento mais sensível de a_μ tem precisão de $\sigma_{a_\mu}/a_\mu \simeq 0.5$ parte por milhão (ppm). Entretanto, como foi discutido anteriormente, contribuições para a_i em diagramas envolvendo partículas pesadas com massa m_{NP} a nível de *1-loop* tipicamente vêm com um fator multiplicativo $(m_i/m_{NP})^2$, de modo que se a interação dessa partícula com o múon é similar aquela com o elétron, a contribuição para a_μ é maior que para a_e por um fator $(m_\mu/m_e)^2 \simeq 40000$, o que torna nesse caso experimentos que medem a_μ mais sensíveis à nova física por mais que a precisão experimental seja inferior.

Ainda que esse argumento possa ser estendido para a_τ , em que as contribuições de partículas pesadas são superiores às de a_μ por um fator $(m_\tau/m_\mu)^2 \simeq 280$, a baixa precisão experimental $a_\tau^{\text{exp}} = -0.018(17)$ [68] dificulta muito que nova física possa ser detectada nesses experimentos com a sensibilidade atual.

Além disso, como pode ser visto na Tab. 1.1 tem persistido por vários anos na literatura uma diferença entre o valor teórico e experimental de a_μ dada por

$$\Delta a_\mu = (28.7 \pm 8.0) \times 10^{-10} \quad [32] \quad (1.31)$$

$$\Delta a_\mu = (26.1 \pm 8.0) \times 10^{-10} \quad [33], \quad (1.32)$$

onde foi definido $\Delta a_\mu \equiv a_\mu^{\text{exp}} - a_\mu^{\text{teo}}$ e a discrepância entre esses valores acima se deve a diferentes cálculos da parte hadrônica. Aqui vemos uma diferença de 3.6σ e 3.3σ , respectivamente, entre os valores experimental e teórico, o que pode ser um forte indicativo de nova física.

Além dessas diferenças que apontam para física além do MP existem outros tipos de sinais que estão relacionados a a_i e se observados podem também ser indicações claras de nova física.

Tabela 1.1: Medidas experimentais de a_μ de 1957 a 2006.

Publicação	partícula	a_μ	σ_{a_μ}/a_μ [ppm]
Nevis (1957) [25]	μ^+	0.0(1)	-
Nevis (1959) [69]	μ^+	$0.00113^{+0.00016}_{-0.00012}$	124000
CERN I (1961) [26]	μ^+	0.001145 (22)	19000
CERN I (1962) [70]	μ^+	0.001162(5)	4300
CERN II (1968) [27]	$\mu^\pm$	0.00116616 (31)	265
CERN III (1975) [71]	$\mu^\pm$	0.001165895 (27)	23
CERN III (1979) [72]	$\mu^\pm$	0.001165911(11)	7.3
BNL (2000) [73]	μ^+	0.0011659191(59)	5
BNL (2001) [74]	μ^+	0.0011659202(16)	1.3
BNL (2002) [75]	μ^+	0.0011659203(8)	0.7
BNL (2004) [67]	μ^-	0.0011659214(8)(3)	0.7
BNL (2006) [28]	$\mu^\pm$	0.00116592080(63)	0.54

Na próxima seção iremos estudar um desses processos, o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$, que pode aparecer com razão de ramificação acima do que é previsto pelo MP com neutrinos massivos em diferentes modelos que se propõe a explicar Δa_μ .

1.2 Decaimentos $l_i \rightarrow l_f \gamma$

Os decaimentos do tipo $l_i \rightarrow l_f \gamma$ estão relacionados com as diferentes contribuições para a_i devido a similaridade dos diagramas da Fig. 1.5 com o da Fig. 1.1, de forma que diversas teorias além do MP que se propõem a explicar Δa_μ podem acabar gerando novas contribuições para processos como $\mu \rightarrow e\gamma$. Aqui iremos discutir, de forma geral, como podemos calcular essas contribuições a partir das amplitudes envolvidas nesse decaimento de forma independente de modelo.

Figura 1.5: Diagramas relacionados aos decaimentos $l_i \rightarrow l_f \gamma$.

A taxa de decaimento de uma partícula em duas pode ser descrita no referencial do centro de massa pela expressão [76]

$$d\Gamma(l_i \rightarrow l_f \gamma) = \frac{1}{2m_i} |\overline{\mathcal{M}}|^2 d\phi_2, \quad d\phi_2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_f + p_\gamma - p_i) \frac{d^3 p_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \frac{d^3 p_\gamma}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\gamma}, \quad (1.33)$$

em que m_i é a massa da partícula inicial, p_i , p_f e p_γ são os quadrimomentos das partículas l_i , l_f e do fóton, respectivamente, e $d\phi_2$ é o espaço de fase invariante para duas partículas no estado final.

Esse espaço de fase pode ser escrito, no caso em que $m_i \gg m_f$, como (ver Apêndice C)

$$d\phi_2 = \frac{1}{8\pi^2} d\Omega_f, \quad (1.34)$$

onde $d\Omega_f$ é o ângulo sólido associado a partícula l_f .

A fim de obter $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ iremos partir da equação geral da amplitude representada na Eq. (B.20) (ver Apêndice B) que descreve os diagramas envolvidos nesse processo de decaimento, apresentados na Fig. 1.5, e pode ser escrita como

$$\mathcal{M} = -e \bar{u}(p_f) \epsilon_\mu(q) \Gamma^\mu u(p_i) = -\epsilon_\mu(q) \bar{u}(p_f) e \left[\frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{(m_i + m_f)} (F_2(0) + \gamma^5 G_2(0)) \right] u(p_i). \quad (1.35)$$

Vale notar que os dois primeiros diagramas da Fig. 1.5 possuem, respectivamente, amplitudes da forma

- $\mathcal{M}_1^\mu = \bar{u}(p_f) \gamma^\mu (\not{p}_i + m_i) L_1(1, \not{p}_i, \gamma^5) u(p_i) = A_1^{(1)} \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) + A_4^{(1)} \bar{u}(p_f) \gamma^\mu \gamma^5 u(p_i),$
- $\mathcal{M}_2^\mu = \bar{u}(p_f) L_2(1, \not{p}_f, \gamma^5) (\not{p}_f + m_f) \gamma^\mu u(p_i) = A_1^{(2)} \bar{u}(p_f) \gamma^\mu u(p_i) + A_4^{(2)} \bar{u}(p_f) \gamma^\mu \gamma^5 u(p_i),$

em que $L_{1,2}$ representam funções que se originam do *loop*, $A_1^{(1,2)}$ e $A_4^{(1,2)}$ são funções escalares e para escrever as igualdades utilizamos as equações de movimento descritas na Eq. (B.10). Sendo assim, essas amplitudes não contém os termos F_2 e G_2 (definidos no Apêndice B) presentes na Eq. (1.35) e portanto não contribuem para o decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$.

Dessa forma, a partir da Eq. (1.35) podemos escrever a amplitude quadrada como

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{1}{2} \sum_{spins} \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} \\ &= -\frac{e^2}{2(m_i + m_f)^2} g_{\alpha\mu} \text{Tr} \left[(\not{p}_f + m_f) \sigma^{\mu\nu} (F_2(0) + \gamma^5 G_2(0)) q_\nu (\not{p}_i + m_i) \sigma^{\alpha\beta} (F_2(0)^* - \gamma^5 G_2(0)^*) q_\beta \right] \\ &= 2e^2 (m_i - m_f)^2 (|F_2(0)|^2 + |G_2(0)|^2), \end{aligned} \quad (1.36)$$

onde somamos sobre os spins finais de l_f , sobre as polarizações dos fótons e consideramos o feixe inicial dos léptons como sendo não polarizado.

Juntando esse resultado com a Eq. (1.34) e integrando sobre $d\Omega_f$ obtemos a taxa de decaimento

$$\Gamma(l_i \rightarrow l_f \gamma) = \frac{e^2}{8\pi m_i} (m_i - m_f)^2 (|F_2(0)|^2 + |G_2(0)|^2) \xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{e^2 m_i}{8\pi} (|F_2(0)|^2 + |G_2(0)|^2). \quad (1.37)$$

Em particular no caso em que o decaimento considerado é $\mu \rightarrow e \gamma$ podemos comparar a quantidade desses decaimentos com a quantidade total de decaimentos do múon a partir de

$$\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \simeq \frac{\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)}{\text{BR}(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu)} = \frac{\Gamma(\mu \rightarrow e \gamma)}{\Gamma(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu)} = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}} (4\pi)^3}{2G_F^2 m_\mu^4} (|F_2(0)|^2 + |G_2(0)|^2), \quad (1.38)$$

onde consideramos a taxa de ramificação $\text{BR}(\mu \rightarrow e \bar{\nu}_e \nu_\mu) = 1$ e G_F é a constante de Fermi. Podemos perceber aqui a presença do fator $F_2(0)$, também presente nas contribuições para a_μ , o que evidencia

a relação entre esses dois observáveis. Note porém que no caso a_μ os férmions externos tem a mesma massa, o que não é verdade para $\mu \rightarrow e\gamma$.

É importante destacar que esse decaimento viola o sabor leptônico já que temos um múon no estado inicial e um elétron no estado final. Até hoje a única forma de violação de sabor medida foi no setor dos neutrinos como observado por diversos experimentos de oscilação [77–79]. Isso ocorre porque os autoestados de sabor dos neutrinos não são autoestados de massa, mas sim uma superposição desses, o que faz com que durante a propagação dessas partículas haja a possibilidade de uma mudança de sabor.

Ainda que as transições nesse setor sejam nossa única evidência de violação de sabor, a oscilação de neutrinos pode induzir o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ por meio de *loops* [51, 52] a partir do diagrama da Fig. 1.6. O cálculo teórico levando em conta esses loops fornece uma taxa de ramificação [37]

$$\text{BR}_{\text{MP}}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha}{32\pi} \left| \sum_{i=2,3} U_{\mu i}^* U_{ei} \frac{\Delta m_{i1}^2}{m_W^2} \right|^2 \simeq 10^{-54}, \quad (1.39)$$

em que U é a matriz de mistura dos neutrinos autoestados de sabor com os autoestados de massa apresentada na Eq. (3.104), m_W a massa do bóson W e $\Delta m_{ij}^2 = m_i^2 - m_j^2$ a diferença quadrada de massa, com m_i a massa do neutrino i . Esse valor previsto pelo MP é cerca de 40 ordens de grandeza inferior a atual sensibilidade experimental de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) < 4.2 \times 10^{-13}$ [1], de modo que a observação de algum sinal desse decaimento nos próximos anos pode ser um indicativo de física além do MP.

Figura 1.6: Decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ no MP com neutrinos massivos.

É importante destacar que o formalismo descrito aqui não depende do modelo considerado, toda informação dependente de modelo está contida nos fatores de forma $F_2(0)$ e $G_2(0)$ que precisam ser avaliados em cada caso.

Nesse capítulo introduzimos o conceito de momento magnético de férmions de spin 1/2, descrevemos o problema da anomalia a_μ , que perdura há 10 anos na literatura, e formalizamos o cálculo de uma maneira independente de modelo. Nosso propósito aqui é estudar possíveis soluções teóricas para a discrepância Δa_μ .

Além disso, também foi introduzido o decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ e formalizada a obtenção de $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ a partir da amplitude de espalhamento, novamente de uma forma independente de modelo. Para obtenção dessa taxa de ramificação, aparecem contribuições do fator de forma $F_2(0)$ também presentes em a_μ , o que evidencia a relação entre os dois processos.

No próximo capítulo iremos discutir algumas ferramentas necessárias para calcular os fatores de forma que contribuem para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ em nível de *1-loop*. Isso nos preparará para avaliar novas contribuições eletrofracas possíveis além do MP.

Capítulo 2

Algumas Ferramentas Técnicas Necessárias

Nesse capítulo desenvolveremos algumas ideias e ferramentas necessárias para calcular as contribuições de 1-*loop* para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ no MP e além do MP.

Discutiremos como formular as integrais de *loop* que aparecem no cálculo desses observáveis em termos das integrais de Passarino-Veltman [53] e também como usar a técnica dos projetores para identificar as partes das amplitudes que contribuem para os fatores de forma que entram nesses observáveis.

2.1 Breve discussão sobre regularização dimensional

Nos cálculos de *loops* que encontraremos aqui diversas vezes nos deparamos com integrais que divergem. Entretanto, quando calculamos observáveis físicos de interesse a partir de Teoria Quântica de Campos esperamos que os valores teóricos obtidos sejam finitos já que estamos comparando o resultado com algo que é medido experimentalmente.

Essa aparente incoerência se explica pois os *loops* nunca são medidos diretamente já que são estados intermediários do cálculo, temos que levar em conta as diferentes contribuições para obtermos um resultado que tem significado físico. Quando consideramos os diferentes *loops* essas divergências das integrais se cancelam e obtemos um resultado finito para os observáveis de interesse nessa dissertação. No entanto é útil isolar as divergências para verificar que de fato se cancelam no final. Utilizamos para isso o procedimento de regularização dimensional.

O procedimento de regularização dimensional se baseia no fato de que as integrais que são divergentes quando realizadas sobre um espaço de quadridimensional convergem quando o espaço possui d dimensões, sendo d um número não inteiro. Para isso iremos utilizar uma continuação analítica da dimensão do espaço-tempo e estudar as divergências e possíveis cancelamentos nesse regime, sendo que no limite $d \rightarrow 4$ retomamos o resultado desejado.

Essa ideia de continuar analiticamente a dimensão foi aplicada inicialmente no contexto de mecânica estatística [80] e depois, em meados da década de 70, utilizada para regularização dimensional em Teoria Quântica de Campos [81–84]. Essas integrais, assim como a em quatro dimensões, respeitam as relações de linearidade e invariância por translações (para mais detalhes sobre as propriedades ver [85]).

Aqui, como iremos utilizar esse tipo de regularização iremos escrever a métrica como $d^d k / (2\pi)^d$,

onde k é o d-momento sobre o qual estamos integrando e ainda tomaremos $d = 4 - \epsilon$ para tratar as divergências no limite ultravioleta (UV) $k \rightarrow \infty$ que podem aparecer nas integrais. Para o caso de divergências no limite de $k \rightarrow 0$ será utilizado $d = 4 + \epsilon$ se necessário, sendo que em ambos os casos iremos tomar $\epsilon \rightarrow 0$ no resultado final para retomar $d = 4$.

Vale destacar também que, exigindo que a ação seja adimensional, podemos ter alterações na dimensão dos campos. Para ilustrar isso tome o caso da Lagrangeana com um o termo cinético tanto para o férmion quanto para o fóton e ainda o termo de interação entre eles, que está relacionada à ação

$$S = \int d^d x \left[\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu + m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \right], \quad (2.1)$$

de onde vem que a dimensão de energia desses termos é

$$\begin{aligned} \bullet \quad [\partial_\mu] = 1 \quad \text{e} \quad [d^d x] = -d \quad \Rightarrow \quad [S] = 0 = [d^d x] + 2[\Psi] + [\partial_\mu] = -d + 2[\Psi] + 1 \quad \Rightarrow \quad [\Psi] = \frac{(d-1)}{2}, \\ \bullet \quad [F_{\mu\nu}] = [\partial_\mu] + [A_\nu] = 1 + [A_\nu] \quad \Rightarrow \quad [S] = 0 = [d^d x] + 2[F_{\mu\nu}] = -d + 2 + 2[A_\nu] \\ \Rightarrow \quad [A_\mu] = \frac{(d-2)}{2}. \end{aligned}$$

É importante perceber que a partir dessa análise temos também que

$$[S] = 0 = [d^d x] + 2[\Psi] + [A_\mu] + [e] = -d + (d-1) + \frac{(d-2)}{2} + [e] \Rightarrow [e] = \frac{(4-d)}{2} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Para evitar que o acoplamento seja dimensional iremos introduzir o parâmetro μ com dimensão de energia, de forma que iremos considerar a substituição

$$e \rightarrow e\mu^{\epsilon/2}. \quad (2.2)$$

Observe que no contexto dessa regularização as regras de Feynman que envolvem e também são modificadas e recebem um fator $\mu^{\epsilon/2}$ adicional.

2.2 Forma Geral das integrais de 1-loop

As integrais tensoriais mais gerais possíveis obtidas a partir do cálculo de 1-loop podem ser descritas como

$$T_n^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p} \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{f(k, p_1, \ldots, p_n, \ldots)^{\mu_1\ldots\mu_p}}{D_0 D_1 \ldots D_{n-1}} \quad \text{com} \quad D_i = (k + r_i)^2 - m_i^2 + i\varepsilon, \quad (2.3)$$

onde

$$r_j = \sum_{i=1}^j p_i \quad \text{com} \quad j \in \{1, n-1\} \quad \text{e} \quad r_0 = \sum_{i=0}^n p_i = 0, \quad (2.4)$$

e m_i é a massa da partícula associada ao propagador de momento $(k + r_i)$, o momento p_i está associado a perna externa i como representado na Fig. 2.1 e a função $f(\ldots)$ depende dos momentos envolvidos e das massas já que não iremos incluir as matrizes de Dirac γ^μ e γ^5 na integral. Aqui estamos considerando que todos os n momentos externos estão direcionados para o loop como representado na Fig. 2.1.

Figura 2.1: Diagrama geral com n linhas internas .

A partir da invariância de Lorentz podemos concluir que qualquer integral tensorial pode ser decomposta como a soma de integrais escalares onde toda dependência tensorial se dá nos coeficientes, que por sua vez são combinações dos momentos externos envolvidos e da métrica de Minkowski.

Além disso, para valores de $n > 5$ temos que as integrais escalares podem sempre ser reduzidas a integrais de $n = 5$, que por sua vez podem ser escritas como a soma de cinco integrais relacionadas a diagramas do tipo *box* ($n = 4$) [86, 87]. Sendo assim, o cálculo de qualquer integral de 1-loop sempre pode ser reduzido ao cálculo de integrais escalares de até quatro pontos. Nas próximas seções iremos explorar quais integrais tensoriais ($n \leq 4$) podem surgir no estudo de integrais de 1-loop e também como elas se reduzem a integrais escalares.

2.3 Integrais Tensoriais e suas decomposições

As integrais de 1-loop envolvem termos onde 4-momentos no numerador estão contraídos com matrizes de Dirac, i.e. $\not{p} = p^\mu \gamma_\mu$. Considerando uma integral geral como essa, os coeficientes das matrizes de Dirac podem ser sempre escritos como a integral da Eq. (2.3), que por sua vez pode ser decomposta em uma combinação de integrais do tipo

$$A_0(m_0^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{D_0}, \quad (2.5)$$

$$B_0; B^\mu; B^{\mu\nu}(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1; k^\mu; k^{\mu\nu}}{D_0 D_1}, \quad (2.6)$$

$$C_0; C^\mu; C^{\mu\nu}; C^{\mu\nu\rho}(p_1^2, r_{12}^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1; k^\mu; k^{\mu\nu}; k^{\mu\nu\rho}}{D_0 D_1 D_2}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} D_0; D^\mu; D^{\mu\nu}; D^{\mu\nu\rho}; D^{\mu\nu\rho\sigma}(p_1^2, r_{12}^2, r_{23}^2, r_{13}^2, p_2^2, p_3^2, m_0^2, \dots, m_3^2) = \\ = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1; k^\mu; k^{\mu\nu}; k^{\mu\nu\rho}; k^{\mu\nu\rho\sigma}}{D_0 D_1 D_2 D_3}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde $r_{ij}^2 = (r_i - r_j)^2$.

Essa decomposição foi proposta inicialmente por Passarino e Veltman em 1978 [53] para obter a expressão analítica da seção de choque do processo $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ com correções de 1-loop, de forma que essas integrais recebem o nome de integrais de Passarino-Veltman.

Como comentado anteriormente, pela invariância de Lorentz essas funções tensoriais podem ser sempre reduzidas a uma combinação de integrais escalares com coeficientes que dependem dos momentos externos p_i^μ e da métrica de Minkowski $g^{\mu\nu}$, decomposição que pode ser escrita como

$$B^\mu = p_1^\mu B_1, \quad (2.9)$$

$$B^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} B_{00} + p_1^\mu p_1^\nu B_{11}, \quad (2.10)$$

$$C^\mu = p_1^\mu C_1 + p_2^\mu C_2 C^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} C_{00} + \sum_{i,j=1}^2 p_i^\mu p_j^\nu C_{ij} \quad \text{com } C_{12} = C_{21}, \quad (2.11)$$

$$C^{\mu\nu\rho} = \sum_{i=1}^2 (g^{\mu\nu} p_i^\rho + g^{\nu\rho} p_i^\mu + g^{\rho\mu} p_i^\nu) C_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^2 p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho C_{ijk}, \quad (2.12)$$

$$D^\mu = p_1^\mu D_1 + p_2^\mu D_2 + p_3^\mu D_3, \quad (2.13)$$

$$D^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} D_{00} + \sum_{i,j=1}^3 p_i^\mu p_j^\nu D_{ij}, \quad (2.14)$$

$$D^{\mu\nu\rho} = \sum_{i=1}^3 g^{\{\mu\nu} p_i^{\rho\}} D_{00i} + \sum_{i,j,k=1}^3 p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho D_{ijk}, \quad (2.15)$$

$$D^{\mu\nu\rho\sigma} = \sum_{i=1}^3 g^{\{\mu\nu} g^{\alpha\beta\}} D_{0000} + \sum_{i,j=1}^3 g^{\{\mu\nu} p_i^\rho p_j^\sigma\}} D_{00ij} + \sum_{i,j,k,l=1}^3 p_i^\mu p_j^\nu p_k^\rho p_l^\sigma D_{ijkl}, \quad (2.16)$$

onde a dependência das integrais com os momentos foi omitida e foi utilizada a notação $g^{\{\mu\nu} p_i^{\rho\}}$ para representar a soma desses termos com todas as combinações possíveis de índices de Lorentz. Essas funções escalares (B_1 , B_{00} , etc), por sua vez, podem ser sempre reduzidas às funções A_0 , B_0 , C_0 e D_0 , de forma que sempre podemos escrever nossos resultados a nível de 1-loop como uma combinação dessas quatro funções fundamentais.

Para exemplificar essa redução iremos estudar o caso de B^μ e $B^{\mu\nu}$. Contraindo ambos os lados da Eq. (2.9) com $p_{1\mu}$ (aqui iremos considerar $p_1^2 \neq 0$) vem

$$p_{1\mu} B^\mu = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{(p_1 \cdot k)}{D_0 D_1} = p_1^2 B_1. \quad (2.17)$$

Olhando para a definição de D_0 e D_1 temos

$$\begin{aligned} D_0 &= k^2 - m_0^2 \quad \text{e} \quad D_1 = (k + p_1)^2 - m_1^2 = k^2 + 2k \cdot p_1 + p_1^2 - m_1^2 \\ \Rightarrow D_1 &= k^2 + 2k \cdot p_1 + p_1^2 - m_1^2 - m_0^2 + m_0^2 = D_0 + 2k \cdot p_1 + p_1^2 + m_1^2 + m_0^2 \\ &\Rightarrow k \cdot p_1 = \frac{1}{2} (D_1 - D_0 + (m_1^2 - m_0^2 - p_1^2)), \end{aligned} \quad (2.18)$$

e substituindo na Eq. (2.17) temos

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{2p_1^2} \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \left[\frac{1}{D_0} - \frac{1}{D_1} + (m_1^2 - m_0^2 - p_1^2) \frac{1}{D_0 D_1} \right] \\ &= \frac{1}{2p_1^2} [A_0(m_0^2) - A_0(m_1^2) + (m_1^2 - m_0^2 - p_1^2) B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Olhando agora para o caso de $B^{\mu\nu}$ na Eq. (2.10) podemos novamente contrair ambos os lados com $p_{1\mu}$ para obter

$$\begin{aligned} p_{1\mu} B^{\mu\nu} &= \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{(p_1 \cdot k) k^\nu}{D_0 D_1} = p_1^\nu B_{00} + p_1^\nu p_1^2 B_{11} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{(D_1 - D_0 + (m_1^2 - m_0^2 - p_1^2)) k^\nu}{D_0 D_1} = p_1^\nu B_{00} + p_1^\nu p_1^2 B_{11} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{(D_1 - D_0) k^\nu}{D_0 D_1} + \frac{1}{2} (m_1^2 - m_0^2 - p_1^2) B^\nu = p_1^\nu B_{00} + p_1^\nu p_1^2 B_{11}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

A primeira parte dessa integral pode ser escrita como

$$\frac{1}{2} \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{D_1 k^\nu}{D_0 D_1} = \frac{1}{2} \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{k^\nu}{(k^2 - m_0^2)} = 0, \quad (2.21)$$

onde usamos na última igualdade que ela é ímpar em k e estamos integrando no espaço inteiro. Entretanto, olhando para a parte com D_0 no numerador vem que

$$\frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{D_0 k^\nu}{D_0 D_1} = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{k^\nu}{(k + p_1)^2 - m_1^2} = -p_1^\nu A_0(m_1^2), \quad (2.22)$$

em que fizemos $k \rightarrow k - p_1$ já que essa integral é invariante por translação. Substituindo essa relação em conjunto com (2.17) em (2.20) vem que

$$B_{11}(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{1}{2p_1^2} [(m_1^2 - m_0^2 - p_1^2) B_1(p_1^2, m_0^2, m_1^2) + A_0(m_1^2) + B_{00}(p_1^2, m_0^2, m_1^2)]. \quad (2.23)$$

De modo similar, contraindo ambos os lados da Eq. (2.10) com $g_{\mu\nu}$ e utilizando $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = d$ vem

$$\frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{k^2}{D_0 D_1} = d B_{00} + p_1^2 B_{11}. \quad (2.24)$$

Escrevendo $k^2 = D_0 + m_0^2$ e utilizando (2.23) podemos escrever B_{00} como

$$B_{00} = \frac{1}{2(d-1)} [A_0(m_1^2) + 2m_0^2 B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) - (m_1^2 - m_0^2 - p_1^2) B_1(p_1^2, m_0^2, m_1^2)], \quad (2.25)$$

que pode ser escrita apenas em função de A_0 e B_0 com uso de (2.19). Esse tipo de procedimento pode ser feito em qualquer uma das funções tensoriais, de forma que todas integrais escalares podem ser reduzidas a A_0 , B_0 , C_0 e D_0 como apresentado na Tab. 2.1. Os coeficientes dessa decomposição podem ser encontrados em [3].

D_{ijkl}	$\rightarrow$	$D_{00ij}, D_{ijk}, C_{ijk}, C_{ij}, C_i, C_0$
D_{00ij}	$\rightarrow$	$D_{ijk}, D_{ij}, C_{ij}, C_i$
D_{0000}	$\rightarrow$	D_{00i}, D_{00}, C_{00}
D_{ijk}	$\rightarrow$	$D_{00i}, D_{ij}, C_{ij}, C_i$
D_{00i}	$\rightarrow$	D_{ij}, D_i, C_i, C_0
D_{ij}	$\rightarrow$	D_{00}, D_i, C_i, C_0
D_{00}	$\rightarrow$	D_i, D_0, C_0
D_i	$\rightarrow$	D_0, C_0
C_{ijk}	$\rightarrow$	$C_{00i}, C_{ij}, B_{ij}, B_i$
C_{00i}	$\rightarrow$	C_{ii}, C_i, B_i, B_0
C_{ij}	$\rightarrow$	C_{00}, C_i, B_i, B_0
C_{00}	$\rightarrow$	C_i, C_0, B_0
C_i	$\rightarrow$	C_0, B_0
B_{ii}	$\rightarrow$	B_{00}, B_i, A_0
B_{00}	$\rightarrow$	B_i, B_0, A_0
B_i	$\rightarrow$	B_0, A_0

Tabela 2.1: Decomposição das funções escalares retirada de [3]

2.4 Integrais Escalares

Tendo em vista que todas integrais a nível de 1-loop dependem dessas integrais escalares é interessante realizarmos uma discussão mais aprofundada sobre elas. A partir disso iremos obter expressões analíticas para as integrais escalares e alguns limites de interesse para o nosso estudo.

2.4.1 Parametrização de Feynman

O primeiro passo para entender o formato dessas integrais é o estudo da parametrização de Feynman, a partir de onde é possível juntar diferentes denominadores presentes nas integrais em um só e simplificar as integrais sobre $d^d k$ que podem aparecer. Para isso iremos partir da definição da função Γ

$$\Gamma(m) \equiv \int_0^\infty dt t^{m-1} e^{-t} \Rightarrow \frac{\Gamma(m)}{a^m} = \int_0^\infty dt t^{m-1} e^{-ta}, \quad (2.26)$$

em que foi feita a mudança de variável $t \rightarrow t/a$. A partir dessa expressão, no caso em que $m = 1$ podemos escrever

$$\frac{1}{D_0} = \int_0^\infty dt e^{-tD_0} \Rightarrow \frac{1}{D_0 D_1} = \int_0^\infty \int_0^\infty dt_0 dt_1 e^{-(t_0 D_0 + t_1 D_1)}, \quad (2.27)$$

e introduzindo a unidade dos dois lados vem

$$1 = \int_0^\infty dt \delta(t - t_0 - t_1) \Rightarrow \frac{1}{D_0 D_1} = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty dt_0 dt_1 dt e^{-(t_0 D_0 + t_1 D_1)} \delta(t - t_0 - t_1). \quad (2.28)$$

Podemos fazer novamente uma mudança de variável $t_i \rightarrow x_i = t_i/t$, de onde vem que

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_0 D_1} &= \int_0^\infty \int_0^\infty dx_0 dx_1 \int_0^\infty dt t^2 e^{-t(x_0 D_0 + x_1 D_1)} \delta(t(1 - x_0 - x_1)) \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty dx_0 dx_1 \int_0^\infty dt t e^{-t(x_0 D_0 + x_1 D_1)} \delta(1 - x_0 - x_1), \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde utilizamos a propriedade da função delta $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ na última igualdade. Aqui podemos identificar a função $\Gamma(m=2) = 1$ para o caso de $a = (x_0 D_0 + x_1 D_1)$ na expressão (2.26), e portanto podemos escrever essa relação como

$$\frac{1}{D_0 D_1} = \int_0^\infty \int_0^\infty dx_0 dx_1 \frac{\delta(1 - x_0 - x_1)}{(x_0 D_0 + x_1 D_1)^2} = \int_0^1 dx_0 \frac{1}{(x_0 D_0 + (1 - x_0) D_1)^2}. \quad (2.30)$$

A generalização dessa expressão para o caso com n denominadores é direta, o que muda é que nesse caso iremos inserir $\delta(t - t_0 - \dots - t_n)$ no lugar de $\delta(t - t_0 - t_1)$, além de identificar a função $\Gamma(m=n)$ com $a = (x_0 D_0 + \dots + x_n D_n)$ de modo similar ao que foi feito nesse caso mais simples, a partir de onde vem a expressão geral

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_0 D_1 \dots D_n} &= \Gamma(n) \int_0^\infty dx_0 \dots \int_0^\infty dx_n \frac{\delta(1 - x_0 - \dots - x_n)}{(x_0 D_0 + \dots + x_n D_n)^n} \\ &= \Gamma(n) \int_0^1 dx_0 \int_0^{1-x_0} dx_1 \dots \int_0^{1-x_0-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} \frac{1}{(x_0 D_0 + \dots + (1 - x_0 - \dots - x_{n-1}) D_n)^n}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Vale destacar que o limite das integrais nesse caso muda para que se garanta sempre a igualdade $1 - x_0 - \dots - x_n = 0$. Agora que todos os denominadores estão juntos podemos usar a rotação de Wick (veja Apêndice D) para escrever as integrais que aparecem nos nossos cálculos (D.18)

$$\int d^d k \frac{k^{2r}}{(k^2 - C)^n} = i\pi^{d/2} (-1)^{n-r} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + r) \Gamma(n - \frac{d}{2} - r)}{\Gamma(n) \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{1}{C}\right)^{n-d/2-r},$$

o que pode ser útil também no cálculo direto de integrais escalares sem a necessidade de reduzirmos a A_0 , B_0 , C_0 e D_0 , como por exemplo na Eq. (2.24).

Podemos agora utilizar os resultados discutidos acima para obter expressões para algumas dessas integrais escalares. Para isso iremos usar algumas propriedades da função Γ que encontram-se no Apêndice D.

2.4.2 $A_0(m_0^2)$

A partir da definição (2.5) dessa função podemos escrevê-la como

$$A_0(m_0^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m_0^2)},$$

e comparando com a Eq. (D.18) no caso $r=0$ e $n=1$ vem

$$A_0(m_0^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} i \frac{\pi^2}{\pi^{\epsilon/2}} \frac{\Gamma(-1 + \epsilon/2)}{\Gamma(1)} m_0^2 m_0^{-\epsilon} = -m_0^2 \left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2}\right)^{\epsilon/2} \Gamma(-1 + \epsilon/2).$$

Utilizando

$$\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2}\right)^{\epsilon/2} = e^{\frac{\epsilon}{2}\ln(4\pi\mu^2/m_0^2)} = 1 + \frac{\epsilon}{2}\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.32)$$

e a expansão da função Γ (D.24) podemos escrever

$$\begin{aligned} A_0(m_0^2) &= -m_0^2 \left[1 + \frac{\epsilon}{2}\ln\left(\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \cdot \left[-\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &= m_0^2 \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) + 1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\ &= m_0^2 \left[\Delta_\epsilon + 1 + \ln\left(\frac{\mu^2}{m_0^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde foi omitido o termo $\mathcal{O}(\epsilon)$ na última linha pois ele vai a zero quando $\epsilon \rightarrow 0$ e definimos

$$\Delta_\epsilon \equiv \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi). \quad (2.34)$$

2.4.3 $B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2)$

Pela definição temos

$$B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m_0^2)((k + p_1)^2 - m_1^2)}, \quad (2.35)$$

e utilizando a parametrização de Feynman (2.31) podemos escrever

$$\begin{aligned} &\int d^d k \frac{1}{(k^2 - m_0^2)((k + p_1)^2 - m_1^2)} \\ &= \Gamma(2) \int_0^1 dx \int d^d k \frac{1}{(x(k^2 - m_0^2) + (1-x)((k + p_1)^2 - m_1^2))^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d^d k \frac{1}{[x(k^2 - m_0^2) + (1-x)((k + p_1)^2 - m_1^2)]^2} \\ &= \int_0^1 dx \int d^d k \frac{1}{[(k + (1-x)p_1)^2 - C]^2} = \int_0^1 dx \int d^d k \frac{1}{[k^2 - C]^2}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que na última igualdade utilizamos a invariância por translação da integral para transformar $k \rightarrow k - (1-x)p_1$ e definimos

$$C \equiv x m_0^2 + (1-x) m_1^2 + x(x-1) p_1^2. \quad (2.37)$$

Utilizando agora nosso resultado da Eq. (D.18) ($r = 0$, $n = 2$) em conjunto com (2.36), substituindo na Eq. (2.35) temos

$$\begin{aligned} B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) &= \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{i\pi^2}{\pi^{\epsilon/2}} \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{\Gamma(2)} C^{-\epsilon/2} \right] \\ &= \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\mu^2}{C} \right)^{\epsilon/2} \Gamma(\epsilon/2), \end{aligned} \quad (2.38)$$

de forma que utilizando (D.23) e (2.32) podemos escrever B_0 como

$$\begin{aligned}
B_0(p_1^2, m_0^2, m_1^2) &= \int_0^1 dx \left[1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \left(\frac{4\pi\mu^2}{C} \right) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right] \cdot \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon) \right] \\
&= \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{x m_0^2 + (1-x) m_1^2 + x(x-1) p_1^2}{\mu^2} \right) \\
&= \Delta_\epsilon - \int_0^1 dx \ln \left(\frac{x m_0^2 + (1-x) m_1^2 - x(1-x) p_1^2}{\mu^2} \right). \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Vale destacar aqui que essa função é simétrica por trocas $m_0 \leftrightarrow m_1$ já que isso equivale a troca $x \leftrightarrow (1-x)$ em (2.39). Vale ainda destacar algumas expressões para B_0 em casos mais simples [88]

$$B_0(0, 0, m^2) = B_0(0, m^2, 0) = \Delta_\epsilon - \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + 1, \tag{2.40}$$

$$B_0(0, m^2, m^2) = \Delta_\epsilon - \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right), \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned}
B_0(p^2, 0, m^2) &= \Delta_\epsilon + \frac{m^2}{p^2} \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{m^2} \right) - \ln \left(\frac{m^2 - p^2}{\mu^2} \right) + 2 \\
&\xrightarrow{p^2 \rightarrow m^2} \Delta_\epsilon - \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) + 2, \tag{2.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0(0, m_0^2, m_1^2) &= \Delta_\epsilon + 1 - \frac{m_0^2 \ln \left(\frac{m_0^2}{\mu^2} \right) - m_1^2 \ln \left(\frac{m_1^2}{\mu^2} \right)}{m_0^2 - m_1^2} \\
&\xrightarrow{m_1^2 \rightarrow m_0^2} \Delta_\epsilon - \ln \left(\frac{m_0^2}{\mu^2} \right). \tag{2.43}
\end{aligned}$$

2.4.4 $C_0(p_1^2, r_{12}^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2)$

Pela definição de C_0 podemos escrever

$$\begin{aligned}
C_0(p_1^2, r_{12}^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) &= \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m_0^2) ((k + p_1)^2 - m_1^2) ((k + p_1 + p_2)^2 - m_2^2)} \\
&= \Gamma(3) \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{\delta(1-x-y-z)}{[x D_0 + y D_1 + z D_2]^3} \\
&= \Gamma(3) \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \frac{1}{[(1-y-z) D_0 + y D_1 + z D_2]^3}, \tag{2.44}
\end{aligned}$$

em que foi utilizada a parametrização de Feynman para escrever a última igualdade. O denominador pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
&(1-y-z) D_0 + y D_1 + z D_2 \\
&= (1-y-z) (k^2 - m_0^2) + y ((k + p_1)^2 - m_1^2) + z ((k + p_1 + p_2)^2 - m_2^2) \\
&= k^2 + 2k \cdot [y p_1 + z (p_1 + p_2)] + y p_1^2 - y m_1^2 - (1-y-z) m_0^2 + z (p_1 + p_2)^2 - z m_2^2 \\
&= (k + y p_1 + z (p_1 + p_2))^2 - C, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
C &\equiv -y p_1^2 + y m_1^2 + (1 - y - z) m_0^2 - z (p_1 + p_2)^2 + z m_2^2 + (y p_1 + z (p_1 + p_2))^2 \\
&= m_0^2 + y [m_1^2 - p_1^2 - m_0^2] + z [(p_1 - p_2)^2 - 2p_1^2 - 2p_2^2 + m_2^2 - m_0^2] \\
&\quad + y^2 p_1^2 + y z [3p_1^2 + p_2^2 - (p_1 - p_2)^2] - z^2 [(p_1 - p_2)^2 - 2p_1^2 - 2p_2^2],
\end{aligned} \tag{2.46}$$

em que usamos $(p_1 + p_2)^2 = 2p_1^2 + 2p_2^2 - (p_1 - p_2)^2$ e também $2 p_1 \cdot (p_1 + p_2) = 3p_1^2 + p_2^2 - (p_1 - p_2)^2$ para escrever C em termos de $y, z, m_0, m_1, m_2, p_1^2, p_2^2$ e $(p_1 - p_2)^2$ para que seja possível relacionar diretamente com $C_0(p_1^2, r_{12}^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2)$.

Como a Eq. (2.44) é invariante por translações podemos fazer $k \rightarrow k - y p_1 - z (p_1 + p_2)$ para obter

$$\begin{aligned}
C_0(p_1^2, r_{12}^2, p_2^2, m_0^2, m_1^2, m_2^2) &= \Gamma(3) \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^d k \frac{1}{[k^2 - C]^3} \\
&= \frac{-(2\pi\mu)^\epsilon \Gamma(1 + \epsilon/2)}{\pi^{\epsilon/2}} \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left(\frac{1}{C}\right)^{1+\epsilon/2} \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} - \int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \left(\frac{1}{C}\right),
\end{aligned} \tag{2.47}$$

em que foi utilizada a expressão (D.16) e feita a devida expansão em ϵ com base nos resultados já derivados para obter o termo de ordem $\mathcal{O}(\epsilon^0)$.

A partir dessa expressão podemos escrever algumas expressões para a integral escalar em casos particulares

$$C_0(0, 0, 0, m_0^2, m_1^2, m_2^2) = -\frac{1}{m_0^2} \frac{\left(\frac{m_1^2 m_2^2}{m_0^4} - \frac{m_1^2}{m_0^2}\right) \ln\left(\frac{m_1^2}{m_0^2}\right) - \left(\frac{m_1^2 m_2^2}{m_0^4} - \frac{m_2^2}{m_0^2}\right) \ln\left(\frac{m_2^2}{m_0^2}\right)}{\left(\frac{m_1^2}{m_0^2} - 1\right) \left(\frac{m_2^2}{m_0^2} - 1\right) \left(\frac{m_1^2}{m_0^2} - \frac{m_2^2}{m_0^2}\right)} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
&\xrightarrow{m_2 \rightarrow m_1} -\frac{1}{m_0^2} \frac{\left(\frac{m_1^2}{m_0^2} - \ln\left(\frac{m_1^2}{m_0^2}\right) - 1\right)}{\left(\frac{m_1^2}{m_0^2} - 1\right)^2} \\
&\xrightarrow{m_1 \rightarrow m_0} -\frac{1}{2m_0^2},
\end{aligned} \tag{2.49}$$

$$\tag{2.50}$$

$$C_0(0, m^2, m^2, M^2, M^2, 0) = \frac{\ln\left(1 - \frac{m^2}{M^2}\right)}{m^2}. \tag{2.51}$$

Como nosso interesse é estudar as contribuições para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ a nível de 1-*loop*, elas envolvem no máximo três propagadores internos e portanto não iremos estudar aqui o caso da integral escalar D_0 .

Além dessas funções escalares, como mencionado anteriormente é muito importante também conseguir reconhecer as partes da amplitude de espalhamento em que estamos interessados. Na próxima seção iremos discutir projetores, ferramenta muito útil justamente para a obtenção de partes específicas das amplitudes de espalhamento. Eles irão auxiliar na obtenção das diferentes contribuições para os observáveis que iremos estudar.

2.5 Projetores

Como foi visto anteriormente nas Eqs. (1.21) e (1.37) as contribuições para a_μ e para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ dependem de partes específicas da amplitude de espalhamento. Nessa seção iremos discutir como podemos identificar a partir da amplitude esses termos desejados e aplicar essa ferramenta como ilustração no cálculo da contribuição da QED a 1-loop para a_μ . Durante esse estudo será necessário o cálculo de alguns traços de matrizes de Dirac que, em alguns casos, foram obtidos a partir de um pacote do programa *Mathematica* [89] chamado *FeynCalc* [90].

Como já vimos, podemos escrever a forma mais geral da amplitude de espalhamento que representa os diagramas da Fig. 1.1 como $\mathcal{M}^\mu = -e \bar{u}(p_f) \Gamma^\mu u(p_i)$, com Γ^μ dada por (B.9)

$$\Gamma^\mu = A_1 \gamma^\mu + A_2 \frac{P^\mu}{(m_i + m_f)} + A_3 \frac{q^\mu}{(m_i + m_f)} + A_4 \gamma^\mu \gamma^5 + A_5 \gamma^5 \frac{P^\mu}{(m_i + m_f)} + A_6 \gamma^5 \frac{q^\mu}{(m_i + m_f)}, \quad (2.52)$$

lembrando que $P^\mu = p_i^\mu + p_f^\mu$ e $q^\mu = p_f^\mu - p_i^\mu$, de modo que para extrair os fatores A_j iremos construir projetores que respeitam

$$A_j = \text{Tr}[\mathcal{P}_{\mu j} \Gamma^\mu], \quad (2.53)$$

onde $\mathcal{P}_{\mu j}$ representa o projetor j e estamos tomando o traço sobre os índices das matrizes de Dirac para garantir que os coeficientes A_j 's sejam funções escalares. Vale notar também que como $\mathcal{P}_{\mu j}$ tem índice μ , pela invariancia de Lorentz podemos fazer uma decomposição similar à equação (2.52). Além disso, como os férmions l_i e l_f são *on-shell* queremos que qualquer Γ^μ que envolva termos do tipo $\dots (\not{p}_i - m_i) + \dots + (\not{p}_f - m_f) \dots$ seja zero já que $\bar{u}(p_f) \not{p}_f = \bar{u}(p_f) m_f$ e $\not{p}_i u(p_i) = m_i u(p_i)$.

Sendo assim, para garantir que essa condição seja respeitada e levando em conta a decomposição discutida podemos escrever o projetor $\mathcal{P}^\mu$ mais geral como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^\mu = (\not{p}_i + m_i) & \left[c_1 \gamma^\mu + c_2 \frac{P^\mu}{(m_i + m_f)} + c_3 \frac{q^\mu}{(m_i + m_f)} + c_4 \gamma^\mu \gamma^5 \right. \\ & \left. + c_5 \gamma^5 \frac{P^\mu}{(m_i + m_f)} + c_6 \gamma^5 \frac{q^\mu}{(m_i + m_f)} \right] (\not{p}_f + m_f), \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde introduzimos $(\not{p}_i + m_i)$ do lado esquerdo e $(\not{p}_f + m_f)$ do lado direito para satisfazer automaticamente a condição das partículas *on-shell* já que $(\not{p}_i + m_i)(\not{p}_i - m_i) = p_i^2 - m_i^2 = 0$ e $(\not{p}_f + m_f)(\not{p}_f - m_f) = p_f^2 - m_f^2 = 0$.

Ao tomarmos o traço $\text{Tr}[\mathcal{P}_\mu \Gamma^\mu]$ cada diferente combinação de c_j 's nos dará uma combinação de A_j 's, e portanto o objetivo agora é encontrar quais valores esses coeficientes devem assumir para que reste apenas um dos A_j 's. Em um primeiro momento iremos estudar esses projetores no contexto de a_i , ou seja, no caso em que $m_i = m_f = m$.

2.5.1 Projetores para a_i

Nesse caso, o projetor mais geral possível se reduz a

$$\mathcal{P}_\mu^{a_i} = (\not{p}_i + m) \left[c_1 \gamma_\mu + c_2 \frac{P_\mu}{2m} + c_3 \frac{q_\mu}{2m} + c_4 \gamma_\mu \gamma^5 + c_5 \gamma^5 \frac{P_\mu}{2m} + c_6 \gamma^5 \frac{q_\mu}{2m} \right] (\not{p}_f + m),$$

e tomando o traço $\text{Tr}[\mathcal{P}_\mu^{a_i} \Gamma^\mu]$ vem

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathcal{P}_\mu^{a_i} \Gamma^\mu] &= A_1 [c_1(2dq^2 - 4q^2 + 8m^2) + c_2(8m^2 - 2q^2)] \\ &+ A_2 \left[c_1(8m^2 - 2q^2) + c_2 \left(8m^2 - 4q^2 + \frac{q^4}{2m^2} \right) \right] + A_3 \left[c_3 \left(2q^2 - \frac{q^4}{2m^2} \right) \right] \\ &+ A_4 [c_4(2dq^2 - 8dm^2 - 4q^2 + 8m^2) + 2c_6q^2] \\ &+ A_5 \left[c_5 \left(2q^2 - \frac{q^4}{2m^2} \right) \right] + A_6 \left[-2c_4q^2 + c_6 \frac{q^4}{2m^2} \right], \end{aligned} \quad (2.55)$$

onde d representa a dimensão do espaço em que estamos trabalhando. Podemos notar que os fatores $A_{1,2,3}$ ($A_{4,5,6}$) se relacionam apenas com $c_{1,2,3}$ ($c_{4,5,6}$), o que se deve ao fato de que $\text{Tr}[\gamma^5] = \text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu] = \text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu] = \text{Tr}[\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho] = 0$ para $d \neq 2$.

Para encontrar a combinação de c 's que respeita a Eq. (2.53) o coeficiente de A_j deve ser igual a 1 e os demais devem se anular. Temos então um sistema de equações para cada j , que têm como solução

$$\mathcal{P}_{\mu 1}^{a_i} : \quad c_1 = \frac{1}{2(d-2)q^2} \quad e \quad c_2 = -\frac{2m^2}{(d-2)q^2(4m^2 - q^2)}, \quad (2.56)$$

$$\mathcal{P}_{\mu 2}^{a_i} : \quad c_1 = -\frac{2m^2}{(d-2)q^2(4m^2 - q^2)} \quad e \quad c_2 = \frac{2m^2(dq^2 + 4m^2 - 2q^2)}{(d-2)q^2(4m^2 - q^2)^2}, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{P}_{\mu 3}^{a_i} : \quad c_3 = -\frac{2m^2}{q^2(q^2 - 4m^2)}, \quad (2.58)$$

$$\mathcal{P}_{\mu 4}^{a_i} : \quad c_4 = -\frac{1}{2(d-2)(4m^2 - q^2)} \quad e \quad c_6 = -\frac{2m^2}{(d-2)q^2(4m^2 - q^2)}, \quad (2.59)$$

$$\mathcal{P}_{\mu 5}^{a_i} : \quad c_5 = -\frac{2m^2}{q^2(q^2 - 4m^2)}, \quad (2.60)$$

$$\mathcal{P}_{\mu 6}^{a_i} : \quad c_4 = \frac{2m^2}{(d-2)q^2(4m^2 - q^2)} \quad e \quad c_6 = \frac{2(d-2)m^2q^2 - 8(d-1)m^4}{(d-2)q^4(q^2 - 4m^2)}, \quad (2.61)$$

onde foram apresentados apenas os coeficientes diferentes de zero em cada uma das situações. No caso do estudo do momento magnético dos léptons, como

$$a_i = F_2(q^2 \rightarrow 0) = -A_2(q^2 \rightarrow 0), \quad (2.62)$$

o projetor relevante toma a forma

$$\mathcal{P}_{\mu 2}^{a_i} = -\frac{2m^2}{(d-2)q^2(4m^2 - q^2)}(\not{p}_i + m) \left[\gamma_\mu - \frac{((d-2)q^2 + 4m^2)}{(4m^2 - q^2)} \frac{P_\mu}{2m} \right] (\not{p}_f + m). \quad (2.63)$$

Vale destacar que o procedimento para obtenção dos projetores não depende da interação que acontece no vértice, apenas da forma geral da amplitude de espalhamento, e portanto esses podem ser utilizados na obtenção de contribuições de diagramas com mais de 1-loop. Para exemplificar o uso desses projetores e das funções de Passarino-Veltman iremos agora aplicar essas ferramentas a fim de obter a contribuição a nível de 1-loop da QED para o fator g .

2.5.2 Contribuição da QED para a_i a 1-loop

Essa contribuição está relacionada com o diagrama da Fig. 2.2 e sua amplitude de espalhamento pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}^\mu &= -i\mu^{\epsilon/2}e \bar{u}(p_f)\Gamma^\mu u(p_i) \\
&= \mu^{3\epsilon/2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \bar{u}(p_f) (-ie\gamma^\beta) \left(\frac{i(\not{k} - \not{p}_f + m)}{(k - p_f)^2 - m^2} \right) (-ie\gamma^\mu) \left(\frac{i(\not{k} - \not{p}_i + m)}{(k - p_i)^2 - m^2} \right) (-ie\gamma_\beta) \left(\frac{-ig_{\alpha\beta}}{k^2} \right) u(p_i) \\
&= -i\mu^{\epsilon/2}e \bar{u}(p_f) \left[\frac{e^2\mu^\epsilon}{i} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\beta(\not{k} - \not{p}_f + m)\gamma^\mu(\not{k} - \not{p}_i + m)\gamma_\beta}{k^2 ((k - p_i)^2 - m^2) ((k - p_f)^2 - m^2)} \right] u(p_i), \tag{2.64}
\end{aligned}$$

de onde podemos reconhecer Γ^μ e então obter A_2 a partir de

Figura 2.2: Contribuição da QED para a_i a nível de 1-loop.

$$\begin{aligned}
A_2 &= \text{Tr}[\mathcal{P}_{\mu 2}^{a_i} \Gamma^\mu] \\
&= \frac{e^2}{16\pi^2} \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \left[\int d^d k \frac{\mathcal{N}_2}{k^2 ((k - p_i)^2 - m^2) ((k - p_f)^2 - m^2)} \right], \tag{2.65}
\end{aligned}$$

com

$$\mathcal{N}_2 = -\frac{8m^2}{(q^2 - 4m^2)} \left[(d-1) \frac{(k \cdot P)^2}{(q^2 - 4m^2)} - \frac{(k \cdot q)^2}{q^2} + (d+1)(k \cdot P) + k^2 - 2(4m^2 - q^2) \right]. \tag{2.66}$$

Utilizando agora que $2k \cdot p = -(k - p)^2 + k^2 + p^2$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\bullet \quad 2k \cdot (p_f + p_i) &= 2k \cdot P = -(k - p_i)^2 - (k - p_f)^2 + 2k^2 + p_i^2 + p_f^2 \\
&= 2k^2 - ((k - p_i)^2 - m^2) - ((k - p_f)^2 - m^2) \equiv 2S_k - S_i - S_f, \tag{2.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad 2k \cdot (p_f - p_i) &= 2k \cdot q = -(k - p_f)^2 + (k - p_i)^2 + p_f^2 - p_i^2 \\
&= ((k - p_i)^2 - m^2) - ((k - p_f)^2 - m^2) \equiv S_i - S_f, \tag{2.68}
\end{aligned}$$

onde definimos $S_k \equiv k^2$, $S_i \equiv ((k - p_i)^2 - m^2)$ e $S_f \equiv ((k - p_f)^2 - m^2)$.

Podemos então modificar a Eq. (2.66) para

$$\mathcal{N}_2 = -\frac{4m^2}{(q^2 - 4m^2)} \left[(d-1) \frac{(k \cdot P)}{(q^2 - 4m^2)} (2S_k - S_i - S_f) - \frac{(k \cdot q)}{q^2} (S_i - S_f) + (d+1) (2S_k - S_i - S_f) + 2S_k - 4(4m^2 - q^2) \right]. \quad (2.69)$$

Como a Eq. (2.65) tem S_k , S_i e S_f no denominador podemos simplificar essa expressão com o uso de (2.69) para identificar as integrais que aparecem com as funções escalares

$$\bullet \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{(k^2 - m_\gamma^2) ((k - p_i)^2 - m^2) ((k - p_f)^2 - m^2)} = C_0(m^2, q^2, m^2, m_\gamma^2, m^2, m^2), \quad (2.70)$$

$$\bullet \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{((k - p_i)^2 - m^2) ((k - p_f)^2 - m^2)} = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{((k + p_f - p_i)^2 - m^2) (k^2 - m^2)} = B_0(q^2, m^2, m^2), \quad (2.71)$$

$$\bullet \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{1}{k^2 ((k - p_{i,f})^2 - m^2)} = B_0(m^2, 0, m^2), \quad (2.72)$$

$$\bullet \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{k^\mu}{(k^2 - m_\gamma^2) ((k - p_{i,f})^2 - m^2)} = B^\mu(p_{i,f}^2, m_\gamma^2, m^2) = -\frac{p_{i,f}^\mu}{2m^2} (A_0(m_\gamma^2) - A_0(m^2) - m_\gamma^2 B_0(m^2, m_\gamma^2, m^2)) \xrightarrow{m_\gamma \rightarrow 0} \frac{p_{i,f}^\mu}{2m^2} A_0(m^2), \quad (2.73)$$

$$\bullet \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \frac{k^\mu}{((k - p_i)^2 - m^2) ((k - p_f)^2 - m^2)} = \frac{(2\pi\mu)^\epsilon}{i\pi^2} \int d^d k \left(\frac{k^\mu}{((k + (p_f - p_i))^2 - m^2) (k^2 - m^2)} + \frac{p_f^\mu}{((k + (p_f - p_i))^2 - m^2) (k^2 - m^2)} \right) = B^\mu(q^2, m^2, m^2) + p_f^\mu B_0(q^2, m^2, m^2) = -\frac{q^\mu}{2} B_0(q^2, m^2, m^2) + p_f^\mu B_0(q^2, m^2, m^2) = \frac{P^\mu}{2} B_0(q^2, m^2, m^2), \quad (2.74)$$

onde na primeira expressão e na penúltima introduzimos uma massa m_γ para o fóton para evitar divergências nas contas intermediárias e tomamos o limite $m_\gamma \rightarrow 0$ no final.

Juntando todas essas expressões e substituindo na Eq. (2.65) vemos que A_2 pode ser escrito, no limite $q^2 \rightarrow 0$ e $d \rightarrow 4$, como

$$A_2 = -\frac{e^2}{16\pi^2} \frac{4m^2}{(q^2 - 4m^2)} \left[\frac{12m^2 (6m^2 - m_\gamma^2) B_0(0, m^2, m^2) - 20 (4m^4 - m^2 m_\gamma^2) B_0(m^2, m^2, m_\gamma^2)}{8m^4} - \frac{4m^2 (32m^4 - 24m^2 m_\gamma^2 + 3m_\gamma^4) C_0(0, m^2, m^2, m^2, m_\gamma^2) - 8m^2 A_0(m_\gamma^2) + 8m^2 A_0(m^2)}{8m^4} \right] \xrightarrow{m_\gamma \rightarrow 0} F_2(0) = -A_2(0) = \frac{2e^2}{16\pi^2} = \frac{\alpha_{\text{e.m.}}}{2\pi}, \quad (2.75)$$

onde foi feita a expansão das funções escalares no limite $m_\gamma \ll 1$ para obter o resultado final. Outra dedução de $F_2(0)$ a partir de projetores e funções de Passarino-Veltman pode ser encontrada em [91].

Aqui vale observar que o resultado independe de massa do férmion presente no *loop*. Isso ocorre somente até primeira ordem no cálculo da QED como já comentamos no Capítulo 1, quando estudamos as contribuições envolvendo mais *loops* a massa do férmion passa a ser relevante. Além disso, como veremos mais adiante, no caso em que calculamos as contribuições a 1-*loop* no MP a massa dos férmions no *loop* também será relevante, o que produz muitas ordens de grandeza de diferença quando comparamos as contribuições para o elétron e para o múon, por exemplo, como já observamos no Capítulo 1.

2.5.3 Projetores no caso geral

Nos casos em que queremos obter as partes da amplitude de espalhamento necessárias para calcular as contribuições para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ precisamos utilizar os projetores mais gerais dados pela Eq. (2.54) onde $m_i \neq m_f$.

Usando a mesma estratégia delineada na Seção 2.5.1 no caso $m_i = m_f$, vamos obter os coeficientes c_j 's desejados para cada projetor. Tomando o traço $\text{Tr}[\mathcal{P}_\mu \Gamma^\mu]$ nesse caso temos

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathcal{P}_\mu \Gamma^\mu] = & \frac{2}{(m_i + m_f)^2} \{ -A_1 [c_1(m_i + m_f)((d-2)m_i^2 - 2dm_im_f + (d-2)(m_f^2 - q^2)) \\ & + ((m_i + m_f)^2 - q^2)(c_2(m_i + m_f) - c_2(m_f + m_i))] \\ & + A_2(q^2 - (m_f + m_i)^2) [c_1(m_i + m_f)^2 + c_2(2m_i^2 + 2m_f^2 - q^2) + c_3(m_f^2 - m_i^2)] \\ & + A_3(q^2 - (m_f + m_i)^2) [(c_1 + c_2)(m_i^2 - m_f^2) - c_3q^2] \\ & - A_4 [c_4(m_i + m_f)((d-2)m_i^2 + 2dm_im_f + (d-2)(m_f^2 - q^2)) \\ & - ((m_i - m_f)^2 - q^2)(c_5(m_i - m_f) - c_6(m_f + m_i))] \\ & + A_5(q^2 - (m_f - m_i)^2) [c_6(m_f^2 - m_i^2) + c_5(2m_i^2 + 2m_f^2 - q^2) + c_4(m_i^2 - m_f^2)] \\ & + A_6((m_f - m_i)^2 - q^2) [c_4(m_i + m_f)^2 - c_6q^2 + c_5(m_i^2 - m_f^2)] \}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

no que novamente notamos que $A_{1,2,3}$ ($A_{4,5,6}$) só se relaciona com $c_{1,2,3}$ ($c_{4,5,6}$) pelas mesmas razões discutidas em 2.5.1. Aqui vale notar, como uma forma de discutir o resultado, que no limite $m_i = m_f = m$ retomamos o resultado anterior da Eq. (2.55).

Para obter as combinações de c 's que descrevem cada um dos projetores $\mathcal{P}_{\mu j}$ iremos impor que o coeficiente de A_j seja 1 e os demais se igualem a zero, de modo que o procedimento se resume a resolução de um sistema de equações. Aqui iremos apresentar apenas os resultados dos projetores utilizados na obtenção de $A_2 = -F_2$ e $A_5 = -G_2$ já que (veja discussão no Apêndice B) esses são

os pedaços da amplitude relevantes para o estudo do decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$. Assim temos

$$\mathcal{P}_{\mu 2}^{l_i \rightarrow l_f \gamma} : \quad c_1 = -\frac{(m_f + m_i)^2}{2(d-2)((m_i + m_f)^2 - q^2)((m_i - m_f)^2 - q^2)}, \quad (2.77)$$

$$c_2 = \frac{(d-2)q^2(m_i + m_f)^2 + (m_i + m_f)^4}{2(d-2)(m_i + m_f - q)^2(m_i + m_f + q)^2((m_i - m_f)^2 - q^2)}, \quad (2.78)$$

$$c_3 = \frac{(d-1)(m_i - m_f)(m_i + m_f)^3}{2(d-2)(m_i + m_f - q)^2(m_i + m_f + q)^2((m_i - m_f)^2 - q^2)}, \quad (2.79)$$

$$\mathcal{P}_{\mu 5}^{l_i \rightarrow l_f \gamma} : \quad c_4 = \frac{m_f^2 - m_i^2}{2(d-2)((m_i + m_f)^2 - q^2)((m_i - m_f)^2 - q^2)}, \quad (2.80)$$

$$c_5 = \frac{(d-2)q^2(m_i + m_f)^2 + (m_i^2 - m_f^2)^2}{2(d-2)((m_i + m_f)^2 - q^2)((m_i - m_f)^2 - q^2)}, \quad (2.81)$$

$$c_6 = \frac{(d-1)(m_i - m_f)(m_i + m_f)^2}{2(d-2)((m_i + m_f)^2 - q^2)((m_i - m_f)^2 - q^2)}. \quad (2.82)$$

Ainda que aqui tenham sido apresentados apenas $\mathcal{P}_{\mu 2}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ e $\mathcal{P}_{\mu 5}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ os demais projetores podem ser obtidos facilmente de forma análoga pelo mesmo procedimento.

Os cálculos de processos a nível de *1-loop* podem envolver muitos propagadores internos nos diagramas de Feynman que queremos avaliar, entretanto vimos que sempre é possível expressar as contribuições em termos de integrais que envolvem até quatro propagadores internos. Sendo assim, para tratar o caso geral desses tipos de processos introduzimos as integrais de Passarino-Veltman, que por mais que em um primeiro momento se apresentem como integrais tensoriais sempre podemos utilizar a invariância de Lorentz para decompô-las em uma combinação de integrais escalares que, por sua vez, sempre podem ser reduzidas às quatro integrais: A_0 , B_0 , C_0 e D_0 . Utilizando a regularização dimensional, com o auxílio da parametrização de Feynman e da rotação de Wick essas integrais podem ainda serem reduzidas a integrais em uma ou duas dimensões, de onde podemos obter expressões analíticas em alguns casos particulares.

No entanto, para o estudo de processos como o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ e para o cálculo de contribuições para a_μ não basta obtermos essa decomposição das integrais de *1-loop*, precisamos entender como extrair a parte da amplitude de espalhamento desejada para o cálculo dos fatores de forma. Para isso introduzimos aqui a técnica de projetores. Discutimos nesse capítulo como construir os projetores necessários para calcular as contribuições para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$. Mostramos como aplicar essa ferramenta, em conjunto com a decomposição dos *loops* em integrais escalares, para obter a contribuição da QED a nível de *1-loop* para o momento magnético dos férmions carregados. Ainda que os projetores tenham sido utilizados no contexto de integrais de *1-loop* eles são uma ferramenta geral que pode auxiliar no cálculo de *loops* de ordem maior.

No próximo capítulo iremos utilizar essas duas ferramentas para estudar diferentes contribuições para a_μ e para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ a nível de *1-loop*. Iremos abordar contribuições com diferentes tipos de partículas envolvidas no *loop* a fim de que sejam obtidos resultados que possam ser aplicados em diferentes modelos. Iremos também aplicar os resultados obtidos para calcular as contribuições dos bósons $W^\pm$, Z e de Higgs para o MP a nível de *1-loop*.

Capítulo 3

Contribuições genéricas para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$

Como já vimos, quando comparamos os valores teóricos do MP (1.27) e as medidas experimentais (1.30) do momento magnético do múon encontramos uma diferença de mais de 3σ para Δa_μ não nulo [32, 33], fato que parece indicar física além do MP. Em particular, $a_\mu^{\text{exp}} > a_\mu^{\text{teo}}$.

Para entender como novas teorias podem contribuir para o valor teórico de a_μ e explicar essa discrepância, nesse capítulo iremos estudar diferentes contribuições que podem surgir nesses modelos além do MP, entendendo em que casos as contribuições são positivas (negativas) contribuindo para aumentar (diminuir) a_μ . Aqui vamos analisar contribuições relacionadas à interação com novos bósons escalares e vetoriais. Em particular, obteremos as expressões no regime em que a massa dessas novas partículas é muito maior do que a dos férmions presentes no *loop*.

Além disso, devido a similaridade entre o diagrama associado às contribuições para o a_i e o diagrama envolvido no decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ iremos também obter as expressões para os fatores de forma nesse caso, a partir de onde é possível obter $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$. Por fim, iremos utilizar os resultados gerais obtidos nesse estudo para entender as contribuições particulares das interações eletrofracas para a_μ no MP.

Nossos cálculos foram implementados com o auxílio dos pacotes do programa *Mathematica* [89] chamados *FeynCalc* [90] e *Package-X* [92]. Os resultados foram obtidos de forma independente com os dois pacotes e conferimos que eram consistentes entre si.

Vamos discutir as contribuições genéricas para a_i e $l_i \rightarrow l_j \gamma$ antes de calcular a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$.

3.1 Escalares Neutros

Iremos estudar aqui as diferentes contribuições que um campo escalar neutro pode dar para o momento magnético dos léptons carregados e para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$. Partículas escalares neutras, como é o caso do bóson de Higgs no MP, podem surgir também em teorias além do MP como, por exemplo, extensões $SU(2)_L \times SU(2)_R$ [93–95], em que escalares neutros são introduzidos como parte de novos dubletos, tripletos e bidubletos dessa simetria.

Podemos descrever a interação geral de um escalar neutro ϕ com os férmions carregados a partir do termo na Lagrangeana da forma

$$\mathcal{L} \supset g_{s1}^{ab} \phi \bar{l}_a l_b + i g_{p1}^{ab} \phi \bar{l}_a \gamma^5 l_b, \quad (3.1)$$

onde os índices a, b identificam os léptons carregados que estão sendo considerados. A contribuição desse tipo de interação para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ a nível de 1-*loop* pode ser descrita pelo diagrama da Fig.

3.1. Assumiremos que todos campos que aparecem nas Lagrangeanas das Seções 3.1 a 3.6 estão dados em termos de seus autoestados de massa.

Figura 3.1: Diagrama com troca de escalar neutro.

Esse diagrama está relacionado à amplitude $\mathcal{M}^\mu = -e \bar{u}(p_f) \Gamma_1^\mu u(p_i)$ com Γ_1^μ escrito como

$$\Gamma_1^\mu = - \sum_{j=e,\mu,\tau} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(ig_{s1}^{jf} - g_{p1}^{jf} \gamma^5)(\not{k} + \not{p}_f + m_j) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}_i + m_j) (ig_{s1}^{ij} - g_{p1}^{ij} \gamma^5)}{((k + p_i)^2 - m_j^2)((k + p_f)^2 - m_j^2)(k^2 - m_\phi^2)}, \quad (3.2)$$

onde m_j corresponde à massa do férmion carregado j e m_ϕ a massa do campo escalar neutro.

No caso de a_i em que $l_i = l_j \Rightarrow p_i^2 = p_f^2 = m^2$ e $p_i \cdot p_f = (2m^2 - q^2)/2$ podemos utilizar o projetor $\mathcal{P}_{\mu^2}^{a_i}$ apresentado na Eq. (2.63) para obter a contribuição desse diagrama como função das integrais de Passarino-Veltman, que no limite $q^2 \rightarrow 0$ fornece

$$\begin{aligned} a_i^{\text{NS}} = \frac{1}{4\pi^2} m_i \sum_{j=e,\mu,\tau} & [m_j((g_{p1}^{ij})^2 - (g_{s1}^{ij})^2) [C_0(m^2, m^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) + C_2(m^2, m^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2)] \\ & + ((g_{p1}^{ij})^2(m + m_j) + (g_{s1}^{ij})^2(m - m_j)) C_1(m^2, m^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) \\ & + m_i((g_{p1}^{ij})^2 + (g_{s1}^{ij})^2) [C_{11}(m^2, m^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) + C_{12}(m^2, m^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2)]]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como podemos ver na Tabela 2.1 esses termos podem ser escritos apenas em função de A_0 , B_0 e C_0 . Em particular, nesse caso conseguimos reduzir essas funções a uma combinação de $B_0(m^2, m_j^2, m_\phi^2)$, $B_0(0, m_j^2, m_j^2)$, $B_0(0, m_\phi^2, m_\phi^2)$ e $C_0(0, m^2, m^2, m_j^2, m_j^2, m_\phi^2)$. A forma analítica de $B_0(0, m_\phi^2, m_\phi^2)$ e $B_0(0, m_j^2, m_j^2)$ já foi apresentada na Eq. (2.41) mas no caso em que temos $m_\phi \gg m_j, m$ é possível obter uma expressão mais simples também para as integrais $B_0(m^2, m_j^2, m_\phi^2)$ e $C_0(0, m^2, m^2, m_j^2, m_j^2, m_\phi^2)$. Essa situação é interessante pois muitas vezes o escalar neutro introduzido na teoria tem limites experimentais que excluem regiões de baixa massa, e portanto respeitam essa relação. Além disso, esse limite também se aplica ao MP em que temos $m_h \simeq 125 \text{ GeV} \gg m_\tau$.

Nesse regime podemos aproximar essas integrais escalares por

$$\begin{aligned} B_0(m^2, m_j^2, m_\phi^2) & \simeq 1 + \Delta_\epsilon - \ln \left(\frac{m_\phi^2}{\mu^2} \right) + \frac{1}{2} \frac{m^2}{m_\phi^2} + \frac{m_j^2}{m_\phi^2} \ln \left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2} \right) \\ & + \frac{m_j^2(m^2 + m_j^2)}{m_\phi^4} \ln \left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2} \right) + \frac{1}{6} \frac{m^4}{m_\phi^4} + \frac{3}{2} \frac{m^2 m_j^2}{m_\phi^4} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{m_\phi^6} \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$C_0(0, m^2, m^2, m_j^2, m_j^2, m_\phi^2) \simeq \frac{1 + \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right)}{m_\phi^2} + \frac{m^2}{m_\phi^4} \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) + \frac{5}{2} \frac{m^2}{m_\phi^4} \\ + 2 \frac{m_j^2}{m_\phi^4} \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) + \frac{m_j^2}{m_\phi^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_\phi^6}\right), \quad (3.5)$$

a partir de onde podemos escrever a contribuição para o momento magnético como

$$a_i^{\text{NS}} \simeq \frac{1}{8\pi^2} \frac{m}{m_\phi^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[(g_{p1}^{ij})^2 \left(\frac{m}{3} + \frac{3m_j}{2} + m_j \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) \right) \right. \\ \left. + (g_{s1}^{ij})^2 \left(\frac{m}{3} - \frac{3m_j}{2} - m_j \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) \right) \right]. \quad (3.6)$$

Para entender como esse tipo de interação afeta a_μ é interessante destacar três casos

$$\bullet \ g_{p1}^{ij} = g_{s1}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{NS}} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_\phi^2} g^2, \quad (3.7)$$

$$\bullet \ g_{s1}^{ij} = g \text{ e } g_{p1}^{ij} = 0 : \quad a_\mu^{\text{NS}} \simeq -\frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu m_\tau}{m_\phi^2} g^2 \left[\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) \right], \quad (3.8)$$

$$\bullet \ g_{s1}^{ij} = 0 \text{ e } g_{p1}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{NS}} \simeq \frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu m_\tau}{m_\phi^2} g^2 \left[\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) \right], \quad (3.9)$$

onde podemos perceber que nas duas primeiras situações a diferença entre o valor teórico e experimental de a_μ diminui já que para $m_\phi \gtrsim 4 \text{ GeV}$ temos $\ln(m_\tau^2/m_\phi^2) < -3/2$, e portanto $a_\mu > 0$ nesses dois casos.

No caso do decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ em que $p_i^2 = m_i^2$, $p_f^2 = m_f^2$ e $p_i \cdot p_f = (m_i^2 + m_f^2 - q^2)/2$ podemos utilizar os projetores $\mathcal{P}_{\mu 2}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ e $\mathcal{P}_{\mu 5}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ apresentados nas Eqs. (2.77) e (2.80) para obter os fatores de forma $F_2(q^2 \rightarrow 0)$ e $G_2(q^2 \rightarrow 0)$ dados por

$$F_2^{\text{NS}}(0) = \frac{1}{4\pi^2} m_i \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[m_j ((g_{p1}^{ij} g_{p1}^{jf}) - (g_{s1}^{ij} g_{s1}^{jf})) C_0(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) \right. \\ \left. + ((g_{p1}^{ij} g_{p1}^{jf})(m_i + m_j) + (g_{s1}^{ij} g_{s1}^{jf})(m_i - m_j)) C_1(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) \right. \\ \left. + ((g_{p1}^{ij} g_{p1}^{jf}) + (g_{s1}^{ij} g_{s1}^{jf})) [m_i C_{11}(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) + (m_i - m_f) C_{12}(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2)] \right], \quad (3.10)$$

$$G_2^{\text{NS}}(0) = \frac{1}{4\pi^2} m_i \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[m_j ((g_{p1}^{ij} g_{s1}^{jf}) + (g_{s1}^{ij} g_{p1}^{jf})) C_0(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) \right. \\ \left. + ((g_{p1}^{ij} g_{s1}^{jf})(m_i + m_j) - (g_{s1}^{ij} g_{p1}^{jf})(m_i - m_j)) C_1(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) \right. \\ \left. + ((g_{s1}^{ij} g_{p1}^{jf}) - (g_{p1}^{ij} g_{s1}^{jf})) [m_i C_{11}(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2) + (m_i + m_f) C_{12}(m_i^2, m_f^2, 0, m_j^2, m_\phi^2, m_j^2)] \right], \quad (3.11)$$

com a taxa de ramificação descrita pela Eq. (1.38), isto é

$$\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}(4\pi)^3}{2G_F^2 m_\mu^4} (|F_2(0)|^2 + |G_2(0)|^2).$$

Nesse caso podemos decompor nossas integrais escalares em $B_0(m_i^2, m_j^2, m_\phi^2)$, $B_0(m_j^2, m_j^2, m_\phi^2)$, $B_0(0, m_j^2, m_j^2)$, $B_0(0, m_\phi^2, m_\phi^2)$ e $C_0(0, m_f^2, m_i^2, m_j^2, m_j^2, m_\phi^2)$. Já discutimos as aproximações para as funções $B_0(m_i^2, m_j^2, m_\phi^2)$, $B_0(m_j^2, m_j^2, m_\phi^2)$, $B_0(0, m_j^2, m_j^2)$ e $B_0(0, m_\phi^2, m_\phi^2)$ no limite em que $m_\phi \gg m_i, m_f, m_j$, mas podemos também aproximar a função $C_0(0, m_f^2, m_i^2, m_j^2, m_j^2, m_\phi^2)$ nesse regime como

$$C_0(0, m_f^2, m_i^2, m_j^2, m_j^2, m_\phi^2) \simeq \frac{1 - \ln\left(\frac{m_\phi^2}{m_j^2}\right)}{m_\phi^2} + \frac{\frac{1}{4}(5m_f^2 + 4m_j^2 + 5m_i^2) - (m_f^2 + 4m_j^2 + m_i^2) \ln(m_\phi) + 4m_j^2 \ln(m_j)}{m_\phi^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_\phi^6}\right). \quad (3.12)$$

Com isso podemos escrever $F_2(0)$ e $G_2(0)$ de forma aproximada como

$$F_2^{\text{NS}}(0) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_i}{m_\phi^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[(g_{s1}^{ij} g_{s1}^{jf}) \left(\frac{1}{6} m_i - m_j \left(\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) \right) \right) + (g_{p1}^{ij} g_{p1}^{jf}) \left(\frac{1}{6} m_i + m_j \left(\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) \right) \right) \right], \quad (3.13)$$

$$G_2^{\text{NS}}(0) = \frac{i}{16\pi^2} \frac{m_i}{m_\phi^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[(g_{s1}^{ij} g_{p1}^{jf}) \left(\frac{1}{6} m_i - m_j \left(\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) \right) \right) - (g_{p1}^{ij} g_{s1}^{jf}) \left(\frac{1}{6} m_i + m_j \left(\frac{3}{2} + \ln\left(\frac{m_j^2}{m_\phi^2}\right) \right) \right) \right]. \quad (3.14)$$

Com base nesse resultado, para entender como esses fatores de forma geram sinais no decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ é interessante estudarmos três situações

$$\begin{aligned} \bullet \quad g_{p1}^{ij} = g_{s1}^{ij} = g : \quad & \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4}{8\pi m_\phi^4} \left(m_\mu^2 + m_\tau^2 \left| 3 + 2 \ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) \right|^2 \right) \\ & \xrightarrow{m_\phi \gg m_\tau} \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4 m_\tau^2}{8\pi m_\phi^4} \left| 3 + 2 \ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) \right|^2, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\bullet \quad g_{s1}^{ij} = g \quad \text{e} \quad g_{p1}^{ij} = 0 : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4 m_\tau^2}{32\pi m_\phi^4} \left| 3 + 2 \ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) \right|^2, \quad (3.16)$$

$$\bullet \quad g_{s1}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad g_{p1}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4 m_\tau^2}{32\pi m_\phi^4} \left| 3 + 2 \ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) \right|^2, \quad (3.17)$$

onde percebemos que a taxa de ramificação nos dois últimos casos é igual, com valor quatro vezes menor do que na situação em que $g_{p1}^{ij} = g_{s1}^{ij} = g$.

Para ilustrar o comportamento dessas contribuições apresentamos nos gráficos da Fig. 3.2 a dependência de a_μ^{NS} e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ com os acoplamentos e com m_ϕ . Para isso, assumimos que todos os léptons carregados do MP (veja Tab. 3.1) estão presentes no loop e que $g_{p1}^{ab} = g_p$ e $g_{s1}^{ab} = g_s$ para qualquer par (a, b) de férmions carregados. Na obtenção das curvas do gráfico foram utilizados os valores $g_s = 10^{-2}$ e $g_p = 0$ (vermelho); $g_s = 10^{-3}$ e $g_p = 10^{-3}$ (verde); $g_s = 0$ e $g_p = 5 \times 10^{-4}$ (azul). A representação gráfica em todos os casos foi feita utilizando as expressões exatas para as contribuições.

férmion	massa (MeV)
e	0.511
μ	105.7
τ	1776.86

Tabela 3.1: Massa dos férmions carregados

A partir do gráfico de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ podemos reparar que as restrições sobre a taxa de ramificação se refletem como exclusões sobre as massas. No caso em que $g_s = 10^{-2}$ e $g_p = 0$ o limite experimental desse decaimento permite apenas a região $m_\phi \gtrsim 10^4$ GeV. Na curva verde em que os acoplamentos são iguais temos que a região de massa permitida por $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) < 4.2 \times 10^{-13}$ corresponde à $m_\phi \gtrsim 10^3$ GeV. Já no caso em que $g_s = 0$ e $g_p = 5 \times 10^{-4}$ devemos ter $m_\phi \gtrsim 4 \times 10^2$ GeV para não saturar o valor experimental.

Figura 3.2: Dependência de a_μ^{NS} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (gráfico da direita) com os acoplamentos g_s , g_p e com a massa m_ϕ . No gráfico de a_μ^{NS} a representação da contribuição por meio de uma linha tracejada corresponde à valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $|a_\mu^{\text{NS}}| = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da mesma ordem do que é necessário para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita corresponde à região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].

Além disso, observamos também que $a_\mu^{\text{NS}} > 0$ ($a_\mu^{\text{NS}} < 0$) quando o acoplamento escalar $g_s \neq 0$

($g_s = 0$). Entretanto, ainda que os sinais com $a_\mu^{\text{NS}} > 0$ possam diminuir a diferença entre o valor teórico e experimental, nas regiões de massa permitidas pelo decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ essas contribuições são muito inferiores ao valor necessário para explicar a_μ^{exp} .

3.2 Escalares Carregados

Aqui iremos tratar dos casos em que temos escalares carregados contribuindo para a_μ e também para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$. Assim como o caso anterior, esse tipo de partícula pode ser encontrada em muitas extensões da simetria do MP, como, por exemplo, nos já comentados modelos $SU(2)_L \times SU(2)_R$ em que são inseridos escalares carregados em dubletos, tripletos e também bidubletos do grupo de simetria, ou ainda em [96] em que são inseridos campos escalares para quebrar a simetria escura $U(1)_D$.

Para entender como essas partículas contribuem para os observáveis em que estamos interessados podemos descrever a interação mais geral dos escalares carregados com férmions carregados e neutros a partir da Lagrangeana de interação

$$\mathcal{L} \supset g_{s2}^{ab} \phi^+ \bar{N}_a l_b + g_{p2}^{ab} \phi^+ \bar{N}_a \gamma^5 l_b + \text{h.c.}, \quad (3.18)$$

em que ϕ^+ representa o escalar carregado, N_a um férmion neutro, como por exemplo um neutrino, e l_b o férmion carregado, com g_{s2}^{ab} e g_{p2}^{ab} os acoplamentos onde $b = e, \mu, \tau$.

O diagrama envolvendo essas partículas que contribui para os processos comentados a nível de 1-loop está representado na Fig. 3.3.

Figura 3.3: Diagrama com troca de escalar carregado.

A partir do diagrama da Fig. 3.3 podemos escrever a amplitude de espalhamento associada como $\mathcal{M}^\mu = -e \bar{u}(p_f) \Gamma_2^\mu u(p_i)$, em que Γ_2^μ é dado por

$$\Gamma_2^\mu = -i \sum_{j=1}^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(i(g_{s2}^{jf})^* - i(g_{p2}^{jf})^* \gamma^5)(2k^\mu + p_f^\mu + p_i^\mu)(-k + M_j)(ig_{p2}^{ij} \gamma^5 + ig_{s2}^{ij})}{((k + p_i)^2 - m_{\phi^+}^2)((k + p_f)^2 - m_{\phi^+}^2)(k^2 - M_j^2)}, \quad (3.19)$$

onde m_{ϕ^+} representa a massa do escalar carregado e M_j a massa do férmion neutro j (aqui consideramos três gerações de férmions neutros, mas os resultados podem ser facilmente adaptados para o caso de n famílias).

Para obter a contribuição para a_i podemos fazer uso do projetor $\mathcal{P}_{\mu 2}^{ai}$ em conjunto com as condições $l_i = l_j \Rightarrow p_i^2 = p_f^2 = m^2$ e $p_i \cdot p_f = (2m^2 - q^2)/2$ para obter o valor de $F_2(q^2 \rightarrow 0)$, de

onde vem que

$$\begin{aligned}
a_i^{\text{CS}} = & -\frac{1}{8\pi^2} m \sum_{j=1}^3 \left[(|g_{p2}^{ji}|^2 (m - M_j) + |g_{s2}^{ji}|^2 (m + M_j)) C_0(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2) \right. \\
& + |g_{p2}^{ji}|^2 \left((3m - 2M_j) C_1(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2) + 2(m - M_j) C_2(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2) \right. \\
& \quad \left. + 2m (C_{11}(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2) + C_{12}(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2)) \right) \\
& + |g_{s2}^{ji}|^2 \left((3m + 2M_j) C_1(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2) + 2(m + M_j) C_2(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2) \right. \\
& \quad \left. + 2m (C_{11}(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2) + C_{12}(m^2, m^2, 0, m_{\phi+}^2, M_j^2, m_{\phi+}^2)) \right) \left. \right]. \quad (3.20)
\end{aligned}$$

No contexto da contribuição para a_i as funções C_1 , C_2 , C_{11} e C_{22} podem ser reduzidas a A_0 , B_0 e C_0 como apresentado na Tab. 2.1. Mais especificamente, como resultado dessa redução obtemos as funções escalares $B_0(0, m_{\phi+}^2, m_{\phi+}^2)$, $B_0(0, M_j^2, M_j^2)$, $B_0(m^2, m_{\phi+}^2, M_j^2)$ e $C_0(0, m^2, m^2, m_{\phi+}^2, m_{\phi+}^2, M_j^2)$. Como discutido no Capítulo 2 a função $B_0(p^2, m_0^2, m_1^2)$ é invariante pela troca $m_0 \leftrightarrow m_1$, e portanto o resultado da aproximação obtido na seção anterior (3.4) vale aqui para a função $B_0(m^2, m_{\phi+}^2, M_j^2)$. Além disso, a forma simplificada de $B_0(0, m_{\phi+}^2, m_{\phi+}^2)$ e $B_0(0, M_j^2, M_j^2)$ foi apresentada em (2.41) e portanto resta apenas a função $C_0(0, m^2, m^2, m_{\phi+}^2, m_{\phi+}^2, M_j^2)$, que pode ser aproximada no regime $m_{\phi+} \gg m, M_j$ por

$$\begin{aligned}
C_0(0, m^2, m^2, m_{\phi+}^2, m_{\phi+}^2, M_j^2) \simeq & -\frac{1}{m_{\phi+}^2} - \frac{m^2 - 2M_j^2 \ln\left(\frac{m_{\phi+}^2}{M_j^2}\right) + M_j^2}{2m_{\phi+}^4} \\
& - \frac{m^4 - 6M_j^2(m^2 + M_j^2) \ln\left(\frac{m_{\phi+}^2}{M_j^2}\right) + 12m^2 M_j^2 + 3M_j^4}{3m_{\phi+}^6} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m_{\phi+}^8}\right). \quad (3.21)
\end{aligned}$$

Com isso podemos escrever a expressão aproximada para a_i^{CS} como

$$a_i^{\text{CS}} \simeq \frac{-m}{48\pi^2 m_{\phi+}^2} \sum_{j=1}^3 (|g_{p2}^{ij}|^2 (m - 3M_j) + |g_{s2}^{ij}|^2 (m + 3M_j)). \quad (3.22)$$

Para entender melhor o comportamento da contribuição para a_μ podemos escrevê-la em algumas situações interessantes como

$$\bullet \quad g_{p2}^{ij} = g_{s2}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{CS}} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_{\phi+}^2} g^2, \quad (3.23)$$

$$\bullet \quad g_{s2}^{ij} = g, \quad g_{p2}^{ij} = 0, \quad M_j = M : \quad a_\mu^{\text{CS}} \simeq -\frac{1}{16\pi^2} \frac{m_\mu}{m_{\phi+}^2} g^2 (m_\mu + 3M), \quad (3.24)$$

$$\bullet \quad g_{s2}^{ij} = 0, \quad g_{p2}^{ij} = g, \quad M_j = M : \quad a_\mu^{\text{CS}} \simeq -\frac{1}{16\pi^2} \frac{m_\mu}{m_{\phi+}^2} g^2 (m_\mu - 3M), \quad (3.25)$$

onde no regime $M \ll m_\mu$ todas contribuições são negativas e aumentam a diferença entre o valor teórico e experimental de a_μ . Já no limite $m_{\phi^+} \gg M \gg m_\mu$, ainda que nos dois primeiros casos a contribuição seja negativa, no último temos $a_\mu > 0$.

No caso do decaimento $l_i \rightarrow l_j \gamma$ podemos utilizar a relação $p_{i,j}^2 = m_{i,j}^2$ e $p_i \cdot p_f = (m_i^2 + m_f^2 - q^2)/2$ em conjunto com os projetores $\mathcal{P}_{\mu 2}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ e $\mathcal{P}_{\mu 5}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ para obter os fatores $F_2(0)$ e $G_2(0)$, importantes para o cálculo da taxa de ramificação. Com isso, podemos escrever esses fatores de forma como

$$\begin{aligned} F_2^{\text{CS}}(0) = & \frac{1}{4\pi^2} m_i \sum_{j=1}^3 \left[g_{p2}^{ij} (g_{p2}^{jf})^* ((m_i - M_j) C_1(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2)) \right. \\ & + m_i C_{11}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2) + (m_i - m_f) C_{12}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, m_j^2, m_{\phi^+}^2) \\ & + (g_{s2}^{ij} (g_{s2}^{jf})^* ((m_i + M_j) C_1(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2)) \\ & \left. + m_i C_{11}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2) + (m_i - m_f) C_{12}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2) \right], \end{aligned} \quad (3.26)$$

e

$$\begin{aligned} G_2^{\text{CS}}(0) = & \frac{i}{4\pi^2} m_i \sum_{j=1}^3 \left[g_{p2}^{ij} (g_{s2}^{jf})^* ((m_i - M_j) C_1(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2)) \right. \\ & + m_i C_{11}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2) + (m_i + m_f) C_{12}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2) \\ & + (g_{s2}^{ij} (g_{p2}^{jf})^* ((m_i + M_j) C_1(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2)) \\ & \left. + m_i C_{11}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2) + (m_i + m_f) C_{12}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{\phi^+}^2, M_j^2, m_{\phi^+}^2) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Nesse caso as funções C_1 , C_{11} e C_{12} podem ser escritas como uma combinação das funções $B_0(0, M_j^2, M_j^2)$, $B_0(0, m_{\phi^+}^2, m_{\phi^+}^2)$, $B_0(m_i^2, m_{\phi^+}^2, M_j^2)$ e $C_0(0, m_f^2, m_i^2, m_{\phi^+}^2, m_{\phi^+}^2, M_j^2)$, em que a forma analítica para as funções B_0 já foram discutidas anteriormente e C_0 pode ser aproximada no limite $m_{\phi^+} \gg m_i, m_f, M_j$ por

$$C_0(0, m_f^2, m_i^2, m_{\phi^+}^2, m_{\phi^+}^2, M_j^2) \simeq -\frac{1}{m_{\phi^+}^2} - \frac{1}{4} \frac{m_f^2}{m_{\phi^+}^4} - \frac{M_j^2}{m_{\phi^+}^4} - \frac{1}{4} \frac{m_i^2}{m_{\phi^+}^4} + \frac{M_j^2}{m_{\phi^+}^4} \ln \left(\frac{m_{\phi^+}^2}{M_j^2} \right). \quad (3.28)$$

A partir dessas aproximações, a fim de obter $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ podemos escrever $F_2(0)$ e $G_2(0)$ nesse regime de massas como

$$\begin{aligned} F_2^{\text{CS}}(0) \simeq & \frac{-1}{192\pi^2 m_{\phi^+}^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{p2}^{ij} (g_{p2}^{jf})^* ((m_i + m_f)^2 - 6(m_i + m_f) M_j) \right. \\ & \left. + g_{s2}^{ij} (g_{s2}^{jf})^* ((m_i + m_f)^2 + 6(m_i + m_f) M_j) \right] \\ \xrightarrow{m_i \gg m_f} & \frac{-1}{192\pi^2 m_{\phi^+}^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{p2}^{ij} (g_{p2}^{jf})^* (m_i^2 - 6m_i M_j) + g_{s2}^{ij} (g_{s2}^{jf})^* (m_i^2 + 6m_i M_j) \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
G_2^{\text{CS}}(0) &\simeq \frac{1}{192\pi^2 m_{\phi^+}^2} \frac{(m_i - m_f)}{(m_i + m_f)} \sum_{j=1}^3 \left[g_{p2}^{ij} (g_{s2}^{jf})^* ((m_i - m_f)^2 - 6(m_i - m_f)M_j) \right. \\
&\quad \left. + g_{s2}^{ij} (g_{p2}^{jf})^* ((m_i - m_f)^2 + 6(m_i - m_f)M_j) \right] \\
&\xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{1}{192\pi^2 m_{\phi^+}^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{p2}^{ij} (g_{s2}^{jf})^* (m_i^2 - 6m_i M_j) + g_{s2}^{ij} (g_{p2}^{jf})^* (m_i^2 + 6m_i M_j) \right], \quad (3.30)
\end{aligned}$$

em que apresentamos o limite $m_i \gg m_f$, já que essa relação é respeitada nos decaimentos envolvendo léptons carregados no MP $\tau \rightarrow \mu\gamma$, $\tau \rightarrow e\gamma$ e $\mu \rightarrow e\gamma$.

Para entender melhor como esse tipo de interação influencia no decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ é interessante apresentarmos os resultados da taxa de ramificação nos seguintes casos

$$\bullet \quad g_{p2}^{ij} = g_{s2}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{16\pi G_F^2} \frac{g^4}{m_{\phi^+}^4}, \quad (3.31)$$

$$\bullet \quad g_{s2}^{ij} = g, \quad g_{p2}^{ij} = 0, \quad M_j = M : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{256\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4}{m_{\phi^+}^4} |m_\mu + 6M|^2, \quad (3.32)$$

$$\bullet \quad g_{s2}^{ij} = 0, \quad g_{p2}^{ij} = g, \quad M_j = M : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{256\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4}{m_{\phi^+}^4} |m_\mu - 6M|^2, \quad (3.33)$$

onde no regime $M \ll m_\mu$ as duas últimas taxas de ramificação são iguais e 16 vezes menores do que a contribuição com $g_{p2}^{ij} = g_{s2}^{ij} = g$. Já na situação em que $m_{\phi^+} \gg M \gg m_\mu$ as taxas $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ nos dois últimos casos crescem com M^2 e novamente assumem o mesmo valor.

Para ilustrar as diferentes contribuições para a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ podemos visualizar nos gráficos da Fig. 3.4 a dependência dessas funções com os acoplamentos envolvidos e com m_{ϕ^+} . Para isso, consideramos as massas dos três férmions neutros iguais $M_j = M$ e tomamos $g_{p2}^{ab} = g_p$ e $g_{s2}^{ab} = g_s$ para todos os pares de férmions (a, b) .

Como visto nessa seção, no regime $m_{\phi^+} \gg m_i, m_f, M$ as diferentes contribuições dependem diretamente da fração (g/m_{ϕ^+}) , de modo que para obtenção dos gráficos fixamos essa razão em diferentes valores para visualizar a dependência das contribuições com M . Em particular, consideramos três casos: $g_s = 10^{-2}$, $g_p = 0$ e $m_{\phi^+} = 1$ TeV (vermelho); $g_s = g_p = 5 \times 10^{-3}$ e $m_{\phi^+} = 1$ TeV (verde); $g_s = 0$, $g_p = 5 \times 10^{-3}$ e $m_{\phi^+} = 10$ TeV (azul).

As restrições experimentais sobre o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ resultam em exclusões sobre a massa dos férmions neutros envolvidos no *loop*. No caso em que temos $g_s = 10^{-2}$, $g_p = 0$ e $m_{\phi^+} = 1$ TeV devemos ter $M \lesssim 10^2$ MeV para que os limites experimentais sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ sejam respeitados. No caso da curva verde em que os acoplamentos são iguais toda a região de massa M é permitida. Já quando $g_s = 0$, $g_p = 5 \times 10^{-3}$ e $m_{\phi^+} = 10$ TeV devemos ter $M \lesssim 10^5$ MeV para não saturar o valor experimental sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$.

Podemos perceber que a situação com $g_s = 0$ é a única que assume $a_\mu^{\text{CS}} > 0$, o que ocorre quando $M > 3m_\mu$ como pode ser visto na Eq. (3.25). Além disso, como discutido anteriormente, podemos reparar que na situação em que apenas um dos acoplamentos é diferente de zero temos um comportamento constante no regime $M \ll m_\mu$ e um crescimento de a_μ^{CS} proporcional à M na situação em que $m_{\phi^+} \gg M \gg m_\mu$. No caso $g_s = g_p$ vemos que de fato a contribuição é

sempre constante nesses dois regimes de massa como descrito anteriormente na Eq. (3.23). Por fim, podemos perceber que em todas as situações, no limite $M \gg m_{\phi^+}$, as contribuições diminuem com o aumento de M .

Figura 3.4: Dependência de a_μ^{CS} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (gráfico da direita) com g_s , g_p , m_{ϕ^+} e M . No gráfico de a_μ^{CS} a representação das contribuições a partir de uma linha tracejada corresponde à valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $|a_\mu^{\text{CS}}| = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem necessária para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita representa a região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].

3.3 Escalar Duplamente Carregado

Nessa seção iremos descrever a contribuição dos diagramas com escalares duplamente carregados para os processos comentados. Esse tipo de partícula, assim como os escalares discutidos anteriormente, surge muitas vezes em modelos em que é necessário inserir escalares para quebrar uma nova simetria da teoria. Devido a carga dupla desses escalares eles não são introduzidos em dupletos que contêm escalares neutros, mas sim em tripletos envolvendo esses campos. Um exemplo de modelo que contém esse tipo de partícula é a extensão $SU(2)_L \times SU(2)_R$ do MP em que são introduzidos esses tripletos [93, 94].

A interação desses escalares com os léptons carregados pode ser descrita da forma

$$\mathcal{L} \supset g_{s3}^{ab} \phi^{++} \bar{l}_a^C l_b + g_{p3}^{ab} \phi^{++} \bar{l}_a^C \gamma^5 l_b + \text{h.c.}, \quad (3.34)$$

em que g_{s3}^{ab} e g_{p3}^{ab} são acoplamentos, ϕ^{++} representa o campo duplamente carregado e $l^C = C\gamma^0 l^*$ representa o campo l conjugado [97] com $C = i\gamma^2\gamma^0$ a matriz de conjugação de carga.

Vale destacar aqui que, usando $\bar{l}^C = -l^T C^{-1}$, podemos escrever

$$\bar{l}_a^C l_b = -l_a^T C^{-1} l_b = l_b^T (C^{-1})^T l_a = l_b^T C l_a = -l_b^T C^{-1} l_a = \bar{l}_b^C l_a, \quad (3.35)$$

e também

$$\bar{l}_a^C \gamma^5 l_b = -l_a^T C^{-1} \gamma^5 l_b = l_b^T (\gamma^5)^T (C^{-1})^T l_a = l_b^T \gamma^5 C l_a = -l_b^T C^{-1} \gamma^5 l_a = \bar{l}_b^C \gamma^5 l_a, \quad (3.36)$$

onde usamos a anticomutação dos férmions para mudar o sinal na segunda igualdade, $C^{-1} = C^T$ e $(\gamma^5)^T = \gamma^5$ na terceira igualdade e $[C, \gamma^5] = 0$ em conjunto a $C^{-1} = -C$ para escrever a quarta igualdade. Com isso, percebemos que

$$\bullet \quad g_{s3}^{ab} \phi^{++} \bar{l}_a^C l_b = g_{s3}^{ba} \phi^{++} \bar{l}_b^C l_a = g_{s3}^{ba} \phi^{++} \bar{l}_a^C l_b, \quad (3.37)$$

$$\bullet \quad g_{p3}^{ab} \phi^{++} \bar{l}_a^C \gamma^5 l_b = g_{p3}^{ba} \phi^{++} \bar{l}_b^C \gamma^5 l_a = g_{p3}^{ba} \phi^{++} \bar{l}_a^C \gamma^5 l_b, \quad (3.38)$$

de onde podemos concluir que os acoplamentos g_{s3}^{ab} e g_{p3}^{ab} são simétricos em relação a troca $a \leftrightarrow b$.

Essa interação contribui, a nível de 1-loop, para l_i e $l_i \rightarrow l_f \gamma$ a partir dos diagramas apresentados na Fig. 3.5.

Figura 3.5: Diagramas com troca de escalar duplamente carregado.

A partir desses diagramas podemos construir a amplitude de espalhamento $\mathcal{M}^\mu = -e \bar{u}(p_f) \Gamma_3^\mu u(p_i)$ com Γ_3^μ escrita como

$$\Gamma_3^\mu = 4 \left[-2i \sum_{j=e,\mu,\tau} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(i(g_{s3}^{jf})^* - i(g_{p3}^{jf})^* \gamma^5)(2k^\mu + p_f^\mu + p_i^\mu)(-\not{k} + m_j)(ig_{p3}^{ij} \gamma^5 + ig_{s3}^{ij})}{((k + p_i)^2 - m_{\phi^{++}}^2)((k + p_f)^2 - m_{\phi^{++}}^2)(k^2 - m_j^2)} \right. \\ \left. + \sum_{j=e,\mu,\tau} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{(i(g_{s3}^{jf})^* - i(g_{p3}^{jf})^* \gamma^5)(\not{k} + p_f + m_j) \gamma^\mu (\not{k} + p_i + m_j)(ig_{s3}^{ij} + ig_{p3}^{ij} \gamma^5)}{((k + p_i)^2 - m_j^2)((k + p_f)^2 - m_j^2)(k^2 - m_{\phi^{++}}^2)} \right]. \quad (3.39)$$

Observe que essa amplitude é uma combinação da amplitude Γ_1^μ , que descreve o caso escalar neutro na Eq. (3.2), com Γ_2^μ , associada à contribuição de escalares carregados e descrita pela Eq. (3.19). Isso ocorre pois a topologia do primeiro diagrama da Fig. 3.5 é similar ao diagrama apresentado na Fig. 3.3 da seção anterior, e também a topologia do segundo diagrama da Fig. 3.5 é semelhante ao caso em que temos a troca de um escalar neutro, como pode ser visto comparando com a Fig. 3.1.

Apesar dessas semelhanças, antes de escrevermos nossa amplitude em função daquelas apresentadas nas Seções 3.1 e 3.2, é preciso destacar alguns fatores diferentes e as substituições necessárias.

A amplitude relacionada ao primeiro diagrama da Fig. 3.5, quando comparada à Γ_2^μ , tem um fator adicional de 2 devido à carga do escalar duplamente carregado que modifica a interação com o fóton para

$$-ie(2k^\mu + p_i^\mu + p_f^\mu) \longrightarrow -2ie(2k^\mu + p_i^\mu + p_f^\mu). \quad (3.40)$$

Além disso, para escrever essa parte da amplitude em função de Γ_2^μ é necessário realizar as substituições dos acoplamentos $g_{p2} \rightarrow g_{p3}$, $g_{s2} \rightarrow g_{s3}$ e da massa $m_{\phi^+} \rightarrow m_{\phi^{++}}$, como pode ser visto comparando a Eq. (3.39) com a Eq. (3.19).

O segundo ponto que vale destacar é que, quando comparamos a amplitude associada ao segundo diagrama da Fig. 3.5 com Γ_1^μ , há uma troca de sinal já que o lépton carregado responsável pela interação com o fóton agora tem carga positiva e . Dessa forma, o acoplamento se modifica para

$$-ie\gamma^\mu \rightarrow ie\gamma^\mu. \quad (3.41)$$

Além disso, é necessário realizar a substituição dos acoplamentos $g_{p1} \rightarrow g_{p3}$ e $g_{s1} \rightarrow -ig_{s3}$ e da massa $m_\phi \rightarrow m_{\phi^{++}}$ para escrever essa parte da amplitude a partir de Γ_1^μ .

Por último temos um fator 4 adicional multiplicando essas amplitudes, o que se deve ao fator 2 que aparece em cada um dos vértices de interação dos férmions com os escalares duplamente carregados. Esse fator surge já que, no caso de $a \neq b$, os termos $g_{s3}^{ab} \phi^{++} \bar{l}_a^C l_b$ e $g_{p3}^{ab} \phi^{++} \bar{l}_a^C \gamma^5 l_b$ fazem o mesmo papel que $g_{s3}^{ba} \phi^{++} \bar{l}_b^C l_a$ e $g_{p3}^{ba} \phi^{++} \bar{l}_b^C \gamma^5 l_a$ na construção das amplitudes e portanto, considerando a simetria dos acoplamentos $g_{s3}^{ab} = g_{s3}^{ba}$ e $g_{p3}^{ab} = g_{p3}^{ba}$, temos um fator de 2 adicional nessas interações. No caso particular $a = b$ o fator de simetria aparece diretamente quando consideramos os termos $g_{s3}^{aa} \phi^{++} \bar{l}_a^C l_a$ e $g_{p3}^{aa} \phi^{++} \bar{l}_a^C \gamma^5 l_a$ para construir a amplitude.

Em vista disso tudo, como a contribuição para o momento magnético é obtida diretamente da amplitude podemos escrever a contribuição dos escalares duplamente carregados para a_i como

$$a_i^{\text{DCS}} = 4 \left[2 a_i^{\text{CS}} (g_{p2}^{ab} \rightarrow g_{p3}^{ab}, g_{s2}^{ab} \rightarrow g_{s3}^{ab}) - a_i^{\text{NS}} (g_{p1}^{ab} \rightarrow g_{p3}^{ab}, g_{s1}^{ab} \rightarrow -ig_{s3}^{ab}) \right], \quad (3.42)$$

onde a_i^{CS} e a_i^{NS} foram apresentadas nas seções anteriores nas Eqs. (3.20) e (3.3).

Essa contribuição, no regime de massas $m_{\phi^{++}} \gg m, m_j$, pode ser escrita como

$$a_i^{\text{DCS}} \simeq \frac{-m}{12\pi^2 m_{\phi^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[|g_{p3}^{ij}|^2 \left(4m + 3m_j + 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) + |g_{s3}^{ij}|^2 \left(4m - 3m_j - 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right]. \quad (3.43)$$

O efeito desse tipo de interação sobre a_μ pode ser compreendido melhor olhando para os casos

$$\bullet \quad g_{p3}^{ij} = g_{s3}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{DCS}} = -\frac{2}{\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_{\phi^{++}}^2} g^2, \quad (3.44)$$

$$\bullet \quad g_{s3}^{ij} = g \quad \text{e} \quad g_{p3}^{ij} = 0 : \quad a_\mu^{\text{DCS}} \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{m_\mu m_\tau}{m_{\phi^{++}}^2} g^2 \left[1 + 2 \ln \left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right], \quad (3.45)$$

$$\bullet \quad g_{s3}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad g_{p3}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{DCS}} \simeq -\frac{1}{4\pi^2} \frac{m_\mu m_\tau}{m_{\phi^{++}}^2} g^2 \left[1 + 2 \ln \left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right], \quad (3.46)$$

$$(3.47)$$

onde podemos perceber que para escalares duplamente carregados pesados apenas o último caso fornece um valor de $a_\mu^{\text{DCS}} > 0$ já que $\ln(m_\tau^2/m_{\phi^{++}}^2) < -1/2$ para qualquer massa $m_{\phi^{++}} > 2.3 \text{ GeV}$.

Da mesma forma, para obter a taxa de ramificação $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ podemos escrever os fatores de forma $F_2(0)$ e $G_2(0)$ como uma combinação dos fatores obtidos nos casos anteriores a partir de

$$F_2^{\text{DCS}}(0) = 4 \left[2 F_2^{\text{CS}}(0) (g_{p2}^{ab} \rightarrow g_{p3}^{ab}; g_{s2}^{ab} \rightarrow g_{s3}^{ab}) - F_2^{\text{NS}}(0) (g_{p1}^{ab} \rightarrow g_{p3}^{ab}; g_{s1}^{ab} \rightarrow -i g_{s3}^{ab}) \right], \quad (3.48)$$

$$G_2^{\text{DCS}}(0) = 4 \left[2 G_2^{\text{CS}}(0) (g_{p2}^{ab} \rightarrow g_{p3}^{ab}; g_{s2}^{ab} \rightarrow g_{s3}^{ab}) - G_2^{\text{NS}}(0) (g_{p1}^{ab} \rightarrow g_{p3}^{ab}; g_{s1}^{ab} \rightarrow -i g_{s3}^{ab}) \right], \quad (3.49)$$

novamente com $F_2^{\text{CS,NS}}(0)$ e $G_2^{\text{CS,NS}}(0)$ apresentadas nas seções anteriores nas Eqs. (3.26), (3.27), (3.10) e (3.11).

Além disso, no regime $m_{\phi^{++}} \gg m_i, m_f, m_j$ podemos também escrever as funções $F_2(0)$ e $G_2(0)$ como

$$\begin{aligned} F_2^{\text{DCS}}(0) &\simeq -\frac{(m_i + m_f)}{24\pi^2 m_{\phi^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[g_{p3}^{ij} (g_{p3}^{jf})^* \left(2(m_i + m_f) + 3m_j + 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + g_{s3}^{ij} (g_{s3}^{jf})^* \left(2(m_i + m_f) - 3m_j - 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right] \\ &\xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{-m_i}{24\pi^2 m_{\phi^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[g_{p3}^{ij} (g_{p3}^{jf})^* \left(2m_i + 3m_j + 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + g_{s3}^{ij} (g_{s3}^{jf})^* \left(2m_i - 3m_j - 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} G_2^{\text{DCS}}(0) &\simeq \frac{(m_i + m_f)}{24\pi^2 m_{\phi^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[g_{p3}^{ij} (g_{s3}^{jf})^* \left(2(m_i - m_f) + 3m_j + 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + g_{s3}^{ij} (g_{p3}^{jf})^* \left(2(m_i - m_f) - 3m_j - 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right] \\ &\xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{-m_i}{24\pi^2 m_{\phi^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[g_{p3}^{ij} (g_{s3}^{jf})^* \left(2m_i + 3m_j + 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + g_{s3}^{ij} (g_{p3}^{jf})^* \left(2m_i - 3m_j - 6m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Para entender a dependência dessa interação sobre o decaimento $\mu \rightarrow e \gamma$ é interessante destacar os casos

$$\bullet \quad g_{p3}^{ij} = g_{s3}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \simeq \frac{48\alpha_{\text{e.m.}}}{G_F^2 \pi} \frac{g^4}{m_{\phi^{++}}^4}, \quad (3.52)$$

$$\bullet \quad g_{s3}^{ij} = g \quad \text{e} \quad g_{p3}^{ij} = 0 : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \simeq \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{2\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4 m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^4} \left| 1 + 2 \ln \left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right|^2, \quad (3.53)$$

$$\bullet \quad g_{s3}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad g_{p3}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \simeq \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{2\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4 m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^4} \left| 1 + 2 \ln \left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2} \right) \right|^2, \quad (3.54)$$

onde é possível perceber que os dois últimos tem a mesma taxa de ramificação.

Para ilustrar as contribuições do escalar duplamente carregado para a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ podemos ver no gráfico da Fig. 3.6 suas dependências com os acoplamentos e com $m_{\phi^{++}}$. Para isso, consideramos que os léptons carregados presentes no *loop* são os mesmos do MP (veja Tab. 3.1) e que os acoplamentos $g_{s3}^{ab} = g_s$ e $g_{p3}^{ab} = g_p$ independem dos férmions envolvidos. Na obtenção do gráfico exemplificamos três casos: $g_s = 10^{-2}$ e $g_p = 0$ (vermelho); $g_s = g_p = 5 \times 10^{-3}$ (verde); $g_s = 0$ e $g_p = 10^{-4}$ (azul).

Assim como nos casos anteriores, as restrições experimentais sobre a taxa de ramificação do decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ se refletem como limites sobre as massas dos escalares carregados. No caso em que $g_s = 10^{-2}$ e $g_p = 0$ podemos perceber que a região de massas permitida respeita $m_{\phi^{++}} \gtrsim 2 \times 10^4$ GeV. Na situação da curva verde, em que os acoplamentos são iguais, temos que as massas devem respeitar $m_{\phi^{++}} \gtrsim 10^3$ GeV. Já na situação em que temos $g_s = 0$ e $g_p = 10^{-4}$ a exclusão devida ao limite sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ impõe $m_{\phi^{++}} \gtrsim 2 \times 10^2$ GeV.

Além dos sinais no decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$, observamos também que $a_\mu^{\text{DCS}} > 0$ ($a_\mu^{\text{DCS}} < 0$) quando o acoplamento escalar $g_s = 0$ ($g_s \neq 0$), como já discutido anteriormente nas Eqs. (3.44), (3.45) e (3.46). Ainda que essa contribuição seja positiva, sua magnitude no regime permitido por $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ é muito inferior àquela necessária para explicar a_μ^{exp} .

Figura 3.6: Dependência de a_μ^{DCS} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (gráfico da direita) com os acoplamentos g_s , g_p e com $m_{\phi^{++}}$. No gráfico de a_μ^{DCS} a representação da contribuição a partir de uma linha tracejada corresponde a valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $|a_\mu^{\text{DCS}}| = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem necessária para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita representa a região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].

3.4 Bóson de Gauge Carregado com Férmion Neutro

Saindo do âmbito dos escalares, iremos nessa seção explorar as contribuições devidas a bósons vetoriais carregados interagindo com um férmion neutro e outro com carga. O estudo desse tipo de partícula é importante para entender não só o que pode ocorrer em novas extensões das simetrias do MP que introduzem um novo bóson W' mas também a própria contribuição que surge no caso

do MP com $W^\pm$.

A interação dessa partícula com os férmions citados ocorre por meio do termo na Lagrangeana da forma

$$\mathcal{L} \supset g_{v1}^{ab} W_\mu^{\prime+} \bar{N}_a \gamma^\mu l_b + g_{a1}^{ab} W_\mu^{\prime+} \bar{N}_a \gamma^\mu \gamma^5 l_b + \text{h.c.}, \quad (3.55)$$

onde $W_\mu^{\prime+}$ representa um bóson vetorial carregado e g_{v1}^{ab} e g_{a1}^{ab} são os acoplamentos desse bóson com N_a e l_b que, por sua vez, representam férmions neutros e carregados, respectivamente.

A contribuição desse tipo de interação para a_i e para o decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ se dá a partir do diagrama apresentado na Fig. 3.7.

Figura 3.7: Diagrama com troca de bóson carregado.

A contribuição a partir desse diagrama se dá pela amplitude de espalhamento $\mathcal{M}^\mu = -e \bar{u}(p_f) \Gamma_4^\mu u(p_i)$, em que Γ_4^μ pode ser escrito, no gauge unitário, como

$$\begin{aligned} \Gamma_4^\mu = i \sum_{j=1}^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} & \left[\left(g_{\alpha\lambda} - \frac{(p_i + k)_\alpha (p_i + k)_\lambda}{m_{W'}^2} \right) \left(g_{\nu\beta} - \frac{(p_f + k)_\nu (p_f + k)_\beta}{m_{W'}^2} \right) \right. \\ & \times (g_{\mu\nu} (2p_f - p_i + k)_\lambda + g_{\lambda\mu} (2p_i - p_f + k)_\nu + g_{\nu\lambda} (-2k - p_i - p_f)_\mu) \\ & \times \left. \frac{\left((g_{v1}^{jf})^* \gamma^\beta + (g_{a1}^{jf})^* \gamma^\beta \gamma^5 \right) (-\not{k} + M_j) (g_{v1}^{ij} \gamma^\alpha + g_{a1}^{ij} \gamma^\alpha \gamma^5)}{(k^2 - m_j^2) ((k + p_i)^2 - m_{W'}^2) ((k + p_f)^2 - m_{W'}^2)} \right], \quad (3.56) \end{aligned}$$

onde $m_{W'}$ representa a massa dos bósons carregados.

A partir desse termo podemos utilizar o projetor $\mathcal{P}_{\mu 2}^{a_i}$ em conjunto com as condições $p_i^2 = p_f^2 = m^2$ e $p_i \cdot p_f = (2m^2 - q^2)/2$ para obter a contribuição desse diagrama para a_i , que pode ser escrita em

função das integrais escalares como

$$\begin{aligned}
a_i^{\text{CGB}} = & \frac{-m}{8\pi^2 m_{W'}^2} \sum_{j=1}^3 \left[|g_{a1}^{ij}|^2 (M_j(m+M_j)^2 C_0(m^2, m^2, 0, m_{W'}^2, M_j^2, m_{W'}^2) \right. \\
& + 2((m+M_j)^3 - 2m_{W'}^2(m+2M_j)) C_1(m^2, 0, m^2, M_j^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2) \\
& + m((m+M_j)^2 + 2m_{W'}^2) (C_{11}(m^2, 0, m^2, M_j^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2) + C_{12}(m^2, 0, m^2, M_j^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2))) \\
& - |g_{v1}^{ij}|^2 (-M_j(m-M_j)^2 C_0(m^2, m^2, 0, m_{W'}^2, M_j^2, m_{W'}^2) \\
& + 2((m-M_j)^3 - 2m_{W'}^2(m-2M_j)) C_1(m^2, 0, m^2, M_j^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2) \\
& \left. + m((m-M_j)^2 + 2m_{W'}^2) (C_{11}(m^2, 0, m^2, M_j^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2) + C_{12}(m^2, 0, m^2, M_j^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2))) \right]. \quad (3.57)
\end{aligned}$$

Nesse caso, nosso resultado pode ser escrito como uma combinação das funções $B_0(0, m_{W'}^2, m_{W'}^2)$, $B_0(0, M_j^2, M_j^2)$, $B_0(m^2, M_j^2, m_{W'}^2)$ e $C_0(0, m^2, m^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2, M_j^2)$. A forma analítica das funções $B_0(0, m_{W'}^2, m_{W'}^2)$ e $B_0(0, M_j^2, M_j^2)$ já foi apresentada no Capítulo 2 na Eq. (2.41), enquanto $B_0(m^2, M_j^2, m_{W'}^2)$ pode ser aproximada no limite $m_{W'} \gg m, M_j$ pela Eq. (3.4) com a troca $m_{W'} \leftrightarrow m_\phi$. Além disso, a aproximação da função $C_0(0, m^2, m^2, m_{W'}^2, m_{W'}^2, M_j^2)$ nesse limite também já foi discutida e apresentada na Eq. (3.21), que vale nesse caso quando fazemos a substituição $m_{W'} \leftrightarrow m_{\phi+}$. Usando todas essas aproximações podemos escrever o valor de a_i^{CGB} no regime $m_{W'} \gg m, M_j$ como

$$a_i^{\text{CGB}} \simeq \frac{m}{24\pi^2 m_{W'}^2} \sum_{j=1}^3 \left[|g_{a1}^{ij}|^2 (5m + 6M_j) + |g_{v1}^{ij}|^2 (5m - 6M_j) \right]. \quad (3.58)$$

Para entender melhor como essa interação afeta a_μ vale destacar os casos

$$\bullet \quad g_{a1}^{ij} = g_{v1}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{CGB}} = \frac{5}{4\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_{W'}^2} g^2, \quad (3.59)$$

$$\bullet \quad g_{a1}^{ij} = g, \quad g_{v1}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad M_j = M : \quad a_\mu^{\text{CGB}} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu}{m_{W'}^2} g^2 (5m_\mu + 6M), \quad (3.60)$$

$$\bullet \quad g_{a1}^{ij} = 0, \quad g_{v1}^{ij} = g \quad \text{e} \quad M_j = M : \quad a_\mu^{\text{CGB}} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu}{m_{W'}^2} g^2 (5m_\mu - 6M), \quad (3.61)$$

onde podemos perceber que no regime $M \ll m_\mu$ todas as contribuições são positivas, sendo as duas últimas iguais e com magnitude 2 vezes menor do que a primeira. Quando $M \gg m_\mu$ as duas últimas contribuições crescem, a menos de um sinal, da mesma forma com M , sendo a última a única com $a_\mu^{\text{CGB}} < 0$ nesse regime.

Para obter as contribuições para a taxa de ramificação do decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ podemos utilizar os projetores $\mathcal{P}_{\mu 2}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ e $\mathcal{P}_{\mu 5}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ e as condições de que l_i e l_f são *on-shell*, ou seja, respeitam $p_{i,f}^2 = m_{i,f}^2$ e $p_i \cdot p_f = (m_i^2 + m_f^2 - q^2)/2$, para obtermos $F_2(0)$ e $G_2(0)$ a partir da amplitude de espalhamento já apresentada. Aqui não vamos apresentar o resultado devido a sua extensão, mas vale destacar que ambas as funções são combinações de $C_{0,1,2}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{W'}^2, M_j^2, m_{W'}^2)$ e $C_{11,12,22}(m_i^2, m_f^2, 0, m_{W'}^2, M_j^2, m_{W'}^2)$.

Em particular, essas funções que compõem $F_2(0)$ e $G_2(0)$ podem ser escritas como uma combinação de $B_0(0, m_{W'}^2, m_{W'}^2)$, $B_0(0, M_j^2, M_j^2)$, $B_0(m_i^2, M_j^2, m_{W'}^2)$, $B_0(m_f^2, M_j^2, m_{W'}^2)$ e $C_0(0, m_f^2, m_i^2, m_{W'}^2, m_{W'}, M_j^2)$. As formas das funções B_0 no limite em que $m_{W'} \gg m_i, m_f, M_j$ já foram discutidas anteriormente e podem ser utilizadas feitas as devidas substituições. Além disso, a aproximação da função $C_0(0, m_f^2, m_i^2, m_{W'}^2, m_{W'}, M_j^2)$ nesse limite já foi apresentada na Eq. (3.21), o resultado vem direto da troca $m_{\phi^+} \leftrightarrow m_{W'}$. Com isso, podemos escrever as expressões para $F_2(0)$ e $G_2(0)$ nesse regime de massas como

$$F_2^{\text{CGB}}(0) \simeq \frac{1}{96\pi^2 m_{W'}^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{a1}^{ij} \left(g_{a1}^{jf} \right)^* (5(m_i + m_f)^2 + 12(m_i + m_f)M_j) \right. \\ \left. + g_{v1}^{ij} \left(g_{v1}^{jf} \right)^* (5(m_i + m_f)^2 - 12(m_i + m_f)M_j) \right] \\ \xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{1}{96\pi^2 m_{W'}^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{a1}^{ij} \left(g_{a1}^{jf} \right)^* (5m_i^2 + 12M_j m_i) + g_{v1}^{ij} \left(g_{v1}^{jf} \right)^* (5m_i^2 - 12M_j m_i) \right], \quad (3.62)$$

$$G_2^{\text{CGB}}(0) \simeq \frac{-1}{96\pi^2 m_{W'}^2} \frac{(m_i + m_f)}{(m_i - m_f)} \sum_{j=1}^3 \left[g_{a1}^{ij} \left(g_{v1}^{jf} \right)^* (5(m_i - m_f)^2 + 12(m_i - m_f)M_j) \right. \\ \left. + g_{v1}^{ij} \left(g_{a1}^{jf} \right)^* (5(m_i - m_f)^2 - 12(m_i - m_f)M_j) \right] \\ \xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{-1}{96\pi^2 m_{W'}^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{a1}^{ij} \left(g_{v1}^{jf} \right)^* (5m_i^2 + 12M_j m_i) + g_{v1}^{ij} \left(g_{a1}^{jf} \right)^* (5m_i^2 - 12M_j m_i) \right]. \quad (3.63)$$

Para melhor entendimento do efeito dessas contribuições sobre $\mu \rightarrow e\gamma$ é interessante destacar os casos

$$\bullet \quad g_{a1}^{ij} = g_{v1}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{75\alpha_{\text{e.m.}}}{4\pi G_F^2} \frac{g^4}{m_{W'}^4}, \quad (3.64)$$

$$\bullet \quad g_{a1}^{ij} = g, \quad g_{v1}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad M_j = M : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{32\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4}{m_{W'}^4} |5m_\mu + 12M|^2, \quad (3.65)$$

$$\bullet \quad g_{a1}^{ij} = 0, \quad g_{v1}^{ij} = g \quad \text{e} \quad M_j = M : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{32\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4}{m_{W'}^4} |5m_\mu - 12M|^2, \quad (3.66)$$

onde no limite $M \ll m_\mu$ os dois últimos casos se igualam e assumem valor com magnitude 8 vezes menor do que a do primeiro. Além disso, quando $m_{W'} \gg M \gg m_\mu$ os dois últimos casos crescem com M^2 e novamente assumem mesmo valor.

Para ilustrar o comportamento das contribuições para a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ nos gráficos da Fig. 3.8 apresentamos a dependência dessas funções com os acoplamentos, a massa dos férmions neutros e $m_{W'}$. Para isso, consideramos a massa dos três férmions envolvidos no *loop* idênticas $M_j = M$ e tomamos os acoplamentos $g_{a1}^{ab} = g_a$ e $g_{v1}^{ab} = g_v$ independentes do par (a, b) de férmions envolvidos.

Como podemos ver nas expressões obtidas nessa seção, no limite $m_{W'} \gg M, m_\mu$ tanto a_μ^{CGB} quanto $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ dependem diretamente da razão $(g/m_{W'})$, de forma que na obtenção dos gráficos fixamos essa fração em diferentes valores para entender a dependência das contribuições

Figura 3.8: Dependência de a_μ^{CGB} (esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (direita) com os acoplamentos g_v , g_a , $m_{W'}$ e M . A parte cinza no gráfico da direita representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1]. No gráfico de a_μ^{CGB} a representação das contribuições a partir de uma linha tracejada corresponde a um valor negativo para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $|a_\mu^{\text{CGB}}| = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem daquelas capazes de explicar a_μ^{exp} .

com M . Em particular, tomamos três casos: $g_v = 5 \times 10^{-3}$, $g_a = 0$ e $m_{W'} = 1$ TeV (curva vermelha); $g_v = g_a = 10^{-3}$ e $m_{W'} = 1$ TeV (verde); $g_v = 0$, $g_a = 10^{-3}$ e $m_{W'} = 2$ TeV (azul).

Restrições sobre a taxa de ramificação $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ resultam em limites sobre M . Na situação em que temos $g_v = 5 \times 10^{-3}$, $g_a = 0$ e $m_{W'} = 1$ TeV a massa permitida para os férmions respeita $M \lesssim 2 \times 10^2$ MeV. Na curva verde em que temos os dois acoplamentos iguais não há restrições sobre M . Já no caso em que $g_v = 0$, $g_a = 10^{-3}$ e $m_{W'} = 2$ TeV a massa dos férmions neutros deve respeitar $M \lesssim 10^4$ MeV.

Podemos perceber que em todos os casos estudados podemos ter $a_\mu^{\text{CGB}} > 0$, entretanto, na situação em que $g_a = 0$ (vide Eq. (3.61)), quando a massa dos férmions neutros obedece $M < 5m_\mu/6$ essa contribuição assume valores negativos. O comportamento dessas funções no gráfico confirma o que era esperado pelas Eqs. (3.59), (3.60) e (3.61) já que no regime $M \ll m_\mu$ elas se comportam como constantes. Além disso, no limite $m_{W'} \gg M \gg m_\mu$, elas crescem com M na situação em que apenas um dos acoplamentos é diferentes de zero e, no caso em que $g_a = g_v$, seus valores são iguais aos do regime $M \ll m_\mu$.

Ainda que existam situações com $a_\mu^{\text{CGB}} > 0$, na região em que M respeita as restrições sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ todas contribuições possuem magnitudes muito inferiores ao que é necessário para explicar a_μ^{exp} .

3.5 Bóson de Gauge Neutro

Nessa seção iremos discutir o caso em que temos um bóson de gauge neutro massivo interagindo com dois férmions carregados l e E . Para que nosso resultado tenha validade em teorias que introduzem novos férmions iremos tratar a situação geral em que E e l possam ser partículas distintas, ainda que os resultados também sejam válidos no caso em que esses férmions representem

os léptons carregados do MP. Bósons de gauge neutros surgem quando estendemos as simetrias do MP, como por exemplo, no caso da extensão $SU(2)_L \times SU(2)_R$ ou da introdução de uma nova simetria escura $U(1)_D$ [96]. Além disso, essa partícula aparece no contexto do MP por meio do bóson Z que, por sua vez, interage apenas com férmions carregados de mesmo sabor.

A interação do bóson de gauge com os férmions carregados se dá por meio da Lagrangeana de interação

$$\mathcal{L} \supset g_{v2}^{ab} Z'_\mu \bar{E}_a \gamma^\mu l_b + g_{a2}^{ab} Z'_\mu \bar{E}_a \gamma^\mu \gamma^5 l_b + \text{h.c.}, \quad (3.67)$$

onde g_{v2}^{ab} e g_{a2}^{ab} são os acoplamentos, Z' representa o bóson neutro e E_a e l_b são férmions carregados.

A contribuição dessa interação para o momento magnético dos léptons carregados e para o decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ ocorre por meio do diagrama apresentado na Fig. 3.9.

Figura 3.9: Diagrama com troca de bóson neutro e férmions carregados no loop.

Essa contribuição está associada à amplitude $\mathcal{M}^\mu = -e \bar{u}(p_f) \Gamma_5^\mu u(p_i)$, onde podemos escrever Γ_5^μ , no gauge unitário, como

$$\begin{aligned} \Gamma_5^\mu = -i \sum_j \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} & \left[\frac{((g_{v2}^{jf})^* \gamma^\beta + (g_{a2}^{jf})^* \gamma^\beta \gamma^5)(\not{k} + \not{p}_f + m_j) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}_i + \tilde{M}_j)}{((k + p_i)^2 - \tilde{M}_j^2)((k + p_f)^2 - \tilde{M}_j^2)(k^2 - m_{Z'}^2)} \right. \\ & \left. \times (g_{v2}^{ij} \gamma^\alpha + g_{v2}^{ij} \gamma^\alpha \gamma^5) \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{m_{Z'}^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.68)$$

onde $m_{Z'}$ representa a massa do bóson Z' e $\tilde{M}_j$ a massa do férmion E_j .

A partir dessa amplitude de espalhamento podemos utilizar o projetor $\mathcal{P}_{\mu 2}^{a_i}$ e a condição de que $l_i = l_f$ é *on-shell*, ou seja, que $p_i^2 = p_f^2 = m^2$ e $p_i \cdot p_f = (2m^2 - q^2)/2$, para obter a contribuição

desse diagrama para a_i escrita como

$$\begin{aligned}
a_i^{\text{NGB}} = & \frac{m}{4\pi^2 m_{Z'}^2} \sum_j \left[|g_{a2}^{ij}|^2 \left(\tilde{M}_j(m(m + \tilde{M}_j) - 2m_{Z'}^2) C_0(m^2, m^2, 0, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2, \tilde{M}_j^2) \right. \right. \\
& + (m^3 + 3m^2 \tilde{M}_j + m \tilde{M}_j^2 - \tilde{M}_j(\tilde{M}_j^2 + 4m_{Z'}^2)) C_1(0, m^2, m^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2) \\
& + \tilde{M}_j(m(m + \tilde{M}_j) - 4m_{Z'}^2) C_2(0, m^2, m^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2) \\
& + m((m + \tilde{M}_j)^2 + 2m_{Z'}^2) \left(C_{11}(m^2, m^2, 0, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2, \tilde{M}_j^2) + C_{12}(m^2, m^2, 0, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2, \tilde{M}_j^2) \right) \Big) \\
& + |g_{v2}^{ij}|^2 \left(\tilde{M}_j(m(m - \tilde{M}_j) + 2m_{Z'}^2) C_0(m^2, m^2, 0, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2, \tilde{M}_j^2) \right. \\
& + (m^3 - 3m^2 \tilde{M}_j + m \tilde{M}_j^2 + \tilde{M}_j(\tilde{M}_j^2 + 4m_{Z'}^2)) C_1(0, m^2, m^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2) \\
& + \tilde{M}_j(m(\tilde{M}_j - m) + 4m_{Z'}^2) C_2(0, m^2, m^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2) \\
& + m((m - \tilde{M}_j)^2 + 2m_{Z'}^2) \left(C_{11}(m^2, m^2, 0, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2, \tilde{M}_j^2) + C_{12}(m^2, m^2, 0, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2, \tilde{M}_j^2) \right) \Big) \Big]. \quad (3.69)
\end{aligned}$$

Podemos reduzir o resultado obtido às funções escalares $B_0(0, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2)$, $B_0(0, m_{Z'}^2, m_{Z'}^2)$, $B_0(m^2, -\tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$ e $C_0(0, m^2, m^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$. As funções $B_0(0, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2)$ e $B_0(0, m_{Z'}^2, m_{Z'}^2)$ apresentadas aqui tem forma analítica descrita na Eq. (2.41), enquanto $B_0(m^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$ pode ser descrita no limite $m_{Z'} \gg m, \tilde{M}_j$ pela Eq. (3.4) com a troca $m_{Z'} \leftrightarrow m_\phi$. Já a função $C_0(0, m^2, m^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$ pode ser descrita nesse regime de massas pela Eq. (3.5) com a substituição $m_{Z'} \leftrightarrow m_\phi$. Com isso podemos então escrever a contribuição desse diagrama para o momento magnético nesse regime de massas como

$$a_i^{\text{NGB}} \simeq \frac{-m}{12\pi^2 m_{Z'}^2} \sum_j \left[|g_{a2}^{ij}|^2 (2m + 3\tilde{M}_j) + |g_{v2}^{ij}|^2 (2m - 3\tilde{M}_j) \right]. \quad (3.70)$$

Podemos então olhar o efeito dessa interação sobre a_μ . Em particular, no caso em que os férmions carregados presentes no *loop* são os léptons do MP é interessante estudarmos os casos

$$\bullet \quad g_{a2}^{ij} = g_{v2}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{NGB}} = -\frac{1}{\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_{Z'}^2} g^2, \quad (3.71)$$

$$\bullet \quad g_{a2}^{ij} = g \quad \text{e} \quad g_{v2}^{ij} = 0 : \quad a_\mu^{\text{NGB}} \simeq -\frac{1}{4\pi^2} \frac{m_\mu m_\tau}{m_{Z'}^2} g^2, \quad (3.72)$$

$$\bullet \quad g_{a2}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad g_{v2}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{NGB}} \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{m_\mu m_\tau}{m_{Z'}^2} g^2, \quad (3.73)$$

$$(3.74)$$

onde podemos perceber que nos dois primeiros casos a contribuição é negativa, ou seja, aumenta a diferença entre o valor experimental e teórico de a_μ , enquanto no último caso temos $a_\mu^{\text{NGB}} > 0$. Além disso, nas situações em que apenas um dos g 's é diferente de zero a contribuição para a_μ^{NGB} tem magnitude $(m_\tau/4m_\mu) \simeq 4.2$ vezes maior do que o caso com $g_{a2}^{ij} = g_{v2}^{ij} = g$.

A fim de obter a contribuição desse diagrama para $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ podemos também utilizar os projetores $\mathcal{P}_{\mu 2}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ e $\mathcal{P}_{\mu 5}^{l_i \rightarrow l_f \gamma}$ em conjunto com as condições $p_{i,f}^2 = m_{i,f}^2$ e $p_i \cdot p_f = (m_i^2 + m_f^2 - q^2)/2$ para

obter, a partir de Γ_5^μ , os fatores de forma $F_2(0)$ e $G_2(0)$. Aqui não iremos apresentar as expressões devido a sua extensão mas vale destacar que elas podem ser escritas como uma combinação das funções $C_{0,1,2}(0, m_f^2, m_i^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$ e $C_{11,12,22}(0, m_f^2, m_i^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$.

Para calcular essas contribuições no limite $m_{Z'} \gg m_i, \tilde{M}_j, m_f$ iremos primeiro decompor a expressão de $F_2(0)$ e $G_2(0)$ como uma combinação das funções escalares $B_0(0, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2)$, $B_0(0, m_{Z'}^2, m_{Z'}^2)$, $B_0(m_i^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$, $B_0(m_f^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$ e $C_0(0, m_f^2, m_i^2, \tilde{M}_j^2, \tilde{M}_j^2, m_{Z'}^2)$. A partir disso, como a forma analítica das funções B_0 já foi discutida anteriormente e a expressão para C_0 pode ser obtida a partir da Eq. (3.12) com a troca $m_{Z'} \leftrightarrow m_\phi$, esses fatores de forma podem ser escritos nesse regime como

$$\begin{aligned} F_2^{\text{NGB}}(0) &\simeq \frac{-1}{24\pi^2 m_{Z'}^2} \sum_j \left[g_{a2}^{fi} \left(g_{a2}^{fj} \right)^* \left((m_f + m_i)(m_f + 3\tilde{M}_j + m_i) \right) \right. \\ &\quad \left. + g_{v2}^{fi} \left(g_{v2}^{fj} \right)^* \left((m_f + m_i)(m_f - 3\tilde{M}_j + m_i) \right) \right] \\ &\xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{-1}{24\pi^2 m_{Z'}^2} \sum_j \left[g_{a2}^{fi} \left(g_{a2}^{fj} \right)^* \left(m_i^2 + 3\tilde{M}_j m_i \right) + g_{v2}^{fi} \left(g_{v2}^{fj} \right)^* \left(m_i^2 - 3\tilde{M}_j m_i \right) \right], \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned} G_2^{\text{NGB}}(0) &\simeq \frac{1}{24\pi^2 m_{Z'}^2} \frac{(m_i + m_f)}{(m_i - m_f)} \sum_j \left[g_{a2}^{fi} \left(g_{v2}^{fj} \right)^* \left((m_f - m_i)(m_f - 3\tilde{M}_j - m_i) \right) \right. \\ &\quad \left. + g_{v2}^{fi} \left(g_{a2}^{fj} \right)^* \left((m_f - m_i)(m_f + 3\tilde{M}_j - m_i) \right) \right] \\ &\xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{1}{24\pi^2 m_{Z'}^2} \sum_j \left[g_{a2}^{fi} \left(g_{v2}^{fj} \right)^* \left(m_i^2 + 3\tilde{M}_j m_i \right) + g_{v2}^{fi} \left(g_{a2}^{fj} \right)^* \left(m_i^2 - 3\tilde{M}_j m_i \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.76)$$

A taxa de ramificação para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ pode ser obtida a partir da Eq. (1.38), de modo que considerando os férmions carregados presentes no *loop* como os léptons do MP obtemos algumas situações interessantes descritas por

$$\bullet \quad g_{a2}^{ij} = g_{v2}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) = \frac{12\alpha_{\text{e.m.}}}{G_F^2 \pi} \frac{g^4}{m_{Z'}^4}, \quad (3.77)$$

$$\bullet \quad g_{a2}^{ij} = g \quad \text{e} \quad g_{v2}^{ij} = 0 : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{2\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4 m_\tau^2}{m_{Z'}^4}, \quad (3.78)$$

$$\bullet \quad g_{a2}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad g_{v2}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{2\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4 m_\tau^2}{m_{Z'}^4}, \quad (3.79)$$

onde percebemos que nos dois últimos casos a taxa de ramificação é a mesma, a qual é cerca de $(m_\tau^2/8m_\mu^2) \simeq 36$ vezes maior do que no primeiro caso em que todos os acoplamentos são iguais.

Para ilustrar as diferentes contribuições para a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ envolvendo um bóson vetorial neutro podemos ver nos gráficos da Fig. 3.10 suas dependências com os acoplamentos e com $m_{Z'}$. Para isso, utilizamos os acoplamentos $g_{v2}^{ij} = g_v$ e $g_{a2}^{ij} = g_a$ independentes das partículas envolvidas e também consideramos que os férmions carregados presentes no *loop* são os léptons do MP (ver

Figura 3.10: Dependência de a_μ^{NGB} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (gráfico da direita) com os acoplamentos g_v e g_a e com a massa $m_{Z'}$. A parte cinza no gráfico da direita representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1]. No gráfico de a_μ^{NGB} a representação das contribuições a partir de uma linha tracejada corresponde a um valor negativo para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $|a_\mu^{\text{NGB}}| = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição tenha a ordem relevante para explicação de a_μ^{exp} .

Tab. 3.1). Em particular, na obtenção dos gráficos tomamos três diferentes situações para os acoplamentos: $g_v = 5 \times 10^{-2}$ e $g_a = 0$ (curva vermelha); $g_v = g_a = 5 \times 10^{-3}$ (verde) ; $g_v = 0$ e $g_a = 10^{-3}$ (azul).

As restrições experimentais sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ se refletem nesses casos como limites sobre a massa do bóson vetorial neutro envolvido. Na situação em que temos $g_v = 5 \times 10^{-2}$ e $g_a = 0$ a região permitida para essas massas respeita $m_{Z'} \gtrsim 2 \times 10^{-4}$ GeV. Quando os acoplamentos são iguais, a região não excluída pelo decaimento corresponde à $m_{Z'} \gtrsim 8 \times 10^{-2}$ GeV. Já no caso da curva azul em que $g_v = 0$ e $g_a = 10^{-3}$ as massas devem respeitar $m_{Z'} \gtrsim 4 \times 10^{-2}$ GeV para não saturar $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$.

Podemos também perceber que de fato $a_\mu^{\text{NGB}} > 0$ ($a_\mu^{\text{NGB}} < 0$) na situação em que $g_a = 0$ ($g_a \neq 0$) como pode ser visto nas Eqs. (3.71), (3.72) e (3.73). Entretanto, ainda que essas contribuições sejam positivas, na região onde $m_{Z'}$ respeita as restrições experimentais sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ as contribuições possuem magnitudes muito pequenas para explicar a_μ^{exp} .

3.6 Bóson Carregado com Férmion Duplamente Carregado

Nessa seção iremos discutir o caso em que temos bósons carregados interagindo com férmions carregados e duplamente carregados. Enquanto algumas possibilidades para a origem de bósons carregados já tenha sido discutida anteriormente, férmions duplamente carregados podem surgir, por exemplo, em modelos com introdução de dubletos e tripletos fermiônicos de $SU(2)$.

A interação entre essas partículas pode ser descrita pelo termo na Lagrangeana

$$\mathcal{L} \supset g_{v3}^{ab} V_\mu^+ \bar{l}_a \gamma^\mu D_b + g_{a3}^{ab} V_\mu^+ \bar{l}_a \gamma^\mu \gamma^5 D_b + \text{h.c.}, \quad (3.80)$$

em que g_{v3}^{ab} e g_{a3}^{ab} representam os acoplamentos do bóson V_μ^+ com os férmions, D_b é o férmion duplamente carregado e l_a representa férmions com carga simples.

Esse tipo de interação contribui para a_i e para o processo $l_i \rightarrow l_f \gamma$ a nível de 1-loop a partir dos diagramas apresentados na Fig. 3.11.

Figura 3.11: Diagramas com troca de bóson e férmions carregados no *loop*.

A partir desses diagramas podemos escrever a amplitude de espalhamento para o processo por $\mathcal{M}^\mu = -e\bar{u}(p_f)\Gamma_6^\mu u(p_i)$, em que Γ_6^μ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma_6^\mu = & -i \sum_{j=1}^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\left(g_{\alpha\lambda} - \frac{(p_i + k)_\alpha (p_i + k)_\lambda}{m_V^2} \right) \left(g_{\nu\beta} - \frac{(p_f + k)_\nu (p_f + k)_\beta}{m_V^2} \right) \right. \\ & \times (g_{\mu\nu}(2p_f - p_i + k)_\lambda + g_{\lambda\mu}(2p_i - p_f + k)_\nu + g_{\nu\lambda}(-2k - p_i - p_f)_\mu) \\ & \times \frac{\left((g_{v3}^{jf})^* \gamma^\beta + (g_{a3}^{jf})^* \gamma^\beta \gamma^5 \right) (-\not{k} + \tilde{m}_j) (g_{v3}^{ij} \gamma^\alpha + g_{a3}^{ij} \gamma^\alpha \gamma^5)}{(k^2 - \tilde{m}_j^2) ((k + p_i)^2 - m_V^2) ((k + p_f)^2 - m_V^2)} \Big] \\ & - 2i \sum_{j=1}^3 \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \left[\frac{((g_{v3}^{jf})^* \gamma^\beta + (g_{a3}^{jf})^* \gamma^\beta \gamma^5) (\not{k} + \not{p}_f + \tilde{m}_j) \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}_i + \tilde{m}_j)}{((k + p_i)^2 - \tilde{m}_j^2) ((k + p_f)^2 - \tilde{m}_j^2) (k^2 - m_V^2)} \right. \\ & \left. \times (g_{v3}^{ij} \gamma^\alpha + g_{a3}^{ij} \gamma^\alpha \gamma^5) \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{m_V^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde m_V é a massa do bóson carregado V_μ^+ e $\tilde{m}_j$ a massa do férmion duplamente carregado D_j (iremos considerar três famílias $j = 1, 2, 3$).

Aqui é importante notar que essa amplitude é uma combinação das amplitudes apresentadas nas duas últimas seções. Isso acontece pois o primeiro diagrama da Fig. 3.11 é semelhante àquele apresentado na Fig. 3.7, e também o segundo diagrama dessa figura possui a mesma topologia daquele presente na Fig. 3.9.

Entretanto, ainda que esses diagramas sejam semelhantes é importante destacar alguns fatores diferentes e também as substituições necessárias para que a identificação entre as amplitudes seja feita de forma apropriada.

Quando comparamos a primeira parte da amplitude na Eq. (3.81) com Γ_4^μ temos um sinal de diferença entre elas que se deve à carga do bóson carregado já que, enquanto nesse caso ele tem carga positiva e , na Seção 3.4 o bóson responsável pela interação com o fóton é $W_\mu'^-$, ou seja, com carga $-e$. Essa mudança de carga tem como consequência a alteração do vértice de interação com

o campo eletromagnético por meio de

$$-ie (g_{\mu\nu}(2p_f - p_i + k)_\lambda + \dots) \longrightarrow ie (g_{\mu\nu}(2p_f - p_i + k)_\lambda + \dots), \quad (3.82)$$

o que leva à uma troca de sinal dessa parte da amplitude. Além disso, é necessário realizarmos as substituições $g_{a1}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}$, $g_{v1}^{ab} \rightarrow g_{v3}^{ab}$ e $m_{W'} \rightarrow m_V$ para obter essa parte da amplitude a partir de Γ_4^μ .

A segunda parte da amplitude do diagrama da Fig. 3.11 se assemelha à amplitude Γ_5^μ relacionada à Fig. 3.9, entretanto aqui temos um fator 2 multiplicativo já que, comparando com a situação da Seção 3.5, no caso dos léptons duplamente carregados a diferença de carga $-e \rightarrow -2e$ induz uma mudança no vértice de interação da forma

$$-ie\gamma^\mu \rightarrow -i(2e)\gamma^\mu. \quad (3.83)$$

Além disso, para escrever essa parte da amplitude a partir de Γ_5^μ devemos também realizar as substituições $g_{a2}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}$, $g_{v2}^{ab} \rightarrow g_{v3}^{ab}$ e $m_{Z'} \rightarrow m_V$ como pode ser visto comparando a Eq. (3.81) com a Eq. (3.68).

Tendo em vista essas modificações, como a contribuição desses diagramas para a_i vem direto da amplitude podemos escrevê-la como

$$a_i^{\text{CGB2}} = [2 a_i^{\text{NGB}} (g_{a2}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}; g_{v2}^{ab} \rightarrow g_{v3}^{ab}) - a_i^{\text{CGB}} (g_{a1}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}; g_{a1}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab})], \quad (3.84)$$

em que a_i^{NGB} e a_i^{CGB} foram apresentadas nas seções anteriores nas Eqs. (3.69) e (3.57) e omitimos as substituições das massas.

A contribuição para a_i pode então ser escrita no regime $m_V \gg m, \tilde{m}_j$ como

$$a_i^{\text{CGB2}} \simeq \frac{-m}{24\pi^2 m_V^2} \sum_{j=1}^3 \left[|g_{a3}^{ij}|^2 (13m + 18\tilde{m}_j) + |g_{v3}^{ij}|^2 (13m - 18\tilde{m}_j) \right]. \quad (3.85)$$

Para entender como esse tipo de interação afeta a_μ é interessante destacar os casos

$$\bullet \quad g_{a3}^{ij} = g_{v3}^{ij} = g : \quad a_\mu^{\text{CGB2}} = -\frac{13}{4\pi^2} \frac{m_\mu^2}{m_V^2} g^2, \quad (3.86)$$

$$\bullet \quad g_{a3}^{ij} = g, \quad g_{v3}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{m}_j = \tilde{m} : \quad a_\mu^{\text{CGB2}} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu}{m_V^2} g^2 (13m_\mu + 18\tilde{m}), \quad (3.87)$$

$$\bullet \quad g_{a3}^{ij} = 0, \quad g_{v3}^{ij} = g \quad \text{e} \quad \tilde{m}_j = \tilde{m} : \quad a_\mu^{\text{CGB2}} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu}{m_V^2} g^2 (13m_\mu - 18\tilde{m}), \quad (3.88)$$

onde percebemos que no regime $\tilde{m} \ll m_\mu$ todas as contribuições são negativas e, em particular, as duas últimas assumem mesmo valor, que é metade daquele obtido quando $g_{a3}^{ij} = g_{v3}^{ij} = g$. Além disso, no limite $m_V \gg \tilde{m} \gg m_\mu$ as duas últimas contribuições têm a mesma magnitude e sinais opostos já que o termo com $\tilde{m}$ domina.

De mesmo modo, como $F_2(0)$ e $G_2(0)$ são obtidos diretamente das amplitudes podemos escrever esses fatores como

$$F_2^{\text{CGB2}}(0) = [2 F_2^{\text{NGB}}(0) (g_{a2}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}; g_{v2}^{ab} \rightarrow g_{v3}^{ab}) - F_2^{\text{CGB}}(0) (g_{a1}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}; g_{a1}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab})], \quad (3.89)$$

$$G_2^{\text{CGB2}}(0) = [2 G_2^{\text{NGB}}(0) (g_{a2}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}, g_{v2}^{ab} \rightarrow g_{v3}^{ab}) - G_2^{\text{CGB}}(0) (g_{a1}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab}, g_{a1}^{ab} \rightarrow g_{a3}^{ab})] . \quad (3.90)$$

A contribuição para $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ se dá por meio desses fatores de forma, que no regime $m_V \gg m_i, m_f, \tilde{m}_j$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} F_2^{\text{CGB2}}(0) &\simeq \frac{-1}{96\pi^2 m_V^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{a3}^{fi} (g_{a3}^{fj})^* \left(13(m_i + m_f)^2 + 12\tilde{m}_j(3m_f + 3m_i) \right) \right. \\ &\quad \left. - g_{v3}^{fi} (g_{v3}^{fj})^* \left(-13(m_i + m_f)^2 + 12\tilde{m}_j(3m_f + 3m_i) \right) \right] \\ &\xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{-1}{96\pi^2 m_V^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{a3}^{fi} (g_{a3}^{fj})^* (13m_i^2 + 36\tilde{m}_j m_i) + g_{v3}^{fi} (g_{v3}^{fj})^* (13m_i^2 - 36\tilde{m}_j m_i) \right] , \\ G_2^{\text{CGB2}}(0) &\simeq \frac{1}{96\pi^2 m_V^2} \frac{(m_i + m_f)}{(m_i - m_f)} \sum_{j=1}^3 \left[g_{v3}^{fi} (g_{v3}^{fj})^* \left(12\tilde{m}_j(3m_f - 3m_i) + 13(m_i - m_f)^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + g_{a3}^{fi} (g_{a3}^{fj})^* \left(12\tilde{m}_j(-3m_f + 3m_i) + 13(m_i - m_f)^2 \right) \right] \\ &\xrightarrow{m_i \gg m_f} \frac{1}{96\pi^2 m_V^2} \sum_{j=1}^3 \left[g_{v3}^{fi} (g_{v3}^{fj})^* (13m_i^2 - 36\tilde{m}_j m_i) + g_{a3}^{fi} (g_{a3}^{fj})^* (13m_i^2 + 36\tilde{m}_j m_i) \right] . \end{aligned}$$

A fim de entender melhor como essas contribuições afetam o decaimento $\mu \rightarrow e \gamma$ é interessante destacar as situações

$$\bullet \quad g_{a3}^{ij} = g_{v3}^{ij} = g : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \simeq \frac{507 \alpha_{\text{e.m.}}}{4\pi G_F^2} \frac{g^4}{m_V^4}, \quad (3.91)$$

$$\bullet \quad g_{a3}^{ij} = g, \quad g_{v3}^{ij} = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{m}_j = \tilde{m} : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{32\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4}{m_V^4} |13m_\mu + 36\tilde{m}|^2, \quad (3.92)$$

$$\bullet \quad g_{a3}^{ij} = 0, \quad g_{v3}^{ij} = g \quad \text{e} \quad \tilde{m}_j = \tilde{m} : \quad \text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) = \frac{3\alpha_{\text{e.m.}}}{32\pi G_F^2 m_\mu^2} \frac{g^4}{m_V^4} |13m_\mu - 36\tilde{m}|^2, \quad (3.93)$$

onde no regime $\tilde{m} \ll m_\mu$ os dois últimos casos tem o mesmo comportamento, com valor 8 vezes menor que o primeiro. No limite em que $m_V \gg \tilde{m} \gg m_\mu$ novamente os dois últimos casos assumem mesmo valor e crescem com $\tilde{m}^2$ já que o termo com $\tilde{m}$ domina sobre m_μ .

Para ilustrar as diferentes contribuições para a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)$ no gráfico da Fig. 3.12 apresentamos a dependência dessas funções com os acoplamentos g_v e g_a , e com as massas $\tilde{m}$ e m_V . Para isso, consideramos as massas dos léptons duplamente carregados degeneradas $\tilde{m}_j = \tilde{m}$ e os acoplamentos $g_{a3}^{ab} = g_a$ e $g_{v3}^{ab} = g_v$ independentes dos índices fermiônicos. Em particular, para obtenção dos gráficos tomamos os casos: $g_v = 5 \times 10^{-3}$, $g_a = 0$ e $m_V = 1$ TeV (vermelho); $g_v = g_a = 10^{-3}$ e $m_V = 1$ TeV (verde); $g_v = 0$, $g_a = 10^{-3}$ e $m_V = 2$ TeV (azul).

Devido às restrições experimentais sobre o decaimento $\mu \rightarrow e \gamma$ algumas regiões de $\tilde{m}$ são excluídas. No caso em que $g_v = 5 \times 10^{-3}$, $g_a = 0$ e $m_V = 1$ TeV o limite experimental sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)$ restringe a massa dos férmions duplamente carregados à $\tilde{m} \lesssim 10^2$ MeV. Na curva

Figura 3.12: Dependência de a_μ^{CGB2} (gráfico da esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (gráfico da direita) com g_v , g_a , $\tilde{m}$ e m_V . No gráfico de a_μ^{CGB2} a representação da contribuição a partir de uma linha tracejada corresponde a valores negativos para a anomalia. Além disso, a linha pontilhada preta em $|a_\mu^{\text{CGB2}}| = 10^{-10}$ representa a magnitude mínima para que a contribuição seja da ordem necessária para explicar a_μ^{exp} . A parte cinza no gráfico da direita representa a região com $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \geq 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1].

verde, em que os acoplamentos são iguais, todo espectro de massa é permitido. Já na curva azul com $g_v = 0$, $g_a = 10^{-3}$ e $m_V = 2$ TeV apenas a região com $\tilde{m} \lesssim 6 \times 10^3$ MeV é permitida.

Podemos perceber que em todos os casos apresentados temos $a_\mu^{\text{CGB2}} > 0$, entretanto, na situação com $g_a = 0$, quando $\tilde{m} < 13m_\mu/18$ essa contribuição assume valores negativos (vide Eq. (3.87)). Além disso, de fato o comportamento dessas funções corresponde ao que foi descrito nas Eqs. (3.86), (3.87) e (3.88) já que no regime $\tilde{m} \ll m_\mu$ todas contribuições se comportam como constantes e, no limite $m_V \gg \tilde{m} \gg m_\mu$, enquanto nos casos com apenas um dos acoplamentos não nulos as funções crescem com $\tilde{m}$, na situação em que $g_a = g_v$ o valor de a_μ^{CGB2} permanece o mesmo.

Ainda que tenham sido apresentadas contribuições positivas para a_μ^{CGB2} , na região em que $\tilde{m}$ respeita as restrições experimentais sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$, todas contribuições assumem valores muito inferiores ao que é necessário para explicar a_μ^{exp} .

Tendo essas diversas contribuições em mãos, na próxima seção iremos discutir as diferentes formas que algumas delas aparecem no MP a nível de 1-loop e como contribuem para o momento magnético.

3.7 Contribuições para a_i no MP

O momento magnético dos léptons carregados e , μ e τ no MP recebe diversos tipos de contribuições quando levamos em conta suas interações com as outras partículas. Vimos na Seção 2.5.2 que a nível de 1-loop a contribuição da interação com os fótons para a_i é igual a $\alpha/2\pi$, muito maior do que a sensibilidade experimental atual. Atualmente temos cálculos teóricos que nos fornecem numericamente as contribuições da QED até 5-loops [58], o que é necessário devido ao grau de precisão dos experimentos que medem g_e .

Aqui, com base nos resultados obtidos nas seções anteriores iremos apresentar as correções

eletrofracas do MP a nível de 1-*loop*, ou seja, as contribuições do bóson de Higgs e dos bósons de gauge Z e W . Esse resultado foi obtido pela primeira vez por diversos grupos em 1972 e pode ser conferido em [64–66]. Devido ao fato de que a massa dos bósons do MP são muito superiores às massas dos léptons carregados essas correções a nível de 1-*loop* tem valor $a_\mu^{1-loop(EW)} \simeq 10^{-9}$ para os múons, muito mais próximas do limite experimental do que a correção de 1-*loop* da QED. Além disso, as correções devidas a essas interações com os bósons da teoria eletrofraca a nível de 2-*loops* contribuem com $a_\mu^{2-loops(EW)} \simeq -10^{-10}$, e quando consideramos 3-*loops* elas são da ordem de -10^{-12} [98], ou seja, inferiores à sensibilidade experimental já que [28]

$$a_\mu^{\text{exp}} = 116592080(54)(33) \times 10^{-11}. \quad (3.94)$$

Para entender a relação dos férmions carregados do MP com o Higgs, Z e W iremos primeiro estudar como os campos de gauge das simetrias $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se misturam para compor essas partículas, para depois entender as interações com e , μ e τ . Aqui iremos utilizar o gauge unitário de forma que não temos que nos preocupar com os bósons de Goldstone nessa derivação.

Podemos introduzir o campo de Higgs no MP por meio de um dubleto de mão esquerda com hipercarga $Y = 1/2$, de forma que a derivada covariante atuando nele seja dada por

$$\mathcal{D}_\mu H = \left(\partial_\mu - igW_\mu^a \tau^a - i\frac{g'}{2}B_\mu \right) \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (3.95)$$

com $\tau^a = \sigma^a/2$ os geradores do grupo $SU(2)_L$, g o acoplamento associado a essa simetria, g' o acoplamento relacionado com $U(1)_Y$, W_μ^a os três campos de gauge de $SU(2)_L$ e B_μ o campo de gauge relacionado à simetria $U(1)_Y$.

Quando olhamos para o termo cinético do campo de Higgs, é possível perceber que após a quebra de simetria eletrofraca os bósons de gauge adquirem massa a partir de

$$\mathcal{L}_{\text{cin.Higgs}} = (\mathcal{D}_\mu H)^\dagger (\mathcal{D}_\mu H) \xrightarrow[\text{simetria}]{\text{quebra de}} \frac{v^2 g^2}{8} \left[(W_\mu^1)^2 + (W_\mu^2)^2 + \left(\frac{g'}{g} B_\mu + W_\mu^3 \right)^2 \right] + \dots, \quad (3.96)$$

de forma que após a quebra de simetria eletrofraca temos

$$H = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}, \quad (3.97)$$

com valor esperado do vácuo (VEV) $v = \langle \phi^0 \rangle \sqrt{2}$ e o bóson de Higgs representado por h .

A partir da Eq. (3.96) podemos redefinir os campos de forma que eles sejam autoestados de massa e também tenham carga bem definida. Isso é feito a partir das transformações

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \tan \theta_W = \frac{g'}{g}, \quad (3.98)$$

onde W_μ^+ e W_μ^- tem carga positiva e negativa, respectivamente, e massa $m_W = gv/2$. Introduzimos também o ângulo θ_W para representar a mistura entre B_μ e W_μ^3 e os campos físicos Z_μ , que tem massa $m_Z = m_W / \cos \theta_W$, e A_μ com massa nula, que representa o campo do fóton.

Podemos agora descrever a interação do campo de Higgs com os léptons carregados a partir do termo

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -y_i \bar{L}_i H l_{iR} + \text{h.c.} \quad \text{com} \quad L_i = \begin{pmatrix} \nu_i \\ l_i \end{pmatrix}_L \quad ; \quad l_i = e, \mu, \tau \quad \text{e} \quad \nu_i = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, \quad (3.99)$$

onde y_i representam acoplamentos de Yukawa e os subíndices L e R representam as projeções de mão esquerda e direita, respectivamente, definidas por $l_L \equiv \frac{(1-\gamma^5)}{2}l$ e $l_R \equiv \frac{(1+\gamma^5)}{2}l$.

Após a quebra de simetria podemos descrever a interação do campo de Higgs com os léptons carregados por

$$-y_i \bar{L}_i H l_{iR} + \text{h.c.} \longrightarrow -\frac{y_i v}{\sqrt{2}} \bar{l}_i l_i - \frac{y_i}{\sqrt{2}} h \bar{l}_i l_i, \quad (3.100)$$

onde podemos identificar a massa do férmion como $m_i = y_i v / \sqrt{2}$ e o acoplamento da interação com h como m_i / v . Não iremos discutir o setor de quarks aqui pois ele não é importante para os processos que iremos estudar.

A interação dos bósons de gauge com os léptons carregados se dá por meio do termo cinético desses léptons, que pode ser escrito como

$$\mathcal{L}_{\text{cin. lep}} = i \bar{l}_{iR} \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu l_{iR} + i \bar{L}_i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_i \quad \text{com} \quad \mathcal{D}_\mu l_{iR} = \left(\partial_\mu - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) l_{iR} \quad (3.101)$$

$$\text{e} \quad \mathcal{D}_\mu L_i = \left(\partial_\mu - i g W_\mu^a \tau^a - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) L_i, \quad (3.102)$$

de onde vem, usando a Eq. (3.98), que a interação dos bósons físicos com os léptons carregados é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{cin. lep}} \supset & -\frac{g}{2\sqrt{2}} (\bar{\nu}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l_i W_\mu^+ + \bar{l}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_i W_\mu^-) - g \sin \theta_W \bar{l}_i \gamma^\mu l_i A_\mu \\ & - \frac{g}{4 \cos \theta_W} Z_\mu \bar{l}_i [(4 \sin^2 \theta_W - 1) \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^5] l_i, \end{aligned} \quad (3.103)$$

a partir de onde podemos identificar o acoplamento do fóton com os léptons carregados como sendo $e = g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W$, de modo que agora temos todas as interações necessárias para obter as contribuições eletrofracas para momento magnético.

É importante destacar que, como observado por diversos experimentos [77–79], os autoestados de sabor dos neutrinos oscilam, o que indica que eles não são autoestados de massa. Para construir nossas regras de Feynman precisamos utilizar campos com massa bem definida, e portanto iremos definir a relação dos neutrinos de sabor com os de massa a partir da matriz de Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata (PMNS) que pode ser escrita como [99]

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e^{i\alpha_{12}} & \\ & & e^{i\alpha_{31}} \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

$$\text{com} \quad \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

aqui usamos a notação $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$, $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$ com θ_{12} , θ_{13} e θ_{23} ângulos de mistura, δ a fase de Dirac e α_{12} e α_{31} as fases de Majorana que são necessárias no caso em que os neutrinos sejam partículas de Majorana. Os valores para esses ângulos compatíveis com os experimentos podem ser encontrados em [100].

Com isso, a interação dos léptons carregados com os bósons $W_\mu^\pm$ pode ser escrita como

$$\bar{\nu}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l_i W_\mu^+ + \bar{l}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \nu_i W_\mu^- \longrightarrow \bar{\nu}_\alpha U_{i\alpha}^* \gamma^\mu (1 - \gamma^5) l_i W_\mu^+ + \bar{l}_i \gamma^\mu (1 - \gamma^5) U_{i\alpha} \nu_\alpha W_\mu^-, \quad (3.106)$$

com $i = e, \mu, \tau$ e $\alpha = 1, 2, 3$. Vale aqui destacar que a matriz U é unitária, de modo que $\sum_\alpha U_{i\alpha}^* U_{i\alpha} = 1$.

Com isso, os diagramas que contribuem para a_i envolvendo as interações com h , Z e W são apresentados na Fig. 3.13.

Figura 3.13: Contribuições a nível de 1-loop de h , Z e W para a_i

Podemos agora relacionar essas diferentes contribuições com aquelas já estudadas nesse capítulo.

O primeiro diagrama da Fig. 3.13 representa o caso discutido na Seção 3.1. Já o segundo e o terceiro diagramas estão relacionados com o que foi discutido nas Seções 3.4 e 3.5, respectivamente.

No caso da interação com o bóson de Higgs, quando comparamos a Eq. (3.1) com a Eq. (3.100) podemos identificar

$$g_{s_1}^{ii} = -\frac{m_i}{v} \quad ; \quad g_{s_1}^{ab} = 0 \quad \text{se } a \neq b \quad \text{e} \quad g_{p_1}^{ab} = 0 \quad \text{para } \forall a, b. \quad (3.107)$$

Como $m_h \gg m_i$ para qualquer lépton carregado i , comparando com a Eq. (3.6) podemos escrever a contribuição desse diagrama como

$$\begin{aligned} a_i^h &\simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{m_i}{m_h^2} \left(\frac{m_i}{v} \right)^2 \left[-\frac{7m_i}{12} - m_i \ln \left(\frac{m_i}{m_h} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \frac{m_i^4}{m_h^2} (G_F \sqrt{2}) \left[-\frac{7}{12} + \ln \left(\frac{m_h}{m_i} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.108)$$

onde usamos $v = (G_F \sqrt{2})^{-1/2}$.

Quando pensamos na interação com o bóson Z , comparando a Eq. (3.103) com a Eq. (3.67), podemos escrever os acoplamentos entre Z e os férmions carregados como

$$g_{v_2}^{ii} = -\frac{g}{4 \cos \theta_W} (4 \sin^2 \theta_W - 1) \quad ; \quad g_{v_2}^{ab} = 0 \quad \text{se } a \neq b \quad ; \quad g_{a_2}^{ii} = -\frac{g}{4 \cos \theta_W} \quad ; \quad g_{a_2}^{ab} = 0 \quad \text{se } a \neq b. \quad (3.109)$$

Aqui novamente, como vale o limite entre as massas $m_Z \gg m_i$, podemos utilizar a Eq. (3.70) para escrever a contribuição desse diagrama para a_i por

$$\begin{aligned} a_i^Z &\simeq \frac{-1}{12\pi^2} \frac{m_i}{m_Z^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta_W} \right)^2 [(5 m_i - m_i (4 \sin^2 \theta_W - 1)^2)] \\ &= \frac{1}{48\pi^2} m_i^2 \left(\frac{g}{2m_Z \cos \theta_W} \right)^2 [(4 \sin^2 \theta_W - 1)^2 - 5] \\ &= \frac{1}{48\pi^2} m_i^2 (G_F \sqrt{2}) [(4 \sin^2 \theta_W - 1)^2 - 5], \end{aligned} \quad (3.110)$$

onde usamos que $g/(2m_W) = (G_F \sqrt{2})^{1/2}$ com $m_W = m_Z \cos \theta_W$.

A interação do bóson W com os léptons do MP, descrita pela segunda imagem na Fig. 3.13, quando comparamos as Eqs. (3.103) e (3.106) com a Eq. (3.55), tem seus acoplamentos dados por

$$g_{v1}^{\alpha i} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} U_{i\alpha}^* \quad ; \quad g_{a1}^{\alpha i} = \frac{g}{2\sqrt{2}} U_{i\alpha}^* \quad \text{com} \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (3.111)$$

Como $m_W \gg m_\nu, m_i$ podemos então utilizar a Eq. (3.58) para escrever a contribuição para a_i como

$$\begin{aligned} a_i^W &\simeq \frac{1}{24\pi^2} \frac{m_i}{m_W^2} \left(\frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \sum_{\alpha=1}^3 [U_{i\alpha}^* U_{i\alpha} (5m_i + 6m_{\nu_\alpha}) + U_{i\alpha}^* U_{i\alpha} (5m_i - 6m_{\nu_\alpha})] \\ &= \frac{1}{48\pi^2} m_i \left(\frac{g}{2m_W} \right)^2 \sum_{\alpha=1}^3 [U_{i\alpha}^* U_{i\alpha} 10 m_i] \\ &= \frac{10 m_i^2}{48\pi^2} (G_F \sqrt{2}), \end{aligned} \quad (3.112)$$

onde usamos a unitariedade de U e também $g/(2m_W) = (G_F \sqrt{2})^{1/2}$.

Combinando todos esses resultados podemos então escrever a contribuição geral das partículas h , Z e W para o momento magnético dos léptons carregados como

$$a_i^{1-loop(EW)} = \frac{1}{48\pi^2} m_i^2 (G_F \sqrt{2}) \left[5 + (4 \sin \theta_W - 1)^2 + \frac{m_i^2}{m_h^2} \left(-7 + 6 \ln \left(\frac{m_h^2}{m_i^2} \right) \right) \right], \quad (3.113)$$

onde podemos notar que a contribuição do bóson de Higgs é suprimida por um fator m_i^2/m_h^2 .

De fato, tomando o múon como nosso lépton carregado, essas contribuições são

$$a_\mu^W \simeq 388.7 \times 10^{-11} \quad ; \quad a_\mu^Z \simeq -193.9 \times 10^{-11} \quad ; \quad a_\mu^h \simeq 21.6 \times 10^{-15} \quad (3.114)$$

$$\implies a_\mu^{1-loop(EW)} \simeq 194.8 \times 10^{-11}, \quad (3.115)$$

lembrando que, como visto na Eq. (3.113), essas contribuições dependem da massa da partícula, e portanto assumem valores diferentes no caso do elétron e do tau.

O caso do múon é interessante pois mesmo quando levamos em conta as contribuições de ordem maior da teoria eletrofraca, as diversas contribuições da QED e também as da parte hadrônica encontramos uma diferença entre o valor teórico e o experimental de 3.6σ [32] e 3.3σ [33] (vide Seção 1.1.5).

Vamos adotar a atitude que essa discrepância pode ser explicada por física nova no setor eletrofraco. No próximo capítulo iremos explorar novas contribuições no contexto de modelos $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Esses modelos além de produzir contribuições novas para a_μ também afetam decaimentos $l_i \rightarrow l_f \gamma$.

O decaimento $\mu \rightarrow e \gamma$ no MP ocorre devido à mistura no setor dos neutrinos e tem sinal previsto da ordem de $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \simeq 10^{-54}$ [51, 52] como apresentado na Eq. (1.39), muito inferior à atual sensibilidade experimental que nos dá $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) < 4.2 \times 10^{-13}$ com 90% de confiança, limite obtido pelo experimento MEG [1]. Estamos aguardando ansiosamente pelos resultados de MEG II [2] que pretende alcançar sensibilidade de $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) \lesssim 6 \times 10^{-14}$.

Temos também limites experimentais para os decaimentos $\tau \rightarrow \mu \gamma$ e $\tau \rightarrow e \gamma$ obtidos pelas colaborações Belle e BaBar que indicam $\text{BR}(\tau \rightarrow \mu \gamma) < 4.4 \times 10^{-8}$ [101, 102] e $\text{BR}(\tau \rightarrow e \gamma) < 3.3 \times 10^{-8}$ [102]. Além disso, o experimento Belle II [103] pretende atingir sensibilidade de $\text{BR}(\tau \rightarrow \mu \gamma) = 1 \times 10^{-9}$ e $\text{BR}(\tau \rightarrow e \gamma) = 3 \times 10^{-9}$ [104, 105].

Nesse capítulo foram estudadas diversas contribuições para a_i e para os decaimentos $l_i \rightarrow l_f \gamma$, passando por aquelas relacionadas a interação dos léptons carregados com escalares neutros, carregados e duplamente carregados até casos envolvendo bósons de vetoriais neutros e carregados, sendo que nesse último caso foram estudadas duas situações: a interação deles com férmions neutros e duplamente carregados. Em todos os casos foram utilizados acoplamentos genéricos entre as partículas, de forma que os resultados podem ser aplicados em qualquer modelo que contenha essas interações.

Para calcular os diferentes diagramas foi utilizada a técnica dos projetores apresentada no Capítulo 2, a partir de onde foi possível obter direto da amplitude a contribuição a_i e os fatores de forma $F_2(0)$ e $G_2(0)$. As expressões obtidas foram apresentadas como combinações das funções escalares de Passarino-Veltman, também discutidas no Capítulo 2.

Em diversos casos é interessante estudarmos o limite em que a massa dos mediadores introduzidos é muito maior do que a dos férmions envolvidos no *loop* e portanto foram apresentadas as expressões analíticas aproximadas das funções de Passarino-Veltman nesse limite de massa, e consequentemente também obtivemos a_i , $F_2(0)$ e $G_2(0)$ nesse regime. Além disso, foram apresentadas as contribuições para a_μ e para $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)$ nos casos particulares em que apenas um dos acoplamentos é diferente de zero e também quando os dois são iguais. Os sinais das diferentes contribuições para a_μ podem ser encontrados na Tab 3.2.

Em particular, no MP os diagramas que contribuem para a_i devido às interações eletrofracas, ou seja, envolvendo os bósons h , Z e W se encaixam diretamente nos casos que foram estudados no decorrer do capítulo. Foram então obtidas as diferentes contribuições desses diagramas para o momento magnético de e , μ e τ . Percebemos ainda que todas essas contribuições respeitam o limite $m_W, m_Z, m_h \gg m_i, m_\nu$, a partir de onde foram apresentadas também as expressões aproximadas nesse regime de massa. Percebemos que as principais contribuições se dão a partir das interações com Z e W , enquanto a contribuição do bóson de Higgs é suprimida por um fator m_i^2/m_h^2 , que no caso do múon faz com que a_μ^h seja cerca de 5 ordens de grandeza menor que a_μ^Z e a_μ^W .

No setor do múon, a discrepância de mais de 3σ entre o valor teórico e experimental parece indicar que nova física eletrofraca poderia explicar essa diferença. Além disso, devido a semelhança discutida entre os diagramas de a_i e aqueles envolvidos no decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ muitos modelos que podem explicar a_μ^{exp} produzem $\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma)$ maiores do que previstos pelo MP, os quais podem ser medidos em experimentos em um futuro próximo como Belle II e MEG II. No próximo capítulo iremos estudar um desses modelos e verificar as condições para explicar a_μ^{exp} e as consequências para

$$\text{BR}(l_i \rightarrow l_f \gamma).$$

	Acoplamentos		Sinal da contribuição	
Escalar Neutro	$g_s = 0$	$g_p \neq 0$	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) < -\frac{3}{2}$: -	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) > -\frac{3}{2}$: +
	$g_s \neq 0$	$g_p = 0$	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) < -\frac{3}{2}$: +	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_\phi^2}\right) > -\frac{3}{2}$: -
	$g_s = g_p \neq 0$		+	
Escalar Carregado	$g_s = 0$	$g_p \neq 0$	$M < \frac{m_\mu}{3}$: -	$M > \frac{m_\mu}{3}$: +
	$g_s \neq 0$	$g_p = 0$	-	
	$g_s = g_p \neq 0$		-	
Escalar Duplamente Carregado	$g_s = 0$	$g_p \neq 0$	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2}\right) < -\frac{1}{2}$: -	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2}\right) > -\frac{1}{2}$: +
	$g_s \neq 0$	$g_p = 0$	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2}\right) < -\frac{1}{2}$: +	$\ln\left(\frac{m_\tau^2}{m_{\phi^{++}}^2}\right) > -\frac{1}{2}$: -
	$g_s = g_p \neq 0$		-	
Bóson Vetorial Carregado com Férmion Neutro	$g_v = 0$	$g_a \neq 0$	+	
	$g_v \neq 0$	$g_a = 0$	$M < \frac{5m_\mu}{6}$: +	$M > \frac{5m_\mu}{6}$: -
	$g_v = g_a \neq 0$		+	
Bóson Vetorial Neutro	$g_v = 0$	$g_a \neq 0$	-	
	$g_v \neq 0$	$g_a = 0$	+	
	$g_v = g_a \neq 0$		-	
Bóson Vetorial Carregado com Férmion Duplamente Carregado	$g_v = 0$	$g_a \neq 0$	-	
	$g_v \neq 0$	$g_a = 0$	$\tilde{m} < \frac{13m_\mu}{18}$: -	$\tilde{m} > \frac{13m_\mu}{18}$: +
	$g_v = g_a \neq 0$		-	

Tabela 3.2: Sinal das diferentes contribuições para a_μ

Capítulo 4

Modelo $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$

No MP há uma assimetria entre campos de mão-esquerda, introduzidos como dubletos de $SU(2)_L$, e campos de mão-direita, que aparecem como singletos dessa simetria. Modelos com simetria *left-right* (MSLR) tratam ambos campos, de mão esquerda e direita, da mesma forma, a partir de dubletos dos grupos $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$, respectivamente. Além disso, enquanto no MP a simetria de paridade é quebrada maximalmente de forma explícita, os MSLR podem restaurar a paridade em nível fundamental, sendo quebrada espontaneamente pelo vácuo da teoria, de forma que sua violação é uma consequência de baixas energias. Além disso, nos MSLR os neutrinos de mão-direita presentes nos multipletos permitem também a obtenção da massa dos neutrinos leves a partir do mecanismo de *seesaw* [106–109].

Estudaremos aqui a realização mínima dos MSLR, onde além do aparecimento de novos bósons de gauge Z' , $W_R^\pm$ que acompanham Z e $W_L^\pm$, identificados com os mediadores observados experimentalmente, ou seja, Z^0 e $W^\pm$ do MP, teremos um setor escalar estendido por um bidublete Φ e dois tripletos $\Delta_{L,R}$ de $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ [93,94]. Esse modelo, como veremos, apresenta várias contribuições para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$.

4.1 Estrutura do Modelo Mínimo

O MSLR mínimo que descrevemos aqui é baseado no grupo $G_{LR} \equiv SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$ onde léptons (L_i) e quarks (Q_i) são introduzidos na representação de dubletos simétricos

$$L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu'_i \\ l'_i \end{pmatrix}_L \in (2_L, 1_R, -1) \ ; \ L_{iR} = \begin{pmatrix} \nu'_i \\ l'_i \end{pmatrix}_R \in (1_L, 2_R, -1) \ , \quad \text{onde } i = e, \mu, \tau,$$

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} u'_i \\ d'_i \end{pmatrix}_L \in (2_L, 1_R, 1/3) \ ; \ Q_{iR} = \begin{pmatrix} u'_i \\ d'_i \end{pmatrix}_R \in (1_L, 2_R, 1/3) \ , \quad \text{onde } u_i = u, c, t \text{ e } d_i = d, s, b,$$

onde os números entre parênteses caracterizam a representação desses campos com respeito as simetria $SU(2)_L$, $SU(2)_R$ e a carga $B - L$ (número bariônico B menos número leptônico L).

Nesse contexto a carga elétrica das partículas está relacionada aos autovalores dos geradores de isospin fraco I_{iL} e I_{iR} de $SU(2)_L$ e $SU(2)_R$, com $I_i = \sigma_i/2$ e $i = 1, 2, 3$, por

$$Q \equiv I_{3L} + I_{3R} + \frac{B - L}{2}. \quad (4.1)$$

A partir disso podemos escrever as transformações desses dubletos como

$$\Psi_{L,R} \rightarrow U_{B-L} U_{L,R} \Psi_{L,R} \quad \text{com} \quad U_{B-L} \equiv e^{-ig' \frac{B-L}{2} \theta(x)} \quad \text{e} \quad U_{L,R} \equiv e^{-ig_{L,R} \frac{\sigma^a}{2} \theta^a(x)}, \quad (4.2)$$

onde g_L , g_R e g' são os acoplamentos associados às simetrias $SU(2)_L$, $SU(2)_R$ e $U(1)_{B-L}$, respectivamente, $\Psi = Q_i, L_i$ e $\theta(x)$ e $\theta^a(x)$ são ângulos que determinam a transformação.

A partir dessas transformações podemos obter as derivadas covariantes dos campos, que atuam nos férmions $\Psi_{L,R}$ de forma que

$$D_\mu \Psi_{L,R} = \left(\partial_\mu - ig_{L,R} \frac{\sigma^a}{2} W_{1,2\mu}^a - ig' \frac{B-L}{2} B_\mu \right) \Psi_{L,R},$$

em que introduzimos os campos de gauge $W_{1\mu}^a$, $W_{2\mu}^a$ e B_μ associados às simetrias $SU(2)_L$, $SU(2)_R$ e $U(1)_{B-L}$, respectivamente, para preservar a invariância de gauge. Eses campos se transformam na representação adjunta de seus respectivos grupos.

Com isso, podemos escrever os termos cinéticos dos férmions e dos bóson de gauge como

$$\mathcal{L}_{\text{ferm}}^{\text{cin}} = \sum_{\Psi=Q,L} (\bar{\Psi}_L i \not{D} \Psi_L + \bar{\Psi}_R i \not{D} \Psi_R), \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} W_{1\mu\nu}^a W_1^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{2\mu\nu}^a W_2^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu},$$

onde os tensores $W_{1,2\mu\nu}^a$ e $B_{\mu\nu}$ são dados por

$$W_{1,2\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu W_{1,2\nu}^a - \partial_\nu W_{1,2\mu}^a + g_{L,R} \epsilon^{abc} W_{1,2\mu}^b W_{1,2\nu}^c, \\ B_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

4.2 Setor Escalar

Na parte escalar do modelo temos um bidublete Φ e dois tripletos $\Delta_{L,R}$ representados por

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1^0 & \phi_1^+ \\ \phi_2^- & \phi_2^0 \end{pmatrix} \in (2_L, 2_R, 0),$$

$$\Delta_{L,R} = \begin{pmatrix} \delta_{L,R}^+/\sqrt{2} & \delta_{L,R}^{++} \\ \delta_{L,R}^0 & -\delta_{L,R}^+/\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

onde $\Delta_L \in (3_L, 1_R, 2)$ e $\Delta_R \in (1_L, 3_R, 2)$.

As transformações de gauge desses campos [94] podem ser descritas como

$$\Delta_L \rightarrow U_{B-L} U_L \Delta_L U_L^\dagger, \quad (4.4)$$

$$\Delta_R \rightarrow U_{B-L} U_R \Delta_R U_R^\dagger, \quad (4.5)$$

$$\Phi \rightarrow U_L \Phi U_R^\dagger. \quad (4.6)$$

A partir dessas transformações, de forma similar ao caso dos férmions podemos obter suas derivadas covariante como

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi - ig_L \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{1\mu} \phi + ig_R \phi \frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{2\mu}, \quad (4.7)$$

$$D_\mu \Delta_{L,R} = \partial_\mu \Delta_{L,R} - ig_{L,R} \left[\frac{\vec{\sigma}}{2} \cdot \vec{W}_{1,2\mu}, \Delta_{L,R} \right] - ig' B_\mu \Delta_{L,R}. \quad (4.8)$$

Com base nisso podemos construir tanto os termos de interação desses escalares com os léptons, que dará origem a suas massa quando ocorrer a quebra de simetria, quanto os termos de interação entre os próprios campos escalares.

Além disso, os termos cinéticos desses escalares darão origem às massas dos bósons de gauge quando a simetria for espontaneamente quebrada, o que ocorre em duas etapas

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L} \xrightarrow{\langle \Delta_R \rangle} SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \Phi \rangle, \langle \Delta_L \rangle} U(1)_{\text{em}}, \quad (4.9)$$

onde os valores esperados do vácuo desses campos são dados por

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} \kappa_1 e^{i\theta_1}/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \kappa_2 e^{i\theta_2}/\sqrt{2} \end{pmatrix} ; \quad \langle \Delta_{L,R} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ v_{L,R} e^{i\theta_{3,4}}/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix},$$

aqui consideramos $\kappa_{1,2}$ e $v_{L,R}$ reais e positivos e introduzimos as fases complexas $\theta_{1,2,3,4}$.

Como veremos a primeira quebra (v_R) será responsável pela parte principal das massas dos bósons Z' e W_R e a segunda quebra (κ_1, κ_2) pelas massas dos bósons Z e W_L , além de um pequeno VEV v_L .

Vale notar que os campos escalares expandidos ao redor desses VEVs não são necessariamente campos físicos, temos que diagonalizar seus termos de massa para obter quem são os autoestados de massa e, a partir disso, obter as interações da forma apropriada.

No que diz respeito aos valores esperados do vácuo $\kappa_{1,2}$ e $v_{L,R}$ da teoria iremos utilizar transformações dos campos escalares devido a ação de $SU(2)_{L,R}$ para analisar se os VEVs podem ser reais ou não. Para isso, iremos rodar os campos por uma transformação descrita por

$$U_{L,R} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_{L,R}} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_{L,R}} \end{pmatrix}.$$

Olhando para a forma como os campos escalares se transformam segundo essa transformação, com base nas Eqs. (4.4), (4.5) e (4.6) podemos escrever os VEVs após essa rotação como

$$\begin{aligned} \kappa_1 e^{i\theta_1} &\rightarrow \kappa_1 e^{i(\theta_L - \theta_R + \theta_1)} & , & & \kappa_2 e^{i\theta_2} &\rightarrow \kappa_2 e^{-i(\theta_L - \theta_R - \theta_2)}, \\ v_L e^{i\theta_3} &\rightarrow v_L e^{-i(2\theta_L - \theta_3)} & , & & v_R e^{i\theta_4} &\rightarrow v_R e^{-i(2\theta_R - \theta_4)}, \end{aligned}$$

de modo que podemos sempre escolher θ_L e θ_R adequadamente para que

$$\begin{cases} \theta_L - \theta_R + \theta_1 = 0 \\ 2\theta_R - \theta_4 = 0 \end{cases},$$

de forma que v_R e κ_1 sejam reais e positivos. Em particular, iremos tomar também v_L e κ_2 reais para satisfazer condições fenomenológicas relacionadas ao estudo da minimização do potencial escalar [110].

Além disso, podemos escrever o potencial mais geral envolvendo os campos escalares como [110]

$$\begin{aligned}
V = & -\mu_1^2 \text{Tr}(\Phi\Phi^\dagger) - \mu_2^2 \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) + \text{Tr}(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi) \right] - \mu_3^2 \left[\text{Tr}(\Delta_L\Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_R\Delta_R^\dagger) \right] \\
& + \lambda_1 \left[\text{Tr}(\Phi\Phi^\dagger) \right]^2 + \lambda_2 \left\{ \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) \right]^2 + \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi) \right]^2 \right\} + \lambda_3 \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) \text{Tr}(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi) \right] \\
& + \lambda_4 \left\{ \text{Tr}(\Phi\Phi^\dagger) \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) + \text{Tr}(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi) \right] \right\} + \rho_1 \left\{ \left[\text{Tr}(\Delta_L\Delta_L^\dagger) \right]^2 + \left[\text{Tr}(\Delta_R\Delta_R^\dagger) \right]^2 \right\} \\
& + \rho_2 \left[\text{Tr}(\Delta_L\Delta_L) \text{Tr}(\Delta_L^\dagger\Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_R\Delta_R) \text{Tr}(\Delta_R^\dagger\Delta_R^\dagger) \right] + \rho_3 \left[\text{Tr}(\Delta_L\Delta_L^\dagger) \text{Tr}(\Delta_R\Delta_R^\dagger) \right] \\
& + \rho_4 \left[\text{Tr}(\Delta_L\Delta_L) \text{Tr}(\Delta_R^\dagger\Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_L\Delta_L) \text{Tr}(\Delta_R^\dagger\Delta_R^\dagger) \right] \\
& + \alpha_1 \left\{ \text{Tr}(\Phi\Phi^\dagger) \left[\text{Tr}(\Delta_L\Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Delta_R\Delta_R^\dagger) \right] \right\} + \alpha_2 \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi) \text{Tr}(\Delta_R\Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) \text{Tr}(\Delta_L\Delta_L^\dagger) \right] \\
& + \alpha_2^* \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}\Phi^\dagger) \text{Tr}(\Delta_R\Delta_R^\dagger) + \text{Tr}(\tilde{\Phi}^\dagger\Phi) \text{Tr}(\Delta_L\Delta_L^\dagger) \right] + \alpha_3 \left[\text{Tr}(\Phi\Phi^\dagger\Delta_L\Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger\Phi\Delta_R\Delta_R^\dagger) \right] \\
& + \beta_1 \left[\text{Tr}(\Phi\Delta_R\Phi^\dagger\Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger\Delta_L\Phi\Delta_R^\dagger) \right] + \beta_2 \left[\text{Tr}(\tilde{\Phi}\Delta_R\Phi^\dagger\Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\tilde{\Phi}^\dagger\Delta_L\Phi\Delta_R^\dagger) \right] \\
& + \beta_3 \left[\text{Tr}(\Phi\Delta_R\tilde{\Phi}^\dagger\Delta_L^\dagger) + \text{Tr}(\Phi^\dagger\Delta_L\tilde{\Phi}\Delta_R^\dagger) \right], \tag{4.10}
\end{aligned}$$

com $\tilde{\Phi} \equiv \sigma_2 \Phi^* \sigma_2$. No caso em que temos simetria de paridade $\mathcal{P}$ (ver Seção 4.6.1) devido às simetrias da Lagrangeana obtemos que os parâmetros relacionados a esse potencial são todos reais, com exceção de α_2 que pode ser complexo. Já na situação em que consideramos a simetria discreta de conjugação de carga $\mathcal{C}$ (ver Seção 4.6.2) não temos tantas restrições sobre os acoplamentos desse potencial [111]. Em particular, para evitar quebra explícita da simetria CP no setor escalar vamos tomar todos esses acoplamentos reais. Essa escolha interfere pouco nos observáveis que estamos interessados, apenas gera algumas restrições adicionais sobre o espectro de massa dos escalares [111].

Podemos também minimizar esse potencial com relação aos VEVs da teoria, de onde obtemos a relação [112]

$$\beta_2 \kappa_1^2 + \beta_1 \kappa_1 \kappa_2 + \beta_3 \kappa_2^2 = (2\rho_1 - \rho_3) v_L v_R, \tag{4.11}$$

que pode ser escrita como

$$v_L v_R = \gamma \kappa_+^2 \quad \text{com} \quad \gamma \equiv \frac{\beta_2 \kappa_1^2 + \beta_1 \kappa_1 \kappa_2 + \beta_3 \kappa_2^2}{(2\rho_1 - \rho_3) \kappa_+^2}, \tag{4.12}$$

o que nos fornece uma relação de *seesaw* entre os VEVs dos escalares $\Delta_{L,R}$.

4.3 Setor de Gauge na base de Massa

Como já descrito anteriormente, podemos obter a massa dos bósons de gauge da teoria a partir do termo cinético dos campos de Higgs, que é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}}^{\text{cin}} = \text{Tr}[(D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi)] + \text{Tr}[(D_\mu \Delta_L)^\dagger (D^\mu \Delta_L)] + \text{Tr}[(D_\mu \Delta_R)^\dagger (D^\mu \Delta_R)].$$

Após a quebra de simetria, os termos quadráticos associados a massa dos campos de gauge,

considerando $g \equiv g_L = g_R^1$, são dados por

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \begin{pmatrix} W_1^{+\mu} & W_2^{+\mu} \end{pmatrix} M_{\text{carr}}^2 \begin{pmatrix} W_{1\mu}^- \\ W_{2\mu}^- \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_1^{3\mu} & W_2^{3\mu} & B^\mu \end{pmatrix} M_{\text{neu}}^2 \begin{pmatrix} W_{1\mu}^3 \\ W_{2\mu}^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

em que $W_{1,2}^{\pm\mu} = (W_{1,2}^{1\mu} \mp iW_{1,2}^{2\mu})/\sqrt{2}$. M_{carr} e M_{neu} são matrizes não diagonais dadas por

$$M_{\text{neu}}^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{g^2}{2}(\kappa_+^2 + 4v_L^2) & -\frac{g^2}{2}\kappa_+^2 & -2gg'v_L^2 \\ -\frac{g^2}{2}\kappa_+^2 & \frac{g^2}{2}(\kappa_+^2 + 4v_R^2) & -2gg'v_R^2 \\ -2gg'v_L^2 & -2gg'v_R^2 & 2g'(v_L^2 + v_R^2) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

$$M_{\text{carr}}^2 = \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} \kappa_+^2 + 2v_L^2 & -2\kappa_1\kappa_2 \\ -2\kappa_1\kappa_2 & \kappa_+^2 + 2v_R^2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

com $\kappa_+^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2$. O fato dessas matrizes serem não diagonais nos indica que os bósons de gauge não estão em seus autoestados de massa, de forma que para obtê-los temos que aplicar rotações nos campos de forma a diagonalizar essas matrizes. Essa rotação pode ser escrita de forma geral como

$$\begin{pmatrix} W_1^\pm \\ W_2^\pm \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_L^\pm \\ W_R^\pm \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\begin{pmatrix} W_1^3 \\ W_2^3 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_w c & c_w s & s_w \\ -s_w s_m c - c_m s & -s_w s_m s + c_m c & c_w s_m \\ -s_w c_m c + s_m s & -s_w c_m s - s_m c & c_w c_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z \\ Z' \\ A \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

com

$$c_w = \cos \theta_W \quad s_w = \sin \theta_W \quad c_m = \frac{\sqrt{\cos 2\theta_W}}{\sin \theta_W} \quad s_m = \tan \theta_W \quad s = \sin \phi \quad c = \cos \phi, \quad (4.17)$$

onde esses ângulos podem ser escritos em função das constantes da teoria a partir de

$$e = g \sin \theta_w = g' \sqrt{\cos 2\theta_w} \quad (4.18)$$

$$\tan(2\zeta) = -\frac{2\kappa_1\kappa_2}{(v_R^2 - v_L^2)} \quad \text{e} \quad \sin 2\phi = -\frac{e^2\kappa_+^2\sqrt{\cos 2\theta_W}}{2\sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W (m_{Z'}^2 - m_Z^2)}. \quad (4.19)$$

A partir da diagonalização das matrizes de massa das Eqs. (4.13) e (4.14) podemos obter as massas dos campos físicos como

$$m_{W_{L,R}}^2 = \frac{g^2}{4} \left[\kappa_+^2 + v_R^2 + v_L^2 \mp \sqrt{(v_R^2 - v_L^2)^2 + 4\kappa_1^2\kappa_2^2} \right],$$

¹Veremos mais adiante que isso é uma consequência das simetrias discretas do modelo.

$$m_{Z,Z'}^2 = \frac{1}{4} \left\{ [g^2 \kappa_+^2 + 2(v_R^2 + v_L^2)(g^2 + g'^2)] \mp \sqrt{g^4 [\kappa_+^4 + 4(v_L^2 - v_R^2)^2] + 4g^2 g'^2 [2(v_L^2 + v_R^2)^2 - \kappa_+^2 (v_L^2 + v_R^2)] + 4g'^4 (v_L^2 + v_R^2)^2} \right\},$$

$$m_A^2 = 0, \quad (4.20)$$

em que W_L , W_R , Z , Z' e A são os autoestados de massa dos bósons.

Como W_L e Z devem ser identificados aos bósons W e Z^0 do MP cujas massas são $m_W^{\text{exp}} = 80.379(12)$ GeV e $m_Z^{\text{exp}} = 91.1876(21)$ GeV [99] e o LHC coloca limites experimentais nas massas de Z' e W_R , $m_{W_R}^{\text{exp}} > 4.7$ TeV [113] e $m_{Z'}^{\text{exp}} > 3.2$ TeV [114] estamos interessados em estudar a situação em que $\frac{m_{W_L}}{m_{W_R}} \ll 1$ e $\frac{m_Z}{m_{Z'}} \ll 1$.

Estudar esse limite é similar a estudar o caso em que essas massas respeitam $\frac{m_{W_L}}{m_{W_R}} = a$ com $|a| \ll 1$ (de forma equivalente para a relação entre m_Z e $m_{Z'}$). A partir disso, podemos resolver a equação $m_{W_L} - a m_{W_R} = 0$ para obter $v_R^2(a, \kappa_1^2, \kappa_2^2, v_L^2)$, de onde vem que

$$v_R^2 \simeq \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + v_L^2}{2a} \quad \text{quando } |a| \ll 1,$$

ou seja, podemos concluir que $v_R^2 \gg \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + v_L^2$ nesse limite. Sendo assim, é possível concluir que $v_R^2 \gg v_L^2$ e $v_R^2 \gg \kappa_{1,2}^2$ individualmente.

Como experimentalmente o parâmetro ρ_0^{exp} assume valor

$$\rho_0^{\text{exp}} = \frac{m_W^{(\text{exp})2}}{m_Z^{(\text{exp})2} \cos^2 \theta_W^{(\text{exp})}} = 1.00039(19) \text{ [99]},$$

que se explica no MP pela simetria (aproximada) custodial, temos nesse modelo que

$$\rho_0 = \frac{m_{W_L}^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W} \simeq \frac{\kappa_+^2 + 2v_L^2}{\kappa_+^2 + 4v_L^2} \simeq 1,$$

o que nos diz que devemos também ter $\kappa_+^2 \gg v_L^2$ para respeitar o limite experimental.

Considerando esses limites é possível perceber que a massa dos bósons pesados depende principalmente do valor de v_R^2 , sendo as contribuições devido a $\kappa_{1,2}$ de ordem superior. Dessa forma, os limites experimentais na massa dos novos W_R e Z' refletem de forma quase direta em limites para v_R . Podemos então escrever as massas dos bósons no regime $v_R^2 \gg \kappa_+^2 \gg v_L^2$ como

$$m_{W_L} \simeq \frac{g \kappa_+}{2} \quad m_{W_R} \simeq \frac{g v_R}{\sqrt{2}}, \quad (4.21)$$

$$m_Z \simeq \frac{g \kappa_+}{2 \cos \theta_W} \quad m_{Z'} \simeq \frac{g v_R \cos \theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}}. \quad (4.22)$$

A partir disso, utilizando os valores experimentais das massas de W e Z vemos que $\kappa_+ \simeq v = 246$ GeV.

4.4 Setor Leptônico na base de Massa

A interação dos léptons com os campos escalares acontece por meio do termo da interação de Yukawa descrita como

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{léptons}} = -\overline{L_{iL}}((h_l)_{ij}\Phi + (\tilde{h}_l)_{ij}\tilde{\Phi})L_{jR} - \overline{(L_{iR})^C}\Sigma_R(\tilde{h}_M)_{ij}L_{jR} - \overline{(L_{iL})^C}\Sigma_L(h_M)_{ij}L_{jL} + \text{h.c.}, \quad (4.23)$$

em que definimos $\Sigma_{L,R} \equiv i\sigma_2\Delta_{L,R}$ e $h_M, \tilde{h}_M, h_l$ e $\tilde{h}_l$ são matrizes 3×3 que misturam as famílias leptônicas, sendo i e j índices que as representam. Em particular, $h_M = h_M^T$ e $\tilde{h}_M = \tilde{h}_M^T$ são simétricas devido às Eqs. (3.35) e (3.36). Vale destacar que aqui é importante a ordem entre os índices C e L, R nos férmions já que $(L_{L,R})^C = (L^C)_{R,L}$.

Após a quebra espontânea de simetria a Eq. (4.23) produz o termo de massa para os léptons carregados que se apresenta como

$$\mathcal{L}_{\text{lep.carr.}}^{\text{massa}} = -\overline{l'_{iL}}(M_l)_{ij}l'_{jR} + \text{h.c.} \quad \text{com} \quad M_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_l\kappa_2 + \tilde{h}_l\kappa_1), \quad (4.24)$$

que para encontrar os autoestados de massa precisa ser diagonalizado definindo

$$l'_{L,R} = V_{L,R}^l l_{L,R}, \quad (4.25)$$

onde $V_{L,R}^l$ são matrizes unitárias 3×3 , de forma que

$$M_l^{\text{diag}} = V_L^{l\dagger} M_l V_R^l = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau). \quad (4.26)$$

Para os neutrinos, o termo de massa também tem como origem a Eq. (4.23) e é dado por

$$\mathcal{L}_{\text{neutrinos}}^{\text{massa}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\overline{\nu'_{iL}}((h_l)_{ij}\kappa_1 + (\tilde{h}_l)_{ij}\kappa_2)\nu'_{jR} + \overline{(\nu'_{iR})^C}(\tilde{h}_M)_{ij}v_R\nu'_{jR} + \overline{(\nu'_{iL})^C}(h_M)_{ij}v_L\nu'_{jL} \right] + \text{h.c.},$$

que pode ser escrito como²

$$\mathcal{L}_{\text{neutrinos}}^{\text{massa}} = -\frac{1}{2}(\overline{n'_L}M_\nu n'_R + \overline{n'_R}M_\nu^* n'_L),$$

onde definimos os campos

$$n'_L = \begin{pmatrix} \nu'_L \\ (\nu'^C)_L \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad n'_R = \begin{pmatrix} (\nu'^C)_R \\ \nu'_R \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad \nu'_{L,R} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}_{L,R}, \quad (4.27)$$

e a matriz de massa simétrica é

$$M_\nu = \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D^T & M_R \end{pmatrix} = M_\nu^T,$$

²Para que essa identificação fique mais clara é importante destacar que devido à identidade $\overline{(\Psi_{iR})^C}(\Psi_{jL})^C = \overline{\Psi_{jL}}\Psi_{iR}$ (pode ser provada de forma similar às Eqs. (3.35) e (3.36)) vale que $\overline{(\nu'_{iR})^C}(M_D^T)_{ij}(\nu'_{jL})^C = \overline{\nu'_{jL}}(M_D)_{ji}\nu'_{iR}$.

com as matrizes 3×3 M_L , M_D e M_R da forma

$$M_L = \sqrt{2}h_M v_L = M_L^T, \quad M_R = \sqrt{2}\tilde{h}_M v_R = M_R^T \quad \text{e} \quad M_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_l \kappa_1 + \tilde{h}_l \kappa_2). \quad (4.28)$$

Devido à simetria de M_ν , para encontrar os autoestados de massa nesse caso definimos uma matriz V unitária 6×6 tal que

$$M_\nu^{\text{diag}} = V^T M_\nu V = \text{diag}(m_1, m_2, m_3, M_1, M_2, M_3).$$

Com isso podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{neutrinos}} &= -\frac{1}{2}(\overline{n'_L} M_\nu n'_R + \overline{n'_R} M_\nu^* n'_L) = -\frac{1}{2}(\overline{n'_L} V^* M_\nu^{\text{diag}} V^\dagger n'_R + \overline{n'_R} V M_\nu^{\text{diag}} V^T n'_L) \\ &= -\frac{1}{2}(\overline{N_L} M_\nu^{\text{diag}} N_R + \overline{N_R} M_\nu^{\text{diag}} N_L) = -\frac{1}{2}(\overline{N} M_\nu^{\text{diag}} N), \end{aligned} \quad (4.29)$$

em que definimos os autoestados de massa $N_{L,R}$ a partir das relações

$$N_L = V^T n'_L \quad \text{e} \quad N_R = V^\dagger n'_R \quad \Rightarrow \quad n'_L = V^* N_L \quad \text{e} \quad n'_R = V N_R, \quad (4.30)$$

onde vale destacar que nesse caso os neutrinos são férmions de Majorana já que $N = N_L + N_R = N_R^C + N_L^C = N^C$.

No que se trata dos neutrinos leves, como os experimentos envolvendo essas partículas medem apenas as diferenças quadradas de massa podemos ter dois ordenamentos diferentes

- **Ordenamento Normal (ON)**

$$\begin{aligned} m_1 &= m_0, \\ m_2 &= \sqrt{\Delta m_{21}^2 + m_0^2}, \\ m_3 &= \sqrt{\Delta m_{3l}^2 + m_0^2}, \end{aligned}$$

- **Ordenamento Invertido (OI)**

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{m_0^2 - \Delta m_{3l}^2 - \Delta m_{21}^2}, \\ m_2 &= \sqrt{-\Delta m_{3l}^2 + m_0^2}, \\ m_3 &= m_0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde m_0 representa a menor massa, $\Delta m_{21}^2 \simeq 7.4(2) \times 10^{-5} \text{ eV}^2$ [100], $\Delta m_{3l}^2 \equiv \Delta m_{31}^2 > 0$ no ordenamento normal e $\Delta m_{3l}^2 \equiv \Delta m_{32}^2 < 0$ no ordenamento invertido, com $|\Delta m_{3l}^2| \simeq 2.52(3) \times 10^{-3} \text{ eV}^2$ [100] e as diferenças quadradas de massa definidas como $\Delta m_{ij}^2 \equiv m_i^2 - m_j^2$.

Além disso, a partir da Eq. (4.23) podemos escrever a interação dos léptons com os campos

escalares por meio dos termos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yuk}} \supset & -\overline{l'_{iL}}[(h_l)_{ij}\phi_2^0 + (\tilde{h}_l)_{ij}\phi_1^{0*}]l'_{jR} - \overline{\nu'_{iL}}[(h_l)_{ij}\phi_1^0 + (\tilde{h}_l)_{ij}\phi_2^{0*}]\nu'_{jR} \\
& - \delta_L^0 \overline{(\nu'_{iL})^C}(h_M)_{ij}\nu'_{jL} - \delta_R^0 \overline{(\nu'_{iR})^C}(h_M)_{ij}\nu'_{jR} \\
& + \overline{\nu'_{iL}}[(h_l)_{ij}\phi_1^+ - (\tilde{h}_l)_{ij}\phi_2^+]l'_{jR} + \overline{l'_{iL}}[(h_l)_{ij}\phi_2^- - (\tilde{h}_l)_{ij}\phi_1^-]\nu'_{jR} \\
& + \frac{\delta_R^+}{\sqrt{2}} \left[\overline{(\nu'_{iR})^C}(\tilde{h}_M)_{ij}l'_{jR} + \overline{(l'_{iR})^C}(\tilde{h}_M)_{ij}\nu'_{jR} \right] + \frac{\delta_L^+}{\sqrt{2}} \left[\overline{(\nu'_{iL})^C}(h_M)_{ij}l'_{jL} + \overline{(l'_{iL})^C}(h_M)_{ij}\nu'_{jL} \right] \\
& + \delta_R^{++} \overline{(l'_{iR})^C}(\tilde{h}_M)_{ij}l'_{jR} + \delta_L^{++} \overline{(l'_{iL})^C}(h_M)_{ij}l'_{jL} + \text{h.c.}, \tag{4.32}
\end{aligned}$$

em que os campos escalares aqui apresentados são encontrados nos tripletos $\Delta_{L,R}$ e no bidublete Φ , isto é, não são necessariamente autoestados de massa.

Além da massa dos léptons, para entender como a interação dessas partículas com os escalares pode contribuir para os processos que estamos interessados precisamos também obter quem são os escalares físicos da teoria, além de suas relações com aqueles presentes em Φ e $\Delta_{L,R}$. Na próxima seção iremos discutir essas relações bem como a massa de cada um desses campos em função dos parâmetros da teoria. Não discutiremos aqui o setor de quarks, que é semelhante, pois não será necessário no nosso estudo.

4.5 Setor Escalar na base de massas

Após a quebra espontânea de simetria os termos bilineares do potencial (4.10) aparecem sob a forma de matrizes de massas para as partículas escalares, para obter as partículas físicas essas matrizes devem ser diagonalizadas.

Os 20 graus de liberdade correspondentes a 8 do bidublete e 6 para cada um dos tripletos iniciais se convertem após a quebra espontânea em 14 partículas físicas, dois bósons de Goldstone carregados $G_{L,R}^\pm$ e dois bósons de Goldstone neutros $\tilde{G}_{1,2}^0$.

Como veremos a seguir teremos: quatro escalares neutros (H_i^0 , $i = 0, 1, 2, 3$), dois pseudo escalares neutros (A_i^0 , $i = 1, 2$), dois escalares carregados ($H_i^\pm$, $i = 1, 2$) e dois escalares duplamente carregados ($\delta_L^{\pm\pm}$, $\delta_R^{\pm\pm}$).

4.5.1 Diagonalização do setor dos escalares neutros

Para obter as massas dos campos H_0^0 , H_1^0 , H_2^0 e H_3^0 precisamos primeiro escrever a matriz de massa da parte real dos escalares neutros na base $\{\text{Re}(\phi_-^0), \text{Re}(\phi_+^0), \sqrt{2} \text{Re}(\delta_R^0), \sqrt{2} \text{Re}(\delta_L^0)\}$, onde definimos

$$\begin{aligned}
\phi_-^0 &\equiv \frac{\sqrt{2}}{\kappa_+}(\kappa_1\phi_1^0 + \kappa_2\phi_2^{0*}), \\
\phi_+^0 &\equiv \frac{\sqrt{2}}{\kappa_+}(\kappa_1\phi_2^{0*} - \kappa_2\phi_1^0).
\end{aligned}$$

Quando construimos a matriz de massa nessa base é possível perceber que $H_3^0 = \sqrt{2} \text{Re}(\delta_L^0)$ já é um autoestado de massa, com autovalor apresentado na Tab. 4.1. A matriz envolvendo os demais campos pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix}
2\kappa_+^2((2\lambda_2 - \lambda_3)\epsilon^2 + 2\lambda_4\epsilon + \lambda_1) & 2\kappa_+^2\sqrt{1 - \epsilon^2}(2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) & \frac{1}{2}\kappa_+v_R(2\alpha_1 + 2\alpha_2\epsilon + \alpha_3(1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})) \\
2\kappa_+^2\sqrt{1 - \epsilon^2}(2\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) & \frac{\alpha_3 v_R^2}{2\sqrt{1 - \epsilon^2}} + 2\kappa_+^2(1 - \epsilon^2)(2\lambda_2 + \lambda_3) & \frac{1}{2}\kappa_+v_R(\alpha_3\epsilon + 4\alpha_2\sqrt{1 - \epsilon^2}) \\
\frac{1}{2}\kappa_+v_R(2\alpha_1 + 2\alpha_2\epsilon + \alpha_3(1 - \sqrt{1 - \epsilon^2})) & \frac{1}{2}\kappa_+v_R(\alpha_3\epsilon + 4\alpha_2\sqrt{1 - \epsilon^2}) & 2v_R^2\rho_1
\end{pmatrix},$$

em que usamos a definição $\epsilon \equiv 2\kappa_1\kappa_2/\kappa_+^2$.

Vale notar que os termos M_{22} e M_{33} são muito maiores que os demais pois crescem com v_R^2 , de forma que no regime $v_R \gg \kappa_+$ considerado podemos diagonalizar essa matriz de massa a partir de teoria de perturbação. Sendo assim, os autoestados de massa, com suas respectivas massa na Tab. 4.1, se relacionam com os de interação por

$$\begin{aligned} H_0^0 &\simeq \text{Re}(\phi_-^0), \\ H_1^0 &\simeq \text{Re}(\phi_+^0), \\ H_2^0 &\simeq \sqrt{2} \text{Re}(\delta_R^0). \end{aligned}$$

Olhando agora para a diagonalização da parte imaginária dos campos neutros podemos escrever a matriz de massa na base $\{\text{Im}(\phi_-^0), \text{Im}(\phi_+^0), \sqrt{2} \text{Im}(\delta_R^0), \sqrt{2} \text{Im}(\delta_L^0)\}$ como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\kappa_+^2 v_R^2 \alpha_3}{2\kappa_-^2} - 2\kappa_+^2 (2\lambda_2 - \lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}v_R^2 (2\rho_1 - \rho_3) \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

em que $\kappa_-^2 = \kappa_2^2 - \kappa_1^2$. Com isso, vemos que os campos $\text{Im}(\phi_-^0)$ e $\sqrt{2} \text{Im}(\delta_R^0)$ são autoestados de massa zero (bósons de Goldstone neutros) que chamaremos de $\tilde{G}_1^0$ e $\tilde{G}_2^0$, respectivamente. Além disso podemos escrever os outros dois pseudoescalares físicos, com suas respectivas massas na Tab. 4.1, como

$$\begin{aligned} A_1^0 &\simeq \text{Im}(\phi_+^0), \\ A_2^0 &\simeq \sqrt{2} \text{Im}(\delta_L^0). \end{aligned}$$

A partir das relações obtidas entre os campos físicos e aqueles presentes em $\Delta_{L,R}$ e Φ , podemos invertê-las para escrever

$$\phi_1^0 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_+} \left(\kappa_1 H_0^0 - \kappa_2 H_1^0 + i\kappa_1 \tilde{G}_1^0 - i\kappa_2 A_1^0 \right), \quad (4.34)$$

$$\phi_2^0 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_+} \left(\kappa_2 H_0^0 + \kappa_1 H_1^0 - i\kappa_2 \tilde{G}_1^0 - i\kappa_1 A_1^0 \right), \quad (4.35)$$

$$\delta_L^0 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H_3^0 + iA_2^0 \right), \quad (4.36)$$

$$\delta_R^0 \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(H_2^0 + i\tilde{G}_2^0 \right). \quad (4.37)$$

4.5.2 Diagonalização dos escalares carregados

Para escrever os campos escalares carregados em função dos campos físicos é necessário diagonalizar a matriz de massa, que na base $\left\{ \frac{\kappa_1 \phi_1^+ + \kappa_2 \phi_2^+}{\kappa_+}, \frac{\kappa_1 \phi_2^+ - \kappa_2 \phi_1^+}{\kappa_+}, \delta_R^+, \delta_L^+ \right\}$ é dada por

$$\begin{pmatrix} \frac{\kappa_+^2 v_R^2 \alpha_3}{2\kappa_-^2} & 0 & \frac{\kappa_+ v_R \alpha_3}{2\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_+ v_R \alpha_3}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{\kappa_-^2 \alpha_3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} (\kappa_-^2 \alpha_3 - 2v_R^2 (2\rho_1 - \rho_3)) \end{pmatrix}.$$

Ao diagonalizar essa matriz temos 2 autoestados de massa zero (bósons de Goldstone G_L^+ e G_R^+) e dois autoestados H_1^+ e H_2^+ com massas apresentadas na Tab. 4.1. Esses campos físicos se relacionam com os campos não físicos a partir das relações

$$H_1^+ = \delta_L^+,$$

$$H_2^+ = \left(\left(\frac{\kappa_1 \phi_1^+ + \kappa_2 \phi_2^+}{\kappa_+} \right) \xi + \delta_R^+ \right) / \sqrt{1 + \xi^2},$$

$$G_R^+ = \left(\delta_R^+ - \left(\frac{\kappa_1 \phi_1^+ + \kappa_2 \phi_2^+}{\kappa_+} \right) \frac{1}{\xi} \right) / \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}},$$

$$G_L^+ = \frac{\kappa_1 \phi_2^+ - \kappa_2 \phi_1^+}{\kappa_+},$$

em que definimos $\xi \equiv \sqrt{2\kappa_+ v_R / \kappa_-^2}$. Invertendo essas relações podemos escrever os campos que aparecem nos tripletos $\Delta_{L,R}$ e no bidubeto Φ como função dos campos físicos a partir de

$$\phi_1^+ = \frac{\kappa_1}{\kappa_+ \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}} H_2^+ - \frac{\kappa_1}{\kappa_+ \sqrt{1 + \xi^2}} G_R^+ - \frac{\kappa_2}{\kappa_+} G_L^+ \simeq \frac{\kappa_1}{\kappa_+} H_2^+ - \frac{\kappa_2}{\kappa_+} G_L^+, \quad (4.38)$$

$$\phi_2^+ = \frac{\kappa_2}{\kappa_+ \sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}} H_2^+ - \frac{\kappa_2}{\kappa_+ \sqrt{1 + \xi^2}} G_R^+ + \frac{\kappa_1}{\kappa_+} G_L^+ \simeq \frac{\kappa_2}{\kappa_+} H_2^+ + \frac{\kappa_1}{\kappa_+} G_L^+, \quad (4.39)$$

$$\delta_L^+ = H_1^+, \quad (4.40)$$

$$\delta_R^+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\xi^2}}} G_R^+ + \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} H_2^+ \simeq G_R^+. \quad (4.41)$$

Finalmente, quando estudamos o caso dos escalares duplamente carregados tanto o campo δ_L^{++} quanto o campo δ_R^{++} são autoestados de massa cujos autovalores são

$$M_{\delta_R^{++}}^2 = \frac{\alpha_3 \kappa_-^2 + 4\rho_2 v_R^2}{2} \quad \text{e} \quad M_{\delta_L^{++}}^2 = \frac{\alpha_3 \kappa_-^2 + (\rho_3 - 2\rho_1) v_R^2}{2}. \quad (4.42)$$

4.6 Considerações sobre as simetria $\mathcal{C}$ e $\mathcal{P}$

A simetria discreta *left-right* pode ser vista como uma simetria de paridade generalizada ($\mathcal{P}$) ou uma simetria de conjugação de carga generalizada ($\mathcal{C}$). Aqui o estudo será feito em dois casos: no primeiro consideramos simetria de paridade $\mathcal{P}$ sobre $\mathcal{L}$, o que resulta em $v_L = 0$ [110] e, consequentemente, em um mecanismo de *seesaw* tipo I ; no segundo tomamos a simetria de conjugação de carga $\mathcal{C}$ bem como $M_D = 0$ [115], o que transforma a matriz M_ν em bloco diagonal e resulta em um mecanismo de *seesaw* do tipo II (uma discussão sobre esses dois diferentes tipos de simetrias no contexto desse modelo pode ser encontrada em [116]).

	Massas quadradas
H_0^0	$2\kappa_+^2 ((2\lambda_2 - \lambda_3)\epsilon^2 + 2\lambda_4\epsilon + \lambda_1)$
H_1^0	$\frac{\alpha_3 v_R^2}{2\sqrt{1 - \epsilon^2}}$
H_2^0	$2v_R^2 \rho_1$
H_3^0	$\frac{1}{2}v_R^2(\rho_3 - 2\rho_1)$
A_1^0	$\frac{\kappa_+^2 v_R^2 \alpha_3}{2\kappa_-^2} - 2\kappa_+^2(2\lambda_2 - \lambda_3)$
A_2^0	$\frac{1}{2}v_R^2(\rho_3 - 2\rho_1)$
$H_1^\pm$	$\frac{1}{4}(\alpha_3 \kappa_-^2 - 2v_R^2(2\rho_1 - \rho_3))$
$H_2^\pm$	$\frac{\alpha_3(\kappa_-^4 + 2\kappa_+^2 v_R^2)}{4\kappa_-^2}$
$\delta_L^{\pm\pm}$	$\frac{\alpha_3 \kappa_-^2 + (\rho_3 - 2\rho_1)v_R^2}{2}$
$\delta_R^{\pm\pm}$	$\frac{\alpha_3 \kappa_-^2 + 4\rho_2 v_R^2}{2}$

Tabela 4.1: Massas quadradas dos campos escalares na aproximação $v_R \gg \kappa_+ \gg v_L$.

4.6.1 Simetria de paridade $\mathcal{P}$

Quando submetemos os campos do modelo que estamos estudando à transformação de paridade vemos que estes obedecem [117]

$$\begin{cases} f_L(x) \longleftrightarrow f_R(Px) \\ \Delta_L(x) \longleftrightarrow \Delta_R(Px) \\ \Phi(x) \longleftrightarrow \Phi^\dagger(Px) \end{cases} \quad (4.43)$$

com $Px = (t, -\vec{x})$. A partir da imposição que nossa teoria deve ser invariante sob esse tipo de transformação podemos olhar como ela afeta a Eq. (4.23) para concluir que $h_l = h_l^\dagger$, $\tilde{h}_l = \tilde{h}_l^\dagger$ e $h_M = \tilde{h}_M$.

A partir disso, no setor dos neutrinos iremos escrever a matriz V como a composição de duas matrizes 3×6 da forma

$$V = \begin{pmatrix} V_L^{\nu*} \\ V_R^\nu \end{pmatrix},$$

de onde vem, em conjunto com a Eq. (4.30), a relação entre os neutrinos autoestados de sabor e aqueles que são autoestados de massa dada por

$$\nu'_R = V_R^\nu N_R \quad \text{e} \quad \nu'_L = V_L^\nu N_L. \quad (4.44)$$

Aqui vale destacar que a matriz V_L^ν definida acima tem como função misturar os neutrinos de mão esquerda com os autoestados de massa, enquanto V_R^ν exerce o mesmo papel com os de mão direita. Em função disso, para nossa análise iremos considerar a parte de V_L^ν que se mistura com os

neutrinos leves como a matriz PMNS descrita na Eq. (3.104), e a mistura com os neutrinos pesados da ordem de $\mathcal{O}(M_D/M_R)$ como discutido abaixo (ver Eq. (4.49)). Além disso, iremos considerar a parte de V_R^ν que mistura os neutrinos de mão direita com os leves com termos da ordem de $\mathcal{O}(M_D/M_R)$.

A fim de estudar como a diagonalização da matriz M_ν restringe os parâmetros da teoria vamos analisar brevemente o caso em que temos uma só família de neutrinos. Aqui, escrevendo os autoestados de sabor como

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu'_L + (\nu'_L)^C) \quad \text{e} \quad F = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu'_R + (\nu'_R)^C), \quad (4.45)$$

podemos expressar a matriz de massa por

$$\begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{F} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_L & M_D \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ F \end{pmatrix}, \quad (4.46)$$

a partir de onde, quando realizamos a diagonalização, obtemos as massa dos neutrinos físicos ν e N como

$$m_\nu \simeq \sqrt{2} \left(h_M v_L - \frac{M_D^2}{\sqrt{2} M_R} \right), \quad (4.47)$$

$$m_N \simeq \sqrt{2} h_M v_R, \quad (4.48)$$

e a mistura dos autoestados de sabor com os de massa por

$$\nu \simeq f - \frac{M_D}{M_R} F, \quad (4.49)$$

$$N \simeq F + \frac{M_D}{M_R} f, \quad (4.50)$$

de onde vemos que $M_D \ll M_R$ para que não haja muita mistura dos neutrinos pesados com os autoestados de sabor de mão esquerda e nenhum limite experimental seja desrespeitado. Ainda que as expressões para as massas tenham sido obtidas a partir do estudo de uma geração, esses resultados podem ser generalizados no caso de três gerações de neutrinos (ver Apêndice E).

Para entender os limites fenomenológicos desses resultados, utilizando a relação obtida a partir das minimizações do potencial dos escalares na Eq. (4.12) e definindo $h_D \equiv \frac{M_D}{\kappa_+} = \frac{1}{\sqrt{2}\kappa_+}(h_L \kappa_1 + \tilde{h}_L \kappa_2)$, podemos com base nas Eqs. (4.11), (4.47) e (4.48) escrever a relação entre a a massa do neutrino leve e do pesado como

$$m_N = \frac{m_\nu}{\left(\gamma - \frac{h_D^2}{2h_M^2} \right) \kappa_+^2}. \quad (4.51)$$

Considerando o caso com o valor mínimo de v_R fixado em 11 TeV, de modo que a massa $m_{WR} \simeq 5$ TeV esteja próxima ao limite experimental atual de colisores [118], além do valor já discutido anteriormente de $\kappa_+ \simeq 246$ GeV, temos que no regime de $m_N > 100$ GeV [119] e $m_\nu \simeq 0.1$ eV vem que $\gamma - \frac{h_D^2}{2h_M^2} \lesssim 10^{-9}$, o que parece levar a um *fine-tuning*, o que iremos evitar aqui.

Para escapar dessa situação temos duas soluções possíveis: abaixar a massa dos neutrinos pesados para $m_N < 100$ GeV, o que vai em oposição a limites impostos pelo estudo de *neutrinoless double beta decay* nesse modelo com essa simetria [119], ou aumentar o valor de v_R acima de 11 TeV, o que gera massas para os bósons W_R e Z' muito acima dos valores acessíveis pelo LHC.

Sendo assim, para contornar esse problema e evitar *fine-tuning* iremos assumir que os parâmetros β são zero, o que implica $\gamma = 0$ pela Eq. (4.12). Essa imposição pode ser entendida como um resqúcio de alguma simetria em uma teoria UV que, em escalas mais baixas de energia, se reduza a esse modelo.

Com isso, a relação do mínimo do potencial é dada por

$$v_L v_R (2\rho_1 - \rho_3) = 0, \quad (4.52)$$

e portanto temos três possibilidades: $v_R = 0$, $v_L = 0$ ou $(2\rho_1 - \rho_3) = 0$. A primeira opção é descartada pois v_R está diretamente associado a massa dos bósons pesados, e tomar esse limite levaria os bósons associados a $SU(2)_R$ serem muito leves e violar limites experimentais. A terceira opção leva os escalares A_2^0 e H_3^0 a terem massa zero (ver Tab. 4.1), de modo que a taxa de decaimento do bóson Z nessas partículas também não respeite os limites experimentais [110]. Dessa forma, a melhor escolha para evitar *fine-tuning* é tomar $v_L = 0$, o que será assumido daqui em diante quando considerarmos essa simetria.

É importante comentar que para manter a massa dos neutrinos leves na escala $m_\nu \lesssim 0.1$ eV devemos ter $\mathcal{O}(M_D) \lesssim 1$ MeV já que aqui iremos considerar $m_\nu \simeq \mathcal{O}(M_D^2/M_R)$ como na Eq. (4.47) e a massa dos neutrinos pesados $m_N \simeq \mathcal{O}(M_R)$ da ordem de 1 TeV.

4.6.2 Simetria de conjugação de carga $\mathcal{C}$

Podemos estudar também o modelo no contexto em que temos apenas simetria $\mathcal{C}$. A transformação de conjugação de carga afeta os campos a partir de [111]

$$\begin{cases} f_L \longleftrightarrow (f_R)^C \\ \Delta_L \longleftrightarrow (\Delta_R)^* \\ \Phi \longleftrightarrow \Phi^T \end{cases} \quad (4.53)$$

Quando impomos que a Lagrangeana seja invariante por esse tipo de transformação, a partir da Eq. (4.23) podemos concluir que os acoplamentos envolvendo os léptons respeitam $h_l = h_l^T$, $\tilde{h}_l = \tilde{h}_l^T$ e $\tilde{h}_M = h_M^*$.

Em particular, quando $M_D = 0$ a matriz de massa dos neutrinos pode ser escrita como

$$M_\nu = \begin{pmatrix} M_L & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix},$$

onde as matrizes 3×3 M_L e M_R são

$$M_L = \sqrt{2} h_M v_L = M_L^T, \quad M_R = \sqrt{2} h_M^* v_R = M_R^T. \quad (4.54)$$

Sendo assim, como a matriz M_ν é bloco diagonal podemos escrever a matriz V como a composição de duas matrizes 3×3 da forma

$$V = \begin{pmatrix} V_L^{\nu*} \\ V_R^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_L^{\nu*} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & U_R^\nu \end{pmatrix},$$

de modo que escrevendo os seis autoestados de massa dos neutrinos como

$$N = \begin{pmatrix} n^{\text{lev.}} \\ n^{\text{pes.}} \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

vem a relação entre esses neutrinos e os de sabor por

$$\nu'_R = U_R^\nu n_R^{\text{pes.}} \quad \text{e} \quad \nu'_L = U_L^\nu n_L^{\text{lev.}}, \quad (4.56)$$

de onde podemos identificar U_L^ν como a matriz PMNS U descrita na Eq. (3.104).

Vale destacar que a matriz diagonal de massa dos neutrinos pode ser escrita como

$$M_\nu^{\text{diag}} = \begin{pmatrix} U_L^{\nu\dagger} M_L U_L^\nu & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & U_R^{\nu T} M_R U_R^\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{\text{lev}}^{\text{diag}} & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & M_{\text{pes}}^{\text{diag}} \end{pmatrix}, \quad (4.57)$$

a partir de onde podemos ver que, já que da Eq. (4.54) temos $M_R \propto M_L$, essas duas matrizes devem se diagonalizar a partir da mesma transformação, o que nos leva a concluir que $U_R^\nu = U_L^{\nu*} = U^*$.

Além disso, utilizando novamente a Eq. (4.54) em conjunto com a Eq. (4.57) podemos escrever o acoplamento h_M como

$$h_M^* = \frac{U M_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T}{v_R \sqrt{2}}. \quad (4.58)$$

É importante ressaltar também que dada a proporcionalidade das matrizes $M_R \propto M_L$ vem também a proporcionalidade entre a massa dos neutrinos leves e pesados já que

$$M_R = M_L \frac{v_R}{v_L} \Rightarrow M_{\text{pes}}^{\text{diag}} = M_{\text{lev}}^{\text{diag}} \frac{v_R}{v_L} \Rightarrow M_i = m_i \frac{v_R}{v_L} \quad \text{com} \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.59)$$

4.7 Estudo Fenomenológico

Tendo em mãos as interações dos léptons com os bósons vetoriais e escalares da teoria, bem como a relação entre os campos de interação e os físicos, podemos agora estudar as diversas contribuições desse modelo para a anomalia a_μ e para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$.

Faremos esse estudo em dois casos. No primeiro assumiremos que a simetria *left-right* discreta é a simetria de paridade $\mathcal{P}$, o que resulta em $v_L = 0$ e consequentemente neutrinos adquirem massa pelo mecanismo de *seesaw* tipo I [110]. No segundo assumiremos que a simetria *left-right* discreta é a de conjugação de carga $\mathcal{C}$. Nesse caso tomaremos $M_D = 0$ [115], o que transforma M_ν em uma matriz bloco diagonal e os neutrinos adquirem massa por um mecanismo de *seesaw* do tipo II (uma discussão sobre esses dois diferentes tipos de simetrias no contexto desse modelo pode ser encontrada em [116]).

Procuras pelos bósons pesados de mão-direita W_R e Z' no ATLAS, em processos com dois léptons carregados e dois jatos ($lljj$) no estado final, limitam as massas dessas partículas à $m_{W_R}^{\text{exp}} > 4.7$ TeV [113] e $m_{Z'}^{\text{exp}} > 3.2$ TeV [114].

No setor escalar as partículas A_1^0 e H_1^0 interferem na mistura $K^0 - \bar{K}^0$, onde ocorre violação de sabor por meio de corrente neutra envolvendo essas partículas, e portanto os experimentos restringem suas massas a $m_{A_1^0, H_1^0} > 15$ TeV [120]. Os demais escalares neutros tem suas massas restritas a $m_{H^0} > 450$ GeV devido a buscas no ATLAS [121].

$m_{H_0^0}^2 = 2\kappa_+^2 \lambda_1$	$m_{H_1^0}^2 = \frac{\alpha_3 v_R^2}{2}$
$m_{H_2^0}^2 = 2v_R^2 \rho_1$	$m_{H_3^0}^2 = \frac{1}{2}v_R^2(\rho_3 - 2\rho_1)$
$m_{A_1^0}^2 = m_{H_1^0}^2 - 2\kappa_+^2(2\lambda_2 - \lambda_3)$	$m_{A_2^0}^2 = m_{H_3^0}^2$
$m_{H_1^+}^2 = m_{H_3^0}^2 + \frac{\alpha_3 \kappa_+^2}{4}$	$m_{H_2^+}^2 = m_{H_1^0}^2 + \frac{\alpha_3 \kappa_+^2}{4}$
$m_{\delta_L^{++}}^2 = m_{H_3^0}^2 + \frac{\alpha_3 \kappa_+^2}{2}$	$m_{\delta_R^{++}}^2 = \frac{\alpha_3 \kappa_+^2}{2} + 2\rho_2 v_R^2$

Tabela 4.2: Massas dos campos escalares no regime $\epsilon \rightarrow 0$.

Buscas no CMS de escalares carregados por meio do decaimento de quarks top ($t \rightarrow H^+ b$) colocam o limite $m_{H_i^+} > 80$ GeV [122]. Além disso, a procura de escalares duplamente carregados no ATLAS em processos com múltiplos léptons no estado final nos fornece os limites $m_{\delta_L^{++}} > 770$ GeV e $m_{\delta_R^{++}} > 660$ GeV [123] quando consideramos $\text{BR}(\delta^{\pm\pm} \rightarrow l^\pm l^\pm) = 1$.

Em particular, aqui iremos considerar o caso com $m_{W_R} = 5$ TeV, que corresponde a $v_R = 11$ TeV e $m_{Z'} = 5.9$ TeV. Assumiremos também que $\kappa_+ = v = 246$ GeV como discutido anteriormente e tomaremos $\kappa_2 \gg \kappa_1$, que corresponde ao limite $\epsilon \rightarrow 0$. Como consequência temos que $\kappa_- \simeq \kappa_+ \simeq \kappa_2$, além do ângulo de mistura entre $W_L - W_R$ (4.19) se anular ($\zeta \simeq 0$). Tomaremos também os léptons carregados l'_i como autoestados de massa. Dessa forma, nesse regime podemos escrever as massas dos campos escalares como apresentado na Tab. 4.2.

Como veremos na próxima seção, o escalar H_0^0 corresponde ao bóson de Higgs do MP, de forma que para satisfazer o valor experimental de sua massa devemos tomar $\lambda_1 \simeq 0.12$. Além disso, devido ao limite $m_{H_1^0} > 15$ TeV temos que $m_{H_2^+} > 15$ TeV devido à relação entre as massas, e também $\alpha_3 \gtrsim 3.7$ já que $m_{H_1^0}^2 = \alpha_3 v_R^2/2$. Essa restrição sobre o acoplamento tem como consequência os limites $m_{H_1^+} > 237$ GeV e $m_{\delta_{L,R}^{++}} > 335$ GeV, que no último caso é mais fraco do que aquele obtido experimentalmente nos colisores.

4.7.1 Contribuições para a_μ e para $\mu \rightarrow e\gamma$

Considerando o cenário descrito na seção anterior iremos fazer nesse primeiro momento um estudo das contribuições mais relevantes para a_μ e para $\mu \rightarrow e\gamma$, em que analisaremos os diagramas envolvendo escalares neutros, carregados e duplamente carregados assim como aqueles envolvendo os novos bósons de gauge dessa teoria.

Os escalares neutros contribuem para a_μ e para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ a partir do diagrama apresentado na Fig. 4.1.

Figura 4.1: Diagrama com troca de H_0^0 , H_1^0 e A_1^0 .

Essas contribuições ocorrem devido a interação descrita na Eq. (4.32), que pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yuk}} &\supset -\bar{l}'_{iL}[(h_l)_{ij}\phi_2^0 + (\tilde{h}_l)_{ij}\phi_1^{0*}]l'_{jR} + \text{h.c.} \\ &= -\bar{l}_{i,L} \left[(M_D)_{ij}\sqrt{2} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_-^2}\phi_2^0 - \frac{\kappa_2}{\kappa_-^2}\phi_1^{0*} \right) + (M_l)_{ij}\sqrt{2} \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_-^2}\phi_1^{0*} - \frac{\kappa_2}{\kappa_-^2}\phi_2^0 \right) \right] l_{j,R} + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde utilizamos as relações

$$\begin{cases} M_D = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_l\kappa_1 + \tilde{h}_l\kappa_2) \\ M_l = \frac{1}{\sqrt{2}}(h_l\kappa_2 + \tilde{h}_l\kappa_1) \end{cases} \implies \begin{cases} \tilde{h}_l = \frac{(M_l\kappa_1 - M_D\kappa_2)}{\kappa_-^2}\sqrt{2} \\ h_l = \frac{(M_D\kappa_1 - M_l\kappa_2)}{\kappa_-^2}\sqrt{2} \end{cases}. \quad (4.61)$$

A partir disso, utilizando as relações entre ϕ_1^0 , ϕ_2^0 e os escalares físicos da teoria descritas nas Eqs. (4.34) e (4.35) podemos perceber que esse termo origina três diferentes contribuições dadas por

$$\bullet \quad H_0^0 \bar{l}_i \left(\delta_{ij} \frac{m_i}{\kappa_+} \right) l_j, \quad (4.62)$$

$$\bullet \quad H_1^0 \bar{l}_i \left(-\delta_{ij} \frac{2m_i\kappa_1\kappa_2}{\kappa_-^2\kappa_+} + (M_D)_{ij} \frac{\kappa_+}{\kappa_-^2} \right) l_j, \quad (4.63)$$

$$\bullet \quad i A_1^0 \bar{l}_i \gamma^5 \left(\delta_{ij} \frac{2m_i\kappa_1\kappa_2}{\kappa_-^2\kappa_+} - (M_D)_{ij} \frac{\kappa_+}{\kappa_-^2} \right) l_j, \quad (4.64)$$

em que podemos reconhecer o campo H_0^0 como o bóson de Higgs do MP pela sua interação com os férmions já que $\kappa_+ = v$. Sendo assim, essa interação contribui para a_μ como descrito na Eq. (3.108) e não gera sinal no decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ a nível de 1-loop.

Comparando as interações de H_1^0 e A_1^0 com o que foi descrito na Seção 3.1 podemos, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, identificar

$$\begin{aligned} \bullet \quad H_1^0 : \quad & g_{s1}^{ij} = \frac{(M_D)_{ij}}{\kappa_+} \quad g_{p1}^{ij} = 0 \quad m_\phi = m_{H_1^0}, \\ \bullet \quad A_1^0 : \quad & g_{s1}^{ij} = 0 \quad g_{p1}^{ij} = -\frac{(M_D)_{ij}}{\kappa_+} \quad m_\phi = m_{A_1^0}, \end{aligned}$$

de onde vem que as contribuições para a_μ podem ser escritas como

$$a_\mu^{H_1^0} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu}{m_{H_1^0}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[\frac{(M_D)_{\mu j}^2}{\kappa_+^2} \left(\frac{m_\mu}{3} + \frac{3m_j}{2} + m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{H_1^0}^2} \right) \right) \right], \quad (4.65)$$

$$a_\mu^{A_1^0} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{m_\mu}{m_{A_1^0}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[\frac{(M_D)_{\mu j}^2}{\kappa_+^2} \left(\frac{m_\mu}{3} - \frac{3m_j}{2} - m_j \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{A_1^0}^2} \right) \right) \right], \quad (4.66)$$

e os fatores de forma que contribuem para $\mu \rightarrow e\gamma$ podem ser escritos como

$$F_2^{H_1^0}(0) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_i}{m_{H_1^0}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[\frac{(M_D)_{\mu j} (M_D)_{je}}{\kappa_+^2} \left(\frac{1}{6} m_\mu - m_j \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{H_1^0}^2} \right) \right) \right) \right], \quad (4.67)$$

$$F_2^{A_1^0}(0) = \frac{1}{16\pi^2} \frac{m_i}{m_{A_1^0}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} \left[\frac{(M_D)_{\mu j} (M_D)_{je}}{\kappa_+^2} \left(\frac{1}{6} m_\mu + m_j \left(\frac{3}{2} + \ln \left(\frac{m_j^2}{m_{A_1^0}^2} \right) \right) \right) \right], \quad (4.68)$$

$$G_2^{H_1^0}(0) = G_2^{A_1^0}(0) = 0. \quad (4.69)$$

Os escalares carregados nessa teoria contribuem para a_μ e para $\mu \rightarrow e\gamma$ a partir dos diagramas apresentados na Fig. 4.2.

Figura 4.2: Diagrama com troca de H_1^+ e H_2^+ .

Essas contribuições se dão por meio dos termos presentes na Eq. (4.32), com as interações escritas como

$$\begin{aligned} \bullet \phi_{1,2}^+ : & \quad \overline{\nu}_L'(h_l \phi_1^+ - \tilde{h}_l \phi_2^+) l_R' + \overline{l}_L'(h_l \phi_2^- - \tilde{h}_l \phi_1^-) \nu_R' + \text{h.c.} \\ & = \overline{N}_i \left\{ (V_L^{\dagger\nu})_{ia} \left[(M_D)_{aj} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_-^2} (\kappa_1 \phi_1^+ + \kappa_2 \phi_2^+) - (M_L)_{aj} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_-^2} (\kappa_2 \phi_1^+ + \kappa_1 \phi_2^+) \right] P_R \right. \\ & \quad \left. + (V_R^{\dagger\nu})_{ia} \left[(M_D)_{aj} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_-^2} (\kappa_1 \phi_2^+ + \kappa_2 \phi_1^+) - (M_l)_{aj} \frac{\sqrt{2}}{\kappa_-^2} (\kappa_1 \phi_1^+ + \kappa_2 \phi_2^+) \right] P_L \right\} l_j + \text{h.c.} \\ & = \frac{2v_R}{\kappa_-^2 \sqrt{2\kappa_+^2 v_R^2 + \kappa_-^4}} \overline{N}_i \left\{ (V_L^{\dagger\nu})_{ia} [(M_D)_{aj} \kappa_+^2 - (M_l)_{aj} 2\kappa_1 \kappa_2] P_R \right. \\ & \quad \left. + (V_R^{\dagger\nu})_{ia} [(M_D)_{aj} 2\kappa_1 \kappa_2 - (M_l)_{aj} \kappa_+^2] P_L \right\} H_2^+ l_j + \text{h.c.}, \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}
\bullet \delta_R^+ : & \quad \frac{\delta_R^+}{\sqrt{2}} \left(\overline{(\nu'_R)^C} h_M l'_R + \overline{(l'_R)^C} h_M \nu'_R \right) + \text{h.c.} \\
& = \frac{\delta_R^+}{\sqrt{2}} \left(\overline{N_i^C} (V_R^{\nu T})_{ia} (h_M)_{aj} P_R l'_j + \overline{l_i'^C} (h_M)_{ia} (V_R^\nu)_{aj} P_R N_j \right) + \text{h.c.} \\
& = \frac{\kappa_-^2}{\sqrt{4\kappa_+^2 v_R^2 + 2\kappa_-^4}} \left(\overline{N_i} (V_R^{\nu T})_{ia} (h_M)_{aj} P_R l'_j + \overline{l_i'^C} (h_M)_{ia} (V_R^\nu)_{aj} P_R N_j \right) H_2^+ + \text{h.c.}, \quad (4.71)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \delta_L^+ : & \quad \frac{\delta_L^+}{\sqrt{2}} \left(\overline{(\nu'_L)^C} h_M l'_L + \overline{(l'_L)^C} h_M \nu'_L \right) + \text{h.c.} \\
& = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\overline{N_i} (V_L^{\nu T})_{ia} (h_M)_{aj} P_L l'_j + \overline{l_i'^C} (h_M)_{ia} (V_L^\nu)_{aj} P_L N_j \right) H_1^+ + \text{h.c.}, \quad (4.72)
\end{aligned}$$

onde utilizamos as Eqs. (4.38), (4.39) e (4.41) para escrever ϕ_1^+ , ϕ_2^+ e δ_R^+ em função de H_2^+ e também $\delta_L^+ = H_1^+$ como descrito na Eq. (4.40).

Dessa forma podemos comparar, no limite $\epsilon \rightarrow 0$, esses termos de interação com o que foi discutido na Seção 3.2 para identificar

$$\begin{aligned}
\bullet H_1^+ : & \quad g_{s2}^{ij} = -g_{p2}^{ij} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (V_L^{\nu T})_{ia} (h_M)_{aj} \quad m_{\phi^+} = m_{H_1^+}, \\
\bullet H_2^+ : & \quad g_{s2}^{ij} = \frac{1}{\sqrt{8v_R^2 + 4\kappa_+^2}} \left\{ \frac{\kappa_+}{\sqrt{2}} (V_R^{\nu T})_{ia} (h_M)_{aj} + \frac{2v_R}{\kappa_+} \left[(V_L^{\nu \dagger})_{ia} (M_D)_{aj} - (V_R^{\nu \dagger})_{ia} (M_l)_{aj} \right] \right\}, \\
g_{p2}^{ij} & = \frac{1}{\sqrt{8v_R^2 + 4\kappa_+^2}} \left\{ \frac{\kappa_+}{\sqrt{2}} (V_R^{\nu T})_{ia} (h_M)_{aj} + \frac{2v_R}{\kappa_+} \left[(V_L^{\nu \dagger})_{ia} (M_D)_{aj} + (V_R^{\nu \dagger})_{ia} (M_l)_{aj} \right] \right\}, \quad m_{\phi^+} = m_{H_2^+}, \quad (4.73)
\end{aligned}$$

com $i = 1, \dots, 6$ e $a, j = e, \mu, \tau$.

As contribuições para a_μ no caso dos escalares carregados (3.22) podem ser escritas como

$$\begin{aligned}
a_\mu^{H_1^+} & = \frac{-m_\mu^2}{192\pi^2 m_{H_1^+}^2} \sum_{a=e,\mu,\tau} \sum_{i=1}^6 |(V_L^\nu)_{ai} (h_M)_{a\mu}|^2 \\
& = \frac{-m_\mu^2}{192\pi^2 m_{H_1^+}^2} \sum_{a=e,\mu,\tau} \sum_{b=e,\mu,\tau} \sum_{i=1}^6 [(V_L^\nu)_{ai} (V_L^{\nu*})_{bi} (h_M)_{a\mu} (h_M^*)_{b\mu}] \\
& = \frac{-m_\mu^2}{192\pi^2 m_{H_1^+}^2} \sum_{a=e,\mu,\tau} |(h_M)_{a\mu}|^2 - \frac{m_\mu^2}{192\pi^2 m_{H_1^+}^2} \sum_{a=e,\mu,\tau} \sum_{i=4}^6 |(V_L^\nu)_{ai} (h_M)_{a\mu}|^2, \quad (4.74)
\end{aligned}$$

$$a_\mu^{H_2^+} \simeq \frac{-m_\mu}{48\pi^2 m_{H_2^+}^2} \sum_{i=1}^6 (|g_{p2}^{\mu i}|^2 (m_\mu - 3M_i^\nu) + |g_{s2}^{\mu i}|^2 (m + 3M_i^\nu)), \quad (4.75)$$

onde no caso de H_1^+ separamos as contribuições dos neutrinos leves e dos pesados e utilizamos na última igualdade a unitariedade da matriz PMNS (3.104) $(V_L^\nu)_{ai} = U_{ai}$ com $i = 1, 2, 3$ e $a = e, \mu, \tau$.

Na contribuição de H_2^+ os acoplamentos descritos na Eq. (4.73) não foram escritos explicitamente e M_i^ν representa a massa dos seis neutrinos do modelo.

Além disso, a contribuição dessas partículas para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ se dá por meio dos fatores de forma apresentados nas Eqs. (3.29) e (3.30), que no caso de H_1^+ podem ser escritos como

$$\begin{aligned} F_2^{H_1^+}(0) &= G_2^{H_1^+}(0) = \frac{-m_\mu^2}{768\pi^2 m_{H_1^+}^2} \sum_{a=e,\mu,\tau} \sum_{b=e,\mu,\tau} \sum_{i=1}^6 [(V_L^\nu)_{ai}(V_L^{\nu*})_{bi}(h_M)_{a\mu}(h_M^*)_{be}] \\ &= \frac{-m_\mu^2}{768\pi^2 m_{H_1^+}^2} \sum_{a=e,\mu,\tau} [(h_M)_{a\mu}(h_M^*)_{ae}] - \frac{m_\mu^2}{768\pi^2 m_{H_1^+}^2} \sum_{a=e,\mu,\tau} \sum_{b=e,\mu,\tau} \sum_{i=4}^6 [(V_L^\nu)_{ai}(V_L^{\nu*})_{bi}(h_M)_{a\mu}(h_M^*)_{be}], \end{aligned} \quad (4.76)$$

onde novamente separamos as contribuições e utilizamos a unitariedade de U .

No caso de H_2^+ esses fatores de forma são

$$F_2^{H_2^+}(0) = \frac{-m_\mu}{192\pi^2 m_{H_2^+}^2} \sum_{i=1}^6 [g_{p2}^{\mu i} (g_{p2}^{ie})^* (m_\mu - 6M_i^\nu) + g_{s2}^{\mu i} (g_{s2}^{ie})^* (m_\mu + 6M_i^\nu)], \quad (4.77)$$

$$G_2^{H_2^+}(0) = \frac{-m_\mu}{192\pi^2 m_{H_2^+}^2} \sum_{i=1}^6 [g_{p2}^{\mu i} (g_{s2}^{ie})^* (m_\mu - 6M_i^\nu) + g_{s2}^{\mu i} (g_{p2}^{ie})^* (m_\mu + 6M_i^\nu)], \quad (4.78)$$

onde os acoplamentos foram apresentados na Eq. (4.73).

No que se trata dos escalares duplamente carregados suas contribuições tem como origem os diagramas apresentados na Fig. 4.3.

Figura 4.3: Diagramas com troca de $\delta_{L,R}^{++}$.

Essas contribuições vêm da Eq. (4.32) por meio dos termos

$$\bullet \delta_R^{++} (\overline{l'^C})_L h_M l'_R + \text{h.c.}, \quad (4.79)$$

$$\bullet \delta_L^{++} (\overline{l'^C})_R h_M l'_L + \text{h.c.} \quad (4.80)$$

Comparando esses termos com o que foi discutido na Seção 3.3 podemos fazer a identificação

dos acoplamentos e das massas como

$$\bullet \delta_R^{++} : \quad g_{s3}^{ij} = g_{p3}^{ij} = \frac{(h_M)_{ij}}{2} \quad m_{\phi^{++}} = m_{\delta_R^{++}}, \quad (4.81)$$

$$\bullet \delta_L^{++} : \quad g_{s3}^{ij} = -g_{p3}^{ij} = \frac{(h_M)_{ij}}{2} \quad m_{\phi^{++}} = m_{\delta_L^{++}}. \quad (4.82)$$

Podemos então escrever as contribuições (3.3) dessas partículas para a_μ

$$a_\mu^{\delta_R^{++}} = a_\mu^{\delta_L^{++}} = \frac{-m_\mu^2}{6\pi^2 m_{\delta_{L,R}^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} |(h_M)_{\mu j}|^2, \quad (4.83)$$

e os fatores de forma como

$$F_2^{\delta_R^{++}}(0) = G_2^{\delta_R^{++}}(0) = \frac{-m_\mu^2}{24\pi^2 m_{\delta_R^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} (h_M)_{\mu j} (h_M^*)_{ej}, \quad (4.84)$$

$$F_2^{\delta_L^{++}}(0) = -G_2^{\delta_L^{++}}(0) = \frac{-m_\mu^2}{24\pi^2 m_{\delta_L^{++}}^2} \sum_{j=e,\mu,\tau} (h_M)_{\mu j} (h_M^*)_{ej}. \quad (4.85)$$

Os bósons de gauge carregados contribuem para a_μ a partir do diagrama da Fig. 4.4.

Figura 4.4: Diagrama com troca de bósons de gauge carregados.

Essas contribuições, diferentemente dos escalares, surgem do termo cinético dos léptons descrito na Eq. (4.3), responsável pelas interações da forma

$$\mathcal{L} \supset \frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ \bar{N} \gamma^\mu \left(V_L^{\nu\dagger} \cos \zeta P_L - V_R^{\nu\dagger} \sin \zeta P_R \right) l W_{L\mu}^+ + \bar{N} \gamma^\mu \left(V_L^{\nu\dagger} \sin \zeta P_L + V_R^{\nu\dagger} \cos \zeta P_R \right) l W_{R\mu}^+ \right\} + \text{h.c.}, \quad (4.86)$$

onde a interação de W com os léptons carregados e neutrinos leves no limite $\epsilon \rightarrow 0$ é a mesma do MP, como pode ser visto comparando com a Eq. (3.103).

A interação com bóson carregado W_R pode ser comparada com o que foi discutido na Seção 3.4, a partir de onde podemos identificar no limite $\epsilon \rightarrow 0$ os acoplamentos e a massa como

$$\bullet W_R : \quad g_{v1}^{ij} = g_{a1}^{ij} = \frac{g}{2\sqrt{2}} (V_R^{\nu\dagger})_{ij} \quad m_{W'} = m_{W_R}, \quad (4.87)$$

a partir de onde podemos escrever a contribuição para a anomalia a_μ

$$a_\mu^{W_R} = \frac{5g^2 m_\mu^2}{96\pi^2 m_{W_R}^2} \sum_{j=1}^6 (V_R^{\nu\dagger})_{j\mu}^2, \quad (4.88)$$

e os fatores de forma que contribuem para $\mu \rightarrow e\gamma$ como

$$F_2^{W_R}(0) = -G_2^{W_R}(0) = \frac{5g^2 m_\mu^2}{384\pi^2 m_{W_R}^2} \sum_{j=1}^6 (V_R^{\nu\dagger})_{j\mu} (V_R^{\nu T})_{je}. \quad (4.89)$$

Quando pensamos nos bósons da gauge neutros, suas contribuições se dão por meio do diagrama apresentado na Fig. 4.5.

Figura 4.5: Diagrama com troca de bóson de gauge neutro.

Assim como no caso do bóson carregado, a interação dessas partículas com os léptons se originam da Eq. (4.3) e podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \supset & \frac{g}{2\cos\theta_W} \left\{ \bar{l}\gamma^\mu \left[\left(\cos\phi(2\sin^2\theta_W - 1) - \sin\phi \frac{\sin^2\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} \right) P_L + \right. \right. \\ & + \left. \left(2\cos\phi\sin^2\theta_W + \frac{\sin\phi}{\sqrt{\cos 2\theta_W}}(\cos^2\theta_W - 2\sin^2\theta_W) \right) P_R \right] l Z_\mu \\ & + \bar{l}\gamma^\mu \left[\left(\sin\phi(2\sin^2\theta_W - 1) + \cos\phi \frac{\sin^2\theta_W}{\sqrt{\cos 2\theta_W}} \right) P_L + \right. \\ & + \left. \left(2\sin\phi\sin^2\theta_W - \frac{\cos\phi}{\sqrt{\cos 2\theta_W}}(\cos^2\theta_W - 2\sin^2\theta_W) \right) P_R \right] l Z'_\mu \left. \right\}, \quad (4.90) \end{aligned}$$

de forma que, no limite $v_R \gg \kappa_+$ onde podemos aproximar $\phi \simeq 0$ (4.19), a interação dos léptons carregados com Z toma a forma da interação no MP descrita na Eq. (3.103).

Além disso, podemos comparar a interação do bóson Z' com o que foi discutidos na Seção 3.5 para indentificar os acoplamentos e a massa como

$$\bullet \quad Z' : \quad g_{v2}^{ij} = \delta_{ij} \frac{g(4\sin^2\theta_W - 1)}{4\cos\theta_W \sqrt{\cos 2\theta_W}} \quad g_{a2}^{ij} = -\delta_{ij} \frac{g\sqrt{\cos 2\theta_W}}{4\cos\theta_W} \quad m_{Z'} = m_{Z'}, \quad (4.91)$$

a partir de onde, comparando com a Eq. (3.70), podemos escrever a contribuição dessa partícula para a_μ como

$$a_i^{Z'} \simeq \frac{-m_\mu^2}{12\pi^2 m_{Z'}^2} \left(\frac{g^2}{16 \cos^2 \theta_W} \right) \left[\frac{5(4 \sin^2 \theta_W - 1)^2}{\cos 2\theta_W} - \cos 2\theta_W \right]. \quad (4.92)$$

Esses bósons vetoriais neutros não contribuem para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ já que seus vértices não contemplam a interação com dois férmions carregados diferentes.

Na próxima seção iremos discutir quais dessas contribuições são mais importantes para a_μ e as que podem gerar sinais em futuros experimentos no caso de $\mu \rightarrow e\gamma$.

4.7.2 Análise das contribuições

A contribuição de H_1^0 para a_μ descrita na Eq. (4.65), no caso em que consideramos os elementos de M_D iguais $(M_D)_{ij} \simeq \mathcal{O}(M_D) \lesssim 1$ MeV, pode ser aproximada pela Eq. (3.9), de modo que considerando o limite já discutido da massa $m_{H_1^0} > 15$ TeV podemos estimar sua contribuição com magnitude máxima da ordem de 10^{-19} , muito inferior ao que é necessário para explicar a_μ^{exp} . Para obtenção de seus fatores de forma, fazendo as mesmas considerações que no caso anterior podemos utilizar a Eq. (4.67) em conjunto com a expressão para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (1.38) para obter uma taxa de ramificação da ordem de 10^{-23} . Ainda que existam interferências entre as taxas de ramificação das diferentes partículas aqui iremos discutir uma a uma para ter uma ideia da ordem de grandeza de cada contribuição independentemente.

No caso da partícula pseudoescalar A_1^0 , assumindo o que já foi discutido sobre M_D e considerando o limite $m_{A_1^0} > 15$ TeV, sua contribuição para a_μ (4.66) se assemelha à dada na Eq. (3.8) com as devidas identificações das massas e acoplamentos já discutidas, de forma que sua máxima magnitude é da ordem de 10^{-19} , com sinal negativo. Seus fatores de forma foram descritos na Eq. (4.68) e (4.69), de forma que, levando em conta as considerações feitas, sua contribuição para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ assume valor máximo da ordem de 10^{-23} .

No caso dos escalares carregados, iremos separar as contribuições de $H_1^\pm$ em duas: aquelas envolvendo neutrinos leves no *loop* e as que envolvem neutrinos pesados. No caso dos neutrinos leves a contribuição para a_μ foi descrita na Eq. (4.74), de forma que considerando o limite de massa já discutido $m_{H_1^\pm} > 237$ GeV e assumindo que os acoplamentos h_M possam assumir valores até 1, podemos estimar a máxima contribuição como sendo de ordem 10^{-9} com sinal negativo, ou seja, ainda que com sinal oposto ao desejado para explicar a_μ^{exp} ela pode atingir valores com uma magnitude que não pode ser desconsiderada. Os fatores de forma no caso dos neutrinos leves foram descritos na Eq. (4.76) e, assumindo a mesma coisa que na situação de a_μ , podemos estimar a máxima contribuição para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ da ordem de 10^{-5} , superior aos limites experimentais atuais. Dessa forma, esse caso é muito importante para os processos que estamos interessados e será discutido com mais profundidade na próxima seção.

Quando consideramos os neutrinos pesados e $H_1^\pm$, essas contribuições são similares ao que foi discutidos no caso dos neutrinos leves, entretanto temos fatores de supressão $\mathcal{O}(M_D/M_R) \lesssim 10^{-6}$ que tem como origem os termos de mistura entre os neutrinos de mão esquerda e os pesados na matriz V_L^ν . Sendo assim, as contribuições para a_μ atingem máxima magnitude da ordem de 10^{-21} . Além disso, a contribuição para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ por meio dos fatores de forma descritos na Eq. (4.76) é no máximo da ordem de 10^{-27} , muito inferior a sensibilidade experimental.

Para o estudo da partícula $H_2^\pm$ também iremos separar nos casos dos neutrinos leves e pesados. No primeiro, quando olhamos para os acoplamentos descritos na Eq. (4.73) temos que o termo

dominante é aquele envolvendo V_L^ν já que V_R^ν é suprimido na porção que diz respeito a mistura com neutrinos leves. Sendo assim, considerando o limite de massa $m_{H_2^+} > 15$ TeV já discutido anteriormente temos que a máxima contribuição para a_μ (4.75) tem magnitude da ordem de 10^{-22} . Além disso, os fatores de forma nesse caso estão descritos nas Eqs. (4.77) e (4.78), e assumindo o mesmo que na estimativa para a_μ temos que a máxima contribuição para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ é da ordem de 10^{-29} , podendo ser inferior também devido à unitariedade de V_L^ν .

Figura 4.6: Contribuições para a anomalia a_μ nesse modelo. Do lado esquerdo temos aquelas geradas por H_1^+ , δ_L^{++} e δ_R^{++} , onde foram apresentadas suas dependências com h_M , enquanto no gráfico da direita temos as contribuições devido a H_1^0 , A_1^0 , H_2^+ , W_R^+ e Z' e suas dependências com $\mathcal{O}(M_D)$. As contribuições representadas por linhas pontilhadas correspondem a valores negativos. Além disso, em ambos os gráficos a linha pontilhada preta em $|a_\mu| = 10^{-10}$ corresponde a ordem mínima necessária para que a contribuição seja significativa para explicar a_μ^{exp} . Utilizamos todas as massas em seus menores valores permitidos, ou seja, $m_{H_1^0} = 15$ TeV, $m_{A_1^0} = 15$ TeV, $m_{H_1^+} = 237$ GeV, $m_{H_2^+} = 15$ TeV, $m_{\delta_L^{++}} = 770$ GeV, $m_{\delta_R^{++}} = 660$ GeV, $m_{W_R} = 5$ TeV e $m_{Z'} = 5.9$ TeV.

Quando levamos em conta os neutrinos pesados os termos dominantes nos acoplamentos (4.73) envolvem V_R^ν já que aqueles envolvendo V_L^ν são suprimidos nesse caso. Dessa forma, podemos utilizar a Eq. (4.75) para estimar a máxima contribuição para a_μ da ordem de 10^{-16} . Os fatores de forma podem também ser obtidos a partir das Eqs. (4.77) e (4.78), de modo que podemos estimar a maior magnitude dessas contribuições para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ como sendo da ordem de 10^{-20} .

No que diz respeito aos escalares duplamente carregados $\delta_{L,R}^{++}$, novamente considerando que h_M pode assumir valores até 1 e levando em conta os limites $m_{\delta_L^{++}} > 770$ GeV e $m_{\delta_R^{++}} > 660$ GeV já discutidos, em ambos os casos as contribuições para a anomalia a_μ descritas na Eq. (4.83) podem atingir valores com sinal negativo da ordem de 10^{-9} , ou seja, com magnitude que não pode ser desconsiderada ainda que o sinal seja oposto ao necessário para explicar a_μ^{exp} . Além disso, com base nas mesmas considerações podemos utilizar os fatores de forma descritos nas Eqs. (4.85) e (4.84) para estimar que em ambos os casos podemos ter contribuições para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ da ordem de 10^{-4} , valor acima do limite experimental atual. Sendo assim, iremos estudar esses dois casos com mais profundidade na próxima seção.

As contribuições envolvendo bósons vetoriais carregados pesados podem ser separadas nos casos dos neutrinos leves e pesados. Quando temos neutrinos leves, as contribuições para a_μ descritas na

Eq. (4.88) são suprimidas por um fator $\mathcal{O}(M_D/M_R) \lesssim 10^{-6}$ já que os elementos de V_R^ν responsáveis pela mistura dos neutrinos de mão direita com os leves são no máximo dessa ordem (4.49). Sendo assim podemos estimar a contribuição dessa partícula para a anomalia do múon com magnitude máxima da ordem de 10^{-24} . Além disso, com base nas mesmas considerações podemos utilizar os fatores de forma descritos na Eq. (4.89) para estimar a contribuição máxima para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ como sendo da ordem de 10^{-33} .

No caso dos neutrinos pesados podemos considerar a matriz 3×3 que mistura os neutrinos de mão direita com os pesados aproximadamente unitária pois a matriz 6×6 V também é, de forma que a soma dos elementos de V_R^ν na Eq. (4.88) se iguala a 1 e as contribuições para a_μ são da ordem de 10^{-12} . Além disso, essa interação não contribui para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ na ordem de aproximação considerada já que assumimos a unitariedade discutida anteriormente, o que leva a soma nos fatores de forma (4.89) se igualar a zero.

Por fim, considerando os valores de θ_W e $m_{Z'}$ a partícula Z' contribui para a anomalia do múon por meio da Eq. (4.92) com uma magnitude da ordem de 10^{-13} , inferior ao valor relevante para explicar a_μ . Como discutido anteriormente essa partícula não contribui para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ devido às propriedades do acoplamento com os léptons carregados.

Essas contribuições para a anomalia a_μ e para a taxa de ramificação $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ podem ser vistas gráficamente nas Figs. 4.6 e 4.7, respectivamente, onde é possível comparar as estimativas feitas a partir das expressões analíticas aproximadas com os valores exatos obtidos diretamente por meio das integrais de Passarino-Veltman. Nesses gráficos fixamos as massas em seus respectivos limites inferiores para maximizar as contribuições e consideramos $(M_D)_{ij} \simeq \mathcal{O}(M_D) \simeq 1$ MeV e $(h_M)_{ij} = h_M$.

Figura 4.7: Contribuições para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ nesse modelo. Naquelas relacionadas às partículas H_1^+ , δ_L^{++} e δ_R^{++} (gráfico da esquerda) foi apresentada a dependência com h_M , enquanto nas contribuições associadas a H_1^0 , A_1^0 , H_2^+ e W_R^+ foram destacadas suas dependências com $\mathcal{O}(M_D)$. A parte cinza nos gráficos representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) > 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1]. As massas das partículas são as mesmas da Fig. 4.6. No gráfico da esquerda temos as contribuições de δ_L^{++} (roxa) e δ_R^{++} (verde) sobrepostas.

Nas próximas seções iremos discutir de forma mais aprofundada os efeitos das partículas H_1^+ , δ_L^{++} e δ_R^{++} sobre a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ já que como visto elas podem fornecer contribuições significativas para a anomalia e para esse decaimento. Como já comentado anteriormente, essa discussão será feita no

contexto de simetria de paridade $\mathcal{P}$ e no caso em que assumiremos simetria de conjugação de carga $\mathcal{C}$ em conjunto com $M_D = 0$.

4.7.3 Fenomenologia com simetria $\mathcal{P}$

Considerando as principais contribuições para os processos que estamos interessados, ou seja, os casos com δ_L^{++} , δ_R^{++} e H_1^+ com neutrinos leves podemos utilizar as Eqs. (4.74) (4.83) para escrever a contribuição para a anomalia a_μ como

$$a_\mu \simeq -\frac{m_\mu^2}{6\pi^2} \left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right) \sum_{j=e,\mu,\tau} |(h_M)_{j\mu}|^2. \quad (4.93)$$

É importante notar que essa contribuição é sempre negativa, o que aumenta a diferença entre o valor teórico da anomalia do múon e a medição experimental a_μ^{exp} . Sendo assim, para que essa contribuição tenha magnitude inferior a 10^{-10} os acoplamentos em $\sum_j |(h_M)_{j\mu}|^2$ e as massas devem respeitar

$$(1 \text{ TeV})^2 \left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right) \sum_{j=e,\mu,\tau} |(h_M)_{j\mu}|^2 < 0.53. \quad (4.94)$$

Podemos visualizar graficamente essa contribuição na Fig. 4.8, onde tomamos esses escalares com massas degeneradas $m_\delta = m_{H_1^+} = m_{\delta_{L,R}^{++}}$. Para que essa contribuição tenha magnitude inferior a nossa sensibilidade experimental a região de parâmetros deve estar à esquerda da linha pontilhada preta nesse gráfico.

Além disso, considerando as contribuições para a taxa de ramificação a partir dos fatores de forma podemos escrever, com base nas Eqs. (4.76), (4.85) e (4.84), $F_2(0)$ e $G_2(0)$ como

$$F_2(0) = \frac{-m_\mu^2}{24\pi^2} \left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right) \sum_{j=e,\mu,\tau} (h_M)_{j\mu} (h_M^*)_{je}, \quad (4.95)$$

$$G_2(0) = \frac{-m_\mu^2}{24\pi^2} \left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} - \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right) \sum_{j=e,\mu,\tau} (h_M)_{j\mu} (h_M^*)_{je}, \quad (4.96)$$

a partir de onde é possível escrever a taxa de ramificação (1.38) como

$$\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{\alpha}{3\pi G_F^2} \left[\left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right)^2 + \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^4} \right] \left| \sum_{j=e,\mu,\tau} (h_M)_{j\mu} (h_M^*)_{je} \right|^2. \quad (4.97)$$

Para que o limite experimental $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) < 4.2 \times 10^{-13}$ seja respeitado os acoplamentos e as massas devem obedecer

$$(1 \text{ TeV})^4 \left[\left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right)^2 + \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^4} \right] \left| \sum_{j=e,\mu,\tau} (h_M)_{j\mu} (h_M^*)_{je} \right|^2 < 7.4 \times 10^{-8}. \quad (4.98)$$

Os sinais gerados por esse decaimento podem ser vistos no gráfico da Fig. 4.8, onde apresentamos o limite atual para essa taxa de ramificação, a sensibilidade futura que MEG II pretende

Figura 4.8: Dependência de a_μ (esquerda) e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ (direita) com os acoplamentos $(h_M)_{ij}$ e com a massa m_δ na situação com simetria de paridade. A parte cinza no gráfico da direita representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) > 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1] e a linha pontilhada roxa indica a sensibilidade futura de MEG II [2]. No gráfico de a_μ a linha vermelha contínua (pontilhada) indica contribuição da ordem de 2σ (1σ) de Δa_μ (1.31). Além disso, a linha pontilhada preta em $|a_\mu| = 10^{-10}$ representa o valor mínimo para que a contribuição seja da ordem da magnitude relevante para a_μ^{exp} .

atingir e tomamos as massas degeneradas. Nesse gráfico utilizamos a massa m_δ até 20 TeV já que valores acima disso estão relacionados a acoplamentos $\rho_i > 2$, os quais evitaremos para que o regime perturbativo seja respeitado. Caso os parâmetros se encontrem entre a região excluída e a sensibilidade pretendida por MEG II teremos um sinal desse decaimento nos próximos experimentos que buscarão $\mu \rightarrow e\gamma$.

Sendo assim, ainda que nessas condições esse modelo não contemple as correções necessárias para explicar a_μ^{exp} é possível que tenhamos uma região que não aumente significativamente o problema de Δa_μ e ainda gere algum sinal que pode ser detectado em próximos experimentos que procuram o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$.

4.7.4 Fenomenologia com simetria $\mathcal{C}$ e $M_D = 0$

Nesse caso podemos utilizar a Eq. (4.58) que relaciona h_M com a massa dos neutrinos

$$h_M^* = \frac{U M_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T}{v_R \sqrt{2}},$$

para escrever com base nas Eq. (4.74) (4.83) a contribuição para a_μ como

$$a_\mu = -\frac{m_\mu^2}{12\pi^2 v_R^2} \left(\frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^2} + \frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right) \sum_{j=e,\mu,\tau} |(U M_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{j\mu}|^2, \quad (4.99)$$

onde novamente temos uma contribuição negativa e queremos evitar que ela assuma uma magnitude superior a 10^{-10} .

Nesse caso podemos perceber que, já que os acoplamentos $(h_M)_{ij}$ dependem das massas dos neutrinos pesados, as contribuições para a anomalia também dependem dessas massas. Como discutido anteriormente na Seção 4.6.2, pela Eq. (4.59) vemos que as massas dos neutrinos leves e pesados são proporcionais, de forma que, como sabemos experimentalmente os valores de Δm_{21}^2 e $|\Delta m_{3l}^2|$, fixando a massa de um neutrino leve e um pesado determinamos completamente a massa de todos os outros. Em particular, aqui iremos fixar a massa do neutrino mais pesado em 1 TeV e variar a massa do neutrino mais leve. É importante destacar que os resultados dependem da hierarquia dos neutrinos, de modo que iremos apresentar os resultados nos dois ordenamentos distintos.

O comportamento dessas contribuições e suas dependências com a massa dos neutrinos está apresentada na Fig. 4.9, onde utilizamos a soma da massa dos neutrinos leves como parâmetro, que varia de seu valor mais baixo (situação com $m_0 = 0$) até o limite experimental $\sum m_\nu < 0.12$ eV [124].

Além disso, utilizando a mesma relação para o acoplamento podemos escrever os fatores de forma, descritos nas Eqs. (4.76), (4.85) e (4.84), como

$$F_2(0) = \frac{-m_\mu^2}{48\pi^2 v_R^2} \left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right) \sum_{j=e,\mu,\tau} (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{j\mu}^* (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{je}, \quad (4.100)$$

$$G_2(0) = \frac{-m_\mu^2}{48\pi^2 v_R^2} \left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} - \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right) \sum_{j=e,\mu,\tau} (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{j\mu}^* (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{je}, \quad (4.101)$$

a partir de onde podemos escrever a taxa de ramificação (1.38) desse decaimento como

$$\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma) \simeq \frac{\alpha}{12\pi G_F^2 v_R^4} \left[\left(\frac{1}{m_{\delta_R^{++}}^2} + \frac{1}{32m_{H_1^+}^2} \right)^2 + \frac{1}{m_{\delta_L^{++}}^4} \right] \left| \sum_{j=e,\mu,\tau} (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{j\mu}^* (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{je} \right|^2.$$

Aqui novamente temos que essa taxa de ramificação deve respeitar o limite experimental de MEG. A dependência dessa contribuição com a soma da massa dos neutrinos leves está representada na Fig. 4.9, onde foram considerados os dois diferentes casos de ordenamento dos neutrinos.

Vale destacar que a fase δ presente na matriz U não tem grande relevância aqui já que tanto $\sum_j |(UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{j\mu}|^2$ quanto $\sum_j (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{j\mu}^* (UM_{\text{pes}}^{\text{diag}} U^T)_{je}$ não alteram seu valor em mais do que 5% quando variamos sobre todos os possíveis valores de δ . Portanto, na obtenção dos gráficos seu valor foi fixado em $\delta = 0$.

É possível notar a partir dos gráficos que ambos ordenamentos de massa dos neutrinos leves apresentam resultados semelhantes. Vale destacar que a contribuição para $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ tem forte dependência com o valor das massas dos campos escalares H_1^+ , δ_L^{++} e δ_R^{++} , de modo que se essas se encontram na região de $m_\delta \in [1.5, 2.5]$ TeV podemos ter um sinal desse tipo de decaimento em MEG II. É importante destacar que na região que respeita os limites experimentais de $\mu \rightarrow e\gamma$ todas contribuições para a_μ são irrelevantes quando comparadas a sensibilidade experimental atual, de modo que ainda que elas sejam negativas não ocorre aumento significativo da discrepância entre o valor teórico e experimental.

É interessante reparar também que nesse caso o limite sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ é mais restritivo sobre a massa m_δ do que as buscas diretas em aceleradores $m_{H_i^+} > 80$ GeV [122], $m_{\delta_L^{++}} > 770$ GeV e $m_{\delta_R^{++}} > 660$ GeV [123] já que pelos gráficos devemos respeitar $m_\delta \gtrsim 1.5$ TeV.

Figura 4.9: Dependência de a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma)$ com a soma da massa dos neutrinos leves e com m_δ no ordenamento normal (esquerda) e invertido (direita). A parte cinza nos gráficos representa a região de $\text{BR}(\mu \rightarrow e \gamma) > 4.2 \times 10^{-13}$ excluída por MEG [1] e a linha pontilhada roxa indica a sensibilidade futura de MEG II [2]. Além disso, a linha vermelha contínua (pontilhada) indica contribuição da ordem de 2σ (1σ) de Δa_μ (1.31). A linha pontilhada preta em $|a_\mu| = 10^{-10}$ representa o valor mínimo para que a contribuição seja da ordem da magnitude relevante para a_μ^{exp} .

Conclusão e Perspectivas Futuras

Em vista da diferença significativa entre a previsão teórica do MP para o momento magnético anômalo do múon e seu valor experimental, diversos modelos além do MP se propõem a explicar essa discrepância. A fim de gerar novas contribuições para a_μ , de modo geral são introduzidas novas partículas que interagem com os múons. Se também houver interação com o elétrons, esses modelos, além de gerarem contribuições para a_μ , podem produzir sinais no decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ devido à semelhança entre os diagramas envolvidos nesses observáveis.

No primeiro capítulo introduzimos o conceito de fator giromagnético dos férmions, onde foi obtido $g = 2$ no contexto da equação de Dirac, valor que sofre correções quando introduzimos flutuações quânticas. Com isso, formalizamos a obtenção de g no contexto de TQC de uma maneira independente de modelo, onde foi introduzida a anomalia a_i do lépton i para representar o desvio entre g e o valor previsto por Dirac sem correções de *loop*.

Foi formalizado também o cálculo da taxa de ramificação do decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ a partir dos fatores de forma $F_2(0)$ e $G_2(0)$, novamente de uma forma independente de modelo. Percebemos que a presença de $F_2(0)$ tanto na obtenção de a_μ quanto no cálculo de $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ evidencia a relação entre os dois observáveis. Como a contribuição do MP com neutrinos massivos para esse decaimento é cerca de 40 ordens de grandeza inferior à sensibilidade experimental atual, qualquer sinal obtido nos experimentos em um futuro próximo apontam para nova física.

No segundo capítulo introduzimos o conceito de integrais de Passarino-Veltman, utilizado para expressar as diferentes contribuições a nível de 1-*loop* dos processos que estamos interessados. Ainda que de forma geral essas integrais sejam tensoriais, com base na invariância de Lorentz discutimos a decomposição dessas funções em uma combinação de integrais escalares. A partir da regularização dimensional, com auxílio da parametrização de Feynman e da rotação de Wick, obtivemos essas funções como integrais em uma ou duas dimensões, de onde foi possível obter expressões analíticas em alguns casos particulares.

Apresentamos também a ferramenta dos projetores, utilizada para obter os fatores de forma de modo direto a partir da amplitude de espalhamento dos diagramas envolvidos. O uso dessa ferramenta facilita muito o cálculo das contribuições para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ já que elas são obtidas diretamente a partir desses componentes da amplitude.

No terceiro capítulo utilizamos o formalismo e as ferramentas introduzidas para calcular diversas contribuições para a_μ e $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ no setor eletrofraco que podem surgir em teorias além do MP. Discutimos, com acoplamentos genéricos, os casos de escalares neutros, carregados e duplamente carregados, bem como bósons vetoriais neutros e carregados interagindo com os léptons do MP. Esses resultados foram apresentados de forma exata a partir das integrais de Passarino-Veltman e também de modo aproximado no regime em que a massa dos novos mediadores é muito maior do que a dos léptons do MP.

Foram apresentados graficamente e analiticamente os casos em que os acoplamentos introduzidos independem dos índices fermiônicos. Nesse contexto discutimos a situação em que apenas um dos acoplamentos introduzidos é diferente de zero, e também o caso em que ambos são iguais. Percebemos que todas as diferentes interações discutidas podem ter contribuições positivas para a_μ , dependendo dos acoplamentos considerados e das massas das partículas presentes nos *loops* (ver Tab. 3.2). Entretanto, se esses acoplamentos independem dos índices fermiônicos, em toda a região de parâmetros que respeita os limites sobre o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ as contribuições para o momento magnético do múon possuem magnitude inferior ao que é necessário para explicar a_μ^{exp} .

No quarto capítulo aplicamos os resultados obtidos no estudo dessas diferentes contribuições genéricas no modelo $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)_{B-L}$. Nessa teoria o setor escalar foi estendido por um bidoubleto e dois tripletos dessa simetria, a partir de onde foram introduzidos novos escalares neutros, unicamente carregados e com carga dupla, além de novos bósons vetoriais associados às simetrias e três novos neutrinos. Discutimos como a massa desses neutrinos surge por meio do mecanismo de *seesaw* de tipo I ou II, dependendo da simetria discreta imposta sobre a Lagrangeana. Obtivemos também as interações dos novos campos com os léptons carregados do MP e diagonalizamos todos os setores para obter as partículas físicas da teoria.

Com base nessas interações mostramos as novas contribuições para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ nesse modelo. A partir disso percebemos que as contribuições envolvendo as partículas H_1^+ , δ_L^{++} e δ_R^{++} podem gerar contribuições com magnitude relevante para a_μ , ainda que com sinal negativo, e também para o decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$, e portanto as estudamos de forma mais aprofundada em dois contextos: quando temos simetria discreta de paridade e quando impomos simetria de conjugação de carga em conjunto com $M_D = 0$.

No caso de $\mathcal{P}$ obtivemos os limites que devem ser respeitados para que não sejam geradas contribuições para a_μ que aumentam significativamente a diferença entre a previsão teórica e o valor experimental, bem como a região de parâmetros que pode gerar um sinal no decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ no experimento MEG II.

Quando consideramos a simetria $\mathcal{C}$ em conjunto com $M_D = 0$ escrevemos as contribuições para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ em função da soma das massas dos neutrinos leves e das massas dos escalares envolvidos. Em particular, essas contribuições dependem do ordenamento da massa dos neutrinos leves, de forma que calculamos essas contribuições tanto no ordenamento normal quanto no invertido. Em ambos os casos obtivemos a região de parâmetros que respeita o limite sobre $\text{BR}(\mu \rightarrow e\gamma)$ e não gera contribuições negativas significativas para a_μ . Percebemos que a região excluída pelo decaimento do múon restringe a massa dos escalares carregados e duplamente carregados mais fortemente do que as buscas diretas em aceleradores. Além disso, se a massa do neutrino mais pesado for $m_N = 1$ TeV, caso a massa dos escalares esteja na região $m_\delta \in [1.5, 2.5]$ TeV podemos ter um sinal do decaimento $\mu \rightarrow e\gamma$ no experimento MEG II.

Futuramente iremos explorar a relação desses observáveis com a transição nuclear $\mu N \rightarrow eN$ e com o decaimento $\mu \rightarrow 3e$ já que nesse modelo eles podem ocorrer devido à troca de escalares carregados e duplamente carregados por meio dos diagramas apresentados na Fig. 1. Sendo assim, da mesma forma que a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ os limites experimentais sobre esses processos também restringem os acoplamentos $(h_M)_{ij}$ e as massas dos escalares. Além disso, podemos também estudar a região de parâmetros associada a sinais em experimentos futuros como Mu2e, COMET e Mu3e, que pretendem melhorar os limites atuais da taxa de ramificação $\text{BR}(\mu \rightarrow 3e)$ e da razão $(R_{\mu e})$ entre a taxa de decaimento $\Gamma(\mu N \rightarrow eN)$ e a taxa de captura dos múons pelo núcleo. Atualmente os limites impõem $R_{\mu e} < 7 \times 10^{-13}$ [125] e $\text{BR}(\mu \rightarrow 3e) < 1.0 \times 10^{-12}$ [126], entretanto esses experimentos pretendem

atingir sensibilidades de $R_{\mu e} < 10^{-17}$ [127, 128] e $\text{BR}(\mu \rightarrow 3e) < 10^{-16}$ [129].

Figura 1: Diagramas envolvidos na transição nuclear $\mu N \rightarrow e N$ (esquerda) e no decaimento $\mu \rightarrow 3e$ (direita). A área hachurada representa as diferentes interações a nível de 1-loop no vértice $\mu - e - \gamma$ já discutidas no Capítulo 4.

Podemos também aplicar o que foi estudado aqui para obter as contribuições para a_μ e $\mu \rightarrow e\gamma$ no modelo [96], onde é introduzida uma nova simetria escura $U(1)_{\mathcal{D}}$ associada a um bóson vetorial leve $Z_{\mathcal{D}}$. Temos também a introdução de novos escalares S_1 , S_2 e ϕ com carga escura, bem como novos neutrinos N , N' também carregados com relação à nova simetria. A contribuição das novas partículas nessa teoria podem ser obtidas diretamente a partir do que foi discutido no Capítulo 3.

Apêndice A

Propriedades das soluções da equação de Dirac e das matrizes γ^μ

A.1 Matrizes de Dirac

Como visto no Capítulo 1, as matrizes que satisfazem as propriedades desejadas da equação de Dirac devem respeitar

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \quad \text{e} \quad \{\alpha_i, \beta\} = 0. \quad (\text{A.1})$$

Os objetos de menor dimensão que satisfazem essas relações são as matrizes 4×4 , que podem aparecer em mais de uma representação. Na representação de Dirac-Pauli essas matrizes são escritas como

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

enquanto na representação de Weyl como

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

onde $\mathbb{1}$ e 0 representam a matriz identidade e a matriz nula 2×2 , respectivamente, e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ são as matrizes de Pauli dadas por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

A partir de $\vec{\alpha}$ e β podemos também definir as matrizes de Dirac como $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha})$, que podem ser escritas na representação de Dirac-Pauli por

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

e na representação de Weyl como

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

onde também introduzimos a matriz $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

Essas as matrizes respeitam as relações

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0, \quad \gamma^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad \gamma^{5\dagger} = \gamma^5, \quad (\text{A.7})$$

com $g^{\mu\nu}$ uma matriz 4×4 escrita como

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Podemos também definir a matriz antissimétrica $\sigma^{\mu\nu} = [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ que obedece

$$\sigma^{\mu\nu\dagger} = \gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0. \quad (\text{A.9})$$

A.2 Soluções da equação de Dirac

A partir as matrizes discutidas anteriormente, usando que $H = i\partial/\partial t$ e $\vec{P} = -i\nabla$ na Eq. (1.1) e multiplicando essa equação por β podemos escrever a equação de Dirac como

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu + m)\Psi = 0, \quad (\text{A.10})$$

em que Ψ é um objeto de quatro componentes e recebe o nome de espinor de Dirac e $\partial_\mu \equiv (\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}) = (\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)$.

A partir disso podemos ainda tomar o Hermitiano-conjugado da Eq. (A.10) de modo a obter

$$i\partial_\mu\bar{\Psi}\gamma^\mu + m\bar{\Psi} = 0 \quad \text{com} \quad \bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger\gamma^0. \quad (\text{A.11})$$

Quando procuramos soluções para a equação de Dirac da forma

$$\Psi = u(\vec{p}) e^{-ip \cdot x}, \quad (\text{A.12})$$

obtemos duas soluções com energia positiva $u(p)^{(1,2)}$ associadas às partículas e duas de energia negativa $u(p)^{(3,4)}$. Em particular, nessas últimas soluções podemos interpretar os espinores de energia negativa $-E$ e momento $-\vec{p}$ como antipartículas com quadrimomento $p = (E, \vec{p})$ por meio da definição

$$v(\vec{p})^{(2,1)} e^{-ip \cdot x} \equiv u(-\vec{p})^{(3,4)} e^{-i(-p) \cdot x}. \quad (\text{A.13})$$

É importante destacar que essas soluções livres da equação de Dirac respeitam

$$(\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0 \quad \text{e} \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0, \quad \text{com} \quad \not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu, \quad (\text{A.14})$$

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) = (\not{p} + m) \quad \text{e} \quad \sum_{s=1,2} v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) = (\not{p} - m). \quad (\text{A.15})$$

A.3 Polarização dos fótons

Os quadrivetores de polarização dos fótons respeitam

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\alpha}(q, \lambda) \epsilon_{\beta}(q, \lambda)^* = -g_{\alpha\beta},$$

em que λ representa diferentes polarizações e q o quadrimomento associado ao fóton.

Apêndice B

Forma geral da amplitude e identidades

Para demonstrar a forma geral das amplitudes dos diferentes processos iremos apresentar algumas igualdades que serão importantes nesse estudo. A primeira que iremos discutir é a Identidade de Gordon. Antes de começar a discussão é importante destacar três relações entre as matrizes de Dirac dadas por

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu = 2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu, \quad (\text{B.1})$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = \frac{i}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{i}{2}(2g^{\mu\nu} - 2\gamma^\nu \gamma^\mu) = i(g^{\mu\nu} - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad (\text{B.2})$$

$$\not{p}\gamma^\mu = p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu = p_\nu(2g^{\mu\nu} - \gamma^\mu \gamma^\nu) = 2p^\mu - \gamma^\mu \not{p}. \quad (\text{B.3})$$

Tendo em mãos essas relações podemos escrever

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f)[i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p_i) &= -\bar{u}(p_f)[q^\mu - \not{q}\gamma^\mu]u(p_i) = -\bar{u}(p_f)[q^\mu - \not{p}_f\gamma^\mu + \not{p}_i\gamma^\mu]u(p_i) \\ &= -\bar{u}(p_f)[(p_f^\mu - p_i^\mu) - \not{p}_f\gamma^\mu + 2p_i^\mu - \gamma^\mu \not{p}_i]u(p_i), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

em que usamos (B.2) na primeira igualdade, (B.3) na última e $q^\mu \equiv p_f^\mu - p_i^\mu$. Utilizando as equações de movimento temos então a identidade de Gordon que é dada por

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f)[i\sigma^{\mu\nu}q_\nu]u(p_i) &= -\bar{u}(p_f)[P^\mu - (m_f + m_i)\gamma^\mu]u(p_i) \\ \Rightarrow \bar{u}(p_f)P^\mu u(p_i) &= \bar{u}(p_f)[-i\sigma^{\mu\nu}q_\nu + (m_f + m_i)\gamma^\mu]u(p_i), \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

com $P^\mu \equiv p_f^\mu + p_i^\mu$.

A outra identidade que iremos utilizar na demonstração das amplitudes é similar a essa mas envolve o caso em que temos também a matriz γ^5 . Para isso, considere

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f)[i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5]u(p_i) &= -\bar{u}(p_f)[q^\mu\gamma^5 - \not{q}\gamma^\mu\gamma^5]u(p_i) = -\bar{u}(p_f)[q^\mu\gamma^5 - \not{p}_f\gamma^\mu\gamma^5 + \not{p}_i\gamma^\mu\gamma^5]u(p_i) \\ &= -\bar{u}(p_f)[(p_f^\mu - p_i^\mu)\gamma^5 - \not{p}_f\gamma^\mu\gamma^5 + 2p_i^\mu\gamma^5 + \gamma^\mu\gamma^5\not{p}_i]u(p_i), \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

que com a utilização das equações de movimento pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f)[i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5]u(p_i) &= -\bar{u}(p_f)[P^\mu\gamma^5 - (m_f - m_i)\gamma^\mu\gamma^5]u(p_i) \\ \Rightarrow \bar{u}(p_f)P^\mu\gamma^5 u(p_i) &= \bar{u}(p_f)[-i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\gamma^5 + (m_f - m_i)\gamma^\mu\gamma^5]u(p_i). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Figura B.1: Diagrama de interação geral com momento inicial p_i e final p_f .

Tendo essas identidades em mãos podemos estudar a forma geral das amplitudes que utilizaremos para o estudo de a_i e no decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$. Quando consideramos o diagrama representado na Fig. (B.1) podemos escrever a amplitude mais geral como

$$\mathcal{M} = \epsilon_\mu(q) \mathcal{M}^\mu = -e \epsilon_\mu(q) \bar{u}(p_f) \Gamma^\mu u(p_i), \quad (\text{B.8})$$

em que p_f e p_i são os momentos da partícula final e inicial, respectivamente, e Γ^μ é uma função que depende da interação, seja ela a *tree-level* ou a nível de *loop*. Devido ao índice μ presente nessa função e levando em conta todas as possíveis interações entre as partículas podemos escrever essa função de forma mais geral possível como

$$\Gamma^\mu = A_1 \gamma^\mu + A_2 \frac{P^\mu}{(m_i + m_f)} + A_3 \frac{q^\mu}{(m_i + m_f)} + A_4 \gamma^\mu \gamma^5 + A_5 \gamma^5 \frac{P^\mu}{(m_i + m_f)} + A_6 \gamma^5 \frac{q^\mu}{(m_i + m_f)}, \quad (\text{B.9})$$

com A 's funções escalares.

De modo geral essas funções dependem de contrações dos momentos envolvidos, como por exemplo $p_i \cdot p_f$ ou $q \cdot P$, e ainda de contrações desses momentos com as matrizes de Dirac a partir de termos como $\not{q}$ e $\not{p}_f$. Aqui, iremos tomar a partícula inicial l_i e a final l_f como sendo *on-shell*, de forma que elas respeitem suas respectivas equações de movimento

$$\bar{u}(p_f) \not{p}_f = \bar{u}(p_f) m_f \quad e \quad \not{p}_i u(p_i) = m_i u(p_i). \quad (\text{B.10})$$

Podemos utilizar essas equações para reduzir a dependência das funções A 's com $\not{p}_i$ e $\not{p}_f$ (e consequentemente $\not{q}$ e $\not{P}$) à dependência delas com as massas $m_{i,f}$. Além disso, temos que $p_i^2 = m_i^2$, $p_f^2 = m_f^2$ e $q^2 = m_i^2 + m_f^2 - 2p_i \cdot p_f$ de forma que também podemos reduzir todos os produtos dos quadrivetores envolvidos a termos que só envolvem q^2 e as massas. Em vista disso tudo, podemos concluir que essas funções escalares podem ser escritas como $A_n(q^2, m_i^2, m_f^2)$.

B.1 Amplitude no contexto de a_i

Para o caso em que essa amplitude se refere a um diagrama que contribui com o momento magnético temos que a partícula final é igual a inicial. Podemos então utilizar a identidade de Ward, que vale também para o caso do fóton *off-shell* [76], para escrever

$$q_\mu \Gamma^\mu = A_1 \not{q} + A_2 \frac{q \cdot P}{2m} + A_3 \frac{q^2}{2m} + A_4 \not{q} \gamma^5 + A_5 \gamma^5 \frac{q \cdot P}{2m} + A_6 \gamma^5 \frac{q^2}{2m} = 0. \quad (\text{B.11})$$

Além disso, a partir da definição de q e P temos $q \cdot P = (p_i - p_f) \cdot (p_i + p_f) = p_i^2 - p_f^2 = 0$ e “sandwichando” a expressão com $\bar{u}(p_f)[...]u(p_i)$ vem

$$\bar{u}(p_f) \left[A_1 \not{q} + A_3 \frac{q^2}{2m} + A_4 \not{q} \gamma^5 + A_6 \gamma^5 \frac{q^2}{2m} \right] u(p_i) = 0. \quad (\text{B.12})$$

Utilizando as equações de movimento podemos escrever

$$\bar{u}(p_f) \not{p}_f u(p_i) = \bar{u}(p_f) (\not{p}_f - \not{p}_i) u(p_i) = \bar{u}(p_f) (m - m) u(p_i) = 0, \quad (\text{B.13})$$

$$\bar{u}(p_f) \not{q} \gamma^5 u(p_i) = \bar{u}(p_f) (\not{p}_f - \not{p}_i) \gamma^5 u(p_i) = \bar{u}(p_f) (m \gamma^5 + \gamma^5 \not{p}_i) u(p_i) = \bar{u}(p_f) 2m \gamma^5 u(p_i), \quad (\text{B.14})$$

de onde finalmente podemos concluir que

$$A_3 \frac{q^2}{2m} = 0 \Rightarrow A_3(q^2, m^2) = 0 \quad \text{e} \quad A_4 2m = -A_6 \frac{q^2}{2m} \Rightarrow A_4 = -A_6 \frac{q^2}{4m^2}, \quad (\text{B.15})$$

que substituindo em (B.9) temos

$$\Gamma^\mu = A_1 \gamma^\mu + A_2 \frac{P^\mu}{2m} - A_6 (q^2 \gamma^\mu - 2mq^\mu) \frac{\gamma^5}{2m} + A_5 \gamma^5 \frac{P^\mu}{2m}. \quad (\text{B.16})$$

Utilizando as identidades (B.5) e (B.7) com $m_i = m_f = m$ podemos escrever nossa função Γ como

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &= (A_1 + A_2) \gamma^\mu - iA_2 \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} - A_6 (q^2 \gamma^\mu - 2mq^\mu) \frac{\gamma^5}{2m} - iA_5 \frac{\sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5}{2m} \\ &= F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} + G_1(q^2) (q^2 \gamma^\mu - 2mq^\mu) \frac{\gamma^5}{2m} + G_2(q^2) \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \gamma^5}{2m}, \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

onde definimos os fatores de forma como $F_1 = A_1 + A_2$, $F_2 = -A_2$, $G_1 = -A_6$ e $G_2 = -A_5$.

B.2 Amplitude no contexto do decaimento $l_i \rightarrow l_j \gamma$

Nesse decaimento temos que o fóton emitido é *on-shell*, de onde vem direto que $\epsilon_\mu(q)q^\mu = 0$ e portanto A_3 e A_6 não influenciam nessa amplitude. Utilizando ainda as identidades (B.5) e (B.7) em (B.9) vem que

$$\mathcal{M} = -\epsilon_\mu(q) \bar{u}(p_f) e \left[(A_1 + A_2) \gamma^\mu - A_2 \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{(m_i + m_f)} + \left(A_4 + A_5 \frac{m_f - m_i}{m_f + m_i} \right) \gamma^\mu \gamma^5 - A_5 \frac{i \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 q_\nu}{(m_i + m_f)} \right] u(p_i).$$

Além disso essa amplitude deve respeitar a identidade de Ward $q_\mu \mathcal{M}^\mu = 0$ que leva à relação

$$\bar{u}(p_f) \left[(A_1 + A_2) \not{q} - A_2 \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu q_\mu}{(m_i + m_f)} + \left(A_4 + A_5 \frac{m_f - m_i}{m_f + m_i} \right) \not{q} \gamma^5 - A_5 \frac{i \sigma^{\mu\nu} \gamma^5 q_\nu q_\mu}{(m_i + m_f)} \right] u(p_i) = 0. \quad (\text{B.18})$$

Como $\sigma^{\mu\nu}$ é antissimétrico e $q_\nu q_\mu$ é simétrico por trocas $\nu \leftrightarrow \mu$ temos que $\sigma^{\mu\nu} q_\nu q_\mu = 0$, e utilizando relações similares a (B.13) e (B.14) para o caso em que $m_i \neq m_f$ vem

$$\begin{aligned} \bar{u}(p_f) \left[(A_1 + A_2)(m_f - m_i) + \left(A_4 + A_5 \frac{m_f - m_i}{m_f + m_i} \right) (m_f + m_i) \gamma^5 \right] u(p_i) &= 0 \\ \Rightarrow (A_1 + A_2) &= 0 \quad \text{e} \quad \left(A_4 + A_5 \frac{m_f - m_i}{m_f + m_i} \right) = 0, \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

e consequentemente a amplitude mais geral para esse tipo de decaimento é

$$\mathcal{M} = -e\bar{u}(p_f)\epsilon_\mu(q)\Gamma^\mu u(p_i) = -\epsilon_\mu(q)\bar{u}(p_f) e \left[\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{(m_i + m_f)} (F_2(0) + \gamma^5 G_2(0)) \right] u(p_i), \quad (\text{B.20})$$

onde definimos $F_2(0) = -A_2(0)$ e $G_2(0) = -A_5(0)$.

Apêndice C

Espaço de fase de duas partículas

Para estudar o decaimento de uma partícula em duas da forma $l_1 \rightarrow l_2 l_3$, sendo l_1 , l_2 e l_3 partículas com quadrimomento p_1 , p_2 e p_3 , respectivamente, e massas m_1 , m_2 e m_3 , nos deparamos com a necessidade de obter uma forma para o espaço de fase

$$d\phi_2 = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_2 + p_3 - p_1) \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_2} \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_3}, \quad (\text{C.1})$$

em que E_2 e E_3 são as energias das partículas finais l_2 e l_3 , $d^3 p$ representa o diferencial envolvendo as três coordenadas espaciais do momento linear $\vec{p}$, associado ao quadrimomento p , e $\delta^{(4)}(p_2 + p_3 - p_1) = \delta(E_2 + E_3 - E_1) \delta^{(3)}(\vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{p}_1)$.

A partir da Eq. (C.1) podemos realizar a integração sobre $d^3 p_3$ e utilizar $\delta^{(3)}$ para escrever no referencial do centro de massa (CM)

$$d\phi_2 = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega_2 \int dp_f \frac{p_f^2}{E_2 E_3} \delta(E_2 + E_3 - E_{\text{CM}}), \quad (\text{C.2})$$

onde $d\Omega_2$ é o diferencial de ângulo sólido da partícula l_2 e $p_f = |\vec{p}_2|$. Para integrarmos em relação a p_f primeiro iremos utilizar a propriedade da função delta de Dirac

$$\delta(f(y)) = \frac{\delta(y - y_i)}{|f'(y_i)|} \implies \delta(x(p_f)) = \delta(p_f - p'_f) \left| \frac{dx}{dp_f}(p'_f) \right|^{-1} = \frac{\delta(p_f - p'_f)}{p'_f} \frac{E_3(p'_f) \times E_4(p'_f)}{E_3(p'_f) + E_4(p'_f)}, \quad (\text{C.3})$$

onde y_i satisfaz $f(y) = 0$, definimos $x(p_f) = E_2(p_f) + E_3(p_f) - E_{\text{CM}}$ e p'_f é raiz de $x(p_f) = 0$, ou seja, respeita a conservação de energia-momento $p_1 = p_2 + p_3$. Substituindo na Eq. (C.2) e realizando a integração sobre p_f vem que

$$d\phi_2 = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega_2 \frac{p'_f}{E_2(p'_f) + E_3(p'_f)} = \frac{1}{16\pi^2} d\Omega_2 \frac{p'_f}{E_{\text{CM}}}. \quad (\text{C.4})$$

No caso do decaimento $l_i \rightarrow l_f \gamma$ podemos escrever, no referencial do CM, $E = m_i$ e $|\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}_f| = p'_f$, de onde vem a partir da conservação de energia que

$$\begin{aligned} E_i = m_i = E_\gamma + E_f = p'_f + \sqrt{m_f^2 + p_f'^2} &\implies (m_i - p'_f)^2 = (m_f^2 + p_f'^2) \\ \implies p'_f = \frac{m_i^2 - m_f^2}{2m_i} &\xrightarrow{m_i \gg m_f} p'_f = \frac{m_i}{2}, \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

onde usamos a relação entre energia e momento $E = \sqrt{m^2 + p^2}$. Com isso, podemos então escrever $d\phi_2$ nesse caso como

$$d\phi_2 = \frac{1}{8\pi^2} d\Omega_2. \quad (\text{C.6})$$

Apêndice D

Integrais em d dimensões e a função Γ

A manipulação das integrais d -dimensionais possui alguns aspectos técnicos particulares já que, além de estarmos tratando de um espaço em que a métrica é diferente da usual, podemos ter um número de dimensões não inteiro.

Nesse apêndice iremos discutir a resolução das integrais em d dimensões que aparecerão nessa dissertação, bem como algumas propriedades da função Γ que estão presentes nas expressões analíticas dessas integrais d -dimensionais.

D.1 Rotação de Wick

Para resolver integrais em d dimensões nos deparamos com o problema de não estarmos trabalhando com um espaço euclidiano. No espaço de Minkowski estamos utilizando uma métrica onde $k \cdot k = k_0^2 - |\vec{k}|^2$, e portanto podemos escrever

$$\int d^d k \frac{1}{(k^2 - C)^n} = \int d^{d-1} k \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{1}{((k^0)^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\varepsilon)^n}. \quad (\text{D.1})$$

Para visualizar essa integral em k^0 de outra forma iremos olhar para essa variável no plano complexo e relacionar nossa integral de $-\infty$ a ∞ com a integral que contém k^0 imaginário variando entre $-i\infty$ e $i\infty$. Primeiro olhando para o denominador de (D.1) vemos que as singularidades se encontram em

$$k^0 = \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + C - i\varepsilon} \simeq \pm \sqrt{|\vec{k}|^2 + C} \left(1 - \frac{i\varepsilon}{|\vec{k}|^2 + C} \right), \quad (\text{D.2})$$

de modo que podemos escolher um caminho C' no plano complexo como representado na Fig. D.1 e, a partir do teorema da Integral de Cauchy, escrever

$$\begin{aligned} & \int_{C'} dk^0 \frac{1}{((k^0)^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\varepsilon)^n} = 0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{1}{((k^0)^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\varepsilon)^n} + \int_{i\infty}^{-i\infty} dk^0 \frac{1}{((k^0)^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\varepsilon)^n} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dk^0 \frac{1}{((k^0)^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\varepsilon)^n} = \int_{-i\infty}^{i\infty} dk^0 \frac{1}{((k^0)^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\varepsilon)^n}, \quad (\text{D.4})$$

Figura D.1: Caminho C' no plano complexo, onde $\times$ representam as singularidades da Eq. (D.2).

onde estamos considerando $|k^0| \rightarrow \infty$ nos arcos de C' , o que leva a integral sobre eles ser nula.

Sendo assim, do lado direito da Eq. (D.4) podemos fazer uma mudança de variáveis $k_E^0 = ik^0$ e substituir em (D.1) para escrever

$$\begin{aligned} \int d^d k \frac{1}{(k^2 - C)^n} &= i \int d^{d-1} k \int_{-\infty}^{\infty} dk_E^0 \frac{1}{(-(k_E^0)^2 - |\vec{k}|^2 - C + i\varepsilon)^n} \\ &= \frac{i}{(-1)^n} \int d^{d-1} k \int_{-\infty}^{\infty} dk_E^0 \frac{1}{(k_E^2 + C + i\varepsilon)^n} = \frac{i}{(-1)^n} \int d^d k_E \frac{1}{(k_E^2 + C)^n}, \end{aligned} \quad (D.5)$$

onde definimos $k_E = (k_E^0, \vec{k})$ que respeita na métrica euclidiana $k_E^2 = (k_E^0)^2 + \vec{k}^2 = -(k^0)^2 + \vec{k}^2 = -k^2$. Esse procedimento é chamado de rotação de Wick, a partir do qual podemos agora resolver essas integrais considerando a métrica euclidiana.

Para isso, iremos primeiro escrever

$$\int d^d k_E = \int |k_E|^{d-1} d|k_E| d^d \Omega_d, \quad (D.6)$$

com $|k_E| = \sqrt{(k_E^0)^2 + \vec{k}^2}$, de onde percebemos que temos uma parte angular e outra radial.

D.2 Parte Angular

Para obter a integração angular considere o resultado para uma dimensão da integração Gaussiana dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \pi^{1/2}, \quad (D.7)$$

que pode ser generalizado para o caso de d dimensões para

$$\int e^{-y^2} d^d y = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^d = \pi^{d/2}, \quad (D.8)$$

com y um vetor em d dimensões. Escrevendo essa relação como na Eq. (D.6) vem que

$$\begin{aligned} \int e^{-y^2} d^d y &= \int_0^\infty |y|^{d-1} e^{-|y|^2} d|y| \int d\Omega_d = \pi^{d/2} \\ &= \int_0^\infty z^{\frac{d-1}{2}} e^{-z} \frac{dz}{2z^{1/2}} \int d\Omega_d = \frac{1}{2} \int_0^\infty z^{\frac{d}{2}-1} e^{-z} dz \int d\Omega_d = \pi^{d/2}, \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

em que foi feita a substituição $z = y^2$. Olhando para a definição da função Γ na Eq. (2.26) podemos identificar a integral em z como $\Gamma(d/2)$, de onde vem que a integral angular em d dimensões é escrita como

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (\text{D.10})$$

D.3 Parte Radial

Olhando agora para a parte radial da expressão (D.5) podemos escrevê-la como

$$\int_0^\infty d|k_E| \frac{|k_E|^{d-1}}{(k_E^2 + C)^n} = \frac{C^{(\frac{d-1}{2})} C^{\frac{1}{2}}}{C^n} \int_0^\infty da \frac{a^{d-1}}{(a^2 + 1)^n} = C^{(\frac{d}{2}-n)} \int_0^\infty da \frac{a^{d-1}}{(a^2 + 1)^n}, \quad (\text{D.11})$$

em que foi feita a substituição $a = |k_E|/C^{\frac{1}{2}}$. Fazendo agora a substituição

$$y = \frac{a^2}{1+a^2} \Rightarrow dy = \left[\frac{(2a)(1+a^2) - a^2(2a)}{(1+a^2)^2} \right] da = \frac{2a}{(1+a^2)^2} da \Rightarrow da = \frac{(1+a^2)^2}{2a} dy,$$

e notando que podemos escrever

$$\begin{aligned} (1-y) &= \frac{1+a^2-a^2}{1+a^2} = \frac{1}{1+a^2} \Rightarrow (1+a^2) = (1-y)^{-1} \\ \text{e também} \quad a^2 &= y(1+a^2) = y(1-y)^{-1} \Rightarrow a = y^{\frac{1}{2}}(1-y)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

vem, relacionando os limites $a = 0 \rightarrow y = 0$ e $a = \infty \rightarrow y = 1$, que

$$\begin{aligned} C^{(\frac{d}{2}-n)} \int_0^1 da \frac{a^{d-1}}{(a^2+1)^n} &= \frac{C^{(\frac{d}{2}-n)}}{2} \int_0^1 \frac{y^{\frac{d-1}{2}} (1-y)^{-\frac{d-1}{2}}}{(1-y)^{-n}} \left((1-y)^{-\frac{3}{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy \right) \\ &= \frac{C^{(\frac{d}{2}-n)}}{2} \int_0^1 y^{\frac{d}{2}-1} (1-y)^{n-\frac{d}{2}-1} dy, \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

que pela propriedade da função beta $B(x, y)$

$$B(x, y) \equiv \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}, \quad (\text{D.13})$$

podemos escrever

$$\int_0^\infty d|k_E| \frac{|k_E|^{d-1}}{(k_E^2 + C)^n} = \frac{C^{(\frac{d}{2}-n)}}{2} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)}. \quad (\text{D.14})$$

Juntando todos os resultados, a partir de (D.5), (D.10) e (D.14), podemos então escrever a integral (D.1) em d dimensões como

$$\int d^d k \frac{1}{(k^2 - C)^n} = i\pi^{d/2} (-1)^n \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{C}\right)^{n-d/2}, \quad (\text{D.15})$$

que para $d = 4 - \epsilon$ se reduz a

$$\int d^d k \frac{1}{(k^2 - C)^n} = \frac{i\pi^2}{\pi^{\epsilon/2}} (-1)^n \frac{\Gamma(n - 2 + \epsilon/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{C}\right)^{n-2+\epsilon/2}. \quad (\text{D.16})$$

Vale destacar que esse resultado pode ser generalizado para o caso em que temos a integral do tipo

$$\int d^d k \frac{k^{2r}}{(k^2 - C)^n}, \quad (\text{D.17})$$

em que as modificações que temos que fazer são: $(-1)^n \rightarrow (-1)^{n-r}$ em (D.5); $|k_E|^{d-1} \rightarrow |k_E|^{d-1+2r}$ em (D.11) que leva a $C^{(\frac{d}{2}-n)} \rightarrow C^{(\frac{d}{2}-n+r)}$ e também $\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(n - \frac{d}{2}) \rightarrow \Gamma(\frac{d}{2} + r) \Gamma(n - \frac{d}{2} - r)$ em (D.14). Juntando tudo, a forma mais geral para essas integrais é

$$\int d^d k \frac{k^{2r}}{(k^2 - C)^n} = i\pi^{d/2} (-1)^{n-r} \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + r) \Gamma(n - \frac{d}{2} - r)}{\Gamma(n) \Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{1}{C}\right)^{n-d/2-r}. \quad (\text{D.18})$$

É importante comentar que a relação (D.4) se mantém também para esse caso [88].

D.4 Função Γ

Para o caso em que temos números naturais vale que

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad \text{com} \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\text{D.19})$$

o que nos leva a $\Gamma(n + 1) = n! = n(n - 1)! = n \Gamma(n)$ nesse caso. Entretanto, podemos generalizar essa relação para qualquer número real já que, a partir da definição de Γ na Eq. (2.26), temos

$$\Gamma(1 + z) = \int_0^\infty dt t^z e^{-t} = [z t^{z-1} e^{-t}]_0^\infty + z \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t} = z \Gamma(z), \quad (\text{D.20})$$

em que foi integrado por partes na segunda igualdade.

Como temos termos do tipo $\Gamma(m - 2 + \epsilon/2)$ na Eq. (D.16), é importante também entender como realizar a expansão em Taylor dessa função. O primeiro caso que iremos estudar é aquele com $m = 3$ em que

$$\Gamma(1 + \epsilon/2) = \Gamma(1) + \Gamma'(1) \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) = 1 - \gamma_E \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{D.21})$$

onde foi introduzida a constante de Euler-Mascheroni

$$\gamma_E = -\Gamma'(1) \simeq 0,577. \quad (\text{D.22})$$

Como os polos da função $\Gamma(z)$ se encontram em $z = 0, -1, -2, \dots$, no caso $m = 2$ esperamos que fique explícita a divergência no limite $\epsilon \rightarrow 0$, o que pode ser visto a partir de

$$\Gamma(\epsilon/2) = \frac{\Gamma(1 + \epsilon/2)}{\epsilon/2} = \frac{\left[1 - \gamma_E \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right]}{\epsilon/2} = \frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon). \quad (\text{D.23})$$

Aqui fica clara a forma como essas integrais são regularizadas em $d = 4 - \epsilon$ já que nesse regime conseguimos “quantificar” a divergência de uma função que explode quando $d = 4$.

Além disso, no caso em que $m = 1$ temos também

$$\begin{aligned} \Gamma(-1 + \epsilon/2) &= \frac{\Gamma(\epsilon/2)}{[\epsilon/2 - 1]} = \frac{\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)\right]}{[\epsilon/2 - 1]} \\ &= -\left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \cdot \left[1 + \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right] = -\frac{2}{\epsilon} - 1 + \gamma_E + \mathcal{O}(\epsilon), \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

em que novamente fica explícita a divergência já que a função está sendo expandida ao redor de um de seus polos.

Apêndice E

Bloco Diagonalização de Matrizes

Nesse apêndice iremos discutir como transformar matrizes que descrevem a massa de mais de uma geração de neutrinos em matrizes bloco diagonais. De forma geral, essas matrizes podem ser escritas como

$$M = \begin{pmatrix} M_L & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix}, \quad (\text{E.1})$$

onde M_L , M_D e M_R são matrizes quadradas.

Para representar a escala dessas matrizes iremos utilizar a notação $A \sim v_A$ para indicar que os elementos da matriz A são proporcionais a escala v_A . No caso em que temos duas matrizes A e B , com $A \sim v_A$ e $B \sim v_B$, iremos utilizar a notação $A \gg B$ para indicar $v_A \gg v_B$. Dessa forma, aqui assumiremos que $M_R \gg M_L$ e $M_R \gg M_D$.

Para bloco diagonalizar a matriz M iremos construir a matriz V da forma

$$V = \begin{pmatrix} C & N \\ -N^\dagger & D \end{pmatrix}, \quad (\text{E.2})$$

onde a matriz N depende de das componentes de M e as matrizes C e D são definidas como

$$C \equiv \sqrt{\mathbb{1} - NN^\dagger} = \mathbb{1} - \frac{1}{2}NN^\dagger - \frac{1}{8}NN^\dagger NN^\dagger - \dots, \quad (\text{E.3})$$

$$D \equiv \sqrt{\mathbb{1} - N^\dagger N} = \mathbb{1} - \frac{1}{2}N^\dagger N - \frac{1}{8}N^\dagger NN^\dagger N - \dots. \quad (\text{E.4})$$

Para que V bloco diagonalize M iremos considerar

$$M^d = V^T M V = \begin{pmatrix} C^T & -N^* \\ N^T & D^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_L & M_D^T \\ M_D & M_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & N \\ -N^\dagger & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_A & X^T \\ X & M_B \end{pmatrix}, \quad (\text{E.5})$$

onde, a partir da multiplicação das matrizes, temos

$$M_A = C^T M_L C - C^T M_D^T N^\dagger - N^* M_D C + N^* M_R N^\dagger, \quad (\text{E.6})$$

$$M_B = N^T M_L N + N^T M_D^T D + D^T M_D N + D^T M_R D, \quad (\text{E.7})$$

$$X = N^T M_L C - N^T M_D^T N^\dagger + D^T M_D C - D^T M_R N^\dagger. \quad (\text{E.8})$$

Para que a matriz seja bloco diagonal devemos ter $X = 0$, de forma que queremos encontrar para qual N essa condição é satisfeita. Para isso, iremos expandir a matriz N em potências de v_R^{-1} por meio de

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots, \quad (\text{E.9})$$

com $N_i \sim v_R^{-i}$. Com isso, podemos escrever as matrizes C e D em função de N_i como

$$\begin{aligned} C &= \mathbb{1} - \frac{1}{2}NN^\dagger - \frac{1}{8}NN^\dagger NN^\dagger - \dots \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1N_1^\dagger - \frac{1}{2}\left(N_1N_2^\dagger N_2N_1^\dagger\right) - \frac{1}{2}\left(N_2N_2^\dagger + N_1N_3^\dagger + N_3N_1^\dagger + \frac{1}{4}N_1N_1^\dagger N_1N_1^\dagger\right) - \dots \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

$$\begin{aligned} D &= \mathbb{1} - \frac{1}{2}N^\dagger N - \frac{1}{8}N^\dagger NN^\dagger N - \dots \\ &= \mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1^\dagger N_1 - \frac{1}{2}\left(N_1^\dagger N_2N_2^\dagger N_1\right) - \frac{1}{2}\left(N_2^\dagger N_2 + N_1^\dagger N_3 + N_3^\dagger N_1 + \frac{1}{4}N_1^\dagger N_1N_1^\dagger N_1\right) - \dots \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Sendo assim, podemos resolver $X = 0$ ordem a ordem de v_R^{-i} a partir da Eq. (E.8) já que

$$\begin{aligned} 0 = X &= (N_1 + N_2 + \dots)^T M_L \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1N_1^\dagger - \dots\right) - (N_1 + N_2 + \dots)^T M_D^T (N_1 + N_2 + \dots)^\dagger \\ &+ \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1^\dagger N_1 - \dots\right)^T M_D \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1N_1^\dagger - \dots\right) - \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1^\dagger N_1 - \dots\right)^T M_R (N_1 + N_2 + \dots)^\dagger \\ &= \left(-M_R N_1^\dagger + M_D\right) + \left(N_1^T M_L - M_R N_2^\dagger\right) + \mathcal{O}(v_R^{-3}), \end{aligned}$$

de onde vem que

$$N_1^\dagger = M_R^{-1} M_D, \quad (\text{E.12})$$

$$N_2^\dagger = (M_R^{-1})(M_R^{-1})^* M_D^* M_L. \quad (\text{E.13})$$

Aqui apresentamos as contribuições até ordem v_R^{-2} , mas os demais termos podem ser obtidos a partir da mesma análise [130]. Dessa forma, substituindo nas Eqs. (E.6) e (E.7) vem que

$$\begin{aligned} \bullet M_A &= \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1N_1^\dagger - \dots\right)^T M_L \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1N_1^\dagger - \dots\right) - \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1N_1^\dagger - \dots\right)^T M_D^T (N_1 + N_2 + \dots)^\dagger \\ &- (N_1 + N_2 + \dots)^* M_D \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2}N_1N_1^\dagger - \dots\right) + (N_1 + N_2 + \dots)^* M_R (N_1 + N_2 + \dots)^\dagger \\ &= M_L - M_D^T N_1^\dagger - N_1^* M_D + N_1^* M_R N_1^\dagger + \mathcal{O}(v_R^{-2}) \\ &= M_L - M_D^T M_R^{-1} M_D + N_1^* \left(M_R N_1^\dagger - M_D\right) + \mathcal{O}(v_R^{-2}) \\ &= M_L - M_D^T M_R^{-1} M_D + \mathcal{O}(v_R^{-2}) \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
M_B &= (N_1 + N_2 + \dots)^T M_L (N_1 + N_2 + \dots) + (N_1 + N_2 + \dots)^T M_D^T \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} N_1^\dagger N_1 - \dots \right) \\
&\quad + \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} N_1^\dagger N_1 - \dots \right)^T M_D (N_1 + N_2 + \dots) + \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} N_1^\dagger N_1 - \dots \right)^T M_R \left(\mathbb{1} - \frac{1}{2} N_1^\dagger N_1 - \dots \right) \\
&= M_R + N_1^T M_D^T + M_D N_1 + \mathcal{O}(v_R^{-2}) \\
&= M_R + (M_R^{-1})^* M_D^* M_D^T + M_D M_D^\dagger (M_R^{-1})^\dagger + \mathcal{O}(v_R^{-2}) ,
\end{aligned}$$

de forma que podemos escrever a matriz M^d bloco diagonal como

$$M^d = V^T M V \approx \begin{pmatrix} M_L - M_D^T M_R^{-1} M_D & 0 \\ 0 & M_R \end{pmatrix}. \quad (\text{E.14})$$

Bibliografia

- [1] A.M. Baldini et al. Search for the lepton flavour violating decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ with the full dataset of the MEG experiment. *Eur. Phys. J. C*, 76(8):434, 2016.
- [2] A.M. Baldini et al. The design of the MEG II experiment. *Eur. Phys. J. C*, 78(5):380, 2018.
- [3] R.Keith Ellis, Zoltan Kunszt, Kirill Melnikov, and Giulia Zanderighi. One-loop calculations in quantum field theory: from Feynman diagrams to unitarity cuts. *Phys. Rept.*, 518:141–250, 2012.
- [4] Walther Gerlach and Otto Stern. The Magnetic Moment of Silver Atoms. *Z. Phys.*, 9:353–355, 1922.
- [5] Friedrich Hund. History of quantum theory. 1980.
- [6] T. E. Phipps and J. B. Taylor. The magnetic moment of the hydrogen atom. *Phys. Rev.*, 29:309–320, Feb 1927.
- [7] W. Pauli. Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons. *Zeitschrift fur Physik*, 43(9-10):601–623, September 1927.
- [8] Dirac Paul Adrien Maurice. Quantum Theory of the Electron. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 117:610–624, Feb 1928.
- [9] Willis E. Lamb and Robert C. Retherford. Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method. *Phys. Rev.*, 72:241–243, 1947.
- [10] J. E. Nafe, E. B. Nelson, and I. I. Rabi. The Hyperfine Structure of Atomic Hydrogen and Deuterium. *Phys. Rev.*, 71:914–915, 1947.
- [11] G. Breit. Does the Electron Have an Intrinsic Magnetic Moment? *Phys. Rev.*, 72:984–984, 1947.
- [12] P. Kusch and H. M. Foley. The Magnetic Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, 74(3):250, 1948.
- [13] Julian Schwinger. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, Feb 1948.
- [14] Peter Franken and Sidney Liebes. Magnetic moment of the proton in bohr magnetons. *Phys. Rev.*, 104:1197–1198, Nov 1956.

- [15] Charles M. Sommerfield. Magnetic Dipole Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, 107:328–329, 1957.
- [16] A. Petermann. Fourth order magnetic moment of the electron. *Helv. Phys. Acta*, 30:407–408, 1957.
- [17] A. Rich and J. C. Wesley. The current status of the lepton g factors. *Rev. Mod. Phys.*, 44:250–283, 1972.
- [18] W. H. Louisell, R. W. Pidd, and H. R. Crane. An experimental measurement of the gyro-magnetic ratio of the free electron. *Phys. Rev.*, 94:7–16, Apr 1954.
- [19] D. Wineland, P. Ekstrom, and H. Dehmelt. Monoelectron oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 31:1279–1282, Nov 1973.
- [20] Hans Dehmelt. Continuous stern-gerlach effect: Principle and idealized apparatus. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 83(8):2291–2294, 1986.
- [21] P. B. Schwinberg, R. S. Van Dyck, and H. G. Dehmelt. New Comparison of the Positron and Electron G Factors. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1679–1682, 1981.
- [22] R. S. Van Dyck, P. B. Schwinberg, and H. G. Dehmelt. New High Precision Comparison of electron and Positron G Factors. *Phys. Rev. Lett.*, 59:26–29, 1987.
- [23] Brian C. Odom, D. Hanneke, B. D’Urso, and G. Gabrielse. New Measurement of the Electron Magnetic Moment Using a One-Electron Quantum Cyclotron. *Phys. Rev. Lett.*, 97:030801, 2006.
- [24] D. Hanneke, S. Fogwell, and G. Gabrielse. New Measurement of the Electron Magnetic Moment and the Fine Structure Constant. *Phys. Rev. Lett.*, 100:120801, 2008.
- [25] R. L. Garwin, L. M. Lederman, and Marcel Weinrich. Observations of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays: The Magnetic Moment of the Free Muon. *Phys. Rev.*, 105:1415–1417, 1957.
- [26] Georges Charpak, F. J. M. Farley, R. L. Garwin, T. Muller, J. C. Sens, V. L. Telegdi, and A. Zichichi. Measurement of the anomalous magnetic moment of the muon. *Phys. Rev. Lett.*, 6:128–132, 1961.
- [27] J. Bailey, W. Bartl, G. Von Bochmann, R. C. A. Brown, F. J. M. Farley, H. Joestlein, E. Picasso, and R. W. Williams. Precision measurement of the anomalous magnetic moment of the muon. *Phys. Lett. B*, 28:287–290, 1968.
- [28] G.W. Bennett et al. Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL. *Phys. Rev. D*, 73:072003, 2006.
- [29] Zhiqing Zhang. Muon $g-2$: A Mini review. In *42nd Rencontres de Moriond on Electroweak Interactions and Unified Theories*, pages 465–474, 1 2008.

- [30] Frederick Gray. Muon g-2 Experiment at Fermilab. In *12th Conference on the Intersections of Particle and Nuclear Physics*, 10 2015.
- [31] M. Abe et al. A New Approach for Measuring the Muon Anomalous Magnetic Moment and Electric Dipole Moment. *PTEP*, 2019(5):053C02, 2019.
- [32] Michel Davier, Andreas Hoecker, Bogdan Malaescu, and Zhiqing Zhang. Reevaluation of the Hadronic Contributions to the Muon g-2 and to $\alpha(M_Z)$. *Eur. Phys. J. C*, 71:1515, 2011. [Erratum: *Eur.Phys.J.C* 72, 1874 (2012)].
- [33] Kaoru Hagiwara, Ruofan Liao, Alan D. Martin, Daisuke Nomura, and Thomas Teubner. $(g - 2)_\mu$ and $\alpha(M_Z^2)$ re-evaluated using new precise data. *J. Phys. G*, 38:085003, 2011.
- [34] Lorenzo Calibbi and Giovanni Signorelli. Charged Lepton Flavour Violation: An Experimental and Theoretical Introduction. *Riv. Nuovo Cim.*, 41(2):71–174, 2018.
- [35] C. M. G. Lattes, H. Muirhead, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell. PROCESSES INVOLVING CHARGED MESONS. *Nature*, 159:694–697, 1947.
- [36] E. P. Hincks and B. Pontecorvo. Search for gamma-radiation in the 2.2-microsecond meson decay process. *Phys. Rev.*, 73:257–258, 1948.
- [37] Robert H. Bernstein and Peter S. Cooper. Charged Lepton Flavor Violation: An Experimenter’s Guide. *Phys. Rept.*, 532:27–64, 2013.
- [38] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar. Helicity of Neutrinos. *Phys. Rev.*, 109:1015–1017, 1958.
- [39] W. B. Herrmannsfeldt, R. L. Burman, P. Stähelin, J. S. Allen, and T. H. Braid. Determination of the gamow-teller beta-decay interaction from the decay of helium-6. *Phys. Rev. Lett.*, 1:61–63, Jul 1958.
- [40] R. P. Feynman and Murray Gell-Mann. Theory of Fermi interaction. *Phys. Rev.*, 109:193–198, 1958.
- [41] E. C. G. Sudarshan and R. e. Marshak. Chirality invariance and the universal Fermi interaction. *Phys. Rev.*, 109:1860–1860, 1958.
- [42] G. Feinberg. Decays of the mu Meson in the Intermediate-Meson Theory. *Phys. Rev.*, 110:1482–1483, 1958.
- [43] G. Danby, J. M. Gaillard, Konstantin A. Goulianos, L. M. Lederman, Nari B. Mistry, M. Schwartz, and J. Steinberger. Observation of High-Energy Neutrino Reactions and the Existence of Two Kinds of Neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 9:36–44, 1962.
- [44] Martin L. Perl et al. Evidence for Anomalous Lepton Production in $e^+ - e^-$ Annihilation. *Phys. Rev. Lett.*, 35:1489–1492, 1975.
- [45] C. Bouchiat, J. Iliopoulos, and P. Meyer. An Anomaly Free Version of Weinberg’s Model. *Phys. Lett. B*, 38:519–523, 1972.

- [46] B. Pontecorvo. Mesonium and anti-mesonium. *Sov. Phys. JETP*, 6:429, 1957.
- [47] B. Pontecorvo. Inverse beta processes and nonconservation of lepton charge. *Sov. Phys. JETP*, 7:172–173, 1958.
- [48] B. Pontecorvo. Neutrino Experiments and the Problem of Conservation of Leptonic Charge. *Sov. Phys. JETP*, 26:984–988, 1968.
- [49] Y. Fukuda et al. Evidence for oscillation of atmospheric neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1562–1567, 1998.
- [50] K. Kodama et al. Observation of tau neutrino interactions. *Phys. Lett. B*, 504:218–224, 2001.
- [51] S.T. Petcov. The Processes $\mu \rightarrow e + \gamma$, $\mu \rightarrow e + \bar{e}$, $\nu' \rightarrow \nu + \gamma$ in the Weinberg-Salam Model with Neutrino Mixing. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 25:340, 1977. [Erratum: *Sov.J.Nucl.Phys.* 25, 698 (1977), Erratum: *Yad.Fiz.* 25, 1336 (1977)].
- [52] Samoil M. Bilenky, S.T. Petcov, and B. Pontecorvo. Lepton Mixing, $\mu \rightarrow e + \gamma$ Decay and Neutrino Oscillations. *Phys. Lett. B*, 67:309, 1977.
- [53] G. Passarino and M.J.G. Veltman. One Loop Corrections for $e^+ e^-$ Annihilation Into $\mu^+ \mu^-$ in the Weinberg Model. *Nucl. Phys. B*, 160:151–207, 1979.
- [54] Klein, O. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. *Z. Physik*, 37:895–906, 1926.
- [55] Gordon, W. Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie. *Z. Physik*, 40:117–133, 1926.
- [56] Ramamurti Shankar. *Principles of quantum mechanics*. Plenum, New York, NY, 1980.
- [57] L. E. Kinsler and W. V. Houston. The value of $\frac{e}{m}$ from the zeeman effect. *Phys. Rev.*, 45:104–108, Jan 1934.
- [58] Tatsumi Aoyama, M. Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment — Contribution of Diagrams without Closed Lepton Loops. *Phys. Rev. D*, 91(3):033006, 2015. [Erratum: *Phys.Rev.D* 96, 019901 (2017)].
- [59] Tatsumi Aoyama, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Revised and Improved Value of the QED Tenth-Order Electron Anomalous Magnetic Moment. *Phys. Rev. D*, 97(3):036001, 2018.
- [60] Peter J. Mohr, David B. Newell, and Barry N. Taylor. CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants: 2014. *Rev. Mod. Phys.*, 88(3):035009, 2016.
- [61] Fred Jegerlehner. Variations on Photon Vacuum Polarization. *EPJ Web Conf.*, 218:01003, 2019.
- [62] Rym Bouchendira, Pierre Clade, Saida Guellati-Khelifa, Francois Nez, and Francois Biraben. New determination of the fine structure constant and test of the quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 106:080801, 2011.

- [63] Richard H. Parker, Chenghui Yu, Weicheng Zhong, Brian Estey, and Holger Müller. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. *Science*, 360:191, 2018.
- [64] R. Jackiw and Steven Weinberg. Weak interaction corrections to the muon magnetic moment and to muonic atom energy levels. *Phys. Rev. D*, 5:2396–2398, 1972.
- [65] I. Bars and M. Yoshimura. Muon magnetic moment in a finite theory of weak and electromagnetic interaction. *Phys. Rev. D*, 6:374–376, 1972.
- [66] K. Fujikawa, B.W. Lee, and A.I. Sanda. Generalized Renormalizable Gauge Formulation of Spontaneously Broken Gauge Theories. *Phys. Rev. D*, 6:2923–2943, 1972.
- [67] G. W. Bennett et al. Measurement of the negative muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, 92:161802, 2004.
- [68] J. Abdallah et al. Study of tau-pair production in photon-photon collisions at LEP and limits on the anomalous electromagnetic moments of the tau lepton. *Eur. Phys. J. C*, 35:159–170, 2004.
- [69] R. L. Garwin, D. P. Hutchinson, S. Penman, and G. Shapiro. Accurate Determination of the μ^+ Magnetic Moment. *Phys. Rev.*, 118:271–283, 1960.
- [70] G. Charpak, F. J. M. Farley, and R. L. Garwin. A New Measurement of the Anomalous Magnetic Moment of the Muon. *Phys. Lett.*, 1:16, 1962.
- [71] J. Bailey et al. New Measurement of $(G-2)$ of the Muon. *Phys. Lett. B*, 55:420–424, 1975.
- [72] J. Bailey et al. Final Report on the CERN Muon Storage Ring Including the Anomalous Magnetic Moment and the Electric Dipole Moment of the Muon, and a Direct Test of Relativistic Time Dilation. *Nucl. Phys. B*, 150:1–75, 1979.
- [73] H. N. Brown et al. Improved measurement of the positive muon anomalous magnetic moment. *Phys. Rev. D*, 62:091101, 2000.
- [74] H. N. Brown et al. Precise measurement of the positive muon anomalous magnetic moment. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2227–2231, 2001.
- [75] G. W. Bennett et al. Measurement of the positive muon anomalous magnetic moment to 0.7 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, 89:101804, 2002. [Erratum: *Phys.Rev.Lett.* 89, 129903 (2002)].
- [76] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 3 2014.
- [77] M. H. et al. Ahn. Measurement of neutrino oscillation by the k2k experiment. *Phys. Rev. D*, 74:072003, Oct 2006.
- [78] T. et al. Araki. Measurement of neutrino oscillation with kamland: Evidence of spectral distortion. *Phys. Rev. Lett.*, 94:081801, Mar 2005.

- [79] K. et al. Abe. Measurement of atmospheric neutrino flux consistent with tau neutrino appearance. *Phys. Rev. Lett.*, 97:171801, Oct 2006.
- [80] Michael E. Fisher and David S. Gaunt. Ising Model and Self-Avoiding Walks on Hypercubical Lattices and 'High-Density' Expansions. *Phys. Rev.*, 133:A224–A239, 1964.
- [81] Gerard 't Hooft and M.J.G. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nucl. Phys. B*, 44:189–213, 1972.
- [82] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi. Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter. *Nuovo Cim. B*, 12:20–26, 1972.
- [83] G.M. Cicuta and E. Montaldi. Analytic renormalization via continuous space dimension. *Lett. Nuovo Cim.*, 4:329–332, 1972.
- [84] J.F. Ashmore. A Method of Gauge Invariant Regularization. *Lett. Nuovo Cim.*, 4:289–290, 1972.
- [85] John C. Collins. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, The Renormalization Group, and the Operator Product Expansion*, volume 26 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [86] D.B. Melrose. Reduction of Feynman diagrams. *Nuovo Cim.*, 40:181–213, 1965.
- [87] W.L. van Neerven and J.A.M. Vermaseren. LARGE LOOP INTEGRALS. *Phys. Lett. B*, 137:241–244, 1984.
- [88] JC Romao. Modern techniques for one-loop calculations. 2020.
- [89] Wolfram Research, Inc. Mathematica, Version 11.3. Champaign, IL, 2018.
- [90] Vladyslav Shtabovenko, Rolf Mertig, and Frederik Orellana. FeynCalc 9.3: New features and improvements. *Comput. Phys. Commun.*, 256:107478, 2020.
- [91] Friedrich Jegerlehner. *The Anomalous Magnetic Moment of the Muon*, volume 274. Springer, Cham, 2017.
- [92] Hiren H. Patel. Package-X: A Mathematica package for the analytic calculation of one-loop integrals. *Comput. Phys. Commun.*, 197:276–290, 2015.
- [93] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. Neutrino Mass and Spontaneous Parity Non-conservation. *Phys. Rev. Lett.*, 44:912, 1980.
- [94] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanovic. Neutrino Masses and Mixings in Gauge Models with Spontaneous Parity Violation. *Phys. Rev. D*, 23:165, 1981.
- [95] G. Senjanovic and Rabindra N. Mohapatra. Exact Left-Right Symmetry and Spontaneous Violation of Parity. *Phys. Rev. D*, 12:1502, 1975.

- [96] Enrico Bertuzzo, Sudip Jana, Pedro A.N. Machado, and Renata Zukanovich Funchal. Neutrino Masses and Mixings Dynamically Generated by a Light Dark Sector. *Phys. Lett. B*, 791:210–214, 2019.
- [97] James D. Bjorken and Sidney D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. International Series In Pure and Applied Physics. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [98] C. Gnendiger, D. Stöckinger, and H. Stöckinger-Kim. The electroweak contributions to $(g-2)_\mu$ after the Higgs boson mass measurement. *Phys. Rev. D*, 88:053005, 2013.
- [99] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 98(3):030001, 2018.
- [100] Ivan Esteban, M.C. Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Thomas Schwetz, and Albert Zhou. The fate of hints: updated global analysis of three-flavor neutrino oscillations. *JHEP*, 09:178, 2020.
- [101] K. Hayasaka et al. New Search for $\tau \rightarrow \mu \gamma$ and $\tau \rightarrow e \gamma$ Decays at Belle. *Phys. Lett. B*, 666:16–22, 2008.
- [102] Bernard Aubert et al. Searches for Lepton Flavor Violation in the Decays $\tau^\pm \rightarrow e^\pm \gamma$ and $\tau^\pm \rightarrow \mu^\pm \gamma$. *Phys. Rev. Lett.*, 104:021802, 2010.
- [103] T. Abe et al. Belle II Technical Design Report. 11 2010.
- [104] D. Rodríguez Pérez. Prospects for τ Lepton Physics at Belle II. In *17th Conference on Flavor Physics and CP Violation*, 6 2019.
- [105] W. Altmannshofer et al. The Belle II Physics Book. *PTEP*, 2019(12):123C01, 2019. [Erratum: *PTEP* 2020, 029201 (2020)].
- [106] M. Magg and C. Wetterich. Neutrino Mass Problem and Gauge Hierarchy. *Phys. Lett. B*, 94:61–64, 1980.
- [107] R. N. Mohapatra and J. W. F. Valle. Neutrino Mass and Baryon Number Nonconservation in Superstring Models. *Phys. Rev. D*, 34:1642, 1986.
- [108] Ernest Ma. Pathways to naturally small neutrino masses. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1171–1174, 1998.
- [109] Ernest Ma and Utpal Sarkar. Neutrino masses and leptogenesis with heavy Higgs triplets. *Phys. Rev. Lett.*, 80:5716–5719, 1998.
- [110] N.G. Deshpande, J.F. Gunion, Boris Kayser, and Fredrick I. Olness. Left-right symmetric electroweak models with triplet Higgs. *Phys. Rev. D*, 44:837–858, 1991.
- [111] Alessio Maiezza, Goran Senjanović, and Juan Carlos Vasquez. Higgs sector of the minimal left-right symmetric theory. *Phys. Rev. D*, 95(9):095004, 2017.
- [112] P. S. Bhupal Dev, Rabindra N. Mohapatra, Werner Rodejohann, and Xun-Jie Xu. Vacuum structure of the left-right symmetric model. *JHEP*, 02:154, 2019.

- [113] Morad Aaboud et al. Search for heavy Majorana or Dirac neutrinos and right-handed W gauge bosons in final states with two charged leptons and two jets at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *JHEP*, 01:016, 2019.
- [114] Manfred Lindner, Farinaldo S. Queiroz, and Werner Rodejohann. Dilepton bounds on left–right symmetry at the LHC run II and neutrinoless double beta decay. *Phys. Lett. B*, 762:190–195, 2016.
- [115] Vladimir Tello, Miha Nemevsek, Fabrizio Nesti, Goran Senjanovic, and Francesco Vissani. Left-Right Symmetry: from LHC to Neutrinoless Double Beta Decay. *Phys. Rev. Lett.*, 106:151801, 2011.
- [116] Alessio Maiezza, Miha Nemevsek, Fabrizio Nesti, and Goran Senjanovic. Left-Right Symmetry at LHC. *Phys. Rev. D*, 82:055022, 2010.
- [117] P. Duka, J. Gluza, and M. Zralek. Quantization and renormalization of the manifest left-right symmetric model of electroweak interactions. *Annals Phys.*, 280:336–408, 2000.
- [118] Albert M Sirunyan et al. Search for a W' boson decaying to a τ lepton and a neutrino in proton-proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *Phys. Lett. B*, 792:107–131, 2019.
- [119] J.F. Gunion, J. Grifols, A. Mendez, Boris Kayser, and Fredrick I. Olness. Higgs Bosons in Left-Right Symmetric Models. *Phys. Rev. D*, 40:1546, 1989.
- [120] Yue Zhang, Haipeng An, Xiangdong Ji, and Rabindra N. Mohapatra. General CP Violation in Minimal Left-Right Symmetric Model and Constraints on the Right-Handed Scale. *Nucl. Phys. B*, 802:247–279, 2008.
- [121] Georges Aad et al. Search for heavy neutral Higgs bosons produced in association with b -quarks and decaying into b -quarks at $\sqrt{s} = 13$ TeV with the ATLAS detector. *Phys. Rev. D*, 102(3):032004, 2020.
- [122] Serguei Chatrchyan et al. Search for a light charged Higgs boson in top quark decays in pp collisions at $\sqrt{s} = 7$ TeV. *JHEP*, 07:143, 2012.
- [123] Morad Aaboud et al. Search for doubly charged Higgs boson production in multi-lepton final states with the ATLAS detector using proton–proton collisions at $\sqrt{s} = 13$ TeV. *Eur. Phys. J. C*, 78(3):199, 2018.
- [124] Shouvik Roy Choudhury and Sandhya Choubey. Updated Bounds on Sum of Neutrino Masses in Various Cosmological Scenarios. *JCAP*, 09:017, 2018.
- [125] Wilhelm H. Bertl et al. A Search for muon to electron conversion in muonic gold. *Eur. Phys. J. C*, 47:337–346, 2006.
- [126] U. Bellgardt et al. Search for the Decay $\mu^+ \rightarrow e^+e^+e^-$. *Nucl. Phys. B*, 299:1–6, 1988.
- [127] R. Abramishvili et al. COMET Phase-I Technical Design Report. *PTEP*, 2020(3):033C01, 2020.

- [128] L. Bartoszek et al. Mu2e Technical Design Report. 10 2014.
- [129] A. Bravar. The Mu3e Experiment. *Nucl. Part. Phys. Proc.*, 287-288:169–172, 2017.
- [130] W. Grimus and L. Lavoura. The Seesaw mechanism at arbitrary order: Disentangling the small scale from the large scale. *JHEP*, 11:042, 2000.