

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Cosmologia no cone de luz: o espectro angular no espaço de redshift, o espectro de potência no espaço de Fourier e mocks do cone de luz

João Vitor Dinarte Ferri

Orientador: Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo

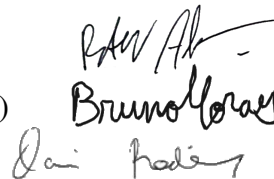
Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para
a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo (IFUSP)

Prof. Dr. Bruno Azevedo Lemos Moraes (UFRJ)

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues - (UFES)



Handwritten signatures of the examiners: Luis Raul Weber Abramo, Bruno Azevedo Lemos Moraes, and Davi Cabral Rodrigues.

São Paulo
2022

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ferri, João Vitor Dinarte

Cosmologia no cone de luz: o espectro angular no espaço de redshift, o espectro de potência no espaço de Fourier e mocks do cone de luz São Paulo, 2022.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo
Área de Concentração: Cosmologia

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Galáxias; 3. Estrutura do Universo;.

USP/IF/SBI-021/2022

University of São Paulo
Physics Institute

Light-cone cosmology: the redshift-space angular power spectrum, the Fourier power spectrum, and redshift-space lightcone mocks

João Vitor Dinarte Ferri

Supervisor: Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo

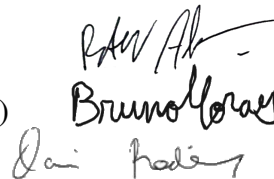
Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo (IFUSP)

Prof. Dr. Bruno Azevedo Lemos Moraes (UFRJ)

Prof. Dr. Davi Cabral Rodrigues - (UFES)



Handwritten signatures of the examining committee members: Luis Raul Weber Abramo, Bruno Azevedo Lemos Moraes, and Davi Cabral Rodrigues.

São Paulo
2022

Agradecimentos

Gostaria de agradecer algumas pessoas.

Ao meu orientador, Dr. Raul Abramo, e ao meu amigo e colega de mestrado Ian Tashiro, pelas conversas, sugestões, ensinamentos, etc.

Aos meus pais, por todo o apoio e paciência. Sou muito abençoado por ter vocês.

Aos meus amigos: Clarissa, Marcos, Gabriel, Dr. Alexsandro, entre tantos outros. Obrigado pelas risadas e por manter minha sanidade em dia.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil.

Resumo

Até poucos anos atrás, as ferramentas observacionais tradicionalmente utilizadas para restringir parâmetros cosmológicos se restringiam à função de correlação no espaço 3D ou, equivalentemente, o espectro no espaço de Fourier. Um grande esforço feito nos últimos anos permitiu que pudéssemos extrair uma grande quantidade de informações cosmológicas utilizando essas estatísticas, porém uma das razões por trás desse sucesso se deve ao fato de que os levantamentos de galáxias compreendiam áreas do céu relativamente pequenas e/ou volumes limitados. Com o advento de levantamentos cada vez mais profundos e volumosos, essa aproximação deixa de ser ideal, pois não observamos os objetos astrofísicos num volume em um instante fixo, mas sim no nosso *cone de luz passado*. Isso significa que devemos progressivamente adotar um novo maquinário para análise dos dados de levantamentos de galáxias. A maneira mais direta de decompor um campo de natureza esférica, como as estruturas observadas no céu, se dá através dos esféricos harmônicos. Juntamente com eles surge o desafio de contabilizar outros efeitos que a luz sofre até chegar até nós, sendo que os mais importantes deles em largas escalas são as *distorções do espaço de redshifts*. Entretanto, se em levantamentos em áreas pequenas tínhamos a *fórmula de Kaiser* para contabilizar essas distorções, esta deixa de ser válida para levantamentos que compreendem áreas grandes do céu, nos quais não podemos fazer a aproximação de céu plano. Este projeto tem como objetivo mostrar como vamos do tratamento Euclidiano 3D, junto com o espectro de potência da matéria $P(\vec{k})$, para um tratamento 3D esférico através do Espectro de Potência Angular $C_\ell(r, r')$, aproveitando boa parte do maquinário desenvolvido no contexto do espectro de Fourier, mas permitindo uma descrição completa das distorções de redshifts que seja válida no céu inteiro. Ainda mostramos como é possível implementar as relações encontradas em simulações simplificadas (*mocks*) do céu inteiro, através do formalismo de *teoria de perturbação Lagrangiana*.

Palavras-chave: Estrutura em Larga Escala; Coordenadas Esféricas; Cone de Luz; Distorções do Espaço de Redshift; Simulações Mock.

Abstract

Until a few years ago, the observational tools traditionally used to constrain cosmological parameters have been restricted to the correlation function in 3D space or, equivalently, the power spectrum in Fourier Space. A significant effort was made in order to allow us to extract lots of information using these tools, but one of the reasons of their success was the small areas/limited volumes of the galaxy surveys. With the advent of increasingly deep and voluminous surveys, this treatment is no longer ideal, as we do not see objects in a volume at any given constant time, but over the *past light-cone*. This means that we need to progressively adopt a new data analysis machinery. The simplest way to decompose a field of spherical nature such as the structures we observe in galaxy surveys is provided by the spherical harmonics. Along with this treatment comes the challenge of accounting for other effects that influence the signals from the tracers of large-scale structure as we observe them, the most relevant of them on large scales being the *redshift space distortions*. Although for small survey areas we are able to employ the approximation known as the *Kaiser Formula*, this is no longer valid for a large-area or a full-sky survey. This project aims at showing how to make the transition from a 3D Euclidean treatment, which is more naturally described in term of the matter power spectrum $P(\vec{k})$, to a 3D spherical treatment that employs the angular power spectrum $C_\ell(r, r')$. We will take advantage of much of the machinery developed in the context of the Fourier power spectrum, but still retaining the ability to describe redshift-space distortions in a full-sky prescription. We also show how to implement the obtained relations in simplified simulations (*mocks*) of the full-sky, through the formalism of *Lagrangian Perturbation Theory*.

Keywords: Large-Scale Structure; Spherical Coordinates; Light-Cone; Redshift Space Distortions; Mock Simulations.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	O Modelo Λ CDM	2
1.2	Formação de Estruturas em Larga Escala	5
1.3	Levantamentos de Galáxias - Investigando as Pegadas da História Cósmica	11
1.4	Organização do projeto	20
2	Distorções do Espaço de Redshifts	22
2.1	Estimando velocidades peculiares	25
2.2	Efeito das Distorções de Redshift no Contraste de Densidade	26
3	Cosmologia em Coordenadas Esféricas	29
3.1	Noções gerais	29
3.2	Distorções de Redshift no Contexto Harmônico	33
4	A Teoria de Perturbação Lagrangiana	36
4.1	Noções Gerais	36
4.2	2LPT e Cones de Luz no Espaço de Redshift	39
5	Simulações ‘mock’ em grande escala	42
5.1	Princípios Básicos em um Toy Model	42
5.2	Snapshots Cosmológicos	56
6	Próximos Passos e Conclusões	62
	Apêndices	64
A	Variância Cósmica	64
B	Relacionando $P(k)$ e C_ℓ	66
B.1	No espaço real	66
B.2	No espaço de Redshift	67

C Relacionando ${}^sC_\ell$ e ${}^rC_\ell$	70
D Estatística Poissoniana	76
E Snapshots Campo de Densidade em Python	78
Apêndice de Figuras	101

1 Introdução

O Universo, desde os tempos primordiais, é alvo de curiosidade e admiração pelos seres humanos. Desde o século passado, esta curiosidade tornou-se um estudo detalhado e um grande esforço foi feito para descrever o Universo por meios matemáticos. Com a descoberta da Radiação Cósmica de Fundo (RCF) por Penzias & Wilson em 1964, os cosmólogos vêm coletando uma série de peças do quebra-cabeça a fim de compreender toda a história cósmica. A primeira peça pode ser considerada a própria RCF, que é basicamente uma ‘foto’ do Universo de aproximadamente 4×10^5 anos após o início do que chamamos de história cósmica. A confirmação definitiva da importância dessa peça só veio muito tempo após sua descoberta, por meio dos satélites COBE [1] e depois pelo WMAP [2] – veja a figura [1].

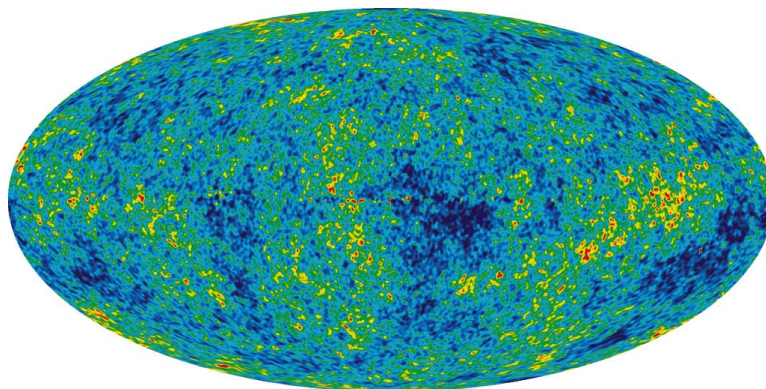


Figura 1: Mapa em projeção Mollweide de 5 anos de coleta de dados pelo Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). Créditos: NASA / WMAP Science Team [3]

Se a primeira peça na escala de tempo cósmica vem da RCF, podemos dizer que a segunda peça do quebra-cabeça se deve a Hubble [4, 5], que descobriu um curioso padrão de movimento presente em galáxias (que até então acreditava serem nebulosas presentes em nossa galáxia): juntando-se a Teoria de Relatividade de Einstein com as implicações mostradas por de Sitter [6], juntamente com as ideias já presentes de um Universo em expansão de Lemaître [7], Hubble mostrou que as galáxias apresentavam uma expansão radial com velocidade v , proporcional à sua distância radial D , dada pela famosa *Lei de Hubble*:

$$v = H_0 D \quad (1.1)$$

A terceira peça essencial do quebra-cabeça foi descoberta no fim do século passado. Medidas de Supernovas lideradas por Riess [8], Perlmutter e Schmidt [9, 10] nos revelaram uma característica ainda mais peculiar da dinâmica do Universo: este se expande de forma *acelerada*. Para juntar todas estas peças em uma prescrição consistente para

a evolução do Universo, se fez necessária a criação de um novo modelo cosmológico, realizando-se uma modificação na teoria da Relatividade de Einstein. Este popular modelo é a base da cosmologia moderna, e é denominado de *modelo Λ CDM*.

1.1 O Modelo Λ CDM

Um modelo que visa explicar simultaneamente a RCF e o comportamento de expansão acelerada do Universo pode ser obtida através da combinação de (além de matéria bariônica, radiação e neutrinos) duas componentes que até então não observamos diretamente: a *matéria escura* e *energia escura*. De forma esquematizada, podemos chegar ao mapa de temperatura dos fótons apresentada na figura [1](#) através dos seguintes passos:

Primeiro, precisamos definir a métrica do nosso Universo: supondo um Universo em expansão, podemos utilizar a métrica de Friedman-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), na qual temos nossos eventos expandidos ao longo do tempo por um *fator de escala* $a(\tau)$:

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + dx^i dx_i] \quad (1.2)$$

Esta métrica, entretanto, é válida para a média, ou *background* do Universo. Se quisermos entender a origem das anisotropias presentes na figura [1](#), precisamos adicionar a esta métrica *perturbações*, que nada mais são do que consequências da *flutuação* de matéria no Universo, que curva o espaço-tempo. Vários *gauges* (calibres) podem ser escolhidos para representar nossas perturbações, mas historicamente um dos mais escolhidos para algoritmos é o *gauge síncrono* (veja Lifshitz 1946 [\[11\]](#)), no qual não temos perturbações nos elementos de tempo conforme ($d\tau$):

$$ds^2 = a^2(\tau) [-d\tau^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}) dx^i dx^j] \quad (1.3)$$

Com a métrica (em outras palavras, o tensor da métrica $g_{\mu\nu}$ que rege a distorção no espaço-tempo $[\tau, x^i]$) em mãos, temos que entender como estas distorções $h_{i,j}$ variam ao longo do tempo. É nesta hora que as *Equações de Einstein* são cruciais. Juntando-se o *tensor de Einstein* $G_{\mu\nu}$ (que consiste essencialmente de uma combinação de contrações do tensor $g_{\mu\nu}$) e o *tensor energia-momento* $T_{\mu\nu}$, estas equações são sintetizadas por

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (1.4)$$

onde, para explicarmos a expansão acelerada do Universo, colocamos *à mão* um termo constante Λ , onde consideramos que o menor estado energético da Lagrangiana do poten-

cial gravitacional é não nulo. Isso geralmente é referido como uma *energia de vácuo* ou *constante cosmológica*, que é a forma mais elementar de energia escura (veja Zel'Dovich 1968 [12], por exemplo).

De forma sumarizada, as equações de Einstein fornecem soluções para a evolução do *fundo* do Universo, dadas pelas *equações de Friedmann*:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3} a^2 \bar{\rho} - K \\ \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) &= -\frac{4\pi G}{3} a^2 (\bar{\rho} + 3\bar{P}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

onde $\dot{[]} \equiv \partial[]/\partial\tau$ e $\bar{\rho}$ é o conteúdo energético do Universo. De maneira esquematizada, podemos reescrever a primeira expressão da Eq. (1.5) (para um Universo 'plano', com curvatura $K = 0$) como:

$$H(a) = \dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_m a^{-3} + \Omega_{rad} a^{-4} + \Omega_\Lambda}, \quad (1.6)$$

onde $H(a)$, denominado *Parâmetro de Hubble*, é a taxa com que o Universo se expande através do tempo (aqui representado pelo *fator de expansão* $a(\tau)$ da métrica FLRW), e sintetiza a ideia do modelo Λ CDM. As constantes Ω são as frações de contribuição energética de cada tipo de partícula no Universo atual, também denominadas de *densidade de relíquia*. A figura 2 mostra as estimativas atuais para cada densidade de relíquia, de forma a explicar a expansão acelerada observada por Riess, Perlmutter e Schmidt.

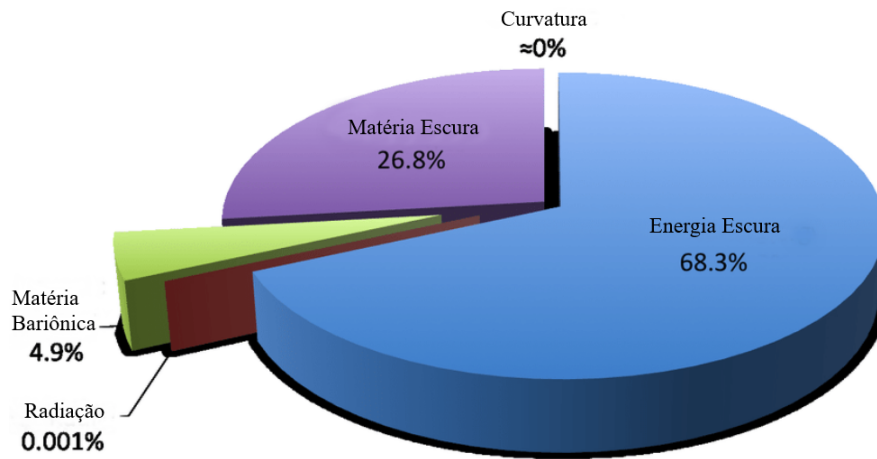


Figura 2: Modelo Λ CDM: a figura mostra uma estimativa atual para a densidade de relíquia de cada tipo de partícula do modelo. Comparando-se com a expressão da Eq. (1.6), temos que Matéria Escura + Matéria Bariônica $\equiv \Omega_m$, Radiação $\equiv \Omega_{rad}$ e Energia Escura $\equiv \Omega_\Lambda$.

Com o problema da expansão acelerada resolvido, precisamos nos certificar de que esta descrição para a composição energética do Universo é consistente com as anisotropias observadas da RCF. Para isso, precisamos também resolver a evolução das perturbações da métrica. Este cálculo é grandemente simplificado se trabalharmos as perturbações h_{ij} no espaço de Fourier (o que é possível pois estamos trabalhando em uma métrica *plana*; veja [13] por exemplo): decompondo h_{ij} em termos de dois novos campos $h(\vec{k}, \tau)$ e $\eta(\vec{k}, \tau)$,

$$h_{ij}(\vec{x}, \tau) = \int d^3k e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \left\{ \hat{k}_i \hat{k}_j h(\vec{k}, \tau) + (\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) 6\eta(\vec{k}, \tau) \right\} \quad (1.7)$$

As equações de Einstein fornecerão

$$\begin{aligned} k^2 \eta - \frac{1}{2} \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} &= 4\pi G a^2 \delta T^0_0 \\ k^2 \dot{\eta} &= 4\pi G a^2 i k^j \delta T^0_j \\ \ddot{h} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \dot{h} - 2k^2 \eta &= -8\pi G a^2 \delta T^i_i \\ \ddot{h} + 6\ddot{\eta} + 2 \frac{\dot{a}}{a} (\dot{h} + 6\dot{\eta}) - 2k^2 \eta &= 24\pi G a^2 (\hat{k}_i \hat{k}_j - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \Sigma^i_j \end{aligned} \quad (1.8)$$

Na qual as flutuações no tensor energia-momento (em outras palavras, as flutuações na densidade de matéria escura e matéria bariônica) são dadas pelas *equações de fluido*, que nada mais são do que a imposição da conservação do tensor energia-momento:

$$\partial_\mu \delta T^\mu_\nu = 0 \quad (1.9)$$

Finalmente, as expressões das Eqs. (1.5)-(1.9) são utilizadas nas equações de Boltzmann para determinarmos a evolução da distribuição do espaço de fase f dos fótons e neutrinos,

$$\frac{Df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{dx^i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{dq}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial q} + \frac{dn_i}{d\tau} \frac{\partial f}{\partial n_i} = \left(\frac{\partial f}{\partial \tau} \right)_C, \quad (1.10)$$

onde o termo à direita é denominado *termo de colisão*, e contabiliza todas as diferentes colisões dos fótons/neutrinos com diferentes partículas (veja Wayne Hu [14], por exemplo). As variáveis q e n_i são respectivamente a magnitude do momento das partículas e sua direção.

Resolver a equação (1.10) no espaço de Fourier pode nos fornecer a distribuição de flutuações de temperatura dos fótons, que é de certa forma o que observamos na figura 1.

A explicação qualitativa para a RCF é a de que nesta época, a temperatura do Universo decaiu para aproximadamente $3000 K$. Isto permitiu com que elétrons e prótons formassem átomos de hidrogênio neutro. Com o rápido decaimento de elétrons livres no meio cósmico, os fótons foram capazes de mover-se livremente pelo Universo. Devido à expansão, a temperatura destes fótons caiu para $3 K$, pois seus comprimentos de onda mudaram do visível para o micro-ondas (o tempo cósmico em que a RCF ocorreu equivale a um redshift $z \sim 1000$, portanto a ‘temperatura’ foi de $3000 \rightarrow 3000/z = 3 K$). Uma descrição detalhada da implementação destas equações foi realizada por Ma & Bertschinger (1995) [15].

As mesmas equações também fornecem as evoluções para as flutuações de matéria, seja ela bariônica ou matéria escura. A maneira exata de como analisamos nossas observações (e mais importante, *o que observamos*) de forma a realizar um paralelo com estas teorias é o assunto da seção a seguir.

1.2 Formação de Estruturas em Larga Escala

Do ponto de vista do modelo Λ CDM, as equações obtidas nos fornecem expressões para a evolução de *flutuações* $\delta\rho$ na densidade de matéria (e radiação) média do Universo. Já do ponto de vista observacional, não observamos no céu um campo contínuo de matéria. Ainda mais, não existe uma maneira de medir com precisão a massa de cada objeto astronômico separadamente. O que *podemos* fazer, entretanto, é simplesmente *contar* o número destes objetos no céu, e separá-los em diferentes *classes* que possuem características em comum. Cada conjunto distinto de objetos é chamado de *traçador* da matéria, e a partir destes conjuntos criamos um campo discreto $N_t(\vec{r})$ de contagem de traçadores em subdivisões de nossa observação (veja a figura 3).

A partir do campo $N_t(\vec{r})$, podemos criar um campo de *contraste* de densidade $\delta^t(\vec{r})$, que é como a porcentagem em que certa região do céu desvia da densidade média da observação:

$$\delta^t(\vec{r}) = \frac{N^t(\vec{r}) - \bar{N}^t}{\bar{N}^t} , \quad (1.11)$$

onde \bar{N}^t é a contagem média de traçadores por subdivisão (ou *célula*) da observação. Do ponto de vista da teoria, temos que a densidade de matéria $\rho(\vec{r})$ é dada por

$$\rho(\vec{r}) = \bar{\rho} (1 + \delta\rho(\vec{r})) , \quad (1.12)$$

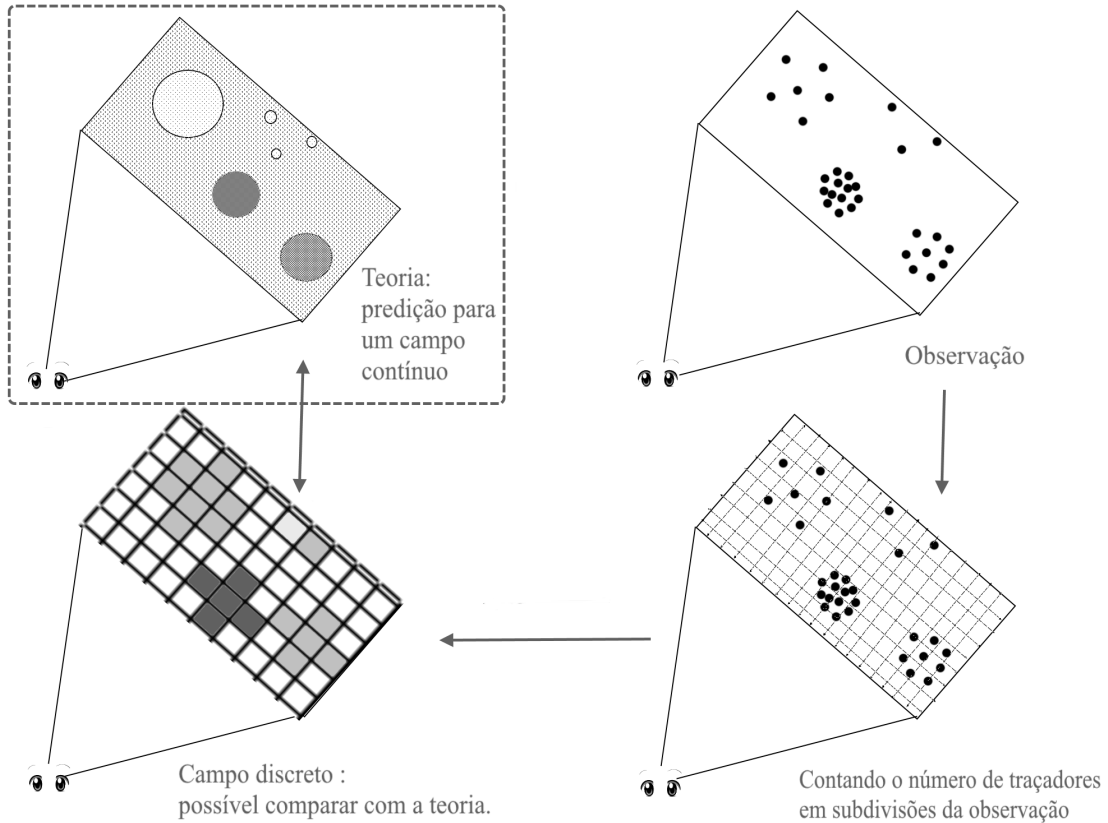


Figura 3: Diagrama para o procedimento de comparação entre teoria e observação.

de forma que temos também a contraparte teórica de $\delta^t(\vec{r})$, dada por

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \quad (1.13)$$

Numa aproximação linear ($\delta \ll 1$), a evolução temporal do contraste de densidade da matéria é dada por

$$\delta(\vec{r}, t) = \delta(\vec{r}, t_0) \frac{D(t)}{D(t_0)} \quad (1.14)$$

onde a *função de crescimento* $D(t)$ é uma função do fator de escala $a(t)$ (t aqui é o tempo físico). Por exemplo, num Universo dominado por matéria,

$$D(t) \propto a(t) \propto t^{2/3}, \quad (1.15)$$

onde a última relação pode ser facilmente deduzida através da Eq. (1.6).

Apesar de δ e δ^t não serem exatamente a mesma coisa, é claro que os traçadores possuem uma relação *enviesada* com a matéria: é de se esperar que onde haja mais traçadores, haja mais matéria. Daí vem o nome *traçador* da matéria - estes objetos possuem, indivi-

dualmente, campos $\delta^t(\vec{r})$ que *traçam* o campo $\delta(\vec{r})$ da matéria. De certa forma, podemos esperar que a relação entre δ^t e δ se dê através de uma expansão polinomial:

$$\delta^t(\vec{r}) = b_{t,1} \delta(\vec{r}) + \frac{b_{t,2}}{2!} \delta^2(\vec{r}) + \frac{b_{t,3}}{3!} \delta^3(\vec{r}) + \dots \quad (1.16)$$

Na aproximação linear ($\delta \ll 1$), fica claro então que podemos considerar

$$\delta^t(\vec{r}) \approx b_t \delta(\vec{r}) \quad (1.17)$$

onde b_t é o *viés* (ou *bias*) do traçador, função que faz a ponte entre o campo de contraste da matéria e do traçador. O bias pode ser uma função de várias características do traçador (como massa, *spin*, idade, etc.), e por si só é um objeto de grande estudo por parte dos cosmólogos.

Quando compararmos os campos teórico e observado, é claro que não observaremos um campo de contraste de densidade de traçador *idêntico* ao contraste teórico da matéria, e vice-versa. O que esperamos encontrar, entretanto, são flutuações na densidade de amplitude e escalas similares. A forma com que quantificamos a distribuição de matéria se dá, entre outras, por dois objetos: a função de correlação de dois pontos (2PCF) e seu correspondente no espaço de Fourier, o qual veremos em detalhe em seções adiante.

A função de correlação de dois pontos $\xi(r)$ é, de forma simples, a contagem média de traçadores afastados por uma distância r . No limite de campo contínuo de matéria, essa função pode ser definida através de

$$\xi(r_{ij}) = \langle \delta(\vec{r}_i) \delta(\vec{r}_j) \rangle, \quad (1.18)$$

onde $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ representa a distância entre os dois traçadores i e j . Do ponto de vista prático, entretanto, esta expressão não é muito confiável. Especialmente em largas escalas, onde naturalmente fica cada vez mais difícil de encontrar pares de traçadores separados por grandes distâncias - problema este denominado de '*variância cósmica*'.

Uma primeira tentativa em realizar uma estimativa para esta função foi feita por Davis & Peebles (1983) [16]:

$$1 + \xi(r) = \frac{n_R}{n} \frac{DD(r)}{DR(r)}, \quad (1.19)$$

onde n_R é a densidade numérica de traçadores, se os tivéssemos aleatoriamente distribuídos pelo volume da observação, enquanto que n é a densidade numérica propriamente medida destes traçadores. $DD(r)$ é a contagem de pares de traçadores (observados + observados), enquanto que $DR(r)$ é a contagem de pares (aleatórios + observados).

Já Hamilton [17] mostrou que a Eq. (1.18) subestima a variância cósmica desta função em grandes escalas, de forma que um estimador mais apropriado seria

$$\xi(r) + 1 = \frac{DD(r) RR(r)}{[DR(r)]^2} \quad (1.20)$$

Landy & Szalay (1993) [18] aperfeiçoaram este estimador, adicionando-se correções de borda - quando as distâncias entre os traçadores se tornam comparáveis à escala da observação (veja [19], por exemplo):

$$\xi(r) = \left(\frac{n_R}{n}\right)^2 \frac{DD(r)}{RR(r)} - 2 \frac{n_R}{n} \frac{DR(r)}{RR(r)} + 1 \quad (1.21)$$

As coisas ficam mais interessantes quando consideramos mais de um tipo de traçador em nosso volume. Através de um método de previsão de poder de restrição conhecido por *Matriz de Informação de Fisher* (White et al. 2009 [20], Abramo 2012 [21], Abramo & Leonard (2013) [22]) mostram que em um levantamento de galáxias com mais de um tipo de traçador, a taxa entre duas (ou mais) funções de correlação de traçadores no espaço de Fourier fornece um objeto que reduz significativamente as incertezas geradas pela variância cósmica, à medida em que se aumenta a densidade de traçadores observados.

Por outro lado, podemos trabalhar com a transformada de Fourier do campo de contraste de densidade, $\tilde{\delta}^t(\vec{k}, z)$. Assim, ao invés de tratamos a estatística no espaço real (através da função de correlação de δ), tratamos-a no espaço de Fourier através da função de correlação dos modos de Fourier $\tilde{\delta}$. No limite de um campo contínuo da matéria, esta correlação é dada pelo *espectro de potência da matéria* $P(\vec{k})$:

$$\langle \tilde{\delta}(\vec{k}, z) \tilde{\delta}^*(\vec{k}', z) \rangle = (2\pi)^3 \delta_D(\vec{k} - \vec{k}') P(\vec{k}, z) , \quad (1.22)$$

onde δ_D representa uma função *delta de Dirac*. Aqui, mostramos explicitamente que existe uma dependência no redshift medido do objeto. A relação entre função de correlação e espectro de potência da matéria é dada por

$$\xi(r_{ij}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} P(\vec{k}, z) e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}_i - \vec{r}_j)} . \quad (1.23)$$

Como visto na seção anterior, a maior parte das equações essenciais são resolvidas no espaço de Fourier. De certa forma, podemos dizer que a informação sobre o modelo cosmológico está sintetizada no espectro de potência da matéria, e é com respeito à esta função que geralmente comparamos nossos resultados (veja a figura 4).

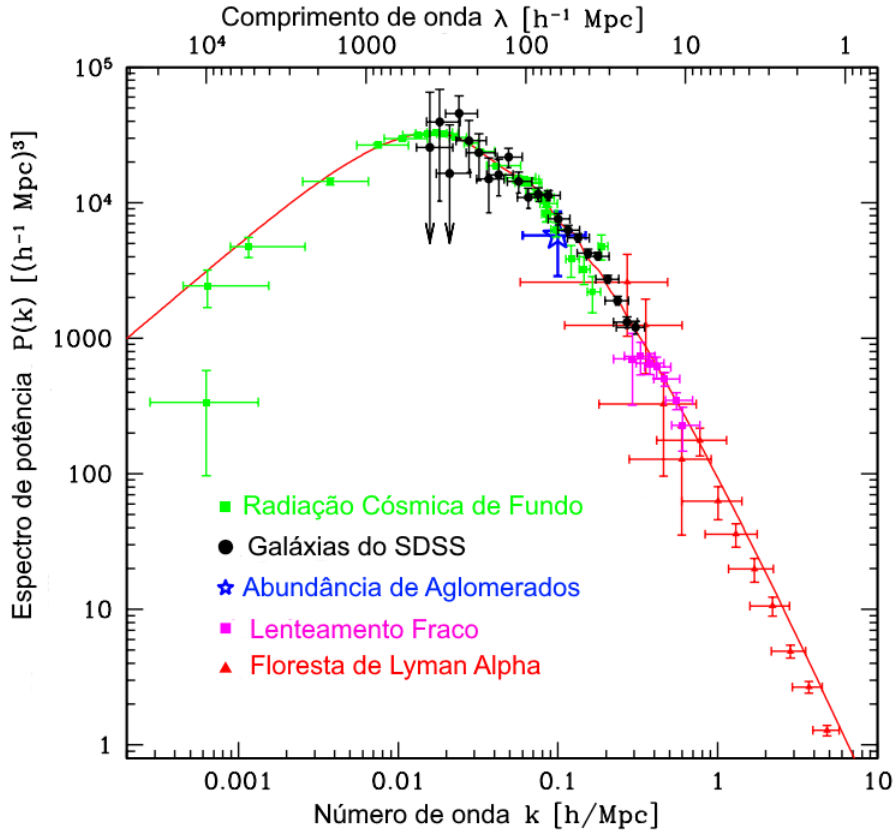


Figura 4: Apanhado de medidas iniciais para o espectro de potência da matéria: o gráfico (adaptado de [23]) mostra um *fit* do modelo Λ CDM para dados iniciais da radiação cósmica de fundo (Efstathiou et al. 2002 [24]), SDSS e 2dFGRS (veja a seção 1.3). Créditos: Tegmark, Hamilton & Xu 2002 [25].

Até então, deixamos implícito em nossas análises que a partir de uma observação do céu, somos capazes de determinar a posição 3D de cada objeto. No mínimo, a posição angular parece ser razoavelmente fácil de ser determinada, enquanto que a distância radial é um pouco obscura (até então, não existe uma régua do tamanho do Universo). A verdade é que ambas as medidas (angular+radial) se limitam a *estimativas* dadas pela luz que o objeto emitiu e chegou até nós.

Do ponto de vista da distância radial, o que medimos essencialmente é o *redshift* do traçador, o fator com o qual o comprimento de onda original do traçador foi aumentado devido à expansão do Universo. Em termos do fator de escala $a(t)$, o redshift pode ser expresso através de

$$z(t) = \frac{1}{a(t)} - 1, \quad (1.24)$$

então poderíamos imaginar que para uma partícula de luz viajando diretamente até nós, a

distância r percorrida por ela seria uma contabilização da luz percorrendo um espaço em constante expansão $a(t)$:

$$\begin{aligned} r &= \int_{t_e}^{t_{hoje}} \frac{c dt}{a(t)} \\ &= \int_{a_e}^1 \frac{c da}{a^2 H(a)} \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde realizamos uma integração no fator de escala desde o seu valor no tempo da emissão da luz (a_e) até o valor hoje, normalizado a 1.

A verdade é que a estimativa para a posição do objeto não é tão simples assim. Assim como a matéria, a luz também está sobre constante influência de efeitos dinâmicos. Além da expansão cósmica, devemos levar em conta outros efeitos: *distorções no redshift* (e portanto, na estimativa da distância radial) devido à velocidades peculiares dos traçadores (veja Kaiser 1987 [26]), o efeito de *lenteamento* (ou *lensing*, em inglês), que é a distorção na trajetória da luz (portanto, na estimativa da posição angular) devido à curvatura do espaço tempo ao longo de sua trajetória, assim como efeitos ‘relativísticos’ (Yoo 2010 [27], Bonvin & Durrer 2011 [28]) devido aos potenciais gravitacionais ao longo da trajetória da luz, que também distorcem o redshift (veja a figura 5).

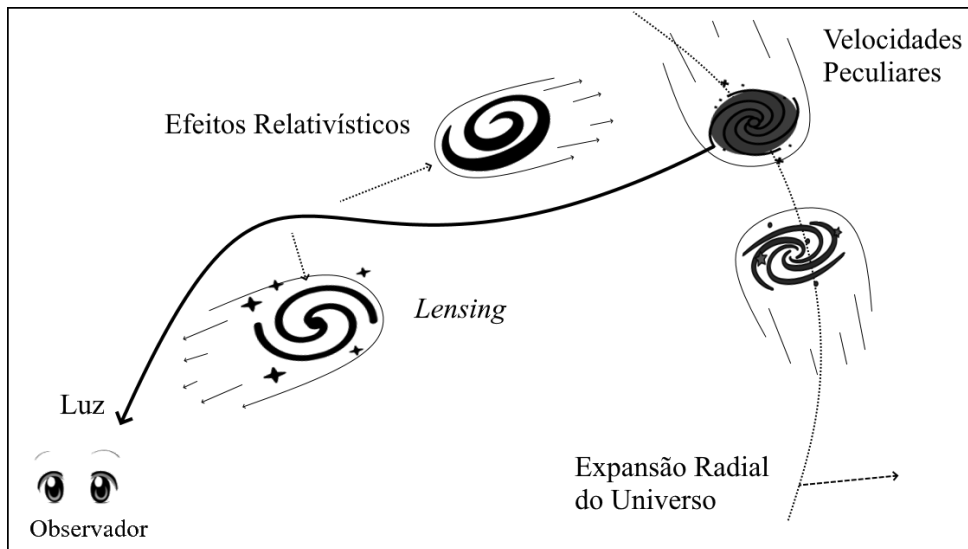


Figura 5: Diagrama com as distorções que a luz sofre ao longo de sua trajetória (em escalas exageradas). Além da expansão radial do Universo, devemos levar em conta a distorção no redshift devido às velocidades peculiares dos objetos, assim como efeitos relativísticos gerados por seus potenciais gravitacionais.

Apesar destas distorções ‘prejudicarem’ a nossa estimativa para a posição dos objetos, elas também são grandes fontes de informação à respeito da dinâmica das galáxias. Cada escala possui informação relevante a respeito de modelos cosmológicos (veja a figura 6), e em alguns casos podemos até analisar parâmetros separadamente. É por isso

que é de nosso interesse mapear o Universo em várias escalas, tanto angulares quanto radiais. Um compilado com alguns esforços feitos até agora, como tratamos estas e futuras observações é o assunto da próxima seção.

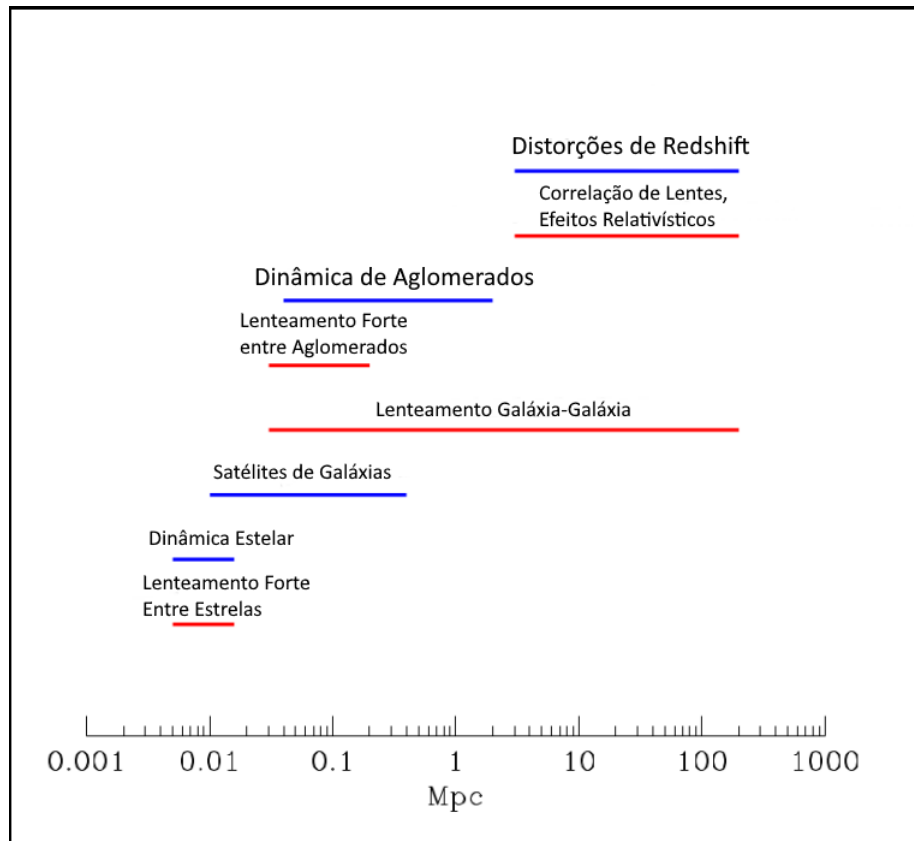


Figura 6: Diagrama com as escalas de distância de interesse em levantamentos de galáxias, a fim de testarmos modelos gravitacionais - cada escala possui um efeito físico dominante específico, ou a combinação de vários efeitos (em vermelho, efeitos do potencial gravitacional; em azul, efeitos dinâmicos). A fim de restringirmos parâmetros de forma consistente e cada vez mais precisa, É de nosso interesse a investigação de todas estas escalas. Figura adaptada de A. Johnson et al. (2014) [29].

1.3 Levantamentos de Galáxias - Investigando as Pegadas da História Cósmica

Nas seções anteriores, mostramos o passo-a-passo de como podemos idealmente, levando em conta alguns desafios observacionais, relacionar teoria e observação através do campo de contraste de densidade $\delta(\vec{r})$. Experimentos na RCF como o WMAP [2] e o Planck [30] mostram uma grande concordância com o modelo Λ CDM, e então queremos estender esta análise à objetos astronômicos antigos, como galáxias e quasares. Diferentemente da RCF, onde toda a luz está contida em um único raio, aproximadamente

($z \sim 1100$), as estruturas de matéria atuais estão distribuídas em várias distâncias.

Vimos que a realização do mapeamento dos traçadores no céu depende principalmente da estimativa de seu *redshift*, e portanto a chave para um bom levantamento de galáxias é, e sempre será, a estimativa cada vez mais precisa do redshift.

Os esforços iniciais para realizar um mapeamento do Universo começaram em meados dos anos 70, com o *Center for Astrophysics Redshift Survey* (CfA). Este consistiu de um levantamento *espectroscópico*, no qual analisamos as linhas de emissão de cada objeto. Comparando com as linhas de emissão dos componentes deste objeto em repouso, podemos estimar por quanto os comprimentos de onda foram deslocados - em outras palavras, seu redshift.

Até o fim de seu experimento com a fase 2 (CfA2 [31]), aproximadamente 18.000 objetos (~ 2400 durante o CfA, ~ 15.000 durante o CfA2) foram mapeados (veja a figura 7).

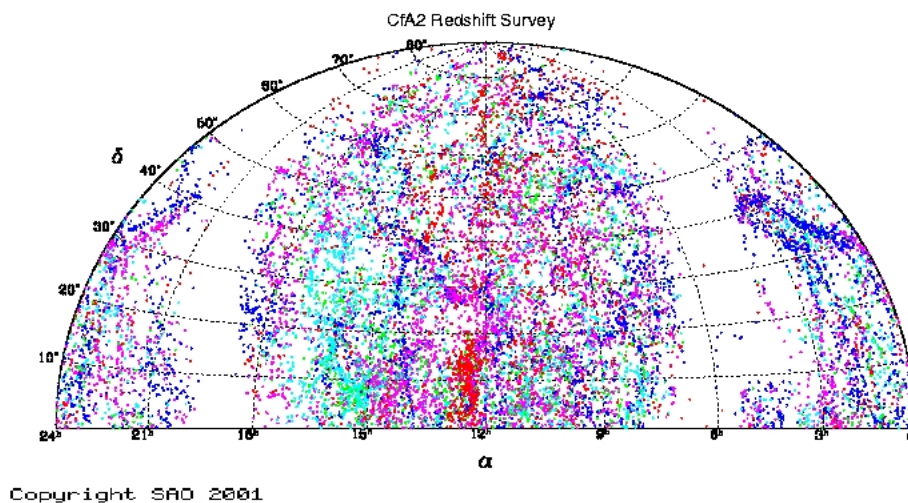


Figura 7: Primeira tentativa de mapear a Larga Estrutura do Universo: o mapa acima apresenta os resultados do experimento CfA2, que ocorreu entre 1985 e 1995. Em vermelho, objetos a $z < 0.01$; em azul, $0.01 < z < 0.02$; em magenta, $0.02 < z < 0.03$; em ciano, $0.03 < z < 0.04$; em verde, $z > 0.04$.

Desde o CfA, muitos avanços foram realizados com respeito à tomada de dados. Em especial, desenvolvimentos na área de dispositivos de carga acoplada, ou CCD (*charge coupled device*) permitiram com que implementássemos também outro tipo de estimativa para o redshift de objetos, através de levantamentos *fotométricos*. Estes consistem em analisar o objeto através de alguns filtros de banda, e então estimar o ‘redshift’ (neste caso, denominado de *photo-z*) com base na intensidade de luz em cada uma delas. Isto

é possível através da comparação com amostras de galáxias pré-calibradas através da análise espectrográfica.

Cada um dos métodos (fotométrico ou espectroscópico) possui suas vantagens e desvantagens. Enquanto levantamentos espectrográficos são mais precisos na determinação de z , cada objeto demanda certo tempo para ser contabilizado, pois é preciso que o espectroscópio capte luz o suficiente para analisar todo o espectro. Dessa forma, nem todos os objetos observados podem ser analisados através da espectroscopia, e então faz-se necessária a seleção de objetos específicos, que possuam características em comum, acrescentando um *bias de seleção* e diminuindo significativamente a densidade de objetos observados.

Por outro lado, levantamentos fotométricos atuais possuem uma estimativa para o photo- z com incertezas de aproximadamente 4%, com a vantagem de realizar esta estimativa muito mais rapidamente. Apesar deste método apresentar ser mais suscetível a erros sistemáticos, ele proporciona uma maior densidade de objetos observados, uma maior profundidade de redshift e a ausência de efeitos de seleção.

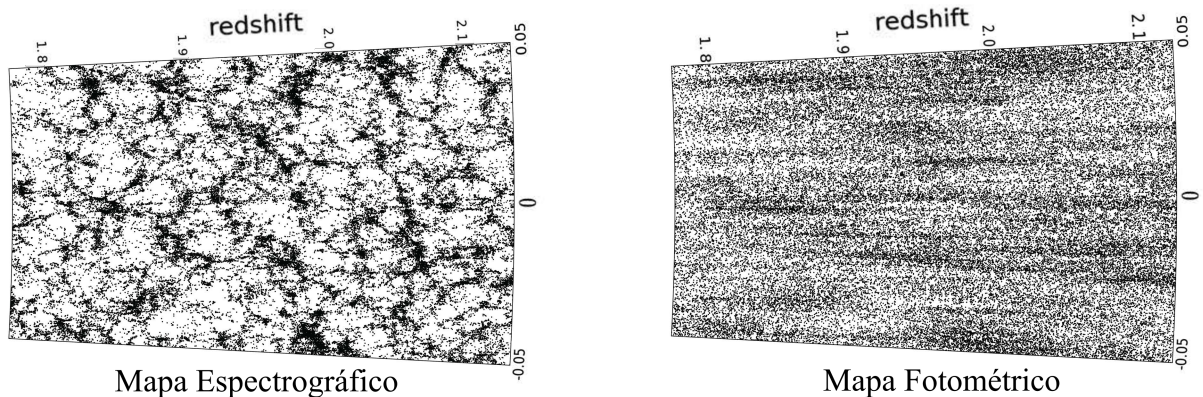


Figura 8: Comparativo entre as estimativas espectrográficas e fotométricas: a figura faz parte de uma simulação semi-analítica para a distribuição de galáxias emisoras de Lyman-alpha, denominada GALFORM [32], realizada nesta região especialmente para mostrar o poder de mapeamento de um próximo levantamento denominado ATLAS [33]. O erro esperado para a determinação do redshift espectrográfico é $\sigma_z = 10^{-4} (1 + z)$, enquanto que o erro associado às medidas fotométricas é, num cenário otimista, $\sigma_z = 10^{-2} (1 + z)$. Podemos ver que, apesar da rápida determinação do redshift proporcionado pelo método fotométrico, ele não exibe as estruturas de matéria com precisão suficiente. Figuras adaptadas de [34].

A precisão do método espectrográfico é essencial para a investigação de consequências do modelo Λ CDM à evolução da Larga Estrutura do Universo. Além do efeito de distorções do espaço de redshift, ou RSDs (*redshift-space distortions*) - que é um efeito intrinsecamente radial e mapeia a história da taxa de crescimento de estruturas da matéria - temos

também um outro efeito radial que necessita desta precisão: as oscilações acústicas de bárions, ou BAO (*baryon acoustic oscillation*), efeito presente na função de correlação e que mapeia a taxa de expansão do Universo, e portanto é um efeito essencial para restringir parâmetros à energia escura.

Ao mesmo tempo, gostaríamos da alta densidade de objetos possibilitada pelo método fotométrico, que acarreta na diminuição do ruído (ou *shot-noise*, como veremos na seção 5.1) nos nossos observáveis. É por isso que parte de levantamentos passados, atuais e futuros conciliam os dois métodos, de modo a aproveitar o melhor dos dois mundos (veja a figura 8). Como veremos adiante, o recente desenvolvimento em fotometria nos permitirá estimativas cada vez mais próximas das estimativas espectrográficas, como no caso do experimento J-PAS. Desde o CfA, a evolução tecnológica na tomada de dados fez com que levantamentos muito maiores surgissem: alguns exemplos são o Las Campanas Redshift Survey (1996) [35], o 2dF Galaxy Redshift Survey (2dFGRS, 2001) [36], o 6dF Galaxy Survey (6dFGS, 2009) [37], o Galaxy And Mass Assembly Survey (GAMA, 2010) [38], etc.

No âmbito da investigação da Larga Estrutura do Universo, o maior e mais ambicioso em andamento durante as últimas duas décadas é o Sloan Digital Sky Survey (SDSS). Baseado no Telescópio Sloan [39], as duas primeiras fases do SDSS (SDSS I e II) [40] coletaram dados de 1998 a 2008, realizando o imageamento de 11.663 deg^2 e aplicando o método fotométrico de cinco bandas a 357 milhões de objetos. O mapeamento espectrográfico foi realizado em uma área de 9380 deg^2 , analisando 930.000 galáxias próximas ($0 < z < 0.7$), 120.000 quasares distantes ($2.3 < z < 3$) e 460.000 estrelas.

Durante sua terceira fase (SDSS-III), o experimento que deu continuidade ao mapeamento tanto de galáxias próximas ($z < 0.7$) quanto de quasares distantes ($2.15 < z < 3.5$) foi o *Baryon Oscillation Spectroscopic Survey* (BOSS, 2008-2014) [41]. Ao total, este experimento mapeou 9376 deg^2 , tomando o espectro de aproximadamente 1.350.000 galáxias, 294.500 quasares e 247.200 estrelas.

A fase quatro do SDSS (SDSS-IV) deu continuidade ao BOSS, com a criação do *Extended Baryon Oscillation Spectroscopic Survey* (eBOSS, 2014-2020) [42], tomando o espectro de mais de 1.4 milhões de objetos. Dentre esses estão aproximadamente 475.000 galáxias ($0.6 < z < 1.1$) numa área de 7000 deg^2 , e 500.000 quasares ($0.8 < z < 3.5$) numa área de 6000 deg^2 .

Ao longo de toda a sua duração, o SDSS já mapeou o espectro de aproximadamente 1/4 do céu, e permitiu com que determinássemos com precisão de $1 - 2\%$ as Oscilações Acústicas de Bárions na função de correlação (veja a figura 9).

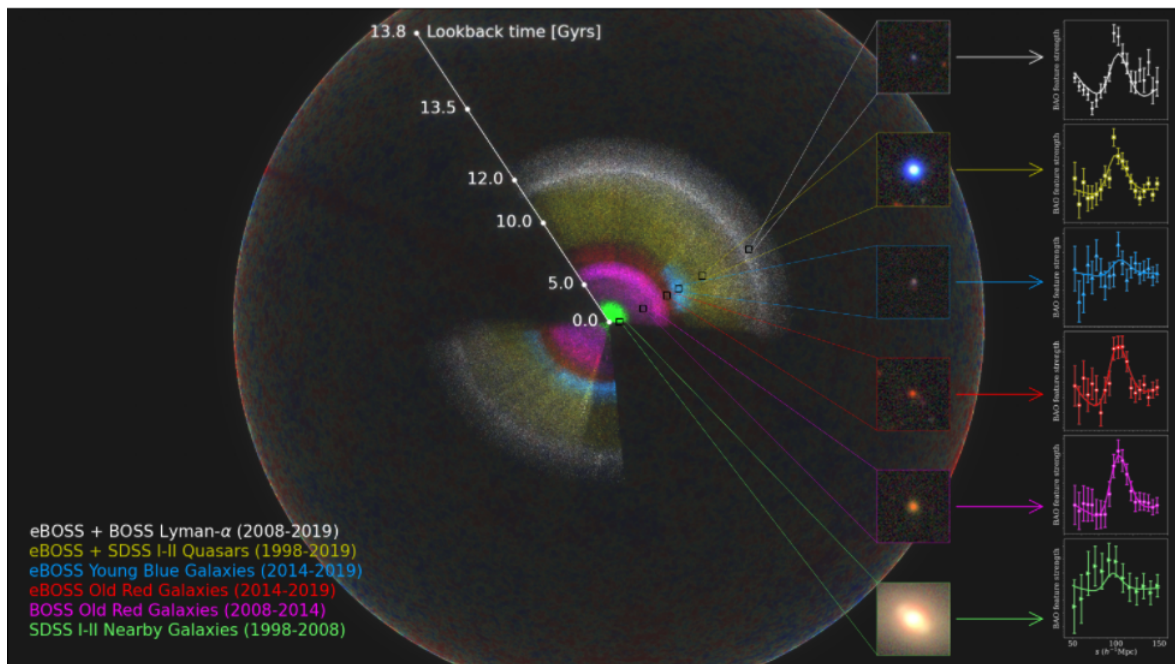


Figura 9: Sloan Digital Sky Survey [43]. A figura mostra um ‘snapshot’ da coleção de levantamentos sob supervisão do SDSS desde 1998. Cada cor denota um tipo diferente de objeto astronômico (ou *traçador*). À direita, vemos que cada traçador individualmente reproduz um conhecido efeito denominado por *Oscilação Acústica de Bárions* (ou BAO, em inglês), que por sua vez é explicado pelo modelo Λ CDM.

Com a obtenção de dados cada vez mais precisos para a Larga Estrutura do Universo, nos deparamos com algumas inconsistências ainda não solucionadas (em especial, a *Tensão de Hubble* - discrepância entre a constante de Hubble H_0 inferida por *levantamentos* da Radiação Cômica de Fundo e *levantamentos* de supernovas do Universo recente - veja a figura [10]).

Atualmente, existem diversas teorias [44] acerca da natureza da Energia Escura que visam solucionar problemas como a Tensão de Hubble, porém as barras de erro atuais dos *levantamentos* dão margem para vários possíveis candidatos a modelos corretos. Desde então, os cosmólogos estão em uma corrida para melhor restringir parâmetros a estes componentes misteriosos. Para que isto ocorra e avancemos com a seleção de candidatos a teorias adequadas, a receita permanece a mesma: maior densidade (e variedade) de objetos mapeados, maior volume, maior precisão na estimativa do redshift.

É com estes valores em mente que muitos experimentos atuais e futuros estão sendo realizados. A figura [11] mostra um cronograma com alguns dos experimentos mais relevantes que estão em desenvolvimento e análise atualmente, enquanto a figura [12] compara a densidade e área mapeada de alguns dos levantamentos passados, atuais e futuros.

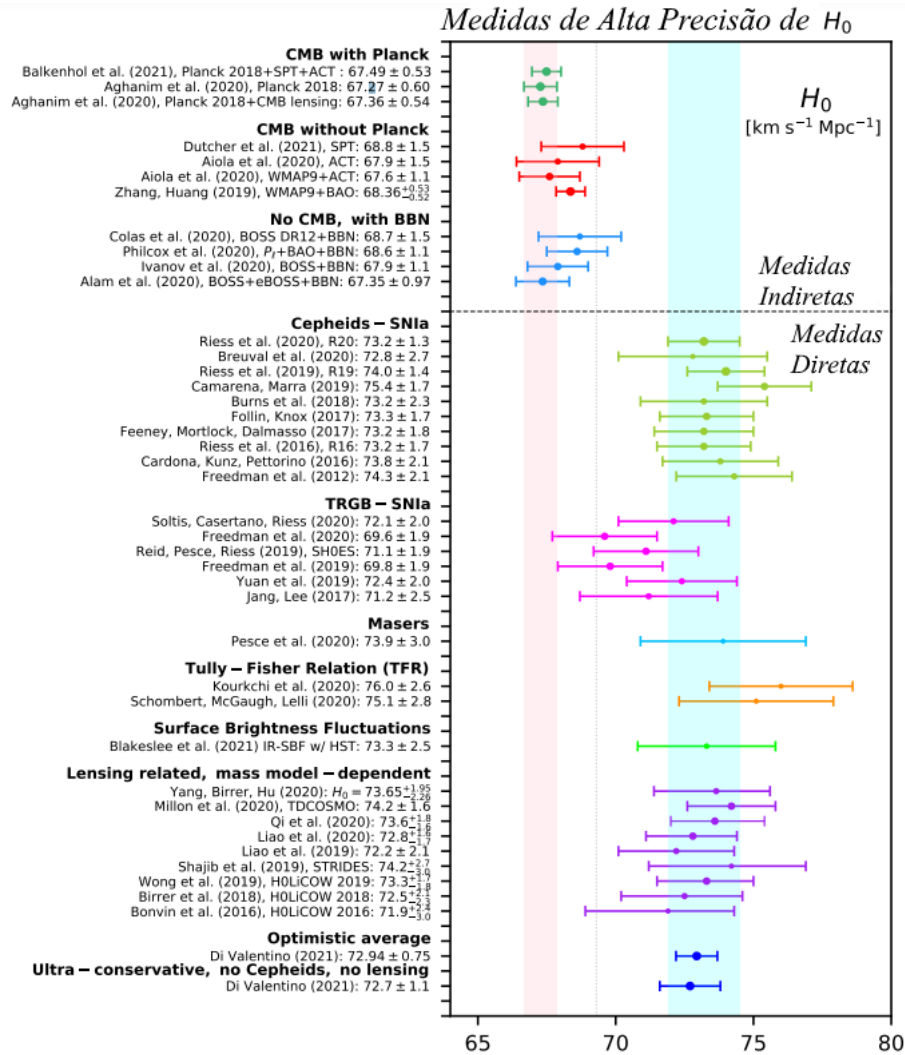


Figura 10: Tabela com medidas para a constante de Hubble com nível de confiança de 68%: a banda em ciano representa a medida realizada pelo experimento SH0ES (medida direta através de Cefeidas), com um valor $H_0 = 73.2 \pm 1.3 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. A banda em rosa-claro representa a medida realizada pelo experimento Planck (2018) [30] (medida indireta através do espectro da RCF), assumindo um modelo Λ CDM. O valor obtido pelo Planck foi $H_0 = 67.4 \pm 0.5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. As medidas realizadas tanto na RCF quanto no Universo recente, portanto, apresentam uma discrepância (ou tensão) de 4 – 6 σ com relação às estimativas da RCF. Figura adaptada de [44].

Além de levantamentos espectrográficos, a fotometria nos próximos anos voltará a ter grande relevância com dois ambiciosos projetos: O *Javalambre-Physics of the Accelerated Universe Astrophysical Survey* (J-PAS, 2020-2025) [46] e o Large Synoptic Survey Telescope (LSST, 2021-2031) [47].

Baseado em um telescópio de 2.5 m no Observatorio Astrofísico de Javalambre (OAJ), o J-PAS possui um campo de visão efetivo de 7 deg^2 , e pretende mapear 14 milhões de

Projeto	Período	Area/deg ²	Data	Redshift	Métodos
BOSS	2008-2014	10000	Opt-S	0.3-0.7 (Galáxias) 2-3.5 (Floresta Lyman-alpha)	BAO/RSD
DES	2013-2018	5000	Opt-I	0.2-1.5	WL/CL/BAO/SN
eBOSS	2014-2020	7500	Opt-S	0.6-2.0 (Galáxias/Quasares) 2-3.5 (Floresta Lyman-alpha)	BAO/RSD
SuMIRE	2014-2024	1500	Opt-I Opt-NIR-S	0.2-1.5 0.8-2.4 (Galáxias)	WL/CL/ BAO/RSD
HETDEX	2014-2019	300	Opt-S	1.9-3.5 (Galáxias)	BAO/RSD
DESI	2019-2024	14000	Opt-S	0-2 (Galáxias) 2-3.5 (Quasares/Lyman-alpha)	BAO/RSD
LSST	2020-2030	20000	Opt-I	0.2-2	WL/CL/BAO/SN
Euclid	2020-2026	15000	Opt-I NIR-S	0.2-2 0.7-2.2 (Galáxias)	WL/CL/BAO/RSD
WFIRST	2024-2030	2200	NIR-I NIR-S	1.0-3.0 (Galáxias)	WL/CL/SN/BAO/RSD (PDG 2016)

Figura 11: Tabela com o cronograma e características técnicas de alguns levantamentos atuais e futuros. Legendas: WL= Lenteamento Fraco (*Weak Lensing*); CL=Lenteamento de Aglomerados (*Cluster Lensing*); SN= Supernovas. Tabela adaptada de [45].

galáxias através de fotometria num intervalo $0.1 < z < 1.2$, numa área de 8.000 deg^2 . A grande novidade, entretanto, se dá no método fotométrico utilizado por este experimento: o método consiste em um sistema óptico de 56 bandas finas, dispostas ao longo do espectro visível e cada uma com um *overlap* de 145 \AA sobre as outras, providenciando um espectro suave (veja a figura [13]). A expectativa é que a precisão dos *photo-z* estimados sejam $\sigma_z \sim 0.003(1+z)$, uma precisão fotométrica jamais vista.

Já o LSST acredita na força bruta: baseado em um telescópio de 8.4 m em Cerro Pachón, Chile, sua câmera terá um campo de visão efetivo de 9.6 deg^2 , cobrindo uma área de 20.000 deg^2 e analisando o lenteamento de 4 bilhões de galáxias no intervalo $0.2 < z < 2$, ao longo de seus 10 anos de experimento.

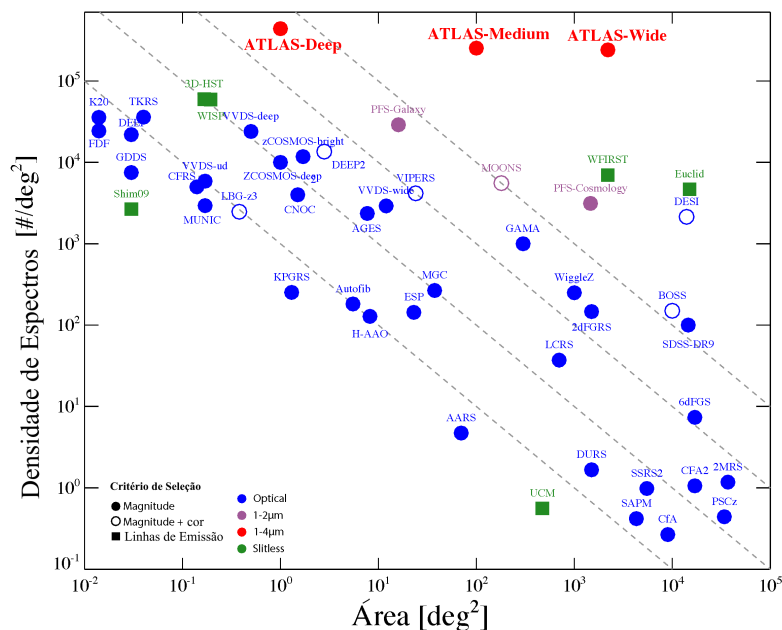


Figura 12: Comparação entre levantamentos passados, presentes e futuros. À medida em que avançamos tecnologicamente, nos aproximamos no canto superior direito. Figura adaptada de [34].

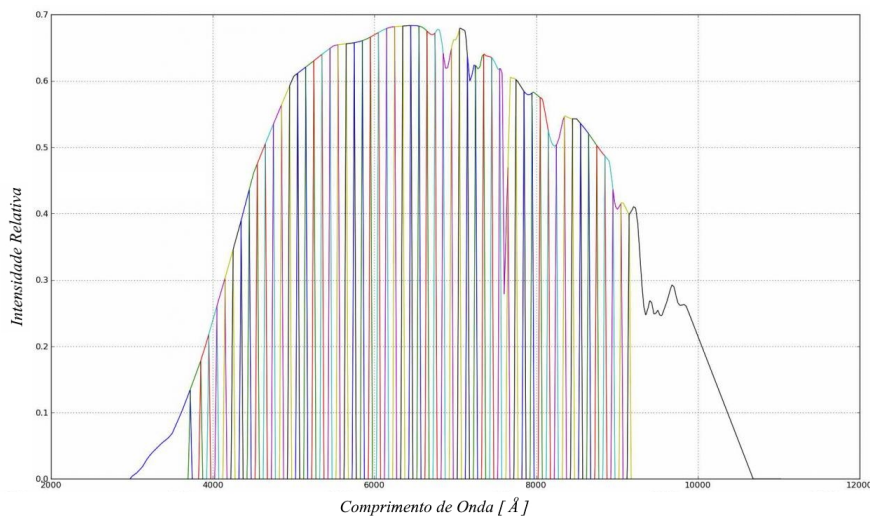


Figura 13: Filtros de Banda do J-PAS. Adaptado de [48]

Com o advento de levantamentos cada vez mais ricos e complexos, nos deparamos com um problema na interpretação destes dados:

Até 25 anos atrás, as ferramentas observacionais tradicionalmente utilizadas para a investigação da Larga Estrutura do Universo se baseavam (e ainda baseiam-se na maior parte) na função de correlação no espaço Euclidiano 3D ($\xi(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$) e, equivalentemente, o espectro no espaço de Fourier 3D ($P(\vec{k})$) - que possui, por natureza, uma geometria Eu-

clideana). Mesmo com nossos observáveis sob efeito do cone de luz, a razão por trás do sucesso dessas ferramentas se deve ao fato de que os levantamentos compreendiam áreas do céu muito pequenas e/ou volumes limitados. Dessa forma, era comum considerar que os observáveis residiam em um volume cúbico de tempo constante (numa aproximação denominada de *céu plano*), a partir de onde retiravam-se as decomposições no espaço de Fourier (veja a figura 14). Mesmo quando o levantamento possuía uma grande profundidade, ainda era possível subdividir a observação em várias caixas cúbicas de tempo constante e uni-las através do que chamamos de *função de transferência*: de maneira geral, o espectro de potência matéria é obtido através da correlação dos entre dois modos de Fourier $\tilde{\delta}(\vec{k}, z)$. Se cada um destes modos está em um raio (e portanto, um redshift) diferente, podemos levar ambos a um mesmo redshift z_0 e então obtermos $P(k, z_0)$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}(\vec{k}, z) \tilde{\delta}^*(\vec{k}', z') \rangle &= \\ &= (2\pi)^3 \frac{\mathcal{T}(k, z) \mathcal{T}(k, z')}{\mathcal{T}^2(k, z_0)} P(\vec{k}, z_0) \delta_D^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') , \end{aligned} \quad (1.26)$$

Em outras palavras, na aproximação de céu plano é possível analisar várias caixas (ou ‘bins’) de redshift \sim constante, e uni-los posteriormente assumindo um modelo cosmológico (esse modelo irá fornecer o comportamento de $\mathcal{T}(k, z)$).

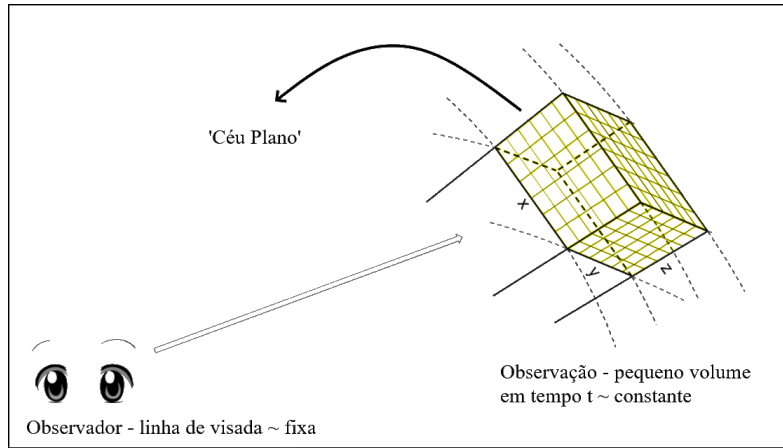


Figura 14: Aproximação de *céu plano*: mesmo com a nossa observação sob efeitos do cone de luz, podemos considerar a caixa como um plano de redshift $z \sim$ constante. No ‘pior’ dos casos, podemos subdividir z em pequenos ‘bins’ z_i de largura Δz , e uni-los através da Eq. (3.11).

Esta prescrição para a análise dos dados deixa de ser ideal à medida em que aumentamos o ângulo de observação, de forma que nossa linha de visada deixa de ser aproximadamente constante. À medida em que nosso mapa torna-se esférico, as caixas no espaço de Fourier deixam de representar a evolução dada pela pelo cone de luz de forma consistente.

Para os levantamentos atuais e futuros, precisamos transicionar da análise de Fourier para uma decomposição para o campo de contraste de densidade que leve em conta a dependência intrínseca das nossas estruturas com o raio (ou o redshift) de observação.

Com esta transição, surgem alguns desafios com respeito à descrição de alguns efeitos que a luz dos objetos sofre até chegar aqui. Estas distorções refletirão em nosso redshift observado, e a maior contribuição desses efeitos em Larga Escala se deve às *distorções do espaço de redshift*, que possui uma descrição bem consolidada na aproximação de céu plano, mas que ainda tem seu tratamento em levantamentos esféricos um pouco obscuro.

1.4 Organização do projeto

Levando em conta os problemas mencionados na seção anterior, gostaríamos que nossos observáveis físicos fundamentais fossem baseados em superfícies esféricas de simultaneidade (2D), além do redshift (1D). É a partir destes parâmetros que temos de desenvolver nosso maquinário de análise de dados e extração de parâmetros cosmológicos.

Para realizarmos esta transição (3D Cartesiano \rightarrow Esférico), este projeto tem como objetivos:

- Avaliar se é possível aproveitar todo o maquinário desenvolvido no Espaço de Fourier até então, a fim de descrever com precisão nossos observáveis numa prescrição esférica;
- Mostrar como é possível implementar as expressões encontradas para valores teóricos dos observáveis em ‘*mocks*’ (aproximações analíticas de simulações) do céu inteiro.

Para investigarmos estes dois objetivos, o projeto está organizado da seguinte forma:

Na seção [2](#), discutiremos acerca das distorções de redshift e quais são as suas consequências nos observáveis cartesianos, num contexto linear.

Na seção [3](#), vamos mostrar como transformarmos a prescrição dos observáveis do espaço 3D Cartesiano ao espaço esférico (ou harmônico), agora levando em conta os efeitos do cone de luz e da distorções do espaço de redshift. Também mostraremos a relação entre os observáveis nestes dois espaços (Espectro de Potência da Matéria \Leftrightarrow Espectro de Potência Angular).

Na seção [4](#), vamos mostrar como é possível realizar um grande volume de simulações do Universo - seja um volume a tempo constante ou no cone de luz, seja no espaço real

ou no espaço de redshift.

Para cheque de consistência das expressões encontradas nas seções 2-3, na seção 5 iremos produzir um grande volume de caixas do Universo a tempo constante ('snapshots'), e comparar as expressões para a função de correlação harmônica (observável do espaço harmônico) teóricas e observadas nas simulações. Isto será feito tanto para uma caixa seguindo um Espectro de Potência analítico (que por sua vez, fornece um Espectro de Potência Angular Analítico) quanto para um Espectro de Potência mais realista, seguindo um modelo Λ CDM (através de um algoritmo disponível na literatura).

Concluimos na seção 6, onde destacamos quais serão os próximos passos e futuras aplicações deste formalismo.

2 Distorções do Espaço de Redshifts

Quando realizamos uma observação de traçadores em larga-escala, podemos perceber que existe uma anisotropia na direção radial (veja a figura [15](#)).

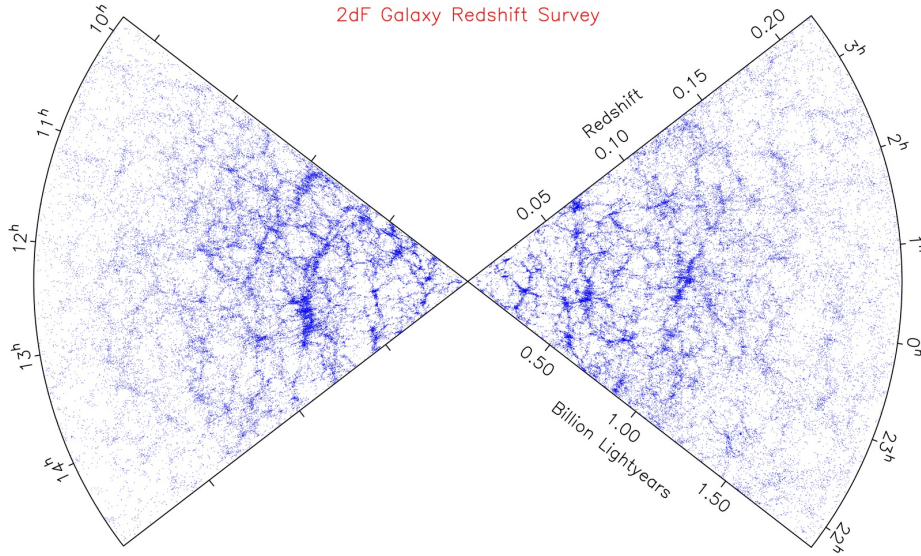


Figura 15: Distribuição de galáxias observadas pelo experimento 2dFGRS [\[49\]](#), em função do ângulo e redshift estimados. Desconsiderando-se efeitos naturais que esperaríamos ver (como a diminuição da abundância em largas distâncias, e estruturas mais aglomeradas em pequenas distâncias), podemos ver ‘paredes’ concêntricas, e em alguns lugares estruturas parecidas com ‘espinhos’ apontando para o centro da observação, dando a impressão de uma alta anisotropia.

Neste sentido, podemos nos perguntar se o que estamos observando é a real posição do objeto. Primeiro, vamos nos lembrar de que o método utilizado para estimar a posição de um traçador baseia-se em seu *redshift* z , uma medida intrinsecamente radial. A partir deste redshift e com um modelo cosmológico em mãos, calculamos a distância radial do objeto (r) levando em conta seu movimento através do *fluxo de Hubble* $H(z)$: para velocidades sub-relativísticas, podemos considerar

$$cz = H(z)r \quad (2.1)$$

Entretanto, devemos levar em conta também que o observável pode estar se movendo devido à atração gravitacional de outros objetos. Ou seja, ele pode ter uma certa velocidade *peculiar* em adição ao movimento devido ao fluxo de Hubble. Se esta velocidade peculiar for comparável ao fluxo de Hubble, a estimativa dada pela Eq. [\(2.1\)](#) pode levar a resultados muito discrepantes para a ‘real’ posição do objeto.

Suponha então que tenhamos um objeto a uma distância (física) ‘real’ \vec{r} . Suponha

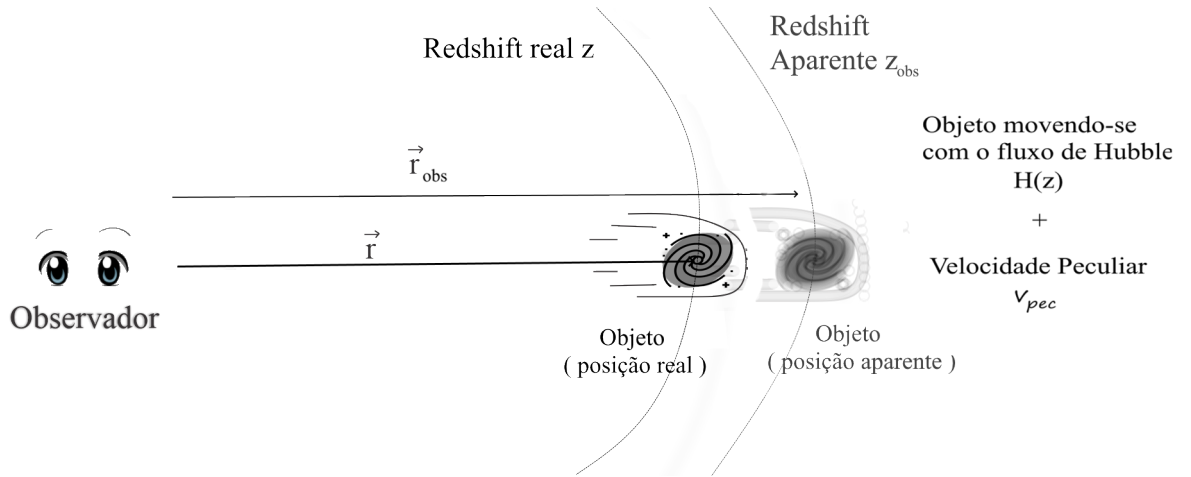


Figura 16: Um objeto astronômico dificilmente se move apenas com o *fluxo de Hubble*. Provavelmente, ele também se moverá devido à atração gravitacional de outros objetos próximos.

também que sua velocidade peculiar *radial* seja $v_{pec} = \vec{v}(\vec{r}, z) \cdot \hat{r}$. A Figura 16 ilustra a situação: o *redshift* observado será aproximadamente

$$z_{obs} = z + \frac{v_{pec}}{c} \quad (2.2)$$

Em outras palavras, a velocidade *observada* v_{obs} do objeto será

$$v_{obs} = H(z) r + v_{pec} \quad (2.3)$$

Portanto, a distância física observada r_{obs} será

$$r_{obs} = r + \frac{v_{pec}}{H(z)} \quad (2.4)$$

Ou, em coordenadas comóveis x :

$$x_{obs} \equiv s = x + \frac{v_{pec}}{a(z) H(z)} . \quad (2.5)$$

Nós chamamos s de uma coordenada (comóvel) no *espaço de redshift*, enquanto que x é uma coordenada (comóvel) no *espaço real*. A figura 17 nos mostra o que observamos num mapa no espaço de redshift *versus* o que deveríamos observar para a posição real dos objetos, descontando-se a contribuição da velocidade peculiar em (4). É neste sentido que definimos este termo adicional como uma *distorção* no espaço de redshift, com relação ao espaço real. Na próxima seção, mostraremos de que forma exatamente a distribuição é distorcida.

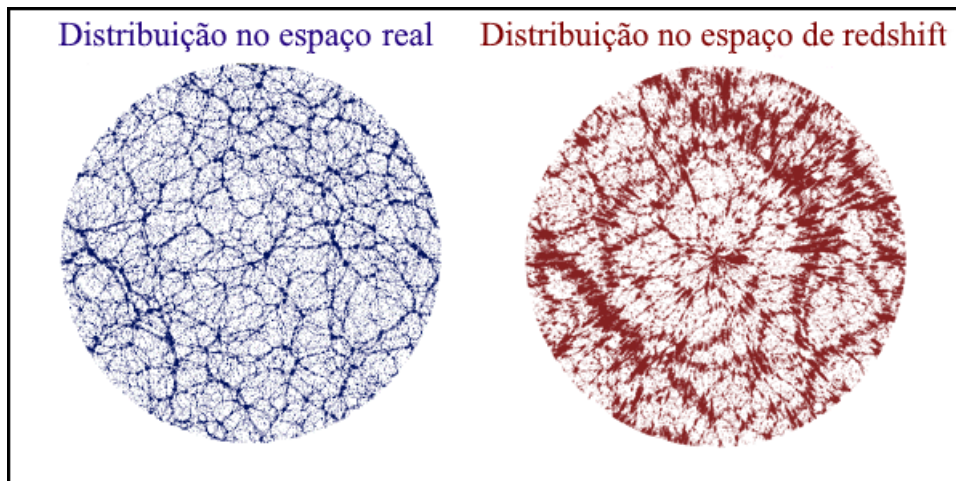


Figura 17: Comparação entre uma distribuição de galáxias no espaço real *versus* sua contraparte no espaço de redshift, de forma semelhante à figura [15](#).

A partir destes fatos, surgem dois desafios do ponto de vista da comparação entre teoria e observação. O primeiro encontra-se na raiz da derivação para a distorção de redshift: de que forma podemos descobrir a velocidade peculiar de um objeto tendo como únicas informações seu redshift medido e seu campo de contraste de densidade? É possível realizar uma estimativa?

O segundo diz respeito aos nossos observáveis, pois não possuímos um campo ‘infinitesimal’ de objetos, e nem estamos particularmente interessados na posição individual de um objeto. Queremos obter essencialmente um campo discreto de contagem de traçadores $N(\vec{r})$, ou de forma adimensional, um campo de *contraste de densidade* dos traçadores:

$$\delta^t(\vec{r}) = \frac{N^t(\vec{r}) - \bar{N}^t}{\bar{N}^t} \quad (2.6)$$

onde \bar{N}^t é o número médio de objetos por célula.

A pergunta é: como podemos relacionar o efeito das distorções do espaço de redshift discutidos até então, no contexto de uma observação de um mapa de contraste de densidade? Em outras palavras, como podemos relacionar o campo de contraste de densidade no espaço de redshift (que é essencialmente o que observamos) com o seu respectivo campo no espaço real (que é o que teríamos se a luz não sofresse nenhum tipo de distorção)? A resposta para estas duas perguntas são obtidas nas próximas seções. Primeiramente, vamos obter uma forma de estimar a velocidade peculiar de um objeto individual.

2.1 Estimando velocidades peculiares

Dentro do contexto de teoria de perturbação linear, podemos estimar a velocidade peculiar (\vec{v}) de um objeto em termos do contraste de densidade real naquele ponto. Para derivar esta expressão, partimos da *equação da continuidade* no espaço real comóvel:

$$\frac{d^r \rho}{dt} = -\vec{\nabla}_x \cdot ({}^r \rho \vec{v}) , \quad (2.7)$$

onde definimos a densidade de matéria no espaço real como ${}^r \rho$, de forma que seu respectivo campo de contraste de densidade será dado por

$${}^r \rho(\vec{x}, z) = \rho_0 (1 + {}^r \delta(\vec{x}, z)) \quad (2.8)$$

Utilizando-se de que $\frac{d}{dt} = a(z)H(z)\frac{d}{da}$, obtemos

$$-a(z)H(z)\frac{d^r \rho}{da} = \vec{\nabla}_x \cdot (\vec{v}) \quad (2.9)$$

Agora, escrevendo

$$\frac{d^r \rho}{da} = \frac{{}^r \delta(\vec{x}, z_0)}{a(z)} \frac{d \ln D(z)}{d \ln a(z)} \equiv \frac{{}^r \delta(\vec{x}, z_0)}{a(z)} f(z) , \quad (2.10)$$

onde $D(z)$ é denominada por *função de crescimento*, e $f(z)$ é a *taxa de crescimento da matéria*, obtemos

$$-H(z)f(z){}^r \delta(\vec{x}, z_0) = \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}(\vec{x}, z) . \quad (2.11)$$

Realizando uma transformada de Fourier desta equação, obtemos uma equação da forma

$$-H(z)f(z){}^r \tilde{\delta}(\vec{k}, z_0) = i\vec{k} \cdot \tilde{\vec{v}}(\vec{k}, z) \quad (2.12)$$

Mas então podemos utilizar o fato de que $\tilde{\vec{v}}(\vec{k}, z) = \tilde{v}(\vec{k}, z) \vec{k}/k$ (em teoria linear, o rotacional da velocidade peculiar é nulo, como veremos na seção 4). Dessa forma, a velocidade peculiar radial no espaço de Fourier será dada por

$$\tilde{v}_{pec}(\vec{k}, z) = \tilde{\vec{v}}(\vec{k}, z) \cdot \hat{x} = i(\vec{k} \cdot \hat{x}) \frac{f(z)H(z){}^r \tilde{\delta}(\vec{k}, z_0)}{k^2} \quad (2.13)$$

Agora podemos retornar ao espaço real, notando-se que $i(\vec{k} \cdot \hat{x})/k^2 \equiv -\frac{d}{dx} \vec{\nabla}_x^{-2}$. Portanto, a velocidade peculiar no espaço real será dada por

$$v_{pec}(\vec{x}, z) = -f(z)H(z)\frac{d}{dx} \vec{\nabla}_x^{-2} [{}^r \delta(\vec{x}, z_0)] \quad (2.14)$$

A equação (2.14) nos dá uma estimativa para a velocidade peculiar de um objeto, dado o contraste de densidade *real* naquele ponto. Com isto podemos passar ao problema de relacionar o contraste de densidade observado no espaço de redshift (${}^s\delta(\vec{r}, z)$) com o contraste de densidade no espaço real.

2.2 Efeito das Distorções de Redshift no Contraste de Densidade

Vamos agora tentar encontrar uma maneira de relacionar o campo de contraste de densidade nos dois espaços. Aqui, vale lembrar que a massa deve ser conservada nos dois referenciais:

$${}^s\rho(\vec{s}, z)d^3s = {}^r\rho(\vec{x}, z)d^3x \quad (2.15)$$

$$\Rightarrow (1 + {}^s\delta(\vec{s}, z)) = \frac{d^3x}{d^3s}(1 + {}^r\delta(\vec{x}, z)) \quad (2.16)$$

Para encontrarmos a relação para o contraste de densidade de ambos os referenciais, resta encontrar uma expressão para o Jacobiano da transformação entre as coordenadas \vec{x} e \vec{s} , $d^3x/d^3s \equiv J$. Esta é obtida ao utilizar-se da relação da Eq. (2.4), de forma que o Jacobiano é escrito como

$$J = \left(1 + \frac{1}{H(z)} \frac{dv_{pec}(\vec{x}, z)}{dx}\right)^{-1} \left(1 + \frac{v_{pec}}{H(z)x}\right)^{-2} \quad (2.17)$$

Aqui podemos desprezar o termo quadrático, se considerarmos que a velocidade peculiar é muito menor se comparada ao fluxo de Hubble ($H(z)x$). Este regime geralmente é válido em grandes escalas, onde o raio de um aglomerado é muito maior se comparado com as velocidades peculiares de cada objeto. Entretanto, esta aproximação falha em pequenas escalas, onde tanto as velocidades peculiares tendem a ser maiores, quanto os raios dos aglomerados são menores. Nestas escalas, o termo quadrático pode dar origem a curiosos efeitos conhecidos como '*fingers-of-god*' (ou 'dedos de deus'). Este efeito é típico de regiões em pequena escala e alta densidade, e já foi registrado em alguns levantamentos de galáxias, como no aglomerado de Coma (de Lapparent, V., Geller, M. J., & Huchra, J. P., 1986) [50], por exemplo. A figura 18 mostra um diagrama com diferentes situações e suas consequências para as distorções do espaço de redshift.

Em escalas lineares, portanto, podemos assumir

$$J \approx \left(1 - \frac{1}{H(z)} \frac{dv_{pec}(\vec{x}, z)}{dx}\right) \quad (2.18)$$

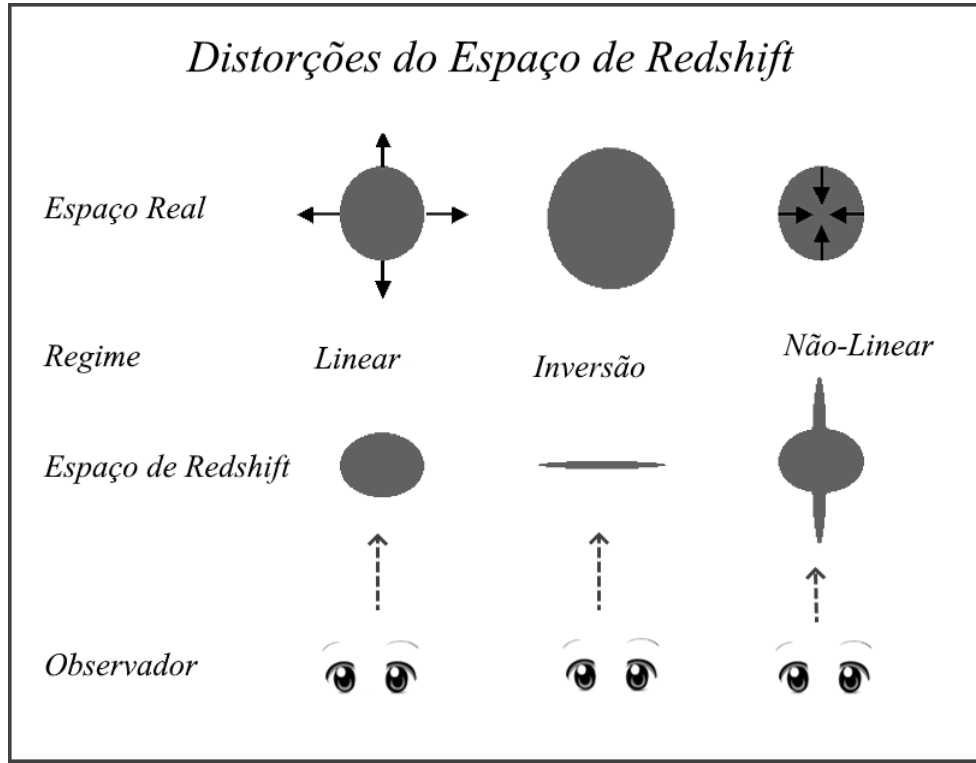


Figura 18: Diferentes distorções do espaço de redshift. No regime linear ($\delta \ll 1$, aglomerado grande se comparado com a distorção), temos o cenário típico de estruturas em Larga Escala em grandes redshifts: a distorção faz com que as estruturas aparentem ‘esmagadas’ (efeito ‘squashing’). No regime de *Inversão* ($\delta \approx 1$, aglomerado com tamanho da ordem da distorção), o ‘squashing’ pode achatá-las completamente. Em situações extremas (regime não-linear, $\delta \gg 1$, distorções muito maiores do que o tamanho da estrutura), temos o efeito de ‘fingers-of-god’, onde há uma inversão da posição dos objetos do aglomerado: objetos próximos aparentam estar muito distantes, e os objetos originalmente distantes aparentam estar muito próximos.

Finalmente obtemos todos ingredientes para uma relação ‘semi-analítica’ entre ${}^s\delta$ e ${}^r\delta$: aplicando as Eqs. (2.18) e (2.14) em (2.16), obtemos

$${}^s\delta(\vec{s}, z) = \left[1 + f(z) \frac{d^2}{dx^2} \vec{\nabla}^{-2} \right] {}^r\delta(\vec{x}, z). \quad (2.19)$$

A equação (2.19) finalmente expressa a relação entre o contraste de densidade nos espaços real e de redshift, e será uma expressão de suma importância para as relações encontradas na seção 3.2. Podemos também expressar a equação (2.19) em termos da função de correlação $\langle {}^s\delta(\vec{k}) {}^s\delta^*(\vec{k}') \rangle$:

$$\langle {}^s\delta(\vec{k}) {}^s\delta^*(\vec{k}') \rangle = \left\langle \left[1 + f(z) \frac{d^2}{dx^2} \vec{\nabla}^{-2} \right] {}^r\delta(\vec{k}) \left[1 + f(z) \frac{d^2}{dx^2} \vec{\nabla}^{-2} \right] {}^r\delta(\vec{k}') \right\rangle \quad (2.20)$$

Apesar dessa relação parecer pouco palpável, em aproximação de observador distante o operador Laplaciano inverso assume uma forma muito mais amigável, ainda que não represente a distorção de redshift no céu inteiro. Na seção [3.2](#), ela será especialmente útil quando a estendermos para o *espectro de potência angular da matéria*, que servirá como interface entre a teoria cosmológica e as observações.

3 Cosmologia em Coordenadas Esféricas

Como dito anteriormente, uma das possíveis fontes de informação provenientes de *levantamentos* do céu consiste em contar a quantidade de traçadores (estrelas, galáxias, quasares, etc.) presentes em uma porção de volume. Suponha então que fomos capazes de obter um campo da densidade de traçadores $\rho(\vec{r})$ em uma região do céu. Como lidar com a informação presente neste campo de maneira consistente com o cone de luz? Primeiramente, é mais simples se trabalharmos com um objeto sem dimensões físicas. Tipicamente, transformamos o campo de densidade em um campo de contraste de densidade:

$$\delta(\vec{r}) \equiv \frac{\rho(\vec{r}) - \rho_0}{\rho_0} \quad (3.1)$$

onde ρ_0 é a densidade média no volume. A partir daqui, poderíamos tomar a transformada de Fourier deste campo, $\delta(\vec{r}) \rightarrow \tilde{\delta}(\vec{k})$, e analisarmos sua estatística. Idealmente, uma medida da função de correlação deve ser realizada entre dois modos no mesmo redshift (ou seja, numa mesma hiper-superfície de tempo constante). Entretanto, sabemos que não observamos objetos em distâncias radiais diferentes em um mesmo instante de tempo. De fato, realizamos as nossas observações em um *cone de luz* do passado, onde cada objeto está em sua própria 'casca esférica' de redshift (ou tempo) constante.

Apesar de ser possível 'fixar' as transformadas de Fourier a um tempo constante (como mostrado na seção [1.3](#)), gostaríamos de decompor o campo de contraste de densidade de uma maneira um pouco mais condizente com o que é de fato observado: objetos em cascas esféricas de tempo constante.

3.1 Noções gerais

A maneira mais natural de decompor tal objeto se dá através da decomposição em esféricos harmônicos $Y_{\ell m}$:

$$\delta(\vec{r}, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \delta_{\ell m}(r, z) Y_{\ell m}(\hat{r}) \quad (3.2)$$

Aqui, $r \equiv |\vec{r}|$, $\hat{r} \equiv (\theta, \phi)$ (das coordenadas esféricas usuais). Deixamos explícito o fato de que a distância radial depende do redshift medido. Dessa forma, os modos agora contém de forma sintetizada a informação a respeito do tempo em que a medida é realizada. Estes

modos harmônicos podem ser obtidos de uma observação através da relação

$$\delta_{\ell m}(r, z) = \int d\Omega_r \delta(\vec{r}, z) Y_{\ell m}^*(\hat{r}), \quad (3.3)$$

onde $d\Omega_r \equiv \sin(\theta)d\theta d\phi$. Os modos ℓ e m são encarregados pelas variações angulares no campo:

- ℓ determina o “comprimento de onda” do modo:

$$\lambda \sim \frac{2\pi r}{\ell} \quad (3.4)$$

- m determina o “formato” do modo (isto é, o número de “gomos” ao longo do equador):

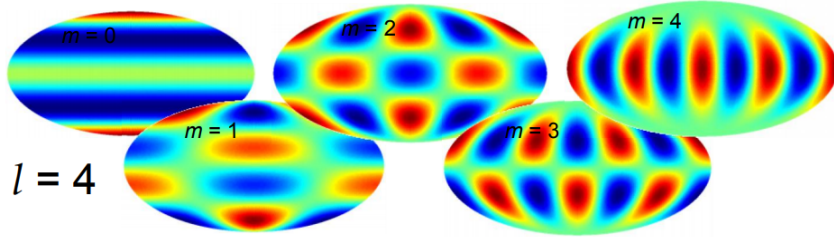


Figura 19: Exemplo de Esféricos Harmônicos de modo $\ell = 4$

Agora, de maneira similar ao que é feito no espaço de Fourier, podemos definir um *Espectro de Potência Angular* para as flutuações da densidade, ξ_ℓ , como sendo a variância dos coeficientes harmônicos $\delta_{\ell m}$. ξ_ℓ nos dará uma amplitude como função de ℓ (que por sua vez é uma quantidade relacionada ao “comprimento de onda” ou a escala da flutuação) e também dos raios em que tomamos a variância dos modos (digamos, r e r'). Se considerarmos que nossa observação é isotrópica, então podemos escrever

$$\langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m'}^*(r') \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \xi_\ell(r, r'), \quad (3.5)$$

onde deixamos implícito que $r = r(z)$, $r' = r'(z')$, etc. Se a observação não respeitar a *isotropia estatística*, então pode ocorrer de haver uma “mistura” nos modos de ℓ, ℓ' [51]. Aqui, vamos nos ater às observações no céu inteiro, supondo tal isotropia.

Este tipo de decomposição já é utilizado há muito tempo para a RCF (veja a figura 20), e em geral o que é analisado nas observações é de fato ξ_ℓ . A maneira como este se relaciona com o espectro de potência da matéria $P(k)$ será discutida mais adiante.

Na equação (3.5) fica implícito que temos mais de uma amostra de $\delta_{\ell m}(r)$. Na vida

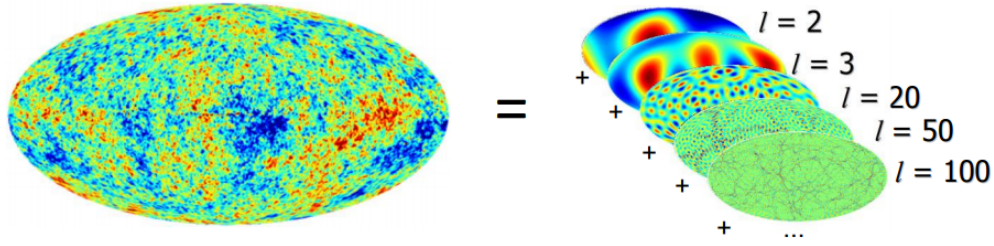


Figura 20: Representação da Radiação C3smica de Fundo atrav3s da decomposi3o em esf3ricos harm4nicos, at3 o modo $\ell = 100$. Quanto maior o n3mero de modos, maior a resolu3o do mapa de contraste de temperatura.

real, s3 temos uma amostra: o pr3prio c3u! N3o existem v3rias amostras do Universo, ent3o o que medimos de fato 3 um *estimador* do espectro de pot3ncia angular, $\hat{\xi}_\ell$. Entretanto, no contexto de simula3es, podemos sim ter v3rias amostras do c3u. Neste sentido, o “verdadeiro” espectro de pot3ncia angular se d3 atrav3s da m3dia de $\hat{\xi}_\ell$: supondo a isotropia estat3stica,

$$\delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m'}^*(r') = \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \hat{\xi}_\ell(r, r'), \quad (3.6)$$

o que implica

$$\xi_\ell = \langle \hat{\xi}_\ell \rangle. \quad (3.7)$$

Para cada multipolo ℓ , temos $(2\ell + 1)$ modos- m independentes. Para obtermos ξ_ℓ , devemos ent3o realizar uma m3dia sobre m :

$$\delta_{\ell \ell'} \hat{\xi}_\ell(r, r') = \frac{1}{(2\ell + 1)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m}^*(r') \quad (3.8)$$

ent3o

$$\delta_{\ell \ell'} \xi_\ell(r, r') = \frac{1}{(2\ell + 1)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m}^*(r') \rangle. \quad (3.9)$$

Como s3 temos uma amostra do c3u na vida real, 3 de se esperar que haja uma incerteza inerente em suas medidas. A tal incerteza 3 dado genericamente o nome de *vari3ncia c3smica*. No contexto de medidas do espectro de pot3ncia angular, podemos calcular a (co)vari3ncia c3smica $\text{Cov}[\xi_\ell(r_1, r_2), \xi_{\ell'}(r_3, r_4)]$ em um ambiente isotr3pico (assumindo que $\delta_{\ell m}$ sejam vari3veis aleat3rias gaussianas) com a ajuda do *Teorema de Wick* **Ap3ndice**

A, de forma que escrevemos

$$\begin{aligned} \text{Cov}[\xi_\ell(r_1, r_2), \xi_{\ell'}(r_3, r_4)] &= \\ \langle \hat{\xi}_\ell(r_1, r_2) \hat{\xi}_{\ell'}(r_3, r_4) \rangle - \langle \hat{\xi}_\ell(r_1, r_2) \rangle \langle \hat{\xi}_{\ell'}(r_3, r_4) \rangle &= \\ \frac{\delta_{\ell\ell'}}{(2\ell+1)} \left[\xi_\ell(r_1, r_4) \xi_{\ell'}(r_2, r_3) + \xi_\ell(r_1, r_4) \xi_{\ell'}(r_2, r_3) \right] & \end{aligned} \quad (3.10)$$

No aspecto de previsões teóricas de uma observação, ainda podemos utilizar o espectro de potência da matéria (que já possui uma derivação teórica bem desenvolvida) a fim de obter os espectros angulares teóricos. Vimos anteriormente que o espectro de potência da matéria é obtido através da correlação dos modos de Fourier $\tilde{\delta}(\vec{k}, z)$:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\delta}(\vec{k}, z) \tilde{\delta}^*(\vec{k}', z') \rangle &= \\ = (2\pi)^3 \frac{\mathcal{T}(k, z) \mathcal{T}(k, z')}{\mathcal{T}^2(k, z_0)} P(\vec{k}, z_0) \delta_D^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') , & \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde $P(\vec{k}, z_0)$ é dado, por exemplo, por algoritmos como CAMB [52, 53], CMBFAST [54, 55], CLASS [56], etc. $\mathcal{T}(k, z) \equiv T(k) D(z)$ é um fator encarregado de contabilizar a evolução das flutuações de densidade ao longo de diferentes escalas de distância k (com a “função de transferência $T(k)$ ”) e tempo z (com a “função de crescimento” $D(z)$). Estas são funções bem conhecidas, sendo $D(z)$ facilmente obtida através de equações diferenciais e $T(k)$ possuindo valores bem aproximados por *fits*, como a função de transferência BBKS [57] para a cosmologia Λ CDM, por exemplo.

Agora, gostaríamos de obter uma relação entre $\xi_\ell(r, r')$ e $P(k, z)$. Tal relação é obtida através de um pouco de álgebra (**apêndice B.1**), e no espaço real é dada simplesmente por

$$\xi_\ell(r, r') = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 \mathcal{T}(k, z) \mathcal{T}(k, z') j_\ell(kr) j_\ell(kr') P(k, z_0) . \quad (3.12)$$

Novamente, fica implícito $r = r(z)$, $r' = r'(z')$. j_ℓ são as *funções esféricas de Bessel*. Por simplicidade, vamos inserir os fatores \mathcal{T} dentro da definição de $P(k)$ (assim como omitir a dependência em z, z' e z_0 , que fica implícita por r, r'), de forma a simplificar as expressões:

$$\xi_\ell(r, r') = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 j_\ell(kr) j_\ell(kr') P(k) . \quad (3.13)$$

3.2 Distorções de Redshift no Contexto Harmônico

Vimos, através das Eqs. (2.19) e (2.20) que é possível (ainda que o significado seja um pouco obscuro) relacionar o campo de contraste de densidade nos espaços real e de redshift. Essas equações podem ter expressões palpáveis se considerarmos observações de *céu plano*, onde podemos utilizar a fórmula de Kaiser [26]:

$${}^s\delta(\vec{k}, z) = [1 + f(z) \mu_k^2] {}^r\delta(\vec{k}, z) \quad (3.14)$$

onde $\mu_k \equiv \hat{k} \cdot \hat{r}$, \hat{r} sendo a orientação da linha de visada, considerada fixa. Apesar desta aproximação dar resultados muito bons em levantamentos pequenos, ela deixa de ser o ideal quando vamos a um levantamento que mapeia o céu inteiro, de forma que não podemos considerar apenas uma linha de visada. Diante deste problema, podemos investigar se o tratamento harmônico pode ser mais útil e nos providenciar uma relação entre os dois espaços de forma mais consistente.

De fato, no **apêndice B.2** mostraremos que é possível encontrar uma relação semelhante a da Eq. (3.13) para a correlação dos modos harmônicos no espaço de redshift, $\langle {}^s\delta_\ell(r) {}^s\delta_\ell^*(r') \rangle \equiv {}^s\xi_\ell(r, r')$:

$${}^s\xi_\ell(r, r') = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 \left[j_\ell(kr) - f(z) j_\ell''(kr) \right] \left[j_\ell(kr') - f(z) j_\ell''(kr') \right] P(k) \quad (3.15)$$

Outra propriedade interessante é o fato de podermos relacionar os espectros de potências angulares (real e no espaço de redshift) através de uma integral dupla de um ‘Kernel’ K_ℓ :

$${}^s\xi_\ell(r, r') = \int d\rho \rho^2 \int d\rho' \rho'^2 K_\ell(\rho, r) K_\ell(\rho', r') {}^r\xi_\ell(\rho, \rho'), \quad (3.16)$$

onde ${}^r\xi_\ell$ é dada simplesmente pela equação (3.13). No **apêndice C**, mostraremos que o Kernel $K_\ell(\rho, r)$ é uma contribuição $f(z)$, acrescida de uma perturbação em torno do delta de Dirac $\delta_D(\rho - r)$:

$$K_\ell(\rho, r) = \frac{1 + f(z)}{\rho^2} \delta_D(\rho - r) - \begin{cases} \frac{f(z)}{r^3} \left[\frac{2(2\ell+1) + \ell(\ell-1)}{2(2\ell+1)} \right], & \text{se } r = \rho \\ \frac{f(z)}{\rho r^2} \frac{\ell(\ell-1)}{2(2\ell+1)} \left(\frac{r}{\rho} \right)^\ell, & \text{se } r < \rho \\ \frac{f(z)}{r^3} \left(\frac{\rho}{r} \right)^\ell \left[\frac{4(2\ell+1) + \ell(\ell-1)}{2(2\ell+1)} \right], & \text{se } r > \rho \end{cases} \quad (3.17)$$

Do ponto de vista experimental, o ideal seria se tivéssemos o contrário: Uma expressão para ${}^r\xi_\ell$ dado um ${}^s\xi_\ell$, que é o que podemos medir essencialmente. Entretanto, é de nosso interesse estimar o quanto as distorções desviam ${}^s\xi_\ell(r, r')$ de um valor ideal ${}^r\xi_\ell(r, r')$. As figuras abaixo mostram o que podemos esperar dos termos $\rho^2 K_\ell$ (sem o termo delta de Dirac), assim como os termos $\rho^2 \rho'^2 K_\ell(\rho, r(z)) K_\ell(\rho', r'(z'))$, que são essencialmente os fatores que desviam ${}^s\xi_\ell(r, r')$ de ${}^r\xi_\ell(r, r')$. Para um $z = 0.7$ ($r \approx 2500 h^{-1} \text{ Mpc}$)¹ e $z' = 1.1$ ($r' \approx 3600 h^{-1} \text{ Mpc}$), temos a figura 21, para $\ell = 10, 50, 100$. Podemos perceber que a ‘perturbação’ em torno do delta de Dirac provém termos cada vez mais não-desprezíveis à medida em que se aumenta ℓ (escalas cada vez menores), adicionando termos ${}^r\xi_\ell(\rho, \rho')$ por fatores $\sim 0.1\%$ em $\ell = 10$ até $\sim 1\%$ em $\ell = 100$.

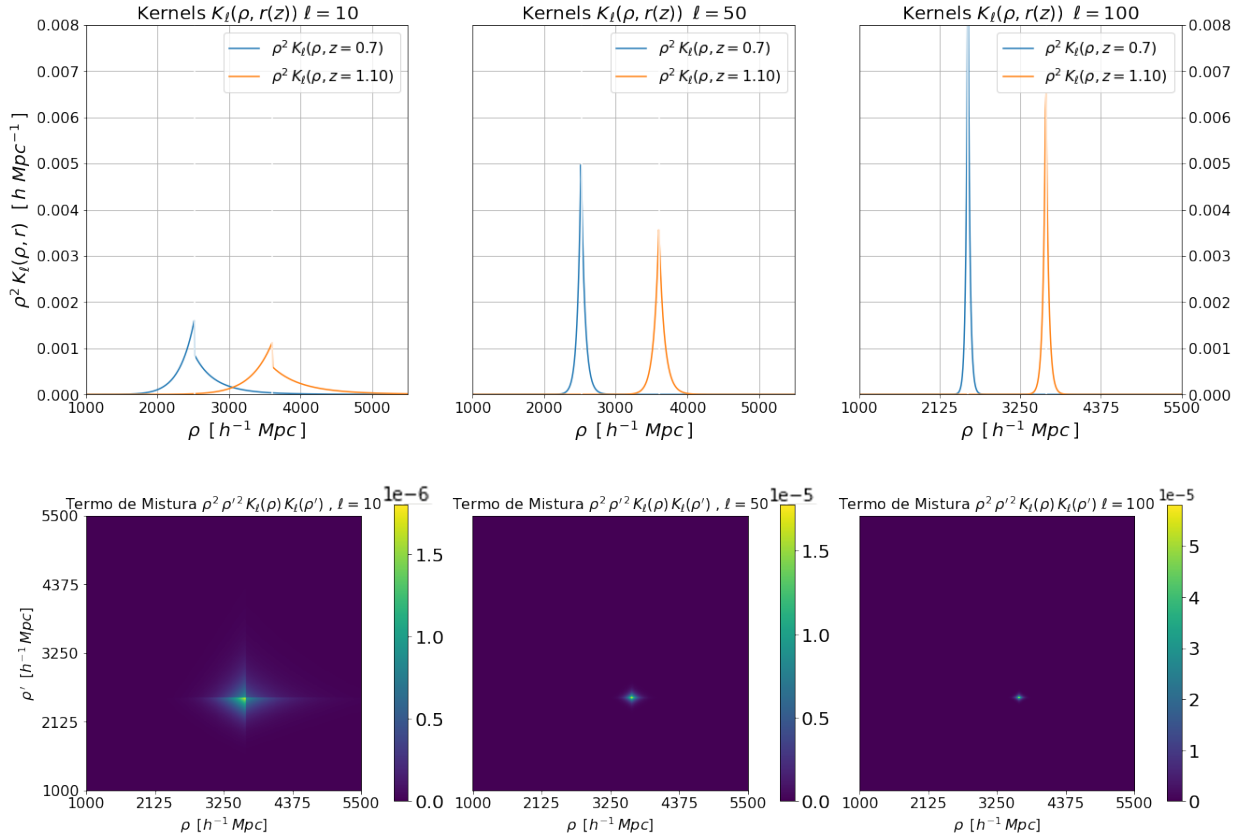


Figura 21: *Kernels* da equação (3.16) para $z = 0.7$, $z' = 1.1$. Os painéis superiores mostram os fatores $K_\ell(\rho, r(z))$ e $K_\ell(\rho, r'(z'))$ sem seus respectivos termos de delta de Dirac. Embaixo de cada painel, seus respectivos termos cruzados $\rho^2 \rho'^2 K_\ell(\rho, r(z)) K_\ell(\rho', r'(z'))$.

Podemos ver o que acontece quando tomamos o espectro angular de dois objetos mais próximos. A figura 22 mostra o mesmo caso anterior para $z = 1.0$ ($r \approx 3357 h^{-1} \text{ Mpc}$) e $z' = 1.01$ ($r \approx 3383 h^{-1} \text{ Mpc}$). A maior mudança para o caso anterior é a maior

¹Raios estimados com um modelo $\Lambda\text{CDM plano}$!

‘contaminação’ nos termos misturados $\rho^2 \rho'^2 K_\ell(\rho, r(z)) K_\ell(\rho', r'(z'))$ sem o delta de Dirac. Porém, estes continuam sendo muito pequenos ($\sim 0.0001\%$) em comparação com os termos separados $K_\ell(\rho, r(z))$ ($\sim 1\%$).

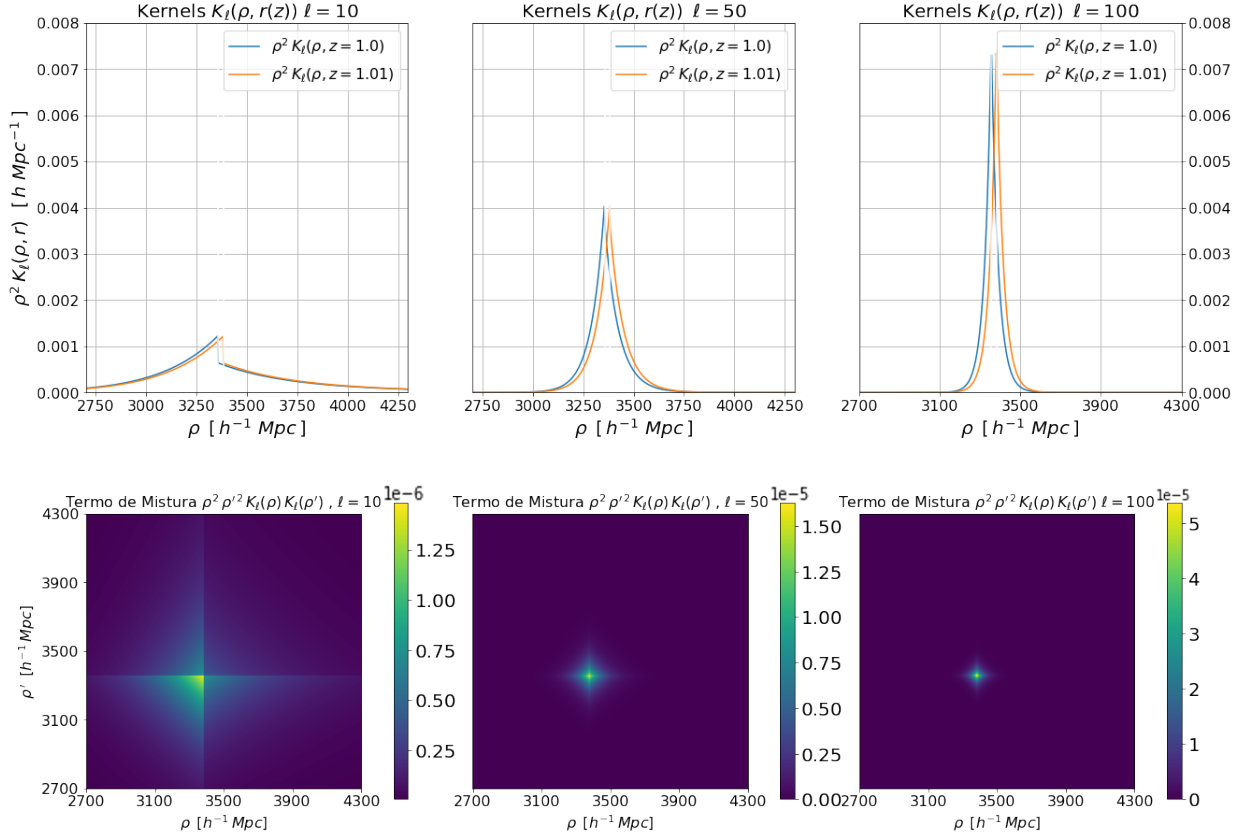


Figura 22: *Kernels* da equação (3.16) para $z = 1.0$, $z' = 1.01$. Os painéis superiores mostram os fatores $K_\ell(\rho, r(z))$ e $K_\ell(\rho, r'(z'))$ sem seus respectivos termos de delta de Dirac. Embaixo de cada painel, seus respectivos termos cruzados $\rho^2 \rho'^2 K_\ell(\rho, r(z)) K_\ell(\rho', r'(z'))$.

Obtidas estas expressões que relacionam espectro de potência da matéria e espectro angular, gostaríamos de verificar a validade destas em uma simulação. Uma aproximação simplista para este problema será discutida na próxima seção.

4 A Teoria de Perturbação Lagrangiana

Estamos interessados em investigar as escalas nas quais equações como (3.15) e (3.16) são válidas, e quais fatores de um levantamento de galáxias realístico (no qual nosso campo de contraste de densidade é discreto) pode ou não interferir nessas relações. Para isso, são necessárias simulações de centenas, ou até milhares de ‘volumes’ do Universo. Só assim obtemos médias consistentes dos estimadores $\hat{\xi}_\ell$, que podem ser comparadas às expressões teóricas.

A opção mais fiel à teoria que poderíamos fazer consiste em realizar simulações de *N-corpos*, que é exatamente simular o movimento de N partículas individualmente. Para realizarmos este tipo de simulação e obtermos resultados satisfatórios (pouco ruidosos), é necessário contabilizar o movimento de milhões de partículas, com células para a avaliação da densidade preferencialmente cada vez menores. A técnica utilizada para essas simulações é denominada de *Particle-Mesh* (PM), e é utilizada desde o fim da década de 70 para fins cosmológicos. Apesar de possuir um algoritmo otimizado, no qual o tempo de computação escala com $\propto O(N_p) + O(N_c \ln N_c)$ (N_p é o número de partículas, N_c é o número de células no volume simulado), este tipo de simulação demanda um elevado tempo computacional, principalmente quando se trata de uma simulação do céu inteiro. A situação agrava-se ainda mais quando precisamos de muitas simulações do mesmo volume, como no nosso caso.

4.1 Noções Gerais

A solução para este problema reside na produção de ‘*mocks*’, aproximações analíticas para o movimento das partículas dentro do volume simulado. Um dos métodos mais empregados é denominado de **Teoria de Perturbação Lagrangiana**, e consiste na aproximação do movimento de várias partículas dentro de certo volume e densidade de contraste $\delta(\vec{r})$.

Nesta aproximação, dada a posição inicial (ou coordenadas Lagrangianas) \vec{q} de uma porção de partículas, podemos representar sua posição final $\vec{r}(t)$ através de um *campo de deslocamento* $\psi(\vec{q}, t)$, unicamente dependente de sua posição inicial:

$$\vec{r} = \vec{q} + \vec{\Psi}(\vec{q}, t)$$

$$\vec{q} \equiv \text{posição inicial da partícula} \tag{4.1}$$

$$\vec{\Psi}(\vec{q}, t) \equiv \text{campo de deslocamento}$$

Cada partícula, por sua vez, move-se de acordo com a equação de movimento

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + H\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{\nabla}\Phi, \quad (4.2)$$

onde H é a velocidade devido ao fluxo de Hubble e Φ é o potencial gravitacional. Tomando-se o divergente desta expressão, obtemos

$$\vec{\nabla} \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + H\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = -\vec{\nabla}^2\Phi, \quad (4.3)$$

onde agora podemos tomar vantagem da equação de Poisson para o potencial gravitacional:

$$\vec{\nabla}^2\Phi = -\frac{3}{2}\Omega_m H^2 \delta(\vec{r}) \quad (4.4)$$

Nosso interesse agora é obter uma expressão dependente de \vec{q} ; para isto, podemos utilizar o Jacobiano da transformação entre as coordenadas \vec{r} e \vec{q} juntamente com a definição dada pela Eq. (4.1):

$$\begin{aligned} 1 + \delta(\vec{r}) &= J^{-1} \\ J &= \det(\delta_{ij} + \Psi_{i,j}) \\ \Psi_{i,j} &= \frac{\partial\Psi_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Assim, utilizando as Eqs. (4.5) e (4.4) em (4.3), obtemos a expressão

$$J(\vec{q}, t) \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + H\frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{3}{2}\Omega_m H^2 (J - 1) \quad (4.6)$$

Finalmente, podemos re-escrever os operadores $\vec{\nabla}$ em termos das derivadas em coordenadas Lagrangianas:

$$\nabla_i = (\delta_{ij} + \Psi_{i,j})^{-1} \nabla_{q_j} \quad (4.7)$$

Denotando $\vec{\nabla}_{\vec{q}} \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{q}}$, podemos encontrar soluções perturbativas para a Eq. (4.6) utilizando (4.1), (4.5) e (4.7).

Expansão em torno da solução linear (Aproximação de Zel'Dovich, 1970 [58]):

A solução mais conhecida é a de primeira ordem, de forma que a equação (4.6) torna-se simplesmente

$$\vec{\nabla}_q \cdot \vec{\Psi}^{(1)} = -D_1(t)\delta(\vec{q}) \quad (4.8)$$

onde $\delta(\vec{q})$ será um campo de contraste de densidade imposto por condições iniciais, e $D_1(t)$ é a mesma função de crescimento da matéria presente em $\mathcal{T}(k, z)$, apenas em aproximação linear. Numa métrica FLRW e num Universo dominado por matéria, esta função de crescimento é dada por

$$D_1(t) = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{2/3} \quad (4.9)$$

onde t_0 é o tempo cósmico atual.

Expansão em segunda ordem (2LPT): Podemos ir além, e encontrar a solução em segunda ordem [59, 60, 61, 62]. Esta é muito mais precisa em relação à aproximação de Zel'dovich, no que diz respeito à evolução da densidade de matéria (Jenkins 2010 [62]). O termo de segunda ordem $\vec{\Psi}^{(2)}$ para o vetor de deslocamento $\vec{\Psi}$ será dado pela equação

$$\vec{\nabla}_q \cdot \vec{\Psi}^{(2)} = \frac{1}{2} D_2(t) \sum_{i \neq j} \left[\vec{\Psi}_{i,i}^{(1)} \cdot \vec{\Psi}_{j,j}^{(1)} - \vec{\Psi}_{i,j}^{(1)} \cdot \vec{\Psi}_{j,i}^{(1)} \right]. \quad (4.10)$$

Uma das vantagens desta expressão é que a função de crescimento $D(t)$ possui valores muito precisos para a cosmologia Λ CDM: para $0.01 \leq \Omega_m \leq 1$ (veja Bouchet et al. 1995, Eq. 34 [63]),

$$D_2(t) \approx -\frac{3}{7} D_1^2(t) \Omega_m^{-1/143} \approx -\frac{3}{7} D_1^2(t) \quad (4.11)$$

Do mesmo modo que na aproximação de Zel'dovich utilizamos que as soluções Lagrangianas são livres de rotacional (até segunda ordem), podemos re-escrever os termos do lado direito das Eqs. (4.8) e (4.10) em função de Laplacianos de potenciais $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$. Dessa forma, escrevemos o vetor posição das partículas diretamente através de

$$\vec{r}(\vec{q}) = \vec{q} - D_1 \vec{\nabla}_q \phi^{(1)} + D_2 \vec{\nabla}_q \phi^{(2)}, \quad (4.12)$$

onde os potenciais $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$ obedecem às equações de Poisson

$$\nabla_q^2 \phi^{(1)}(\vec{q}) = \delta(\vec{q}) \quad (4.13)$$

$$\nabla_q^2 \phi^{(2)}(\vec{q}) = \sum_{i>j} \{ \phi_{,ii}^{(1)} \phi_{,jj}^{(1)} - [\phi_{,ij}^{(1)}]^2 \},$$

as quais podem ser calculadas numericamente através de rotinas de FFT. Por último, po-

demost calcular o campo de velocidade das partículas: sendo t o tempo cósmico, temos

$$\begin{aligned}
\vec{v} &\equiv \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{dD_1}{dt}\vec{\nabla}_q\phi^{(1)} + \frac{dD_2}{dt}\vec{\nabla}_q\phi^{(2)} \\
&= -Ha\frac{dD_1}{da}\vec{\nabla}_q\phi^{(1)} + Ha\frac{dD_2}{da}\vec{\nabla}_q\phi^{(2)} \\
&= -D_1\underbrace{\frac{d\ln(D_1)}{d\ln(a)}}_{f_1}H\vec{\nabla}_q\phi^{(1)} + D_2\underbrace{\frac{d\ln(D_2)}{d\ln(a)}}_{f_2}H\vec{\nabla}_q\phi^{(2)} \\
\implies \vec{v} &= -D_1 f_1 H \vec{\nabla}_q\phi^{(1)} + D_2 f_2 H \vec{\nabla}_q\phi^{(2)}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Novamente, os termos f_1 e f_2 são bem aproximados por

$$\begin{aligned}
f_1 &\approx \Omega_m^{5/9} \\
f_2 &\approx 2\Omega_m^{6/11}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

O método 2LPT permite o cálculo rápido do movimento de ‘pedaços’ de matéria, e pode ser utilizado em conjunto com outros métodos a fim de se criar simulações ‘mock’ mais precisas em escalas não-lineares. Um exemplo é o algoritmo PTHalos (Scoccimaro, Sheth 2002 [64]), que simula o movimento de halos de matéria escura através de 2LPT, e então distribui matéria dentro desses halos através de uma função de distribuição de matéria (por exemplo, a NFW [65], utilizada no artigo). Nosso foco, entretanto, são as simulações em larga escala e como podemos levar o formalismo de 2LPT ao espaço de redshift e aos cones de luz.

4.2 2LPT e Cones de Luz no Espaço de Redshift

A grande vantagem do formalismo de 2LPT no contexto de simulações do cone de luz é a simplicidade em obtê-los: em uma simulação de N-corpos, por exemplo, o que geralmente é feito consiste em armazenar diversos volumes do Universo em tempo constante (ou ‘*snapshots*’), e então recortá-los em várias ‘casca’ esféricas. Este procedimento toma tempo computacional e espaço de armazenamento, e é longe de eficiente para simulações em Larga-Escala. Com o 2LPT, entretanto, a posição de cada porção de matéria ao longo do tempo é determinada unicamente por sua posição inicial e pelos termos temporais $D_1(t)$ e $D_2(t)$. Para realizarmos o processo de transformar uma simulação de snapshots para um cone de luz, basta evoluirmos cada porção de matéria em um raio r de acordo com os termos temporais $D_{(1)}(t_0 - r/c)$ e $D_{(2)}(t_0 - r/c)$.

O próximo passo seria transformar o cone de luz do espaço real para o espaço de redshifts. Isto também pode ser obtido facilmente através do 2LPT, já que este fornece o campo de velocidade da matéria. Então, basta tomar o termo de velocidade peculiar da matéria $v_{pec} = \vec{v} \cdot \hat{r}$ e aplicar ao conceito de distorção da Eq. (2.5). É claro que o formalismo de 2LPT simplifica muito os cálculos, mas isto também implica que devemos ter uma grande resolução (ou um grande número de células) para sermos capazes de perceber o efeito das distorções de redshift.

Como exemplo, criamos uma caixa com várias partículas distribuídas uniformemente, obtendo as caixas evoluídas para um snapshot do Universo atual e um cone de luz da figura 23.

Queremos também ser capazes de construir uma simulação em 2LPT através de um $\delta(\vec{q})$ que siga certo espectro de potência da matéria $P(k)$, pois é deste que geralmente retiramos as teorias cosmológicas. Na próxima seção, daremos uma prescrição de como realizar tal $\delta(\vec{q})$ e verificar a validade de relações como a Eq. (3.13) em um cenário um pouco mais realista.

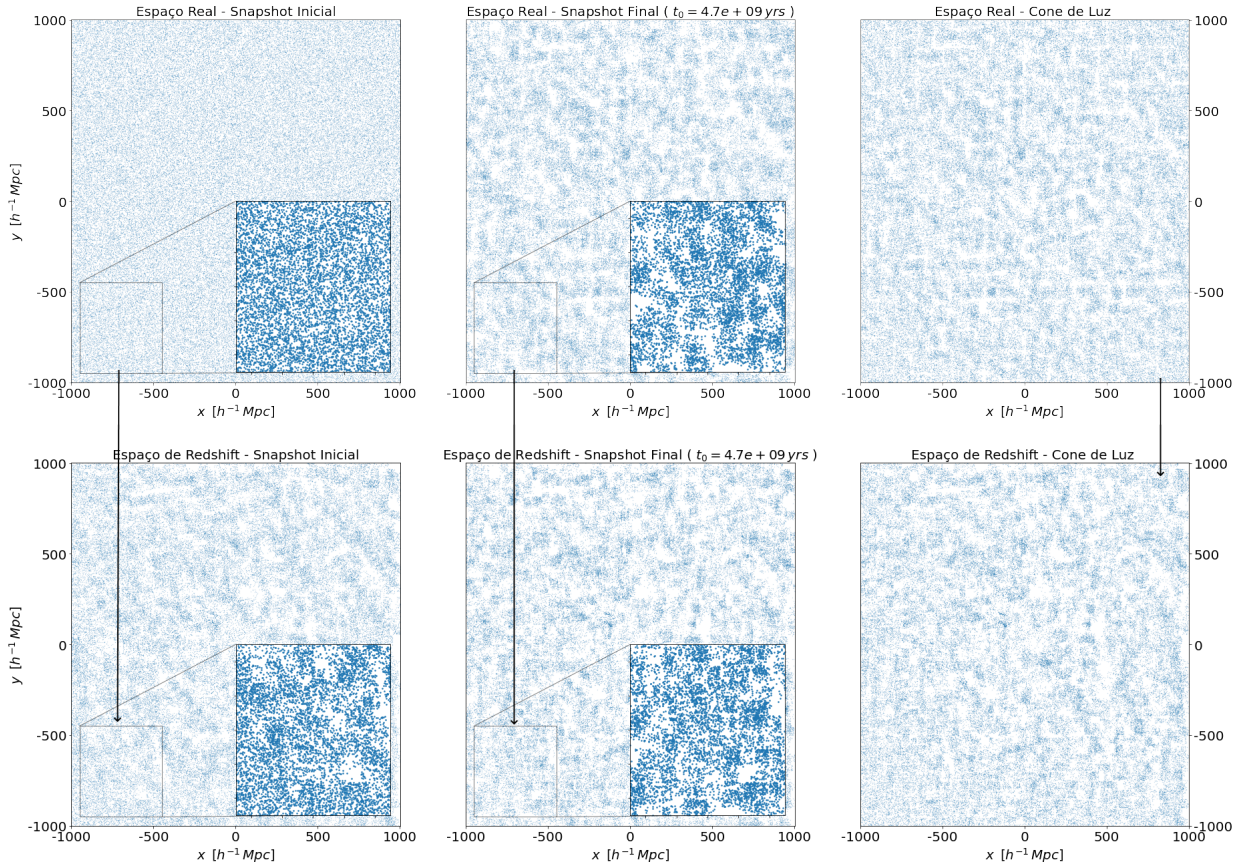


Figura 23: Nos painéis superiores, a evolução de uma caixa no espaço real com 128^3 partículas, através do formalismo 2LPT. No painel à esquerda, colocamos 128^3 partículas uniformemente dispostas em uma caixa de lados $2000 h^{-1} Mpc$. A partir desta, evoluímos porções de matéria (células cúbicas de lado $\Delta_L = 50 h^{-1} Mpc$) através do formalismo 2LPT, até um tempo de $t_0 = 4.7 \times 10^9$ anos (painel central). O modelo cosmológico utilizado foi o *flat*- Λ CDM, com densidade de relíquia da matéria $\Omega_m = 0.7$, de forma que os valores para $D(z)$ e $f(z)$ são dados respectivamente pelas Eqs. (4.9) e (4.15). Alternativamente, podemos evoluir cada partícula proporcionalmente à sua distância radial do centro, de forma a criarmos um cone de luz (painel direito). Vemos que à medida em que nos aproximamos do centro da caixa, temos porções cada vez mais evoluídas. Painéis inferiores: evolução da mesma caixa no espaço de redshift com 128^3 partículas, através do formalismo 2LPT. No painel à esquerda, a versão no espaço de redshift de 128^3 partículas uniformemente dispostas no espaço real, em uma caixa de lados $2000 h^{-1} Mpc$. Nos painéis central e direito, evoluímos porções de matéria da mesma maneira das figuras superiores, e então trazemos estas partículas para o espaço de redshift aplicando-se a Eq. 4.14 para a velocidade peculiar na Eq. 2.5.

5 Simulações ‘mock’ em grande escala

Como discutido anteriormente, precisamos de um grande número de simulações de um mesmo volume a fim de compararmos teoria (como as equações 3.13 e 3.15) com observações (Eq. 3.8). Como neste caso podemos recorrer ao 2LPT para fazer tais simulações, não é preciso simular o movimento de partícula a partícula, como feito na figura 23. Basta que simulemos diretamente o campo de contraste de densidade, pois é a partir deste que realizamos o movimento de todas as partículas. Nesta seção, vamos discutir uma prescrição de como realizar simulações de campos de contraste de densidade com oscilações regidas por um espectro de potência da matéria específico. O fato de estarmos simulando uma caixa discretizada do Universo irá acarretar em algumas consequências na comparação entre observação e teoria, como veremos adiante.

5.1 Princípios Básicos em um Toy Model

A maneira mais clara de enxergar as propriedades de uma caixa discretizada do Universo pode ser obtida se criarmos um campo de contraste de densidade que segue um espectro de potência da matéria analítico. Como bônus, seria ideal que este espectro de potência gerasse um espectro angular também analítico. Vamos então criar um modelo de brinquedo (ou *Toy Model*), onde possamos criar tal campo de contraste de densidade, e a partir dele estudar sua estatística em um snapshot (volume inteiro a tempo constante) e no espaço (comóvel) real. As propriedades para um volume tanto no cone de luz como no espaço de redshift irão seguir deste, como discutido na seção anterior.

Um dos espectros de potência mais simples que podemos criar consiste em um formato de chapéu (ou *top-hat*), onde permitimos que hajam flutuações no campo de contraste de densidade apenas em algumas escalas específicas: este espectro será dado por

$$P(k) = \epsilon (\theta(k - k_1) - \theta(k - k_2)). \quad (5.1)$$

Onde θ é a função *passo* de Heaviside, k_1 é a escala máxima de flutuações de densidade, e k_2 é a escala mínima. ϵ é uma constante arbitrária, em unidades de $[Mpc/h]^3$, e nos dará a amplitude destas flutuações.

Antes de definirmos quem serão estas constantes, é crítico que saibamos quais as dimensões da caixa que iremos simular. Isto porque não queremos que as oscilações sejam menores que a resolução da caixa, nem que sejam muito maiores do que a caixa.

Vamos então definir uma caixa na qual faremos nossas simulações:

$$\begin{aligned} L &= 500 \text{ Mpc } h^{-1} && \text{[Tamanho Lateral da Caixa]} \\ \Delta L &= 5 \text{ Mpc } h^{-1} && \text{[Tamanho Lateral das Células]} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ou seja, temos uma caixa de volume $500 \times 500 \times 500 \text{ [Mpc/h]}^3$ subdividida em 100^3 células, nas quais poderemos inferir um valor de $\delta(\vec{r})$, por exemplo.

Se agora tomarmos a frequência da amostragem das posições no espaço de Fourier, vemos que o nosso valor mínimo de k (ou escala máxima do espaço real) será $k_{min} = 2 * \pi/L \approx 1.25 \times 10^{-2} \text{ h Mpc}^{-1}$. Da mesma forma, o valor máximo de k (ou resolução máxima da caixa) será $k_{max} = \pi/\Delta L \approx 6.15 \times 10^{-1} \text{ h Mpc}^{-1}$. Portanto, buscamos um valor de k_1 que não seja menor que k_{min} , e um valor de k_2 que não ultrapasse k_{max} . Além disso, para que o formato do chapéu seja fielmente representado na nossa caixa, é preciso que a largura deste chapéu seja no mínimo maior que $2 k_{min}$, de forma que tenhamos uma boa amostragem de frequências no espaço de Fourier. A figura 24 mostra dois casos diferentes de k_1 e k_2 , com $\epsilon = 10$, onde podemos observar que a escolha de constantes erradas podem levar a uma pobre amostragem de $P(k)$ em nossa caixa discretizada, resultando em medidas com grande flutuação estatística. Alternativamente, isto também nos diz o óbvio a respeito do que queremos medir: se quisermos obter medições precisas dos espectros de potência linear $P(k)$ e angular $C_\ell(r, r')$ em regiões específicas do espectro, precisamos verificar se nossa divisão do volume observado nos fornece células com resolução suficiente.

Motivados pela discussão anterior, vamos definir as seguintes constantes:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \times 10^{-1} \text{ h Mpc}^{-1} \\ k_2 &= 3 \times 10^{-1} \text{ h Mpc}^{-1} \\ \epsilon &= 10 \text{ [Mpc/h]}^3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Com um espectro de potência da matéria em mãos, o que queremos agora é realizar uma amostra *Gaussiana* do campo de contraste de densidade no espaço de Fourier, $\tilde{\delta}(\vec{k})$. Ou seja, queremos uma realização de um campo $\tilde{\delta}(\vec{k})$ que obedeça à seguinte função densidade de probabilidade:

$$P(|\tilde{\delta}|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi V P(k)}} \exp \left[\frac{-|\tilde{\delta}|^2}{2 V P(k)} \right] \quad (5.4)$$

A partir deste campo $|\tilde{\delta}|$ criado, podemos obter os modos $\tilde{\delta}(\vec{k})$ de fato ao adicionarmos

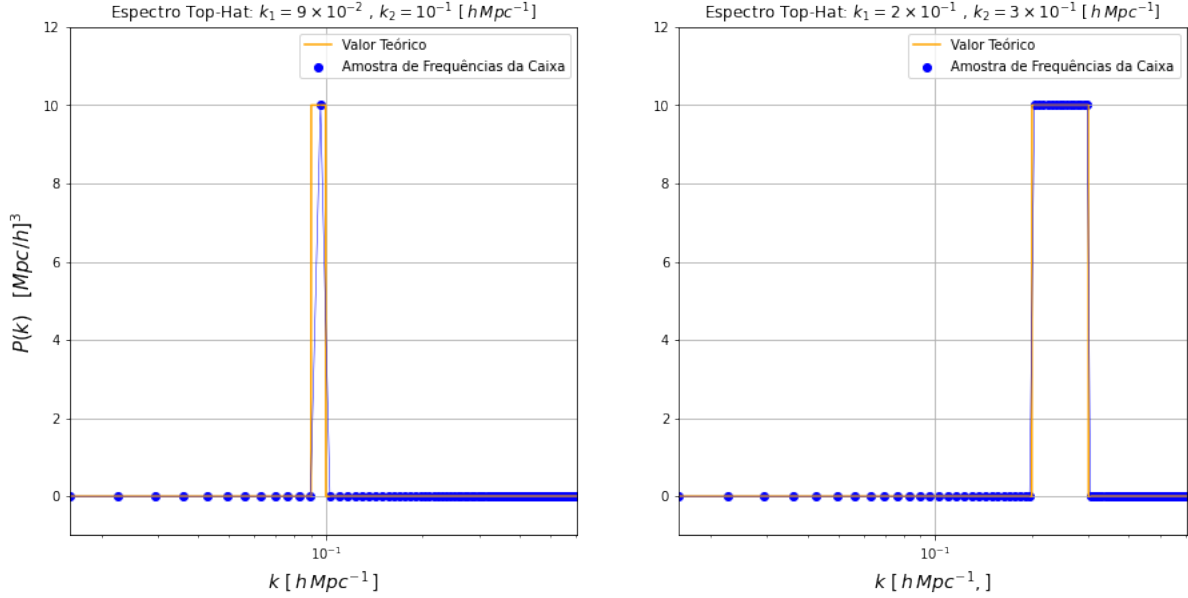


Figura 24: Comparação entre escolhas diferentes de k_1 e k_2 : o gráfico à esquerda mostra o valor teórico de $P(k)$ para $k_1 = 9 \times 10^{-2}$, $k_2 = 1 \times 10^{-1}$, versus a curva representada pelas amostras de frequência da nossa caixa. Apesar das flutuações de matéria estarem dentro dos limites de escala da caixa, a escolha de k_1 e k_2 deixa de ser ideal, pois possui uma largura $\Delta k = k_2 - k_1 = 1 \times 10^{-9} < 2 k_{min}$. O $P(k)$ definido compreende uma área ‘amostrada’ por apenas um modo de frequência, de forma que no momento de calcular a média da correlação dos coeficientes de Fourier, $\langle \tilde{\delta}(\vec{k}) \tilde{\delta}^*(\vec{k}') \rangle$, obteremos um resultado pobre. O ideal seria algo como o gráfico à direita, onde o $P(k)$ definido por k_1 e k_2 compreende uma região povoada por vários modos de frequência da caixa. Como veremos, esta definição de k_1 e k_2 nos fornecerá uma representação fiel do espectro $P(k)$.

a cada ponto uma fase $e^{i\alpha 2\pi}$, onde α é um valor uniformemente aleatório entre 0 e 1.

Com o campo no espaço de Fourier em mãos, poderíamos facilmente tomar um FFT inverso a fim de obter o campo de contraste de densidade da matéria, $\delta(\vec{r})$.

Até agora, consideramos que nosso observável era um campo aleatório Gaussiano da matéria, $\delta(\vec{r})$, que no espaço de Fourier e no limite do contínuo obedece à equação (3.11). Como discutido na introdução, temos algumas limitações do ponto de vista observacional: nossa observação não é a matéria em si, mas *traçadores* de matéria, que formam um campo *discreto*, e não contínuo. Portanto, vamos dar um passo adiante e levar nossa análise a um contexto de traçadores, $\delta \rightarrow \delta^t$:

$$\delta^t(\vec{r}) = \frac{n_t(\vec{r}) - \bar{n}_t}{\bar{n}_t} \quad (5.5)$$

$$\delta^t(\vec{r}) = b_t \delta(\vec{r})$$

onde $n_t(\vec{r})$ é a densidade de contagem de traçadores no ponto \vec{r} , e \bar{n}_t é o valor médio em todo o volume da observação. b_t é o *viés* (ou *bias*) do traçador, que consideraremos como sendo um valor constante para cada tipo, sem que haja grandes alterações na teoria.

No nosso caso, queremos simular a contagem de traçadores numa grade de células cartesianas de volume ΔL^3 , de forma que podemos escrever

$$\frac{N_t(\vec{r}) - \bar{N}_t}{\bar{N}_t} = b_t \delta(\vec{r}) \quad (5.6)$$

Portanto, vemos que podemos simular um campo de contagem de traçadores através de

$$N_t(\vec{r}) = \bar{N}_t[1 + b_t \delta(\vec{r})] \quad (5.7)$$

Existem duas observações a serem feitas a respeito desta expressão.

Primeiramente, existem lugares no Universo em que a densidade é muito maior do que 1, ao mesmo tempo em que há lugares em que $\delta < -1$. Isto, somado ao fato de que traçadores podem ter um bias $b^t > 1$, nos leva a concluir que podemos acabar simulando locais com $N_t(\vec{r}) < 0$!

A equação (5.7) somente é válida em *aproximação linear*, onde a *variância esférica* (isto é, a variância do contraste de densidade da matéria dentro de uma esfera de raio R) é muito menor do que 1, de forma que a aproximação de amostragem Gaussiana é válida.

Em regiões *não-lineares* (onde a variância esférica se torna comparável a 1), a forma exata como o contraste do traçador e da matéria se relacionam é um pouco mais complexa. de forma geral, podemos escrever

$$N_t(\vec{r}) = \bar{N}_t[1 + A \delta(\vec{r}) + B \delta(\vec{r})^2 + C \delta(\vec{r})^3 + \dots] \quad (5.8)$$

de forma que o polinômio é restringido por $N_t > 0$.

Portanto, a equação (5.7) é uma expressão aproximada, que devemos utilizar dentro do limite de aproximação linear (em outras palavras, no regime de perturbações Gaussianas).

Além disso, não observamos frações de traçadores (ou detectamos ele, ou não!). Dessa forma, discretizamos $N_t(\vec{r})$ utilizando-se de uma distribuição de Poisson. Este passo tem como consequência a inclusão de um termo de ruído (denominado também por '*shot-noise*') na função de correlação dos modos de Fourier do traçador, que veremos a seguir.

Tomando-se a transformada de Fourier de $\delta^t(\vec{r})$, denotada agora por $\tilde{\delta}^t(\vec{k})$, gostaríamos

de verificar que

$$\langle \tilde{\delta}^i(\vec{k}) \tilde{\delta}^{*j}(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \left[\frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} + b_i b_j P_m(k) \right]. \quad (5.9)$$

O primeiro termo dentro dos colchetes, $\frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i}$, é o ‘shot-noise’ devido à distribuição de Poisson, enquanto que o segundo termo é definido pelo processo de amostragem Gaussiana. A derivação para o termo de shot-noise é realizada no **apêndice D**.

Desde que discretizamos nosso campo em células, o delta de Dirac na Eq. (5.9) torna-se $\delta_{\vec{k}\vec{k}'} (L/2\pi)^3$; analogamente, \bar{n}_i agora é $\bar{N}_i/\Delta L^3$. Dessa forma, o que realmente esperamos medir destes modos de Fourier não é exatamente o espectro de potência $P(k)$, mas sim

$$\langle \tilde{\delta}^i(\vec{k}) \tilde{\delta}^{*j}(\vec{k}') \rangle = L^3 \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \left[\frac{\delta_{ij} \Delta L^3}{\bar{N}_i} + b_i b_j P_m(k) \right] \quad (5.10)$$

Ainda resta saber como faremos a medição do lado esquerdo da expressão. Como estamos assumindo isotropia, podemos estender o vetor \vec{k} a todas as posições da caixa em que $|\vec{k}| = k$. Como não temos posições infinitesimais, ainda realizamos uma ‘binagem’, ou seja, definimos os pontos k_i como todas as células do campo de contraste de densidade no espaço de Fourier que estejam dentro da ‘casca’ esférica $[k_i - \Delta k/2, k_i + \Delta k/2]$. Δk é uma largura arbitrária, mas deve preferencialmente ser maior do que k_{min} , que determina o tamanho das células no espaço de Fourier. Por simplicidade, vamos escolher um valor ligeiramente maior que k_{min} , $\Delta k = 1.34 \times 10^{-2} h Mpc^{-1}$. A Figura 25 mostra uma esquematização do cálculo desta função de correlação em ‘bins’.

Como exemplo, vamos tomar $b_i = b_j = 1$, $\bar{N}_i = \bar{N}_j = 1000$ traçadores/bin: isto implica em

$$\langle |\tilde{\delta}^i(\vec{k})|^2 \rangle = L^3 \left[\frac{\Delta L^3}{\bar{N}_i} + P(k) \right] \quad (5.11)$$

o que se verifica na figura 26.

Antes de prosseguirmos, vamos verificar se os campos de contraste de densidade provenientes de $\tilde{\delta}^t(\vec{k})$ respeitam o regime linear: para isto, vamos calcular a variância esférica σ_R^t destes traçadores, e compararmos com a expressão teórica

$$\sigma_R^t = \int_0^\infty \frac{d^3k}{(2\pi)^3} |W_R(k)|^2 \left[\frac{1}{\bar{n}_t} + b_t^2 P(k) \right], \quad (5.12)$$

onde $|W_R(k)|$ é uma *função janela esférica*:

$$|W_R(k)|^2 = \left[\frac{3 j_1(kR)}{kR} \right]^2 \quad (5.13)$$

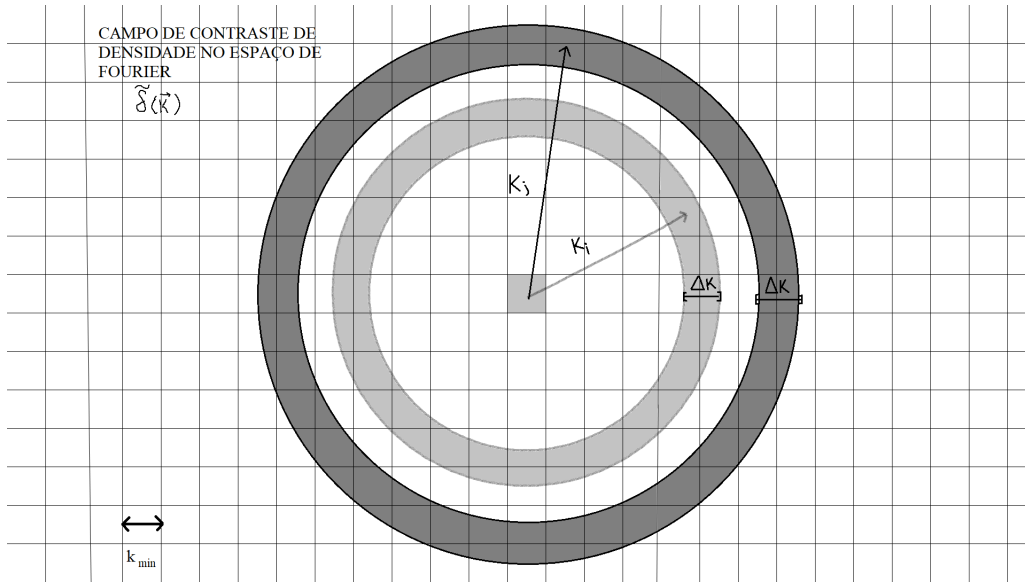


Figura 25: Cálculo da correlação dos modos de Fourier em bins: contabilizamos o contraste de densidade de todas as células dentro de uma ‘casca’ esférica de raios centrais k_i e k_j , com espessura $\Delta k = 1.34 \times 10^{-2}$. Então, realizamos a média de cada $\delta^i(k_i) \delta^{*j}(k_j)$ contabilizado.

Por conter funções esféricas de Bessel, a integral presente na Eq. (5.12) pode se tornar computacionalmente difícil. Para este tipo de integral, utilizamos um método de somatória de *Coefficientes de Clebshaw-Curtis*, que facilita os cálculos. Em programação *Python*, por exemplo, este método está embutido em bibliotecas como a `scipy.integrate` [66].

No contexto do cálculo do espectro de potência da matéria, um algoritmo que explica detalhadamente o processo de integração através de coeficientes de Clebshaw-Curtis é realizado por *J.-E. Campagne, J. Neveu e S. Plaszczynski* no software **Angpow** [67].

A figura 27 mostra um comparativo direto entre o cálculo analítico da Eq. (5.12) e o cálculo numérico, simplesmente avaliando-se a variância das células de δ^1 , onde vemos que a variância permanece num regime pequeno se comparado a 1, mesmo em pequenas escalas.

Finalmente, temos a justificativa para escolher $\epsilon = 10$: além deste produzir um campo de contraste de densidade onde as flutuações são muito menores do que a ordem 1, também a variância em suas amostras Gaussianas é pequena, de modo que é muito improvável que possamos produzir uma caixa onde uma célula apresente $|\delta| \sim 1$ e assim aborreça a nossa aproximação dada pela Eq. (5.7). Esta escolha arbitrária de ϵ pode ser feita sem maiores preocupações, pois apenas altera a amplitude dos nossos observáveis, e não o seu formato, que é essencialmente nosso objeto de interesse.

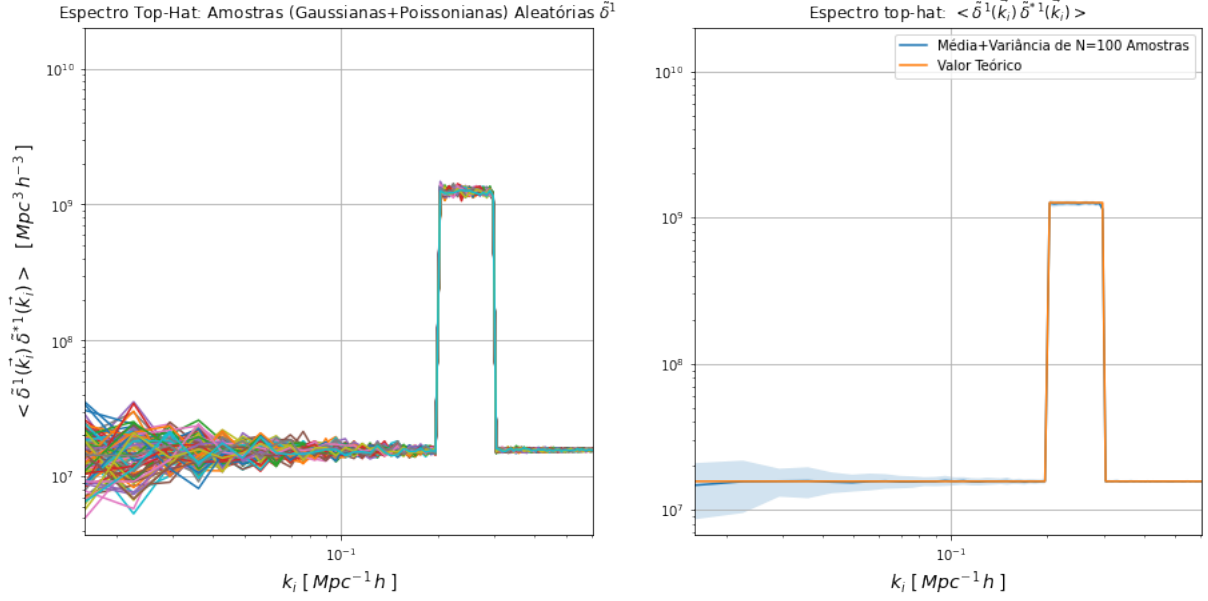


Figura 26: Espectro de potência ‘Top hat’: no painel esquerdo, 100 amostras (Gaussianas+Poissonianas) de $|\tilde{\delta}^1|^2$, onde cada k' é na verdade um ‘bin’, ou casca esférica de espessura $1.34 \times 10^{-2} h \text{ Mpc}^{-1}$. No painel à direita, a média $\langle |\tilde{\delta}^1|^2 \rangle$ comparada com a expressão analítica da Eq. (5.11). Aqui fica claro o motivo por trás da escolha de k_1 e k_2 tal como fizemos: toda caixa possui uma resolução máxima; escolhemos k_1 e k_2 num intervalo onde há um grande número de ‘amostras’ de frequência. Em outras palavras, a escolha deste intervalo de escalas criará estruturas nem muito pequenas (cuja resolução da caixa não conseguiria distinguir) nem muito grandes (que não cabem em nossa caixa). Para criarmos estruturas menores, precisaríamos aumentar a resolução da nossa caixa, diminuindo o tamanho das células. Entretanto, o preço que se paga é o tempo de computação, já que o número de células a serem processadas cresce com ΔL^{-3} .

O próximo passo é computar os modos *harmônicos* $\delta_{\ell m}^t$ do traçador:

$$\delta_{\ell m}^t(\vec{r}) = \int_{\vec{r}} d\Omega_r \delta^t(\vec{r}) Y_{\ell m}^*(\hat{r}) \quad (5.14)$$

Aqui, novamente o fato de termos um campo discretizado nos leva a realizar uma somatória em bins. Neste caso, a integral no angulo sólido se torna uma soma sobre todas as células dentro de $[\vec{r} - W/2, \vec{r} + W/2]$, normalizada por $\int_{\vec{r}} d\Omega_r / 4\pi$. W é uma *espessura de bin* arbitrária, em $\text{Mpc } h^{-1}$.

Com N amostras de $\delta_{\ell m}^t$, podemos computar a *função de correlação dos modos harmônicos* entre dois traçadores α e β :

$$C_{\ell, obs}^{\alpha\beta}(\vec{r}, \vec{r}') = \langle \hat{C}_\ell \rangle = \frac{1}{(2\ell + 1)} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \langle \delta_{\ell m}^\alpha(\vec{r}) \delta_{\ell m}^{*\beta}(\vec{r}') \rangle \quad (5.15)$$

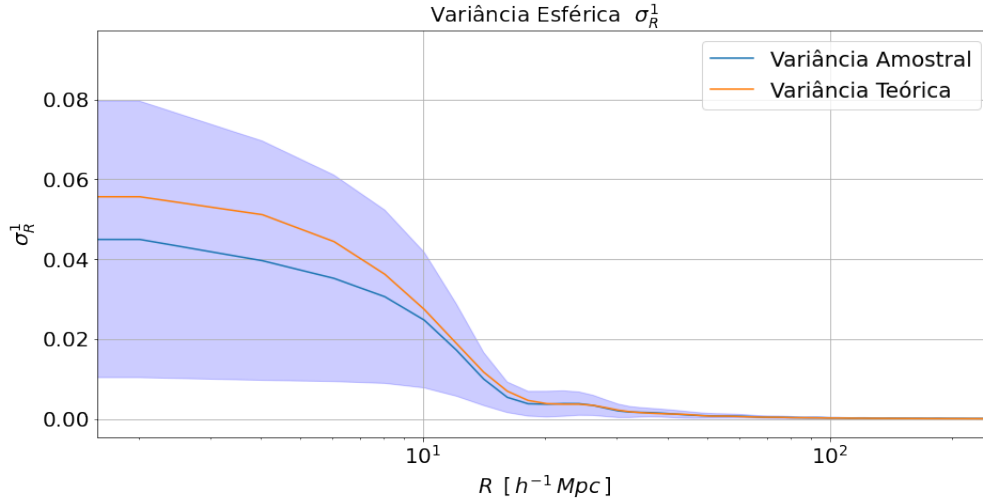


Figura 27: Variância do contraste de densidade Gaussiano dentro de uma esfera de volume R . O gráfico teórico é calculado através da equação (5.12). A variância amostral é uma estimativa realizada através de uma mesma caixa, realizando-se o cálculo numérico da variância em $N = 100$ volumes de raio R e centros aleatórios, e então tomando-se a média. A região hachurada em azul representa o erro desta estimativa em cada raio. Uma descrição detalhada deste cálculo é apresentada no **apêndice E**.

onde a média é realizada sobre as N amostras de $\delta_{\ell m}^{\alpha}$ e $\delta_{\ell m}^{\beta}$.

Nosso interesse agora é comparar a simulação $C_{\ell, obs}^{\alpha\beta}(\bar{r}, \bar{r}')$ com a função de correlação *teórica*, a qual denotaremos por $C_{\ell, th}$. Aplicando a Eq. (5.1) em (3.13), obtemos uma expressão teórica que se aproxima dos valores medidos:

$$C_{\ell, th}^{\alpha\beta}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{2}{\pi} \left\langle \underbrace{\frac{\pi \delta_{r, r'} \delta_{\alpha\beta} \Delta L^3}{2 \bar{N}_{\alpha} r^2 \Delta L}}_{\text{Termo de Shot-Noise}} + \underbrace{b_{\alpha} b_{\beta} \left[k_1^3 g_{\ell}(k_1 r, k_1 r') - k_2^3 g_{\ell}(k_2 r, k_2 r') \right]}_{\xi_{\ell}^{\alpha, \beta}(\bar{r}, \bar{r}')} \right\rangle_{r, r'} \quad (5.16)$$

Assim como na função de correlação dos modos de Fourier, aqui também não mediremos exatamente o espectro de potência angular $\xi_{\ell}^{\alpha, \beta}(\bar{r}, \bar{r}')$; vemos que de fato medimos $\xi_{\ell}^{\alpha, \beta}(\bar{r}, \bar{r}')$ adicionado de um termo de ruído devido ao *shot-noise*, que decai com a densidade de traçadores. À medida em que aumentamos esta densidade (ou alternativamente, o número de traçadores observados em um *levantamento*), nos aproximamos de uma medida de $\xi_{\ell}^{\alpha, \beta}(\bar{r}, \bar{r}')$.

Na equação (5.16), precisamos introduzir os colchetes $\langle \rangle_{\bar{r}, \bar{r}'}$, que denotam uma integral sobre os bins radiais:

$$\left\langle (\dots) \right\rangle_{\bar{r}, \bar{r}'} \equiv \frac{1}{\Delta V_{\bar{r}} \Delta V_{\bar{r}'}} \int_{\bar{r}} dr r^2 \int_{\bar{r}'} dr' r'^2 (\dots) \quad (5.17)$$

Isto é feito para compensar pela somatória em bins realizada na Eq. (5.14), que possui consequências na correlação medida $C_{\ell,obs}$, como veremos adiante.

Por sua vez, g_ℓ é definida por

$$g_\ell(x, y) \equiv -\frac{x j_{\ell-1}(x) j_\ell(y) - y j_{\ell-1}(y) j_\ell(x)}{x^2 - y^2} \\ = \frac{j_0(x-y) - (-1)^\ell j_0(x+y)}{2xy} - \frac{1}{xy} \sum_{n=0}^{N_\ell} [2(\ell-1-2n)+1] j_{\ell-2n}(x) j_{\ell-2n}(y), \quad (5.18)$$

onde a segunda igualdade mostra explicitamente que esta é uma expressão bem-comportada em $x \rightarrow y$. Vemos também que esta expressão é simétrica sobre a troca de x e y . Vale ressaltar que esta expressão, apesar de ser em parte analítica, pode não reproduzir fielmente as correlações medidas $C_{\ell,obs}$ - especialmente em valores radiais baixos. Isto se deve ao fato dos efeitos da discretização (tanto angular quanto radial) serem mais pronunciados nas proximidades do ponto de observação. Além disso, nossa teoria é baseada unicamente de variáveis infinitesimais, de forma que a discretização afeta as derivações feitas no **apêndice B**, e pode causar grande flutuação estatística. Novamente, este problema pode ser corrigido progressivamente com a diminuição das células da caixa, ao custo de tempo computacional. Ao mesmo tempo, geralmente estamos interessados em observações distantes do ponto de observação, então podemos desprezar os dados em raios menores.

Vamos tomar, por exemplo, $\ell = 10$, e um traçador denotado por 1 tal que $b_1 = 1$. Dada as dimensões da nossa caixa, devemos escolher um bin radial de espessura pelo menos maior que $5 \text{ Mpc}/h$, que é o tamanho de uma célula. A fim de tomarmos dados de mais células, e assim termos um resultado menos ruidoso, escolhemos um bin radial de espessura $10 \text{ Mpc}/h$. O efeito desta escolha arbitrária de W é mostrado no gráfico da figura 28:

De forma a não misturar o domínio de cada bin (o que causaria certa inconsistência na definição das Eqs. 5.15 e 5.16, no que tange ao conceito de delta), podemos analisar os raios de $\bar{r} = 5 \text{ Mpc } h^{-1}$ até $\bar{r} = 245 \text{ Mpc } h^{-1}$, de 10 em 10 $\text{ Mpc}/h$. Realizando 1000 caixas seguindo a prescrição das Eqs. (5.2)-(5.18) nos leva aos resultados da figura 29, a qual possui algumas observações a serem feitas:

A primeira observação reside no gráfico da seção diagonal da função de correlação.: é interessante que mesmo contabilizando a somatória em bins radiais na contraparte teórica (Eq. 5.16), ainda exista uma discrepância significativa em raios maiores entre teoria e observação.

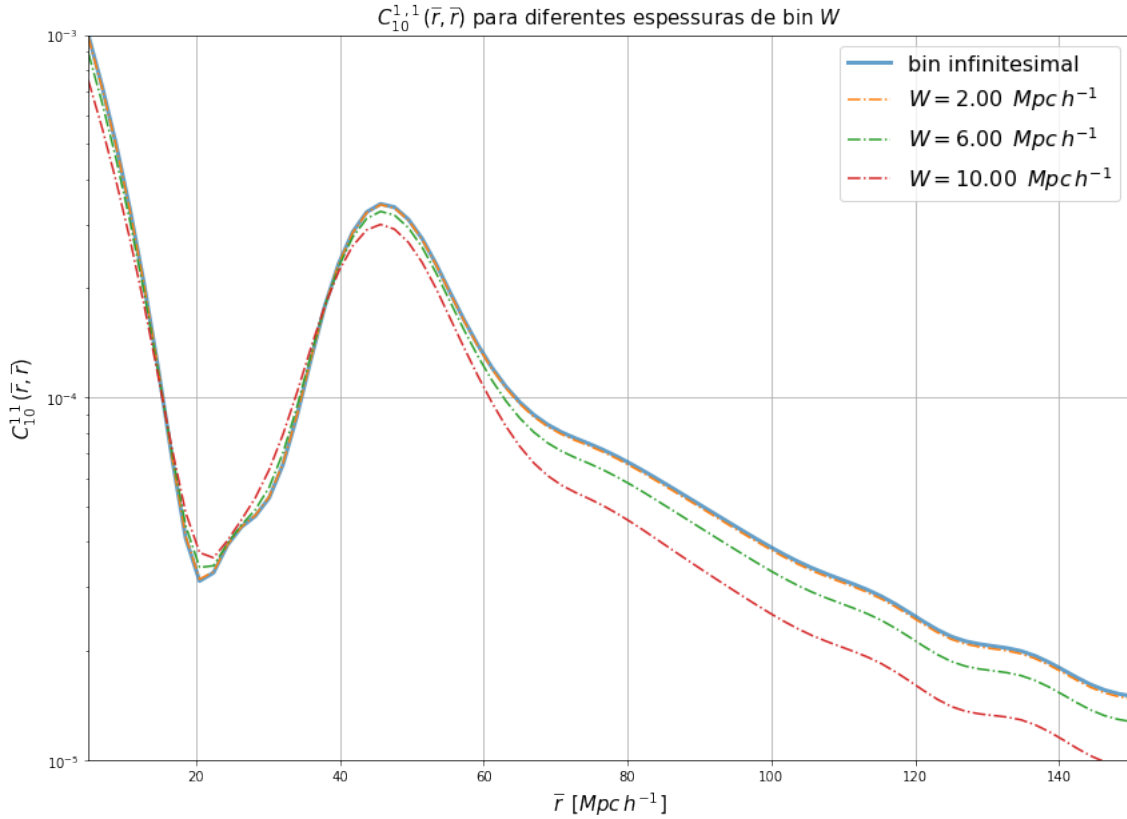


Figura 28: Comparação entre a versão infinitesimal da Eq. (5.16), sem a integração representada pelos colchetes (linha azulada), e versões ‘binadas’: à medida em que aumentamos a espessura do bin, suavizamos a curva da função de correlação. À medida em que diminuimos este valor, nos aproximamos cada vez mais rapidamente do real valor esperado para um C_ℓ infinitesimal. Vemos que para a nossa simulação, há uma diferença considerável entre os valores infinitesimais e ‘binados’. Um computador capaz de puxar a resolução das células a $1 \text{ Mpc}/h$ (de forma que escolheríamos $W = 2 \text{ Mpc}/h$) já produziria resultados suficientemente satisfatórios com a versão infinitesimal, com diferenças da ordem de 1.4%. Para efeitos de comparação, tomar todos as correlações de 1000 caixas de 100^3 células, para $\ell = 10$ leva em torno de 4 horas em um processador de 12 *threads*.

Uma maneira possível de corrigir essa discrepância é a de renormalizar a função de correlação utilizando um fator constante. No nosso caso, renormalizando por um fator $\sqrt{\pi}/2$ resolve o problema da amplitude para todos os valores de ℓ investigados (veja o **Apêndice de Figuras** - página 101 - onde mostramos a mesma renormalização para $\ell = 20$ e $\ell = 40$). Isso nos leva a concluir que houve uma diferença de normalização teórica e implementada pelo algoritmo que calcula os esféricos harmônicos, e portanto é a maneira correta de se corrigir a discrepância observada.

A segunda observação reside no gráfico de resíduo: o plot acima nos mostra o que já poderíamos esperar através de um argumento análogo ao da Fig. 26: a baixa amostragem em raios menores torna difícil a comparação entre as correlações cruzadas medidas e

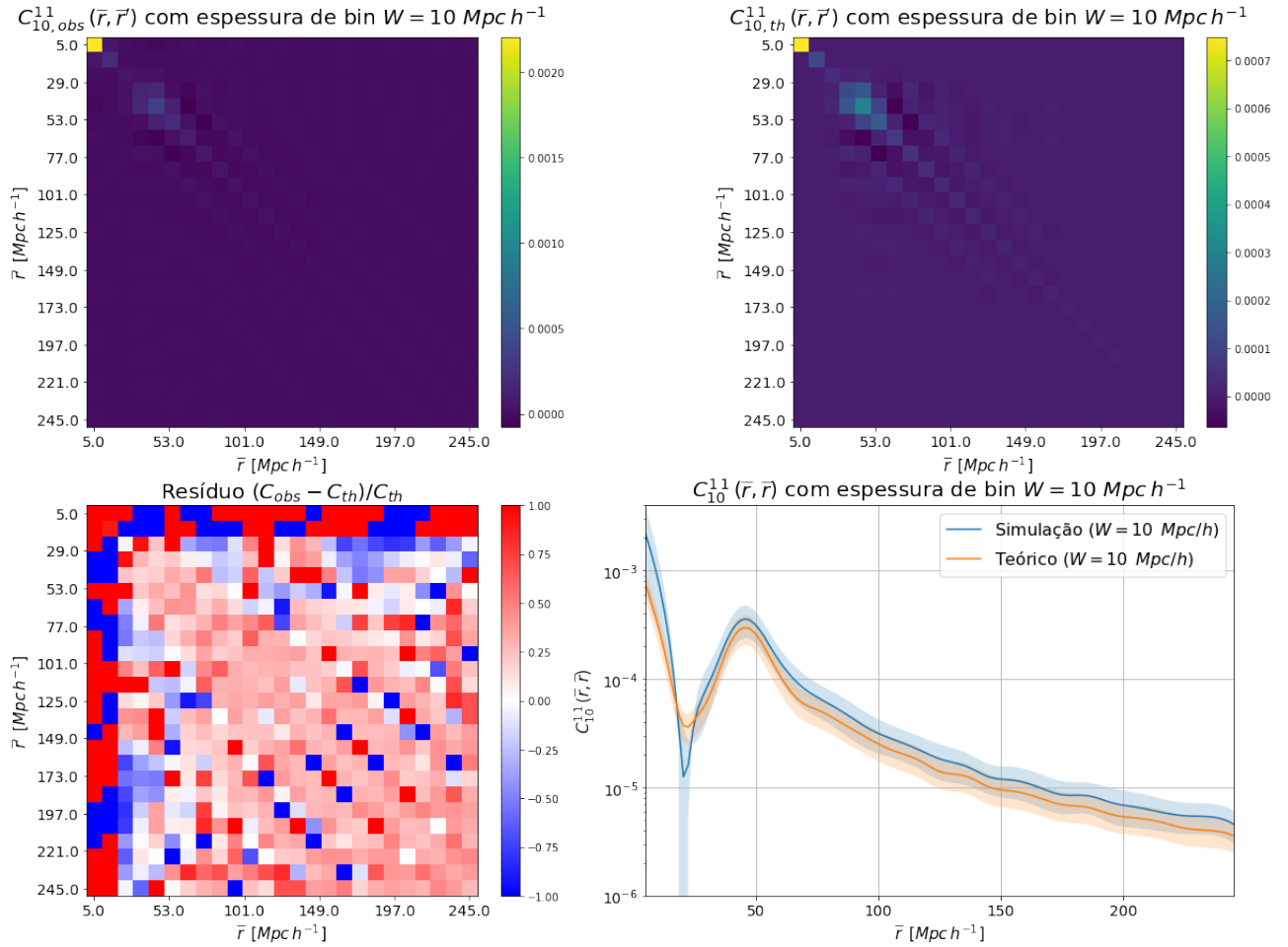


Figura 29: Função de Correlação dos modos harmônicos para um espectro de potência da matéria ‘top-hat’: o painel esquerdo superior mostra nossa função de correlação medida, $C_{10,obs}^{1,1}(\bar{r}, \bar{r}')$. O painel superior direito é a sua contraparte teórica, $C_{10,th}^{1,1}(\bar{r}, \bar{r}')$, calculada a partir da Eq. 5.16. No painel inferior esquerdo, plotamos o resíduo entre $C_{10,th}^{1,1}$ e $C_{10,obs}^{1,1}$. Para fins de visualização, uma comparação direta entre ambos os cálculos é mostrada no painel inferior direito, onde tomamos um gráfico em escala logarítmica da seção diagonal da função de correlação.

esperadas. Esta comparação fica melhor à medida em que analisamos raios maiores, onde a amostragem é simplesmente maior. Novamente, o Espectro de Potência Angular se torna mais acurado à medida que aumentamos o número de células da caixa (a fim de diminuir-se a largura dos bins), ao custo de tempo computacional.

A última observação reside nos painéis superiores da figura 29: Como a maior amplitude corresponde ao ruído próximo a $\bar{r} = 0$ (e portanto ofusca outros pontos que contém informação relevante), a análise destes gráficos fica um pouco comprometida. A solução para este problema reside na construção da *matriz de correlação* de C_ℓ , denotada por

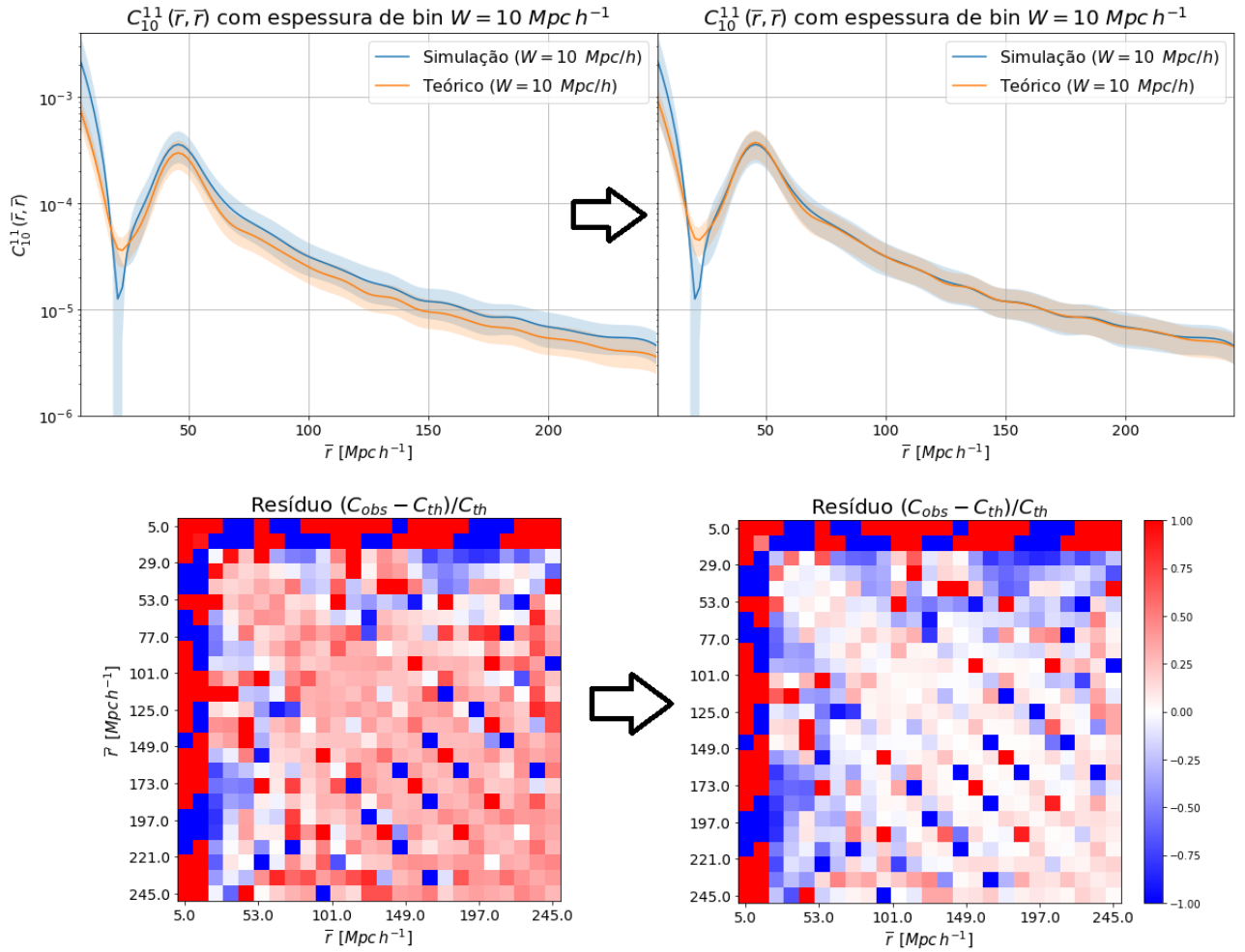


Figura 30: Cálculo da função de correlação Teórica: realizamos uma renormalização no espectro teórico obtido através da Eq. (5.16) por um fator $\sqrt{\pi}/2$. Nos painéis inferiores, mostramos a consequência desta renormalização no gráfico de resíduos de $C_\ell(\bar{r}, \bar{r}')$.

$Corr_\ell[\bar{r}, \bar{r}']$:

$$Corr_\ell[\bar{r}, \bar{r}'] = \frac{C_\ell(\bar{r}, \bar{r}')}{\sqrt{C_\ell(\bar{r}, \bar{r}) C_\ell(\bar{r}', \bar{r}')}} \quad (5.19)$$

Utilizando esta definição, podemos re-fazer os *plots* superiores da figura 29. Utilizando a função de correlação teórica renormalizada da figura 30, obtemos os *plots* da figura 31, que nos mostram com mais clareza todas as estruturas de C_ℓ em nossa caixa.

A última observação a respeito das figs. (29)-(31) reside na estimativa de erros. Com o auxílio da Eq. (3.10) (e utilizando o mesmo procedimento do Apêndice A), podemos estender a estimativa para a matriz de covariância do espectro angular a um contexto de multi-traçadores:

$$Cov[\xi_\ell^{[ij]}, \xi_\ell^{[i'j']}] = \frac{1}{2\ell + 1} \left[C_\ell^{ii'} C_\ell^{jj'} + C_\ell^{ij'} C_\ell^{i'j} \right], \quad (5.20)$$

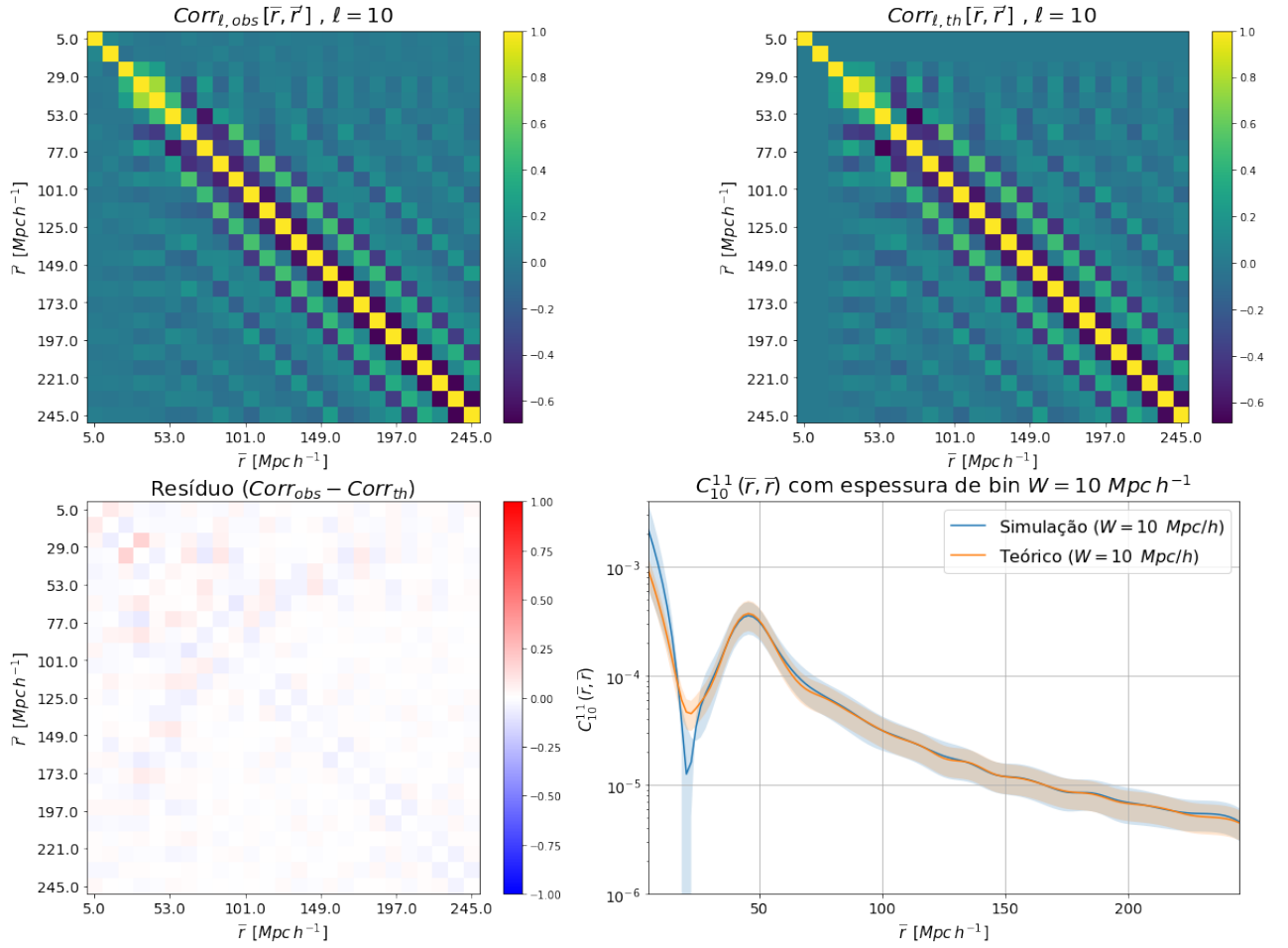


Figura 31: *Matriz* de correlação de C_ℓ : Os painéis superiores mostram uma comparação entre as *matrizes* de correlação dos modos harmônicos, definidas como sendo as funções de correlação normalizadas pela diagonal. Aqui podemos ver com clareza que todas as estruturas provenientes do cálculo teórico refletem-se no espectro de potência angular observado.

onde evitamos a contagem dupla de espectros ao definirmos um espectro angular *não-degenerado*:

$$\xi^{[ij]} = \begin{cases} \xi^{ij} & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases} . \quad (5.21)$$

Também simplificamos a equação (5.20) ao notar-se que os traçadores sempre acompanham seus respectivos raios:

$$\begin{aligned} i &\Leftrightarrow r_i \\ j &\Leftrightarrow r_j \\ i' &\Leftrightarrow r_{i'} \\ j' &\Leftrightarrow r_{j'} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Portanto, as barras de erro que vemos em laranja nas figuras acima foram criadas a partir da equação (5.20), identificando-se $i = j = i' = j' \equiv 1$.

Apesar de ficar aparente pelas figs. (29)-(31) que ambas as médias e variâncias do espectro angular simulado concordam com nossas fórmulas analíticas, ainda é útil realizar a comparação direta da matriz de covariância amostral com a covariância analítica dada pela Eq. (5.20) (com o auxílio de 5.16).

Para efeitos de visualização, podemos tomar a matriz $[N_r \times N_r] \times [N_r \times N_r]$ inteira, onde N_r é o numero de bins radiais das nossas simulações. Isto é, ao invés de uma matriz $N_p \times N_p$ (onde $N_p = N_r(N_r + 1)/2$ é o número de possíveis pares (\bar{r}, \bar{r}') não-degenerados) dada por $\text{Cov}[\xi_\ell^{[ij]}, \xi_\ell^{[i'j']}]$, vamos tomar a matriz completa $\text{Cov}[\xi_\ell^{ij}, \xi_\ell^{i'j'}]$ (que é essencialmente dada pela mesma equação (5.20)).

Por simplicidade, denotaremos a matriz de covariância por $\text{Cov}[\xi_\ell(\mathbf{X}), \xi_\ell(\mathbf{Y})]$, onde \mathbf{X} e \mathbf{Y} denotam $\{(\bar{r}, \bar{r}')\} = (\bar{r}_1, \bar{r}_1), (\bar{r}_1, \bar{r}_2), \dots, (\bar{r}_1, \bar{r}_N), (\bar{r}_2, \bar{r}_1) \dots (\bar{r}_N, \bar{r}_N)$. Omitimos o índice de traçador por estarmos tratando de apenas um tipo específico.

Além disso, como foi feito na análise de C_ℓ , iremos mostrar não a matriz de covariância, mas sim a *matriz* de correlação da covariância,

$$\text{Corr}[\xi_\ell(\mathbf{X}), \xi_\ell(\mathbf{Y})] = \text{Cov}[\xi_\ell(\mathbf{X}), \xi_\ell(\mathbf{Y})] / \sqrt{\text{Cov}[\xi_\ell(\mathbf{X}), \xi_\ell(\mathbf{X})] \text{Cov}[\xi_\ell(\mathbf{Y}), \xi_\ell(\mathbf{Y})]} , \quad (5.23)$$

a fim de facilitar a visualização.

Como em nossas simulações temos 25 bins radiais, nossa matriz de correlação (degenerada) terá um tamanho $(25^2) \times (25^2) = 625 \times 625$, como mostrado nos dois painéis da **Figura 32**:

Podemos ver que todas as principais estruturas da matriz de correlação teórica (painel direito) são refletidas na matriz de correlação amostral (painel esquerdo), construída a partir de 1000 simulações Gaussianas.

Todos estes exercícios analíticos realizados nesta seção dão sustentação para levarmos as simulações adiante, de forma a considerarmos situações cada vez mais realísticas. Um *notebook* em python completo, com todas as funções apresentadas nesta seção, está disponível no GitHub [68].

O próximo passo é utilizar um espectro de potência cosmológico como base para as simulações.

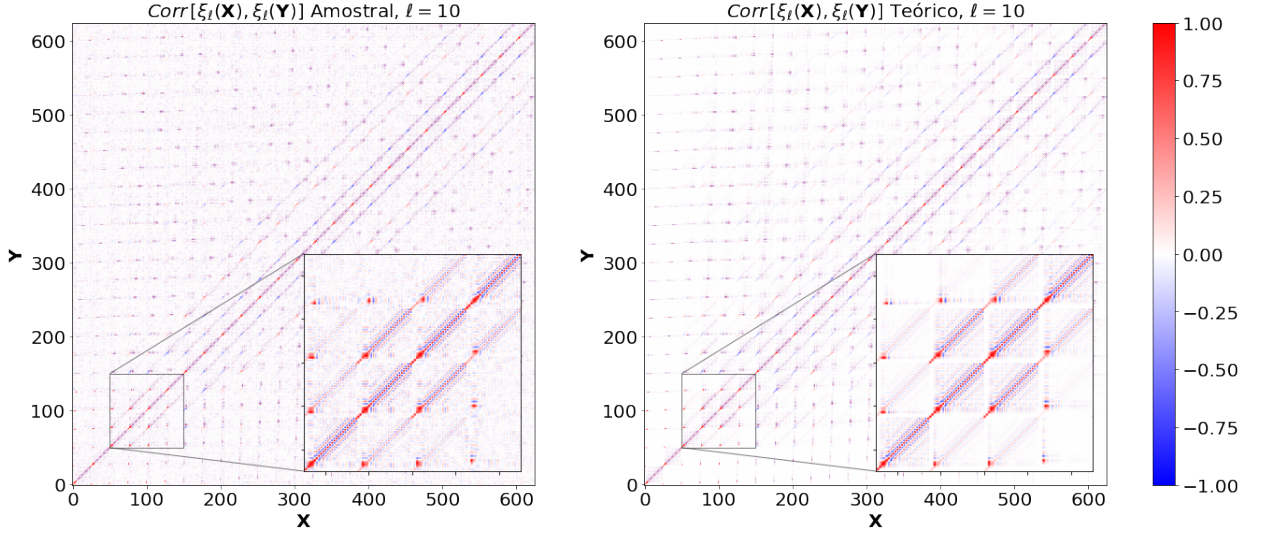


Figura 32: *Matriz* de correlação da covariância para $\ell = 10$. A coordenada radial é dividida em 25 bins de espessura $W = 10 h^{-1} \text{Mpc}$ de $\bar{r}_1 = 5 h^{-1} \text{Mpc}$ até $\bar{r}_{25} = 245 h^{-1} \text{Mpc}$, resultando em uma matriz de covariância 625×625 . O painel direito mostra a matriz de correlação teórica calculada com a ajuda da Eq. (5.20). O painel esquerdo mostra a matriz de correlação amostral obtida através de 1000 simulações Gaussianas. Os *insets* mostram um zoom nas mesmas regiões das duas matrizes, para uma melhor visualização das estruturas.

5.2 Snapshots Cosmológicos

A fim de criar uma simulação *mock* no cone de luz e no espaço de redshift, precisamos primeiramente de um *snapshot* inicial. A partir deste, iremos evoluir todas as porções de matéria utilizando o formalismo de 2LPT discutido na seção 4.2. Em geral, estamos interessados em redshifts $z < 6$ (regiões em que podemos observar linhas de 21cm do Hidrogênio \rightarrow quasares \rightarrow galáxias \rightarrow estrelas, etc.). Vamos então criar snapshots de amostras Gaussianas de um espectro de potência da matéria *cosmológico* em $z = 6$.

Para isso, precisamos de uma forma de obter um espectro $P(k)$ teórico. Vamos utilizar o CAMB [52, 53], que realiza o cálculo deste espectro a partir das constantes do modelo fornecidas. Vamos considerar um modelo ΛCDM *plano*, de forma que as principais constantes serão

$$\begin{aligned}
 H_0 &= 67.5 \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \\
 \Omega_b h^2 &= 0.022 \text{ Densidade Bariônica} \\
 \Omega_{cdm} h^2 &= 0.122 \text{ Densidade de Matéria Escura Fria} \\
 \eta_s &= 0.965 \text{ Índice Espectral}
 \end{aligned}
 \tag{5.24}$$

Mesmo em um redshift relativamente distante como $z = 6$, o campo de contraste de densidade observado já apresenta valores maiores do que a ordem de 1. Portanto, de forma a manter a nossa aproximação linear, vamos simplesmente renormalizar o espectro de potência da matéria obtido por um fator $1/100$. Como discutido anteriormente, essa normalização arbitrária de $P(k)$ apenas assegura que nos mantenhamos no regime linear, e não altera o formato das correlações observadas dentro das nossas escalas de interesse.

Utilizando-se as mesmas dimensões da caixa do *Toy Model*, e novamente um traçador de bias $b_1 = 1$, $\bar{N}_1 = 1000$, obtemos os seguintes plots para a função de correlação dos modos de Fourier e para a variância esférica mostrados na **figura 33**.

Mesmo que nossas caixas respeitem o limite de regime linear, precisamos nos lembrar que à medida em que evoluímos no tempo (utilizando o 2LPT, por exemplo), nosso campo de contraste de densidade possuirá células com valores cada vez maiores em módulo. É preciso estar atento passo-a-passo, pois as escalas em que o limite de amostras Gaussianas permanece válido passam a ser cada vez maiores. Caso a variância fique comparável à ordem de 1, precisamos modelar $N^t(\vec{r})$ de forma diferente, geralmente tornando-se uma expansão polinomial como a expressa pela Eq. (5.8).

Antes de seguirmos com o cálculo de $C_{\ell Sim}$ das nossas amostras, precisamos encontrar uma nova maneira de calcular a função de correlação teórica $C_{\ell, Th}^{\alpha\beta}$, pois não obteremos para esta uma expressão analítica como no caso do *Toy Model*. Partindo da Eq. (3.13), adicionando-se o fatores de *bias*, o *shot-noise* e levando em conta a média de integração dentro dos volumes dos bins radiais, temos

$$C_{\ell, th}^{\alpha\beta}(\bar{r}, \bar{r}') = \frac{2}{\pi} \left\langle \frac{\pi \delta_{r, r'} \delta_{\alpha\beta} \Delta L^3}{2 \bar{N}_\alpha r^2 \Delta L} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk k^2 j_\ell(kr) j_\ell(kr') [b_\alpha b_\beta P(k)] \right\rangle_{r, r'}. \quad (5.25)$$

O termo de shot-noise, por ser uma constante (ao menos no contexto de snapshots), permanece o mesmo da Eq. (5.16). O termo do espectro de potência angular propriamente dito, deve ser calculado numericamente. A integral em dk torna-se então uma somatória de $k = 10^{-4}$ até $k = 10^0$, intervalo este uniformemente log-espaçado em 2000 valores. Para os nossos propósitos, este método tem uma precisão boa o suficiente, e é bastante rápida.

Por este último termo se tornar uma longa somatória ao invés de um valor analítico, tomar $\langle \rangle_{\bar{r}, \bar{r}'}$ como uma longa integral de coeficientes de Clebshaw-Curtis, como feito na Eq. (5.17), torna-se imprático do ponto de vista computacional.

O que fazemos então consiste em realizar uma média dupla, $\langle \rangle_{\bar{r}, \bar{r}'} = \frac{1}{N} \frac{1}{N'} \sum_{r_1}^{r_N} \sum_{r'_1}^{r'_{N'}}$,

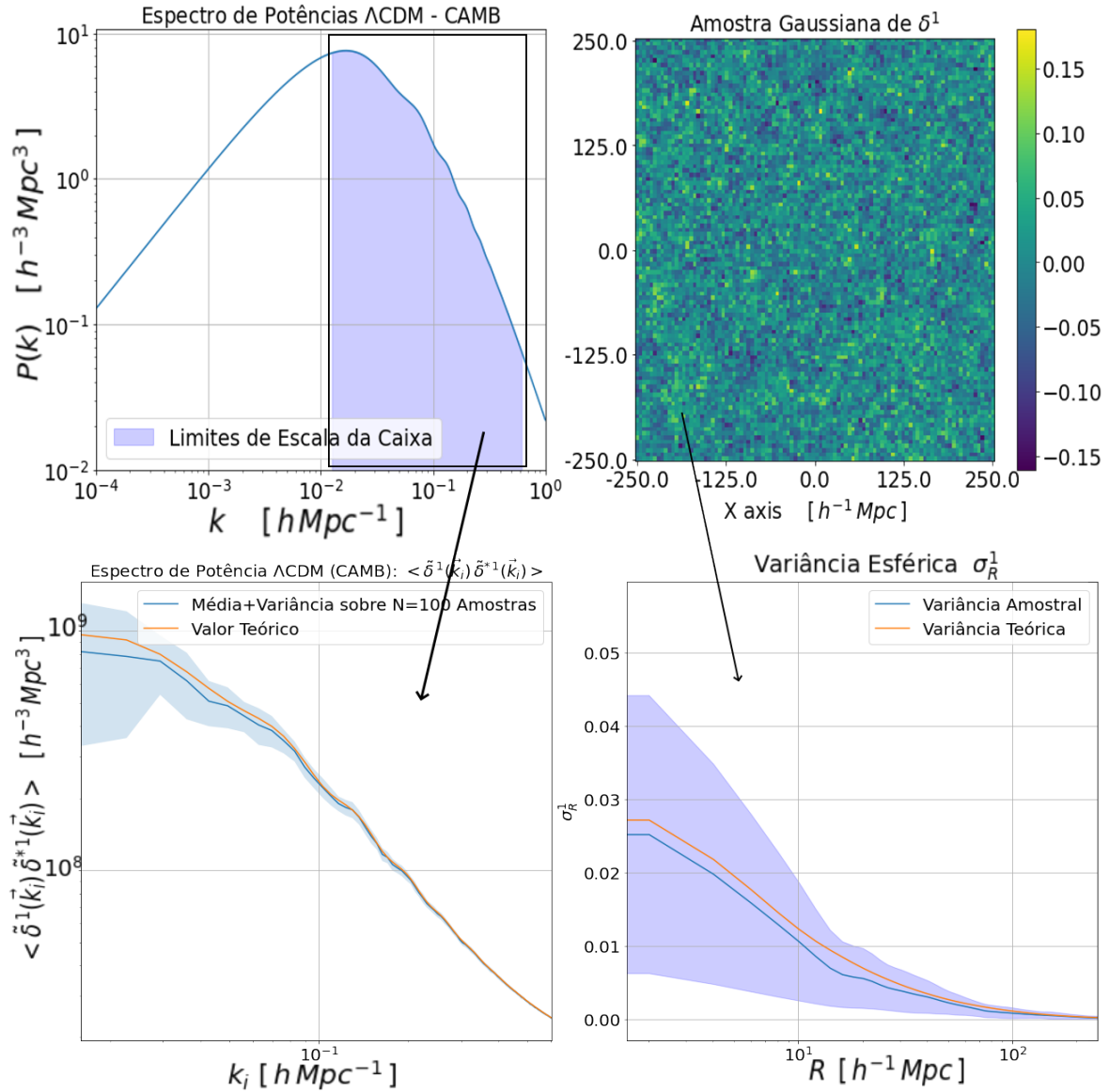


Figura 33: Propriedades das caixas criadas através do espectro de potência de matéria do CAMB: o painel superior direito mostra o espectro de potência da matéria, fornecido diretamente com o CAMB. Logo abaixo, a consequência deste espectro na medição da função de correlação dos modos de Fourier. Como indicado, só conseguimos medir esta função em escalas que compreendem a nossa caixa $[k_{min}, k_{max}]$. Para visualização, plotamos uma fatia de $\delta^1(\vec{r})$ no plano XY , no centro do eixo Z . A barra de cores mostra que aparentemente nosso campo não ultrapassa o limite imposto $|\delta| < 1$, mas para assegurarmos que esse limite será mantido para todas as nossas amostras Gaussianas, plotamos abaixo um gráfico da variância esférica teórica e amostral, para checagem de consistência. Nossas caixas, portanto, parecem seguras.

de forma que avaliamos os valores da integral da Eq. (5.25) para N valores de r espaçados dentro do intervalo do bin \bar{r} , e equivalentemente para N' valores de r' . Por fim, tomamos a média destes valores.

Tomando-se novamente $W = 10 h^{-1} Mpc$, um valor para N e N' que converge satisfatoriamente para um resultado é $N = N' = 2W/\Delta L + 1 = 5$ subdivisões para cada bin radial.

Seguindo as prescrições para o cálculo teórico citadas acima e para o cálculo das simulações descritas na seção anterior, obtemos a **figura 34**, que mostra a comparação entre teoria e simulação para a *Matriz* de correlação de C_ℓ para $\ell = 10$, $W = 10 h^{-1} Mpc$. Temos novamente um comportamento similar ao do *Toy Model*, onde a discretização da caixa não permite uma avaliação consistente em pequenas escalas, mas a partir de $\bar{r} \sim 50 h^{-1} Mpc$, os gráficos para a função de correlação C_ℓ apresentam grande concordância.

É preciso notar, entretanto, que este *raio aparente* onde teoria e simulação parecem concordarem entre si *varia de ℓ em ℓ* . Isto porque, como vimos anteriormente, o modo ℓ está intrinsecamente ligado à escala angular das nossas flutuações de densidade. Dessa forma, quanto maior o ℓ , menor a escala angular tratada, e então o efeito da discretização angular faz-se cada vez mais presente, de forma que raios cada vez maiores são afetados. Este efeito pode ser visto em todos os plots presentes no **Apêndice de Figuras** (página **101**), para $\ell = 20$ e $\ell = 40$.

Por fim, comparamos as *matrizes* de correlação da covariância simulada e teórica (dado pela Eq. **5.23**). Podemos ver que os resultados obtidos para o *Toy Model* continuam válidos, mesmo para um espectro de potência da matéria mais complexo, que excede os limites de escala da nossa caixa.

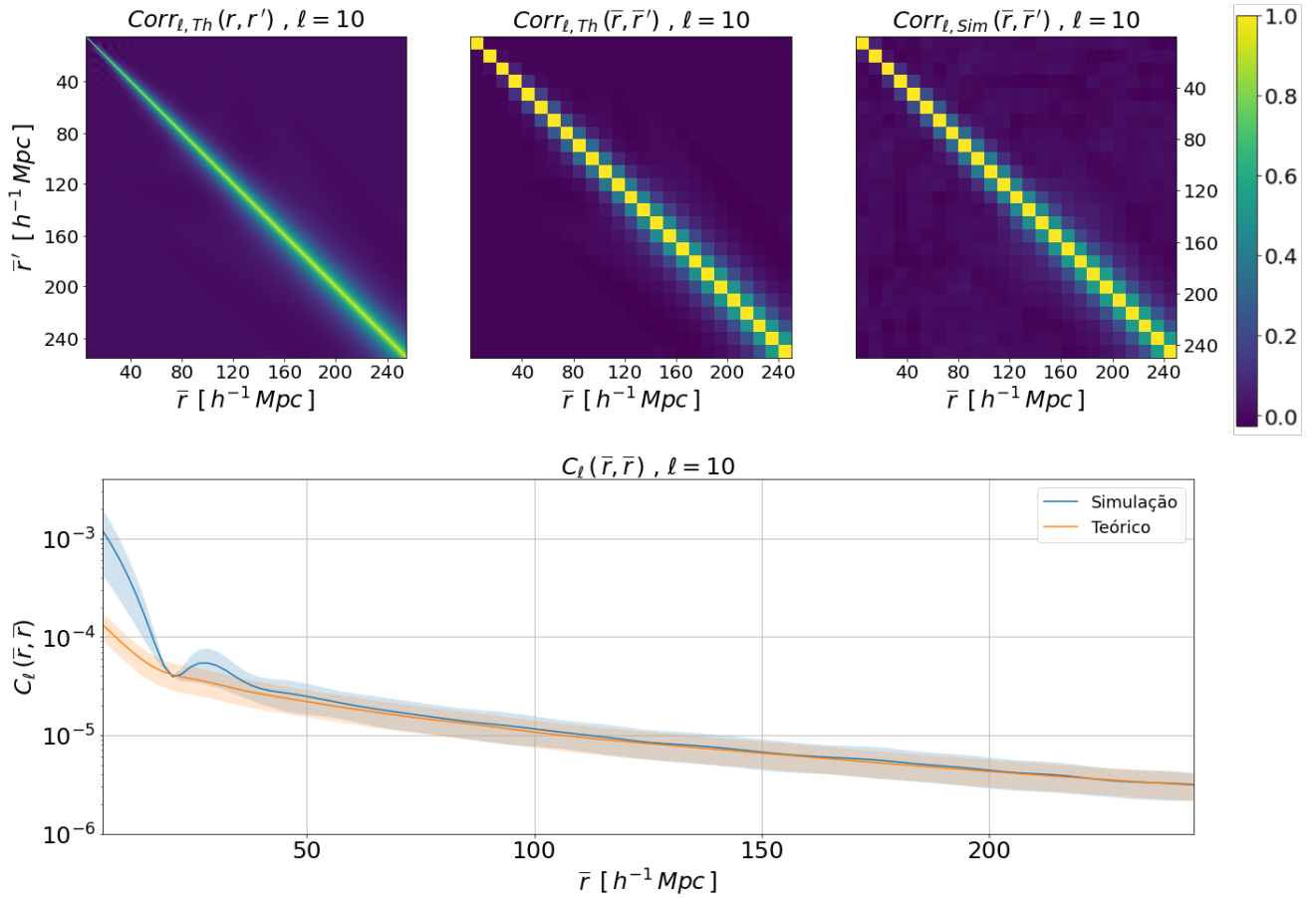


Figura 34: *Matriz* de correlação para C_ℓ . Nos painéis superiores, temos uma comparação entre três matrizes de correlação diferentes: a primeira à esquerda é uma matriz de alta resolução feita através do cálculo teórico da Eq. (5.16), com raios indo de $1 h^{-1} Mpc$ em $1 h^{-1} Mpc$. Como discutido anteriormente, Nesta escala a binagem dos raios não ‘esconde’ mais informação, então não é preciso realizar o cálculo da Eq. (5.16) com os colchetes $\langle \rangle_{\bar{r}, \bar{r}'}$. As outras duas matrizes fazem uma comparação direta entre a simulação (painel direito, calculado com 500 caixas de bin $W = 10 h^{-1} Mpc$) e sua contraparte teórica (painel intermediário, calculado através da Eq. (5.16) com a média em bins descrita nesta seção).

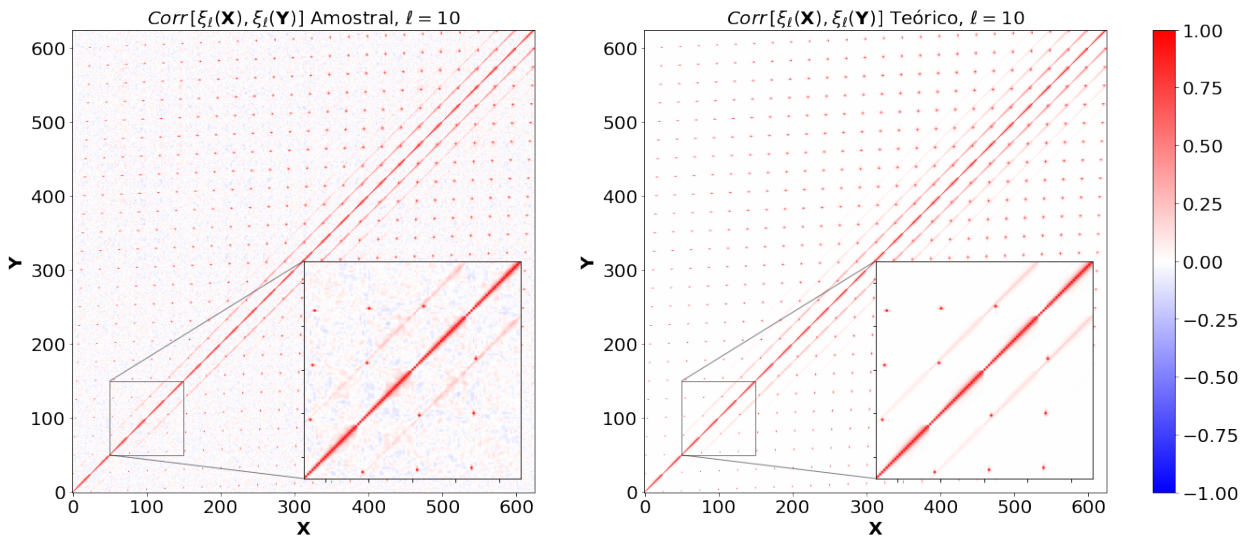


Figura 35: *Matriz* de correlação da covariância para $\ell = 10$. A coordenada radial é dividida em 25 bins de espessura $W = 10 h^{-1} \text{Mpc}$ de $\bar{x}_1 = 5 h^{-1} \text{Mpc}$ até $\bar{x}_{25} = 245 h^{-1} \text{Mpc}$, resultando em uma matriz de covariância 625×625 . O painel direito mostra a matriz de correlação teórica calculada com a ajuda da Eq. (5.20). O painel esquerdo mostra a matriz de correlação amostral obtida através de 500 simulações Gaussianas. Os *insets* mostram um zoom nas mesmas regiões das duas matrizes, para uma melhor visualização das estruturas.

6 Próximos Passos e Conclusões

Com a checagem de consistência realizado na seção anterior, estamos em passo de levarmos nossa análise a situações mais realistas, levando-se em conta as distorções do espaço de redshift e o cone de luz. Os próximos passos para que isto ocorra consistem em implementar o formalismo 2LPT aos mocks dos snapshots realizados anteriormente. Para isso, podemos criar uma caixa com a posição de várias partículas que, ao invés de serem dispostas uniformemente como no caso da seção 4.2, seguem o campo de contagem de traçadores $N_t(\vec{r})$ (que por sua vez, segue um espectro de potência da matéria $P(\vec{k})$ específico). A partir deste, evoluímos a posição de cada partícula através do formalismo 2LPT, e criamos então o campo de contagem de traçadores no cone de luz $N_t(\vec{r}, z)$ (em outras palavras, o campo de contraste de densidade $\delta^t(\vec{r})$).

A partir de um campo no cone de luz e no espaço de redshift, seremos capazes de verificar equações como (3.15) e (3.16). É claro, a análise ficará cada vez mais complexa, uma vez que devemos introduzir os fatores $f(z)$ de taxa de crescimento da matéria, assim como funções de transferência $T(k)$ e funções de crescimento $D(z)$. Outras complicações serão levadas em conta, como a densidade média \bar{n}_t em cada bin radial, que deixará de ser constante, uma vez que a abundância de objetos observados diminui progressivamente à medida em que vamos a redshifts maiores. Portanto $\bar{n}_t \rightarrow \bar{n}_t(z)$. Gostaríamos também de levar em conta máscaras (através da inclusão de funções janela na derivação de $\delta^t(\vec{r})$, por exemplo) no céu, pois num cenário realista de um levantamento de galáxias não observamos o céu inteiro.

Entretanto, estes próximos passos serão essenciais para levar a nossa análise da Larga Estrutura do Universo adiante, principalmente no que tange à restrição dos parâmetros $f(z)$ inferidos pelas distorções de redshift. A criação de *mocks* no cone de luz e espaço de redshift também possibilitarão a realização de previsões para o poder restritivo de parâmetros em levantamentos futuros, através do formalismo das matrizes de informação de Fisher.

Neste projeto, demos os passos iniciais em direção a este novo formalismo esférico para a Larga Estrutura do Universo, em especial no que diz respeito às distorções do espaço de redshift. Mostramos em teoria linear que é possível estimar a velocidade peculiar de porções de matéria sob um campo de contraste de densidade $\delta(\vec{r})$, e mostramos o efeito desta velocidade peculiar no campo de contraste de densidade mapeado num levantamento de galáxias. Em seguida, mostramos como analisar estes campos (seja no espaço real, seja no espaço de redshift) sob uma prescrição esférica, realizando uma decomposição em esféricos harmônicos. Em especial, mostramos que é possível reali-

zar uma estatística completamente análoga à que é feita no espaço de Fourier 3D (com o espectro de potência da matéria, uma das principais pontes entre teoria e observação), com o espectro de potência angular. Ainda mais, mostramos que este novo espectro, do ponto de vista teórico, é facilmente relacionado com o espectro de potência da matéria através de integrais de funções esféricas de Bessel, de forma que nossos cálculos teóricos permanecem fundamentalmente baseados sobre o espectro da matéria. Para verificar a relação das expressões obtidas com um mapa discretizado (assim como as escalas onde há informação significativa a respeito das distorções de redshift), precisamos encontrar dois métodos: um para criar um campo de contraste de densidade que siga qualquer espectro de potência da matéria desejado, e outro para evoluí-lo a um cone de luz no espaço de redshift. Este último tem como solução simples a criação de simulações ‘mocks’, aproximações semi-analíticas para o movimento de um grande número de partículas. Um dos métodos possíveis é através da Teoria de Perturbação Lagrangiana, que fornece a posição e velocidade de qualquer partícula, em qualquer tempo, ao simplesmente fornecer o campo de contraste de densidade inicial sob o qual estas partículas estão. Na última seção, mostramos o passo-a-passo de como criar um campo de contraste de densidade inicial, as consequências de sua discretização e de tomar-se uma amostra Poissoniana deste - nossos observáveis (espectro de potência da matéria e angular) serão adicionados de um fator de Ruído, denominado ‘shot-noise’. Finalmente, mostramos que as expressões teóricas que relacionam espectro de potência da matéria e espectro de potência angular são consistentes - tanto para um espectro de potência analítico (neste caso o ‘top-hat’), quanto para um espectro mais realístico, como o espectro para um modelo Λ CDM obtido através do CAMB [52]. Por fim, também verificamos a validade da expressão para a matriz de covariância dada pelo teorema de Wick (**apêndice A**), mostrando que as *matrizes* de correlação do espectro de potência angular, dadas pela Eq.(5.23).

APÊNDICES

A Variância Cós mica

Queremos encontrar uma expressão analítica para a (co)variância do espectro de potência angular:

$$\begin{aligned} & \text{Cov}[C_\ell(r_1, r_2), C_{\ell'}(r_3, r_4)] = \\ & \langle \hat{C}_\ell(r_1, r_2) \hat{C}_{\ell'}(r_3, r_4) \rangle - \langle \hat{C}_\ell(r_1, r_2) \rangle \langle \hat{C}_{\ell'}(r_3, r_4) \rangle = \\ & = \frac{1}{(2\ell + 1)(2\ell' + 1)} \sum_m \sum_{m'} \langle \delta_{\ell m}(r_1) \delta_{\ell m}^*(r_2) \delta_{\ell' m'}(r_3) \delta_{\ell' m'}^*(r_4) \rangle - C_\ell(r_1, r_2) C_{\ell'}(r_3, r_4). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Vamos então computar separadamente o seguinte termo dentro da somatória:

$$\langle \delta_{\ell m}(r_1) \delta_{\ell m}^*(r_2) \delta_{\ell' m'}(r_3) \delta_{\ell' m'}^*(r_4) \rangle \quad (\text{A.2})$$

Como estamos assumindo que $\delta_{\ell m}$ são variáveis aleatórias Gaussianas, podemos utilizar o *Teorema de Wick* para decompor este termo em outros três:

$$\begin{aligned} & \langle \delta_{\ell m}(r_1) \delta_{\ell m}^*(r_2) \delta_{\ell' m'}(r_3) \delta_{\ell' m'}^*(r_4) \rangle = \\ & \langle \delta_{\ell m}(r_1) \delta_{\ell m}^*(r_2) \rangle \langle \delta_{\ell' m'}(r_3) \delta_{\ell' m'}^*(r_4) \rangle + \\ & \langle \delta_{\ell m}(r_1) \delta_{\ell' m'}(r_3) \rangle \langle \delta_{\ell m}^*(r_2) \delta_{\ell' m'}^*(r_4) \rangle + \\ & \langle \delta_{\ell m}(r_1) \delta_{\ell' m'}^*(r_4) \rangle \langle \delta_{\ell' m'}(r_3) \delta_{\ell m}^*(r_2) \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Agora, utilizamos a propriedade por definição do espectro de potência angular:

$$\delta_{\ell -m}^*(r) = (-1)^m \delta_{\ell m}(r) \quad (\text{A.4})$$

o que nos dá

$$\begin{aligned} & \langle \delta_{\ell m}(r_1) \delta_{\ell m}^*(r_2) \delta_{\ell' m'}(r_3) \delta_{\ell' m'}^*(r_4) \rangle = \\ & C_\ell(r_1, r_2) C_{\ell'}(r_3, r_4) + \\ & \delta_{\ell \ell'} \delta_{m-m'} C_\ell(r_1, r_3) C_\ell(r_4, r_2) + \\ & \delta_{\ell \ell'} \delta_{m'm} C_\ell(r_1, r_4) C_\ell(r_3, r_2) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Utilizando este resultado dentro da somatória, finalmente obtemos a equação 3.10

para a (co)variância do espectro de potência angular:

$$\text{Cov}[C_\ell(r_1, r_2), C_{\ell'}(r_3, r_4)] = \frac{\delta_{\ell\ell'}}{(2\ell + 1)} \left[C_\ell(r_1, r_4)C_\ell(r_3, r_2) + C_\ell(r_1, r_3)C_\ell(r_4, r_2) \right] \quad (\text{A.6})$$

B Relacionando $\mathbf{P}(\mathbf{k})$ e C_ℓ

B.1 No espaço real

A correlação entre dois coeficientes harmônicos $\delta_{\ell m}(r)$ e $\delta_{\ell' m'}(r')$ no espaço real pode ser escrita através da definição dada pela Eq. (3.3):

$$\langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m'}^*(r') \rangle = \int d\Omega_r d\Omega_{r'} Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell' m'}(\hat{r}') \langle \delta(\vec{r}) \delta^*(\vec{r}') \rangle, \quad (\text{B.1})$$

tal que podemos tomar a transformada de Fourier de $\delta(\vec{r})$ e $\delta^*(\vec{r}')$:

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m'}^*(r') \rangle = \\ \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\Omega_r d\Omega_{r'} d^3 k d^3 k' Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell' m'}(\hat{r}') \left\langle \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{\delta}(\vec{k}) \right) \left(e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} \tilde{\delta}^*(\vec{k}') \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

O próximo passo é re-expressar os termos exponenciais através da *Fórmula de Rayleigh*:

$$\begin{aligned} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= 4\pi \sum_{\ell_1, m_1} i^{\ell_1} j_{\ell_1}(kr) Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{r}) \\ e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} &= 4\pi \sum_{\ell_2, m_2} i^{-\ell_2} j_{\ell_2}(k'r') Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{r}') \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

de forma que obtemos a expressão

$$\begin{aligned} \langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m'}^*(r') \rangle = \\ \frac{1}{4\pi^4} \sum_{\ell_1, m_1} \sum_{\ell_2, m_2} \int i^{\ell_1 - \ell_2} d\Omega_r d\Omega_{r'} d\Omega_k d\Omega_{k'} k^2 dk k'^2 dk' \times \\ \times Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{r}) Y_{\ell' m'}(\hat{r}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{r}') Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}') \times \\ \times j_{\ell_1}(kr) j_{\ell_2}(k'r') \times \left\langle \tilde{\delta}(\vec{k}) \tilde{\delta}^*(\vec{k}') \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Desta expressão, podemos identificar diretamente o espectro de potência da matéria:

$$\left\langle \tilde{\delta}(\vec{k}) \tilde{\delta}^*(\vec{k}') \right\rangle \equiv (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') P(k) \quad (\text{B.5})$$

de forma que obtemos

$$\begin{aligned}
& \langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m'}^*(r') \rangle = \\
& \frac{2}{\pi} \sum_{\ell_1, m_1} \sum_{\ell_2, m_2} \int i^{\ell_1 - \ell_2} d\Omega_r d\Omega_{r'} d\Omega_k d\Omega_{k'} k^2 dk k'^2 dk' \times \\
& \times Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{r}) Y_{\ell' m'}(\hat{r}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{s}') Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}') \times \\
& \times j_{\ell_1}(kr) j_{\ell_2}(k'r') \times \delta_D^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') P(k) \\
& = \\
& \frac{2}{\pi} \sum_{\ell_1, m_1} \sum_{\ell_2, m_2} \int i^{\ell_1 - \ell_2} d\Omega_r d\Omega_{r'} d\Omega_k k^2 dk \times \\
& \times Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{r}) Y_{\ell' m'}(\hat{r}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{r}') Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}) \times \\
& \times j_{\ell_1}(kr) j_{\ell_2}(kr') P(k) .
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Finalmente, estamos em posição de realizar algumas integrais:

- A integral em $\int d\Omega_r Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{r})$ nos fornece $\delta_{\ell \ell_1} \delta_{m m_1}$;
- A integral em $\int d\Omega_{r'} Y_{\ell' m'}(\hat{r}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{r}')$ nos fornece $\delta_{\ell' \ell_2} \delta_{m' m_2}$;

Com estes dois resultados, a somatória em ℓ_1, ℓ_2, m_1, m_2 desaparece. A expressão é então grandemente simplificada:

$$\begin{aligned}
& \langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell' m'}^*(r') \rangle = \\
& \frac{2}{\pi} \int i^{\ell - \ell'} d\Omega_k k^2 dk Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell' m'}(\hat{k}) j_{\ell}(kr) j_{\ell'}(kr') P(k)
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Por último, a integral em $\int d\Omega_k Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell' m'}(\hat{k})$ nos fornece $\delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'}$, de forma que obtemos o resultado final para a relação entre $P(k)$ e $C_{\ell}(r, r')$ no espaço real:

$$C_{\ell}(r, r') = \langle \delta_{\ell m}(r) \delta_{\ell m}^*(r') \rangle = \frac{2}{\pi} \int k^2 dk j_{\ell}(kr) j_{\ell}(kr') P(k) \tag{B.8}$$

B.2 No espaço de Redshift

Para obtermos a relação dada pela Eq. (3.15) entre ${}^s C_{\ell}(s, s')$ - o espectro de potência angular no espaço de redshift - e $P(k)$, podemos começar de maneira análoga à feita na seção B.1: através da definição de uma decomposição em coeficientes harmônicos. Então,

escrevemos a correlação entre dois coeficientes ${}^s\delta_{\ell m}(s)$ e ${}^s\delta_{\ell' m'}(s')$ como

$$\langle {}^s\delta_{\ell m}(s) {}^s\delta_{\ell' m'}^*(s') \rangle = \int d\Omega_s d\Omega'_s Y_{\ell m}^*(\hat{s}) Y_{\ell' m'}(\hat{s}') \langle {}^s\delta(\vec{s}) {}^s\delta^*(\vec{s}') \rangle \quad (\text{B.9})$$

Aqui, finalmente temos a utilização da equação (2.19), de forma que podemos relacionar os modos ${}^s\delta_{\ell m}$ com o campo de contraste de densidade no espaço real, ${}^r\delta$:

$$\begin{aligned} & \langle {}^s\delta_{\ell m}(s) {}^s\delta_{\ell' m'}^*(s') \rangle = \\ & = \int d\Omega_s d\Omega'_s Y_{\ell m}^*(\hat{s}) Y_{\ell' m'}(\hat{s}') \left\langle \left[1 + f(z) \frac{d^2}{dr^2} \nabla_r^{-2} \right] {}^r\delta(\vec{r}) \left[1 + f(z') \frac{d^2}{dr'^2} \nabla_{r'}^{-2} \right] {}^r\delta^*(\vec{r}') \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Novamente, vale ressaltar que está implícito que as variáveis r , s e z são relacionadas entre si através da equação (2.5), onde $x \rightarrow r$. O mesmo vale para r' , s' e z' .

Aplicando os operadores entre colchetes, obteremos quatro termos distintos dentro das integrais. Vamos nos ater ao termo que aparenta ser o mais problemático, que contém ambos os operadores Laplacianos inversos. Veremos que o resultado obtido através deste termo pode ser facilmente estendido aos demais. Vamos então denotar este termo por F :

$$F \equiv f(z)f(z') \int d\Omega_s d\Omega'_s Y_{\ell m}^*(\hat{s}) Y_{\ell' m'}(\hat{s}') \left\langle \frac{d^2}{dr^2} \nabla_r^{-2} {}^r\delta(\vec{x}, z) \frac{d^2}{dr'^2} \nabla_{r'}^{-2} {}^r\delta^*(\vec{r}', z') \right\rangle \quad (\text{B.11})$$

Podemos agora tomar as Transformadas de Fourier de ${}^r\delta(\vec{r})$ e ${}^r\delta^*(\vec{r}')$, de forma que obtemos

$$\begin{aligned} F = \frac{f(z)f(z')}{(2\pi)^6} \int d\Omega_s d\Omega'_s d^3k d^3k' Y_{\ell m}^*(\hat{s}) Y_{\ell' m'}(\hat{s}') & \left\langle \frac{d^2}{dr^2} \nabla_r^{-2} \left(e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} {}^r\tilde{\delta}(\vec{r}) \right) \times \right. \\ & \left. \times \frac{d^2}{dr'^2} \nabla_{r'}^{-2} \left(e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} {}^r\tilde{\delta}^*(\vec{k}') \right) \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Agora podemos com segurança aplicar o Laplaciano inverso dentro das exponenciais, de forma que cada um irá nos fornecer um fator $\frac{1}{k^2}$:

$$\begin{aligned} F = \frac{f(z)f(z')}{(2\pi)^6} \int d\Omega_s d\Omega'_s d\Omega_k d\Omega_{k'} k^2 dk k'^2 dk' & Y_{\ell m}^*(\hat{s}) Y_{\ell' m'}(\hat{s}') \frac{d^2}{d(kr)^2} \left[e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right] \times \\ & \times \frac{d^2}{d(k'r')^2} \left[e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} \right] \left\langle {}^r\tilde{\delta}(\vec{k}) {}^r\tilde{\delta}^*(\vec{k}') \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Novamente, utilizamos a *Fórmula de Rayleigh* (B.3) para re-expressarmos os termos

exponenciais:

$$\begin{aligned}
F = & \frac{f(z)f(z')}{4\pi^4} \sum_{\ell_1, m_1} \sum_{\ell_2, m_2} \int i^{\ell_1 - \ell_2} d\Omega_s d\Omega_{s'} d\Omega_k d\Omega_{k'} k^2 dk k'^2 dk' \times \\
& \times Y_{\ell m}^*(\hat{s}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{s}) Y_{\ell' m'}(\hat{s}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{s}') Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}') \times \\
& \times j_{\ell_1}''(kr) j_{\ell_2}''(k'r') \times \\
& \times \left\langle r\tilde{\delta}(\vec{k}) r\tilde{\delta}^*(\vec{k}') \right\rangle
\end{aligned} \tag{B.14}$$

onde já utilizamos de antemão um fato das distorções de redshift: elas distorcem apenas a posição no eixo radial. Portanto, pudemos identificar

$$\begin{aligned}
\hat{r} &= \hat{s} \\
\hat{r}' &= \hat{s}'
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Também definimos a derivada dupla nas funções esféricas de Bessel como sendo com respeito a $k r$ (ou $k' r'$, respectivamente):

$$j_{\ell}''(kr) \equiv \frac{d^2}{d(kr)^2} \left[j_{\ell}(kr) \right] \tag{B.16}$$

De fato, a única diferença do termo dado pela Eq. (B.14) para os demais termos em (B.10) é a derivada na função esférica de Bessel. Se, por exemplo, não tivéssemos o operador Laplaciano inverso agindo em $r\tilde{\delta}(k)$, teríamos simplesmente um termo $f(z) j_{\ell_1}''(kr) \rightarrow j_{\ell_1}(kr)$.

Procedendo de forma análoga ao que foi feito nas Eqs. (B.5)-(B.8), obtemos a seguinte expressão final para o termo F :

$$F = \frac{2f(z)f(z')}{\pi} \int k^2 dk j_{\ell}''(kr) j_{\ell}''(k'r') P(k) \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \tag{B.17}$$

Contabilizando todos os termos da Eq. (B.10), obtemos a relação final entre ${}^s C_{\ell}(r, r')$ e $P(k)$:

$$\begin{aligned}
{}^s C_{\ell}(s, s') &= \langle {}^s \delta_{\ell m}(s) {}^s \delta_{\ell m}^*(s') \rangle = \\
\frac{2}{\pi} \int dk k^2 & \left[j_{\ell}(kr) - f(z) j_{\ell}''(kx) \right] \left[j_{\ell}(k'r') - f(z) j_{\ell}''(kr) \right] P(k)
\end{aligned} \tag{B.18}$$

C Relacionando ${}^s C_\ell$ e ${}^r C_\ell$

Interessantemente, podemos tomar outro rumo a partir da derivação do termo F na Eq. (B.14), a fim de mostrar que ${}^s C_\ell(s, s')$ e ${}^r C_\ell$ podem relacionar-se através da integral dupla de um ‘Kernel’ K_ℓ analítico.

Primeiramente, vamos já realizar as integrais em $d\Omega_s$ e $d\Omega'_s$, de forma que a equação (B.14) torna-se

$$F = \frac{f(z)f(z')}{4\pi^4} \int i^{\ell-\ell'} d\Omega_k d\Omega_{k'} k^2 dk k'^2 dk' Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell' m'}(\hat{k}') \times \langle j_\ell''(kr) j_{\ell'}''(k'r') \times \left\langle r\tilde{\delta}(\vec{k}) r\tilde{\delta}^*(\vec{k}') \right\rangle \rangle \quad (\text{C.1})$$

Ao invés de utilizarmos agora a definição do espectro de potência da matéria $P(k)$ em $\langle r\tilde{\delta}(\vec{k}) r\tilde{\delta}^*(\vec{k}') \rangle$, nada nos impede de expandir os modos de Fourier $r\tilde{\delta}$ e $r\tilde{\delta}^*$ em esféricos harmônicos:

$$r\tilde{\delta}(\vec{k}) = \sum_{\ell_1, m_1} r\tilde{\delta}_{\ell_1 m_1}(k) Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}) \quad (\text{C.2})$$

$$r\tilde{\delta}(\vec{k}') = \sum_{\ell_2, m_2} r\tilde{\delta}_{\ell_2 m_2}^*(k') Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}')$$

de forma que obtemos

$$F = \frac{f(z)f(z')}{4\pi^4} i^{\ell-\ell'} \sum_{\ell_1, m_1} \sum_{\ell_2, m_2} \int d\Omega_k d\Omega_{k'} k^2 dk k'^2 dk' \times Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell' m'}(\hat{k}') \times \langle Y_{\ell_1 m_1}^*(\hat{k}) Y_{\ell_2 m_2}(\hat{k}') \times j_\ell''(kr) j_{\ell'}''(k'r') \times \left\langle r\tilde{\delta}_{\ell_1, m_1}(k) r\tilde{\delta}_{\ell_2, m_2}^*(k') \right\rangle \rangle \quad (\text{C.3})$$

- A integral $\int d\Omega_k Y_{\ell m}^*(\hat{k}) Y_{\ell_1 m_1}(\hat{k})$ nos fornece $\delta_{\ell\ell_1} \delta_{mm_1}$;
- A integral $\int d\Omega_{k'} Y_{\ell' m'}(\hat{k}') Y_{\ell_2 m_2}^*(\hat{k}')$ nos fornece $\delta_{\ell'\ell_2} \delta_{m'm_2}$;

Dessa forma, ficamos com

$$F = \frac{f(z)f(z')}{4\pi^4} i^{\ell-\ell'} \int k^2 dk k'^2 dk' j_\ell''(kr) j_{\ell'}''(k'r') \times \left\langle r\tilde{\delta}_{\ell, m}(k) r\tilde{\delta}_{\ell', m'}^*(k') \right\rangle \quad (\text{C.4})$$

Aqui, podemos tomar vantagem da propriedade

$${}^r\tilde{\delta}_{\ell m}(k) = 4\pi i^{-\ell} \int \rho^2 d\rho j_\ell(k\rho) {}^r\delta_{\ell m}(\rho) \quad (\text{C.5})$$

$${}^r\tilde{\delta}_{\ell' m'}(k') = 4\pi i^{\ell'} \int \rho'^2 d\rho' j_{\ell'}(k'\rho') {}^r\delta_{\ell' m'}^*(\rho')$$

de forma que obtemos

$$F = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 f(z)f(z') \left[\int \rho^2 d\rho k^2 dk j_\ell''(kr) j_\ell(k\rho) \right] \times \quad (\text{C.6})$$

$$\times \left[\int \rho'^2 d\rho' k'^2 dk' j_{\ell'}''(k'r') j_{\ell'}(k'\rho') \right] \times \left\langle {}^r\delta_{\ell m}(\rho) {}^r\delta_{\ell' m'}^*(\rho') \right\rangle$$

Agora podemos identificar diretamente a definição do espectro angular no espaço real:

$$\left\langle {}^r\delta_{\ell m}(\rho) {}^r\delta_{\ell' m'}^*(\rho') \right\rangle \equiv {}^rC_\ell(\rho, \rho') \delta_{\ell\ell'} \quad (\text{C.7})$$

Então nossa expressão final para F torna-se

$$F = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 f(z)f(z') \left[\int r^2 dr k^2 dk j_\ell''(kx) j_\ell(kr) \right] \times \quad (\text{C.8})$$

$$\times \left[\int r'^2 dr' k'^2 dk' j_{\ell'}''(k'x') j_{\ell'}(k'r') \right] \times$$

$$\times {}^rC_\ell(r, z; r', z') \delta_{\ell\ell'}$$

Assim como foi feito no apêndice **B.2**, podemos facilmente estender o resultado de F para os outros termos da Eq. (B.10). Por exemplo, se quisermos calcular o termo que não possui o termo Laplaciano inverso agindo em ${}^r\delta(k)$, teríamos simplesmente

$$f(z)j_\ell''(kx) \rightarrow j_\ell(kx)$$

Portanto, contabilizando todos os termos da Eq. (B.10), temos

$$\begin{aligned}
& \left\langle {}^s\delta_{\ell m}(s) {}^s\delta_{\ell' m'}^*(s') \right\rangle = \\
& \left\{ \left[\int \rho^2 d\rho k^2 dk j_\ell(kr) j_\ell(k\rho) \right] \times \left[\int \rho'^2 d\rho' k'^2 dk' j_{\ell'}(k'r') j_{\ell'}(k'\rho') \right] + \right. \\
& - f(z) \left[\int \rho^2 d\rho k^2 dk j_\ell''(kr) j_\ell(k\rho) \right] \times \left[\int \rho'^2 d\rho' k'^2 dk' j_{\ell'}(k'r') j_{\ell'}(k'\rho') \right] + \\
& - f(z') \left[\int \rho^2 d\rho k^2 dk j_\ell(kr) j_\ell(k\rho) \right] \times \left[\int \rho'^2 d\rho' k'^2 dk' j_{\ell'}''(k'r') j_{\ell'}(k'\rho') \right] + \\
& \left. + f(z)f(z') \left[\int \rho^2 d\rho k^2 dk j_\ell''(kr) j_\ell(k\rho) \right] \times \left[\int \rho'^2 d\rho' k'^2 dk' j_{\ell'}''(k'r') j_{\ell'}(k'\rho') \right] \right\} \times \\
& \quad \times {}^r C_\ell(\rho, \rho') \delta_{\ell\ell'}
\end{aligned} \tag{C.9}$$

De forma que escrito de forma compacta, o espectro de potência angular no espaço de redshift pode ser expresso em termos do mesmo em seu espaço real através de

$${}^s C_\ell(s, s') = \int d\rho \rho^2 \int d\rho' \rho'^2 K_\ell(\rho, r) K_\ell(\rho', r') {}^r C_\ell(\rho, \rho'), \tag{C.10}$$

com

$$K_\ell(\rho, r) = \frac{2}{\pi} \int dk k^2 j_\ell(k\rho) [j_\ell(kr) - f(z) j_\ell''(kr)], \tag{C.11}$$

os quais denominamos ‘Kernels de Kaiser’. A integral na equação (C.11) possui forma analítica, sendo a integral do primeiro termo dada por uma função delta de Dirac:

$$\frac{2}{\pi} \int dk k^2 j_\ell(k\rho) j_\ell(kr) = \frac{\delta_D(\rho - r)}{\rho^2} \tag{C.12}$$

O segundo termo é um pouco mais complexo. Vamos denotá-lo por $B_\ell(\rho, r)$:

$$B_\ell(\rho, r) = -\frac{2}{\pi} f(z) \int dk k^2 j_\ell(k\rho) j_\ell''(kr) \tag{C.13}$$

Vamos reescrever $j_\ell''(kr)$ em termos de funções esféricas de Bessel. Para isso, precisamos recordar a equação diferencial à qual estas funções obedecem:

$$z^2 j_\ell''(z) + 2z j_\ell'(z) + [z^2 - \ell(\ell + 1)] j_\ell(z) = 0 \tag{C.14}$$

Além disso, elas também possuem a função de recursão

$$j'_\ell(z) = \frac{\ell}{z} j_\ell(z) - j_{\ell+1}(z) \quad (\text{C.15})$$

Portanto, por estas duas relações temos que

$$j''_\ell(z) = \frac{1}{z^2} \left\{ [\ell^2 - \ell - z^2] j_\ell(z) + 2z j_{\ell+1}(z) \right\}, \quad (\text{C.16})$$

de forma que aplicando a relação (C.16) na definição da equação (C.13), obtemos

$$\begin{aligned} B_\ell(\rho, r) &= -\frac{2f(z)}{\pi} \int \frac{dk k^2 j_\ell(k\rho)}{(kr)^2} \left\{ [\ell^2 - \ell - k^2 r^2] j_\ell(kr) + 2kr j_{\ell+1}(kr) \right\} \\ &= \\ &\underbrace{-\frac{2f(z)(\ell^2 - \ell)}{\pi r^2} \int dk j_\ell(k\rho) j_\ell(kr)}_{B_\ell^{(1)}} + \underbrace{\frac{2f(z)}{\pi} \int dk k^2 j_\ell(k\rho) j_\ell(kr)}_{B_\ell^{(2)}} + \\ &\quad - \underbrace{\frac{4f(z)}{\pi r} \int dk k j_\ell(k\rho) j_{\ell+1}(kr)}_{B_\ell^{(3)}}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Portanto B_ℓ é decomposto por três subtermos, $B_\ell^{(1)}$, $B_\ell^{(2)}$ e $B_\ell^{(3)}$. Vamos calculá-los individualmente.

Cálculo de $B_\ell^{(1)}$:

Para $B_\ell^{(1)}$, utilizamos o seguinte resultado presente em Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions* [69]:

$$\int dk j_\ell(k\rho) j_\ell(kr) = \begin{cases} \frac{\pi}{2(2\ell+1)r}, & \text{se } r = \rho \\ \frac{\pi}{2(2\ell+1)\rho} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\ell, & \text{se } r < \rho \\ \frac{\pi}{2(2\ell+1)r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^\ell, & \text{se } r > \rho \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Substituindo esta relação dentro da definição de $B_\ell^{(1)}$, obtemos

$$B_\ell^{(1)}(\rho, r) = -\frac{f(z)\ell(\ell-1)}{2(2\ell+1)x^2} \times \begin{cases} \frac{1}{r}, & \text{se } r = \rho \\ \frac{1}{\rho} \left(\frac{r}{\rho}\right)^\ell, & \text{se } r < \rho \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^\ell, & \text{se } r > \rho \end{cases} \quad (\text{C.19})$$

Cálculo de $B_\ell^{(2)}$: Utilizando a mesma relação de ortogonalidade mostrada na Eq. (C.12), obtemos

$$B_\ell^{(2)}(\rho, r) = \frac{f(z)}{r^2} \delta_D(\rho - r) \quad (\text{C.20})$$

Cálculo de $B_\ell^{(3)}$:

Utilizando-se de $j_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{\ell+1/2}(z)$, temos

$$\int dk k j_\ell(k\rho) j_{\ell+1}(kr) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\rho r}} \int J_{\ell+1/2}(k\rho) J_{\ell+3/2}(kr) \quad (\text{C.21})$$

Novamente, utilizamos o resultado presente em Watson [69]:

$$\int dk J_\mu(kr) J_{\mu-1}(k\rho) = \begin{cases} \frac{1}{2r}, & \text{se } r = \rho \\ 0, & \text{se } r < \rho \\ \frac{\rho^{\mu-1}}{r^\mu}, & \text{se } r > \rho \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

Identificamos $\mu \equiv \ell + 3/2$, de forma que

$$B_\ell^{(3)}(\rho, r) = -\frac{\pi}{2} \frac{2f(z)}{r\sqrt{\rho r}} \times \begin{cases} \frac{1}{2r}, & \text{se } r = \rho \\ 0, & \text{se } r < \rho \\ \frac{\rho^{\ell+1/2}}{r^{\ell+3/2}}, & \text{se } r > \rho \end{cases} \quad (\text{C.23})$$

Finalmente, com os termos dados pelas Eqs. (C.12), (C.19), (C.20) e (C.23) obtemos

a expressão analítica para $K_\ell(\rho, r)$:

$$K_\ell(\rho, r) = \frac{1 + f(z)}{r^2} \delta_D(\rho - r) - \begin{cases} \frac{f(z)}{r^3} \left[\frac{2(2\ell+1) + \ell(\ell-1)}{2(2\ell+1)} \right], & \text{se } r = \rho \\ \frac{f(z)}{\rho r^2} \frac{\ell(\ell-1)}{2(2\ell+1)} \left(\frac{r}{\rho} \right)^\ell, & \text{se } r < \rho \\ \frac{f(z)}{r^3} \left(\frac{\rho}{r} \right)^\ell \left[\frac{4(2\ell+1) + \ell(\ell-1)}{2(2\ell+1)} \right], & \text{se } r > \rho \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

D Estatística Poissoniana

Vamos tomar uma amostra discreta aleatória do campo de contagem de traçadores (Eq. 5.7), de forma que se tomarmos várias destas amostras (de um termo $\delta(\vec{r})$ gerado previamente de uma amostra Gaussiana), teremos

$$\langle N_t(\vec{r}) \rangle_{(\text{amostras})} = \bar{N} (1 + b_t \delta(\vec{r})) . \quad (\text{D.1})$$

O processo mais simples de se obter tal amostra é através de uma distribuição Poissoniana, que terá uma função densidade de probabilidade

$$\mathcal{P}(N_t, \langle N_t \rangle) = \frac{\langle N_t \rangle^{N_t} e^{-\langle N_t \rangle}}{N_t!} , \quad N_t \text{ inteiro.} \quad (\text{D.2})$$

Esta função possui as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \langle N_t \rangle &= \sum_{N_t} N_t \mathcal{P}(N_t, \langle N_t \rangle) = \langle N_t \rangle \\ \langle N_t^2 \rangle &= \sum_{N_t} N_t^2 \mathcal{P}(N_t, \langle N_t \rangle) = \langle N_t \rangle (\langle N_t \rangle + 1) \\ &\rightarrow \langle N_t^2 \rangle - \langle N_t \rangle^2 = \langle N_t \rangle , \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde fica implícito que estas são médias realizadas sobre as amostras Poissonianas.

Além disso, a soma de duas variáveis aleatórias Poissonianas também é uma variável aleatória Poissoniana, de forma que $N_i + N_j$, por exemplo, irá obedecer à função $\mathcal{P}(N_i + N_j, \langle N_i \rangle + \langle N_j \rangle)$.

Com estas propriedades em mãos, vamos calcular a função de correlação do contraste de densidade no espaço real, entre dois traçadores i e j , devido ao processo Poissoniano. Isto é, vamos realizar a média dos contrastes sobre tanto o volume da observação quanto sobre as amostras Poissonianas, de forma a ver o efeito deste processo sobre nossos campos criados:

$$\begin{aligned} \xi_{Poisson}^{ij}(\vec{r} - \vec{r}') &= \langle \delta^i(\vec{r}) \delta^j(\vec{r}') \rangle_{(\text{volume, amostras})} = \frac{1}{\bar{N}_i \bar{N}_j} \langle [N_i(\vec{r}) - \bar{N}_i][N_j(\vec{r}') - \bar{N}_j] \rangle \\ &= \frac{1}{\bar{N}_i \bar{N}_j} \left[\langle N_i N_j \rangle - \bar{N}_j \langle N_i \rangle - \bar{N}_i \langle N_j \rangle + \bar{N}_i \bar{N}_j \right] \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Vemos que se $i \neq j$ (onde $i \Leftrightarrow \vec{r}, j \Leftrightarrow \vec{r}'$), então $\xi_{Poisson}^{ij} = 0$. Por outro lado, se $i = j$

então

$$\xi_{Poisson}^{ii} = \frac{1}{\bar{N}_i \bar{N}_i} [\bar{N}_i] = \frac{1}{\bar{N}_i} \quad (\text{D.5})$$

de forma que podemos escrever

$$\xi_{Poisson}^{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\bar{N}_i}. \quad (\text{D.6})$$

Alternativamente, temos, no limite do contínuo:

$$\xi_{Poisson}^{ij}(\vec{r} - \vec{r}') \equiv \xi_{Poisson}^{ij}(\vec{R}) = \frac{\delta_D^{(3)}(\vec{R}) \delta_{ij}}{\bar{n}_i} \quad (\text{D.7})$$

onde \bar{n}_i é a densidade de contagem do traçador i .

Para obtermos a consequência deste processo dentro da função de correlação no espaço de Fourier, $P_{Poisson}^{ij}(\vec{k})$, basta lembrarmos da definição deste através de $\xi_{Poisson}^{ij}(\vec{R})$:

$$P_{Poisson}^{ij}(\vec{k}) = \int d^3 R e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \xi_{Poisson}^{ij}(\vec{R}) = \frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} \quad (\text{D.8})$$

Portanto, com a adição dos dois processos (Gaussiano+Poissoniano), obtemos o resultado final para a função de correlação dos nossos modos de Fourier simulados:

$$\langle \tilde{\delta}^i(\vec{k}) \tilde{\delta}^{*j}(\vec{k}') \rangle = (2\pi)^3 \delta_D^{(3)}(\vec{k} - \vec{k}') \left[\frac{\delta_{ij}}{\bar{n}_i} + b_i b_j P(k) \right] \quad (\text{D.9})$$

E Snapshots Campo de Densidade em Python

```

1 import numpy as np # Biblioteca NumPy, utilizada para a maior parte
  das operações matemáticas;
2
3 import matplotlib.pyplot as plt # Biblioteca Matplotlib.Pyplot,
  encarregada de plotar os gráficos;
4 from matplotlib import rc # Sub-pacote do matplotlib, necessário para a
  formatação em LaTeX;
5
6 from scipy.interpolate import make_interp_spline # Função
  make_interp_spline, que interpola funções obtidas e suaviza os
  plots;
7 from scipy.special import spherical_jn # função spherical_jn, calcula
  os esféricos de Bessel e suas derivadas;
8 from scipy.special import sph_harm # função sph_harm, que calcula os
  esféricos harmônicos
9
10 from scipy import integrate # Sub-pacote Integrate do Scipy, utilizado
  para realizar integrações simples e duplas através de Coeficientes
  de Clebshaw-Curtis;
11
12 import time as time # Pacote Time, utilizado para manter um registro do
  tempo computacional de cada operação.

```

Célula 1: Bibliotecas Utilizadas.

```

1 # Nesta célula de programa, iremos definir as propriedades das caixas
  que iremos produzir.
2
3 linear_distance = 500 # Tamanho lateral da caixa, em Mpc/h;
4
5 N_bins = 100 #Número de células por eixo cartesiano;
6
7 Delta_L = linear_distance/N_bins # Tamanho lateral das células, em Mpc/
  h;
8
9 xyz_edges = np.arange(0, linear_distance + 0.5, Delta_L) # Posição do
  canto das células, em Mpc/h;
10
11 xyz_cent = 0.5 * (xyz_edges[1:] + xyz_edges[:-1]) # Posição central
  das células, em Mpc/h;
12
13 # Definindo as respectivas 'frequências' da caixa no espaço de Fourier
  definido pelo NumPy: a definição do NumPy para a frequência é o
  nosso k usual dividido por 2*pi/Delta_L.

```

```

14
15
16 k_xyz = np.fft.fftfreq(N_bins) # Vetor de Frequências do NumPy;
17
18 # Criando um grid 3D que nos diz a distância radial k de cada célula no
    espaço de Fourier: grid_k
19
20 ident = np.ones_like(k_xyz)
21 KX2 = np.einsum('i,j,k', k_xyz**2, ident, ident)
22 KY2 = np.einsum('i,j,k', ident, k_xyz**2, ident)
23 KZ2 = np.einsum('i,j,k', ident, ident, k_xyz**2)
24 grid_k = np.sqrt(KX2 + KY2 + KZ2) # grid dos valores radiais de k em
    cada célula no espaço de Fourier (definição normalizada do NumPy)
25
26 k_max = 2*np.pi*np.max(k_xyz)/Delta_L # Escala máxima da nossa caixa,
    k_max
27 k_min = 2*np.pi/linear_distance # Escala mínima da caixa, k_min
28
29 # Avaliação da função de Correlação no Espaço de Fourier: Subdividimos
    a nossa caixa no espaço de Fourier em 'nbinsk' bins 'radiais', de
    forma que realizamos a média das correlações encontradas dentro
    desses volumes.
30
31 nbinsk = int(9*N_bins/10) # nbinsk, número de bins que subdividimos
    nossa caixa
32 k_bins = np.arange(k_min, k_max, (k_max - k_min) / nbinsk) # posição do
    canto de cada bin k_i
33 k_ctr = 0.5 * (k_bins[1:] + k_bins[:-1]) # posição central de cada bin
    k_i
34 n_k = len(k_bins) - 1 # número de bins k_i
35
36 # Propriedades das células no espaço real:
37
38 x=np.arange(N_bins) # Posição de cada célula, em unidade de células (1
    célula = 5 Mpc/h);
39 x=x-N_bins/2 # Reposicionando a origem para o centro da caixa;
40
41 # Criando um grid 3D que nos diz a distância radial r de cada célula no
    espaço real: r_grid
42
43 x_ones=np.ones_like(x)
44 x_grid = np.einsum('i,j,k', x, x_ones, x_ones)
45 y_grid = np.einsum('i,j,k', x_ones, x, x_ones)
46 z_grid = np.einsum('i,j,k', x_ones, x_ones, x)
47

```

```

48 r_grid = np.sqrt(x_grid**2 + y_grid**2 + z_grid**2 + 0.000001) # versão
    de r_grid adicionado por um valor infinitesimal, a fim de evitar
    divisões por zero no cálculo de ângulos das coordenadas esféricas.
49
50 r_grid2 = np.sqrt(x_grid**2 + y_grid**2 + z_grid**2) # r_grid2: versão
    pura da distância radial de cada célula, em unidade de células.
51
52 phi_grid=np.arctan2(y_grid,x_grid) # valor do ângulo phi para cada cé
    lula;
53
54 theta_grid=np.arccos(z_grid/r_grid) # valor do ângulo theta para cada c
    élula;
55
56 cos_theta_grid=z_grid/r_grid # valor de cos(theta) para cada célula;
57
58 rho_grid=np.sqrt(x_grid**2+y_grid**2+0.000001) # valor do raio polar
    rho para cada célula;
59
60 sin_theta_grid=rho_grid/r_grid # valor de sen(theta) para cada célula;
61
62 sin_phi_grid=x_grid/rho_grid # valor de sen(phi) para cada célula;
63
64 cos_phi_grid=y_grid/rho_grid # valor de cos(phi) para cada célula
65
66 # Cálculo do elemento diferencial do ângulo sólido, d_Omega, para cada
    célula: Cada célula é tratada como se tivesse três faces quadradas,
    uma para cada eixo cartesiano. Dessa forma, o valor do ângulo só
    lido é grandemente simplificado:
67
68 d_Omega_grid=np.abs((sin_theta_grid*cos_phi_grid+sin_theta_grid*
    sin_phi_grid+cos_theta_grid)/(r_grid**2))

```

Célula 2: Propriedades da Caixa.

```

1 # Algumas funções essenciais:
2
3
4
5 # Função delta de kronecker para dois índices a,b:
6
7 def kronecker(a,b):
8
9     if a==b:
10
11         return 1
12

```

```

13     else:
14
15         return 0
16
17
18
19 # Função 'Top-Hat' para o Espectro de Potência da matéria, dado um
    valor de epsilon (eps), k_1 e k_2. Em função do número de onda k
    cosmológico (h/Mpc).
20
21 def tophat(eps, k1, k2, k):
22
23     res = eps * np.heaviside(k - k1, 0.5) - eps * np.heaviside(k - k2, 0.5) # np.
    heaviside é a função Passo de Heaviside.
24
25     return res
26
27 # função que fornece uma amostra aleatória (Gaussiana+Poissoniana) do
    campo de contraste de densidade seguindo o Top-Hat, dado um (ou
    mais) bias do traçador (b1), e suas respectivas densidades (N1, em
    [Delta_L^(-3)]). Irá retornar um campo para cada Traçador fornecido
    .
28
29 def random_delta_tracers(b1, N1):
30
31     # criando amostras gaussianas do módulo dos modos de Fourier (np.
    random.normal), e atribuindo uma fase complexa aleatória (np.exp)
32
33     delta_gaussian = np.random.normal(0.0, np.sqrt((linear_distance)
    **3 * tophat(epsilon, k_1, k_2, (2 * np.pi / Delta_L) * grid_k))) * np.exp(1j
    * 2 * np.pi * np.random.uniform(0, 1, grid_k.shape))
34
35     # Condição de modos no espaço real puramente reais.
36
37     delta_fourier = delta_gaussian[:, :, :N_bins // 2 + 1]
38
39     # Tomando a transformada de Fourier inversa para obtermos o campo
    de contraste de densidade da matéria. (obs: o fator (1/Delta_L)**3
    é adicionado pois a transformada inversa é composta de uma integral
    em dk^3, que não possui dimensão na definição do NumPy. Portanto,
    só estamos contabilizando a dimensionalidade das nossas frequências
    )
40
41     delta_real = (1/Delta_L)**3 * np.fft.irfftn(delta_fourier)
42

```

```

43     delta_tracers=np.zeros(shape=(len(b1),N_bins,N_bins,N_bins))
44
45     for i in range(len(b1)):
46
47         # versão discretizada do campo de contraste de densidade do tra
48         çador, tomando-se uma amostra Poissoniana (np.random.poisson) da
49         expressão teórica.
50
51         delta_tracers[i,:,:,:]=(np.random.poisson(N1[i]*(1+b1[i]*
52         delta_real))-N1[i])/N1[i]
53
54     return delta_tracers
55
56 # função que calcula os modos harmônicos delta_lm do contraste de
57 # densidade, dado um campo de contraste (delta),
58 # um valor para l (l3), o campo de elementos diferenciais do ângulo só
59 # lido (d_omega), e o bin radial em que se quer
60 # calcular este módulo, dado por uma máscara (mask) que só considerará
61 # como não-nulo as células dentro deste bin. Por fim,
62 # tudo é normalizado pelo fator norm, que nada mais é que a somatória
63 # de d_omega neste bin radial.
64
65 #A função retornará todos os valores de delta_lm, l fixo, m indo de -l
66 # até +l (2l+1 modos no total).
67
68 def delta_lm(l3,delta,d_omega,norm,harm,mask):
69
70     res=np.zeros(int(2*l3)+1,dtype='complex')
71
72     for i in range(int(2*l3)+1):
73
74         harm_m=harm[i,:,:,:]
75         res[i]= np.sum (d_omega * harm_m[mask] * delta)
76
77     return norm * res
78
79 # função que calcula o campo de Esféricos Harmônicos para cada posição
80 # da célula, dado um l fixo.
81 # retorna (2l+1) campos, um para cada modo m.
82
83 def compute_Harmonics(l2):
84
85     res=np.zeros(shape=(int(2*l2)+1,N_bins,N_bins,N_bins),dtype='
86     complex')
87     m=np.linspace(-l2,l2,int(2*l2)+1)

```

```

78
79     for i in range(len(m)):
80
81         res[i,:,:,:]=np.conj(sph_harm(int(m[i]),int(l2),phi_grid,
theta_grid))
82
83     return res
84
85 # Função que calcula a função de correlação dos modos harmônicos <
delta_lm(r1),delta_lm(r2)>, dado o número de caixas
86 # aleatórias a serem produzidas (N_sims), um vetor de l's a serem
avaliados (l1), um vetor de bias de traçador a ser analisado
87 # (b1), e suas respectivas densidades (N1), um vetor de raios (r1) e (
r2) a serem analisados. Por fim, a espessura (W)
88 # de cada bin radial a ser considerado na hora de calcular os modos
harmônicos delta_lm.
89
90 # Irá retornar os estimadores da função de correlação obtida para cada
caixa, para cada valor de l,r1,r2,b1, de forma que
91 # podemos tomar a média sobre estes estimadores a fim de obtermos o
valor final para a função de correlação propriamente dita.
92
93
94 def Angular_PS_tracers(N_sims,l1,b1,N1,r1,r2,W):
95
96
97
98     res=np.zeros(shape=(N_sims,len(l1),len(b1),len(b1),len(r1),len(r2))
, dtype='complex')
99
100
101
102     for i in range(len(l1)):
103
104         Harmonics=compute_Harmonics(l1[i]) # Pré-Calcula os Esféricos
Harmônicos Y_lm, l fixo (l1[i]), -1 <= m <= l
105
106         for a in range(N_sims):
107
108             delta_tracers=random_delta_tracers(b1,N1) # campo aleatório
Gaussiano é criado
109
110             for u in range(len(b1)):
111
112                 delta_l=delta_tracers[u] # Campo aleatório do traçador

```

```

113 b1[u]
114         for v in range(len(b1)):
115
116             delta_2=delta_tracers[v] # Campo aleatório do traç
ador b1[v]
117
118
119             for j in range(len(r1)):
120
121                 # máscara do bin r1[j]
122                 mask_r1=np.where((r_grid2>=(r1[j]/Delta_L-W/(2*
Delta_L))) & (r_grid2<=(r1[j]/Delta_L+W/(2*Delta_L))))
123                 # normalização do ângulo sólido
124                 norm_r1=4*np.pi/np.sum(d_Omega_grid[mask_r1])
125                 # Campo do Ângulo Sólido mascarado pelo bin
126                 d_omega_r1=d_Omega_grid[mask_r1]
127                 # Campo do contraste de densidade mascarado
128                 pelo bin
129                 delta_r1=delta_1[mask_r1]
130
131                 for k in range(len(r2)):
132
133                     # máscara do bin r2[k]
134                     mask_r2=np.where((r_grid2>=(r2[k]/Delta_L-W
/(2*Delta_L))) & (r_grid2<=(r2[k]/Delta_L+W/(2*Delta_L))))
135                     # normalização do ângulo sólido
136                     norm_r2=4*np.pi/np.sum(d_Omega_grid[mask_r2
])
137                     # Campo do Ângulo Sólido mascarado pelo bin
138                     d_omega_r2=d_Omega_grid[mask_r2]
139                     # Campo do contraste de densidade mascarado
140                     pelo bin
141                     delta_r2=delta_2[mask_r2]
142                     # Cálculo dos modos Harmônicos delta_lm(r1[
j]), delta_lm*(r2[k]), para cada modo m degenerado.
143                     deltas_lm_1=delta_lm(l1[i],delta_r1,
d_omega_r1,norm_r1,Harmonics,mask_r1)
144                     deltas_lm_2=np.conj(delta_lm(l1[i],delta_r2
,d_omega_r2,norm_r2,Harmonics,mask_r2))
145                     # por fim, média sobre os modos m para
obtenção dos estimadores da função de correlação
146                     res[a,i,u,v,j,k]= np.mean(deltas_lm_1*
deltas_lm_2)

```



```

146     return res
147
148 # Função g_l definida pela equação (67)
149
150 def g2(l1,a,b):
151
152     a2=a+1e-10
153     res=(b*spherical_jn(l1-1,b)*spherical_jn(l1,a2)-a2*spherical_jn(l1
154     -1,a2)*spherical_jn(l1,b))/(a2**2-b**2)
155
156     return np.nan_to_num(res)
157 # Expressão teórica para a função de correlação dos modos harmônicos:
158     versão de bin infinitesimal
159
160 def Angular_PS_theory2(ls,b1,n1,r1,r2):
161
162     res=np.zeros(shape=(len(ls),len(b1),len(b1),len(r1),len(r2)),dtype=
163     'complex')
164
165     for i in range(len(ls)):
166         for j in range(len(r1)):
167             for k in range(len(r2)):
168                 for u in range(len(b1)):
169                     for v in range(len(b1)):
170
171                         res[i,u,v,j,k] = kronecker(b1[u],b1[v])*
172                         kronecker(r1[j],r2[k])*Delta_L**3/(n1[u]*r2[k]**2*Delta_L) - (2/np.
173                         pi)*b1[u]*b1[v]*epsilon*(k_1**3*g2(ls[i],k_1*r1[j],k_1*r2[k])-k_2
174                         **3*g2(ls[i],k_2*r1[j],k_2*r2[k]))
175
176     return res
177
178 # Expressão teórica para a função de correlação dos modos harmônicos:
179     versão 'binada', com integral sobre o volume dos bins
180
181 def Angular_PS_theory_avg2(ls,b1,n1,r1,r2,W):
182
183     res=np.zeros(shape=(len(ls),len(b1),len(b1),len(r1),len(r2)))

```

```

184
185         # função a ser integrada
186         func = lambda R1, R2: R2**2*R1**2*(kronecker(b1
187         [u],b1[v])*kronecker(r1[j],r2[k])*Delta_L**3/(n1[u]*R2**2*Delta_L)
188         - (2/np.pi)*b1[u]*b1[v]*epsilon*(k_1**3*g2(ls[i],k_1*R1,k_1*R2)-
189         k_2**3*g2(ls[i],k_2*R1,k_2*R2)))
190         # termo volumétrico com o qual normalizaremos a
191         integral
192         volume_term=((r2[k]+W/2)**3-(r2[k]-W/2)**3)*((
193         r1[j]+W/2)**3-(r1[j]-W/2)**3)/9
194         # realização da integral sobre o intervalo dos
195         bins + normalização
196         res[i,u,v,j,k]=integrate.dblquad(func, r2[k]-W
197         /2, r2[k]+W/2, lambda R1: r1[j]-W/2, lambda R1: r1[j]+W/2)[0]/
198         volume_term
199
200     return res
201
202 # Função que calcula as matrizes de covariância do espectro de potência
203 angular, isto é, Cov[xi_l^(b1,b2)(X),xi_l^(b3,b4)(Y)],
204 # tanto amostral quanto teórica,
205 # dados l (l1), (b1,b2) e (b3,b4) fixos, provenientes de uma simulação
206 (sim1) e teoria (simth1) pré-computadas.
207
208 def complete_cov_r1r2r3r4(sim1,simth1,l1,b1,b2,b3,b4,W):
209
210     # índice do vetor l_1 da simulação que corresponde a l_1=l1
211
212     l_index=int(np.where(l_1==np.double(l1))[0])
213
214     # índices no vetor biass da simulação que correspondem a b1,b2,b3 e
215     b4
216
217     b1_index=int(np.where(biass==np.double(b1))[0])
218     b2_index=int(np.where(biass==np.double(b2))[0])
219     b3_index=int(np.where(biass==np.double(b3))[0])
220     b4_index=int(np.where(biass==np.double(b4))[0])
221
222     # número de bins radiais
223
224     r1len=len(sim1[0,0,0,0,:],0)
225
226     # número de caixas produzidas pela simulação

```

```
218
219     simsampleslen=len(sim1[:,0,0,0,0,0])
220
221     # matrizes r1 x r2 para (o estimador da) função de correlação dos
222     traçadores b1 e b2, para cada caixa simulada.
223
224     c11sim=np.real(sim1[:,l_index,b1_index,b2_index,:,:])
225
226     # matrizes r1 x r2 para (o estimador da) função de correlação dos
227     traçadores b3 e b4, para cada caixa simulada.
228
229     c12sim=np.real(sim1[:,l_index,b3_index,b4_index,:,:])
230
231     # Tamanho de entradas laterais da matriz
232
233     Xlen=r1len**2
234
235     CLX_vec_samples=np.zeros(shape=(simsampleslen,Xlen))
236     CLY_vec_samples=np.zeros(shape=(simsampleslen,Xlen))
237
238     # versões teóricas de C_l, para diferentes combinações de traç
239     adores (utilizado na expressão teórica da
240     # matriz de covariância)
241
242     CL1_vec_theory=np.real(simth1[l_index,b1_index,b3_index,:,:])
243     CL2_vec_theory=np.real(simth1[l_index,b2_index,b4_index,:,:])
244     CL3_vec_theory=np.real(simth1[l_index,b1_index,b4_index,:,:])
245     CL4_vec_theory=np.real(simth1[l_index,b3_index,b2_index,:,:])
246
247     # criando i vetores 'flat' das funções de correlação (np.matrix.
248     flatten),
249     # de forma que de matrizes r1 x r2 teremos vetores de tamanho Xlen=
250     r1*r2.
251
252     for i in range(simsampleslen):
253
254         # vetor flat da função de correlação c11sim, para cada caixa
255         simulada
256
257         CLX_vec_samples[i][:]=np.matrix.flatten(c11sim[i,:,:])
258
259         # vetor flat da função de correlação c12sim, para cada caixa
260         simulada
261
262         CLY_vec_samples[i][:]=np.matrix.flatten(c12sim[i,:,:])
```

```

256
257 covmatrix=np.zeros(shape=(Xlen,Xlen))
258 covmatrix_theory=np.zeros(shape=(Xlen,Xlen))
259
260
261 for i in range(Xlen):
262     for j in range(Xlen):
263
264         if j<=i: # evita o cálculo duplo, já que esta matriz é simétrica.
265
266             # índices teóricos de r1,r2,r3 e r4 em cada entrada da
matriz de covariância
267
268                 r1_index=np.unravel_index([i], (r1len,r1len))[0]
269                 r2_index=np.unravel_index([i], (r1len,r1len))[1]
270                 r3_index=np.unravel_index([j], (r1len,r1len))[0]
271                 r4_index=np.unravel_index([j], (r1len,r1len))[1]
272
273                 # matriz de covariância: para cada valor de (r1,r2) [i]
e (r3,r4) [j], tomamos a covariância amostral
274                 # das várias caixas simuladas. ([0,1] abaixo serve
simplesmente para tomarmos a covariância cruzada, que é
275                 # o que queremos)
276
277                 covmatrix[i,j]=np.cov(CLX_vec_samples[:,i],
CLY_vec_samples[:,j])[0,1]
278
279                 # Expressão teórica para a matriz de covariância, dados
os índices corretos para os bins radiais.
280                 covmatrix_theory[i,j]=(CL1_vec_theory[r1_index,r3_index
]*CL2_vec_theory[r2_index,r4_index]+CL3_vec_theory[r1_index,
r4_index]*CL4_vec_theory[r3_index,r2_index])/(2*l1+1)
281
282 for i in range(Xlen):
283     for j in range(Xlen):
284
285         if j>i: # o triângulo inferior é igual ao superior, por
simetria.
286
287                 covmatrix[i,j]=covmatrix[j,i]
288                 covmatrix_theory[i,j]=covmatrix_theory[j,i]
289
290 # função retorna as matrizes de covariância amostral e teórica.

```

```
291 return covmatrix, covmatrix_theory
```

Célula 3: Algumas funções essenciais.

Vamos agora realizar alguns cálculos relacionados às simulações: primeiramente, vamos calcular a variância esférica das nossas caixas. Abaixo, as funções necessárias para realizarmos este cálculo:

```
1 # Expressão teórica para a variância esférica de um traçador b1, com
  respectiva densidade de contagem de traçadores N1, raio r:
2
3 def sigma_tracer_theory(b1, N1, r):
4
5     res1=np.sqrt(np.sum(dk1 * (kh[1:]**2*(Delta_L**3/N1+b1**2*tophat(
6         epsilon,k_1,k_2,kh[1:]))/(2*np.pi**2))*(3*spherical_jn(1,kh[1:]*r)
7         /(kh[1:]*r)**2))
8
9     return res1
10
11 # Função que calcula a variância esférica amostral e plota diretamente
12 a comparação com a expressão teórica, dado um número
13 # Ns de pontos aleatórios sobre os quais avaliaremos a variância esfé
14 rica amostral, e então realizaremos uma média.
15
16 def plot_sigma_tracer(b1, N1, Ns):
17
18     respartial=np.zeros(shape=(int(N_bins/2), Ns))
19
20     bias1=[b1]
21     N_bar1=[N1]
22
23     for i in range(Ns):
24         # para cada ponto i aleatório, criamos um campo de contraste de
25         densidade aleatório também.
26
27         delta1=random_delta_tracers(bias1, N_bar1)[0, :, :, :]
28
29         # tomando um ponto aleatório dentro da caixa recém-criada
30
31         rand_x=int(np.random.uniform(0, N_bins-1))
32         rand_y=int(np.random.uniform(0, N_bins-1))
33         rand_z=int(np.random.uniform(0, N_bins-1))
34
35         # criando um grid de valor radial no qual a origem está
36         centrada no ponto aleatório
```

```

32     x2=np.arange(N_bins)-rand_x
33     y2=np.arange(N_bins)-rand_y
34     z2=np.arange(N_bins)-rand_z
35
36     x2_grid = np.einsum('i,j,k', x2, x_ones, x_ones)
37     y2_grid = np.einsum('i,j,k', x_ones, y2, x_ones)
38     z2_grid = np.einsum('i,j,k', x_ones, x_ones, z2)
39
40     r_grid2 = np.sqrt(x2_grid**2 + y2_grid**2 + z2_grid**2) # grid
radial do ponto aleatório
41
42     for j in range(int(N_bins/2)):
43
44         # máscara que só levará em conta células dentro da esfera
de raio (j*(N_bins/2)) centrada no ponto aleatório gerado
45
46         center_sphere=np.where(r_grid2<=j)
47
48         # valor da variância esférica para uma caixa aleatória de
ponto aleatório i, raio (j*(N_bins/2)).
49
50         respartial[j,i]=np.sqrt(np.mean(np.real(delta1[
center_sphere]))**2)
51
52         # cálculo da variância da estimativa para a variância esférica em
cada raio:
53
54         res_var=np.zeros(int(N_bins/2))
55
56         for i in range(int(N_bins/2)):
57
58             res_var[i]=np.sqrt(np.var(respartial[i,:]))
59
60
61
62         # Cálculo da variância esférica amostral propriamente dita,
realizando-se uma média sobre os Ns pontos aleatórios,
63         # juntamente com o cálculo teórico dada pela função anterior.
64
65         res=np.zeros(int(N_bins/2))
66         resth=np.zeros(int(N_bins/2))
67
68         for i in range(int(N_bins/2)):
69
70             res[i]=np.mean(respartial[i,:]) # variância esférica amostral

```

```

71     resth[i]=sigma_tracer_theory(b1,N1,Delta_L*i+1e-5) # variância
esférica teórica (obs: valor infinitesimal adicionado
72     # ao valor do raio, para evitar divisão por zero)
73
74
75     ##### interpolando os resultados para uma visualização suavizada
#####
76
77     r_interp=np.linspace(0,Delta_L*int(N_bins/2),125)
78
79     res_interp=make_interp_spline(Delta_L*np.arange(int(N_bins/2)),res)
80     resvar_interp=make_interp_spline(Delta_L*np.arange(int(N_bins/2)),
res_var)
81     resth_interp=make_interp_spline(Delta_L*np.arange(int(N_bins/2)),
resth)
82
83
84     ##### Plot da variância esférica versus raio #####
85
86     plt.figure(figsize=(15,7))
87     plt.semilogx(r_interp,res_interp(r_interp),label=r"Variância
Amostral")
88     plt.semilogx(r_interp,resth_interp(r_interp),label=r"Variância Teó
rica")
89     plt.fill_between(r_interp,res_interp(r_interp)-resvar_interp(
r_interp),res_interp(r_interp)+resvar_interp(r_interp),alpha=0.2,
color='blue')
90     plt.xlim(right=linear_distance/2)
91     plt.xlabel(r"$R\,,\,, [\,,h^{-1}\,,Mpc\,,]$", fontsize=20)
92     plt.ylabel(r"$\sigma_R^{\%i}$"%b1, fontsize=20)
93     plt.title(r"Variância Esférica $\sigma^{\%i}_R$"%b1, fontsize=20)
94     plt.tick_params(labelsize=20)
95     plt.legend(fontsize=20)
96     plt.grid()
97     plt.show()

```

Célula 4: Funções para o cálculo da variância esférica.

Com as funções acima, podemos finalmente mostrar o plot da variância esférica das caixas criadas seguindo o espectro de potência ‘top-hat’:

```

1 # Definindo as constantes do modelo Top-Hat:
2
3 epsilon=10
4 k_1=2e-1
5 k_2=3e-1

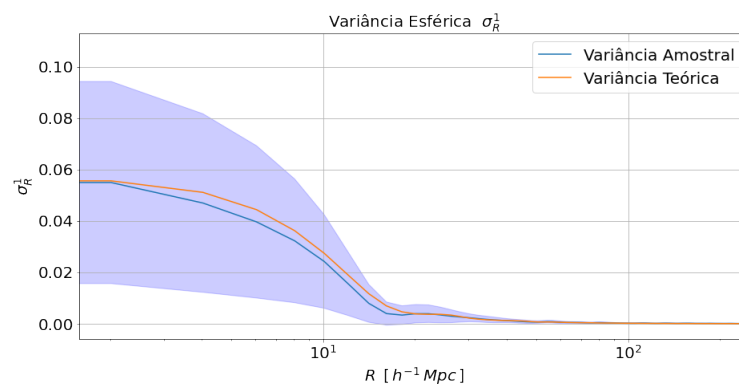
```

```

6
7 # Definindo o intervalo de frequências sobre o qual integraremos a
      expressão teórica para a variância esférica
8
9 kh=np.logspace(np.log10(k_1),np.log10(k_2),1000,10)
10 dk1=np.abs(kh[1:]-kh[:-1])
11
12 # Plot da variância esférica amostral versus teórica, para um traçador
      de bias 1, densidade de contagem 1000 [Delta_L^(-3)]
13 # e média sobre 20 pontos aleatórios:
14
15 plot_sigma_tracer(1,1000,20)

```

Célula 5: Plotando a variância esférica.



Em seguida, vamos calcular a função de correlação dos modos de Fourier gerados através das amostras aleatórias (Gaussianas+Poissonianas). Para isso, é útil definir a seguinte função:

```

1 # Função que gera um campo de contraste de densidade no espaço de
      Fourier, para um dado bias b1 de densidade de contagem
2 # de traçadores N1 [Delta_L^(-3)]. em seguida, a função toma a auto-
      correlação dos modos de Fourier dentro dos bins k_ctrs,
3 # definidos logo no início do programa.
4
5 def random_ps_tracers(b1,N1):
6
7     # criando amostras gaussianas do módulo dos modos de Fourier (np.
      random.normal),
8     # e atribuindo uma fase complexa aleatória (np.exp)
9
10    delta_gaussian = np.random.normal(0.0, np.sqrt((linear_distance)
      **3*tophat(epsilon,k_1,k_2,(2*np.pi/Delta_L)*grid_k))) * np.exp(1j
      * 2*np.pi * np.random.uniform(0, 1, grid_k.shape))
11

```



```

12     # Condição de modos no espaço real puramente reais.
13
14     delta_fourier = delta_gaussian[:, :, :N_bins//2+1]
15
16     # Tomando a transformada de Fourier inversa para obtermos o campo
17     # de contraste de densidade da matéria.
18     # (obs: o fator (1/Delta_L)**3 é adicionado pois a transformada
19     # inversa é composta de uma integral em dk , que não possui
20     # dimensão na definição do NumPy. Portanto, só estamos
21     # contabilizando a dimensionalidade das nossas frequências)
22
23     delta_real = (1/Delta_L)**3*np.fft.irfftn(delta_fourier)
24
25     delta_tracers=np.zeros(shape=(N_bins,N_bins,N_bins))
26
27     delta_fourier_tracers=np.zeros(shape=(N_bins,N_bins,N_bins))
28
29     # versão discretizada do campo de contraste de densidade do traç
30     # ador, tomando-se uma amostra Poissoniana
31     # (np.random.poisson) da expressão teórica.
32
33     delta_tracers=(np.random.poisson(N1*(1+b1*delta_real))-N1)/N1
34
35     # Modos de Fourier do contraste de densidade dos traçadores,
36     # tomando-se a transformada de Fourier destes.
37     # (obs: a inclusão do termo (Delta_L)**3 é realizada pelo mesmo
38     # argumento da obtenção de delta_real, só que agora
39     # devido à uma integral em dx^3)
40
41     delta_fourier_tracers=np.fft.fftn(delta_tracers)*(Delta_L)**3
42
43     amp_disc=np.zeros(shape=(n_k))
44
45     # Tomando a função de correlação dentro dos i bins em k:
46
47     for i in range(n_k):
48
49         amp_disc[i] = np.mean(np.abs(delta_fourier_tracers[ ((2*np.pi/
50         Delta_L)*grid_k > k_bins[i]) & ((2*np.pi/Delta_L)*grid_k <= k_bins[
51         i+1]) ])**2.)
52
53     return amp_disc

```

Célula 6: Calculando a função de correlação dos modos de Fourier.

Criada a função que calcula a função de correlação (para apenas uma caixa), vamos realizar um plot comparando a média desta função para 'N_amostras' amostras dos modos de Fourier (que é, de fato, a função de correlação) versus o valor teórico esperado para esses modos, dado pela equação ():

```
1 # Constantes do modelo top-hat a serem consideradas:
2
3 epsilon=10
4 k_1=2e-1
5 k_2=3e-1
6
7 # traçador a ser considerado:
8
9 bias1=1 # bias
10 Nbar1=1000 # densidade de contagem do traçador [ $\Delta_L^{-3}$ ]
11
12
13
14 N_amostras=5 # Número de amostras do campo dos modos de Fourier
15 ps_samples=np.zeros(shape=(N_amostras,n_k))
16 ps_mean=np.zeros(n_k)
17 ps_var=np.zeros(n_k)
18
19 # correlação para cada bin, para cada caixa:
20
21 for i in range(N_amostras):
22
23     ps_samples[i,:]=random_ps_tracers(bias1,Nbar1)
24
25 # média das correlações de cada caixa, a fim de obter a expressão final
26     para a função de correlação amostral.
27 # juntamente, calculamos a variância desta estimativa.
28
29 for i in range(n_k):
30
31     ps_mean[i] = np.mean(ps_samples[:,i])
32     ps_var[i]=np.sqrt(np.cov(ps_samples[:,i]))
33
34 ##### Plot da função obtida #####
35
36 fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2)
37
38 fig.set_figheight(7)
39 fig.set_figwidth(15)
```

```

40 # Expressão teórica esperada:
41
42 ps_theory=(linear_distance)**3*(Delta_L**3/Nbar1+bias1*bias1*tophat (
    epsilon,k_1,k_2,k_ctrs))
43
44 ax2.loglog(k_ctrs,ps_mean,label=r"Média+Variância de N=%i Amostras" %
    N_amostras)
45 ax2.loglog(k_ctrs,ps_theory,label=r"Valor Teórico")
46 ax2.fill_between(k_ctrs,ps_mean-ps_var,ps_mean+ps_var,alpha=0.2)
47 ax2.set_xlabel(r"$k_i$, [\,Mpc^{-1}\,h\,]$", fontsize=14)
48 ax2.set_title(r"Espectro top-hat: $\langle \tilde{\delta}^{\,1}(\vec{k}_i)\, \tilde{\delta}^{\,*\,1}(\vec{k}_i) \rangle$")
49 ax2.set_xlim(left=k_ctrs[0],right=k_ctrs[-1])
50 ax2.legend()
51 ax2.set_ylim(top=2e10)
52
53 for i in range(N_amostras):
54     ax1.loglog(k_ctrs,ps_samples[i,:])
55
56 ax1.set_xlabel(r"$k_i$, [\,Mpc^{-1}\,h\,]$", fontsize=14)
57 ax1.set_title(r"Espectro Top-Hat: Amostras (Gaussianas+Poissonianas)
    Aleatórias $\tilde{\delta}^{\,1}$ ")
58 ax1.set_ylabel(r"$\langle \tilde{\delta}^{\,1}(\vec{k}_i)\, \tilde{\delta}^{\,*\,1}(\vec{k}_i) \rangle$, [\,Mpc^3\,h^{-3}\,]$", fontsize=14)
59 ax1.set_xlim(left=k_ctrs[0],right=k_ctrs[-1])
60 ax1.set_ylim(top=2e10)
61
62 ax1.grid()
63 ax2.grid()
64
65 plt.show()

```

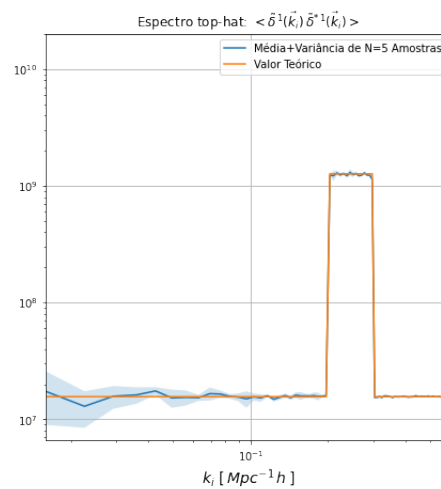
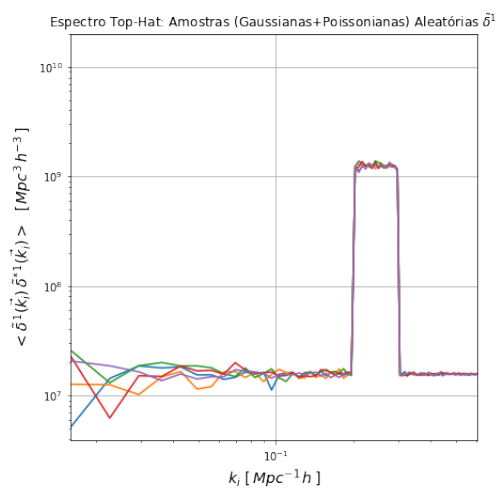
Célula 7: Plot da função de correlação obtida.

Com todas as expressões em concordância, podemos partir para o cálculo das funções de correlação dos modos harmônicos:

```

1 # Simulação:
2
3
4 # Constantes do modelo Top-Hat:
5
6 epsilon=10
7 k_1=2e-1
8 k_2=3e-1
9

```



```

10 # traçador(es)
11
12 biass=[1]
13 N_bars=[1000]
14
15 # valor(es) de l:
16 l_1=[10]
17
18 # valores de r1 e r2:
19
20 r_1=np.linspace(5,245,25)
21 r_2=np.linspace(5,245,25)
22
23 # espessura dos bins radiais
24
25 W=10 # h-1 Mpc
26
27 # número de caixas a serem tomadas:
28
29 N_simulations=100
30
31 # Início do cálculo:
32
33 inicio=time.time()
34
35 simulation_1=Angular_PS_tracers(N_simulations,l_1,biass,N_bars,r_1,r_2,
36     W)
37
38 # Fim do cálculo:
39 fim=time.time()

```

```

40
41 # Salvando a simulação
42
43 np.save(r"simulacao_apendice", simulation_1)
44
45 # Print do tempo tomado para a simulação
46
47 print((fim-inicio)/60, 'minutos')
48
49 31.686371274789174 minutos

```

Célula 8: Criando nossa simulação de caixas.

Terminada a simulação, podemos carregá-la a partir do arquivo salvo no computador, sem a necessidade de refazer a simulação toda vez que abrirmos o programa. Vamos então carregar a simulação realizada e também calcular sua contraparte teórica:

```

1 epsilon=10
2 k_1=2e-1
3 k_2=3e-1
4
5 # Constantes do modelo Top-Hat:
6
7 epsilon=10
8 k_1=2e-1
9 k_2=3e-1
10
11 # traçador(es)
12
13 biass=[1]
14 N_bars=[1000]
15
16 # valor(es) de l:
17 l_1=[10]
18
19 # valores de r1 e r2:
20
21 r_1=np.linspace(5,245,25)
22 r_2=np.linspace(5,245,25)
23
24 # espessura dos bins radiais
25
26 W=10 # h(-1) Mpc
27
28 # vetor de r para um cálculo em alta resolução da função de correlação
    harmônica, através da função Angular_PS_theory2.

```

```

29
30 r_inf=np.linspace(5,245,241)
31
32 # Cálculo da contraparte teórica da simulação
33
34 simulation_1_theory=Angular_PS_theory_avg2(l_1,biass,N_bars,r_1,r_2,W)
35
36 # Cálculo da versão em alta definição da função de correlação
37
38 simth_inf=Angular_PS_theory2(l_1,biass,N_bars,r_inf,r_inf)
39
40 # Carregando a simulação armazenada
41
42 simlload=np.load(r"C:\Users\Sony Vaio\simulacao_apendice.NPY")

```

Célula 9: Carregando a simulação e calculando a contraparte teórica.

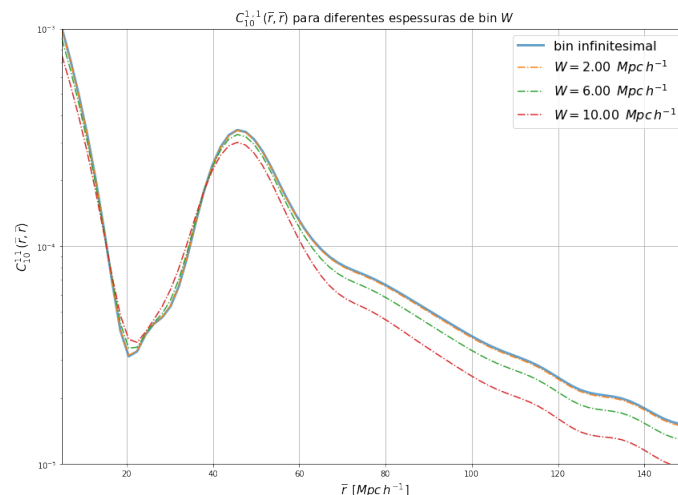
Com todas as funções calculadas (amostrais e teóricas), resta agora realizarmos os plots para fins de comparação.

```

1 plot_Cl_vs_W(10,1,1,np.linspace(2,10,3))

```

Célula 10: Plot do C_ℓ teórico para diferentes espessuras de bin W .



```

1 plot_Cl_r1r2(simlload,1.25*simulation_1_theory,10,1,1,W)

```

Célula 11: Plot das funções de correlação harmônicas.

```

1 plot_Corr_Cl_r1r2(simlload,1.25*simulation_1_theory,simth_inf,10,1,1,W)

```

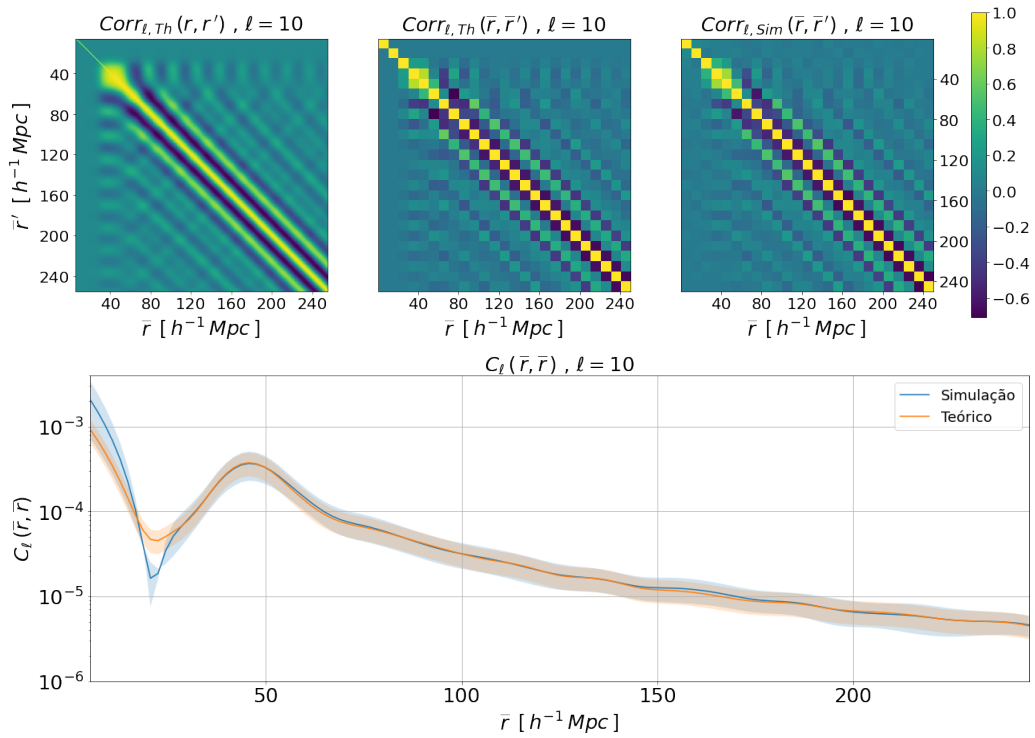
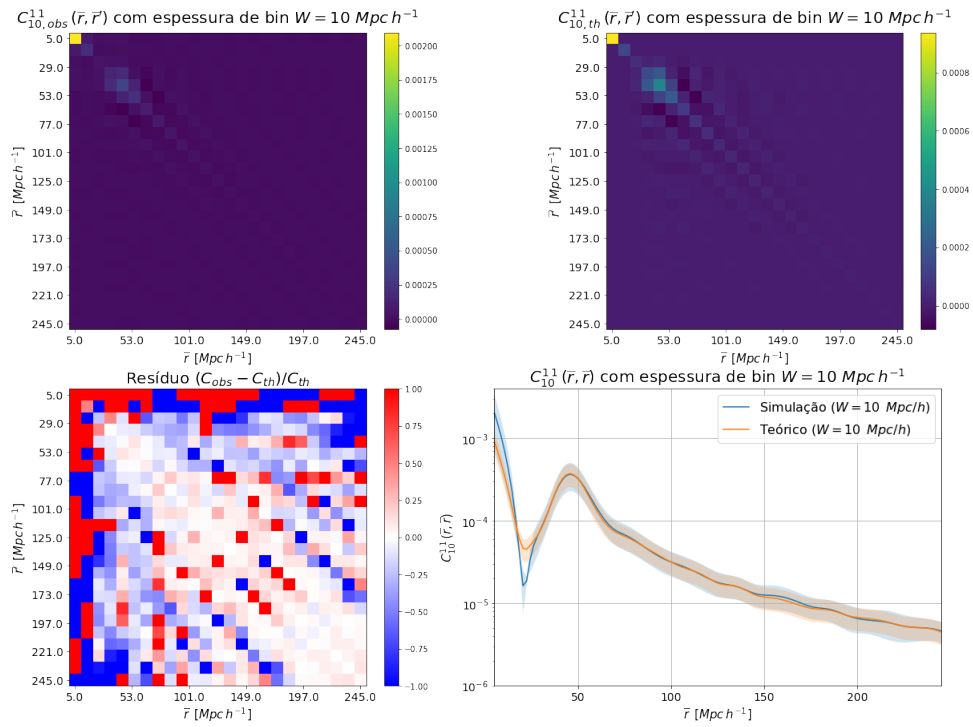
Célula 12: Plot das matrizes de correlação dos modos harmônicos.

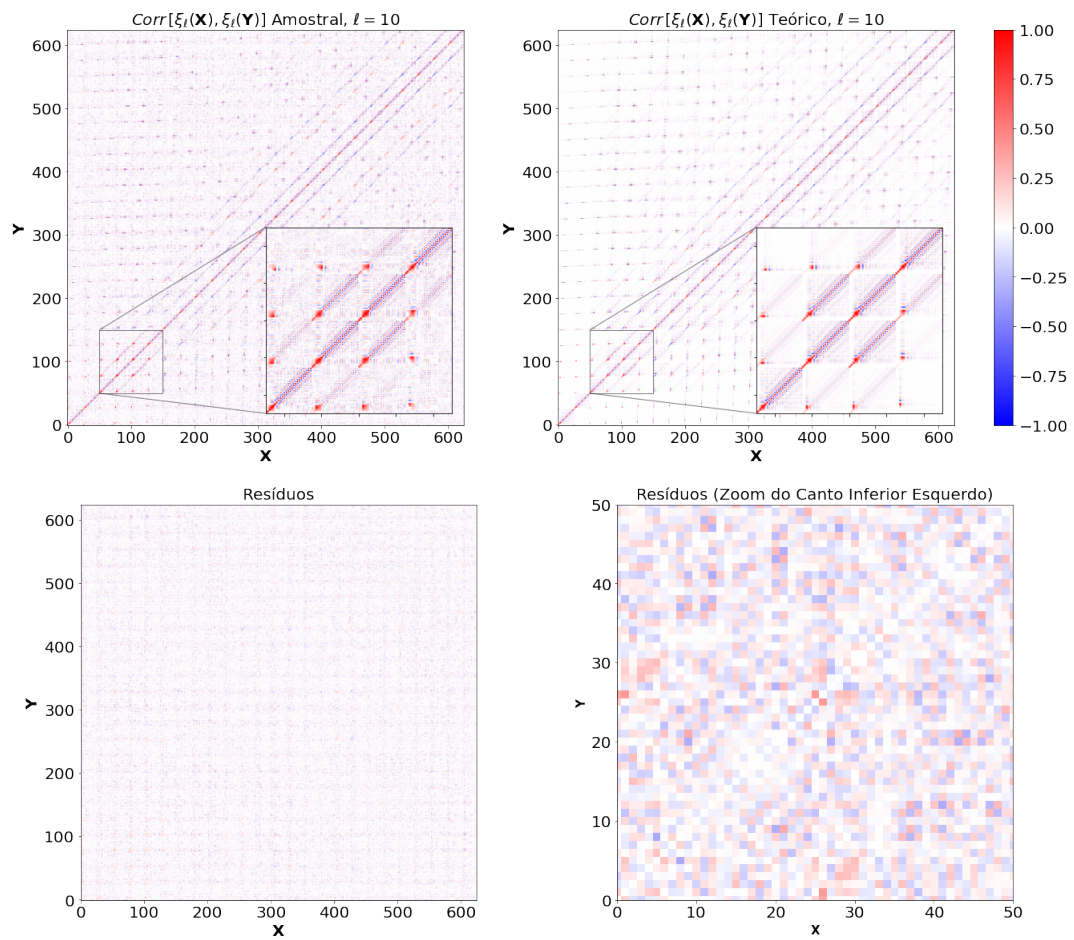
```

1 plot_complete_tracer_cov_XY_norm(simlload,1.25*simulation_1_theory
,10,1,1,1,1,10)

```

Célula 13: Plot das matrizes de correlação do espectro de potência angular.





O código completo, com todas as funções de *plot*, está disponível no GitHub [\[68\]](#).

Apêndice de Figuras

Função de Correlação dos modos harmônicos para um espectro de potência ‘top-hat’, $\ell = 20$:

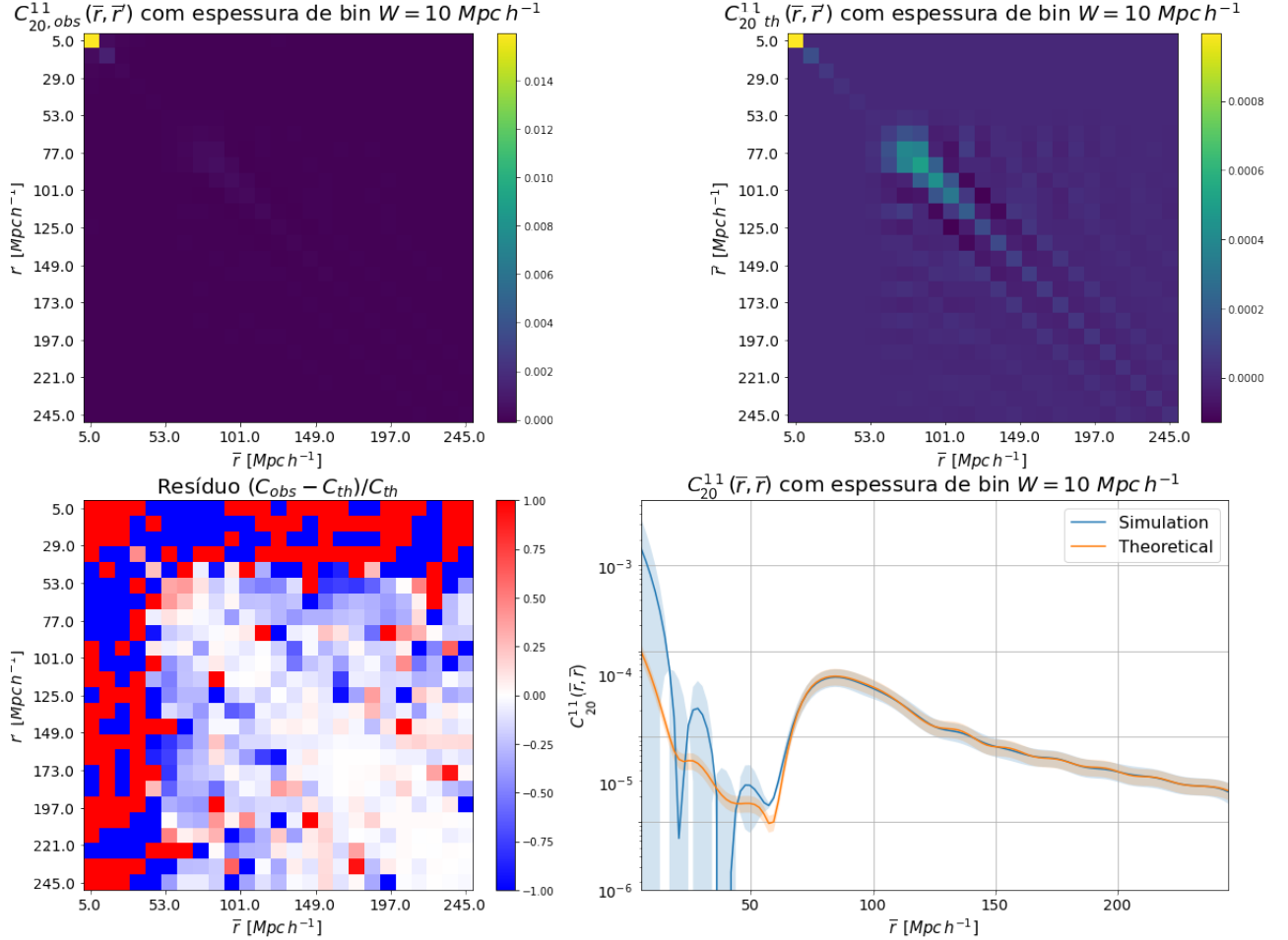


Figura 36: Função de Correlação dos modos harmônicos para um espectro de potência da matéria ‘top-hat’: o painel esquerdo superior mostra nossa função de correlação medida, $C_{20,obs}^{1,1}(\bar{r}, \bar{r}')$. O painel superior direito é a sua contraparte teórica, $C_{20,th}^{1,1}(\bar{r}, \bar{r}')$, calculada a partir da Eq. 5.16. No painel inferior esquerdo, plotamos o resíduo entre $C_{20,th}^{1,1}$ e $C_{20,obs}^{1,1}$. Para fins de visualização, uma comparação direta entre ambos os cálculos é mostrada no painel inferior direito, onde tomamos um gráfico em escala logarítmica da seção diagonal da função de correlação.

Matriz de correlação do espectro de potência angular para um espectro de potência da matéria ‘top-hat’, $\ell = 20$:

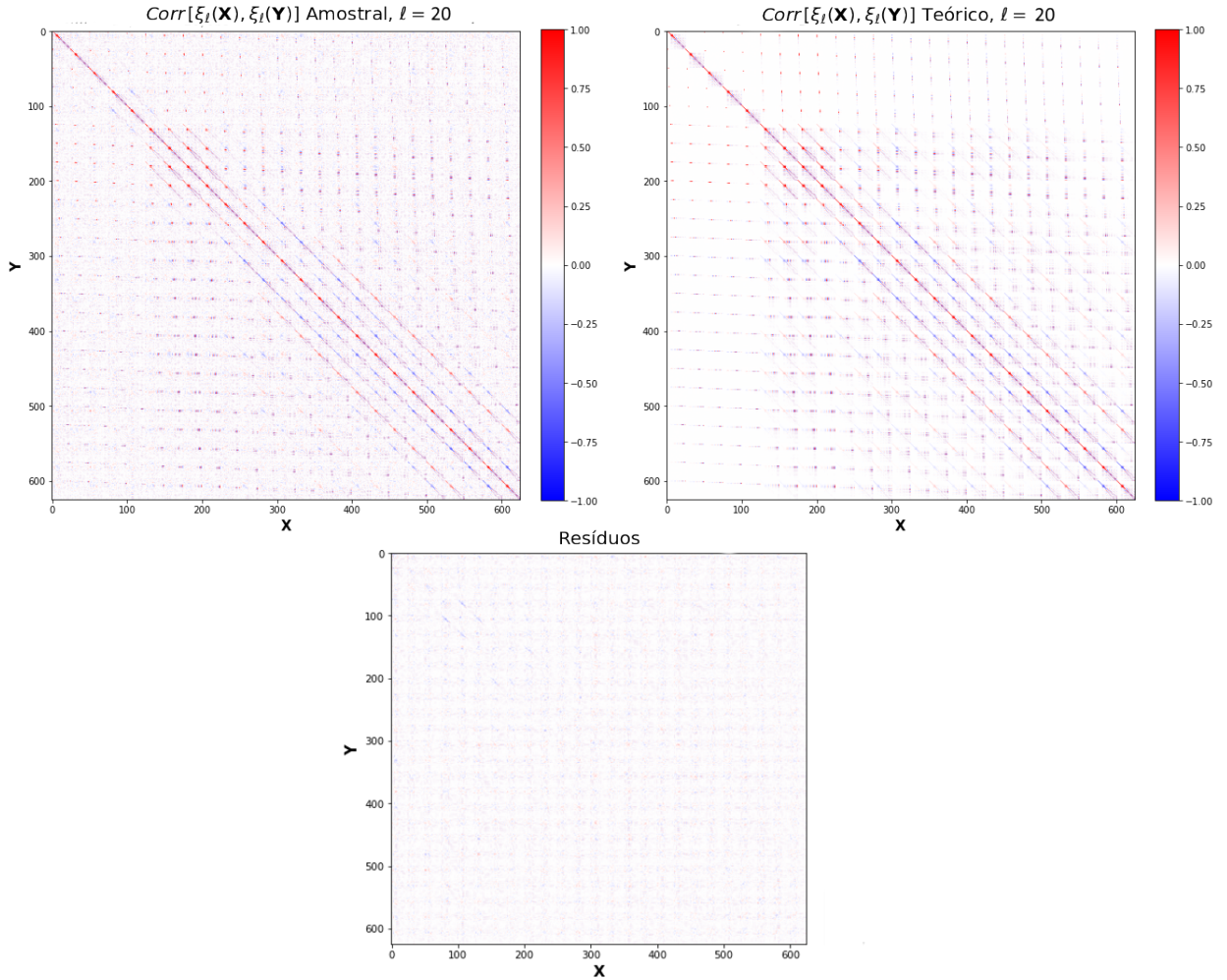


Figura 37: *Matriz* de correlação da covariância do espectro de potência angular para $\ell = 20$. A coordenada radial é dividida em 25 bins de espessura $W = 10 h^{-1}$ Mpc de $\bar{x}_1 = 5 h^{-1}$ Mpc até $\bar{x}_{25} = 245 h^{-1}$ Mpc, resultando em uma matriz de covariância 625×625 . O painel direito mostra a matriz de correlação teórica calculada com a ajuda da Eq. (5.20). O painel esquerdo mostra a matriz de correlação amostral obtida através de 1000 simulações Gaussianas. Os *insets* mostram um zoom nas mesmas regiões das duas matrizes, para uma melhor visualização das estruturas.

Função de Correlação dos modos harmônicos para um espectro de potência ‘top-hat’, $\ell = 40$

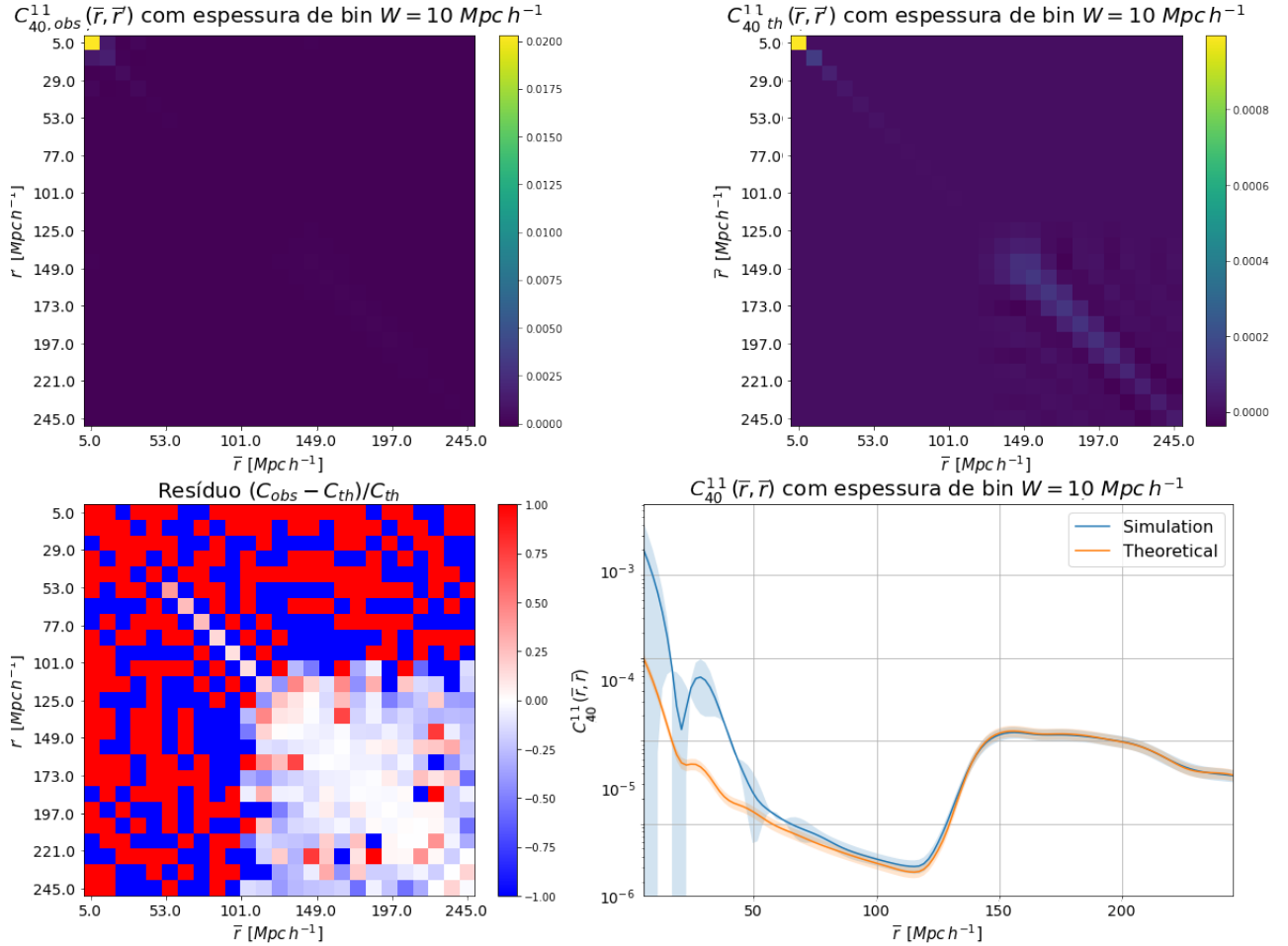


Figura 38: Função de Correlação dos modos harmônicos para um espectro de potência da matéria ‘top-hat’: o painel esquerdo superior mostra nossa função de correlação medida, $C_{40,obs}^{1,1}(\bar{r}, \bar{r}')$. O painel superior direito é a sua contraparte teórica, $C_{40,th}^{1,1}(\bar{r}, \bar{r}')$, calculada a partir da Eq. 5.16. No painel inferior esquerdo, plotamos o resíduo entre $C_{40,th}^{1,1}$ e $C_{40,obs}^{1,1}$. Para fins de visualização, uma comparação direta entre ambos os cálculos é mostrada no painel inferior direito, onde tomamos um gráfico em escala logarítmica da seção diagonal da função de correlação.

Matriz de correlação do espectro de potência angular para um espectro de potência da matéria ‘top-hat’, $\ell = 40$:

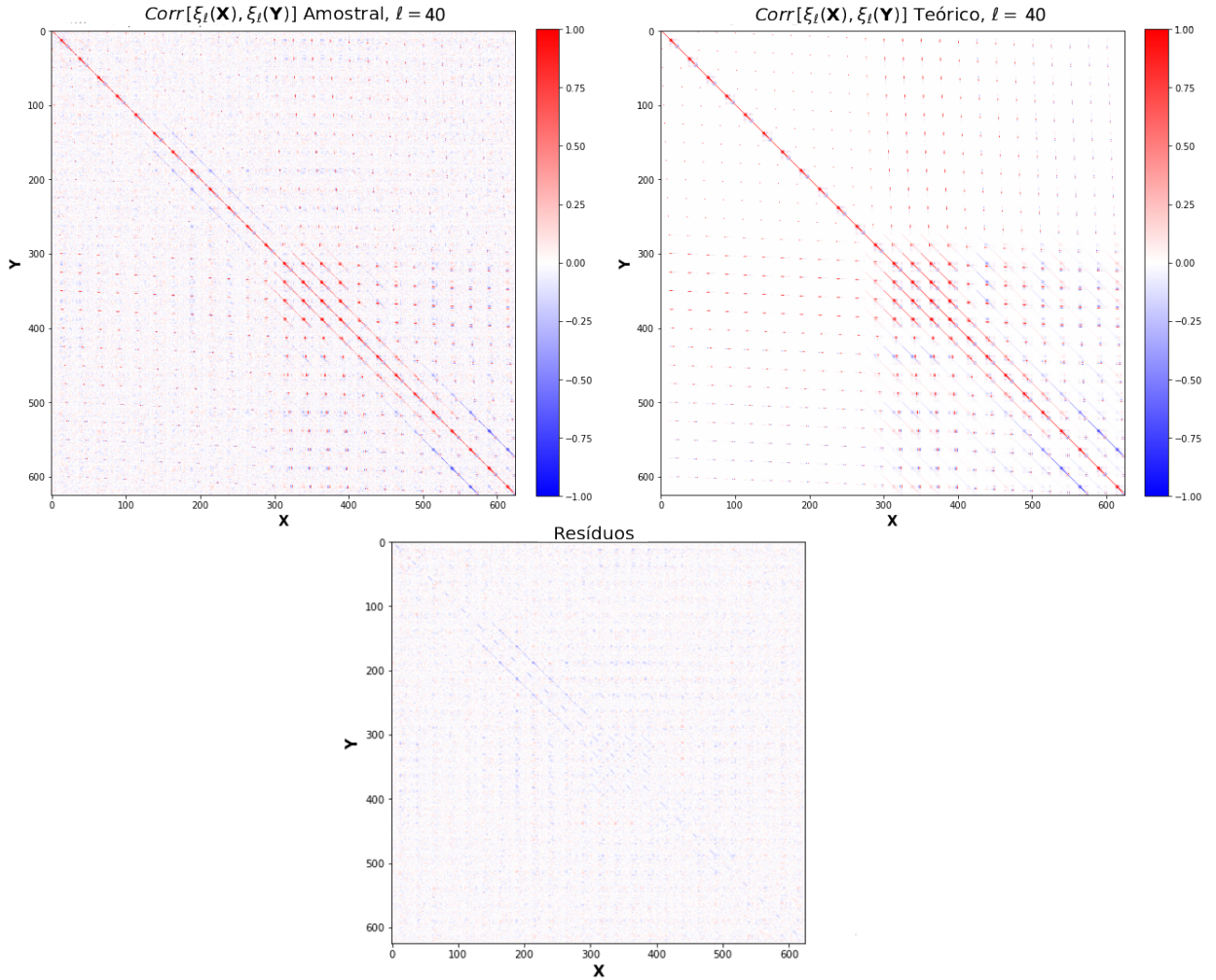


Figura 39: *Matriz* de correlação da covariância do espectro de potência angular para $\ell = 40$. A coordenada radial é dividida em 25 bins de espessura $W = 10 h^{-1}$ Mpc de $\bar{x}_1 = 5 h^{-1}$ Mpc até $\bar{x}_{25} = 245 h^{-1}$ Mpc, resultando em uma matriz de covariância 625×625 . O painel direito mostra a matriz de correlação teórica calculada com a ajuda da Eq. (5.20). O painel esquerdo mostra a matriz de correlação amostral obtida através de 1000 simulações Gaussianas. Os *insets* mostram um zoom nas mesmas regiões das duas matrizes, para uma melhor visualização das estruturas.

Referências

- [1] C. L. Bennett, A. J. Banday, K. M. Gorski, G. Hinshaw, P. Jackson, P. Keegstra, A. Kogut, G. F. Smoot, D. T. Wilkinson, and E. L. Wright, “Four-Year COBE DMR

-
- Cosmic Microwave Background Observations: Maps and Basic Results,” , vol. 464, p. L1, June 1996.
- [2] C. L. Bennett, D. Larson, J. L. Weiland, N. Jarosik, G. Hinshaw, N. Odegard, K. M. Smith, R. S. Hill, B. Gold, M. Halpern, E. Komatsu, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, E. Wollack, J. Dunkley, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, G. S. Tucker, and E. L. Wright, “Nine-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Final maps and results,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 208, p. 20, Sep 2013.
- [3] “WMAP Reveals Neutrinos, End of Dark Ages, First Second of Universe.” https://www.nasa.gov/topics/universe/features/wmap_five.html. Acesso em: 08/03/2022.
- [4] E. Hubble, “A Relation between Distance and Radial Velocity among Extra-Galactic Nebulae,” *Proceedings of the National Academy of Science*, vol. 15, pp. 168–173, Mar. 1929.
- [5] E. Hubble, “The realm of the nebulae,” *The Scientific Monthly*, vol. 39, no. 3, pp. 193–202, 1934.
- [6] W. de Sitter, “Einstein’s theory of gravitation and its astronomical consequences. Third paper,” , vol. 78, pp. 3–28, Nov. 1917.
- [7] G. Lemaître, “Expansion of the universe, The expanding universe,” , vol. 91, pp. 490–501, Mar. 1931.
- [8] A. G. Riess, A. V. Filippenko, P. Challis, A. Clocchiatti, A. Diercks, P. M. Garnavich, R. L. Gilliland, C. J. Hogan, S. Jha, R. P. Kirshner, B. Leibundgut, M. M. Phillips, D. Reiss, B. P. Schmidt, R. A. Schommer, R. C. Smith, J. Spyromilio, C. Stubbs, N. B. Suntzeff, and J. Tonry, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *The Astronomical Journal*, vol. 116, p. 1009–1038, Sep 1998.
- [9] S. Perlmutter, G. Aldering, G. Goldhaber, R. A. Knop, P. Nugent, P. G. Castro, S. Deustua, S. Fabbro, A. Goobar, D. E. Groom, I. M. Hook, A. G. Kim, M. Y. Kim, J. C. Lee, N. J. Nunes, R. Pain, C. R. Pennypacker, R. Quimby, C. Lidman, R. S. Ellis, M. Irwin, R. G. McMahon, P. Ruiz-Lapuente, N. Walton, B. Schaefer, B. J. Boyle, A. V. Filippenko, T. Matheson, A. S. Fruchter, N. Panagia, H. J. M. Newberg, W. J. Couch, and T. S. C. Project, “Measurements of and from 42 high-redshift supernovae,” *The Astrophysical Journal*, vol. 517, p. 565–586, Jun 1999.

-
- [10] S. Perlmutter and B. P. Schmidt, “Measuring cosmology with supernovae,” *Lecture Notes in Physics*, p. 195–217, 2003.
- [11] E. M. Lifshitz, “On the gravitational stability of the expanding universe,” *Zhurnal Eksperimentalnoi i Teoreticheskoi Fiziki*, vol. 16, pp. 587–602, Jan. 1946.
- [12] Y. B. Zel’dovich, “Special Issue: the Cosmological Constant and the Theory of Elementary Particles,” *Soviet Physics Uspekhi*, vol. 11, pp. 381–393, Mar. 1968.
- [13] “Hannu kurki-suonio - notas de aula de teoria de perturbações cosmológicas.” <https://www.mv.helsinki.fi/home/hkurkisu/CosPer.pdf>. Acesso em: 29/04/2022.
- [14] “Wayne hu, *Wandering in the Background; A Cosmic Background Explorer - capítulo 2.*” <http://background.uchicago.edu/~whu/thesis/chap2.pdf>. Acesso em: 29/04/2022.
- [15] C.-P. Ma and E. Bertschinger, “Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges,” *The Astrophysical Journal*, vol. 455, p. 7, Dec 1995.
- [16] M. Davis and P. J. E. Peebles, “A survey of galaxy redshifts. V. The two-point position and velocity correlations.”, vol. 267, pp. 465–482, Apr. 1983.
- [17] A. J. S. Hamilton, “Toward Better Ways to Measure the Galaxy Correlation Function.”, vol. 417, p. 19, Nov. 1993.
- [18] S. D. Landy and A. S. Szalay, “Bias and Variance of Angular Correlation Functions.”, vol. 412, p. 64, July 1993.
- [19] M. Kerscher, I. Szapudi, and A. S. Szalay, “A comparison of estimators for the two-point correlation function,” *The Astrophysical Journal*, vol. 535, p. L13–L16, May 2000.
- [20] M. White, Y.-S. Song, and W. J. Percival, “Forecasting cosmological constraints from redshift surveys,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 397, p. 1348–1354, Aug 2009.
- [21] L. R. Abramo, “The full fisher matrix for galaxy surveys,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 420, p. 2042–2057, Jan 2012.
- [22] L. R. Abramo and K. E. Leonard, “Why multitracer surveys beat cosmic variance,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 432, p. 318–326, Apr 2013.

-
- [23] P. Peter and J.-P. Uzan, *Primordial cosmology*. Oxford University Press, 2009.
- [24] G. Efstathiou, S. Moody, J. A. Peacock, W. J. Percival, C. Baugh, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, S. Cole, M. Colless, C. Collins, W. Couch, G. Dalton, R. D. Propris, S. P. Driver, R. S. Ellis, C. S. Frenk, K. Glazebrook, C. Jackson, O. Lahav, I. Lewis, S. Lumsden, S. Maddox, P. Norberg, B. A. Peterson, W. Sutherland, and K. Taylor, “Evidence for a non-zero and a low matter density from a combined analysis of the 2df galaxy redshift survey and cosmic microwave background anisotropies,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 330, p. L29–L35, Feb 2002.
- [25] M. Tegmark, A. J. S. Hamilton, and Y. Xu, “The power spectrum of galaxies in the 2df 100k redshift survey,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 335, p. 887–908, Oct 2002.
- [26] N. Kaiser, “Clustering in real space and in redshift space,” , vol. 227, pp. 1–21, July 1987.
- [27] J. Yoo, “General relativistic description of the observed galaxy power spectrum: Do we understand what we measure?,” *Physical Review D*, vol. 82, Oct 2010.
- [28] C. Bonvin and R. Durrer, “What galaxy surveys really measure,” *Physical Review D*, vol. 84, Sep 2011.
- [29] A. Johnson, C. Blake, J. Koda, Y.-Z. Ma, M. Colless, M. Crocce, T. M. Davis, H. Jones, C. Magoulas, J. R. Lucey, J. Mould, M. I. Scrimgeour, and C. M. Springob, “The 6df galaxy survey: cosmological constraints from the velocity power spectrum,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 444, p. 3926–3947, Sep 2014.
- [30] N. Aghanim, Y. Akrami, M. Ashdown, J. Aumont, C. Baccigalupi, M. Ballardini, A. J. Banday, R. B. Barreiro, N. Bartolo, S. Basak, R. Battye, K. Benabed, J.-P. Bernard, M. Bersanelli, P. Bielewicz, J. J. Bock, J. R. Bond, J. Borrill, F. R. Bouchet, F. Boulanger, M. Bucher, C. Burigana, R. C. Butler, E. Calabrese, J.-F. Cardoso, J. Carron, A. Challinor, H. C. Chiang, J. Chluba, L. P. L. Colombo, C. Combet, D. Contreras, B. P. Crill, F. Cuttaia, P. de Bernardis, G. de Zotti, J. Delabrouille, J.-M. Delouis, E. Di Valentino, J. M. Diego, O. Doré, M. Douspis, A. Ducout, X. Dupac, S. Dusini, G. Efstathiou, F. Elsner, T. A. Enßlin, H. K. Eriksen, Y. Fantaye, M. Farhang, J. Fergusson, R. Fernandez-Cobos, F. Finelli, F. Forastieri, M. Fraiulis, A. A. Fraisse, E. Franceschi, A. Frolov, S. Galeotta, S. Galli, K. Ganga, R. T.

Génova-Santos, M. Gerbino, T. Ghosh, J. González-Nuevo, K. M. Górski, S. Gratton, A. Gruppuso, J. E. Gudmundsson, J. Hamann, W. Handley, F. K. Hansen, D. Herranz, S. R. Hildebrandt, E. Hivon, Z. Huang, A. H. Jaffe, W. C. Jones, A. Karacki, E. Keihänen, R. Keskitalo, K. Kiiveri, J. Kim, T. S. Kisner, L. Knox, N. Krachmalnicoff, M. Kunz, H. Kurki-Suonio, G. Lagache, J.-M. Lamarre, A. Lasenby, M. Lattanzi, C. R. Lawrence, M. Le Jeune, P. Lemos, J. Lesgourgues, F. Levrier, A. Lewis, M. Liguori, P. B. Lilje, M. Lilley, V. Lindholm, M. López-Caniego, P. M. Lubin, Y.-Z. Ma, J. F. Macías-Pérez, G. Maggio, D. Maino, N. Mandolesi, A. Mangilli, A. Marcos-Caballero, M. Maris, P. G. Martin, M. Martinelli, E. Martínez-González, S. Matarrese, N. Mauri, J. D. McEwen, P. R. Meinhold, A. Melchiorri, A. Mennella, M. Migliaccio, M. Millea, S. Mitra, M.-A. Miville-Deschênes, D. Molinari, L. Montier, G. Morgante, A. Moss, P. Natoli, H. U. Nørgaard-Nielsen, L. Paganò, D. Paoletti, B. Partridge, G. Patanchon, H. V. Peiris, F. Perrotta, V. Pettorino, F. Piacentini, L. Polastri, G. Polenta, J.-L. Puget, J. P. Rachen, M. Reinecke, M. Remazeilles, A. Renzi, G. Rocha, C. Rosset, G. Roudier, J. A. Rubiño-Martín, B. Ruiz-Granados, L. Salvati, M. Sandri, M. Savelainen, D. Scott, E. P. S. Shellard, C. Sirignano, G. Sirri, L. D. Spencer, R. Sunyaev, A.-S. Suur-Uski, J. A. Tauber, D. Tavagnacco, M. Tenti, L. Toffolatti, M. Tomasi, T. Trombetti, L. Valenziano, J. Valiviita, B. Van Tent, L. Vibert, P. Vielva, F. Villa, N. Vittorio, B. D. Wandelt, I. K. Wehus, M. White, S. D. M. White, A. Zacchei, and A. Zonca, “Planck 2018 results,” *Astronomy Astrophysics*, vol. 641, p. A6, Sep 2020.

- [31] J. P. Huchra, M. S. Vogeley, and M. J. Geller, “The CfA redshift survey: Data for the south galactic cap,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 121, pp. 287–368, apr 1999.
- [32] C. G. Lacey, C. M. Baugh, C. S. Frenk, A. J. Benson, R. G. Bower, S. Cole, V. Gonzalez-Perez, J. C. Helly, C. D. P. Lagos, and P. D. Mitchell, “A unified multiwavelength model of galaxy formation,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 462, p. 3854–3911, Aug 2016.
- [33] Y. Wang, M. Robberto, M. Dickinson, L. A. Hillenbrand, W. Fraser, P. Behroozi, J. Brinchmann, C.-H. Chuang, A. Cimatti, R. Content, E. Daddi, H. C. Ferguson, C. Hirata, M. J. Hudson, J. D. Kirkpatrick, A. Orsi, R. Ryan, A. Shapley, M. Ballardini, R. Barkhouser, J. Bartlett, R. Benjamin, R. Chary, C. Conroy, M. Donahue, O. Doré, P. Eisenhardt, K. Glazebrook, G. Helou, S. Malhotra, L. Moscardini, J. A. Newman, Z. Ninkov, M. Ressler, J. Rhoads, J. Rhodes, D. Scolnic, S. Smee, F. Valentino, and R. H. Wechsler, “Atlas probe: Breakthrough science of galaxy evolu-

tion, cosmology, milky way, and the solar system,” *Publications of the Astronomical Society of Australia*, vol. 36, 2019.

- [34] “Página do atlas *Probe*.” <https://cds.cern.ch/record/2303675/plots#>. Acesso em: 17/03/2022.
- [35] S. A. Shectman, S. D. Landy, A. Oemler, D. L. Tucker, H. Lin, R. P. Kirshner, and P. L. Schechter, “The Las Campanas Redshift Survey,” , vol. 470, p. 172, Oct. 1996.
- [36] M. Colless, G. Dalton, S. Maddox, W. Sutherland, P. Norberg, S. Cole, J. Bland-Hawthorn, T. Bridges, R. Cannon, C. Collins, W. Couch, N. Cross, K. Deeley, R. De Propris, S. P. Driver, G. Efstathiou, R. S. Ellis, C. S. Frenk, K. Glazebrook, C. Jackson, O. Lahav, I. Lewis, S. Lumsden, D. Madgwick, J. A. Peacock, B. A. Peterson, I. Price, M. Seaborne, and K. Taylor, “The 2dF Galaxy Redshift Survey: spectra and redshifts,” , vol. 328, pp. 1039–1063, Dec. 2001.
- [37] D. H. Jones, M. A. Read, W. Saunders, M. Colless, T. Jarrett, Q. A. Parker, A. P. Fairall, T. Mauch, E. M. Sadler, F. G. Watson, D. Burton, L. A. Campbell, P. Cass, S. M. Croom, J. Dawe, K. Fiegert, L. Frankcombe, M. Hartley, J. Huchra, D. James, E. Kirby, O. Lahav, J. Lucey, G. A. Mamon, L. Moore, B. A. Peterson, S. Prior, D. Proust, K. Russell, V. Safouris, K.-I. Wakamatsu, E. Westra, and M. Williams, “The 6dF Galaxy Survey: final redshift release (DR3) and southern large-scale structures,” , vol. 399, pp. 683–698, Oct. 2009.
- [38] I. K. Baldry, A. S. G. Robotham, D. T. Hill, S. P. Driver, J. Liske, P. Norberg, S. P. Bamford, A. M. Hopkins, J. Loveday, J. A. Peacock, E. Cameron, S. M. Croom, N. J. G. Cross, I. F. Doyle, S. Dye, C. S. Frenk, D. H. Jones, E. van Kampen, L. S. Kelvin, R. C. Nichol, H. R. Parkinson, C. C. Popescu, M. Prescott, R. G. Sharp, W. J. Sutherland, D. Thomas, and R. J. Tuffs, “Galaxy And Mass Assembly (GAMA): the input catalogue and star-galaxy separation,” , vol. 404, pp. 86–100, May 2010.
- [39] J. E. Gunn, W. A. Siegmund, E. J. Mannery, R. E. Owen, C. L. Hull, R. F. Leger, L. N. Carey, G. R. Knapp, D. G. York, W. N. Boroski, S. M. Kent, R. H. Lupton, C. M. Rockosi, M. L. Evans, P. Waddell, J. E. Anderson, J. Annis, J. C. Barentine, L. M. Bartoszek, S. Bastian, S. B. Bracker, H. J. Brewington, C. I. Briegel, J. Brinkmann, Y. J. Brown, M. A. Carr, P. C. Czarapata, C. C. Drennan, T. Dombeck, G. R. Federwitz, B. A. Gillespie, C. Gonzales, S. U. Hansen, M. Harvanek, J. Hayes, W. Jordan, E. Kinney, M. Klaene, S. J. Kleinman, R. G. Kron, J. Kresinski, G. Lee, S. Limmongkol, C. W. Lindenmeyer, D. C. Long, C. L. Loomis, P. M. McGehee, P. M. Mantsch, J. Eric H. Neilsen, R. M. Neswold, P. R. Newman, A. Nitta,

J. John Peoples, J. R. Pier, P. S. Prieto, A. Prosapio, C. Rivetta, D. P. Schneider, S. Snedden, and S. i Wang, “The 2.5 m telescope of the sloan digital sky survey,” *The Astronomical Journal*, vol. 131, pp. 2332–2359, apr 2006.

- [40] K. N. Abazajian, J. K. Adelman-McCarthy, M. A. Agüeros, S. S. Allam, C. Allende Prieto, D. An, K. S. J. Anderson, S. F. Anderson, J. Annis, N. A. Bahcall, C. A. L. Bailer-Jones, J. C. Barentine, B. A. Bassett, A. C. Becker, T. C. Beers, E. F. Bell, V. Belokurov, A. A. Berlind, E. F. Berman, M. Bernardi, S. J. Bickerton, D. Bizyaev, J. P. Blakeslee, M. R. Blanton, J. J. Bochanski, W. N. Boroski, H. J. Brewington, J. Brinchmann, J. Brinkmann, R. J. Brunner, T. Budavári, L. N. Carey, S. Carliles, M. A. Carr, F. J. Castander, D. Cinabro, A. J. Connolly, I. Csabai, C. E. Cunha, P. C. Czarapata, J. R. A. Davenport, E. de Haas, B. Dilday, M. Doi, D. J. Eisenstein, M. L. Evans, N. W. Evans, X. Fan, S. D. Friedman, J. A. Frieman, M. Fukugita, B. T. Gänsicke, E. Gates, B. Gillespie, G. Gilmore, B. Gonzalez, C. F. Gonzalez, E. K. Grebel, J. E. Gunn, Z. Györy, P. B. Hall, P. Harding, F. H. Harris, M. Harvanek, S. L. Hawley, J. J. E. Hayes, T. M. Heckman, J. S. Hendry, G. S. Hennessy, R. B. Hindsley, J. Hoblitt, C. J. Hogan, D. W. Hogg, J. A. Holtzman, J. B. Hyde, S.-i. Ichikawa, T. Ichikawa, M. Im, Ž. Ivezić, S. Jester, L. Jiang, J. A. Johnson, A. M. Jorgensen, M. Jurić, S. M. Kent, R. Kessler, S. J. Kleinman, G. R. Knapp, K. Konishi, R. G. Kron, J. Krzesinski, N. Kuropatkin, H. Lampeitl, S. Lebedeva, M. G. Lee, Y. S. Lee, R. French Leger, S. Lépine, N. Li, M. Lima, H. Lin, D. C. Long, C. P. Loomis, J. Loveday, R. H. Lupton, E. Magnier, O. Malanushenko, V. Malanushenko, R. Mandelbaum, B. Margon, J. P. Marriner, D. Martínez-Delgado, T. Matsubara, P. M. McGehee, T. A. McKay, A. Meiksin, H. L. Morrison, F. Mullally, J. A. Munn, T. Murphy, T. Nash, A. Nebot, J. Neilsen, Eric H., H. J. Newberg, P. R. Newman, R. C. Nichol, T. Nicinski, M. Nieto-Santisteban, A. Nitta, S. Okamura, D. J. Oravetz, J. P. Ostriker, R. Owen, N. Padmanabhan, K. Pan, C. Park, G. Pauls, J. Peoples, John, W. J. Percival, J. R. Pier, A. C. Pope, D. Pourbaix, P. A. Price, N. Purger, T. Quinn, M. J. Raddick, P. Re Fiorentin, G. T. Richards, M. W. Richmond, A. G. Riess, H.-W. Rix, C. M. Rockosi, M. Sako, D. J. Schlegel, D. P. Schneider, R.-D. Scholz, M. R. Schreiber, A. D. Schwobe, U. Seljak, B. Sesar, E. Sheldon, K. Shimasaku, V. C. Sibley, A. E. Simmons, T. Sivarani, J. Allyn Smith, M. C. Smith, V. Smolčić, S. A. Snedden, A. Stebbins, M. Steinmetz, C. Stoughton, M. A. Strauss, M. SubbaRao, Y. Suto, A. S. Szalay, I. Szapudi, P. Szkody, M. Tanaka, M. Tegmark, L. F. A. Teodoro, A. R. Thakar, C. A. Tremonti, D. L. Tucker, A. Uomoto, D. E. Vanden Berk, J. Vandenberg, S. Vidrih, M. S. Vogeley, W. Voges, N. P. Vogt, Y. Wadadekar, S. Watters, D. H. Weinberg, A. A. West, S. D. M. White, B. C. Wilhite, A. C. Wonders, B. Yanny, D. R. Yocum, D. G. York, I. Zehavi,

S. Zibetti, and D. B. Zucker, “The Seventh Data Release of the Sloan Digital Sky Survey,” , vol. 182, pp. 543–558, June 2009.

- [41] S. Alam, F. D. Albareti, C. A. Prieto, F. Anders, S. F. Anderson, T. Anderton, B. H. Andrews, E. Armengaud, Aubourg, S. Bailey, S. Basu, J. E. Bautista, R. L. Beaton, T. C. Beers, C. F. Bender, A. A. Berlind, F. Beutler, V. Bhardwaj, J. C. Bird, D. Bizyaev, C. H. Blake, M. R. Blanton, M. Blomqvist, J. J. Bochanski, A. S. Bolton, J. Bovy, A. S. Bradley, W. N. Brandt, D. E. Brauer, J. Brinkmann, P. J. Brown, J. R. Brownstein, A. Burden, E. Burtin, N. G. Busca, Z. Cai, D. Capozzi, A. C. Rosell, M. A. Carr, R. Carrera, K. C. Chambers, W. J. Chaplin, Y.-C. Chen, C. Chiappini, S. D. Chojnowski, C.-H. Chuang, N. Clerc, J. Comparat, K. Covey, R. A. C. Croft, A. J. Cuesta, K. Cunha, L. N. d. Costa, N. D. Rio, J. R. A. Davenport, K. S. Dawson, N. D. Lee, T. Delubac, R. Deshpande, S. Dhital, L. Dutra-Ferreira, T. Dwelly, A. Ealet, G. L. Ebelke, E. M. Edmondson, D. J. Eisenstein, T. Ellsworth, Y. Elsworth, C. R. Epstein, M. Eracleous, S. Escoffier, M. Esposito, M. L. Evans, X. Fan, E. Fernández-Alvar, D. Feuillet, N. F. Ak, H. Finley, A. Finoguenov, K. Flaherty, S. W. Fleming, A. Font-Ribera, J. Foster, P. M. Frinchaboy, J. G. Galbraith-Frew, R. A. García, D. A. García-Hernández, A. E. G. Pérez, P. Gaulme, J. Ge, R. Génova-Santos, A. Georgakakis, L. Ghezzi, B. A. Gillespie, L. Girardi, D. Goddard, S. G. A. Gontcho, J. I. G. Hernández, E. K. Grebel, P. J. Green, J. N. Grieb, N. Grieves, J. E. Gunn, H. Guo, P. Harding, S. Hasselquist, S. L. Hawley, M. Hayden, F. R. Hearty, S. Hekker, S. Ho, D. W. Hogg, K. Holley-Bockelmann, J. A. Holtzman, K. Honscheid, D. Huber, J. Huehnerhoff, I. I. Ivans, L. Jiang, J. A. Johnson, K. Kinemuchi, D. Kirkby, F. Kitaura, M. A. Klaene, G. R. Knapp, J.-P. Kneib, X. P. Koenig, C. R. Lam, T.-W. Lan, D. Lang, P. Laurent, J.-M. L. Goff, A. Leauthaud, K.-G. Lee, Y. S. Lee, T. C. Licquia, J. Liu, D. C. Long, M. López-Corredoira, D. Lorenzo-Oliveira, S. Lucatello, B. Lundgren, R. H. Lupton, C. E. M. III, S. Mahadevan, M. A. G. Maia, S. R. Majewski, E. Malanushenko, V. Malanushenko, A. Manchado, M. Manera, Q. Mao, C. Maraston, R. C. Marchwinski, D. Margala, S. L. Martell, M. Martig, K. L. Masters, S. Mathur, C. K. McBride, P. M. McGehee, I. D. McGreer, R. G. McMahan, B. Ménard, M.-L. Menzel, A. Merloni, S. Mészáros, A. A. Miller, J. Miralda-Escudé, H. Miyatake, A. D. Montero-Dorta, S. More, E. Morganson, X. Morice-Atkinson, H. L. Morrison, B. Mosser, D. Muna, A. D. Myers, K. Nandra, J. A. Newman, M. Neyrinck, D. C. Nguyen, R. C. Nichol, D. L. Nidever, P. Noterdaeme, S. E. Nuza, J. E. O’Connell, R. W. O’Connell, R. O’Connell, R. L. C. Ogando, M. D. Olmstead, A. E. Oravetz, D. J. Oravetz, K. Osumi, R. Owen, D. L. Padgett, N. Padmanabhan, M. Paegert, N. Palanque-Delabrouille, K. Pan, J. K. Parejko, I. Pâris, C. Park, P. Pattarakijwanich, M. Pellejero-Ibanez, J. Pepper, W. J.

- Percival, I. Pérez-Fournon, I. Pe´rez-Ra´fols, P. Petitjean, M. M. Pieri, M. H. Pinsonneault, G. F. P. d. Mello, F. Prada, A. Prakash, A. M. Price-Whelan, P. Protopapas, M. J. Raddick, M. Rahman, B. A. Reid, J. Rich, H.-W. Rix, A. C. Robin, C. M. Rockosi, T. S. Rodrigues, S. Rodríguez-Torres, N. A. Roe, A. J. Ross, N. P. Ross, G. Rossi, J. J. Ruan, J. A. Rubiño-Martín, E. S. Rykoff, S. Salazar-Albornoz, M. Salvato, L. Samushia, A. G. Sánchez, B. Santiago, C. Sayres, R. P. Schiavon, D. J. Schlegel, S. J. Schmidt, D. P. Schneider, M. Schultheis, A. D. Schwobe, C. G. Scóccola, C. Scott, K. Sellgren, H.-J. Seo, A. Serenelli, N. Shane, Y. Shen, M. Shetrone, Y. Shu, V. S. Aguirre, T. Sivarani, M. F. Skrutskie, A. Slosar, V. V. Smith, F. Sobreira, D. Souto, K. G. Stassun, M. Steinmetz, D. Stello, M. A. Strauss, A. Streblyanska, N. Suzuki, M. E. C. Swanson, J. C. Tan, J. Tayar, R. C. Terrien, A. R. Thakar, D. Thomas, N. Thomas, B. A. Thompson, J. L. Tinker, R. Tojeiro, N. W. Troup, M. Vargas-Magaña, J. A. Vazquez, L. Verde, M. Viel, N. P. Vogt, D. A. Wake, J. Wang, B. A. Weaver, D. H. Weinberg, B. J. Weiner, M. White, J. C. Wilson, J. P. Wisniewski, W. M. Wood-Vasey, C. Ye‘che, D. G. York, N. L. Zakamska, O. Zamora, G. Zasowski, I. Zehavi, G.-B. Zhao, Z. Zheng, X. Zhou (), Z. Zhou (), H. Zou (), and G. Zhu, “The eleventh and twelfth data releases of the sloan digital sky survey: Final data from sdss-iii,” *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 219, p. 12, Jul 2015.
- [42] R. Ahumada *et al.*, “The 16th Data Release of the Sloan Digital Sky Surveys: First Release from the APOGEE-2 Southern Survey and Full Release of eBOSS Spectra,” *Astrophys. J. Suppl.*, vol. 249, no. 1, p. 3, 2020.
- [43] “Sloan Digital Sky Survey (SDSS).” <https://www.sdss.org/>. Acesso em: 07/03/2022.
- [44] E. Di Valentino, O. Mena, S. Pan, L. Visinelli, W. Yang, A. Melchiorri, D. F. Mota, A. G. Riess, and J. Silk, “In the realm of the hubble tension—a review of solutions*,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 38, p. 153001, Jul 2021.
- [45] “E. sánchez, *Large Galaxy Surveys for Cosmology* = <https://indico.cern.ch/event/617679/contributions/2567910/attachments/1478584/2292986/sanchez.pdf>, note = Acesso em: 17/03/2022.”
- [46] A. A. Costa, R. J. F. Marcondes, R. G. Landim, E. Abdalla, L. R. Abramo, H. S. Xavier, A. A. Orsi, N. C. Devi, A. J. Cenarro, D. Cristóbal-Hornillos, R. A. Dupke, A. Ederoclite, A. Marín-Franch, C. M. Oliveira, H. Vázquez Ramió, K. Taylor, and J. Varela, “J-PAS: forecasts on interacting dark energy from baryon acoustic oscil-

- lations and redshift-space distortions,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 488, pp. 78–88, 07 2019.
- [47] v. Ivezić *et al.*, “LSST: from Science Drivers to Reference Design and Anticipated Data Products,” *Astrophys. J.*, vol. 873, no. 2, p. 111, 2019.
- [48] “Site do *survey j-pas*.” <http://www.j-pas.org/survey>. Acesso em: 17/03/2022.
- [49] “Website do Experimento 2dFGRS.” <http://www.2dfgrs.net/>. Acesso em: 14/03/2022.
- [50] V. de Lapparent, M. J. Geller, and J. P. Huchra, “A Slice of the Universe,” , vol. 302, p. L1, Mar. 1986.
- [51] D. Alonso, J. Sanchez, and A. Slosar, “A unified pseudo-c framework,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 484, p. 4127–4151, Jan 2019.
- [52] A. Lewis, A. Challinor, and A. Lasenby, “Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models,” , vol. 538, pp. 473–476, 2000.
- [53] C. Howlett, A. Lewis, A. Hall, and A. Challinor, “CMB power spectrum parameter degeneracies in the era of precision cosmology,” , vol. 1204, p. 027, 2012.
- [54] U. Seljak and M. Zaldarriaga, “A line of sight approach to cosmic microwave background anisotropies,” , vol. 469, pp. 437–444, 1996.
- [55] M. Zaldarriaga, U. Seljak, and E. Bertschinger, “Integral solution for the microwave background anisotropies in nonflat universes,” , vol. 494, pp. 491–502, 1998.
- [56] D. Blas, J. Lesgourgues, and T. Tram, “The Cosmic Linear Anisotropy Solving System (CLASS) II: Approximation schemes,” , vol. 1107, p. 034, 2011.
- [57] J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, and A. S. Szalay, “The Statistics of Peaks of Gaussian Random Fields,” , vol. 304, p. 15, May 1986.
- [58] Y. B. Zel’Dovich, “Reprint of 1970A&A.....5...84Z. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations.,” , vol. 500, pp. 13–18, Mar. 1970.
- [59] T. Buchert, A. L. Melott, and A. G. Weiss, “Testing higher-order Lagrangian perturbation theory against numerical simulations I. Pancake models,” , vol. 288, pp. 349–364, Aug. 1994.

-
- [60] A. L. Melott, T. Buchert, and A. G. Weiss, “Testing higher-order Lagrangian perturbation theory against numerical simulations. II. Hierarchical models.,” vol. 294, pp. 345–365, Feb. 1995.
- [61] R. Scoccimarro, “Transients from initial conditions: a perturbative analysis,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 299, p. 1097–1118, Oct 1998.
- [62] A. Jenkins, “Second-order lagrangian perturbation theory initial conditions for resimulations,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 403, p. 1859–1872, Apr 2010.
- [63] F. R. Bouchet, S. Colombi, E. Hivon, and R. Juszkiewicz, “Perturbative Lagrangian approach to gravitational instability.,” vol. 296, p. 575, Apr. 1995.
- [64] R. Scoccimarro and R. K. Sheth, “Pthalos: a fast method for generating mock galaxy distributions,” *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 329, p. 629–640, Jan 2002.
- [65] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, “The structure of cold dark matter halos,” *The Astrophysical Journal*, vol. 462, p. 563, May 1996.
- [66] “Scipy integrate sub-package.” <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/integrate.html#module-scipy.integrate>. Acesso em: 17/02/2022.
- [67] J.-E. Campagne, J. Neveu, and S. Plaszczynski, “Angpow: a software for the fast computation of accurate tomographic power spectra,” *Astronomy Astrophysics*, vol. 602, p. A72, Jun 2017.
- [68] “Notebook python para o toy model da seção 5.1.” <https://github.com/Koruseru/Snapshot-Toy-Model>.
- [69] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press, 1995.