

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

## **Ordem topológica com simetrias $\mathbb{Z}_n$ e campos de matéria**

Maria Fernanda Araujo de Resende

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotonio Sobrinho

*Tese apresentada ao Instituto de Física da USP  
como pré-requisito parcial para a obtenção do  
título de Doutor em Ciências*

### **Banca Examinadora**

Prof. Dr. Paulo Teotonio Sobrinho – IFUSP

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt – IFUSP

Prof. Dr. Luis Gregorio Godoy de Vasconcellos Dias da Silva – IFUSP

Prof. Dr. André Gustavo Scagliusi Landulfo – CCNH-UFABC

Prof. Dr. Eduardo Peres Novais de Sá – CCNH-UFABC

São Paulo  
2017

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Resende, Maria Fernanda Araujo de

Ordem topológica com simetrias  $\mathbb{Z}_n$  e campos de matéria. –  
São Paulo, 2017

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.  
Instituto de Física, Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotonio Sobrinho

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Teorias de gauge;  
2. Discretização de variedades; 3. Álgebras de Hopf;  
4. Ordem topológica.

USP/IF/SBI-029/2017

*Em memórias do meu pai, Fernando Monteiro de Resende,  
E do melhor amigo que eu tive nesta vida, Ariel Francisco Polenta Filho.*



*“Demore o tempo que for para decidir o que você quer da vida e, depois que decidir,  
não recue ante nenhum pretexto, porque o mundo tentará te dissuadir.”*

(Assim falava Zaratustra, F. W. Nietzsche)



## Agradecimentos

Muito provavelmente você, quando começar a ler a relação dos nomes das pessoas que agradeço aqui, vai ficar com aquela sensação de estar lendo a lista das pessoas que foram delatadas pela “Odebrecht”, devido a enorme quantidade de pessoas que eu cito. Mas, dada a importância que cada uma dessas pessoas teve no desenvolvimento deste trabalho, seja no que diz respeito à sua redação ou no processo do meu doutoramento “como um todo”, eu jamais poderia apresentá-lo sem mencionar os seus nomes.

E a primeira de todas as pessoas que eu preciso agradecer aqui certamente é a minha mãe, *Celsina Jacinta de Araujo*. Afinal de contas, foi ela quem, com todo o seu amor, com toda a sua dedicação, e com toda a consciência que ela tem do quão importante são os meus estudos e as minhas pesquisas na minha vida, me ajudou, com todos os recursos que ela pode me oferecer através do seu árduo e honesto trabalho, a construir toda a minha formação acadêmica e pessoal.

Já a segunda pessoa que eu preciso agradecer é, sem sombra de dúvida, o meu orientador, *Paulo Teotonio Sobrinho*. Pois, apesar do meu projeto ter sido desenvolvido num período que julgo ser muito curto (de aproximadamente dois anos e meio), e apesar de toda a minha noitivacidade produtiva ser bastante incompatível com os horários das suas atividades (a ponto de fazer com que a “entropia subisse” algumas vezes), foi ele quem me “abriu os braços” no momento que mais precisei neste meu processo de doutoramento, me recebendo no seu grupo de pesquisa e me mostrando o que é ser um orientador que realmente cumpre o papel de ser um orientador.

Aliás, já que eu falei desta “abertura de braços”, uma outra pessoa que eu preciso agradecer profundamente aqui é a *Lucy Vitoria Credidio Assali*, presidente da Comissão de Pós-Graduação do IFUSP na época que eu migrei para o grupo do Paulo e, agora, amiga. Se não fosse por ela, se não fosse por causa de todo o suporte acadêmico que ela me ofereceu como presidente da CPG (o qual foi sempre regado com muita compreensão, conselhos e amizade), certamente não teria sido possível concluir este trabalho.

Tendo feito esses três agradecimentos, cabe, agora, agradecer a um segundo “pelotão” de pessoas, as quais não devem se considerar menos importantes. E o primeiro conjunto de pessoas que eu quero agradecer aqui é aquele, composto por todas as pessoas que me ajudaram a entender algumas coisas muito importantes ao contexto deste trabalho, como:

- o professor *Hugo Luiz Mariano*, por alguns esclarecimentos sobre a Teoria das Categorias;
- os professores *Daciberg Lima Gonçalves* e *Lucilia Daruiz Borsari*, por toda a receptividade e as conversas bastante agradáveis que tivemos sobre Topologia Algébrica;
- o agora professor, mas antigo “companheiro de jornada” desde o Laboratório de Materiais Magnéticos do IFUSP, *Gabriel Teixeira Landi*, por alguns esclarecimentos sobre a presença de paredes de domínio e de transições de fase em materiais magnéticos;
- a professora e boa amiga *Alegria Gladys Chalom* e os meus grandes amigos *Carlos Antonio Filho*, *Rodrigo Figueiredo* e *Ulisses Alves Maciel Neto*, por todas as discussões que tivemos sobre Álgebra, Topologia, Teoria das Categorias e Fundamentos da Matemática, as quais foram (e continuam sendo) sempre regadas com muito café, cookies e sorvetes, não necessariamente nesta mesma ordem;
- o professor e bom amigo *Daniel Victor Tausk*, por toda a sua prestatividade em repassar um pouco do seu conhecimento sobre diversas coisas, relacionadas as mais diversas áreas da Matemática; e
- os meus grandes amigos *Alysson Ferreira Moraes*, *Fabiola Diacenco Xavier*, *Fabricio Marques do Carmo* e *João Luis Meloni Assirati*, por toda a parceria e prestatividade nos mais diversos sentidos, as quais foram climatizadas com as melhores conversas sobre Física, Matemática, Computação e todas as outras coisas da vida, tão necessárias a edificação de alguém não apenas como um cientista, mas como um ser humano consciente do seu dever neste mundo.

Paralelamente a tudo isso, também preciso agradecer:

- a todos aqueles que passaram pelo grupo de pesquisa onde estou, entre os quais destaco *Anderson Alves da Silva*, *Hudson Kazuo Teramoto Mendonça*, *Javier Ignacio Lorca Espiro*, *Juan Pablo Ibieta Jimenez*, *Marzia Petrucci*, *Miguel Jorge Bernabe Ferreira*, *Nelson Javier Buitrago Aza* e *Ricardo Costa de Almeida*, por toda a parceria que construímos ao longo dos últimos três anos;



- aos membros que fizeram parte do grupo de pesquisa onde iniciei o meu doutorado no final de 2011, como *André Luiz Moura Britto*, *Claudio Navalho Rodrigues da Cruz*, *João Braga de Góes e Vasconcellos*, *Leonardo Estêvão Schendes Tavares*, *Paulo Cardoso Oliveira*, *Ricardo Aluisio Pereira* e *Yuber Ferney Perez Gonzalez*, por toda a parceria e principalmente por todas as nossas animadas discussões sobre a física dos neutrinos; e
- a todos aqueles que foram meus colegas de trabalho, em todas as catorze disciplinas que lecionei no IFUSP nos últimos sete anos como “monitor-bolsista”, entre os quais destaco não apenas os meus melhores colegas, os professores *Antonio Domingues dos Santos*, *Elisabeth Matheus Yoshimura*, *Marcia de Almeida Rizzuto*, *Mikiya Muramatsu*, *Nemitala Added* e *Rosângela Itri*, mas todos os alunos que suportaram bem todas as minhas aulas, sempre regadas com piadas e comentários ao melhor estilo “tiozão do pavê”.

Agradecimentos também cabem:

- ao meu amigo e colaborador *Thiago Costa Raszeja* que, ao lado do *Alysson*, me ajudou a organizar o “Encontros no Hades”, assim como a todos os funcionários do IFUSP que trabalharam nos seus bastidores para que esse evento desse certo ao longo dos últimos seis anos, entre os quais destaco *Ademir Rodrigues*, *Agostinho Dias Bicalho*, *Alessandro Aparecido Brugnoli*, *Amelia Ferrari Genova*, *Cecilia Cristina Blanco*, *Luiz Cezar Galizio*, *Mauricio da Silva*, *Mônica Pacheco*, *Paulo Renato Lofredo* e *Simone Toyoko Shinomiya*;
- a todos os funcionários da Comissão de Pós-Graduação do IFUSP, *Adriana Noçais Scatolin*, *Andrea Wirkus*, *Cláudia Conde Barioni*, *Cristiano Araujo Chaves*, *Éber De Patto Lima*, *Francislene Mendes Resina*, *Maria Izabel Cavalcante da Silva Albarracin*, *Paula Cristina Rodrigues Mondini* e *Renata Matsumoto*, assim como ao atual presidente *Paulo Alberto Nussenzweig*, os quais sempre foram bastante solícitos e muito companheiros em tudo aquilo que precisei;
- à turma do café do IFUSP, *Adilson José da Silva*, *Alvimar Floriano de Sousa*, *Ana Beatriz Beggiato*, *Arnaldo Gomes de Oliveira*, *Dmitry Maximovitch Gitman*, *Élcio Brandani Mondadori*, *Gabriela Iunes Depetri*, *João Geraldo Beggiato*, *Jose Carlos Sartorelli*, *Kazunori Watari*, *Lissa de Sousa Campos* e *Thereza Borello-Lewin*; e
- principalmente a todos os meus “companheiros de jornada”, entre os quais destaco *Ana Carolina Boero*, *Antonio Claudio Michejevs Padilha*, *Carolina Dias Alexiou*, *Cedrick Miranda Mello*,

*Dimy Nanclares Fernandes Sanches, Eduardo Roberto De Lascio, Gabriela Lima Lichtenstein, Giancarlo Thales Camilo da Silva, Helder Luciani Casa Grande, Henrique Fabrelli Ferreira, Iberê Luiz Caldas, Ki Ok Joo, Leandro Daros Gama, Leonardo Werneck de Avelar, Lucas Carvalhaes Pinheiro Antunes Maciel Mussnich, Marcela Muniz Gontijo, Marcelo Meireles dos Santos, Márcio Teixeira do Nascimento Varella, Maria Cristina Soares Rosa, Marina Machado Cunha e Mello, Masayuki Oka Hase, Paula Sampaio Meirelles, Rafael Oliveira Suigh, Renato Alessandro Martins, Ricardo Correia da Silva, Riis Ravia Bachega Assis, Roberto Rodrigues Moreira, Robson Aparecido Figueiredo, Rodrigo Fresneda, Thaicia Stona de Almeida, Tiago Fernandes, Walace de Sousa Elias e Yeva Gevorgyan.*

E, para finalmente concluir esta lista de agradecimentos quase “Odebrechtiana”, faço um honesto agradecimento tanto à Capes como ao CNPq por todo o suporte financeiro.

## Resumo

Neste trabalho, construímos duas generalizações de uma classe de modelos discretos bidimensionais, assim chamados “Quantum Double Models”, definidos em variedades orientáveis, compactas e sem fronteiras. Na primeira generalização, introduzimos campos de matéria aos vértices e, na segunda, às faces. Além das propriedades básicas dos modelos, estudamos como se comporta a sua ordem topológica sob a hipótese de que os estados de base são indexados por grupos Abelianos. Na primeira generalização, surge um novo fenômeno de confinamento. Como consequência, a degenerescência do estado fundamental se torna independente do grupo fundamental sobre o qual o modelo está definido, dependendo da ação do grupo de calibre e do segundo grupo de homologia. A segunda generalização pode ser vista como o dual algébrico da primeira. Nela, as mesmas propriedades de confinamento de quasipartículas está presente, mas a degenerescência do estado fundamental continua dependendo do grupo fundamental. Além disso, degenerescências adicionais aparecem, relacionadas ao homomorfismo de coação entre os grupos de matéria e de calibre.



## Abstract

In this work, we constructed two generalizations of a class of discrete bidimensional models, the so called Quantum Double Models, defined in orientable, compact and boundaryless manifolds. In the first generalization we introduced matter fields to the vertices and, in the second one, to the faces. Beside the basic model properties, we studied its topological order behaviour under the hypothesis that the basic states be indexed by Abelian groups. In the first generalization, appears a new phenomenon of quasiparticle confinement. As a consequence, the ground state degeneracy becomes independent of the fundamental group of the manifold on which the model is defined, depending on the action of the gauge group and on the second group of homology. The second generalization can be seen as the algebraic dual of the first one. In it, the same quasiparticle confinement properties are present, but the ground state degeneracy stay dependent on the fundamental group. Besides, additional degeneracies appear, related to a coaction homomorphism between matter and gauge groups.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Comentários iniciais . . . . .	1
1.2	Sobre o conceito de ordem topológica . . . . .	3
1.3	A proposta deste trabalho . . . . .	6
1.3.1	Sobre a estruturação do trabalho . . . . .	8
<b>I</b>	<b>Teorias de calibre discretas</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Teorias de calibre como sistemas vinculados</b>	<b>13</b>
2.1	Um prelúdio . . . . .	13
2.2	Teorias de calibre . . . . .	14
2.2.1	Teorias de calibre discretas . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Discretização de variedades</b>	<b>29</b>
3.1	Comentários iniciais . . . . .	29
3.2	O processo de discretização . . . . .	30
3.2.1	Sobre a colagem de variedades . . . . .	30
3.2.2	O método de Heegaard . . . . .	33
3.3	Sobre a estruturação das teorias discretas . . . . .	39
3.3.1	A perspectiva de Heegaard . . . . .	39

<b>II</b>	<b>“Toric code” e algumas generalizações</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>Um breve panorama do “toric code”</b>	<b>47</b>
4.1	Algumas preliminares . . . . .	47
4.2	Propriedades gerais . . . . .	48
4.2.1	Sobre os operadores físicos . . . . .	49
4.2.2	Estados de vácuo . . . . .	52
4.2.3	Uma nova quasipartícula . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Primeiras generalizações</b>	<b>69</b>
5.1	Considerações tridimensionais . . . . .	69
5.1.1	Semelhanças e diferenças . . . . .	69
5.1.2	“Dyons” tridimensionais . . . . .	75
5.2	A importância das condições de contorno . . . . .	81
5.2.1	O “Toric Code” tridimensional . . . . .	82
<b>III</b>	<b>“Quantum Double Models” e a inserção de campos de matéria</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>Noções gerais sobre os “Quantum Double Models”</b>	<b>87</b>
6.1	Comentários iniciais . . . . .	87
6.1.1	Características gerais . . . . .	88
6.2	Um exemplo Abeliano . . . . .	91
6.2.1	Propriedades gerais . . . . .	92
6.2.2	Excitações elementares . . . . .	93
6.3	Um exemplo não Abeliano . . . . .	96
6.3.1	Principais propriedades . . . . .	96
<b>7</b>	<b>Segundas generalizações</b>	<b>101</b>
7.1	Comentários iniciais . . . . .	101
7.1.1	A obtenção dos operadores . . . . .	102



<i>SUMÁRIO</i>	xvii
7.2 Introdução de campos de matéria . . . . .	106
7.2.1 Um novo diagrama de Heegaard . . . . .	108
<b>8 Modelos com campos de matéria</b>	<b>115</b>
8.1 Comentários iniciais . . . . .	115
8.2 Propriedades gerais . . . . .	116
8.2.1 Alguns exemplos . . . . .	118
8.2.2 Uma análise mais geral . . . . .	157
<b>9 Dualidade em modelos com matéria</b>	<b>171</b>
9.1 Campos de matéria associados às faces . . . . .	171
9.2 Propriedades gerais . . . . .	173
9.2.1 Mais exemplos . . . . .	175
9.2.2 Uma comparação entre os modelos com matéria . . . . .	189
<b>IV Análise final</b>	<b>195</b>
<b>10 Um comentário de categoria</b>	<b>197</b>
10.1 Um último prelúdio . . . . .	197
10.2 Teorias de calibre com ordem alta . . . . .	198
10.2.1 O que é uma categoria? . . . . .	199
10.2.2 Teorias de calibre com ordem dois . . . . .	201
10.3 Algumas observações . . . . .	206
<b>11 Conclusões e comentários</b>	<b>209</b>
<b>V Apêndices</b>	<b>215</b>
<b>A Diagramatização de Kuperberg</b>	<b>217</b>
A.1 Considerações iniciais . . . . .	217
A.1.1 Noções preliminares . . . . .	218

A.1.2	Um exemplo pertinente . . . . .	220
A.1.3	Algumas generalizações . . . . .	222
<b>B</b>	<b>Alguns comentários algébricos</b>	<b>227</b>
B.1	Considerações preliminares . . . . .	227
B.1.1	Classes laterais e grupos quocientes . . . . .	229
B.1.2	Um panorama sobre a teoria das representações . . . . .	231
B.2	Noções gerais de álgebra . . . . .	233
B.2.1	Sobre o conceito de coálgebra . . . . .	236
B.2.2	Biálgebras e álgebras de Hopf . . . . .	237
<b>C</b>	<b>Algumas considerações levemente enfadonhas</b>	<b>245</b>
C.1	Sobre os operadores de aresta do QDMv . . . . .	245
C.2	Regras de comutação dos operadores do QDMf . . . . .	248
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>253</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Comentários iniciais

Embora a sociedade esteja bem acostumada a dividir a Física entre “aquilo que é teórico” e “aquilo que é experimental”, todos aqueles que participam ativamente da construção desta Ciência sabem muito bem que toda esta divisão é totalmente *fictícia*. Afinal, o fato de alguém possuir destrezas e/ou afinidades que, por exemplo, permitem caracterizá-lo mais como um teórico do que como um experimental não implica necessariamente que estes dois setores da Física sejam incomunicantes: muito pelo contrário! E isso fica ainda mais claro quando lembramos que, independente das diversas teorias que existem para explicar qualquer coisa do nosso Universo, os verdadeiros alicérges da Física são *experimentais*.

Aliás, para deixar ainda mais claro o porquê disso, é mais do que conveniente lembrar de algo que é muito importante à definição da própria Física: uma *teoria* é uma edificação lógica, construída sobre um conjunto de axiomas que permitem explicar algo que desejamos entender<sup>1</sup> [1], sem possuir qualquer compromisso para com a realidade que nos cerca. Basta ver que é exatamente isso o que acontece, por exemplo, na *Matemática*: pois, enquanto um físico, que modela os seus sistemas usando um conjunto de equações que dependem de um parâmetro temporal, costuma ignorar as soluções que estejam exclusivamente relacionadas aos valores negativos deste parâmetro, um matemático “puro” está pouco se importando com isso; para esse matemático, que geralmente resolve esse mesmo conjunto de equações apenas para conhecer quais são as propriedades das suas funções (sem necessariamente pensar nas possíveis conexões de tudo isso para com a realidade que o cerca), todas as soluções são igualmente relevantes.

---

<sup>1</sup>Seja por meio dos diversos teoremas, corolários ou demais desdobramentos que estabelecem a validade desta teoria.

Desta maneira, e diante de todo este “descompromisso” que teorias possuem por definição, fica muito claro que uma (e apenas uma) das preocupações fundamentais que devemos ter, ao construirmos uma teoria que realmente possa ser chamada de *física*, diz respeito ao necessário estabelecimento de uma *correspondência* entre (i) as previsões obtidas dos modelos que definem a nossa teoria e (ii) aquilo que for passível de verificações experimentais, dentro do domínio de investigação onde essa nossa teoria se propõe a resolver [2]. Se assim não for, mesmo que toda a nossa “engenhosidade” possa realmente definir uma teoria magnífica, esta jamais poderá ser interpretada como *física*, independente dela possuir uma inquestionável validade científica.

Já a segunda das preocupações, não menos fundamental à construção de uma teoria física, surge diante da existência de uma outra teoria que, independente de estar definida num outro domínio de investigação experimental, também consegue descrever um mesmo sistema físico. Neste caso, a nova teoria *não pode* contradizer os resultados da primeira, que já está bem estabelecida [2], e é exatamente isso que passou a ser chamado de *princípio da correspondência*: ou seja, sempre que existirem duas teorias para descrever um mesmo sistema físico, uma delas deve se “aproximar” da outra dando resultados que, entre certos limites, coincidem [3].

É claro que diversas discussões mais fundamentais podem, e devem, ser feitas a respeito desse princípio, uma vez que descrever sistemas numa zona de transição entre o que é quântico ou clássico, por exemplo, não é uma tarefa nada trivial. Entretanto, é exatamente em respeito a esse princípio da correspondência que, apesar de todo o potencial imaginativo que é intrínseco à espécie humana, a grande maioria das teorias que se propõem a serem chamadas de físicas acabam tomando os formalismos *Lagrangeano* e *Hamiltoniano* como moldes.

Aliás, um dos bons exemplos de modelos Hamiltonianos que vem ganhando destaque nas últimas décadas, e que iremos citar propositalmente aqui, é o “*Toric Code*” (TC) [4]: um modelo quântico que, apesar de não ser muito conhecido entre os físicos, vem permeando a Física dentro de um espectro bem diversificado, que vai desde a física da matéria condensada até algumas teorias que apresentam algum tipo de envolvimento para com a física das partículas elementares [5]. À primeira vista, isso pode até parecer meio espantoso: afinal, aparentemente o TC nasceu para ser uma espécie de “toy model”, cujo objetivo “único” era o de fornecer as primeiras ideias que poderiam levar à construção de uma *computação quântica* resiliente a erros [4]. Todavia, se lembrarmos que, por trás de toda a mensurabilidade da Computação, existe o fato desta área do conhecimento estar definida em subespaços que são comuns à Física, todo esse espanto começa

a se esvaír um pouco, ainda mais se também lembrarmos que qualquer realização computacional nova sempre depende do conhecimento e do desenvolvimento de novos materiais.

Uma das características fundamentais que são inerentes ao TC, e que também aparece em boa parte das suas generalizações, é o seu comportamento como um modelo que possui uma *ordem topológica* [6]. Apesar de ainda não existir uma definição muito bem posta para este conceito na literatura, o seu próprio nome já sinaliza para uma provável conclusão: pois, como fica subentendido desse predicado que é tão específico, dizer que um modelo possui uma “ordem topológica” certamente deve significar que, de alguma maneira, o sistema a ele associado apresenta alguma dependência da *topologia* de onde ele está definido. Porém, para que essa interpretação se torne inteligível, é interessante voltarmos brevemente as nossas atenções para um outro termo, que é bem mais simples, bem mais conhecido do público em geral e que está associado a quase tudo que nos cerca: esse termo é *matéria*.

## 1.2 Sobre o conceito de ordem topológica

Em linhas bem gerais, podemos afirmar que esse termo “matéria” resume tudo aquilo que pode ser interpretado como uma “mera” combinação de átomos e moléculas [7], cujos ingredientes básicos são sempre os mesmos: *elétrons*, *prótons* e *nêutrons*. Entretanto, como é perceptível de todas as nossas experiências diárias, apesar deste termo ser único, ele se refere a algo que é bem genérico: afinal de contas, basta ver que, além de existirem diversos tipos de matéria ao nosso redor, também são diversas as formas e fases pelas quais ela se apresenta na Natureza.

Neste sentido, é interessante notar que, quando consideramos um único tipo de matéria, a explicação que é melhor aceita para justificar a sua apresentação em diferentes formas preconiza que, para cada uma delas, existe um critério bem específico de organização (ou de *ordenamento*) das moléculas que as compõem [8]. E a explicação padrão para as transições de fase numa matéria arbitrária é dada pela teoria de *quebra espontânea de simetria* proposta por V. L. Ginzburg e L. D. Landau [9, 10, 11]. Entretanto, apesar de toda a conveniência e adequação que essa teoria tem junto ao entendimento das transições de fase, algo diferente aconteceu em 1982 quando, por exemplo, A. Gossard, H. Stormer e D. Tsui realizaram um experimento para avaliar o transporte de gases eletrônicos que não apenas estavam submetidos à baixíssimas temperaturas<sup>2</sup>, mas que também estavam *restritos* a uma região aproximadamente *bidimensional* pela ação de fortes

---

<sup>2</sup>No caso específico desse experimento, o termo “baixíssimas temperaturas” deve ser traduzido como temperaturas entre 1/100 e 1/10 graus Kelvin aproximadamente.

campos magnéticos [12]. Além desses pesquisadores terem evidenciado a presença de um *efeito Hall fracionário* [12] (que foi assim chamado devido à razão

$$\nu = \frac{nhc}{eB} ,$$

observada entre as densidades de elétrons e do fluxo magnético, ser compatível com um número *racional*<sup>3</sup>), também foi notado que, além desses gases “bidimensionais” se apresentarem em fases que fugiam do enredo “sólido-líquido-gasoso” tradicional [13], por exemplo, as transições entre elas aconteciam sem que houvesse qualquer uma das “quebras” de simetria apontadas pela teoria de Ginzburg e Landau. Logo, a partir disso, e principalmente de toda uma exaustiva reprodução de experimentos análogos a esse, acabou ficando bem claro que, apesar da teoria de quebra espontânea de simetria ser bastante razoável nas situações mais “usuais”<sup>4</sup>, ele deve ser interpretado apenas como uma teoria *efetiva* e, portanto, não completa.

Diante da necessidade de justificar o comportamento dessas novas transições de fase através de um novo paradigma, uma terceira diferença, também evidente nesse experimento de 1982, acabou tendo um papel preponderante. Afinal, ao contrário das partículas que são livres para transitar em ambientes tridimensionais, as excitações que compõem esses gases não se identificam necessariamente nem como bósons nem como férmions: quando duas delas trocam de lugar uma com a outra, a função de onda que modela esses gases “bidimensionais” adquire uma fase  $e^{i\varphi}$  que pode assumir *qualquer* valor compreendido entre  $-1$  (que está associado à caracterização de um férmion) e  $1$  (que está associado à caracterização de um bóson). Aliás, é exatamente por causa deste aspecto que essas excitações acabaram sendo denotadas como “*anyons*”<sup>5</sup> [14].

Nestes termos, como a análise do comportamento estatístico de quaisquer partículas sob permutação deve *independar* dos caminhos que elas tomam para que essa troca de posições ocorra, quando somamos todo este aspecto “*anyônico*” aos fracionários (que já estão relacionados a  $\nu$  e que, de alguma maneira, também refletem essa restrição bidimensional) fica muito claro que, se realmente existe algum fator que seja capaz de moderar estas novas transições de fase, ele

<sup>3</sup>Nos experimentos que são realizados usando esses mesmos gases eletrônicos bidimensionais, porém usando baixas temperaturas que não são tão baixas como as que foram usadas no experimento de Gossard, Stormer e Tsui,  $\nu$  assume apenas valores inteiros.

<sup>4</sup>Ou seja, naquelas situações que, por exemplo, não se envolvem com esse “combo”, de baixíssimas temperaturas e restrições dimensionais, utilizado por Gossard, Stormer e Tsui.

<sup>5</sup>Embora bósons e férmions sejam denotados como tal em homenagem aos físicos S. N. Bose e E. Fermi respectivamente (já que esses dois pesquisadores foram os primeiros a desenvolver trabalhos relacionados ao comportamento dessas partículas), a lógica por trás da nomenclatura “anyon” é inteiramente análoga a que deu origem ao nome das primeiras: ou seja, *any+on*, uma vez que “any”, do inglês, significa *qualquer*.

pode perfeitamente estar associado ao fato dos elementos que definem o sistema físico estarem organizados (ou, melhor dizendo, *ordenados*) em função da *topologia* de onde eles se encontram. E é exatamente diante desta última conclusão que surge o fundamento mais forte que justifica o termo “ordem topológica”.

Por se dizer, algo que reforça ainda mais esta última conclusão são os resultados que surgem de alguns modelos teóricos que são definidos sobre variedades *topológicas* bidimensionais. Afinal, é possível demonstrar que, em boa parte desses modelos, o grau de degenerescência dos seus estados fundamentais é parametrizado pelo *gênero*<sup>6</sup>  $g$  dessas variedades, indo em pleno acordo com as observações experimentais relacionadas aos gases eletrônicos que são postos nas mesmas condições do experimento de 1982. Aliás, de acordo com alguns estudos que foram realizados por R. Laughlin [15], usando gases onde a razão  $\nu$  se mostra compatível com o inverso de um número natural  $q$ , esse grau de degenerescência é dado por  $q^g$ , fato que só sublinha ainda mais toda essa interpretação topológica.

E é justamente aqui, diante de todas essas informações, que convém responder algo que certamente o leitor deve estar se perguntando: afinal, já que o modelo de quebra de simetria de Ginzburg-Landau não consegue descrever as transições de fase que ocorrem em baixíssimas temperaturas, como é que toda essa interpretação topológica consegue? E uma boa resposta a esse questionamento pode ser dada de maneira bem simples, desde que observemos que o estado fundamental de qualquer modelo deve descrevê-lo na sua situação de *menor energia*; ou seja, numa situação onde é perfeitamente possível admitir que o sistema pode estar num regime de baixíssimas temperaturas. Considerando que este é exatamente o caso, e principalmente lembrando que toda essa degenerescência significa que *o estado de vácuo deste modelo não é único*, a existência de todos esses vácuos nada mais é do que a grande evidência de que fases distintas existem num tal regime de temperatura. Desta maneira, passa a ser completamente válido dizer que a transição entre todas essas fases não ocorre por efeito de qualquer tipo de “quebra” no padrão das simetrias que um sistema pode apresentar: cada uma dessas fases existem e podem ser acessadas, tão somente, por efeito da topologia de onde esse sistema está definido.

---

<sup>6</sup>A grosso modo, o *gênero* de uma variedade deve ser interpretado como a quantidade de “buracos” que esta possui. No entanto, como este termo “buraco” pode não soar e nem ser o mais adequado para explicar o significado de “gênero” (ainda mais se notarmos que isso pode levar à alguma confusão, devido a uma possível identificação com algum tipo de singularidade), cabe aqui uma ressalva: olhando para o caso de um *toro* que, por exemplo, é topologicamente identificável como uma esfera maciça que possui uma única *alça*, o “buraco” a que nos referimos nada mais é do que a região vazada entre a bola e a sua alça.

### 1.3 A proposta deste trabalho

Obviamente diversos experimentos adicionais foram (e continuam sendo) realizados para investigar outras propriedades destes gases, entre as quais podem figurar algumas que ainda são completamente desconhecidas, ao mesmo tempo que outros modelos teóricos também foram (e continuam sendo) propostos para melhor caracterizar sistemas com ordem topológica. Todavia, devido aos trabalhos teóricos que foram desenvolvidos não apenas por G. Castagnoli e M. Rasetti [16], mas principalmente por A. Yu. Kitaev [4], a busca por sistemas reais que são capazes de suportar a presença de “anyons” acabou ganhando uma atenção redobrada nos últimos anos. Afinal de contas, de acordo com os trabalhos destes pesquisadores ficou bem claro que tais sistemas topológicos são capazes de atender às causas de uma computação quântica.

Aliás, um dos modelos topológicos mais simples que existe, e que fora concebido pelo próprio Kitaev com este propósito em mente, é justamente o TC: um modelo *quântico* que é definido (i) atribuindo elementos de um *espaço de Hilbert* a cada uma das arestas de uma rede (geralmente quadrada) que é capaz de discretizar um *toro*<sup>7</sup>, e (ii) pela conseqüente definição de operadores que são capazes de atuar sobre o espaço de Hilbert total que acaba se formando por decorrência de toda essa atribuição. E, no caso desses elementos, cabem duas observações bem interessantes, onde a primeira delas está justamente relacionada para com todo esse aspecto quântico que bem fundamenta o TC: todos esses elementos, que são atribuídos às arestas, devem ser interpretados como as generalizações quânticas dos chamados *bits* clássicos, dado que eles são modelados por vetores que pertencem a um espaço de Hilbert *bidimensional* cuja base é indexada pelo grupo  $\mathbb{Z}_2$ .

Já a segunda observação retrata bem um (mas apenas um) dos porquês que aproximam esse modelo de algumas teorias que se envolvem para com a física das partículas: esses mesmos elementos “de Hilbert” se comportam como *campos de calibre discretos*. Ou seja, eles se comportam como elementos que são diretamente responsáveis pela caracterização local da variedade onde o sistema físico está definido (segundo a resolução que a rede permite), dado que eles se sujeitam à transformações lineares que são incapazes de mexer com a covariância das equações de movimento [17, 18, 19].

É claro que, conforme já dissemos acima, a caracterização do TC como um modelo de calibre discreto não é a única razão que o aproxima das demais teorias envoltas para com a física de partículas elementares. Uma das outras razões que podemos apontar aqui (e que, talvez, soe como

<sup>7</sup>Ou seja, uma variedade bidimensional com gênero *unitário*.



uma curiosidade) se refere, por exemplo, ao comportamento das partículas que podem ser criadas no TC: essas partículas (que, na verdade, são *quasipartículas*, por serem excitações elementares não compostas por matéria) se comportam como as suas próprias antipartículas. E, segundo a perspectiva que é oferecida por algumas extensões do Modelo Padrão das partículas elementares, as únicas partículas que podem (apenas podem) ser as suas próprias antipartículas são os *neutrinos*, haja vista que isso fornece uma boa base para justificar a massividade dessas partículas, já “comprovada” diante da adequação da ideia de *oscilação de sabores*<sup>8</sup> (proposta originalmente por B. Pontecorvo [20]) aos dados obtidos em diversos experimentos [21, 22] após a inserção de efeitos de matéria nos modelos teóricos de oscilação [23, 24, 25].

Apesar destas três observações estarem relacionadas ao TC, é deveras importante ressaltar que, em respeito ao mesmo princípio da correspondência que já mencionamos acima, “todas” elas também devem se fazer presentes nas suas generalizações. E uma das generalizações do TC que estão mais bem postas na literatura é conhecida como “*Quantum Double Model*” (QDM) [5], cuja lógica de construção é exatamente a mesma: ou seja, (i) atribuindo elementos de um espaço de Hilbert às arestas de uma rede que é usualmente quadrada, e (ii) definindo operadores capazes de mensurá-los. A única diferença estrutural que existe entre esses dois modelos é que os elementos que definem um QDM não se restringem necessariamente a uma indexação feita por  $\mathbb{Z}_2$ : esses elementos devem ser interpretados como vetores de um espaço de Hilbert que, por poder ser dimensionalmente maior que o do TC, possui uma base que é indexada por um grupo  $G_1$  que não é necessariamente Abelian. Diga-se de passagem, é exatamente por causa dessa maior liberdade dimensional, que faz com que  $G_1$  não se identifique necessariamente com  $\mathbb{Z}_2$ , que presença das aspas ao redor do termo “todas” se justifica: afinal de contas, apenas em casos bem particulares as quasipartículas de um QDM se identificarão como as suas próprias anti-quasipartículas.

Generalizações à parte, é importante destacar que tanto o TC como o QDM têm uma característica que faz do último uma generalização que ainda é bastante incompleta: ambos não associam qualquer elemento de um espaço de Hilbert nem aos vértices nem às faces das redes que os suportam. Nestes termos, com o propósito de bem entender quais as consequências que surgem da adição de novos elementos de um espaço de Hilbert aos vértices e às faces de uma rede bidi-

---

<sup>8</sup>De um modo bem geral, o sabor de um neutrino deve ser interpretado como uma espécie de “rótulo”, como uma espécie de “assinatura” que caracteriza a sua capacidade de interação para com um lepton carregado. Ou seja, se pensarmos num decaimento beta, por exemplo, onde um *antineutrino* é produzido junto com um elétron como subproduto da conversão de um nêutron num próton, o sabor desse antineutrino é eletrônico, uma vez que ele só será capaz de interagir com um elétron (como é o que acontece num decaimento beta inverso) ou com a sua antipartícula (ou seja, com um neutrino também eletrônico).

mensional, dedicamos este trabalho à construção de modelos Hamiltonianos discretos que tomam um QDM (e, portanto, o TC) como um caso particular. A ideia fundamental que está por trás de toda essa construção é a de não apenas avaliar quais são as possíveis propriedades físicas que esses modelos podem apresentar (uma vez que isso pode ser muito útil à identificação de novos materiais que possam atender às causas de alguma computação quântica, por exemplo), mas a de avaliar como funciona a degenerescência dos seus estados fundamentais e, por consequência, como funciona o conceito de ordem topológica diante da presença desses novos ingredientes. É claro que, apesar de interpretarmos esses novos elementos como *campos de matéria*, é sempre bom lembrar que nada garante que os nossos modelos correspondam, de fato, a alguma coisa que possa ser chamada de física e, tão pouco, que esses novos campos possam ser interpretados como matéria: afinal de contas, como tudo o que apresentamos nestas notas não se envolve com nada que é experimental, todos esses nossos modelos devem ser vistos apenas “toy models”, do mesmo jeito que os modelos que foram propostos por Kitaev (como o TC e o QDM) também o são.

### 1.3.1 Sobre a estruturação do trabalho

Devido à grande quantidade de informações que resolvemos apresentar neste trabalho em prol daquele leitor que, por não ser necessariamente um especialista nos temas que serão aqui apresentados, precisa de um texto inteligível e autossuficiente, preferimos subdividi-lo em cinco partes. E, na primeira delas, que é composta pelos dois próximos capítulos, apresentaremos algumas considerações importantes à contextualização das teorias de calibre discretas, uma vez que tudo o que diremos nestas notas se referirá a tais teorias.

No caso do próximo capítulo, por exemplo, ele serve para apresentarmos o leitor à definição do conceito “de calibre” pela perspectiva de um formalismo Hamiltoniano de sistemas que estão vinculados a uma rede que discretiza uma variedade: o objetivo é dar ênfase ao papel que a holonomia tem junto a caracterização dessas teorias, o que acaba resumindo dois trabalhos desenvolvidos pela autora destas notas [19, 26]. E já que falar de uma rede que discretiza uma variedade pode perfeitamente instigar o leitor a entender como se dá o processo de discretização de variedades, o terceiro e último capítulo dessa primeira parte é dedicado exatamente a isso, especialmente aos processos de discretização que se envolvem para com as variedades tridimensionais. Em verdade, num primeiro momento não apenas esse terceiro capítulo (que nada mais é do que uma resenha de algumas coisas que constam em [27]), como toda essa primeira parte, pode ser perfeitamente

“pulada” por aquele leitor que deseja apenas entender qual é a ideia geral deste trabalho. Porém, como toda a autossuficiência e inteligibilidade que queremos dar a estas notas já nos permite aproveitar esse terceiro capítulo para, por exemplo, apresentar alguns ingredientes que facilitarão o bom entendimento de outras partes (com as partes que constam no Capítulo 7), aconselhamos fortemente que esse mesmo leitor leia esse terceiro capítulo em algum momento, especialmente as considerações que se envolvem para com o método de discretização de Heegard que consta na Subseção 3.2.2.

Já em relação à segunda parte deste nosso trabalho, ela se abre com o Capítulo 4 que é dedicado ao TC. Afinal de contas, como é exatamente esse o modelo que serve como uma espécie de “semente” para todas as generalizações que apresentaremos nestas notas, é essencial que todas as suas principais propriedades fiquem bem claras, por mais longo e desgastante que esse capítulo possa parecer. Por se dizer, é com algumas das generalizações, que parecem ser as mais simples de serem feitas sobre o TC, que essa segunda parte se fecha logo no Capítulo 5: tratam-se de generalizações que, apesar de manterem a mesma lógica de construção do TC, se valem de redes que podem ser identificadas como discretizações de subvariedades tridimensionais que têm condições periódicas de contorno e, uma delas, é explicitamente um toro. E, no caso destas generalizações, algo que conseguimos demonstrar é que, apesar da liberdade tridimensional que esses modelos oferecem às suas quasipartículas, uma ordem topológica ainda se faz presente, não mais sob a dependência do grupo fundamental da variedade sobre a qual eles estão definidos, mas que depende do segundo grupo de homologia. E a razão disso acontecer é que as excitações magnéticas que definem os diferentes vácuos deste modelo não mais descrevem caminhos fechados como acontece no TC, mas descrevem superfícies fechadas [28]. Aliás, uma coisa que devemos frisar aqui é que, ao longo não apenas das considerações que se envolvem para com o TC e suas generalizações, mas em tudo mais que apresentaremos nestas notas, iremos considerar implicitamente apenas aquelas variedades que são consideradas *orientáveis*, *compactas* e *sem fronteiras*.

Sobre a terceira parte destas notas, ela é a mais longa de todas e consiste de quatro capítulos. No Capítulo 6, por exemplo, apresentaremos as principais considerações que se envolvem para com um QDM, uma vez que é exatamente esse o modelo mais geral que tomaremos como base para atribuir os campos de matéria que mencionamos acima. Aliás, como a primeira generalização que faremos sobre um QDM se valerá da atribuição de campos de matéria aos vértices de uma rede bidimensional (QDM<sub>v</sub>), achamos mais prudente dedicar o Capítulo 7 à apresentação dos trâmites algébricos que se envolvem para com essa generalização, e só no Capítulo 8 a apresentaremos

explicitamente. Por se dizer, toda essa apresentação do Capítulo 8 será feita com o auxílio de quatro exemplos que visam ilustrar as principais propriedades dessa generalização, entre as quais podemos listar (i) as propriedades de confinamento das quasipartículas magnéticas, (ii) a presença de regras de fusão não Abelianas em algumas situações particulares e (iii) a dependência que o QDM $v$  possui em relação ao segundo grupo de homologia da variedade sobre a qual ele se apoia [29].

Já sobre o Capítulo 9, que também compõe esta terceira parte, ele é dedicado à segunda generalização de um QDM onde atribuímos campos de matéria às faces de uma rede bidimensional (QDM $f$ ). E, neste caso, devido a correspondência que existe entre os vértices e os centróides das faces que definem a rede que consideraremos, a construção deste novo modelo se dará em termos da dualização da primeira: ou seja, considerando que os centróides de uma face são, na verdade, os vértices de uma rede dual. Como resultado desse processo, muitas das propriedades do QDM $v$  ainda se fazem presentes; porém, a degenerescência do estado fundamental passa a ser regulada em termos não apenas da topologia do sistema, mas em termos de um homomorfismo de coação entre os grupos de calibre e de matéria. Em todo caso, uma coisa também interessante que surge desses modelos é que eles mantêm uma correspondência explícita com modelos que se apoiam sobre módulos cruzados e sobre a teoria das categorias com ordem alta [30]. E é exatamente com essa correspondência, que será apresentada ao longo do Capítulo 10, que se abre a penúltima parte deste trabalho, a qual já se encerra no Capítulo 11, onde sintetizamos todos os resultados obtidos nestas notas e também fazemos alguns comentários adicionais sobre alguns dos desenvolvimentos futuros.

Em relação a última parte destas notas, ela foi criada apenas pela questão estética de reunir os três Apêndices que redigimos para esclarecer algumas questões que fugiram ao enredo do texto principal, seja por eventuais desvios de assunto ou mesmo por uma simples sobrecarga de informações, mas que indubitavelmente o complementam em aspectos bastante fundamentais.

**Parte I**

**Teorias de calibre discretas**



## Capítulo 2

# Teorias de calibre como sistemas vinculados

### 2.1 Um prelúdio

Como bem dissemos no capítulo anterior, a principal característica dos modelos que apresentamos nestas notas é que todos eles podem ser interpretados a luz das *teorias de calibre discretas*. Mas, apesar de ser muito bem conhecido, dos diversos exemplos eletrodinâmicos [31], que uma teoria de calibre é aquela onde podemos realizar transformações entre algumas funções que descrevem um sistema e, ainda sim, mantermos a covariância das suas equações de movimento, um questionamento que persiste na cabeça de muitas pessoas é: por que essas teorias são rotuladas como “de calibre”? Qual é a razão deste termo? Aliás, dentro do contexto que responde a tudo isso, como é que uma teoria de calibre que é posta em termos discretos pode ser caracterizada?

E uma das principais características relacionadas aos sistemas clássicos que são classificados como “de calibre”, e que nos ajuda a responder todos esses questionamentos, é: todos esses sistemas “de calibre” são *vinculados* a uma subvariedade; ou seja, a dinâmica de todos eles se restringe apenas a uma variedade  $\mathcal{M}_{n-m}$  que está *mergulhada* dentro de uma outra  $\mathcal{M}_n$  que é dimensionalmente maior [26, 32]. E certamente uma das melhores maneiras que existe para entendermos o porquê desta vinculação é notando que, apesar de sempre tentarmos associar as funções diferenciáveis que melhor se ajustam às trajetórias de um sistema no espaço em que ele está contido, nem sempre somos realmente capazes de enxergar qual é a melhor parametrização que nos leva a um melhor ajuste de funções. Se pensarmos numa situação onde temos um sistema físico que está definido sobre uma esfera maciça de raio  $R$  mergulhada no  $\mathbb{R}^3$ , por exemplo, enxergar qual é a melhor parametrização até que parece bem fácil: para isso, basta, ao invés de usarmos uma aplicação  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$  que se apoia sobre uma perspectiva Euclideana, tomarmos uma

outra  $q(t) = (\phi(t), \theta(t), R)$  que, por se apoiar sobre uma parametrização esférica, consegue reduzir o número funções não constantes que dão conta de descrever o sistema físico. Porém, as situações físicas reais nem sempre são tão simples como a de um sistema definido sobre uma esfera: pois, enquanto, por um lado, os experimentos nem sempre nos permitem identificar qual é a subvariedade  $\mathcal{M}_{n-m}$  onde um sistema físico está definido (uma vez que eles nem sempre nos permitem identificar quais são as eventuais simetrias que levariam a uma descrição mais simples), por outro, mesmo que essa identificação aconteça, os formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano geralmente nos levam à equações de movimento que possuem soluções bem mais complicadas quando nos guiamos pela perspectiva das parametrizações intrínsecas de  $\mathcal{M}_{n-m}$ .

## 2.2 Teorias de calibre

Aliás, quando olhamos para a situação de um sistema clássico “de calibre” que é descrito em termos de um formalismo Hamiltoniano, a função que o modela é dada por [17]

$$H_T(z) = H(z) + \lambda^j \Phi_j(z) \quad , \quad (2.1)$$

onde  $\{\Phi_j : T^*\mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}\}$  é o conjunto de vínculos que restringe o sistema físico a uma subvariedade  $T^*\mathcal{M}_{n-m}$  que é definida por  $\Phi_j(z) = 0$ , a qual está contida num *fibrado cotangente*  $T^*\mathcal{M}_n$  decomponível como [33]

$$T^*\mathcal{M}_n = T^*\mathcal{M}_{n-m} \oplus (T^*\mathcal{M}_{n-m})^\perp \quad . \quad (2.2)$$

Pelo ponto de vista geométrico, como estes vínculos são responsáveis pela definição do sistema físico apenas sobre uma subvariedade  $\mathcal{M}_{n-m}$ , a principal consequência deste *mergulho* que está associado a decomposição (2.2) [32] é que todas as funções que têm alguma importância física dependem apenas dos parâmetros intrínsecos a  $\mathcal{M}_{n-m}$  [2].

Contudo, a restrição de um sistema físico a uma subvariedade não é o único ingrediente necessário para definir uma teoria de calibre como um sistema vinculado. Além deste ingrediente nitidamente geométrico, também é necessário que uma parte do conjunto de vínculos  $\{\Phi_j : T^*\mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}\}$  seja composta por funções de *primeira classe*; ou seja, é necessário que parte desse conjunto de vínculos seja composta por funções que podem ser interpretadas como uma  $\mathcal{F} : T^*\mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$  que, na subvariedade  $T^*\mathcal{M}_{n-m} \subset T^*\mathcal{M}_n$ , são tais que  $\{\mathcal{F}, \Phi_j\} = 0$  para qualquer índice  $j$  [34]. E a grande razão deste segundo ingrediente está diretamente associada ao fato das



equações de consistência

$$\dot{\Phi}_B = \{ \Phi_B, H_T \} = \{ \Phi_B, H_F \} + \{ \Phi_B, \Phi_A \} \lambda^A = 0, \quad (2.3)$$

que estão relacionadas a esses vínculos de primeira classe, nos mostrarem que os *multiplicadores de Lagrange*  $\lambda^A$  que os implementam a (2.1) não podem ser resolvidos univocamente [35].

Desta maneira, é quando juntamos esses dois ingredientes que começa a ficar claro qual é o fundamento que nos permite chamar todas as teorias de calibre como tal. E, para entendê-lo, devemos notar que, como estamos lidando com variedades e que, portanto,  $z$  não é a única parametrização de  $T^*\mathcal{M}_n$ , podemos tranquilamente tomar um outro conjunto de parâmetros  $\kappa$  que nos permite descrever o mesmo sistema físico através de novas equações

$$\dot{\kappa} = \{ \kappa, H'_T(\kappa) \}_{\Phi'=0}, \quad (2.4)$$

que se valem não apenas de novos vínculos  $\Phi'_j(\kappa) = 0$ , mas de uma nova Hamiltoniana total  $H'_T : T^*\mathcal{M}_n \rightarrow \mathbb{R}$  adaptada a esta nova parametrização. A grande importância por trás dessa simples observação é que, como  $T^*\mathcal{M}_{n-m}$  é uma subvariedade onde (2.2) vale, a parametrização mais interessante que podemos tomar para essa  $T^*\mathcal{M}_n$  é, por exemplo, uma  $\kappa = (\omega, \Omega)$  onde  $\omega = (q, p)$  é um conjunto de parâmetros intrínsecos a  $T^*\mathcal{M}_{n-m}$ , enquanto  $\Omega = (Q, \mathcal{P})$  parametriza apenas  $(T^*\mathcal{M}_{n-m})^\perp$ . E o aspecto que nos revela o porquê desta parametrização ser a “mais interessante” está relacionado ao fato de que, independente de quaisquer preocupações geométricas, já foi demonstrado que existe uma parametrização  $\kappa' = (\omega', \Omega')$  onde o Hamiltoniano total do sistema pode ser expresso através de [35]

$$H_T(\kappa') = H_F(\omega') + \lambda_{\mathcal{P}'} \mathcal{P}' + \mathcal{O}(\dot{\mathcal{P}}', \mathcal{P}'^2) \quad (2.5)$$

pelo uso de

- (a) um par com variáveis canonicamente conjugadas  $\omega' = (q', p')$ <sup>1</sup> que é capaz de parametrizar apenas o sistema físico, e
- (b) um outro par  $\Omega' = (Q', \mathcal{P}')$ , que também contém variáveis canonicamente conjugadas, as quais mantêm uma relação “um-pra-um” entre as componentes de  $\mathcal{P}' = (\mathcal{P}'_I, \mathcal{P}'_{II})$  e as de

---

<sup>1</sup>Ou seja, um par tal que  $\{q'^\mu, p'_\nu\} = \delta^\mu_\nu$  vale, para todos os valores  $\mu, \nu = 1, \dots, n-m$ .

primeira (I) e de segunda classe (II) que compõem  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_m)$ .

Nestes termos, comparando essas duas parametrizações  $\kappa$  e  $\kappa'$ , uma coisa que podemos concluir é que, na verdade, elas são as mesmas. E um aspecto interessante que segue desta conclusão, principalmente de (2.4), é que as equações de movimento deste sistema se reduzem a [17]

$$\dot{\omega} = \{ \omega, H_F \} \quad , \quad \dot{Q}_I = \lambda_{\varphi_I} \quad , \quad \dot{Q}_{II} = \mathcal{A}(\omega, Q) \quad \text{e} \quad \mathcal{P} = 0 \quad , \quad (2.6)$$

onde  $H_F : T^*\mathcal{M}_{n-m} \rightarrow \mathbb{R}$  é o que podemos chamar de *Hamiltoniana física* e  $\lambda_{\varphi_I}$  são os novos multiplicadores de Lagrange que implementam os novos vínculos de primeira classe à nova Hamiltoniana (2.5). E este, sim, é o aspecto mais importante que está relacionado à caracterização de uma teoria de calibre: pois, como a não univocidade dos novos multiplicadores de “primeira classe” nos permite fazer infinitas escolhas para solucionar

$$\dot{Q}_I = \lambda_{\varphi_I} \quad \text{e} \quad \dot{Q}_{II} = \mathcal{A}(\omega, Q) \quad , \quad (2.7)$$

acaba ficando muito claro que, devido a todo esse aspecto “desmontado” das equações (2.6), qualquer que seja o *calibre*  $\lambda_{\varphi_I}$  que fixemos para solucionar (2.7), essa escolha *jamaiz* interferirá na solução das equações físicas

$$\dot{\omega} = \{ \omega, H_F \} \quad .$$

Logo, como todas as parametrizações que podemos escolher para uma variedade se relacionam (uma com a outra) através de *difeomorfismos* [36], podemos afirmar que uma teoria de calibre é muito mais do que aquela que descreve um sistema físico

- que está vinculado a uma subvariedade  $\mathcal{M}_{n-m} \subset \mathcal{M}_n$ ,
- onde o conjunto de vínculos (que define essa subvariedade e, portanto, o espaço de fase  $T^*\mathcal{M}_{n-m} \subset T^*\mathcal{M}_n$ ) é necessariamente composto pelos de primeira classe.

Como a existência de um difeomorfismo entre as parametrizações  $z$  e  $\kappa$  nos garante que fixar um multiplicador  $\lambda_{\varphi_I}$  em (2.6) significa fixar um dos multiplicadores  $\lambda^j$  em

$$\dot{z} = \{ z, H_T(z) \}_{\Phi=0} \quad , \quad (2.8)$$

fica muito claro que é essa última fixação que acaba definindo uma expressão

$$\lambda^A = f_A(z) \quad , \quad (2.9)$$

para todos aqueles multiplicadores de Lagrange que não puderam ser determinados em (2.3), a qual é perfeitamente mutável. Ou seja, como são infinitas as escolhas que podemos tomar para solucionar (2.6), também são infinitas as escolhas que temos para definir (2.9) sem nunca alterar a covariância das equações (2.8), e é exatamente isso que justifica a caracterização usual de uma teoria de calibre.

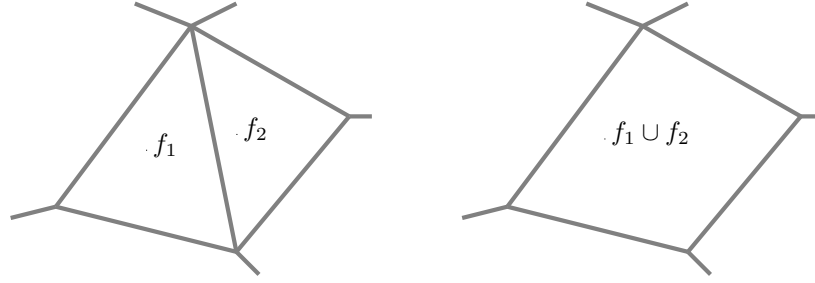
### 2.2.1 Teorias de calibre discretas

Apesar de tudo o que dissemos até agora se referir, tão somente, às teorias de calibre que são vistas como *contínuas*, devemos destacar que todas essas considerações também podem ser perfeitamente adaptadas para descrever uma teoria de calibre pura que é posta em termos discretos: ou seja, uma teoria cujos campos de calibre estão associados às arestas de uma *rede* que é definida sobre  $\mathcal{M}$ . Aliás, uma coisa que já está bem clara na literatura [37] é que, diante de toda essa realização discreta que nos permite enxergar  $\mathcal{M}$  localmente como uma espécie de “colcha de retalhos” composta por poliedros não necessariamente regulares, se torna válido descrever tal sistema por meio de uma *função de partição* [38]

$$Z = \sum_{\{\phi_j\}} \prod_f \sigma_f(\phi_1, \dots, \phi_k) \quad , \quad (2.10)$$

que é estruturada por meio de uma aplicação  $\sigma_f : G^k \rightarrow \mathbb{R}$  que associa pesos estatísticos a cada face  $f$  dessa “colcha”, mediante a atribuição prévia de um elemento  $\phi_j$ , que pertence a um grupo  $G$ , à  $j$ -ésima aresta da rede. Aqui, a presença do símbolo  $\{\phi_j\}$  em (2.10) significa que todas as possíveis configurações estão sendo computadas em  $Z$ .

É claro que existe uma diversidade de coisas que podem ser ditas sobre a expressão dessa função de partição, e será exatamente isso o que faremos ao longo desta Seção. Entretanto, antes de fazermos isso, a primeira coisa que iremos fazer é responder a uma questão que o leitor pode estar se fazendo: por que  $G$  precisa ser um grupo?



**Figura 2.1:** Recorte de uma rede bidimensional ilustrando como a união de duas faces  $f_1$  e  $f_2$  (à esquerda) pode ser interpretada como uma partição; ou seja, como uma nova face  $f_1 \cup f_2$  (à direita) onde a aresta unindo  $f_1$  e  $f_2$  pode ser ignorada.

### A necessidade de um grupo

A primeira coisa que precisamos fazer, para entender porquê  $G$  precisa ser um grupo, é notar que, como estamos lidando com uma rede onde todas as faces são disjuntas por definição,  $Z$  precisa descrever uma situação onde, por exemplo, a união de duas faces  $f_1$  e  $f_2$  que partilham uma mesma aresta também deve ser vista como uma partição. Assim, se tomarmos uma partição  $f = f_1 \cup f_2$  ao invés de  $f_1$  e  $f_2$  separadamente, o sistema que estamos considerando precisa ser modelado de modo que a sua descrição ocorra sem apresentar qualquer dependência do elemento que é partilhado nesta união, tal como a Figura 2.1 bem sugere. Portanto, como isso implica que

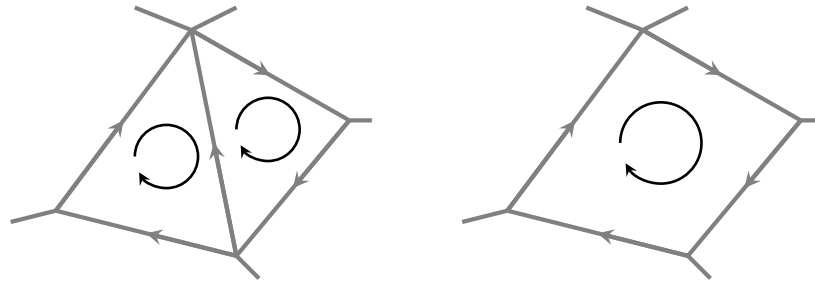
$$\sigma_{f_1}^{\mathcal{L}}(\phi_1, \dots, \phi_j) \cdot \sigma_{f_2}^{\mathcal{L}}(\phi_j, \dots, \phi_m) = \sigma_{f_1 \cup f_2}^{\mathcal{L}}(\phi_1, \dots, \phi_{j-1}, \phi_{j+1}, \dots, \phi_m) \quad (2.11)$$

é o peso estatístico dessa “nova” partição  $f_1 \cup f_2$ , que é obtida pela união que é feita através da  $j$ -ésima, se torna claro que parece existir uma espécie de “comportamento homomórfico” embebido na definição desses pesos.

Já a segunda coisa que precisamos notar aqui é que, se  $\phi_j$  é um elemento de um grupo, sempre seremos capazes de associar um único elemento de  $G$  à duas arestas consecutivas dessa rede: afinal de contas, como a aplicação [39]

$$(\phi_1, \phi_2) \mapsto \varphi(\phi_1, \phi_2) = \phi_3 \quad ,$$

que já dá uma estrutura de grupo a  $G$ , sempre associa um único elemento  $\phi_3$  ao par ordenado  $(\phi_1, \phi_2)$ , essa associação de um único elemento à duas arestas (sejam elas consecutivas ou não)



**Figura 2.2:** Recorte com as mesmas faces que já foram apresentadas na figura anterior, as quais agora usamos para enfatizar o fato de que as faces e as arestas podem ser orientadas independentemente. Note que, ao orientarmos duas faces vizinhas  $f_1$  e  $f_2$  (à esquerda) da mesma maneira, isso automaticamente dá a mesma orientação à partição  $f_1 \cup f_2$  (à direita).

sempre pode ser feita. Em todo caso, já que

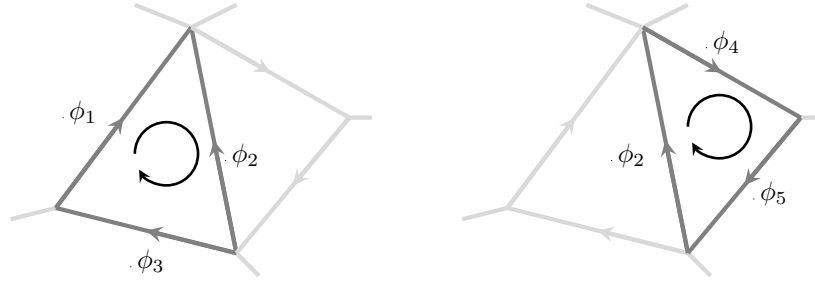
$$\varphi(\phi_1, \phi_2) = \varphi(\phi_2, \phi_1)$$

é uma verdade apenas quando  $G$  é Abelianano, também acaba ficando bem claro que a associação de um único elemento à duas arestas, que são originalmente indexadas por  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , pode não ser unívoca. Desta maneira, ao notarmos que as faces e as arestas de uma rede podem ser orientadas independentemente, para que (2.10) realmente reflita a condição (2.11) precisamos dar não apenas a mesma orientação para todas as faces, como bem ilustra a Figura 2.2: se estivermos sobre a face que contém a  $j$ -ésima aresta como parte do seu bordo, também se faz necessário ler um elemento  $\phi_j$  como [37]

- o próprio  $\phi_j$ , se a orientação da  $j$ -ésima aresta coincidir com a da face que a contém, ou
- $\phi_j^{-1}$ , na situação contrária a essa.

### A importância da holonomia

É claro que existe um bom motivo para tal esquema de orientação e, para bem entendê-lo, é essencial notar uma coisa: uma rede que consta sobre uma variedade sempre pode ser interpretada como uma discretização local dessa variedade se ambas tiverem a mesma dimensão. Assim, lembrando que qualquer caminho sobre essa variedade pode ser discretizado em termos de uma colagem de arestas através dos vértices que as compreendem, associar um único elemento a duas arestas consecutivas numa rede significa associar um único elemento à discretização de um caminho como um todo.



**Figura 2.3:** Associação dos elementos do grupo  $G$  às arestas das faces  $f_1$  (à esquerda) e  $f_2$  (à direita), os quais são lidos de acordo com o critério estabelecido na página 19.

Diga-se de passagem, se analisarmos, por exemplo, a associação do elemento que já é feita para uma única aresta por essa perspectiva, assegurar um único elemento à discretização de um caminho passa a não ser tão estranho, uma vez que uma aresta sozinha pode discretizar qualquer caminho independente de qualquer precisão. Portanto, ao estendermos essa mesma linha de raciocínio a todas as arestas que completam uma única face  $f$ , se torna perfeitamente possível assegurar um único elemento  $\phi_f$  ao bordo desta face: isso é feito através de uma aplicação  $U_f : G^k \rightarrow G$ , dada por

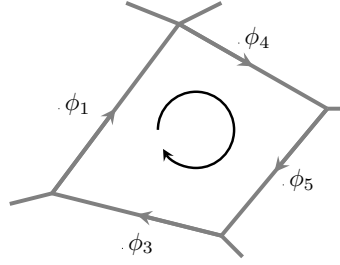
$$U_f(\phi_1, \dots, \phi_k) = \varphi(\dots \varphi(\varphi(\phi_1, \phi_2), \phi_3), \dots, \phi_k) = \phi_f \quad , \quad (2.12)$$

onde os elementos indexados por  $1, \dots, k$  correspondem à alguma sequência de arestas que completam o bordo de  $f$ , a qual cresce (com módulo  $k$ ) na mesma direção que a orientação que foi escolhida para essa face. Aliás, no caso das faces  $f_1$  e  $f_2$  que já tomamos como um exemplo, *um* jeito de fazermos isso é através de

$$U_{f_1}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \phi_1 \cdot \phi_2^{-1} \cdot \phi_3 = \phi_{f_1} \quad \text{e} \quad U_{f_2}(\phi_2, \phi_4, \phi_5) = \phi_2 \cdot \phi_4 \cdot \phi_5 = \phi_{f_2}$$

respectivamente, conforme consta na Figura 2.3.

Diante de tudo isso, apesar do leitor já estar ciente da possibilidade de associar um único elemento ao bordo de uma face, certamente ele deve estar se perguntando: por que essa associação é importante? E a melhor resposta que podemos dar ao leitor que se faz essa pergunta é pedir para ele analisar  $U_f$  considerando um caso bem particular, onde  $\phi_f$  é o elemento identidade  $e$  de  $G$ . Afinal de contas, se pensarmos, por exemplo, que o elemento que está sobre a  $j$ -ésima aresta é responsável por transportar uma “informação física” de um vértice para o outro, o resultado que surge de (2.12) com  $\phi_f = e$  pode ser associado com uma “informação física” que, ao partir de



**Figura 2.4:** União das faces  $f_1$  e  $f_2$  que já foram apresentadas nas figuras anteriores, de onde é possível observar que  $U_{f_1} \cdot U_{f_2} = U_{f_1 \cup f_2}$ .

qualquer um dos vértices de  $f$ , sempre retorna intacta para ele. E a grande consequência disso é que todo esse processo de multiplicar os elementos  $\phi_j$  (na mesma sequência que eles aparecem ao longo do bordo de  $f$ ) pode ser identificado como um *transporte paralelo*, que nos permite interpretar  $U_f$  como a *holonomia* local deste sistema [40].

Diante dessa conclusão, passa a ser perfeitamente válido admitir que

$$U_{f_1}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \phi_1 \cdot \phi_2^{-1} \cdot \phi_3 = \phi_2^{-1} \cdot \phi_3 \cdot \phi_1 = \phi_3 \cdot \phi_1 \cdot \phi_2^{-1} = \phi_{f_1} \quad \text{e}$$

$$U_{f_2}(\phi_2, \phi_4, \phi_5) = \phi_2 \cdot \phi_4 \cdot \phi_5 = \phi_4 \cdot \phi_5 \cdot \phi_2 = \phi_5 \cdot \phi_2 \cdot \phi_4 = \phi_{f_2} \quad ,$$

desde que o resultado dessa holonomia deve independer da aresta que escolhemos como ponto de partida. E, como consequência dessas duas expressões, podemos concluir que

$$U_{f_1}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \cdot U_{f_2}(\phi_2, \phi_3, \phi_4) = U_{f_1 \cup f_2}(\phi_1, \phi_3, \phi_4, \phi_5) \quad . \quad (2.13)$$

Ou seja, quando consideramos uma partição  $f_1 \cup f_2$  ao invés das partições  $f_1$  e  $f_2$  separadamente, a holonomia de  $f_1 \cup f_2$  é completamente independente do elemento que é partilhado nessa união, tal como a Figura 2.4 mostra. E certamente esse mesmo cálculo pode ser naturalmente estendido à uma união mais geral de partições, cujo bordo não necessariamente se identifica com o bordo de uma única face: e quando esse é o caso, esse bordo pode ser reconhecido como uma *alça de Wilson* [41].

Aliás, diante de (2.13) é importante destacar duas coisas. A primeira delas (que é a mais simples) é que esse comportamento da holonomia realmente faz sentido: pois, como  $\mathcal{L}_n$  pode ser vista como uma aproximação grosseira de  $\mathcal{M}_n$ , quando perdemos parte da resolução dessa rede, ao considerar  $f_1 \cup f_2$  ao invés de  $f_1$  e  $f_2$  separadamente,  $U_{f_1 \cup f_2}$  precisa caracterizar  $\mathcal{M}_n$  da melhor

maneira possível no mesmo lugar onde  $f_1$  e  $f_2$  discretizava separadamente. E um bom meio de entender isso é tomando, por exemplo, o caso particular onde  $\phi_{f_1} = \phi_{f_2} = e$ : afinal de contas, se  $f_1$  e  $f_2$  são duas faces que caracterizam  $\mathcal{M}_n$  como uma variedade localmente plana, a união  $f_1 \cup f_2$  também precisa caracterizar  $\mathcal{M}_n$  como localmente plana.

Já a segunda coisa que precisamos mencionar aqui diz respeito a uma coisa que o leitor já pode ter notado, a qual iremos mencionar apenas por uma questão de completeza em relação ao que já dissemos no início desta Seção: a similaridade entre (2.11) e (2.13). E, de acordo com os pesos estatísticos

$$\sigma_f^{\mathcal{L}} = e^{-\beta} [ U(f) + U^{-1}(f) ] \quad (2.14)$$

que foram apresentados em [37], a razão desta similaridade pode ser bem entendida observando que o peso estatístico que está associado à união  $f_1 \cup f_2$  é dado por

$$\sigma_{f_1 \cup f_2}^{\mathcal{L}} = e^{-2\beta} [ U_{\text{mean}}(f_1 \cup f_2) + U_{\text{mean}}^{-1}(f_1 \cup f_2) ] \quad ,$$

onde  $\beta$  é um coeficiente que é inversamente proporcional à temperatura do sistema e  $U^{-1}(f)$  é o inverso da holonomia que está associada à  $f$ -ésima face. Afinal de contas, desde que  $U_{\text{mean}}(f_1 \cup f_2)$  é a holonomia média que caracteriza essa união  $f_1 \cup f_2$ , isso está de pleno acordo com o que dissemos no último parágrafo, já que (2.13) também é uma média (geométrica) entre as holonomias que caracterizam  $f_1$  e  $f_2$  individualmente. Deste modo, apesar do peso estatístico (2.14) servir para caracterizar uma teoria de calibre pura sobre uma rede como um sistema Hamiltoniano com vínculos, tudo isso mostra que podemos trabalhar com um peso

$$\sigma_f^{\mathcal{L}}(\phi_1, \dots, \phi_k) = \sigma_f(\phi_1, \dots, \phi_k) \cdot \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) \quad (2.15)$$

mais geral, onde  $\sigma_f$  corresponde ao peso estatístico que está associado a uma face que não necessariamente discretiza a variedade sobre a qual o sistema está definido.

### Sobre as transformações de calibre

Todavia, antes de explicarmos porquê é melhor trabalhar com (2.15) para fazer tal caracterização, ainda precisamos analisar porque esse sistema pode ser interpretado como uma teoria de calibre. E, de acordo com tudo o que dissemos anteriormente, como a caracterização de “calibre” de um sistema clássico está relacionada à liberdade que temos para transformar alguns



parâmetros que descrevem a sistema sem mudar a sua física, é muito claro que a caracterização de “calibre” do nosso sistema discreto deve estar relacionada às transformações que podem ser feitas sobre os elementos  $\phi_j$  que o modelam.

Para entender como tudo isso funciona, precisamos ter em mente que, como  $\phi_f$  pertence ao grupo  $G$ , ele não poderá ser expresso univocamente como um produto

$$\phi_f = \phi_1 \cdot \dots \cdot \phi_k \quad (2.16)$$

de  $k$  elementos quando  $G$  não é um grupo trivial. Assim, assumindo que  $k$  é o número de arestas que definem o bordo de uma face  $f$ , fica bem claro que o mesmo valor  $\phi_f$  da holonomia de  $f$  pode ser obtido associando outras combinações de elementos às arestas da rede. Nestes termos, desde que essas arestas podem não pertencer ao bordo de uma única face, se soubermos como os elementos estão distribuídos numa única das possíveis configurações que caracterizam uma rede, todas as outras que caracterizam a mesma rede poderão ser obtidas a partir da primeira através por meio de uma transformação  $\mathcal{T}_v^{(g)} : G^{n_e} \rightarrow G^{n_e}$  que troca um elemento  $\phi_j$  (associado a  $j$ -ésima aresta que compõe o  $v$ -ésimo vértice da rede) por um outro [5]

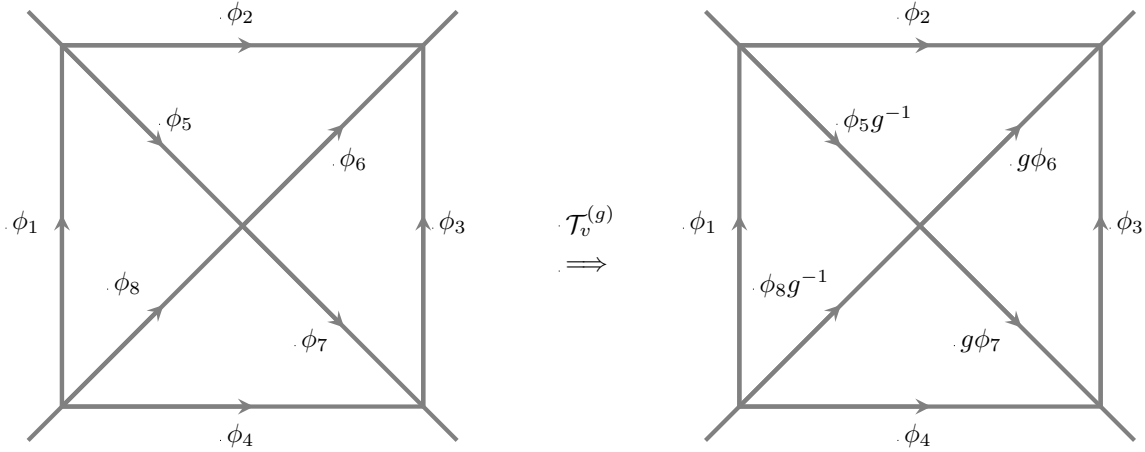
- $g\phi_j$ , se a orientação da  $j$ -ésima aresta coincidir com a da face que a contém e estiver apontando para fora do  $v$ -ésimo vértice, ou
- $\phi_j g^{-1}$ , se uma situação contrária for válida para essa mesma aresta.

Aqui,  $n_e$  é o número de arestas que definem o  $v$ -ésimo vértice.

Por se dizer, um bom exemplo desta transformação pode ser visto na Figura 2.5, cuja orientação das faces é exatamente a mesma das figuras anteriores. E é exatamente com base nesta observação que qualquer teoria que se enquadra nos moldes que foram apresentados nesta Seção será interpretada como uma teoria de calibre pura sobre uma rede: ou seja, desde que a escolha dos elementos associados às arestas não é única, esses elementos são interpretados como campos de calibre discretos e, portanto,  $\mathcal{T}_v^{(g)}$  acaba sendo reconhecida como uma *transformação de calibre discreta* já que ela nunca muda as holonomias que caracterizam a rede sobre a qual o sistema físico está definido.

### Caracterização como um sistema Hamiltoniano com vínculos

Aliás, é devido justamente à definição que acabamos de dar para uma teoria de calibre pura sobre uma rede, e especialmente sabendo de (2.14) que todas as holonomias e todos os pesos são



**Figura 2.5:** Esquema relacionado a uma rede bidimensional, onde temos quatro faces (à esquerda) compartilhando um mesmo vértice  $v$ , cujas arestas contém elementos do grupo  $G$  que são transformados (à direita) devido à ação de um mesmo elemento  $g$  de acordo com o critério estabelecido acima. Aqui, estamos considerando que todas as faces estão orientadas no mesmo sentido horário das figuras anteriores.

invariantes por essas transformações de calibre discretas [37], que finalmente podemos justificar o porquê de preferirmos tomar (2.14) ao invés de (2.15). E a primeira coisa que podemos fazer para entender isso é pensar na configuração mais simples de todas: aquela onde todas as holonomias são iguais ao elemento identidade de  $G$  e, portanto, descreve a situação onde  $\mathcal{L}_n$  discretiza uma variedade plana. Afinal, se essa for a única configuração possível para o sistema, teremos [38]

$$Z_0 = \prod_f \sigma_f(\phi_1, \dots, \phi_k) \cdot \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), e) \quad ,$$

a qual nos permite caracterizar essa teoria como a de um sistema com vínculos, desde que a sua Hamiltoniana será

$$H_0 = \ln Z_0 = \sum_f \sigma_f(\phi_1, \dots, \phi_k) + \sum_f \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), e) \quad .$$

Entretanto, essa não é a única configuração acessível ao sistema quando lidamos com um  $G$  que não é trivial. E quando pensamos na configuração mais geral possível, onde temos  $m$  faces com holonomias que não se identificam com o elemento identidade de  $G$ , como a função de partição

que a descreve é dada por

$$Z_m = N_m \cdot \prod_{f \in F_{\text{flat}}} \sigma_f(\phi_1, \dots, \phi_k) \cdot \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), e) \cdot \prod_{f' \in \mathcal{L}_n \setminus F_{\text{flat}}} \sigma_{f'}(\phi_1, \dots, \phi_k) \cdot \delta(U_{f'}(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_{f'}) \quad , \quad (2.17)$$

é justamente esse resultado que nos mostra que (2.10) pode ser desenvolvida como

$$Z = \sum_{m=0}^{n_f} Z_m = \left( \sum_{m=0}^{n_f} N_m \right) \prod_f \sigma_f(\phi_1, \dots, \phi_k) \cdot \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) \quad .$$

a qual nos leva à função Hamiltoniana

$$H = \ln Z = \ln \tilde{Z} + \sum_f \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) + O(n_f) \quad (2.18)$$

que caracteriza um sistema com vínculos. Aqui:  $N_m$  é a multiplicidade da configuração que é modelada por  $Z_m$ ;  $n_f$  é o número de faces que compõe  $\mathcal{L}_n$ ;

$$O(n_f) = \ln \left( \sum_{m=0}^{n_f} N_m \right) \quad ; \quad (2.19)$$

$F_{\text{flat}}$  é o conjunto que é formado pelas faces cujas holonomias são iguais ao elemento identidade de  $G$ ; e  $\tilde{Z}$  é uma função de partição que não tem qualquer compromisso para com a descrição deste sistema discreto em qualquer das possíveis discretizações de uma variedade  $\mathcal{M}_n$ . Aliás, como (2.19) se identifica como uma *constante*, é importante notar que tanto a Hamiltoniana (2.18) como

$$H' = H - O(n_f) = \ln \tilde{Z} + \sum_f \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f)$$

descrevem a mesma física.

### Observações adicionais

Embora todas essas considerações já nos permitam enxergar esse sistema discreto, de pesos estatísticos dados por (2.15), como um sistema Hamiltoniano com vínculos, já que as aplicações

$$U_f(\phi_1, \dots, \phi_k) \mapsto \Phi_f = \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) \quad (2.20)$$

dão conta de caracterizar a rede que suporta o sistema físico apenas quando  $\Phi_f = 0$ , ainda existe uma coisa que merece a nossa atenção. Afinal, apesar dos vínculos discretos (2.20) serem tão identicamente nulos quanto o  $P = 0$  que aparece em (2.6), neste ponto o leitor mais atento pode estar se perguntando sobre os multiplicadores de Lagrange não unívocos que aparecem em (2.5) e que, por analogia, deveriam estar implementando, ao menos, uma parte dos vínculos em (2.18). E a melhor resposta que podemos dar ao leitor que se faz essa pergunta é baseada na propriedade logarítmica

$$\begin{aligned} \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda_f \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) &= \ln \left[ \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f)^{\lambda_f} \right] = 0 \quad , \end{aligned}$$

onde  $\lambda_f \neq 0$ . Ou seja, como essa propriedade nos diz que não importa se, ao invés de (2.15), usarmos

$$\sigma_f^{\mathcal{L}}(\phi_1, \dots, \phi_k) = \sigma(\phi_1, \dots, \phi_k) \cdot \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f)^{\lambda_f}$$

na função de partição (2.10), pois isso nos leva a uma nova

$$H'' = \ln Z + \sum_f \lambda_f \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) \quad (2.21)$$

que contém exatamente os mesmos vínculos que (2.18), é justamente essa propriedade que nos diz que ambas as funções Hamiltonianas  $H'$  e  $H''$  descrevem a mesma física. Por se dizer, como esse multiplicador não unívoco  $\lambda_f$  nos permite reconhecer

$$\Phi_f = \ln \delta(U_f(\phi_1, \dots, \phi_k), \phi_f) \quad (2.22)$$

como uma espécie de função de “primeira classe”, é exatamente isso que nos permite completar o reconhecimento das teorias de calibre puras sobre uma rede nos mesmos moldes relacionados às teorias clássicas de sistemas com vínculos: afinal de contas, desde que as expressões (2.18) e (2.21) nos dizem que

$$H' = H'' |_{\lambda_f=1} \quad ,$$

fica mui claro que  $H'$  pode ser interpretada como a função Hamiltoniana que é obtida após a fixação  $\lambda_f = 1$  desses parâmetros não físicos numa teoria mais geral que é descrita por  $H''$ .

Em todo caso, é muito importante que o leitor esteja ciente de uma coisa: todo esse reconheci-

mento de (2.22) como uma função de “primeira classe” é apenas uma analogia em relação a tudo o que foi dito na primeira Seção (aliás, é exatamente por isso que estamos usando aspas aqui). Além disso, também vale lembrar que esse multiplicador  $\lambda_f$  não corresponde a qualquer campo de calibre: apesar da sua não univocidade, ele serve apenas para implementar o vínculo

$$\Phi_f = \ln \delta( U_f( \phi_1, \dots, \phi_k ), \phi_f ) = 0$$

à função Hamiltoniana (2.21). Embora seja perfeitamente possível realizar transformações independentes sobre  $\lambda_f$  e  $\phi_j$  (analogamente ao que acontece com os parâmetros  $\omega$  e  $\Omega$  na teoria clássica), os verdadeiros campos de calibre da nossa teoria discreta são os elementos  $\phi_j$ , que estão associados às arestas de  $\mathcal{L}_n$  e que podem ser transformados pela ação (de uma combinação) de funções  $\mathcal{T}_v^{(g)} : G^{ne} \rightarrow G^{ne}$  que foram definidas na página 23.



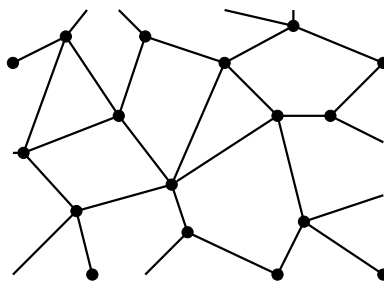
## Capítulo 3

# Discretização de variedades

### 3.1 Comentários iniciais

Antes de colocarmos um “ponto final” nesta nossa apresentação sobre as teorias de calibre, especialmente sobre aquelas que são consideradas discretas e que são tão importantes ao contexto destas notas, é fundamental esclarecermos algo que deixamos passar “batido”, tão somente, para não “atropelar” as ideias que queríamos expor: como se dá o processo de discretização de uma variedade.

Tudo bem que, na apresentação local que fizemos sobre as teorias de calibre discretas no capítulo anterior, até conseguimos mostrar como essas teorias podem ser vistas como sistemas físicos que estão vinculados a uma rede, sem precisar falar que essa rede poderia discretizar uma variedade “como um todo”. Entretanto, como todos os modelos que apresentaremos a partir dos próximos capítulos se valem justamente de redes que fazem isso, passa a ser mais do que conveniente fazer uma apresentação um pouco mais robusta sobre como o processo de discretização de uma variedade pode ser feito.



**Figura 3.1:** Exemplo de uma rede associada a uma variedade topológica bidimensional e localmente Euclidiana: neste caso, a discretização da variedade pode ser interpretada através da *colagem* de polígonos não necessariamente regulares, por meio das arestas que eles compartilham uns com os outros.

### 3.2 O processo de discretização

Porém, antes de tecermos qualquer tipo de comentário mais envolto para com essa causa das discretizações, precisamos dizer uma coisa muito importante: precisamos dizer que, quando nos valemos apenas de uma perspectiva topológica que independe de quaisquer questões de diferenciabilidade, uma variedade  $\mathcal{M}$ , que possui  $n$  dimensões, pode ser perfeitamente interpretada como um *espaço topológico* de Hausdorff<sup>1</sup> que é munido de uma base enumerável, onde cada um dos seus pontos  $q$  sempre pertence a uma vizinhança que é homeomórfica

- a uma *semi-bola*, que tem  $n-1$  dimensões e que está contida no  $\mathbb{R}_+^n$ , caso  $q$  faça parte da fronteira  $\partial\mathcal{M}$  desta variedade, ou
- a uma *bola*, que possui necessariamente  $n$  dimensões e que está contida no  $\mathbb{R}^n$ , caso contrário [27].

Em verdade, devemos salientar que toda essa definição de variedade não deixa de ser compatível com a que faríamos para uma que é pensada em termos diferenciáveis. Afinal, a família de biunívocas  $\phi_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{M}$ , que forneceria uma estrutura a variedade, faria com que uma topologia fosse naturalmente induzida sobre  $\mathcal{M}$ , sob a consideração de que  $\phi_\alpha(U_\alpha)$  são os seus abertos [2].

Embora a noção de pontos que pertencem à fronteira tenha sido mencionada na definição que acabamos de dar para uma variedade, precisamos notar que variedades não necessariamente possuem pontos em suas fronteiras: e, quando este é o caso, dizemos apenas que a variedade em questão é *fechada*. Entretanto, conforme já fora bem observado em [27], são justamente as variedades que possuem fronteiras não nulas que são extremamente valiosas junto à causa das discretizações que iremos apresentar.

#### 3.2.1 Sobre a colagem de variedades

E para entendermos o porquê de tanto valiosismo, precisamos notar que, de um modo geral, a discretização de uma variedade pode ser pensada literalmente como uma *colagem* que envolve, pelo menos, duas variedades *abertas* (ou seja, duas variedades que não podem ser consideradas fechadas, uma vez que as suas fronteiras não se identificam como conjuntos vazios). No caso,

<sup>1</sup>Ou seja, para dois pontos quaisquer  $q$  e  $q'$  de  $\mathcal{M}$ , existem as respectivas vizinhanças  $V_q$  e  $V_{q'}$  tais que  $V_q \cap V_{q'} = \emptyset$ .



tomando  $M$  e  $N$  como essas duas variedades abertas, nas quais existem as respectivas regiões homeomórficas  $A$  e  $B$  nas suas fronteiras, essa colagem é feita através de uma aplicação  $h : A \subseteq \partial M \rightarrow B \subseteq \partial N$  que é vista naturalmente como um homeomorfismo.

Na prática, todo este processo de colagem funciona como um verdadeiro “encaixe” dessas duas variedades  $M$  e  $N$ , já que é por meio dessa identificação “um-pra-um” que  $h$  faz que um novo espaço topológico  $M \cup_h N$  acabe sendo estruturado, o qual está naturalmente condicionado às mesmas condições que foram listadas no início desta Seção<sup>2</sup>. Nestes termos, é quando voltamos as nossas atenções para uma variedade que já se identifica com alguma  $M \cup_h N$ , e analisamos a situação por uma perspectiva “reversa”, que acaba ficando bem clara toda a similaridade desta colagem  $h$  com a discretização que foi idealizada no Capítulo 2, onde vislumbramos o mesmo processo por meio de uma colagem de poliedros. E, diga-se de passagem, é exatamente neste ponto que vale a pena destacar que, de fato, existe uma estrutura topológica que não apenas permite discretizar algumas variedades, mas que pode ser literalmente entendida nos moldes tradicionais de um poliedro: essa estrutura é o *simplexo*.

### Complexos topológicos

Em linhas gerais, um simplexo pode ser interpretado como a mais “simples” das estruturas topológicas que podem ser encerradas por meio de um conjunto de pontos  $\{q_0, \dots, q_k\}$ . Afinal, de acordo com a visão “linear” que é oferecida pelo  $\mathbb{R}^n$ , ao considerarmos tais pontos como os vértices de um poliedro convexo que satisfaz a

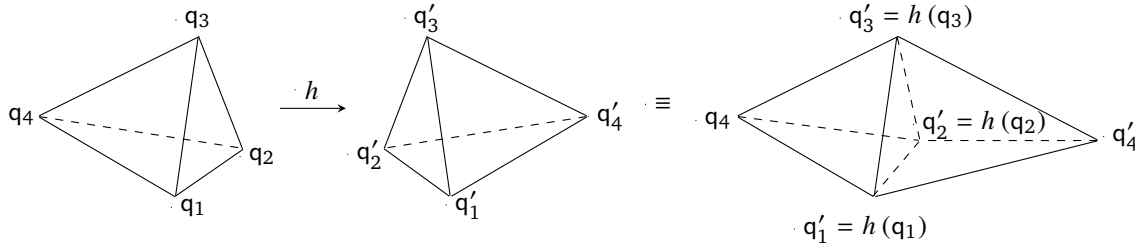
$$0 \leq a_0 q_0 + \dots + a_k q_k \leq 1 \quad ,$$

onde  $a_j$  são constantes reais, um simplexo  $[q_0, \dots, q_k]$  de *ordem*  $k$  fica bem definido como o menor subespaço convexo com  $k$  dimensões que está contido neste espaço Euclidiano [42]. Aliás, por uma simples consequência disso tudo, se torna muito claro que a maior ordem que pode se relacionar a um simplexo sempre se identifica com a dimensão do espaço Euclidiano que o contém.

É claro que estamos falando de uma maneira extremamente simplificada sobre o conceito de um simplexo. Mas é com base nesta nossa definição “extremamente simplificada” que, ao tentarmos entender a figura de um simplexo de ordem  $k$  pela mesma perspectiva de uma variedade, já se torna

---

<sup>2</sup>Aliás, caso  $A$  e  $B$  se identifiquem com as próprias  $\partial M$  e  $\partial N$  respectivamente, a fronteira de  $M \cup_h N$  será necessariamente vazia.



**Figura 3.2:** Exemplo de uma colagem entre dois simplexos de ordem 3 através de uma única face. Neste caso, como todas as faces não foram coladas umas às outras, complexo assim formado terá uma fronteira não vazia.

completamente plausível pensar no conjunto dos simplexos de ordem  $k-1$  que estão contidos no primeiro simplexo como a sua fronteira. Desta maneira, ao tomarmos, por exemplo, dois simplexos que têm a mesma ordem, e pensarmos no mesmo esquema de colagem que mencionamos acima, se torna perfeitamente possível construir uma estrutura discretizada através da colagem de, ao menos, uma das fronteiras destes dois simplexos, já que eles são homeomórficos. Essa estrutura, que obtemos por meio desta colagem de simplexos, é o que chamamos de *complexo topológico*; e, por um simples efeito dos simplexos que definem a sua fronteira serem identificáveis como triângulos  $(k-1)$ -dimensionais, a discretização que segue como resultado desse processo recebe o nome de *triangularização*.

### O caso tridimensional

Aliás, o fato dessa última colagem seguir propositalmente o mesmo padrão de colagem entre variedades, nada mais é do que um simples reflexo de que toda variedade pode realmente ser vista como um desses complexos, apesar da recíproca não ser verdadeira. Ou seja, um complexo topológico *não necessariamente* se identifica como uma variedade: isso só ocorre em situações muito particulares, entre as quais podemos listar as tridimensionais.

No entanto, conforme consta em [43], existem dois resultados de grande valia dentro do contexto das discretizações, sendo, o primeiro deles, resumível pelo seguinte enunciado [44]:

**Teorema 1** *Seja um complexo topológico  $\mathcal{M}$  tridimensional que é formado pela colagem de  $n_S$  simplexos que totaliza  $n_V$  vértices,  $n_F$  faces e  $n_A$  arestas. Então  $\mathcal{M}$  será uma variedade fechada se, e somente se,*

- (a) *todas as suas faces estiverem coladas com alguma outra, e*

(b) o seu número de Euler, que é dado por

$$e = \Omega_V + \Omega_F - (\Omega_A + \Omega_S) \quad ,$$

for igual a zero.

Já o segundo resultado é uma simples consequência de um teorema, demonstrado por E. E. Moise [45], que garante que todas as variedades tridimensionais podem ser construídas a partir de uma colagem que se vale de um número finito de tetraedros. E, em termos do processo de triangulação que acabamos de explicar, este resultado pode ser traduzido como [46]:

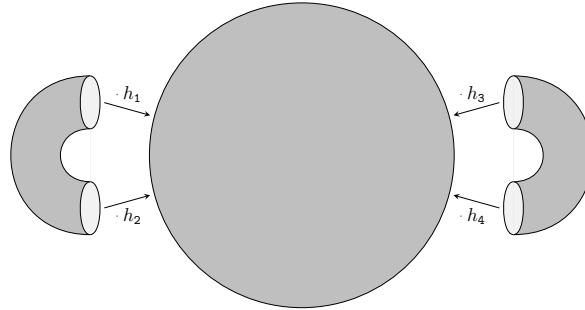
**Teorema 2** *Toda variedade topológica tridimensional é triangularizável.*

### 3.2.2 O método de Heegaard

Apesar de tudo o que dissemos até agora ser realmente relevante à construção de qualquer modelo que se valha de variedades tridimensionais, cabe destacar que existe um outro processo de discretização que é um pouco mais geral do que essas triangularizações: trata-se daquele que se apoia sobre as chamadas *partições de Heegaard*. E a característica mais marcante que está associada a este novo método de discretização que explicaremos a partir de agora é que, ao contrário das triangularizações, ele se vale de um tipo de estrutura que parece ser bem mais “maleável” para particionar uma variedade: essa estrutura é o “*handlebody*”, cuja tradução ao “pé da letra” (do inglês para o português) é “corpo com alças”.

#### Algumas definições

De um modo bem básico, e nos restringindo apenas ao caso tridimensional, é possível afirmar que um “*handlebody*” nada mais é do que um espaço topológico que é composto pela colagem de cilindros sólidos sobre bolas tridimensionais que também são sólidas [47], tal como consta na Figura 3.3. Aliás, embora a ilustração que é feita nesta figura se refira, tão somente, a uma situação que se envolve para com a formação de um “*handlebody*” de gênero 2 (ou seja, um “*handlebody*” que possui dois “furos”), todo esse esquema de colagem entre cilindros e bolas não possui qualquer tipo de restrição quantitativa: a única imposição natural que deve ser feita é que a estrutura assim obtida seja orientável, uma vez que a variedade que intentamos discretizar

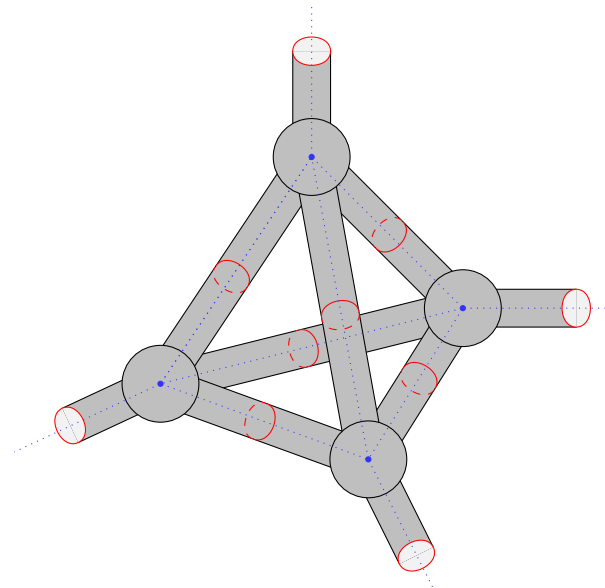


**Figura 3.3:** Exemplo de formação de um “handlebody” de gênero 2, através da colagem de dois cilindros sólidos a uma bola tridimensional. É possível demonstrar que esta estrutura é homeomórfica a qualquer variedade de mesmo gênero.

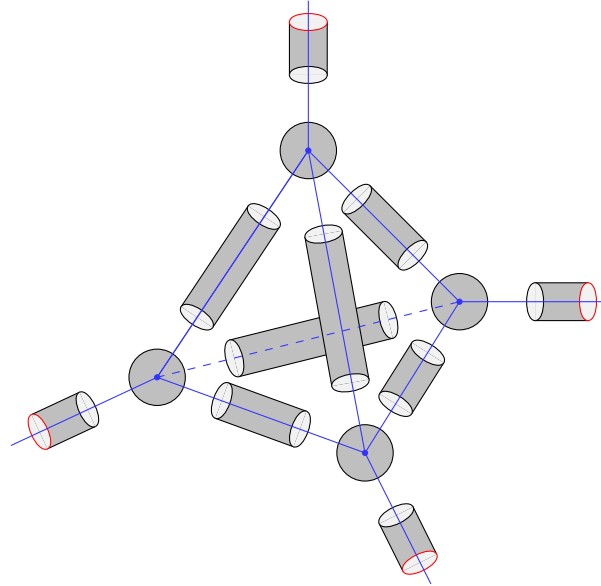
com esses “handlebodies” também deve ser. Nestes termos, diante de uma colagem de  $n$  cilindros sólidos a uma bola tridimensional, por exemplo, um “handlebody” de gênero  $n$  será formado [48], o qual será naturalmente homeomórfico a qualquer variedade que possua o mesmo gênero [47].

Aliás, uma das boas estratégias que existe para visualizar como esse processo de discretização de uma variedade orientável  $\mathcal{M}$  acontece em termos dos “handlebodies”, é tomando a sua triangularização como apoio. E, para isso, basta considerar

- cada aresta dessa triangularização como o eixo de simetria de um cilindro sólido de raio  $\varepsilon > 0$ , e



**Figura 3.4:** Estrutura formada pela colagem das diversas  $\mathcal{E}_q$  associadas aos vértices  $q$  que figuram no complexo topológico tomado como apoio.



**Figura 3.5:** Esquema de formação de uma estrutura topológica, composta pela colagem de cilindros sólidos às bolas tridimensionais através das suas bases de bordos negros, tomando suas simetrias sobre os pontos e as arestas de um complexo topológico que discretiza a variedade tridimensional.

- cada um dos vértices que liga as arestas dessa mesma triangulação como o centro de uma bola tridimensional de raio  $\varepsilon' \geq \varepsilon > 0$ .

Desta maneira, uma variedade que é inicialmente discretizada por meio de colagens entre tetraedros<sup>3</sup>, pode ser realizada pela colagem de duas novas estruturas topológicas, onde a formação de uma delas está bem exemplificada na Figura 3.5. Com isso, devido à definição que acabamos de apresentar para um “handlebody”, fica bem claro que não apenas a estrutura “mais básica” que está presente nesta figura, mas todas as suas generalizações (que são formadas pela colagem de várias destas estruturas “mais básicas” através dos seus cilindros com bordos livres), são identificadas como “handlebodies”<sup>4</sup>.

Aliás, uma maneira alternativa de entendermos essas estruturas, surge quando levamos em conta que, em todas as possíveis triangularizações relacionadas a  $\mathcal{M}$ , cada um dos vértices do seu complexo sempre pode ser encarado como uma junção de quatro arestas. E a principal consequência disso é que, qualquer uma dessas estruturas (seja ela “generalizada” ou não) sempre pode ser comodamente repensada como a colagem de um outro tipo de estrutura topológica  $\mathcal{E}_q$ ,

<sup>3</sup>Ou seja, através de colagens de simplexos de ordem 4.

<sup>4</sup>É justamente neste ponto que convém mencionar o verdadeiro motivo de termos destacado, em vermelho, os bordos livres da estrutura que consta na Figura 3.5: isso foi feito, tão somente, para deixar explícito quais são as regiões onde as colagens, entre todas as estruturas do mesmo tipo, precisam ser feitas para que uma estrutura topológica maior, associada a essa rede triangularizada “como um todo”, possa ser concebida.

que é composta por quatro cilindros e uma bola tridimensional (todos sólidos) e que adota um ponto  $q$  do complexo como seu centro, conforme ilustra a Figura 3.4. Já a principal vantagem que segue dessa “nova” concepção é que é através dela que fica mais fácil perceber toda a construtibilidade de um homeomorfismo entre duas destas estruturas “generalizadas”, uma vez que são elas que se tornam as responsáveis diretas pelo particionamento de  $\mathcal{M}$  em termos dos “handlebodies”.

### Partição de Heegaard

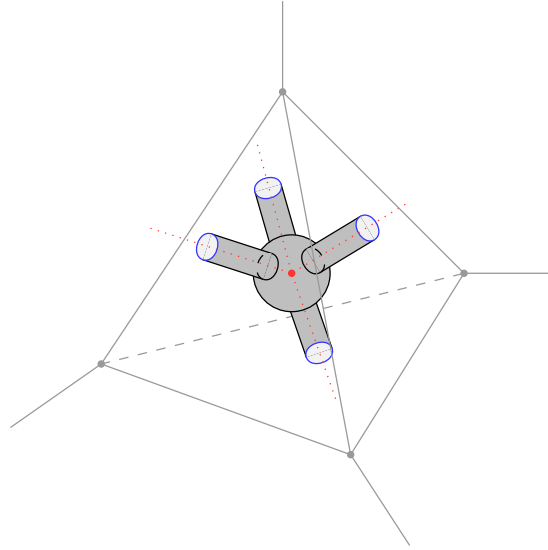
E, para entendermos como tudo isso funciona, precisamos continuar considerando a triangulação de uma variedade tridimensional  $\mathcal{M}$  sobre a qual podemos erguer uma estrutura  $\mathcal{E}$ , que é composta pela colagem das quatro estruturas “elementares”  $\mathcal{E}_{q_j}$  que se relacionam com um dos seus tetraedros, tal como a que já consta na Figura 3.4. Afinal de contas, se, analogamente ao que fizemos no procedimento anterior, tomarmos o *centróide*  $q'$  de um dos tetraedros dessa triangulação e o envolvermos numa estrutura  $\mathcal{E}_{q'}$  que é similar a essas “elementares”, fica bem claro que essa nova estrutura  $\mathcal{E}_{q'}$ , que está bem exemplificada pela Figura 3.6, é perfeitamente alocável no interior de  $\mathcal{E}$ , uma vez que  $q'$  pode ser visto como o juntor de quatro arestas que pertencem a rede *dual*<sup>5</sup>. Logo, por efeito da mesma estratégia que já nos levou a  $\mathcal{E}$ , passa a ser perfeitamente possível construir um outro espaço topológico  $\mathcal{E}'$ , desde que tomemos como os novos “trilhos” o conjunto de todos os centróides  $\{q'_1, \dots, q'_n\}$  e o conjunto que é composto por todas as arestas que os ligam: ou seja,  $\mathcal{E}'$  nada mais é do que o simples fruto das colagens das diversas estruturas  $\mathcal{E}_{q'_k}$  através dos seus bordos livres.

E a grande vantagem de concebermos essas duas novas estruturas  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  por meio de todos esses “encaixes” é que, com eles, se torna muito natural entender como é que funciona todo esse processo de discretização de variedades em termos dos “handlebodies”. Afinal de contas, como isso pode ser feito através de uma colagem (ou seja, de um homeomorfismo  $h : \partial\mathcal{E}' \rightarrow \partial\mathcal{E}$  entre as fronteiras bidimensionais  $\partial\mathcal{E}'$  e  $\partial\mathcal{E}$ ), uma, e *apenas uma*, das maneiras que temos para definir essa discretização é tomando, por exemplo,

- uma “célula estrutural” com as partes de  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  que estão associadas a um único tetraedro, e

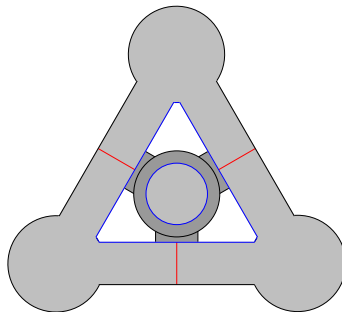
<sup>5</sup>Aqui, a rede *dual* é aquela que se apoia sobre o conjunto dos centróides  $\{q'_1, \dots, q'_n\}$  de modo que

- cada  $q'_j$  pode ser interpretado como a junção de quatro arestas duais que interceptam individualmente uma, e apenas uma, das faces do tetraedro que contém  $q'_j$ , e
- se  $q'_j$  e  $q'_k$  são os centróides de dois tetraedros que possuem uma face em comum, esses pontos devem ser vistos como os vértices de uma única aresta dual.



**Figura 3.6:** Alocação da estrutura elementar  $\mathcal{E}_q$  dentro do tetraedro que dá suporte à estrutura exposta na Figura 3.4. Aqui, o centróide do tetraedro está destacado em vermelho, cujas linhas tracejadas que dele partem se referem às arestas da rede dual.

- a projeção de todos os bordos azuis que constam na estrutura dual  $\mathcal{E}'$  sobre a superfície  $\partial\mathcal{E}$ , em conformidade ao que bem ilustra a Figura 3.7. Nestes moldes, como tal colagem pode ser realizada, em cada uma dessas “células estruturais”, como a dilatação de  $\mathcal{E}'$  sobre a parte da superfície encerrada pelos bordos azuis que estão projetados sobre  $\partial\mathcal{E}'$  [49], acaba ficando bem clara a concepção de uma variedade discretizada quando olhamos para o resultado final de tudo isso. E é exatamente o trio  $\mathcal{P} = (\mathcal{E}, \mathcal{E}'; h)$  que é assim formado que bem define o que chamamos de *partição de Heegaard*. Ou seja, uma partição de Heegaard nada mais é do que a maneira de realizarmos um espaço topológico orientável  $\mathcal{M}$  como a união disjunta de dois espaços topológicos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$



**Figura 3.7:** Visão lateral do processo de inserção das partes dos  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  envolvidas com um único tetraedro, com a projeção dos bordos azuis de  $\partial\mathcal{E}'$  sobre  $\partial\mathcal{E}$ . No caso, a colagem dos “handlebodies”  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$  segue por meio de um homeomorfismo  $h : \partial\mathcal{E}' \rightarrow \partial\mathcal{E}$ , que constrói uma relação “um-pra-um” entre os pontos dos bordos azuis de  $\partial\mathcal{E}'$  e suas projeções sobre  $\partial\mathcal{E}$ .

independentes, os quais são orientáveis e *geralmente* identificados como dois “handlebodies” que possuem o mesmo gênero. No entanto, vale reforçar uma coisa: apesar da aparente univocidade dessa colagem que acabamos de apresentar, todo esse particionamento em termos desses dois “handlebodies” pode ser feito de diversas maneiras; em outras palavras, nada impede que outros pares  $\mathcal{E}_A$  e  $\mathcal{E}'_A$ , que também são coláveis por outros homeomorfismos  $h_A : \partial\mathcal{E}'_A \rightarrow \partial\mathcal{E}_A$ , possam estruturar a mesma variedade  $\mathcal{M}$  [27].

### Algumas observações

Independente de quaisquer comentários adicionais que podemos fazer sobre todos esses homeomorfismos, e de quaisquer particionamentos que sejam tomados para  $\mathcal{M}$ , é mais do que conveniente fazer uma pequena observação sobre toda essa obtenção de  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{E}'$ . Afinal de contas, além de toda a comodidade em ver essas estruturas como frutos de colagens que se valem de outras mais elementares, também existe um outro aspecto que merece ser explorado dentro deste mesmo procedimento. E ele está diretamente relacionado ao simples fato de que podemos identificar cada uma das regiões envoltas para com essas colagens como os discos  $d_s$  que cortam os cilindros que definem esses mesmos “handlebodies”. Ou seja, assumindo que as junções de bordos que possuem uma mesma coloração pode ser identificada como uma curva fechada  $c_s$ , passa a ser possível interpretar essa curva como a fronteira de um destes discos  $d_s$ .

E uma das grandes vantagens de toda essa realização de curvas e discos num “handlebody” é que, a partir dela, podemos descrever esta mesma estrutura topológica através de um *diagrama de Heegaard* bastante simples. Aliás, um resultado bem interessante dentro dessa nova proposta de descrição se resume pelo seguinte enunciado [27]:

**Teorema 3** *Consideremos que  $D = \{c_j \in \partial\mathcal{E}\}$  é um conjunto cujos elementos se identificam com as curvas fechadas que figuram na superfície do “handlebody”  $\mathcal{E}$ . Então, o diagrama que é estruturado por  $D$  será uma decomposição sólida de  $\mathcal{E}$  se:*

- (i) *cada uma das curvas forem, “duas a duas”, disjuntas;*
- (ii) *existirem discos  $d_j \subset \mathcal{E}$  para os quais vale  $c_j = \partial d_j$ ; e*
- (iii) *o complemento das curvas em  $\partial\mathcal{E}$  for uma coleção de regiões esféricas.*

Diga-se de passagem, é justamente pela atribuição dos dois conjuntos  $D = \{c_j \in \partial\mathcal{E}\}$  e  $D' =$



$\{c'_j \in \partial\mathcal{E}'\}$  que podemos definir, por exemplo, o que chamamos de *bipartição*  $\mathcal{B} = (\mathcal{E}, \mathcal{E}'; D, D'; h)$ . Logo, é pelo uso do homeomorfismo  $h : \partial\mathcal{E}' \rightarrow \partial\mathcal{E}$  que o diagrama de Heegaard, que consegue descrever toda esta colagem de “handlebodies”, fica naturalmente definido pelos conjuntos  $D$  e  $\{h(c'_j)\}$  que se postam sobre a superfície  $\partial\mathcal{E}$  [37].

Aliás, se analisarmos bem o que já foi exposto anteriormente, também acaba ficando bem claro que um bom exemplo destes diagramas de Heegaard já foi dado na Figura 3.7, através do casamento entre curvas vermelhas e projeções dos bordos azuis sobre uma mesma  $\partial\mathcal{E}$ . E é diante deste reconhecimento que fica claro o grande motivo de termos dado colorações distintas para todos os bordos de  $\mathcal{E}_{q_j}$  e  $\mathcal{E}_{q'_k}$  : afinal, distinguir esses bordos por cor nos permite bem entender como todo esse particionamento de  $\mathcal{M}$  funciona, além de trazer uma feliz contribuição às formulações que podem ser feitas para as diversas teorias que descrevem sistemas discretos, sejam eles físicos ou não.

### 3.3 Sobre a estruturação das teorias discretas

E é diante de toda essa descritibilidade de  $\mathcal{M}$  que é feita “via Heegaard”, que precisamos nos atentar a tudo aquilo que já está bem posto na literatura sobre as triangulações de variedades. Afinal de contas, se realmente quisermos modelar algum sistema físico discreto nestes novos termos, é imprescindível avaliar como isso pode ser feito consistentemente, tendo sempre em mente o mesmo princípio da correspondência que já mencionamos no início destas notas<sup>6</sup>.

#### 3.3.1 A perspectiva de Heegaard

Por se dizer, se compararmos brevemente os dois métodos de discretização que foram aqui apresentados, tendo em mente justamente a criação de uma teoria para um sistema físico em termos discretos, é imediato perceber que, por exemplo, deve existir alguma diferença envolta para com os pesos que compõem as funções de partição nestes dois casos. E a razão de dizermos isso é que, enquanto a discretização de uma  $\mathcal{M}$ , que é feita em termos dos complexos topológicos, se vale de uma única rede, aquela que é feita em termos da colagem de dois “handlebodies” se vale de duas redes: uma que é a tradicional, e outra que é a dual. Assim, como a coexistência dessas

---

<sup>6</sup>Embora o *princípio da correspondência* seja conhecido, pelo público geral, apenas por todo o seu envolvimento nas fundamentações das teorias quânticas e relativísticas, por exemplo, ele é um pouco mais forte do que isso: basta ver a sua definição dada na página 2.



**Figura 3.8:** À esquerda, temos uma representação ingênua “via Heegaard” associada a descrição de uma das faces da rede acima concebida, para a estruturação do “handlebody”  $\mathcal{E}$ . Já à direita, segue o esquema da descrição de uma face dual nos mesmos moldes.

duas redes nos diz que é perfeitamente plausível admitir que outros campos *duais*<sup>7</sup>  $\phi_j^*$  também podem ser atribuídos às arestas da rede dual, fica bem claro que, quando estamos diante de um particionamento de  $\mathcal{M}$  “via Heegaard”, devemos atribuir pesos às faces que compõem nas duas redes: e, no caso, como a diagramatização de Heegaard acaba suprimindo todas as necessidades de uma descrição da variedade  $\mathcal{M} = \mathcal{E} \cup_h \mathcal{E}'$  através dos conjuntos

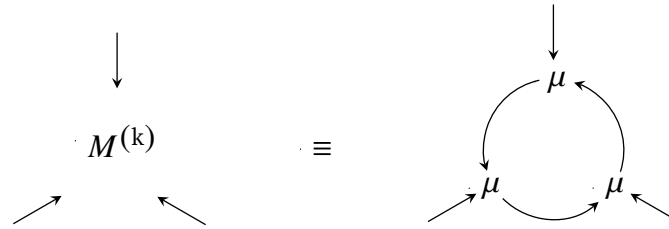
$$D = \{ c_j \in \partial \mathcal{E} \} \quad \text{e} \quad \bar{D} = \{ \bar{c}_k = h(c'_k) \in \partial \mathcal{E} : c'_k \in \partial \mathcal{E}' \}$$

de curvas, é imediato concluir que esses campos duais precisam ser associados a cada uma das curvas que estão presentes em  $\bar{D}$ .

Aliás, quando analisamos esta situação através da perspectiva que é oferecida pela diagramatização de Heegaard, como cada uma das curvas  $c'_k$  fica associada à  $k$ -ésima aresta da rede dual (que, por construção, intercepta apenas uma única face da rede “principal”), também é imediato concluir que cada uma das curvas  $\bar{c}_k = h(c'_k)$  irão interceptar todas as  $n$  curvas  $c_j$ . Assim, notando que essas  $n$  curvas estão associadas às  $n$  arestas que encerram a face que é interceptada pela  $k$ -ésima aresta dual, se torna bem claro toda a viabilidade de interpretar todo esse esquema de intersecção das curvas de um diagrama de Heegaard como uma espécie de “amarração” que permite recuperar essa  $\mathcal{M}$  “como um todo”.

Uma das boas consequências que segue de toda essa “amarração” é que, conforme mostra a Figura 3.8, cada uma das faces da rede “principal” passa a ser representada pela intersecção de uma única curva  $\bar{c}_k \in \bar{D}$  com as outras  $n$  curvas que pertencem a  $D$  e vice-versa. Logo, por efeito

<sup>7</sup>Ou seja, campos  $\phi_k^*$  que, por serem responsáveis por estruturar um conjunto linearmente independente, também são vistos como os elementos de um espaço vetorial em acordo com o que está exposto no Apêndice B, mais especificamente na página 235.



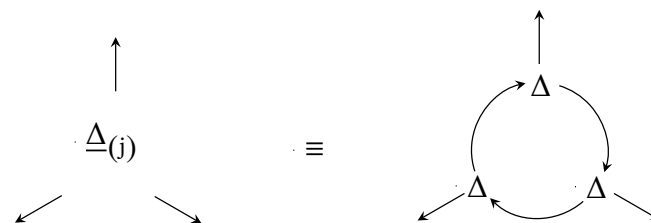
**Figura 3.9:** Peso  $M^{(k)}$  atribuído a  $k$ -ésima face presente no complexo topológico original, que é utilizado para a estruturação do “handlebody”  $\mathcal{E}$ . Note que ele deve ser encarado, em verdade, como a aplicação associada ao diagrama exposto à esquerda na Figura 3.8.

desta estratégia, como a cada uma dessas curvas estará associado um único campo de calibre, é imediato concluir que esta mesma intersecção de curvas também deve ser traduzida em termos desses campos. E, no caso, a escolha tomada para isso se assenta na simples suposição de que todos esses campos, em verdade, compõem uma *biálgebra*, que é munida

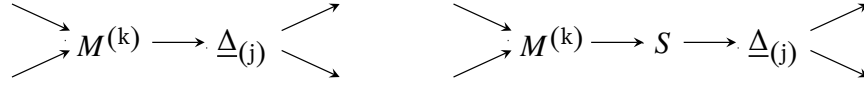
- não apenas das aplicações  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  e  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow V$  que definem respectivamente uma multiplicação e a uma operação unital, mas
- das aplicações  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  e  $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{K}$  que definem, também respectivamente, uma comultiplicação e uma operação counital.

Desta forma, passa a ser perfeitamente possível expressar o peso  $M^{(k)}$ , que está associado a cada uma das curvas  $\bar{c}_k$ , em termos dos diagramas de Kuperberg que consta na Figura 3.9, enquanto a cada uma das curvas  $c_j$  é atribuído o peso  $\underline{\Delta}_{(j)}$  dado pela Figura 3.10.

Aliás, conforme talvez já tenha ficado bem claro da própria Figura 3.8, quando nos valemos de todas as considerações que se relacionam para com a diagramatização de Kuperberg que, por exemplo, consta no Apêndice A, para que toda essa “amarrção” possa ser traduzida em termos



**Figura 3.10:** Peso  $\underline{\Delta}_{(j)}$  atribuído a  $j$ -ésima face dual, que surge pela estruturação de uma rede dual a originalmente concebida para a estruturação do “handlebody”  $\mathcal{E}$ . Aqui também devemos enxergar  $\underline{\Delta}_{(j)}$  como a aplicação associada ao diagrama exposto à direita na Figura 3.8.



**Figura 3.11:** Esquema de contração envolto para com um par de curvas  $c$  e  $\bar{c}$  de um diagrama de Heegaard, que se interceptam num único ponto: à direita, temos uma representação feita “via Kuperberg” para uma interseção de curvas onde a base  $\mathcal{B}$  é destrógrica; à esquerda, temos a mesma situação, só que envolta para com uma  $\mathcal{B}$  levógrica.

destes pesos ainda devemos levar em conta algo muito importante: as curvas de um diagrama de Heegaard precisam ser *orientadas*. E a convenção que é adotada para fazer essa orientação consiste em assumir que esses campos não se restringem a uma simples *biálgebra*: para fazer essa orientação, assumimos que esses campos satisfazem uma *álgebra de Hopf involutória*, uma vez que isso faz com que a sua *antípoda*  $S : V \rightarrow V$  seja muito útil dentro de todo esse esquema de “amarração”<sup>8</sup>. Nestes termos, se considerarmos que os vetores  $\vec{v}_{\bar{c}}$  e  $\vec{v}_c$  denotam as orientações das respectivas curvas  $\bar{c}_k$  e  $c_j$ , e nos apoiarmos sobre a base  $\mathcal{B} = \{ \vec{v}_{\bar{c}}, \vec{v}_c, \vec{v}_{\bar{c}} \wedge \vec{v}_c \}$  que pode ser construída a partir deles, a intersecção destas duas curvas pode ser representada [37]

- pelo diagrama que consta à direita na Figura 3.11, caso a base  $\mathcal{B}$  seja *destrógrica*, ou
- pelo diagrama à esquerda da mesma figura, caso contrário.

### Sobre a função de partição

Apenas para terminar esse capítulo, vale notar que é por meio de toda esta perspectiva que, agora, se torna possível, por exemplo, construir uma nova função de partição para um modelo físico que é posto nestes termos, a qual será obrigatoriamente mais geral que a anterior (2.10). No caso desta função, ela é dada por

$$Z = \sum_{\{\phi_{j_n}\}} \prod_{j,c} \Delta_{(j)}(\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_k}) \cdot S_{c_b}^{j_a} \cdot M^{(c)}(\phi_{c_1}, \dots, \phi_{c_k}) \cdot \delta(\vec{v}_{j_a} \wedge \vec{v}_{c_b}, 1) \quad , \quad (3.1)$$

a qual se reduz àquela que se envolve para com as teorias de calibre quando [27, 37]

$$\Delta_{(j)}(\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_k}) = \delta(j_1, j_2) \cdot \dots \cdot \delta(j_1, j_k) \quad ,$$

<sup>8</sup>Vide o Apêndice B para a definição de todos estes conceitos, especialmente a Seção B.2.2.

$$S_{c_b}^{j_a} = \delta((j_a)^{-1}, c_b) \quad \text{e} \quad M^{(c)}(\phi_{c_1}, \dots, \phi_{c_k}) = \sigma(\phi_{j_1}, \dots, \phi_{j_k}) \quad ,$$

uma vez que tal escolha permite extinguir o produtório que está presente em (3.1).

E entre todas as coisas que podem ser ditas sobre uma função de partição expressa nestes novos moldes, independente dela se identificar com uma de calibre discreto ou não, talvez a mais importante seja a que está relacionada ao seguinte teorema [27, 50]:

**Teorema 4** *Consideremos uma variedade  $\mathcal{M}$  tridimensional para a qual existem os diagramas de Heegaard  $D$  e  $D'$ . Se os campos relacionados a um modelo discreto em  $\mathcal{M}$  compõem uma álgebra de Hopf involutória, as funções de partição  $Z_D$  e  $Z_{D'}$ , que são respectivamente construídas tomando  $D$  e  $D'$ , serão iguais.*

Os modelos discretos que atendem a este teorema são conhecidos como *topológicos*. E, apenas a título de curiosidade, se não for exigido dos campos discretos qualquer comportamento que permita identificá-los como os elementos de uma álgebra de Hopf, mas que permita identificá-los apenas como os elementos de uma biálgebra, é possível demonstrar que essas funções de partição  $Z_D$  e  $Z_{D'}$  serão tais que

$$\frac{1}{f_D(n_A, n_F, n_S)} Z_D = \frac{1}{f_{D'}(n_A, n_F, n_S)} Z_{D'} \quad ,$$

onde  $f_D$  e  $f_{D'}$  são duas funções modeladas em termos dos números de arestas, de faces e de simplexos que figuram nas discretizações respectivamente relacionadas a  $D$  e  $D'$ : e, quando este é o caso, dizemos apenas que tais modelos são *quasetopológicos* [51].



## Parte II

# “Toric code” e algumas generalizações





## Capítulo 4

# Um breve panorama do “toric code”

### 4.1 Algumas preliminares

Apesar de já termos feito alguns comentários bem vagos sobre o “toric code” (TC) no primeiro capítulo, mencionando algumas das propriedades que o tornam protagonista em algumas investigações, é agora que convém apresentá-lo de uma maneira um pouco mais formal, fazendo com que o leitor ganhe uma boa base para entender todos os desenvolvimentos que virão mais adiante. E, em linhas bem gerais, algo que já podemos afirmar sobre o TC é que ele se vale, pelo menos, de duas coisas: (i) de uma rede  $\mathcal{R}_2$  (usualmente quadrada) que é capaz de discretizar uma subvariedade  $\mathcal{T}_2$  que é isomórfica a um *toro bidimensional*; e (ii) dos vetores

$$|\varphi_j\rangle = a_0^{(\varphi)} |0\rangle + a_1^{(\varphi)} |1\rangle \quad (4.1)$$

de um espaço de Hilbert  $\mathfrak{H}_2$  que possui uma base indexada pelo grupo  $\mathbb{Z}_2$ , sendo  $j$  um número natural.

Embora o nosso trabalho não tenha qualquer compromisso computacional, se tentarmos olhar para essas duas coisas pelo ponto de vista de alguém que trabalha com computação, fica muito claro os motivos delas estarem presentes. Afinal, como a proposta do TC é a de funcionar como um protótipo para a codificação de informações quânticas, ao interpretarmos (4.1) como um *bit quântico*<sup>1</sup> (ou seja, como um *qubit*) a sua associação à cada aresta de  $\mathcal{R}_2$  permite construir uma espécie de “código toroidal”: e é exatamente isso que fundamenta o nome deste modelo como “toric code”.

---

<sup>1</sup>Apesar de ser perfeitamente possível expressar esse mesmo vetor (4.1) em termos de outra base, preferimos usar  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  apenas para reforçar a associação de  $|\varphi_j\rangle$  como a generalização quântica dos bits clássicos “0” e “1”.

## 4.2 Propriedades gerais

Aliás, uma das consequências imediatas que surgem justamente do fato de (4.1) ser um elemento de  $\mathfrak{H}_2$  é que, ao assumirmos que  $\mathcal{R}_2$  é uma rede formada por  $N_a$  arestas, todo este mesmo esquema de associação de qubits pode ser visto de uma maneira que é um pouco mais “global”, dado que

$$\mathfrak{H}_{\text{TC}} = \mathfrak{H}_2^{N_a} = \underbrace{\mathfrak{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_2}_{N_a \text{ vezes}} \quad (4.2)$$

será o espaço de Hilbert associado a essa rede “como um todo”, desde que cada aresta de  $\mathcal{R}_2$  realmente corresponda a um  $\mathfrak{H}_2$ <sup>2</sup>. E, diante disso, ao notarmos que a proposta computacional por trás do TC permite interpretá-lo como um modelo que tem pretensões de ser *físico*, uma das suas principais características se torna imediata: qualquer um dos seus operadores  $O : \mathfrak{H}_{\text{TC}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{TC}}$ , que se poste como capaz de medir alguma propriedade física do TC, precisa ser obrigatoriamente *Hermiteano* [52, 53].

Por se dizer, um dos principais operadores *físicos* que este modelo possui é o *Hamiltoniano* [4]

$$H_{\text{TC}} = - \sum_v A_v - \sum_p B_p \quad , \quad (4.3)$$

que é dado pela superposição linear de operadores

$$A_v = \prod_{j \in S_v} \sigma_j^x \quad \text{e} \quad B_p = \prod_{j \in S_p} \sigma_j^z \quad (4.4)$$

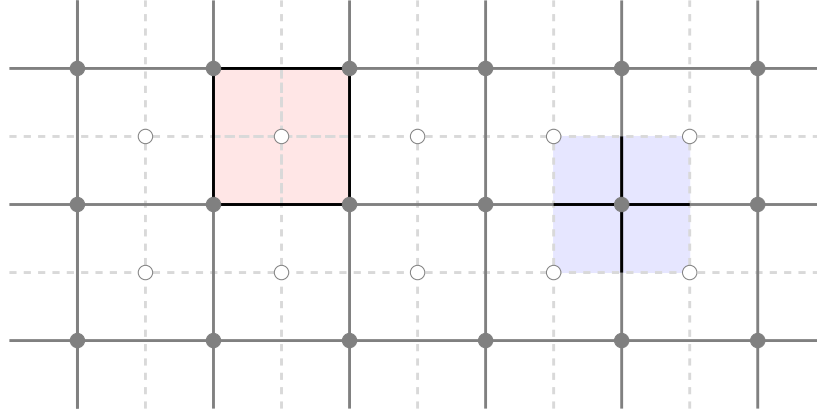
que se valem de:

- dois subconjuntos  $S_v$  e  $S_p$  de arestas, os quais são responsáveis por dar uma estrutura ao  $v$ -ésimo vértice e à  $p$ -ésima face de  $\mathcal{R}_2$  respectivamente, conforme bem ilustra a Figura 4.1; e
- um operador Hermiteano [54]

$$\sigma_j^{x,y,z} = \underbrace{I_2 \otimes \dots \otimes I_2}_{(j-1) \text{ vezes}} \otimes \sigma_j^{x,y,z} \otimes \underbrace{I_2 \otimes \dots \otimes I_2}_{(N_a-j) \text{ vezes}} \quad (4.5)$$

que age não identicamente *apenas* sobre o subespaço que está relacionado à  $j$ -ésima aresta,

<sup>2</sup>Apesar deste não ser o caso do TC, nada impede que parte das arestas não comportem qualquer bit quântico. Nestes casos, os espaços de Hilbert *totais* associados a estes novos modelos deverão ser interpretados como *subespaços* do  $\mathfrak{H}_{\text{TC}}$ .



**Figura 4.1:** Desenho esquemático com um trecho de  $\mathcal{R}_2$ , onde vemos (i) o setor azul está centrado pelo  $v$ -ésimo vértice da rede, enquanto (ii) o setor vermelho se refere à  $p$ -ésima face, cujo centróide pode ser interpretado como um dos vértices de uma rede *dual*  $\mathcal{R}_2^*$  (pontilhada). No caso das arestas que estão destacadas (em preto) em cada um destes setores, são elas quem definem os subconjuntos  $S_v$  e  $S_p$ .

dada toda a sua composição como um produto tensorial que envolve um *único* operador de Pauli  $\sigma^{x,y,z} : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2$  e outros  $N_a - 1$  operadores identidades  $I_2 : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}_2$ .

#### 4.2.1 Sobre os operadores físicos

Uma das primeiras “coisas físicas” que sempre vêm em nossas mentes quando realizamos um operador como um Hamiltoniano, é que ele deve ser capaz de medir a *energia* total do sistema que ele representa. E a melhor maneira de entendermos como isso ocorre no caso do operador (4.3) é analisando o comportamento dos operadores (4.4) que o definem, mais especificamente quando eles agem sobre um dos  $2^{N_a}$  elementos

$$|\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \quad (4.6)$$

de uma base do  $\mathfrak{H}_{TC}$ . Afinal de contas, como todo espaço de Hilbert é um exemplo de espaço vetorial, se bem entendermos esse comportamento, também estará muito bem entendido qual é o resultado que surge da ação de qualquer um desses operadores sobre um elemento arbitrário do  $\mathfrak{H}_{TC}$  [52].

Por se dizer, como o elemento (4.6) nada mais é do que um mero produto tensorial entre os elementos  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , os quais podem ser perfeitamente interpretados como os autovetores dos operadores de Pauli, uma observação bastante natural surge quando nos valem de uma

representação matricial [55]

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

que se apoia sobre uma base onde

$$|0\rangle = |\bar{1}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = |\bar{0}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Afinal de contas, como esta representação é capaz de nos mostrar que

$$\begin{aligned} \sigma_j^x |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{j-1}\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \otimes |\varphi_{j+1}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \\ = |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{j-1}\rangle \otimes |\bar{\varphi}_j\rangle \otimes |\varphi_{j+1}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \quad \text{e} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \sigma_j^z |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{j-1}\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \otimes |\varphi_{j+1}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \\ = (-1)^{\varphi_j} |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{j-1}\rangle \otimes |\varphi_j\rangle \otimes |\varphi_{j+1}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle, \end{aligned} \quad (4.9)$$

vemos que, numa situação onde

$$S_v \cap S_p = \{m, m+1\}, \quad S_v \setminus S_p = \{m+2, m+3\} \quad \text{e} \quad S_p \setminus S_v = \{m+4, m+5\},$$

os dois operadores definidos em (4.4) *comutam*, uma vez que<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} A_v \circ B_p |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \\ = \prod_{j \in S_v} \sigma_j^x \prod_{k \in S_p} \sigma_k^z |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_m\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{m+5}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \\ = (-1)^{\varphi_m + \varphi_{m+1} + \varphi_{m+4} + \varphi_{m+5}} \prod_{j \in S_v} \sigma_j^x |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_m\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{m+5}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \\ = (-1)^{\varphi_m + \varphi_{m+1} + \varphi_{m+4} + \varphi_{m+5}} |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{\varphi}_m\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{\varphi}_{m+3}\rangle \\ \otimes |\varphi_{m+4}\rangle \otimes |\varphi_{m+5}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \end{aligned}$$

<sup>3</sup>O caso onde  $S_v \cap S_p$  é vazio é imediato, pois  $A_v$  e  $B_p$  atuam necessariamente sobre setores disjuntos. Já a comutação destes operadores para com eles mesmos pode ser analisada segundo a relação

$$[\sigma^\alpha, \sigma^\beta] = 2i \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \sigma^\gamma, \quad (4.10)$$

onde  $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$  se refere ao *símbolo de Levi-Civita* [56], uma vez que elas remetem a  $A_v \circ A_v = \delta_{v,v'} I_{TC}$  e  $B_p \circ B_p = \delta_{p,p'} I_{TC}$ .

$$\begin{aligned}
&= \prod_{k \in \mathcal{S}_p} \sigma_k^z |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{\varphi}_m\rangle \otimes \dots \otimes |\bar{\varphi}_{m+3}\rangle \otimes |\varphi_{m+4}\rangle \otimes |\varphi_{m+5}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \\
&= \prod_{k \in \mathcal{S}_p} \sigma_k^z \prod_{j \in \mathcal{S}_v} \sigma_j^x |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_m\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{m+5}\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle \\
&= B_p \circ A_v |\varphi_1\rangle \otimes \dots \otimes |\varphi_{N_a}\rangle .
\end{aligned}$$

### A capacidade de contagem

Embora toda esta comutatividade ainda não revele muita coisa sobre o comportamento do operador (4.3) como um medidor de energia, uma coisa que ela já revela é que estamos diante de um modelo que é solúvel: ou seja, estamos diante de um modelo cuja dinâmica está muito bem estabelecida. No entanto, é quando tentamos entender (4.3) como um medidor de energia que todos os passos, que já nos levaram a essa comutação, são capazes de nos mostram uma coisa muito importante: pois como

$$(A_v)^2 = (B_p)^2 = \underbrace{I_2 \otimes \dots \otimes I_2}_{N_a \text{ vezes}} = \mathbb{1}_{v,p} ,$$

e isso nos diz que os autovalores de  $A_v$  e  $B_p$  são apenas iguais a 1 e  $-1$ , fica muito claro que, se (4.3) realmente é um medidor de energia, a menor energia associada a esse sistema é dada por

$$E_0 = - (N_v + N_p) , \quad (4.11)$$

haja vista que este resultado nada mais é do que o fruto da *contagem* dos  $N_v$  autovalores 1 do operador de vértice e dos  $N_p$  autovalores 1 do operador de face. Ou seja, essa é *autoenergia* que está relacionada a um *autoestado de vácuo* que satisfaz a

$$A_v |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad \text{e} \quad B_p |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad (4.12)$$

para *todos* os  $N_v$  vértices e  $N_a$  arestas que compõem  $\mathcal{R}_2$ . E o melhor exemplo de autoestado de vácuo que podemos tomar para ilustrar toda essa capacidade de contagem é dado pelo vetor [57]

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v (\mathbb{1}_v + A_v) \underbrace{|\mathbf{0}\rangle \otimes \dots \otimes |\mathbf{0}\rangle}_{N_a \text{ vezes}} ; \quad (4.13)$$

pois, além de toda a comutatividade que é decorrente da exposição acima já deixar muito claro que este é um dos autovetores de  $B_p$ , com autovalor igual a 1, esta mesma conclusão também se estende a  $A_v$ , uma vez que

$$\begin{aligned} A_{v'} \prod_v (\mathbb{1}_v + A_v) &= A_{v'} (\mathbb{1}_{v'} + A_{v'}) \prod_{v \neq v'} (\mathbb{1}_v + A_v) \\ &= (A_{v'} + \mathbb{1}_{v'}) \prod_{v \neq v'} (\mathbb{1}_v + A_v) = \prod_v (\mathbb{1}_v + A_v) \quad . \end{aligned}$$

#### 4.2.2 Estados de vácuo

É claro que, neste ponto, o leitor pode estar perfeitamente se perguntando sobre o porquê de termos tomado, como exemplo, um (4.13). E a melhor resposta que podemos dar ao leitor que se faz essa pergunta é justamente a segunda conclusão que surge de (4.11): como  $E_0$  é o *menor* autovalor associado ao operador  $H_{TC}$ , o autoestado  $|\xi_0^{(1)}\rangle$  é um dos *estados de vácuo* do TC. E, diante deste quadro, já que sabemos qual é o Hamiltoniano que descreve o TC e, agora, também sabemos qual é um dos seus autoestados de vácuo, fica bem claro que temos disponíveis todos os ingredientes não apenas para bem entender, mas principalmente bem definir, todo o espectro de energia deste modelo.

#### Primeiras excitações

Aliás, uma das primeiras coisas que podemos fazer para entender como é esse espectro de energia do TC, é considerarmos a situação onde um estado é inicialmente caracterizado por

$$|\xi'\rangle = \sigma_k^x |\xi_0^{(1)}\rangle \quad . \quad (4.14)$$

Afinal, quando levamos em conta que as relações de Pauli (4.10) nos remetem a

$$\sigma_j^\alpha \circ \sigma_k^\beta = \begin{cases} -\sigma_k^\beta \circ \sigma_j^\alpha & , \text{ se } j = k \quad , \quad e \\ \sigma_k^\beta \circ \sigma_j^\alpha & , \text{ caso contrário} \quad . \end{cases} \quad (4.15)$$

a junção de tudo isso à definição do operador de face (4.4) nos permite notar que

$$B_{p'} | \xi' \rangle = \left( \prod_{j \in S_{p'}} \sigma_j^z \right) \circ \sigma_k^x | \xi_0 \rangle = -\sigma_k^x \circ \left( \prod_{j \in S_{p'}} \sigma_j^z | \xi_0 \rangle \right) = -\sigma_k^x | \xi_0 \rangle = - | \xi' \rangle \quad . \quad (4.16)$$

Ou seja, se a  $k$ -ésima aresta de  $\mathcal{R}_2$  pertencer a  $S_{p'}$ , esse estado  $| \xi' \rangle$  irá ferir *pelo menos* uma das condições listadas em (4.12) e, portanto, ele não poderá ser considerado como um estado de vácuo do TC.

Por se dizer, e por efeito da caracterização de (4.14) como um estado de “não-vácuo”, é importante destacar que o fato de  $\mathcal{R}_2$  discretizar a superfície de um toro tem uma grande relevância dentro desse contexto energético. Pois, como todas as arestas dessa  $\mathcal{R}_2$  pertencem à intersecção de *duas* faces distintas, e isso naturalmente implica que (4.16) também vale para uma  $p''$ -ésima face que é tal que  $k = S_{p'} \cap S_{p''}$ , é imediato notar que a autoenergia que está relacionada ao “não-vácuo” (4.14) é dada por

$$E_1 = E_0 + 4 \geq E_0 \quad ,$$

haja vista que, para os  $N_v$  vértices e as demais  $N_p - 2$  faces que completam  $\mathcal{R}_2$ , ainda valerá que

$$A_v | \xi' \rangle = | \xi' \rangle \quad \text{e} \quad B_p | \xi' \rangle = | \xi' \rangle \quad .$$

Uma observação inteiramente análoga também segue para uma outra situação, onde temos o sistema em seu estado

$$| \xi'' \rangle = \sigma_k^z | \xi_0^{(1)} \rangle \quad (4.17)$$

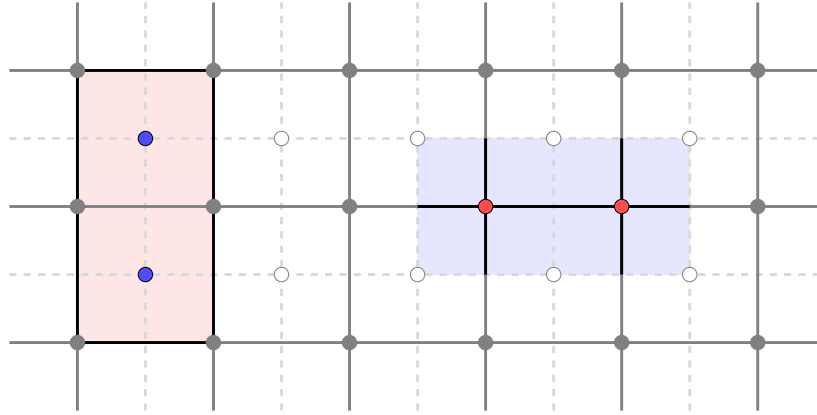
com a  $k$ -ésima aresta de  $\mathcal{R}_2$  pertencendo a  $S_{v'} \cap S_{v''}$ . Neste novo caso, como as relações (4.15) implicam não apenas em

$$A_{v'} | \xi'' \rangle = A_{v''} | \xi'' \rangle = - | \xi'' \rangle \quad ,$$

mas também garantem que

$$A_v | \xi'' \rangle = | \xi'' \rangle \quad \text{e} \quad B_p | \xi'' \rangle = | \xi'' \rangle$$

ainda são relações válidas para os demais  $N_v - 2$  vértices e  $N_p$  faces que completam  $\mathcal{R}_2$ , também é muito fácil perceber que a autoenergia que está associada a (4.17) será igual à mesma  $E_1$ , uma vez que o mesmo número de vínculos que definiriam o vácuo foram novamente violados.



**Figura 4.2:** Recorte de  $\mathcal{R}_2$  onde temos duas quasipartículas do tipo  $e$  criadas, sobre dois vértices vizinhos (setor azul, à direita), devido à ação do operador  $\sigma_k^z$ . Já, à esquerda (setor vermelho), temos duas quasipartículas do tipo  $m$ , concebidas sobre os centróides de duas faces, pela ação do operador  $\sigma_j^x$  sobre uma aresta distinta.

E é diante de todos os resultados que seguem desde (4.9) até aqui, que é imediato concluir que os operadores de vértice e de face são completamente *incapazes* de alterar qualquer um dos estados físicos que são associáveis ao TC: a “única” coisa que esses operadores realmente fazem é verificar se um estado pode ser identificado *localmente* como vácuo ou não, reforçando ainda mais todo o esquema de contagem que é realizado pelo Hamiltoniano (4.3). Entretanto, é devido à alta capacidade que esses operadores de vértice e de face têm para localizar excitações sobre os vértices e as faces de  $\mathcal{R}_2$ , que é deveras conveniente aproveitarmos essa “deixa” para fazermos dois comentários relacionados a isso. E, o primeiro deles, é que todas essas elevações locais de energia podem ser realizadas como *quasipartículas*:

- no caso que está relacionado ao autoestado (4.14), por exemplo, podemos associar esse “não vácuo” (que é sinalizado *apenas* sobre duas faces vizinhas  $p'$  e  $p''$ ) à presença de duas quasipartículas (uma em cada uma dessas faces) com duas unidades de energia cada;
- já no caso do autoestado (4.17), essa mesma associação segue pela indicação local de “não vácuo” apenas sobre dois vértices vizinhos  $v'$  e  $v''$  (ou seja, uma excitação em cada vértice).

Já o segundo comentário que convém ser feito aqui segue por consequência desta mesma realização “quasiparticular” que acabamos de mencionar. Afinal de contas, apesar das quasipartículas que caracterizam os autoestados (4.14) e (4.17) terem a mesma energia, não existe qualquer prova física de que elas sejam iguais, já que as suas detecções são feitas por operadores que agem em setores distintos. É claro que, apesar deste argumento “pró-distinção” ser perfeita-



mente correto, talvez ele seja um pouco fraco quando o comparamos com um outro que daremos logo mais adiante. Porém, como a possibilidade dessas quasipartículas serem distintas é não nula, a partir de agora denotaremos as que são detectáveis pelos operadores de vértice como do *tipo e*, enquanto aquelas, que podem ser detectadas pelos operadores de face, serão designadas como do *tipo m*.

### O transporte de quasipartículas

De acordo com tudo que foi apresentado até aqui, é bem fácil perceber que  $H_{TC}$  não possui apenas (4.14) e (4.17) como autoestados de “não vácuo”. Aliás, algo que também não é difícil perceber é que as autoenergias, que estão associadas a todos esses possíveis “não vácuos”, podem assumir apenas valores que estão compreendidos entre  $E_0 + 4$  e  $|E_0|^4$ .

Todavia, para entendermos razoavelmente o comportamento das quasipartículas que estão associadas a todos os autoestados excitados que o sistema pode comportar, ao invés de “enlouquecermos” tentando listar todos eles, podemos fazer algumas análises mais simples e um pouco mais gerais que tomam, por base, os autoestados de “não vácuo” do tipo

$$|\xi\rangle = \sigma_k^\alpha |\xi_0^{(1)}\rangle \quad ,$$

onde  $\alpha$  se refere a qualquer um dos possíveis superíndices  $x$ ,  $y$  e  $z$ . E, para fazermos isso, a relação que certamente será mais útil é

$$(\sigma_j^\alpha)^2 = \mathbb{1}_j \quad . \quad (4.18)$$

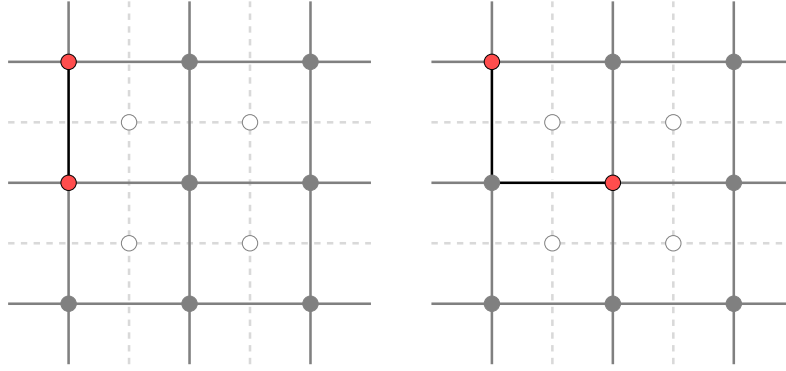
Aliás, uma das coisas que já ficam claras de (4.18) é que, como a ação de um  $\sigma_k^\alpha$  sobre o autoestado  $|\xi\rangle$  faz com que o sistema retorne ao mesmo vácuo (4.13), *todas* as quasipartículas que podem ser criadas por esse operador deverão ser necessariamente interpretadas como as suas próprias *anti-quasipartículas*. Diga-se de passagem, é exatamente por causa disso, que podemos perceber que, se um operador

$$O_{jk}^\alpha = \sigma_j^\alpha \circ \sigma_k^\alpha \quad (4.19)$$

agir sobre esse  $|\xi\rangle$ , ao mesmo tempo que ele conseguirá aniquilar o par de quasipartículas que

---

<sup>4</sup>Apesar de certamente já ter ficado subentendido, é importante ressaltar que esse espectro de energia não é contínuo: além da menor energia que é associável ao sistema já ser um número inteiro, o fato da presença de uma única quasipartícula elevar a energia do sistema em *duas* unidades já implica que a diferença entre todas as energias que são acessíveis pelo TC *sempre* será um número par. É claro que existem outras maneiras de modelar essas energias, a ponto dessas diferenças não serem necessariamente pares, mas isso não será feito ao longo deste capítulo.



**Figura 4.3:** À esquerda, vemos a presença de duas quasipartículas do tipo  $e$  (em vermelho) sobre dois vértices de  $\mathcal{R}_2$ , devido à ação de um único operador  $\sigma_k^z$  onde, antes, era vácuo. Já, à direita, vemos exatamente a mesma região da rede num instante posterior, onde apenas uma das quasipartículas foi aniquilada pela ação de um  $\sigma_j^z$ , uma vez que as arestas  $j$  e  $k$  são vizinhas. Neste caso, como tal aniquilação foi necessariamente acompanhada da criação de uma nova quasipartícula sobre um terceiro vértice, podemos traduzir este processo como um transporte de quasipartículas sobre  $\mathcal{R}_2$ .

consta nos arredores da  $k$ -ésima aresta, ele criará um outro, com as mesmas propriedades, nas adjacências da  $j$ -ésima aresta. Assim, uma das interpretações mais naturais que surgem para esse (4.19) é que ele pode ser visto como uma espécie de “operador de teletransporte” de pares de quasipartículas: ou seja, um operador que faz com que um par de quasipartículas, que, antes, constava na vizinhança de uma  $k$ -ésima aresta, reapareça ao redor de uma  $j$ -ésima aresta que pode ser completamente arbitrária.

Apesar do termo “teletransporte” sempre suscitar ideias bem interessantes, mais interessante ainda é o fruto que surge da ação de um único  $O_{jk}^z$  sobre um autoestado de “não vácuo”  $|\xi_0^{(1)}\rangle$ , quando  $j$  e  $k$  indexam duas arestas que são distintas, mas que pertencem a um mesmo  $S_v$ . Afinal de contas, como essas duas arestas partilham um vértice  $v$  em comum, e como a superposição de duas quasipartículas do tipo  $e$  sobre qualquer vértice se identifica como um vácuo local, é fácil perceber que o número de quasipartículas associadas ao sistema continuará intacto. E, nestes termos, se olharmos para a ação desse operador  $O_{jk}^z$  da maneira “desmontada” que consta na Figura 4.3, passa a ser possível interpretar o desaparecimento da quasipartícula do tipo  $e$  (que, antes, figurava sobre o  $v$ -ésimo vértice) como o seu transporte para um dos vértices vizinhos, os quais configuram uma circunferência unitária segundo a *Geometria do Taxista* [58]. Aliás, como o mesmo raciocínio que leva a  $O_{jk}^z$  também nos leva a um operador mais geral

$$O_{\gamma}^z = \prod_{j \in \gamma} \sigma_j^z \quad (4.20)$$

de transporte, sendo  $\gamma$  um *caminho* que é composto por um número maior de arestas que são vizinhas “duas a duas”, ao considerarmos  $\gamma$  como *fechado* um outro resultado bem interessante se torna evidente: pois, como a esse  $\gamma$  não haverá qualquer quasipartícula associada,

$$|\xi_0^{(1)}\rangle' = O_{\gamma^z} |\xi_0^{(1)}\rangle \quad (4.21)$$

também será interpretado como um estado de vácuo do TC.

Obviamente essa mesma interpretação de transporte também se estende a um operador

$$O_{\gamma^*}^x = \prod_{j \in \gamma^*} \sigma_j^x \quad (4.22)$$

que se vale de um caminho  $\gamma^*$  que é composto por arestas que são vizinhas (mais uma vez “duas a duas”) segundo a rede dual  $\mathcal{R}_2^*$ , da mesma maneira que a interpretação de vácuo também se estende, por exemplo, aos demais autoestados

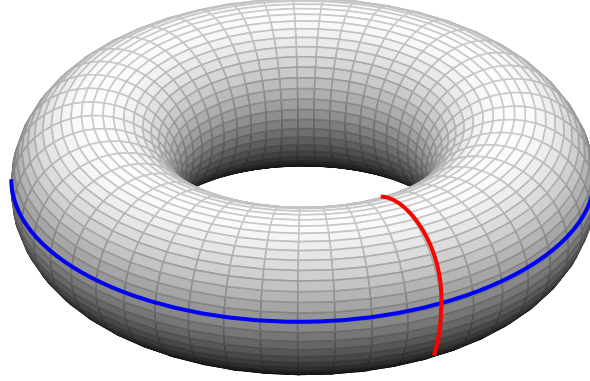
$$|\xi_0^{(1)}\rangle'' = O_{\gamma^*}^x |\xi_0^{(1)}\rangle \quad \text{e} \quad |\xi_0^{(1)}\rangle''' = O_{\gamma^*}^x \circ O_{\gamma^z} |\xi_0^{(1)}\rangle \quad (4.23)$$

se  $\gamma^*$  também for fechado. Entretanto, é diante destes últimos resultados que precisamos fazer uma observação muito importante, a qual está especificamente relacionada ao fato do TC ser um modelo definido sobre um toro.

### A degenerescência do vácuo

Quando tomamos uma discretização  $\mathcal{R}_2$ , algo que não é difícil de perceber é a grande quantidade de caminhos  $\gamma$  e  $\gamma^*$  fechados que podem ser definidos ao longo das suas arestas, desde que  $\mathcal{R}_2$  seja uma rede que discretiza um toro com uma boa resolução. Porém, como acabamos de dizer que a  $\mathcal{R}_2$  que estamos considerando aqui se refere necessariamente à discretização de um toro bidimensional, devemos notar que uma parte desses caminhos possui uma propriedade específica: um parte desses caminhos não são *contráteis*.

Embora o conceito de *contração* seja melhor entendido para curvas fechadas sobre uma variedade  $\mathcal{M}_2$ , desde que existam aplicações contínuas capazes de *contraí-las* a um único ponto, a caracterização de um caminho contrátil sobre  $\mathcal{R}_2$  segue por efeito da possibilidade de reduzirmos qualquer um dos autoestados (4.21) e (4.23) ao primeiro vácuo (4.13). E, para entender como



**Figura 4.4:** Situação de um toro  $\mathcal{T}_2$  que é discretizado pela rede quadrada  $\mathcal{R}_2$ . Notem que, apesar de ser possível definir caminhos contráteis sobre  $\mathcal{R}_2$ , duas curvas merecem destaque: uma  $\bar{\gamma}_1$  (em vermelho), que contorna a alça de  $\mathcal{T}_2$ ; e outra  $\bar{\gamma}_2$  (em azul), que contorna o único “buraco” que caracteriza  $\mathcal{T}_2$  como um toro de gênero unitário. Essas duas curvas, assim como todas as suas possíveis deformações, são exemplos de caminhos não contráteis sobre  $\mathcal{R}_2$ , os quais devem ser interpretados como as discretizações das curvas que geram o grupo fundamental de  $\mathcal{T}_2$ .

tudo isso funciona no TC, devemos notar que os próprios operadores  $A_v$  e  $B_p$  também podem ser perfeitamente interpretados como “operadores de transporte” que levam uma quasipartícula instantaneamente ao mesmo lugar, haja vista que

- (i) o conjunto  $S_p$  é formado por todas as arestas que descrevem o bordo fechado da  $p$ -ésima face de  $\mathcal{R}_2$ , enquanto
- (ii) cada uma das arestas de  $S_v$  intercepta uma única das arestas duais que completam o bordo, também fechado, da  $v$ -ésima face dual que compõe  $\mathcal{R}_2^*$ .

Desta maneira, ao considerarmos que  $F_A$  e  $F_B$  são duas aplicações que são compostas por um número finito de operadores de vértice e de aresta respectivamente, como

$$F_A \circ O_{\gamma^*}^x = F_B \circ O_{\gamma}^z = 1_{\text{TC}} \quad (4.24)$$

será válida apenas se  $\gamma$  e  $\gamma^*$  corresponderem à discretização de dois caminhos contráteis, a não contratibilidade de outras composições de arestas, duais ou não, corresponderá a não verificação de (4.24).

Aliás, o simples fato de  $\mathcal{R}_2$  discretizar a superfície de um toro já implica na existência de caminhos fechados que não são contráteis  $\bar{\gamma}$  e  $\bar{\gamma}^*$ , conforme bem ilustra a Figura 4.4 a seguir. E a grande consequência disso é que, ao contrário dos autoestados de vácuo (4.21) e (4.23) serem redutíveis

ao primeiro (4.13), os autoestados

$$|\xi_0^{(2)}\rangle = O_{\bar{C}_1}^\alpha |\xi_0^{(1)}\rangle, \quad |\xi_0^{(3)}\rangle = O_{\bar{C}_2}^\beta |\xi_0^{(1)}\rangle \quad \text{e} \quad |\xi_0^{(4)}\rangle = O_{\bar{C}_1}^\alpha \circ O_{\bar{C}_2}^\beta |\xi_0^{(1)}\rangle,$$

que nitidamente se apoiam sobre curvas que não são contráteis em direções distintas, *parecem* que não são redutíveis nem a (4.13) e nem uns aos outros. Aqui, o símbolo  $\bar{C}$  deve ser interpretado como: o caminho não contrátil  $\bar{\gamma}$ , caso os índices  $\alpha$  e  $\beta$  sejam iguais a  $z$ ; ou como o caminho não contrátil  $\bar{\gamma}^*$ , caso estes mesmos índices sejam iguais a  $x$ .

Embora essa observação de não redutibilidade faça pleno sentido, é diante deste quadro que devemos destacar uma coisa que é muito importante antes darmos uma palavra final sobre os autoestados de vácuo do TC: como o operador  $\sigma^z$  é completamente incapaz de realizar trocas do tipo

$$|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle, \quad (4.25)$$

um operador  $O_{\bar{\gamma}}^z$ , operando sobre qualquer autoestado de vácuo do TC, também é completamente incapaz de alterar a codificação que já define esse autoestado. Ou seja, apesar de toda a não contrabilidade que está envolta para com  $\bar{\gamma}$ , um autoestado como

$$|\xi_0^{(2)}\rangle = O_{\bar{\gamma}}^z |\xi_0^{(1)}\rangle,$$

não é capaz de caracterizar um novo autoestado que seja independente de (4.13): apenas os autoestados

$$|\xi_0^{(2)}\rangle = O_{\bar{\gamma}_1^*}^x |\xi_0^{(1)}\rangle, \quad |\xi_0^{(3)}\rangle = O_{\bar{\gamma}_2^*}^x |\xi_0^{(1)}\rangle \quad \text{e} \quad |\xi_0^{(4)}\rangle = O_{\bar{\gamma}_1^*}^x \circ O_{\bar{\gamma}_2^*}^x |\xi_0^{(1)}\rangle, \quad (4.26)$$

correspondem a vácuos que são não apenas *independentes* entre si, mas em relação ao primeiro, uma vez que as suas construções se apoiam sobre as trocas (4.25). E, por se dizer, é exatamente essa *tetra-degenerescência* do estado fundamental do TC que acaba deixando bem claro todo o aspecto topológico que está por trás do TC. Afinal de contas, quando analisamos esses novos vácuos (4.26) pelo ponto de vista físico, toda essa não contração dos caminhos que os definem pode ser associada à presença de quatro quantidades físicas que são *conservadas*, uma vez que elas não podem ser exterminadas pela ação dos operadores de vértice e de face. E, no caso, como essas quatro quantidades que são conservadas correspondem a quatro setores topológicas diferentes,

cuja existência só pode ser detectada pela ação dos operadores

$$O_{\vec{\gamma}_1}^z \text{ e } O_{\vec{\gamma}_2}^z ,$$

cada um desses setores acaba se vinculando a um dos autoestados (4.13) e (4.26), dando um aspecto físico para essa degenerescência [59] que pode ser associada, numa situação de baixíssimas temperaturas, por exemplo, à existência de fases distintas que só existem por consequência da topologia da variedade sobre a qual o sistema está definido.

### 4.2.3 Uma nova quasipartícula

Apenas para terminar todos os comentários que podem ser relacionados à criação e ao transporte de quasipartículas, vale destacar que, apesar de já termos apresentado os dois operadores  $\sigma_j^x$  e  $\sigma_j^z$  como agentes ativos em todos esses processos de criação e de transporte, nada foi dito ainda sobre o papel de  $\sigma_j^y$ , apesar da sua definição já constar em (4.5). E, para tentar nos redimir e justificar de toda essa aparente omissão, é essencial começarmos logo observando que, se um terceiro exemplo de “não vácuo” for introduzido através de

$$|\xi''' \rangle = \sigma_a^y |\xi_0^{(1)} \rangle , \quad (4.27)$$

como as relações (4.15) nos levarão a

$$\begin{aligned} A_v |\xi''' \rangle &= - |\xi''' \rangle , & A_{v'} |\xi''' \rangle &= - |\xi''' \rangle , \\ B_p |\xi''' \rangle &= - |\xi''' \rangle \text{ e } & B_{p'} |\xi''' \rangle &= - |\xi''' \rangle , \end{aligned}$$

onde  $a = S_v \cap S_{v'} \cap S_p \cap S_{p'}$  indexa a única aresta sobre a qual  $\sigma_a^y$  atua, fica bem claro que este operador, sozinho, cria *quatro* excitações: uma sobre cada um dos vértices que encerram esta aresta, e uma sobre cada uma das face que a partilham, o que naturalmente acaba elevando a energia do sistema para  $E_2 = E_0 + 8$ . Porém, apesar de toda essa inteligibilidade operacional, existe, pelo menos, duas peculiaridades que estão relacionadas a essa excitação conjunta que merece a nossa total atenção. E, a primeira delas, se refere ao transporte dessas excitações.

### Primeira peculiaridade

Na tentativa de estendermos a mesma lógica de transporte para este novo caso, é bastante natural começarmos a pensar nisso através de um operador

$$O_{ba}^y = \sigma_b^y \circ \sigma_a^y . \quad (4.28)$$

Afinal, como a atuação deste operador sobre o autoestado (4.27) aniquilaria essa excitação quádrupla das adjacências da a-ésima aresta e criaria uma outra, com as mesmas propriedades, ao redor da b-ésima aresta, tudo já seria muito confortável se o único objetivo fosse manter a energia do sistema. No entanto, se lembrarmos que a possibilidade de transportar essas mesmas excitações, por meio de operadores que fogem aos padrões desse “teletransporte” (4.28), é real, também não deixa de ser natural pensarmos em transportá-las usando operadores como

$$O_\gamma^y = \prod_{j \in \gamma} \sigma_j^y \quad \text{e/ou} \quad O_{\gamma^*}^y = \prod_{j \in \gamma^*} \sigma_j^y . \quad (4.29)$$

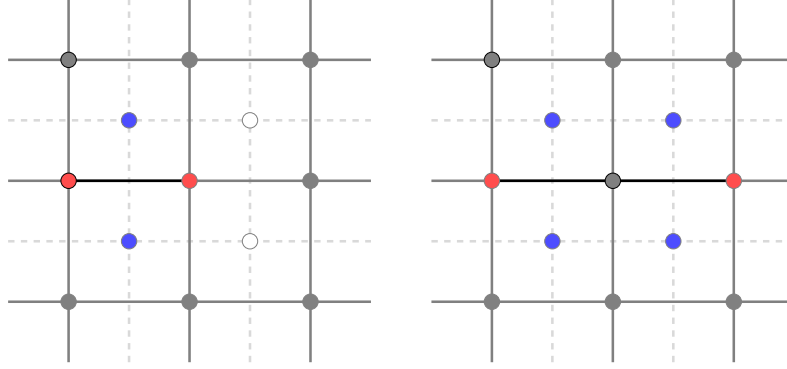
E pensando nesta última possibilidade, é perfeitamente razoável considerar  $O_\gamma^y$  como o mais simples dos operadores de transporte, o qual se vale de um caminho  $\gamma$  que é formado apenas pela b-ésima aresta tal que  $\{a, b\} \in S_v$ . Apesar de não ser nada difícil notar que o número de excitações que são detectáveis pelos operadores de vértice será *conservado* ao longo deste transporte, também não é nada difícil notar que o mesmo não poderá ser dito necessariamente sobre as excitações que são detectáveis pelos operadores de face. Pois, conforme bem ilustra a Figura 4.5, no caso destas duas arestas serem tais que

$$a \in S_p \cap S_{p'} \quad \text{e} \quad (b \notin S_p) \vee (b \notin S_{p'}) ,$$

o número das excitações que são detectáveis pelos operadores de face *aumentará*: esse acréscimo de energia só não acontece quando, e somente quando,

$$a \in S_p \cap S_{p'} \quad \text{e} \quad b \in S_p \cup S_{p'} \cup S_v \cup S_{v'} . \quad (4.30)$$

Nestes termos, fica bem claro que, no caso mais geral, onde  $\gamma$  é um caminho estruturado por uma quantidade maior de arestas que são “duas a duas” adjacentes, um transporte dessas excitações



**Figura 4.5:** À esquerda, vemos a presença de uma única excitação composta, gerada pela ação de um único  $\sigma_a^z$ . Já, à direita, vemos exatamente a mesma região da rede onde, após a ação do operador  $\sigma_b^z$  sobre uma das arestas vizinhas à primeira, uma única das excitações detectáveis por um operador de vértice foi transportada. Notem que, no caso desse transporte, a energia total do sistema não é conservada.

sem qualquer acréscimo de energia só é possível se, e somente se, a condição (4.30) for satisfeita para cada par de arestas que compõe  $\gamma$ .

### Segunda peculiaridade

Embora uma conclusão inteiramente análoga também siga por efeito da ação de um  $O_{\gamma^*}^y$  sobre o autoestado (4.27), é interessante explorar a segunda peculiaridade que já sugerimos existir. E, para entender do que se trata essa segunda peculiaridade, precisamos voltar as nossas atenções para os dois autoestados de “não vácuo”

$$|\xi''''\rangle = \sigma_j^x \circ \sigma_j^y |\xi_0^{(1)}\rangle \quad \text{e} \quad |\xi'''''\rangle = \sigma_j^z \circ \sigma_j^y |\xi_0^{(1)}\rangle . \quad (4.31)$$

Afinal de contas, como as relações (4.15) também implicam que

$$A_v |\xi''''\rangle = -|\xi''''\rangle \quad \text{e} \quad B_p |\xi'''''\rangle = |\xi'''''\rangle ,$$

fica claro que, no caso desta  $j$ -ésima aresta pertencer a  $S_v \cap S_p$ , o operador  $\sigma_j^x \circ \sigma_j^y$  pode ser interpretado *efetivamente* como o mesmo  $\sigma_j^z$  que já é capaz de criar apenas quasipartículas do tipo  $e$ .

De modo inteiramente análogo, dado que o segundo autoestado de “não vácuo” em (4.31)



também permite observar que

$$A_v |\xi'''''\rangle = |\xi'''''\rangle \quad \text{e} \quad B_p |\xi'''''\rangle = -|\xi'''''\rangle ,$$

o operador  $\sigma_j^z \circ \sigma_j^y$  também poderá ser visto efetivamente como  $\sigma_j^x$ , haja vista que ambos são capazes de criar *apenas* quasipartículas que possuem propriedades similares as do tipo  $m$ . Desta maneira, diante

- (i) não apenas da conclusão de que esse “novo” operador  $\sigma_j^y$  é capaz de conceber um par de excitações independentes das anteriores, mas
- (ii) do desejo de construir o TC como um modelo com excitações transportáveis *sem qualquer custo energético*,

toda essa “efetividade” nos leva a definição de um operador

$$\text{“} \sigma_j^y \text{”} = \sigma_j^x \circ \sigma_j^z = \sigma_j^z \circ \sigma_j^x , \quad (4.32)$$

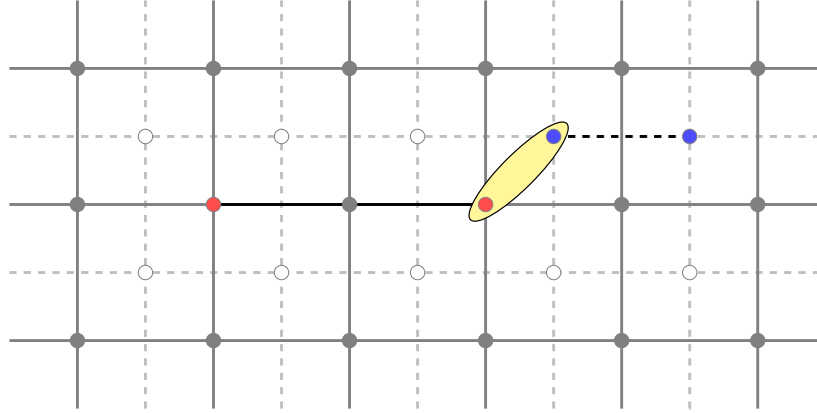
que “não tem” nada de muito novo. A única coisa que podemos interpretar como realmente “nova” aqui é que, como  $\mathbb{1}_j$  e “ $\sigma_j^y$ ” são os dois elementos que acabam estruturando

$$\left\{ \mathbb{1}_j , \sigma_j^x , \text{“} \sigma_j^y \text{”} , \sigma_j^z \right\} \quad (4.33)$$

como um grupo, quando atribuímos a “ $\sigma_j^y$ ” a tarefa de criar uma nova excitação, essa nova excitação deverá ser necessariamente definida como a comunhão de uma quasipartícula do tipo  $e$  com outra do tipo  $m$  nas adjacências de uma única aresta. E, no caso dessa “nova” quasipartícula, que rotularemos como do *tipo*  $\epsilon$ , ela é popularmente conhecida como um “*dyon*”.

### Um pequeno parênteses

Em todo caso, é muito importante aproveitarmos a “deixa” que a definição deste operador (4.32) nos dá para nos atentarmos a uma coisa que pode ser vista como a terceira peculiaridade que está relacionada a esta excitação conjunta que acabamos de definir como um “*dyon*”: a sua criação ocorre pelas “mãos” dos mesmos operadores que definem o Hamiltoniano (4.3). E, nestes termos, como *todas* as quasipartículas dos tipos  $e$  e  $m$  são criadas por efeito destes mesmos operadores, a conclusão imediata a que chegamos é a seguinte: assim como ocorre na TQC, onde Hamiltonianos



**Figura 4.6:** Desenho esquemático com a caracterização de um “dyon”, através da sua definição como um par de quasipartículas nas vizinhanças de uma única aresta, onde uma das quasipartículas é do tipo  $e$  e a outra é do tipo  $m$ .

podem ser expressos na *representação de Fock* apenas em termos dos operadores de criação  $a^\dagger$  e de aniquilação  $a$  [60], todo o espectro de energia do TC também pode ser bem entendido a partir (i) do conhecimento do estado fundamental do sistema e (ii) pelas excitações que são criadas sobre esse estado por efeito da ação dos operadores que compõem o seu Hamiltoniano (4.3).

Diga-se de passagem, se lembrarmos que esses dois operadores  $a^\dagger$  e  $a$  satisfazem à relação

$$a a^\dagger + a^\dagger a = \mathbb{1} \quad , \quad (4.34)$$

fica bem claro que, como no TC eles são tais que

$$a^\dagger |0\rangle = |1\rangle \quad , \quad a |1\rangle = |0\rangle \quad \text{e} \quad a^\dagger |1\rangle = a |0\rangle = 0 \cdot |0\rangle + 0 \cdot |1\rangle \quad , \quad (4.35)$$

todos os operadores que estruturam o Hamiltoniano (4.3) também podem ser expressos em termos de  $a^\dagger$  e  $a$ . Afinal de contas, como a expressão destes dois operadores (em termos da mesma base que foi escolhida na página 50) é

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e isso implica, por exemplo, em

$$n = a^\dagger a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad h = aa^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

vemos que

$$\sigma^x = a^\dagger + a \quad \text{e} \quad \sigma^z = aa^\dagger - a^\dagger a , \quad (4.36)$$

o que só reforça ainda mais a capacidade de contagem dos operadores de vértice  $A_v$  e de face  $B_p$  do TC, haja vista que a própria TQC considera  $n$  como um operador de *contagem* (ou seja, como um operador que *conta* quantas partículas se fazem presentes num dado estado físico).

### Regras de fusão

Aliás, olhando a situação do operador identidade  $\mathbb{1}_j$  pela mesma perspectiva da composição (4.32), como

$$\mathbb{1}_j = \sigma_j^x \circ \sigma_j^x = \text{“} \sigma_j^y \text{”} \circ \text{“} \sigma_j^y \text{”} = \sigma_j^z \circ \sigma_j^z , \quad (4.37)$$

é bem fácil perceber que todo esse esquema de criação de pares de quasipartículas também se estende a ele. A única diferença aqui é que, devido a propriedade (4.18), o par de excitações que está a ele associado deve ser composto por duas “*quasipartículas de vácuo*”, as quais, sempre que houver necessidade, serão denotadas como do *tipo 1*. E uma dessas necessidades já surge quando, por exemplo, precisamos listar as chamadas *regras de fusão*

$$Q_\alpha \times Q_\beta = Q_\gamma$$

das quasipartículas nos arredores de uma única aresta, sendo  $Q_\alpha$  uma das quasipartículas que caracterizam o par concebido por  $\sigma_j^\alpha$ . Por se dizer, diante de tudo o que já foi apresentado até agora, não é difícil perceber que as regras de fusão, que estão relacionadas às quasipartículas elementares do TC, são dadas pelas relações

$$\begin{aligned} 1 \times 1 &= e \times e = m \times m = \varepsilon \times \varepsilon = 1 , \\ 1 \times e &= e \times 1 = m \times \varepsilon = \varepsilon \times m = e , \\ 1 \times m &= m \times 1 = e \times \varepsilon = \varepsilon \times e = m \text{ e} \\ 1 \times \varepsilon &= \varepsilon \times 1 = e \times m = m \times e = \varepsilon , \end{aligned} \quad (4.38)$$

que bem caracterizam o comportamento *Abeliano* que foi imposto ao grupo (4.33).

### Descrição estatística

Por efeito de todas essas quasipartículas serem transportáveis sem aumentar a energia do sistema, antes de finalmente encerrarmos este capítulo é fundamental avaliar como se dá o comportamento estatístico dessas quasipartículas. E, para isso, a maneira mais eficaz de fazermos isso é analisando a informação que surge quando, por exemplo, fazemos uma das quasipartículas *girar* ao redor de uma outra. E uma das primeiras coisas que podemos usar em favor dessa avaliação é o fato de

$$[ O_{\gamma_1^*}^x, O_{\gamma_2^*}^x ] = [ O_{\gamma_1^*}^z, O_{\gamma_2^*}^z ] = 0 \quad (4.39)$$

ser uma propriedade válida, sejam quais forem os caminhos que se envolvem para com estas igualdades. Afinal, se considerarmos um estado inicial onde um par de quasipartículas do tipo *e* surge pela ação de um  $O_{\gamma_1^*}^x$  sobre um dos estados de vácuo, ao fazermos com que qualquer uma delas gire ao redor da outra através de algum caminho contrátil  $\tilde{\gamma}_2^*$ , fica claro que estas quasipartículas se comportam como *bósons* entre elas, uma vez que (4.39) implica que o estado obtido ao final deste processo é exatamente igual ao inicial.

Naturalmente esta mesma observação bosônica também se estende à situação onde figuram apenas duas quasipartículas do tipo *m*. E, para bem entendermos toda essa bosonicidade, basta considerarmos a situação onde apenas uma das quasipartículas, criadas por  $O_{\gamma_1^*}^z$  sobre o vácuo, contorna a outra por meio de um caminho contrátil  $\tilde{\gamma}_2$ . Todavia, como a situação em que temos um caminho  $\gamma_3$  interceptando um outro  $\gamma_3^*$ , num único ponto, nos remete a

$$O_{\gamma_3^*}^x \circ O_{\gamma_3}^z = - O_{\gamma_3}^z \circ O_{\gamma_3^*}^x \quad , \quad (4.40)$$

é imediato perceber que uma interpretação não bosônica surge quando uma quasipartícula do tipo *e* gira em torno de uma outra do tipo *m* através do menor caminho possível, e vice-versa. E para ver como esse último comportamento não bosônico se torna evidente, basta tomar

$$| \xi_{\text{inicial}} \rangle = O_{\gamma_3^*}^x \circ O_{\gamma_3}^z | \xi_0 \rangle \quad (4.41)$$

como um estado físico inicial, onde temos apenas dois pares de quasipartículas devido à ação de dois operadores  $O_{\gamma_3^*}^x$  e  $O_{\gamma_3}^z$  sobre qualquer um dos autoestados de vácuo. Pois, neste caso, ao

fazermos com que, por exemplo, uma *única* das quasipartículas do tipo  $e$ , por exemplo, gire ao redor de uma *única* do tipo  $m$  através de um caminho contrátil  $\bar{\gamma}_4$ , é fácil perceber que

$$\begin{aligned} |\xi_{\text{final}}\rangle &= O_{\bar{\gamma}_4}^z |\xi_{\text{inicial}}\rangle \\ &= O_{\bar{\gamma}_4}^z \circ (O_{\gamma_3^*}^x \circ O_{\gamma_3}^z) |\xi_0\rangle = (O_{\bar{\gamma}_4}^z \circ O_{\gamma_3^*}^x) \circ O_{\gamma_3}^z |\xi_0\rangle \\ &= -O_{\gamma_3^*}^x \circ (O_{\bar{\gamma}_4}^z \circ O_{\gamma_3}^z) |\xi_0\rangle = -O_{\gamma_3^*}^x \circ O_{\gamma_3}^z \circ (O_{\bar{\gamma}_4}^z |\xi_0\rangle) . \end{aligned}$$

Assim, como a contratibilidade de  $\bar{\gamma}_4$  permite expressar o operador de transporte que está a ele associado como

$$O_{\bar{\gamma}_4}^z = \prod_{p \in P_4} B_p ,$$

sendo  $P_4$  o conjunto *maximal* de faces que são encerradas por  $\bar{\gamma}_4$ , se torna evidente que, por efeito do vínculo (4.12), temos

$$|\xi_{\text{final}}\rangle = -O_{\gamma_3^*}^x \circ O_{\gamma_3}^z \circ (O_{\bar{\gamma}_4}^z |\xi_0\rangle) = -O_{\gamma_3^*}^x \circ O_{\gamma_3}^z |\xi_0\rangle = -|\xi_{\text{inicial}}\rangle , \quad (4.42)$$

deixando claro que o comportamento de uma quasipartícula do tipo  $e$ , ao girar ao redor de outra do tipo  $m$  e vice-versa, não pode ser realmente interpretado como bosônico.

Aliás, diante do sinal negativo que aparece na última passagem em (4.42), cabem dois comentários extremamente importantes. E, o primeiro deles, segue quando tomamos uma situação bem particular, onde essas duas quasipartículas formam um único “dyon”. Afinal de contas, como, neste caso,  $\bar{\gamma}_4$  pode ser visto como o bordo de uma única face, o giro dessas duas quasipartículas ao redor uma da outra pode ser reinterpretado como o giro deste “dyon” em torno de si mesmo. Assim, a presença deste sinal negativo em (4.42) implica que um “dyon” deve ser interpretado necessariamente como um *férmion* [5].

Já o segundo comentário segue por efeito da simples observação de que o giro de uma quasipartícula ao redor de outra equivale a uma operação de “dupla troca”: ou seja, a uma operação onde essas quasipartículas trocam de lugar uma com a outra e, depois, voltam às suas posições originais devido a uma nova troca. Desta maneira, como no caso mais geral, em que estas duas quasipartículas não definem um “dyon”, esse sinal negativo em (4.42) associa a estatística destas quasipartículas a uma fase  $e^{i\pi/2}$  que não se identifica nem com 0 nem com 1, isso nos permite concluir que quasipartículas dos tipos  $e$  e  $m$  se comportam como “anyons” em relação à outra.

### Um comentário adicional

Diga-se de passagem, diante de toda essa possibilidade de transportar e de fazer girar quasipartículas ao redor umas das outras, uma coisa é certa: uma quasipartícula do tipo  $e$  *jamais* colidirá com uma outra do tipo  $m$ . E é exatamente com base nesta observação que surge o argumento que talvez reforce ainda mais a necessidade de tratarmos esses dois tipos de quasipartículas como não necessariamente iguais. Contudo, como a distância mínima que pode existir entre elas ocorre quando ambas definem um único “dyon”, é justamente neste ponto que convém esclarecer os motivos que levaram às suas nomenclaturas: afinal, como o conceito de “anyon” surgiu por advento do *Efeito de Aharonov-Bohm* [61] (que está associado ao comportamento estatístico de sistemas onde *elétrons* giram ao redor de um campo *magnético* que está confinado a uma região cilíndrica), diante do resultado (4.42) se tornou viável batizar as quasipartículas que são detectáveis sobre os vértices como do tipo  $e$  (elétrico), enquanto aquelas, que são detectáveis sobre as faces, acabaram sendo denotadas como do tipo  $m$  (magnético).

## Capítulo 5

# Primeiras generalizações

### 5.1 Considerações tridimensionais

Embora já existam algumas generalizações do TC muito bem postas na literatura<sup>1</sup>, toda a apresentação que fizemos até agora já nos permite construir outras, bem simples, que nitidamente trazem o TC como um dos seus casos particulares. E uma delas segue, por exemplo, quando atribuímos a mesma codificação do TC a um modelo que se vale de uma rede *tridimensional*  $\mathcal{R}_3$ : ou seja,

- associando um *único* qubit (4.1) a cada uma das arestas de  $\mathcal{R}_3$ , e
- definindo operadores físicos capazes de medir as propriedades desse novo modelo.

É claro que é muito confortável pensar que essa rede pode discretizar uma variedade  $\mathcal{M}_3$  que, por exemplo, pode ser um toro tridimensional; e, aliás, esta será exatamente uma das coisas que faremos ao longo deste capítulo, uma vez que, por comodidade, todas as discretizações que adotaremos aqui serão *cúbicas*. Porém, antes de tentarmos entender qualquer nuance de um modelo que está definido sobre a discretização de um toro, ou de qualquer outra variedade tridimensional, é essencial entendermos quais são as características comuns a todos esses modelos.

#### 5.1.1 Semelhanças e diferenças

Independente das diversas possibilidades que existem para a definição deste novo modelo sobre  $\mathcal{R}_3$ , uma coisa é certa: se usarmos exatamente a mesma lógica que é usada para a estruturação do TC, se torna muito natural assumir (em respeito ao mesmo princípio da correspondência que

---

<sup>1</sup>Como é o caso do “*Quantum Double Model*” (QDM) sobre os qual falaremos no próximo capítulo.

mencionamos no início destas notas) que o operador Hamiltoniano deste novo “three-dimensional code” (3-DC) é dado por

$$H_{3\text{-DC}} = - \sum_v A_v - \sum_p B_p \quad , \quad (5.1)$$

onde

$$A_v = \prod_{j \in S_v} \sigma_j^x \quad \text{e} \quad B_p = \prod_{j \in S_p} \sigma_j^z \quad . \quad (5.2)$$

E, apesar da inquestionável semelhança entre esse  $H_{3\text{-DC}}$  e o Hamiltoniano (4.3), é importante destacar que existe uma diferença entre eles que, apesar de bastante sutil, tem uma grande influência sobre o comportamento das excitações que são mensuráveis no 3-DC. Afinal de contas, enquanto os operadores que compõem (4.3) *sempre* atuam (efetivamente) sobre quatro arestas de  $\mathcal{R}_2$ , no 3-DC isso não necessariamente acontece. E a razão disso acontecer é que, independente das condições de contorno relacionadas a  $\mathcal{R}_3$ , cada face e cada vértice que compõem o interior desta rede são estruturados por *quatro* e por *seis* arestas respectivamente.

### As excitações de vértice

Por se dizer, antes de explorarmos as consequências desta última observação, é importante salientar que, quando nos restringimos a um 3-DC onde

$$\dim S_p = 4 \quad \text{e} \quad \dim S_v = 6 \quad , \quad (5.3)$$

algumas das principais características do TC continuam preservadas<sup>2</sup>, entre as quais podemos destacar:

- (i) a comutatividade dos seus operadores de vértice e de face (5.2), assim como as suas propriedades de contagem;
- (ii) a expressão da energia fundamental do sistema como

$$E_0 = - \left( N_v + N_p \right) \quad ,$$

sendo  $N_v$  e  $N_p$  as respectivas quantidades de vértices e de faces que, agora, estruturam  $\mathcal{R}_3$ ; e

---

<sup>2</sup>Um 3-DC que atende a tais condições é o “Toric Code” tridimensional, cujas propriedades serão discutidas mais adiante.



(iii) o fato de que um dos seus estados fundamentais possui exatamente a mesma expressão

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v (\mathbb{1}_v + A_v) \underbrace{|0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle}_{N_a \text{ vezes}}, \quad (5.4)$$

que já está relacionada ao TC, onde  $N_a$  ainda se refere ao número de arestas que, agora, estruturam  $\mathcal{R}_3$ .

Outra coisa deste 3-DC que também é bastante similar ao TC se relaciona às excitações mais elementares que podem ser associadas aos seus vértices. Afinal, como um autoestado de “não vácuo”

$$|\xi''\rangle = \sigma_k^z |\xi_0^{(1)}\rangle \quad (5.5)$$

não satisfaz apenas *dois* dos vínculos

$$A_v |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad \text{e} \quad B_p |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad (5.6)$$

que precisam ser satisfeitos por um estado vácuo  $|\xi_0\rangle$ , fica claro que a autoenergia de (5.5) também será igual a  $E_1 = E_0 + 4$ , tal como já acontece em (4.17). E, diante disso, quando notamos que

- um  $\sigma_k^z$  continua sendo capaz de criar excitações que são detectáveis apenas sobre os dois vértices que encerram a  $k$ -ésima aresta de  $\mathcal{R}_3$  e que, portanto,
- essas excitações são transportáveis apenas pelos mesmos operadores que já foram definidos em (4.20),

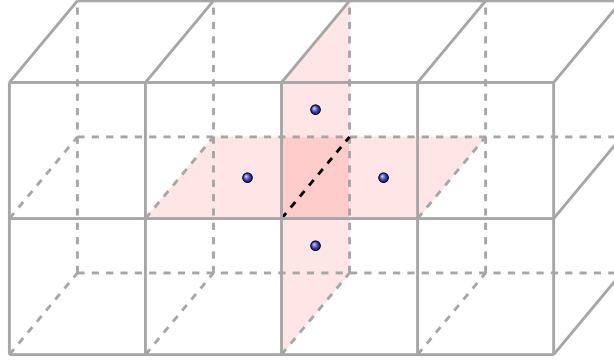
é imediato concluir não apenas que essas excitações são *bósons*: podemos concluir que essas excitações são exatamente as *mesmas* quasipartículas do tipo  $e$  já relacionadas ao TC.

### As excitações de face

Já quando olhamos para um outro autoestado de “não vácuo”

$$|\xi'\rangle = \sigma_k^x |\xi_0^{(1)}\rangle, \quad (5.7)$$

fica bem claro que algo um pouco diferente acontece, haja vista que o fato de estarmos restritos a uma região onde (5.3) vale já implica que *todas* as arestas que figuram em  $\mathcal{R}_3$  pertencem à



**Figura 5.1:** Recorte da rede cúbica que dá suporte ao 3-DC, ilustrando a presença de quatro excitações de face (setores vermelhos) ao redor de uma única aresta, devido à ação de um único operador  $\sigma_k^x$  sobre um autoestado de vácuo.

intersecção de *quatro* faces. Assim, como o número de “vínculos de vácuo” que são violados por (5.7) passa a ser igual a quatro, podemos concluir que, ao contrário do que acontece no TC, a ação de um único  $\sigma_k^x$  sobre o autoestado de vácuo (5.4) cria *quatro* excitações simultâneas ao redor da  $k$ -ésima aresta, conforme bem ilustra a Figura 5.1.

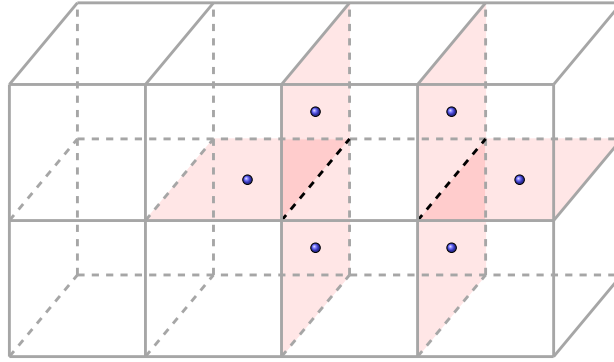
Aliás, exatamente por causa dessa criação simultânea de quatro excitações ao redor de uma única aresta, é importante destacar que, além do autoestado (5.7) possuir uma autoenergia  $E_2 = E_0 + 8$  que é nitidamente maior que  $E_1$ , tanto o transporte como a aniquilação dessas excitações no 3-DC precisam ser feitos de uma maneira “ligeiramente” diferente da anterior. É claro que, como  $\sigma_k^x$  é exatamente o mesmo operador que já foi definido em (4.5), é sempre bom lembrar que essas quatro excitações ainda podem ser perfeitamente aniquiladas de uma só vez: e, para isso aconteça, basta fazer com que este mesmo operador atue sobre  $|\xi'\rangle$ , uma vez que

$$\sigma_k^x |\xi'\rangle = \sigma_k^x \circ (\sigma_k^x |\xi_0^{(1)}\rangle) = (\sigma_k^x \circ \sigma_k^x) |\xi_0^{(1)}\rangle = |\xi_0^{(1)}\rangle \quad .$$

Porém, se quisermos transportar as excitações que estão associadas ao autoestado (5.7), por meio de um operador que não se identifica com um de “teletransporte”

$$O_{jk}^x = \sigma_j^x \circ \sigma_k^x$$

arbitrário, isso deverá ser feito de uma maneira que não é mais tão simples como no caso do TC. E, para deixar bem claro o porquê desta não simplicidade, devemos notar que, quando a  $j$ -ésima aresta de  $\mathcal{R}_3$  pertence a qualquer uma das faces que já contém a aresta  $k$ , apenas *uma*



**Figura 5.2:** Considerando que a situação exposta na Figura 5.1 está associada a um instante  $t_0$ , a atuação de um único operador  $\sigma_j^x$  sobre uma das arestas da rede, num instante  $t > t_0$ , não é capaz de transportar qualquer excitação de face do mesmo jeito que ocorre no TC. Afinal, além de apenas uma única das excitações de face serem transportadas por  $\sigma_j^x$ , outras duas surgem, o que aumenta a energia associada ao sistema.

única das quatro excitações que são criadas por um  $\sigma_j^x$  será capaz de aniquilar uma única das que foram previamente criadas pelo operador  $\sigma_k^x$ . E, neste caso, conforme bem ilustra a Figura 5.2, essa aniquilação ocorrerá precisamente sobre a face que é composta por ambas as arestas. Desta maneira, como, em geral, a ação de um

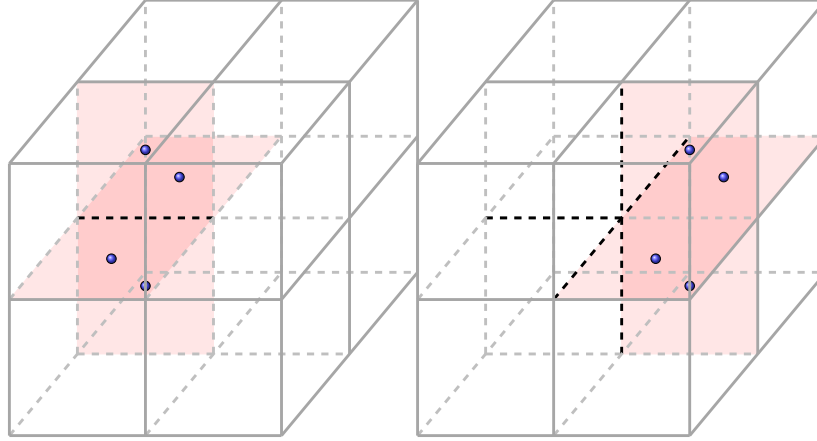
$$O_{\Upsilon}^x = \prod_{j \in \Upsilon} \sigma_j^x \quad (5.8)$$

sobre o autoestado (5.7) não é capaz de preservar o número de excitações associadas ao conjunto  $\Upsilon$  (que é composto por arestas que, “duas a duas”, pertencem a uma única face), se ainda quisermos transportar essas excitações pela rede, sem causarmos qualquer custo energético ao sistema, isso deverá ser feito de uma maneira que precisa ser um pouco mais sagaz.

### Um transporte conjunto

Embora um operador arbitrário do tipo (5.8) não seja o ideal para realizar o transporte que queremos, uma observação muito interessante já pode ser feita a partir dele, desde que, ao invés de um  $\mathcal{S}$ , tomemos um conjunto  $\mathcal{S}_v$  contendo apenas *quatro* das arestas que definem um  $v$ -ésimo vértice. E, para entendermos, de fato, qual é essa observação, basta considerarmos uma situação bem específica, onde a  $k$ -ésima aresta excitada em (5.7) pertence a  $\mathcal{S}_v \setminus \mathcal{S}_v$ . Afinal, como, neste caso,

$$O_{\mathcal{S}_v}^x |\xi'\rangle = O_{\mathcal{S}_v}^x \circ \sigma_k^x |\xi_0^{(1)}\rangle \quad (5.9)$$



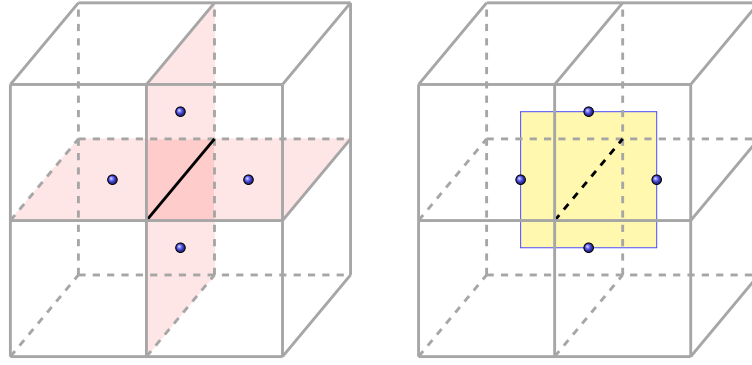
**Figura 5.3:** Considerando que a situação exposta na Figura 5.1 ainda está associada a um instante  $t_0$ , onde temos a presença de quatro excitações nas faces comuns a uma  $k$ -ésima aresta, a atuação de um único operador  $O_{S_v}^x$  num instante  $t > t_0$ , sobre quatro arestas complementares à primeira, é capaz de transportar todas as excitações para a aresta  $j = S_v \setminus (k \cup S_v)$ .

não violará mais os mesmos quatro “vínculos de vácuo” que (5.7), mas ainda violará os outros *quatro* “novos vínculos de vácuo” que estão, agora, relacionados às quatro faces que partilham a aresta  $j = S_v \setminus (k \cup S_v)$ , é imediato concluir de

$$O_{S_v}^x \circ \sigma_k^x = \sigma_j^x \circ A_v$$

que *todas* as quatro excitações de face anteriores foram transportadas por  $O_{S_v}^x$  para as adjacências da  $j$ -ésima aresta.

Nestes termos, diante da viabilidade de transportar essas quatro excitações de faces por meio de um operador  $O_{S_v}^x$  sem causar qualquer tipo de custo energético, se torna perfeitamente viável interpretar esse conjunto de excitações “como um todo” como a generalização tridimensional de uma quasipartícula do tipo  $m$  [28]. Aliás, devido à não puntualidade que esse conjunto de excitações apresenta neste 3-DC, se torna bastante natural idealizá-lo como uma espécie de placa, tal como ilustra a Figura 5.4: pois, como  $\mathcal{R}_3$  é uma rede cúbica, *todas* as excitações que compõem essas “quasiplacas” pertencem a um mesmo plano. E, conforme veremos a seguir, além dessa idealização em termos de “quasiplacas” ser bem útil para o bom entendimento dos processos de criação e de transporte, é com ela que também podemos entender, de uma maneira muito mais cômoda, como é possível conceber um “dyon” dentro do 3-DC.



**Figura 5.4:** À esquerda temos a situação usual das ilustrações anteriores onde, ao redor de uma única aresta, foram criadas quatro excitações simultâneas pela ação de um único  $\sigma_j^x$ . Já, à direita, temos uma nova idealização, onde uma placa (que é “furada” pela  $j$ -ésima aresta) passa a representar esse mesmo conjunto de excitações.

### 5.1.2 “Dyons” tridimensionais

Porém, antes analisarmos os pormenores desta possível concepção, é essencial fazermos um breve parêntese aqui para voltarmos as nossas atenções para algo que tem grande valia junto a este fim: para as expressões dos operadores

$$O_\gamma^z = \prod_{j \in \gamma} \sigma_j^z \quad \text{e} \quad O_{\gamma'}^x = \prod_{v \in \gamma'} O_{S_v}^x, \quad (5.10)$$

que são capazes de transportar respectivamente as quasipartículas do tipo  $e$  e as “quasiplacas”, onde  $\gamma$  e  $\gamma'$  são os dois caminhos que, também respectivamente, são formados por arestas e por pontos de  $\mathcal{R}_3$  que são vizinhos “dois a dois”.

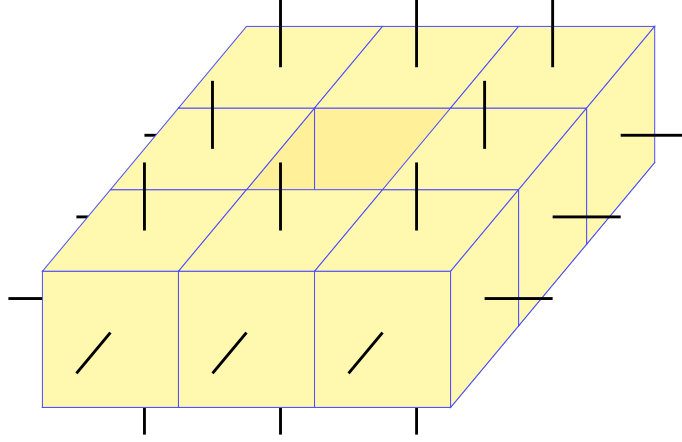
Em verdade, por efeito de todas as observações que já foram feitas no capítulo anterior, não precisamos dar quaisquer detalhes sobre os autoestados de vácuo

$$|\xi_0'\rangle = O_\gamma^z |\xi_0^{(1)}\rangle$$

que, por exemplo, surgem quando um operador  $O_\gamma^z$  age sobre um caminho  $\gamma$  que é fechado e contrátil em  $\mathcal{R}_3$ . O único destaque que certamente precisamos dar aqui se relaciona apenas ao autoestado

$$|\xi_0''\rangle = O_{\gamma'}^x |\xi_0^{(1)}\rangle \quad (5.11)$$

que, devido à ação do operador  $O_{\gamma'}^x$ , sobre um caminho fechado  $\gamma'$ , comporta “estruturas de



**Figura 5.5:** Exemplo de um tubo fechado que pode ser formado por “quasiplacas”, desde que operadores  $O_{\gamma'}^x$  atuem sobre as arestas que definem todos os vértices um caminho fechado  $\gamma'$ .

vácuo” que são identificáveis como discretizações de *tubos fechados*, conforme bem ilustra a Figura 5.5. Todavia, como por trás dessa contratibilidade, também está o fato da relação

$$O_{\gamma'}^x = \prod_{v \in \gamma'} O_{S_v}^x = \prod_{v \in \gamma'} \prod_{j \in S_v} \sigma_j^x = \prod_{v \in \gamma'} A_v$$

ser sempre válida, vemos que não há nada de muito novo por aqui: afinal de contas, a ação do operador  $A_v$  continua sendo interpretável como uma mera transformação de calibre que, por conectar (5.4) a (5.11) e vice-versa, deixa muito claro que estes dois autoestados modelam um mesmo vácuo [28].

É claro que o 3-DC que estamos considerando até agora é muito simplista, uma vez que, por exemplo, ele não comporta autoestados de vácuo que são distintos de (5.4), os quais estão relacionados à ação dos operadores (5.10) sobre redes tridimensionais que possuem condições de contorno mais diversas; voltaremos a esse ponto mais adiante. Porém, são exatamente as expressões que estão contidas em (5.10) que nos mostram como é possível analisar a realização de um “dyon” dentro do 3-DC; pois, algo que elas deixam bem claro é que é perfeitamente possível conceber operadores compostos

$$O_{\gamma}^z \circ O_{\gamma}^x \quad \text{e} \quad O_{\gamma}^x \circ O_{\gamma}^z$$

que, por se valerem de um mesmo caminho  $\gamma$  que não necessariamente é fechado, são bastante úteis nesta concepção.

Aliás, se lembrarmos que uma (e apenas uma) das maneiras pelas quais podemos criar um par de dyons no TC é justamente pela ação de um único

$$O_{\gamma_1^*}^x \circ O_{\gamma_1}^z \quad (5.12)$$

sobre o autoestado de vácuo (4.13), por exemplo, sendo  $\gamma_1^*$  e  $\gamma_1$  dois caminhos não fechados sobre  $\mathcal{R}_2$  cujos extremos coincidem<sup>3</sup>, se torna quase que imediato associar a concepção de um par de dyons no 3-DC à ação de um único

$$O_{\gamma}^x \circ O_{\gamma}^z \quad (5.13)$$

sobre o seu autoestado de vácuo. Entretanto, apesar desse último operador criar duas excitações que denotaremos por  $\varepsilon'$  (as quais são compostas por pares contendo uma quasipartícula do tipo  $e$  e uma “quasiplaca” que, além de estarem dispostas à menor distância possível uma da outra, são transportáveis sem causar qualquer custo energético ao sistema), ainda precisamos ter uma certa cautela antes de afirmarmos que esse par de excitações realmente corresponde a um par de dyons neste modelo tridimensional. Afinal, basta ver que, apesar de (5.12) realmente indicar que a maneira mais simples de conceber um par de dyons no TC é por meio de um único operador

$$\sigma_j^x \circ \sigma_j^z \quad (5.14)$$

que age sobre uma mesma aresta de (4.13), se assumirmos que a dupla resumida num único  $\varepsilon'$  deve ser interpretada como um único “dion”, é imediato perceber que este mesmo (5.14) não é capaz de criar um par de dyons no 3-DC: o que ele faz apenas é criar um único “dion” acrescido de uma quasipartícula do tipo  $e$  nas suas adjacências.

Embora isso, por si só, já pareça estragar qualquer chance do 3-DC corresponder ao TC por redução dimensional, quando voltamos as nossas atenções para um operador

$$\sigma_j^z \circ O_{\bar{S}_v}^x, \quad (5.15)$$

cuja  $j$ -ésima aresta pertence ao conjunto  $S_v$ , mas não pertence a um conjunto  $\bar{S}_v$  que é composto por quatro arestas que são *coplanares*, um resultado interessante aparece. Afinal de contas, como a

<sup>3</sup>Ou seja, as arestas que pertencem aos extremos de  $\gamma_1^*$  devem ser *duais* às arestas que extremizam  $\gamma_1$ .

relação

$$O_{\tilde{S}_v}^x \circ A_v = \sigma_j^x \circ \sigma_k^x$$

nos mostra que

$$O_{\tilde{S}_v}^x | \xi_0^{(1)} \rangle = O_{\tilde{S}_v}^x \circ A_v | \xi_0^{(1)} \rangle = \sigma_j^x \circ \sigma_k^x | \xi_0^{(1)} \rangle$$

é uma igualdade válida onde  $j$  e  $k$  indexam duas arestas que são opostas, é exatamente esse resultado que nos diz que  $O_{\tilde{S}_v}^x$  é um operador capaz de criar um par de “quasiplacas” e que, portanto, o operador (5.15) é capaz de criar um par de duplas  $\varepsilon'$ .

### Descrição estatística

Apesar desta última conclusão indicar que um princípio da correspondência entre ambos os modelos se completa caso  $\varepsilon'$  seja realmente interpretado como um “dyon”, ainda precisamos notar duas coisas importantes. E, a primeira delas, diz respeito a uma aparente “ambiguidade estatística” que parece estar relacionada a essa mesma combinação: afinal, girar uma quasipartícula do tipo  $e$  ao redor de qualquer “quasiplaca” parece implicar que ambas podem ser consideradas como

- “anyons” em relação à outra, caso o caminho fechado escolhido para isso contenha a aresta que “fura” a “quasiplaca” em questão, e como
- bósons, numa situação contrária a essa.

É claro que, como o giro ou transporte deste suposto “dyon”  $\varepsilon'$  deve mantê-lo *íntegro* ao longo do trajeto escolhido para isso, toda essa aparente “ambiguidade” não tem a menor importância para a sua definição, dado que a quasipartícula do tipo  $e$  que compõe  $\varepsilon'$  *sempre* precisa “furar” uma “quasiplaca” para completar esse trajeto. Ou seja, tal como acontece com os “dyons” que estão relacionados ao TC,  $\varepsilon'$  também se comporta como um *férmion* em relação a si mesmo, deixando muito claro que, se  $\varepsilon'$  realmente puder ser identificado como um “dyon”, a fermionicidade é uma propriedade intrínseca apenas a essas quasipartículas e não às demais que podem figurar no 3-DC [28].

Porém, é exatamente quando nos lembramos das excitações do TC que a segunda coisa que devemos observar vem à tona sob a forma de um questionamento: afinal, se as quasipartículas dos tipos  $e$  e  $m$  *nunca* conseguem atravessar uma à outra no TC, por que é razoável admitir que isso



acontece no 3-DC em relação às quasipartículas do tipo  $e$  e “quasiplacas”?

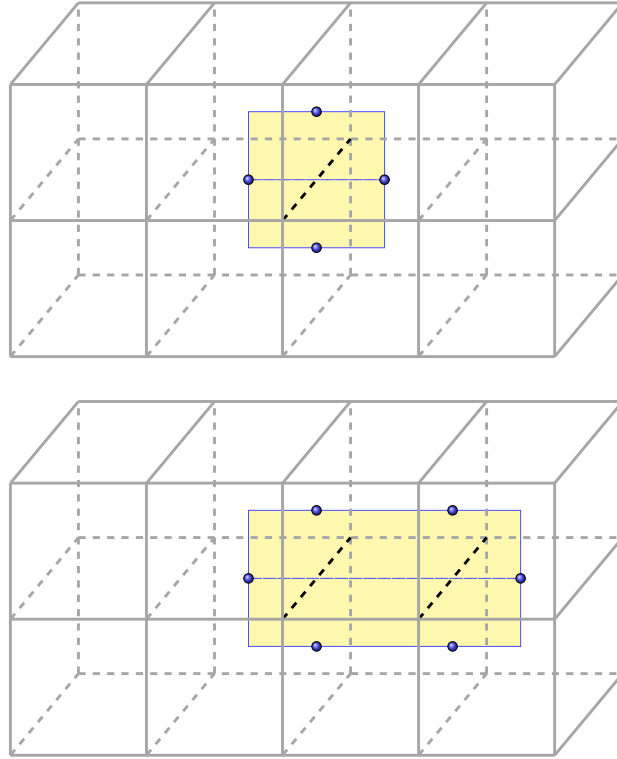
Pelo ponto de vista de quem enxerga este 3-DC apenas como um “toy model” que, a priori, não tem necessariamente qualquer compromisso para com a realidade que nos cerca, a razoabilidade desta admissão segue por uma simples consequência desta “quasiplaca” sempre estar fincada sobre a aresta que faz parte do caminho por onde uma quasipartícula  $e$  precisa passar; ou seja, trata-se de uma propriedade que surge pela maneira como o modelo foi definido. Porém, pelo ponto de vista de quem enxerga estas quasipartículas como algo que deve ser permutado, esta pergunta até que pode fazer algum sentido, haja vista que, se esquecêssemos toda a liberdade tridimensional que as partículas têm para transitar (e, portanto, toda a liberdade que elas têm para trocarem de lugar umas com as outras), a possibilidade de tais “furos” poderia implicar numa estatística entre estas quasipartículas e estas “quasiplacas” que parece ser ambígua.

Independente de quaisquer pontos de vista, uma das maneiras de respondermos a este questionamento é pensando no que aconteceria se, por exemplo, impuséssemos ao 3-DC que as quasipartículas do tipo  $e$  não podem “furar” quaisquer “quasiplacas”. Afinal, num primeiro momento, isso parece resolver a “ambiguidade estatística” que poderia estar relacionada às excitações que elas representam, uma vez que tal imposição extingue qualquer chance das quasipartículas do tipo  $e$  e “quasiplacas” serem “anyons” em relação à outras: todas elas passam a se comportar apenas como bósons, o que vai em pleno acordo para com o que sabemos sobre as partículas que têm uma liberdade tridimensional para serem permutadas.

No entanto, existe um sério problema nesta imposição de “não furo”. Pois, já que uma quasipartícula do tipo  $e$  não pode mais “furar” uma “quasiplaca”, como uma estatística para  $\varepsilon'$  pode ser definida? Afinal de contas, lembrando que esse candidato a “dyon” é, por definição, a conjunção de uma única quasipartícula  $e$  com uma única “quasiplaca”, essa regra do “não furo” acaba deixando bem claro que é impossível transportá-lo *integralmente* ao longo de  $\mathcal{R}_3$ . E, como é exatamente a impossibilidade de realizarmos um transporte íntegro deste  $\varepsilon'$  que nos impede de bem definir uma estatística para ele, também acaba ficando bem claro que, se quisermos realmente defini-lo como o “dyon” neste 3-DC, esta regra do “não furo” não pode ser imposta ao modelo.

### Uma observação interessante

Aliás, se olharmos bem para o que acontece no TC, essa imposição de que uma quasipartícula do tipo  $e$  não pode “furar” uma “quasiplaca” é completamente *obsoleta*. Pois, por mais que não pareça,

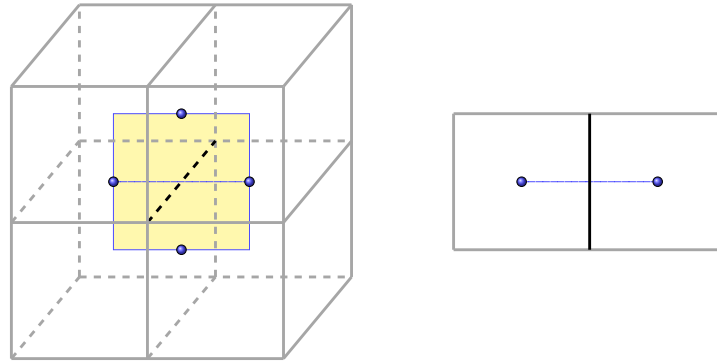


**Figura 5.6:** Esquema de justaposição de “quasiplacas” que nos permite ilustrar a lei do perímetro. Afinal, enquanto na figura acima temos uma única “quasiplaca” com uma energia igual a 4, na figura abaixo temos duas “quasiplacas” justapostas com uma energia igual a 6: ou seja, a energia total nos dois casos, assim como em todos os demais casos, é exatamente igual ao perímetro (visto em termos do número de arestas) que encerra o conjunto de “quasiplacas”.

todos esses “furos” já são bem comuns no TC. E, para entender o porquê disso, basta analisar a situação que se envolve, por exemplo, com uma quasipartícula do tipo  $e$  que precisa ser transportada através de uma aresta  $j$  que, por já ter sido previamente operada por um  $\sigma_j^x$ , já abriga duas quasipartículas do tipo  $m$  nas duas faces que as cercam. Afinal, apesar da bidimensionalidade de  $\mathcal{R}_2$  nos impedir de realizar as excitações criadas por um  $\sigma_j^x$  como a “quasiplaca” que está presente na Figura 5.4, passa a não ser nada absurdo pensar no transporte desta quasipartícula do tipo  $e$  em termos do “furo” que ela deve fazer na “quasiplaca” *unidimensional* previamente criada por  $\sigma_j^x$ .

Por se dizer, é exatamente diante desta última realização em termos de “quasiplacas” que fica bem claro o porquê das quasipartículas do tipo  $m$  serem livres no TC, mas serem confinadas no 3-DC. Pois,

- enquanto a situação ilustrada na Figura 5.6 deixa bem claro que o transporte das quasipartículas do tipo  $m$ , ao longo de um caminho dual  $\gamma^*$  de  $\mathcal{R}_3$  (que está destacado em azul



**Figura 5.7:** À esquerda, temos a mesma ilustração que já foi usada na Figura 5.4 para apresentar uma quasiplaca, porém dando destaque à intersecção que existe entre esta quasiplaca, que foi criada a partir da ação de um operador  $\sigma_j^x$  sobre a  $j$ -ésima aresta de  $\mathcal{R}_3$ , e um dos planos que suporta esta mesma aresta. Já a esquerda, vemos apenas o recorte deste mesmo plano onde constam as duas únicas excitações que existem neste ambiente bidimensional. Note que todas as excitações que são criadas por um único  $\sigma_j^x$  num modelo bidimensional, que é obtido seja por um corte ou por uma contração de todos os planos paralelos a um único plano que é discretizável por uma  $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$ , são totalmente equivalente as quasipartículas tipo  $m$  do TC, as quais são transportáveis sem qualquer custo energético.

pontilhado), mostra uma *lei do perímetro* para as suas energias (ou seja, a energia das quasipartículas que estão envolvidas para com este transporte se identifica com a quantidade de arestas duais que encerram a união de “quasiplacas” que surgem ao longo de  $\gamma^*$ ),

- essa mesma lei *não* vale para um transporte que se restringe a um caminho dual  $\gamma^*$  de  $\mathcal{R}_2$  (que pode ser visto como a projeção do caminho dual  $\gamma^*$  de  $\mathcal{R}_3$  sobre  $\mathcal{R}_2$ ), uma vez que esta rede não comporta faces perpendiculares à variedade bidimensional que  $\mathcal{R}_2$  discretiza.

E essa não validade da lei do perímetro pode ser entendida de uma forma até que muito simples, desde que notemos que  $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$ . Afinal, se pensarmos na situação deste transporte de quasipartículas do tipo  $m$  pela perspectiva de  $\mathcal{R}_3$ , esse mesmo transporte quando restrito a rede bidimensional  $\mathcal{R}_2$  pode ser realizado em termos do “corte” (ou da projeção) que está a mostra na Figura 5.7: ou seja, toda a situação do transporte das quasipartículas do tipo  $m$  que, por exemplo, se associam a um modelo como o TC, pode ser perfeitamente obtida através de uma *restrição* a  $\mathcal{R}_2 \subset \mathcal{R}_3$ .

## 5.2 A importância das condições de contorno

Diante de todos estes aspectos positivos, e principalmente lembrando que a definição de um “dyon” já foi, de certa forma, feita “à mão” no TC (para que fosse possível estruturar um mo-

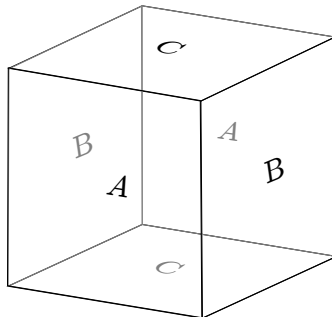
delo onde *todas* as suas quasipartículas pudessem ser transportadas sem causar qualquer custo energético ao sistema), é mais do que conveniente declarar que faremos exatamente igual em relação ao 3-DC: ou seja, definiremos, também “à mão”, que  $\varepsilon'$  realmente corresponde a um “dyon”  $\varepsilon$ , uma vez que a quasipartícula do tipo  $e$  e a “quasiplaca” que o definem também podem ser transportadas sem causar qualquer custo energético ao sistema [28].

Entretanto, uma coisa que é muito importante de ser destacada aqui é que, além das regras de fusão que estão relacionadas a todas essas quasipartículas do tipo  $e$  e “quasiplacas” serem exatamente as mesmas que as do TC (já que elas são criadas pelos mesmos operadores), todos os resultados que apresentamos até agora se referem ao caso bem particular de um 3-DC que satisfaz a (5.3). E uma boa maneira de pensarmos nesta situação é, por exemplo, interpretando o 3-DC como um modelo que está definido sobre uma rede cúbica que (i) pode ser infinita ou que (ii) possui condições periódicas de contorno em todas as suas direções. E, se este for realmente o caso, a única coisa que precisamos ter em mente é que,

- enquanto um 3-DC que é construído sobre a primeira rede (que é infinita) possui um autoestado de vácuo que é único e dado por (5.4),
- para a segunda (que é periódica) a degenerescência do estado fundamental provavelmente será maior, uma vez que esta situação é muito parecida com a do TC, já que qualquer rede cúbica com condições periódicas de contorno em todas as suas direções pode ser perfeitamente identificada, por construção, como a discretização cúbica de um toro tridimensional  $\mathcal{T}_3$ .

### 5.2.1 O “Toric Code” tridimensional

Aliás, lembrando que degenerescência do estado fundamental do TC está diretamente vinculada à existência de curvas não contráteis sobre  $\mathcal{T}_2$ , se realmente quisermos entender como é que a degenerescência do estado fundamental deste novo “Toric Code” tridimensional (3-TC) funciona, precisamos entender como é que funciona todo esse esquema de não contratibilidade que está relacionado ao  $\mathcal{T}_3$ . E certamente uma das coisas que *poderíamos* usar em favor desse entendimento é o simples fato de que o número de *curvas* que compõem o grupo fundamental de  $\mathcal{T}_3$  é igual a *três*: afinal de contas, assim como ocorre no TC, a não contratibilidade destas curvas *poderia* perfeitamente nos remeter a novos autoestados de vácuo que são independentes de (5.4).



**Figura 5.8:** Da mesma maneira que um toro bidimensional pode ser construído colando as arestas opostas de quadrado, é perfeitamente possível conceber um toro tridimensional através de um procedimento análogo de colagem. Apesar da impossibilidade prática de visualizar o resultado desta construção, basta tomarmos um cubo tridimensional e colarmos as suas faces opostas [43]. Note que, aqui (e apenas aqui), as letras presentes na figura não se referem a qualquer um dos operadores mencionados nestas notas: essas letras servem apenas como índices que dão destaque às faces que, duas-a-duas, precisam ser coladas.

Só que, conforme bem enfatizamos nesta última afirmação, *poderia*. E a razão de termos dado toda essa ênfase ao “futuro do pretérito” é bem simples: pois, como o transporte das excitações do tipo  $m$  não mais corresponde ao vácuo quando feito ao longo de qualquer caminho fechado  $\tilde{\gamma}^*$ , os elementos do grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{T}_3)$  não podem moderar qualquer autoestado de vácuo no 3-TC. Todavia, como estamos lidando com um toro que é tridimensional, ainda existe um aspecto topológico que pode ser explorado para avaliar a degenerescência do estado fundamental deste 3-TC: esse aspecto é a ordem dos *grupos de homologia*  $\mathcal{H}_k(\mathcal{T}_3)$ , uma vez que cada um deles mede a quantidade de  $k$ -ciclos de  $\mathcal{T}_3$  que não podem ser considerados como  $k$ -bordos, sendo  $0 \leq k \leq 3$  [62]. Afinal de contas, do mesmo jeito que é fácil demonstrar que existe  $n$  curvas fechadas não contráteis dando estrutura ao grupo fundamental de um toro  $n$ -dimensional  $\mathcal{T}_n$ , também não é difícil ver que existe uma quantidade não nula de toros  $\mathcal{T}_k$  não contráteis que estão mergulhados em  $\mathcal{T}_n$  e, portanto, que são tais que  $k \leq n$ .

Embora tudo isso pareça ter um aspecto bem diferente do que está envolto para com os toros bidimensionais, se olharmos bem para as curvas fechadas não contráteis que podem ser definidas sobre  $\mathcal{T}_2$ , toda essa “má impressão” começa a se desfazer rapidamente: pois, como todas essas curvas têm condições periódicas de contorno, são elas quem devem ser vistas como os 1-ciclos que não são bordos deste toro bidimensional e que, portanto, podem ser vistas como os toros unidimensionais  $\mathcal{T}_1$  que estão nele imersos. Desta maneira, podemos afirmar que todas essas “novas” superfícies  $\mathcal{T}_k$  nada mais são do que meras generalizações dos caminhos  $\tilde{\gamma} = \mathcal{T}_1$  que estão contidas em  $\mathcal{M}_2$  (ou seja, elas são os  $k$ -ciclos que dissemos acima, os quais estão contidos em  $\mathcal{T}_n$  e que não podem ser vistos como  $k$ -bordos), dado que agora existe uma maior liberdade para definí-las que sequer de-

pende do fato de  $n$  ser um número maior que 2: basta ver que o próprio toro  $\mathcal{T}_2$  também pode ser visto, por exemplo, como uma superfície toroidal não contrátil que está mergulhada nele mesmo.

E é por efeito deste quadro que um segundo, um terceiro e um quarto autoestado de vácuo finalmente já se tornam bastante evidentes no 3-TC:

$$|\xi_0^{(1+d)}\rangle = O_{\mathcal{T}_d}^x |\xi_0^{(1)}\rangle, \quad (5.16)$$

onde  $d = 1, 2, 3$  e

$$O_{\mathcal{T}_d}^x = \prod_{j \perp \mathcal{T}_d} \sigma_j^x \quad (5.17)$$

é tal que cada operador  $\sigma_j^x$  age sobre a  $j$ -ésima aresta que é perpendicular à discretização de um toro bidimensional  $\mathcal{T}_d$  que está contida em  $\mathcal{R}_3$ , discretização essa que ocorre pela fixação das faces que são normais a uma única das três possíveis direções  $d$ . É claro que, da mesma maneira que acontece com (4.26), estes não são os únicos autoestados de vácuo adicionais que estão relacionados ao 3-TC: como existem mais *quatro* combinações

$$O_{\mathcal{T}_1}^x \circ O_{\mathcal{T}_2}^x, \quad O_{\mathcal{T}_1}^x \circ O_{\mathcal{T}_3}^x, \quad O_{\mathcal{T}_2}^x \circ O_{\mathcal{T}_3}^x \quad \text{e} \quad O_{\mathcal{T}_1}^x \circ O_{\mathcal{T}_2}^x \circ O_{\mathcal{T}_3}^x \quad (5.18)$$

que podem ser feitas entre os operadores (5.17), também existem mais quatro novos autoestados de vácuo surgindo delas, o que deixa muito bem claro que estamos diante de um modelo com um estado fundamental que é *octodegenerado*. E, por se dizer, essa octodegenerescência vai em pleno acordo com o fato do segundo grupo de homologia de um  $\mathcal{T}_3$  com gênero unitário ser [28]

$$\mathcal{H}_2(\mathcal{T}_3) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

Afinal de contas, como o primeiro  $\mathcal{H}_1(\mathcal{T}_3)$  e o segundo grupo de homologia de um toro tridimensional são iguais, ao notarmos que o *Teorema de Hurewicz* nos mostra que  $\mathcal{H}_1(\mathcal{T}_3)$  pode ser obtido através de uma *Abelianização* de um  $\pi_1(\mathcal{T}_3)$  [49] que é composto por *oito* elementos, podemos tomar emprestada a visão que  $\mathcal{H}_1(\mathcal{T}_3)$  nos oferece para afirmar o seguinte: do mesmo jeito que  $\mathcal{H}_1(\mathcal{T}_3)$  acaba servindo para identificar o número de geradores que levam às oito distintas classes de homotopia de caminhos fechados que definem  $\pi_1(\mathcal{T}_3)$ , podemos associar a contagem que  $\mathcal{H}_2(\mathcal{T}_3)$  faz ao cômputo das oito distintas classes de homotopia de *superfícies fechadas* que acabaram se associando a esses oito autoestados de vácuo do 3-TC.

## Parte III

# **“Quantum Double Models” e a inserção de campos de matéria**





## Capítulo 6

# Noções gerais sobre os “Quantum Double Models”

### 6.1 Comentários iniciais

Diante de tudo o que foi apresentado até agora sobre o “Toric Code” (TC) e sobre algumas das suas generalizações que foram expostas no capítulo anterior, é nítido que ainda existe um leque bem grande de possibilidades para que outras sejam construídas. No entanto, se pensarmos apenas naquelas que não dependem de qualquer tipo de extensão dimensional, uma das primeiras linhas de generalizações que surge é aquela que se apoia na atribuição de um vetor

$$|\varphi_j\rangle = a_0^{(\varphi)} |0\rangle + \dots + a_{n-1}^{(\varphi)} |n-1\rangle, \quad (6.1)$$

que é um pouco mais geral, às arestas de  $\mathcal{R}_2$ . Ou seja, um vetor que nada mais é do que um elemento de um espaço de Hilbert  $\mathfrak{H}_n$  que possui  $n$  dimensões, cuja base é dada pelo conjunto  $\mathcal{B}_j = \{|g\rangle : g \in G_1\}$  que contém todos os vetores que são indexados pelos elementos de um grupo  $G_1$  que não é necessariamente Abelian.

É claro que outras linhas de generalizações também surgem de uma maneira que é tão natural quanto essa. Todavia, dar vazão a uma primeira generalização que se vale de um vetor (6.1) e de uma  $\mathcal{R}_2$  tal que

$$\dim S_p = \dim S_v = 4 \quad (6.2)$$

é tão mais simples, que um dos modelos que podem ser criados desta maneira já é muito bem conhecido: trata-se do “Quantum Double Model” (QDM) [4, 63], cujo nome segue por efeito deste modelo se apoiar sobre a chamada álgebra do “Quantum Double” de V. G. Drinfeld [64].

### 6.1.1 Características gerais

Independente de qualquer coisa mais específica que podemos falar sobre os QDMs, algo que já fica bem claro da associação de (6.1) a cada aresta de  $\mathcal{R}_2$  é que, como este elemento não pertence necessariamente a um espaço de Hilbert bidimensional, os operadores de um sistema assim concebido não podem ser expressos necessariamente como produtórios de (4.5). E este é exatamente o caso do operador Hamiltoniano

$$H_{G_1} = - \sum_v A_v^{(G_1)} - \sum_p B_p^{(G_1)} \quad (6.3)$$

que, apesar de se apresentar com a mesma “roupagem” do Hamiltoniano relacionado ao TC, precisa ser composto por operadores de vértice  $A_v^{(G_1)}$  e de face  $B_p^{(G_1)}$  que são um pouco mais gerais que (4.4). Contudo, antes de fazermos uma apresentação mais explícita sobre as suas expressões (e, até mesmo, para que todas elas façam sentido), é imprescindível atentar a uma característica importante destes modelos, a qual, inclusive, já chegou a ser mencionada bem no início destas notas: os QDMs são bons exemplos de *teorias de calibre discretas*.

#### Sobre a definição dos operadores

Conforme já ficou muito claro do segundo capítulo, a definição de uma *teoria de calibre* (seja ela contínua ou discreta) se fundamenta sobre, pelo menos, duas coisas:

- (i) o sistema físico que ela representa está definido apenas sobre uma subvariedade  $\mathcal{M}_{n-m} \subset \mathcal{M}_n$  e, exatamente por isso, pode ser parametrizado apenas em termos de um subconjunto que contém elementos que o descreve intrinsecamente; e
- (ii) sejam quais forem as escolhas (que são infinitas) que tomemos para os parâmetros extrínsecos a  $\mathcal{M}_{n-m}$ , eles não destroem a *covariância* das equações de movimento [17].

No entanto, quando lidamos com uma teoria de calibre considerada *discreta*, existe uma coisa “a mais” que caracteriza essa teoria: quando o sistema se encontra num estado físico qualquer, a *holonomia* de cada uma das faces de  $\mathcal{R}_n$ , neste estado, deve ser preservada [19].

Embora tudo isso talvez tenha passado despercebido nos dois últimos capítulos, tanto o TC como um 3-DC são bons exemplos de teorias de calibre discretas. Afinal de contas, basta ver que, apesar dos seus operadores de aresta  $A_v$  sempre trocarem *todos* os elementos (4.1) associados a

um  $S_v$  por outros, que são complementares segundo a álgebra de  $\mathbb{Z}_2$ , essa troca sempre é feita sem *nunca* alterar os autovalores de  $B_p$ . Desta maneira, como os elementos do grupo de calibre  $G_1$  podem ser interpretados, em verdade, como os parâmetros intrínsecos que são necessários para descrever o sistema sobre uma rede  $\mathcal{R}_2$  [19], se torna completamente viável interpretar  $A_v$  como um operador que realiza as transformações locais de calibre sobre o sistema, ao mesmo tempo que  $B_p$  deve ser interpretado como o medidor da holonomia de cada uma das faces que compõem  $\mathcal{R}_2$  [4].

Diante dessa conclusão, para que um QDM possa ser realmente interpretado como uma generalização do TC, é imprescindível que os seus operadores de vértice e de face apresentem essas mesmas propriedades: ou seja, o operador  $A_v^{(G_1)}$  precisa realizar transformações locais de calibre, enquanto  $B_p^{(G_1)}$  precisa medir as holonomias do sistema. E, de acordo com a concepção que foi dada por Kitaev para o operador de aresta

$$A_v^{(G_1)} = \prod_{j \in S_v} \left( \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} L_j^{(g)} \right) \quad (6.4)$$

de um QDM [4], este operador cumpre perfeitamente tal propósito, já que ele se vale de uma superposição de operadores lineares  $L_j^{(g)} : \mathfrak{S}^{N_a} \rightarrow \mathfrak{S}^{N_a}$  que *trocamos* o elemento  $|h_j\rangle$ , que está originalmente associado à  $j$ -ésima aresta de  $\mathcal{R}_2$ , por um outro<sup>1</sup>

- $|gh_j\rangle$ , se a orientação que é atribuída a essa aresta apontar “para fora” do  $v$ -ésimo vértice, ou
- $|h_jg^{-1}\rangle$ , numa situação contrária a essa,

de modo a preservar as holonomias do sistema. Note que, nessa definição do operador  $L_j^{(g)}$ , a noção de uma rede orientada se faz presente, assim como deve ser para qualquer modelo que se proponha a ser “de calibre discreto”.

Por se dizer, embora a definição desse último operador pareça distoar daquela que está relacionada ao operador de vértice (4.4), devemos notar que essa sensação de distoamento não passa de uma falsa impressão. Pois, uma vez que  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  é a base escolhida para descrever os

<sup>1</sup>Para efeitos práticos, estamos utilizando uma notação simplificada que deve ser traduzida como

$$gh = \mu(g, h) \quad ,$$

onde  $\mu : G_1 \times G_1 \rightarrow G_1$  é a aplicação que dá uma estrutura de grupo ao conjunto  $G_1$  cuja cardinalidade é  $|G_1|$ . Para maiores detalhes sobre isso, vide o Apêndice B.

*campos discretos* que estão associados às arestas no TC, é da expressão (4.8) que fica bem clara a identificação

$$L_j^{(g)} = \sigma_j^x \quad (6.5)$$

quando tomamos um  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , desde que, é claro,  $g$  seja um elemento distinto da identidade. Entretanto, é exatamente por causa desta mesma identificação que também fica bastante clara a existência de uma diferença, bastante sutil, entre os operadores (4.4) e (6.4) que merece ser discutida: a diferença é que o último deles conta com uma componente  $L_j^{(e)}$  a mais, que nada mais é do que um operador identidade  $\mathbb{1}_j$ . E, para entendermos o porquê disso acontecer, podemos nos valer deste mesmo caso que já está relacionado a  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , dado que ele nos permite escrever

$$A_v^{(\mathbb{Z}_2)} = \frac{1}{2} (\mathbb{1}_v + A_v) \quad . \quad (6.6)$$

Afinal, apesar de, num primeiro momento, este resultado eventualmente dar a entender que o TC não pode ser identificado como um QDM que adota  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , toda esta falsa impressão pode começar a ser desconstruída desde que notemos que, salvo a presença do fator  $1/2$  encabeçando (6.6), esse operador  $A_v^{(\mathbb{Z}_2)}$  não é nada estranho ao TC: basta ver, por exemplo, que é exatamente ele quem já aparece na expressão do autoestado de vácuo (4.13).

Em linhas gerais, e como provavelmente já deve ter ficado claro das explicações dadas no Capítulo 4, esse autoestado (4.13) fora construído propositalmente como tal pela simples consequência do operador  $\mathbb{1}_v + A_v$  “trabalhar”, de alguma maneira, como um *projetor*. Logo, como essa mesma observação projetiva também se estende naturalmente a  $\mathbb{1}_p + B_p^2$ , se torna perfeitamente possível lidar com um Hamiltoniano

$$H' = -\frac{1}{2} (\mathbb{1}_v + A_v) - \frac{1}{2} (\mathbb{1}_p + B_p) \quad (6.7)$$

alternativo para o TC, haja vista que, em relação ao operador Hamiltoniano (4.3) original, ele apenas *altera* a diferença entre os níveis de energia do sistema.

Todavia, para que essa falsa impressão se desfaça de uma vez por todas, ainda precisamos olhar para o operador de face que figura em (6.3), cuja definição se faz por meio de uma superposição

---

<sup>2</sup>Apesar de não ser possível utilizar este último operador para definir qualquer estado de vácuo análogo a (4.13), por exemplo.

[5]

$$B_p^{(G_1)} = \sum_{\star} \left( \prod_{j \in S_p} T_j^{(g_j)} \right) , \quad (6.8)$$

que é um pouco diferente da anterior. Pois, embora ela seja definida por meio de operadores  $T_j^{(g_j)} : \mathfrak{H}_n^{N_a} \rightarrow \mathfrak{H}_n^{N_a}$  que também devem ser lineares, e embora ela também *troque* o elemento  $|h_j\rangle$  originalmente associado à  $j$ -ésima aresta de  $\mathcal{R}_2$  por um outro

- $\delta(g_j, h_j) |h_j\rangle$ , se a orientação dessa aresta coincidir com a de  $\mathcal{M}_2$ , ou
- $\delta(g_j^{-1}, h_j) |h_j\rangle$ , caso contrário,

ela se apoia sobre um somatório que, apesar de também se envolver exclusivamente com os elementos de  $G_1$ , foi propositalmente indexado com “ $\star$ ” por se restringir apenas aos elementos de um

$$\left\{ g_j \in G_1 : \prod_{j \in S_p} g_j = U_p \right\} . \quad (6.9)$$

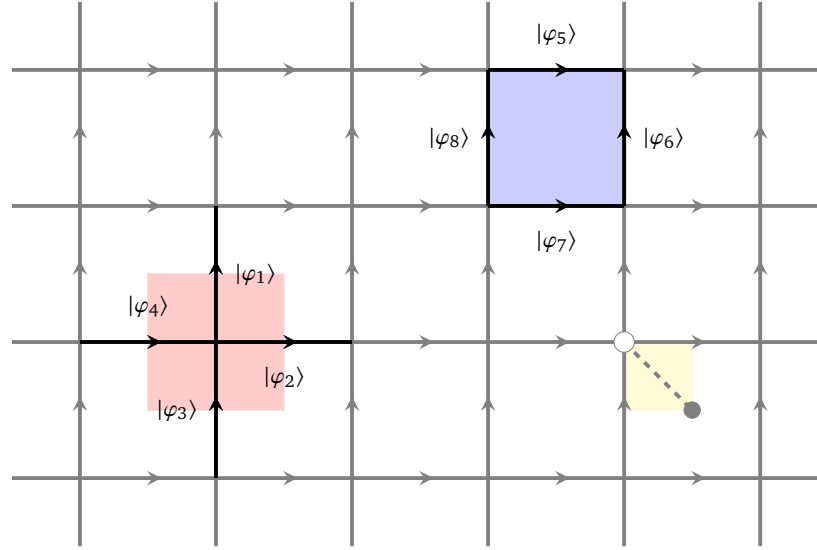
Ou seja, temos um operador que, conforme já dissemos anteriormente, mede a holonomia que está associada à  $p$ -ésima face [65]. E, desta maneira, como a definição dos operadores  $T_j^{(g_j)}$  já deixa muito bem claro que, para o grupo  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , temos

$$T_j^{(e)} = \mathbb{1}_j \quad \text{e} \quad T_j^{(g)} = \sigma_j^z , \quad (6.10)$$

onde  $g$  é, mais uma vez, qualquer elemento de  $G_1$  distinto da identidade, é imediato perceber que o princípio da correspondência é realmente respeitado por um QDM em relação ao TC: afinal de contas, a menos de um fator  $1/2$ , o operador  $B_p^{(\mathbb{Z}_2)}$  também se reduz ao operador de face que aparece em (6.7).

## 6.2 Um exemplo Abelian

Diante de tudo isso, já que conhecemos qual é a expressão do operador Hamiltoniano (6.3) de um QDM arbitrário, é interessante apresentarmos ao menos um desses modelos para que fique claro quais são as suas principais propriedades. E, diante dos interesses declaradamente Abelianos destas notas, tomaremos um QDM que se apoia sobre um  $G_1 = \mathbb{Z}_n$  como exemplo, sendo  $n$  um número *inteiro* qualquer.



**Figura 6.1:** Recorte da rede quadrada e orientada que dá suporte ao QDM, onde os setores vermelho e azul estão associados às mesmas regiões que definem um vértice e uma face do TC, enquanto o setor amarelo se refere à menor região (sítio) ao qual podemos associar um par  $s = (v, p)$ .

### 6.2.1 Propriedades gerais

E a primeira coisa que deve ficar clara sobre este modelo é que, de acordo com tudo o que já dissemos na última Seção, todos os campos de calibre que foram distribuídos entre as arestas de  $\mathcal{R}_2$  devem se submeter às transformações que são efetuadas por  $A_v^{(\mathbb{Z}_n)}$ . E, tendo ciência disso, ao lembrarmos que esse operador deve ser interpretado como a generalização do mesmo (6.6) que já está relacionado ao TC, fica bem claro que a melhor maneira de expressá-lo é através de uma superposição

$$A_v^{(\mathbb{Z}_n)} = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathbb{Z}_n} A_v^{(g)} \quad ,$$

cujas componentes são, no caso da rede quadrada  $\mathcal{R}_2$  que consta na Figura 6.1, dadas por

$$A_v^{(g)} = (X_1^\dagger)^g \circ (X_2^\dagger)^g \circ (X_3)^g \circ (X_4)^g \quad .$$

Aqui

$$X = \sum_{h \in \mathbb{Z}_n} |(h+1) \bmod n\rangle \langle h| \quad , \quad (6.11)$$

nada mais é do que a generalização do operador  $\sigma^x$  ao grupo  $\mathbb{Z}_n$ . Aliás, analogamente a tudo isso, a expressão do operador de fase desse mesmo modelo pode ser expressa como

$$B_p^{(\mathbb{Z}_n)} = \sum_{g \in \mathbb{Z}_n} B_p^{(g)} ,$$

cujas componentes

$$B_p^{(g)} = (Z_5^\dagger)^g \circ (Z_6)^g \circ (Z_7)^g \circ (Z_8^\dagger)^g$$

também se valem de uma generalização do operador  $\sigma^z$ , que é dada por

$$Z = \sum_{h \in \mathbb{Z}_n} \omega^h |h\rangle \langle h| , \quad (6.12)$$

onde  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}}$  é o gerador do grupo  $\mathbb{Z}_n$ <sup>3</sup>.

### 6.2.2 Excitações elementares

Já a segunda coisa que deve ficar clara aqui é que, diante das expressões (6.11) e (6.12), precisamos ter em mente que

$$ZX = \omega XZ . \quad (6.13)$$

E, por mais simples que esta relação possa parecer, é a partir dela que podemos analisar aspectos bem importantes desse QDM. E o primeiro deles é, por exemplo, aquele que surge como uma simples consequência das propriedades de comutação entre as componentes  $A_v^{(g)}$  e  $B_p^{(g)}$ : afinal de contas, como essas componentes são tais que [5]

$$\begin{aligned} A_v^{(g)} A_v^{(g')} &= A_v^{(gg')} , & (A_v^{(g)})^\dagger &= A_v^{(g^{-1})} , & B_p^{(h)} B_p^{(h')} &= \delta_{h,h'} B_p^{(h)} , \\ (B_p^{(h)})^\dagger &= B_p^{(h)} & \text{e} & & A_v^{(g)} B_p^{(h)} &= B_p^{(ghg^{-1})} A_v^{(g)} , \end{aligned} \quad (6.14)$$

elas deixam claro que

$$\left[ A_v^{(\mathbb{Z}_n)} , B_p^{(\mathbb{Z}_n)} \right] = 0 , \quad (6.15)$$

o que só vem a comprovar que esse QDM é, de fato, um modelo *solúvel*. Por se dizer, devido não apenas a todas as propriedades projetivas que são inerentes aos operadores  $A_v^{(\mathbb{Z}_n)}$  e  $B_p^{(\mathbb{Z}_n)}$ , mas ao

<sup>3</sup>Para maiores detalhes sobre isso, vide o Apêndice B.

simples fato de que autoestado de vácuo  $|\xi_0\rangle$  deste QDM precisa satisfazer a

$$A_v^{(\mathbb{Z}_n)} |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad \text{e} \quad B_p^{(\mathbb{Z}_n)} |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle, \quad (6.16)$$

também acaba ficando bem claro que, no caso de  $\mathcal{R}_2$  ser uma rede capaz de discretizar um plano infinito (ou qualquer outra subvariedade com gênero *nulo*), o estado de vácuo deste modelo será *único* e dado por

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \prod_v A_v^{(\mathbb{Z}_n)} \underbrace{|0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle}_{N_a \text{ vezes}}, \quad (6.17)$$

onde  $N_a$  é o número de arestas que compõem  $\mathcal{R}_2$ .

Já o segundo aspecto importante que segue de (6.13) é que, devido à sua generalização

$$Z^g X^h = \omega^{(gh) \bmod n} X^h Z^g \quad (6.18)$$

certamente figurar no desenvolvimento das relações que avaliam os possíveis estados de “não vácuo” deste QDM, a quantidade de quasipartículas que podem ser criadas sobre um autoestado de vácuo é igual a  $n^2$ : pois,

- (i) como cada um dos operadores  $(Z_j)^g$  e  $(X_k)^g$  consegue criar  $n - 1$  generalizações para as respectivas quasipartículas do tipo  $e$  e  $m$ ,
- (ii) enquanto um operador composto  $(X_j)^g \circ (Z_j)^h$  é capaz de criar  $(n - 1)^2$  novos tipos de “dyons”  $\varepsilon$  num *sítio* s arbitrário<sup>4</sup>,

a soma de todas essas possibilidades traz

$$(n - 1)^2 + 2(n - 1) + 1 = [(n - 1) + 1]^2 = n^2, \quad (6.19)$$

uma vez que a ausência de qualquer uma dessas quasipartículas sobre a rede também pode ser vista, e portanto computada, como uma quasipartícula de vácuo.

### Transporte, regras de fusão e descrição estatística

Diga-se de passagem, é justamente por causa dessa generalização (6.18) que todas as regras de fusão que estão relacionadas para com as quasipartículas que surgem da ação dos operadores

<sup>4</sup>Vide a Figura 6.1 para maiores detalhes sobre a definição deste conceito.



apontados nestes itens (i) e (ii), as quais serão aqui denotadas como  $e^g$ ,  $m^h$  e  $\varepsilon^{(g,h)}$ <sup>5</sup>, são dadas por

$$e^g \times e^h = e^{(g+h) \bmod n} \quad , \quad m^g \times m^h = m^{(g+h) \bmod n} \quad \text{e} \quad e^g \times m^h = \varepsilon^{(g,h)} \quad . \quad (6.20)$$

No entanto, é aqui que cabe uma pequena ressalva sobre essas quasipartículas, mais especificamente sobre as suas concepções. Afinal, ao contrário do que acontece no TC, os pares de quasipartículas aqui concebidos não comportam necessariamente aquelas que são tidas como as suas próprias anti-quasipartículas, uma vez que

- os pares criados pelos operadores  $(Z_j)^g$  são compostos por quasipartículas  $e^g$  e  $e^{-g}$  que são *complementares* segundo a álgebra de  $\mathbb{Z}_n$ , as quais são alocadas sobre os vértices que extremizam a  $j$ -ésima aresta,
- enquanto  $(X_j)^h$  também produz um par com quasipartículas complementares  $m^g$  e  $m^{-g}$ , e as aloca sobre os centróides das faces que partilham a  $j$ -ésima aresta.

Neste nosso caso abeliano, os únicos operadores que, por exemplo, são capazes de conceber pares com quasipartículas que se comportam como as suas próprias anti-quasipartículas são

$$(Z_j)^{(n/2) \bmod n} \quad , \quad (X_j)^{(n/2) \bmod n} \quad \text{e} \quad , \quad \text{portanto} \quad , \quad (X_j)^{(n/2) \bmod n} \circ (Z_j)^{(n/2) \bmod n} \quad ;$$

mas isso só ocorre nas situações onde  $n$  é um número natural *par*, haja vista que, pelas mesmas regras de fusão (6.20), temos

$$e^{(n/2) \bmod n} \times e^{(n/2) \bmod n} = m^{(n/2) \bmod n} \times m^{(n/2) \bmod n} = 1 \quad .$$

É claro que é muito importante observar que todas essas quasipartículas podem ser perfeitamente transportadas ao longo de  $\mathcal{R}_2$ , desde que isso seja feito, por exemplo, pela ação do mesmo operador que criou um par de quasipartículas ao longo de um caminho contínuo de arestas. No entanto, antes de terminarmos este capítulo, é interessante destacar algo que é um pouco mais importante: é interessante destacar aquilo que faz do QDM um modelo um pouco melhor que o TC quando o objetivo é usá-lo para fins computacionais.

---

<sup>5</sup>Ou seja, as quasipartículas que são concebíveis pelos respectivos operadores  $(Z_j)^g$ ,  $(X_j)^h$  e  $(X_j)^g \circ (Z_j)^h$ .

### 6.3 Um exemplo não Abelianiano

Apesar de já ter ficado subentendido ao leitor que este algo que é “um pouco mais importante” deve decorrer do fato das quasipartículas de um QDM apresentar uma estatística que, por exemplo, pode ser distinta da que está relacionada aos “dyons” do TC, para ilustrarmos ainda mais toda a generalidade que está por trás de um QDM, finalizaremos este capítulo apresentando um outro dos seus exemplos mais simples: um QDM que se apoia sobre o grupo

$$S_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = e, bab = a^2 \rangle, \quad (6.21)$$

cujos elementos descrevem todas as possíveis permutações que podem ser feitas entre três objetos. Ou seja, um grupo *não Abelianiano*, onde o seu gerador  $a$  deve ser pensado como uma espécie de “agente” que, sozinho, é capaz de realizar permutações cíclicas entre três objetos numa certa “direção preferencial”, enquanto o seu outro gerador  $b$  deve ser interpretado como aquele que apenas troca dois desses objetos de lugar.

#### 6.3.1 Principais propriedades

E a primeira coisa que precisamos destacar aqui diz respeito aos operadores de vértice e de face que, de acordo com as expressões mais gerais (6.4) e (6.8), são dados por

$$A_v^{(S_3)} = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} A_v^{(g)} \quad \text{e} \quad B_p^{(S_3)} = B_p^{(e)}, \quad (6.22)$$

haja vista que a definição de vácuo de um QDM se apoia sobre o fato das holonomias, que estão relacionadas às faces de  $\mathcal{R}_2$ , serem todas iguais à identidade  $e$ . É claro que comentários adicionais sobre o autoestado de vácuo  $|\xi_0\rangle$  desse QDM não Abelianiano também cabem: e, já que este  $|\xi_0\rangle$  também precisa satisfazer aos vínculos

$$A_v^{(S_3)} |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad \text{e} \quad B_p^{(S_3)} |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad (6.23)$$

que são análogos a (6.16), um desses comentários é que, quando consideramos exatamente a mesma  $\mathcal{R}_2$  que já está a mostra na Figura 6.1, esse autoestado também será *único* e dado por

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \prod_v A_v^{(S_3)} \underbrace{|0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle}_{N_a \text{ vezes}} .$$

Todavia, devido as propriedades projetivas que estão associadas não apenas aos operadores (6.22), mas a todos os operadores de vértice (6.4) e de face (6.8) que podem definir um QDM, o melhor comentário que devemos fazer aqui é: todas essas propriedades projetivas decorrem do simples fato de que todos esses operadores são apenas dois dos elementos que figuram nos dois conjuntos

$$\mathfrak{A}_v = \{ A_{v,1}^{(G_1)}, \dots, A_{v,R}^{(G_1)} \} \quad \text{e} \quad \mathfrak{B}_v = \{ B_{v,1}^{(G_1)}, \dots, B_{p,R}^{(G_1)} \} \quad (6.24)$$

de *projetores*, cuja cardinalidade  $R$  corresponde ao número de *representações irredutíveis* de  $G_1$ .

### Sobre as excitações elementares

E a grande vantagem de sermos cientes sobre a existência desses dois conjuntos de projetores  $\mathfrak{A}_v$  e  $\mathfrak{B}_p$  é que, como eles são compostos por outros operadores que também atuam sobre os vértices e sobre as faces de  $\mathcal{R}_2$ , todas as relações projetivas

$$A_{v,J}^{(G_1)} \circ A_{v,K}^{(G_1)} = \delta(J,K) A_{v,K}^{(G_1)} \quad \text{e} \quad B_{p,J}^{(G_1)} \circ B_{p,K}^{(G_1)} = \delta(J,K) B_{p,K}^{(G_1)} \quad (6.25)$$

e de fechamento

$$\sum_{J=1}^R A_{v,J}^{(G_1)} = \mathbb{1}_v \quad \text{e} \quad \sum_{J=1}^R B_{p,J}^{(G_1)} = \mathbb{1}_p \quad (6.26)$$

permitem caracterizar, de forma mais consistente, todas as excitações de vértice e de face relacionadas a qualquer QDM, as quais são produzidas pelos operadores  $W_s^{(J,K)}$ . Afinal, como todos esses operadores devem ser tais que

$$A_{v,J}^{(G_1)} \circ W_s^{(J,K)} = W_s^{(J,K)} \circ A_{v,1}^{(G_1)} \quad \text{e} \quad B_{p,K}^{(G_1)} \circ W_s^{(J,K)} = W_s^{(J,K)} \circ B_{p,1}^{(G_1)} , \quad (6.27)$$

e como todas essas propriedades indicam que, para um estado

$$|\xi\rangle = W_s^{(J,K)} |\xi_0^{(1)}\rangle ,$$

vale

$$A_{v,J}^{(G_1)} |\xi\rangle = |\xi\rangle \quad \text{e} \quad B_{p,K}^{(G_1)} |\xi\rangle = |\xi\rangle, \quad (6.28)$$

fica muito claro que, ao associarmos a ausência de qualquer quasipartícula à presença de uma quasipartícula de vácuo indexável por  $(1,1)$ , existirão  $R^2$  possibilidades para a definição das quasipartículas vistas como “elementares” dentro de qualquer QDM, haja vista que cada uma delas ocupará um estado bem específico, que será rotulado pelo par ordenado  $(J,K)$ . Por se dizer, esse resultado é perfeitamente compatível com aquele que, por exemplo, já fora obtido, por outros meios, em (6.19), uma vez que (i) o número de representações irredutíveis do grupo  $\mathbb{Z}_n$  é igual a sua ordem e (ii) essa rotulação justifica, por exemplo, o porquê das quasipartículas  $\varepsilon^{(g,h)}$  serem indexadas como tal.

### Regras de fusão não Abelianas

Diante de tudo isso, certamente a coisa mais importante que precisamos mencionar agora, até mesmo para justificar como funciona toda essa associação dos elementos de  $\mathfrak{A}_v$  e  $\mathfrak{B}_p$  às representações irredutíveis de  $G_1$  (e conseqüentemente obtermos todas as expressões que, por exemplo, definem os operadores desse nosso QDM que se vale de  $S_3$ ) é que eles são dados por [66]

$$A_{v,J}^{(G_1)} = \frac{d_J}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} \chi_J(g^{-1}) A_v^{(g)} \quad \text{e} \quad B_{p,K}^{(G_1)} = \sum_{g \in C_K} B_p^{(g)}. \quad (6.29)$$

Aqui, além de

$$A_v^{(g)} = \prod_{j \in \mathcal{S}_v} L_j^{(g)} \quad \text{e} \quad B_p^{(g)} = \sum_* \left( \prod_{j \in \mathcal{S}_p} T_j^{(g_j)} \right), \quad (6.30)$$

também temos que  $d_J$  é a dimensão da  $J$ -ésima representação irredutível  $\rho_J : G_1 \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ , enquanto  $\chi_J(g) = \text{tr}[\rho_J(g)]$  é o seu caractere, e  $C_K$  é a  $K$ -ésima classe de conjugação do grupo  $G_1$  sob consideração.

Aliás, por efeito de todas essas expressões, uma das primeiras coisas que ficam bem claras é que, como os coeficientes  $d_J \chi_J(g)$  em (6.4) e (6.8) são *todos* iguais a 1, todos operadores de vértice e de face que compõem o Hamiltoniano (6.3) são expressos em termos da representação trivial  $\rho_1$ . E, nestes termos, quando analisamos a situação deste QDM que se vale de um  $G_1 = S_3$  que possui apenas três representações irredutíveis [116], também fica claro que os operadores que completam

$\mathfrak{A}_v$  junto com o operador de vértice (6.22) são dados por

$$\begin{aligned} A_{v,2}^{(S_3)} &= \frac{1}{6} \left[ A_v^{(e)} + A_v^{(a)} + A_v^{(a^2)} - A_v^{(b)} - A_v^{(ba)} - A_v^{(ba^2)} \right] \quad e \\ A_{v,3}^{(S_3)} &= \frac{1}{6} \left[ 2A_v^{(e)} - A_v^{(a)} - A_v^{(a^2)} \right] \quad . \end{aligned} \quad (6.31)$$

Como bem dissemos anteriormente, a grande consequência que segue, de toda essa ortogonalidade que está embutida no conjunto de operadores

$$\mathfrak{A}_v^{(S_3)} = \left\{ A_{v,1}^{(S_3)}, A_{v,2}^{(S_3)}, A_{v,3}^{(S_3)} \right\} \quad ,$$

é que, a partir das suas expressões, já podemos reconhecer, por exemplo, quais são as quasi-partículas  $Q^{(J,1)}$  que estão associadas aos autoestados indexáveis por  $(J,1)$ . E, no caso, esse reconhecimento segue por efeito dos operadores  $W_s^{(J,1)}$  que as criam (em pares) serem tais que

$$A_{v,J}^{(S_3)} \circ W_s^{(J,1)} = W_s^{(J,1)} \circ A_{v,1}^{(S_3)} \quad .$$

Desta maneira, como os operadores de criação que atendem essa regra de comutação são dados especificamente por [66]

$$W_s^{(J,1)} = \sum_{g \in G_1} \chi_J(g) T_j^{(g)} \quad ,$$

é muito fácil ver, das regras de fusão

$$\begin{aligned} Q^{(1,1)} \times Q^{(1,1)} &= Q^{(2,1)} \times Q^{(2,1)} = Q^{(1,1)} \quad , \\ Q^{(1,1)} \times Q^{(2,1)} &= Q^{(2,1)} \times Q^{(1,1)} = Q^{(2,1)} \quad , \\ Q^{(1,1)} \times Q^{(3,1)} &= Q^{(3,1)} \times Q^{(1,1)} = Q^{(3,1)} \quad , \\ Q^{(2,1)} \times Q^{(3,1)} &= Q^{(3,1)} \times Q^{(2,1)} = Q^{(3,1)} \quad e \\ Q^{(3,1)} \times Q^{(3,1)} &= Q^{(1,1)} + Q^{(2,1)} + Q^{(3,1)} \end{aligned} \quad (6.32)$$

às quais eles levam, que toda a não Abelianicidade que está relacionada ao modelo se estende para além do contexto exclusivo do grupo  $S_3$ : ela também bem caracteriza o comportamento dos “anyons”  $Q^{(3,1)}$ .



## Capítulo 7

# Segundas generalizações

### 7.1 Comentários iniciais

Por efeito de todo o poderio que a junção dos diagramas Heegaard com os de Kuperberg nos oferece quando precisamos representar sistemas físicos discretos<sup>1</sup>, convém fazer uma pequena “pausa” antes de fazermos qualquer comentário mais específico sobre os “Quantum Double Models” (QDM) aos quais serão acrescentados dos novos elementos que chamaremos de campos de *matéria*. E a razão desta pequena “pausa” é bem simples: afinal, além do próximo capítulo (que será voltado justamente para toda essa causa da inserção de matéria a um QDM) já ser bastante longo, é justamente sobre a lógica da junção de tais diagramas que se assentam alguns dos principais resultados que levam à definição desses novos modelos com matéria.

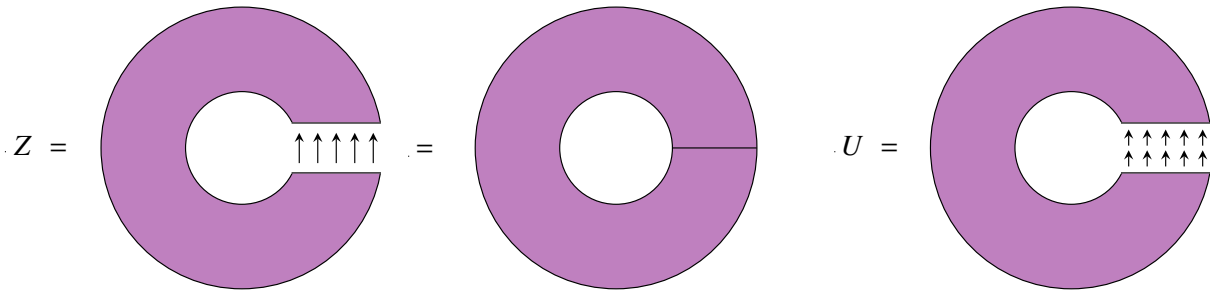
Em verdade, tudo o que apresentaremos ao longo da primeira metade deste capítulo nada mais é do que um breve resumo do que consta num dos trabalhos que foram publicados por M. J. B. Ferreira, P. Padmanabhan e P. Teotonio Sobrinho [67], onde um QDM foi bem entendido em termos da discretização cúbica de uma variedade  $\mathcal{M}_2 \times [0, 1]$  tridimensional sem fronteira: ou seja, numa situação bastante particular onde um sistema, que é desprovido de matéria e que está disposto sobre a rede quadrada  $\mathcal{R}_2$  que discretiza  $\mathcal{M}_2$ , evolui ao longo de um intervalo  $[0, 1]$  temporal. E, no caso dessa evolução, ela se dá segundo a *matriz de transferência* [69]

$$U = \exp(-H\delta t) \quad , \quad (7.1)$$

onde  $H : \mathfrak{S}_n^{N_a} \rightarrow \mathfrak{S}_n^{N_a}$  é o operador Hamiltoniano que está relacionado apenas ao sistema bidi-

---

<sup>1</sup>Conforme ficou claro do Capítulo 3 e das considerações que se envolvem para com ele, as quais foram expostas nos dois primeiros apêndices que compõem estas notas.



**Figura 7.1:** À esquerda, temos uma colagem realizada tomando a situação particular  $\delta t = [0, 1]$ , que já permite interpretar  $Z$  como o traço da matriz de transferência  $U$  que está representada à direita. No caso, cada uma das flechas que entram ou saem das extremidades de  $U$  deve ser associada ao vetor que indexa uma das arestas que compõem a discretização de  $\mathcal{M}$ .

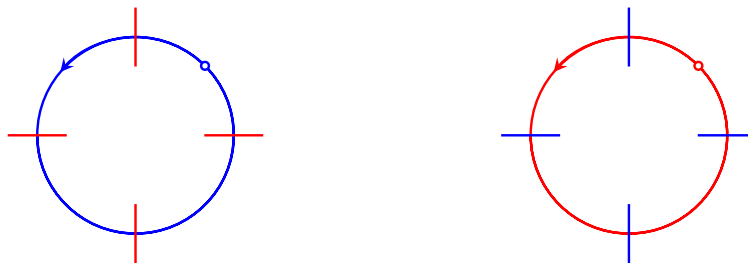
mensional, cujo espaço de Hilbert  $\mathfrak{H}_n$  pode ser visto como o mesmo que comporta os elementos (6.1), enquanto  $\delta t$  é um subintervalo  $[0, 1/N]$  que se vale de um número natural não nulo  $N$ . Nestes termos, como essa discretização tridimensional de  $\mathcal{M}_2 \times [0, 1]$  respalda a descrição de um sistema físico sobre  $\mathcal{M}_2$ , uma vez que as triangulações que conectam  $\mathcal{M}_2|_{t=0} = \mathcal{M}_2 \times \{0\}$  à  $\mathcal{M}_2|_{t=1} = \mathcal{M}_2 \times \{1\}$  mostram que estas duas variedades são *topologicamente equivalentes* [70], a função de partição que descreve o sistema poderá ser escrita como

$$Z = \text{tr}(U^N) \quad , \quad (7.2)$$

haja vista a sua realização em termos de uma colagem, tal como consta na Figura 7.1.

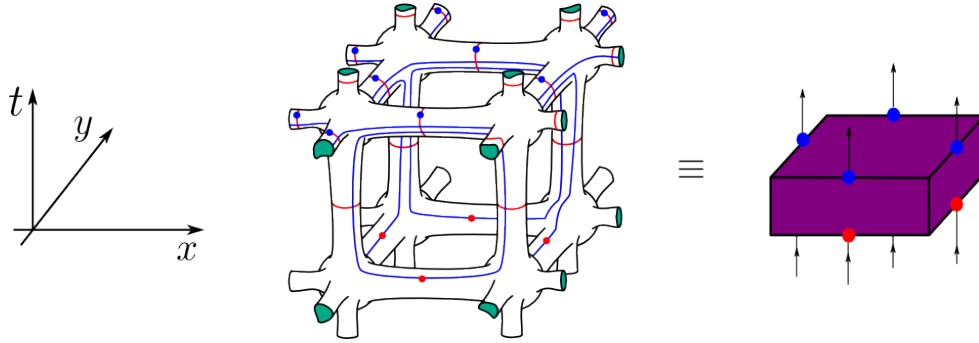
### 7.1.1 A obtenção dos operadores

De acordo com todos os comentários que foram feitos ao fim do Capítulo 3, discretizar  $\mathcal{M}_2 \times [0, 1]$  em termos cúbicos através de  $n_A^{(T)}$  arestas, por exemplo, nos remete a uma diagramatização



**Figura 7.2:** À esquerda, temos uma representação “via Heegaard” das faces relacionadas à discretização cúbica acima mencionada enquanto, à direita, segue a descrição do que, a priori, pode ser interpretado como a face dual nos mesmos moldes.





**Figura 7.3:** À esquerda temos uma única estrutura básica, associada ao que definirá um dos “handlebodies” que estão envolvidos no processo de discretização de  $\mathcal{M}_2 \times [0,1]$ ; no caso, o objetivo dos eixos que constam ao lado dessa estrutura é, tão somente, indicar que a discretização relacionada ao plano  $xy$  se refere à da variedade  $\mathcal{M}_2$ , enquanto a do eixo  $t$  faz menção a discretização de  $[0,1]$ . Já a figura que consta à direita corresponde à interpretação dessa mesma estrutura como sendo parte da matriz de transferência  $U$ : ou seja, toda a evolução deste sistema discretizado deve ser interpretada pela colagem de estruturas similares a esta segundo a lógica já exposta na Figura 7.1, guiada pela colagem de pontos azuis aos vermelhos.

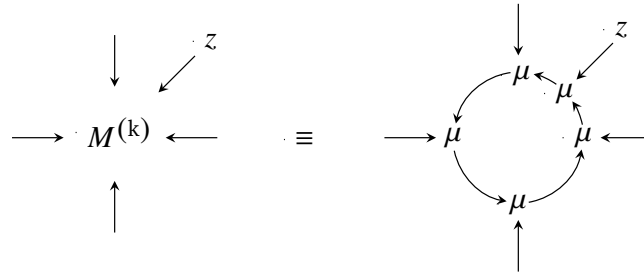
de Heegaard que pode ser resumida segundo os diagramas da Figura 7.2, os quais estão diretamente relacionados a cada uma das faces e arestas que compõem essa rede cúbica. Entretanto, de acordo com essa mesma figura, é possível perceber que existe uma “sutil” diferença entre esses novos diagramas e aqueles que constam na Figura 3.8; afinal, ao contrário do que acontece com os anteriores, esses novos diagramas apresentam alguns “orifícios” em suas curvas.

Desta maneira, a pergunta mais natural que surge é: o que quer dizer a presença desses “orifícios”? E a resposta dessa pergunta é: a presença desses “orifícios” foi a maneira que encontramos para dizer que outros elementos  $z$  e  $z^*$  (que pertencem aos *centros* das respectivas álgebra  $(V; \mu, \eta)$  e coálgebra  $(V; \Delta, \varepsilon)$  que estão aqui relacionadas) podem compor cada um dos pesos estatísticos  $M^{(k)}$  e  $\underline{\Delta}_{(j)}$ . Assim, olhando para a diagramatização que já foi apresentada na Figura 3.8, passa a ser muito fácil perceber que ela nada mais é do que um caso particular desta nova da Figura 7.2, dado que todos os pesos estatísticos que foram mencionados anteriormente se valem da identificação de  $z$  e  $z^*$  como elementos identidades.

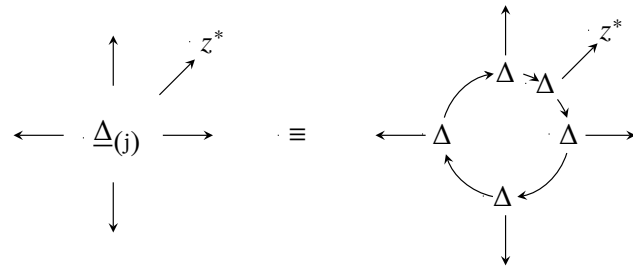
Aliás, diante deste quadro, diante de toda esta possibilidade, somos automaticamente levados aos diagramas de Kuperberg que estão dispostos nas Figuras 7.4 e 7.5 e, portanto, às suas realizações algébricas como [67, 68]

$$M^{(k)}(z, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) = \text{tr}(z, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \quad \text{e}$$

$$\underline{\Delta}_{(j)}(z^*, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4) = \text{cotr}(z^*, \phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4) \quad .$$



**Figura 7.4:** Peso  $M^{(k)}$  atribuído a  $k$ -ésima aresta da discretização, associado ao diagrama de Heegaard exposto à direita na Figura 7.2. Note que, nesta diagramatização “via Kuperberg”, um elemento  $z$  do centro da álgebra  $(V; \mu, \eta)$  se faz presente.



**Figura 7.5:** Peso  $\Delta_{(j)}$  atribuído a  $j$ -ésima face da rede cúbica, associado ao diagrama de Heegaard presente à esquerda na Figura 7.2. Analogamente a figura anterior, também vale notar que temos um elemento  $z^*$  do centro da álgebra  $(V^*; \Delta, \varepsilon)$  nesta diagramatização.

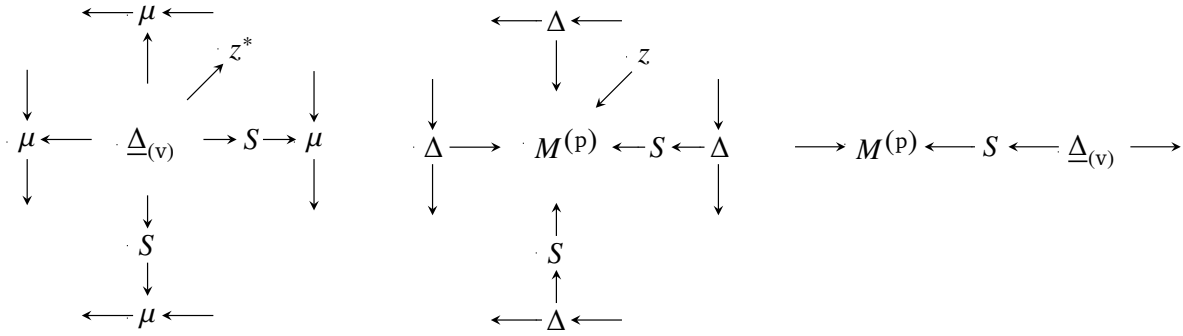
E a grande consequência que surge disso tudo é que, ao tomarmos uma discretização cúbica e a considerarmos como o “esqueleto” de um “handlebody”  $\mathcal{E}$ , tal como bem ilustra a Figura 7.3, onde consta uma única célula da superfície  $\partial\mathcal{E}$  que contém os diagramas de Heegaard, teremos

$$Z = \sum_{\{\phi_{j_n}\}} \prod_{j,c} \Delta_{(j)}(z_M^*, z_t^*, \phi_{j_1}, \phi_{j_2}, \phi_{j_4}, \phi_{j_4}) \cdot S_{c_b}^{j_a} \cdot M^{(c)}(z_M, z_t, \phi_{c_1}, \phi_{c_2}, \phi_{c_3}, \phi_{c_4}) \cdot \delta(\vec{v}_{j_a} \wedge \vec{v}_{c_b}, 1) \quad ,$$

como a função de partição deste sistema discreto, sendo  $z_M$  e  $z_M^*$  os respectivos elementos dos centros das álgebra e coálgebra que estão relacionados à discretização de  $\mathcal{M}_2$ , enquanto  $z_t$  e  $z_t^*$  cumprem o mesmo papel junto à discretização de  $[0, 1]$ .

### Sobre as regras de comutação

Uma das grandes virtudes da diagramatização de Heegaard, quando ela é empregada para representar a discretização de  $\mathcal{M}_2 \times [0, 1]$ , é que é através dela que podemos realizar os operadores de vértice  $A_v$ , de face  $B_p$  e os novos de aresta  $C_j$  em termos dos diagramas que compõem a Figura



**Figura 7.6:** Diagramas de Kuperberg que representam consecutivamente os operadores de aresta  $A_v$ , de face  $B_p$  e de aresta  $C_j$ , os quais estão relacionados aos operadores que levam o mesmo nome e que compõem o operador Hamiltoniano.

7.6. Por se dizer, é exatamente por causa dos diagramas que estão expostos na Figura 7.3 e 7.6 que é bem fácil perceber que os operadores  $A_v$ ,  $B_p$  e  $C_j$ , que estão explicitamente associados a esses diagramas, satisfazem a

$$[ A_{v_1} , A_{v_2} ] = [ B_{p_1} , B_{p_2} ] = [ C_{j_1} , C_{j_2} ] = 0 \quad ,$$

uma vez que eles atuam em setores disjuntos. Mas o aspecto mais interessante que segue destas expressões não se restringe apenas a essas regras de comutação em específico: o aspecto mais interessante é que, como *todos* esses operadores  $A_v$ ,  $B_p$  e  $C_j$  comutam uns com os outros [67], a partir das expressões (7.1) e (7.2) podemos exprimir a matriz de transferência aqui associada através de

$$U = \prod_v A_v \prod_p B_p \prod_j C_j \tag{7.3}$$

e, portanto, conceber o operador Hamiltoniano deste modelo como

$$H = - \left( \sum_v \ln A_v + \sum_p \ln B_p + \sum_j \ln C_j \right) \quad , \tag{7.4}$$

cuja expressão é análoga àquela, já relacionada aos “Quantum Double Models”. É claro que, se compararmos as expressão desse Hamiltoniano para com (6.3), fica muito claro que existe uma diferença entre eles, a qual se resume na presença de um somatório adicional em (7.4), que está envolto para com os novos operadores de aresta  $C_j$ . No entanto, como um dos corolários que seguem da Proposição 7 (que está presente no Apêndice B) nos diz que  $C_j$  é proporcional a uma

aplicação identidade<sup>2</sup>, acaba ficando muito claro que a presença do último produtório em (7.3) nada mais faz do que acrescer um mesmo valor *constante* a todas as autoenergias do Hamiltoniano (7.4). Ou seja, como

$$\prod_j C_j = (\dim \xi_n)^{n_A^{(T)}} \cdot I_{n_A^{(T)}} ,$$

o Hamiltoniano em questão pode ser reduzido a

$$H = - \left[ \sum_v \ln A_v + \sum_p \ln B_p + \left( n_A^{(T)} \ln n \right) \cdot I_{n_A^{(T)}} \right] , \quad (7.5)$$

sendo  $n$  a dimensão do espaço de Hilbert  $\xi_n$  relacionado a uma única aresta da rede e  $I_{n_A^{(T)}}$  o operador identidade que age sobre todas as arestas da rede que discretiza  $\mathcal{M}_2 \times [0, 1]$ .

## 7.2 Introdução de campos de matéria

Diante de todos estes fatos, e principalmente diante da constatação que são as escolhas

$$z_M = \frac{1}{n} \left[ 2(1 - \delta_p) \eta + \delta_p \lambda \right] \quad \text{e} \quad z_t = \eta \quad , \quad \text{e}$$

$$z_M^* = \varepsilon \quad \text{e} \quad z_t^* = \frac{1}{n} \left[ 2(1 - \delta_v) \varepsilon + \delta_v \Lambda \right] \quad ,$$

que realmente nos remetem ao mesmo QDM que já foi apresentado no último capítulo, desde que expansões sejam realizadas sobre os logaritmos dos operadores que compõem os somatórios em 7.5 e [67]

- $\lambda$  e  $\Lambda$  sejam as respectivas *cointegral* e a *integral*<sup>3</sup> aqui relacionadas, enquanto
- $\delta_p$  e  $\delta_v$  sejam variáveis que assumem valores no intervalo  $[0, 1]$ ,

se torna bastante natural estender todas essas considerações “Heegaardianas”, que se mostraram tão bem sucedidas, a modelos que são similares a este, mas que se valem da atribuição de novos elementos aos vértices de uma rede, como é, por exemplo, o caso dos modelos que apresentaremos no próximo capítulo.

<sup>2</sup>Embora não estamos nos atendo aos pormenores das relações de comutatividade acima mencionadas (uma vez que, além delas poderem ser bem entendidas a partir da própria Ref. [67], elas também seguem como uma mera consequência de alguns diagramas bem enfadonhos que apresentaremos ao final deste capítulo), é exatamente este o fato que garante, por exemplo, toda a comutatividade desses operadores de aresta em relação aos demais operadores.

<sup>3</sup>Para a definição dos conceitos de *cointegral* e de *integral* que estão relacionados a uma álgebra e a uma coálgebra respectivamente, vide o Apêndice B, especialmente as páginas 241 e 242.

Apesar, de como dissemos, o próximo capítulo já ser dedicado exclusivamente à causa desses novos modelos com matéria, é interessante aproveitarmos a “deixa” que é dada por toda essa apresentação para munir o leitor com algumas informações fundamentais. Afinal de contas, além disso ajudar o próximo capítulo a ser bem menos longo do que ele já é, trazendo uma maior consistência a tudo o que será nele apresentado, é aqui que surge uma ótima oportunidade para apresentarmos (nesta segunda metade do presente capítulo) algumas observações que foram feitas por M. F. Araujo de Resende, J. Lorca Espiro e P. Teotonio Sobrinho [29] dentro deste mesmo contexto de matéria. E, se notarmos que a definição desses novos modelos se vale da acresção de novos vetores

$$| \chi_v \rangle = a_0^{(\chi)} | 0 \rangle + \dots + a_{m-1}^{(\chi)} | m-1 \rangle \quad (7.6)$$

aos vértices das redes que abrigam o QDM, a primeira coisa que precisamos fazer aqui, para entendermos todas essas observações, é notarmos que é bastante natural interpretar o espaço de Hilbert  $\mathfrak{H}_m$  ao qual esses vetores pertencem como um *módulo*<sup>4</sup>: pois, como cada campo de calibre  $|\varphi_j\rangle$  de um modelo assim construído deve ser capaz de agir sobre um de matéria  $|\chi_\alpha\rangle$ , quando lembramos que esses campos de calibre são moderados por elementos de um grupo  $G_1$ , uma das melhores maneiras que existe para modelar toda essa interação entre campos é através de uma *ação*<sup>5</sup>

$$(g, \alpha) \mapsto \beta = \theta(g, \alpha) \quad ; \quad (7.7)$$

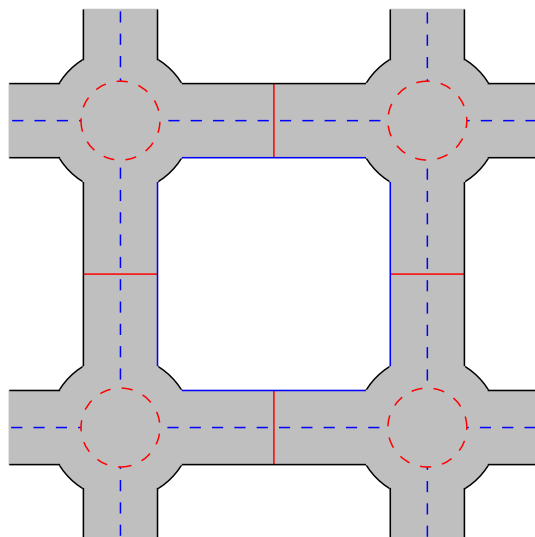
ou seja, através de uma aplicação que se identifica como uma *permutação* entre os elementos de  $\mathcal{B}_v = \{ |\alpha\rangle : \alpha \in G_2 \}$  e que satisfaz a

$$\alpha = \theta(e, \alpha) \quad , \quad \theta^\dagger(g, \alpha) = \theta(g^{-1}, \alpha) \quad \text{e} \quad \theta(g_2, \theta(g_1, \alpha)) = \theta(g_1 g_2, \alpha) \quad .$$

Nestes termos, fica bem claro que, num primeiro momento,  $G_2$  deve ser interpretado como um conjunto de índices. Mais adiante (mais especificamente, nos dois próximos capítulos) voltaremos a este ponto para esclarecer o porquê de  $G_2$  precisar ser um grupo, o que, portanto, garante a realização de  $\mathfrak{H}_m$  como um módulo.

<sup>4</sup>Vide novamente o Apêndice B para maiores detalhes sobre isso, em especial a Subseção B.1.2.

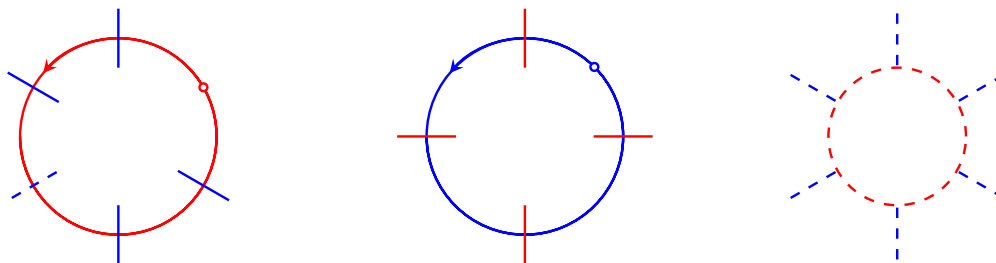
<sup>5</sup>Apesar da escolha desta ação eventualmente nos remeter a uma *classe lateral à esquerda*, convém ressaltar que também é perfeitamente possível trabalhar com as *classes laterais à direita*. Mais uma vez recomendamos a leitura do Apêndice B para uma pequena revisão sobre todos estes conceitos.



**Figura 7.7:** Corte lateral da “amarração” via Heegaard que está relacionada à discretização cúbica de uma  $M$  tridimensional sem fronteira, onde a rede que é composta pelos contornos pontilhados modelam a presença de campos de matéria sobre os vértices da rede cúbica.

### 7.2.1 Um novo diagrama de Heegaard

E, de acordo com toda a lógica que nos levou a todos os diagramas de Heegaard que foram apresentados até agora, uma coisa já está muito clara: todos eles nos permitem entender todo o processo de discretização de uma variedade tridimensional em termos de uma estrutura “amarrada”, uma vez que cada um dos seus “amarramentos” (em termos de curvas azuis e vermelhas) nos permite bem entender como se dá a colagem dos dois “handlebodies” que se envolvem para com essa discretização. Nestes termos, algo que também fica muito claro é que, se quisermos estender toda essa diagramatização para aquela que nos leva às expressões dos operadores de aresta  $A_v$ , de face  $B_p$  e de aresta  $C_j$  que descrevem esse novo sistema com matéria, certamente a melhor maneira de fazermos isso é a completando com novas curvas que também sejam “amarradas”. Afinal de contas, se esses novos elementos (que estão associados aos pontos dessa rede) devem ser capazes de interagir uns com os outros, é essencial que este novo diagrama de Heegaard mostre uma ligação entre eles. E como qualquer um desses pontos estão naturalmente “amarrados” por meio das arestas que compõem tal rede, a melhor maneira de expressarmos este diagrama é através do esquema que está presente na Figura 7.7, onde os seus contornos pontilhados cumprem um papel análogo aos das curvas contínuas: no caso, do mesmo modo que a curva contínua (em vermelho) numa aresta corresponde à existência de um campo de calibre, a superfície de contorno pontilhado,



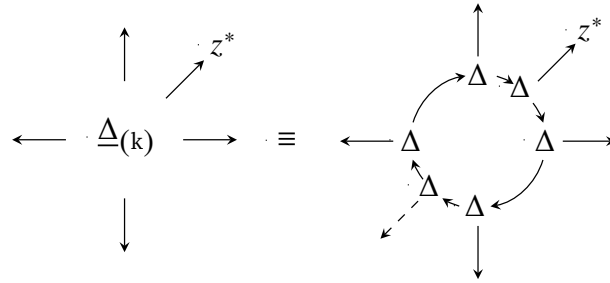
**Figura 7.8:** Da esquerda para a direita temos as representações “via Heegaard” das faces, das arestas e dos vértices que compõem a discretização cúbica de uma variedade  $\mathcal{M}$ , onde consta um sistema com campos de calibre e de matéria.

que está (também em vermelho) ao redor de um vértice, indica que um campo de matéria se faz presente.

### Sobre a definição dos operadores

Aliás, conforme é notável desta mesma Figura 7.7, toda a “amarração” que está relacionada à presença dos campos de matéria se completa por efeito das curvas pontilhadas (em azul), que conectam os vértices dessa rede tridimensional, “dois a dois”. Entretanto, ao contrário do caso contínuo, onde uma antípoda eventualmente se faz necessária para que toda uma “amarração” ocorra, a priori não faremos qualquer imposição inicial sobre a aplicação  $\mathcal{G} : \mathfrak{H}_m \otimes \mathfrak{H}_m \rightarrow \mathbb{K}$  que cumpre este serviço em relação aos contornos pontilhados.

Diante de tudo isso, a principal consequência que surge deste novo esquema de “amarração” é que, ao relermos a Figura 7.7 em termos da maneira “desmontada” que consta na Figura 7.8, é possível identificar quais são os diagramas de Heegaard que estão individualmente associados aos vértices, às faces e às arestas da rede e, portanto, chegar aos respectivos diagramas de Kuperberg que estão a eles associados. No entanto, quando compararmos estes novos diagramas com os velhos da Figura 7.2, fica bem claro que ainda existe uma coisa em comum entre eles: o diagrama de Heegaard que está relacionado às faces da rede é exatamente o mesmo nos dois casos, já que, em ambos, não há qualquer relação direta das faces para com qualquer campo de matéria. Desta maneira, como os únicos pesos estatísticos que são distintos da situação anterior são apenas os que estão dispostos nas Figuras 7.9 e 7.10, podemos traduzir toda a situação algébrica desses



**Figura 7.9:** Diagrama de Kuperberg relacionado ao de Heegaard que consta à extrema esquerda na Figura 7.8. Note que, como ele deve se referir ao que ocorre numa aresta qualquer, ele deve necessariamente retratar a interação de um campo de calibre (flecha contínua) com os de matéria (flecha pontilhada).

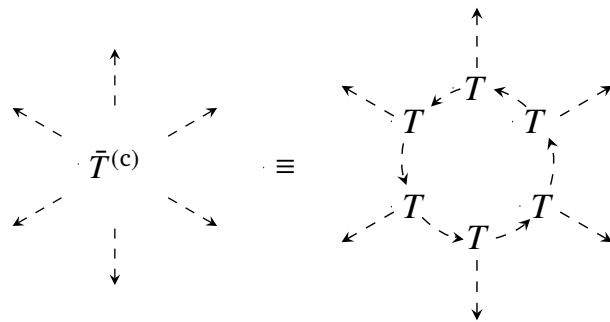
operadores como

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{(j)} ( z^* , \phi^1 , \phi^2 , \phi^3 , \phi^4 , \phi^5 ) &= \text{cotr} ( z^* , \phi^1 , \phi^2 , \phi^3 , \phi^4 ) \quad , \\ M^{(k)} ( z , \phi_1 , \phi_2 , \phi_3 , \phi_4 ) &= \text{tr} ( z , \phi_1 , \phi_2 , \phi_3 , \phi_4 ) \quad , \quad \text{e} \\ \bar{T}^{(r)} ( \chi_1 , \chi_2 , \chi_3 , \chi_4 , \chi_5 , \chi_6 ) &= \text{tr} ( \chi_1 , \chi_2 , \chi_3 , \chi_4 , \chi_5 , \chi_6 ) \end{aligned}$$

sendo  $T : \mathfrak{H}_m \rightarrow \mathfrak{H}_m \otimes \mathfrak{H}_m$  uma aplicação associativa que também é capaz de estruturar uma coálgebra unital.

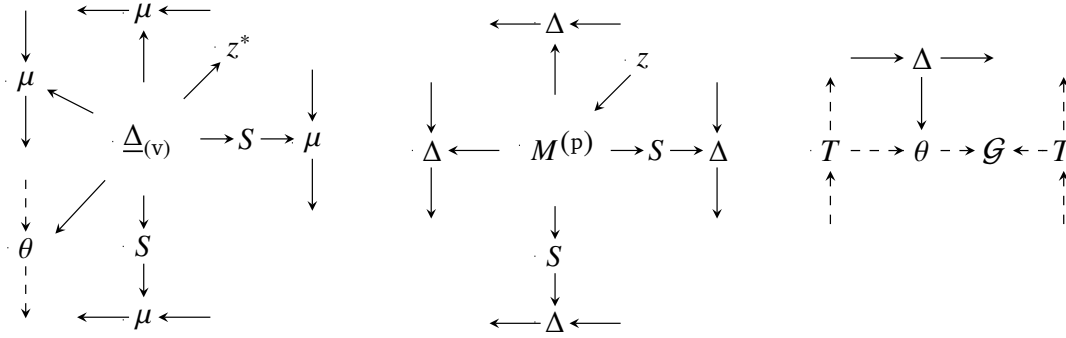
**Propriedades de comutação**

Seguindo a mesma linha de apresentação utilizada até agora, é deveras conveniente anunciar que os diagramas de Kuperberg que descrevem os operadores de vértice  $A_v$ , de face  $B_p$  e de aresta  $C_j$  deste modelo com matéria são aqueles que estão dispostos na Figura 7.11. E uma outra coisa que também é deveras conveniente de ser anunciada aqui diz respeito às propriedades de comutação



**Figura 7.10:** Diagrama relacionado ao que fora exposto, à extrema direita, na Figura 7.8. Note a semelhança estrutural relacionada aos diagramas anteriores, haja vista a composição de  $\bar{T}^{(c)}$  em termos de aplicações associativas  $T : \mathfrak{H}_m \otimes \mathfrak{H}_m \rightarrow \mathfrak{H}_m$ .





**Figura 7.11:** Diagramas de Kuperberg que representam consecutivamente os operadores de aresta  $A_v$ , de face  $B_p$  e de aresta  $C_j$  que estão relacionados ao modelo que se vale de campos de matéria.

entre todos esses operadores: afinal, se eles comutarem uns com os outros, ficará muito claro que estamos novamente diante de um modelo solúvel e que, portanto, as expressões da sua matriz de transferência e do seu Hamiltoniano são completamente similares a (7.3) e (7.4) respectivamente. Nestes termos, passa a ser essencial avaliar quais são as regras de comutação que estão relacionadas a esses operadores, ainda mais porque são elas que podem nos mostrar se existe algum tipo de restrição que precisa ser imposta a  $\mathcal{G}$  para que ela nos remeta à solubilidade do modelo assim concebido.

Aliás, se nos lembrarmos de que, pelo ponto de vista efetivo, todos os operadores que estão presentes na Figura 7.11 atuam localmente sobre a rede, uma das maneiras mais eficazes de retratarmos as suas atuações pode ser resumida segundo a representação pictórica que consta na Figura 7.12. Pois, além de toda a informação encerrada por qualquer um dos seus “kets” se relacionar, tão somente, à região onde tais operadores atuam efetivamente, toda essa eficácia também pode ser muito bem entendida à luz das Figuras 7.13, 7.14 e 7.15, uma vez que deixam muito bem claro não apenas que  $[A_v, B_p] = [B_p, C_j] = 0$ , mas que

$$\frac{1}{N_A} \sum_{k,\alpha} z_k^* \mathcal{G}(\theta(k,\alpha),\gamma) = \frac{1}{N_A^2} \sum_{r,s,\beta,\gamma} z_r^* z_s^* \mathcal{G}(\theta(r,\alpha),\beta) \mathcal{G}(\theta(s,\beta),\gamma) \quad ,$$

$$\frac{1}{N_B} \sum_l z^k \text{tr} (kab^{-1}c^{-1}d) = \frac{1}{N_B^2} \sum_{r,s} z^r \text{tr} (rab^{-1}c^{-1}d) \text{tr} (sab^{-1}c^{-1}d) \quad \text{e} \quad (7.8)$$

$$\frac{1}{N_C} \mathcal{G}(\theta(a,\alpha)) = \frac{1}{N_C^2} \mathcal{G}(\theta(a,\alpha)) \mathcal{G}(\theta(a,\alpha))$$

são as três relações que precisam ser satisfeitas para que os operadores  $A_v$ ,  $B_p$  e  $C_j$  realmente

$$\begin{aligned}
A_v \left| \begin{array}{c} a \\ \downarrow \\ \alpha \\ \uparrow \\ c \\ \leftarrow d \rightarrow \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_A} \sum_{k,\gamma} z_k^* \mathcal{G}(\theta(k,\alpha),\gamma) \left| \begin{array}{c} ka \\ \downarrow \\ \gamma \\ \uparrow \\ ck^{-1} \\ \leftarrow dk^{-1} \rightarrow \end{array} \right\rangle \\
B_p \left| \begin{array}{c} a \\ \leftarrow d \rightarrow \\ \uparrow \\ c \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_B} \sum_k z^k \text{tr}(kab^{-1}c^{-1}d) \left| \begin{array}{c} a \\ \leftarrow d \rightarrow \\ \uparrow \\ c \end{array} \right\rangle \\
C_j \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \leftarrow a \rightarrow \\ \beta \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_C} \mathcal{G}(\theta(a,\alpha),\beta) \left| \begin{array}{c} \alpha \\ \leftarrow a \rightarrow \\ \beta \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

**Figura 7.12:** Relações obtidas pela atuação dos operadores  $A_v$ ,  $B_p$  e  $C_j$  sobre os campos dispostos na rede, onde  $N_A$ ,  $N_B$  e  $N_C$  são constantes reais a serem determinadas. Aqui, e nas demais figuras relacionadas com esta nova notação, cada uma das variáveis  $j$ , por exemplo, deve ser interpretada como o campo  $\phi_j$  de calibre, enquanto uma  $\alpha$  deve ser vista como um campo  $\chi_\alpha$  de matéria.

$$\begin{aligned}
A_v B_p \left| \begin{array}{c} a \quad b \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \downarrow \\ c \quad f \\ \leftarrow d \rightarrow \quad \leftarrow g \rightarrow \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_B} \sum_r z^r \text{tr}(rbf^{-1}g^{-1}c) A_v \left| \begin{array}{c} a \quad b \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \downarrow \\ c \quad f \\ \leftarrow d \rightarrow \quad \leftarrow g \rightarrow \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{1}{N_A N_B} \sum_{r,s,\gamma} z^r z_s^* \text{tr}(rbf^{-1}g^{-1}c) \mathcal{G}(\theta(s,\alpha),\gamma) \left| \begin{array}{c} sa \quad sb \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \downarrow \\ ds^{-1} \quad cs^{-1} \\ \leftarrow d \rightarrow \quad \leftarrow g \rightarrow \end{array} \right\rangle \\
B_p A_v \left| \begin{array}{c} a \quad b \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \downarrow \\ c \quad f \\ \leftarrow d \rightarrow \quad \leftarrow g \rightarrow \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_A} \sum_{s,\gamma} z_s^* \mathcal{G}(\theta(s,\alpha),\gamma) B_p \left| \begin{array}{c} sa \quad sb \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \downarrow \\ ds^{-1} \quad cs^{-1} \\ \leftarrow d \rightarrow \quad \leftarrow g \rightarrow \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{1}{N_A N_B} \sum_{r,s,\gamma} z^r z_s^* \text{tr}(rbf^{-1}g^{-1}c) \mathcal{G}(\theta(s,\alpha),\gamma) \left| \begin{array}{c} sa \quad sb \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \quad \downarrow \\ ds^{-1} \quad cs^{-1} \\ \leftarrow d \rightarrow \quad \leftarrow g \rightarrow \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

**Figura 7.13:** Resultado da atuação das duas possíveis combinações entre os operadores  $A_v$  e  $B_p$  sobre os campos que estão dispostos na rede, de onde fica clara toda a comutatividade entre estes operadores, haja vista que os campos que são indexados por  $r$  e  $s$  pertencem aos centros das álgebra e coálgebra que estão aqui relacionadas.

possam ser vistos como três projetores. E uma coisa que ficam bem clara destas três relações é que as constantes  $N_A$ ,  $N_B$  e  $N_C$  não podem ser arbitrárias: elas precisam ser dadas especificamente por  $N_A = N_B = |G_1|$  e  $N_C = 1$ .

$$\begin{aligned}
B_p C_j \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \\ d \uparrow \quad \uparrow b \\ \hline c \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_C} \mathcal{G}(\theta(a, \alpha), \beta) B_p \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \\ d \uparrow \quad \uparrow b \\ \hline c \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{1}{N_B N_C} \mathcal{G}(\theta(a, \alpha), \beta) \sum_k z^k \text{tr}(kab^{-1}c^{-1}d) \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \\ d \uparrow \quad \uparrow b \\ \hline c \end{array} \right\rangle \\
C_j B_p \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \\ d \uparrow \quad \uparrow b \\ \hline c \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_B} \sum_k z^k \text{tr}(kab^{-1}c^{-1}d) C_j \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \\ d \uparrow \quad \uparrow b \\ \hline c \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{1}{N_B N_C} \mathcal{G}(\theta(a, \alpha), \beta) \sum_k z^k \text{tr}(kab^{-1}c^{-1}d) \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \\ d \uparrow \quad \uparrow b \\ \hline c \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

**Figura 7.14:** Resultado que segue da atuação das duas combinações, que podem ser feitas entre os dois operadores  $B_p$  e  $C_j$ , sobre os campos que estão distribuídos pela rede, de onde também é imediato ver toda a comutatividade entre estes operadores.

$$\begin{aligned}
A_v^2 \left| \begin{array}{c} a \\ d \rightarrow \alpha \rightarrow b \\ \uparrow c \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_A^2} \sum_{r,s,\beta,\gamma} z_r^* z_s^* \mathcal{G}(\theta(r, \alpha), \beta) \mathcal{G}(\theta(s, \beta), \gamma) \left| \begin{array}{c} (rs)a \\ d(rs)^{-1} \rightarrow \gamma \rightarrow (rs)b \\ \uparrow c(rs)^{-1} \end{array} \right\rangle \\
B_p^2 \left| \begin{array}{c} a \\ d \rightarrow \alpha \rightarrow b \\ \uparrow c \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_B^2} \sum_{r,s} z^r z^s \text{tr}(rab^{-1}c^{-1}d) \text{tr}(sab^{-1}c^{-1}d) \left| \begin{array}{c} a \\ d \rightarrow \alpha \rightarrow b \\ \uparrow c \end{array} \right\rangle \\
C_j^2 \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_C^2} \mathcal{G}(\theta(a, \alpha), \beta) \cdot \mathcal{G}(\theta(a, \alpha), \beta) \left| \begin{array}{c} \alpha \xrightarrow{a} \beta \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

**Figura 7.15:** Resultados que seguem dos operadores  $A_v$ ,  $B_p$  e  $C_j$  quando cada um deles age duas vezes consecutivas sobre os campos que estão dispostos sobre a rede.

Por se dizer, já que as relações de comutação que constam nas três figuras acima se referem apenas a uma parte das propriedades que estão relacionadas a estes três operadores, convém analisar a que ainda falta: a propriedade de comutação entre os operadores  $A_v$  e  $C_j$ . E, assim como acontece para com as propriedades de comutação que nos levaram às condições (7.8), as combinações entre esses dois operadores é mais reveladora do que a trivialidade  $[A_v, B_p] = [B_p, C_j] = 0$ . Afinal de contas, apesar delas apontarem para uma não necessária comutatividade entre  $A_v$  e  $C_j$ , são elas que

$$\begin{aligned}
A_v C_j \left| d \rightarrow \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \\ c \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ \beta \\ \uparrow \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_C} \mathcal{G}(\theta(b, \alpha), \beta) A_v \left| d \rightarrow \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \\ c \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ \beta \\ \uparrow \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{1}{N_A N_C} \mathcal{G}(\theta(b, \alpha), \beta) \sum_{k, \gamma} z_k^* \mathcal{G}(\theta(k, \alpha), \gamma) \left| dk^{-1} \rightarrow \begin{array}{c} ka \\ \uparrow \\ \gamma \\ \uparrow \\ ck^{-1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} kb \\ \uparrow \\ \beta \\ \uparrow \end{array} \right\rangle \\
C_j A_v \left| d \rightarrow \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \alpha \\ \uparrow \\ c \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ \beta \\ \uparrow \end{array} \right\rangle &= \frac{1}{N_A} \sum_{k, \gamma} z_k^* \mathcal{G}(\theta(k, \alpha), \gamma) C_j \left| dk^{-1} \rightarrow \begin{array}{c} ka \\ \uparrow \\ \gamma \\ \uparrow \\ ck^{-1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} kb \\ \uparrow \\ \beta \\ \uparrow \end{array} \right\rangle \\
&= \frac{1}{N_A N_C} \sum_{k, \gamma} z_k^* \mathcal{G}(\theta(k, \alpha), \gamma) \mathcal{G}(\theta(kb, \gamma), \beta) \left| dk^{-1} \rightarrow \begin{array}{c} ka \\ \uparrow \\ \gamma \\ \uparrow \\ ck^{-1} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} kb \\ \uparrow \\ \beta \\ \uparrow \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

**Figura 7.16:** Resultado da atuação de  $A_v$  e  $B_p$  sobre os campos dispostos na rede, de onde fica clara a comutatividade entre estes operadores.

nos mostram uma outra condição essencial para que essa comutatividade ocorra: como é notável da Figura 7.16, esses dois operadores  $A_v$  e  $C_j$  comutarão se, e somente se,  $\mathcal{G}$  puder ser interpretada essencialmente como uma aplicação bilinear tal que

$$\mathcal{G}(\theta(b, \alpha), \beta) \sum_{k, \gamma} z_k^* \mathcal{G}(\theta(k, \alpha), \gamma) = \sum_{k, \gamma} z_k^* \mathcal{G}(\theta(k, \alpha), \gamma) \mathcal{G}(\theta(kb, \gamma), \beta) \quad . \quad (7.9)$$

E como não apenas esta relação, mas todas as demais em (7.8) são satisfeitas quando tomamos

$$\mathcal{G}(\theta(k, \alpha), \beta) = \delta(\theta(k, \alpha), \beta) \quad , \quad (7.10)$$

esta será exatamente a escolha que faremos diante de tudo o que precisa ser feito ao longo do próximo capítulo.

## Capítulo 8

# Modelos com campos de matéria

### 8.1 Comentários iniciais

De acordo com tudo o que dissemos na segunda metade do último capítulo, a concepção de um modelo, que pode ser visto como uma generalização dos “Quantum Double Models” (QDMs), devido ao acréscimo de

$$|\chi_v\rangle = a_0^{(\chi)} |0\rangle + \dots + a_{m-1}^{(\chi)} |m-1\rangle$$

aos  $N_v$  vértices de uma rede bidimensional (QDMv), se concretiza através de um operador Hamiltoniano

$$H_{\text{QDMv}} = - \sum_v A_v^{(G_1, G_2)} - \sum_p B_p^{(G_1, G_2)} - \sum_j C_j^{(G_1, G_2)} \quad , \quad (8.1)$$

que é composto por operadores de vértice, de face e de aresta que são dados respectivamente por

$$A_v^{(G_1, G_2)} = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} \tilde{A}_v^g \quad , \quad B_p^{(G_1, G_2)} = B_p^e \quad \text{e} \quad C_j^{(G_1, G_2)} = C_j \quad , \quad (8.2)$$

cujas componentes são expressas em conformidade ao que consta na Figura 8.1. Afinal de contas, essas componentes nada mais são do que casos particulares daquelas, que já constam na Figura 7.12 quando tomamos não apenas a escolha (7.10), mas  $z_j$  e  $z_j^*$  como os elementos identidades das álgebra e coálgebra que estão aqui envolvidas. Aliás, vale notar que, aqui, continuaremos considerando que  $G_1$  é o grupo que modera os campos de calibre, enquanto que  $G_2$  continuará sendo considerado, a priori, apenas como um conjunto cujos elementos indexam a base de “matéria”  $\mathcal{B}_v = \{ |\alpha\rangle : \alpha \in G_2 \}$ .

$$\begin{aligned}
\bar{A}_v^g \left| \begin{array}{c} a \\ \rightarrow \alpha \leftarrow b \\ c \end{array} \right\rangle &= \sum_{\gamma} \delta(\theta(g, \alpha), \gamma) \left| \begin{array}{c} ga \\ \rightarrow \gamma \leftarrow gb \\ cg^{-1} \end{array} \right\rangle \\
B_p^h \left| \begin{array}{c} a \\ \leftarrow d \rightarrow b \\ c \end{array} \right\rangle &= \delta(ab^{-1}c^{-1}d, h) \left| \begin{array}{c} a \\ \leftarrow d \rightarrow b \\ c \end{array} \right\rangle \\
C_j \left| \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ a \end{array} \right\rangle &= \delta(\theta(a, \alpha), \beta) \left| \begin{array}{c} \alpha \rightarrow \beta \\ a \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

**Figura 8.1:** Definição das componentes  $\bar{A}_v^g$ ,  $B_p^h$  e  $C_j$  dos respectivos operadores de vértice, de face e de aresta do QDMv. Da mesma maneira que o símbolo  $a$  denota um elemento  $\phi_a$ , o símbolo  $\alpha$  deve ser interpretado como um elemento  $\chi_\alpha$ .

## 8.2 Propriedades gerais

No caso, como já conhecemos qual é a expressão do operador Hamiltoniano (8.1), e também já sabemos como cada operador que o compõem age sobre os elementos “de Hilbert” que estão dispostos sobre os vértices e arestas de uma rede bidimensional  $\mathcal{R}_2$ , todas as propriedades que estão relacionadas a esse QDMv já podem ser muito bem entendidas. E, uma das três coisas que já estão bem claras neste modelo, que, agora, se apoia sobre um espaço de Hilbert

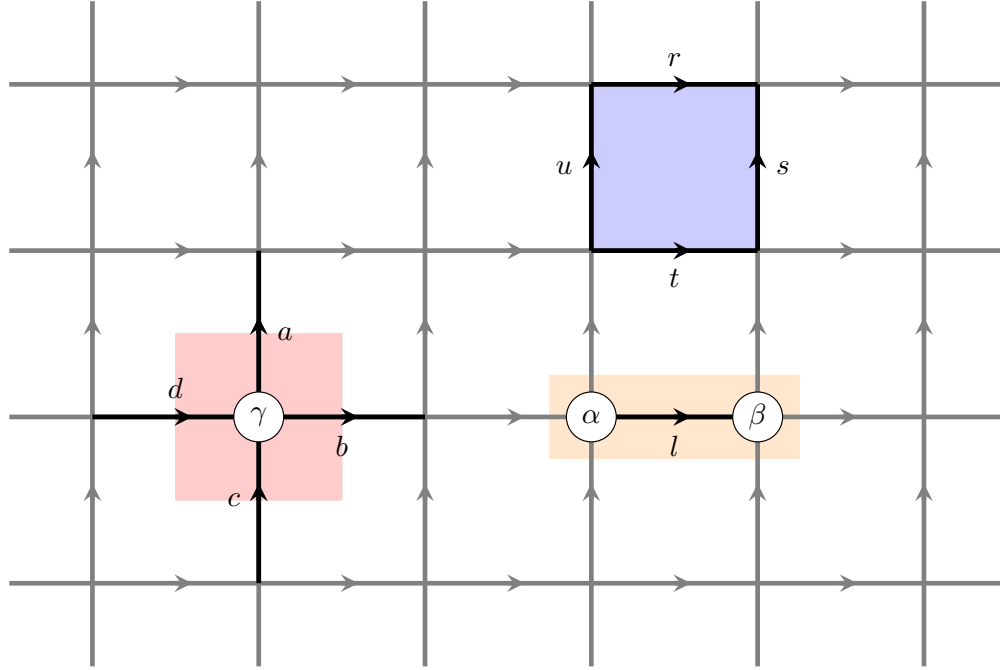
$$\mathfrak{H}_{\text{QDMv}} = \mathfrak{H}_n^{N_a} \otimes \underbrace{\mathfrak{H}_m \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_m}_{N_v \text{ vezes}} = \mathfrak{H}_{\text{QDM}} \otimes \mathfrak{H}_m^{N_v} \quad (8.3)$$

que é nitidamente um “pouco maior”, é a presença de um operador de aresta  $C_j : \mathfrak{H}_{\text{QDMv}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{QDMv}}$  que, ao contrário do de aresta do modelo discutido na Seção 7.1, não se identifica mais como proporcional a um operador identidade: como os seus autovalores, agora, são todos iguais essa escolha

$$\mathcal{G}(\theta(a, \alpha), \beta) = \delta(\theta(a, \alpha), \beta)$$

que se vale da ação que é definida em (7.7), vemos que o papel de  $C_j$  é o de atuar como uma espécie de “comparador” neste QDMv; ou seja,  $C_j$  é um operador que é capaz de *comparar* dois campos de matéria, que estão alocados em vértices adjacente, após a interação de um deles com um de calibre, conforme bem sugere a Figura 8.2.

Já a segunda coisa que também é muito clara aqui é que, devido à definição dada para o



**Figura 8.2:** Recorte da rede  $\mathcal{R}_2$  que dá suporte ao QDMv, onde os setores azul e verde são exatamente os mesmos que já foram definidos na Figura 6.1, e o novo setor laranja está associado à  $j$ -ésima aresta compreendida entre dois vértices adjacentes que, agora, comportam campos de matéria que podem ser comparados entre si por meio de um operador de vértice.

operador Hamiltoniano (8.1), todo o espectro de energia deste modelo pode ser obtido a partir do conhecimento dos seus autoestados de vácuo  $|\xi_0\rangle$ , os quais possuem uma autoenergia igual a

$$E_0 = -(N_v + N_p + N_a) \quad (8.4)$$

já que eles satisfazem todas as relações locais de vácuo

$$A_v^{(G_1, G_2)} |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle, \quad B_p^{(G_1, G_2)} |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle \quad \text{e} \quad C_j^{(G_1, G_2)} |\xi_0\rangle = |\xi_0\rangle. \quad (8.5)$$

Afinal, como  $|\xi_0\rangle$  pertence a um subespaço  $\mathfrak{H}_{\text{QDMv}}^{(0)} \subset \mathfrak{H}_{\text{QDMv}}$  que é naturalmente *invariante* pela ação do projetor

$$P_{\text{QDMv}} = \prod_v A_v^{(G_1, G_2)} \prod_p B_p^{(G_1, G_2)} \prod_j C_j^{(G_1, G_2)}, \quad (8.6)$$

qualquer autoestado de “não vácuo” de um QDMv pode ser obtido através de um operador  $\mathcal{O}$  :  $\mathfrak{H}_{\text{QDMv}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{QDMv}}$  que *anticomuta* com  $P_{\text{QDMv}}$ .

Já terceira coisa que é simples de ser verificada aqui é a presença de um princípio da corres-

pondência entre um QDM $v$  e um QDM a qual, por exemplo, permite recuperar o último modelo como um caso particular do primeiro. E, para vermos como isso ocorre, basta considerarmos a situação onde  $\mathfrak{H}_m$  é um espaço de Hilbert unidimensional. Pois, como a única escolha que resta para a ação, neste caso, é ser tal que

$$1 = \theta(g, 1) \quad , \quad (8.7)$$

isso acaba equivalendo à mesma não escolha que fazemos no QDM devido à não atribuição de quaisquer elementos aos vértices de  $\mathcal{R}_2$ . Assim, a única diferença substancial que passa a existir entre o QDM que é assim obtido e o que já foi originalmente apresentado no Capítulo 6, por exemplo, decorre da presença dos operadores de aresta que não mais comparam coisa alguma, haja vista que todos os seus autovalores são iguais a 1. Ou seja, essa “não escolha” (8.7) faz com que essa diferença se reduza ao simples acréscimo de uma mesma constante a todos os níveis de energia desse novo QDM, tal como já acontece no modelo que foi discutido na Seção 7.1.

### 8.2.1 Alguns exemplos

Frente à enormidade de exemplos que se enquadram como um QDM $v$ , é mais do que conveniente apresentarmos quais são as principais propriedades de alguns deles antes discorrermos sobre as propriedades que são comum a todos. E, devido aos interesses explicitamente Abelianos que já são bem claros desde o título destas notas, o primeiro exemplo será o mais simples de todos: será o de um QDM $v$  que, além de se valer de um grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , atribui, aos vértices, os elementos de um espaço de Hilbert que é indexado pelo grupo  $G_2 = \mathbb{Z}_2$ .

É claro que, devido a essa nossa primeira escolha de  $G_2$ , o leitor pode estar perfeitamente se perguntando: já que  $G_2$  deve ser interpretado, a priori, apenas como um conjunto de índices, por quê  $G_2$  está sendo escolhido especificamente como um grupo? Existe alguma razão para fazermos isso? E a melhor resposta que podemos dar ao leitor que se faz essa pergunta é: sim, existe uma boa razão para tomarmos  $G_2$  como um grupo, e será exatamente isso o que faremos ao longo deste capítulo. No entanto, apesar do que iremos dizer agora parecer bastante banal, a única coisa que já podemos adiantar sobre o porquê desta escolha é que o fato de escolhermos  $G_2$  como um grupo não fere, de modo algum, a sua interpretação como um conjunto de índices.

Todavia, como, em todos os modelos que apresentamos até agora, todos os operadores de vértice e de face foram bem expressos em termos de alguma representação matricial, algo que



certamente também podemos adiantar aqui é que as representações matriciais desses operadores, no QDM $v$ , são dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} A_v^{(G_1, G_2)} &= \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} \Theta_v(g) \circ (X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g \quad e \\ B_p^{(G_1, G_2)} &= \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} (Z_r^\dagger)^g \circ (Z_s)^g \circ (Z_t)^g \circ (Z_u^\dagger)^g, \end{aligned} \quad (8.8)$$

onde  $\Theta : G_1 \rightarrow \text{GL}_m(\mathbb{C})$  é a representação que consegue expressar matricialmente a ação (7.7) como

$$(g, \alpha) \mapsto \beta = \Theta(g) \triangleright \alpha; \quad (8.9)$$

ou seja,  $\Theta$  é a aplicação que representa a ação como uma matriz  $\Theta(g)$  que, ao agir sobre a representação matricial de um vetor que é indexado por  $\alpha$  e que pertence a base  $\mathcal{B}_v$ , devolve um outro vetor que é indexado por  $\beta$  e que também pertence à mesma base.

Já sobre o operador de aresta, a única coisa que podemos adiantar sobre a sua representação matricial é que ela deve ser tal que

$$C_j^{(G_1, G_2)} | \chi_\alpha, \phi_j, \chi_\beta \rangle = \langle \chi_\alpha | [ \Theta(\phi_j) ]^{-1} | \chi_\beta \rangle | \chi_\alpha, \phi_j, \chi_\beta \rangle \quad (8.10)$$

haja vista a expressão que já demos para as suas componentes na Figura 8.1. Todavia, como é justamente essa expressão (8.10) que acaba deixando bem clara toda a diagonalidade de  $C_j^{(G_1, G_2)}$  em termos das bases  $\mathcal{B}_j$  e  $\mathcal{B}_v$ , é essa expressão que, além reforçar ainda mais todo o aspecto “comparatorial” deste operador, acaba nos dizendo um pouco mais do que isso: afinal, é ela quem acaba deixando bem claro que esse esquema de comparação realizado por  $C_j^{(G_1, G_2)}$  é bastante similar ao que, por exemplo, bem define o *Modelo de Potts* [71].

**Exemplo 1:**  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_2$

Uma das razões mais elementares de já termos dito que o nosso primeiro exemplo é um dos mais simples é que, de certa forma, ele pode ser interpretado como uma das outras “primeiras generalizações” diretas que já poderiam ter sido apresentadas, lá no Capítulo 5, sobre o “Toric Code” (TC) [72]. Afinal de contas, apesar de não estarmos nos atendo a quaisquer condições de contorno que divirjam de (6.2), ou mesmo que *pareça* priorizar algum tipo de variedade em especial, este exemplo de QDM $v$  já poderia ser sido obtido a partir do TC pela atribuição novos

campos (4.1) aos vértices de  $\mathcal{R}_2$ . Aliás, como, no caso deste nosso primeiro exemplo, a ação (7.7) nos remete a um QDMv que não se identifica trivialmente com o TC apenas quando

$$\Theta(1) \triangleright \alpha = \alpha \quad \text{e} \quad \Theta(-1) \triangleright \alpha = \alpha^{-1} \quad , \quad (8.11)$$

fica bem claro que os seus operadores de vértice, de face e de aresta são dados respectivamente por<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \sigma_v^x \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) \quad , \\ B_p &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) \quad \text{e} \\ C_j &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{v_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{v_2} + \sigma_{v_1}^z \circ \sigma_j^z \circ \sigma_{v_2}^z \right) \quad , \end{aligned} \quad (8.12)$$

onde todas as matrizes de Pauli indexadas por  $v$  e  $v_{(1,2)}$  agem não identicamente apenas sobre os campos de matéria que estão atribuídos aos vértices, enquanto as demais fazem o mesmo em relação aos campos de calibre que estão dispostos sobre as arestas. Note que, no caso dessa última indexação, ela é exatamente a mesma indexação que já usamos na Figura 8.2.

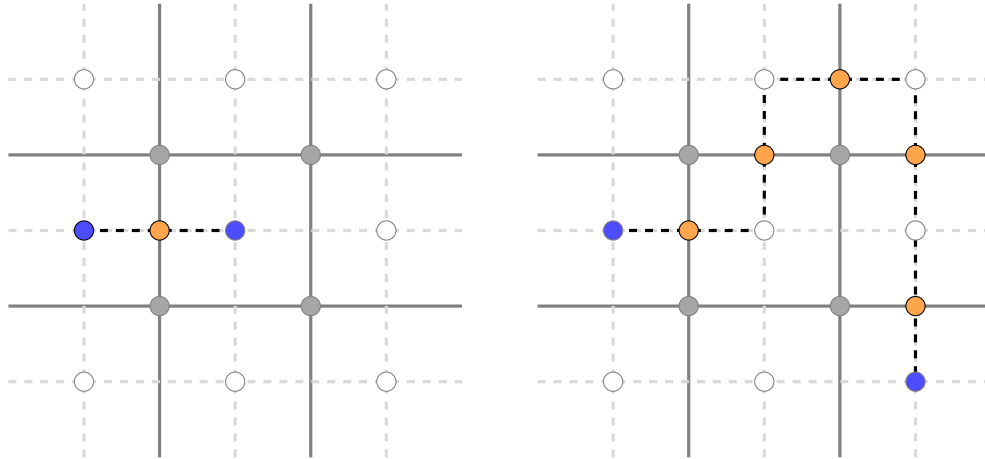
### Excitações elementares

Diga-se de passagem, uma coisa que também é bem fácil de se observar aqui é que o *único* estado fundamental deste modelo é

$$|\xi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |0\rangle \right) , \quad (8.13)$$

dado que ele é o único que satisfaz às relações de vácuo (8.5). E, uma vez que estamos diante de um operador Hamiltoniano e de um estado fundamental que estão bem definidos, podemos dizer que já temos todos os ingredientes necessários para bem entender quais são as principais propriedades que estão associadas às suas excitações mais elementares. E, como a estrutura de calibre sobre a qual este exemplo de QDMv se apoia é exatamente a mesma do TC, uma coisa já é certa: *todas* as quasipartículas que já caracterizam o TC, e que são produzidas aos pares através da ação dos

<sup>1</sup>Ao longo destes exemplos, omitiremos os superíndices ( $G_1, G_2$ ) associados aos operadores (8.8) e (8.10) apenas por uma questão de “leveza notacional”, a qual se mostrará muito útil nas expressões que seguem adiante.



**Figura 8.3:** Recortes de um mesmo setor de  $\mathcal{R}_2$  em instantes distintos. No primeiro, que está à esquerda, temos duas quasipartículas do tipo  $m$  que foram criadas pela ação de um único  $\sigma_j^x$ , onde o único ponto laranja destaca a única violação de vácuo que está associada aos operadores de aresta. Já no recorte à direita, temos a situação destas mesmas quasipartículas após elas terem sido transportadas por um operador (4.22). Note que, neste último caso, temos cinco pontos laranja: um para cada aresta envolvida nesse transporte, deixando claro toda a linearidade envolta para com o aumento de energia do sistema.

operadores

$$\sigma_j^x, \sigma_j^z \text{ e } \text{“}\sigma_j^y\text{”} \quad (8.14)$$

sobre as arestas de  $\mathcal{R}_2$ , também se fazem presentes aqui.

É claro que, apesar de ainda ser possível afirmar que todas as regras de fusão entre as quasipartículas que são criadas pelos últimos operadores neste QDMv são as mesmas (4.38), o simples fato dos operadores (8.12) não serem exatamente os mesmos que os do TC já sinaliza que essas quasipartículas podem apresentar algumas propriedades distintas. E, embora esse não seja propriamente o caso das quasipartículas do tipo  $e$  quanto aos seus transportes (já que elas continuam sendo movíveis pela rede sem, por exemplo, aumentar a energia do sistema), o mesmo não pode ser dito nem relação às do tipo  $m$  e, por consequência, nem em relação às do tipo  $\varepsilon$ . Afinal, basta ver que, apesar de  $\sigma_j^x$  ser o único operador que cria excitações que são detectáveis pelos operadores de face, a sua ação sobre (8.13) deixa um rastro que é perfeitamente detectável pelo operador  $C_j$ . Ou seja, apesar de ser perfeitamente possível transportar as quasipartículas do tipo  $m$  através de um operador como (4.20), transportá-las sempre faz com que a energia do sistema cresça *linearmente* em função do número de arestas que estão envolvidas nesse transporte, conforme bem ilustra a Figura 8.3. Logo, se o sistema em questão possuir algum mecanismo cuja tendência seja a de sempre mantê-lo com a menor energia possível, *todas* as quasipartículas do tipo  $m$  e  $\varepsilon$  serão

*confinadas.*

Em linhas bem gerais, e fazendo uma leitura dessa situação de confinamento pela perspectiva da física das partículas elementares, podemos dizer que esse confinamento é bastante similar ao que surge, por exemplo, do mecanismo que mantém *quarks* confinados à uma estrutura *hadrônica* pela ação de uma *força forte*. Afinal, se associarmos a ideia de transportar essas quasipartículas  $m$  à tentativa de “esticar” um *hádron* (deslocando um dos *quarks* que o compõem para longe dos outros), fica bem claro que, como a Natureza prefere deixar um *jato* (com novos hádrons que estão alinhados na mesma direção do caminho que estaria associado ao transporte desse quark [73]) como rastro, se realmente existir algum mecanismo análogo a esse, neste nosso exemplo de QDMv, jatos também poderão ser identificados a partir da detecção de novos pares (compostos exclusivamente por quasipartículas dos tipos  $m$  ou  $\varepsilon$ ) que estarão alinhados ao longo de um caminho  $\gamma^*$  composto por arestas de  $\mathcal{R}_2^*$ .

Aliás, por falar nos rastros que estão associados a esse nosso exemplo, é interessante destacar que a presença deles independe da presença de quaisquer quasipartículas. Pois, apesar de um operador tal como

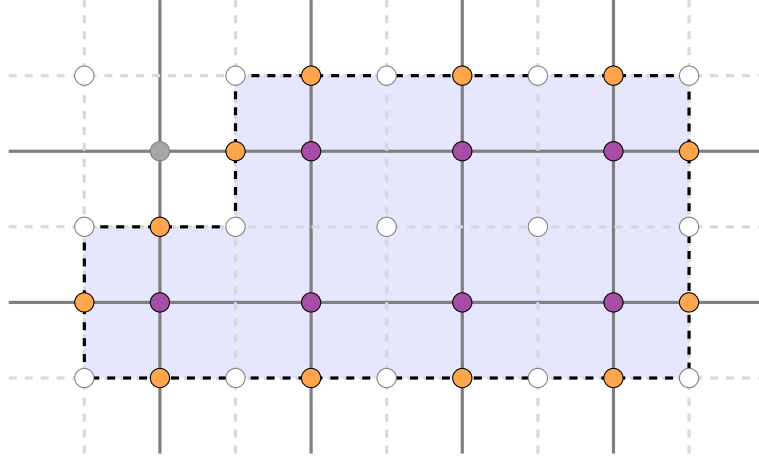
$$O_{\gamma^*}^x = \prod_{j \in \gamma^*} \sigma_j^x \quad (8.15)$$

não ser capaz de criar pares de quasipartículas  $m$  ao agir sobre um caminho fechado  $\gamma^*$ , ele consegue deixar um rastro que é perfeitamente mensurável pelos operadores de aresta. E uma das grandes consequências disso é que, como

- (i)  $[C_j, \sigma_v^x \circ \sigma_j^x] = 0$  é uma igualdade válida, quando  $\sigma_v^x$  age sobre um dos vértices que encerram a  $j$ -ésima aresta, e
- (ii) os dois operadores  $A_v$  e  $O_{\gamma^*}^x$ , além de comutarem entre si, sempre atuam apenas sobre duas arestas de cada face,

um estado de vácuo pode perfeitamente ser recuperado pela ação de um  $\sigma_v^x$  sobre cada um dos vértices interiores à área delimitada por  $\gamma^*$ , uma vez que, para o menor desses caminhos (ou seja, para o caminho fechado cujo interior se identifica com a área ocupada por uma única face dual), temos

$$\sigma_v^x \circ O_{\gamma^*}^x = \sigma_v^x \prod_{j \in S_v} \sigma_j^x = 2A_v - \mathbb{1}_v \prod_{j \in S_v} \mathbb{1}_j \quad .$$



**Figura 8.4:** Recorte da rede  $\mathcal{R}_2$  onde quasipartículas (pontos destacados em violeta) foram produzidas por um operador  $\sigma_v^x$  sobre todos os vértices que são interiores ao caminho fechado  $\gamma^*$  (em pontilhado). Neste caso, como a ação de (8.15) nos remete ao mesmo estado de vácuo (8.13), vemos que  $O_{\gamma^*}^x$  se comporta como uma espécie de “isolante” para esse conjunto de quasipartículas.

### Entendendo as regras de fusão

Por se dizer, já que esse último resultado indica ser válido afirmar que  $O_{\gamma^*}^x$  funciona como um “isolante” para o conjunto de quasipartículas que são criadas pela ação de um operador  $\sigma_v^x$  sobre todos os vértices que pertencem à área contida por  $\gamma^*$ , é mais do que interessante aproveitarmos essa “deixa” para explorarmos como é que outras excitações surgem sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$  por efeito da ação de algum  $W_v^{(J,K)} : \mathfrak{H}_v \rightarrow \mathfrak{H}_v$ . E, para este fim, é fundamental termos em mente que, se esses operadores realmente existem, eles devem satisfazer uma relação, análoga a (6.27), para um autoestado

$$|\xi'\rangle = W_v^{(J,K)} |\xi_0\rangle ;$$

ou seja, eles devem ser tais que

$$A_{v,J} \circ W_v^{(J,K)} = W_v^{(J,K)} \circ A_{v,1} \quad \text{e} \quad C_{j,K} \circ W_v^{(J,K)} = W_v^{(J,K)} \circ C_{j,1} , \quad (8.16)$$

sendo  $A_{v,J}$  e  $C_{j,K}$  os elementos que definem os respectivos conjuntos de projetores  $\mathfrak{A}_v$  e  $\mathfrak{C}_j$ . E, por se dizer, no caso deste nosso exemplo em específico, esses dois conjuntos são dados por

$$\mathfrak{A}_v = \{ A_{v,1} , A_{v,2} \} \quad \text{e} \quad \mathfrak{C}_j = \{ C_{j,1} , C_{j,2} \} ,$$

$(J, K)$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 2)	(1, 2)	(1, 1)	(2, 2)	(2, 1)
(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(1, 1)	(1, 2)
(2, 2)	(2, 2)	(2, 1)	(1, 2)	(1, 1)

**Tabela 8.1:** Regras de fusão que estão associadas às quasipartículas  $Q^{(J,K)}$ , criadas por operadores  $W_v^{(J,K)}$  que agem exclusivamente sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$ , neste QDMv que se vale de um grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e de um conjunto de índices  $G_2 = \mathbb{Z}_2$ . No caso, cada uma das entradas  $(J, K)$  corresponde a uma dessas quasipartículas, que é fruto da fusão entre as duas quasipartículas que indexam as linhas e colunas dessa tabela.

onde  $A_{v,1} = A_v$  e  $C_{j,1} = C_j$ , enquanto

$$\begin{aligned} A_{v,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \sigma_v^x \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) \text{ e} \\ C_{v,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{v_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{v_2} - \sigma_{v_1}^z \circ \sigma_j^z \circ \sigma_{v_2}^z \right) . \end{aligned} \quad (8.17)$$

E, de acordo com todas essas relações, não é difícil perceber que a única solução que satisfaz à (8.16) é dada por

$$W_v^{(1,1)} = \mathbb{1}_v \quad , \quad W_v^{(1,2)} = \sigma_v^x \quad , \quad W_v^{(2,1)} = \sigma_v^z \quad \text{e} \quad W_v^{(2,2)} = \text{“} \sigma_v^y \text{”} \quad , \quad (8.18)$$

onde, aqui, optamos por um

$$\text{“} \sigma_v^y \text{”} = \sigma_v^x \circ \sigma_v^z = \sigma_v^z \circ \sigma_v^x$$

análogo ao (4.32), ao invés de um  $\sigma_v^y$  literal, por uma razão muito simples: fazer com que  $W_v^{(2,2)}$  seja expresso em termos dos mesmos operadores que já definem o Hamiltoniano deste modelo. Aliás, diante dessas expressões, outra coisa que também não é difícil perceber é que, ao denotarmos as quatro excitações que surgem pela ação dos quatro operadores que constam em (8.18) respectivamente por  $Q^{(1,1)}$ ,  $Q^{(1,2)}$ ,  $Q^{(2,1)}$  e  $Q^{(2,2)}$ , as suas regras de fusão são exatamente aquelas que constam na Tabela 8.1, as quais deixam bem claro que estamos diante de um modelo que é *Abeliano*.

### Propriedades adicionais

No entanto, antes de encerrarmos a apresentação deste nosso primeiro exemplo, é muito importante destacarmos, pelo menos, três coisas. E, a primeira delas, segue, por exemplo, notando

que

$$[ A_v, \sigma_v^z \circ \sigma_j^z ] = 0$$

é uma relação válida quando  $v$  indexa um dos vértices que encerram a  $j$ -ésima aresta. Afinal de contas, como, neste caso, os autoestados

$$| \xi'' \rangle = \sigma_j^z | \xi_0 \rangle \quad \text{e} \quad | \xi''' \rangle = \sigma_{v_1}^z \circ \sigma_{v_2}^z | \xi_0 \rangle$$

satisfazem exatamente às mesmas relações

$$A_{v_1,2} | \xi \rangle = A_{v_2,2} | \xi \rangle = | \xi \rangle \quad , \quad B_{p,1} | \xi \rangle = | \xi \rangle \quad \text{e} \quad C_{j,1} | \xi \rangle = | \xi \rangle \quad (8.19)$$

desde que  $S_j = \{v_1, v_2\}$  corresponda ao conjunto de vértices que extremizam a  $j$ -ésima, esses dois autoestados  $| \xi'' \rangle$  e  $| \xi''' \rangle$  podem ser considerados *efetivamente* como os mesmos: ou seja, a excitação, que é criada individualmente por um  $W_v^{(2,1)}$ , se comporta efetivamente como uma quasipartícula do tipo  $e$ , nos indicando que todas essas  $Q^{(J,K)}$  também podem ser interpretadas como quasipartículas.

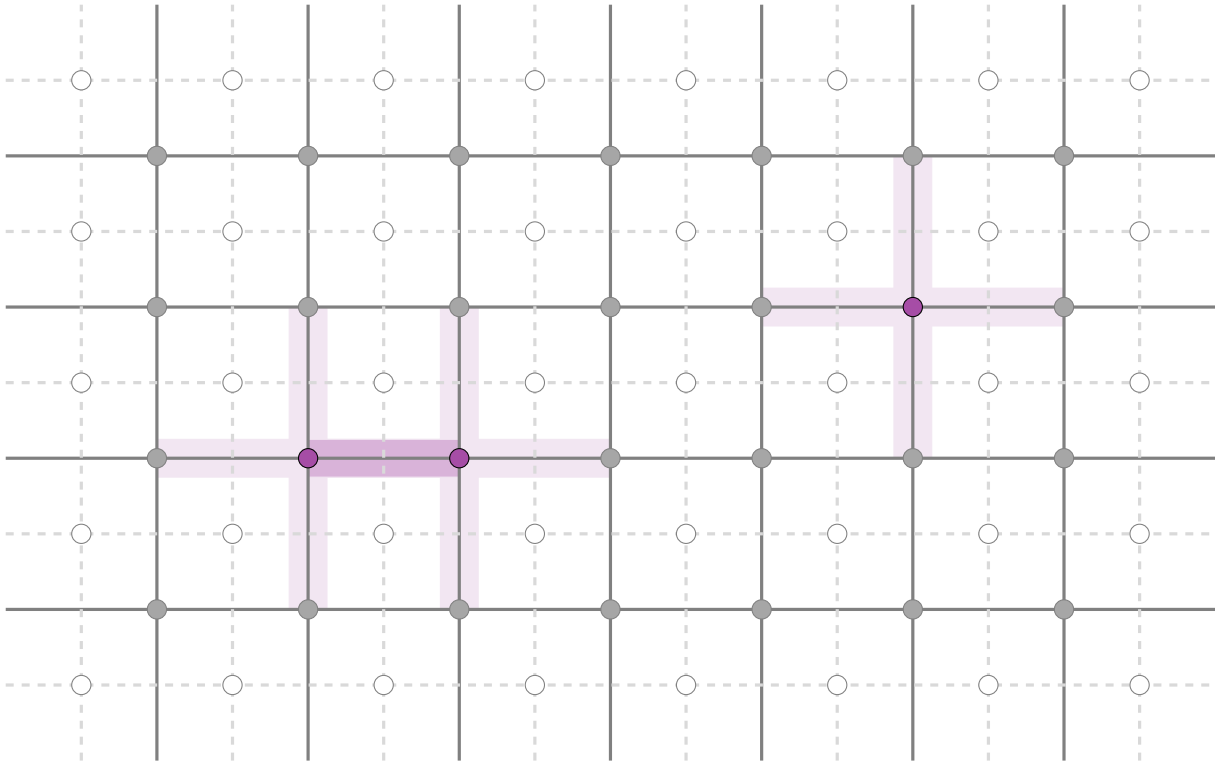
Já o segundo e terceiro destaques que precisamos dar aqui é *energético*. Porém, como para entendê-lo é interessante ir “por partes”, começaremos fazendo isso observando que, apesar do autoestado

$$| \xi'''' \rangle = \sigma_v^x | \xi_0 \rangle$$

nos mostrar que a energia de uma quasipartícula  $Q^{(1,2)}$ , sozinha, é exatamente igual a 4, a energia de um sistema que é composto por apenas duas delas não é necessariamente igual a 8. E a razão disso acontecer é muito simples, e está diretamente relacionada ao fato de que, se duas quasipartículas  $Q^{(1,2)}$  forem concebidas sobre o conjunto de vértices  $S_j$ , teremos

$$[ C_j, \sigma_{v_1}^x \circ \sigma_{v_2}^x ] = 0 \quad . \quad (8.20)$$

E, nestes termos, ao notarmos que, quando essas duas quasipartículas não estão em  $S_j$ , o sistema realmente possui uma energia igual a 8, é imediato concluir que existe uma espécie de potencial entre elas, que é bastante similar a um eletrostático: afinal, se o sistema possuir algum mecanismo físico que faça com que ele sempre fique no estado de menor energia possível, esse potencial favoreceria que essas duas quasipartículas se aglomerassem, uma ao lado da outra remontando a



**Figura 8.5:** Esquema relacionado ao campo eletrostático que está associado às quasipartículas  $Q^{(1,2)}$ . No caso da quasipartícula à direita, as arestas destacadas (em violeta) representam o setor onde o seu campo eletrostático é não nulo. Já na situação presente à esquerda, onde duas quasipartículas constam sobre dois vértices adjacentes, temos uma situação onde o potencial eletrostático reduz a energia do sistema: pela perspectiva da primeira situação, por exemplo, a interação que leva a essa redução de energia pode ser explicada pela intersecção não nula dos campos eletrostáticos.

uma situação onde a energia é igual a 6, caso elas pudessem ser transportadas.

Aliás, de acordo com o ponto de vista discreto que permeia estas notas, essa nossa interpretação eletrostática se reforça ainda mais, já que um sistema que é assim concebido possui as mesmas características daquele que está associado à modelagem discreta de um gás de elétrons [74]. Tudo bem que, aqui, esses elétrons estão presos aos vértices da rede, dado que as excitações criadas por um  $W_v^{(J,K)}$  não podem ser transportadas, exceto por um operador de “teletransporte”

$$W_{v'}^{(J,K)} \circ W_v^{(J,K)}$$

que é capaz de transportar uma quasipartícula  $Q^{(J,K)}$  (que está inicialmente sobre um vértice  $v$ ) para um outro vértice  $v'$  que pode ser completamente arbitrário. No entanto, a única diferença que



talvez exista aqui é que, devido ao fato de também valer que

$$\left[ C_j, \sigma_{v_1}^x \circ \text{“} \sigma_{v_2}^y \text{”} \right] = \left[ C_j, \text{“} \sigma_{v_1}^y \text{”} \circ \text{“} \sigma_{v_2}^y \text{”} \right] = 0 \quad , \quad (8.21)$$

esse mesmo comportamento eletrostático também se estende aos demais aglomerados que são compostos não exclusivamente por um único tipo de quasipartícula: e esse é justamente o terceiro destaque que precisamos fazer aqui. Entretanto, é sempre bom reforçar que, embora as quasipartículas  $Q^{(2,2)}$  também sejam perfeitamente capazes de interagir eletrostaticamente para com as  $Q^{(1,2)}$  e vice-versa, esse poder de interação não permite identificá-las como iguais: muito pelo contrário. Basta ver que, apesar das relações (8.20) e (8.21) deixarem claro que os operadores de aresta são completamente incapazes de detectar qualquer uma dessas quasipartículas quando elas se encontram na situação que está exposta na Figura 8.4, nenhum operador  $O_{\gamma^*}^x$  é capaz de “blindar” a existência de uma  $Q^{(2,2)}$ : essa quasipartícula permanece completamente visível para um operador de vértice, o que até justifica o fato dela, quando isolada, ter uma unidade a mais de energia que uma outra  $Q^{(1,2)}$ .

**Exemplo 2:**  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_3$

Um outro exemplo bem interessante de ser discutido aqui é o de um QDMv que, apesar de continuar se valendo do mesmo  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  para moderar os seus campos de calibre, atribui os elementos de um espaço de Hilbert que é indexado por  $G_2 = \mathbb{Z}_3$  aos vértices de  $\mathcal{R}_2$ . E um dos aspectos que já merecem ser apontados neste modelo é que, como a sua ação precisa ser tal que

$$\theta^2(g, \alpha) = I(g, \alpha)$$

em respeito as propriedades projetivas dos operadores que completam  $\mathfrak{A}_v$ , a priori existem três ações que podem defini-lo distintamente do TC, uma vez que as suas representações matriciais devem realizar permutações entre os elementos

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

que compõem  $\mathcal{B}_v$ . E, no caso, as três representações matriciais que fazem isso são dadas explicitamente por

$$\Theta_1(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Theta_2(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Theta_3(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Todavia, como a ação de qualquer uma dessas matrizes sempre mantém um elemento de  $\mathcal{B}_v$  fixo enquanto troca os outros dois, vemos que, independente da nossa escolha, sempre estaremos diante da mesma situação “física”. E, como essa observação implica que essas três possíveis ações não levam a três modelos distintos, mas, sim, ao mesmo modelo, isso significa que podemos lidar tranquilamente com as expressões

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \Theta_1(-1)_v \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right] \quad \text{e} \\ B_p &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

para os respectivos operadores de vértice e de face deste QDM $_v$ , sem ficar com qualquer peso na consciência.

### *Sobre os estados fundamentais*

É claro que ainda precisamos encontrar uma representação para o operador de aresta deste modelo, uma vez que isso é fundamental para entendermos e classificarmos todas as excitações elementares neste QDM $_v$ . Entretanto, diante da expressão desses últimos operadores, já existe uma coisa que vale a pena destacar: o estado fundamental deste modelo é *degenerado*. E, uma das melhores maneiras de vermos o porquê dessa degenerescência, é olhando justamente para a sua ação. Afinal de contas, apesar de existir uma transformação

$$\mathcal{O} = \prod_v \Theta_1(-1)_v = \prod_v A_v$$

que consegue levar um dos autoestados de vácuo

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |0\rangle \right) \quad (8.24)$$

a um outro

$$|\xi'_0\rangle = \mathcal{O}|\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |1\rangle \right)$$

de vácuo e vice-versa, não existe qualquer outra transformação  $\mathcal{O}'$  que pode ser expressa como um produtório dos operadores (8.23) e que consiga levar o autoestado (8.49) ao outro

$$|\xi_0^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |2\rangle \right) , \quad (8.25)$$

que também é de vácuo, e vice-versa.

Embora, num primeiro momento, o leitor possa achar um pouco estranho apontar alguma independência entre todos esses autoestados sem o respaldo de qualquer não-contratibilidade de caminhos sobre  $\mathcal{R}_2$  (tal como fizemos em relação ao TC, por exemplo), toda essa estranheza se desfaz desde que lembremos de algo que já foi dito no Capítulo 4: a degenerescência do estado fundamental de qualquer modelo não está necessariamente “amarrada” a um aspecto topológico, mas, sim, à existência de operadores que, apesar de conectarem um estado de vácuo a outro, não podem ser expressos em termos de um produtório dos operadores que definem o Hamiltoniano do modelo em questão. Nestes moldes, como é exatamente isso o que acontece entre os dois autoestados (8.24) e (8.25), se torna perfeitamente possível afirmar que eles modelam dois vácuos independentes, uma vez que o operador  $C_j$  é completamente incapaz de fazer qualquer tipo de permutação entre os elementos de  $\mathcal{B}_v$ . Aliás, como ao longo dos exemplos que apresentaremos neste capítulo não nos importaremos com quaisquer propriedades topológicas que possam estar associadas a  $\mathcal{R}_2$ , algo que essa *bidegenerescência* acaba fazendo é deixando muito bem claro que estamos diante de uma situação onde as duas fases, que podem caracterizar esses dois estados de vácuo, *parecem* possuir apenas uma espécie de *ordem algébrica* e não mais topológica. Voltaremos a falar sobre isso mais adiante, mais especificamente no final deste capítulo.

*A obtenção dos operadores de aresta*

E já que falamos dessa incapacidade de permutação do operador de aresta, é bom aproveitarmos a “deixa” de termos mencionado o nome deste operador para apresentarmos as representações dos operadores que, por exemplo, compõem o conjunto

$$\mathfrak{C}_j = \{ C_{j,1}, C_{j,2}, C_{j,3} \} ,$$

cujos elementos, além de apresentarem propriedades projetivas, devem ser ortonormais entre si e entre aqueles que também figuram em

$$\mathfrak{A}_v = \{ A_{v,1}, A_{v,2} \} \quad \text{e} \quad \mathfrak{B}_p = \{ B_{p,1}, B_{p,2} \} \quad .$$

E, uma coisa muito importante que precisamos lembrar para este fim, é que essa “incapacidade de permutação” não deve ser uma propriedade restrita apenas ao operador de aresta que compõe o Hamiltoniano deste QDMv. No caso, *todos* os operadores que constam em  $\mathfrak{C}_j$  não podem realizar qualquer tipo de permutação entre os elementos (8.22): ou seja, todos esses operadores devem apenas comparar os campos de matéria que são atribuídos a dois vértices adjacentes, segundo a ação do campo de calibre que está presente na aresta que conecta esses dois vértices.

E, perante a necessidade de encontrarmos expressões para *projetores* que devem agir sobre elementos do tipo

$$| \alpha \rangle \otimes | g \rangle \otimes | \beta \rangle \quad ,$$

algo que também tem grande valia junto a essa tarefa é o fato de já existir um conjunto de três projetores para os elementos (8.22): de acordo com o Apêndice C, por exemplo, eles são dados especificamente por

$$\begin{aligned} C_v^{(0)} &= \frac{1}{3} \left( \mathbb{1}_v + Z_v + Z_v^2 \right) \quad , \quad C_v^{(1)} = \frac{1}{3} \left( \mathbb{1}_v + \omega^2 Z_v + \omega Z_v^2 \right) \quad \text{e} \\ & \\ C_v^{(2)} &= \frac{1}{3} \left( \mathbb{1}_v + \omega Z_v + \omega^2 Z_v^2 \right) \quad , \end{aligned} \tag{8.26}$$

onde, em termos matriciais, temos

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad ,$$

já que  $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$  é o gerador do grupo  $\mathbb{Z}_3$ . No caso, os superíndices que rotulam todos esses projetores (8.26) apontam para os únicos elementos que possuem autovalor não nulo; ou seja,

$$C_v^{(\alpha)} | \beta \rangle = \delta(\alpha, \beta) | \beta \rangle \quad .$$

Por efeito não apenas dessas observações, mas também da constatação que os dois projetores que atuam sobre os elementos da  $j$ -ésima aresta são expressos por

$$s_j^{(0)} = \frac{1}{2} ( \mathbb{1}_j + \sigma_j^z ) \quad \text{e} \quad s_j^{(1)} = \frac{1}{2} ( \mathbb{1}_j - \sigma_j^z ) \quad (8.27)$$

e tais que

$$s_j^{(h)} |g\rangle = \delta(g, h) |g\rangle \quad ,$$

não é difícil perceber de (8.10) que a expressão matricial do operador de aresta que completa o Hamiltoniano deste modelo é dada por

$$\begin{aligned} C_{j,1} = & C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} \\ & + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} \quad . \end{aligned} \quad (8.28)$$

Já em relação aos demais operadores que completam  $\mathfrak{C}_j$ , eles podem ser perfeitamente obtidos através dessas mesmas considerações, desde que notemos que a necessidade de ortonormalidade dos seus elementos nos leva a

$$C_{j,n} | \chi_\alpha, \phi_j, \chi_\beta \rangle = \langle \chi_\alpha | [ \Theta(\phi_j) ]^{-1} \cdot X^n | \chi_\beta \rangle \cdot | \chi_\alpha, \phi_j, \chi_\beta \rangle \quad , \quad (8.29)$$

sendo

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a representação matricial do mesmo operador (6.11), só que para o caso onde  $n = 3$ . Desta maneira, usando o mesmo raciocínio que já nos levou a (8.28), não é difícil concluir que esse conjunto  $\mathfrak{C}_j$  se completa com

$$\begin{aligned} C_{j,2} = & C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} \\ & + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{j,3} = & C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} \\ & + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} \end{aligned}$$

*Operadores de vértice e de face*

Diante das expressões de todos os operadores que foram obtidos até aqui, finalmente somos capazes não apenas de encontrar, mas de classificar, todas as excitações elementares que podem figurar neste modelo. Talvez a única coisa que parece faltar para que isso seja feito é explicitar quais são as expressões dos operadores que, junto com os que aparecem em (8.23), completam os conjuntos  $\mathfrak{U}_v$  e  $\mathfrak{B}_p$ . Todavia, como tal completamento é trivial, é bem provável que tais expressões já estejam bem claras para leitor. Afinal, como

$$A_{v,1} + A_{v,2} = \mathbb{1}_v \quad (8.30)$$

é uma propriedade que precisa ser válida entre os dois elementos de compõem  $\mathfrak{U}_v$ , a única opção que temos para expressar o operador de aresta “faltante” é

$$A_{v,2} = \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \Theta_1 (-1)_v \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right] . \quad (8.31)$$

Já para encontrar o operador de face que falta, um argumento inteiramente análoga também se aplica aqui, o que nos leva a

$$B_{p,2} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) .$$

Note que a expressão desse último operador é exatamente a mesma que já está relacionada ao exemplo anterior, onde temos os mesmos campos de calibre, porém campos de matéria que pertencem a um espaço de Hilbert com um grau de liberdade a menos do que agora. E a razão de toda essa identificação acontecer é bem simples: ela se deve ao simples fato do operador de face em (8.2) ser completamente incapaz de aferir qualquer propriedade que decorre da presença de matéria sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$ ; no caso, os únicos operadores que são sensíveis a tal presença são os de vértice e os de aresta.

Aliás, olhando bem para as expressões dos operadores de aresta que constam em (8.23) e (8.31), algo que também podemos ver é que elas não diferem muito das expressões dos operadores de aresta em (8.12) e (8.17). Afinal de contas, como os campos de calibre dos dois exemplos que apresentamos aqui são exatamente os mesmos, a única diferença que existe entre os seus operadores de aresta se resume ao fato de termos duas ações bem distintas. Note que o mesmo

comentário também vale para os operadores de vértice.

### *Relações não Abelianas*

Uma das coisas que continuam claras aqui é que, devido a todas as “similaridades” que foram mencionadas nos últimos dois parágrafos, os mesmos operadores (8.14) continuam sendo responsáveis por criar pares de quasipartículas que não apenas se identificam como os mesmos pares do TC, mas que apresentam exatamente as mesmas propriedades relacionadas ao exemplo anterior: pois, como

$$\sigma_j^z \circ s_j^{(h)} = s_j^{(h)} \circ \sigma_j^z \quad \text{e} \quad \sigma_j^x \circ s_j^{(h)} = -s_j^{(h)} \circ \sigma_j^x \quad ,$$

vemos que

- enquanto as quasipartículas do tipo  $e$  podem transitar livremente ao longo de  $\mathcal{R}_2$ , sem elevar a energia do sistema,
- as dos tipos  $m$  e  $\varepsilon$  também apresentam o mesmo padrão, com as mesmas tendências de confinamento já foi discutida entre as páginas 121 e 122, caso o presente modelo também possua algum mecanismo que obrigue o sistema a ficar no estado de menor energia possível.

É claro que, assim como no caso anterior, essas não são as únicas quasipartículas que figuram no presente modelo, dado que aqui também existem operadores  $W_v^{(J,K)}$  que agem apenas sobre os vértices da rede e que satisfazem a (8.16). E, no caso desses operadores, independente de quais sejam as representações específicas de cada um deles, uma coisa já é certa: devido à primeira igualdade (à esquerda) em (8.16), por exemplo, as suas expressões mais gerais devem ser tais que

$$W_v^{(1,K)} = \begin{pmatrix} a_{1K} & b_{1K} & c_{1K} \\ b_{1K} & a_{1K} & c_{1K} \\ d_{1K} & d_{1K} & r_{1K} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W_v^{(2,K)} = \begin{pmatrix} a_{2K} & b_{2K} & c_{2K} \\ -b_{2K} & -a_{2K} & -c_{2K} \\ d_{2K} & -d_{2K} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (8.32)$$

cujas entradas, a priori, devem ser interpretadas como números complexos.

Aliás, é justamente por efeito dessas últimas expressões que, pelo menos, dois operadores es-

pecíficos já podem ser apontados: o primeiro deles é o

$$W_v^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.33)$$

que, por não realizar nenhuma troca entre os elementos dispostos em (8.22), cria uma quasi-partícula que é interpretável como de vácuo  $Q^{(1,1)}$ ; já o segundo operador é

$$W_v^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.34)$$

que é exatamente o mesmo operador que já representa a ação  $\Theta_1(-1)$  deste QDMv e que, portanto, consegue criar uma excitação  $Q^{(1,2)}$  como consequência de uma simples permutação

$$|0\rangle_v \leftrightarrow |1\rangle_v \quad .$$

Apesar de parecer bastante “ingênuo” o que iremos dizer agora, é justamente neste momento que precisamos destacar duas coisas. E, a primeira delas, é que as excitações que são criadas por esses dois últimos operadores satisfazem um dos requisitos fundamentais que precisam ser satisfeitos por quaisquer excitações que tenham pretensões de serem vistas como quasipartículas: elas são tais que

$$Q^{(1,1)} \times Q^{(1,2)} = Q^{(1,2)} \times Q^{(1,1)} \quad ; \quad (8.35)$$

ou seja, independente da ordem em que elas aparecem num processo de fusão, elas levam exatamente aos mesmos produtos que, neste caso em específico, é  $Q^{(1,2)}$ . Já a segunda (que, talvez, pareça ser bem mais “ingênua” do que afirmar que a regra de fusão entre qualquer quasi-partícula com uma de vácuo é comutativa) é que essas mesmas excitações  $Q^{(1,1)}$  e  $Q^{(1,2)}$  foram criadas através de permutações que não “mexeram” com o elemento  $|2\rangle$ . E, apesar da aparente “ingenuidade” desta afirmação (uma vez que é perfeitamente possível definir permutações entre alguns elementos enquanto outros são mantidos fixos), é justamente por trás dela que reside um aspecto fundamental que está relacionado aos operadores  $W_v^{(J,K)}$ : *nenhum* dos que se identificam como permutações “mexem” com o elemento  $|2\rangle$ ; o único operador que consegue fazer isso, e



ainda completa um quadro de fusão comutativo para com as quasipartículas  $Q^{(1,1)}$  e  $Q^{(1,2)}$ , é

$$W_v^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.36)$$

E é exatamente diante da última constatação de que

$$W_v^{(1,3)} |0\rangle = W_v^{(1,3)} |1\rangle = |2\rangle \quad \text{e} \quad W_v^{(1,3)} |2\rangle = |0\rangle + |1\rangle + |2\rangle \quad (8.37)$$

que surge a propriedade mais importante deste modelo que adota  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_3$ : como a composição

$$W_v^{(1,3)} \circ W_v^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

deve ser associada à regra de fusão entre as duas quasipartículas  $Q^{(1,3)}$  que são criadas pela ação consecutiva do operador  $W_v^{(1,3)}$  sobre um mesmo vértice, fica muito claro que estamos diante de um modelo que, apesar de ser fundamentado sobre dois grupos Abelianos, é perfeitamente capaz de abrigar regras de fusão nitidamente *não Abelianas*.

#### *Sobre a inexistência de quasipartículas adicionais*

Diante disso, e uma vez que já temos plena ciência de quais são os operadores  $W_v^{(1,K)}$  que realmente são capazes de criar quasipartículas neste QDMv, cabe agora fazer a mesma avaliação em relação aos possíveis  $W_v^{(2,K)}$ . E um dos primeiros operadores que podemos pensar é naquele que, por exemplo, é expresso como

$$W_v^{(2,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.38)$$

Pois, como

$$W_v^{(2,1)} |0\rangle = |0\rangle \quad \text{e} \quad W_v^{(2,1)} |1\rangle = -|1\rangle$$

nos diz que ele é o único operador capaz de criar uma excitação sobre um vértice que não pode ser detectada por um operador de aresta, vemos que a excitação  $Q^{(2,1)}$  que ele cria, ao agir sobre o primeiro autoestado de vácuo (8.24), se identifica exatamente como uma quasipartícula do tipo  $e$ . Aliás, algo que só reforça ainda mais toda essa identificação é o fato de que

$$W_v^{(2,1)} \circ W_v^{(2,1)} |\xi_0^{(1)}\rangle = |\xi_0^{(1)}\rangle .$$

Ou seja, mais uma vez, parece que estamos diante de um modelo onde quasipartículas do tipo  $e$  podem ser perfeitamente criadas sem ser aos pares, *ao menos sobre um dos estados de vácuo*. E a razão de termos dado toda essa ênfase a este “ao menos sobre um dos estados de vácuo” é muito simples: afinal

$$W_v^{(2,1)} |2\rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad W_v^{(2,1)} |2\rangle = 0|0\rangle + 0|1\rangle + 0|2\rangle . \quad (8.39)$$

Outro “ou seja”: apesar do que acabamos de dizer sobre  $Q^{(2,1)}$  estar perfeitamente correto (já que  $W_v^{(2,1)}$  realmente nos dá um excelente argumento para identificarmos essa excitação como uma quasipartícula do tipo  $e$ ), se nos basearmos apenas em (8.39) ainda não podemos afirmar se  $Q^{(2,1)}$  corresponde, ou não, a uma quasipartícula.

Todavia, embora esse resultado (8.39) já consiga suscitar, sozinho, essa dúvida sobre a “quasiparticularidade” de  $Q^{(2,1)}$ , existe um outro resultado (que é muito mais simples, porém muito mais forte) que acaba retirando qualquer dúvida que possa realmente existir sobre isso, ao mesmo tempo que revela uma outra coisa *muito importante*: afinal, como

$$W_v^{(2,1)} \circ W_v^{(1,3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = W_v^{(1,3)} \circ W_v^{(2,1)} \quad (8.40)$$

nos mostra que

$$Q^{(2,1)} \times Q^{(1,3)} \neq Q^{(1,3)} \times Q^{(2,1)} ,$$

esse resultado acaba deixando bem claro que  $Q^{(2,1)}$  *não pode ser interpretada como uma quasipartícula dentro de um modelo que considera  $Q^{(1,3)}$  como uma quasipartícula*. E como ao estendermos essa mesma linha de raciocínio aos demais operadores  $W_v^{(2,K)}$  chegamos à mesma conclusão, é imediato concluir que as únicas excitações  $Q^{(J,K)}$  que podem ser traduzidas como quasipartículas,

$(J, K)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$
$(1, 1)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 3)$
$(1, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 1)$	$(1, 3)$
$(1, 3)$	$(1, 3)$	$(1, 3)$	$(1, 1) + (1, 2) + (1, 3)$

**Tabela 8.2:** Regras de fusão associadas às quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  que estão presentes neste QDMv, o qual se vale de um grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , de um conjunto de índices  $G_2 = \mathbb{Z}_3$  e da consideração que  $Q^{(1,3)}$  é uma quasipartícula.

nesta situação que adota  $Q^{(1,3)}$  como uma quasipartícula, são aquelas cujas regras de fusão constam na Tabela 8.2.

É claro que, depois de ler este último parágrafo, e de notar toda a ênfase que foi dada, por exemplo, à passagem “ $Q^{(2,1)}$  não pode ser interpretada como uma quasipartícula dentro de um modelo que considera  $Q^{(1,3)}$  como uma quasipartícula”, o leitor deve estar se perguntando sobre o porquê dessa ênfase. E, ao leitor que se faz essa pergunta, devemos apresentar um fato que vai ajudá-lo a entender qual é a coisa “muito importante” que também mencionamos no mesmo parágrafo. Afinal de contas, apesar da relação (8.40) nos mostrar que a excitação que é criada por um operador  $W_v^{(2,1)}$  realmente não completa um quadro de fusão comutativo para com as três quasipartículas que constam na Tabela 8.2, quando deixamos de lado a quasipartícula  $Q^{(1,3)}$  é possível notar que um outro quadro de fusão se completa, entre as quasipartículas  $Q^{(1,2)}$ ,  $Q^{(2,1)}$  e as demais  $Q^{(1,1)'}$  e  $Q^{(2,2)}$  que são criadas pelos operadores

$$W_v^{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W_v^{(2,2)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente. Ou seja, o que esse último quadro de fusão nos mostra é que, apesar deste QDMv possuir dois autoestados de vácuo (8.24) e (8.25), esse modelo abriga duas situações bem distintas: uma, onde podemos excitar esses dois autoestados de vácuo mediante a concepção de uma quasipartícula  $Q^{(1,3)}$  que apresenta uma regra de fusão não Abelianas; e outra, onde o autoestado de vácuo (8.25) nunca pode ser excitado, cujas regras de fusão Abelianas das suas quasipartículas constam na Tabela 8.3.

$(J, K)$	$(1, 1)'$	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
$(1, 1)'$	$(1, 1)'$	$(1, 2)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$
$(1, 2)$	$(1, 2)$	$(1, 1)'$	$(2, 2)$	$(2, 1)$
$(2, 1)$	$(2, 1)$	$(2, 2)$	$(1, 1)'$	$(1, 2)$
$(2, 2)$	$(2, 2)$	$(2, 1)$	$(1, 2)$	$(1, 1)'$

**Tabela 8.3:** Regras de fusão associadas às quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  que estão presentes neste QDMv, o qual se vale de um grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , de um conjunto de índices  $G_2 = \mathbb{Z}_3$  e que *não* considera que  $Q^{(1,3)}$  é uma quasipartícula. Aqui, o superíndice  $(1, 1)'$  rotula a quasipartícula de vácuo que é restrita apenas ao autoestado de vácuo (8.24).

*Sobre a transição entre os autoestados de vácuo*

E, diante de tudo o que dissemos até agora, e principalmente da propriedade não Abelianiana

$$Q^{(1,3)} \times Q^{(1,3)} = Q^{(1,1)} + Q^{(1,2)} + Q^{(1,2)} \quad (8.41)$$

que é evidente da dupla ação do operador (8.36) sobre um mesmo vértice de  $\mathcal{R}_2$ , é importante reforçar algo que já está subentendido não apenas deste operador, mas da definição de  $W_v^{(1,2)}$ : esses dois operadores agem de maneira bem diferente sobre os dois autoestados de vácuo deste exemplo de QDMv. E, no caso do o operador  $W_v^{(1,3)}$ , é justamente essa diferença que nos permite “mexer” com o elemento  $|2\rangle$  segundo a regra (8.37) e, portanto, retirar o sistema do seu segundo autoestado de vácuo (8.25) através de um operador que age exclusivamente sobre os vértices. Aliás, é exatamente esta capacidade que acaba justificando plenamente a presença de  $W_v^{(1,3)}$  entre os demais operadores que definem todo o espectro de energia deste QDMv, mesmo diante da sua não aparição entre os operadores que definem o Hamiltoniano deste modelo.

No entanto, duas outras coisas interessantes também merecem destaque aqui. E, uma delas, segue justamente diante de uma interpretação físico-computacional que parece existir por trás desta fusão (8.41). Afinal de contas, como cada um dos termos da soma que a define nos diz que a fusão entre duas quasipartículas  $Q^{(1,3)}$  pode resultar numa quasipartícula de vácuo  $Q^{(1,1)}$  ou numa quasipartícula  $Q^{(1,2)}$  ou numa nova quasipartícula  $Q^{(1,3)}$  com igual probabilidade (já que os coeficientes desta soma são todos iguais), quando fazemos uma analogia para com as regras de fusão do modelo dos “Fibonacci anyons” [5], fica a sugestão de que este exemplo de QDMv possa atender aos propósitos de uma *computação quântica* [75]. Voltaremos a discutir brevemente este ponto mais adiante, no final deste capítulo. Todavia, a segunda coisa que merece destaque aqui é que, se notarmos que é fisicamente razoável assumir que, assim como acontece com os

“Fibonacci anyons” [76], superposições entre “anyons” acabam *decoerendo* com o tempo em apenas um deles, ao assumirmos que este nosso “toy model” deve ser encarado como um sistema físico, o que a relação (8.37) faz é muito mais do que deixar claro que esse sistema pode ser retirado do seu segundo autoestado de vácuo (8.25): o que esta relação faz é mostrar que é perfeitamente possível ir do vácuo, na sua fase (8.24), para a sua outra fase (8.25) e vice-versa, através de um mecanismo de *condensação* de quasipartículas; ou seja, completando todos os vértices da rede com quasipartículas  $Q^{(1,3)}$

- por efeito de uma única troca

$$W_v^{(1,3)} | 0 \rangle = | 2 \rangle$$

sobre todos os vértices, caso o desejo da migração seja o de ir da fase (8.24) para a (8.25),  
ou

- através de trocas, que precisam ser efetuadas usando diferentes combinações entre os operadores  $W_v^{(1,2)}$  e  $W_v^{(1,3)}$ , quando o desejo é ir de (8.25) para (8.24).

### *Uma analogia interessante*

Diga-se de passagem, todo esse processo, de preencher os vértices de uma rede, que pode ser infinita, com quasipartículas, nos mostra que um vácuo assim concebido se parece muito com a proposta, que foi feita por P. A. M. Dirac em 1929 [77], de que o vácuo poderia ser interpretado como um mar infinito de partículas.

É claro que essa proposta de Dirac foi uma tentativa, bastante rudimentar, de resolver o problema que está relacionado aos estados que têm energias negativas, na equação que acabou levando o seu nome [78], antes da concepção do que ficou conhecido como Eletrodinâmica Quântica. Porém, trata-se de uma proposta que, apesar de ser bem extravagante (por imaginar uma quantidade infinita de cargas permeando todo o espaço) e de não permitir calcular qualquer coisa, sobrevive até hoje por ilustrar intuitivamente como se dá a criação de pares de partículas e antipartículas no vácuo, apesar de carregar consigo um certo “preconceito” por considerar que um elétron é uma partícula real enquanto trata um pósitron (que é a antipartícula do elétron) como um simples buraco [79].

Tudo bem que, na época que Dirac apresentou essa sua ideia de vácuo à sociedade científica, uma diversidade de partículas ainda não era conhecida, entre as quais podemos listar o nêutron,

que só foi descoberto por J. Chadwick em 1932 [80, 81]. Aliás, foi exatamente esse desconhecimento que o levou a acreditar, por exemplo, que um buraco neste mar poderia ser um próton e não um pósitron, que também era desconhecido e que só foi descoberto oficialmente por C. D. Anderson em 1932 [82]<sup>2</sup>. No entanto, se pensarmos neste nosso QDM<sub>v</sub>, e lembrarmos mais especificamente do seu primeiro autoestado de vácuo (8.24), vemos que é completamente indiferente pensar na criação da sua quasipartícula  $Q^{(1,2)}$  (que possui uma regra de fusão que permite identificá-la como a sua própria anti-quasipartícula)

- como algo real, numa situação onde o operador  $W_v^{(1,2)}$  age sobre o  $v$ -ésimo vértice de uma rede que possui todos os vértices previamente forrados por quasipartículas  $Q^{(1,1)}$ , ou
- como um buraco, na situação onde esse mesmo  $W_v^{(1,2)}$  age sobre uma rede cujos vértices foram previamente preenchidos por quasipartículas  $Q^{(1,2)}$ .

Ou seja, estamos diante de um “toy model” que pode modelar uma realidade física que é tão rudimentar quanto aquela idealizada por Dirac e pelos demais pesquisadores no início do Século XX.

#### *Outras propriedades*

Antes de encerrarmos a apresentação deste exemplo, é deveras fundamental notarmos que todas aquelas propriedades de confinamento eletrostático, que já foram apontadas no exemplo anterior, também se fazem presentes aqui. Afinal de contas, enquanto as trocas unidimensionais

$$|0\rangle_v \leftrightarrow |1\rangle_v, \quad |0\rangle_v \rightarrow |2\rangle_v \text{ e } |1\rangle_v \rightarrow |2\rangle_v$$

de um único dos elementos que estão associados aos vértices dos estados fundamentais por um outro, que é distinto, conseguem elevar a energia do sistema para um valor  $E'$ , ao realizarmos este mesmo procedimento de troca apenas sobre dois vértices adjacentes, pareando dois elementos que são *iguais*, a energia do sistema não sobe para  $2E'$ : ela sobe apenas para  $2E' - 2$ .

Entretanto, como a ação do atual modelo é um pouco mais “seletiva” que a anterior, a ponto

---

<sup>2</sup>Em verdade, apesar dessa descoberta oficial só ter sido reconhecida em 1932, os pósitrons foram observados pela primeira vez em 1929, por D. Skobeltsyn [83].

dos operadores de aresta  $C_j$  nunca serem tais que

$$C_j |n, \phi_j, 2\rangle = |n, \phi_j, 2\rangle \quad \text{e} \quad C_j |2, \phi_j, n\rangle = |2, \phi_j, n\rangle$$

para  $n = 0, 1$ , é aqui que surge uma importante observação. E, para entendê-la, precisamos considerar uma situação que é análoga àquela que consta na Figura 8.4, porém criando apenas quasipartículas  $Q^{(1,3)}$  sobre o primeiro autoestado (8.25). Afinal, quando consideramos essa situação bem específica, e um operador tal como um

$$O_{\gamma^*}^x = \prod_{j \in \gamma^*} \sigma_j^x$$

que se vale do menor caminho dual  $\gamma^*$  para cercar esse aglomerado de quasipartículas, fica muito claro (da expressão de  $\Theta_1(-1)_v$ ) que ele não consegue isolar a presença dessas quasipartículas sobre a rede: o que ele faz é só isolar um aglomerado que é composto exclusivamente por  $Q^{(1,2)}$ . Assim, como a presença de um aglomerado de quasipartículas  $Q^{(1,3)}$  continua sendo perfeitamente detectável pelas suas bordas, isso parece nos levar automaticamente a identificação de uma espécie de “parede de domínio”: ou seja, uma situação bastante peculiar onde o nosso sistema, apesar de não estar no seu estado fundamental, é capaz de abrigar dois nichos distintos de vácuo, os quais estão separados por uma parede de “não vácuo” que passa a funcionar como uma espécie de “fronteira” entre essas duas realidades.

**Exemplo 3:**  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_4$

Já um outro exemplo que também merece a nossa atenção é aquele que, apesar de ainda se valer de um grupo  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , atribui elementos de um espaço de Hilbert quadridimensional, que é indexado por  $G_2 = \mathbb{Z}_4$ , aos vértices de  $\mathcal{R}_2$ . E, embora pareça uma insistência da nossa parte apresentar um novo modelo que continua se valendo do mesmo grupo de calibre que já está relacionado aos dois últimos exemplos, o aspecto interessante é que, desta vez, essa configuração nos leva a um modelo onde existem duas opções fisicamente distintas para a sua definição. Tudo bem que, no caso do exemplo que acabamos de apresentar, também temos duas opções para a sua definição, as quais se resumem basicamente em “excitar” ou “não excitar” um dos seus dois autoestados de vácuo. No entanto, aqui, as duas opções são outras: elas se relacionam para com as duas escolhas distintas que temos para definir a ação do grupo de calibre sobre os campos de matéria. E, a

primeira que escolha que iremos apresentar aqui, é a aquela cuja ação, sobre as representações

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8.42)$$

dos elementos que compõem  $\mathcal{B}_4$ , é definida por

$$\Theta_1(1) \triangleright \omega^g = \omega^g \quad \text{e} \quad \Theta_1(-1) \triangleright \omega^g = \begin{cases} \omega^{g+1 \pmod{4}}, & \text{se } g \text{ for par, e} \\ \omega^{g-1 \pmod{4}}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (8.43)$$

onde  $\omega = i$  é o elemento que gera o grupo cíclico  $\mathbb{Z}_4$ . Ou seja, uma ação que pode ser representada matricialmente como

$$\Theta_1(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.44)$$

### Primeira escolha

Aliás, uma das coisas que já ficam bem claras por decorrência da definição desta ação (8.43), assim como da definição dos operadores de vértice, de face e de aresta que foi feita em (8.8) e (8.10), os dois primeiros desses operadores ficam expressos respectivamente como

$$A_v = \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \Theta_1(-1)_v \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right] \quad \text{e} \\ B_p = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right), \quad (8.45)$$

enquanto que, com base no fato de que os operadores

$$C_v^{(0)} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v + Z_v + Z_v^2 + Z_v^3 \right), \quad C_v^{(1)} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v - i Z_v - Z_v^2 + i Z_v^3 \right), \\ C_v^{(2)} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v - Z_v + Z_v^2 - Z_v^3 \right) \quad \text{e} \quad C_v^{(3)} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v + i Z_v - Z_v^2 - i Z_v^3 \right) \quad (8.46)$$



funcionam como verdadeiros projetores para os elementos (8.42)<sup>3</sup>, o operador de aresta fica expresso como

$$\begin{aligned} C_j = & C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} \\ & + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)} \\ & + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} \quad , \end{aligned} \quad (8.47)$$

em total analogia a tudo o que já foi feito em (8.28). Aqui,

$$X = \sum_{h \in \mathbb{Z}_4} |(h+1) \bmod 4\rangle \langle h| \quad \text{e} \quad Z = \sum_{h \in \mathbb{Z}_4} \omega^h |h\rangle \langle h| \quad . \quad (8.48)$$

E uma das principais observações que já podem ser feitas a partir de todas essas expressões é que, mais uma vez, estamos diante de um modelo que possui um estado fundamental que é, no mínimo, bidegenerado. No caso do primeiro autoestado de vácuo que está relacionado a este modelo, ele é dado explicitamente por

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |0\rangle \right) \right) \quad . \quad (8.49)$$

Já o segundo autoestado de vácuo é obtido por efeito do operador

$$\mathcal{O} = \prod_v X_v^2 \quad (8.50)$$

que, por agir sobre todos os vértices de (8.49), nos leva a

$$|\xi_0^{(2)}\rangle = \mathcal{O} |\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |2\rangle \right) \right) \quad . \quad (8.51)$$

Note que, como (8.50) não pode ser expresso em termos de qualquer combinação que se valha de um produtório entre quaisquer operadores (8.45), a bidegenerescência deste modelo acaba justificada exatamente nos mesmos moldes que a bidegenerescência do exemplo anterior.

---

<sup>3</sup>Ou seja,  $C_v^{(\alpha)} |\beta\rangle = \delta(\alpha, \beta) |\beta\rangle$ .

*Completando os conjuntos ortogonais*

Aliás, dado que o estado fundamental deste exemplo de QDMv acabou de ser devidamente apresentado, é interessante iniciarmos as buscas pelas excitações deste modelo. E, uma das principais coisas que devemos fazer diante dessa tarefa, é, por exemplo, declarar quais são as expressões dos operadores que completam os conjuntos  $\mathfrak{A}_v$ ,  $\mathfrak{B}_p$  e  $\mathfrak{C}_j$  onde já constam os operadores que já estão resumidos em (8.45) e (8.47). E, no caso, devido a toda ortogonalidade que é inerente às definições desses conjuntos, não é difícil perceber que os operadores que completam os dois primeiros deles são

$$A_{v,2} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \Theta_1 (-1)_v \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) \text{ e}$$

$$B_{p,2} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) \text{ ,}$$

enquanto o segundo conjunto se completa com os operadores

$$C_{j,2} = C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)}$$

$$+ C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)}$$

$$+ C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} \text{ ,}$$

$$C_{j,3} = C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)}$$

$$+ C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)}$$

$$+ C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} \text{ e}$$

$$C_{j,4} = C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)}$$

$$+ C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)}$$

$$+ C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)}$$

que nitidamente possuem expressões um pouco mais “complicadas”, uma vez que, analogamente ao que diz (8.29), eles devem ser tais que

$$C_{j,n} \left| \chi_\alpha, \phi_j, \chi_\beta \right\rangle = \langle \chi_\alpha | \left[ \Theta(\phi_j) \right]^{-1} \cdot X^n \left| \chi_\beta \right\rangle \cdot \left| \chi_\alpha, \phi_j, \chi_\beta \right\rangle \text{ .} \quad (8.52)$$

Aliás, por efeito das expressões que compõem os conjuntos  $\mathfrak{A}_v$  e  $\mathfrak{B}_p$ , por exemplo, umas das coisas que já não são difíceis de serem percebidas é que as mesmas quasipartículas que estão relacionadas ao TC continuam presentes aqui. Ou seja, uma coisa que já era de se esperar: afinal de contas, por mais que a ação deste modelo seja diferente, toda a estrutura de calibre dos modelos anteriores continua preservada, o que nos mostra que, mais uma vez estamos diante de um modelo onde

- quasipartículas do tipo  $e$  continuam sendo perfeitamente produzidas e transportadas pela ação do operador (4.20) sobre qualquer um dos autoestados de vácuo (8.49) e (8.51), sem causar qualquer custo energético ao sistema, e
- quasipartículas dos tipos  $m$  e  $\varepsilon$  se submetem a um confinamento que é bastante similar ao “cromodinâmico” já detalhado no **Exemplo 1**.

Entretanto, devido à expressão dos operadores que completam  $\mathfrak{A}_v$  e  $\mathfrak{C}_j$ , também é bastante claro que outras quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  também são criáveis por meio de operadores  $W_v^{(J,K)}$  que agem exclusivamente sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$ , as quais podem ser completamente distintas das do TC. E, como os operadores que criam estas quasipartículas precisam satisfazer a

$$A_{v,J} \circ W_v^{(J,K)} = W_v^{(J,K)} \circ A_{v,1} \quad \text{e} \quad C_{j,K} \circ W_v^{(J,K)} = W_v^{(J,K)} \circ C_{j,1} \quad , \quad (8.53)$$

já vale notar que, apesar de termos *oito* possibilidades para as suas definições, apenas *seis* delas levarão à quasipartículas que não se identificam com nenhuma das do TC. Afinal, enquanto  $W_v^{(1,1)}$  é identificável como o criador de uma quasipartícula de vácuo  $Q^{(1,1)}$  por satisfazer as relações (8.53) quando  $J = K = 1$ , o operador  $W_v^{(2,1)}$  está associado à criação de uma quasipartícula  $Q^{(2,1)}$  que satisfaz exatamente as mesmas relações, com  $J = 2$  e  $K = 1$ , que uma única do tipo  $e$ .

### *Excitações elementares e regras de fusão*

Embora o último comentário que fizemos seja verdadeiro, antes de apresentarmos as representações de todos os operadores  $W_v^{(J,K)}$  que seguem de (8.53), precisamos lembrar de uma coisa que é muito importante: sempre que procuramos entender o que é uma excitação ou uma quasipartícula em qualquer um dos nossos modelos, sempre fazemos isso analisando como elas podem ser criadas sobre um dos autoestados de vácuo. E, aqui, neste exemplo específico, temos *dois* deles:

ou seja, temos dois autoestados de vácuo que, por serem independentes um do outro, podem reagir de maneira bastante distinta quando operados por qualquer um desses operadores  $W_v^{(J,K)}$ . Basta ver que é exatamente isso o que acontece com os autoestados de vácuo (8.24) e (8.25) do exemplo anterior quando operados por (8.34) ou (8.36). É uma das coisas que só reforçam ainda mais a possibilidade disso também acontecer aqui é o simples fato de que, como a ação do presente modelo é dada por (8.44), quaisquer que sejam as matrizes que representem esses operadores  $W_v^{(J,K)}$ , as suas expressões mais gerais são tais que

$$W_v^{(1,K)} = \begin{pmatrix} a_{1K} & b_{1K} & c_{1K} & d_{1K} \\ b_{1K} & a_{1K} & d_{1K} & c_{1K} \\ p_{1K} & q_{1K} & r_{1K} & s_{1K} \\ q_{1K} & p_{1K} & s_{1K} & r_{1K} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W_v^{(2,K)} = \begin{pmatrix} a_{2K} & b_{2K} & c_{2K} & d_{2K} \\ -b_{2K} & -a_{2K} & -d_{2K} & -c_{2K} \\ p_{2K} & q_{2K} & r_{2K} & s_{2K} \\ -q_{2K} & -p_{2K} & -s_{2K} & -r_{2K} \end{pmatrix}, \quad (8.54)$$

cujas entradas correspondem a números complexos.

Todavia, ao notarmos que a representação dada para a ação  $\Theta_1(-1)_v$  pode ser perfeitamente identificada como uma das *matrizes de Dirac* [55], uma das maneiras mais cômodas que temos para reconhecer quais são as quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  deste modelo é justamente tomando outras matrizes de Dirac para representar os operadores  $W_v^{(J,K)}$  que as criam. E, como isso nos leva às representações

$$\begin{aligned} W_v^{(1,1)} &= \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, & W_v^{(2,1)} &= \begin{pmatrix} \sigma^z & 0 \\ 0 & \sigma^z \end{pmatrix}, \\ W_v^{(1,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^x \\ \sigma^x & 0 \end{pmatrix}, & W_v^{(2,2)} &= \begin{pmatrix} 0 & \text{“}\sigma^y\text{”} \\ \text{“}\sigma^y\text{”} & 0 \end{pmatrix}, \\ W_v^{(1,3)} &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, & W_v^{(2,3)} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^z \\ \sigma^z & 0 \end{pmatrix}, \\ W_v^{(1,4)} &= \begin{pmatrix} \sigma^x & 0 \\ 0 & \sigma^x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W_v^{(2,4)} &= \begin{pmatrix} \text{“}\sigma^y\text{”} & 0 \\ 0 & \text{“}\sigma^y\text{”} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.55)$$

acaba ficando bem claro que estamos diante de um conjunto de operadores que agem do mesmo jeito sobre qualquer um dos autoestados de vácuo (8.49) e (8.51), onde as representações que

$(J, K)$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)	(1, 7)	(1, 8)
(1, 2)	(1, 2)	(1, 1)	(1, 4)	(1, 3)	(2, 2)	(2, 1)	(2, 4)	(1, 3)
(1, 3)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 4)	(1, 4)	(1, 3)	(1, 2)	(1, 1)	(2, 4)	(2, 3)	(2, 2)	(2, 1)
(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
(2, 2)	(2, 2)	(2, 1)	(2, 4)	(2, 3)	(1, 2)	(1, 1)	(1, 4)	(1, 3)
(2, 3)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 1)	(2, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 1)	(1, 2)
(2, 4)	(2, 4)	(2, 3)	(2, 2)	(2, 1)	(1, 4)	(1, 3)	(1, 2)	(1, 1)

**Tabela 8.4:** Regras de fusão associadas às quasipartículas que são criadas por operadores que agem exclusivamente sobre os vértices da rede num QDM $v$ , que se vale do grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , da sua ação (8.44) sobre um espaço de Hilbert quadridimensional indexado por  $G_2 = \mathbb{Z}_4$ , assim como da escolha (8.55) para os operadores  $W^{(J,K)}$ .

compõem a primeira linha correspondem aos operadores que criam respectivamente uma quasipartícula de vácuo e uma outra, que satisfaz exatamente as mesmas relações que uma única do tipo  $e$ . Aliás, devido ao fato de estarmos lidando com representações que se identificam como matrizes de Dirac, também acaba ficando bem claro que elas nos levam a um conjunto com regras de fusão Abelianas, as quais constam na Tabela 8.4.

### Propriedades eletrostáticas

Apenas para finalizarmos a apresentação das principais propriedades das quasipartículas elementares deste modelo que se apoia sobre (8.44), é fundamental destacarmos duas coisas. A primeira delas é que parte destas quasipartículas também é sensível à mesma espécie de potencial eletrostático que já foi mencionado no **Exemplo 1**. E, no caso dessa “sensibilidade”, ela está associada apenas às quasipartículas  $Q^{(J,K)}$ , dado que, para um  $S_j = \{v_1, v_2\}$ ,

$$\left[ C_j, W_{v_1}^{(J,K)} \circ W_{v_2}^{(J,K)} \right] = 0$$

é uma relação válida.

Já segunda coisa que merece destaque aqui é que, como a ação (8.43) não faz a mesma troca que os operadores  $W_v^{(1,2)}$  e  $W_v^{(1,3)}$  fazem, também podemos construir situações análogas àquelas, que levam à identificação das supostas paredes de domínios que já mencionamos no exemplo anterior. E, para que isso seja feito, basta nos apoiarmos sobre a mesma lógica que permeia a Figura 8.4, alocando quasipartículas de um mesmo tipo  $Q^{(1,1)}$  ou  $Q^{(1,2)}$ , lado a lado, numa região que

pode ser a que está destacada em azul, por exemplo, enquanto a outra é preenchida usando um único tipo  $Q^{(1,3)}$  ou  $Q^{(1,4)}$ .

### Segunda escolha

Conforme bem dissemos no início deste terceiro exemplo que estamos apresentando, estamos diante de um modelo cuja definição pode ser feita de duas maneiras diferentes. A primeira, que acabamos de apresentar, se apoia inteiramente sobre uma ação (8.44) que é capaz de trocar todos os elementos (8.42), que estão dispostos sobre os vértices, da rede por algum outro. Já a segunda maneira, que apresentaremos a partir de agora, pode ser definida através de uma ação que é representável por

$$\Theta_2(-1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8.56)$$

Ou seja, lembrando que  $\Theta_2(-1)$  também deve agir sobre os mesmos elementos (8.42), fica bem claro que essa nova possibilidade se fundamenta sobre a troca de apenas dois desses elementos entre si, mantendo os outros dois fixos.

E a primeira consequência que surge dessa nova ação é que, apesar dela não causar qualquer tipo de alteração nas expressões dos operadores que compõem o conjunto  $\mathfrak{B}_p$ , ela altera, sim, as expressões dos operadores que compõem os conjuntos  $\mathfrak{A}_v$  e  $\mathfrak{C}_j$  deste novo modelo. E, no caso do primeiro desses conjuntos, essas novas expressões são dadas especificamente por

$$A_v = \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \Theta_2(-1)_v \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right] \text{ e}$$

$$A_{v,2} = \frac{1}{2} \left[ \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \Theta_2(-1)_v \circ \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right].$$

No caso do segundo, temos

$$\begin{aligned} C_j &= C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} \\ &+ C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} \\ &+ C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j,2} &= C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} \\
&+ C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} \\
&+ C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j,3} &= C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)} \\
&+ C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} \\
&+ C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} \text{ e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{j,4} &= C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(0)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(2)} + C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(2)} \\
&+ C_{v_1}^{(1)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(1)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(3)} + C_{v_1}^{(2)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(3)} \\
&+ C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(0)} \circ C_{v_2}^{(0)} + C_{v_1}^{(3)} \circ s_j^{(1)} \circ C_{v_2}^{(0)} ,
\end{aligned}$$

haja vista a definição (8.52).

Já a segunda consequência que decorre desta nova ação (8.56) tem uma relação bastante direta para com o estado fundamental. Afinal, enquanto o primeiro autoestado de vácuo já é muito bem conhecido e dado por

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |0\rangle \right) \right) \quad (8.57)$$

um segundo e um *terceiro* agora se fazem presentes: eles são

$$\begin{aligned}
|\xi_0^{(2)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |2\rangle \right) \right) \text{ e} \\
|\xi_0^{(3)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |3\rangle \right) \right) .
\end{aligned} \quad (8.58)$$

E, apesar da aparente similaridade que existe entre as expressões desse  $|\xi_0^{(2)}\rangle$  e do autoestado de vácuo (8.51), convém notar que eles não são os mesmos. E a razão para essa identificação não ocorrer é muito simples: a ação  $\Theta_2(-1)$  não é capaz de realizar quaisquer transições do tipo

$$|2\rangle \leftrightarrow |3\rangle$$

entre os elementos que estão associados aos vértices, tal como  $\Theta_1(-1)$  fazia. Assim, como não existe um operador (que seja expresso como um produtório que se valha de, pelo menos, algum dos operadores que definem o Hamiltoniano deste modelo) que seja capaz de realizar qualquer transformação sobre (8.57) a ponto de obter as demais configurações de vácuo que estão resumidas pelos autoestados em (8.58), a *tridegenerescência* do estado fundamental do atual modelo fica completamente justificada.

### Criando as excitações

É claro que, sobre todos esses novos autoestados, também podemos criar as mesmas quasi-partículas do TC que mencionamos anteriormente, cujas propriedades já foram exaustivamente apresentadas. Todavia, o que é mais importante de ser destacado a partir de agora concerne, tão somente, às expressões dos novos operadores  $W_v^{(J,K)}$  que são capazes de agir apenas sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$ , as quais precisam satisfazer a

$$A_{v,J} \circ W_v^{(J,K)} = W_v^{(J,K)} \circ A_{v,1} \quad \text{e} \quad C_{j,K} \circ W_v^{(J,K)} = W_v^{(J,K)} \circ C_{j,1}$$

para os novos operadores que completam os novos conjuntos  $\mathfrak{A}_v$  e  $\mathfrak{C}_j$ . E, uma das coisas mais convenientes que podemos mencionar para este fim, diz respeito às expressões mais gerais das matrizes que representam esses operadores  $W_v^{(J,K)}$  que, no caso, são dadas por

$$W_v^{(1,K)} = \begin{pmatrix} a_{1K} & b_{1K} & c_{1K} & d_{1K} \\ b_{1K} & a_{1K} & c_{1K} & d_{1K} \\ p_{1K} & p_{1K} & r_{1K} & s_{1K} \\ q_{1K} & q_{1K} & u_{1K} & v_{1K} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W_v^{(2,K)} = \begin{pmatrix} a_{2K} & b_{2K} & c_{2K} & d_{2K} \\ -b_{2K} & -a_{2K} & -c_{2K} & -d_{2K} \\ p_{2K} & -p_{2K} & 0 & 0 \\ q_{2K} & -q_{2K} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8.59)$$

Afinal de contas, quando comparamos essas matrizes com as que constam em (8.54) fica muito claro que, para cada ação que o modelo nos permite escolher, o conjunto de operadores que criam excitações pode conter elementos que são bastante distintos em cada caso.

Aliás, notando que toda a bloco-diagonalidade da ação (8.44) nos permite reescrevê-la como

$$\Theta_1(-1) = \begin{pmatrix} \sigma^x & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (8.60)$$



essas mesmas expressões (8.59), quando analisadas sob a luz das relações de Pauli (4.10), acabam nos mostrando que, além da identidade  $W_v^{(1,1)}$  que figura em (8.55),

$$W_v^{(1;2,1)} = \begin{pmatrix} \sigma^x & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad W_v^{(1;2,2)} = \begin{pmatrix} \sigma^x & 0 \\ 0 & \sigma^x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad W_v^{(1;1,2)} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \sigma^x \end{pmatrix} \quad (8.61)$$

são três escolhas que nos remetem às respectivas quasipartículas elementares  $Q^{(1;2,1)}$ ,  $Q^{(1;2,2)}$  e  $Q^{(1;1,2)}$  que não podem ser detectadas por qualquer um dos operadores de vértice. E é justamente diante destas expressões que fica bem claro algo que já dissemos anteriormente: afinal, como essa bloco-diagonalidade de (8.60) toma forma através de matrizes distintas (uma, no primeiro quadrante, que é a  $\sigma^x$ ; e outra, no terceiro quadrante, que é a  $\mathbb{1}$ ), mais uma vez ficamos diante de um modelo onde existem operadores  $W_v^{(J,K)}$  que podem agir diferentemente sobre os autoestados de vácuo. Basta ver que é exatamente isso o que ocorre, por exemplo, com os operadores  $W_v^{(1;2,1)}$  e  $W_v^{(1;1,2)}$ , já que

- o primeiro deles consegue excitar apenas o autoestado de vácuo  $|\xi_0^{(1)}\rangle$ , por efeito da troca

$$|0\rangle_v \leftrightarrow |1\rangle_v,$$

e não faz nada com os demais,

- enquanto o segundo faz justamente o contrário, excitando os dois autoestados de vácuo  $|\xi_0^{(2)}\rangle$  e  $|\xi_0^{(3)}\rangle$  através de

$$|2\rangle_v \leftrightarrow |3\rangle_v,$$

mas não fazendo nada com  $|\xi_0^{(1)}\rangle$ .

Por se dizer, é exatamente isso que bem justifica o fato de termos adotado uma indexação ligeiramente diferente para as quasipartículas que surgem pela ação dos operadores (8.61): como a lógica por trás da indexação anterior  $(J, K)$  nos permite representar

- o vácuo, quando  $J = K = 1$ , e
- o não vácuo, em qualquer caso contrário a esse,

quando nos valem os novos superíndices  $(J; K_1, K_2)$  se torna perfeitamente possível representar um vácuo que persiste apenas numa situação, mas não na outra; pois, devido à ação dos opera-

dores (8.61) sobre os autoestados de vácuo, fica muito claro que  $Q^{(J;K_1,K_2)}$  se comporta com uma quasipartícula de vácuo apenas

- no autoestado  $|\xi_0^{(1)}\rangle$ , quando  $J = K_1 = 1$ , e
- nos autoestados  $|\xi_0^{(2)}\rangle$  e/ou  $|\xi_0^{(3)}\rangle$ , quando  $J = K_2 = 1$ .

Apenas para completar esses nossos comentários, vale notar que, apesar dessas três possibilidades em (8.61) serem relevantes ao modelo, nenhuma delas consegue, por exemplo, retirar o sistema da sua condição de vácuo (8.57) e levá-los para um dos outros vácuos (8.58) e vice-versa, através de um processo condensação análogo ao que foi explicado no começo da página 139. No entanto, devido não apenas às representações que constam em (8.59), mas às relações de Pauli (4.7), não é difícil notar que o operador

$$W_v^{(1;3)} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} + \sigma^x \\ \mathbb{1} + \sigma^x & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.62)$$

que é responsável pela produção de uma quasipartícula  $W^{(1;3)}$  que completa um quadro comutativo de fusão para com as quasipartículas associáveis aos operadores (8.61), consegue fazer isso. E, desta maneira, como ao contrário do que acontece com o subconjunto fechado que é composto apenas por uma quasipartícula de vácuo e por aquelas que surgem de (8.61), esse último operador nos leva à uma regra de fusão

$$Q^{(1;3)} \times Q^{(1;3)} = 2Q^{(1;1)} + 2Q^{(1;2,2)}$$

que é não Abelianas, reforçando ainda mais toda a similaridade desta nova situação para com aquela que já foi apresentada no **Exemplo 2**. Aliás, note que, se (apenas por uma questão de distinção) denotarmos por  $\mathcal{A}$  a matriz que representa a ação desse **Exemplo 2**, podemos reescrever a ação (8.56) atual como

$$\Theta_1(-1) = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.63)$$

reforçando que existe uma relação entre ações que mantém elementos fixos sobre os vértices e a realização de transições entre todos os estados de vácuo de um sistema sob a imposição de regras de fusão não Abelianas.

**Exemplo 4:**  $G_1 = \mathbb{Z}_4$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_2$

Dado que os três últimos exemplos sempre se valeram de um  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  para modelar os seus campos de calibre, neste quarto exemplo finalmente iremos proceder de uma maneira que é um pouco diferente, considerando um QDMv onde  $G_1 = \mathbb{Z}_4$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_2$ . E, neste caso, como todas as possíveis escolhas que nos levam a um modelo distinto de um QDM equivalem a uma única que adota

$$\Theta(1) \triangleright \omega^k = \Theta(-1) \triangleright \omega^k = \omega^k \quad \text{e} \quad \Theta(i) \triangleright \omega^k = \Theta(-i) \triangleright \omega^k = \omega^{k+1} \quad (8.64)$$

como a ação, onde  $\omega = -1$  é o gerador do grupo  $\mathbb{Z}_2$ , vemos que os operadores de vértice, de face e de aresta que estão aqui relacionados se reduzem a

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \sigma_v^x \circ X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 + \sigma_v^x \circ X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) \quad , \\ B_p &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 + Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) \quad \text{e} \\ C_j &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{v_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{v_2} + \sigma_{v_1}^z \circ Z_j^2 \circ \sigma_{v_2}^z \right) \end{aligned} \quad (8.65)$$

respectivamente, sendo  $X$  e  $Z$  os mesmos operadores que já foram mencionados em (8.48).

Aliás, é justamente por efeito destas expressões que, mais uma vez, fica bem claro que estamos diante de um QDMv que possui um estado fundamental que é bidegenerado e que, “curiosamente”, tem uma certa semelhança para com a primeira escolha que foi feita no exemplo anterior. Afinal, se notarmos que um dos seus autoestados de vácuo é o já bem conhecido

$$|\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |0\rangle \right) \quad , \quad (8.66)$$

o segundo deles pode ser perfeitamente expresso como

$$|\xi_0^{(2)}\rangle = \mathcal{O} |\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \left( \bigotimes_j |1\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_v |0\rangle \right) , \quad (8.67)$$

através de um operador

$$\mathcal{O} = \prod_j X_j \quad (8.68)$$

que é bastante similar a (8.50), uma vez que ele: (i) age sobre todas as arestas de uma só vez; e (ii) deixa bem clara a existência de uma simetria global neste modelo, que independe da topologia da subvariedade que  $\mathcal{R}_2$  discretiza.

### Conjuntos ortogonais e algumas “coincidências”

Fazendo uso da mesma “receita” que já usamos nos exemplos anteriores, a coisa mais importante que devemos fazer agora é declarar quais são as expressões dos demais operadores que também completam os conjuntos  $\mathfrak{A}_v$ ,  $\mathfrak{B}_p$  e  $\mathfrak{C}_j$  nos quais (8.65) já estão contidos. Explicitamente esses operadores são:

$$\begin{aligned} A_{v,2} &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + i \sigma_v^x \circ X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 + i \sigma_v^x \circ X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{v,3} &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \sigma_v^x \circ X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 - \sigma_v^x \circ X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{v,4} &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - i \sigma_v^x \circ X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_v \circ X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 - i \sigma_v^x \circ X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{p,2} &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + i Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left( Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 + i Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) , \end{aligned}$$

$$B_{p,3} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ + \frac{1}{4} \left( Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 - Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) \quad e$$

$$B_{p,4} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - i Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ - \frac{1}{4} \left( Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 - i Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) \quad ; \quad e$$

$$C_{j,2} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{v_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{v_2} - \sigma_{v_1}^z \circ Z_j^2 \circ \sigma_{v_2}^z \right) \quad .$$

Por se dizer, é fazendo uma simples comparação entre essas expressões e aquelas que definem tanto o QDM como o modelo que foi apresentado no **Exemplo 1**, que fica bem fácil entender algumas coisas no presente modelo. E, a primeira delas, por exemplo, é que, devido a estrutura de calibre que resolvemos adotar aqui, uma parte das quasipartículas que podem ser criadas neste QDMv são exatamente as mesmas que já figuram no QDM que se vale de um  $G_1 = \mathbb{Z}_4$ , cujas regras de fusão são dadas por

$$e^g \times e^h = e^{(g+h) \bmod 4} \quad , \quad m^g \times m^h = m^{(g+h) \bmod 4} \quad e \quad e^g \times m^h = \varepsilon^{(g,h)} \quad . \quad (8.69)$$

A única diferença que existe agora é que, por efeito de (6.18) nos mostrar que

$$Z^g X^h = i^{(gh) \bmod 4} X^h Z^g \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z^2 X = i^{2 \bmod 4} X Z^2 = -X Z^2 \quad , \\ Z^2 X^2 = i^{4 \bmod 4} X^2 Z^2 = X^2 Z^2 \quad e \\ Z^2 X^3 = i^{6 \bmod 4} X^3 Z^2 = -X^3 Z^2 \quad , \end{cases}$$

parte dessas quasipartículas serão confináveis segundo a mesma leitura do **Exemplo 1**, caso o sistema realmente possua algum mecanismo que sempre o mantenha numa situação de menor energia. E, quando esse é o caso, as quasipartículas que serão passíveis de confinamento neste exemplo de QDMv não serão as  $e^g$ , haja vista que os operadores  $Z_j^g$  que as produzem são tais que

$$[ Z_j^g , C_j ] = 0 \quad ;$$

as quasipartículas que serão passíveis de confinamento serão apenas aquelas cujo processo de

criação envolve os operadores  $X_j^g$  com  $g = 1, 3$ , uma vez que, nesta situação, temos

$$C_j \circ X_j^g | \xi_0^{(1,2)} \rangle = X_j^g \circ C_{j,2} | \xi_0^{(1,2)} \rangle .$$

Já sobre as demais quasipartículas que são concebíveis neste modelo, elas surgem por efeito dos mesmos operadores

$$W_v^{(1,1)} = \mathbb{1}_v , \quad W_v^{(1,2)} = \sigma_v^x , \quad W_v^{(3,1)} = \sigma_v^z \quad \text{e} \quad W_v^{(3,2)} = \text{“} \sigma_v^y \text{”} \quad (8.70)$$

que já foram listados (com outros superíndices) em (8.18), o que nos leva à conclusão de que novamente estamos diante das mesmas regras de fusão Abelianas resumidas em (8.1).

### Propriedades adicionais

Por fim, duas coisas merecem destaque neste modelo. E, a primeira delas, é que, como

$$\begin{aligned} A_v \circ ( \sigma_v^z \circ Z_j^2 | \xi_0^{(1,2)} \rangle ) &= \sigma_v^z \circ A_{v,2} \circ Z_j^2 | \xi_0^{(1,2)} \rangle \\ &= ( \sigma_v^z \circ Z_j^2 ) \circ A_v | \xi_0^{(1,2)} \rangle = \sigma_v^z \circ Z_j^2 | \xi_0^{(1,2)} \rangle , \end{aligned}$$

as quasipartículas  $Q^{(2,1)}$  e  $e^2$ , que são criadas respectivamente pelos operadores  $\sigma_v^z$  e  $Z_j^2$ , podem ser consideradas (ao menos *efetivamente*) como as mesmas.

Já a segunda coisa que merece destaque aqui diz respeito a todo esse comportamento eletrostático que sempre insistimos mencionar ao final de cada exemplo. E, no caso deste nosso exemplo de agora, como as quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  concebíveis pelos operadores (8.70) são exatamente as mesmas do **Exemplo 1**, as mesmas propriedades eletrostáticas também se fazem presentes aqui. Contudo, existe uma pequena ressalva que precisamos fazer: afinal de contas, como

$$[ C_j , \sigma_v^x \circ X_j ] = [ C_j , \sigma_v^x \circ X_j^3 ] = 0$$

é uma propriedade válida quando  $v$  indexa um dos vértices que encerram a  $j$ -ésima aresta e, portanto,

$$\begin{aligned} C_j \circ ( O_v^X \circ \sigma_v^x | \xi_0^{(1,2)} \rangle ) &= O_v^X \circ C_j^{(-1)} \circ \sigma_v^x | \xi_0^{(1,2)} \rangle \\ &= ( O_v^X \circ \sigma_v^x ) \circ C_j | \xi_0^{(1,2)} \rangle = O_v^X \circ \sigma_v^x | \xi_0^{(1,2)} \rangle \end{aligned}$$

vale para um operador

$$O_v^X = X_a^M \circ X_b^M \circ X_c^N \circ X_d^N \quad (8.71)$$

que adota  $(M, N) = (1, 3)$  ou  $(M, N) = (3, 1)$ , é imediato concluir que  $O_v^X$  funciona como uma espécie de “isolante” para as quasipartículas  $Q^{(1,2)}$ , uma vez que nenhum dos operadores (8.65), que agem sobre o autoestado

$$|\xi'_0\rangle = O_v^X \circ \sigma_v^x |\xi_0^{(1,2)}\rangle ,$$

conseguem detectá-la.

### 8.2.2 Uma análise mais geral

Apesar de toda a “repetitividade estrutural” que, de alguma maneira, sempre se fez presente nos exemplos deste capítulo (e que, talvez, até tenha cansado leitor), uma coisa é certa: todos eles deixam bem claro que um QDM<sub>v</sub> é um modelo que

- (i) suporta exatamente as mesmas quasipartículas de um QDM entre as suas excitações, e
- (ii) também admite a realização de quasipartículas como excitações exclusivamente relacionadas aos seus campos de matéria.

E, no caso dessas quasipartículas que foram herdadas do QDM, devemos fazer um importante destaque. Afinal de contas, enquanto as que são reconhecíveis como  $e^g$  continuam as mesmas propriedades do QDM, o mesmo não acontece em relação às quasipartículas dos tipos  $m^h$  e  $\varepsilon^{(g,h)}$ : transportar essas últimas sempre deixa um rastro que pode ser traduzido em termos energéticos, uma vez que, quanto maior é esse rastro, maior é a elevação da energia do sistema, mesmo que esse sistema continue comportando o mesmo número de quasipartículas. E, a grande razão disso acontecer, é o fato do Hamiltoniano (8.1) ser composto por operadores de face e de aresta que leem os campos de calibre do modelo da mesma maneira. E é neste sentido que podemos afirmar que, se todos esses “toys models” corresponderem a sistemas físicos de verdade, que possuam algum tipo de mecanismo os protejam de situações de aumento de energia ao longo desses transportes e, portanto, os mantenham nas situações de menor energia possível, as quasipartículas  $m^h$  e  $\varepsilon^{(g,h)}$  serão confinadas.

Diga-se de passagem, é diante dessa característica de confinamento que convém esclarecer uma coisa que sugerimos na página 138: afinal, embora alguns dos exemplos que apresentamos neste capítulo apresentem regras de fusão não Abelianas que são bastante similares às dos modelos dos “Fibonacci anyons” [5], tudo leva a crer que esses exemplos *não* podem ser utilizados para realizar qualquer tipo de computação quântica, ao menos do jeito que eles foram propostos. Pois, como a realização de uma computação quântica em modelos como o QDM está vinculada a possibilidade de avaliar os “braids” [84, 85], que são formados sobre uma variedade  $\mathcal{M}_2 \times [0, 1]$  por decorrência do transporte de quasipartículas sobre  $\mathcal{M}_2$ , é exatamente essa possibilidade que não temos aqui, já que: de um lado, as quasipartículas dos tipos  $m^h$  e  $\varepsilon^{(g,h)}$  apresentam propriedades de confinamento (ou seja, elas não podem ser transportadas mantendo a energia do sistema constante); e, por outro, as quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  não podem ser transportadas por um operador que não se identifica com um de “teletransporte”, embora elas sejam perfeitamente capazes de interagir umas com as outras.

### A estaticidade das quasipartículas

Aliás, já que falamos das quasipartículas  $Q^{(J,K)}$ , que surgem por decorrência dos operadores  $W_v^{(J,K)}$  que agem exclusivamente sobre os vetores que foram previamente atribuídos sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$ , convém fazer dois comentários. E, o primeiro deles, se refere à capacidade eletrostática que algumas delas apresentam: ou seja, uma capacidade de interação que, quando alocamos duas delas sobre os vértices que pertencem a  $S_j$ , consegue reduzir a energia do sistema que é assim formado. E no caso dessa capacidade, ela surge, tão somente, por decorrência do operador de aresta  $C_j^{(G_1, G_2)}$  não ser capaz de reconhecer que existem duas quasipartículas alocadas em  $S_j$ .

Já o segundo comentário que cabe fazer se refere à completa incapacidade de distinção que os operadores de vértice de um QDM<sub>v</sub> possuem diante de algumas quasipartículas  $e^s$  e de outras  $Q^{(J,K)}$ . Ou seja, apesar de nós termos plena ciência de que essas quasipartículas são produzidas por operadores distintos e que, portanto, elas podem ser perfeitamente diferentes, aos olhos de um detector elas são as mesmas. E, uma das boas maneiras de entendermos como isso acontece, pode ser pensando numa situação bastante hipotética e que está relacionada à Física das partículas elementares: afinal, se os operadores de vértice  $A_v^{(G_1, G_2)}$  fossem operadores capazes de medir a carga elétrica de uma partícula, por exemplo, seria exatamente essa a indistinção que existiria entre um elétron, um múon e um tau, caso os demais operadores que definem o modelo não fossem



capazes de medir as outras propriedades destas três partículas.

Em todo caso, apesar desse “baixo poder de distinção” que um QDMv pode apresentar em relação às suas quasipartículas, existem duas coisas que podemos fazer em prol desta distinguibilidade. E, a primeira delas (que é a mais fraca), é observar se existe um número ímpar de quasipartículas sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$ : afinal de contas, como as quasipartículas  $e^g$  são sempre produzidas aos pares numa rede que satisfaz a (6.2), a detecção de um número ímpar delas implica automaticamente que ao menos uma  $Q^{(J,K)}$  se faz presente. Já a segunda coisa (que é a mais forte) é que, conforme já bem dissemos acima, ao contrário do que acontece com as quasipartículas que foram herdadas do QDM, as  $Q^{(J,K)}$  não podem ser transportadas ao longo da rede por meio de um operador que não se identifique com um de “teletransporte”.

### Uma interpretação diamagnética

Além de todas essas características, também existe uma outra, que é bem marcante e que também está relacionada às quasipartículas  $Q^{(J,K)}$ : uma parte delas pode ser “blindada” devido à ação de uma combinação bem específica de operadores  $X_j^g$  sobre as arestas de um caminho dual fechado que as “cercam”. No caso, devido à expressão do operador de vértice que foi dada em (8.8), todas as quasipartículas que podem ser criadas, sobre os vértices de  $\mathcal{R}_2$ , por um operador que se identifique com um  $\Theta_v(g)$ , serão “blindadas” por um operador

$$(X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g \quad . \quad (8.72)$$

E, se vemos a situação pelo ponto de vista que a física clássica nos oferece, por exemplo, toda essa blindagem se parece muito com aquela que conseguimos ao inserir uma partícula puntual, com carga elétrica  $Q$ , bem no centro de uma casca esférica que se comporta como um condutor do lado “de dentro” e como um isolante do lado “de fora”. Pois, conforme já sabemos da teoria do eletromagnetismo [86], apesar desta casca ser completamente incapaz de aniquilar esta partícula de carga  $Q$ , se tentarmos medir o campo elétrico de um sistema que é assim composto (seja exatamente no centro da casca ou em qualquer um dos pontos exteriores a ela) *sempre* obteremos um valor nulo: ou seja, efetivamente tudo se passa como se esta partícula de carga  $Q$  não existisse no sistema, embora ela exista.

Embora essa interpretação seja bastante razoável, é diante do fato que a sintetização desses

dois operadores nos leva a um

$$\bar{A}_v = \Theta_v(g) \circ (X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g \quad (8.73)$$

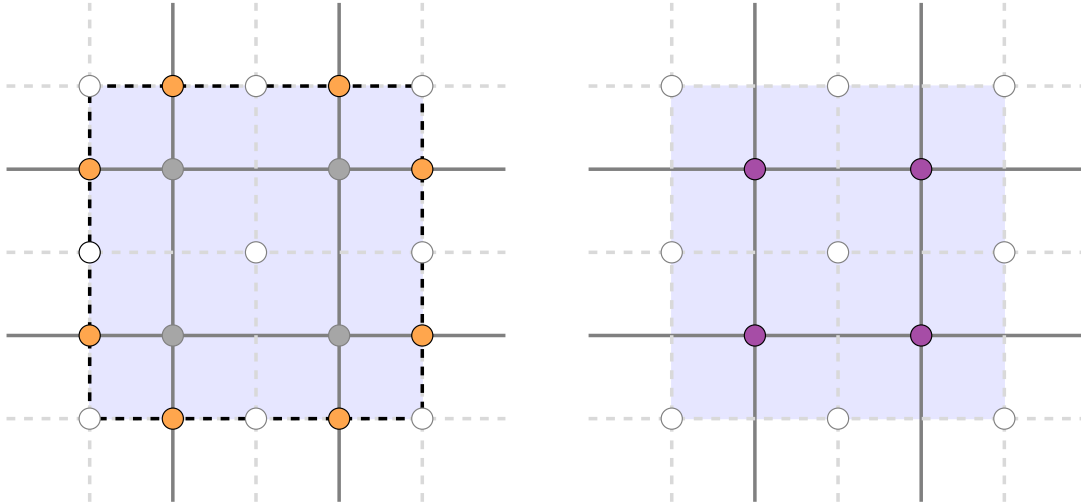
que surge uma diversidade de interpretações. E, uma das “mais bem comportadas”, surge pela ótica que o próprio eletromagnetismo nos oferece, desde que notemos que o material que está relacionado a esses modelos pode ser considerado, no mínimo e por definição, como um *diamagneto*: ou seja, como um material que, quando é submetido a um campo magnético externo, induz a criação de um outro campo na direção oposta, de modo que o campo total (que é formado pela soma do campo externo com o que foi induzido) diminua no seu interior. E, neste nosso caso discreto, a razoabilidade desta interpretação diamagnética pode ser bem entendida desde que olhemos para os operadores

$$\Theta_v(g) \quad \text{e} \quad (X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g$$

que compõem (8.73) individualmente. Afinal de contas, se lembrarmos que a leitura que o QDM faz sobre as quasipartículas do tipo  $m^h$  é a de que elas são interpretáveis como *magnéticas* (o que, portanto, nos permite realizar o operador à direita como o criador de um campo magnético local externo), quando vários desses operadores atuam sobre um conjunto de vértices que são vizinhos, tal como mostra a Figura 8.6, podemos ver duas coisas: (i) que o campo total no interior desse material (que é bidimensional) se anula; e (ii) que as excitações que surgem dessa atuação só podem ser detectadas pelos operadores de aresta. E é devido não apenas a esse fato do campo total no interior do material se anular, mas ao fato de (8.73) nos mostrar que

$$(X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g | \xi_0 \rangle = \Theta_v(g) \circ \bar{A}_v | \xi_0 \rangle = \Theta_v(g) | \xi_0 \rangle \quad , \quad (8.74)$$

que uma interpretação, que parece ser “um pouco mais do que diamagnética”, acaba transparecendo. Pois, como (8.74) nos mostra que o resultado que surge da ação desses operadores magnéticos equivale ao que segue da produção de monopólos que se identificam como *elétricos*, é exatamente isso que acaba nos sugerindo que esse material não é simplesmente um diamagneto: como, ao submetermos esse material a um campo magnético externo, isso equivale a uma reação que pode ser interpretada como uma espécie de “esboço” de corrente elétrica (que é capaz de fazer com que o campo total se *anule* no interior da região encerrada pelo operador magnético), tudo parece indicar para a possível interpretação desse material como um *supercondutor*.



**Figura 8.6:** À esquerda, temos o resultado que segue da ação de quatro operadores (8.72) ao redor de quatro vértices vizinhos da rede, mostrando que as únicas excitações (em laranja) criadas por esses operadores são aquelas detectáveis pelos operadores de aresta ao longo do contorno que separa o que é o lado de fora (região em branco) do que é o lado de dentro (região em azul). Já à direita, temos exatamente a mesma situação, só que vista pela ótica que (8.74) nos oferece, o que deixa claro o comportamento do material como um diamagneto perfeito, uma vez que o campo que é detectável à direita é exatamente o mesmo que está sendo expelido do interior desse material que é bidimensional.

### A presença de um efeito Meissner

No entanto, a priori só parece, uma vez que não temos elementos suficientes para afirmar que esse material é, de fato, um supercondutor. Afinal, se ele é um supercondutor, como é que a *teoria BCS* (que foi proposta por J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer para explicar o fenômeno da supercondutividade [87, 88, 89]) se ajusta aos nossos modelos? Ou seja, devido a todas as propriedades que temos em “mãos”, a única coisa que podemos afirmar é que esse material é um *diamagneto perfeito*, já que todo supercondutor é um diamagneto perfeito [90] embora não pareça ser claro que a recíproca seja verdadeira.

Em todo caso, um resultado que parece reforçar essa possível interpretação supercondutiva é um, que está bem posto na literatura e que foi obtido por H. B. Nielsen e por P. Olesen em 1973, que afirma que: qualquer *supercondutor* (relativístico) pode ser interpretado como um sistema de monopólos magnéticos permanentemente confinados [91]. Nestes termos, se notarmos

- que um dos principais fenômenos que um supercondutor apresenta, quando imerso num campo magnético externo pequeno, é o *efeito Meissner* [92] (ou seja, um fenômeno onde esse supercondutor *expelle* todo o campo magnético que é a ele aplicado), e

- que é justamente esse mesmo efeito Meissner que, por exemplo, consegue justificar todo o confinamento, desses pares de monopólos magnéticos que foram estudados por Nielsen e Olesen, através de tubos de fluxos magnéticos [93],

é que toda a caracterização supercondutiva do nosso QDMv parece ser reforçada; pois

- além das quasipartículas  $e^s$  (que são interpretáveis como *elétricas* à luz do QDM) serem transportáveis pela rede sem qualquer custo energético, enquanto são justamente as quasipartículas  $m^h$  (que, além de serem interpretáveis como *magnéticas* à luz do mesmo QDM, são sempre produzidas aos pares) que apresentam propriedades de confinamento,
- conforme já bem ilustra a própria Figura 8.6, toda essa equivalência entre a submissão do material a um campo magnético e a aparição desse “esboço” de corrente elétrica acaba nos mostrando que todo o campo que foi induzido no interior do material é completamente expelido.

De qualquer forma, sempre é bom reforçar, mais uma vez, o que já dissemos anteriormente: todo supercondutor pode ser interpretado como um diamagneto perfeito, embora não parece ser claro que a recíproca seja verdadeira. E a razão de reforçarmos isso é bem simples: pois, apesar do efeito Meissner ser um fenômeno presente em supercondutores, a sua existência se fundamenta apenas sobre o fato de todo supercondutor ser um diamagneto perfeito [90], o que só vem a reforçar toda a nossa cautela e predileção por afirmar apenas que o nosso material é um diamagneto perfeito.

### A degenerescência do estado fundamental

E já que estamos falando sobre uma diversidade de coisas ao longo desta Subseção, talvez a única coisa realmente importante que ainda falta mencionar diz respeito à degenerescência do estado fundamental de um QDMv que, de acordo com todos os exemplos que apresentamos ao longo deste capítulo, *parece* não depender da topologia da variedade onde o sistema está definido. Essa degenerescência *parece* depender apenas de uma espécie de “ordem algébrica”, uma vez que,

- por um lado, quando ignoramos “todas” as propriedades topológicas que podem estar associadas a  $\mathcal{R}_2$ , o número de autoestados de vácuo distintos que um QDMv admite se identifica com o número de *ciclos* que a sua ação (8.9) permite definir, e
- por outro, como o transporte de quasipartículas  $m^h$  sempre deixa “rastros” detectáveis pelos operadores de aresta do QDMv, todos os caminhos fechados, que se identificam como os

duais não contráteis  $\gamma^*$  que podem ser formados nestes transportes em alguma topologia mais específica, não podem mais caracterizar qualquer autoestado de vácuo neste modelo.

Desta maneira, tendo em mente o fato de que a degenerescência do estado fundamental de um QDM está vinculado a ordem do grupo fundamental  $\pi_1$  que está associado à variedade que  $\mathcal{R}_2$  discretiza, fica bem claro que a presença do somatório

$$\sum_j C_j^{(G_1, G_2)} \quad (8.75)$$

em (8.1) põe fim a essa vinculação no QDMv, haja vista que um Hamiltoniano como

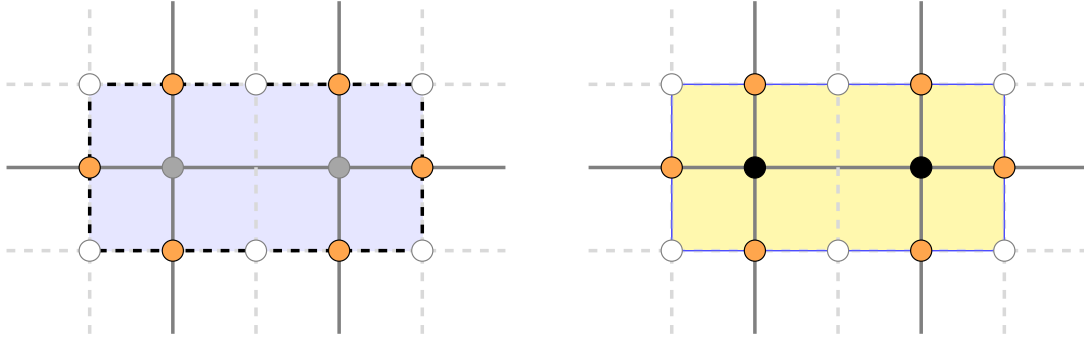
$$H'_{\text{QDMv}} = - \sum_v A_v^{(G_1, G_2)} - \sum_p B_p^{(G_1, G_2)}$$

seria perfeitamente capaz de remontar a uma situação onde todos esses caminhos duais não contráteis  $\gamma^*$  que geram  $\pi_1$  ainda corresponderiam ao vácuo. Ou seja, fazendo uma leitura de que todos os possíveis estados de vácuo do sistema caracterizam as diferentes fases que um QDMv pode possuir num regime de baixas energias, podemos afirmar que todas essas fases passam a não ser mais caracterizadas em função dos elementos de  $\pi_1$ : todas essas fases *parecem* ser modeladas simplesmente pela maneira como os seus campos de matéria interagem uns com os outros (por efeito da ação dos campos de calibre) e não mais por qualquer tipo de ordenamento topológico.

Entretanto, existe um bom motivo para termos não apenas citado, mas dado ênfase ao termo “parecem” na última afirmação. E esse bom motivo pode ser perfeitamente entendido quando reparamos que o efeito prático da ação do operador

$$(X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g$$

é o de criar o mesmo conjunto de excitações que, no caso do modelo tridimensional (3-DC) que apresentamos no Capítulo 5, interpretamos como uma “quasiplaca”. Ou seja, apesar do 3-DC ser um modelo muito básico (já que ele foi construído através da atribuição dos mesmos vetores (4.1) do TC às arestas de uma rede tridimensional  $\mathcal{R}_3$ ), é bastante claro que existe uma correspondência entre as suas “quasiplacas” e as excitações criáveis por um operador (8.72) no QDMv: afinal de contas, essas duas excitações possuem exatamente a mesma energia e seguem a mesma lei do perímetro em suas composições, conforme bem ilustra a Figura 8.7.



**Figura 8.7:** À esquerda, temos um recorte da rede bidimensional que abriga um QDMv onde dois conjuntos de excitações foram criados pela ação de dois operadores (8.72) que agem ao redor de dois vértices vizinhos. Já à direita, vemos uma projeção, que está relacionada à situação de duas “quasiplacas” do 3-DC que são alocadas uma ao lado da outra. Note que, ambas as excitações (quando subjacentes) seguem a mesma lei do perímetro.

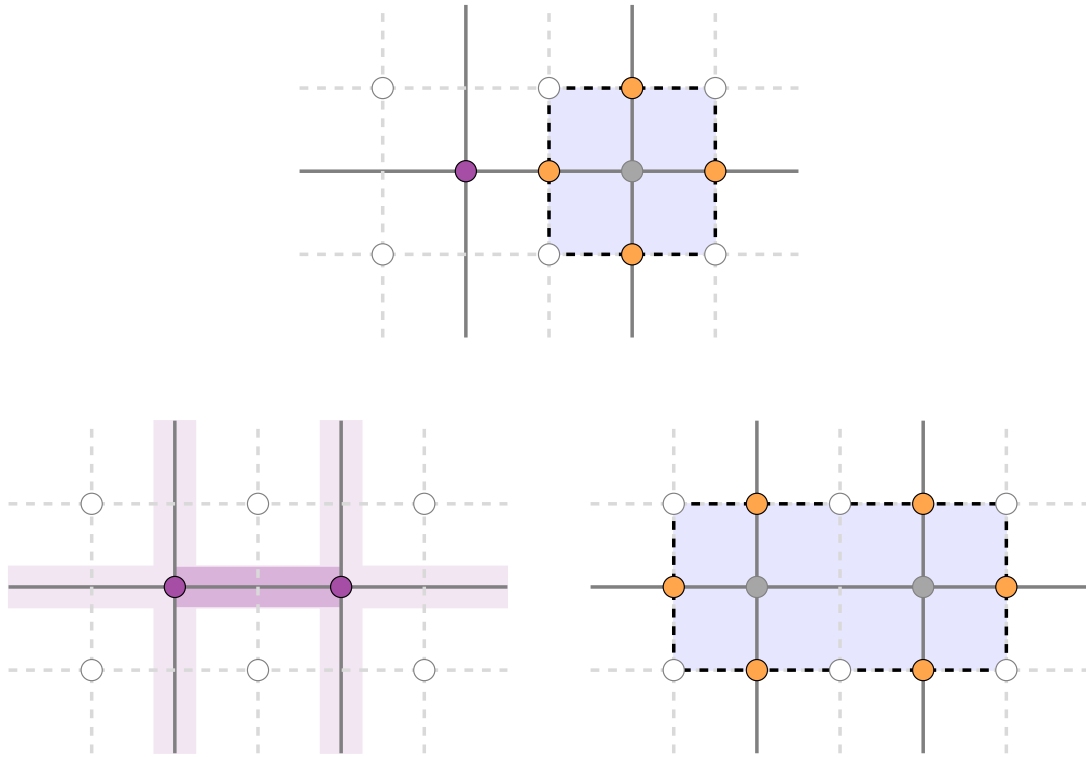
Diga-se de passagem, se notarmos que cada uma dessas “quasiplacas” aparecem no 3-DC por efeito de um operador  $\sigma_j^x$  que age sobre uma única aresta de  $\mathcal{R}_3$ , toda essa correspondência se completa ainda mais desde que notemos que a excitação, que é criada pelo operador (8.72) que age sobre quatro arestas distintas, também pode ser criada por um operador que age sobre um único vértice: afinal, basta ver que tanto (8.74) como

$$\Theta_v(g) \circ (X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g = |G_1| \cdot A_v - \mathbb{1}_v \prod_{j \in S_v} \mathbb{1}_j$$

deixam muito claro que as excitações que são produzidas pelo operador (8.72) e por um outro, que se identifica com a ação  $\Theta_v(g)$ , se comportam efetivamente como a antipartícula uma da outra. Desta maneira, lembrando que os diferentes vácuos do 3-TC e do QDMv são obtidos pela alocação de “quasiplacas” e de quasipartículas  $Q^{(J,K)}$ , uma ao lado da outra respectivamente, é exatamente isso que permite completar tal correspondência conforme ilustra a Figura 8.9, através de uma relação “um-para-um” entre

- as arestas que foram as “quasiplacas” que, juntas, acabam formando as superfícies bidimensionais que, se não contráteis, caracterizam os diferentes vácuos no 3-DC, e
- os vértices que comportam as quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  que se condensam para formar os diferentes vácuos no QDMv.

Afinal de contas, basta ver que, do mesmo jeito que as arestas da rede tridimensional do Capítulo 5 funcionam como os juntores de *quatro faces*, os vértices da rede bidimensional que dá suporte ao



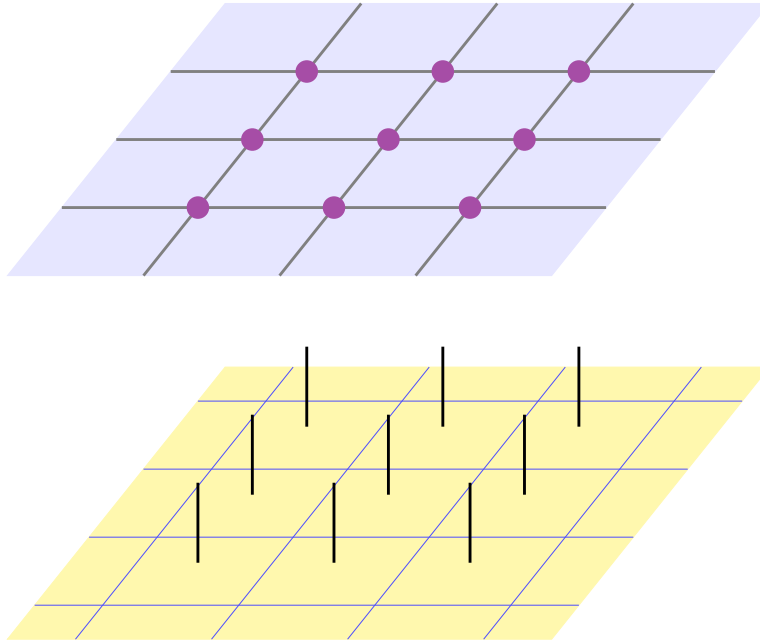
**Figura 8.8:** Acima, temos a situação relacionada às duas excitações que foram criadas, uma ao lado da outra, por efeito da ação dos operadores  $\Theta_v(g)$  (em violeta) e  $(X_d^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g$  (em laranja). Abaixo constam as duas situações, relacionadas às duas possíveis transformações de calibre que podem ser feitas sobre a configuração acima, as quais deixam claro que estas duas excitações podem ser interpretadas efetivamente como a antipartícula uma da outra.

QDMv também funcionam como os juntores de *quatro* arestas.

É claro que, no caso das “quasiplacas” que figuram no 3-DC, todo esse aspecto da não contrati- bilidade de superfícies poder definir novos vácuos é uma consequência direta do fato de estarmos lidando com uma rede que discretiza uma variedade tridimensional (ou seja, uma variedade na qual podem estar mergulhadas superfícies bidimensionais não contráteis, tal como acontece com o toro tridimensional). Portanto, num primeiro momento, esse *parece* não ser o caso do QDMv, ainda mais quando olhamos para o seguinte teorema, cuja demonstração consta em [94]:

**Teorema 5** *Seja  $M_2$  uma superfície conexa, compacta e sem fronteira. Se  $M_2$  é orientável, então  $\mathcal{H}_2(M_2) \simeq \mathbb{Z}$ . Se  $M_2$  não é orientável, então  $\mathcal{H}_2(M_2) \simeq 0$ .*

No entanto, só *parece*. Pois, apesar de tudo o que apresentamos no presente capítulo se relacionar a redes bidimensionais onde (6.2) vale, é quando pensamos em outras situações que se envolvem



**Figura 8.9:** Na parte superior desta figura, temos um recorte da rede bidimensional  $\mathcal{R}_2$  que abriga um QDMv exemplificando a situação onde um vácuo é obtido alocando quasipartículas (pontos em violeta) sobre todos os seus vértices. Já na parte inferior, vemos a situação análoga que ocorre no 3-DC em que um vácuo é obtido através da justaposição de “quasiplacas” (em amarelo) ao longo da rede tridimensional  $\mathcal{R}_3$  que define tal modelo, as quais acabam completando a discretização de uma superfície que está mergulhada em  $\mathcal{R}_3$ .

com essas mesmas redes (que podemos supor que discretizam uma variedade bidimensional que é conexa, compacta e sem fronteira) que fica bem claro que o estado fundamental de um QDMv ainda possui, sim, uma ordem topológica: no caso, uma ordem topológica que, do mesmo jeito que acontece no 3-DC, se relaciona para com o segundo grupo de homologia  $\mathcal{H}_2(\mathcal{M}_2)$ . E, uma dessas outras situações que podemos pensar, é aquela que pode ser bem entendida a partir do teorema abaixo [94]:

**Teorema 6** *Sejam  $K$  e  $L$  dois complexos tais que  $K \cap L \neq \emptyset$  e  $X = K \cup L$ . Então, para todo  $k$ ,*

$$\mathcal{H}_k(X) = \mathcal{H}_k(K) \oplus \mathcal{H}_k(L) \quad .$$

Ou seja, se pensarmos nestes dois complexos  $K$  e  $L$  como os que discretizam duas variedades bidimensionais *disjuntas*, fica bem claro que, se tivermos um QDMv que é definido sobre duas redes bidimensionais que não se comunicam, como o segundo grupo de homologia relacionado a



esta situação será igual a

$$\mathcal{H}_2(X) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} ,$$

a degenerescência  $\mathfrak{d}_{\text{QDMv}}$  do seu estado fundamental será igual a

$$\mathfrak{d}_{\text{QDMv}} = \mathfrak{d}_{\text{alg}}^2 , \quad (8.76)$$

onde  $\mathfrak{d}_{\text{alg}}$  é a degenerescência algébrica (ou seja, o número de ciclos) que segue da escolha que fazemos para a ação do QDMv.

Tudo bem que, no caso dessa união disjunta entre  $K$  e  $L$ , ela pode não levar a um QDMv que é muito interessante, haja vista que as duas realidades que ficam encerradas por estes dois complexos não são capazes de interagir uma com a outra. Porém, é ela quem deixa claro por meio deste teorema que, no caso de termos um QDMv definido sobre uma união disjunta entre  $n$  complexos,  $\mathfrak{d}_{\text{QDMv}}$  será uma função de  $n$ : afinal de contas, como teremos  $n$  redes *independentes* sobre as quais um mesmo QDMv será definido, a degenerescência do estado fundamental deste modelo “como um todo” será igual a

$$\mathfrak{d}_{\text{QDMv}} = \underbrace{\mathfrak{d}_{\text{alg}} \cdot \dots \cdot \mathfrak{d}_{\text{alg}}}_{n \text{ vezes}} = \mathfrak{d}_{\text{alg}}^n ; \quad (8.77)$$

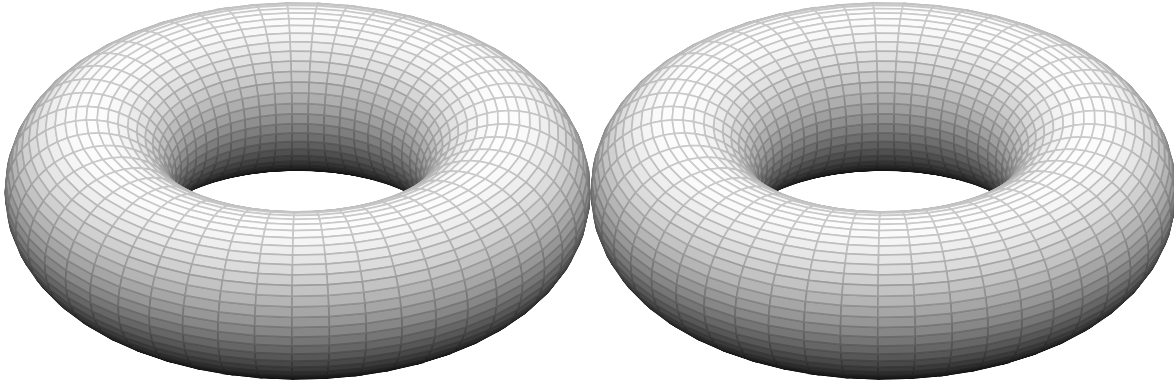
ou seja,  $\mathfrak{d}_{\text{QDMv}}$  será uma função da quantidade de conjuntos  $\mathbb{Z}$  que configuram a soma direta que define o segundo grupo fundamental dessa união disjunta de variedades.

Entretanto, quando pensamos numa outra situação, onde duas variedades bidimensionais se “tocam” num único ponto  $q$ , é o seguinte teorema que se mostra bastante útil [94]:

**Teorema 7** *Sejam  $K$  e  $L$  dois complexos tais que  $K \cap L = \{q\}$  e  $X = K \cup L$ . Então,  $X$  é um complexo para o qual vale*

$$\mathcal{H}_0(X) = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{H}_k(X) = \mathcal{H}_k(K) \oplus \mathcal{H}_k(L) \quad , \quad \text{sendo } k > 0 \quad .$$

Pois, já que toda variedade bidimensional compacta, conexa e orientável é homeomórfica a uma esfera ou a uma soma conexa de toros bidimensionais [94], quando tomamos as duas redes  $\mathcal{R}_2^{(1)}$  e  $\mathcal{R}_2^{(2)}$  que, por exemplo, discretizam respectivamente os dois toros bidimensionais  $\mathcal{M}_2^{(1)}$  e  $\mathcal{M}_2^{(2)}$  que estão a mostra na Figura 8.10, é justamente este teorema quem nos mostra que a degenerescência



**Figura 8.10:** Situação de dois toros  $\mathcal{M}_2^{(1)}$  e  $\mathcal{M}_2^{(2)}$  que estão unidos por um único ponto  $q$ , os quais são discretizados respectivamente por duas redes  $\mathcal{R}_2^{(1)}$  e  $\mathcal{R}_2^{(2)}$  que partilham um único vértice  $v_q$ . Ou seja,  $\mathcal{R}'_2 = \mathcal{R}_2^{(1)} \cup \mathcal{R}_2^{(2)}$  é a discretização de  $\mathcal{M}_2^{(1)} \cup \mathcal{M}_2^{(2)}$  tal que  $v_q$  é o vértice que representa o ponto que une estes dois toros.

do estado fundamental de um QDMv, que é definido sobre uma  $\mathcal{R}'_2 = \mathcal{R}_2^{(1)} \cup \mathcal{R}_2^{(2)}$ , *pode* depender de  $\mathcal{H}_2(\mathcal{M}_2^{(1)} \cup \mathcal{M}_2^{(2)})$ . E a razão de darmos ênfase a este termo “pode” é que essa dependência só acontece quando o vértice  $v_q$ , que representa o ponto  $q$  que une esses dois toros, é *excluído*: ou seja, os operadores que compõem o Hamiltoniano (8.1) agem sobre todos os vértices de  $\mathcal{R}'_2$ , exceto sobre aquele vértice que pertence a  $\mathcal{R}_2^{(1)} \cap \mathcal{R}_2^{(2)}$ . Desta maneira, assumindo não apenas que esse é realmente o caso, mas tendo em mente que a união de dois complexos por um único vértice define um outro complexo, acaba ficando claro que este último teorema permite demonstrar que a degenerescência do estado fundamental de um QDMv, que é construído sobre uma rede  $\mathcal{R}''_2 = \mathcal{R}_2^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{R}_2^{(n)}$  que discretiza a união de  $n$  toros bidimensionais unidos “dois a dois”, respeitam o mesmo esquema da Figura 8.10, é novamente dada por

$$\mathfrak{d}_{\text{QDMv}} = \mathfrak{d}_{\text{alg}}^n .$$

E como  $\mathcal{R}''_2$  pode ser identificada como uma rede bidimensional que possui as mesmas condições de contorno (6.2) quando  $n = 1$  (já que, como não haverá um vértice partilhado, não haverá um vértice excluído), é imediato concluir que o ordenamento topológico de todos os modelos que apresentamos ao longo deste capítulo não foi destruído pela inserção de campos de matéria: esse ordenamento só passou a ser dependente do segundo grupo de homologia, o que só transparece quando lidamos com um sistema que é definido sobre uma união de variedades bidimensionais orientáveis que nos remetem a situações que transcendem ao **Teorema 5**, por exemplo.

### Sobre a existência das paredes de domínio

É claro que, por uma questão de completeza, vale notar que um QDM $v$  pode ser perfeitamente definido numa situação onde os operadores que compõem o Hamiltoniano (8.1) agem sobre *todos* os vértices de  $\mathcal{R}'_2$ . E, neste caso, uma das diferenças que existem entre esta nova situação e a última, onde vértices são excluídos, é que a degenerescência do estado fundamental deste novo QDM $v$  continua sendo exatamente a mesma  $d_{\text{alg}}$  que já está relacionada ao caso do sistema que é definido sobre uma única variedade, o que não chega a denegrir o comentário que acabamos de fazer sobre o fato do QDM $v$  depender do segundo grupo de homologia. Afinal, mesmo que essa dependência não seja mais transparente pela degenerescência do estado fundamental, é ela quem permite que paredes de domínio possam ser criadas nas adjacências dos vértices que unem estas variedades.

Para entender como tudo isso funciona, basta pensar na situação mais simples de todas, onde temos um QDM $v$  com  $d_{\text{alg}} = 2$  que é definido sobre uma união de duas variedades bidimensionais, tal como a que aparece na Figura 8.10, e caracterizarmos cada uma dessas variedades com uma configuração de vácuo distinta. Como esta nova situação não mais poderá ser vista como um vácuo, já que o vértice que é comum a essas duas variedades vai ter de pertencer a uma única das configurações, uma linha excitada passa a existir ao redor deste vértice caracterizando uma parede de domínio: ou seja, uma parede que consegue caracterizar uma transição de fase, já que, ir de uma fase para outra, custa energia.



## Capítulo 9

# Dualidade em modelos com matéria

### 9.1 Campos de matéria associados às faces

Uma das vantagens de já termos construído as generalizações do capítulo anterior, associando os vetores (7.6) aos vértices da mesma rede que já suportava um “Quantum Mouble Model” (QDMv), é que, a partir da mesma lógica que nos levou a elas, podemos construir outras generalizações associando novos vetores apenas às faces dessa mesma rede (QDMf). E uma das coisas que podem ser levadas em consideração para a execução desta nova proposta, é o fato de podermos interpretar o centroide de qualquer face de uma rede bidimensional como o vértice de uma rede dual. Afinal, pensar que esses novos vetores estão associados, em verdade, aos vértices de uma rede dual, é perfeitamente compatível em admitir que a construção de um QDMf segue por efeito da “dualização” de um QDMv.

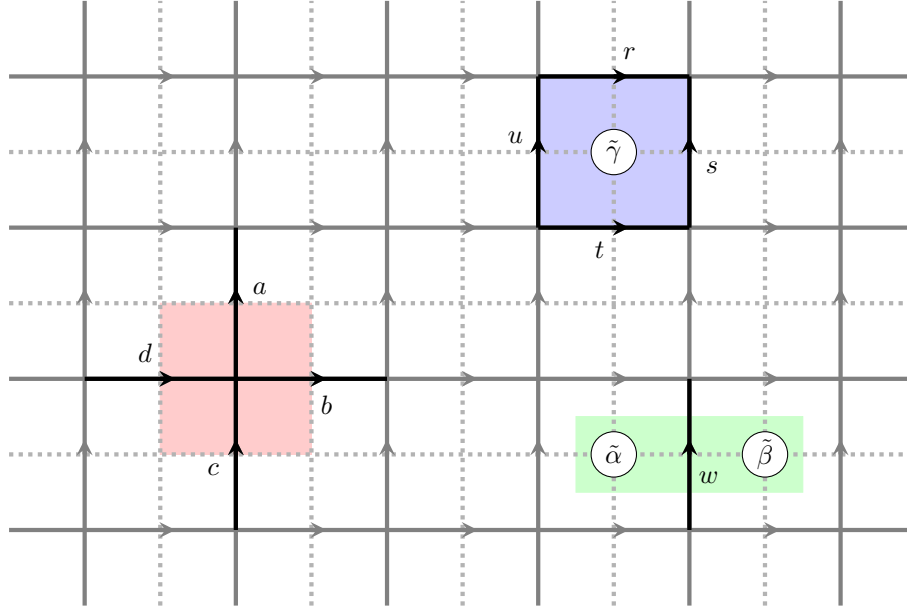
Pensando desta maneira, e nos valendo exatamente da mesma rede  $\mathcal{R}_2$  que deu suporte ao QDM, a primeira coisa que deve ficar clara aqui é que, com a atribuição de um vetor

$$| \chi_{\tilde{\alpha}} \rangle = \tilde{a}_0^{(\chi)} | 0 \rangle + \dots + \tilde{a}_{k-1}^{(\chi)} | k-1 \rangle \quad (9.1)$$

aos vértices da rede dual  $\mathcal{R}_2^*$ , o espaço de Hilbert total deste novo modelo pode ser perfeitamente identificado como

$$\mathfrak{H}_{\text{QDMf}} = \mathfrak{H}_n^{N_a} \otimes \underbrace{\mathfrak{H}_k \otimes \dots \otimes \mathfrak{H}_k}_{N_p \text{ vezes}} = \mathfrak{H}_{\text{QDM}} \otimes \mathfrak{H}_k^{N_p} \quad , \quad (9.2)$$

onde  $\mathfrak{H}_k$  é o subespaço que está associado à p-ésima face da rede, cuja base ortonormal pode ser expressa como  $\mathcal{B}_p = \{ | \tilde{\alpha} \rangle : \tilde{\alpha} \in \tilde{G}_2 \}$ , e onde  $\tilde{G}_2$  deve ser pensado, a priori, apenas um conjunto



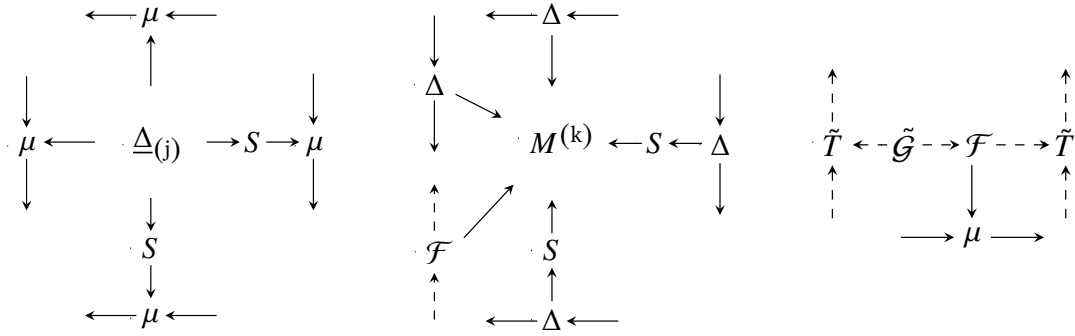
**Figura 9.1:** Recorte da rede  $\mathcal{R}_2$  que dá suporte ao QDMf, esboçada em concomitância à sua rede dual  $\mathcal{R}_2^*$  (pontilhada). Aqui, os setores azul e verde ainda se referem aos mesmos já definidos na Figura 6.1. No entanto, o novo setor verde está associado à  $j$ -ésima aresta compreendida entre duas faces adjacentes que, agora, comporta campos de matéria.

de índices. Já a segunda coisa que deve ficar clara aqui, e que é bem mais importante ao contexto da dualização, segue por efeito da correspondência que deve existir entre as faces em  $\mathcal{R}_2$  (em  $\mathcal{R}_2^*$ ) e os vértices em  $\mathcal{R}_2^*$  (em  $\mathcal{R}_2$ ). Pois, conforme bem ilustra a Figura 9.1, ao admitirmos que a dinâmica de um QDMf é modelada por um operador Hamiltoniano que é expresso em termos de uma superposição

$$H_{\text{QDMf}} = - \sum_{\mathbf{v}} A_{\mathbf{v}}^{(G_1, \tilde{G}_2)} - \sum_{\mathbf{p}} B_{\mathbf{p}}^{(G_1, \tilde{G}_2)} - \sum_{\mathbf{j}} D_{\mathbf{j}}^{(G_1, \tilde{G}_2)} \quad (9.3)$$

entre novos operadores de vértice  $A_{\mathbf{v}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}$ , de face  $B_{\mathbf{p}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  e de aresta  $D_{\mathbf{j}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  adaptados a esta nova situação, é imediato entender que a existência dessa correspondência nos indica a existência de uma outra, entre

- (i) um operador  $A_{\mathbf{v}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  e um operador de face  $\widetilde{B_{\mathbf{p}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}}$  dualizado,
- (ii) um operador  $B_{\mathbf{p}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  e a dualização  $\widetilde{A_{\mathbf{v}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}}$  do operador de vértice que foi definido em (8.2), e
- (iii) um operador  $D_{\mathbf{j}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  e o operador  $\widetilde{C_{\mathbf{j}}^{(G_1, \tilde{G}_2)}}$ , que é obtido pela dualização do operador de



**Figura 9.2:** Diagramas de Kuperberg que representam consecutivamente os operadores de aresta  $A_v$ , de face  $B_p$  e de aresta  $D_j$  que estão relacionados a este novo modelo que se vale de campos de matéria inseridos sobre as faces de  $\mathcal{R}_2$ . Aqui,  $\mathcal{F}$  é uma coação,  $\tilde{T}$  é uma aplicação capaz de estruturar uma álgebra unital e  $\tilde{\mathcal{G}}$  é a aplicação que é responsável por “amarrar” toda essa estrutura que define o operador de aresta.

aresta que está relacionado ao QDMv.

Porém, para que esta última correspondência realmente se complete, ainda precisamos exigir um pouco mais de ambos os modelos. E essa exigência é que esses dois modelos devem ser tais que os seus dois conjuntos de índices  $G_2$  e  $\tilde{G}_2$  sejam, em verdade, dois *grupos*. Aliás, a grande razão por trás dessa exigência é facilmente entendível desde que notemos que, como um QDMf será construído através dessa dualização de um QDMv, as interações desses novos  $|\chi_{\tilde{\alpha}}\rangle$  com os de calibre  $|\phi_j\rangle$  não podem ser modeladas por meio de uma ação tal como (7.7): elas passam a ser modeladas por meio de uma coação  $\tilde{\alpha} \mapsto \mathcal{F}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \otimes f(\tilde{\alpha})$  que, por se valer de uma  $f: \tilde{G}_2 \rightarrow G_1$  que satisfaz a

$$f(1) = 1 \quad , \quad (f(\tilde{\alpha}))^\dagger = f(\tilde{\alpha}^{-1}) = f^{-1}(\tilde{\alpha}) \quad \text{e} \quad f(\tilde{\alpha}_1) \cdot f(\tilde{\alpha}_2) = f(\tilde{\alpha}_1 * \tilde{\alpha}_2) \quad , \quad (9.4)$$

sendo  $\tilde{\alpha}^{-1}$  o elemento inverso de  $\tilde{\alpha}$ , acaba deixando bem clara a necessidade de  $\tilde{G}_2$  se comportar como um grupo [30].

## 9.2 Propriedades gerais

Diga-se de passagem, diante do fato de que as interações entre os campos de calibre e os de matéria deste QDMf são modeladas por meio dessa coação  $\mathcal{F}$ , uma das primeiras coisas que já podem ser ditas sobre este modelo é que os operadores de vértice, de face e de aresta que definem

$$\begin{aligned}
A_v^g \left| \begin{array}{c} a \\ \leftarrow d \rightarrow b \\ \leftarrow c \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} ga \\ \leftarrow dg^{-1} \rightarrow gb \\ \leftarrow cg^{-1} \end{array} \right\rangle \\
\bar{B}_s^h \left| \begin{array}{c} a \\ \leftarrow d \rightarrow b \\ \leftarrow c \\ \tilde{\gamma} \end{array} \right\rangle &= \delta(f(\tilde{\gamma})ab^{-1}c^{-1}d, h) \left| \begin{array}{c} a \\ \leftarrow d \rightarrow b \\ \leftarrow c \\ \tilde{\gamma} \end{array} \right\rangle \\
D_l^{\tilde{\lambda}} \left| \begin{array}{c} \tilde{\alpha} \cdots \tilde{\beta} \\ \leftarrow a \end{array} \right\rangle &= \left| \begin{array}{c} \tilde{\alpha}' \cdots \tilde{\beta}' \\ \leftarrow a' \end{array} \right\rangle
\end{aligned}$$

**Figura 9.3:** Definição das componentes  $A_v^g$ ,  $\bar{B}_p^h$  e  $D_j^{\tilde{\lambda}}$  relacionadas aos operadores de vértice, de face e de aresta de um QDMf. Assim como no caso anterior, o símbolo  $\tilde{\alpha}$  deve ser interpretado como o elemento  $\chi_{\tilde{\alpha}}$  do subespaço de Hilbert  $\mathfrak{H}_k$ . Porém, na definição das componentes de aresta, temos  $a' = f(\tilde{\lambda}) \cdot a$ ,  $\tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha} * \tilde{\lambda}$  e  $\tilde{\beta}' = \tilde{\lambda}^{-1} * \tilde{\beta}$ .

o seu operador Hamiltoniano  $H_{\text{QDMf}}$  são dados por

$$A_v^{(G_1, \tilde{G}_2)} = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} \bar{A}_v^g, \quad B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)} = \bar{B}_p^e \quad \text{e} \quad D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)} = \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\tilde{\lambda} \in \tilde{G}_2} D_l^{\tilde{\lambda}}, \quad (9.5)$$

cujas componentes estão definidas na Figura 9.3. E é justamente diante destas expressões que a propriedade (9.4) pode ser demonstrada em termos, por exemplo, de um esquema pictórico bastante análogo ao do que já foi apresentado na Seção 7.2, o qual se envolve especificamente para com as condições que o operador  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  precisa satisfazer para ser considerado um projetor. E no caso desta demonstração, apesar dela ser bem simples, resolvemos apresentá-la no Apêndice C, mais especificamente na sua Seção C.2, apenas para dar uma melhor corréncia ao presente capítulo.

Já uma das “outras primeiras coisas” que obviamente já podem ser ditas aqui diz respeito à solubilidade deste modelo. Afinal de contas, algo que também conseguimos demonstrar nesta mesma Seção C.2 é que todos os operadores que foram definidos em (9.5) comutam uns com os outros sob uma condição bem específica. Ou seja, mais uma vez estamos diante de um modelo que pode ser solúvel e que, portanto, nos permite bem caracterizar não apenas o seu estado fundamental  $|\tilde{\xi}_0\rangle$  através das relações

$$A_v^{(G_1, \tilde{G}_2)} |\tilde{\xi}_0\rangle = |\tilde{\xi}_0\rangle, \quad B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)} |\tilde{\xi}_0\rangle = |\tilde{\xi}_0\rangle \quad \text{e} \quad D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)} |\tilde{\xi}_0\rangle = |\tilde{\xi}_0\rangle, \quad (9.6)$$

mas todo o seu espectro de energia: basta ver que, neste caso de solubilidade, como o subespaço



$\mathfrak{H}_{\text{QDMv}}^{(0)} \subset \mathfrak{H}_{\text{QDMv}}$  de vácuo ao qual esse  $|\tilde{\xi}_0\rangle$  pertence é *invariante* pela ação do projetor

$$P_{\text{QDMf}} = \prod_v A_v^{(G_1, \tilde{G}_2)} \prod_p B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)} \prod_j D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)} \quad , \quad (9.7)$$

qualquer um dos seus estados excitados podem ser perfeitamente obtidos através de operadores  $\tilde{O} : \mathfrak{H}_{\text{QDMf}} \rightarrow \mathfrak{H}_{\text{QDMf}}$  que *anticomutam* com este  $P_{\text{QDMf}}$ .

No entanto, como por trás da ideia de encarar o QDMf como a dualização de um QDMv (e vice-versa) também existe a necessidade de comparar esses dois modelos, uma das coisas que precisamos declarar aqui é justamente qual é esta “condição bem específica” que nos remete a comutatividade dos operadores (9.5) e, portanto, torna este modelo solúvel:  $f(\tilde{\alpha})$  precisa pertencer ao centro do grupo  $G_1$  [30]. Pois, como é justamente ela quem nos mostra que, para dois elementos  $\tilde{\alpha}_1$  e  $\tilde{\alpha}_2$ , temos

$$f(\tilde{\alpha}_1) \cdot f(\tilde{\alpha}_2) = f(\tilde{\alpha}_2) \cdot f(\tilde{\alpha}_1) \quad ,$$

a propriedade (9.4) acaba deixando muito claro que, além de  $\tilde{G}_2$  ser um grupo, ele é *Abeliano* e é exatamente isso o que, por exemplo, justifica o fato de termos apresentado apenas exemplos que se valeram de  $G_2$  como grupos Abelianos no capítulo anterior.

### 9.2.1 Mais exemplos

Aliás, já que acabamos de mencionar esse termo “exemplos” assim como “a necessidade de comparar esses dois modelos”, algo que devemos destacar aqui é que todos os exemplos que apresentaremos ao longo deste capítulo manterão uma correspondência direta para com os que já foram apresentados no capítulo anterior. E, para que toda essa apresentação possa realmente seguir os mesmos moldes da anterior, uma das coisas que convém adiantar são as expressões das representações matriciais dos operadores que constam em (9.5): elas são dadas por

$$\begin{aligned} A_v^{(G_1, \tilde{G}_2)} &= \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} (X_a^\dagger)^g \circ (X_b^\dagger)^g \circ (X_c)^g \circ (X_d)^g \quad , \\ B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)} &= \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} F_p(\tilde{\alpha} : g) \circ (Z_r^\dagger)^g \circ (Z_s)^g \circ (Z_t)^g \circ (Z_u^\dagger)^g \quad \text{e} \quad (9.8) \\ D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)} &= \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\tilde{\gamma} \in \tilde{G}_2} (\tilde{X}_{p_1})^{\tilde{\gamma}} \circ F_j(\tilde{\alpha} : g) \circ (\tilde{X}_{p_2}^\dagger)^{\tilde{\gamma}} \quad , \end{aligned}$$

onde  $F_p(\tilde{\alpha} : g)$  e  $F_j(\tilde{\alpha} : g)$  são as matrizes que decorrem da coação que define o modelo. É uma coisa que já é autoevidente da expressão do operador de aresta que consta em (9.8) é que, ao contrário do que acontece com o conjunto  $\mathfrak{C}_j$  do capítulo anterior, agora estamos diante de uma situação que muito mais “feliz”, uma vez que completar o conjunto ortonormal  $\mathfrak{D}_j$ , ao qual esse  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  pertence, passa a não ser mais uma tarefa tão enfadonha.

É claro que poderíamos aproveitar este momento para já discorrermos sobre outras características deste QDMf. No entanto, já que o principal objetivo de toda a exposição de exemplos que sempre insistimos em fazer é justamente o de obter um melhor entendimento das propriedades gerais dos nossos modelos, não há nada mais natural do que iniciarmos toda essa nossa exemplificação “dual” antes falarmos alguma coisa a mais sobre elas.

**Exemplo 1:**  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$

Sendo assim, e fazendo um bom uso da mesma “receita” que seguimos no capítulo anterior, o primeiro exemplo que será apresentado aqui é aquele que mantém uma correspondência direta para com o primeiro que demos de QDMv: ou seja, um QDMf que se apoia sobre um grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e sobre um outro de matéria  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$ . E, neste caso, a “única escolha” de  $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  que nos leva a um QDMf “razoavelmente distinto” de um QDM, é aquela onde os operadores de vértice, de face e de aresta são dados respectivamente como

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) , \\ B_p &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + \sigma_p^z \circ \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) \quad \text{e} \\ D_j &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} + \sigma_{p_1}^x \circ \sigma_j^x \circ \sigma_{p_2}^x \right) . \end{aligned} \quad (9.9)$$

Mais adiante explicaremos o motivo de termos usado os termos “única escolha” e “razoavelmente distinto” nesta nossa última sentença. Entretanto, já que o principal objetivo da apresentação desses novos exemplos é usá-los para fazer uma comparação entre eles e aqueles que já foram apresentados no último capítulo, uma coisa que já convém destacar aqui é que, analogamente ao que acontece com o QDMv que adota  $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_2$ , o estado fundamental deste nosso primeiro exemplo “dual” também é *único* e dado por

$$|\xi_0\rangle = \prod_v A_v \prod_j D_j \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_p |0\rangle \right) . \quad (9.10)$$

*Excitações elementares e regras de fusão*

Aliás, diante da expressão dos operadores que estão resumidos em (9.9), e principalmente diante das expressões dos operadores

$$\begin{aligned} A_{v,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) , \\ B_{p,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - \sigma_p^z \circ \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) \text{ e} \\ D_{j,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} - \sigma_{p_1}^x \circ \sigma_j^x \circ \sigma_{p_2}^x \right) \end{aligned}$$

que completam os conjuntos ortonormais  $\mathfrak{A}_v$ ,  $\mathfrak{B}_p$  e  $\mathfrak{D}_j$ , o primeiro comentário que certamente já podemos fazer aqui se relaciona para com as quasipartículas que surgem pela ação dos mesmos operadores

$$\sigma_j^x , \quad \sigma_j^z \quad \text{e} \quad \sigma_j^x \circ \sigma_j^z$$

já mencionados em (8.14): elas são exatamente as mesmas do TC, já que elas surgem pelas “mãos” dos mesmos operadores (4.5) e, portanto, satisfazem as mesmas regras de fusão (4.38). Todavia, existe uma “pequena” diferença aqui. Pois, ao contrário do que acontece no QDMv que parece manter uma correspondência dual para com esse exemplo, agora são as quasipartículas do tipo  $m$  que podem ser movidas ao longo de  $\mathcal{R}_2$  sem causar qualquer custo energético ao sistema: as únicas quasipartículas que serão confinadas neste exemplo (caso exista algum mecanismo que faça com que o sistema permaneça no estado de menor energia possível) serão as do tipo  $e$  e, por consequência, aquelas do tipo  $\varepsilon$ .

No entanto, é importante destacar que a produção de quasipartículas deste modelo não se resume apenas a ação dos operadores (4.5): outras quasipartículas  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  também são criáveis pela ação de operadores  $\tilde{W}_p^{(J,K)}$ , que agem efetivamente apenas sobre os elementos que estão dispostos sobre as faces e que satisfazem a

$$B_{p,J} \circ \tilde{W}_p^{(J,K)} = \tilde{W}_p^{(J,K)} \circ B_{p,1} \quad \text{e} \quad D_{j,K} \circ \tilde{W}_p^{(J,K)} = \tilde{W}_p^{(J,K)} \circ D_{j,1} \quad . \quad (9.11)$$

E, no caso, são *quatro* os operadores que atendem a essas últimas relações: explicitamente

$$\tilde{W}_p^{(1,1)} = \mathbb{1}_p \quad , \quad \tilde{W}_p^{(1,2)} = \sigma_p^z \quad , \quad \tilde{W}_p^{(2,1)} = \sigma_p^x \quad \text{e} \quad \tilde{W}_p^{(2,2)} = “\sigma_p^y” \quad , \quad (9.12)$$

$(J, K)$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 2)	(2, 1)	(2, 2)
(1, 2)	(1, 2)	(1, 1)	(2, 2)	(2, 1)
(2, 1)	(2, 1)	(2, 2)	(1, 1)	(1, 2)
(2, 2)	(2, 2)	(2, 1)	(1, 2)	(1, 1)

**Tabela 9.1:** Regras de fusão que estão associadas às quasipartículas  $\tilde{Q}^{(J,K)}$ , criadas por operadores  $\tilde{Q}_p^{(J,K)}$  que agem exclusivamente sobre as faces de  $\mathcal{R}_2$ , neste QDMf que se vale de um grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e de outro de matéria  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$ . Note a similaridade destas regras para com as que constam na Tabela 8.1.

os quais criam respectivamente as quasipartículas que serão aqui denotadas por  $\tilde{Q}^{(1,1)}$ ,  $\tilde{Q}^{(1,2)}$ ,  $\tilde{Q}^{(2,1)}$  e  $\tilde{Q}^{(2,2)}$ , cujas regras de fusão, que configuram a Tabela 9.1, por exemplo, deixam bem claro que estamos diante de um modelo *Abeliano*.

### Propriedades adicionais

Por se dizer, é diante dessa produção de quasipartículas que uma coisa já pode ser dita: pois como

$$B_p \circ (\sigma_p^x \circ \sigma_j^x) | \tilde{\xi}_0 \rangle = (\sigma_p^x \circ \sigma_j^x) \circ B_p | \tilde{\xi}_0 \rangle = \sigma_p^x \circ \sigma_j^x | \tilde{\xi}_0 \rangle$$

é uma relação válida quando  $p$  indexa uma das faces que partilham a  $j$ -ésima aresta, podemos afirmar que a quasipartícula  $\tilde{Q}^{(2,1)}$ , que é produzida por  $\sigma_p^x$  sobre a face em questão, se comporta efetivamente como uma do tipo  $m$ , porém como uma do tipo  $m$  que não pode ser transportada. Aliás, é exatamente por causa desse comportamento efetivo que, analogamente ao que fizemos no capítulo anterior, interpretamos todas as excitações  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  como quasipartículas.

Já em relação às quasipartículas de não vácuo  $\tilde{Q}^{(1,2)}$  e  $\tilde{Q}^{(2,2)}$  que podem ser produzidas pelos outros operadores em (9.12), apesar de não ser possível reconhecê-las como aquelas do TC, é possível afirmar que elas possuem duas propriedades bem interessantes e bem familiares. E a primeira delas é que essas quasipartículas são capazes de interagir entre si por meio de algum potencial que é bastante similar a um eletrostático. Afinal, embora o autoestado relacionado à presença de uma única  $\tilde{Q}^{(1,2)}$  ou  $\tilde{Q}^{(2,2)}$  tenha uma energia igual a 4 ou 5 respectivamente, um sistema que contém apenas duas delas pode não ter uma energia necessariamente igual à soma de duas energias “elementares”. E, para que toda essa situação eletrostática realmente transpareça, basta apenas que essas quasipartículas sejam alocadas sobre o conjunto de vértices duais  $\tilde{S}_j =$

$\{p_1, p_2\}$  a uma aresta  $j$ , desde que

$$[ D_j , “ \sigma_{p_1}^y ” \circ “ \sigma_{p_2}^y ” ] = [ D_j , “ \sigma_{p_1}^y ” \circ \sigma_{p_2}^z ] = [ D_j , \sigma_{p_1}^z \circ \sigma_{p_2}^z ] = 0 \quad . \quad (9.13)$$

Já sobre a segunda propriedade que está relacionada para com essas quasipartículas  $\tilde{Q}^{(1,2)}$  e  $\tilde{Q}^{(2,2)}$ , ela segue do operador

$$O_\gamma^z = \prod_{j \in \gamma} \sigma_j^z \quad (9.14)$$

que é capaz de agir sobre o estado fundamental (9.10), onde  $\gamma$  é um caminho fechado que é composto por arestas de  $\mathcal{R}_2$ . Pois, apesar deste operador não ser composto por qualquer um dos operadores (9.12), é devido

(i) à propriedade de comutação

$$[ D_j , “ \sigma_{p_1}^y ” \circ “ \sigma_{p_2}^y ” ] = [ D_j , “ \sigma_{p_1}^y ” \circ \sigma_{p_2}^z ] = [ D_j , \sigma_{p_1}^z \circ \sigma_{p_2}^z ] = 0 \quad , \quad e$$

(ii) ao fato de  $O_\gamma^z$  não apenas comutar com  $B_p$ , mas de agir sobre arestas que, “duas a duas”, partilham um mesmo vértice,

que é imediato perceber que o mesmo estado fundamental (9.10) pode ser reobtido, desde que aloquemos uma quasipartícula  $\tilde{Q}^{(1,2)}$  em cada face que consta na área que é limitada por  $\gamma$ . Ou seja, tal como já aconteceu nos exemplos apresentados no último capítulo, mais uma vez nos deparamos com a presença de um operador  $O_\gamma^z$  que, por ser capaz de “blindar” as quasipartículas  $\tilde{Q}^{(1,2)}$  de qualquer um dos operadores que compõem o Hamiltoniano (9.9), pode ser interpretado como uma espécie de “isolante”.

**Exemplo 2:**  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_3$

Talvez seja exatamente neste ponto, onde acabamos de findar a apresentação deste exemplo onde  $G_1 = \tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$ , que o leitor esteja se perguntando sobre o porquê de ainda não termos dito nada sobre os termos “única escolha” e “razoavelmente distinto” que foram usados há algumas páginas. E a razão para termos esperado chegar até aqui para falar sobre esses termos, neste ponto onde o leitor espera pela apresentação do exemplo de um QDMf que parece manter uma

correspondência direta para com o QDMv que adota  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_3$ , é muito simples: afinal, *não* existe um QDMf, que seja construído por meio deste esquema de “dualização”, que adote um grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$ , um de matéria  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_3$  e que ainda se valha de um homomorfismo  $f : \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_2$  que não se identifique com o trivial; no caso, o único QDMf que é construtível nestes moldes é aquele cujos conjuntos  $\mathfrak{A}_v$ ,  $\mathfrak{B}_p$  e  $\mathfrak{D}_j$  se completam com os respectivos operadores

$$\begin{aligned}
A_v &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) , \\
A_{v,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) , \\
B_p &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + \mathbb{1}_p \circ \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) , \\
B_{p,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - \mathbb{1}_p \circ \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) , \quad (9.15) \\
D_j &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} + X_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2}^2 + X_{p_1}^2 \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2} \right) , \\
D_{j,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} + i X_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2}^2 - i X_{p_1}^2 \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2} \right) \text{ e} \\
D_{j,3} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} - i X_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2}^2 + i X_{p_1}^2 \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2} \right) .
\end{aligned}$$

Embora todos esses operadores possam, de fato, configurar um QDMf onde um estado fundamental e excitações podem ser muito bem definidos, o resultado disso tudo não é nada interessante se o propósito é interpretar este modelo como um que comporte campos de matéria que sejam capazes de interagir uns com os outros através de campos de calibre. Afinal de contas, devido às expressões de todos esses operadores, todos esses campos de calibre e de matéria são completamente “cegos” uns para os outros: ou seja, quaisquer excitações que sejam detectáveis pelos operadores de vértice ou de face *não* são detectáveis por um operador de aresta, e vice-versa. E esse é o grande motivo que está por trás do uso dos termos “única escolha” e “razoavelmente distinto” no exemplo anterior: lá, a outra escolha que também poderíamos ter feito para o homomorfismo  $f$  é a trivial; só que, assim como acontece aqui, essa escolha trivial *não* nos remete a um QDMf que é tão interessante quanto o que apresentamos anteriormente.

Se bem que, conforme discutiremos melhor mais adiante, mais especificamente no final deste capítulo, existe um aspecto interessante que está relacionado a este modelo: pois, devido ao fato

do homomorfismo que define este modelo ser tal que

$$f(\tilde{\alpha}) = e$$

para todos os três elementos que pertencem a  $\tilde{G}_2$ , é imediato perceber que os três autoestados

$$|\tilde{\xi}_0^{(\tilde{\alpha})}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \prod_j D_j \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_{p \neq p'} |0\rangle \right) \otimes |\tilde{\alpha}\rangle_{p'}$$

corresponderão ao vácuo, haja vista que não existe nenhuma transformação, que seja composta por um produtório entre os operadores (9.15), que leve de um autoestado de vácuo a outro. Ou seja, estamos diante de um modelo que, apesar de não ser muito interessante, deixa muito bem claro que o seu estado fundamental possui uma degenerescência que é igual a ordem do núcleo de  $f$ .

**Exemplo 3:**  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_4$

Dando sequência à construção desse paralelismo entre os exemplos deste capítulo para com os do anterior, o terceiro exemplo que precisamos apresentar agora é aquele que se vale de um  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e de um  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_4$ . E o primeiro destaque que já podemos fazer aqui sobre este QDMf é que, como a sua coação  $\mathcal{F}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} \otimes f(\tilde{\alpha})$  deve ser tal que

$$f(1) = f(-1) = 1 \quad \text{e} \quad f(i) = f(-i) = -1 \quad (9.16)$$

para que este modelo seja fisicamente mais interessante que o que foi apresentado no exemplo anterior, os operadores de vértice, de face e de aresta que compõem o seu Hamiltoniano são dados respectivamente por

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) \quad , \\ B_p &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + Z_p^2 \circ \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) \quad \text{e} \\ D_j &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} + X_{p_1} \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2}^3 + X_{p_1}^2 \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2}^2 + X_{p_1}^3 \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2} \right) \quad , \end{aligned} \quad (9.17)$$

sendo  $X$  e  $Z$  os mesmos operadores que já foram definidos em (8.48). Pois, como estes operadores (9.17) são essenciais à boa definição deste modelo, é através deles que podemos observar que o

autoestado de vácuo

$$|\tilde{\xi}_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \prod_j D_j \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_p |0\rangle \right) \quad (9.18)$$

não é único: afinal de contas, um autoestado

$$|\tilde{\xi}_0^{(2)}\rangle = \tilde{O} |\xi_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \prod_j D_j \left( \bigotimes_j |0\rangle \right) \otimes \left( \bigotimes_{p \neq p'} |0\rangle \right) \otimes |2\rangle_{p'} \quad , \quad (9.19)$$

que é obtido pela simples troca de um único  $|0\rangle$ , que está associado a uma única face, por outro  $|2\rangle$ , nos leva a uma situação que é completamente independente de (9.18). Ou seja, assim como já aconteceu no exemplo anterior, estamos novamente diante de uma situação onde a degenerescência do estado fundamental deste modelo passa a não ser mais vista pela ótica das trocas *globais* que definem os estados de vácuo do QDM<sub>v</sub>, que tão pouco depende qualquer aspecto topológico que possa estar associado ao modelo, mas que pode ser bem explicada em termos das escolhas algébricas que se envolvem para com a definição da sua coação. Nestes termos, como todos os demais autoestados de vácuo que podem ser aqui obtidos se relacionam com (9.18) e (9.19) através de algum produtório que se vale dos operadores (9.17), fica bem claro que estamos diante de um sistema cujo estado fundamental é *bidegenerado*, e essa bidegenerescência é novamente compatível com o fato do núcleo de  $f$  ser composto apenas por *dois* elementos.

### Excitações elementares e regras de fusão

Já o segundo destaque que pode ser feito aqui diz respeito às quasipartículas que podem ser criadas neste modelo. E é claro que, devido toda a estrutura de calibre deste QDM<sub>f</sub> ser exatamente a mesma dos dois últimos exemplos, todas as quasipartículas originalmente relacionadas ao TC continuam se fazendo presentes aqui, as quais, devido às expressões dos operadores

$$\begin{aligned} A_{v,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - \sigma_a^x \circ \sigma_b^x \circ \sigma_c^x \circ \sigma_d^x \right) \quad , \\ B_{p,2} &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - Z_p^2 \circ \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z \right) \quad , \\ D_{j,2} &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} + i X_{p_1} \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2}^3 - X_{p_1}^2 \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2}^2 - i X_{p_1}^3 \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2} \right) \\ D_{j,3} &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} - X_{p_1} \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2}^3 + X_{p_1}^2 \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2}^2 - X_{p_1}^3 \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2} \right) \quad e \end{aligned}$$



$$D_{j,4} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} - i X_{p_1} \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2}^3 - X_{p_1}^2 \circ \mathbb{1}_j \circ X_{p_2}^2 + i X_{p_1}^3 \circ \sigma_j^x \circ X_{p_2} \right) ,$$

que completam os conjuntos  $\mathfrak{A}_v$ ,  $\mathfrak{B}_p$  e  $\mathfrak{D}_j$ , continuam apresentando as mesmas propriedades de transporte e de confinamento do primeiro exemplo (uma vez que ele é o único exemplo que apresentamos que não se vale de um homomorfismo trivial): ou seja, quasipartículas do tipo  $m$  continuam sendo transportáveis livremente pela rede, enquanto as dos tipos  $e$  e  $\varepsilon$  continuam apresentando os mesmos traços de confinamento que já foram apontados anteriormente, uma vez que

$$D_j \circ \sigma_j^x | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle = \sigma_j^x \circ D_j | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle \quad \text{e} \quad D_j \circ \sigma_j^z | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle = \sigma_j^z \circ D_{j,3} | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle .$$

Todavia, devido as expressões desses mesmos operadores, também é muito claro que outros operadores  $\tilde{W}_p^{(J,K)}$ , que agem exclusivamente sobre os elementos associados às faces de  $\mathcal{R}_2$ , são capazes de criar outras quasipartículas. E, como as expressões mais gerais que satisfazem a (9.11), neste caso, são dadas por

$$\begin{aligned} \tilde{W}_p^{(1,1)} &= a_{11} \mathbb{1}_p + b_{11} X_p^2 & , & \quad \tilde{W}_p^{(1,2)} = a_{12} Z_p^3 + b_{12} X_p^2 \circ Z_p^3 \\ \tilde{W}_p^{(1,3)} &= a_{13} Z_p^2 + b_{13} X_p^2 \circ Z_p^2 & , & \quad \tilde{W}_p^{(1,4)} = a_{14} Z_p + b_{14} X_p^2 \circ Z_p & , & \quad (9.20) \\ \tilde{W}_p^{(2,1)} &= a_{21} X_p^3 + b_{21} X_p & , & \quad \tilde{W}_p^{(2,2)} = a_{22} X_p^3 \circ Z_p^3 + b_{22} X_p \circ Z_p^3 & , \\ \tilde{W}_p^{(2,3)} &= a_{23} X_p^3 \circ Z_p^2 + b_{23} X_p \circ Z_p^2 & \text{e} & \quad \tilde{W}_p^{(2,4)} = a_{24} X_p^3 \circ Z_p + b_{24} X_p \circ Z_p & , \end{aligned}$$

fica claro, das relações de comutação (6.18) que existem entre os operadores  $X$  e  $Z$  que já foram definidos em (8.48), que todos estes operadores estão relacionados à criação de quasipartículas que completam um quadro cujas regras de fusão Abelianas estão presentes na Tabela 9.2. Aliás, para entender isso, basta tomar  $(a_{JK}, b_{JK}) = (1, 0)$  ou  $(a_{JK}, b_{JK}) = (0, 1)$ , por exemplo.

### Propriedades adicionais

É claro que, além deste quadro Abeliano, também vale frisar que todas essas quasipartículas apresentam características que são bem familiares. Afinal, quando olhamos para a quasipartícula  $Q^{(2,1)}$  que é produzida pelo operador  $\tilde{W}_p^{(2,1)}$ , é imediato perceber que ela também se comporta

$(J, K)$	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
(1,1)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(1,7)	(1,8)
(1,2)	(1,2)	(1,1)	(1,4)	(1,3)	(2,2)	(2,1)	(2,4)	(1,3)
(1,3)	(1,3)	(1,4)	(1,1)	(1,2)	(2,3)	(2,4)	(2,1)	(2,2)
(1,4)	(1,4)	(1,3)	(1,2)	(1,1)	(2,4)	(2,3)	(2,2)	(2,1)
(2,1)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
(2,2)	(2,2)	(2,1)	(2,4)	(2,3)	(1,2)	(1,1)	(1,4)	(1,3)
(2,3)	(2,3)	(2,4)	(2,1)	(2,2)	(1,3)	(1,4)	(1,1)	(1,2)
(2,4)	(2,4)	(2,3)	(2,2)	(2,1)	(1,4)	(1,3)	(1,2)	(1,1)

**Tabela 9.2:** Regras de fusão associadas às quasipartículas que são criadas pelos operadores  $\tilde{W}_p^{(J,K)}$  definidos em (9.21), agindo exclusivamente sobre os vértices da rede num QDMf que se vale do grupo de calibre  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e de um de matéria  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_4$ .

(efetivamente) como uma do tipo  $m$ , haja vista que

$$\begin{aligned} B_p \circ ( X_p^{2a+1} \circ \sigma_j^x | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle ) &= X_p^{2a+1} \circ B_{p,2} \circ \sigma_j^x | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle \\ &= ( X_p^{2a+1} \circ \sigma_j^x ) \circ B_p | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle = X_p^{2a+1} \circ \sigma_j^x | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle \end{aligned}$$

é uma relação válida quando  $a = 0$  ou  $a = 1$ .

Já em relação ao comportamento eletrostático que está presente nos outros exemplos, ele também se faz presente aqui: pois, quando duas quasipartículas idênticas  $Q^{(J,K)}$  são produzidas sobre os vértices do conjunto  $\tilde{S}_j = \{p_1, p_2\}$ , por operadores  $\tilde{W}_p^{(J,K)}$  que apresentam alguma dependência dos operadores  $X^g$ , temos

$$D_j \circ ( \tilde{W}_{p_1}^{(J,K)} \circ \tilde{W}_{p_2}^{(J,K)} ) | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle = D_j | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle .$$

No entanto, o que é importante de mencionar sobre toda essa eletrostaticidade é que parte dela também pode ser blindada pelo operador (9.14). E, devido a presença do termo

$$Z_p^2 \circ \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z$$

no operador de face, fica muito claro que a única quasipartícula que é completamente blindável é  $Q^{(1,3)}$ , uma vez que a identificação

$$O_\gamma^z = \sigma_r^z \circ \sigma_s^z \circ \sigma_t^z \circ \sigma_u^z$$

vale para o menor caminho  $\gamma$  que cerca o vértice sobre o qual esta quasipartícula é produzida e, portanto,

$$[A_v, O_\gamma^z \circ Z_p^2] = [B_p, O_\gamma^z \circ Z_p^2] = [D_j, O_\gamma^z \circ Z_p^2] = 0 \quad .$$

**Exemplo 4:**  $G_1 = \mathbb{Z}_4$  e  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$

Apenas para completar essa leva de exemplos, cabe apresentar um QDMf onde  $G_1 = \mathbb{Z}_4$  e  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$ . E, apesar deste ser exemplo estar numa situação oposta a do anterior, tudo aqui é bastante similar ao QDMv que se apoia sobre um  $G_1 = \mathbb{Z}_4$  e um  $G_2 = \mathbb{Z}_2$ . E a razão de toda essa similaridade é que todas as coações que podem ser definidas aqui (e que são distintas da trivial) equivalem àquela que adota  $f : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_4$  como uma identidade, o que leva aos respectivos operadores de vértice, de face e de aresta

$$\begin{aligned} A_v &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 + X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) \\ B_p &= \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + \sigma_p^z \circ Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 + \sigma_p^z \circ Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) \quad e \\ D_j &= \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} + \sigma_{p_1}^x \circ X_j^2 \circ \sigma_{p_2}^x \right) \quad . \end{aligned} \quad (9.21)$$

Entretanto, apesar da flagrante positividade que este exemplo apresenta em relação ao último, vale notar que estamos novamente diante de um modelo que é *bidegenerado*, já que

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}_0^{(1)}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \prod_j D_j \left( \begin{array}{c} \otimes \\ j \end{array} | 0 \rangle \right) \otimes \left( \begin{array}{c} \otimes \\ p \end{array} | 0 \rangle \right) \quad e \\ |\tilde{\xi}_0^{(2)}\rangle &= \tilde{O} |\tilde{\xi}_0^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \prod_v A_v \prod_j D_j \left( \begin{array}{c} \otimes \\ j \end{array} | 1 \rangle \right) \otimes \left( \begin{array}{c} \otimes \\ p \end{array} | 0 \rangle \right) \end{aligned} \quad (9.22)$$

são os únicos autoestados independentes um do outro que satisfazem a relação de vácuo (9.6), onde

$$\tilde{O} = \prod_v Z_j \quad . \quad (9.23)$$

*Excitações elementares e regras de fusão*

Aliás, é justamente por causa desta opositividade, que agora trás  $\mathbb{Z}_4$  como o grupo indexador dos elementos de matéria, que fica claro que as quasipartículas, que aparecem como excitações dos campos de calibre, não mais correspondem às do TC: agora estas quasipartículas se identificam com as mesmas de um QDM moderado por um  $G_1 = \mathbb{Z}_4$ , cujas regras de fusão já estão resumidas em (8.69).

É claro que algumas coisas aqui são um pouco diferentes das que estão associadas ao QDMv onde estas mesmas quasipartículas também se fazem presentes. E uma das diferenças que são bem claras, das expressões dos operadores (9.21) e dos demais

$$A_{v,2} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d + i X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ - \frac{1}{4} \left( X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 + i X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) ,$$

$$A_{v,3} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ + \frac{1}{4} \left( X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 - X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) ,$$

$$A_{v,4} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_a \circ \mathbb{1}_b \circ \mathbb{1}_c \circ \mathbb{1}_d - i X_a \circ X_b \circ X_c^3 \circ X_d^3 \right) \\ - \frac{1}{4} \left( X_a^2 \circ X_b^2 \circ X_c^2 \circ X_d^2 - i X_a^3 \circ X_b^3 \circ X_c \circ X_d \right) ,$$

$$B_{p,2} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u + i \sigma_p^z \circ Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ - \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 + i \sigma_p^z \circ Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) ,$$

$$B_{p,3} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - \sigma_p^z \circ Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ + \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 - \sigma_p^z \circ Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) ,$$

$$B_{p,4} = \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ \mathbb{1}_r \circ \mathbb{1}_s \circ \mathbb{1}_t \circ \mathbb{1}_u - i \sigma_p^z \circ Z_r^3 \circ Z_s \circ Z_t \circ Z_u^3 \right) \\ - \frac{1}{4} \left( \mathbb{1}_p \circ Z_r^2 \circ Z_s^2 \circ Z_t^2 \circ Z_u^2 - i \sigma_p^z \circ Z_r \circ Z_s^3 \circ Z_t^3 \circ Z_u \right) e$$

$$D_{j,2} = \frac{1}{2} \left( \mathbb{1}_{p_1} \circ \mathbb{1}_j \circ \mathbb{1}_{p_2} - \sigma_{p_1}^x \circ X_j^2 \circ \sigma_{p_2}^x \right)$$

que completam os conjuntos  $\mathfrak{A}_v$ ,  $\mathfrak{B}_p$  e  $\mathfrak{D}_j$ , por exemplo, é que agora são as quasipartículas  $m^h$  que podem ser transportadas livremente pela rede. Já em relação às  $e^g$  e  $\varepsilon^{(g,h)}$ , apesar delas serem realmente confináveis segundo a mesma leitura “Cromodinâmica” que já fizemos outrora, é devido ao fato de que

$$Z^g X^h = i^{(gh) \bmod 4} X^h Z^g \Rightarrow \begin{cases} ZX^2 = i^{2 \bmod 4} XZ^2 = -X^2Z & , \\ Z^2X^2 = i^{4 \bmod 4} X^2Z^2 = X^2Z^2 & \text{e} \\ Z^3X^2 = i^{6 \bmod 4} X^3Z^2 = -X^2Z^3 & , \end{cases}$$

que fica bastante nítido que nem todas elas serão susceptíveis a tal confinamento: este é, por exemplo, o caso das quasipartículas  $e^2$  e  $\varepsilon^{(2,h)}$  que, por serem produzidas aos pares pela ação de um  $Z_j^2$ , serão tais que<sup>1</sup>

$$D_j \circ Z_j^2 | \xi_0^{(1,2)} \rangle = Z_j^2 \circ D_j | \xi_0^{(1,2)} \rangle = Z_j^2 | \xi_0^{(1,2)} \rangle .$$

No entanto, uma coisa que não é diferente aqui é que outras quasipartículas  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  também se fazem presentes, uma vez que elas surgem por efeito de operadores  $\tilde{W}_p^{(J,K)}$  que agem exclusivamente sobre os elementos que estão dispostos sobre as faces, os quais devem satisfazer a mesma relação (9.11). E, no caso, como a “estrutura de matéria” deste exemplo é exatamente a mesma do **Exemplo 1** (deste mesmo capítulo), é imediato concluir que essas quasipartículas surgem pelos mesmos operadores

$$\tilde{W}_p^{(1,1)} = \mathbb{1}_v \quad , \quad \tilde{W}_p^{(1,2)} = \sigma_p^z \quad , \quad \tilde{W}_p^{(3,1)} = \sigma_p^x \quad \text{e} \quad \tilde{W}_p^{(3,2)} = “\sigma_p^y”$$

que já foram listados em (9.12). Ou seja, estamos novamente diante de um modelo cujas quasipartículas  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  apresentam as mesmas regras de fusão Abelianas que estão resumidas na Tabela 9.1.

<sup>1</sup>Embora a quasipartícula  $\varepsilon^{(2,h)}$  não seja propriamente produzida por um  $Z_j^2$ , mas sim por um  $X_j^h \circ Z_j^2$ , é o fato de  $X_j^h$  comutar com  $D_j$  que completa este raciocínio e que, portanto, implica que  $\varepsilon^{(2,h)}$  não é confinável.

*Propriedades adicionais*

Antes de finalmente encerrarmos a apresentação deste, que será o nosso último exemplo, é fundamental fazermos dois destaques. E o primeiro deles segue de

$$\begin{aligned} B_p \circ (\sigma_p^x \circ X_j^2 | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle) &= \sigma_p^x \circ B_{v,3} \circ X_j^2 | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle \\ &= (\sigma_p^x \circ X_j^2) \circ B_p | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle = \sigma_p^x \circ X_j^2 | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle ; \end{aligned}$$

afinal, como esses operadores  $\sigma_p^x$  e  $X_j^2$  são os que criam as quasipartículas  $\tilde{Q}^{(3,1)}$  e  $m^2$ , fica bem claro que essas duas quasipartículas podem ser consideradas, ao menos *efetivamente*, como iguais.

Já o segundo destaque que precisamos fazer aqui está relacionado ao comportamento eletrostático de parte destas quasipartículas. E, apesar de bem sabermos que as quasipartículas  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  são exatamente as mesmas do **Exemplo 1** e que, portanto, as mesmas propriedades eletrostáticas de lá são exatamente as mesmas daqui, a única ressalva que precisamos fazer sobre este aspecto eletrostático se envolve para com a relação

$$[ D_j , \sigma_p^z \circ Z_j ] = [ D_j , \sigma_p^z \circ Z_j^3 ] = 0 .$$

Afinal, como ela é uma relação válida quando  $p$  indexa uma das faces que são vizinhas à  $j$ -ésima aresta, e isso implica que

$$\begin{aligned} D_j \circ ( O_p^Z \circ \sigma_p^z | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle ) &= O_p^Z \circ D_{j,2} \circ \sigma_p^z | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle \\ &= ( O_p^Z \circ \sigma_p^z ) \circ D_j | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle = O_p^Z \circ \sigma_p^z | \tilde{\xi}_0^{(1,2)} \rangle , \end{aligned}$$

onde temos

$$O_p^Z = Z_r^M \circ Z_s^N \circ Z_t^N \circ Z_u^M \quad (9.24)$$

com  $(M,N)$  assumindo valores que podem ser apenas iguais a  $(1,3)$  ou  $(3,1)$ , é imediato concluir que este  $O_p^Z$  cancela os efeitos de uma única excitação criada por  $\sigma_p^z$ . Ou seja, do mesmo jeito que um operador  $O_v^X$  consegue “blindar” uma quasipartícula  $Q^{(1,2)}$  no QDM $v$  que parece ser correspondente a este, o operador  $O_p^Z$  também se comporta como uma espécie de “isolante” da quasipartícula  $\tilde{Q}^{(1,2)}$ .

### 9.2.2 Uma comparação entre os modelos com matéria

Apesar de termos seguido a mesma “repetitividade estrutural” completamente enfadonha do capítulo anterior, uma coisa ficou muito clara desses últimos quatro exemplos que acabamos de apresentar: ao menos pelo aspecto comportamental das suas excitações, um QDMf realmente pode ser visto como o modelo dual de um QDMv. Pois, enquanto num QDMv

- (a.1) as quasipartículas  $e^s$  se movimentam sem qualquer custo energético,
- (b.1) duas quasipartículas  $Q^{(J,K)}$  se submetem a algum potencial que é bastante similar a um eletrostático, e
- (c.1) as quasipartículas do  $m^h$  podem ser confinadas pela ação de um campo de força que parece ser análogo ao que define um hádron, no caso do sistema possuir algum mecanismo que tenda a mantê-lo com a menor energia possível,

num QDMf nós temos

- (a.2) quasipartículas do  $m^h$  movimentáveis sem qualquer custo energético,
- (b.2) quasipartículas  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  que se submetem a algum potencial que também é similar ao eletrostático, e
- (c.2) quasipartículas  $e^s$  que podem ser confinadas pela ação de algum campo de força “forte” semelhante ao supracitado.

É claro que outras propriedades também podem ser apontadas aqui, reforçando ainda mais todo esse quadro dual, tais como: (i) a estaticidade de quasipartículas que são produzidas sobre os vértices duais, as quais se comportam efetivamente como as mesmas do QDM; e (ii) o fato da degenerescência do seu estado fundamental também seguir uma espécie de ordem algébrica. No entanto, apesar de também ser perfeitamente válido pensar na situação do confinamento das quasipartículas do tipo  $e^s$  em termos de um efeito Meissner dual, é quando notamos que essas mesmas quasipartículas são interpretáveis à luz do QDM como “elétricas” que é imediato perceber que dizer que essas quasipartículas estão confinadas dentro de um sistema é o mesmo que dizer este material funciona literalmente como um *isolante*: ou seja, assumindo que o sistema que é descrito por um QDMf corresponde a um sistema físico onde  $e^s$ , por exemplo, cumpre um papel análogo

ao de um elétron, podemos dizer que este sistema pode ser reconhecido como um *isolante elétrico* (uma vez que tal material não favorece o movimento destas partículas), o que só vem a reforçar uma possível caracterização do material que o QDMv representa como um supercondutor (já que o QDMf nada mais é do que a dualização desse primeiro modelo).

### O papel do operador de aresta

Entretanto, existe pelo menos dois pontos que parecem ruir qualquer chance de termos uma dualidade plena entre um QDMv e um QDMf. E o primeiro deles é o simples fato de que, como  $f$  é um homomorfismo, não somos capazes de construir um QDMf com  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_3$  que seja diferente de um “trivial”, conforme já bem observamos entre as páginas 179 e 181. Falaremos mais sobre isso daqui a pouco, já que as coisas que se envolvem com esses homomorfismos também merecem um destaque no que tange a degenerescência dos estados fundamentais de um QDMf.

Já o segundo ponto que podemos apontar nesta aparente “ruína” está diretamente relacionado para com a definição dos operadores de aresta de ambos os modelos: afinal de contas, enquanto o operador de aresta  $C_j^{(G_1, G_2)}$  de um QDMv se comporta como um comparador (ou seja, como um operador que é capaz de verificar o quão alinhados estão dois campos de matéria adjacentes), o operador de aresta  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  de um QDMf parece fazer alguma coisa que está bem longe de ser uma comparação, e que mais se assemelha com uma espécie de transformação de calibre.

Embora não seja nada incorreto pensar que este operador  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  possa estar associado a algum tipo de transformação de calibre, uma das melhores maneiras de entendermos o que ele realmente faz é verificando como ele age sobre uma base diagonal. E, para isso, além de termos em mente que

$$D_j | \tilde{\alpha}, g, \tilde{\beta} \rangle = \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\tilde{\kappa} \in \tilde{G}_2} | \tilde{\alpha} * \tilde{\kappa}, f(\tilde{\kappa}) \cdot g, \tilde{\kappa}^{-1} * \tilde{\beta} \rangle, \quad (9.25)$$

precisamos lembrar que essa base diagonal só pode ser obtida através de transformações unitárias

$$\begin{aligned} | \tilde{\alpha}_j \rangle &= U_j^{(p)} | \alpha^* \rangle = \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\tilde{\alpha} \in \tilde{G}_2} \tilde{\chi}_j(\tilde{\alpha}) | \tilde{\alpha} \rangle \quad \text{e} \\ | g_k \rangle &= U_k^{(j)} | g \rangle = \frac{1}{|G_1|} \sum_{g \in G_1} \omega_k(g^{-1}) | g \rangle, \end{aligned} \quad (9.26)$$

onde  $\omega_k(g)$  e  $\tilde{\chi}_j(\tilde{\alpha})$  são os respectivos caracteres que estão relacionados às representações dos grupos  $G_1$  e  $\tilde{G}_2$ . Afinal, como a substituição das expressões (9.26) em (9.25) já consegue nos



mostrar que

$$\begin{aligned} D_j | \tilde{\alpha}_j, g_k, \tilde{\beta}_l \rangle &= \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\tilde{\kappa} \in \tilde{G}_2} \chi_j(\tilde{\kappa}) \omega_k(f(\tilde{\kappa})) \bar{\chi}_l(\tilde{\kappa}) | \tilde{\alpha}_j, g_k, \tilde{\beta}_l \rangle \\ &= \frac{1}{|\tilde{G}_2|^2} \sum_{\kappa \in \tilde{G}_2} [\widehat{\omega_k \circ f}](\tilde{\kappa}) \sum_{\tilde{\kappa} \in \tilde{G}_2} \chi_j(\tilde{\kappa}) \bar{\chi}_l(\tilde{\kappa}) \bar{\chi}_\kappa(\tilde{\kappa}) | \tilde{\alpha}_j, g_k, \tilde{\beta}_l \rangle, \end{aligned} \quad (9.27)$$

onde  $\widehat{\omega_k \circ f}$  é a transformada de Fourier de  $\omega_k \circ f$  [95], é o fato dos caracteres do último somatório serem tais que

$$\chi_j(\tilde{\kappa}) \bar{\chi}_l(\tilde{\kappa}) = \chi_{\{j,l\}}(\tilde{\kappa})$$

que nos mostra que

$$\begin{aligned} D_j | \tilde{\alpha}_j, g_k, \tilde{\beta}_l \rangle &= \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\kappa \in \tilde{G}_2} [\widehat{\omega_k \circ f}](\tilde{\kappa}) \left( \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\tilde{\kappa} \in \tilde{G}_2} \chi_{\{j,l\}}(\tilde{\kappa}) \bar{\chi}_\kappa(\tilde{\kappa}) \right) | \tilde{\alpha}_j, g_k, \tilde{\beta}_l \rangle \\ &= \frac{1}{|\tilde{G}_2|} \sum_{\kappa \in \tilde{G}_2} [\widehat{\omega_k \circ f}](\tilde{\kappa}) \delta(\chi_{\{j,l\}}, \chi_\kappa) | \tilde{\alpha}_j, g_k, \tilde{\beta}_l \rangle = [\widehat{\omega_k \circ f}](\{j,l\}) | \tilde{\alpha}_j, g_k, \tilde{\beta}_l \rangle. \end{aligned}$$

Nestes termos, apesar da forma exata do índice  $\{j,l\}$  depender da natureza do grupo  $\tilde{G}_2$  (nos casos mais gerais), é possível concluir que o operador de aresta também pode ser visto como um operador que compara os campos de matéria, mas que faz isso de um jeito diferente que só transparece quando ele atua sobre uma base diagonal: e esse jeito diferente se apoia sobre a *dualidade de Pontryagin*, que garante que existe uma correspondência “um-para-um” entre os caracteres  $\chi_j$  e os elementos de  $\tilde{G}_2$  [96].

### Sobre a degenerescência do estado fundamental

Todavia, antes de finalmente encerrarmos este capítulo, é imprescindível fazermos um último destaque que também parece botar em cheque a dualidade plena deste modelo em relação ao QDMv: a degenerescência do seu estado fundamental. E, de acordo com o que foi discutido ao final do capítulo anterior, um QDMv é um modelo cuja degenerescência do seu estado fundamental *parece* não mais depender da topologia onde o seu sistema está definido. Afinal de contas,

- a inserção de novos vetores aos vértices de uma  $\mathcal{R}_2$  que já abriga um QDM
- *mais* a presença do somatório (8.75) no seu Hamiltoniano (8.1), com operadores que conseguem medir o quão alinhados esses novos campos estão,

faz com que uma ordem topológica (que, no QDM, é moderada pelos elementos do grupo fundamental  $\pi_1(\mathcal{M}_2)$  que está associado à variedade  $\mathcal{M}_2$  que  $\mathcal{R}_2$  discretiza) dê lugar a uma espécie de ordem algébrica no que se refere às distintas fases que o sistema assim definido pode apresentar num regime de baixas energias. E, no caso, a quantidade  $\mathfrak{d}_{\text{QDM}_V}$  destas fases (ou seja, o grau de degenerescência do estado fundamental) nada mais é do que o número de ciclos algébricos que a ação (8.9), que conecta os campos de calibre aos novos de matéria, permite definir.

Tudo bem que a razão de toda a ênfase que demos ao termo “parece” no último parágrafo já está bem clara desde o final do capítulo anterior. Pois, apesar de  $\mathfrak{d}_{\text{QDM}_V}$  não estar mais em função do grupo  $\pi_1(\mathcal{M}_2)$ , a ordem topológica deste modelo se justifica em termos do segundo grupo de homologia  $\mathcal{H}_2(\mathcal{M}_2)$ , o que só transparece quando consideramos situações mais gerais que transcendem, por exemplo, ao que afirma o **Teorema 5** que foi enunciado na página 165. Contudo, diante de tudo o que foi observado para o QDMf que acabamos de apresentar, algo que não é difícil de se perceber é que o grau de degenerescência dos estados fundamentais  $\mathfrak{d}_{\text{QDM}_f}$  deste modelo depende de coisas bem distintas quando comparado com  $\mathfrak{d}_{\text{QDM}_V}$ . Afinal, se, de um lado, vemos que as quasipartículas  $m^h$  que foram herdadas do QDM continuam sendo transportáveis sem causar qualquer custo energético ao sistema e, do outro, temos autoestados de vácuo sendo moderados por elementos que pertencem ao núcleo do homomorfismo  $f$ , é imediato concluir que  $\mathfrak{d}_{\text{QDM}_f}$  precisa se identificar como algo que dependa de dois fatores:

- de uma degenerescência que decorre da topologia e que, assim como acontece no QDM, está associada às curvas fechadas e não contráteis da variedade bidimensional  $\mathcal{M}_2$  sobre a qual o sistema está definido; e
- de um outro, que segue da degenerescência algébrica que o núcleo de  $f$  mostra existir.

Aliás, em relação a essa degenerescência algébrica, algo que já podemos afirmar é que ela é dada por

$$\mathfrak{d}_{\text{alg}} = |\text{Ker } f| \quad ,$$

já que todos os elementos que pertencem ao núcleo de  $f$  fazem com que a “falsa holonomia”

$$h' = f(\tilde{\gamma})ab^{-1}c^{-1}d = f(\tilde{\gamma})h \quad ,$$

que é medida pelo operador de face que foi definido pela Figura 9.3, realmente corresponda à verdadeira  $h$ . E, diante disso, cabe fazer uma observação muito importante que se baseia na seguinte

proposição, cuja prova consta em [97]:

**Proposição 1** *Todo homomorfismo  $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n$  é completamente determinado por*

$$f([x]) = [kx] \quad , \quad (9.28)$$

onde  $k$  é um número natural que assume valores distintos de zero se, e somente se,  $n$  for um número natural divisível pelos distintos  $km$  não nulos.

E a importância desta observação se desdobra em duas partes onde, a primeira delas, já está muito bem clara desde o **Exemplo 2**: qualquer QDMf que se valha destes dois grupos Abelianos  $\mathbb{Z}_m$  e  $\mathbb{Z}_n$  onde  $m$  e  $n$  são dois primos entre si, sempre corresponderá a um modelo cuja degenerescência algébrica é *máxima*, já que todos os seus elementos pertencem ao núcleo de  $f$ . Por se dizer, ao notarmos que a única coisa que difere estes modelos (que são construídos através de um homomorfismo onde  $k = 0$ ) de um QDM decorre das transformações que o operador  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  é capaz de fazer, é justamente este resultado que nos mostra como um princípio de correspondência se completa entre os modelos que apresentamos neste capítulo e os que foram apresentados no Capítulo 6: afinal de contas, um QDM pode ser perfeitamente identificado como um QDMf que adota um  $\tilde{G}_2$  que contém apenas o elemento identidade, já que, nesta situação, temos

$$\begin{aligned} H_{\text{QDMf}} &= - \sum_v A_v^{(G_1, e)} - \sum_p B_p^{(G_1, e)} - \sum_j D_j^{(G_1, e)} \\ &= - \sum_v A_v^{(G_1)} - \sum_p B_p^{(G_1)} - \sum_j \mathbb{1}_j = H_{\text{QDM}} + \text{cte} \quad . \end{aligned}$$

Já o segundo desdobramento que segue desta expressão geral (9.28) está relacionado às situações onde  $m$  e  $n$  não são dois primos entre si. Pois, como o número zero não será o único divisor de  $m$  e  $n$  nestas situações, teremos mais opções para definir esse homomorfismo entre  $\mathbb{Z}_m$  e  $\mathbb{Z}_n$  do que só aquela põe todos os elementos de  $\mathbb{Z}_m$  no núcleo de  $f$ . E como a quantidade desses homomorfismos é exatamente igual a quantidade de modelos que podem ser definidos, isso acaba nos dizendo duas coisas:

- que um QDMf que se vale dos grupos Abelianos  $G_1 = \mathbb{Z}_m$  e  $\tilde{G}_1 = \mathbb{Z}_n$  pode ser classificado em termos de uma tripla ordenada  $(m, n, k)$ , e
- que a degenerescência algébrica de um QDMf vai diminuindo a medida que os diferentes

números  $k$ , que fazem com que  $km$  seja um divisor de  $n$ , vai aumentando.

No caso desta classificação, todos os modelos indexados por  $(m, n, 0)$ , por exemplo, são aqueles cujas quasipartículas que foram herdadas do QDM não apresentam quaisquer características de confinamento.

É claro que, neste ponto o leitor deve estar notando que, quando ignoramos todas as considerações topológicas que podem estar associadas à variedade sobre a qual este QDMf está definido, essa degenerescência algébrica é compatível com o número de autoestados de vácuo dos exemplos que apresentamos, exceto num deles: no QDMf que adota  $G_1 = \mathbb{Z}_4$  e  $\tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$ . Logo, diante dessa constatação, certamente o leitor deve estar se perguntando: por que isso acontece? E a resposta desta questão é simples: isso acontece porque, a medida que a ordem do grupo de calibre  $\mathbb{Z}_n$  cresce, a liberdade que temos para definir novos autoestados de vácuo também cresce com um fator  $|\mathbb{Z}_n / \text{Im } f|$ . E porquê esse fator tem que se identificar com a cardinalidade de um  $\mathbb{Z}_n$  *quocientado* pela imagem de  $f$ ? Porque, nos casos onde o núcleo de  $f$  não se indentifica com  $\mathbb{Z}_m$ , as quasipartículas  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  se comportam efetivamente como os mesmos monopólos que são criados aos pares, os quais identificamos como quasipartículas  $m^h$ ; ou seja, a influência de  $\tilde{Q}^{(J,K)}$  no cômputo dos diferentes autoestados de vácuo que são produzidos apenas pela estrutura de calibre precisa ser descartada. Nestes termos, a degenerescência total de um QDMf de classe  $(m, n, k)$ , que é definido sobre uma  $\mathcal{M}_2$  que é isomórfica a uma bola ou a um plano infinito, por exemplo, fica dada por [30]

$$d_{\text{QDMf}}^{(m,n,k)} = |\ker f_k| \cdot |\mathbb{Z}_n / \text{Im } f_k| \quad ,$$

onde  $f_k : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n$  é o  $k$ -ésimo homomorfismo já definido em (9.28).

## **Parte IV**

# **Análise final**



## Capítulo 10

# Um comentário de categoria

### 10.1 Um último prelúdio

Embora os modelos do capítulo anterior tenham sido construídos seguindo um processo de “dualização”, tudo leva a crer que, já que todas essas construções se fundamentam pela simples inserção de novos elementos aos “Quantum Double Models” (QDMf), *parece* não existir qualquer tipo de impedimento para que todas elas pudessem ser feitas sem esse artifício da “dualização”. Contudo, é justamente diante desta constatação, que parece ser bem simples, que surgem alguns questionamentos bastante relevantes. Afinal de contas, será que alguma das outras maneiras que poderíamos ter usado para construir um QDMf traria os mesmos resultados? Será que ela seria mais completa em algum sentido? Ou melhor: será que existe alguma maneira de concebermos os mesmos modelos do Capítulo 9 usando um ponto de vista diferente?

Apesar de parecer bastante “ingênuo” o que iremos falar agora, uma das boas pistas que temos para começar a responder a esses questionamentos surge a partir da constatação de que esta “dualização” se completa com o uso de um homomorfismo  $f$  que

- relaciona os elementos de um grupo  $\tilde{G}_2$ , que modela os vetores que estão dispostos sobre as *faces* de uma rede bidimensional  $\mathcal{R}_2$ ,
- aos elementos de um grupo  $G_1$ , que indexa os vetores que estão associados às *arestas* da mesma rede.

E o que caracteriza explicitamente esta suposta “ingenuidade” é o simples fato de que existe a possibilidade de vermos este homomorfismo como aquele que, por exemplo, define um *módulo cruzado*: ou seja, um homomorfismo que, junto com uma ação  $\triangleright : G_1 \times \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_2$ , respeita duas

condições

$$f(g \triangleright \tilde{\alpha}) = g f(\tilde{\alpha}) g^{-1} \quad \text{e} \quad f(\tilde{\alpha}) \triangleright \tilde{\beta} = \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \tilde{\alpha}^{-1} \quad , \quad (10.1)$$

onde a segunda delas é conhecida como a *condição de Peiffer* [98, 99].

É claro que os homomorfismos que definem os modelos “duais” que foram apresentados no capítulo anterior, por exemplo, satisfazem estas duas condições quando esta ação é trivial, haja vista que toda a Abelianicidade dos seus grupos  $G_1$  e  $\tilde{G}_2$  implica em

$$f(g \triangleright \tilde{\alpha}) = f(\tilde{\alpha}) \quad \text{e} \quad f(\tilde{\alpha}) \triangleright \tilde{\beta} = \tilde{\beta} \quad . \quad (10.2)$$

E como é exatamente esta a observação que parece ser bastante “ingênua”, a pergunta que não quer calar é: qual a vantagem que surge se realmente realizarmos  $f$  como o homomorfismo que completa um módulo cruzado?

Certamente o leitor mais atento a tudo que fizemos ao longo destas notas pode perfeitamente responder que realizar  $f$  como tal homomorfismo nos leva a uma nova generalização, onde um QDMf pode ser recuperado como um caso particular de um modelo mais geral, em respeito ao mesmo princípio da correspondência que permite recuperar um QDM como um caso particular tanto de um QDMf como de um QDMv. E certamente o leitor que responde a este questionamento, usando esta linha de raciocínio, não está errado. Entretanto, conforme ficará bem claro do que diremos nas próximas linhas, existe um “algo a mais” que está por trás desta realização; e esse “algo a mais” pode ser muito bem entendido à luz das chamadas *teorias de calibre discretas com ordem alta* (HLGT)<sup>1</sup> [100].

## 10.2 Teorias de calibre com ordem alta

Aliás, a melhor maneira de entendermos o que são essas teorias de calibre discretas com “ordem alta” é desmontando o termo: ou seja, analisando por partes o que significa dizer (i) que uma teoria discreta é “de calibre” e (ii) que ela possui uma “ordem alta”. E, como a primeira parte deste entendimento parece já ter sido bem feita ao longo do Capítulo 2, a única coisa que parece realmente faltar é entender o porquê do predicado “ordem alta”.

Embora, para alguns, não pareça ser muito esperado realizar conexões entre a Física (que é

---

<sup>1</sup>Aqui, daremos predileção para a sigla “HLGT” pois, em inglês, todas essas teorias de calibre com ordem alta são conhecidas como “higher lattice gauge theories”.



uma Ciência que, apesar das suas diversas teorias, possui uma base que é completamente experimental) e aquilo que define uma das partes mais abstratas da Matemática (a qual, conforme já bem dissemos, não possui qualquer compromisso para com a realidade que nos cerca), o grande motivo que fundamenta o uso do predicado “ordem alta” nestas teorias de calibre discretas é um só: essas teorias se valem de toda uma estrutura que é oferecida pela *teoria das categorias* [101], mais especificamente por aquelas *categorias* que são consideradas como de “ordem alta”. E, para entender como tudo isso funciona, é muito importante termos em mente o que é uma categoria.

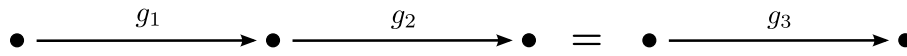
### 10.2.1 O que é uma categoria?

Em linhas bem gerais, podemos dizer que uma categoria nada mais é do que uma espécie de abstração do conceito de conjunto: ou seja, nela os grandes protagonistas não são vistos simplesmente como conjuntos, mas como *objetos* que se relacionam uns com os outros através de *morfismos*. Só que, apesar de ser perfeitamente possível fazer um paralelismo entre

- esses objetos e todos os seus morfismos e
- conjuntos e todas as funções que podem ser estabelecidas entre eles,

uma vez que conjuntos realmente se enquadram como os objetos de uma categoria, o nível de abstração por trás da definição de uma categoria é tão maior que, por exemplo, os próprios morfismos que definem uma categoria também podem ser perfeitamente interpretados como os objetos de uma outra categoria: no caso, como os objetos de uma *2-categoria*, os quais se relacionam, uns com os outros, por meio de novos morfismos. E como é todo esse processo recursivo que acaba permitindo definir uma *n-categoria* (ou seja, uma categoria com ordem  $n$ , onde os seus objetos podem ser interpretados como os morfismos de uma categoria com ordem  $n - 1$ ) de uma forma bastante natural, é exatamente ele que nos leva à definição de uma categoria com ordem alta: em outras palavras, à definição de uma categoria que entre os seus objetos estão os morfismos de uma outra categoria, que entre os seus objetos estão os morfismos de uma outra categoria, e assim por diante.

É claro que o nosso objetivo aqui não é o de passar ao leitor todos os pormenores que se envolvem para com a teoria das categorias, tenham elas uma ordem alta ou não. Contudo, é quando olhamos para uma *2-categoria*, mais especificamente para a teoria de calibre discreta com ordem 2 (2-LGTs) que essa *2-categoria* permite definir, é que começa a ficar bem clara a conexão



**Figura 10.1:** Diagramas relacionados à definição de uma categoria, onde os pontos que os compõem correspondem aos objetos desta categoria, enquanto as flechas que existem entre eles se referem aos seus possíveis morfismos. No caso do diagrama à esquerda, ele representa uma composição: ou seja, uma situação onde o objeto que funciona como *alvo* (ponto central) para o morfismo  $g_1$  serve como *fonte* para o morfismo  $g_2$ . Assim, como a composição  $g_1 \cdot g_2$  entre morfismos equivale a um novo morfismo  $g_3$ , vemos que o diagrama à direita equivale ao primeiro.

disso tudo para com o nosso QDMf. Pois, como a melhor maneira de entendermos o que é uma categoria é através do ponto de vista diagramático que consta na Figura 10.1, onde

- cada um dos seus pontos corresponde a um objeto, e
- cada uma das suas setas representa um morfismo que existe entre dois objetos,

uma 2-categoria pode ser perfeitamente entendida através dos diagramas que constam na Figura 10.2, os quais contam com um ingrediente a mais:

- com as *setas duplas*, que correspondem aos morfismos que são responsáveis por relacionar dois dos morfismos anteriores, que são representados pelas primeiras setas e que, numa 2-categoria, devem ser tratados como objetos.

E são exatamente esses diagramas que começam a apontar para uma realidade que é bastante familiar. Afinal, como

- entre todos esses morfismos (tanto os relacionados às setas simples como às setas duplas) existem aqueles que são vistos como *identidades*, e
- todos os morfismos que definem uma 2-categoria seguem as regras de composição da Figura 10.3, as quais são expressas algebricamente como

$$(\tilde{\alpha}_1 \circ_v \tilde{\alpha}'_1) \circ_h (\tilde{\alpha}_2 \circ_v \tilde{\alpha}'_2) = (\tilde{\alpha}_1 \circ_h \tilde{\alpha}_2) \circ_v (\tilde{\alpha}'_1 \circ_h \tilde{\alpha}'_2) \quad ,$$

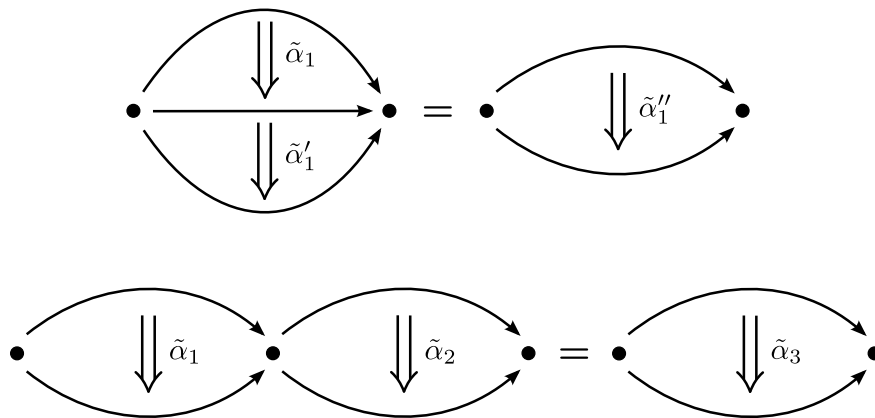
onde  $\circ_h$  e  $\circ_v$  são os dois *funtores* que são responsáveis pelas composições horizontais e verticais respectivamente,

é diante do fato da Figura 10.1 nos mostrar que esses morfismos identidades também podem ser vistos como uma composição entre outros morfismos que fica bem clara toda a similaridade entre a composição que define uma 2-categoria e a da que, por exemplo, se envolve para com os campos das teorias de calibre discretas apresentadas no Capítulo 2. Mas, para que isso se torne evidente, precisamos considerar uma situação bem particular, onde todos esses morfismos são elementos de um grupo: ou seja, uma situação onde todos os morfismos, que são representados pelas setas simples, são elementos de um grupo  $G_1$ , enquanto todos os que são representados por setas duplas pertencem a um grupo  $\tilde{G}_2$ ; afinal de contas, vale notar que grupos e todos os seus homomorfismos realmente configuram um bom exemplo de categoria [102].

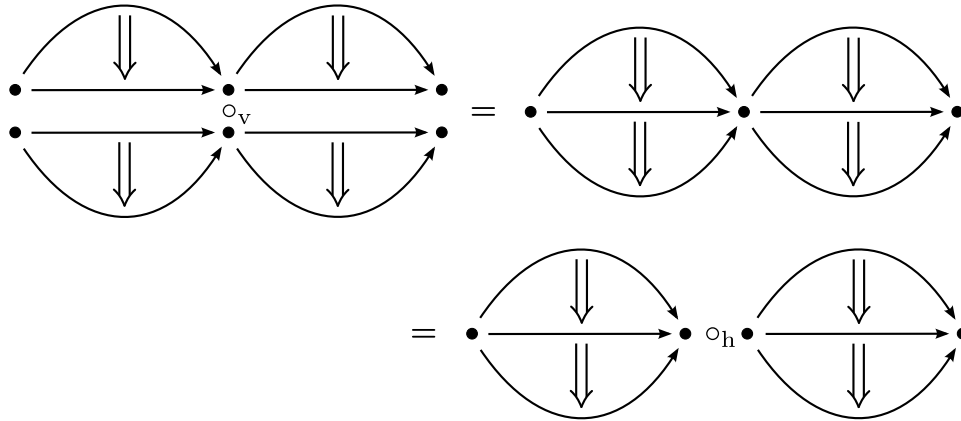
### 10.2.2 Teorias de calibre com ordem dois

Aliás, é justamente neste ponto, onde o leitor talvez esteja se perguntando sobre o porquê de darmos exatamente os mesmos rótulos (que já são usados nos grupos que definem o QDMf) aos grupos que reúnem os morfismos desta nossa 2-categoria, que vale dizer uma coisa: esta rotulação é *proposital*. Afinal de contas, além dela realçar ainda mais toda essa similaridade que existe entre as duas composições que acabamos de mencionar, é ela quem completa a definição de uma 2-LGT

- através da concatenação dos diagramas que descrevem uma 2-categoria à discretização de



**Figura 10.2:** Diagramas que estão relacionados à definição de uma 2-categoria. No caso do que está disposto acima, ele se refere à composição vertical  $\tilde{\alpha}''_1 = \tilde{\alpha}_1 \circ_v \tilde{\alpha}'_1$  de dois morfismos  $\tilde{\alpha}_1$  e  $\tilde{\alpha}'_1$  que adotam os morfismos que são representados pelas setas simples como objetos. Já no caso do diagrama inferior, temos uma composição inteiramente análoga  $\tilde{\alpha}_3 = \tilde{\alpha}_1 \circ_h \tilde{\alpha}_2$ , só que horizontal. Note que neste, e em todos os diagramas que virão adiante, todas as flechas e as suas composições seguem uma mesma orientação que fazem com elas tenham fonte e alvo em comuns: esta é uma condição essencial à definição diagramática de uma categoria, seja qual for a sua ordem.



**Figura 10.3:** Esquema de composição dos diagramas de uma 2-categoria que já foram apresentados na Figura 10.2. Embora a mesma indexação dos diagramas anteriores possa ser necessária, preferimos dispensá-la para priorizar uma maior inteligibilidade.

uma variedade tridimensional feita em termos de simplexos, conforme bem ilustra a Figura 10.5,

- considerando que os morfismos que definem  $G_1$  correspondem aos campos de calibre que indexam as arestas deste simplexo, enquanto os que definem  $\tilde{G}_2$ , e que também devem ser vistos como novos campos de calibre, indexam as suas faces.

Ou seja, uma 2-LGT pode ser interpretada como aquela que comporta dois tipos de transformações de calibre: uma, que pode ser feita sobre os elementos de  $G_1$  que foram acomodados sobre as arestas; e outra, que se envolve apenas para com os elementos de  $\tilde{G}_2$  que estão dispostos sobre as faces.

No entanto, é importante lembrar que, à luz de tudo o que já foi dito no Capítulo 2, um dos ingredientes que são essenciais à descrição de uma teoria de calibre diz respeito às holonomias, uma vez que são elas quem caracterizam a variedade sobre a qual o sistema está definido. Só que, no caso destas 2-LGTs, nós temos dois tipos de holonomia que permitem fazer toda essa

$$\begin{array}{ccc}
 \xrightarrow{g} & = & \xleftarrow{g^{-1}} \\
 \Downarrow \tilde{\alpha} & = & \Uparrow \tilde{\alpha}^{-1}
 \end{array}$$

**Figura 10.4:** Convenção relacionada à indexação das flechas simples e duplas que estão presentes nos diagramas que descrevem uma 2-categoria.

caracterização; e uma delas, por exemplo, é a *1-holonomia* que, no caso da mesma face da Figura 10.5, por ser definida como um produto [103]

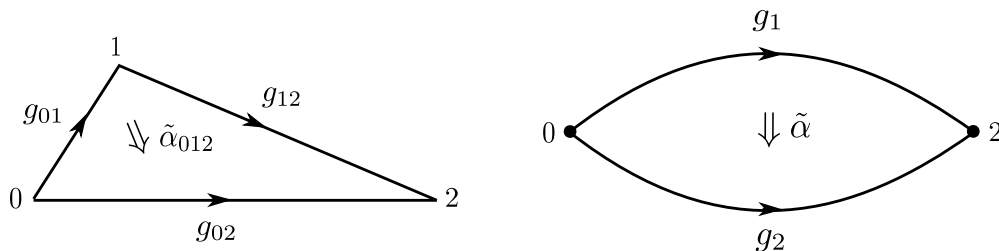
$$h_1 = f(\tilde{\alpha}) g_1 g_2^{-1} \tag{10.3}$$

que se envolve com os elementos de  $G_1$  que foram atribuídos às arestas, se parece muito com a definição de holonomia (2.12) que já foi dada no início destas notas. Diga-se de passagem, o produto

$$h = g_1 g_2^{-1}$$

que define (10.3) é realmente a mesma holonomia (2.12) que já definimos no Capítulo 2. E é justamente com base nesta constatação que precisamos destacar a coisa que certamente é a mais importante dentro do contexto que nos sugere enxergar  $f$  como o homomorfismo que completa um módulo cruzado:  $h_1$  é *exatamente* a mesma “falsa holonomia” que, além de já ter sido apresentada na página 192, aparece na definição dos operadores de face do QDMf, cujas componentes foram apresentadas na Figura 9.3.

Tudo bem que, no caso do QDMf, a interpretação que fazemos sobre os elementos que foram adicionados às faces de um QDM é a de que eles devem ser vistos como campos de “matéria”, enquanto que, no caso de uma 2-LGT, esses mesmos elementos devem ser considerados como novos campos de calibre. Todavia, apesar desses dois tipos elementos se referirem a duas coisas que parecem ser bastante distintas nestes dois modelos, é quando olhamos para a definição dos operadores de aresta  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  do QDMf que uma segunda coisa, que também é muito importante à contextualização do que nos trouxe até aqui, precisa ser mencionada: estes operadores  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  são justamente os operadores que nos permitem definir uma das transformações de calibre que



**Figura 10.5:** À esquerda temos a face de um tetraedro que está relacionado à discretização de uma variedade tridimensional, cujas arestas são indexadas por elementos do grupo  $G_1$ , enquanto a sua face é indexada por um elemento  $\tilde{\alpha}_{012}$  do grupo  $\tilde{G}_2$ . Já a direita, temos o diagrama que representa essa mesma face, onde  $g_1 = g_{01} \cdot g_{12}$ ,  $g_2 = g_{02}$  e  $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_{012}$ .

caracterizam uma 2-LGT, transformação essa que se envolve para com os elementos de  $\tilde{G}_2$  que indexam as faces do complexo simplicial.

### O que é a 2-holonomia?

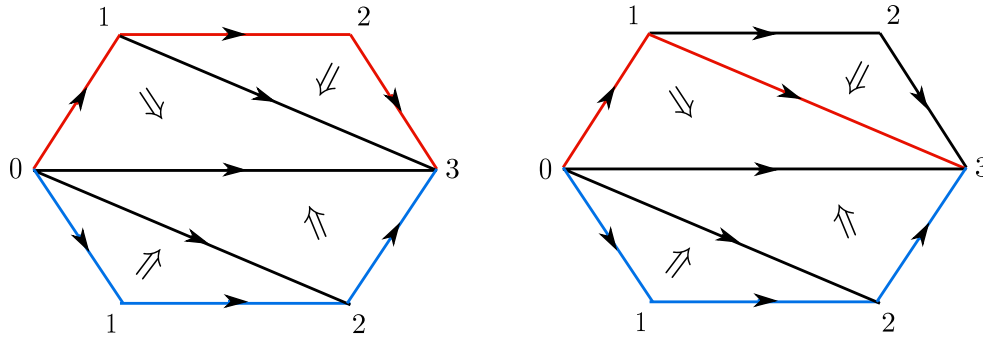
Aliás, já que uma transformação de calibre é, por definição, aquela que não altera o valor de uma holonomia, a melhor maneira de entendermos como todas as transformações de calibre que estão relacionadas às 2-LGTs funcionam é entendendo todas as suas holonomias. E como a 1-holonomia já foi definida em (10.3), só nos resta definir e bem entender a sua *2-holonomia*. E a melhor maneira de fazermos isso é apelando para a mesma perspectiva geométrica com que já vemos a primeira: afinal, da mesma maneira que uma 1-holonomia pode ser vista à luz do *transporte paralelo* de uma estrutura puntual ao longo de uma curva fechada, uma 2-holonomia, que também é definida em termos de um produto entre elementos de  $\tilde{G}_2$ , também pode ser vista assim, só que [104]

- como o transporte paralelo de uma estrutura que agora se identifica como uma curva,
- ao longo de uma superfície que agora deve ser fechada nos extremos que caracterizam o retorno dessa última curva à sua posição inicial.

Ou seja, apesar de ser perfeitamente válido afirmar que essa 2-holonomia consegue caracterizar o quão plana uma superfície é pela perspectiva da curva que está sendo transportada sobre ela, é importante notar que a sua definição só pode ser feita para uma situação que se envolve para com alguma superfície bidimensional fechada, como é o caso da superfície de um tetraedro que discretiza uma variedade tridimensional.

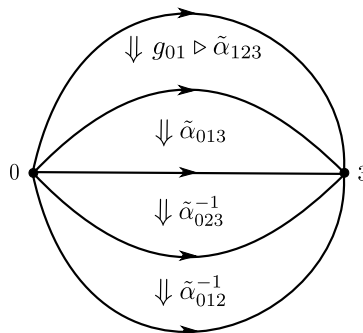
Diga-se de passagem, se notarmos que uma união de arestas que possui vértices em comum pode ser vista como a discretização de uma curva, uma das boas maneiras de pensarmos neste transporte é realmente tomando a situação particular de um tetraedro, onde a união de algumas das arestas que o definem pode ser considerada como a discretização de uma curva. Afinal de contas, do mesmo jeito que o transporte de uma estrutura puntual ao longo do bordo de uma das suas faces consegue bem definir uma 1-holonomia, é o transporte de uma destas curvas discretizadas ao longo da sua superfície fechada que permite bem definir a sua 2-holonomia.

Considerando que esta é realmente a 2-holonomia que queremos avaliar, a melhor maneira de fazermos isso é voltando as nossas atenções para o tetraedro aberto que aparece na Figura



**Figura 10.6:** À esquerda temos um tetraedro aberto: ou seja, uma figura bidimensional que, quando colada pelos lados que estão destacados em azul e vermelho (unindo os pontos indexados com o mesmo número), estrutura um tetraedro. A vantagem de lidar com este tetraedro aberto está relacionada à possibilidade de entender, passo a passo, como se dá o transporte de uma corda (em vermelho), que está presa entre as extremidades indexadas por “0” e “3”, até ela chegar à sua posição final (em azul).

10.6, assumindo que a curva que será transportada é aquela que está posicionada sobre o caminho destacado em vermelho. Aliás, de acordo com esta figura, transportar esta curva a ponto dela retornar à sua posição inicial (ou seja, a ponto dela se sobrepor novamente ao mesmo caminho de onde ela saiu e que está destacado em vermelho) significa realizar deformações consecutivas que, de alguma maneira, vão depender dos elementos que indexam as faces deste tetraedro por onde esta curva passou. E se pensarmos nesta situação de uma maneira bem lúdica, dando a esta mesma curva (que está sob transporte) propriedades “elásticas”, como todas essas deformações podem ser vistas como reencaixes sucessivos (como o primeiro que aparece à direita na mesma figura), acaba ficando bem claro que todas essas deformações podem ser interpretadas à luz de uma *homotopia* [49]: no caso, à luz de um processo que é capaz de nos mostrar, por exemplo, que a curva que se encaixa sobre o caminho que está destacado em vermelho é *homotopicamente equivalente* àquela que se encaixa sobre um outro caminho que está destacado em azul. Nestes termos, devido à concatenação de diagramas que já foi mencionada na Figura 10.5, fica claro que a 2-holonomia deste mesmo tetraedro, que pode ser representado pelo diagrama



é dada por

$$h_2 = (g_{01} \triangleright \tilde{\alpha}_{123}) * \tilde{\alpha}_{013} * \tilde{\alpha}_{023}^{-1} * \tilde{\alpha}_{012}^{-1} , \quad (10.4)$$

a qual é preservada sob as transformações de calibre que são realizadas pelo operador

$$A_v^D = \prod_{j \in S_v} D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)} \quad (10.5)$$

cuja existência já havíamos adiantado.

### 10.3 Algumas observações

Aliás, é diante deste último resultado que o nosso comentário, sobre o fato dos operadores  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  definirem uma transformação de calibre, realmente se completa: ou seja, aquilo que já havíamos dito ao final do Capítulo 9, mais especificamente na sua página 190, sobre o fato de  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  fazer alguma coisa que mais parecia uma transformação de calibre, não estava realmente incorreto. E é exatamente isso que, juntamente com a constatação de que a 1-holonomia (10.3) é a mesma “falsa holonomia” que aparece nos operadores de face  $B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  do QDMf, nos permite afirmar uma das principais consequências do trabalho que acabamos de apresentar nestas notas: enxergar uma nova linha de investigação que adota toda a estrutura que é oferecida pela teoria das categorias como uma possibilidade real para construir novas generalizações do QDM. E é exatamente isso o que o nosso grupo de pesquisa vem começando a fazer, através de estudos iniciais que se valem de um Hamiltoniano como o

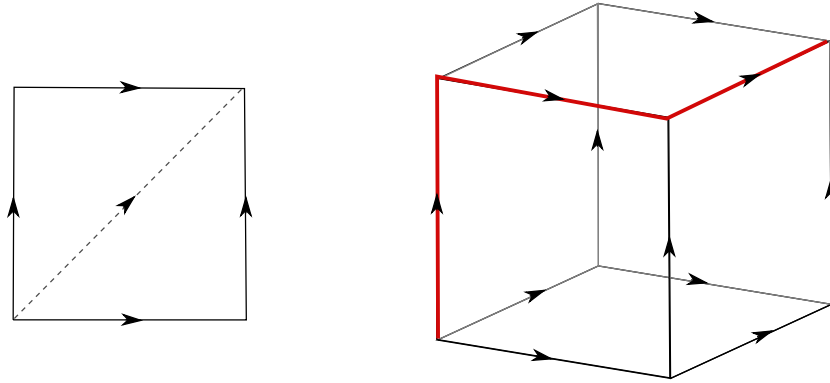
$$H_{2\text{-LGT}} = - \sum_v A_v^{(G_1, \tilde{G}_2)} \prod_{j \in S_v} D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)} - \sum_p B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)} , \quad (10.6)$$

onde o primeiro somatório corresponde à transformação de calibre total a qual o sistema está submetido.

Por se dizer, três coisas que já podemos afirmar sobre todos estes modelos é que:

- (i) se quisermos lidar com um modelo que, ao invés de uma variedade triangularizada, se vale de uma discretização cúbica ou quadrada, isso deve ser feito segundo o esquema que está bem ilustrado na Figura 10.7, onde todas as arestas paralelas envolvidas nestas discretizações devem ser orientadas no mesmo sentido;
- (ii) o resultado que segue da 1-holonomia que foi definida em (10.3) deve ser obrigatoriamente





**Figura 10.7:** Devido ao esquema de composição que está presente na Figura 10.5, a única maneira das faces de uma rede quadrada (com qualquer dimensão) ser associável aos diagramas que definem uma 2-categoria é se as suas arestas paralelas forem orientadas na mesma direção.

identificado como um elemento que pertence ao núcleo da ação  $\triangleright : G_1 \times \tilde{G}_2 \rightarrow \tilde{G}_2$ , quaisquer sejam os grupos  $G_1$  e  $\tilde{G}_2$  envolvidos; e

- (iii) assim como ocorre com o QDMf, todos esses modelos também podem ser classificados em termos de uma tripla ordenada  $(m, n, k)$ , quando  $G_1 = \mathbb{Z}_m$ ,  $\tilde{G}_1 = \mathbb{Z}_n$  e a ação é trivial, já que a degenerescência algébrica do seu estado fundamental também vai diminuindo a medida que os diferentes números  $k$  (que fazem com que  $km$  seja um divisor de  $n$ ) vai aumentando, o que só reforça toda a conectividade que existe entre estes modelos para com o QDMf.

No entanto, como todos esses três resultados constarão, de alguma maneira, na dissertação de mestrado e na tese de doutorado que estão sendo desenvolvidas respectivamente por R. C. de Almeida [105] e H. K. T. Mendonça [106], preferimos não apresentar todos os seus pormenores para não haver uma superposição entre os trabalhos do nosso grupo de pesquisa.



## Capítulo 11

### Conclusões e comentários

O objetivo central deste trabalho foi o de avaliar como a ordem topológica de dois modelos, que foram construídos como generalizações dos “Quantum Double Models” (QDMv), se comporta sob a hipótese de que os seus estados de base são indexados por grupos Abelianos. No caso da primeira generalização, que foi apresentada ao longo dos Capítulos 7 e 8, e que pode ser identificada como um QDM ao qual acrescentamos campos de matéria aos vértices da rede bidimensional que o comporta (QDMv), mostramos que essa ordem topológica decorre da dependência que o modelo apresenta em relação ao segundo grupo de homologia da variedade bidimensional sobre a qual ele está definido. Trata-se de uma dependência que transparece

- (i) através da expressão do grau de degenerescência do estado fundamental  $\mathfrak{d}_{\text{QDMv}}$ , quando o modelo é definido sobre uma união de variedades bidimensionais  $\cup_j \mathcal{M}_2^{(j)}$  *disjuntas*, ou
- (ii) pela presença de paredes de domínio, quando o mesmo modelo é definido sobre uma  $\cup_j \mathcal{M}_2^{(j)}$ , “duas a duas”, através de um único ponto.

É claro que não é só isso que pode ser dito a respeito desta primeira generalização. Afinal de contas, além de ter sido possível mostrar, por exemplo, que  $\mathfrak{d}_{\text{QDMv}}$  é uma função do número de ciclos que a ação define, também ficou muito claro que, entre as principais propriedades de um QDMv, temos:

- a interpretação do sistema como um diamagneto perfeito, devido à presença de um efeito Meissner que é capaz de justificar o confinamento das suas quasipartículas magnéticas;
- a existência de uma propriedade eletrostática entre as suas quasipartículas elétricas que é bastante similar à das partículas que compõem o modelo discreto de um gás de elétrons; e

- a presença de quasipartículas que apresentam regras de fusão não Abelianas em algumas situações bem específicas, que estão diretamente relacionadas à escolha de como os campos de calibre do QDMv agem sobre os de matéria.

Aliás, sobre essas regras de fusão não Abelianas, não podemos afirmar que elas, de fato, implicam na possibilidade de fazer do QDMv um modelo útil a uma computação quântica, ao menos nos moldes que ele foi definido: pois, além de estarmos diante de um modelo onde uma parte das quasipartículas, ao serem transportadas, elevam a energia do sistema (ou seja, quasipartículas que, ao serem permutadas sob o pretexto de avaliar as suas estatísticas, não definem um autoestado com a mesma energia do inicial), uma outra parte das quasipartículas (justamente as que se envolvem para com essa não Abelianicidade) não são transportáveis.

Entretanto, já que estamos falando sobre essas regras de fusão não Abelianas, passa a ser interessante fazer uma observação que não fizemos ao longo Capítulo 8. E essa observação se baseia no fato de que essas regras surgem apenas

- (i) quando a ação de um QDMv é representada por uma matriz bloco-diagonal, onde alguma das submatrizes que a compõem é uma matriz identidade, e, por consequência,
- (ii) da necessidade de fazermos com que seja possível ir de um autoestado de vácuo para outros.

Diga-se de passagem, é exatamente isso o que acontece com o **Exemplo 2**, que foi apresentado entre as páginas 127 e 141: afinal de contas, se o operador  $W^{(1,3)}$ , que cria a única quasipartícula que apresenta uma regra de fusão não Abeliana, não fosse inserido no modelo, seria *impossível* ir de um dos seus autoestados de vácuo para o outro. Só que, apesar do leitor, talvez, ter pensado por um momento que essas duas condições poderiam estar vinculadas a casos muito particulares (tal como o deste **Exemplo 2**), a observação que iremos fazer aqui é a seguinte: em *todos* os exemplos de QDMv, onde  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_m$  é tal que  $m > 2$ , sempre poderemos escolher uma ação que comporta essas duas condições. E a razão para afirmarmos isso é bem simples: pois, como a representação matricial da ação que define esse QDMv é uma *matriz de permutação* cujo quadrado é igual a identidade, *todos* os ciclos algébricos que ela descreve terão tamanhos iguais a 1 ou 2. Ou seja, a matriz que representa a ação do QDMv sempre poderá ser expressa bloco-diagonalmente, e os blocos que a compõem possuem tamanho 2 (e se identificam com a matriz de Pauli  $\sigma^x$ ) e tamanho 1 (se identificando simplesmente com o número 1).

Já em relação à segunda generalização, que apresentamos no Capítulo 9 e que foi construída a partir da dualização da primeira, alocando campos de matéria aos centroides das faces de uma rede bidimensional (QDMf), a maior parte das propriedades “físicas” que apontamos na página anterior também se faz presente em termos duais, exceto no que diz respeito à presença das regras de fusão não Abelianas. E, no caso desta ausência de regras não Abelianas, ela se justifica em termos

- da coação entre os grupos de matéria e de calibre, já que a sua definição se vale obrigatoriamente de um homomorfismo  $f$  cuja imagem pertence ao núcleo de  $G_1$ , e
- do operador de aresta que, por funcionar como uma espécie de transformação de calibre entre os elementos de um  $\tilde{G}_2$  que é Abeliano, possui uma expressão bem definida em termos dos operadores (6.11).

Colocando tudo em outras palavras, toda a Abelianicidade das regras de fusão do QDMf pode ser justificada nos mesmos termos daquela que está relacionada a um QDM que se apoia sobre um grupo de calibre Abeliano.

Em todo caso, além de toda essa Abelianicidade que bem caracteriza as regras de fusão do QDMf, vale destacar outras duas diferenças entre este modelo e um QDMv. E a primeira delas, por exemplo, diz respeito à interpretação que a presença de um efeito Meissner dual no QDMf nos permite fazer. Afinal, já que o confinamento de quasipartículas magnéticas no QDMv nos leva à interpretação de que o seu sistema funciona como um material que é, no mínimo, um diamagneto perfeito, o fato das quasipartículas confinadas no QDMf serem as elétricas nos faz entender que o seu sistema se comporta como um isolante elétrico: ou seja, como um material cujas cargas elétricas não conseguem se mover livremente, o que deixa “no ar” a sugestão de que o material que o QDMv caracteriza *pode* (apenas *pode*) ser um supercondutor, embora o próprio QDMv não nos dá elementos suficientes para demonstrarmos isso. Já a segunda diferença que vale destacar é que, como são as quasipartículas magnéticas que podem ser transportadas livremente no QDMf, este modelo apresenta a mesma dependência que o QDM no que diz respeito à degenerescência dos seus estados fundamentais: ou seja, ao contrário do que acontece com o QDMv, como essas quasipartículas magnéticas completam caminhos fechados que descrevem as classes de homotopia do grupo fundamental da variedade sobre a qual o QDMf está definido, a ordem topológica de um QDMf não é caracterizada pelo segundo grupo de homologia da variedade.

No entanto, devido a essa segunda diferença que acabamos de mencionar, vale notar que também foi possível demonstrar que a cardinalidade do núcleo do homomorfismo  $f$  de coação

entre os grupos de calibre  $\mathbb{Z}_n$  e de matéria  $\mathbb{Z}_m$  também tem um papel preponderante no cômputo de  $\mathfrak{d}_{\text{QDM}f}$ : afinal de contas, devido à expressão dos operadores de face, assim como à expressão (9.28) de todos os homomorfismos  $f : \mathbb{Z}_m \rightarrow \mathbb{Z}_n$  que podem ser definidos entre esses grupos, mostramos

- (i) que os diferentes autoestados de vácuo são indexados pelos diferentes elementos que pertencem ao núcleo de  $f$ , e
- (ii) que é perfeitamente possível classificar todos os modelos que se enquadram como um QDMf em função de uma tripla ordenada  $(m, n, k) \in \mathbb{N}^3$ , onde  $k$  é um número vai desde zero até a todos os demais que fazem de  $n$  um número divisível por  $km$ .

Aliás, nos casos onde, por exemplo,  $k = 0$ ,  $f$  é um homomorfismo trivial que, além de fazer com que a degenerescência algébrica do QDMf seja máxima, não faz deste modelo uma coisa mais interessante que o QDM, uma vez que os seus campos de calibre e de matéria são completamente “cegos” uns para os outros.

É claro que diversas outras coisas ainda podem ser feitas no que se refere às possíveis generalizações destes modelos. E uma delas, por exemplo, já foi muito bem discutida ao longo do capítulo anterior, de ficou clara toda uma conexão que existe entre o QDMf e modelos que podem ser definidos seja em termos de módulos cruzados ou com base no aparato que a teoria das categorias com ordem alta nos oferece. Por se dizer, é exatamente toda esta conexão que, por exemplo, nos propulsiona a tentar já entender os novos modelos, que designamos por 2-LGT e que se valem das categorias com ordem dois. E por quê ordem dois? Porquê, além dos operadores de aresta que definem um QDMf serem exatamente os mesmos operadores que definem uma transformação de calibre com ordem dois neste 2-LGT, as categorias com ordem dois ainda nos permitem encontrar uma razoabilidade física nestes novos modelos. Afinal de contas, já que estamos tão ambientados a olhar para as coisas que nos cercam por uma perspectiva quadridimensional (*três* dimensões espaciais e *uma* temporal), qual será o significado físico de uma generalização que pode ser construída com o uso de uma categoria com ordem alta, e qual será a sua conexão com tudo aquilo que é fisicamente experimentável?

É claro também que não podemos afirmar que os modelos que apresentamos nesta tese são físicos: assim como acontece com o QDM, até “segunda ordem” esses modelos devem ser vistos apenas como “toy models” que se prontificam à alguma causa futura. E dentro deste contexto, vale

mencionar que outras três extensões naturais dos modelos que acabamos de apresentar estão sendo desenvolvidas pela autora destas notas. Elas são:

- (a) a generalização tridimensional do QDM<sub>v</sub>, concomitantemente com a generalização de matéria do 3-DC, para avaliar o que mais pode surgir quando variedades com condições mais diversas são consideradas [28];
- (b) a caracterização do QDM quadridimensional em correspondência para com o QDM<sub>v</sub> tridimensional que acabou de ser mencionado no item anterior, haja vista toda a correspondência que já está bem clara entre o QDM tridimensional e o QDM<sub>v</sub> que apresentamos nestas notas; e
- (c) a construção de um modelo discreto autodual com matéria que, além de estar distribuída sobre os vértices e sobre as faces de uma rede bidimensional, interage apenas eletrostaticamente [107].

Aliás, em relação ao modelo que foi mencionado neste último item, por exemplo, os resultados que se envolvem para com os grupos  $G_1 = G_2 = \tilde{G}_2 = \mathbb{Z}_2$  já deixam claro que todo espectro de energia pode ser bem entendido em termos de agregados de quasipartículas: ou seja, se considerarmos que cada um dos níveis de energia deste modelo corresponde a uma situação onde um conjunto de quasipartículas apresenta a menor energia possível, essas quasipartículas se apresentam em forma de combinações que se assemelham com moléculas [107].

Já uma outra linha de generalização que é possível (e que foge um pouco do contexto destas notas, mas não completamente) é aquela que surge da constatação de que a Figura 8.8 (que aparece na página 165) nos ajuda a realizar que um monopólo elétrico possui exatamente a mesma energia que uma excitação que é composta pela combinação de quasipartículas magnéticas, as quais são confinadas. Afinal de contas, se fizermos um paralelismo desta situação com a constatação de que

- (i) monopólos elétricos existem na Natureza sob a forma de elétrons e
- (ii) quarks são partículas confinadas que, por exemplo, definem prótons,

caso seja possível encontrar uma maneira de transportar os monopólos elétricos de um QDM<sub>v</sub> através de um mecanismo que não se identifique com um de “teletransporte”, se abre a possibilidade de modelar um processo de decaimento beta nos mesmos moldes de um QDM<sub>v</sub> [108]. E,

por mais diferente que esta linha de investigação possa parecer, é bom frisar que algumas pesquisas já começaram a ser feitas no que tange a conexão de modelos topológicos para com a física de partículas, em especial para com a física de neutrinos [109]: ou seja, mais uma possibilidade, diante de tantas outras que certamente surgirão conectando Física à Topologia, ainda mais agora, depois do Prêmio Nobel que foi dado J. M. Kosterlitz, D. Haldane e D. Thouless no final em 2016 justamente por esta causa.



**Parte V**

**Apêndices**



## Apêndice A

### Diagramatização de Kuperberg

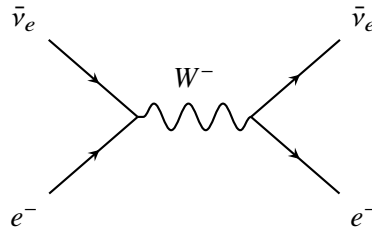
#### A.1 Considerações iniciais

Conforme é bem conhecido da literatura [39], uma das melhores maneiras de indicar como algumas aplicações  $f$  atuam sobre conjuntos arbitrários é através de um *diagrama*. E um bom exemplo de diagrama é aquele que relaciona dois conjuntos  $A$  e  $B$  através de uma simples seta, como é o caso de

$$A \xrightarrow{f} B \quad ,$$

deixando bem claro que existe uma certa correspondência  $f$  entre eles. Por se dizer, esse é exatamente um dos nomes que se dá para  $f$ : *correspondência*. E no caso dos dois conjuntos  $A$  e  $B$  envolvidos neste simples exemplo, o primeiro deles é conhecido como *domínio* enquanto o segundo iremos chamar propositalmente como *codomínio*. Afinal de contas, apesar do termo original dado, em português, para este último conjunto ser *contradomínio*, alguns fins didáticos (que só se tornarão claros mais adiante, mais especificamente no Apêndice B, Seção B.2) nos obriga a usar esta espécie de “licença poética” que a língua inglesa nos dá, uma vez que, nela, este mesmo conjunto  $B$  é denotado por “*codomain*”.

É claro que nem sempre é muito conveniente ficar desenhando diagramas, ainda mais quando ficamos diante de uma situação bastante restrita, onde temos que expressar tudo ao longo das linhas que compreendem um texto. E quando isso acontece, a solução usual é representar esse mesmo diagrama através de  $f : A \rightarrow B$ , já que isso dá conta de dizer por quem esses dois conjuntos  $A$  e  $B$  estão relacionados. Todavia, é sempre bom destacar que, devido a toda imaginação da espécie humana, diagramas existem e são propostos para os mais diversos fins, ainda mais se lembrarmos que a ideia primitiva de um conjunto é capaz de modelar diversas coisas. E um dos



**Figura A.1:** Diagrama de Feynman que está associado a parte do processo de espalhamento eletrofraco que envolve um elétron  $e^-$  e um antineutrino eletrônico  $\bar{\nu}_e$ , o qual é intermediado por um único bóson massivo  $W^-$  [110].

diagramas que são mais conhecidos entre os físicos são os chamados *diagramas de Feynman* [111]: um conjunto de regras bem específicas que, pelo uso de flechas e curvas, ajudam a representar diagramaticamente “todos” os processos de interação<sup>1</sup>. que estão relacionados às partículas não necessariamente elementares. Aliás, é por consequência de toda essa representação que esses diagramas de Feynman acabam sendo extremamente úteis na identificação dos termos que, por exemplo, aparecem em cálculos extremamente laborosos, os quais estão associados às estimativas das seções de choque relacionadas a esses processos de interação [73]. E um desses processos que podemos ilustrar aqui é o que se envolve para com um espalhamento entre um elétron e um antineutrino também eletrônico: neste caso, se nos atermos apenas a uma descrição de primeira ordem de parte desse espalhamento, especificamente daquele que é intermediado por um único bóson massivo  $W^-$ , por exemplo, o diagrama de Feynman deste processo é aquele que consta na Figura A.1.

Entretanto, como o principal foco do nosso trabalho não tem uma relação direta para com a Física das partículas elementares, mas tem uma relação direta para com diversas coisas bem algébricas, é muito mais conveniente falarmos a respeito de um outro tipo de diagrama que é muito mais importante ao que figura nestas notas: os *diagramas de Kuperberg* [50].

### A.1.1 Noções preliminares

De um modo bem geral, podemos perfeitamente repetir todas as palavras que já usamos para nos referir aos diagramas de Feynman para descrever os de Kuperberg: afinal de contas, estes últimos também se referem a um conjunto de regras bem específicas que se valem de flechas e curvas. Só que, ao contrário do que acontece nos diagramas de Feynman, todas essas flechas e

<sup>1</sup>“Todos” ao menos dentro do domínio onde, hoje, as teorias locais que estão envoltas para com a física de altas energias estão definidas, especialmente o Modelo Padrão [110]

curvas agora indicam como uma aplicação arbitrária “trabalha” sobre os elementos do seu domínio, o qual, em geral, deve ser visto como um *espaço vetorial*  $V$  que está definido sobre um corpo  $\mathbb{K}$  arbitrário<sup>2</sup>. Aliás, colocando as coisas em termos um pouco mais específicos, a presença de flechas num diagrama de Kuperberg nada mais faz do que indicar que grandezas não escalares definem uma determinada operação entre espaços vetoriais, as quais devem ser obrigatoriamente identificadas como *vetores* ou como *covetores*.

Apenas para começar a ilustrar como toda essa diagramatização funciona, podemos tomar o caso de um *endomorfismo*  $f : V \rightarrow V$ : ou seja, uma aplicação linear que toma como domínio e codomínio um mesmo espaço vetorial  $V$ . E nesta situação, o diagrama de Kuperberg que a representa se escreve como

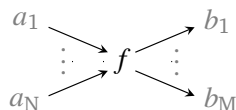
$$\longrightarrow f \longrightarrow$$

onde cada flecha representa um dos vetores envolvidos na operação.

Por se dizer, uma coisa que é bastante perceptível deste ultimo diagrama é que ele pode ser interpretado, em verdade, como uma espécie de fluxograma: no caso, como um fluxograma que deve ser lido da “esquerda para a direita”, dado que a presença da flecha à esquerda do símbolo “ $f$ ” deve ser vista como o vetor arbitrário que precisa ser fornecido à aplicação  $f$ , para que ela “trabalhe” sobre esse vetor e devolva um outro como resposta. E, no caso deste vetor “resposta”, ele deve ser identificado como a flecha que sai à direita do símbolo “ $f$ ”. É claro que vale frisar aqui que todo este fluxo de informações que vai da “esquerda para a direita” não deve ser visto como algo padrão, mas sim como um caso particular. Todavia, o que deve ficar subentendido deste diagrama é que  $f$  deve ser interpretada como uma espécie de “máquina” que, ao receber o elemento de um conjunto de “informações”, deve ser capaz produzir um outro elemento que vai pertencer a um outro conjunto de “informações” não necessariamente distinto.

Generalizações deste mesmo quadro podem ser feitas naturalmente através de uma simples substituição destas flechas por outras. Aliás, se quisermos descrever como aplicações um pouco mais abrangentes agem sobre os seus domínios e codomínios, como é o caso de uma  $f : A_1 \otimes \dots \otimes A_M \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_N$  que, por exemplo, constroi uma correspondência entre dois espaços vetoriais um pouco mais gerais, isso deve ser feito através do diagrama que define a Figura A.2. E no caso

<sup>2</sup>Em verdade, essas mesmas considerações sobre o domínio também se estendem a um *espaço dual* de  $V$ , cuja denotação se faz por  $V^*$ . No entanto, como veremos melhor no próximo Apêndice, mais especificamente na sua Seção



**Figura A.2:** Diagrama de Kuperberg que está associado a aplicação  $f : A_1 \otimes \dots \otimes A_M \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_N$ , onde  $A_1 \otimes \dots \otimes A_M$  e  $B_1 \otimes \dots \otimes B_N$  são dois espaços vetoriais.

deste diagrama<sup>3</sup>, apesar da presença de índices em qualquer diagrama de Kuperberg ser totalmente dispensável, aqui ela serve apenas para dar um efeito “didático-desambiguador”, haja vista que os seus índices  $a_j$  e  $b_k$  devem ser vistos como os elementos que pertencem aos respectivos espaços vetoriais  $A_j$  e  $B_k$  e que são tais que

$$f(a_1, \dots, a_M) = (b_1, \dots, b_N) \quad .$$

Ou seja, essa “didática de desambiguação” se relaciona ao simples fato de que, ao fazermos uma leitura de “cima para baixo” neste diagrama, a  $j$ -ésima flecha que está à esquerda de “ $f$ ” passa a representar um único vetor  $a_j$  que, apesar de arbitrário, se identifica com o  $j$ -ésimo elemento da  $M$ -upla  $(a_1, \dots, a_M)$  que deve ser fornecida a  $f$  para que ela devolva a outra  $(b_1, \dots, b_N)$  como resposta. E esta mesma observação também vale para a relação que existe entre as flechas, que constam à direita na Figura A.2, e os elementos que compõem a *imagem* de  $f$ : afinal, a  $k$ -ésima delas também está associada ao  $k$ -ésimo elemento que dá estrutura à  $N$ -upla suprarreferida.

### A.1.2 Um exemplo pertinente

Com o propósito de exemplificar a importância de todo este esquema de organização, vale a pena mencionar o caso que se envolve para com uma aplicação que é definida por

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = z \quad , \quad (\text{A.1})$$

onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são os elementos que compõem um espaço vetorial  $V$  arbitrário. Pois, já que existem infinitas aplicações que podem ser expressas neste formato, ao admitirmos uma situação onde

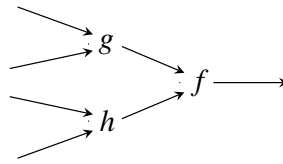
B.1,  $V^*$  também pode ser naturalmente interpretado como um espaço vetorial sobre o mesmo corpo  $\mathbb{K}$ .

<sup>3</sup>Aqui, apesar de estarmos utilizando uma rotulação um pouco diferente para os espaços vetoriais que compõem domínio e codomínio de  $f$ , devemos frisar que, para todos os índices  $j$  e  $k$ , vale que  $A_j = B_k = V$  em pleno acordo com a penúltima nota: no caso, trata-se de uma rotulação utilizada, tão somente, para os fins que ficarão bem mais claros com o apoio de um exemplo a seguir.

os elementos do domínio de  $f$  também pertencem aos codomínios de outras aplicações, se torna perfeitamente possível pensar numa situação que é vista como *composta*: ou seja, numa situação onde, por exemplo, outras duas aplicações  $g$  e  $h$ , que também são definidas segundo (A.1), se “juntam” a  $f$  para definir uma outra aplicação através de

$$f(g(x_1, x_2), h(y_1, y_2)) = z \quad .$$

E já que neste caso, que parece ser tão específico, o diagrama de Kuperberg é expresso como



é através dele que fica bem clara toda a importância da organização que dissemos acima: pois, como o primeiro elemento do par ordenado  $(x, y)$  sobre o qual  $f$  “trabalha” tem a sua origem relacionada a

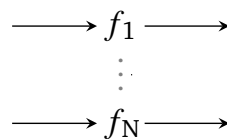
$$g(x_1, x_2) = x \quad , \tag{A.2}$$

a flecha que está associada ao primeiro elemento deste diagrama deve figurar na primeira posição de entrada em “ $f$ ”, por exemplo. Diga-se de passagem, um comentário inteiramente análogo a esse também se aplica em relação ao segundo elemento de  $(x, y)$ , haja vista que ele é fruto de  $h(y_1, y_2) = y$ .

Aliás, apenas por uma questão de completeza de informações que se apoia sobre esta mesma linha de raciocínio, também é muito interessante ilustrar a situação que se envolve para com aquelas aplicações que são definidas através de um produto tensorial: ou seja, para com as aplicações

$$f \equiv f_1 \otimes \dots \otimes f_N \tag{A.3}$$

que são compostas por outras  $f_j : A \rightarrow B$  entre espaços vetoriais  $A$  e  $B$ , onde  $j = 1, \dots, N$ . E no caso dessas  $f : A^N \rightarrow B^N$ , os seus diagramas de Kuperberg se reduzem a



de onde fica bem nítido que a única diferença que realmente existe entre essa nova situação e a anterior é que, ao contrário do que aparece na Figura A.2, por exemplo, uma espécie de “segmentação” agora se faz presente diante da identificação de  $f$  como um produto tensorial.

### A.1.3 Algumas generalizações

Embora todos os comentários que foram feitos até agora se envolvam para com aplicações entre espaços vetoriais, todos eles se aplicam perfeitamente àquelas que tomam *espaços duais* como domínio e/ou codomínio. Diga-se de passagem, essa é uma observação que não é nem um pouco inovadora, uma vez que esses últimos também podem ser perfeitamente interpretados como espaços vetoriais [52].

No entanto, mesmo sem qualquer inovação essencial, existe ao menos uma ligeira distinção entre os diagramas anteriores e aqueles que se valem de covetores: o sentido das flechas relacionadas aos covetores é *contrário* ao dos vetores. Desta maneira, seja qual for a aplicação  $f : B_1^* \otimes \dots \otimes B_N^* \rightarrow A_1^* \otimes \dots \otimes A_M^*$  entre espaços que se valem de produtos diretos apenas entre espaços duais, ao assumirmos que o seu diagrama de Kuperberg deve seguir o mesmo padrão de leitura anterior (ou seja, como um fluxograma cujo sentido vai da “esquerda para a direita”), ele será dado por

$$\begin{array}{ccc}
 b_M & \leftarrow & a_N \\
 \vdots & & \vdots \\
 b_1 & \leftarrow & a_1
 \end{array}
 \quad f$$

Vale notar que, apesar de toda a dispensabilidade dos índices, eles ainda se fazem presentes ao lado das flechas deste último diagrama tão somente para indicar a outra diferença fundamental que existe entre ele e todos os que já apresentamos anteriormente. Afinal de contas, se, analogamente ao que já fizemos na Figura A.2, realizarmos uma leitura de “cima para baixo” na relação dos covetores que dão estrutura ao domínio e ao codomínio dessa nova  $f$ , será possível notar que não apenas que as flechas, mas que o ordenamento de covetores também adota um sentido que é completamente contrário ao do primeiro.

### Diagramatização dos coeficientes de estrutura

E para começarmos a desvendar o grande motivo que está por trás de toda essa inversão de sentidos, é interessante nos apoiarmos sobre a observação de que, se  $A_j$  puder ser interpretado



como um espaço vetorial para todos os índices  $j$ , o produto tensorial  $A_1 \otimes \dots \otimes A_R$  também poderá [52]. Pois, se pensarmos que cada um dos vetores, que pertencem a uma das possíveis bases  $\{u_{a_j} : 1 \leq a_j \leq \dim A_j\}$  do espaço vetorial  $A_j$ , também dão estrutura aos vetores de uma base de  $A_1 \otimes \dots \otimes A_R$ , qualquer vetor que pertença a esse último espaço poderá ser comodamente expresso como

$$u = a^{a_1 \dots a_R} u_{a_1} \otimes \dots \otimes u_{a_R} \quad . \quad (\text{A.4})$$

Aqui,  $\{u_{a_1} \otimes \dots \otimes u_{a_R} : 1 \leq a_j \leq \dim A_j\}$  é uma dessas bases de  $A_1 \otimes \dots \otimes A_R$ , enquanto  $a^{a_1 \dots a_R}$  são os elementos do corpo  $\mathbb{K}$  sobre o qual cada  $A_j$  se define individualmente. E, por se dizer, são justamente esses elementos, que denotaremos propositalmente como *constantes de estrutura* por “estruturarem”  $u$  sob a forma (A.4), que retém a “chave” de todo o bom entendimento dos diagramas de Kuperberg.

Para tornar claro o porquê disso, iremos nos apoiar estrategicamente sobre uma aplicação  $f : A_1 \otimes \dots \otimes A_M \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_N$  para a qual, por uma simples consequência das observações que foram feitas no último parágrafo, vale

$$u_{a_1} \otimes \dots \otimes u_{a_M} \mapsto v = f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N} v_{b_1} \otimes \dots \otimes v_{b_N} \quad (\text{A.5})$$

desde que identifiquemos  $\{v_{b_1} \otimes \dots \otimes v_{b_N} : 1 \leq b_j \leq \dim B_j\}$  como uma das bases do codomínio de  $f$ . E a grande razão desta “estratégia” reside no simples fato desta ser exatamente a mesma aplicação que já mencionamos na Subseção A.2.1 e que é representada pelo diagrama da Figura A.2. Afinal, como da comparação de (A.5) com o seu diagrama vemos que existe uma correspondência “um-pra-um” entre cada um dos índices de  $f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N}$  e cada uma das componentes que definem  $u_{a_1} \otimes \dots \otimes u_{a_M}$  e  $v_{b_1} \otimes \dots \otimes v_{b_N}$ , fica bem claro que podemos transferir para essas constantes de estrutura toda a associação das flechas do diagrama em questão. Ou seja, um diagrama de Kuperberg, como o que consta na Figura A.2, nada mais é do que a realização diagramática das constantes de estrutura  $f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N}$  que definem uma aplicação  $f : A_1 \otimes \dots \otimes A_M \rightarrow B_1 \otimes \dots \otimes B_N$ .

Por se dizer, ao tomarmos a aplicação  $f : B_1^* \otimes \dots \otimes B_N^* \rightarrow A_1^* \otimes \dots \otimes A_M^*$  que também já foi mencionada anteriormente, cujos domínio e codomínio, que se valem de produtos diretos apenas entre espaços duais, podem ser definidos sobre as respectivas bases

$$\{v^{a_1} \otimes \dots \otimes v^{a_R} : 1 \leq a_j \leq \dim A_j\} \quad \text{e} \quad \{u^{a_1} \otimes \dots \otimes u^{a_R} : 1 \leq a_j \leq \dim A_j\}$$

covetoriais, as mesmas considerações acima também são capazes de nos indicar que

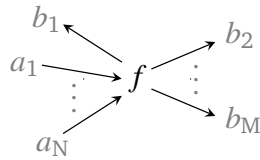
$$v^{b_1} \otimes \dots \otimes v^{b_M} \mapsto u = f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N} u^{a_1} \otimes \dots \otimes u^{a_N} \quad . \quad (\text{A.6})$$

E é exatamente diante desta constatação que, em concomitância com a proposital rotação que fizemos de  $f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N}$  como as constantes de estrutura destes dois casos, acaba ficando bem claro qual é o real motivo de toda a inversão de sentidos das flechas numa situação covetorial: tornar possível a obtenção de um dos casos a partir da completa dualização do outro.

Em verdade, devemos enfatizar que toda essa estratégia que utilizamos até aqui pode ser perfeitamente estendida para avaliar situações que são um pouco mais gerais, como as que se envolvem para com as dualizações que são interpretáveis como *parciais*: ou seja, para com as dualizações que se restringem à apenas alguns dos espaços vetoriais  $A_j$  e/ou  $B_k$  que compõem os seus domínios e codomínios. E apenas para ilustrar como tudo isso funciona, tomaremos uma aplicação  $f : A_1 \otimes \dots \otimes A_M \otimes B_1^* \rightarrow B_2 \otimes \dots \otimes B_N$  que identificaremos propositalmente em termos das suas constantes de estrutura  $f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N}$  como

$$u_{a_1} \otimes \dots \otimes u_{a_M} \otimes v^{b_1} \mapsto v = f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N} v_{b_2} \otimes \dots \otimes v_{b_N} \quad . \quad (\text{A.7})$$

No caso deste novo exemplo, se preferência ainda for por uma leitura fluxogramática que vai “esquerda para a direita”, o diagrama de Kuperberg a ele associado será dado por



de onde fica clara toda a similaridade deste para com os diagramas anteriores.

### Algumas regras de composição

Diga-se de passagem, dando sequência a esse processo de dualização parcial, é quando lembramos que todas as bases que se envolvem para com (A.5), (A.6) e (A.7) não são definidas univocamente [52] que passa a ser perfeitamente possível reinterpretar cada uma das constantes de estrutura  $f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N}$  de uma outra maneira. Afinal, como todas essas constantes podem ser naturalmente vistas como os elementos de  $A_1 \otimes \dots \otimes A_M \otimes B_1^* \otimes \dots \otimes B_N^*$ , cada uma delas pode ser

interpretada, em verdade, como as componentes de um *tensor*.

E por efeito desta nova interpretação tensorial, uma das primeiras indagações que surgem diz respeito às diagramatizações de Kuperberg que se envolvem, por exemplo, com alguma situação onde os índices de um único elemento  $f_{a_1 \dots a_M}^{b_1 \dots b_N}$  estão contraídos. Afinal de contas, se essa interpretação tensorial é correta, qual é o diagrama que, por exemplo, descreve um tensor cujas componentes são  $f_{a_1 a_2}^{a_2}$ ? A resposta a esta indagação é bem simples: este diagrama é

$$\longrightarrow f \circlearrowleft$$

pois, se pensarmos na situação que está relacionada à aplicação  $f$  definida em (A.1), por exemplo, cujo diagrama de Kuperberg aparece na extrema direita na composição apresentada na página 221, fica bem claro que a contração de índices deste nosso diagrama contraído (ou seja, deste nosso diagrama onde uma seta que sai de  $f$  retorna para a própria  $f$ ) pode ser bem entendida à luz de

$$f(x_1, x_2) = x_2 \quad .$$



## Apêndice B

### Alguns comentários algébricos

#### B.1 Considerações preliminares

Apesar do termo “grupo” ser popularmente usado para designar um conjunto arbitrário de “coisas”, quando ele é usado dentro de um contexto matemático ele se refere a algo que é um pouco mais específico do que isso. E no caso desse contexto, ele realmente deve ser interpretado como um conjunto não-vazio  $G$ , mas como um conjunto que é estruturado por uma aplicação  $\varphi : G \times G \rightarrow G$  que:

- (i) para três elementos  $g_1, g_2$  e  $g_3$  desse conjunto, preserva a igualdade

$$\varphi(\varphi(g_1, g_2), g_3) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, g_3)) \quad ; \quad (\text{B.1})$$

- (ii) sempre adota um elemento  $e$  como a *identidade* de  $G$ , haja vista que, para qualquer um dos elementos  $g$  deste conjunto,

$$\varphi(e, g) = g \quad ; \quad e \quad (\text{B.2})$$

- (iii) para um elemento arbitrário  $g$  desse mesmo conjunto, sempre associa um único dos seus elementos  $g^{-1}$ , de modo a satisfazer

$$\varphi(g^{-1}, g) = e \quad . \quad (\text{B.3})$$

Aliás, por efeito da caracterização fundamental de  $G$  como um conjunto, se torna perfeitamente possível, e até mesmo muito natural, atribuir o conceito de um *subgrupo* a um conjunto  $H$  que, além se portar necessariamente como um subconjunto não-vazio de  $G$ , acaba sendo estruturado

pela restrição desta mesma aplicação a  $H$  [112].

Entre os diversos exemplos de grupo que podemos citar aqui, talvez o mais conveniente junto ao propósito destas notas seja o daquele que é popularmente denotado como *circunferência unitária*  $S^1$ , uma vez que ele contém todos os elementos  $z$  que pertencem ao corpo dos complexos  $\mathbb{C}$  que satisfazem a  $|z|^2 = z\bar{z} = e$ . E, no caso dessa interpretação de  $S^1$  como um grupo, ela segue por efeito da identificação de  $\mu$  com o mesmo produto que é usualmente atribuído aos elementos de  $\mathbb{C}$ .

Uma das grandes conveniências que estão envoltas para com esse  $S^1$  é que, apesar dele figurar como um grupo de *ordem* nitidamente infinita (ou seja, um grupo que possui infinitos elementos), é nele que está contido um subgrupo  $C_N$  *finito* muito especial, cujos elementos podem ser perfeitamente identificados como as  $N$  raízes da equação<sup>1</sup>

$$z^N = e \quad . \quad (\text{B.4})$$

Aliás, é devido exatamente a essa caracterização (B.4) que se torna bem claro, por exemplo, o comportamento de  $C_N$  como um grupo *cíclico* de ordem  $N$ : ou seja, como um conjunto

$$C_N = \{ e, a, a^2, \dots, a^{N-1} \} \quad (\text{B.5})$$

que é composto por  $N$  elementos que estão relacionados por

$$\varphi(a^j, a^k) = a^{(j+k) \bmod N} \quad . \quad (\text{B.6})$$

E apesar deste exemplo talvez soar como uma mera particularidade, é importante frisar que é justamente por trás da lógica de formação desses subgrupos cíclicos que fica claro como outros podem ser concebidos. Afinal de contas, como esses subgrupos cíclicos nada mais são do que casos particulares de um

$$\langle g \rangle = \{ g^j : j \in \mathbb{Z} \} \quad (\text{B.7})$$

que é gerado por um dos elementos  $g$  que pertencem a  $G$ , isso nos dá uma boa “deixa” para entender como outros subgrupos, um pouco mais gerais, podem ser concebidos. E, no caso, toda essa concepção pode ser feita considerando, ao invés de um único elemento, subconjuntos não-vazios de  $G$  como geradores. Diga-se de passagem, talvez o melhor exemplo que podemos dar

<sup>1</sup>Aqui, estamos utilizando o símbolo “ $e$ ” ao invés do tradicional “1”, tão somente, para enfatizar o aspecto grupal envolto com  $\mathbb{C}$ .

desse subgrupos segue ao tomarmos um único  $S$  como um desses geradores, uma vez que é ele quem nos leva a um

$$\langle S \rangle = \bigcap \{ H : H \leq G \text{ e } S \subseteq H \} \quad (\text{B.8})$$

que não é um subgrupo qualquer de  $G$ : ele nos leva ao *menor* subgrupo que contém  $S$  [112]. Apenas por uma questão de completeza ao bom entendimento do que acabamos de dizer, vale notar que  $H \leq G$  simboliza o fato de que  $H$  é um subgrupo de  $G$  que eventualmente pode ser identificado com o próprio.

### B.1.1 Classes laterais e grupos quocientes

É claro que todas essas aplicações  $\varphi$  que dão estrutura a um grupo não são, nem de longe, as únicas que podem ser definidas entre os elementos desse grupo. E uma dessas outras aplicações que podem ser definidas é uma  $\theta_j : G \times H \rightarrow X \subseteq G$ , cuja expressão já deixa bem claro que ela realmente pode realmente ser mais geral do que essas  $\varphi$ , haja vista que  $H$  é um subgrupo que não se identifica necessariamente com o  $G$  que o contém.

Aliás, quando consideramos uma situação onde não ocorre necessariamente qualquer tipo de identificação entre os grupos que figuram no domínio dessa  $\theta_j$ , se torna perfeitamente possível obter um novo subconjunto  $X$  que também não será necessariamente identificado com  $G$ , cujos elementos são dados por

$$\theta_j(g, h_j) = x_j \quad . \quad (\text{B.9})$$

E diante da fixação de um único  $g$  à esquerda de  $h_j$  nesta relação, o subconjunto  $X$  que é assim obtido fica especialmente denotado como uma *classe lateral à esquerda*, o qual é engenhosamente simbolizado como

$$gH = \{ gh : h \in H \} \quad , \quad (\text{B.10})$$

onde cada um dos seus elementos  $gh_j$  deve ser identificado como cada um dos  $x_j$  que foram acima definidos: ou seja,  $gH$  nada mais é do que o conjunto que é formado por cada um dos possíveis elementos  $gh_j$  que foram definidos em (B.9).

Por se dizer, é através desta mesma estratégia que acabamos de usar para definir as classes laterais à esquerda que também podemos obter as chamadas *classes laterais à direita*

$$Hg = \{ hg : h \in H \} \quad , \quad (\text{B.11})$$

desde que tomemos  $\vartheta_k : H \times G \rightarrow X$  como as aplicações que trazem

$$\vartheta_k(h_k, g) = x_k \quad (\text{B.12})$$

como os elementos dessa  $Hg$ . No entanto, apesar dessas duas classes laterais representarem duas coisas que devem ser pensadas fundamentalmente como duas coisas distintas, quando a identificação mais geral

$$\vartheta_j(g, h_j) = \vartheta_k(h_k, g) \quad (\text{B.13})$$

ocorre, se torna completamente desnecessário fazer qualquer tipo de distinção entre essas classes laterais à “esquerda” e à “direita”, haja vista que, diante da identificação de  $j$  com  $k$ , toda a comutatividade entre os elementos de  $H$  transparece. E quando este é o caso, dizemos que  $H$  é um subgrupo *normal* de  $G$  e simbolizamos este fato com  $H \triangleleft G$ .

### Considerações adicionais

De um modo bem geral, o verdadeiro objetivo que está por trás de toda essa estruturação de classes laterais, sejam elas “esquerdas” ou “direitas”, é *particionar* [113, 114] o conjunto  $G$  em termos de subconjuntos que possuem a mesma cardinalidade: no caso que se envolve com as classes laterais à esquerda, por exemplo, tais subconjuntos se identificam como as distintas  $gH$  que podem ser assim obtidas<sup>2</sup>. Logo, pensando no conjunto  $G/H$  que pode ser formado considerando todas essas classes laterais como os seus elementos, é possível demonstrar que, para um grupo  $G$  especificamente finito, sempre temos [115]

$$|G| = |H| \cdot |G : H| ,$$

onde  $|G|$  e  $|H|$  se referem à cardinalidade dos grupos em questão, enquanto  $|G : H|$  faz menção à quantidade de classes laterais distintas. Esse resultado é conhecido como *Teorema de Lagrange* [116].

Uma das particularidades bem interessantes que está relacionada a  $G/H$  é que, quando não é possível fazer qualquer distinção entre o particionamento obtido para  $G$  pelas classes laterais à “esquerda” e à “direita”, toda a normalidade que está resumida em (B.13) permite afirmar que o

---

<sup>2</sup>Em verdade, cada uma das classes laterais pode ser interpretada como uma *classe de equivalência*: basta notar que, para as classes laterais à direita, por exemplo, quaisquer elementos  $g_1$  e  $g_2$  do grupo  $G$  serão considerados equivalentes se, e somente se,  $g_2^{-1}g_1$  também pertencer ao subgrupo  $H$ , como é o caso.



próprio  $G/H$  pode ser interpretado como um grupo, uma vez que o relacionamento

$$(Hg_1, Hg_2) \mapsto H(g_1g_2)$$

entre quaisquer dos seus elementos  $Hg_1$  e  $Hg_2$  se torna perfeitamente construtível perante a indução que é feita por  $g_1g_2 = \varphi(g_1, g_2)$ .

### B.1.2 Um panorama sobre a teoria das representações

Embora todas as considerações apresentadas até o momento tenham uma indubitável valia, nem sempre a lida com essa caracterização mais “abstrata” dos grupos é conveniente: afinal de contas, basta ver toda a arbitrariedade que já se embute, por exemplo e definição, na expressão “elemento de um conjunto”.

Uma das alternativas que permitem “driblar” esta inconveniência, se respalda no fato de ser perfeitamente possível “traduzir” todas essas considerações para uma linguagem mais limpa e elegante, capaz de expressar os mesmos conceitos de uma forma mais “concreta” que a original. E, no caso, toda essa “tradução” pode ser perfeitamente interpretada segundo um esquema de *representações*, onde os elementos que pertencem a um grupo  $G$  passam a ser *representados* por outros “objetos” que, além de se submeterem aos mesmos axiomas (B.1), (B.2) e (B.3), também são capazes de estruturar outro grupo com as mesmas propriedades que  $G$ .

Devido ao bom entendimento, e principalmente à boa manuseabilidade, que a lida com espaços vetoriais costuma oferecer, essas representações *sempre* acabam se valendo das transformações lineares para as suas definições. E nestes termos, ao notarmos que o conjunto  $GL_N(\mathbb{K})$ , que é composto por todas as matrizes invertíveis que possuem ordem  $N$  e entradas num corpo  $\mathbb{K}$ , é um bom exemplo de grupo<sup>3</sup>, uma representação para  $G$  se ergue naturalmente através de um *homomorfismo de grupos*  $\rho : G \rightarrow GL_N(\mathbb{K})$  que, por ser caracterizado como

$$\rho(g_1 \cdot g_2) = \rho(g_1) * \rho(g_2) \quad , \quad (\text{B.14})$$

acaba induzindo em  $G$  algumas propriedades que permitem interpretá-lo como uma espécie de espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ <sup>4</sup>.

<sup>3</sup>No caso, a estruturação de  $GL_N(\mathbb{K})$  como um grupo ocorre por uma simples consequência da identificação de  $\varphi : GL_N(\mathbb{K}) \times GL_N(\mathbb{K}) \rightarrow GL_N(\mathbb{K})$  com a multiplicação usual de matrizes.

<sup>4</sup>Embora fosse perfeitamente cabível apresentar alguns exemplos de representações aqui, preferimos fazer tal

Aliás, por efeito desta interpretação matricial que é feita pelas representações, fica perfeitamente viável definir uma operação entre os elementos  $g_j$ , que pertence a um grupo que possui uma representação matricial, e os  $v_k$ , que pertencem a algum dos subespaços vetoriais  $V$  que estão contidos no  $\mathbb{K}^N$ . Assim, se denotarmos por  $g_j v_k$  os novos elementos que surgem por efeito desta operação, é quando observamos que toda a natureza vetorial presente nos conjuntos  $GL_N(\mathbb{K})$  e  $\mathbb{K}^N$  nos leva a

$$(a) \quad ev = v \quad ,$$

$$(b) \quad g(\lambda v) = \lambda(gv) \quad ,$$

$$(c) \quad (g_1 g_2)v = g_1(g_2 v) \quad , \text{ e}$$

$$(d) \quad g(v_1 + v_2) = gv_1 + gv_2 \quad ,$$

onde  $\lambda$  é um elemento arbitrário do corpo  $\mathbb{K}$ , que um novo conjunto

$$M = \{ g_j v_k : g_j \in G \text{ e } v_k \in V \subseteq \mathbb{K}^N \} \quad (B.15)$$

fica completamente definido: e é justamente este conjunto, que é conhecido como *módulo*, que deve ser interpretado como um espaço vetorial [116].

Diga-se de passagem, algo bem simples que merece ser destacado aqui é que, justamente por efeito de toda essa interpretação de  $M$  como um espaço vetorial, se torna viável associá-lo a uma base  $\mathcal{B}_m$ : no caso, uma base que pode ser perfeitamente indexada pelos elementos do grupo  $G$  e que faz com que todos os elementos que pertençam a  $M$  sejam expressos por

$$u = \lambda^0 g_0 + \dots + \lambda^N g_N \quad . \quad (B.16)$$

E é justamente desta última expressão que fica bem clara uma das grandes “vantagens” que os módulos apresentam em relação aos espaços que simplesmente se identificam como vetoriais: afinal de contas, além de todas as combinações lineares usuais que podemos definir entre dois elementos (B.16), o simples fato de existir uma  $\varphi : G \times G \rightarrow G$  que define  $G$  como um grupo já permite com que um outro tipo de combinação se erga entre esses mesmos elementos, a qual consegue transcender às considerações que são simplesmente vetoriais, sem deixar de se apoiar sobre o que

---

apresentação no Apêndice C.

chamamos por *álgebra*.

## B.2 Noções gerais de álgebra

De um modo bem geral, o conceito de uma *álgebra* está diretamente relacionado à maneira pela qual é possível realizar operações entre os elementos de um espaço vetorial  $V$  e obter, como resultado, um outro elemento que ainda pertence a  $V$ . Em termos um pouco mais precisos, é possível afirmar que uma álgebra  $(V; \mu)$  se estrutura através de uma aplicação  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  necessariamente bilinear que é definida por

$$(\nu_j, \nu_k) \mapsto \mu_{jk}^a \nu_a, \quad (\text{B.17})$$

onde  $\mu_{jk}^a$  figura como uma das constantes que pertencem ao corpo  $\mathbb{K}$  sobre o qual  $V$  se apoia (as quais são responsáveis por estruturar a álgebra em questão), enquanto  $\nu_j$  rotula qualquer um dos possíveis elementos de  $V$ .

Aliás, conforme é bem notável da expressão (B.17), é possível afirmar que não existe qualquer ideia muito original aqui: basta ver que a própria aplicação  $\varphi : G \times G \rightarrow G$  que dá estrutura de grupo a  $G$  pode ser interpretada nestes mesmos moldes, uma vez que ela sempre relaciona dois elementos de um grupo  $G$  a outro elemento que pertence ao mesmo  $G$ . No entanto, a diferença sutil que está associada à noção de uma álgebra é que, ao contrário do que acontece com os espaços vetoriais, os conjuntos que se identificam simplesmente como grupos não permitem com que elementos análogos a (B.16) sejam definidos: apenas um módulo  $M$  permite tal “extravagância”. Pois, ao considerarmos  $\nu_j$  e  $\nu_k$  como os elementos de um módulo, uma *álgebra de grupo* pode ser perfeitamente definida através de

$$\mu(\nu_j, \nu_k) = \lambda_j^b \lambda_k^c \varphi(g_b, g_c) = \mu_{jk}^a g_a,$$

haja vista que o resultado claramente se identifica com um vetor moldado segundo (B.16).

Embora exista uma enormidade de álgebras sobre as quais poderíamos tecer diversos comentários bem interessantes, em decorrência dos propósitos do nosso trabalho voltaremos as nossas atenções apenas para aquelas que, além de serem *associativas*, também são *unitais*: ou seja, para as álgebras  $(V; \mu, \eta)$  que são caracterizadas por duas aplicações  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  e  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow V$  que

completam o quadro comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes V \otimes V & \xrightarrow{\mu \otimes id} & V \otimes V \\
 id \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 V \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{id \otimes \eta} & V \otimes V & \xleftarrow{\eta \otimes id} & \mathbb{K} \otimes V \\
 & \searrow \simeq & \downarrow \mu & \swarrow \simeq & \\
 & & V & & 
 \end{array}$$

algebricamente traduzido como

$$\mu \circ (\mu \otimes id) = \mu \circ (id \otimes \mu) \quad \text{e} \quad \mu \circ (\eta \otimes id) = \mu \circ (id \otimes \eta) = id \quad . \quad (\text{B.18})$$

Aqui,  $id : V \rightarrow V$  é a operação identidade, enquanto  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow V$  é a operação unital que é definida, analogamente a (B.17), como

$$1 \mapsto \eta^a v_a \quad , \quad (\text{B.19})$$

sendo  $\eta^a$  as constantes em  $\mathbb{K}$  que estruturam um vetor unitário em  $V$ . Diga-se de passagem, vale notar que todas as relações que definem este quadro comutativo se completam perante o seguinte resultado:

**Proposição 2** *Seja  $V$  um espaço vetorial definido sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Então  $\mathbb{K} \otimes V \simeq V \simeq V \otimes \mathbb{K}$ .*

*Demonstração.* Consideremos uma aplicação bilinear  $f : \mathbb{K} \otimes V \rightarrow V$  sobre a qual uma segunda  $f : V \rightarrow U$ , que é apenas linear e possui um codomínio  $U$  que também se identifica como um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , pode ser definida através de

$$\bar{f}(v) = f(1, v) \quad .$$

Diante desta definição, ao tomarmos uma aplicação  $\varphi : \mathbb{K} \otimes V \rightarrow V$  que, além de ser bilinear, é tal que

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda v \quad ,$$

acaba ficando bem claro que  $\bar{f} \circ \varphi = f$  pois, para todo elemento que pertence a  $\mathbb{K} \otimes V$ , temos

$$\bar{f}(\varphi(\lambda, v)) = \bar{f}(\lambda v) = f(1, \lambda v) = f(\lambda, v) \quad .$$

Por outro lado, se admitirmos a existência de uma outra aplicação linear  $g : V \rightarrow U$  satisfazendo



cificamente associado a essa álgebra é dado, em termos da diagramatização de Kuperberg, como

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \Delta' \longrightarrow \Delta' \longrightarrow \equiv \longrightarrow \Delta' \longrightarrow \Delta' \longrightarrow \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \varepsilon' \longrightarrow \Delta' \longrightarrow \equiv \longrightarrow \varepsilon' \longrightarrow \Delta' \longrightarrow \equiv \longrightarrow \end{array}$$

### B.2.1 Sobre o conceito de coálgebra

Antes de quaisquer comentários adicionais, e até mesmo para que todos eles possam fazer sentido posteriormente, devemos frisar que todo o conteúdo que foi exposto até agora pode, em verdade, ser interpretado como uma, e apenas uma, das possíveis maneiras que existem para construir relações entre os dois espaços vetoriais  $V \otimes V$  e  $\mathbb{K}$  e um único  $V$ , por meio de aplicações que tomam os dois primeiros como *domínios* e o último como *codomínio*.

Pensando nesse sentido, não deixa de ser interessante, e tão pouco figura como absurda, por exemplo, a ideia de lidarmos com uma outra estrutura que também se valha de relacionamentos inteiramente análogos a todos esses, mas contrário: ou seja, relacionamentos que adotam  $V \otimes V$  e  $\mathbb{K}$  como codomínios e  $V$  como domínio. Assim, por efeito de toda essa razoabilidade, se torna perfeitamente legítimo munir esse mesmo espaço vetorial  $V$  com duas outras aplicações lineares  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  e  $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{K}$ , que se responsabilizam por completar o quadro comutativo

$$\begin{array}{ccc} V \otimes V \otimes V & \xleftarrow{\Delta \otimes id} & V \otimes V \\ id \otimes \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\ V \otimes V & \xleftarrow{\Delta} & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \otimes \mathbb{K} & \xleftarrow{id \otimes \varepsilon} & V \otimes V & \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} & \mathbb{K} \otimes V \\ \searrow \simeq & & \uparrow \Delta & & \swarrow \simeq \\ & & V & & \end{array}$$

que é algebricamente traduzido como

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \Delta) \circ \Delta \quad \text{e} \quad (\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = (id \otimes \eta) \circ \Delta = id \quad . \quad (B.21)$$

A essa nova estrutura damos propositalmente o nome de *coálgebra*  $(V; \Delta, \varepsilon)$ , e é exatamente neste ponto que fica explícito o verdadeiro motivo de termos adotado propositalmente o termo “codomínio” ao longo destas notas: uma coálgebra toma como domínio o conjunto que, para a álgebra que está a ela associada por meio de um processo de *dualização*, é considerado como codomínio.

Por se dizer, algo extremamente útil que segue como uma mera consequência dessa última diagramatização é que, quando a comparamos com a que consta na página 235, fica claro que a

definição que é dada para uma coálgebra pode ser, em verdade, interpretada como uma simples dualização daquela que já existe para uma álgebra  $(V; \mu, \eta)$ . Por se dizer, é justamente com base nesta observação que fica nítida toda a conveniência do exemplo que está associado aos espaços duais: afinal, basta ver que a diagramatização de Kuperberg

$$\begin{array}{c} \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \leftarrow \equiv \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \leftarrow \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \leftarrow \equiv \leftarrow \Delta \leftarrow \Delta \leftarrow \end{array} \quad e \quad \begin{array}{c} \leftarrow \Delta \leftarrow \equiv \leftarrow \Delta \leftarrow \equiv \leftarrow \\ \swarrow \quad \searrow \quad \swarrow \quad \searrow \\ \leftarrow \Delta \leftarrow \equiv \leftarrow \Delta \leftarrow \equiv \leftarrow \end{array}$$

da coálgebra é completamente similar a do exemplo em questão. Em verdade, por consequência de tudo o que dissemos ao longo da Subseção A.1.3, é possível demonstrar que existe um isomorfismo entre essas duas situações.

### B.2.2 Biálgebras e álgebras de Hopf

Antes de fazermos quaisquer comentários que sejam pertinentes à causa desta Seção, é mais do que conveniente demonstrar o seguinte resultado [118]:

**Proposição 3** *Considere um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  para o qual estão definidas uma álgebra  $(V; \mu, \eta)$  e uma coálgebra  $(V; \Delta, \varepsilon)$ . Então as afirmações*

- (1)  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  e  $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{K}$  são morfismos de álgebras, e
- (2)  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  e  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow V$  são morfismos de coálgebras,

são completamente equivalentes.

*Demonstração.* Admitindo que uma álgebra  $(V; \mu, \eta)$  e uma coálgebra  $(V; \Delta, \varepsilon)$  estarem bem definidas sobre  $V$ , podemos partir de (2) e nos valer da existência do morfismo  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  que, por exemplo, nos permite esboçar não apenas o quadro comutativo

$$\begin{array}{ccccc} V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V & \xrightarrow{\Delta} & V \otimes V \\ \Delta \otimes \Delta \downarrow & & & & \uparrow \mu \otimes \mu \\ V \otimes V \otimes V \otimes V & \xrightarrow{\tau_{23}} & V \otimes V \otimes V \otimes V & & \\ & & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V \\ \varepsilon_{V \otimes V} \downarrow & & \swarrow \varepsilon \\ & & \mathbb{K} \end{array}$$

que está relacionado à coálgebra devido à existência do isomorfismo<sup>7</sup>

$$\tau_{23} (v_1, v_2, v_3, v_4) \mapsto (v_1, v_3, v_2, v_4) \quad ,$$

<sup>7</sup>Este é apenas um exemplo das chamadas aplicações de transposição: ou seja, isomorfismos que são responsáveis por trocar parcelas num produto tensorial.

mas o quadro

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & V \\
 \Delta_{\mathbb{K}} \downarrow & & \downarrow \Delta \\
 \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta \otimes \eta} & V \otimes V
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 \mathbb{K} & \xrightarrow{\eta} & V \\
 id \downarrow & \swarrow \varepsilon & \\
 \mathbb{K} & & 
 \end{array}$$

que também é comutativo dada a caracterização de  $\eta : \mathbb{K} \rightarrow V$  como um morfismo.

Desta maneira, como

$$\Delta_{V \otimes V} = \tau_{23} (\Delta \otimes \Delta) \quad \text{e} \quad \mu_{V \otimes V} = (\mu \otimes \mu) \tau_{23} \quad ,$$

devido à comutatividade dos primeiros diagramas que  $\Delta$  pode ser interpretada como um morfismo entre álgebras. E como um comentário inteiramente análogo também se aplica para os últimos diagramas e a aplicação  $\varepsilon$ , indicando que esta também se comporta como um morfismo entre álgebras, temos (1) como uma realidade.

Logo, a proposição toda fica demonstrada pois, ao assumirmos inversamente que  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  e  $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{K}$  são morfismos entre álgebras como (1) diz, a construção de um quadro comutativo relacionado a  $(V; \mu, \eta)$  também implica em (2) nos mesmos moldes que foram acima esboçados. ■

E a grande importância deste simples resultado está diretamente associada ao fato de que é justamente a essa estrutura algébrica, que se resume através dos diagramas apresentados nesta demonstração, e que agora rotularemos como  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon)$ , que se dá o nome de *biálgebra*.

Diga-se de passagem, por uma mera consequência do resultado acima, também é fácil ver que, para quaisquer vetores  $a$  e  $b$  que pertençam a uma biálgebra, vale que

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \Delta(ab) &= (\Delta \circ \mu)(a \otimes b) = (\Delta_{V \otimes V} \circ (\mu \otimes \mu))(a \otimes b) = \Delta(a) \Delta(b) \quad , \\
 \text{(ii)} \quad \varepsilon(ab) &= (\varepsilon \circ \mu)(a \otimes b) = (\mu_{\mathbb{K}} \circ (\varepsilon \otimes \varepsilon))(a \otimes b) = \varepsilon(a) \varepsilon(b) \quad ,
 \end{aligned}$$

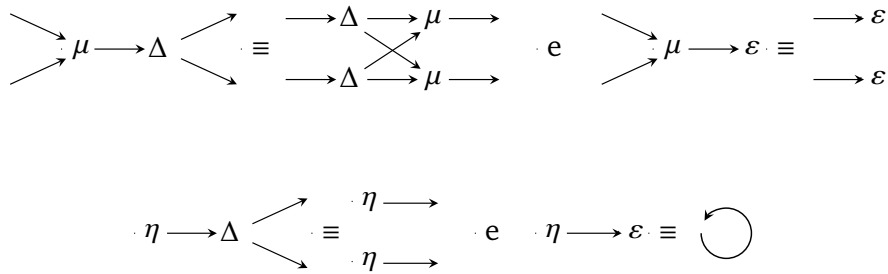
para os quais, em particular, também teremos

$$\begin{aligned}
 \text{(iii)} \quad \Delta(1) &= (\Delta \circ \eta)(1) = ((\eta \otimes \eta) \circ \Delta_{\mathbb{K}})(1) \\
 &= (\eta \otimes \eta)(1 \otimes 1) = \eta(1) \otimes \eta(1) = 1 \otimes 1 \quad , \\
 \text{(iv)} \quad \varepsilon(1) &= (\varepsilon \circ \eta)(1) = \varepsilon_{\mathbb{K}}(1) = 1 \quad .
 \end{aligned}$$

Assim, uma condição necessária e suficiente para que  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon)$  possa ser considerada uma biálgebra é que as aplicações  $\Delta$  e  $\varepsilon$  devem se comportar, em verdade, como dois *homomorfismos*.



E, no caso destes quatro últimos itens, vale a pena notar que, em termos de diagramatização de Kuperberg, eles podem ser respectivamente expressos como

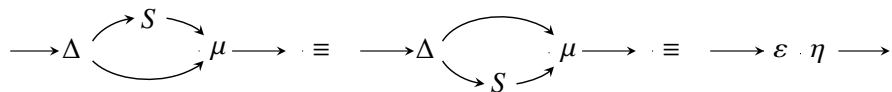


de onde fica bem clara uma das outras virtudes destes diagramas: deixar muito mais inteligível como cada uma das suas aplicações estão definidas.

Talvez, o exemplo mais interessante que exista de uma biálgebra<sup>8</sup>, é aquele rotulado como *álgebra de Hopf*: uma biálgebra  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon; S)$  para a qual está definida uma aplicação linear  $S : V \rightarrow V$  que é conhecida como *antípoda* e que é responsável por estruturar a comutatividade do diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 V \otimes V & \xleftarrow{\Delta} & V & \xrightarrow{\Delta} & V \otimes V \\
 id \otimes S \downarrow & & \downarrow \eta \circ \varepsilon & & \downarrow S \otimes id \\
 V \otimes V & \xrightarrow{\mu} & V & \xleftarrow{\mu} & V \otimes V
 \end{array}$$

que também pode ser expresso “via Kuperberg” por



devido a sua tradução algébrica ser dada por

$$\mu \circ (id \otimes S) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = \mu \circ (S \otimes id) \circ \Delta .$$

**Algumas propriedades**

De um modo geral, podemos dizer que as álgebras de Hopf se dividem entre aquelas cujas antípodas satisfazem a relação

$$S^2 = S \circ S = I_V \tag{B.22}$$

<sup>8</sup>Ao menos para os propósitos que se encerram nestas notas.

e aquelas que não satisfazem: quando (B.22) é uma realidade, dizemos que álgebra de Hopf é *involutória* e, para essas, existem algumas propriedades interessantes, as quais podem ser resumidas pelas proposições que seguem abaixo.

**Proposição 4** *Seja uma biálgebra  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon)$  onde  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  e  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$ . Então, tomando uma representação regular, o traço de um elemento  $v_j$  da álgebra é igual a  $\mu_{aj}^j$ , enquanto o cotraço de um elemento  $v^a$  que pertence à álgebra dual é dado por  $\Delta_{aj}^j$ .*

*Demonstração.* Tomando uma representação  $\rho : V \rightarrow GL_N(\mathbb{K})$  para os elementos que configuram uma álgebra  $(V; \mu, \eta)$ , sendo  $\mathbb{K}$  um corpo arbitrário, se torna bem claro que o traço de  $v_a$  será expresso por

$$\text{tr}_\rho(v_a) = A_{jj} \quad , \quad (\text{B.23})$$

onde  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $N$ .

Nestes termos, como o módulo construído pela ação de um elemento  $v_b$  qualquer da álgebra sobre ela mesma pode ser expresso em termos desta mesma matriz como

$$v_b \cdot v_a = A_{ba} v_a \quad ,$$

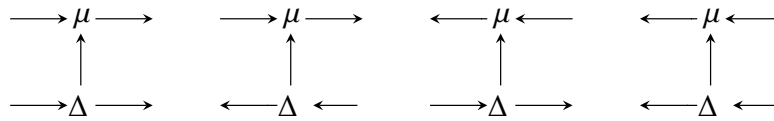
é devido ao fato de  $v_b \cdot v_a$  ser identificável como o resultado de uma multiplicação definida por (B.17) que se torna possível reexpressar (B.23) como

$$\text{tr}_\rho(v_a) = \mu_{aj}^j \quad ,$$

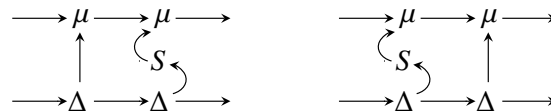
que é justamente um dos resultados que queríamos demonstrar. Já em relação ao caso do cotraço de um elemento  $v^a$  da álgebra dual  $(V^*; \Delta, \varepsilon)$ , ele segue analogamente desde que lembremos que um módulo também pode ser estruturado pela ação de outro elemento dual  $v^b$  através de uma comultiplicação através de  $\Delta : V^* \otimes V^* \rightarrow V^*$ . ■

**Proposição 5** *Considere uma álgebra de Hopf  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon; S)$  para a qual estão definidos os diagramas de Kuperberg que estão expostos abaixo. Então cada um deles é inversível, e os seus diagramas inversos podem obtidos mediante a troca de cada uma das suas flechas verticais pela antípoda.*

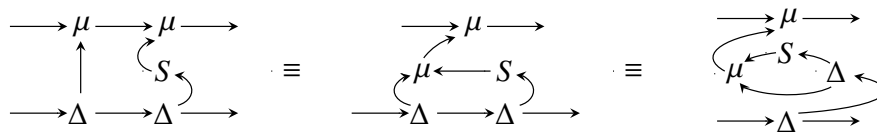
*Demonstração.* Se o diagrama de Kuperberg  $\mathcal{K}$ , que está associado a uma aplicação  $f : V^M \rightarrow V^N$ , é inversível, então isso quer dizer que existe um outro diagrama  $\mathcal{K}^{-1}$  tal que  $\mathcal{K} \circ \mathcal{K}^{-1} = \mathcal{I}_{V^M}$



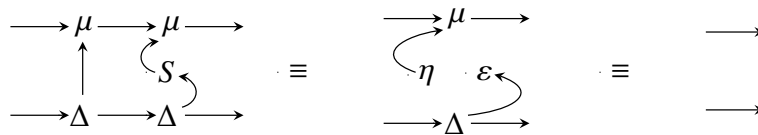
e  $\mathcal{K}^{-1} \circ \mathcal{K} = I_{V^{\otimes N}}$ . Nestes termos, ao tomarmos a composição do diagrama que está presente à extrema esquerda com aquele que é obtido pela troca da sua flecha vertical pela antípoda, teremos apenas as duas possibilidades abaixo.



Considerando a primeira possibilidade à esquerda, e nos valendo da associatividade de  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  e da coassociatividade de  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  respectivamente, obtemos



Assim, se usarmos a propriedade que define uma álgebra de Hopf, a qual está resumida pelo último diagrama de Kuperberg que aparece na página 239, notamos que o diagrama aqui obtido se reduz à identidade  $I_{V^2}$ , uma vez que



No caso, a prova de que esse diagrama, que é obtido pela troca da flecha vertical pela antípoda, se comporta realmente como um inverso, se completa através dos mesmos trâmites que foram tomados até agora. Aliás, desenvolvimentos inteiramente análogos a esses também se aplicam às demonstrações que se relacionam aos demais diagramas que estão presentes no enunciado. ■

### Sobre integrais e cointegrais

Antes de encerrarmos este apêndice, ainda precisamos apresentar brevemente dois conceitos bem simples, que estão diretamente relacionados às álgebras de Hopf: o de *cointegral* e o de

*integral*. E de um modo bem geral, podemos pensar numa *cointegral* como sendo o elemento  $\lambda$  de uma álgebra de Hopf que, segundo (B.17), satisfaz as propriedades

$$(\lambda, v_k) \mapsto \mu(\lambda, v_k) = \eta(v_k) \lambda \quad \text{ou} \quad (v_j, \lambda) \mapsto \mu(v_j, \lambda) = \eta(v_j) \lambda,$$

que podem ser respectivamente traduzidas em termos dos diagramas de Kuperberg



onde, apenas por uma questão de distinguibilidade entre essas duas propriedades, diremos que, se  $\lambda$  satisfizer a primeira relação, ele será uma *cointegral à direita*, enquanto no segundo caso ele será visto como uma *cointegral à esquerda*.

Já o conceito de uma *integral* pode ser associado ao elemento  $\Lambda$  de uma álgebra de Hopf que, analogamente à definição dada para uma *cointegral*, satisfizer a

$$(\Lambda, v^k) \mapsto \Delta(\Lambda, v^k) = \varepsilon(v^k) \Lambda \quad \text{ou} \quad (v^j, \Lambda) \mapsto \Delta(v^j, \Lambda) = \varepsilon(v^j) \Lambda,$$

as quais também são traduzíveis “via Kuperberg” pelos respectivos diagramas



para os quais também vale um comentário inteiramente análogo aos que foram feitos para uma *cointegral*: ou seja, estes dois diagramas se referem às integrais à esquerda e à direita respectivamente.

Diga-se de passagem, três resultados bem interessantes associados às integrais e cointegrais, os quais tomam por base a existência e a não nulidade destes dois elementos para uma álgebra de Hopf, estão resumidos nas três proposições que seguem abaixo.

**Proposição 6** *Se  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon; S)$  é uma álgebra de Hopf, então o tensor*

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \mu \\ \curvearrowright S^2 \end{array}$$

*se identifica com uma integral à direita.*

*Demonstração.* De acordo com as propriedades que definem uma biálgebra, especialmente aquelas resumidas pelos seus diagramas Kuperberg que foram apresentados na página 239, ao tomarmos uma integral  $\Lambda$  à direita e uma cointegral  $\lambda$  à esquerda, teremos

$$\begin{array}{c} \lambda \longrightarrow \Delta \longrightarrow \Delta \longrightarrow \\ \downarrow \qquad \uparrow \\ \Lambda \longleftarrow \mu \longleftarrow \mu \longleftarrow \end{array} \equiv \begin{array}{c} \lambda \searrow \qquad \nearrow \\ \mu \longrightarrow \Delta \longrightarrow \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \Lambda \end{array} \equiv \begin{array}{c} \lambda \quad \eta \longrightarrow \\ \downarrow \\ \Lambda \quad \varepsilon \longleftarrow \end{array}$$

Assim, uma vez que a **Proposição 4** nos mostra não apenas que

$$\begin{array}{c} \lambda \longrightarrow \Delta \longrightarrow \\ \downarrow \\ \Lambda \longleftarrow \mu \longleftarrow \end{array} \equiv \begin{array}{c} \lambda \quad \eta \longrightarrow \mu \longrightarrow \\ \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow \\ \Lambda \quad \varepsilon \longleftarrow \Delta \longleftarrow \end{array} \equiv \begin{array}{c} \lambda \\ \downarrow \\ \Lambda \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ S \\ \searrow \end{array}$$

mas também que

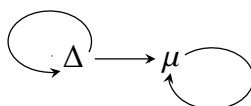
$$\begin{array}{c} \lambda \longrightarrow \\ \Lambda \longleftarrow \end{array} \equiv \begin{array}{c} \lambda \\ \downarrow \\ \Lambda \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \Delta \longrightarrow \\ S \quad \mu \longleftarrow \\ \searrow \end{array}$$

fica claro que, pelo uso da counidade  $\varepsilon : V \rightarrow \mathbb{K}$ , valerá

$$\longrightarrow \Lambda \equiv \begin{array}{c} \lambda \longrightarrow \Lambda \longrightarrow \mu \\ (\lambda \longrightarrow \varepsilon)^{-1} \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \qquad \qquad \qquad \mu \longleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \\ S^2 \\ \searrow \end{array}$$

conforme queríamos demonstrar. ■

**Proposição 7** Considerando  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon; S)$  é como uma álgebra de Hopf, a contração tensorial abaixo se identifica com a dimensão de  $V$ .



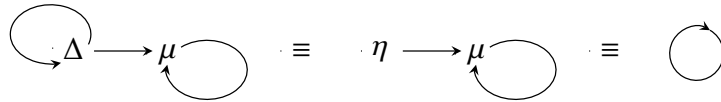
*Demonstração.* Com o efeito de uma integral  $\Lambda$  também ser interpretada como o elemento de uma álgebra dual  $(V^*; \Delta', \varepsilon')$  e, portanto, admitir uma decomposição

$$\Lambda = \Lambda_k v^k$$

em termos dos vetores de uma base dual a  $V$ , com os seus coeficientes dados por

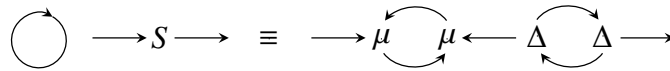
$$\Lambda_k = \text{tr} ( v_k ) = \mu_{kj}^j ,$$

é imediato perceber que, pelos diagramas que definem uma integral, temos



o que vem a provar nossa tese, dado a identificação do último diagrama com o traço de  $I_V$ . ■

**Proposição 8** *Se  $(V; \mu, \eta; \Delta, \varepsilon; S)$  é uma álgebra de Hopf, então a sua antípoda  $S : V \rightarrow V$  satisfaz o diagrama*



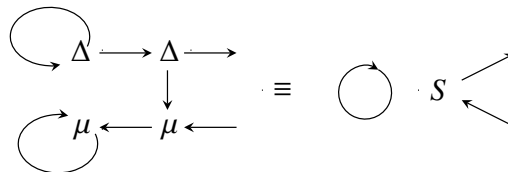
*Demonstração.* Observando que, assim como uma integral, uma cointegral  $\lambda$  também pode ser expressa como

$$\lambda = \lambda^j v_j ,$$

onde  $v_j$  são os vetores de alguma base de  $V$ , com os seus coeficientes sendo tais que

$$\lambda^j = \text{cotr} ( v^j ) = \Delta_k^{jk} ,$$

é possível obter, diante de uma das passagens que foram usadas para demonstrar a **Proposição 5**, que



Nestes termos, a nossa demonstração se completa facilmente, haja vista que  $\mu : V \otimes V \rightarrow V$  e  $\Delta : V \rightarrow V \otimes V$  são aplicações associativa e coassociativa respectivamente. ■

## Apêndice C

### Algumas considerações levemente enfadonhas

Como o próprio nome já dá a entender, o objetivo deste Apêndice é o de apresentar duas considerações que, por serem um pouco enfadonhas, foram propositalmente suprimidas do corpo do texto principal para não atrapalhar a corência da sua leitura. No entanto, como elas são essenciais à boa compreensão de alguns dos principais resultados que foram lá apresentados, se faz necessário apresentá-las agora ao leitor por uma simples questão de completeza e não de tortura. E a primeira que iremos apresentar aqui diz respeito ao que nos permitiu definir todos aqueles operadores de aresta  $C_j^{(G_1, G_2)}$  relacionados aos Exemplos 2 e 3 do QDMv.

#### C.1 Sobre os operadores de aresta do QDMv

Como tudo o que fizemos nestas notas foi apresentar modelos que só se valeram dos grupos Abelianos

$$\mathbb{Z}_n = \{ \omega^k : k \in \mathbb{Z} \text{ e } \omega^n = \omega^0 = e \}$$

para a suas definições, uma das primeiras coisas que devemos fazer aqui é notar que, como esses grupos são bons exemplos de módulos, a soma

$$S = \omega^0 + \omega^1 + \dots + \omega^{n-2} + \omega^{n-1}$$

entre os seus elementos acaba nos mostrando que

$$\omega S = \omega^1 + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} + \omega^n = \omega^1 + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} + \omega^0 \quad .$$

e que, portanto,

$$S - \omega S = \omega^0 - \omega^0 = 0 \quad .$$

Afinal de contas, apesar deste último resultado parecer bastante ingênuo, é ele quem nos ajuda a entender as principais propriedades de alguns operadores, como os

$$\begin{aligned} C^{(0)} &= \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) \quad , \quad C^{(1)} = \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) \quad \text{e} \\ C^{(2)} &= \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

que se apoiam sobre um  $\mathbb{Z}_3$  e que se valem dos mesmos operadores  $Z$  que já foram definidos em (6.12), os quais atuam sobre uma base

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{C.2})$$

Aqui,  $\mathbb{1}$  é o operador que atua como uma identidade sobre esta mesma base. Pois como

$$\begin{aligned} C^{(0)} \cdot C^{(0)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + Z + Z^2) + (Z + Z^2 + \mathbb{1}) + (Z^2 + \mathbb{1} + Z) \right] \\ &= \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) = C^{(0)} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(0)} \cdot C^{(1)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) + (Z + \omega^2 Z^2 + \omega \mathbb{1}) + (Z^2 + \omega^2 \mathbb{1} + \omega Z) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ (e + \omega + \omega^2) \mathbb{1} + (\omega^2 + e + \omega) Z + (\omega + \omega^2 + e) Z^2 \right] = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^{(0)} \cdot C^{(2)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) + (Z + \omega Z^2 + \omega^2 \mathbb{1}) + (Z^2 + \omega \mathbb{1} + \omega^2 Z) \right] \\ &= \frac{1}{9} \left[ (e + \omega^2 + \omega) \mathbb{1} + (\omega + e + \omega^2) Z + (\omega^2 + \omega + e) Z^2 \right] = 0 \quad , \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
C^{(1)} \cdot C^{(0)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + Z + Z^2) + (\omega^2 Z + \omega^2 Z^2 + \omega^2 \mathbb{1}) + (\omega Z^2 + \omega \mathbb{1} + \omega Z) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (e + \omega^2 + \omega) \mathbb{1} + (e + \omega^2 + \omega) Z + (e + \omega^2 + \omega) Z^2 \right] = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{(1)} \cdot C^{(1)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) + (\omega^2 Z + \omega Z^2 + \mathbb{1}) + (\omega Z^2 + \mathbb{1} + \omega^2 Z) \right] \\
&= \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) = C^{(1)} \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{(1)} \cdot C^{(2)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) + (\omega^2 Z + Z^2 + \omega \mathbb{1}) + (\omega Z^2 + \omega^2 \mathbb{1} + Z) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (e + \omega + \omega^2) \mathbb{1} + (\omega + \omega^2 + e) Z + (\omega^2 + e + \omega) Z^2 \right] = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{(2)} \cdot C^{(0)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + Z + Z^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + Z + Z^2) + (\omega Z + \omega Z^2 + \omega \mathbb{1}) + (\omega^2 Z^2 + \omega^2 \mathbb{1} + \omega^2 Z) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (e + \omega + \omega^2) \mathbb{1} + (e + \omega + \omega^2) Z + (e + \omega + \omega^2) Z^2 \right] = 0 \quad ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{(2)} \cdot C^{(1)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + \omega^2 Z + \omega Z^2) + (\omega Z + Z^2 + \omega^2 \mathbb{1}) + (\omega^2 Z^2 + \omega \mathbb{1} + Z) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (e + \omega^2 + \omega) \mathbb{1} + (\omega^2 + \omega + e) Z + (\omega + e + \omega^2) Z^2 \right] = 0 \quad e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C^{(2)} \cdot C^{(2)} &= \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) \right] \left[ \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) \right] \\
&= \frac{1}{9} \left[ (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) + (\omega Z + \omega^2 Z^2 + \mathbb{1}) + (\omega^2 Z^2 + \mathbb{1} + \omega Z) \right] \\
&= \frac{1}{3} (\mathbb{1} + \omega Z + \omega^2 Z^2) = C^{(2)} \quad ,
\end{aligned}$$

acaba ficando bem claro que todos esses operadores, definidos em (C.1), são projetores. No caso, projetores tais que

$$C^{(\alpha)} | \beta \rangle = \delta(\alpha, \beta) | \beta \rangle \quad ,$$

o que acaba justificando, por exemplo, não apenas todas as expressões dos operadores (8.26), mas de todos os operadores de aresta que foram apresentados na página 131, os quais completam o conjunto  $\mathfrak{C}_j$  que está relacionado ao QDMv que adota  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_3$ .

## C.2 Regras de comutação dos operadores do QDMf

Embora seja perfeitamente possível apresentar um desenvolvimento inteiramente análogo a este, para justificar as expressões dos operadores que completam o conjunto  $\mathfrak{C}_j$  do QDMv que se vale dos grupos  $G_1 = \mathbb{Z}_2$  e  $G_2 = \mathbb{Z}_4$  como os indexadores do campos de calibre e de matéria respectivamente, não iremos fazer isso aqui. Afinal, além da última Seção já ter deixado claro como toda esta justificativa pode ser obtida, existe uma outra coisa que é muito importante e que devemos apresentar aqui: as regras de comutação entre os operadores de vértice  $A_v^{(G_1, \tilde{G}_2)}$ , de face  $B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  e de aresta  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  que definem o QDMf, as quais acabam nos mostrando todas as condições que precisam ser impostas ao modelo para que ele seja solúvel.

Aliás, de acordo com os diagramas de Kuperberg que foram apresentados na Figura 9.2, não é nada difícil constatar que os operadores  $A_v^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  e  $B_p^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  são mesmo dois projetores. Pois, além do operador de vértice deste QDMf ser exatamente o mesmo operador de vértice do QDM, é o simples fato da coação  $\mathcal{F}(\tilde{\alpha})$  fornecer um elemento  $f(\tilde{\alpha})$  ao operador  $M^{(k)}$  (que é composto puramente em termos de uma combinação que envolve uma álgebra tal como (B.17)) que nos permite definir a componente  $\bar{B}_s^h$  tal como fizemos na Figura 9.3 e, portanto, mostrar não apenas que

$$\begin{aligned} \delta(f^{-1}(\tilde{\alpha}) ab^{-1}c^{-1}d, h) \cdot \delta(f^{-1}(\tilde{\alpha}) ab^{-1}c^{-1}d, h) &= \delta(f^{-1}(\tilde{\alpha}) ab^{-1}c^{-1}d, h) \\ &\Rightarrow \bar{B}_s^h \circ \bar{B}_s^h = \bar{B}_s^h \quad , \end{aligned}$$

mas que  $[A_v, B_p] = 0$  em decorrência dos resultados que estão resumidos na Figura C.1, uma vez

$$\begin{aligned}
 A_V B_P \left| \begin{array}{c} a \uparrow \quad b \uparrow \\ d \rightarrow \quad \rightarrow \\ c \uparrow \quad \uparrow \\ \tilde{\alpha} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ s \end{array} \right\rangle &= \delta \left( f^{-1}(\tilde{\alpha}) b g^{-1} s^{-1} c, h \right) A_V \left| \begin{array}{c} a \uparrow \quad b \uparrow \\ d \rightarrow \quad \rightarrow \\ c \uparrow \quad \uparrow \\ \tilde{\alpha} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ s \end{array} \right\rangle \\
 &= \sum_r \delta \left( f^{-1}(\tilde{\alpha}) b g^{-1} s^{-1} c, h \right) \left| \begin{array}{c} r a \uparrow \quad r b \uparrow \\ d r^{-1} \rightarrow \quad \rightarrow \\ c r^{-1} \uparrow \quad \uparrow \\ \tilde{\alpha} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ s \end{array} \right\rangle \\
 B_P A_V \left| \begin{array}{c} a \uparrow \quad b \uparrow \\ d \rightarrow \quad \rightarrow \\ c \uparrow \quad \uparrow \\ \tilde{\alpha} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ s \end{array} \right\rangle &= \sum_r B_P \left| \begin{array}{c} r a \uparrow \quad r b \uparrow \\ d r^{-1} \rightarrow \quad \rightarrow \\ c r^{-1} \uparrow \quad \uparrow \\ \tilde{\alpha} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ s \end{array} \right\rangle \\
 &= \sum_r \delta \left( f^{-1}(\tilde{\alpha}) b g^{-1} s^{-1} c, h \right) \left| \begin{array}{c} r a \uparrow \quad r b \uparrow \\ d r^{-1} \rightarrow \quad \rightarrow \\ c r^{-1} \uparrow \quad \uparrow \\ \tilde{\alpha} \\ \rightarrow \quad \rightarrow \\ s \end{array} \right\rangle
 \end{aligned}$$

**Figura C.1:** Resultado da atuação das duas possíveis combinações entre os operadores  $A_V$  e  $B_P$  sobre os campos que definem o QDMf, de onde é bastante clara toda a comutatividade que existe entre estes dois operadores diante da propriedade (C.3).

que

$$\begin{aligned}
 \delta \left( f^{-1}(\tilde{\alpha}) a b^{-1} (r c)^{-1} (r d), h \right) & \tag{C.3} \\
 = \delta \left( f^{-1}(\tilde{\alpha}) a b^{-1} c^{-1} (r^{-1} r) d, h \right) &= \delta \left( f^{-1}(\tilde{\alpha}) a b^{-1} c^{-1} d, h \right) .
 \end{aligned}$$

Todavia, é quando olhamos para o resultado que segue da dupla ação do operador de aresta  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  (sobre um mesmo setor da rede bidimensional que abriga um QDMf) que a primeira condição, que este modelo tem de respeitar para que ele seja solúvel, acaba ficando bem clara:  $G_2$  tem que ser um grupo Abeliano. Pois, como as componentes que definem o operador  $D_j^{(G_1, \tilde{G}_2)}$  (e que foram apresentadas ao leitor através da Figura 9.3) são tais que

$$a' = f(\tilde{\lambda}) \cdot a \quad , \quad \tilde{\alpha}' = \tilde{\alpha} * \tilde{\lambda} \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}' = \tilde{\lambda}^{-1} * \tilde{\beta} \quad , \tag{C.4}$$

ao notarmos que isso também precisa se estender ao resultado que está resumido pela Figura C.2,

$$D_j \left| \begin{array}{c} \tilde{\alpha} \cdots \tilde{\beta} \\ \uparrow \\ a \end{array} \right\rangle = \sum_{\tilde{\lambda}} \left| \begin{array}{c} \tilde{\alpha}' \cdots \tilde{\beta}' \\ \uparrow \\ a' \end{array} \right\rangle \Rightarrow D_j^2 \left| \begin{array}{c} \tilde{\alpha} \cdots \tilde{\beta} \\ \uparrow \\ a \end{array} \right\rangle = \sum_{\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}'} \left| \begin{array}{c} \tilde{\alpha}'' \cdots \tilde{\beta}'' \\ \uparrow \\ a'' \end{array} \right\rangle$$

**Figura C.2:** Resultado da dupla ação do operador  $D_j$  que nos mostra, diante da rotulação (C.4), toda a necessidade de  $\tilde{G}_2$  ser um grupo Abelianio.

é exatamente esta propriedade que nos garante que

$$a'' = f(\tilde{\lambda}') \cdot a' = f(\tilde{\lambda}') \cdot f(\tilde{\lambda}) \cdot a = f(\tilde{\lambda}' * \tilde{\lambda}) \cdot a = f(\tilde{\lambda} * \tilde{\lambda}') \cdot a \quad ,$$

$$\tilde{\alpha}'' = \tilde{\alpha}' * \tilde{\lambda}' = \tilde{\alpha}' * (\tilde{\lambda} * \tilde{\lambda}') \quad \text{e} \quad \tilde{\beta}'' = (\tilde{\lambda}')^{-1} * \tilde{\beta}' = (\tilde{\lambda}')^{-1} * \tilde{\lambda}^{-1} * \tilde{\beta} = (\tilde{\lambda} * \tilde{\lambda}')^{-1} * \tilde{\beta}$$

uma vez que  $f$  é um homomorfismo.

Em todo caso, é por decorrência da Abelianicidade de  $\tilde{G}_2$  implicar em

$$\tilde{\alpha} * \tilde{\beta} = \tilde{\beta} * \tilde{\alpha} \Rightarrow f(\tilde{\alpha} * \tilde{\beta}) = f(\tilde{\beta} * \tilde{\alpha}) \Rightarrow f(\tilde{\alpha}) \cdot f(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\beta}) \cdot f(\tilde{\alpha})$$

que surge o indicativo de uma segunda propriedade que este QDMf precisa satisfazer para ser considerado solúvel: o conjunto  $\mathcal{Z}$ , que é formado por todos os elementos  $f(\tilde{\gamma})$  tais que  $\tilde{\gamma} \in \tilde{G}_2$ , também precisa ser um grupo Abelianio. Porém, é apenas quando analisamos as outras duas propriedades de comutação  $[A_v, C_j]$  e  $[B_p, D_j]$  que surge uma constatação muito mais forte sobre este conjunto. Afinal de contas, segundo o que resume as Figuras C.3 e C.4 que constam na próxima página, podemos concluir que a única maneira de fazer com que estes dois comutadores seja realmente nulo é com  $f(\tilde{\gamma})$  sendo tal que

$$f(\tilde{\gamma}) \cdot g = g \cdot f(\tilde{\gamma}) \tag{C.5}$$

para qualquer  $g \in G_1$ . Ou seja,  $\mathcal{Z}$  precisa ser muito mais do que um simples grupo Abelianio:  $\mathcal{Z}$  precisa ser o *centro* do grupo  $G_1$ .

$$\begin{aligned}
 A_v D_j \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}} \\ \xrightarrow{c} \circlearrowleft{\tilde{\beta}} \end{array} b \right\rangle &= \sum_{\tilde{\lambda}} A_v \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}'} \\ \xrightarrow{c} \circlearrowleft{\tilde{\beta}'} \end{array} f(\tilde{\lambda})b \right\rangle \\
 &= \sum_{k, \tilde{\lambda}} \left| dk^{-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{ka} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}'} \\ \xrightarrow{ck^{-1}} \circlearrowleft{\tilde{\beta}'} \end{array} kf(\tilde{\lambda})b \right\rangle \\
 D_j A_v \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}} \\ \xrightarrow{c} \circlearrowleft{\tilde{\beta}} \end{array} b \right\rangle &= \sum_k D_j \left| dk^{-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{ka} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}} \\ \xrightarrow{ck^{-1}} \circlearrowleft{\tilde{\beta}} \end{array} kb \right\rangle \\
 &= \sum_{k, \tilde{\lambda}} \left| dk^{-1} \begin{array}{c} \xrightarrow{ka} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}'} \\ \xrightarrow{ck^{-1}} \circlearrowleft{\tilde{\beta}'} \end{array} f(\tilde{\lambda})kb \right\rangle
 \end{aligned}$$

**Figura C.3:** Resultados que seguem da atuações das duas possíveis combinações entre os operadores  $A_v$  e  $D_j$  sobre os campos que definem o QDMf, os quais deixam claro que, para que esses dois operadores comutem um com o outro,  $f(\tilde{\lambda})$  precisa pertencer ao centro de  $G_1$ .

$$\begin{aligned}
 B_s D_j \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}} \xrightarrow{b} \circlearrowleft{\tilde{\beta}} \\ \xrightarrow{c} \end{array} \right\rangle &= \sum_{\tilde{\lambda}} B_s \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}} \xrightarrow{f(\tilde{\lambda})b} \circlearrowleft{\tilde{\beta}} \\ \xrightarrow{c} \end{array} \right\rangle \\
 &= \sum_{\tilde{\lambda}} \delta(f(\tilde{\alpha} * \tilde{\lambda})ab^{-1}f^{-1}(\tilde{\lambda})c^{-1}d, h) \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}'} \xrightarrow{f(\tilde{\lambda})b} \circlearrowleft{\tilde{\beta}'} \\ \xrightarrow{c} \end{array} \right\rangle \\
 D_j B_s \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}} \xrightarrow{b} \circlearrowleft{\tilde{\beta}} \\ \xrightarrow{c} \end{array} \right\rangle &= \sum_{\tilde{\lambda}} \delta(f(\tilde{\alpha})ab^{-1}c^{-1}d, h) D_j \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}} \xrightarrow{b} \circlearrowleft{\tilde{\beta}} \\ \xrightarrow{c} \end{array} \right\rangle \\
 &= \sum_{\tilde{\lambda}} \delta(f(\tilde{\alpha})ab^{-1}c^{-1}d, h) \left| d \begin{array}{c} \xrightarrow{a} \circlearrowleft{\tilde{\alpha}'} \xrightarrow{f(\tilde{\lambda})b} \circlearrowleft{\tilde{\beta}'} \\ \xrightarrow{c} \end{array} \right\rangle
 \end{aligned}$$

**Figura C.4:** Situação inteiramente análoga à da figura anterior, onde vemos não apenas os resultados das atuações das duas possíveis combinações entre os operadores  $B_p$  e  $D_j$  sobre os campos que definem o QDMf, mas toda a necessidade de que  $f(\tilde{\lambda})$  seja um elemento do centro de  $G_1$  para que estes dois operadores comutem.



## Referências Bibliográficas

- [1] A. Tarski: *Introduction to logic and to the methodology of deductive sciences* (Dover Publications Inc., New York 1995).
- [2] M. F. A. de Resende: *Quantização da partícula não relativística em espaços curvos como superfícies do  $\mathbb{R}^n$*  (Dissertação de Mestrado IFUSP, São Paulo 2011).
- [3] N. C. A. da Costa: *O Conhecimento Científico* (Discurso Editorial, São Paulo, 1997).
- [4] A. Yu. Kitaev: *Annals Phys.* **303**, 2 (2003).
- [5] J. K. Pachos: *Introduction to Topological Quantum Computation* (Cambridge University Press, New York 2012).
- [6] Xiao-Gang Wen: *An Introduction to Topological Order* (Notas de Aulas MIT, Cambridge 2009).
- [7] R. L. Feynman, R. B. Leighton, M. L. Sands: *The Feynman Lectures on Physics* (Basic Books, New York 2010).
- [8] Y. A. Çencel, M. A. Boles: *Thermodynamics: An Engineering Approach, 7th Edition* (The McGraw Hill Companies Inc., New York 2011).
- [9] L. D. Landau: *Phys. Z. Sowjetunion* **11**, 26 (1937).
- [10] L. D. Landau: *Phys. Z. Sowjetunion* **11**, 545 (1937).
- [11] V. L. Ginzburg, L. D. Landau: *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 1064 (1950).
- [12] H. L. Stormer: *Rev. Mod. Phys.* **71**, 875 (1999).
- [13] Xiao-Gang Wen: *Quantum Field Theory of Many-body Systems: From the Origins of Sound to an Origin of Light and Electrons* (Oxford Graduate Texts, 2007).
- [14] F. Wilczek: *Phys. Rev. Lett.* **49**, 957 (1982).

- [15] R. Laughlin: *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1935 (1983).
- [16] G. Castagnoli, M. Rasetti: *Int. J. Mod. Phys.* **32**, 2335 (1993).
- [17] D. M. Gitman, I. V. Tyutin: *Quantization of Fields with Constraints* (Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1990).
- [18] J. L. M. Assirati, A. F. Morais, M. F. A. de Resende: *Teorias de calibre discretas como sistemas vinculados* (Em: XVIII Escola de Verão André Swieca de Partículas e Campos, Campos do Jordão 2015).
- [19] M. F. Araujo de Resende, A. F. Morais: *Pure gauge theories on lattices as Hamiltonian systems with constraints* (Artigo em preparação 2017).
- [20] B. Pontecorvo: *Sov. Phys. JETP* **7**, 172 (1958).
- [21] C. K. Jung, C. McGrew, T. Kajita, T. Mann: *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51**, 451 (2001).
- [22] C. Giunti, C. W. Kim: *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics* (Oxford University Press, New York 2007).
- [23] L. Wolfenstein: *Phys. Rev. D* **17**, 2369 (1978).
- [24] S. P. Mikheev, A. Yu. Smirnov: *Sov. J. Nucl. Phys.* **42**, 913 (1985).
- [25] S. P. Mikheyev, A. Yu. Smirnov: *Nuovo Cimento C* **9**, 17 (1986).
- [26] M. F. Araujo de Resende: *Teorias de calibre como sistemas Hamiltonianos com vínculos: um ponto de vista geométrico* (Revista Brasileira do Ensino de Física, Artigo submetido 2017).
- [27] N. de O. Yokomizo: *Teorias de Campo Quasetopológicas Discretas em Dimensão 3* (Tese de doutorado IFUSP, São Paulo 2005).
- [28] M. F. Araujo de Resende: *A didactical overview about the topological order concept in the 2D Toric Code and in one 3D generalisation* (Artigo em finalização, 2017).
- [29] M. F. Araujo de Resende, J. Lorca Espiro, P. Teotonio Sobrinho: *Remarks on Quantum Double Models plus matter – Título provisório* (Artigo em preparação, 2017).



- [30] M. F. Araujo de Resende, J. P. Ibieta Jimenez, J. Lorca Espiro, P. Teotonio-Sobrinho: *Quantum Double Models plus matter as a particular case of 2-categories – Título provisório* (Trabalho em desenvolvimento, 2017).
- [31] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, Third Edition (John Willey & Sons Inc., New York 1999).
- [32] E. L. Lima: *Variedades Diferenciáveis* (Monografia de Matemática IMPA, Rio de Janeiro 1973).
- [33] M. P. do Carmo: *Geometria Riemanniana* (Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro 2005).
- [34] P. A. M. Dirac: *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University Press, New York 1964).
- [35] D. M. Gitman, I. V. Tyutin, Y. S. Prager: *Soviet Phys. Journ.* **26**, 760 (1983).
- [36] M. P. do Carmo: *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies* (Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro 2008).
- [37] M. J. B. Ferreira: *Teorias de Campos Discretas e Modelos Topológicos* (Dissertação de Mestrado IFUSP, São Paulo 2012).
- [38] S. R. A. Salinas: *Introdução à Física Estatística* (EDUSP, São Paulo 1999).
- [39] S. MacLane, G. Birkhoff: *Algebra, Third Edition* (AMS Chelsea Publishing, Rhode Island 1999).
- [40] W. Ambrose, I. M. Singer: *Trans. Amer. Math. Soc.* **75** 428 (1953).
- [41] R. Oeckl: *Discrete Gauge Theory from lattices to TQFT* (Imperial College Press, Londres 2005).
- [42] M. D. Crossley: *Essential Topology* (Springer-Verlag, London 2005).
- [43] E. R. de Andrade: *Revista Matemática Universitária* **34**, 1 (2003).
- [44] J. Jost: *Compact Riemannian Surfaces* (Springer-Verlag, 1997).
- [45] E. E. Moise: *Ann. Math.* **56**, 96 (1952).
- [46] V. V. Prasolov, A. B. Sossinsky: *Knots, Links, Braids and 3-Manifolds: An Introduction to the New Invariants in Low-Dimensional Topology* (American Mathematical Society, Rhode Island 1997).

- [47] Y. Matsumoto: *An Introduction to Morse Theory* (American Mathematical Society, Rhode Island 2002).
- [48] S. Suzuki: *Can. J. Math.* **29**, 111 (1977).
- [49] A. Hatcher: *Algebraic Topology* (Cambridge University Press, New York 2002).
- [50] G. Kuperberg: *Int. J. Math.* **2** **1**, 41 (1991).
- [51] B. G. C. Cunha, P. Teotonio-Sobrinho: *Int. J. Mod. Phys. A* **13**, 3667 (1998).
- [52] E. L. Lima: *Álgebra Linear* (IMPA, Rio de Janeiro 2008).
- [53] L. E. Ballentine: *Quantum Mechanics: A Modern Development* (World Scientific, Singapore, 2000).
- [54] A. Kitaev: *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics* **58**, 267 (2002).
- [55] G. Arfken: *Mathematical Methods for Physics, Third Edition* (Academic Press Inc., San Diego 1985).
- [56] J. L. Synge, A. Schild: *Tensor Calculus* (Dover Publications Inc., New York 1978).
- [57] F. Verstraete, M. M. Wolf, D. Perez-García, J. I. Cirac: *Phys. Rev. Lett.* **96**, 220601 (2006).
- [58] R. Bianconi: *Geometria e Desenho Geométrico I* (Notas de Aula e Exercícios IME-USP, São Paulo 2001).
- [59] C. Castelnovo, S. Trebst, M. Troyer: *Topological Order and Quantum Criticality*, em *Understanding Quantum Phase Transitions*, editado por L. D. Carr (CRC Press, Taylor & Francis Group 2011).
- [60] C. Itzykson, J. B. Zuber: *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill Inc., New York 1980).
- [61] Y. Aharonov, D. Bohm: *Phys. Rev.* **115**, 485 (1959).
- [62] J. C. R. R. Costa, M. G. Carreira Andrade: *CQD - Revista Eletrônica Paulista de Matemática* **2**, 1 (2013).
- [63] H. Bombin, M. A. Martin-Delgado: *Phys. Review B* **78**, 115421 (2008).

- [64] C. Kassel: *Quantum Groups – Graduate Texts in Mathematics, Volume 155* (Springer-Verlag 1995).
- [65] J. Andersson: *A lattice model for topological phases* (Examensarbete Karlstad Universitet, Karlstad 2013).
- [66] M. J. B. Ferreira: *Teoria de gauge e modelos topológicos: anyons e ordem topológica* (Tese de Doutorado IFUSP, São Paulo 2016).
- [67] M. J. B. Ferreira, P. Padmanabhan, P. Teotonio-Sobrinho: *Journal of Physics A* **47**, 375204 (2014).
- [68] M. J. Bernabé Ferreira, J. P. Ibieta Jimenez, P. Padmanabhan, P. Teotônio Sobrinho: *Journal of Physics A* **48**, 485206 (2015).
- [69] R. Oeckl: *Discrete Gauge Theory: From Lattices to TQFT* (Imperial College Press, London 2005).
- [70] U. Pachner: *European Journal of Combinatorics* **12** (2), 129 (1990).
- [71] R. B. Potts: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **48**, 106 (1952).
- [72] J. P. I. Jimenez: *Gauge and Matter Fields on a Lattice - Generalizing Kitaev's Toric Code Model* (Dissertação de Mestrado IFUSP, São Paulo 2015).
- [73] C. Quigg: *Gauge Theories of the Strong, Weak and Electromagnetic Interactions* (Westview Press, 1997).
- [74] M. J. de Oliveira: *Mecânica Estatística* (Notas de Aula e Exercícios IFUSP, São Paulo 2009).
- [75] A. Vaezi, M. Barkeshli: *Phys. Rev. Lett.* **113**, 236804 (2014).
- [76] S. Trebst, M. Troyer, Z. Wang, A. W. W. Ludwig: *A short introduction to Fibonacci anyons* (arXiv:0902.3275v1) [cond-mat.stat-mech]).
- [77] P. A. M. Dirac: *Proc. R. Soc. Lond. A* **126**, 360 (1930).
- [78] J. D. Bjorken, S. D. Drell: *Relativistic Quantum Mechanics* (Mc Graw-Hill, New York 1964).
- [79] F. Halzen, A. D. Martin: *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics* (John Wiley & Sons, 1984).

- [80] J. Chadwick: *Proc. Roy. Soc. A* 136, 692 (1932).
- [81] J. Chadwick: *Proc. Roy. Soc. A* 142, 1 (1933).
- [82] C. D. Anderson: *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933).
- [83] F. Close: *Antimatter* (Oxford University Press).
- [84] K. Murasugi, B. Kurpita: *A Study of Braids* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht 1999).
- [85] N. E. Bonesteel, L. Hormozi, G. Zikos, S. H. Simon: *Phys. Rev. Lett.* **95**, 140503 (2005).
- [86] H. M. Nussenzveig: *Curso de Física Básica: Eletromagnetismo, Volume 3* (Editora Blucher, 2015).
- [87] L. N. Cooper: *Phys. Rev.* **104**, 1189 (1956).
- [88] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer: *Phys. Rev.* **106**, 162 (1957).
- [89] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer: *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [90] J. V. Zuccon: *Supercondutividade em ligas  $Ta_{1-x}Zr_x$*  (Dissertação de Mestrado IFUSP, São Paulo 2016).
- [91] H. B. Nielsen, P. Olesen: *Nucl. Phys. B* 61, 44 (1973).
- [92] F. Ostermann, L. M. Ferreira, C. J. H. Cavalcanti: *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Vol. 20, No. 3, 270 (1998).
- [93] F. C. Alcaraz: *Uma introdução em teorias de calibre na rede* (Notas de aula, Escola de Física Jorge André Swieca 1982).
- [94] L. C. Kinsey: *Topology of Surfaces* (Springer-Verlag, New York 1993).
- [95] W. Rudin: *Fourier Analysis on Groups* (John Wiley & Sons Ltd, New York 1962).
- [96] S. A. Morris: *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian Groups* (Cambridge University Press, New York 1977).
- [97] J. A. Beachy, W. D. Blair: *Abstract Algebra – Third Edition* (Waveland Press Inc., Land Grove 2006).

- [98] H. Pfeiffer: *Annals of Physics* **308**, 447 (2003).
- [99] S. Mantovani, G. Metere: *Theory and Applications of Categories*, Vol. 23, No. 6, 113 (2010).
- [100] J. Baez, U. Schreiber: *Higher Gauge Theory*, em *Categories in algebra, geometry and mathematical physics: a conference in honor of Ross Street's 60th birthday, July 11-16, 2006*, editado por A. Davydov, M. Batanin, M. Johnson, S. Lack, A. Neeman (Contemporary mathematics **431**, American Mathematical Society 2007).
- [101] I. Bucur, A. Deleanu: *Introduction to the Theory of Categories and Functors* (John Wiley & Sons Ltd, London 1970).
- [102] S. Awodey: *Category Theory* (Oxford University Press, New York 2006).
- [103] A. Bullivant, M. Calçada, Z. Kádár, P. Martin, J. Faria Martins: *Topological phases from higher gauge symmetry in 3+1D* (arXiv:1606.06639 [cond-mat.str-el]).
- [104] H. Abbaspour, F. Wagemann: *On 2-holonomy* (Notes de cours de l'Université de Nantes, Nantes 2012).
- [105] R. C. de Almeida: *Ordem topológica em sistemas 3D a partir do invariante de Yetter* (Dissertação de mestrado IFUSP, São Paulo 2017).
- [106] H. K. T. Mendonça: *Invariante de Yetter e ordem topológica – Título provisório* (Tese de doutorado IFUSP, São Paulo 2017).
- [107] M. F. Araujo de Resende: *Molecular structures via electrostatic confinement in self-dual Abelian Quantum Double Models with matter* (Projeto em desenvolvimento, 2016).
- [108] M. F. Araujo de Resende, R. M. Rodrigues: *Toric Code plus matter as a toy model for beta decays* (Projeto em desenvolvimento, 2017).
- [109] Z.-C. Gu: *Neutrino as topological Majorana zero modes: the origin of three generations of neutrinos and their mass mixing* (arXiv:1403.1869 [hep-ph]).
- [110] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey: *Gauge Theories in Particles Physics, Volume I: From Relativistic Quantum Mechanics to QCD* (Institute of Physics Publishing, Bristol and Philadelphia 2003).
- [111] M. E. Peskin, D. V. Schroeder: *An Introduction to Quantum Field Theory* (The Advanced Book Program, Westview Press, Colorado 1995).

- [112] P. A. Martin: *Grupos, Corpos e Teoria de Galois* (Editora Livraria da Física, São Paulo 2010).
- [113] K. Hrbacek, T. Jech: *Introduction to Set Theory - Third Edition, Revised and Explained* (Marcel Dekker Inc., New York 1999).
- [114] P. R. Halmos: *Naive Set Theory* (Springer, New York 1974).
- [115] M. Tinkham: *Group Theory and Quantum Mechanics* (Dover Publications Inc., New York 1964).
- [116] G. James, M. Liebeck: *Representation and Characters of Groups* (Cambridge University Press, Virtual Publishing 2003).
- [117] C. A. Callioli, H. H. Domingues, R. C. F. Costa: *Álgebra Linear e Aplicações* (Atual Editora, São Paulo 1990).
- [118] P. R. Boff: *Elementos de Álgebras de Hopf* (Trabalho de Conclusão de Curso UFSC, Florianópolis 2009).