UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

DESCRIÇÃO DOS CAMPOS MAGNÉTICOS EM TOKAMAKS
POR MAPAS HAMILTONIANOS

JEFFERSON STAFUSA ELIAS PORTELA

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Co-orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física da
Universidade de São Paulo, para a obtenção do título de
Doutor em Ciências Físicas.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP)

Prof. Dr. Álvaro Vannucci (IF-USP)

Prof. Dr. Marisa Roberto (ITA)

Prof. Dr. Renato Pakter (UFRGS)

Prof. Dr. Felipe Barbedo Rizzato (UFRGS)

São Paulo
2008

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Portela, Jefferson Stafusa Elias

Descrição dos Campos Magnéticos em Tokamaks
por mapas Hamiltonianos - São Paulo, 2008.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Física; 2. Tokamaks; 3. Sistemas
Dinâmicos.

USP/IF/SBI-020/2008

Às mulheres de minha vida –

para minha vó Olívia,
para minha mãe, Genir
e para minha esposa, Kathrin.

Agradecimentos¹

À FAPESP (processo 02/08814-2) e, portanto, à sociedade brasileira, especialmente à paulista, pelo apoio financeiro que tornou possível, dentre outras coisas, a realização deste trabalho.

Ao Iberê, pela orientação amiga e sincera consideração – sua postura como orientador é um exemplo. Também ao Viana, pela estimulante iniciação à pesquisa e sempre amistosa orientação.

To Phil Morrison (UT - Austin, EUA), for the nice collaboration and, above all, for his amazing hospitality. Also to the Institute for Fusion Studies at UT and, especially, to Saralyn Stewart, for the best treatment a guest may have.

Ao Adonai Sant’Anna, pela inigualável alfabetização em matemática e generosa amizade.

Aos bons professores que tive na escola, especialmente às professoras Dulce e Diva, pelo encorajamento, que fez diferença.

A todos os colegas caóticos pelas ajudas, discussões, brincadeiras... foram certamente vocês que tornaram esse período memorável: Adri, Albertus, Batista, Edu Altmann, Eduardo Lascio, Elton, Gisele, Rafael, *Renezito*, Silvio e Zwinglio. Ao Gustavo, pela amizade regada a muita rivalidade, respeito e companheirismo.

Aos vários amigos dos tempos de Curitiba, por terem tornado a época da graduação muito mais rica e divertida: Alan, Angela, Bach, Charles, Coninck, Denilso, Eliana, Ieda, Rodrigo, Rosiney, Serbena... Em especial ao Adam e ao Mário, pela amizade e discussões impagáveis.

Ao Clóvis, pela amizade ímpar, pelas excelentes discussões e pelas inúmeras ajudas – sua presença constante, ainda que por vezes virtual, é insubstituível.

À minha mãe, Genir. Não há como expressar a importância que seu apoio e amor têm para mim, se atingi algo, foi porque tive sua ajuda.

To Kathrin. For simply giving meaning to all that.

¹Por mais lugar-comum que seja, não posso deixar de mencionar a inevitável incompletude desta lista.

Resumo

Estudamos a estrutura das linhas de campo magnético de tokamaks, descrita pela dinâmica de mapas hamiltonianos. Utilizando mapas bidimensionais simples, investigamos a interação das linhas de campo com obstáculos no interior da câmara do tokamak, suas propriedades gerais de transporte e a influência de perfis da transformada rotacional não monotônicos. Obstáculos posicionados no interior do vaso correspondem a saídas no espaço de fases do mapa e, sendo a parede da câmara também uma saída, obtemos que as fronteiras das bacias de saída são assintoticamente fractais, apresentando também a propriedade de Wada. Assim, as linhas de campo magnético que atingem um dado obstáculo não se distribuem necessariamente próximas deste, o que pode ter implicações, e. g., para sistemas de medida. Mapas dotados de perfis não monotônicos da transformada rotacional, ditos *não-twist*, modelam tokamaks no regime de *reversed shear* e apresentam uma barreira invariante resistente, que reflete o melhor confinamento observado em tokamaks neste regime. Verificamos que, mesmo após a quebra da barreira invariante, permanece uma barreira efetiva, através da qual o transporte é difusivo e cerca de duas ordens de grandeza mais lento que o transporte poloidal na região.

Abstract

We consider the magnetic field line structure of tokamaks, described by the dynamics of Hamiltonian maps. Using simple bidimensional maps, we study the field line interaction with obstacles inside the tokamak chamber, their general transport properties, and the influence of non-monotonic rotational transform profiles. The obstacles positioned inside the vessel correspond to exits in the map phase space and, being the tokamak wall itself an exit, we find that the boundaries of the exit basins are asymptotically fractal, presenting also the Wada property. Thus, the magnetic field lines that reach a given obstacle are not necessarily wandering closeby this exit, what may have implications, e. g., for measuring systems. Maps endowed with a non-monotonic rotational transform, called nontwist maps, model tokamaks in the reversed shear regime. The maps present a strong invariant barrier in phase space which mirrors the enhanced confinement observed for tokamaks in such regime. We find that even after the breaking of the invariant barrier an effective barrier remains, through which the transport is diffusive and about two orders of magnitude slower than the poloidal transport in the same region.

Sumário

Resumo	vi
Sumário	viii
Lista de Figuras	xi
Lista de Siglas	xii
1 Introdução	1
2 Mapeamentos	4
2.1 Tokamaks e mapas	4
2.1.1 Tokamaks	4
2.1.2 Coordenadas	5
2.1.3 Mapas	6
2.2 Mapas padrão	9
2.2.1 Mapa padrão (<i>twist</i>)	9
2.2.2 Mapa padrão não- <i>twist</i>	11
2.3 Tokamap	13
2.4 Tokamaks com defletores	15
2.5 Tokamaks com limitadores ergódicos	19
2.5.1 Martin-Taylor	19
2.5.2 Ullmann-Caldas	21
2.5.3 Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	23
3 Mapa de Martin-Taylor	25
3.1 Obtenção do mapa	25
3.2 Transporte e transição para o caos global	28
4 Mapas de Ullmann-Caldas	33
4.1 Mapa de Ullmann-Caldas <i>twist</i>	33
4.1.1 Espaço de fases	34
4.1.2 Bacias de saída	36
4.2 Mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	40
4.2.1 Expoentes de Lyapunov	40
4.2.2 Transporte	40

5	Transição para o Caos Global	44
5.1	Busca de órbitas periódicas	44
5.2	Quebra do toro áureo	46
5.3	Quebra do toro <i>shearless</i>	48
6	Conclusões	51
	Referências	53
A	Artigos	58
	Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters	59
	Escaping and transport barrier due to ergodic magnetic limiters in tokamks with re- versed magnetic shear	81
	Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks	89
	Fractal and Wada basin boundaries in tokamaks	99
	Tokamak magnetic field lines described by simple maps	113

Lista de Figuras

2.1	Esquema da câmara do tokamak com limitador magnético ergódico	5
2.2	Toro como um cilindro periódico, sua seção e coordenadas retangulares	6
2.3	Esquema ilustrando a correspondência entre a superfície magnética racional e órbita periódica na seção de Poincaré	8
2.4	Diagrama de uma espaço de fases bidimensional hamiltoniano	9
2.5	Retratos de fases típicos do mapa padrão	11
2.6	Retratos de fases ilustrando a reconexão no mapa padrão não- <i>twist</i>	12
2.7	Retrato de fases típico para o tokamak	14
2.8	Retrato de fases típico para o revtokamak	15
2.9	Esquema da configuração de equilíbrio com um divertor e retrato de fases, para o <i>simple divertor map</i> (SDM)	17
2.10	Pegadas magnéticas sobre a placa do defletor, para o SDM	17
2.11	Retratos de fases para o mapa de Martyn-Taylor	20
2.12	Retrato de fases para o mapa de Ullmann-Caldas	22
2.13	Bacias de saída para o mapa de Ullmann-Caldas	22
2.14	Perfis monotônico e não-monotônico para o fator de segurança	23
2.15	Retrato de fases para o mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	24
2.16	Destrução da barreira, mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	24
3.1	Perturbação crítica em função do <i>shear</i> para o mapa de Martin-Taylor	28
3.2	Série temporal do desvio quadrático médio, mapa de Martin-Taylor	29
3.3	Série temporal da fração presente das linhas de campo, com condições iniciais aleatórias no mar caótico, mapa de Martin-Taylor	31
3.4	Série temporal da perda de linhas de campo, com condições iniciais suficientemente próximas à ilha, mapa de Martin-Taylor	31
3.5	Método de estimativa da posição de escape de uma linha de campo	32
3.6	Bacias de escape para o mapa de Martin-Taylor	32
4.1	Convergência no espaço de fases para método de Newton-Raphson na determinação da iteração do mapa de Ullmann-Caldas	34
4.2	Perfil perturbado da transformada rotacional sobre uma reta no espaço de fases, comparado a um retrato de fases, mapa de Ullmann-Caldas	34
4.3	Retratos de fase retangulares e polares, com ressonância em $r = 0$ e deslocamento de Shafranov, mapa de equilíbrio de Ullmann-Caldas	35
4.4	Caos e reconexão homoclínica no mapa de equilíbrio de Ullmann-Caldas	36

4.5	Perfil da transformada rotacional definida sobre a ilha próxima ao centro do plasma ($r = 0$) para o mapa de Ullmann-Caldas	37
4.6	Ponto fixo hiperbólico esquemático com suas variedades	37
4.7	Variedade estável sobre bacias para três saídas, mapa de Ullmann-Caldas	38
4.8	Bacias de saída e ampliações para o mapa de Ullmann-Caldas	39
4.9	Expoentes de Lyapunov para o mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	41
4.10	Escape pela barreira para o mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	42
4.11	Série temporal do desvio quadrático radial médio, exibindo o transporte difusivo no mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	42
4.12	Estimativa da difusão poloidal por meio das oscilações presentes no início da série da Fig. 4.11, mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i>	43
5.1	Função utilizada na determinação de órbitas periódicas, mapa padrão	47
5.2	Diagrama de bifurcação para órbitas com $\iota = 5/8$ do mapa padrão	48
5.3	Diagramas de bifurcação para o mapa padrão não- <i>twist</i>	49
5.4	Curva de criticalidade para o mapa de Greene e Mao	49
5.5	Toro áureo, crítico, para o mapa padrão não- <i>twist</i>	50

Lista de Siglas

MTM	-	mapa de Martin-Taylor (<i>Martin-Taylor map</i>)
NUCM	-	mapa de Ullmann-Caldas não- <i>twist</i> (<i>nontwist Ullmann-Caldas map</i>)
SDM	-	mapa simples para defletor (<i>simple divertor map</i>)
SM	-	mapa padrão (<i>standard map</i>)
SNM	-	mapa padrão não- <i>twist</i> (<i>standard nontwist map</i>)
SSDM	-	mapa simples simétrico para defletor (<i>symmetric simple divertor map</i>)
UCM	-	mapa de Ullmann-Caldas (<i>Ullmann-Caldas map</i>)
VCM	-	mapa de Viana-Caldas (<i>Viana-Caldas map</i>)

Capítulo 1

Introdução

Na presente tese apresentamos propriedades das linhas de campo magnético de tokamaks, obtidas por meio da descrição por mapas hamiltonianos aproximados. Neste capítulo explicamos como nosso trabalho se insere no cenário da física de tokamaks, e na ciência em geral, e também descrevemos o estilo adotado na confecção da tese.

Em um momento de crescente preocupação com a obtenção de fontes de energia renováveis e menos poluentes¹ a geração de eletricidade por meio de fusão nuclear mostra-se uma possibilidade promissora [Hasselmann et al., 2003], especialmente a longo prazo, caso em que apresenta grande vantagem, por exemplo, sobre a fissão nuclear [Hoffert et al., 2002]. Para que o processo de fusão ocorra, contudo, a repulsão elétrica entre os núcleos deve ser superada, o que é eficientemente atingido em plasmas a altas temperaturas (da ordem de 10^8 K) [Wesson, 2004] as quais, por sua vez, tornam necessário um confinamento não-material. Embora haja outras possibilidades – como o confinamento inercial, em que a própria inércia do alvo combustível o confina, ao ser atingido por potentes feixes de laser – o confinamento magnético constitui um antigo tema de pesquisa, que tem apresentado progressos notáveis [Wesson, 2004].

Os tokamaks são as máquinas mais promissoras para o confinamento magnético de plasmas de fusão. A estabilidade deste confinamento é um problema importante, no qual a configuração das linhas de campo desempenha uma papel fundamental, tanto por influenciar fortemente o transporte originário da turbulência em escala fina [Perkins et al., 1999], quanto por ser a aproximação de primeira ordem para a descrição do fluxo de partículas - que tendem a seguir as linhas de campo magnético.

Formalmente, linhas de campo magnético são órbitas de sistemas hamiltonianos de um grau e meio de liberdade [Morrison, 2000], os quais são, caso a coordenada tipo tempo (correspondente ao meio grau de liberdade) seja periódica, equivalentes a mapas de retorno bidimensionais. Conseqüentemente podemos empregar mapas hamiltonianos bidimensionais para descrever as configurações toroidais magnéticas de plasmas confinados em tokamaks, o que é particularmente adequado à interpretação de fenômenos sob a ótica da dinâmica não-linear.

Embora trajetórias sobre um mapa de retorno para tokamaks possam ser diretamente obtidas por meio da integração direta das equações diferenciais para as linhas de campo magnético, este é

¹Em especial devido ao aquecimento global em curso, causado pela emissão de poluentes gerados por atividades humanas [IPCC, 2007].

um procedimento que requer longos tempos de computação, não sendo adequado para estudar o comportamento de longo prazo das linhas de campo, especialmente propriedades de transporte. Mapas extremamente precisos para tokamaks poderiam ser obtidos das equações da magnetohidrodinâmica (MHD), contendo apenas umas poucas aproximações, entretanto, se faria então necessário o cálculo numérico das funções presentes no mapa: processo computacionalmente tão custoso quanto a integração das próprias equações MHD [Fischer e Cooper, 1998]. Métodos mais rigorosos podem ser utilizados para obter-se mapas a partir de funções hamiltonianas dadas [Abdullaev, 1999, Abdullaev, 2002, Abdullaev, 2004a]. Contudo, para obter uma hamiltoniana apropriada para descrever a dinâmica dos campos em um tokamak, seria necessário, por exemplo, integrar numericamente as linhas de campo magnético (realistas) sobre uma grade, sendo valores intermediários encontrados por interpolação [Abdullaev, 2004b]. Portanto, mapas mais simples, aproximados, devem ser considerados caso se deseje usufruir da vantagem oferecida por mapas, de tempos de computação muito mais curtos.

Além de apresentar maior eficiência computacional, e de facilitar a abordagem via sistemas dinâmicos, a utilização de mapas para descrever as linhas de campo magnético em tokamaks permite, ao se considerar modelos aproximados, a simplificação da análise dos resultados obtidos. Deste modo, a descrição por mapas hamiltonianos estende o arcabouço teórico disponível para a análise dos fenômenos e torna mais claras características fundamentais destes.

O estudo das linhas de campo magnético em tokamaks por meio de mapas simples, aplicando-os a problemas em que esta descrição é particularmente útil, é o tema unificador desta tese. No próximo capítulo, 2, revisamos as características básicas dos mapas hamiltonianos e a relação destes com os campos em tokamaks. Nele expomos também, de forma condensada, os principais mapas utilizados na descrição das linhas de campo magnético em tokamaks, juntamente com seus resultados centrais. Esta exposição sucinta inclui também os mapas por nós estudados, oferecendo, assim, uma contextualização relativamente completa de nosso trabalho.

Os capítulos 3 e 4 são dedicados aos mapas que formam a base de nossas investigações, e contêm a maior parte de nossos resultados originais. O Cap. 3 é dedicado ao mapa de Martin-Taylor [Martin e Taylor, 1984], apresentando, em sua primeira seção, uma dedução deste a partir de considerações sobre a configuração dos campos em tokamaks com limitadores magnéticos ergódicos, e, na seção seguinte, tratando de suas propriedades de transporte. Nele também aplicamos o conceito de bacia de escape à modelagem de obstáculos posicionados no interior da câmara do tokamak, e à colisão das linhas com a parede. No Cap. 4 descrevemos nossos resultados para o mapa de Ullmann-Caldas [Ullmann e Caldas, 2000], que constituem o cerne de nosso trabalho de doutorado. Este é dividido em duas seções: a primeira trata da versão original do mapa, *twist*, i. e., com um perfil monotônico da transformada rotacional; a segunda ocupa-se de sua versão não-*twist*. Na Sec. 4.1 investigamos em maior detalhe algumas particularidades da dinâmica do sistema e apresentamos algumas características fundamentais de suas bacias de saída. Já a seção seguinte, 4.2, trata mais brevemente de considerações dinâmicas, concentrando-se nas propriedades de transporte do mapa, particularmente as relacionadas à barreira não-*twist*.

O Cap. 5 é dedicado a métodos a serem usados em possíveis trabalhos futuros, especialmente continuações do trabalho com mapas não-*twist*. Em sua primeira seção descrevemos um método preciso de busca de órbitas periódicas para mapas reversíveis, método este utilizado na aplicação de um segundo método, para a determinação da transição para o caos global, exemplificado nas seções seguintes. A segunda seção descreve este segundo método e apresenta sua aplicação ao

mapa padrão e ao mapa padrão generalizado – sistemas *twist* em que a transição é marcada pela destruição do toro áureo. A última seção deste capítulo apresenta resumidamente a generalização do método para sistemas não-*twist*, aplicando-o ao mapa padrão não-*twist* e discutindo algumas das particularidades deste mapa.

Ao Cap. 6 reservamos uma sucinta revisão dos resultados apresentados e conclusões alcançadas mais relevantes.

Com relação ao formato da tese, os principais resultados de nosso trabalho estão contidos no Apêndice A, que reúne nossos artigos. Deste modo, o corpo principal da tese constitui uma introdução aos conceitos relevantes e uma contextualização dos resultados, acrescida de alguns desenvolvimentos mais detalhados e resultados ainda não publicados e, também, especialmente no Capítulo 5, de considerações relevantes a trabalhos futuros. No corpo da tese damos destaque apenas a parte dos resultados principais e os apresentamos de forma condensada, evitando redundâncias em relação aos artigos anexados. No entanto, alguma redundância é consentida, visando manter o texto razoavelmente auto-contido e, até certo ponto, independente do Apêndice A.

Uma parcela razoável do Cap. 2 é, essencialmente, uma versão traduzida, e por vezes abreviada, do último artigo do Apêndice A, *Tokamak magnetic field lines described by simple maps* (Pg. 113). Trata-se de um texto já submetido, e que consiste em um trabalho de revisão, com poucos resultados originais. No Cap. 3, a dedução do mapa de Martin e Taylor baseia-se parcialmente em notas não publicadas de R. L. Viana, co-orientador deste trabalho, tratando-se, portanto, de material inédito. Também inédito é o estudo das bacias de escape para este mapa. Já os demais resultados sobre o transporte encontram-se publicados, e maiores detalhes podem ser encontrados no primeiro artigo do Apêndice A: *Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters* [Portela et al., 2003] (Pg. 59).

Na Sec. 4.1, Cap. 4, a primeira sub-seção apresenta considerações não publicadas acerca de ressonâncias próximas ao centro do plasma, descritas pelo mapa de Ullmann e Caldas, e a segunda sub-seção resume propriedades das bacias de escape para este mapa, já divulgadas no trabalho *Fractal and Wada basin boundaries in tokamaks* [Portela et al., 2007b] (Pg. 99). A seção seguinte do Cap. 4, que trata da versão não-*twist* do mapa de Ullmann e Caldas, também apresenta modestos resultados inéditos em sua primeira sub-seção, sobre expoentes de Lyapunov, e sintetiza na segunda parte, sobre transporte, resultados publicados: *Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks* [Portela et al., 2007a] (Pg. 89).

O trabalho aqui descrito se insere em uma antiga linha de pesquisa de nosso grupo, dedicada ao modelamento e análise da estrutura magnética em tokamaks, desenvolvida em colaboração com o Laboratório de Plasmas do IF-USP. Em particular, damos continuidade às investigações baseadas em mapas simples, em curso há mais de 15 anos [Viana e Caldas, 1991, Oda e Caldas, 1995, Caldas et al., 1996, Ullmann e Caldas, 2000, e. g.]. Outros métodos para a obtenção de mapas foram propostos, estes são mais complexos que os por nós considerados, mas incluem intrinsecamente efeitos toroidais, e admitem geometrias mais gerais para os limitadores ergódicos [da Silva et al., 2001].

Capítulo 2

Mapeamentos

Neste capítulo introduzimos os conceitos básicos de modelamento por mapas de campos magnéticos em tokamaks e de dinâmica não-linear. Apresentamos também mapas para tokamaks com limitadores ergódicos, base de nosso trabalho, juntamente com outros mapas, precursores, ou que representam descrições complementares às nossas. Este capítulo baseia-se no último artigo (Pg. 113) do Apêndice A, onde maiores detalhes podem ser encontrados.

2.1 Tokamaks e mapas

2.1.1 Tokamaks

Tokamaks [Wesson, 2004] são máquinas com uma câmara toroidal na qual se estabelecem campos magnéticos para o confinamento de plasmas. Também utilizado em outros experimentos em física de plasmas, o tokamak foi criado com o objetivo de sustentar, no plasma confinado, uma reação de fusão nuclear que permita a geração de energia elétrica por meio do calor gerado no processo. Um confinamento não material é necessário devido às altas temperaturas envolvidas no processo de fusão, e o confinamento magnético, adotado nos tokamaks e máquinas similares, é uma opção particularmente promissora.

O plasma utilizado nos tokamaks geralmente é de hidrogênio – elemento abundante no planeta – e seus isótopos, e os riscos ambientais ligados ao funcionamento de um tokamak são bem menos sérios que os ligados à produção de energia por fissão. Deste modo, a fusão se mostra uma possível fonte de energia comercial muito atraente, fazendo do tokamak um ativo tema de pesquisa nas últimas décadas.

Contudo, para que tokamaks possam ser usados como reatores, existem, essencialmente, duas dificuldades a serem superadas: a de levar certos parâmetros, ligados basicamente à temperatura e à pressão do plasma, a valores suficientemente altos; e a de obter um confinamento estável. É à resolução deste último problema que o modelamento por meio de mapas (e demais técnicas da teoria de sistemas dinâmicos) pode ser útil, especialmente em questões referentes ao transporte em tokamaks.

2.1.2 Coordenadas

A geometria da câmara toroidal de um tokamak, esquematizada na Fig. 2.1, é caracterizada essencialmente por seu raio maior, R_0 , que define o eixo geométrico circular em torno do eixo do toro, e por seu raio menor, b , medido a partir do eixo geométrico. Tal configuração pode ser descrita por meio de um sistema de coordenadas pseudo-toroidal, ou local, (r, θ, ϕ) , esquematizado na Fig. 2.2. As coordenadas r e θ são, respectivamente, o raio a partir do eixo geométrico e o ângulo (dito poloidal), e ϕ é o ângulo toroidal.

Figura 2.1: Esquema da câmara do tokamak, exibindo o ângulo toroidal, ϕ , os raios R_0 e b do toro e sobre este, um limitador magnético caótico – que perturba a borda do plasma, auxiliando no controle da interação entre o plasma e a parede.

A Fig. 2.2 também ilustra a passagem, a partir da aproximação cilíndrica do toro, ao sistema de coordenadas retangular – adequado a regiões próximas à parede do tokamak – dada pelas equações:

$$\begin{aligned} x' &= b\theta, \\ y' &= b - r, \\ z &= R_0\phi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

A aproximação do toro por um cilindro periódico ($z = z \bmod 2\pi R_0$) é tanto melhor, quanto maior a razão de aspecto, R_0/b . Nessa aproximação, o campo magnético toroidal de equilíbrio, B_ϕ , é aproximadamente uniforme e, portanto, o efeito da curvatura toroidal pode ser tratado como um fator perturbativo ou, ainda, numa primeira aproximação, ser desconsiderado. A coordenada y' é a distância à parede do tokamak, de modo que a região $y' < 0$ é externa à câmara. E, assim como z , x é uma coordenada periódica, com $x = x \bmod 2\pi b$. A menos que afirmado em contrário, utilizaremos coordenadas normalizadas $x = x'/(2\pi b)$ e $y = y'/b$ (ou ainda $y = r/b$).

Figura 2.2: Toro representado como um cilindro periódico, sua seção transversal ($z = \text{cte}$) e as coordenadas retangulares.

2.1.3 Mapas

Mapa [Devaney, 1987], *mapeamento*, ou ainda *equação a diferenças finitas*, é um sistema dinâmico determinado por uma função f em que a evolução (tempo) é discreta, com a variável de estado x num instante $n + 1$ sendo função de seu valor no instante imediatamente anterior, n , pela iteração de f , i. e., $x_{n+1} = f(x_n)$, também denotado por $x \mapsto f(x)$.

Linhas de campo magnético são curvas paralelas, em cada ponto do espaço, a um campo magnético $\mathbf{B}$ dado, condição que pode ser escrita, sendo $d\mathbf{l}$ o elemento de linha, como

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0, \quad (2.2)$$

que, em coordenadas cilíndricas, é escrita como:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{R_0 d\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z}. \quad (2.3)$$

Estas equações podem ser numericamente integradas para campos $\mathbf{B}$ arbitrários, fornecendo as trajetórias das linhas de campo. Entretanto, a estrutura das linhas de campo em um tokamak pode ser mais facilmente apreciada por meio de um *mapa de retorno* – cujas trajetórias são obtidas das trajetórias contínuas arbitrando-se uma região no espaço de fases e retendo-se os valores das coordenadas apenas no instante do retorno da trajetória a essa região, que aqui é definida fixando-se uma variável (ver Fig. 2.3). Um mapa de retorno na coordenada ϕ consiste, dada a periodicidade desta, em um mapa de Poincaré sobre a seção $z = \text{const}$, com variáveis (r_n, θ_n) (ou (x_n, y_n)) denotando as coordenadas sobre a superfície de seção no instante n , i. e., as coordenadas da n -ésima intersecção de uma dada linha de campo com a superfície de seção.

Um mapa de Poincaré analítico pode então ser obtido integrando-se analiticamente as equações das linhas de campo do ponto (r_n, θ_n, ϕ_n) ao $(r_{n+1}, \theta_{n+1}, \phi_n + 2\pi)$, obtendo-se assim uma regra recursiva que, dado o ponto de intersecção de uma linha de campo com a superfície, fornece a posição da seguinte. O mapa, numa forma geral, é escrito como:

$$r_{r+1} = f(r_n, \theta_n), \quad (2.4a)$$

$$\theta_{r+1} = g(r_n, \theta_n), \quad (2.4b)$$

em que f e g dependem da natureza do campo magnético. Devido à conservação do fluxo magnético, áreas no espaço de fases devem ser preservadas pelo mapa, i. e., o mapa deve ser hamiltoniano, apresentando jacobiano unitário:

$$\frac{\partial f}{\partial r_n} \frac{\partial g}{\partial \theta_n} - \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \frac{\partial g}{\partial r_n} = 1 . \quad (2.5)$$

A *transformada rotacional*, ou *número de rotação*, ι , pode ser definida como

$$\iota \equiv \left\langle \frac{d\theta}{d\phi} \right\rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right) d\phi , \quad (2.6)$$

e calculada numericamente por meio da truncagem do limite

$$\iota = \frac{1}{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{n} , \quad (2.7)$$

consistindo, portanto, no deslocamento poloidal médio da trajetória por volta toroidal – em que o fator de normalização $1/2\pi$ faz uma volta completa corresponder a 1. O número de rotação é mais comumente usado em textos de dinâmica não-linear, enquanto o *fator de segurança*, q , definido como o recíproco do número de rotação (usualmente não normalizado), é mais comum em teoria de plasmas. A dependência do fator de segurança em relação ao raio é de grande importância na caracterização do regime de um tokamak, sendo um componente relevante dos modelos de linhas de campo magnético.

Em tokamaks [Wesson, 2004], uma corrente toroidal de plasma é induzida, originando um campo magnético poloidal, B_θ , e bobinas montadas sobre a câmara produzem um campo magnético toroidal, B_ϕ^0 – a soma destes campos constitui a configuração magnética de equilíbrio típica de um tokamak, $\mathbf{B}^0$. Deste modo, é proveitoso ilustrar a obtenção de um mapa, a partir de um dado campo magnético, considerando um campo helicoidal, na descrição cilíndrica:

$$\mathbf{B}^0 = (B_r^0 = 0, B_\theta^0(r), B_\phi^0) . \quad (2.8)$$

As equações das linhas de campo magnético para este campo são (Eq. (2.3)):

$$\frac{dr}{d\phi} = 0 , \quad (2.9a)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{R_0 B_\theta^0(r)}{r B_\phi^0} = \iota(r) , \quad (2.9b)$$

que podem ser facilmente integradas de $\phi = \text{cte}$ a $\phi = \text{cte} + 2\pi$, i. e., entre intersecções sucessivas com a superfície de seção $\phi = \text{cte}$, resultando no mapa

$$r_{n+1} = r_n , \quad (2.10a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\iota(r_{n+1}) \mod 2\pi , \quad (2.10b)$$

que descreve círculos concêntricos invariantes, correspondendo a uma estrutura magnética formada por toros aninhados. Este é o protótipo do mapa de equilíbrio de um tokamak, que pode ser então perturbado pela aplicação de um segundo mapa – como, de fato, é implementado em diversos dos modelos tratados neste capítulo.

Dada a Eq. (2.10a), a escolha entre r_{n+1} e r_n no lado direito da Eq. (2.10b) é arbitrária; no caso geral, contudo, é uma escolha que faz parte da construção do modelo. A opção feita

Figura 2.3: Representação esquemática de uma superfície magnética racional com transformada rotacional $1/2$, e da seção de Poincaré definida por $\phi = \text{cte}$. A curva tracejada denota uma das linhas de campo sobre essa superfície, correspondente aos pontos da órbita de período 2 do mapa de retorno.

assegura que o mapa é conservativo e que suas equações podem ser derivadas a partir de uma função geratriz de segunda ordem, $F_2(r_{n+1}, \theta_n)$, por meio das equações

$$r_n = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_n}, \quad (2.11a)$$

$$\theta_{n+1} = \frac{\partial F_2}{\partial r_{n+1}}, \quad (2.11b)$$

sendo que, para o mapa (2.10), a função geratriz é dada por

$$F_2(r_{n+1}, \theta_n) = r_{n+1}\theta_n + \int^{r_{n+1}} \iota(r') dr'. \quad (2.12)$$

Sabe-se [Lichtenberg e Lieberman, 1992] que um valor racional de ι , k/l , implica órbitas periódicas de período l , i. e., linhas de campo que se fecham após l revoluções toroidais e k voltas poloidais. A linha de campo na Fig. 2.3 descreve meia volta poloidal após uma volta toroidal, $\iota = 1/2$, fechando-se em duas voltas toroidais, a órbita correspondente no mapa de Poincaré tendo período 2: $(r_{n+2}, \theta_{n+2}) = (r_n, \theta_n)$. Um valor irracional de ι corresponde a órbitas quase-periódicas, que preenchem densamente a superfície magnética. Da teoria de sistemas dinâmicos sabemos que as órbitas periódicas ressoam com a perturbação, dando origem a cadeias de ilhas, e que órbitas quase-periódicas, os chamados toros (ou curvas) KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser), sobrevivem a perturbações suficientemente pequenas, sendo mais resistentes as curvas mais irracionais¹. A Fig. 2.4 ilustra este cenário para o caso integrável, i. e., sem caos. No caso de a integrabilidade ser quebrada, as separatrizes e parte das curvas KAM podem ser destruídas, dando lugar a regiões caóticas – que apresentam infinitos pontos de sela (i. e.,

¹Um número irracional a pode ser escrito como uma fração continuada infinita, $a_0 + 1/(a_1 + 1/(a_2 + 1/\dots))$, cujas truncagens constituem uma sequência de aproximações que converge para a ; um grau de irracionalidade pode então ser rigosamente definido por meio da taxa de convergência, sendo mais irracionais aqueles números para os quais a convergência é mais lenta. Os números mais irracionais ($a_n = 1 \ \forall n > N, N \in \mathbb{N}$) são ditos *nobres*.

hiperbólicos) mergulhados entre as órbitas caóticas. Sistemas que têm a integrabilidade quebrada por perturbações de intensidade suficientemente baixa, apresentam um cenário globalmente similar ao da Fig. 2.4, com regiões caóticas arbitrariamente estreitas.

Figura 2.4: Representação esquemática da configuração do espaço de fases retangular de um mapa perturbado integrável. São mostradas duas cadeias de ilhas separadas por uma curva KAM. A separatriz, S, de uma das cadeias, e uma das ilhas, I, estão indicadas, juntamente com um dos pontos elípticos, E, e um dos hiperbólicos, H.

Quando o fator de segurança é uma função monotônica do raio, ou seja, quando a “condição *twist*”,

$$\frac{\partial x_{n+1}(x_n, y_n)}{\partial y_n} \neq 0 \quad \forall (x_n, y_n), \quad (2.13)$$

é satisfeita, o mapa é dito *twist* [Morrison, 2000], e o assim chamado *cisalhamento magnético* (*magnetic shear*), sendo proporcional à derivada de q em relação a r , é não-nulo em todo o espaço de fases; caso contrário, por exemplo, quando q tem um extremo (existindo, portanto, uma região de cisalhamento nulo – *shearless*), o mapa é dito não-*twist*. Em termos do mapa (2.10) a condição *twist* significa que a derivada $\partial \theta_{n+1} / \partial r_n = \partial \iota(r_{n+1}) / \partial r_n$ não muda de sinal no intervalo relevante de r_n . Um perfil não-monotônico modifica sensivelmente a dinâmica das trajetórias, especialmente a interação entre cadeias de ilhas adjacentes, alterando significativamente a topologia do espaço de fases. Em tokamaks, perfis não-monotônicos do fator de segurança podem ser obtidos por muitas técnicas experimentais e estão relacionados a um melhor confinamento.

2.2 Mapas padrão

2.2.1 Mapa padrão (*twist*)

Introduzido por J. B. Taylor e estudado extensamente por B. V. Chirikov [Greene, 1979, Chirikov, 1979], o Mapa Padrão *twist* (SM, do inglês *Standard Map*) é comumente utilizado no estudo de propriedades fundamentais de sistemas hamiltonianos. Trata-se de um mapa *twist* perturbado radialmente, dado pelas equações

$$r_{n+1} = r_n + K \sin(\theta_n), \quad (2.14a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_{n+1} \mod 2\pi, \quad (2.14b)$$

em que K quantifica a intensidade da perturbação. Temos que a transformada rotacional de equilíbrio (i. e., $K = 0$) é $\iota(r) = \theta_{n+1} - \theta_n = r$. Devido à sua relativa simplicidade, o SM se mostra

um mapa muito apropriado para se descrever os fenômenos básicos de sistemas hamiltonianos bidimensionais, e também, como mostrado abaixo, constitui um modelo aproximado para linhas de campo magnético em tokamaks.

Considerando uma perturbação magnetostática, da forma geral

$$\mathbf{B}^1 = (B_r^1(r, \theta, \phi), B_\theta^1(r, \theta, \phi), B_\phi^1(r, \theta, \phi)) ,$$

temos que as equações das linhas de campo (2.3) resultam, considerando as Eq. (2.9), em

$$\frac{dr}{d\phi} \simeq \frac{R_0 B_r^1}{B_\phi^0} , \quad (2.15a)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} \simeq \iota(r) + \frac{R_0 B_\theta^1}{r B_\phi^0} , \quad (2.15b)$$

em que assumimos que $|B_\phi^1| \ll |B_\phi^0|$. Supondo também que B_θ^1 é muito menor que o campo toroidal de equilíbrio, e integrando sobre uma volta completa, obtemos

$$r_{n+1} = r_n + \frac{R_0}{B_\phi^0} \int_0^{2\pi} B_r^1(r_{n+1}, \theta_n, \phi) d\phi , \quad (2.16a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \iota(r_{n+1}) . \quad (2.16b)$$

O SM pode ser obtido a partir deste mapa geral tomando-se um perfil do fator de segurança dado por $q(r) = 2\pi/r$, que corresponde a $\iota(r_{n+1}) = r_{n+1}$, e considerando uma situação em que apenas um modo² do campo perturbativo radial é retido, i. e.,

$$\frac{R_0}{B_\phi^0} \int_0^{2\pi} B_r^1(\theta_n, \phi) d\phi \equiv K \sin(\theta_n) . \quad (2.17)$$

O SM é um mapa conservativo, podendo ser obtido da função geratriz

$$F_2(r_{n+1}, \theta_n) = \frac{1}{2} r_{n+1}^2 + r_{n+1} \theta_n + K \cos(\theta_n) . \quad (2.18)$$

Embora o SM seja um modelo altamente idealizado para as linhas de campo magnético – com um perfil pouco realístico do fator de segurança e uma perturbação particularmente simples – ele apresenta as mesmas propriedades fundamentais de modelos mais sofisticados, e se mostra particularmente útil na descrição da dinâmica local de mapas mais complexos [Lichtenberg e Lieberman, 1992, pp. 169, 250].

Um dos fenômenos genéricos para o qual o SM fornece uma explanação geral é o efeito de perturbações ressonantes sobre dinâmicas previamente integráveis, com o surgimento e crescimento de ilhas e sobrevivência de toros invariantes, como descrito pelos teoremas de Poincaré-Birkhoff e KAM, respectivamente. Outro importante fenômeno é a passagem ao regime de caos global no espaço de fases por meio da interação entre ressonâncias adjacentes. A Fig. 2.5 exemplifica este último processo, com toros invariantes e ilhas sendo destruídos com a ampliação da perturbação.

É bem conhecido que, para $K < K_c \sim 0,971635$, existem ainda alguns toros KAM entre as ilhas, o último a ser quebrado pela perturbação sendo o toro com transformada rotacional igual à razão áurea (o número mais irracional). O transporte radial das linhas de campo é limitado

²Um modo de uma série de Fourier, i. e., uma frequência.

por estes toros, que atuam como barreiras. Mas, após a quebra destes, o transporte é acentuado pelos *modos aceleradores* ou *balísticos*³, que existem devido à periodicidade em y apresentada pelo SM. Para valores de K suficientemente elevados, o coeficiente de difusão aproxima-se de um valor quase-linear $D_{QL} = K^2/4$.

Para tornar mais fáceis comparações com outros mapas, utilizaremos o SM na seguinte forma:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi x_n) , \quad (2.19a)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \mod 1 . \quad (2.19b)$$

Figura 2.5: Retratos de fases do SM, exibindo o fenômeno genérico em sistemas *twist* da interação de ilhas levando à destruição de toros KAM. Em (a), $K = 0,9$, as principais cadeias de ilhas estão separadas por curvas KAM; conforme a intensidade da perturbação é aumentada, (b) $K = 1,1$, sua largura cresce e o surge caos global no espaço de fases.

2.2.2 Mapa padrão não-*twist*

Desempenhando, dentre os sistemas não-*twist*, um papel similar ao do SM entre os *twist*, o mapa padrão não-*twist* (SNM, do inglês *Standard Nontwist Map*) tem uma história mais recente, já tendo sido, contudo, extensivamente estudado [Howard e Hohs, 1984, Fuchss et al., 2006, e suas referências]. Devido ao seu perfil quadrático do fator de segurança, o SNM viola a condição *twist*, i. e., apresenta *shear* (dq/dy) nulo para algum valor de y . Especificamente, a condição é violada ao longo de uma curva no espaço de fases, e mapas mais complexos que, da mesma forma, apresentem extremos isolados no perfil da transformada rotacional, são aproximados nas regiões desses extremos pelo SNM [del Castillo-Negrete e Morrison, 1993].

O SNM é usualmente escrito da seguinte forma:

$$y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n) , \quad (2.20a)$$

$$x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \mod 1 , \quad (2.20b)$$

em que b determina a intensidade da perturbação e a é o parâmetro do perfil do fator de segurança, que é dado, na situação de equilíbrio ($b = 0$), por $\iota(y) = x_{n+1} - x_n = a(1 - y^2)$.

³Regime em que o desvio quadrático médio evolui quadraticamente, ao contrário do caso *normal*, que é linear.

Devido ao fato de que muitos resultados importantes, como os teoremas KAM e de Poincaré-Birkhoff, são globalmente válidos apenas para sistemas *twist*, mapas não-*twist* podem apresentar novos fenômenos, como a reconexão de separatrizes [Howard e Hohs, 1984]. Os processos de reconexão são principalmente de dois tipos: homoclínico, com os centros das ilhas alinhados verticalmente, e heteroclínico, em que eles estão contra-alinhados, i. e., com pontos elípticos alinhados com os hiperbólicos. O processo da reconexão heteroclínica, ou de laço (*loop*), é mostrado na Fig. 2.6: o perfil não-monotônico de q leva à existência de pares de toros com mesmo ι , portanto, uma perturbação ressonante origina duas cadeias de ilhas de mesmo período (a); conforme a perturbação cresce, as ilhas se alargam e as separatrizes se fundem (b); então as separatrizes de cada uma das cadeias passam a conectar os pontos hiperbólicos que inicialmente pertenciam a outra, criando os laços (c). A Fig. 2.6 também exibe, (d), uma bifurcação em que os pontos elípticos e hiperbólicos desaparecem ao colidirem, assim como o surgimento e persistência de uma barreira invariante separando as regiões do espaço de fase onde antes havia as ilhas.

Figura 2.6: Retratos de fases exibindo o processo de reconexão no SNM para $a = 0,345$ e: (a) $b = 0,35$, há duas cadeias de ilhas, destacamos em verde uma das curvas invariantes entre elas; (b) para $b = 0,376072$, as cadeias se aproximam e compartilham as separatrizes, destacadas em verde; (c) com $b = 0,42$ temos a topologia de laço (*loop*), com um meandro em destaque; (d) e com $b = 0,461434$, os pontos fixos colidiram. Valores dos parâmetros obtidos de [Wurm et al., 2004].

O SNM também exibe o cenário de reconexão homoclínica, que leva à assim chamada topologia de vórtice, ou de dipolo. Nele, conforme o parâmetro é variado, os pontos hiperbólicos,

verticalmente alinhados, encontram-se sobre uma curva invariante entre as cadeias e, então, movem-se sobre esta linha até colidirem, juntamente com os pontos elípticos das cadeias.

Outros cenários de reconexão são também observados para o SNM [Shinohara e Aizawa, 1998, Wurm et al., 2005]. No entanto, considera-se que apenas laços (assimétricos) e pares de vórtices são genéricos [Howard e Humpherys, 1995], assim como a reconexão de pares de vórtices, chamada de “reconexão tripla” (*tripling reconnection*), que envolve a criação de uma terceira cadeia de ilhas [Petrison, 2002].

À reconexão de laço está associado o surgimento de curvas invariantes que não são funções sobre o eixo x , os assim chamados “meandros” (*meanders*). Tais meandros, que surgem entre as cadeias reconectadas de ilhas, influenciam significativamente as propriedades de transporte do SNM, atuando como uma barreira [del Castillo-Negrete et al., 1996, Shinohara e Aizawa, 1997, Shinohara e Aizawa, 1998, Fuchss et al., 2006]. Mesmo após a quebra dessa barreira invariante, a difusão de linhas de campo ao longo da direção poloidal é maior que na direção radial, indicando a existência de uma barreira de transporte efetiva. Entretanto, verifica-se que a difusão local é acentuada pelo processo de reconexão [Prado e Corso, 2000]. Assim como para o SM, verifica-se que o SNM constitui-se numa boa aproximação de mapas mais complexos [Horton et al., 1998, Portela et al., 2007a].

2.3 Tokamap

Derivado de uma versão modificada da função geratriz de Wobig, um *ansatz* para um stellarator⁴ sujeito à uma perturbação localizada [Wobig, 1987], as equações do tokamap são [Balescu et al., 1998]:

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ P(x_n, y_n) + \sqrt{[P(x_n, y_n)]^2 + 4y_n} \right\} , \quad (2.21a)$$

$$x_{n+1} = x_n + \iota(y_{n+1}) - \frac{k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(1 + y_{n+1})^2} \cos(2\pi x_n) \mod 1 , \quad (2.21b)$$

com

$$P(x, y) = y - 1 - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x) . \quad (2.22)$$

Em que x é o ângulo poloidal, y o raio, k o parâmetro de perturbação e ι a transformada rotacional de equilíbrio. O perfil de ι adotado, obtido utilizando-se suposições físicas simples em uma geometria cilíndrica, é dado por

$$\iota(y) = \frac{\iota_0}{4} (2 - y)(2 - 2y + y^2) , \quad (2.23)$$

em que $\iota_0 \equiv \iota(0)$ é o valor no eixo geométrico – coincidente com o eixo magnético no modelo.

O tokamap foi construído para satisfazer algumas condições, consideradas mínimas pelos autores, para um modelo para o tokamak: como ter um eixo magnético “impenetrável”, com $y_0 = 0$ implicando $y_n \geq 0$ para todo $n \geq 0$, e admitir um perfil realístico da transformada rotacional, que no modelo pode ser livremente escolhido. Conhecidas instabilidades associadas à existência de uma região com $1/\iota = q < 1$ podem ser estudadas tomando-se valores elevados de ι_0 , que causam no mapa a um aumento no efeito da perturbação. O tokamap também pode

⁴Um stellarator difere conceitualmente de um tokamak essencialmente por não apresentar uma corrente toroidal de plasma.

ser usado para descrever tokamaks com limitadores ergódicos, devido à maior intensidade da perturbação próximo à borda do plasma. A Fig. 2.7 exibe um retrato de fases do tokamap para valores típicos dos parâmetros, $k = 4$ e $\iota_0 = 1$, mostrando uma região caótica ocupando uma faixa considerável do espaço de fases ainda contida por toros invariantes. No modelo, a localização da parede é deixada livre.

Figura 2.7: Retrato de fases para o tokamap para $k = 4$ e $\iota_0 = 1$, exibindo órbitas regulares e caóticas típicas.

Os resultados básicos para as propriedades do transporte radial do tokamap são similares aos obtidos para o SM com caos não-global, situação em que a existência de curvas KAM limitando a faixa caótica e de regiões “grudentas” (*sticking*) em torno das ilhas leva ao regime sub-difusivo [Balescu et al., 1998]. O fenômeno de “grudamento” (*stickiness*) associado às ilhas imersas no mar caótico também resulta em comportamento intermitente, permitindo uma descrição por meio de passeios aleatórios [Balescu, 1997]. Os toros mais resistentes são nobres, i. e., apresentam transformadas rotacionais que são números nobres, e são encontrados próximos a ilhas [Misguich, 2001, Misguich et al., 2002], concordando com observações experimentais e considerações teóricas [Wobig, 1987]. Uma extensa descrição do transporte e de barreiras nobres no tokamap pode ser encontrada em [Misguich et al., 2003], e um estudo das barreiras mais recente em [Constantinescu e Constantinescu, 2005].

A liberdade na escolha do perfil da transformada rotacional permite usar o tokamap para estudar regimes não-*twist*, simplesmente alterando o perfil para um não-monotônico. Um perfil com essa característica, que se ajusta a dados experimentais é dado por [Balescu, 1998]:

$$\iota(y) = \iota_{\max} [1 - a(cy - 1)^2] , \quad (2.24)$$

em que $\iota_{\max}$ é o máximo de $\iota(y)$ e os parâmetros a e c podem ser escritos em termos de $\iota_0 \equiv \iota(0)$ e $\iota_1 \equiv \iota(1)$:

$$a = \frac{\iota_{\max} - \iota_0}{\iota_{\max}} , \quad c = 1 + \left(\frac{\iota_{\max} - \iota_1}{\iota_{\max} - \iota_0} \right)^{1/2} . \quad (2.25)$$

As Eq. (2.21), com o perfil dado acima, constituem o assim chamado *revtokamak* [Balescu, 1998].

Valores típicos para as constantes do perfil são aproximadamente $\iota_0 = 1/3$, $\iota_{\max} = 2/3$ e $\iota_1 = 1/6$ – pequenas variações nesses parâmetros podem levar a mudanças significativas na configuração do espaço de fases. Considerando esses valores, e $k = 4$, a Fig. 2.8 mostra algumas órbitas antes do processo de reconexão de laço, como em Fig. 2.6(a).

Figura 2.8: Retrato de fases para o revtokamak para $k = 4$, $\iota_0 = 1/3$, $\iota_{\max} = 2/3$ e $\iota_1 = 1/6$.

Considerando um espaço de fases estendido que inclui regiões fora do intervalo fisicamente relevante, $0 \leq y \leq 1$, um estudo completo da estabilidade dos pontos fixos é feito no trabalho original, [Balescu, 1998], mostrando que a configuração de dipolo para o processo de reconexão, observado no SNM (Sec. 2.2), não é encontrado no intervalo fisicamente significativo do tokamak. Contudo, se admitirmos valores negativos de y nas equações (em desacordo com a interpretação física de y como raio), uma configuração similar à de dipolo tem lugar em torno da “barreira impenetrável” em $y = 0$. De modo geral, a equivalência *cadeia de período ímpar* $\leftrightarrow$ *cenário de laço*; *cadeia de período par* $\leftrightarrow$ *cenário de dipolo*, válida para o SNM, não é observada no revtokamak.

2.4 Tokamaks com defletores

Introduzido como o mais simples modelo para a configuração magnética de um tokamak equipado com um defletor, o “mapa simples para defletor” (SDM, *simple divertor map*) é especialmente voltado ao estudo do fluxo e pegadas magnéticas sobre as placas dos defletores. Defletores (*divertors*) produzem configurações magnéticas que apresentam uma separatriz em torno dos usuais toros aninhados, com um ou mais pontos pontos hiperbólicos, de modo que o fluxo de calor e impurezas sejam desviados para as placas do defletor, reduzindo o desgaste das paredes da câmara do tokamak e melhorando o confinamento do plasma. As pegadas magnéticas são definidas pelos pontos de impacto com as placas.

O SDM [Punjabi et al., 1992] é dado pelas seguintes equações:

$$x_{n+1} = x_n - ky_n(1 - y_n) , \quad (2.26a)$$

$$y_{n+1} = y_n + kx_{n+1} , \quad (2.26b)$$

em que (x_n, y_n) são as coordenadas retangulares sobre a superfície de seção poloidal – *diferentemente* do SM, em que (x_n, y_n) são as variáveis de ação e ângulo. Aqui k determina tanto o fator de segurança quanto a amplitude das assimetrias toroidais no campo magnético, naturais ou impostas externamente. De fato, o termo de perturbação na Eq. (2.26a) é ky_n^2 , e o fator de segurança por iteração, q_1 , no sistema linearizado, é dado por $\sin(2\pi/q_1) = k(1 - k^2/4)^{1/2}$. O mapa possui um parâmetro extra, N_{mapa} , que consiste no número de iterações do mapa que se considera equivalente a uma volta toroidal – em outros modelos costuma-se ter $N_{\text{mapa}} = 1$. Esse parâmetro é introduzido para que se tenha um perfil realístico do fator de segurança, $q(y) = d\phi/d\theta$. Para $k = 0,6$, encontra-se numericamente que $q_{1 \text{ eixo}} \approx 10$ e $q_{1 \text{ borda}} \approx 30$, de tal modo que $N_{\text{mapa}} = 10$ resulta em $q_{\text{eixo}} \approx 1$ e $q_{\text{borda}} \approx 3$.

Os pontos de impacto das linhas de campo magnético sobre as placas do defletor, as pegadas magnéticas, podem ser encontrados por meio do assim chamado SDM *contínuo*:

$$x(\varphi) = x_n - k\varphi y_n(1 - y_n) , \quad (2.27a)$$

$$y(\varphi) = y_n + k\varphi x(\varphi) , \quad (2.27b)$$

em que $\varphi \equiv N_{\text{mapa}}\phi/2\pi$ atua como o “peso” linear do parâmetro k , partindo da n -ésima até a $(n+1)$ -ésima iteração do mapa, tal que $(x(0), y(0)) = (x_n, y_n)$ e $(x(1), y(1)) = (x_{n+1}, y_{n+1})$.

Com ϕ atuando como variável tipo-tempo, o SDM contínuo pode ser obtido como uma solução aproximada das equações de movimento para a hamiltoniana integrável:

$$H(x, y) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{3}(y^2 - y^3) , \quad (2.28)$$

com x sendo o momento canônico e y a posição canônica. O equivalente mecânico de (2.28) é uma partícula de massa constante sujeita a um potencial unidimensional, $U \propto y^2/2 - y^3/3$, para o qual $U(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \mp\infty$, com um poço centrado em $y = 0$ e uma barreira em $y = 1$. O espaço de fases correspondente está representado na Fig. 2.9(a), que exhibe, esquematicamente, a configuração de equilíbrio típica da dinâmica de um defletor – com ilhas em torno de $(0, 0)$ correspondendo às oscilações no poço, e o ponto hiperbólico em $(0, 1)$ sendo o ponto de equilíbrio instável no topo do máximo local do potencial. Um retrato de fase típico para o SDM pode ser visto na Fig. 2.9(b), que mostra toros KAM circundando o ponto elíptico em $(0, 0)$, concordando com a descrição contínua acima.

O procedimento para determinar os pontos de colisão entre as linhas de campo e as placas do defletor é o seguinte [Punjabi et al., 1996]: para um dado conjunto de condições iniciais e um valor fixo de y_{placa} , itera-se o mapa até que a condição $y_n \leq y_{\text{placa}} \leq y_{n+1}$ seja satisfeita; então a coordenada toroidal do ponto de colisão, φ_s , é determinada utilizando-se as Eq. (2.27):

$$y_{\text{placa}} = y_n + k\varphi_s[x_n - k\varphi_s y_n(1 - y_n)] , \quad (2.29)$$

e a coordenada x do ponto de colisão, x_s , com a Eq. (2.27a):

$$x_s = x(\varphi_s) = x_n - k\varphi_s y_n(1 - y_n) . \quad (2.30)$$

Figura 2.9: (a) Vista esquemática da configuração de equilíbrio de um defletor, com o ponto elíptico em $(0, 0)$ circundado por ilhas, limitadas pela separatriz, que inclui o ponto hiperbólico em $(0, 1)$. Pequenas perturbações levam à formação de uma estreita camada caótica na região da separatriz, cujas órbitas terminam por atingir as placas, que, na simulação, são colocadas em $y_{\text{placa}} = 1$. (b) Retrato de fases do SDM para $k = 0,6$, exibindo o ponto fixo estável em $(0, 0)$ e algumas curvas KAM.

A pegada obtida utilizando-se essa rotina, considerando $y_{\text{placa}} = 1$ e para $k = 0,6$, consiste em uma estreita faixa toroidal (Fig. 2.10). A largura da pegada cresce com k (segundo aproximadamente $k^7/3$ para $k > 0,6$, segundo nossa estimativa), mas sua estrutura e forma permanecem as mesmas [Punjabi et al., 1996]. Para baixos valores de k [Punjabi et al., 1992], a densidade de fluxo magnético sobre as placas do defletor é aproximadamente seis vezes maior que a do fluxo na camada caótica da região da separatriz.

Figura 2.10: Pegada das linhas de campo magnético sobre a placa do defletor para $k = 0,6$.

Além de intruduzir caos no sistema, a discretização da solução da hamiltoniana da Eq. (2.28)

leva a uma assimetria em relação ao eixo y (ver Fig. 2.9(b)), enquanto $H(x, y)$ é uma função par de x . Outra diferença com relação à hamiltoniana é que, enquanto esta é independente do tempo, os retratos de fases gerados pelo DSM contínuo mostram uma dependência com relação a φ [Punjabi et al., 1996]. Estas questões justificam a introdução do SDM simétrico (SSDM) [Punjabi et al., 1996], dado por:

$$y_{n+1} = y_n + 2kx_n - 2k^2y_n(1 - y_n) , \quad (2.31a)$$

$$x_{n+1} = x_n - ky_n(1 - y_n) - ky_{n+1}(1 - y_{n+1}) , \quad (2.31b)$$

que consiste na composição do mapa inverso do SDM (adicionalmente fazendo-se $k \rightarrow -k$), com o próprio SDM. Embora não seja tão simples quanto o SDM, o SSDM modela mais fielmente a dinâmica da hamiltoniana correspondente e é usualmente preferido como modelo de equilíbrio em implementações de modelos mais sofisticados [Punjabi et al., 2003, Ali et al., 2004].

Embora os termos em k possam simular assimetrias toroidais gerais, inerentes ou externas [Punjabi et al., 1992], diversas versões do mapa foram introduzidas para levar em conta essas assimetrias de maneira mais realista. Duas destas versões, estudadas em maior detalhe, tratam do efeito de uma corrente em um aro sobre o eixo y , e das assimetrias naturalmente presentes no tokamak – altos e baixos modos, respectivamente (*low- and high-MN perturbations*).

Modelando a perturbação de baixos modos utilizando o termo $\delta_n = \delta_b \cos(2\pi n/N_{map})$, com δ_b sendo a amplitude da perturbação, o mapa utilizado é dado por [Ali et al., 2004]:

$$y_{n+1} = y_n + 2k(1 - \delta_n)x_n - 2k^2y_n(1 - \delta_n)(1 - \delta_n - y_n) , \quad (2.32a)$$

$$x_{n+1} = x_n - ky_n(1 - \delta_n - y_n) - ky_{n+1}(1 - \delta_n - y_{n+1}) . \quad (2.32b)$$

A introdução da perturbação com baixos-MN leva a uma topologia do espaço de fases menos simétrica que a do SSDM não perturbado, e causa o surgimento de grandes ilhas na região caótica, alterando também a topologia das pegadas magnéticas.

A introdução de perturbações com alto-MN, por outro lado, não altera significativamente as características topológicas das pegadas, tendo como principal efeito a homogeneização da concentração de colisões sobre as placas. Esta é uma característica particularmente importante, dado que a concentração do fluxo de energia que atinge a parede ou as placas constitui um problema experimental muito mais sério que o fluxo total de energia sobre elas. As equações do mapa, dito “mapa de dipolo” (*dipole map*), utilizado nas investigações são [Punjabi et al., 1997, Punjabi et al., 2003]:

$$x_{n+1} = x_n + 2\delta_d s^3 x_{n+1} \frac{y_n - y_s + s}{[x_{n+1}^2 + (y_n - y_s + s)]^2} , \quad (2.33a)$$

$$y_{n+1} = y_n + \delta_d s^3 x_{n+1} \frac{(y_n - y_s + s)^2 - x_{n+1}^2}{[x_{n+1}^2 + (y_n - y_s + s)]^2} , \quad (2.33b)$$

em que s é a distância do aro ao último toro intacto e δ_d é a intensidade da perturbação de dipolo.

2.5 Tokamaks com limitadores ergódicos

O tema central de nossa tese é a dinâmica das linhas de campo magnético em tokamaks, e o efeito de limitadores magnéticos ergódicos sobre esta. Limitadores ergódicos⁵, como já explicado na primeira seção deste capítulo, são configurações em que correntes externas adicionais perturbam a borda do plasma, auxiliando no controle da interação entre o plasma e a parede.

Nas próximas seções introduzimos brevemente os mapas por nós pesquisados – Martin-Taylor e Ullmann-Caldas (*twist* e não-*twist*) – deixando para os capítulos seguintes uma apresentação mais detalhada.

2.5.1 Martin-Taylor

O mapa de Martin e Taylor (MTM) [Martin e Taylor, 1984] foi um dos primeiros mapas construídos para modelar linhas de campo magnético em tokamaks e o primeiro a considerar um limitador magnético ergódico. Suas coordenadas retangulares são apropriadas para a descrição de regiões próximas à parede, onde a ação dos limitadores é mais pronunciada.

O MTM consiste na composição de dois mapas: um mapa integrável simples para a descrição da dinâmica de equilíbrio e um mapa perturbativo, que quebra a simetria. O mapa de equilíbrio apresenta órbitas que mantêm um raio y fixo, enquanto o avanço no ângulo x por iteração varia linearmente com o raio – similarmente ao SM, mas com a introdução de um parâmetro de cisalhamento, s . O mapa perturbativo é obtido do cálculo do campo magnético do limitador, cuja geometria está representada nas Fig. 2.1 e 2.2. Tal cálculo é descrito no Cap. 3. Considera-se que o limitador atua apenas sobre a estreita seção toroidal que ocupa, a dinâmica de equilíbrio atuando na maior parte do toro.

A composição destes dois mapas é conservativa, e dada pelas seguintes equações:

$$x_{n+1} = x_n + sy_n + g(x_n, y_n) \mod 2\pi, \quad (2.34a)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n), \quad (2.34b)$$

com

$$g(x, y) = -pe^{-y} \cos x + sh(x, y), \quad (2.35a)$$

$$h(x, y) = \ln |\cos(x - pe^{-y} \cos x)| - \ln |\cos x|, \quad (2.35b)$$

em que o parâmetro p quantifica a intensidade da perturbação, proporcional à corrente no limitador, e s é o cisalhamento (*shear*).

O efeito desses parâmetros é exemplificado na Fig. 2.11, em que um retrato de fase para valores típicos, (a), é comparado a um retrato para o dobro do cisalhamento, (b), ou o dobro da intensidade da perturbação, (c), mostrando que ambos levam a um aumento da área caótica – a perturbação por aumentar a largura das ressonâncias, e o cisalhamento por fazê-las se aproximarem (mais do que reduz suas larguras), como observado para um modelo de stellarator [Wobig, 1987].

Assim como o tokamak, o MTM satisfaz algumas condições mínimas para um mapa para tokamaks [Balescu et al., 1998]: ele apresenta um perfil realístico do fator de segurança, no

⁵Outro tipo de limitadores são os limitadores materiais, colocados no interior da câmara para controlar o raio da coluna de plasma, evitando que esta atinja a parede interna da câmara.

Figura 2.11: Retratos de fases para o MTM. Em (a) temos um retrato típico para perturbação moderada, $p = 0,1$, com cisalhamento $s = 2\pi$; em (b) $p = 0,1$, mas $s = 4\pi$, levando a um aumento na área caótica devido à maior proximidade das ilhas; em (c) $s = 2\pi$, como em (a), mas $p = 0,2$, tornando as ilhas mais largas, causando também um aumento na área caótica.

sentido de que s pode ser escolhido apropriadamente; e suas órbitas são limitadas na direção de $r = 0$, cuja localização é deixada livre no modelo.

Resultados analíticos aproximados, baseados no critério de Chirikov de sobreposição de ilhas⁶, podem ser obtidos para o surgimento de caos global e para a largura da região caótica no MTM. Comparações com estimativas numéricas [Portela et al., 2003] (Pg. 59), mostram que essas aproximações fornecem uma boa descrição, com desvios admitindo explicações em termos de interações envolvendo ilhas secundárias. Propriedades de transporte do MTM também foram determinadas, a difusão radial de linhas de campo sendo anômala, inicialmente exibindo comportamento superdifusivo (quase-difusivo, conforme discutido no próximo capítulo), seguido por uma redução causada por perdas devido à parede do tokamak.

⁶O critério de Chirikov, simplificado, determina, calculando a largura das ilhas em função da perturbação, a transição para o caos global como ocorrendo no momento em que as ilhas principais, se intactas, se tocariam.

2.5.2 Ullmann-Caldas

O mapa de Ullmann-Caldas (UCM) [Ullmann, 1998, Ullmann e Caldas, 2000] modela campos magnéticos em tokamaks equipados com limitadores ergódicos de mesma geometria dos considerados no MTM. Sobre este último, o UCM apresenta duas vantagens principais (além de ser deduzido de uma função geratriz, o que garante trivialmente sua conservatividade): seu perfil da transformada rotacional livremente ajustável, e seus parâmetros diretamente ligados aos parâmetros experimentais.

O UCM é também a composição de dois mapas: o mapa de equilíbrio:

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n} , \quad (2.36a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_{\text{eq}}(r_{n+1})} + a_1 \cos \theta_n \pmod{2\pi} , \quad (2.36b)$$

e o perturbativo:

$$r_n = r_{n+1} + \frac{mC\epsilon b}{m-1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_n) , \quad (2.37a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - C\epsilon \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n) , \quad (2.37b)$$

em que a_1 quantifica a correção toroidal no equilíbrio cilíndrico, ϵ é proporcional à corrente no limitador (especificando a intensidade da perturbação), m é o número de pares de correntes no limitador, b é o raio menor da câmara e $C = m\mu_0 l / (\pi B_\phi^0 b^2)$, com l sendo a largura do limitador e $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$.

Uma vez que, para m arbitrário, r_{n+1} não pode ser isolado na Eq. (2.37a), este é um mapa implícito, o que significa que cada iteração sua exige a utilização de um método numérico para busca de raízes, como o de Newton-Raphson.

O perfil usual (monotônico) do fator de segurança é [Ullmann e Caldas, 2000]:

$$q_{\text{eqm}}(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left\{ 1 + \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] \Theta(a-r) \right\}^{-1} , \quad (2.38)$$

em que q_a e γ podem ser escolhidos de acordo com perfis experimentais (ver Fig. 2.14).

Dado que o UCM é voltado ao estudo da borda do plasma, r e θ sendo coordenadas *planas* na aproximação retangular, é conveniente considerar as coordenadas normalizadas, $y = 1 - r/b$ e $x = \theta/2\pi$, tal que a parede do tokamak localiza-se em $y = 0$.

O UCM apresenta, para uma intensidade modesta da perturbação, a região da borda do plasma predominantemente caótica, enquanto o restante do espaço de fases permanece essencialmente regular, como pode ser visto na Fig. 2.12.

Figura 2.12: Retrato de fases para o UCM, com $m = 7$ e $\epsilon = 0.07$, mostrando a região da borda fortemente perturbada, típica de perturbações induzidas por limitadores ergódicos.

Figura 2.13: Bacias de saída do UCM para órbitas escapando através da parede (cinza), e (preto) através do retângulo em destaque, com $m = 7$ e $\epsilon = 0.07$. Órbitas nas regiões em branco não escapam.

Os principais resultados obtidos para o UCM são relacionados às bacias de escape (ou saída) e à estrutura de variedades invariantes. O conceito de saída [Schneider et al., 2002, Sanjuán et al., 2003] surge naturalmente em modelos para tokamaks, uma vez que a parede do tokamak é uma saída do espaço de fases, para órbitas da borda do plasma. Contudo outras saídas podem também ser posicionadas em posições arbitrárias, representando obstáculos materiais no interior do tokamak, como antenas e sensores. A bacia de escape de uma dada saída é o conjunto de condições iniciais (na superfície de seção) que gera linhas de campo que terminam

por atingir esta saída, sem ter antes atingido outra que por ventura exista. Um exemplo de tais bacias pode ser visto na Fig. 2.13, em que, além da parede em $y = 0$ (bacia em vermelho), há uma saída retangular (bacia em verde). As regiões em branco correspondem a órbitas que não escapam – órbitas (em sua maioria regulares) que não cruzam nenhuma das saídas.

Determinamos que as fronteiras de bacia de saída são fractais, com dimensão que cresce com a redução do tamanho das saídas (Fig. 8 do quarto artigo do Apêndice A, pg. 99), apresentando também a, mais restritiva, propriedade de Wada – que consiste em, na presença de três ou mais saídas, apresentar uma fronteira tal que cada ponto desta delimita todas as bacias.

2.5.3 Ullmann-Caldas não-*twist*

Mapas com perfis não-monotônicos do fator de segurança, q , são ditos mapas não-*twist* [del Castillo-Negrete et al., 1996]. A liberdade de escolha do perfil do fator de segurança, $q_{eq}(r)$ (Eq. (2.36b)), permite que o UCM possa ser usado para o estudo de modelos não-*twist*. A seguinte expressão descreve de maneira satisfatória perfis de q não-monotônicos típicos em experimentos com tokamaks [Oda e Caldas, 1995]:

$$q_{eqn}(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left[1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\mu+1} \Theta(a-r) \right]^{-1}, \quad (2.39)$$

em que a é o raio do plasma, q_a , β e μ são parâmetros que podem ser escolhidos de acordo com perfis experimentais ($\beta' = \beta(\mu + 1)/(\beta + \mu + 1)$), e Θ é a função degrau unitário. Este perfil, juntamente com o perfil monotônico, está representado na Fig. 2.14, em que $\beta = 2$ e $\mu = 1$.

Com este perfil, $q_{eqn}(r)$, as Eq. (2.36-2.37) definem o UCM não-*twist* (NUCM).

Figura 2.14: Perfis de equilíbrio típicos para o fator de segurança: monotônico (linha pontilhada) e não-monotônico (linha contínua). Ampliação destacando o extremo (mínimo) da curva não-monotônica.

Localmente o NUCM é equivalente a uma versão generalizada do SNM, tendo propriedades similares às deste último, como pode ser visto na Fig. 2.15, que exhibe a barreira invariante deixada após reconexão e bifurcação similares às da Fig. 2.6. Existem, contudo, duas diferenças fundamentais entre estes dois retratos: uma maior área caótica abaixo da barreira que acima dela, resultado da assimetria do termo perturbativo no UCM; e a presença de curvas invariantes fora da região da barreira, o que é possível devido à natureza localizada da perturbação.

Figura 2.15: Retratos de fases para o NUCM com $\epsilon = 0,3$, a barreira não-monotônica é a linha sinuosa em torno da cadeia de ilhas principal.

Determinamos o valor crítico da perturbação, para a quebra da barreira invariante, como sendo $\epsilon_c \approx 0,30303$. Para valores de ϵ ligeiramente superiores ao ϵ_c , existe ainda uma barreira efetiva de transporte, atribuída às inúmeras ilhas “grudentas” (*sticking*), como pode ser visto na Fig. 2.16, que exhibe um segmento da barreira pouco antes de sua quebra, e pouco depois, em que se percebe uma concentração significativa de pontos em torno das ilhas da região.

Figura 2.16: Ampliações do espaço de fases do NUCM para, (a), $\epsilon = 0.3029$, e, (b), $\epsilon = 0.3031$, mostrando detalhes da região da barreira invariante imediatamente antes e depois de sua destruição.

Capítulo 3

Mapa de Martin-Taylor

Um dos primeiros mapas para linhas de campo magnético em tokamaks, e o primeiro a considerar a presença de limitadores ergódicos, o MTM apresenta uma descrição simples da dinâmica das linhas de campo na região próxima à parede do tokamak [Martin e Taylor, 1984]. Neste capítulo apresentamos a obtenção do MTM e resumizamos suas principais propriedades de transporte e escape. Nos baseamos no primeiro artigo (Pg. 59) do Apêndice A, onde maiores detalhes podem ser encontrados, e também em notas, não publicadas, de R. L. Viana.

3.1 Obtenção do mapa

Neste modelo é considerada a superposição do campo magnético de equilíbrio do tokamak, $\mathbf{B}^0$, com o campo perturbador, $\mathbf{B}^1$, gerado pelos limitadores magnéticos ergódicos. O campo de equilíbrio adotado é um campo helicoidal como o da Eq. (2.8), em coordenadas retangulares: $\mathbf{B}^0 = (B_x^0(y), 0, B_z^0)$, em que a componente radial, B_y^0 , é nula, e a toroidal, B_z^0 , é considerada uniforme no interior da câmara do tokamak. A geometria adotada para os limitadores magnéticos ergódicos (Fig. 2.1 e 2.2) é a de anéis formados por pares de correntes opostas paralelas ao eixo z (as correntes perpendiculares ao eixo gerando um campo magnético toroidal desprezível comparado ao de equilíbrio), de modo que, com componentes poloidais que aproximadamente se cancelam, o campo perturbador gerado é essencialmente radial [Portela et al., 2003].

As equações das linhas de campo magnético (Eq. (2.2): $\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0$) podem ser escritas em coordenadas retangulares como:

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} . \quad (3.1)$$

Rearranjando os termos da Eq. (3.1), encontram-se as equações da dinâmica das linhas de campo, ou seja, as equações cujas soluções descrevem a evolução de x e y em função de z :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{B_x}{B_0} , \quad (3.2a)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B_y}{B_0} . \quad (3.2b)$$

O procedimento para a obtenção do MTM consiste em efetuar, sobre as Eq. (3.2), uma integração definida de um ponto arbitrário (x_0, y_0, z_0) a outro $(x_1, y_1, z_0 + 2\pi R_0)$ – como visto no capítulo anterior. A contribuição do campo de equilíbrio na região do limitador é negligenciável,

devido à condição $l \ll 2\pi R_0$, que permite que o efeito do limitador seja aproximado por uma função impulsiva atuando sobre uma região de extensão arbitrariamente pequena ($l/R_0 \rightarrow 0$). E também, desprezando-se efeitos de borda, pode-se desconsiderar o campo perturbador fora da extensão l do limitador, de modo que as Eq. (3.2) podem ter as contribuições dos campos $\mathbf{B}^0$ e $\mathbf{B}^1$ integradas separadamente ($\mathbf{B}^1$ sendo considerado de z_0 a $z_0 + l$, e $\mathbf{B}^0$ de $z_0 + l$ a $z_0 + 2\pi R_0$), o que leva a dois mapas cuja composição resulta no mapa que considera ambos os campos.

O campo magnético gerado por um limitador constituído por m pares de correntes opostas, na direção z , pode, [Viana e Caldas, 1991], desconsiderando-se a resposta (em geral fraca) do plasma e a parede do tokamak, ser calculado resolvendo-se a equação de Laplace da maneira usual¹ e leva, [Portela et al., 2003, Viana e Caldas, 1991, Martin e Taylor, 1984], tendo em consideração as Eq. (3.2), às seguintes equações:

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{m\pi I}{bB_0} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \cos\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (3.3a)$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{m\pi I}{bB_0} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \sin\left(\frac{mx}{b}\right). \quad (3.3b)$$

Dividindo-se a Eq. (3.3b) pela Eq. (3.3a) obtém-se

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\left(\frac{mx}{b}\right), \quad (3.4)$$

cujas integração resulta em:

$$y_2 = y_1 + \frac{b}{m} \left\{ \ln \left| \cos\left(\frac{mx_2}{b}\right) \right| - \ln \left| \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right) \right| \right\}. \quad (3.5)$$

Considerando uma aproximação tipo delta de Dirac para a ação do limitador, a integral da Eq. (3.3a) pode ser expressa como:

$$x_2 = x_1 - \frac{m\pi I l}{bB_0} \exp\left(-\frac{my_1}{b}\right) \cos\left(\frac{mx_1}{b}\right). \quad (3.6)$$

As Eq. (3.6) e (3.5) constituem o mapa para o campo do limitador magnético ergódico.

Considerando apenas o campo de equilíbrio, é possível obter, a partir da definição de fator de segurança, $q(r) = d\phi/d\theta$, e das Eq. (2.1) e (3.1), a seguinte expressão:

$$B_x^{(0)}(r) = \frac{bB_0}{R_0 q(r)}, \quad (3.7)$$

que é o análogo retangular da Eq. (2.9b). Expandindo $q(r)$ em série de Taylor em torno da posição da parede da câmara, $r = b$, e desprezando os termos quadráticos (supondo, assim, $|r/b - 1| = |y/b| \ll 1$, ou o mesmo com as derivadas superiores $q^{(n)}(r = b) \equiv q_b^{(n)}$), chega-se a

$$B_x^0 = \frac{bB_0}{R_0 q_b} \left(1 - \frac{y q_b'}{q_b}\right)^{-1} \approx \frac{bB_0}{R_0 q_b} \left(1 + \frac{y q_b'}{q_b}\right). \quad (3.8)$$

Ainda considerando apenas o campo de equilíbrio, $\mathbf{B}^0$, tem-se que, uma vez que $B_y^0 = 0$, a integração da Eq. (3.2b) leva a:

$$y_2 = y_1, \quad (3.9)$$

¹Ou seja, aplicando-se as condições de contorno sobre a superposição das harmônicas.

portanto, como B_x^0 é função de y apenas, tem-se que $B_x^0 = \text{cte}$ sobre uma linha de campo, de modo que a integração da Eq. (3.2a) por $\Delta z = 2\pi R_0$, tendo-se em consideração a Eq. (3.8) e as definições:

$$\alpha \equiv \frac{2\pi b}{q_b} , \quad \beta \equiv \frac{2\pi b}{q_b^2} q'_b , \quad (3.10)$$

resulta em:

$$x_2 = x_1 + \alpha + \beta y_1 . \quad (3.11)$$

As Eq. (3.11) e (3.9) definem o mapa do campo de equilíbrio do tokamak.

Multiplicando as Eq. (3.6), (3.11), (3.5) e (3.9) por m/b , somando a ambos os termos destas duas últimas a constante $m\alpha/\beta b$ e também definindo a perturbação

$$p \equiv \frac{m^2 \pi I l}{b^2 B_0} , \quad (3.12)$$

e redefinindo

$$y \equiv \left(\frac{m}{b}\right) \left(y + \frac{\alpha}{\beta}\right) , \quad x \equiv \frac{mx}{b} , \quad (3.13)$$

chega-se a:

$$x_2 = x_1 - p e^{-y_1} \cos x_1 , \quad (3.14a)$$

$$y_2 = y_1 + \ln \left| \frac{\cos x_2}{\cos x_1} \right| , \quad (3.14b)$$

e

$$x_2 = x_1 + \beta y_1 , \quad (3.15a)$$

$$y_2 = y_1 , \quad (3.15b)$$

cujas composições é usualmente colocada na forma:

$$x_{n+1} = x_n + s y_n + g(x_n, y_n) \mod 2\pi , \quad (3.16a)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n) , \quad (3.16b)$$

sendo

$$g(x, y) = -p e^{-y} \cos x + s h(x, y) , \quad (3.17a)$$

$$h(x, y) = \ln |\cos(x - p e^{-y} \cos x)| - \ln |\cos x| . \quad (3.17b)$$

Nestas últimas quatro equações também se fez $\beta \mapsto s$ (notação para o *shear*) e aproximou-se

$$\exp\left(\frac{m\alpha}{\beta b}\right) = 1 . \quad (3.18)$$

As Eq. (3.16) e (3.17)² definem [Martin e Taylor, 1984] o MTM para linhas de campo magnético de um tokamak com limitadores magnéticos ergódicos.

É digno de nota que, embora geometricamente, pela Eq. (3.13), x tenha um período de $2m\pi$, a simetria dos campos magnéticos leva a dinâmica das linhas de campo a apresentar uma periodicidade efetiva de 2π , como assumido na Eq. (3.16a).

²Eq. (2.34) e (2.35), do capítulo anterior.

3.2 Transporte e transição para o caos global

Fixada a geometria do tokamak e limitadores, o MTM possui apenas dois parâmetros: a perturbação p e o cisalhamento s - cujos efeitos sobre a topologia do espaço de fases já foram exemplificados no capítulo anterior (ver Fig. 2.11). É particularmente relevante a determinação da perturbação crítica, p_{crit} , para a qual ocorre a transição para o caos global. Sendo que o termo “caos global” assume, para o MTM, um significado menos estrito que para o SM: enquanto para este último todos os toros KAM estão destruídos quando $K > K_{\text{crit}}$, para o MTM convencionamos o caos global como sendo o estado após a quebra do último toro entre a ressonância primária em $y = 0$ e a seguinte ($y \approx 1$, para valores típicos de p e s), escolha justificada por tratarem-se das duas ressonâncias principais mais próximas da parede do tokamak.

Utilizando equações aproximadas para a largura das ilhas e suas posições, é possível obter uma estimativa teórica [Martin e Taylor, 1984] para o valor de p_{crit} por meio do critério de Chirikov, que estabelece que o último toro entre as ilhas é quebrado quando $S_c = 1$, sendo S_c a razão entre a soma das meia-larguras das ilhas e a distância entre os pontos elípticos correspondentes. Por não levar em conta, por exemplo, as ressonâncias secundárias, ou a dependência da extensão das regiões caóticas em torno das ilhas com p , o critério de Chirikov metodicamente superestima p_{crit} e uma correção comumente verificada empiricamente consiste em adotar $S_c = 2/3$.

É possível obter estimativas numéricas para p_{crit} verificando-se se uma órbita com condição inicial na região caótica de uma das ressonâncias, estende-se à região caótica da outra. Consideramos condições iniciais próximas ao ponto hiperbólico da ilha mais afastada da parede, iteradas um grande número de vezes ($\sim 10^6$). A Fig. 3.1 exibe os resultados numéricos para p_{crit} , em função de s , juntamente com a previsão teórica. Há razoável acordo entre os valores numéricos e a previsão teórica, com a esperada discordância para valores reduzidos de s : para os quais p_{crit} é alto, enquanto que as aproximações utilizadas na obtenção da estimativa teórica são válidas para valores moderados de p . Vemos também que, no intervalo analisado, uma lei de potência, $p_{\text{crit}} = \alpha s^{-\beta}$, com $\alpha \approx 3,8$ e $\beta \approx 1,4$, constitui um bom ajuste.

Figura 3.1: Valor da perturbação crítica, em função de s , para a transição à estocasticidade global. A curva em vermelho corresponde à previsão teórica, os pontos denotam os valores numéricos e a linha tracejada o ajuste por lei de potência, $p_{\text{crit}} = \alpha s^{-\beta}$, com $\alpha \approx 3,8$ e $\beta \approx 1,4$.

O transporte das linhas de campo caóticas no MTM apresenta as propriedades típicas de transporte em sistemas hamiltonianos e, mais especificamente, em modelos de linhas de campo com perturbações localizadas. Mesmo para perturbações acima de p_{crit} , o espaço de fases do MTM apresenta ilhas imersas nas regiões caóticas, ilhas estas que, devido à propriedade de “grudamento”, influenciam fortemente o transporte. Outro fator determinante para o transporte são as curvas KAM que sobrevivem fora da região em que a perturbação é mais intensa. Tais curvas terminam por limitar o transporte que, de outro modo, essencialmente reflete a divergência de órbitas característica do regime caótico: como pode ser visto na Fig. 3.2, em que o desvio quadrático médio cresce até atingir um platô, originado pela limitação na área caótica acessível. E, sendo a perturbação mais intensa próximo à parede, a região caótica fica limitada também pela própria parede, situação que introduz a perda de linhas de campo, ou *escape*, dado que linhas de campo que colidem com a parede não retornam ao interior da câmara. Este fenômeno já foi mencionado no capítulo anterior (Sec. 2.4), com ênfase dada à topologia das linhas que colidem com a parede (ou, mais corretamente, com placas próximas à parede), enquanto que, no estudo do MTM, consideramos também propriedades estatísticas do escape: como a evolução temporal da perda de órbitas (cf. Fig. 3.3) que, na Fig. 3.2, leva ao declínio do desvio quadrático.

Estudamos o transporte e perda considerando a evolução de propriedades médias de um dado conjunto de linhas de campo com condições iniciais distribuídas na região predominantemente caótica do espaço de fases. Uma grandeza a ser considerada é o desvio radial quadrático médio, σ_n^2 , já citado antes, e que pode ser definido como

$$\sigma_n^2 \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_n(i) - y_0(i))^2, \quad (3.19)$$

ou seja, a média sobre um conjunto de N linhas de campo, do quadrado do desvio em relação à condição inicial de cada linha – o subíndice n indicando a dependência em relação ao tempo.

Figura 3.2: Série temporal do desvio quadrático médio radial, com $N = 10000$ condições iniciais aleatoriamente distribuídas sobre a reta ($y = 0,15; x \in (0,1)$), com $p=0,2$ e $s=2\pi$. Em vermelho, um ajuste linear ao trecho de crescimento inicial.

Uma hipótese usual é que $\sigma_n^2 \propto n^\nu$, sendo que $\nu = 1$ caracteriza um regime difusivo, também dito gaussiano ou normal, e $\nu \gtrless 1$ um regime super/subdifusivo.

A Fig. 3.2 exibe a evolução temporal de σ_n^2 para valores típicos dos parâmetros, considerando uma linha de condições iniciais: após as primeiras iterações do mapa, o desvio cresce linearmente, caracterizando um regime (quase-)difusivo³; atingindo então um platô, correspondendo às linhas distribuídas de modo aproximadamente homogêneo na área acessível do espaço de fases; este platô logo é seguido por um declínio, resultado da perda das linhas de campo com desvios maiores – que tendem a colidir com a parede mais rapidamente.

Ao estudarmos as linhas de campo magnético por meio de mapas de Poincaré, embora deixemos de ter acesso a toda a extensão das linhas, não perdemos nenhuma informação dinâmica intrínseca: as órbitas no plano de Poincaré nos dizem quais linhas de campo são caóticas ou regulares, qual o período das órbitas e como estas ressoam com a perturbação. Entretanto, a presença da parede da câmara não está contida nas equações de campo, devendo ser considerada no modelo separadamente e – o que realmente traz dificuldade ao estudo da interação entre as linhas de campo e a parede – a interação linhas-parede se dá ao longo de toda a câmara. Por exemplo, com o interior do tokamak correspondendo a $y > 0$, se $y_n > 0$ e $y_{n+1} < 0$, tomamos o instante da colisão com a parede como sendo n , mas não é possível determinar a posição da colisão por meio do mapa. E existe também a possibilidade de uma linha de campo assumir $y < 0$ em alguma posição da câmara entre os instantes n e $n+1$ e, ainda assim, ter-se $y_n, y_{n+1} > 0$ sobre a seção, o que nos leva a considerar que não houve perda da linha. Contudo, desconsiderar esse caso é parte da aproximação adotada. No caso específico do MTM, essa aproximação é, de certa forma, natural, dado que órbitas com $y < 0$ tendem a divergir, mas, por outro lado, pode falhar devido à existência de uma ressonância sobre a parede. No entanto, o erro introduzido tende a ser de poucas iterações.

Uma grandeza a ser considerada no estudo da perda de linhas de campo, é a *fração presente*, F_p : fração das órbitas, com relação ao número de condições iniciais, que não colidiu com a parede da câmara. Temos na Fig. 3.3 a série temporal de F_p , para os mesmos valores de parâmetros, e condições iniciais sobre a mesma região da Fig. 3.2: em (a) a escala monolog permite observar o decaimento de F_p , entre 0,9 e 0,1, como sendo aproximadamente exponencial (nesse intervalo sua curva poderia ser ajustada por uma reta); em (b) percebe-se a possibilidade distinta da descrição de partes da curva por lei(s) de potência. Para condições iniciais concentradas próximas a uma ilha (Fig. 3.4) vemos que, embora o decaimento inicie-se após um maior número de iterações do mapa, devido a propriedade de grudamento, a curva descrita por F_p é similar à da Fig. 3.3, aplicando-se as mesmas observações.

Outra abordagem ao estudo da perda de linhas de campo é por meio das bacias de escape, já discutidas no capítulo anterior. A bacia de escape de uma dada saída é o conjunto de condições iniciais (na superfície de seção) que gera linhas de campo que terminam por atingir esta saída, sem ter antes atingido outra. Aqui consideramos duas saídas, que correspondem a órbitas que colidem com a parede em $x \in (0, \pi)$, saída 1, ou em $x \in (\pi, 2\pi)$, saída 2. Essa escolha pode ser utilizada no estudo da distribuição poloidal do escape sobre a parede, mas apresenta a desvantagem, comparada às saídas retangulares no espaço de fases mencionadas no capítulo anterior, de tornar necessária a adoção de uma hipótese para a determinação da saída de uma dada linha de campo, uma vez que o mapa nos dá apenas suas coordenadas na seção, antes e após

³Convém observar que a principal referência deste capítulo, [Portela et al., 2003] (Apêndice A, Pg. 59), considera o regime inicial superdifusivo (e, de fato, $\sigma_n^2 \propto n^{1.13} + \text{cte}$ é um bom ajuste), mas o possível efeito “superdifusivo” das ilhas sobre o transporte é melhor caracterizado pelas caudas tipo lei de potência presentes nas distribuições dos desvios, que são essencialmente gaussianas (i. e., normais, difusivas).

a colisão com a parede – adotamos uma hipótese linear, esquematizada na Fig. 3.5. Bacias de escape típicas para o MTM são mostradas na Fig. 3.6: em (a) a configuração do espaço de fases é essencialmente determinada pela ressonância próxima à parede que as órbitas caóticas tendem a circular; em (b), com uma perturbação bem mais alta e a ilha sobre a parede já destruída, as bacias mostram-se mais complexas, exibindo fronteiras com aspecto fractal (como é de se esperar, dada a presença da sela caótica [Portela et al., 2007b]), mas a rápida divergência das órbitas impossibilita a determinação das bacias completas (órbitas caóticas do MTM próximas à parede terminam por divergir, mas há órbitas cuja primeira iteração já diverge).

Figura 3.3: Evolução temporal da fração presente das linhas de campo, para 20000 condições iniciais aleatoriamente distribuídas sobre uma reta em $y = 0,15$, com $x \in (0,1)$, $p = 0,2$ e $s = 2\pi$. Em (a) a escala monolog que evidencia a possibilidade de uma descrição aproximadamente exponencial para parte da curva; em (b) a escala dilog sugere um ajuste por lei de potência para parte(s) da curva.

Figura 3.4: Fração presente das linhas de campo em função do tempo. Caso típico para condições iniciais suficientemente próximas à ilha, em que há um longo comportamento transitório em torno da ilha, atrasando o início do processo de perda; usando escala monolog em (a), e em dilog em (b).

Figura 3.5: Esquema do método adotado para a estimativa da posição de escape de uma dada linha de campo.

Figura 3.6: Bacias de escape para o MTM, com (a) $p = 0,5$ e $s = 2\pi$; e (b) $p = 2$ e $s = 2\pi$. Em (a) a saída das órbitas caóticas é determinada essencialmente pela ilha junto à parede. Os pontos em branco na região caótica de (b) correspondem a condições iniciais cuja primeira iteração já diverge, não permitindo a determinação da saída.

Capítulo 4

Mapas de Ullmann-Caldas

O mapa de Ullmann-Caldas (UCM) descreve globalmente as linhas de campo magnético de tokamaks com limitadores ergódicos. Em relação a mapas como o de Martin-Taylor, apresenta a vantagem de admitir perfis arbitrários da transformada rotacional e ter grandezas diretamente relacionadas às experimentais, além de incluir efeitos toroidais. Neste capítulo discorreremos brevemente sobre algumas características do UCM, em suas versões *twist* e não-*twist*, evitando excessiva redundância com as Subseções 2.5.2 e 2.5.3, ou com os artigos do Apêndice A e demais referências.

4.1 Mapa de Ullmann-Caldas *twist*

O UCM baseia-se no mapa de Viana e Caldas (VCM) [Viana e Caldas, 1992] que, por sua vez, inspira-se no mapa de Martin-Taylor (Cap. 3). O VCM é deduzido a partir das equações das linhas de campo, considera efeitos toroidais e tem parâmetros diretamente relacionados às configurações experimentais. Contudo, devido às aproximações adotadas, o VCM é levemente não-conservativo (i. e., apresenta jacobiana não exatamente unitária), não sendo adequado para cálculos que envolvam um grande número de iterações. Para a obtenção do UCM, funções geratrizes foram construídas a partir das equações do VCM [Ullmann, 1998], deste modo, assegura-se a conservatividade do mapa por elas gerado, que também mantém as vantagens do VCM.

Como já visto, o UCM é dado pela composição de dois mapas, o de equilíbrio:

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n} , \quad (4.1a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_{\text{eq}}(r_{n+1})} + a_1 \cos \theta_n \pmod{2\pi} , \quad (4.1b)$$

e o perturbativo:

$$r_n = r_{n+1} + \frac{mC\epsilon b}{m-1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_n) , \quad (4.2a)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - C\epsilon \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n) , \quad (4.2b)$$

em que ϵ quantifica a perturbação e os demais parâmetros especificam a geometria e o equilíbrio. Convém lembrar que, embora as equações do mapa sejam definidas nas coordenadas r e θ , preferimos, na apresentação dos resultados, usar as coordenadas $y \equiv (r-b)/b$ e $x \equiv \theta/2\pi$ (sendo b o raio da câmara do tokamak), para facilitar comparações com os demais mapas do trabalho.

Como mencionado na Subseção 2.5.2, é necessário utilizar um método de busca de raízes a cada iteração do mapa. Optamos por utilizar o método de Newton-Raphson, como no trabalho original [Ullmann e Caldas, 2000], que se mostra eficiente para os valores de parâmetros por nós utilizados, como mostra a Fig. 4.1, embora possa apresentar problemas de convergência para valores de ϵ e m mais elevados, i. e., perturbações muito intensas.

Figura 4.1: Tempos de convergência do método de Newton-Raphson para a determinação de r_{n+1} , Eq. (4.2a), dado o ponto inicial (θ_n, r_n) , para $m = 7$ e $\epsilon = 0,06$. O código de cores indica o número de iterações do método necessário para a convergência dentro de uma tolerância de 10^{-15} . O padrão em θ é periódico.

4.1.1 Espaço de fases

Um perfil típico da transformada rotacional para o UCM *twist* é exibido na Fig. 4.2, abaixo.

Figura 4.2: Perfil perturbado da transformada rotacional, em (a), calculado sobre a linha em vermelho no espaço de fases em (b), com $m = 7$ e $\epsilon = 0,07$.

O perfil de equilíbrio da transformada rotacional está representado na Fig. 2.14 e o efeito da perturbação está exemplificado na Fig. 4.2 acima, calculado sobre $x = 0,5$ na região caótica próxima à parede da câmara. A comparação com o espaço de fases evidencia a correspondência entre os platôs no perfil e as ilhas quasiperiódicas no mar caótico, sendo que sobre este último a transformada rotacional não é definida, uma vez que o limite presente em sua definição (Eq. (2.7)) não converge.

Uma consequência da geometria toroidal, que é refletida pelo UCM, é a presença do deslocamento (*shift*) de Shafranov: que pode ser visto com clareza na Fig. 4.3(d), em que os toros KAM descritos pelo mapa de equilíbrio são excêntricos, posicionando-se mais à direita quanto maior o raio. A Fig. 4.3 também destaca uma consequência de nossa escolha para o perfil de equilíbrio da transformada rotacional (Eq. (2.38)) com $q_a = 5$, que leva a $q(r = 0) \equiv q(y = 1) = q_a/(\gamma + 1) = 1$ (dado que adotamos $\gamma = 4$): a presença de uma ressonância próxima ao centro do plasma ($y = 1$), que desloca o eixo magnético para a esquerda, podendo causar a ilusão de um deslocamento de Shafranov mais intenso do que aquele que o mapa de fato exhibe.

Figura 4.3: Retratos de fase retangulares, (a) e (b), e polares, (c) e (d), destacando a presença da ilha próxima de $y = 1$ e o deslocamento de Shafranov no mapa de equilíbrio. Em (a) e (c) temos $q(r = 0) = 1$ e a ilha está presente, em (b) e (d), $q(r = 0) = 1,2$ e não há ressonância visível.

A existência de ilhas para o mapa de equilíbrio mostra que este, na verdade, já contém uma componente efetivamente perturbativa: o termo de correção toroidal. Esse efeito pode ser melhor apreciado na Fig. 4.4(a), em que o perfil da transformada rotacional foi reduzido por um fator 4 em relação ao usual, e o espaço de fases apresenta várias ressonâncias, envoltas por regiões caóticas. Deve-se notar que esse perfil, com $q(r=0) = 1/4$, não é realístico, uma vez que valores de q menores que 1 estão associados a instabilidades no confinamento. A Fig. 4.4(b) exibe um cenário típico de sistemas não-*twist*: o de reconexão homoclínica de separatrizes. Tal é possível porque o perfil da transformada rotacional depende quadraticamente de r (para $r < a$, ver Eq. (2.38)), sendo assim simétrico em relação à $r = 0$ ($y = 1$) e, portanto, não-monotônico nessa região: deste modo o mapa torna-se efetivamente não-*twist* **quando** se considera também a porção fisicamente não-significativa do espaço de fases, $r < 0$. Essa situação é perfeitamente análoga à encontrada para o tokamak (Pg. 15).

Figura 4.4: Retratos de fases para: (a) $q_a = 1,25$, exibindo ressonâncias, e (b) $q_a = 5$.

A configuração com a ressonância próxima ao centro do plasma, como vista nas Fig. 4.3(a) e 4.4(a), poderia sugerir tratar-se de ilhas não-pendulares [Corso e Rizzato, 1995, e. g.]. No entanto, além da já observada natureza ressoante da ilha (que existe para $q_a = 1$, mas não para $q_a = 1,2$), a frequência de uma ilha não-pendular, i. e., a transformada rotacional em relação ao centro dela, varia pouco sobre a ilha [Corso e Rizzato, 1995], enquanto sobre as ressonâncias ι tende a zero sobre a separatriz, comportamento verificado para a ilha próxima a $y = 1$, Fig. 4.5.

4.1.2 Bacias de saída

Inspirados em trabalhos nos quais são abertas saídas em espaços de fase de sistemas hamiltonianos [Schneider et al., 2002, Sanjuán et al., 2003, Bleher et al., 1988], definimos regiões de saída de linhas de campo, com o objetivo de simular obstáculos (tais como aparelhos de medida) introduzidos na câmara do tokamak – como fizemos para o MTM. Uma configuração típica de bacias de saída para o UCM pode ser vista na Fig. 2.13.

A estrutura das bacias de saída, especialmente suas fronteiras, pode ser entendida a partir da estrutura fundamental de um espaço de fases hamiltoniano caótico: a sela caótica e suas variedades invariantes.

Figura 4.5: Transformada rotacional da ilha, sobre seu ponto elíptico, em função do raio normalizado definido a partir deste, r' , para $q_a = 5$.

Variedades são o ‘esqueleto’ de um espaço de fases, determinando fronteiras entre comportamentos dinamicamente distintos – tornando-se especialmente perceptíveis durante reconexões ou bifurcações.

Definindo: se um ponto x_1 tende a um ponto x_2 pelo mapeamento $F(x)$, isto é, se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F^n(x_1) - F^n(x_2)| \rightarrow 0, \quad (4.3)$$

em que $|\cdot|$ denota a norma e $F^n(x)$ denota a n -ésima iterada de x por F , então x_1 pertence à variedade estável de x_2 , e o conjunto dos x_1 que satisfazem essa propriedade constituem a variedade estável de x_2 [Devaney, 1987]. Em geral consideramos pontos x_2 periódicos, pertencentes à sela caótica. Se $F(x)$ admitir inversa, então define-se uma variedade instável, como acima, mas com o limite a $-\infty$ e não a $+\infty$. Um ponto hiperbólico, i.e., tal que a jacobiana do mapa calculada sobre ele tenha autovalores de norma não unitária, com autovetores não tangentes, apresenta uma estrutura similar à ilustrada na Fig. 4.6 abaixo. A figura exhibe também uma trajetória próxima típica, que tem como “assíntotas” a variedade instável V^i ($t \rightarrow \infty$) e a estável V^e ($t \rightarrow -\infty$). Esse comportamento proporciona um método simples para se encontrar aproximações destas variedades: iterando para frente (trás) um denso conjunto de condições iniciais, teremos um conjunto final que se estende aproximadamente ao longo da variedade instável (estável). Não se trata de um método exato, mas fornece o panorama correto.

Figura 4.6: Esquema de ponto fixo hiperbólico x_0 (em azul), suas variedades instável, V^i , e estável, V^e , e uma trajetória próxima (em verde).

A *sela caótica* é um conjunto fractal invariante, que se forma com a quebra das cadeias de ilhas no espaço de fases¹: as variedades dos pontos hiperbólicos, que formam as separatrizes das ressonâncias (quando intactas, Fig. 2.4, pg. 9) então cruzam-se transversalmente, dando origem a um número infinito, mas enumerável, de pontos de sela, que estão imersos na sela caótica. A sela caótica está, assim, intrinsecamente associada ao caos em sistemas conservativos, e suas variedades constituem uma folheação do mar caótico [Feudel et al., 2005], de modo que qualquer conjunto típico de condições iniciais na região caótica tende assintoticamente às variedades instáveis (enquanto iterações do mapa inverso as levam para as variedades estáveis). Deste modo, a natureza da fronteira das bacias é diretamente determinada pelas variedades da sela caótica.

As Fig. 5 e 6 do quarto artigo do Apêndice A (pg. 99) exibem aproximações finitas da sela caótica e variedades para o UCM *twist*.

Por definição, os pontos da bacia são mapeados na saída, o que implica que (tomando-se os devidos cuidados²) tal bacia é também mapeada pelas iterações do mapa inverso aplicado sobre os pontos da saída. Então, como o mapeamento inverso aplicado sobre a saída mapeia a bacia desta saída, temos em particular que o mapa inverso aplicado sobre a borda desta saída dá origem à fronteira. Acreditamos ser essa a razão dos resultados observados: as bordas de saída suaves, arbitrariamente introduzidas no espaço de fase, constroem a fronteira da bacia, deste modo, apenas os pontos da fronteira que tendem assintoticamente à borda da saída seriam de fato fractais³, sendo que os demais pontos (i.e., aqueles que são mapeados sobre a borda com um número finito de iterações) seriam apenas aproximadamente fractais. A Fig. 4.7 mostra como a variedade estável da sela determina, em parte, a fronteira das bacias de saída. Esta explicação também teria ligação com a conclusão de que a dimensão da fronteira cresce com a redução do tamanho das saídas.

Figura 4.7: Aproximação finita da variedade estável da sela caótica (em preto) sobreposta às bacias de escape para três saídas (Fig. 4.8(b)).

¹Sistemas dissipativos também podem apresentar selas caóticas, que são não-atrativas e estão ligadas a fenômenos como caos transitório e crises.

²É necessário lembrar-se de que, tipicamente, uma órbita que escapa por uma saída, também escaparia pela outra no futuro, se não tivesse sido interrompida pelo escape. Então, assim como, na determinação das bacias através do mapa, considera-se como saída da órbita a primeira saída que ela cruza, é necessário considerar, na iteração do mapa inverso aplicado sobre as saídas, que as órbitas inversas estarão mapeando a bacia apenas até encontrar uma outra saída.

³Variedades da sela caótica são fractais [Lichtenberg e Lieberman, 1992].

A Fig. 4.8 abaixo mostra as bacias para três saídas. Nela, sucessivas ampliações revelam uma parte da terceira bacia naquela que parecia ser a fronteira entre as outras duas bacias. Este é um indício de que se trata de uma fronteira de Wada: uma fronteira fractal em que cada ponto delimita as três bacias [Nusse e Yorke, 1996], i. e., cada ponto dela é um ponto de fronteira tríplice. Esta propriedade está presente apenas em parte da bacia, uma vez que, como já mencionado, esperamos que a fronteira seja fractal apenas nos pontos que tendem assintoticamente à borda da saída. A figura também mostra que é satisfeita uma condição necessária, embora não suficiente, para a existência de fronteira de Wada [Nusse e Yorke, 1996]: um trecho da variedade estável (em amarelo) da sela caótica é exibido em (b), mostrando que esta cruza as três bacias.

Figura 4.8: Bacias de saída com $m = 7$ e $\epsilon = 0,07$, com escape pela parede e pelas saídas com bordas destacadas em alaranjado. Fig. (a) mostra todo o mar caótico, enquanto as demais são sucessivas ampliações dos retângulos em preto. O trecho da variedade estável da sela caótica, em amarelo em (b), cruzando as bacias é um indício da presença da propriedade de Wada [Nusse e Yorke, 1996].

4.2 Mapa de Ullmann-Caldas não-*twist*

Dado pelas Eq. 4.1 e 4.2, o mapa de Ullmann-Caldas não-*twist* (NUCM) diferencia-se de sua versão *twist* apenas pelo perfil não-monotônico da transformada rotacional, dado pela Eq. 2.39, pg. 23. E, do mesmo modo que o UCM *twist* é localmente equivalente a uma versão generalizada do SM (com um termo de perturbação adicional, um mapa já estudado [Greene e Mao, 1990]), verificamos que o NUCM reduz-se, nas proximidades da região não-monotônica, ao SNM com um termo extra de perturbação, que é devido à correção toroidal. Esta correção, como já apontado na seção anterior, atua como uma perturbação presente já no mapa de equilíbrio.

Deste modo, apresentando, na região não-*twist*, uma dinâmica similar ao do SNM, o NUCM apresenta um cenário de reconexão e bifurcação similares às da Fig. 2.6, pg. 12, como pode-se ver pela Fig. 3 do terceiro artigo do Apêndice A, pg. 89.

4.2.1 Expoentes de Lyapunov

O comportamento caótico é essencialmente caracterizado pela divergência local de trajetórias, ou seja, pela sensibilidade às condições iniciais. Os *expoentes de Lyapunov* quantificam essa divergência e, portanto, o caos. A n -ésima aplicação do jacobiano sobre uma N -esfera no espaço de fases resulta num elipsóide de eixos $r_{k,n}$ (adotando-se $r_{1,n} \geq \dots \geq r_{N,n}$). Devido à natureza multiplicativa da aplicação do jacobiano, temos, em média, uma dependência exponencial de $r_{k,n}$ com n : $r_{k,n} \propto (L_k)^n = e^{h_k \cdot n}$, sendo $h_k = \ln L_k$ o expoente de Lyapunov assim definido [Alligood et al., 1996]:

$$h_k \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln r_{k,n}. \quad (4.4)$$

Assim, h_k é a média ao longo de uma órbita do expoente da divergência local entre órbitas, e, havendo caos, há ao menos uma órbita para a qual ao menos um dos expoentes de Lyapunov é positivo. No caso conservativo com $N = 2$ temos $h_1 = -h_2$. A Fig. 4.9 exhibe os expoentes de Lyapunov para órbitas sobre a barreira (regular e, portanto, com ambos nulos) e pertencentes às regiões caóticas acima e abaixo desta. Vemos que as duas regiões exibem regimes diferentes e que todas as órbitas de uma dada região apresentam, aproximadamente, o mesmo valor para o expoente (que vai a zero sobre as ilhas, também regulares).

4.2.2 Transporte

Após a quebra da barreira não-monotônica invariante, resta uma barreira efetiva, à qual nos referimos apenas como barreira, e que é constituída por um arquipélago formado pelas diversas cadeias de ilhas, e dos eventuais cantoros⁴.

Para estudar o efeito da barreira sobre o transporte na região caótica, pode-se utilizar a fração restante, F_n : fração (na iteração n) das trajetórias que, iniciadas acima da barreira, não a ultrapassaram. Para $\epsilon = 0,305$ obtém-se (ver Fig. 4.10) que inicialmente (~ 250000 primeiras iterações) o decaimento de F_n é exponencial, com meia-vida de cerca de 50000 iterações, sendo seguido por um decaimento mais lento, aproximadamente do tipo lei de potência ($F_n \propto n^a$) com expoente $a \approx -4$. Trajetórias individuais nos dizem pouco a respeito do efeito da barreira, uma vez que seu tempo de escape é função de sua condição inicial, por conta disto é que medidas

⁴Cantoros (*cantori*) são conjuntos invariantes no espaço de fase, remanescentes de toros recém-destruídos, cujos pontos distribuem-se em um conjunto tipo Cantor, constituindo-se barreiras efetivas (“retardando” o transporte).

Figura 4.9: (a) Retrato de fase para o NUCM e (b) correspondentes expoentes de Lyapunov calculados com condições iniciais sobre a linha em vermelho. A barreira separa regiões dinamicamente distintas.

estatísticas como F_n são necessárias. Pela mesma razão, desconsideramos o platô inicial na evolução de F_n (não visível na figura), tomando como início de sua série temporal o ponto em que $F_n = 0,99$.

Também calculamos o desvio quadrático radial médio de N condições iniciais em $y = y_0$:

$$\langle (y_i(n) - y_0)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i(n) - y_0)^2, \quad (4.5)$$

em que $y_i(n)$ é a n -ésima iteração da i -ésima condição inicial e $\langle \cdot \rangle$ denota a média sobre o conjunto. Um cálculo direto mostra que

$$\langle (y_i(n) - y_0)^2 \rangle = y_0^2 - 2y_0 \langle y_i(n) \rangle + \langle y_i(n)^2 \rangle. \quad (4.6)$$

O desvio quadrático médio, Fig. 4.11, apresenta inicialmente (~ 100000 iterações), um crescimento aproximadamente linear que, por volta de $n = 500000$, atinge um patamar. A 500000^{a} iterada de 4900 condições iniciais teste leva a um retrato de fase com pontos ocupando aparentemente toda a região caótica acessível, com as médias $\langle y_i \rangle \approx 0,483$ e $\langle y_i^2 \rangle \approx 0,259$ que, através da Eq. (4.6), e lembrando que $y_0 = 0,75$, fornece $\langle (y_i - y_0)^2 \rangle \approx 0,097$, que é a altura em que o patamar se encontra, confirmando a interpretação natural de que a saturação indica a ocupação de toda a região caótica acessível.

Figura 4.10: Evolução temporal (em preto) da fração de trajetórias contida pela barreira para $\epsilon = 0,305$. A porção inicial da curva (250000 pontos) é descrita por $F_n = 0,89 e^{-1,37 \cdot 10^{-5} n}$ (em vermelho), passando então a decair de modo mais lento, seguindo aproximadamente $F_n \propto n^{-4}$.

A Fig. 4.11 nos fornece informações sobre a difusão através da barreira (e do arquipélago formado pelas diversas cadeias de ilhas, e dos eventuais cantoros). Mas a observação cuidadosa do início da série temporal do desvio médio quadrático (Fig. 4.12) pode nos revelar informações também a respeito do transporte *ao longo* das barreiras.

Figura 4.11: Série temporal do desvio quadrático médio, dado pela Eq. (4.5) (em preto), para $\epsilon = 0,305$ e 100000 condições iniciais em torno de $(2, 0,75)$. Aos primeiros 100000 pontos ajusta-se uma reta (em vermelho) $\langle (y_i(n) - y_0)^2 \rangle = 0,03 + 3,8 \cdot 10^{-8} n$. Após isso, o crescimento é retardado até atingir um patamar correspondente a ocupação de toda a região caótica acessível.

As condições iniciais estão concentradas nas proximidades de um ponto, de modo que, apesar da divergência exponencial que caracteriza o caos, inicialmente elas se mantêm ainda bem

próximas e podemos aproximá-las por uma só órbita. Isso nos permite explicar as oscilações de grande amplitude presentes no princípio da série: observamos nos retratos de fase que órbitas típicas nessa região tendem a contornar a cadeia maior de ilhas e, como a condição inicial está acima da cadeia, $y_0 = 0,75$, as maiores oscilações do desvio quadrático médio devem corresponder às passagens pelas extremidades inferiores das ilhas, em $y_{\text{inf}} \approx 0,36$. De fato, esses valores são coerentes com as maiores amplitudes observadas: $(y_0 - y_{\text{inf}})^2 \approx (0,75 - 0,36)^2 \approx 0,16$. E, utilizando novamente a Eq. (4.6), como feito para o patamar da Fig. 4.11, obtemos que a estabilização em $y \approx 0,03$ corresponde a trajetórias distribuídas nas proximidades da cadeia maior, indicando que não houve ainda transporte *através* da barreira.

Figura 4.12: Ampliação da Fig. 4.11, com o trecho inicial da série do desvio médio quadrático.

Assim, com grandes oscilações ligadas a trajetórias muito próximas, e a estabilização indicando trajetórias homogeneamente distribuídas, interpretamos o amortecimento das oscilações como sendo o resultado da difusão ao longo da barreira, o que nos permite afirmar (comparando os tempos necessários para que os patamares sejam atingidos) que a difusão ao longo da barreira é cerca de 200 vezes mais rápida que através desta.

Capítulo 5

Transição para o Caos Global

Órbitas periódicas são constituintes importantes da estrutura do espaço de fases, mas é seu papel na determinação de outros elementos desta estrutura que as tornam especialmente relevantes. O método que utilizamos para a determinação de órbitas periódicas não é recente, mas ganhou especial importância por sua utilidade ao método de J. Greene, que o utilizou para determinar com grande precisão o valor da perturbação crítica para a transição para o caos global no mapa padrão (SM) [Greene, 1979], e também com a extensão de seu método para mapas não-*twist* [del Castillo-Negrete et al., 1996]. Este capítulo baseia-se no trabalho mais recente sobre o assunto, [Fuchss, 2006], e constitui uma apresentação simplificada do método, que abre uma possibilidade promissora de continuidade para nosso trabalho.

5.1 Busca de órbitas periódicas

A transformada rotacional ι de uma órbita (x_n, y_n) (i. e., o deslocamento médio na direção x , por iteração) é definida (como já visto, Eq. 2.7) por

$$\iota \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} . \quad (5.1)$$

Considerando um mapa $M(x, y)$ definido no cilindro ou toro (i. e., com x e/ou y cíclicos sobre um intervalo finito – que, sem perda de generalidade, tomaremos como tendo comprimento 1) é necessário considerar sua “suspensão” (*lifting*), $\hat{M}$, para o plano, na definição da transformada rotacional. É então conveniente definir também a translação R :

$$R(x, y) \equiv (x - 1, y) . \quad (5.2)$$

Uma órbita de período p sobre o cilindro é um conjunto de pontos que satisfazem $\hat{M}^p(x_n, y_n) = (x_n + q, y_n)$, para algum inteiro q , ou, de outro modo, $R^q \hat{M}^p(x_n, y_n) = (x_n, y_n)$. Tal órbita tem uma transformada rotacional racional, $\iota = q/p$. A estabilidade desta órbita é determinada pelos autovalores $\lambda_{1,2}$ do mapa linearizado. Ela é elíptica quando os autovalores são complexos, parabólica se iguais a ± 1 e hiperbólica quando reais e $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} \neq \pm 1$.

Um critério diferente, mas equivalente, utiliza o resíduo $\mathcal{R}$, definido por $\mathcal{R} \equiv (2 - \text{Tr } L^p)/4$, em que $\text{Tr } L^p$ é o traço do mapa M^p linearizado, L^p . Utilizando o resíduo: a órbita é elíptica para $0 < \mathcal{R} < 1$, hiperbólica para $\mathcal{R} < 0$ ou $\mathcal{R} > 1$ e parabólica para $\mathcal{R} = 0$ ou $\mathcal{R} = 1$.

A determinação numérica de órbitas periódicas de $M(x, y)$ consiste, em geral, de uma difícil busca bidimensional. Mas essa busca pode ser reduzida a uma busca unidimensional caso $\hat{M}$ apresente uma decomposição em involuções, i. e., caso possa ser escrito como o produto de duas *simetrias de reversão temporal*, I_0 e I_1 (com $I_1 = \hat{M}I_0$):

$$I_0\hat{M} = \hat{M}^{-1}I_0, \quad (5.3a)$$

$$I_1\hat{M} = \hat{M}^{-1}I_1, \quad (5.3b)$$

que sejam também involuções, isto é, suas próprias inversas, $I_0^2 = I_1^2 = 1$. Mapas que podem ser assim fatorados são ditos *reversíveis*, e a determinação dessa decomposição para o mapa de interesse é o primeiro passo para a aplicação do método.

Uma decomposição $\hat{M} = I_1I_0$ do SM (Eq. (2.19)) é

$$I_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y - K \sin 2\pi x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

E, para o mapa padrão não-*twist* (SNM, Eq. (2.20)),

$$I_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y - b \sin 2\pi x \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + a(1 - y^2) \\ y \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Dada a decomposição, o próximo passo é determinar as linhas de simetria, $\mathcal{I}$ - conjuntos unidimensionais, invariantes pelas involuções do mapa

$$\mathcal{I}_0^m \equiv \{(x, y) \mid R^{-m}I_0(x, y) = (x, y)\}, \quad (5.6a)$$

$$\mathcal{I}_1^m \equiv \{(x, y) \mid R^{-m}I_1(x, y) = (x, y)\}, \quad (5.6b)$$

sendo que R é a translação definida na Eq. (5.2) e, devido à periodicidade em x , basta considerar $m = 0, 1$ [Shinohara e Aizawa, 1998]. A nomenclatura mais usual na literatura para essas linhas é $\mathcal{I}_0^0 \rightarrow s_1$, $\mathcal{I}_1^0 \rightarrow s_2$, $\mathcal{I}_0^1 \rightarrow s_3$ e $\mathcal{I}_1^1 \rightarrow s_4$.

Para o SM encontram-se

$$\mathcal{I}_0^0 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{I}_0^1 = \{(1/2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \quad (5.7)$$

e

$$\mathcal{I}_1^0 = \{(y/2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{I}_1^1 = \{(y/2 + 1/2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \quad (5.8)$$

E para o SNM temos

$$\mathcal{I}_0^0 = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{I}_0^1 = \{(1/2, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \quad (5.9)$$

e

$$\mathcal{I}_1^0 = \{(a(1 - y^2)/2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{I}_1^1 = \{(a(1 - y^2)/2 + 1/2, y) \mid y \in \mathbb{R}\}. \quad (5.10)$$

Verifica-se, e esse é o cerne deste método de busca, que encontram-se pontos de órbitas periódicas sobre as linhas de simetria; e mostra-se que as órbitas de transformada rotacional $\iota = q/p$ que interseccionam $\mathcal{I}_0^0$ satisfazem¹ a Tab. 5.1, reduzindo à metade o trabalho computacional. Deste modo, a busca por órbitas periódicas resume-se à busca por pontos – não no plano, mas apenas sobre a curva s_1 – que satisfaçam a relação relevante da tabela.

¹Não nos utilizamos aqui do caso mais geral – órbitas que interseccionam qualquer das linhas.

q ímpar, p par	$\rightarrow$	$R^{-(q-1)/2} \hat{M}^{p/2}(x, y)$	$\in \mathcal{I}_0^1 (s_2)$
q par, p ímpar	$\rightarrow$	$R^{-q/2} \hat{M}^{(p+1)/2}(x, y)$	$\in \mathcal{I}_1^0 (s_3)$
q ímpar, p ímpar	$\rightarrow$	$R^{-(q-1)/2} \hat{M}^{(p+1)/2}(x, y)$	$\in \mathcal{I}_1^1 (s_4)$

Tabela 5.1: Propriedade apresentada por pontos $(x, y) \in \mathcal{I}_0^0, s_1$, que satisfaçam $(x, y) = R^q \hat{M}^p(x, y)$.

Assim, para determinar órbitas periódicas de transformada rotacional q/p :

- iniciamos com um ponto $(x(y), y)$ sobre a linha s_1 ;
- então computamos $(x'(y), y'(y)) = R^m \hat{M}^n(x(y), y)$, com m e n escolhidos em função de p e q , conforme a Tab. 5.1;
- e, uma vez que, caso $(x(y), y)$ pertença a uma das órbitas periódicas, o ponto $(x'(y), y'(y))$ está sobre a linha s_j (j também dado pela Tab. 5.1), a busca por essas resume-se na busca pelos valores de y para os quais a função

$$F(y) \equiv x'(y) - x_j(y'(y)) , \quad (5.11)$$

se anula, sendo $x_j(y')$ é o valor de x tal que $(x_j(y'), y')$ está contido na linha s_j .

Assim, com as raízes da função $F(y)$, temos os pontos (x, y) de s_1 que determinam órbitas de transformada rotacional q/p .

Numericamente, é mais conveniente lidar com uma função limitada, então implementamos o algoritmo utilizando a função $f(y) = F(y)/(1 + |F(y)|)$, que tem as mesmas raízes de $F(y)$, mas está limitada ao intervalo $(-1, 1)$ (Fig. 5.1).

O método descrito acima é eficiente e preciso, e permite a determinação de órbitas instáveis, i. e., hiperbólicas, característica esta particularmente útil para a construção de diagramas de bifurcações – gráficos que mostram a evolução da órbita conforme algum parâmetro de controle é variado. Na verdade, por construção, o método não determina a evolução de uma órbita apenas, mas sim de todas de um dado período que interseccionem a linha de simetria.

A Fig. 5.2 exhibe o diagrama de bifurcações para órbitas com transformada rotacional $5/8$ do SM. Nessa figura y representa a raiz da Eq. (5.11), i. e., é a coordenada y da órbita de período $5/8$ com um ponto sobre a linha s_1 . Para valores altos do parâmetro de perturbação K , o mapa apresenta uma estrutura de órbitas periódicas mais rica que a perceptível nos retratos de fases para o SM, que exibem um mar caótico aparentemente mais homogêneo para perturbações mais intensas. A Fig. 5.3 exhibe diagramas de bifurcação para o SNM: em (a) vemos duas órbitas que colidem com o aumento do valor da perturbação, já em (b) conforme b cresce há o surgimento de novas órbitas, que também se apresentam em maior número, como é característico para órbitas de período mais longo no SNM.

5.2 Quebra do toro áureo

Curvas KAM separam regiões no espaço de fase e são constituídas por órbitas quasiperiódicas, que apresentam transformada rotacional irracional, e cuja destruição em sistemas perturbados ocorre com o crescimento e interação de ilhas próximas. Como ilhas de período baixo são

Figura 5.1: Exemplo de curva da função $f = F/(1 + |F|)$, com F dada pela Eq. 5.11, cujas raízes determinam a localização de órbitas periódicas q/p . Mapa padrão, com $K = 0,95$, $q = 144$ e $p = 233$.

mais facilmente excitadas por ressonâncias, conjectura-se que as curvas KAM mais irracionais, i. e., menos eficientemente aproximadas por racionais², são as mais resistentes a perturbações – conjectura esta apoiada por evidências numéricas. O toro de transformada rotacional áurea (o mais irracional) deve então ser o mais resistente, de modo que sua destruição marca a transição para o caos global. Analogamente, as órbitas periódicas a permanecerem estáveis (elípticas) mais longamente (com valores crescentes da perturbação) devem ser aquelas cujos ι 's melhor se aproximam do número áureo.

Greene conjecturou [Greene, 1979] que, considerando órbitas (periódicas) cujas transformadas rotacionais são aproximações racionais sucessivamente mais próximas do número irracional ω : seus resíduos tendem a zero quando o toro com $\iota = \omega$ ainda existe; estes divergem após a destruição do toro; e, na criticalidade, os resíduos tendem a aproximadamente 0,25. Baseado nestas suposições, que, juntas, consistem no assim chamado “critério de Greene”, o valor da perturbação para o qual o toro áureo é crítico, K_c , pode ser determinado com grande precisão - o valor mais preciso que podemos obter (utilizando precisão quádrupla) sendo $K_{cSM} \approx 0,9716354060475$.

Podemos também considerar o mapa padrão generalizado [Greene e Mao, 1990]:

$$y_{n+1} = y_n - (k_1/2\pi) \sin(2\pi x_n) - (k_2/4\pi) \sin(4\pi x_n) , \quad (5.12a)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} , \quad (5.12b)$$

²Conceito já explicado na nota de rodapé da página 8.

em que k_1 e k_2 são parâmetros de perturbação. A Fig. (5.4) reproduz [Greene e Mao, 1990] a curva de criticalidade do toro áureo, no espaço de parâmetros deste mapa. Essa curva é determinada encontrando-se o valor crítico de k_1 , do mesmo modo como feito para o mapa padrão, para diferentes valores de k_2 . Acima dela o toro está destruído e, portanto, temos caos global.

Figura 5.2: Diagrama de bifurcação para órbitas com $\iota = 5/8$ do mapa padrão.

5.3 Quebra do toro *shearless*

A determinação da transição para o caos global utilizando-se o critério de Greene nem sempre é trivial. É necessário determinar órbitas periódicas de períodos muito longos, e o método para obtenção destas, apresentado na seção 5.1, requer que se possa encontrar uma decomposição do mapa em involuções. Mas sistemas não-*twist* apresentam uma dificuldade adicional: a existência de toros *shearless* (“de cisalhamento nulo”), i. e., com a derivada da transformada rotacional sobre ele sendo nula, correspondendo à um extremo do perfil da transformada rotacional ι .

Para sistemas não-*twist*, embora toros mais irracionais sejam também mais resistentes, verifica-se que é o toro *shearless* o mais resistente, sua quebra marcando a transição para o caos global. Tal característica deve-se fundamentalmente ao maior espaçamento entre ressonâncias na região – consequência direta da derivada próxima de zero da transformada rotacional. Desta forma, para encontrar a transição para o caos global, é preciso determinar o toro *shearless* central

Figura 5.3: Diagramas de bifurcação para o mapa padrão não-*twist*. Em (a) temos a órbita com $\iota = 7/8$, para $a = 0,91$. Em (b), as órbitas com $\iota = 35/38$, para $a = 1,06452$.

Figura 5.4: Curva de criticalidade no espaço de parâmetros do mapa de Greene e Mao – para valores dos parâmetros sobre a curva, o toro áureo é crítico, de modo que apenas acima dela temos caos global.

e o momento de sua destruição, havendo também, no caso do SNM, um espaço de parâmetros bi-dimensional a ser explorado. Mas, para o caso específico do SNM, a determinação da transição pode ser feita com facilidade para todo o espaço de parâmetros, $a \times b$, utilizando os assim chamados “pontos indicadores” (*indicator points*) [Shinohara e Aizawa, 1997]. Tais pontos são determinados analiticamente, e, dado que se encontram sobre o toro *shearless*, tornam trivial determiná-lo. Assim, basta, para cada par de valores dos parâmetros, determinar se o toro *shearless* está intacto, o que pode ser feito aplicando um grande número de iterações a um ponto indicador e assumindo que, por exemplo, caso a órbita se mantenha confinada (à uma dada região arbitrária), o toro *shearless* não foi destruído.

Pode-se, a princípio, aplicar ao SNM o método de Greene para a determinação da quebra

de um toro (de uma dada transformada rotacional ι_0) de modo análogo ao feito para o mapa padrão generalizado de Greene e Mao: pode-se, por exemplo, fixando-se um valor de b , encontrar o valor de a , a_c , para o qual o(s) toro(s) com $\iota = \iota_0$ é crítico. Contudo, em geral este não seria o último toro a ser quebrado (pois este não seria necessariamente o toro *shearless*), e a quebra não modificaria, portanto, a topologia do espaço de fases. Mas o método de Greene retoma sua importância, no caso não-*twist*, ao fazer-se uma busca no espaço de parâmetros pelos valores para os quais a órbita com $\iota = \iota_0$ é também *shearless*.

Considerando-se uma órbita de período específico, é possível, para um valor fixo de a , utilizar os diagramas de bifurcação (como os da Fig. 5.3) para determinar o valor de b para o qual tal órbita é *shearless*: o perfil não-monotônico da transformada rotacional, ι , leva, tipicamente, a duas ressonâncias “gêmeas”, correspondentes aos valores de y sobre os quais ι assume o mesmo valor; deste modo, por construção, entre elas está o extremo do perfil e, conseqüentemente, o toro *shearless*; portanto, quando, no diagrama, as órbitas se encontram, existe apenas uma órbita na região com o período considerado e esta órbita, necessariamente, é *shearless*. Realizando-se essa análise para um intervalo de valores de a , é possível determinar a curva $b_s(a)$, no espaço de parâmetros, sobre a qual a órbita em questão é *shearless* (e, portanto, a mais resistente). Deste modo, ao aplicar-se o método de Greene, ao contrário de fazer-se uma busca no parâmetro de perturbação apenas, como feito para o SM (para o qual esse é o único parâmetro, K), para o SNM faz-se essa busca sobre a curva $(a, b_s(a))$, de modo que pela aplicação do método se obterá (a_c, b_c) : valores dos parâmetros para os quais o toro com $\iota = \iota_0$ é *shearless* e crítico. A Fig. 5.5 abaixo exhibe o toro áureo crítico para o SNM, que, por estar na criticalidade, apresenta uma estrutura auto-similar [del Castillo-Negrete et al., 1996]. O toro crítico é calculado por meio do ponto indicador $(x, y) = -(1/4, b/2)$ [Fuchss, 2006], e os valores dos parâmetros são encontrados utilizando o método descrito no parágrafo acima [del Castillo-Negrete et al., 1996].

Figura 5.5: Retrato de fases para o SNM, com o toro áureo (em preto) e uma órbita acima (em verde) e outra abaixo deste (em vermelho). Com os parâmetros $a = a_c = 0.686049$ e $b = b_c = 0.742493131039$ ($b_c = b_s(a_c)$), o toro é *shearless* e crítico.

Capítulo 6

Conclusões

Neste capítulo destacamos alguns de nossos resultados mais importantes, com ênfase àqueles com implicações experimentais claras, e aos de particular interesse teórico¹.

Apresentamos nesta tese diversos exemplos do uso de mapas simples para o estudo da estrutura magnética de tokamaks. Consideramos apenas mapas bidimensionais, construídos diretamente a partir de considerações dinâmicas ou aproximações dos campos magnéticos, i. e., apenas mapas particularmente simples, e que encerram em si mesmos o modelo adotado – os chamados *mapping models* [Abdullaev, 2004b].

Verificamos, por meio do mapa de Martin-Taylor e, principalmente, de Ullmann-Caldas (Cap. 3 e Sec. 4.1), que as bacias de escape de saídas artificialmente introduzidas no espaço de fases apresentam fronteiras que são assintoticamente fractais, apresentando inclusive a (mais restritiva) propriedade de Wada. Isto significa que sondas de medida posicionadas no interior da câmara do tokamak não estão, necessariamente, executando medidas das condições médias da região em que se encontram, mas sim de diversas regiões da câmara, incluindo pontos distantes. E a incerteza associada a essas fronteiras (i. e., a dificuldade de se prever a saída pela qual uma linha escapará) aumenta com a redução do tamanho das saídas - considerações semelhantes aplicando-se a outros obstáculos, tais como antenas, colocados no interior da câmara. Estas características são ditadas pela estrutura dinâmica subjacente, da sela caótica e variedades invariantes, que têm também influência sobre outros aspectos do comportamento das linhas de campo, oferecendo uma explicação, por exemplo, para o padrão de deposição de energia sobre limitadores físicos e placas de defletores, como visto no Cap. 2.

Utilizando a versão não-*twist* do mapa de Ullmann-Caldas (Sec. 4.2) determinamos que a quebra da barreira não-monotônica, crítica para transição para o caos global, exige perturbações de grande intensidade – o que corresponde ao melhor confinamento observado experimentalmente [Levinton et al., 1995, Mazzucato et al., 1996, Strait et al., 1995] para o regime de *reversed shear*. Observamos também, que tal quebra não implica uma transição abrupta nas propriedades de transporte, pois a barreira invariante então dá lugar a uma barreira efetiva, através da qual o transporte é particularmente lento. Determinamos, em particular, que o transporte, essencialmente radial, através desta barreira efetiva é cerca de duas ordens de grandeza mais

¹Uma descrição mais completa e detalhada de nossas conclusões pode ser encontrada nas respectivas seções dos artigos encontrados no Apêndice A.

lento que o transporte poloidal na região. E provamos que o mapa de Ullmann-Caldas não-*twist* pode, na região da barreira, ser aproximado por uma versão generalizada do mapa padrão não-*twist* (com um termo de perturbação adicional), um mapa cuja dinâmica ainda está por ser melhor investigada.

Mostramos, assim, alguns exemplos de como mapas simples são importantes ferramentas para o estudo das linhas de campo magnético em tokamaks. Tais mapas são mais eficientes computacionalmente e mais acessíveis analiticamente que outras abordagens, oferecendo um caminho para uma compreensão mais profunda dos fenômenos observados em tokamaks.

Referências Bibliográficas

- [Abdullaev, 1999] Abdullaev, S. S. (1999). A new integration method of hamiltonian systems by symplectic maps. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **32**(15):2745–2766.
- [Abdullaev, 2002] Abdullaev, S. S. (2002). The hamilton-jacobi method and hamiltonian maps. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **35**(12):2811–2832.
- [Abdullaev, 2004a] Abdullaev, S. S. (2004a). Canonical maps near separatrix in hamiltonian systems. *Physical Review E*, **70**:046202.
- [Abdullaev, 2004b] Abdullaev, S. S. (2004b). On mapping models of field lines in a stochastic magnetic field. *Nuclear Fusion*, **44**:S12–S27.
- [Ali et al., 2004] Ali, H., Punjabi, A., Boozer, A. e Evans, T. (2004). The low mn map for single-null divertor tokamaks. *Physics of Plasmas*, **11**(5):1908–1919.
- [Alligood et al., 1996] Alligood, K. T., Sauer, T. D. e Yorke, J. A. (1996). *Chaos: an Introduction to Dynamical Systems*. Springer, Berlin.
- [Balescu, 1997] Balescu, R. (1997). Continuous time random walk model for standard map dynamics. *Physical Review E*, **55**(3):2465–2474.
- [Balescu, 1998] Balescu, R. (1998). Hamiltonian nontwist map for magnetic field lines with locally reversed shear in toroidal geometry. *Physical Review E*, **58**(3):3781–3792.
- [Balescu et al., 1998] Balescu, R., Vlad, M. e Spineanu, F. (1998). Tokamap: a hamiltonian twist map for magnetic field lines in a toroidal geometry. *Physical Review E*, **58**(1):951–964.
- [Bleher et al., 1988] Bleher, S., Grebogi, C., Ott, E. e Brown, R. (1988). Fractal boundaries for exit in Hamiltonian dynamics. *Physical Review A*, **38**(12):930–938.
- [Caldas et al., 1996] Caldas, I. L., Pereira, J. M., Ullmann, K. e Viana, R. L. (1996). Magnetic field line mappings for a tokamak with ergodic limiters. *Chaos, Solitons & Fractals*, **7**(7):991–1010.
- [Chirikov, 1979] Chirikov, B. V. (1979). A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports*, **52**:265.
- [Constantinescu e Constantinescu, 2005] Constantinescu, D. e Constantinescu, R. (2005). Transport barriers and diffusion phenomena for the magnetic field lines in tokamak. *Physica Scripta*, **T118**:244–250.

- [Corso e Rizzato, 1995] Corso, G. e Rizzato, F. B. (1995). Hamiltonian bifurcations leading to chaos in a low-energy relativistic wave-particle system. *Physica D*, **80**(3):296–306.
- [da Silva et al., 2001] da Silva, E. C., Caldas, I. L. e Viana, R. L. (2001). Field line diffusion and loss in a tokamak with an ergodic magnetic limiter. *Physics of Plasmas*, **8**(6):2855–2865.
- [da Silva et al., 2006] da Silva, E. C., Roberto, M., Portela, J. S. E., Caldas, I. L. e Viana, R. L. (2006). Escaping and transport barrier due to ergodic magnetic limiters in tokamaks with reversed magnetic shear. *Nuclear Fusion*, **46**:S192–S198.
- [del Castillo-Negrete et al., 1996] del Castillo-Negrete, D., Greene, J. e Morrison, P. J. (1996). Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D*, **91**:1–23.
- [del Castillo-Negrete e Morrison, 1993] del Castillo-Negrete, D. e Morrison, P. J. (1993). Chaotic transport by Rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A*, **5**(4):948–965.
- [Devaney, 1987] Devaney, R. L. (1987). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Redwood City, California.
- [Feudel et al., 2005] Feudel, F., Witt, A., Gellert, M., Kurths, J., Grebogi, C., e Sanjuan, M. A. F. (2005). Intersections of stable and unstable manifolds: the skeleton of lagrangian chaos. *Chaos, Solitons & Fractals*, **24**:947–956.
- [Fischer e Cooper, 1998] Fischer, O. e Cooper, W. A. (1998). Mapping of a stochastic magnetic field line in toroidal systems. *Plasma Phys. Rep.*, **24**(9):784–788.
- [Fuchss, 2006] Fuchss, K. (2006). *Periodic orbit bifurcations and breakup of shearless invariant tori in nontwist systems*. Tese de doutorado, The University of Texas at Austin.
- [Fuchss et al., 2006] Fuchss, K., Wurm, A., Apte, A. e Morrison, P. J. (2006). Breakup of shearless meanders and “outer” tori in the standard notwist map. *CHAOS*, **16**:033120.
- [Greene, 1979] Greene, J. M. (1979). A method for determining a stochastic transition. *Journal of Mathematical Physics*, **20**(6):1183–1201.
- [Greene e Mao, 1990] Greene, J. M. e Mao, J. (1990). Higher-order fixed points of the renormalisation operator for invariant circles. *Nonlinearity*, **3**(1):69–78.
- [Hasselmann et al., 2003] Hasselmann, K. et al. (2003). The challenge of long-term climate change. *Science*, **302**(5652):1923–1925.
- [Hoffert et al., 2002] Hoffert, M. I. et al. (2002). Advanced technology paths to global climate stability: Energy for a greenhouse planet. *Science*, **298**(5595):981–987.
- [Horton et al., 1998] Horton, W., Park, H. B., Kwon, J. M., Strozzi, D., Morrison, P. J. e Choi, D. I. (1998). Drift wave test particle transport in reversed shear profile. *Physics Plasmas*, **5**(11):3910–3917.
- [Howard e Hohns, 1984] Howard, J. E. e Hohns, S. M. (1984). Stochasticity and reconnection in Hamiltonian systems. *Physical Review A*, **29**(1):418–421.

- [Howard e Humpherys, 1995] Howard, J. E. e Humpherys, J. (1995). Nonmonotonic twist maps. *Physica D*, **80**(3):256–276.
- [IPCC, 2007] IPCC (2007). *Climate Change 2007: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fourth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change*, capítulo Summary for Policymakers. Cambridge University Press. Disponível (07/11/2007) no website <http://ipcc-wg1.ucar.edu/wg1/wg1-report.html>.
- [Levinton et al., 1995] Levinton, F. M. et al. (1995). Improved confinement with reversed magnetic shear in TFTR. *Physical Review Letters*, **75**(24):4417–4420.
- [Lichtenberg e Lieberman, 1992] Lichtenberg, A. J. e Lieberman, M. A. (1992). *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer, New York.
- [Martin e Taylor, 1984] Martin, T. J. e Taylor, J. B. (1984). Ergodic behaviour in a magnetic limiter. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **26**(1B):321–340.
- [Mazzucato et al., 1996] Mazzucato, E. et al. (1996). Turbulent fluctuations in TFTR configurations with reversed magnetic shear. *Physical Review Letters*, **77**(15):3145–3148.
- [Misguich, 2001] Misguich, J. H. (2001). Dynamics of chaotic magnetic lines: Intermittency and noble internal transport barriers in the tokamak. *Physics of Plasmas*, **8**(5):2132–2138.
- [Misguich et al., 2002] Misguich, J. H., Reuss, J.-D., Constantinescu, D., Steinbrecher, G., Vlad, M., Spineanu, F., Weyssow, B. e Balescu, R. (2002). Noble cantor sets acting as partial internal transport barriers in fusion plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, **44**:L29–L35.
- [Misguich et al., 2003] Misguich, J. H., Reuss, J.-D., Constantinescu, D., Steinbrecher, G., Vlad, M., Spineanu, F., Weyssow, B. e Balescu, R. (2003). Noble cantor internal transport barriers and radial subdiffusion of toroidal magnetic lines. *Annales de Physique (Ann. Phys. Fr.)*, **28**(6):1–101.
- [Morrison, 2000] Morrison, P. J. (2000). Magnetic field lines, hamiltonian dynamics, and nontwist systems. *Physics of Plasmas*, **7**(6):2279–2289.
- [Nusse e Yorke, 1996] Nusse, H. E. e Yorke, J. A. (1996). Wada basin boundaries and basin cells. *Physica D*, **90**:242–261.
- [Oda e Caldas, 1995] Oda, G. A. e Caldas, I. L. (1995). Dimerized island chains in tokamaks. *Chaos, Solitons & Fractals*, **5**(1):15–23.
- [Perkins et al., 1999] Perkins, F. W. et al. (1999). [ITER] Chapter 1: Overview and summary. *Nucl. Fusion*, **39**(12):2137–2174.
- [Petrisor, 2002] Petrisor, E. (2002). Reconnection scenarios and the threshold of reconnection in the dynamics of non-twist maps. *Chaos, Solitons & Fractals*, **14**:117–127.
- [Portela et al., 2003] Portela, J. S. E., Caldas, I. L. e Viana, R. L. (2003). Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiter. *Physica A*, **317**:411–431.

- [Portela et al., 2007a] Portela, J. S. E., Caldas, I. L., Viana, R. L. e Morrison, P. J. (2007a). Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **17**(5).
- [Portela et al., 2007b] Portela, J. S. E., Caldas, I. L., Viana, R. L. e Sanjuán, M. A. F. (2007b). Exit basins in tokamaks with the Wada property. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **17**(11).
- [Prado e Corso, 2000] Prado, S. D. e Corso, G. (2000). Manifold reconnection and diffusion in strong chaos. *Physica D*, **142**:217–230.
- [Punjabi et al., 1997] Punjabi, A., Ali, H. e Boozer, A. (1997). Symmetric simple map for a single-null divertor tokamak. *Physics of Plasmas*, **4**(2):337–346.
- [Punjabi et al., 2003] Punjabi, A., Ali, H. e Boozer, A. (2003). Effects of dipole perturbation on the stochastic layer and magnetic footprint in single-null divertor tokamaks. *Physics of Plasmas*, **10**(10):3992–4003.
- [Punjabi et al., 1992] Punjabi, A., Verma, A. e Boozer, A. (1992). Stochastic broadening of the separatrix of a tokamak divertor. *Physical Review Letters*, **69**(23):3322–3325.
- [Punjabi et al., 1996] Punjabi, A., Verma, A. e Boozer, A. (1996). The simple map for a single-null divertor tokamak. *Journal of Plasma Physics*, **56**(3):569–603.
- [Sanjuán et al., 2003] Sanjuán, M. A. F., Horita, T. e Aihara, K. (2003). Opening a closed Hamiltonian map. *Chaos*, **13**(1):17–24.
- [Schneider et al., 2002] Schneider, J., Tél, T. e Neufeld, Z. (2002). Dynamics of “leaking” Hamiltonian systems. *Physical Review E*, **66**:066218.
- [Shinohara e Aizawa, 1997] Shinohara, S. e Aizawa, Y. (1997). The breakup condition of shearless KAM curves in the quadratic map. *Progress of Theoretical Physics*, **97**(3):379–385.
- [Shinohara e Aizawa, 1998] Shinohara, S. e Aizawa, Y. (1998). Indicators of reconnection processes and transition to global chaos in nontwist maps. *Progress of Theoretical Physics*, **100**(2):219–233.
- [Strait et al., 1995] Strait, E. J. et al. (1995). Enhanced confinement and stability in DIII-D discharges with reversed magnetic shear. *Physical Review Letters*, **75**(24):4421–4424.
- [Ullmann, 1998] Ullmann, K. (1998). *Métodos de Análise de Mapeamentos Não-Lineares com Aplicações à Física de Plasmas*. Tese de Doutorado - IFUSP. Orientador: Prof. Iberê Caldas.
- [Ullmann e Caldas, 2000] Ullmann, K. e Caldas, I. L. (2000). A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis. *Chaos, Solitons & Fractals*, **11**:2129–2140.
- [Viana e Caldas, 1991] Viana, R. L. e Caldas, I. L. (1991). Comments on the magnetic field generated by an infinite current grid. *European Journal of Physics*, **12**(6):293–296.

- [Viana e Caldas, 1992] Viana, R. L. e Caldas, I. L. (1992). Peripheral stochasticity in tokamaks: the Martin-Taylor model revisited. *Zeitschrift für Naturforschung*, **47**(9):941–944.
- [Wesson, 2004] Wesson, J. (2004). *Tokamaks*. Números 118 Em The International Series of Monographs on Physics. Oxford University Press, New York, 3 edição.
- [Wobig, 1987] Wobig, H. (1987). Magnetic-surfaces and localized perturbations in the Wendelstein VII-A stellarator. *Zeitschrift für Naturforschung*, **42**(10):1054–1066.
- [Wurm et al., 2005] Wurm, A., Apte, A., Fuchss, K. e Morrison, P. (2005). Meanders and reconnection-collision sequences in the standard nontwist map. *CHAOS*, **15**:023108.
- [Wurm et al., 2004] Wurm, A., Apte, A. e Morrison, P. (2004). On reconnection phenomena in the standard nontwist map. *Brazilian Journal of Physics*, **34**(4):1700–1706.

Apêndice A

Artigos

Aqui reunimos os artigos resultantes de nosso trabalho com mapas simples para a descrição de linhas de campo magnético em tokamaks.

O primeiro artigo, “Linhas de campo magnético caóticas em tokamaks com limitadores ergódicos” (*Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters* [Portela et al., 2003], Pg. 59), reúne diversos resultados referentes às propriedades da dinâmica do mapa de Martin-Taylor, como o transporte das linhas de campo, o crescimento das ressonâncias e surgimento do caos global com a variação dos parâmetros – destacando comparações das medidas numéricas com previsões teóricas aproximadas.

O trabalho “Escape e barreira de transporte devido aos limitadores magnéticos ergódicos em tokamaks com *reversed shear*” (*Escaping and transport barrier due to ergodic magnetic limiters in tokamaks with reversed magnetic shear*, [da Silva et al., 2006], Pg. 81), contém resultados para o mapa de Ullmann-Caldas não-*twist*, essencialmente preliminares a alguns dos presentes no artigo descrito no parágrafo seguinte [Portela et al., 2007a], apresentados de forma complementar aos dados para o mapa de da Silva.

O artigo “Transporte difusivo através de uma barreira não-*twist* em tokamaks” (*Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks* [Portela et al., 2007a], Pg. 89) caracteriza o transporte no mapa de Ullmann-Caldas não-*twist*, enfatizando o papel da barreira não-*twist* e mostrando a equivalência local deste mapa ao mapa padrão não-*twist* generalizado (i. e., com um termo de perturbação adicional).

O trabalho “Fronteiras fractais e de Wada em tokamaks” (*Fractal and Wada basin boundaries in tokamaks* [Portela et al., 2007b], Pg. 99), dedica-se exclusivamente à descrição das bacias de escape do mapa de Ullmann-Caldas (*twist*) e suas fronteiras.

O último artigo incluído, “Linhas de campo magnético de tokamaks descritas por mapas simples” (*Tokamak magnetic field lines described by simple maps*, Pg. 113) é uma revisão dos principais mapas simples utilizados na descrição das linhas de campo magnético em tokamaks, juntamente com seus resultados mais importantes. O artigo¹ encontra-se submetido para publicação em um número especial do *European Journal of Physics*, referente ao evento ‘Nonlinear Dynamics and Chaos: Advances and Perspectives’, ocorrido em Aberdeen - Reino Unido por ocasião do sexagésimo aniversário do Prof. C. Grebogi.

¹Ou melhor, uma versão lamentavelmente reduzida e “esprimida” deste, devido à limitação no número de páginas.

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

Physica A 317 (2003) 411–431

PHYSICA A

www.elsevier.com/locate/physa

Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters

Jefferson S.E. Portela^a, Ricardo L. Viana^{a,*}, Iberê L. Caldas^b^a*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, C.P. 19081, 81531-990 Curitiba, PR, Brazil*^b*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C.P. 66318, 05315-970, São Paulo, Brazil*

Received 24 May 2002; received in revised form 12 July 2002

Abstract

We consider a symplectic map for magnetic field lines in a tokamak with an ergodic limiter, whose function is to generate a perturbing magnetic field which causes the formation of chaotic field lines in the vicinity of the tokamak inner wall. We analyze numerically the onset of global chaos due to the interaction of adjacent magnetic islands, the size of the chaotic region, and investigate anomalous diffusion and loss of field lines due to their collisions with the tokamak wall.

© 2003 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

Keywords: Lagrangean chaos; Tokamaks; Magnetic field lines

1. Introduction

Tokamaks are toroidal systems in which plasmas are generated by the ohmic heating of a filling gas and confined by externally applied magnetic fields. The magnetic field lines have helical shape and lie on magnetic flux surfaces with topology of nested tori [1]. An important problem in the obtention of plasma discharges in tokamaks is the control of plasma contamination by impurities released from the inner wall by surface processes [2]. In order to control these plasma–wall interactions, there has been proposed the creation of a region of chaotic field lines in the periphery of the tokamak vessel [3–5]. Chaotic magnetic field lines are taken here from a Lagrangian perspective, since the configurations we dealt with in this paper are strictly magnetostatic. Sensitive dependence to initial conditions, in this sense, means that two field line points, very

* Corresponding author.

E-mail address: viana@fisica.ufpr.br (R.L. Viana).

close from each other at some spatial position, will evolve through a large number of revolutions around the torus such that the distance between them increases at a positive exponential rate [6,7].

The generation of chaotic magnetic field lines in the outer tokamak region can be done by breaking the spatial symmetry of the configuration, through the destruction of some carefully chosen magnetic surfaces in this region. The ergodic magnetic limiter (EML) is a device designed to generate external magnetic fields which interact with the equilibrium tokamak field and cause a selective destruction of magnetic surfaces [3–5]. The spatial behavior of the magnetic field lines can be studied by means of a Poincaré map, considering the intersections of the field lines with a fixed surface of section.

The use of mappings to study field line dynamics is a common tool in plasma physics. Recent works include the study of ergodic divertors [8,9] and general symmetry-breaking perturbations [10]. The case of a EML was first treated by Martin and Taylor [11], who have derived analytically a two-dimensional field line map in a rectangular geometry, appropriate to describe the region immediately near the tokamak wall. It has been subsequently improved with the addition of toroidal corrections and parameters describing the equilibrium and perturbed magnetic fields [12–14]. Recently, it has been proposed a symplectic map for a EML considering a toroidal geometry, and using magnetic fields consistent with a MHD equilibrium theory [15]. Magnetic field line mappings present an advantage due to the higher computation speed of their iteration, when compared with the numerical integration of the field line differential equations. This difference is relevant if long-term behavior of field lines is being considered, as in numerical studies of anomalous diffusion, field line losses due to collisions with the tokamak wall [16], bifurcations [17], and fractal exit basin boundaries [18].

The mapping of Ref. [11] is a useful tool to investigate the magnetic field line behavior due to arbitrary symmetry-breaking perturbations in tokamaks. It is exactly area-preserving, which is necessary in order to the map be consistent with magnetic flux conservation. Moreover, it exhibits resonances with unequal amplitudes, a situation often found in physical applications where the perturbation is localized in space. The Chirikov–Taylor standard map [19], on the other hand, which is commonly used to this purpose [20], has resonances with equal widths and hence it is not suitable to model the effect of a EML. Moreover, the double periodicity present in the standard map leads to the so-called accelerator models, which are not usually found in field line mappings [21].

The main purpose of this paper is to revisit the model of Ref. [11] so as to compare some known analytical approximate results with numerical estimates for periodic orbits, island positions, the onset of global chaos, and the size of the chaotic region. In particular we describe a numerical procedure to find accurately the barrier transition to global chaos, and investigate the validity of the Chirikov overlapping criterion [19] for this situation. Another issue to be treated is the field line anomalous diffusion in the mainly chaotic tokamak edge, and the loss of chaotic field lines due to their collisions with the tokamak wall.

This paper is organized as follows: in Section 2 we outline the derivation of the symplectic map for a EML. Section 3 is devoted to an analysis of many properties of

the map, such as its fixed points and periodic islands. Section 4 focuses on the barrier transition to global chaos, and Section 5 treats diffusion and loss in the chaotic region near the wall. Our conclusions are left to the last section.

2. Symplectic map for field lines

The basic toroidal geometry of a tokamak is depicted in Fig. 1. The major axis is parametrized by the Z coordinate, and we set the radius R with respect to it, in a cylindrical coordinate system, Φ being the corresponding azimuthal angle. The minor axis of the tokamak is located at $R = R_0$, where R_0 is the major radius of the torus, and the vessel wall is located at a distance b (minor radius) from the minor axis. We define an aspect ratio $A = R_0/b$ for the torus such that, if A is large enough, we can neglect the toroidal curvature and approximate the tokamak by a periodic cylinder of length $2\pi R_0$. The minor axis can now be used to define a second cylindrical coordinate system with coordinates r , θ and $z = R_0\Phi$, such that the tokamak wall is located at $r = b$. The variables θ and Φ are usually quoted as the poloidal and toroidal angles, respectively. The relations between these coordinate systems are $R = R_0 + r \cos \theta$, and $Z = r \sin \theta$.

In this paper, we are concerned with the behavior immediately near the tokamak wall, and in this case even the poloidal curvature may be neglected in a first approximation, such that we can use a rectangular coordinate system (Fig. 2) $x = b\theta$, and $y = b - r$, where $0 < x < 2\pi b$ represents the rectified arc along the tokamak wall, and y is the radial distance from it [11]. Points with $y > 0$ (< 0) are located inside (outside) the torus.

Fig. 1. Schematic view of a tokamak showing the coordinate systems used in this paper.

Fig. 2. Schematic view of the tokamak in the periodic cylinder approximation and the coordinates used in the rectangular geometry.

A tokamak confines a plasma by the combined action of two basic magnetic fields: (i) a toroidal field $\mathbf{B}_T$ along the $\hat{e}_\phi$ direction, generated by coils wound around the torus; (ii) a poloidal field $\mathbf{B}_P$ along the $\hat{e}_\theta$ direction, generated by the plasma column itself [1]. The superposition $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}_T + \mathbf{B}_P$ is called the equilibrium magnetic field and the resulting magnetic field lines have a helical shape, their pitch being described by the *safety factor* $q(r) = d\Phi/d\theta$.

The magnetic field line equations, viz. $\mathbf{B}_0 \times d\mathbf{r} = 0$, where $\mathbf{B}_0 = (B_{0x}, B_{0y}, B_{0z})$, are written in rectangular coordinates as

$$\frac{dx}{B_{0x}} = \frac{dy}{B_{0y}} = \frac{dz}{B_{0z}}. \quad (1)$$

In the periodic cylinder approximation, we assume that the toroidal equilibrium field is uniform $B_{0z} \equiv B_0$.

Ideal MHD theory predicts that the equilibrium magnetic field lines, in the absence of symmetry-breaking perturbations, lie on constant-pressure *flux surfaces* with a toroidal shape [6]. In the cylindrical approximation a flux surface is characterized by $q(r) = \text{constant}$. In particular, $q_b = q(r=b)$ is the safety factor at the tokamak wall, and we define

$$\alpha = \frac{2\pi b}{q_b}. \quad (2)$$

In typical experiments the safety factor radial profile is monotonically increasing from $q(0) \approx 1$, at the minor axis, to $q_b \approx 5$ [1], with a *magnetic shear*

$$s = \frac{2\pi b}{q_b^2} \left. \frac{dq}{dr} \right|_{r=b}. \quad (3)$$

Since we are interested in the immediate vicinity of the wall, we can expand the safety factor in powers of $y = b - r$

$$q(y) = \frac{b}{R_0} \frac{dz}{dx} = 2\pi b[\alpha + sy + o(y^2)]^{-1} \quad (4)$$

such that the magnetic field line equations (1) read

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2\pi R_0}[\alpha + sy + o(y^2)] , \quad (5)$$

$$\frac{dy}{dz} = 0 . \quad (6)$$

The EML configuration we consider in this paper consists on a grid-shaped ring of width ℓ (see Fig. 2) mounted externally to the torus (neglecting the thickness of the vessel wall), and with two kinds of segments: toroidally oriented (TO) and poloidally oriented (PO) ones [11]. There are m pairs of TO segments, equally spaced along the poloidal direction, with adjacent segments conducting a current I in opposite senses. Only the TO segments are relevant to the perturbing field of the EML [22]. In terms of the rectangular geometry considered here, the TO segments are on the xy -plane, $\pi b/m$ apart from each other. For low-beta plasmas we deal with a vacuum field, for which $\mathbf{B}_1 = \nabla\phi_M$, in terms of a scalar potential satisfying Laplace's equation, for which proper boundary conditions are imposed on the $y=0$ plane, where the surface density current due to the EML ring is [22]

$$\mathbf{j}(x) = \hat{e}_z \frac{I}{b} \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \delta\left(x - \frac{k\pi b}{m}\right) \quad (7)$$

and we have assumed that the TO segments are infinitely long.

Expanding the periodic delta function in (7) in a series of sinusoidal harmonics, it turns out that the magnetic field components of very long TO segments are given by [22]

$$B_{1x}^{(a)}(x, y) = -\frac{\mu_0 m I}{b\pi} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \cos\left(\frac{mx}{b}\right) , \quad (8)$$

$$B_{1y}^{(a)}(x, y) = +\frac{\mu_0 m I}{b\pi} \exp\left(-\frac{my}{b}\right) \sin\left(\frac{mx}{b}\right) , \quad (9)$$

$$B_{1z}^{(a)}(x, y) = 0 . \quad (10)$$

However, the EML ring has a finite length ℓ and, neglecting border effects, we make the crude approximation that inside the limiter (i.e., when $0 \leq z \leq \ell$) the EML field is given by (8)–(10), whereas outside it only the equilibrium magnetic field is present and the field lines satisfy Eqs. (5) and (6).

The EML map is defined through a Poincaré surface of section at the $\Phi = 0$, such that x_n and y_n are coordinates of the n th piercing of a field line on this plane. Since the independent (or time-like) variable in the magnetic field line equations is the z -variable, and since there is a periodicity of $T \equiv 2\pi R_0$ in this direction, we can regard the process

as a stroboscopic, or “time- T ” map of the flow given by (1). In order to evaluate the kick suffered by a field line due to the EML, we define auxiliary variables x_n^* , y_n^* as the coordinates sampled at the EML edge $z = \ell$. If the limiter length ℓ is small enough, we can approximately integrate the differential equations by Euler’s method, evaluating the EML field at $z = 0$ and extrapolating the result to the other edge ($z = \ell$). There results [11]

$$x_n^* = x_n - \frac{bp}{m} \exp\left(-\frac{my_n}{b}\right) \cos\left(\frac{mx_n}{b}\right), \quad (11)$$

$$y_n^* = y_n + \frac{b}{m} \ln \left\{ \cos \left[\frac{mx_n}{b} - p \exp\left(-\frac{my_n}{b}\right) \cos\left(\frac{mx_n}{b}\right) \right] \right\} - \frac{b}{m} \ln \cos\left(\frac{mx_n}{b}\right), \quad (12)$$

where

$$p = \frac{\mu_0 \ell m^2 I}{B_0 b^2 \pi} \quad (13)$$

represents the strength of the EML action, proportional to the limiter current.

Outside the limiter ($\ell < z < 2\pi R_0$) the field line equations (5)–(6) can be exactly integrated to give the coordinates of the $(n+1)$ th mapping point on the Poincaré surface of section $z = 0$

$$x_{n+1} = x_n^* + \alpha + sy_n^*, \quad (14)$$

$$y_{n+1} = y_n^* \quad (15)$$

meaning that, in absence of perturbation, the field line intersections with the plane are constrained to lie on straight lines for which y is constant.

It is useful to define non-dimensional variables

$$x' \equiv \frac{mx}{b}, \quad (16)$$

$$y' \equiv \frac{m}{b} \left(y + \frac{\alpha}{s} \right), \quad (17)$$

such that the new origin ($y' = 0$) corresponds to the point $y_0 = -\alpha/s$, for which $x_n^* = x_{n+1}$. Since $0 \leq x' < 2\pi$, x is defined modulo $2\pi b/m$, and the safety factor at y_0 is then m/K , where K is an integer. In terms of these normalized variables, the pairs of difference equations (11)–(12) and (14)–(15) can be written as the composition of two mappings $T = T_2 \circ T_1$, where T_2 corresponds to the limiter action

$$x_n'^* = x_n' - p e^{-y_n'} \cos x_n', \quad (18)$$

$$y_n'^* = y_n' + \ln[\cos(x_n' - p e^{-y_n'} \cos x_n')] - \ln(\cos x_n') \quad (19)$$

and T_1 to the field line twist on a flux surface

$$x_{n+1}' = x_n'^* + sy_n'^*, \quad (20)$$

$$y_{n+1}' = y_n'^*. \quad (21)$$

3. Properties of the EML map

For later convenience, let us write the map T in a more compact form, dropping the primes on the variables for simplicity

$$x_{n+1} = x_n + sy_n + g(x_n, y_n), \quad (22)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n), \quad (23)$$

where

$$h(x, y) = \ln \left[\frac{\cos(x - pe^{-y} \cos x)}{\cos x} \right], \quad (24)$$

$$g(x, y) = -pe^{-y} \cos x + sh(x, y). \quad (25)$$

The map (22)–(23) is *exactly* area-preserving, for its Jacobian is equal to the unity, in spite of the number of approximations we made in the derivation of the map equations. Incidentally, if we expand the functions defined above in powers of the diffuser strength p , it turns out that the Jacobian is now $1 + o(p^2)$.

Eqs. (22) and (23) define a Hamiltonian mapping, in the sense that (x, y) may be regarded as canonically conjugated variables, whereas the ignorable coordinate z (in the symmetric case) plays the role of time. In this case, the magnetic field line equations (1) can be written as Hamilton equations [7,23,24]

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (26)$$

$$\frac{dy}{dz} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (27)$$

in which H is the field line Hamiltonian. For the equilibrium field $\mathbf{B}_0$, H depends only on the radial variable, what characterizes an integrable system (in the sense of having one constant of motion), such that (y, x) are action and angle variables, respectively [21]. Considering Eq. (1), for example, the integrable Hamiltonian is $H_0(y) = B_{0x}(y)/B_0$.

The presence of an EML breaks the z -symmetry of the system, which becomes non-integrable. For weak limiter currents (in comparison with the plasma current) the limiter strength p is accordingly small and we can treat the problem as a near-integrable one. We can thus write the EML map in the form of a perturbed twist mapping [21]

$$x_{n+1} = x_n + 2\pi\mathcal{A}(y_n) + g(x_n, y_n), \quad (28)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n), \quad (29)$$

where

$$\mathcal{A}(y) = \frac{1}{2\pi} sy \quad (30)$$

is called the rotation number, and the functions $g(x, y)$ and $h(x, y)$ are related to derivatives of the perturbation Hamiltonian $H_1(x, y, z)$, provided we write the z -dependence

of the latter as a periodic sequence of delta functions [25]

$$H_1(x, y, z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_1(x, y) \delta(z - 2\pi R_0 j), \quad (31)$$

such that the near-integrable system has a total Hamiltonian

$$H(x, y, z) = H_0(y) + H_1(x, y, z), \quad (32)$$

where $|H_1| \ll |H_0|$.

The fixed points of the EML map (22)–(23) are the solutions of the transcendental equations

$$x^* = \pi n + \frac{p}{2} e^{-y^*} \cos x^*, \quad (33)$$

$$y^* = \frac{2\pi n}{s} + \frac{p}{s} e^{-y^*} \cos x^*, \quad (34)$$

where n is a positive integer, which comes from the fact that x is defined *modulo* 2π , i.e., $x = x \pm 2\pi n$. We can use an approximate procedure, if p is small enough, and insert the right-hand side of Eq. (33) back into the cosine, and expand the result in powers of p . Just one iteration is sufficient to yield results up to quadratic terms in p :

$$x_1^* = +\frac{p}{2} \exp\left(-\frac{2\pi n}{s}\right) + o(p^2), \quad (35)$$

$$x_2^* = \pi - \frac{p}{2} \exp\left(-\frac{2\pi n}{s}\right) + o(p^2). \quad (36)$$

Substituting these results into (34) and expanding again in powers of p there results [11]

$$y^* = \frac{2\pi n}{s} - \frac{p}{s} \exp\left(-\frac{2\pi n}{s}\right) + o(p^2). \quad (37)$$

We have developed a numerical algorithm to find the location of the fixed point x_2^* , using the above results as an initial step. The map trajectories in the vicinity of the fixed point (x_2^*, y^*) are ellipses encircling it, and since Eqs. (36)–(37) do not give the exact location of the fixed points, if we use them as initial conditions, the resulting map trajectories in the phase plane (x, y) will be closed orbits of elliptic shape and very small size. A numerical refinement of the fixed point location can be obtained by averaging the x and y values of all points of this elliptic orbit, yielding an improved estimate for (x_2^*, y^*) . The procedure can be repeated until we achieve the desired accuracy.

Fig. 3 shows the radial location of the fixed point (x_2^*, y^*) for $n = 0$, and using: (i) the approximate analytical result of Eq. (37); (ii) a numerical solution of the transcendental equations (33)–(34); and (iii) the refinement algorithm described in the previous paragraph. Whereas the latter two results always seem to coincide, it turns out that the analytical result from (37) holds only for small p (Fig. 3a), what could be already expected due to the power expansions we have used to derive this result.

Fig. 3. Radial location of the elliptic fixed points of the EML map (22)–(23) for $n = 0$, as a function of (a) the limiter strength; and (b) the magnetic shear. Dots: numerical solution of Eq. (34); circles: refinement algorithm; full lines: approximate analytical result from Eq. (37).

In Fig. 3b we perform a similar comparison for varying magnetic shear, and show that the analytical result is satisfactory for high shear ($s \gtrsim 5$).

To study the linear stability properties of such fixed points, we can compute either the eigenvalues of the Jacobian matrix $\mathbf{J}$ of map (22)–(23) or the Greene residue [26]

$$R = \frac{1}{4}(2 - \text{Tr } \mathbf{J}) . \quad (38)$$

Fig. 4. Phase portrait for the EML map for $p = 0.1$ and $s = 2\pi$.

If $0 < R < 1$ the eigenvalues of $\mathbf{J}$ are pure imaginary and complex conjugates of each other, so that (x^*, y^*) is an elliptic point, or a center. Otherwise, the eigenvalues are real numbers, and the fixed point is a (hyperbolic) saddle point, hence linearly unstable. The residues for the fixed points (35) and (36) are, respectively, given by

$$R(x_{1,2}^*, y^*) = \mp \frac{1}{4} ps \exp\left(-\frac{2\pi n}{s}\right) + o(p^2) \quad (39)$$

and since both p and s are assumed to be positive, it turns out that $R(x_1^*) < 0$, hence x_1^* is a hyperbolic point. Similarly, x_2^* will be an elliptic point if $ps \exp(-2\pi n/s) < 4$, a condition fulfilled by most numerical applications we deal with in this paper.

In Fig. 4 we show a large number of orbits obtained for the EML map in a large-shear and low-strength situation, and for which the small- p expansions we used are in agreement with numerical results (see Fig. 3). Primary periodic islands encircle the elliptic fixed points $x_2^* \approx \pi$ and $y^* \approx 0, 1, 2, \dots$. From Eq. (16), since y is a reduced variable, a single primary island in the phase portraits corresponds to a chain of m islands in the tokamak. These islands have each a structure topologically similar to that of a non-linear pendulum, but since there is a symmetry-breaking perturbation, the island separatrices no longer cross themselves at the hyperbolic points ($x_1^* \approx 0$), as would occur with a pendulum. They have instead a rather involved behavior characterized by a local chaotic layer at the island border [21].

4. Transition to global chaos

The primary islands shown in Fig. 4 are centered at the elliptic fixed points of the EML map (22)–(23), $y_n^* = 2\pi n/s + o(p)$, for $n = 0, 1, 2, \dots$, and result from resonances

Fig. 5. Phase portrait for the EML map for $s = 2\pi$ and (a) $p = 0.29$ and (b) $p = 0.32$; respectively, after and before the barrier transition to global chaos.

between the harmonics of the EML field and the equilibrium magnetic field. In terms of the corresponding perturbed twist map, the rotation number at the fixed point is, from Eq. (30), $\mathcal{A}(y_n^*) = n + o(p)$. Hence we label the primary islands as $n = 0, 1, 2, \dots$, in increasing order of distance from the tokamak wall.

In the absence of perturbations the twist map (28)–(29) results in $(\Delta x)_n = x_{n+1} - x_n = 2\pi\mathcal{A}(y_n)$. The island centers represent exact resonances, for the unperturbed field lines at those positions would close on themselves after k complete turns around the z -direction. From (4) the safety factor at a resonance centered at y_n^* is

$$q(y_n^*) = \frac{b}{R_0} \frac{k}{2\pi} \frac{2\pi R_0}{\mathcal{A}(y_n^*)} = b \left(\frac{k}{n} \right). \quad (40)$$

If both k and n are co-prime integers, it turns out that the safety factor at an island center is proportional to a rational number k/n [24]. We have mentioned in Section 2 that the safety factor can be used to label the equilibrium flux surfaces on which unperturbed magnetic field lines lie. Assuming that the safety factor depends monotonically on y , there results that each flux surface has a different safety factor. A rational (irrational) flux surface is thus characterized by a rational (irrational) safety factor [7]. In quasi-periodic orbits, a field line never closes on itself, rather filling densely an irrational flux surface, which appear as invariant curves between adjacent primary islands, in the phase portraits. These surfaces survive to a perturbation weak enough, according to the KAM theorem [27].

As the perturbation strength p increases, the phase portrait begins to show, besides the KAM tori, also higher-order islands, which are structured around periodic orbits of the symplectic map with higher integer periods (Fig. 5). In addition, thin area-filling regions are present in the neighborhood of the island borders, corresponding to dense chaotic orbits [21]. If p builds up further, the region between two adjacent islands becomes progressively engulfed by the chaotic regions surrounding each island border.

However, as long as we have KAM tori between these islands, the chaotic excursion of a single orbit is limited to a distance of the order of the island width.

Using a perturbative technique (global removal of resonances), Martin and Taylor [11] have found an approximate invariant which can be used to predict the half-width of an island centered at $y_n^* \approx 2\pi n/s$

$$\Delta y_n = 2\sqrt{\frac{p}{s}} \exp\left(-\frac{\pi n}{s}\right) + o(p) \quad (41)$$

showing that the island width increases with the square root of the limiter strength and decreases exponentially with the island position, as we can observe in the phase portraits of Fig. 4.

On the other hand, the separation between two adjacent islands does not depend on n , since

$$\delta y = y_{n+1}^* - y_n^* = \frac{2\pi}{s} + \frac{p}{s} \exp\left(-\frac{2\pi}{s}\right) \quad (42)$$

and the consequence is that, as p increases, the regions between adjacent islands are altered in quantitatively different ways. For example, for the same value of p , the region between the $n = 0$ and 1 primary islands is more affected by the presence of chaotic field than the region between the $n = 1$ and 2 ones. This is due to the EML action being mainly near the tokamak wall.

The chaotic excursion of a field line can be substantially increased if two adjacent islands fuse their locally chaotic regions, producing global chaos. Since this demands the destruction of all KAM tori between two interacting islands, we expect a barrier transition: after the transition, the chaotic radial excursion of a field line suddenly increases to a distance nearly twice as large. The Chirikov overlapping criterion [19] prescribes the onset of global chaos when the borders of two adjacent island touch themselves. Defining a stochasticity parameter

$$S_{n,n+1} = \frac{\Delta y_{n+1} + \Delta y_n}{\delta y} \quad (43)$$

such a barrier transition for global chaos occurs when S reaches the critical value $S_c = 1$. However, the latter value turns to be too large, when compared with numerical results [26]. In practice, the barrier transition occurs *before* $S_c = 1$, basically for two reasons: (i) there are no sharp separatrices at the island borders, so we have to take into account the widths of the locally chaotic regions; (ii) there exist higher-order islands between adjacent primary resonances, and they have their own chaotic regions, contributing to the formation of a connected chaotic web [21].

The barrier transition has been extensively studied for the standard map [19]

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1}, \quad (44)$$

$$y_{n+1} = y_n + K \sin x_n \quad (45)$$

for which all primary islands have equal widths $\Delta y_n = 2\sqrt{K}$, and are separated by a fixed distance $\delta y_n = 2\pi$, such that the corresponding stochasticity parameter is $S = 2\sqrt{K}/\pi$. Careful numerical experiments [26] have determined that the barrier transition

occurs at $K_c \approx 0.9716$. This corresponds to a last KAM torus between two primary island with irrational rotation number equal to the golden mean $(\sqrt{5} - 1)/2$ [28]. If we continue to use the stochasticity parameter (43) to describe the barrier transition, this numerical result amounts to a critical stochasticity parameter $S_c \approx \frac{2}{3}$, the so-called “two-thirds rule”, which is an empirical correction to the Chirikov criterion [21]. Notice, however, that more sophisticated methods to predict a barrier transition are available, as the Doveil-Escande renormalization criterion [28], and the Greene residue technique [26].

In contrast with the standard map, the primary islands of the EML map have different widths according to their positions. Since only those islands with $n = 0$ and 1 have widths large enough to yield a sizeable chaotic region for p -values of practical interest, we consider just their interaction, and compute the corresponding stochasticity parameter. Substituting Eqs. (41) and (42) into (43), it reads

$$S_{0,1}(p, s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{ps} (1 + e^{-\pi/s}) + o(p^{3/2}). \quad (46)$$

We estimate the limiter strength threshold, p_c , by imposing that $S_{0,1}(p_c) = S_c$, what results in

$$p_c(S_c, s) = \frac{\pi^2}{s} S_c^2 (1 + e^{-\pi/s})^{-2}. \quad (47)$$

Let us consider the phase portraits depicted in Fig. 5. The two panels represent situations just after and before the barrier transition, which occurs for an estimated perturbation strength of $p_c \approx 0.29$. On the other hand, applying the two-thirds rule ($S_c = \frac{2}{3}$) in (47), there results a value $p_c = 0.27$, which represents an error less than 7% of the numerically observed value, and it is far better than the value (0.61) predicted for a simple touching of separatrices ($S_c = 1$). The numerical results we have obtained for p_c indicate that the necessary critical value for the stochasticity parameter must be about 0.69. We also remark that, since the interacting islands have unequal widths, at the barrier transition the last KAM torus to be broken between the primary islands is no longer the “golden torus”. The successful application of the two-thirds rule in this case, even with islands of unequal widths, was already noted in Ref. [25].

In order to verify the theoretical prediction given by the modified Chirikov criterion (47) for the onset of global chaos, we have used a numerical procedure based on the fact that points of a chaotic orbit near a $n = 0$ island will eventually have negative y -values. The critical p_c will be the least value of p for which the points of a chaotic orbit belong simultaneously to the chaotic regions near both the $n = 0$ and 1 islands. We start with a rough estimate for p_c , as given for example by Eq. (47) and the two-thirds rule, and set p to be slightly less than this value. Next we use Eq. (37) to set up an initial condition at the hyperbolic fixed point for $n = 1$. This initial condition is certainly in the chaotic region near the $n = 1$ island, and we generate a long chaotic orbit iterating the map 500,000 times. If these points do not have negative y -values they much probably do not belong to the chaotic region near the $n = 0$ island, such that the barrier transition has not occurred yet. Next we increment p by a small amount, say 5×10^{-4} , and repeat this procedure until we detect negative y -values, what indicates that the barrier transition has been crossed. In this case we set p_c as the arithmetic mean

Fig. 6. Critical value of the limiter strength p necessary to the barrier transition leading to global chaos, as a function of the magnetic shear s . Full line: least-squares fit; dashed line: theoretical prediction from 2/3-rule.

between the two last p -values. In Fig. 6 we present results for p_c versus the magnetic shear. The points are obtained through the numerical procedure just described; the full line is a least-squares power-law fit $p_c(s) \sim s^{-\sigma}$, where $\sigma \approx 1.4$; and the dashed line is the result from Eq. (47) with $S_c = 2/3$, illustrating the good agreement between the two-thirds rule and the numerical results, for a wide range of magnetic shear values.

5. Chaotic field line diffusion and loss

The main goal of an ergodic limiter is to create a region of chaotic magnetic field lines near the tokamak wall. However, this has to be done in a controlled way so as not to destroy the plasma core. We thus have to constrain the width of the chaotic region such that it should contain the vacuum layer between the plasma and the inner tokamak wall, as well as some of the outer portion of the plasma column, but leaving a number of undestroyed flux surfaces to confine a representative amount of plasma.

Let $y = A$ be an upper bound for the chaotic region, and it does not correspond necessarily to some KAM torus, since the latter typically presents some distortion in order to accommodate the neighboring pendular-shaped islands. Hence we may take $y = A$ as the poloidally averaged radius of the points belonging to this first KAM torus. Since the EML map (22)–(23) is invariant under the transformations [11]

$$y \rightarrow y + \frac{2\pi n}{s}, \quad (48)$$

$$p \rightarrow p \exp\left(\frac{2\pi n}{s}\right), \quad (49)$$

if $\ln p$ is increased by $2\pi/s$, the boundary of the chaotic region is likewise displaced by $2\pi/s$. Hence, the ratio between these two variations is equal to unity, or $dA/d(\ln p) = 1$

Fig. 7. Phase portrait for the EML map for $p = 0.1$ and $s = 10$. The full line indicates the tokamak wall, whereas the dashed line indicates the rough boundary of the chaotic region. The dotted line approximates the first KAM torus bounding the chaotic region.

which, by integration, gives

$$A(p, s) = \ln p + g(s), \quad (50)$$

where $g(s)$ is an arbitrary function of the magnetic shear. Martin and Taylor [11] have estimated that, for typical tokamak parameters,

$$g(s) = \ln s + 0.03. \quad (51)$$

We can numerically estimate the width of the chaotic region by considering a phase portrait like that depicted in Fig. 7. The chaotic boundary, indicated by a dashed line in Fig. 7, is taken to be the average y -value of the first KAM torus, counted from the tokamak wall. The first KAM torus is represented by a dotted line in Fig. 7. We compare in Fig. 8 the prediction of Eq. (51) with the numerically determined values of A , by varying p (Fig. 8a) and s (Fig. 8b). The agreement is good as long as we have the correct trend for the averaged value, the oscillations around it being a result of the mentioned distortion of the KAM tori near islands' borders. In particular, this agreement is better for higher shear. It should be noted in both figures that each jump suffered by A , as either p or s are increased, corresponds to a different barrier transition, which means that different adjacent pairs of islands (namely those with n and $n + 1$) are progressively fusing their locally chaotic layers. These layers, on their turn, add to the already existing global chaotic region.

Fig. 8. Radial size of the peripheric chaotic region as a function of: (a) limiter strength; (b) magnetic shear. Full line: results from Eq. (51).

Within this predominantly chaotic region, magnetic field line diffusion is expected to yield useful information about the particle diffusion in the confined plasma [29]. We remark that this diffusion process is taken in a Lagrangian sense, and thus does not necessarily imply on a similarly chaotic diffusion of particles as time evolves. The latter problem is considerably harder to treat since it would demand a full numerical solution of the combined system of particle and electromagnetic field self-consistent equations. Field line diffusion in the outer chaotic region can be either super and sub-diffusive, characterizing an anomalous transport regime [30]. The presence of periodic islands embedded in the chaotic region influences the diffusive process. It has been investigated the connection between Tsallis non-extensive thermodynamics and anomalous diffusion [31].

From the point of view of the physical applications, the relevant diffusion in the chaotic layer near the tokamak wall is in the radial direction. It can be characterized, for example, by the evolution, with respect to the number n of complete turns around

Fig. 9. Average square displacement of field lines in the radial direction versus the number of toroidal turns, for $p = 0.2$ and $s = 2\pi$, using $N_x = 10000$ initial conditions randomly chosen in the peripheric chaotic region ($y = 0.15, 0 < x < 1$).

the torus, of the average square displacement in the y -direction

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{N_x} \sum_{i=1}^{N_x} [y_n(i) - y_0(i)]^2, \quad (52)$$

where we have taken N_x initial conditions $\{y_0(1), y_0(2), \dots\}$, randomly chosen in the chaotic region ($0 < y \lesssim A$). One expects a time evolution of this quantity in the general form $\sigma_n^2 \sim n^\nu$, where $\nu = 1$ indicates the diffusive (Gaussian) regime, and $\nu < (>) 1$ a sub-(super-)diffusive transport. Fig. 9 shows our results for the EML map (22)–(23), evidencing an initially super-diffusive regime, followed by saturation and a subsequent decay. The initially explosive phase occurs due to the dominant effect of the positive average Lyapunov exponent in the y -direction, and the observed decay is due to field line losses occurring in virtue of their collisions with the tokamaks wall at $y = 0$. This happens since points with $y < 0$ are not taken into account in Eq. (52), and after a chaotic orbit reaches $y = 0$ it escapes from the region of interest and is considered lost.

The time (in number of toroidal turns) it takes for a given field line to escape depends on the initial condition, and we analyze the average escape duration with respect to a large number of initial conditions randomly chosen in the chaotic region. We expect on general grounds an exponential distribution for the average escape time [16]. Similarly, one can compute the fraction of remaining field lines after a time n , which should also obey an exponential decay.

In Fig. 10, we plot the fraction of the remaining field lines F_p as a function of number of iterations of the EML map (22)–(23), at a fixed value of the limiter strength. For the first hundred iterations this fraction is nearly equal to unity indicating that the field lines wander through the available chaotic region practically without hitting the tokamak wall. Once this happens, however, the escape becomes very fast, occurring at an exponential rate, all field lines eventually being lost due to their colliding with the wall.

Fig. 10. Fraction of field lines which have not been lost due to collisions with the wall versus the number of toroidal turns.

Although our theoretical approach is magnetostatic, we can have a rough idea of the time it takes for a plasma ionized impurity to reach the wall. Take N randomly chosen initial conditions in the chaotic edge region (x_{0i}, y_{0i}) , $i = 1, 2, \dots, N$, and for each of them compute n_{ci} , or the number of map iterations it takes for the i th chaotic field line to reach the wall. The average number of map iterations is thus $\langle n_c \rangle = (1/N) \sum_i n_{ci}$. The escape time required for an ionized impurity to reach the wall can be thus estimated as

$$\tau_c \sim \frac{(2\pi R_0)(\langle n_c \rangle)}{v_T}, \quad (53)$$

where $v_T = \sqrt{2k_B T/m_P}$ is the particle thermal velocity, with $k_B T$ the particle thermal energy and m_P the impurity mass. This assumption underestimates effects of runaway electrons. For the tokamak *TCABR*, operating at University of Sao Paulo, it has been measured an effective atomic number of about 4.0, in such a way that we can take the berillium mass for the impurities themselves $m_P \approx 1.50 \times 10^{-26}$ kg [32]. Numerical studies of ergodic limiter performance in this machine, with a limiter current of 3.2 kA have indicated an escape time $\tau_c \approx 28$ ms, which is about one fourth of a typical discharge duration (120 ms). Hence in such a tokamak a EML can be effectively activated during plasma discharges.

Another interesting feature of the field line decay is that it is not continuous, but rather occurs in plateaus with different lengths, satisfying a well-defined statistical distribution. Fig. 11 is a frequency histogram showing the relative abundance of plateaus of given length, or the time intervals between successive losses of field lines. Here, as in the previous figure, the word time stands for the number of iterations a field line takes to hit the tokamak wall. For a given EML current we have far more small plateaus (in which field line loss occurs after a few toroidal excursions) than long plateaus.

Fig. 11. Frequency histogram for the number of plateaus of a given length in Fig. 10. A plateau corresponds to the time interval between successive losses of a field line in the chaotic region.

6. Conclusions

The creation of a boundary layer of chaotic magnetic field lines is possible by means of a symmetry-breaking perturbation, and the ergodic magnetic limiter (EML) is a device with this main goal. The local character of the perturbation makes it possible to derive analytically a Poincaré map giving the field line coordinates at a fixed surface of section in the tokamak torus. In spite of the approximations which have been used to derive it, the map is rigorously area-preserving, which is a necessary requirement from the physical standpoint, and the long-term behavior of field lines can be analyzed using a considerably shorter computer time than a numerical integration of systems of differential equations.

The symplectic map we consider for the EML is such that many results have been analytically obtained in an approximate way. In this paper, we have done a careful numerical estimation of some of these approximate results. The location of the fixed points is an important information since they identify island positions and separations. We have shown that the approximate analytical expressions hold either for small limiter strength and/or high magnetic shear. The onset of global chaos, necessary to the obtention of a peripheric chaotic region, is studied by means of a modified version of the Chirikov criterion, in which touching of island separatrices is not required, and with an *ad hoc* correction being included to take care of other effects involved in the barrier transition. We have numerically determined the critical limiter current necessary to chaotization of the two outermost periodic islands and found that the value of the critical stochasticity parameter compares well with that predicted by the so-called two-thirds rule, despite the fact that the interacting islands have unequal widths.

The detailed numerical study we have done for the onset of global chaos enabled us to estimate the size of the chaotic region, by means of the average radial position of the first intact KAM surface, counted from the inner wall. Our results show a good

agreement with previous theoretical estimates. The radial diffusion of field lines in the outer chaotic region was found to be anomalous, with an initial super-diffusive regime followed by a decrease caused by losses due to field line collisions with the tokamak wall. The field line loss due to a limiter is characterized by an exponential decay, with a plateau structure when considered in smaller time scales. The plateau distribution follows a power-law dependence with the plateau duration. The symplectic map we deal with in this paper is a valuable tool to investigate the effect of symmetry-breaking perturbations on the magnetic field line structure in tokamaks, for it retains essential features also present in more sophisticated models. It is thus a useful theoretical laboratory for long-term studies of near-integrable Hamiltonian systems with a localized chaotic region.

Acknowledgements

This work was made possible through partial financial support from the following Brazilian research agencies: CNPq, Fundação Araucária (Paraná), FUNPAR (UFPR) and FAPESP (São Paulo). We acknowledge enlightening discussions and useful comments by E.C. da Silva and S.R. Lopes.

References

- [1] J. Wesson, Tokamaks, Oxford University Press, Oxford, 1987.
- [2] S. McCool, et al., Nucl. Fusion 29 (1989) 547.
- [3] F. Karger, F. Lackner, Phys. Lett. A 61 (1977) 385.
- [4] W. Engelhardt, W. Feneberg, J. Nucl. Mater. 76/77 (1978) 518.
- [5] W. Feneberg, G.H. Wolf, Nucl. Fusion 27 (1981) 669.
- [6] J.D. Meiss, Rev. Mod. Phys. 64 (1992) 795.
- [7] P.J. Morrison, Phys. Plasma 7 (2000) 2279.
- [8] A. Punjabi, H. Ali, A. Boozer, Phys. Plasma 4 (1997) 337.
- [9] S.S. Abdullaev, K.H. Finken, K.H. Spatschek, Phys. Plasma 6 (1999) 153.
- [10] R. Balescu, M. Vlad, F. Spineanu, Phys. Rev. E 58 (1998) 951;
R. Balescu, Phys. Rev. E 58 (1998) 3781.
- [11] T.J. Martin, J.B. Taylor, Plasma Phys. Contr. Fusion 26 (1984) 321.
- [12] R.L. Viana, I.L. Caldas, Z. Naturforsch. 47A (1992) 941.
- [13] I.L. Caldas, J.M. Pereira, K. Ullmann, R.L. Viana, Chaos Sol. Fract. 7 (1996) 991.
- [14] K. Ullmann, I.L. Caldas, Chaos Sol. Fract. 11 (2000) 2129.
- [15] E.C. da Silva, I.L. Caldas, R.L. Viana, IEEE Trans. Plasma Sci. 29 (2001) 617.
- [16] E.C. da Silva, I.L. Caldas, R.L. Viana, Phys. Plasma 8 (2001) 2855.
- [17] E.C. da Silva, I.L. Caldas, R.L. Viana, Chaos Sol. Fract. 14 (2002) 403.
- [18] E.C. da Silva, I.L. Caldas, R.L. Viana, M.A.F. Sanjuan, Escape patterns, magnetic footprints, and homoclinic tangles due to ergodic magnetic limiters, Phys. Plasmas (2002), to be published.
- [19] B.V. Chirikov, Phys. Rep. 52 (1979) 265.
- [20] C. Murakami, W. Murakami, Y.H. Ichikawa, Prog. Theor. Phys. 104 (2000) 723;
C. Murakami, W. Murakami, K. Hirose, Y.H. Ichikawa, Prog. Theor. Phys. 106 (2001) 909.
- [21] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, Regular and Stochastic Motion, Springer, New York, Heidelberg, Berlin, 1983.
- [22] R.L. Viana, I.L. Caldas, Eur. J. Phys. 12 (1991) 293.
- [23] K.J. Whiteman, Rep. Prog. Phys. 40 (1977) 1033.

- [24] R.L. Viana, Chaos Sol. Fract. 11 (2000) 765.
- [25] R.L. Viana, D.B. Vasconcelos, Dyn. Stab. Systems 12 (1997) 75.
- [26] J.M. Greene, J. Math. Phys. 20 (1979) 1183.
- [27] L. Krlin, Fortschr. Phys. 37 (1989) 735.
- [28] D.F. Escande, Phys. Rep. 121 (1985) 165.
- [29] N. Reggiani, P.H. Sakanaka, Plasma Phys. Contr. Fusion 36 (1994) 513.
- [30] V. Latora, A. Rapisarda, S. Ruffo, Physica A 280 (2000) 81.
- [31] V. Latora, A. Rapisarda, C. Tsallis, Physica A 305 (2002) 129.
- [32] E.C. da Silva, I.L. Caldas, R.L. Viana, Braz. J. Phys. 32 (2002) 39.

Escaping and transport barrier due to ergodic magnetic limiters in tokamaks with reversed magnetic shear

Elton C. da Silva¹, Marisa Roberto², Jefferson S.E. Portela¹,
Iberê L. Caldas¹ and Ricardo L. Viana³

¹ Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C.P. 66318, 05315-970, São Paulo, São Paulo, Brazil

² Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial, Departamento de Física, 12228-900, São José dos Campos, São Paulo, Brazil

³ Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, C.P. 19081, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil

E-mail: ibere@if.usp.br

Received 5 August 2005, accepted for publication 28 February 2006

Published 21 March 2006

Online at stacks.iop.org/NF/46/S192

Abstract

Analytical tokamak plasma equilibria, with non-monotonic plasma current profile and perturbed by ergodic magnetic limiters, are described by non-twist conservative maps. Examples are given of concentration of magnetic field lines escaping to the tokamak wall. The robustness of invariant curves on the shearless region is also observed.

PACS numbers: 05.45.Ac, 05.45.Pq, 52.25.Fi

1. Introduction

The presence of non-integrable magnetic field lines in a certain plasma region within the tokamak implies the loss of the plasma confinement, due to the absence of flux surfaces. However, the chaotization of a limited plasma region, if properly handled, can be beneficial to the plasma confinement, as exemplified by the ergodic magnetic limiter [1–5] and the Dynamic Ergodic Divertor at TEXTOR tokamak [6]. Another situation in which the presence of non-integrable magnetic fields can help plasma confinement is the creation of a barrier to reduce Lagrangian field line escape in tokamaks with a negative magnetic shear region. Such a region is created by means of a non-peaked plasma current density, corresponding to a non-monotonic radial profile for the safety factor [7]. A resonant magnetic perturbation in the shearless region gives rise to a barrier separating the internal region with magnetic surfaces from the external stochastic region. The field line escape outside the barrier, at the plasma edge, is similar to those observed for monotonic equilibria. In fact, outside the barrier, the safety factor increases monotonically. The presence of the Lagrangian barrier in the shearless region limits the volume of the escape region. All this may contribute to the enhanced plasma confinement which has been observed in some experiments with magnetic shearless equilibria [8,9].

Unlike most magnetic configurations, negative shear configurations are best described by non-twist area-preserving maps [10, 11]. Such maps violate the non-degeneracy condition for the Kolmogorov–Arnold–Moser (KAM) theorem to be valid, so that many well-known results of canonical mappings no longer apply to them [12–14]. For example, it may happen that two neighbour island chains approach each other without being destroyed through the breakup of KAM curves [15]. The transport barrier arises from a combination of typical features of non-twist maps: reconnection and bifurcation, occurring in the reversed shear region [16]. This barrier is embedded in a chaotic field line region located in the tokamak peripheral region. Further investigation of this barrier requires a conservative map like the ones used in this article.

In this paper we introduce non-twist maps obtained by considering the superposition of an ergodic magnetic limiter field on the tokamak equilibrium field with a negative shear region due to a non-peaked plasma current. The limiter perturbation generates resonant magnetic fields that interact with the equilibrium field, causing a selective destruction of the magnetic surfaces at the plasma edge. On the inner plasma region, the field lines lie on magnetic surfaces, while the chaotic and unstable periodic lines are in the outer scrape-off layer. The external chaotic layer configuration is essentially

determined by the chaotic set on the scrape-off layer [17–21]. As a consequence of this chaotic configuration, the field lines with long connection lengths hit the tokamak wall non-uniformly producing the so-called field line escape pattern.

In this work, we use one of the introduced non-twist maps to study the connection of the chaotic lines to the tokamak wall. These maps are also used to numerically evidence the formation of a transport barrier due to a reconnection–bifurcation mechanism, and its effect on the plasma transport can be inferred from the study of field line diffusion by using the obtained maps.

The paper is organized as follows: in section 2, we present an area-preserving non-twist map to study, in toroidal geometry, the field line escaping to the tokamak wall. In section 3, we introduce another symplectic non-twist map to study the robustness of the internal shearless barriers in large aspect ratio tokamaks. Our conclusions are presented in the last section.

2. Field line escaping

In this section, we study the Lagrangian field line transport and the line escaping to the tokamak wall for a plasma equilibrium with reversed magnetic shear. We use a suitable coordinate system to describe magnetic field line geometry in a tokamak: $(r_t, \theta_t, \varphi_t)$, given by [22]

$$r_t = \frac{R'_0}{\cosh(\xi) - \cos(\omega)}, \quad (1)$$

$$\theta_t = \pi - \omega, \quad (2)$$

$$\varphi_t = \Phi, \quad (3)$$

in terms of the usual toroidal coordinates (ξ, ω, Φ) as presented in [23]. The meaning of these variables is the following: r_t is related to the radial coordinate of a field line with respect to the magnetic axis. R'_0 is the major radius with respect to the magnetic axis. R_0 and b are (see figure 1(a)), respectively, the major and minor radii with respect to the geometric axis. The angles θ_t and φ_t are, respectively, the poloidal and toroidal angles of this field line.

The contravariant components of the tokamak equilibrium magnetic field $\mathbf{B}_0 = (0, B_0^{(2)}, B_0^{(3)})$ are obtained from an approximated analytical solution of the equilibrium magneto-hydro-dynamical equation in these coordinates [24]. Figure 2 shows the normalized equatorial profiles of the poloidal and toroidal contravariant components of $\mathbf{B}_0$, respectively, for the equilibrium with reversed magnetic shear considered in this work.

In order to generate the reversed shear region we have considered a toroidal current density profile

$$j_{\varphi_t}(r_t) = \frac{I_p R'_0}{\pi a^2} \frac{(\gamma + 2)(\gamma + 1)}{\beta + \gamma + 2} \left[1 + \beta \left(\frac{r_t}{a} \right)^2 \right] \left[1 - \left(\frac{r_t}{a} \right)^2 \right]^\gamma, \quad (4)$$

with a central hole [25, 16]. In equation (4), β and γ are parameters that can be chosen to fit experimentally observed plasma profiles. The result is that the safety factor of the magnetic surfaces, defined as [26]

$$q(r_t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{B_0^{(3)}(r_t, \theta_t)}{B_0^{(2)}(r_t)} d\theta_t, \quad (5)$$

Figure 1. (a) Basic geometry of the tokamak; (b) scheme of an ergodic magnetic limiter.

has a non-monotonic profile. For $\beta \neq 0$ the safety factor has two different magnetic surfaces within the plasma column [25, 16] (see figure 3).

The ergodic magnetic limiter consists of N_ℓ current rings of length ℓ located symmetrically along the toroidal direction of the tokamak (figure 1(b)). These current rings may be regarded as slices of a pair of external helical windings located at $r_t = b$, conducting a current I_h in opposite senses for adjacent conductors. The role of these windings is to induce a resonant perturbation in the tokamak, and to achieve this effect a tunable parameter, λ , is introduced such that the helical windings have the same pitch as the field lines in the rational surface we want to perturb. This has been carried out by choosing the following winding law [24] $u_t = m_0[\theta_t + \lambda \sin(\theta_t)] - n_0\varphi_t = \text{constant}$, where (m_0, n_0) are the poloidal and toroidal mode numbers, respectively.

The magnetic field $\mathbf{B}_1$ produced by the resonant helical windings, from which we build the EML rings, is obtained by neglecting the plasma response and the penetration time through the tokamak wall. We are able to obtain an approximated analytical solution in lowest order for the limiter field, by solving the corresponding boundary value problem. The model field to be used in this paper is the superposition of the equilibrium and limiter fields: $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$. Since the equilibrium field is axisymmetric, we may set the azimuthal angle, $\varphi_t = t$, as a time-like variable and put the magnetic field

E.C. da Silva *et al*

Figure 2. Profiles of the poloidal (a) and toroidal (b) contravariant components of the equilibrium magnetic field with reversed shear.

Figure 3. Profile of the safety factor for a reversed shear configuration of a tokamak in terms of the action variable.

line equations in a Hamiltonian form [27]

$$\frac{d\mathcal{I}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta}, \quad (6)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathcal{I}}, \quad (7)$$

where $(\mathcal{I}, \vartheta)$ are the action–angle variables of a Hamiltonian H , its explicit form being given by

$$\mathcal{I}(r_t) = \frac{1}{4} [1 - \Omega_+(r_t) \cdot \Omega_-(r_t)], \quad (8)$$

$$\vartheta(r_t, \theta_t) = 2 \arctan \left[\frac{\Omega_+(r_t)}{\Omega_-(r_t)} \tan \left(\frac{\theta_t}{2} \right) \right], \quad (9)$$

where

$$\Omega_{\pm}(r_t) = \sqrt{1 \pm 2 \frac{r_t}{R'_0}}. \quad (10)$$

The addition of the magnetic field produced by resonant helical windings may be regarded as a Hamiltonian perturbation. In order to include the effect of the finite length ℓ of each EML ring, which is typically a small fraction of the total toroidal circumference $2\pi R'_0$, we model its effect as a sequence of delta-functions centred at each ring position. The Hamiltonian for the system is thus

$$H(\mathcal{I}, \vartheta, t) = H_0(\mathcal{I}) + \epsilon H_1(\mathcal{I}, \vartheta, t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta \left(t - k \frac{2\pi}{N_r} \right), \quad (11)$$

where

$$H_0(\mathcal{I}) = \int \frac{2\pi d\mathcal{I}}{q(r_t(\mathcal{I}))} \quad \text{and} \quad H_1(\mathcal{I}, \vartheta, t) = \sum_{m=0}^{2m_0} H_m^*(\mathcal{I}) e^{i(m\vartheta - n_0 t)}, \quad (12)$$

with

$$H_m^*(\mathcal{I}) = \sum_{m'=0}^{2m_0} H_{m'}(r_t(\mathcal{I})) \cdot S_{m,m'}(\mathcal{I}), \quad (13)$$

$$H_{m'}(r_t) = -J_{m'-m_0}(m_0\lambda) \left(\frac{r_t}{b} \right)^{m'}, \quad (14)$$

$$S_{m,m'}(\mathcal{I}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i[m'\vartheta_t(\mathcal{I}, \vartheta) - m\vartheta]} d\vartheta. \quad (15)$$

Due to the t -dependence of the Hamiltonian in the form of a sequence of delta-functions, it is possible to define discretized variables $(\mathcal{I}_n, \vartheta_n)$ as the corresponding values of the angle–action variables just after the n th crossing of a field line with the plane $t_k = (2\pi k/N_r)$ with $k = 0, 1, 2, \dots, N_r - 1$ [28]. Proceeding in this fashion, the following area-preserving mapping can be associated with the EML Hamiltonian (equation (11)) [24]:

$$\mathcal{I}_{n+1} = \mathcal{I}_n + \epsilon f(\mathcal{I}_{n+1}, \vartheta_n, t_n), \quad (16)$$

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_n + \frac{2\pi}{N_r q(\mathcal{I}_{n+1})} + \epsilon g(\mathcal{I}_{n+1}, \vartheta_n, t_n), \quad (17)$$

$$t_{n+1} = t_n + \frac{2\pi}{N_r}, \quad (18)$$

with

$$f = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta}, \quad g = \frac{\partial H_1}{\partial \mathcal{I}} \quad \text{and} \quad \epsilon = 2 \frac{I_h l}{I_e R'_0}, \quad (19)$$

where l is the EML coil width and I_e is the total current on the solenoid that creates the toroidal magnetic field.

It should be remarked, however, that the integration along the delta functions is not well defined. A more exact

Figure 4. Poloidal distribution of the EML modes.

perturbative method of construction of symplectic maps for Hamiltonian systems of the type of equation (11) has been recently developed [29, 30]. According to this method, the exact mapping for the Hamiltonian given by equation (11) has a symmetric form, in the sense discussed in [31]. Our non-symmetric mapping equations (equations (16)–(19)) can be obtained as an approximation of the exact symmetric map only for small perturbations and a weak dependence of the perturbation Hamiltonian, $H_1(\mathcal{I}, \vartheta, t)$, on the toroidal flux.

The Hamiltonian treatment of field line flow is useful to study the creation of a chaotic magnetic field line layer in the plasma due to the interaction between resonant perturbing fields and the tokamak equilibrium magnetic field [33]. Here the word *chaos* must be intended in its Lagrangian sense: two field lines very close to each other, depart exponentially as we follow their revolutions along the toroidal chamber. In terms of the field line map, chaos means an area-filling orbit in the surface of section, through which a field line can wander erratically.

Figure 4 shows the Fourier poloidal distribution of the EML perturbation for $m_0 = 4$. The main modes created by the EML are $m = 4$ and $m = 5$.

The stochastic condition could be estimated from the overlapping condition of islands. The mode amplitudes (figure 4) and the q profile at their resonant surfaces determine this condition [32].

Figure 5 shows two Poincaré cross-sections produced by the area-preserving mapping, given by equations (16)–(18), for $I_h = 2\%$ of I_p , where I_p is the plasma current. We choose $\gamma = 0.75$ and $\beta = 2.80$ corresponding to the non-monotonic q profile of figure 3. The perturbing parameter $\lambda = 0.4327$ is used in order to focus the perturbation on the most external surface with $q = 4$. The maps show the islands due to the main resonances observed in the poloidal spectrum of figure 4. Figure 5(a) displays well-known features comprising (i) chains of islands which appear due to the breaking of equilibrium flux surfaces with rational q values; (ii) KAM tori formed by surviving, although deformed, flux surfaces for which q is irrational and (iii) chaotic area-filling field lines which appear due to the crossing of homoclinic/heteroclinic invariant manifolds of unstable periodic orbits. Increasing the perturbing current to $I_h = 8.3\%$ of I_p (figure 5(b)),

Figure 5. Poincaré cross-section, in terms of the angle–action variables, produced by the EML mapping. Non-monotonic q profile with $\gamma = 0.75$ and $\beta = 2.80$, $N_r = 4$, $(m_0, n_0) = (4, 1)$, $\lambda = 0.4327$. (a) $I_h = 2\%$ of I_p and (b) $I_h = 8.3\%$ of I_p .

the last barrier between the plasma and the tokamak wall is destructed and a wide region of chaotic field lines is produced. Surrounding the remaining $q = 4$ islands chain there is a sticking region where field lines stay for a long time before eventually escaping and reaching the wall. The observed field line trapping on the shearless region produces an effect similar to that of a transport barrier and is interpreted in terms of an invariant chaotic set around this region. Thus, the formation of the chaotic layer at the plasma edge is determined by the invariant sets, such as the stable and unstable manifolds and the chaotic saddles of unstable periodic lines that exist in this region. Moreover, we study the resonant perturbation field lines considering the so-called exit basins or sets of points in the chaotic region which originate field lines that hit the wall in some specified region. This investigation shows that, for a tokamak with reversed magnetic shear, depending on the perturbed magnetic configuration, the field line escape pattern spreads over the tokamak wall or concentrates on its external equatorial region [17]. In particular, in figure 5(b), we observe that the field lines, which eventually escape, reach the wall in a very thin region, around $\theta_t = \pi$, on the external equatorial plane.

Experimental evidence of the influence of chaotic scrape-off layers on the plasma confinement, with magnetic field line

E.C. da Silva *et al*

shear, have been recently reported [18, 34]. This evidence confirms the importance of invariant chaotic saddles to predict the scrape-off layer magnetic structures [19–21].

3. Transport barrier

The basic geometry of a tokamak is determined by its major (R_0) and minor (b) radii (figure 1(a)). When the tokamak aspect ratio R_0/b is large enough we can neglect, in a zeroth approximation, the effects of the toroidal curvature and treat it as a periodic cylinder of length $2\pi R_0$, whose axis of symmetry is parametrized by the coordinate $z = R_0\varphi$ in terms of the toroidal angle φ [26]. In this case, the equilibrium toroidal field B_0 is practically uniform. Accordingly, a point in the tokamak is located by its cylindrical coordinates (r, θ, z) with respect to that axis. On the other hand, in the study of the region near the tokamak wall, it turns out that even the poloidal curvature does not change results noticeably, so that a rectangular system can be found by defining the following coordinates: $x' = b\theta$ and $y' = b - r$ [35]. The tokamak wall is thus characterized by the line segment $y' = 0$ extending from $x' = 0$ to $2\pi b$. In the following we will use normalized coordinates $x = x'/b$ and $y = y'/b$.

In the description used in this section the structure of the magnetic field lines in a tokamak can be more easily appreciated by taking a Poincaré surface of section at the plane $z = 0$. Let (r_n, θ_n) be the polar coordinates of the n th piercing of a given field line with that surface. Since the magnetic field line equations determine uniquely the position of the next piercing, we have a Poincaré map $(r_{n+1}, \theta_{n+1})^T = \mathbf{F}_1(r_n, \theta_n)^T$. Due to the solenoidal character of the magnetic field, this map is area-preserving in the surface of section [36]. The regular orbits lay in invariants magnetic surfaces described by the equation

$$\frac{r \, d\varphi}{R_0 \, d\theta} = q, \quad (20)$$

where θ and φ are the angles on the surface identified by the safety factor q .

In the absence of any perturbation, the configuration is described by a map $(r_n^*, \theta_n^*)^T = \mathbf{F}_1(r_n, \theta_n)^T$ [37], where

$$r_n^* = \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n}, \quad (21)$$

$$\theta_n^* = \theta_n + \frac{2\pi}{q(r_n^*)} + a_1 \cos \theta_n, \quad (22)$$

which have a correction for the effect of the toroidal curvature whose strength is given by the a_1 parameter.

The dependence of the safety factor with the radius is dictated by the details of the equilibrium magnetic field. The following expression describes in a satisfactory way typical non-monotonic q profiles of plasma discharges in tokamak experiments [25]:

$$q(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left[1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \Theta(a - r) \right]^{-1}, \quad (23)$$

where a is the plasma radius (slightly less than the tokamak minor radius b), q_a , β and γ are parameters that can be chosen to fit experimentally observed plasma profiles ($\beta' =$

Figure 6. Safety factor profile.

$\beta(\gamma + 1)/(\beta + \gamma + 1)$) and $\Theta(\cdot)$ is the unit step function. We choose $\beta = 2$ and $\gamma = 1$ that results in a slightly non-monotonic profile with a minimum near $y = 0.5$ (figure 6).

We consider the ergodic magnetic limiter introduced in the previous section. The effect of the EML on the equilibrium configuration can be approximated by a sequence of delta function pulses at each piercing of a field line in the surface of section. In cylindrical approximation [3, 28, 35], such a mapping $(r_{n+1}, \theta_{n+1})^T = \mathbf{F}_2(r_n^*, \theta_n^*)^T$ has been described by [37]:

$$r_n^* = r_{n+1} + \frac{m_0 C b}{m_0 - 1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m_0-1} \sin(m_0 \theta_n^*), \quad (24)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n^* - C \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m_0-2} \cos(m_0 \theta_n^*), \quad (25)$$

where $C = (2m_0 a^2 / R_0 q_a b^2) (I_h / I_p) \approx 1.6 \cdot 10^{-1} I_h / I_p$ represents the perturbation strength due to the magnetic ergodic limiter. In the following, we use the ratio between the limiter and plasma currents, I_h / I_p , to quantify the perturbation strength. In this section this ratio varies from 0.1 to 0.3 assuring a small value for the perturbation strength.

The entire field line mapping is the composition of the two mappings ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \circ \mathbf{F}_2$) and, since the variable r_{n+1} appears in both sides of the expression, we must solve for it at each iteration using a numerical scheme (Newton–Raphson method).

Symplectic mappings are convenient and fast ways of describing field line behaviour in tokamaks with ergodic limiters, since we do not need to numerically integrate the field line equations over the whole toroidal revolution, in order to get the coordinates of a field line intersection with the Poincaré surface of section. The mapping $\mathbf{F}$ is strictly area-preserving. However, as the variables (r, θ) are not canonical, this map preserves the magnetic flux only approximately.

The phase portraits of figure 7 show, for $m_0 = 3$, the scenario of separatrix reconnection [15]: due to the non-monotonicity [12] of our map, there are two island chains with the same period separated by invariant curves (a); increasing the perturbation the islands widen and the separatrices merge (b); then the chains interchange their hyperbolic points (c).

Figure 7. Phase portraits exhibiting the reconnection scenario: (a) $I_h/I_p = 0.05$, there are two island chains; (b) $I_h/I_p = 0.0635$, an heteroclinic connection takes place; (c) $I_h/I_p = 0.10$, the chains interchanged hyperbolic points; (d) $I_h/I_p = 0.30$, one of the island chains disappeared in a bifurcation and a barrier persists.

(This figure is in colour only in the electronic version)

Figure 7 also exhibits a bifurcation, the disappearance of an island chain due to the collision of its elliptic and hyperbolic points (d), as well as the rising and persistence of a transport barrier separating the chaotic region in the phase space.

The barrier turns out to be very robust, resisting perturbations up to $I_h/I_p = 0.30$. The barrier exists whenever we find an orbit describing an invariant curve. We establish a limit to the perturbation necessary to destroy the barrier as $I_h/I_p = 0.3030$ by verifying whether or not a long trajectory (we use 10^{11} iterations) passes through the barrier. Figure 8 shows the barrier breaking.

4. Conclusions

We use analytically obtained non-twist field line maps to study the effects of an ergodic magnetic limiter on the magnetic field line structure which results from a plasma current profile exhibiting reversed magnetic shear.

The non-twist nature of the maps allows island chains to approach and dimerize, as the limiter current builds up, in a reconnective process. The creation of a reasonably wide chaotic layer is predicted by global stochasticity mechanisms, eventually forming a chaotic region.

In the external part of the chaotic layer, the field lines escape to the wall and, depending on the equilibrium and perturbation parameters, their connections to the wall may concentrate on a small region. This concentrated connections should be disadvantageous for the plasma confinement. The same disadvantage may also be observed for equilibria with monotonic profiles [17].

Inside the plasma, a Lagrangian barrier may be created. This barrier is formed in the shearless plasma and results from the properties of field line trajectories in the vicinity of

Figure 8. Non-monotonic barrier destruction. Phase portraits show one trajectory above and some on the barrier for different perturbation strengths: (a) $I_h/I_p = 0.303$ and (b) $I_h/I_p = 0.304$. In the last case the trajectories cross the barrier.

E.C. da Silva *et al*

separatrices of islands in this region. This barrier can help plasma confinement preventing energetic charged particles from escaping out radially to an eventual collision with the tokamak inner wall.

Acknowledgments

This work was made possible through partial financial support from the following Brazilian research agencies: FAPESP (São Paulo), CNPq, Fundação Araucária (Paraná) and FUNPAR (UFPR).

References

- [1] Karger F. and Lackner K. 1977 *Phys. Lett. A* **61** 385
- [2] McCool S.C. *et al* 1989 *Nucl. Fusion* **29** 547
- [3] Portela J.S.E., Viana R.L. and Caldas I.L. 2003 *Physica A* **317** 411
- [4] Heller M.V.A.P. *et al* 2005 *Czech. J. Phys.* **55** 265
- [5] Vallet J.C. *et al* 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 2662
- [6] Jakubowski M.W., Abdullaev S.S. and Finken K.H. 2004 *Nucl. Fusion* **44** S1
- [7] Mazzucato E. *et al* 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3145
- [8] Levinton F.M. *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4417
- [9] Strait E.J. *et al* 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 4421
- [10] Morrison P.J. 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 467
- [11] Balescu R. 1998 *Phys. Rev. E* **58** 3781
- [12] Castillo-Negrete D., Greene J.M. and Morrison P.J. 1996 *Physica D* **91** 1
- [13] Petrisor E, Misguich J H and Constantinescu D 2003 *Chaos, Solitons Fractals* **18** 1085
- [14] Davidson M.G., Dewar R.L., Gardner H.J. and Howord J. 1995 *Aust. J. Phys.* **48** 871
- [15] Howard J E and Hohs S M 1984 *Phys. Rev. A* **29** 418
- [16] Corso G, Oda G A and Caldas I L 1997 *Chaos, Solitons Fractals* **8** 1891
- [17] da Silva E.C., Roberto M., Caldas I.L. and Viana R.L. 2006 Effects of the resonant modes on the magnetic footprint patterns in a tokamak wall *Phys. Plasmas* **13** at press
- [18] Evans T E *et al* 2005 *J. Phys.: Conf. Ser.* **7** 172
- [19] da Silva E.C., Caldas I.L. and Viana R.L. 2002 *Phys. Plasmas* **9** 4917
- [20] Portela J.S.E., Caldas I.L., Viana R.L. and Sanjuán 2006 Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks *Int. J. Bifurcat. Chaos* submitted
- [21] Wingen A., Spatschek K.H. and Abdullaev S.S. 2005 On the topology of partially stochastic magnetic fields *Workshop on Stochasticity in Fusion Plasmas (Jülich, Germany)* oral presentation
- [22] Kucinski M.Y., Caldas I.L., Monteiro L.H.A. and Okano V. 1990 *J. Plasma Phys.* **14** 303
- [23] Morse P.M. and Feshbach H. 1953 *Methods of Theoretical Physics* 2nd edn (New York: McGraw-Hill)
- [24] da Silva E.C., Viana R.L. and Caldas I.L. 2001 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **29** 617
- [25] Oda G.A. and Caldas I.L. 1995 *Chaos, Solitons Fractals* **5** 15
- [26] Wesson J. 1987 *Tokamaks* (Oxford: Oxford University Press)
- [27] Caldas I.L. *et al* 2002 *Braz. J. Phys.* **32** 980
- [28] Caldas I.L., Pereira J.M., Ullmann K. and Viana R.L. 1996 *Chaos, Solitons Fractals* **7** 991
- [29] Abdullaev S.S. 1999 *J. Phys. A* **32** 2745
- [30] Abdullaev S.S. 2002 *J. Phys. A* **35** 2811
- [31] Abdullaev S.S. 2004 *Nucl. Fusion* **44** S12
- [32] da Silva E.C., Caldas I.L. and Viana R.L. 2002 *Chaos, Solitons Fractals* **14** 403
- [33] Lichtenberg A.J. and Lieberman M.A. 1992 *Regular and Chaotic Dynamics* 2nd edn (New York: Springer)
- [34] Schaffer M. *et al* 2005 Preliminary study of ITER correction coils for ELM suppression *Workshop on Stochasticity in Fusion Plasmas (Jülich, Germany)* oral presentation
- [35] Martin T.J. and Taylor J.B. 1984 *Plasma Phys. Control Fusion* **26** 321
- [36] Morrison P.J. 2000 *Phys. Plasmas* **7** 2279
- [37] Ullmann K. and Caldas I.L. 2000 *Chaos, Solitons Fractals* **11** 2129

International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 17, No. 5 (2007) 1589–1598
 © World Scientific Publishing Company

DIFFUSIVE TRANSPORT THROUGH A NONTWIST BARRIER IN TOKAMAKS

J. S. E. PORTELA and I. L. CALDAS

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo,
 C.P. 66318, 05315-970, São Paulo, São Paulo, Brazil*

R. L. VIANA

*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná,
 C.P. 19081, 81531-990, Curitiba, Paraná, Brazil*

P. J. MORRISON

*Department of Physics and Institute for Fusion Studies,
 University of Texas at Austin, Austin, TX 78712, USA*

Received November 10, 2005; Revised April 20, 2006

The magnetic field line structure of tokamaks with reversed magnetic shear is analyzed by means of a nontwist map model that takes into account non-integrable perturbations that describe ergodic magnetic limiters. The map studied possess behavior expected of the standard nontwist map, a well-studied map, despite the different symmetries and the existence of coupled perturbations. A distinguishing feature of nontwist maps is the presence of good surfaces in the reversed shear region, and consequently the appearance of a transport barrier inside the plasma. Such barriers are observed in the present model and are seen to be very robust. Very strong perturbations are required to destroy them, and even after breaking, the transport turns out to be diffusive. Poloidal diffusion is found to be two orders of magnitude higher than radial diffusion.

Keywords: Tokamaks; transport; chaos; nontwist.

1. Introduction

Plasmas confined in toroidal configurations with axisymmetric magnetic fields have field line structure governed by Hamilton's equations, with the toroidal angle playing the role of time. Consequently, the lore of Hamiltonian dynamics has been developed applied to and in conjunction with such configurations. For example, the field lines of axisymmetric equilibria lie on nested toroidal surfaces, constituting integrable Hamiltonian systems, and perturbations of such axisymmetric equilibria are naturally described by Poincaré sections, the intersection of field lines with a poloidal section. Thus the structure of field lines can be understood by studying the repeated mapping of field

lines onto this section [Morrison, 2000; Lichtenberg & Lieberman, 1992]. When the safety factor, the helical pitch with which the magnetic field winds around the torus, is a monotonic function of the radius, we have a *twist* map; when this is not true, for example when the safety factor has a maximum, we have a *nontwist* map [Egydio de Carvalho & Osório de Almeida, 1992; del-Castillo-Negrete & Morrison, 1993; Oda & Caldas, 1995; Davidson *et al.*, 1995; Corso *et al.*, 1997; Wurm *et al.*, 2005]. Due to many important results, such as the KAM, Poincaré-Birkhoff, and Aubry–Mather theorems, having proofs only for twist systems, nontwist maps can have new phenomena, such as reconnection of separatrices (e.g. [Howard & Hohns, 1984;

1590 *J. S. E. Portela et al.*

del-Castillo-Negrete & Morrison, 1993]) and new universal behavior of invariant torus destruction [del-Castillo-Negrete *et al.*, 1997].

In tokamaks (the most promising devices for the magnetic confinement of fusion plasmas) non-twist dynamics occurs for hollow toroidal current profiles, which can now be obtained by many experimental techniques, and such profiles are related to enhanced confinement [Levinton *et al.*, 1995; Strait *et al.*, 1995; Mazzucato *et al.*, 1996]. It has been proposed that this better confinement is due to a transport barrier that is characteristic of the non-monotonic dynamics [Mazzucato *et al.*, 1996]. The main goal of this paper is to study this barrier and the transport through it. We consider an analytically obtained map, replacing lengthy numerical integrations of the magnetic field line of ordinary differential equations by faster iterations, allowing the long-term behavior to be studied. We also use a simplified coordinate system that describes the tokamak edge region.

The paper is organized as follows: in Sec. 2 we introduce the tokamak geometry and the model we use for numerical analyses; in Sec. 3 we present results about the invariant barrier formed by invariant tori that arise; then, in Sec. 4 we describe the transport through the effective barrier that remains after the invariant tori break; in Sec. 5 we find a local approximation for the model and compare it with the standard nontwist map; and finally we conclude in Sec. 6.

2. The Nontwist Map

The basic toroidal geometry of a tokamak is described by its major and minor radii, R_0 and b , respectively. When the tokamak aspect ratio, R_0/b , is large enough one can neglect the effect of the toroidal curvature and treat the system as a periodic cylinder of length $2\pi R_0$, where the symmetry axis is parameterized by the coordinate $z = R_0\phi$ with the toroidal angle ϕ (Fig. 1) [Wesson, 1987]. In this case, the equilibrium toroidal field $B_\phi = B_0$ is nearly uniform (a toroidal correction will be introduced later on). Accordingly, a point in the tokamak is determined by its cylindrical coordinates (r, θ, z) with respect to the symmetry axis. When studying the region near the tokamak wall, it turns out that even the poloidal curvature does not influence results noticeably, consequently a rectangular system can be used with the following coordinates: $x' = b\theta$ and $y' = b - r$ [Martin & Taylor, 1984].

Fig. 1. Schematic view of a tokamak in the periodic cylinder approximation. Shown are its section and the rectangular coordinates (before normalization) used to describe magnetic field lines.

In these coordinates the tokamak wall is thus characterized by the line segment $y' = 0$, extending from $x' = 0$ to $2\pi b$. In the following, we will use mostly the normalized coordinates $x = x'/b$ and $y = y'/b$.

The main magnetic fields of a tokamak are in the toroidal and poloidal directions (ϕ and θ of Fig. 1) and are generated by external coils and the toroidal plasma current, respectively [Wesson, 1987]. For a given equilibrium magnetic field, the field lines are determined by

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0, \quad (1)$$

which in cylindrical coordinates is equivalent to the following:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{R_0 d\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z}. \quad (2)$$

The equilibrium magnetic field configuration we consider has a toroidal correction given by the a_1 terms in Eqs. (3) and (4). In addition to the equilibrium fields, a perturbative resonant field can be added to control plasma-wall interactions [Karger & Lackner, 1977; Caldas *et al.*, 2002].

As noted above, the structure of the magnetic field lines in a tokamak can be more easily appreciated by examining a Poincaré surface of section, which we take at the plane $z = 0$. We let (r_n, θ_n) be the coordinates of the n th piercing of a given field line with that surface. These coordinates are related to the cartesian coordinates (x, y) introduced above. Because the magnetic field line equations uniquely determine the position of the next piercing, we have a Poincaré map. Due to the solenoidal character of the magnetic field, this map is area-preserving in the surface of section (e.g. [Morrison, 2000]). In a

rectangular description, this map can be modeled by an explicit map derived from a generating function [Ullmann & Caldas, 2000]. Thus, the equilibrium magnetic field lines can be described by:

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n}, \quad (3)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_{\text{eq}}(r_{n+1})} + a_1 \cos \theta_n, \quad (4)$$

where the parameter a_1 gives the strength of the toroidal correction and is set as -0.04 as in a previous work [Portela *et al.*, 2007]. We denote this map by $(r_{n+1}, \theta_{n+1}) = \mathbf{T}_e(r_n, \theta_n)$.

In Eq. (4) the function $q_{\text{eq}}(r)$ corresponds to the equilibrium safety factor defined by

$$q_{\text{eq}}(r) = \left\langle \frac{d\phi}{d\theta} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\phi}{d\theta} \right) d\theta, \quad (5)$$

where, from Eq. (2), $d\phi/d\theta = (rB_\phi)/(R_0B_\theta)$. The safety factor is proportional to the inverse of the rotational transform and measures the pitch of the field line. The dependence of the safety factor q_{eq} on the radius is dictated by the details of the equilibrium magnetic field, which in turn depends on the toroidal plasma current. The following expression describes in a satisfactory way typical nonmonotonic q -profiles of plasma discharges in tokamak experiments [Oda & Caldas, 1995]

$$q_{\text{eq}}(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left[1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2} \right) \times \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\mu+1} \Theta(a-r) \right]^{-1}, \quad (6)$$

where a is the plasma radius (slightly less than the tokamak minor radius b), q_a , β , and μ are parameters that can be chosen to fit experimentally observed plasma profiles ($\beta' = \beta(\mu+1)/(\beta+\mu+1)$), and Θ is the unit step function. We choose $q_a = 3.9$, $\beta = 2$ and $\mu = 1$, which results in a slightly non-monotonic profile with a minimum near $y = 0.55$, as seen in Fig. 2. It is the presence of such a minimum that results in a violation of the condition $\partial r_{n+1}/\partial \theta_n \neq 0$, making $\mathbf{T}_e$ a nontwist map.

The ergodic limiter design we consider is a ring-shaped coil of width l , with m pairs of straight sections in the toroidal direction, with current I_l flowing in opposite senses for two adjacent segments (Fig. 1) [Martin & Taylor, 1984; McCool *et al.*, 1989; Caldas *et al.*, 1996; Portela *et al.*, 2003]. The effect of an ergodic limiter on an equilibrium

Fig. 2. Plot of the equilibrium safety factor profile with $q_a = 3.9$, $\beta = 2$ and $\mu = 1$. The inset emphasizes the minimum.

configuration can be approximated by a sequence of delta function pulses at each piercing of a field line with the surface of section. Such a map has been described by Ullmann and Caldas [2000]:

$$r_n = r_{n+1} + \frac{mCb}{m-1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_n), \quad (7)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - C \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n), \quad (8)$$

where $C = (2mla^2I_l)/(R_0q_ab^2I_p)$ represents the perturbation strength due to the magnetic ergodic limiter. We denote this map by $(r_{n+1}, \theta_{n+1}) = \mathbf{T}_\ell(r_n, \theta_n)$, which can be derived from the mixed variable generating function

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\ell(r_{n+1}, \theta_n) \\ = r_{n+1}\theta_n - \frac{Cb}{m-1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \cos(m\theta_n), \end{aligned} \quad (9)$$

with

$$\theta_{n+1} = \frac{\partial \mathcal{F}_\ell}{\partial r_{n+1}}, \quad r_n = \frac{\partial \mathcal{F}_\ell}{\partial \theta_n}, \quad (10)$$

where (r, θ) , as previously stated, are related to (x, y) .

Choosing $m = 3$, $l = 0.08$ m, and considering the TBR-1 parameters [Caldas *et al.*, 2002]: $a = 0.08$ m, $b = 0.11$ m, $R_0 = 0.3$ m, we have $C \approx 2.1 \cdot 10^{-1} I_l/I_p$. We note that the results we obtain are qualitatively similar for any tokamak because their equilibrium parameters satisfy the same scaling laws. In the following, we use the ratio between the limiter and plasma currents, $\epsilon = I_l/I_p$, to quantify the perturbation strength. This ratio varies

1592 *J. S. E. Portela et al.*

from 0.1 to 0.3, assuring a small value for the perturbation strength.

The entire field line map is the composition of the two maps, $\mathbf{T} = \mathbf{T}_e \circ \mathbf{T}_\ell$, and because of the way the variable r_{n+1} appears in Eq. (7), we must solve for it at each iteration using a numerical scheme (Newton–Raphson method). Nevertheless, the map $\mathbf{T}$ is area-preserving and can describe field line behavior in tokamaks with ergodic limiters in a convenient and fast way, since we do not need to numerically integrate the field line equations over the whole toroidal revolution, in order to get the coordinates of a field line intersection with the Poincaré section [da Silva *et al.*, 2002].

Due to the toroidal correction in the equilibrium map $\mathbf{T}_e$, the flux surfaces do not coincide with nested cylinders (tori). This fact, along with

the effect of the map $\mathbf{T}_\ell$, changes the $q(r)$ -profile, so that it must be determined numerically. For the composed map $\mathbf{T}$, the $q(r)$ -profile of an orbit (and of its flux surface) is given by

$$q^{-1} = \iota = \frac{1}{2\pi} \langle \theta_{n+1} - \theta_n \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{\theta_n}{n}, \quad (11)$$

where θ_n is lifted (i.e. is not taken modulo 2π), q denotes the perturbed q , and ι is the rotational transform. For chaotic orbits this limit does not exist and q is not defined, which is responsible for the discontinuities in Fig. 7.

3. The Barrier

The phase portraits of Fig. 3 show a scenario of separatrix reconnection (e.g. [Howard & Hohns, 1984; del-Castillo-Negrete & Morrison, 1993; Petrisor,

Fig. 3. Phase portraits exhibiting the reconnection scenario: depicted (a) for $\epsilon = 0.05$ are two island chains with invariant curves (green) between them; (b) for $\epsilon = 0.0635$ an heteroclinic connection (green); (c) for $\epsilon = 0.10$ the interchange of chain hyperbolic points (green); (d) for $\epsilon = 0.30$ the island chain disappearance in a bifurcation with a persistent barrier (green).

2002]), where the coordinates (x, y) [corresponding to (θ, r)] described in Sec. 2 are used. The nonmonotonicity of the q -profile with respect to y (radius) implies the existence of pairs of flux surfaces with the same q . Hence, a resonant perturbation gives rise to two island chains with the same period, separated by invariant curves (a); as the perturbation increases, the islands widen and the separatrices merge (b); then the chains interchange the separatrix trajectories that connect the hyperbolic points (c). Figure 3 also exhibits a bifurcation — the disappearance of an island chain due to the collision of its elliptic and hyperbolic points (d), as well as the rising and persistence of an invariant barrier separating the chaotic region in the phase space. This barrier is essentially formed by tori called *meanders*, which are not graphs over the x -axis. These meanders can only arise in nontwist maps [Wurm *et al.*,

2005]. Figure 3 shows there are invariant curves in the nonmonotonic region (see Fig. 6) and the chaos present is created in the monotonic region by the usual universal mechanism of torus destruction and island overlapping.

The barrier, observed in Fig. 3(d), turns out to be very robust; it is resistant to perturbations up to $\epsilon = 0.30$. We verify the barrier existence by finding an orbit that maps out an invariant curve. Using this procedure we increase the perturbation amplitude until no such orbits are found, and this establishes a lower bound on the critical perturbation, ϵ_c , necessary to destroy the barrier. We obtain $\epsilon_{\text{low}} = 0.30302$. An upper bound on the perturbation necessary for barrier destruction can be obtained by verifying whether or not a long trajectory (we use 10^{11} iterations for a chaotic orbit above the barrier region) passes through the barrier. Using

Fig. 4. Depiction of nonmonotonic barrier destruction. Phase portraits show one trajectory above (blue), one below (red) and some on (green) the barrier for the perturbation strengths (a) $\epsilon = 0.301$, (b) $\epsilon = 0.302$, (c) $\epsilon = 0.303$ and (d) $\epsilon = 0.304$, respectively. In case (d) the trajectories cross the barrier remnant.

1594 *J. S. E. Portela et al.*

Fig. 5. Magnification of the barrier region showing (a) the islands inside the barrier (green) for $\epsilon = 0.3029$ and (b) for $\epsilon = 0.3031$ those that remain after its destruction.

Fig. 6. Magnification of the barrier of Fig. 3(d) (left) and the corresponding safety factor profile $q(y)$, showing the maximum and plateaus of q .

this method we find $\epsilon_{\text{upp}} = 0.30304$. Thus we can consider the critical perturbation to be the average of ϵ_{low} and ϵ_{upp} , obtaining $\epsilon_c = 0.30303$. Figures 4 and 5 show the barrier breaking.

An interesting feature of the profile $q(y)$ is the rising of a maximum with the perturbation ($\epsilon = 0.30$). This maximum is depicted in Fig. 6, along with the corresponding phase portrait that shows how it is related to the nonmonotonic invariant barrier [Wurm *et al.*, 2005]. Plateaus are also visible in the q -profile, particularly two of them related to the 454/149 island chains shown in the phase portrait. Figure 7(a) shows the global behavior of $q(y)$ in the presence of the perturbation. As is the case

for monotonic systems [Ullmann & Caldas, 2000], plateaus and regions for which the limit of Eq. (11) is ill-defined are visible, the former corresponding to the resonances (islands) and the latter to chaotic regions for which the limit in Eq. (11) does not exist.

4. Transport

For perturbation strengths slightly above the critical value, orbits are not entirely free to wander over the whole chaotic sea. An effective remnant barrier still remains, with many orbits taking a very long time to pass through it.

Fig. 7. Plots of safety factor radial profiles at: (a) $x = 2.06$, (b) magnification of (a) at arrows, and (c) magnification of (b) at arrows. Plateaus correspond to islands resulting from the perturbation ($\epsilon = 0.30$), which also gives rise to chaotic regions where q is not defined. The zooming in (c) reveals that the apparent plateau in the barrier region has a local maximum (the other plateaus are really flat).

In order to quantify this effect, we consider orbits with initial conditions above the barrier and define F_n to be the fraction of the orbits remaining in this region after the n th iteration. Thus, since we compute the passage through the barrier using the radial coordinate, y , we call this *radial transport*.

Just above the critical parameter for barrier breaking, $\epsilon = 0.305$, we find (Fig. 8) for the first 2.5×10^5 iterations that the decay of the remaining fraction F_n is well described by $F_n = F_0 e^{-\beta n}$,

Fig. 8. Escape through the (effective) barrier for $\epsilon = 0.305$, using 10^6 initial conditions. For $F_n \gtrsim 0.05$, the remaining fraction decay is described by an exponential (red) with half-life of about $\sim 5 \cdot 10^4$ iterations. At late times a power law $\propto n^{-4}$ is a good approximation.

with $F_0 \approx 0.9$ and $\beta \approx -1.4 \times 10^{-5}$, and after that ($n > 2.5 \times 10^5$) it approximately follows a power law, $F_n \propto n^{-\gamma}$, where $\gamma \approx 4$. In the analysis of the F_n decay, we consider the time (number of iterations) for which the condition $F_n < 0.99$ is satisfied to be the beginning of the time series, because the amount of time orbits spend before starting to cross the barrier is more affected by the initial conditions than by the barrier itself.

We also calculate the average square radial displacement, σ_n^2 , for an ensemble of N initial conditions at $y = y_0$,

$$\sigma_n^2 = \langle (y_i(n) - y_0)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i(n) - y_0)^2, \quad (12)$$

where $y_i(n)$ is the n th iteration of the i th initial condition and $\langle \rangle$ denotes the average over the ensemble.

For $\epsilon = 0.305$, Fig. 9 shows that σ_n^2 evolves linearly with time (the correlation coefficient between the data and a straight line is about 0.96) for the first 10^5 iterations characterizing a diffusive transport.

Since the orbits we take, i.e. ones with initial conditions placed far above the barrier, move gradually towards the barrier, which can be seen by taking phase space snapshots of the evolution, the linear behavior is not characteristic of the barrier alone. It is characteristic of the whole chaotic sea above it, where the field line shear is very low (see the small variation of q in Fig. 2). We attribute this unusual diffusive behavior to the stickiness around the many island chains present in the chaotic region.

1596 *J. S. E. Portela et al.*

Fig. 9. Average square radial displacement time series as given by Eq. (12) for $\epsilon = 0.305$ (black) and 10^5 initial conditions located above $(2, 0.75)$. For the first 10^5 iterations a straight line fit, $\langle (y_i(n) - y_0)^2 \rangle = 0.03 + 3.8 \cdot 10^{-8}n$ is shown (red) after the growth slows and reaches a plateau, corresponding to orbits filling the available phase space.

A similar diffusion has been observed after barrier breaking in the standard nontwist map [Corso & Lichtenberg, 1997]. After diffusing through the chaotic sea the orbits fill the available phase space, establishing a steady configuration with a constant average square displacement that corresponds to the plateau of Fig. 9.

Figure 9 gives information about radial diffusion: the diffusion through the barrier and the archipelago of many island chains. But, it turns out that this time series also yields information related to the transport *along* the barrier, the “poloidal transport.” This information is contained in the “damped oscillations” present at the beginning of the average square displacement time series (Fig. 10).

Although chaos, loosely speaking, implies exponential divergence of nearby initial conditions, orbits initially very close remain nearby for some time, especially with the low divergence rate of the present system, which has a maximal Lyapunov exponent of about 10^{-2} . This happens for our point-concentrated initial conditions, which provides an explanation of the observed oscillations: because of stickiness, orbits tend to bypass the main island chain near them, as does the barrier itself, and the peaks of the oscillations correspond to the passage along the bottom of the islands [see Fig. 3(d)]. When the oscillations vanish, the average square displacement stabilizes in a plateau around 0.03, which corresponds to a state where points are distributed around the main island chain, i.e. the

Fig. 10. Magnification of Fig. 9 showing the beginning of the average square displacement time series.

trajectories have scattered without penetrating the barrier.

Thus, the plateau indicates that orbits are distributed along the barrier and the large amplitude oscillations are related to nearby orbits. We interpret the decreasing amplitudes as the result of transport along the barrier. So, comparing the time scales for reaching the plateaus, about 0.03 and 0.1, we conclude that the diffusion along the barrier is about 200 times faster than through it.

5. Local Expansion for Low Limiter Current

In order to study more closely the role of the toroidal correction and the ergodic limiter perturbation, and to establish a comparison with the standard nontwist map [del-Castillo-Negrete & Morrison, 1993], we expand $\mathbf{T}$ around the location r^* of the equilibrium shearless curve. The standard nontwist map is a well-studied simple map that captures universal features of maps with a non-monotonic q -profile. It is given by $x_{n+1} = x_n + c_1(1 - y_{n+1}^2)$ and $y_{n+1} = y_n - c_2 \sin(2\pi x_n)$, where c_1 is the profile parameter and c_2 measures the perturbation strength.

Because $2\pi/q(r) \gtrsim 1$ for $r < a$, to leading order, we can drop the a_1 term ($|a_1| \ll 1$) in Eq. (4), obtaining $\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(r_{n+1})$, where $\alpha(r) := 1/q(r)$. Then, considering the shearless curve located at r^* , where $d\alpha(r^*)/dr = 0$, and defining

$$y' = r - r^* \ll r^*, \quad (13)$$

we can expand $\alpha(r_{n+1})$ in a Taylor series up to second order. This gives $\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(r^*) + \pi\alpha''(r^*)y_{n+1}^2$, with $\alpha'' := d^2\alpha/dr^2$, which can be rewritten as

$$\theta_{n+1} = \theta_n + c_1(1 - y_{n+1}^2), \quad (14)$$

where $c_1 := 2\pi\alpha(r^*)$ and

$$y' := \sqrt{\frac{-2\alpha(r^*)}{\alpha''(r^*)}}y =: b'y. \quad (15)$$

Using $|a_1| \ll 1$ in Eq. (3) gives $r_{n+1} = r_n(1 + a_1 \sin \theta_n)$, and considering Eqs. (13) and (15) and neglecting second order terms, results in

$$y_{n+1} = y_n - c_2 \sin(\theta_n), \quad (16)$$

with $c_2 \equiv -a_1 r^*/b'$. Equations (14) and (16) are the standard nontwist map.

Similarly, we expand the limiter map $\mathbf{T}_\ell$ of Eqs. (7) and (8). We do this by inserting $r = r^* + y$ into the generating function expressions of Eq. (10) and expanding up to second order, obtaining the approximate generating function

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}}_\ell(y_{n+1}, \theta_n) = & y_{n+1}\theta_n - \frac{Cb}{m-1} \left(\frac{r^*}{b}\right)^{m-1} \\ & \times \left[1 + \frac{m-1}{r^*}y_{n+1}\right] \cos(m\theta_n). \end{aligned} \quad (17)$$

If we further drop the term $y_{n+1}(m-1)/r^*$, we obtain

$$y_{n+1} = y_n - F(r^*) \sin(m\theta_n), \quad (18)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n, \quad (19)$$

with

$$F(r) = \frac{mCb}{b'(m-1)} \left(\frac{r}{b}\right)^{m-1}. \quad (20)$$

So, the approximate composed map is

$$y_{n+1} = y_n - c_2 \sin(\theta_n) - c_3 \sin(m\theta_n), \quad (21)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + c_1(1 - y_{n+1}^2), \quad (22)$$

where $c_3 = F(r^*)$.

Therefore, the local version of the nontwist model used in this work consists of the standard nontwist map of Eqs. (14) and (16), where the perturbative term $c_2 \sin(\theta)$ comes from the toroidal effects, plus an additional perturbation, $c_3 \sin(m\theta_n)$, due to the ergodic limiter. The twist version of this map (the standard map with the same c_3 term) was considered by Greene and Mao [1990] to study the torus break-up in a co-dimension

two system. They observed torus breakup different from that of the standard map, and it is expected for $m \neq 1$ that there will be a new universality class for torus break-up, one different from that of the standard nontwist map [del-Castillo-Negrete *et al.*, 1997].

For the parameter values used in this work we have: $c_2 \approx 2 \times 10^{-3}$, $c_1 \approx 2.1$, and $c_3 \sim \epsilon/100$. So, the ϵ range mostly used in this work is $0.1 < \epsilon < 0.3$, and c_2 and c_3 are of the same order of magnitude, which means that even locally neither the effect of the geometry nor the limiter action can be neglected. Moreover, it should be the coupling of these two effects that allows small amplitude perturbations ($\sim 10^{-3}$) to create the configuration of Fig. 3(d). This configuration is similar to the one obtained in [Wurm *et al.*, 2004] for the standard nontwist map ($c_3 = 0$ in Eq. (21)) for $c_2 = 0.5$ and a similar c_1 . In our model this corresponds to a high toroidal correction without the limiter perturbation. Thus, in the considered approximation, our map describes the interaction between two resonances with $m = 1$ (due to the toroidal geometry) and $m = 3$ (induced by the ergodic limiter). In this work we focused on this $m = 3$ perturbation, which is resonant in the shearless region. Nevertheless the $m = 1$ mode still affects the transport barrier structure.

6. Conclusions

In this paper we have presented a nontwist map model for the magnetic field line dynamics, a model that exhibits experimentally observed transport barriers. Such transport barriers are desirable because they impede particle loss and improve confinement. The barriers of our map model were found to be very robust, demanding strong perturbation to be destroyed, and even after their break-up the transport turned out to be diffusive. This diffusive transport occurs not only through the remnant barrier that remains but throughout the whole chaotic sea. We attribute this behavior to the archipelago of higher order island chains present in the chaotic region, which are due to the nonmonotonicity of the safety factor profile $q(y)$

We also showed that, although the equilibrium q -profile has a minimum, the barrier that arises in the nonmonotonic region, due to the perturbation, corresponds to a local maximum. It was found that for a perturbation strength slightly above the critical value, a population of initial conditions located

1598 J. S. E. Portela et al.

on one side of the effective barrier passes through it diffusively at an exponential rate with half-life of about 5×10^4 iterations. The “poloidal” transport, i.e. the transport along the barrier, was found to be 200 times faster than through it. Finally, we verified that the map used in this work is locally equivalent to the standard nontwist map (near the shearless curve) with an additional perturbation due to the ergodic limiter. And, even when two resonances are present, the map has behavior akin to that of the standard nontwist map.

Acknowledgments

This work was made possible through partial financial support from the following Brazilian research agencies: FAPESP and CNPq. The authors would like to acknowledge Elton C. da Silva for valuable discussions. One of the author P. J. Morrison, was supported by the US DOE Grant DE-FG03-96ER-54346.

References

- Caldas, I. L., Pereira, J. M., Ullmann, K. & Viana, R. L. [1996] “Magnetic field line mappings for a tokamak with ergodic limiters,” *Chaos Solit. Fract.* **7**, 991–1010.
- Caldas, I. L., Viana, R. L., Araujo, M. S. T., Vannucci, A., da Silva, E. C., Ullmann, K. & Heller, M. V. A. P. [2002] “Control of chaotic magnetic fields in tokamaks,” *Braz. J. Phys.* **32**, 980–1004.
- Corso, G., Oda, G. & Caldas, I. L. [1997] “Minimizing chaos during the reconnection process,” *Chaos Solit. Fract.* **8**, 1891–1900.
- Corso, G. & Lichtenberg, A. J. [1999] “Threshold to global diffusion in a nonmonotonic map with quadratic nonlinearity,” *Physica D* **131**, 1–16.
- Davidson, M. G., Dewar, R. L., Gardner, H. J. & Howard, J. [1995] “Hamiltonian maps for heliac magnetic islands,” *Aust. J. Phys.* **48**, 871–886.
- da Silva, E. C., Caldas, I. L. & Viana, R. L. [2002] “Bifurcations and onset of chaos on the ergodic magnetic limiter mapping,” *Chaos Solit. Fract.* **14**, 403–423.
- del-Castillo-Negrete, D. & Morrison, P. J. [1993] “Chaotic transport by Rossby waves in shear flow,” *Phys. Fluids A* **5**, 948–965.
- del-Castillo-Negrete, D., Greene, J. & Morrison, P. J. [1997] “Renormalization and transition to chaos in area preserving nontwist maps,” *Physica D* **100**, 311–329.
- Egydio de Carvalho, R. & Ozório de Almeida, A. M. [1992] “Integrable approximation to the overlap of resonances,” *Phys. Lett. A* **162**, 457–463.
- Greene, J. M. & Mao, J. [1990] “Higher-order fixed points of the renormalisation operator for invariant circles,” *Nonlinearity* **3**, 69–78.
- Howard, J. E. & Hohns, S. M. [1984] “Stochasticity and reconnection in Hamiltonian systems,” *Phys. Rev. A* **29**, 418–421.
- Karger, F. & Lackner, K. [1977] “Resonant helical diverter,” *Phys. Lett. A* **61**, 385–387.
- Levinton, F. M. et al. [1995] “Improved confinement with reversed magnetic shear in TFTR,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4417–4420.
- Lichtenberg, A. J. & Lieberman, M. A. [1992] *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer, NY).
- Martin, T. J. & Taylor, J. B. [1984] “Ergodic behavior in a magnetic limiter,” *Plasma Phys. Contr. Fusion* **26**, 321–340.
- Mazzucato, E. et al. [1996] “Turbulent fluctuations in TFTR configurations with reversed magnetic shear,” *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3145–3148.
- McCool, S. C., Wootton, A. J., Aydemir, A. Y. et al. [1989] “Electron thermal confinement studies with applied resonant fields on TEXT,” *Nucl. Fus.* **29**, 547–562.
- Morrison, P. J. [2000] “Magnetic field lines, Hamiltonian dynamics, and nontwist systems,” *Phys. Plasmas* **7**, 2279–2289.
- Oda, G. A. & Caldas, I. L., [1995] “Dimerized island chains in tokamaks,” *Chaos Solit. Fract.* **5**, 15–23.
- Petrisor, E. [2002] “Reconnection scenarios and the threshold of reconnection in the dynamics of non-twist maps,” *Chaos Solit. Fract.* **14**, 117–127.
- Portela, J. S. E., Viana, R. L. & Caldas, I. L. [2003] “Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters,” *Physica A* **317**, 411–431.
- Portela, J. S. E., Caldas, I. L., Viana, R. L. [2007], “Exit basins in tokamaks with the Wada property,” *Int. J. Bifurcation and Chaos* **17**(11).
- Strait, E. J. et al. [1995] “Enhanced confinement and stability in DIII-D discharges with reversed magnetic shear,” *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4421–4424.
- Ullmann, K. & Caldas, I. L. [2000] “A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis,” *Chaos Solit. Fract.* **11**, 2129–2140.
- Viana, R. L. & Caldas, I. L. [1992] “Peripheral stochasticity in tokamak with an ergodic magnetic limiter,” *Z Naturforsch* **47**, 941.
- Wesson, J. [1987] *Tokamaks* (Oxford University Press, Oxford).
- Wurm, A., Apte, K. & Morrison, P. J. [2004] “On reconnection phenomena in the standard nontwist map,” *Braz. J. Phys.* **34**, 1700–1706.
- Wurm, A., Apte, A., Fuchss, K. & Morrison, P. J. [2005] “Meanders and reconnection collision sequences in the standard nontwist map,” *Chaos* **15**, 023108.

International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 17, No. 11 (2007) 4067–4079
 © World Scientific Publishing Company

FRACTAL AND WADA EXIT BASIN BOUNDARIES IN TOKAMAKS

JEFFERSON S. E. PORTELA and IBERÊ L. CALDAS

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo,
 C.P. 66318, 05315-970 São Paulo, Brazil*

RICARDO L. VIANA

*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná,
 C.P. 19081, 81531-990 Curitiba, Paraná, Brazil*

MIGUEL A. F. SANJUÁN

*Nonlinear Dynamics and Chaos Group,
 Departamento de Matemáticas y Física
 Aplicadas y Ciencias de la Naturaleza,
 Universidad Rey Juan Carlos,
 Tulipán s/n, 28933 Móstoles, Madrid, Spain*

Received July 20, 2004; Revised November 15, 2006

The creation of an outer layer of chaotic magnetic field lines in a tokamak is useful to control plasma-wall interactions. Chaotic field lines (in the Lagrangian sense) in this region eventually hit the tokamak wall and are considered lost. Due to the underlying dynamical structure of this chaotic region, namely a chaotic saddle formed by intersections of invariant stable and unstable manifolds, the exit patterns are far from being uniform, rather presenting an involved fractal structure. If three or more exit basins are considered, the respective basins exhibit an even stronger Wada property, for which a boundary point is arbitrarily close to points belonging to *all* exit basins. We describe such a structure for a tokamak with an ergodic limiter by means of an analytical Poincaré field line mapping.

Keywords: Fractal basins; Wada basins; tokamaks; exit basins.

1. Introduction

One of the most important theoretical and experimental problems in fusion plasma research is the obtention of long-lasting plasma confinement through the application of suitable magnetic fields. The tokamak, one of the most promising candidates for a future fusion reactor, is a toroidal scheme in which the plasma current is confined by two main magnetic fields, one generated by external coils (*toroidal field*) and the other created by the plasma current itself (*poloidal field*) [Wesson, 1987]. The resulting magnetic field lines have helical shape,

and, as a consequence of magneto-hydrodynamical equilibrium, lie over constant pressure surfaces, or flux surfaces, which form nested tori [Meiss, 1992]. From the point of view of Hamiltonian dynamics, this can be viewed as an integrable system, thanks to the toroidal symmetry [Morrison, 2000]. However, the role of time here is to be played by the toroidal coordinate, since the configurations we are interested in are strictly magnetostatic.

This equilibrium can be substantially changed due to perturbing magnetic fields arising from both internal and/or external sources. There follows that, if the perturbation is weak enough, the topology of

4068 *J. S. E. Portela et al.*

the flux surfaces is significantly altered only at those surfaces exhibiting resonances with the perturbation. In these places there appear islands with the same dynamical structure of nonlinear pendula, and the corresponding Hamiltonian system has one and a half degrees of freedom [Lichtenberg & Lieberman, 1992]. Moreover, as a consequence of the breakup of integrability caused by the perturbation, we find chaotic motion limited to a thin layer surrounding the islands' separatrices. This chaotic layer can be enhanced by increasing the perturbation strength, and thus a mostly chaotic dynamics eventually sets in between adjacent resonances, according to the well-studied global stochasticity scenario [Chirikov, 1979].

We stress that chaotic motion is to be intended here in its Lagrangian sense: two magnetic field lines, which may be very close to one another at some point, diverge exponentially as they wind around the toroidal direction, with a rate given by the corresponding (positive) maximal Lyapunov exponent [Ott, 1993]. Moreover, identifying the flux surfaces as KAM tori of the corresponding Hamiltonian system, the existence of a chaotic region implies the breakup of flux surfaces. Hence, the chaotic magnetic field lines are volume-filling over a presumably limited extent of the tokamak torus [Meiss, 1992].

One can design the perturbing fields so as to create a wide chaotic region (in terms of the radial extent) near the plasma edge and the physical tokamak wall. There are sound reasons to do such a thing, the most important one being the role of a chaotic magnetic field as a divertor, in the sense that escaping particles and energy fluxes are spread out by the chaotic field, so reducing potentially harmful plasma-wall interactions [Engelhardt, 1977; Engelhardt & Feneberg, 1978]. This is the main goal of the so-called ergodic magnetic limiter, proposed in the late seventies and built in many research tokamaks [Karger & Lackner, 1977; Feneberg & Wolf, 1981].

Since the chaotic region is intended to extend from the plasma edge to the tokamak wall, it turns out that, once a plasma particle enters into this region, it will be driven outwards in an erratic fashion, and be eventually lost through collision with the tokamak wall [da Silva *et al.*, 2001]. Even though the chaotic region seems to uniformize those particle fluxes, the dynamic structures underlying the chaotic layer are complex enough to raise serious doubts about this claim. In fact, many available

experimental results point out that the tokamak wall is hit by plasma particles in a nonuniform way [Ohyabu *et al.*, 1984; Takamura *et al.*, 1989; Shen *et al.*, 1989; Wootton *et al.*, 1990; Araujo *et al.*, 1996].

The main point of this paper is that this nonuniformity can be traced out to the invariant manifold structure supporting the chaotic region, which has *escape channels* through which plasma particles are rapidly driven to the wall, forming *magnetic footprints* on it [Abdullaev *et al.*, 2002]. We call the set of initial conditions which eventually hit some portion of the wall the *escape basin* of that exit. The magnetic footprints should reflect in some sense the involved structure of the manifolds, like fractal boundaries separating different escape basins [Bleher *et al.*, 1988]. The presence of such escape boundaries has been observed in open Sinai billiards [Bleher *et al.*, 1988], advection of passive scalars in open fluid flows through an obstacle [Pentek *et al.*, 1995], and the motion of charged particles in Earth's magnetosphere [Chen, 1990].

If more than two exit possibilities are present, it follows that such escape basins can even exhibit the stronger *Wada property*: any point which is on the boundary of one escape basin is also simultaneously on the boundary of all the others [Nusse & Yorke, 1996a, 1996b]. One of the first examples of a set that possesses the Wada property was presented by Yoneyama [1917], who attributed the example to a certain Mr. Wada. In order to grasp the significance of the Wada property we may think of boundaries between countries in a (geographical) map. For example, there is a single point which is on the boundary of Brazil, Argentina and Paraguay (the *Three-frontier Landmark*). This is expected to occur for a finite number of boundary points, in general. However, if the Wada property would hold in such a case, there would be an uncountably infinite number of three-frontier landmarks between the three countries.

The Wada property has been extensively investigated in many open Hamiltonian systems, as the three-disk billiard [Poon *et al.*, 1996], particle scattering by a Hénon–Heiles potential [Aguirre *et al.*, 2001], including the limit of small exits [Aguirre & Sanjuán, 2003], light scattering by reflecting spheres [Sweet *et al.*, 1999], the advection of tracers in fluid flows [Toroczkai *et al.*, 1997], and it was also studied in some “open” Hamiltonians maps by [Sanjuán *et al.*, 2003]. Moreover it has been also analyzed in dissipative systems such as in a quasi-periodically

driven system [Feudel *et al.*, 1999], the Duffing oscillator [Aguirre & Sanjuán, 2002], and the pendulum [Kennedy & Yorke, 1991; Nusse & Yorke, 1996b]. In the tokamak context, this problem has also been studied under the point of view of a chaotic scattering process [Abdullaev *et al.*, 2002; da Silva *et al.*, 2002]. This paper aims to describe the complex structure underlying the chaotic field line region, through identification of the Wada property in the escape basins of both the tokamak wall and obstacles, like divertor plates, placed in the chaotic region [Abdullaev *et al.*, 1998, 1999].

The rest of this paper is organized as follows: in Sec. 2, we review the theoretical background necessary to describe field line behavior in tokamaks, both in its geometrical and dynamical aspects. In particular, we show how an analytical map can be used to follow field line trajectories for a large number of revolutions around the tokamak torus. Section 3 is devoted to a description of exit (or escape) basins for field lines hitting both the tokamak wall and other obstacles. The fractal and Wada properties are described in Sec. 4, whereas the last section contains our conclusions.

2. Field Line Mapping in a Tokamak

The basic geometry of a tokamak is determined by its major (R_0) and minor (b) radii. When the tokamak aspect ratio R_0/b is large enough we can neglect, in a zeroth approximation, the effects of the toroidal curvature and treat it as a periodic cylinder of length $2\pi R_0$, whose axis of symmetry is parameterized by the coordinate $z = R_0\phi$ in terms of the toroidal angle ϕ (Fig. 1) [Wesson, 1987]. In this case, the equilibrium toroidal field B_0 is practically uniform. Accordingly, a point in the tokamak is located by its cylindrical coordinates (r, θ, z) with respect to that axis. On the other hand, in the study of the region nearby the tokamak wall, it turns out that even the poloidal curvature does not change results noticeably, so that a rectangular system can be found by defining the following coordinates: $x' = b\theta$ and $y' = b - r$ [Martin & Taylor, 1984]. The tokamak wall is thus characterized by the line segment $y' = 0$ extending from $x' = 0$ to $2\pi b$. In the following, we will use normalized coordinates $x = x'/b$ and $y = y'/b$.

The structure of the magnetic field lines in a tokamak can be more easily appreciated by taking a Poincaré surface of section at the plane $z = 0$. Let (r_n, θ_n) be the polar coordinates of the n th

Fig. 1. Schematic view of the tokamak in the periodic cylinder approximation, its Poincaré section, and the rectangular coordinates (before normalization) used to describe magnetic field lines.

piercing of a given field line with that surface. Since the magnetic field line equations determine uniquely the position of the next piercing, we have a Poincaré map $(r_{n+1}, \theta_{n+1})^T = \mathbf{F}[(r_n, \theta_n)^T]$. Due to the solenoidal character of the magnetic field, this map is area-preserving in the surface of section [Morrison, 2000].

In the absence of any perturbation, the integrable configuration is described by a twist map $(r_n^*, \theta_n^*)^T = \mathbf{F}_1[(r_n, \theta_n)^T]$ [Ullmann & Caldas, 2000], where

$$r_n^* = \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n}, \quad (1)$$

$$\theta_n^* = \theta_n + 2\pi\iota(r_n^*) + a_1 \cos \theta_n, \quad (2)$$

where $\iota(r)$ is the *rotational transform*, or the mean poloidal angle (over 2π) a field line sweeps after an entire toroidal revolution along the torus. There is a correction for the effect of the toroidal curvature which strength is represented by the a_1 parameter. In the following, we use $a_1 = -0.04$, according to [Ullmann & Caldas, 2000].

The dependence of the rotational transform with the radius is dictated by the details of the equilibrium magnetic field. The following expression describes in a satisfactory way plasma discharges in typical tokamak experiments [Caldas *et al.*, 2002]

$$\iota(r) = \frac{2\pi a^2}{q_a r^2} \left\{ 1 + \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] \Theta(a - r) \right\}, \quad (3)$$

where a is the plasma radius (slightly less than the tokamak minor radius b), q_a and γ are parameters

4070 *J. S. E. Portela et al.*

Fig. 2. (a) Radial profile of the equilibrium rotational transform at $x = 0$, in which the locations of the relevant resonance surfaces at the chaotic layer are indicated; (b) Phase portrait of a number of magnetic field lines in a Poincaré surface of section with no perturbation; (c) Same as (b), but with a $m = 7$ perturbation for which the ratio between the equilibrium plasma and limiter current is $I_h/I_p = 0.06$.

chosen to fit experimentally observed plasma profiles, and $\Theta(\cdot)$ is the unit step function. In Fig. 2(a) we plot the dependence of y with the rotational transform ι , indicating the radial position of magnetic surfaces with given values of their rotational transforms.

The ergodic limiter design we consider in this paper is a ring-shaped coil of width ℓ , with m pairs of straight pieces along the toroidal direction, with a current I_h flowing in opposite directions for two adjacent segments (Fig. 1) [Martin & Taylor, 1984; Caldas *et al.*, 1996; Portela *et al.*, 2003]. The effects of an ergodic limiter on such an equilibrium configuration can be approximated by a sequence of delta-function pulses at each piercing of a field line at the surface of a section. Such a mapping $(r_{n+1}, \theta_{n+1})^T = \mathbf{F}_2[(r_n^*, \theta_n^*)^T]$, has been described by Ullmann and Caldas [2000]:

$$r_n^* = r_{n+1} + \frac{mCb}{m-1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_n^*), \quad (4)$$

$$\theta_n^* = \theta_n - C \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n^*), \quad (5)$$

where $C = mI_h\mu_0\ell/(\pi B_0 b^2)$ represents the perturbation strength due to the magnetic ergodic limiter.

The entire field line mapping is the composition of the two mappings ($\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 \circ \mathbf{F}_2$) and, since the variable r_{n+1} appears on both sides of the expression, we must solve it at each iteration using a numerical scheme (Newton–Raphson method). Nevertheless, the mapping $\mathbf{F}$ is strictly area-preserving and can describe field line behavior in tokamaks with ergodic limiters in a convenient

and fast way, since we do not need to numerically integrate the field line equations over the whole toroidal revolution, in order to get the coordinates of a field line intersection with the Poincaré surface of section.

The equilibrium flux surfaces for the rotational transform profile of Fig. 2(a) are depicted in Fig. 2(b), where we plot a Poincaré surface of section of the magnetic field line flow without limiter action ($C = 0$), using the rectangular coordinates (x, y) defined at the beginning of this section. The flux surfaces intercept the surface of section as invariant (KAM) curves, with some shape distortion caused by the toroidicity effect ($a_1 \neq 0$). The effects of adding a nonintegrable perturbation such as that caused by an ergodic limiter are exemplified in Fig. 2(c), where we considered a ring-shaped limiter with $m = 7$ pairs of straight wires, the ratio between the limiter and plasma currents being $I_h/I_p = 0.06$.

Comparing Figs. 2(b) and 2(c) one recognizes the breaking of some flux surfaces, namely those with a rational value for the rotational transform (the *winding number* of the field lines), and the appearance of pendular island chains at the locations of the rational surfaces. Invariant curves still survive, according to the KAM theorem, provided they come from irrational surfaces [Lichtenberg & Lieberman, 1992]. A large chaotic region is clearly seen at the bottom of the phase portrait [Fig. 2(c)], indicating that many pendular islands (each of them with their own chaotic layer) have interacted forming a wide region of mainly chaotic

behavior, interspersed with isolated islands. This chaotic region was designed to be created near the tokamak wall at $y = 0$ by taking into account the fast decrease of the limiter field as we move towards the tokamak axis, when increasing the value of the y coordinate away from zero.

3. Exit Basins

In order to analyze the interaction between the chaotic region and the tokamak wall, we focus our attention on the escape pattern followed by field lines in this region. In a lowest order approximation (neglecting particle drifts) electrons and positive ions in a plasma will tend to follow magnetic field lines, and thus their structure gives us a first approach to the particle behavior in that region. Let us imagine that we select a bounded region *within* the chaotic region which an ergodic limiter generates near the tokamak wall. In this case, for a field line originating in this chaotic region there are two possibilities: (i) either the field line eventually escapes out of the tokamak by hitting its wall at $y = 0$; or (ii) the field line hits the bounded region first and is also considered as lost. These two possibilities may be considered as two exits

for trajectories of this near-integrable system. To be precise, there exists a Lebesgue measure zero set of initial conditions for which the trajectories never leave the chaotic region, but the probability of a typical trajectory to belong to this set is null [Grebogi *et al.*, 1983].

The exit (or escape) basin of a given exit is defined as the set of all initial conditions (in the chaotic region) which eventually leave the region through that exit [Bleher *et al.*, 1988]. In the situation we are considering in this paper, we can thus refer either to the exit basin of the tokamak wall, since it is considered as an exit region, or to the exit basin of a given region inside the chaotic layer. Figure 3(a) shows a phase portrait, in the Poincaré surface of section, where the perturbation parameters are the same as in Fig. 2(c), and there is a wide chaotic layer in the vicinity of the tokamak wall. The second exit (bounded region) is a small rectangular box placed at $x \approx 5.5$ and $y \approx 0.14$, with vertical and horizontal widths $w_y = 0.0045$ and $w_x = 20w_y$, respectively, and which apparently contains a large number of initial conditions in the chaotic region. The exit basin for it is pictured in green, whereas the exit basin for trajectories hitting the tokamak wall is painted in red. These two exit

Fig. 3. Exit basins for orbits escaping through the tokamak wall (red) at $y = 0$, and through an exit (green) with width (a) $w_y = 0.0045$ and (b) $w_y = 0.0090$, with $w_x = 20w_y$. White regions are for orbits which never escape through either exit region. The limiter perturbation has $m = 7$ and $I_h/I_p = 0.06$.

4072 *J. S. E. Portela et al.*

Fig. 3. (Continued)

basins have an extremely involved boundary, with a fractal nature revealed by the incursive structure present in finer scales.

The relative sizes of the two exit basins depend on the exit area, as revealed by Fig. 3(b), where the

vertical width has increased to $w_y = 0.0090$, the horizontal width being enlarged in the same proportion as before. The green basin has substantially augmented its relative area, with respect to the red basin.

Fig. 4. Backward iterates of the rectangular box for which exit basins of field lines are painted green. The exit basin of the tokamak wall is painted red. Parameters are the same as in the previous figure.

The incursive fingers which characterize the exit basin of the small rectangular box in Fig. 4 are a consequence of the underlying dynamics of the chaotic region, governed by its invariant manifold structure. This can be observed by considering the inverse images, under the action of the mapping $\mathbf{F}$, of the small rectangular box in Fig. 4: it expands in one direction (roughly the radial one) and shrinks along the other direction. Such directions are provided by the unstable and stable manifolds, respectively, of unstable periodic orbits embedded in the chaotic region [Pentek *et al.*, 1995]. Chaotic trajectories are repelled along the unstable manifolds of such orbits. Since those manifolds intercept, in general, the tokamak wall at $y = 0$, almost all trajectories would eventually hit the wall, with the exception of a Lebesgue measure zero set of orbits.

However, if there is another obstacle, such as the small rectangular box in Fig. 4, trajectories will hit this exit before the wall, provided the unstable manifolds also intercept this rectangular box. The wider the exit is, the more unstable manifold segments will cross this exit, leading to trajectories escaping by that exit. Hence, the size of the exit influences the number of initial conditions which escapes through that exit; in other words, the size of its respective exit basin, as illustrated in Fig. 3. A small rectangular box in the chaotic region has a comparatively small exit basin [Fig. 3(a)], with respect to a wider rectangular box [Fig. 3(b)]. The influence of the exit size on the basin structure can be quantified by the uncertainty exponent technique to be discussed in the next section.

4. Fractal Exit Basin Boundaries

The exit basins depicted in Fig. 3 strongly suggest that the boundary separating two exit basins of a chaotic region has a fractal nature. The reason for this claim lies on the underlying structure of the chaotic region, or a *chaotic saddle*, formed by the intersections of the stable and unstable manifolds of an infinite number of unstable periodic orbits embedded in the chaotic region, and which support the ergodic measure of typical orbits [Grebogi *et al.*, 1988]. A chaotic saddle is a nonattracting invariant set with a dense chaotic orbit [Grebogi *et al.*, 1983]. Initial conditions belonging to this saddle are bound to remain in the chaotic region, unless portions of the saddle intercept the exit regions. In this case, even points in the chaotic saddle would eventually

escape. Nevertheless the Lebesgue measure of those exceptional initial conditions is zero. On the other hand, orbits originating from randomly chosen initial conditions usually wander in the vicinity of the chaotic saddle for a finite amount of time before escaping the chaotic saddle [Lai & Winslow, 1995].

Figure 5 shows the invariant stable and unstable invariant manifolds stemming from an unstable orbit (saddle point) embedded in the same chaotic region as that considered in previous figures. These manifolds were numerically obtained by considering the first 80 forward (backward) images of a small ball filled with a large number (5000×5000) of initial conditions and centered at a numerical approximation for the location of an unstable periodic orbit (saddle point) embedded in the chaotic orbit. There is a similarity between the striations displayed by the manifold branches and the incursive fingers characterizing pieces of the exit basins and which act as *escape channels* through which chaotic trajectories are pushed towards either the tokamak wall or another exit interposed in this region [da Silva *et al.*, 2002]. In Fig. 7 we show a numerical approximation of the chaotic saddle resulting from the intersection of the manifolds in Fig. 5.

The general mechanism responsible for the formation of the incursive fingers identified with such escape channels is illustrated in Fig. 6. Let P be an unstable periodic point of the map $\mathbf{F}$ embedded in the chaotic region, with its respective stable (unstable) subspaces, denoted as $E^s(P)$ ($E^u(P)$). The eigenvalues corresponding to $E^s(P)$ and $E^u(P)$ are real and have moduli greater than and less than unity, respectively. These subspaces, on the other hand, are tangent to the stable ($W^s(P)$) and unstable ($W^u(P)$) manifolds at P . Let also A be a part of some exit basin, whose boundary is a partitioning line crossing the stable manifold of P . We assume also that the forward images of this region under the mapping, $\mathbf{F}^m(A)$, $m = 1, 2, 3, \dots$, also cross the stable manifold. These forward images approach the saddle point P such that they produce fingers which shrink along the direction of the stable manifold $W^s(P)$, with a rate equal to the corresponding eigenvalue of the tangent map in P . On the other hand, since the map $\mathbf{F}$ is symplectic, in order to preserve areas these fingers will also elongate along the direction of the unstable manifold $W^u(P)$. As time goes to infinity, the fingers tend to accumulate in the unstable manifold itself, forming long and winding spaghetti-like striations which accompany $W^u(P)$ [Pentek *et al.*, 1995].

4074 *J. S. E. Portela et al.*

Fig. 5. Stable (black) and unstable (red) manifolds of an unstable periodic orbit (green) embedded in the chaotic region.

The same reasoning holds, *mutatis mutandis*, for the backward images of the $\mathbf{F}^{-m}(A)$, $m = 1, 2, 3, \dots$. Segments of the partitioning line lying between the filaments of the unstable manifold will be transported due to the backward dynamics and they will accumulate asymptotically on the

Fig. 6. Scheme showing the formation of the incursive fingers of the exit basin.

filaments of the stable manifold $W^s(P)$. Thus the boundary of the exit basins contains the stable and unstable manifolds of the chaotic saddle, or at least a part of them. It is necessary that the exit basin boundary crosses the invariant manifolds forming the chaotic saddle in order to have a fractal component. Moreover, since the fingers approaching the fixed point P extend smoothly along some manifold, this means that the exit basin boundary has also a smooth (nonfractal) component. Nevertheless, it is the fractal component of the exit basin boundary which is ultimately responsible for the formation of the escape channels and the corresponding nonuniformity of the magnetic footprints.

Fractal basin boundaries, such as those separating two exit basins, have final state sensitivity. Any initial condition is known up to a given uncertainty ϵ , such that we can think of a ball of radius ϵ centered at that initial condition. If the initial condition is so near the fractal boundary that the ϵ -ball does intercept the exit basin boundary, we cannot be sure if that initial condition will evolve to one or another exit. The union of all ϵ -balls intercepting the basin boundary gives the uncertain fraction (after dividing by the area of the phase space region

Fig. 7. Chaotic saddle formed by intersections of unstable and stable manifolds.

to be analyzed) $f(\epsilon)$. In fractal basin boundaries, the uncertain fraction scales in a power-law fashion with the uncertainty ball radius: $f(\epsilon) \sim \epsilon^\alpha$, where α is the uncertainty exponent. If d is the box-counting (fractal) dimension of the boundary, it follows that $\alpha = 2 - d$, since the surface of section is two-dimensional [McDonald *et al.*, 1985].

The more involved the basin boundary is, the higher is its box-counting dimension (i.e. closer to the phase plane dimension 2). Hence, d can be used as a quantitative characterization of the basin structure complexity. We can examine, for example, the influence of the exit width on the corresponding basin structure by computing the basin dimension through the uncertainty exponent method. We have selected a region comprising a representative portion of the exit basin boundaries in Fig. 3 and covered it with a fine mesh of initial conditions. At each initial condition **A** we choose at random three other initial conditions **B**₁, **B**₂ and **B**₃, inside an ϵ -ball centered at **A**. If **A** and **B**_{1,2,3} lead to orbits escaping through different exits, we call **A** a ϵ -uncertain initial condition. The uncertain fraction was estimated from the ratio between the number of all uncertain conditions and the total number of them (the number of mesh points).

The uncertainty exponent was obtained from a least-squares fit in a log-log plot of $f(\epsilon)$ versus ϵ for different values of the exit width w_y (the other width is taken as an integer multiple $w_x = 20w_y$). Figure 8 shows our results for a series of different values of w_y . We can see a decrease in the

Fig. 8. Uncertainty dimension for the boundaries of the exit basins as a function of the exit width. Orbits escape either through the tokamak wall ($y = 0$) and a rectangular box centered at $(x = 3.1, y = 0.22)$ and widths w_y and $w_x = 20w_y$.

dimension of the basin boundary as the exit width is increased. Comparing Figs. 3(a) and 3(b) we conclude that, as the area of the exit basin increases, its boundary dimension decreases. Similar findings were reported on previous studies, where the escape rate was studied with respect to variations in the exit area [Schneider *et al.*, 2002; Sanjuan *et al.*, 2003].

5. Wada Exit Basin Boundaries

The Wada property has been also observed in the exit basin structure of magnetic field lines in a tokamak with ergodic limiter, when there are three or more exit basins. A point P is a boundary point of an exit basin $\mathcal{B}$ if every open neighborhood of P intersects the basin $\mathcal{B}$ and at least another basin. The basin boundary is the set of all boundary points of that basin. Furthermore, the boundary point P is also a *Wada point* if every open neighborhood of P intersects at least three different basins. A basin boundary is said to possess the Wada property if every boundary point of $\mathcal{B}$ is a Wada point, such that the boundary of such a basin is a *Wada exit basin boundary* [Nusse & Yorke, 1996a, 1996b].

In the plasma physics context of this paper, this is a striking phenomenon, since any boundary point is arbitrarily close to points of all exit basins [Kennedy & Yorke, 1991]. Since one initial condition is always known within some small nonzero uncertainty, this uncertainty ball will contain points of all exit basins. Hence, one has no previous certainty (however small the uncertainty ball may be) regarding which exit basin will the trajectory asymptote to. This means that no reliable forecasting can be made from boundary points possessing the Wada property, which limitates our knowledge of the situation.

An example of Wada boundary in tokamaks which has more than two exit basins is depicted in Fig. 9, where we painted the exit basins of two small rectangular boxes (in blue and green, respectively) and the tokamak wall (in red). The Wada property is strongly suggested by successive magnification of a rectangle containing pieces of the three exit basins [Fig. 9(b)]. Further magnifications enhance this effect, since stripes of all basins coexist in finer scales [Fig. 9(c) and 9(d)]. Similar results appear when we divide the tokamak wall into different regions and consider them as the exits, so as to assign a given exit basin to each region [da Silva *et al.*, 2002].

There is, however, a more precise identification of the Wada property that can be used in this context. A necessary, albeit not sufficient condition for a given exit basin boundary to possess the Wada property is that the unstable manifold $W^u(P)$ of an unstable periodic orbit P belonging to this boundary must intersect every exit basin. We have verified explicitly the necessary condition for the existence of exit basin boundaries with the Wada property, by considering in Fig. 9(b) (in yellow) a piece of the unstable manifold stemming from a saddle point belonging to an exit basin boundary. This manifold piece clearly intercepts points of the red, green and blue basins, hence the unstable manifold of a periodic orbit P belonging to an exit basin boundary has intersected all the exit basins.

In order that a basin boundary possesses the Wada property, at least one of the complementary conditions below has to be satisfied [Kennedy & Yorke, 1991; Nusse & Yorke, 1996]: (i) the stable manifold of the point P must be dense in the boundary of the three regions; (ii) the periodic orbit P must be the only accessible orbit from the exit basin $\mathcal{B}$. Otherwise, every unstable manifold of other periodic orbits that are accessible from $\mathcal{B}$ must intersect all basins. We say that a boundary point P is accessible from a particular basin if there is another point in the interior of the basin which can be connected to P by a finite length curve that contains no boundary points except P [Poon *et al.*, 1996]; (iii) the periodic orbit P must generate a basin cell. A cell is a region with a piecewise smooth boundary, whose edges are alternately pieces of stable and unstable manifolds of a periodic orbit. A basin cell is a cell that is a trapping region [Nusse & Yorke, 1996b].

The direct numerical verification of these complementary conditions turns out to be rather difficult, so that we used another argument of checking the Wada property for the exit basin boundaries in this work; and which consists of verifying that every open neighborhood of a boundary point intersects all exit basins [Toroczkai *et al.*, 1997]. The reason for this claim is the following [Toroczkai *et al.*, 1997]: let us take a point P on the exit boundary, which is actually the stable manifold of some periodic orbit containing the point P . We take a small ball $\mathcal{D}$ of initial conditions centered at P , and compute its forward images under the mapping, $\mathbf{F}^m(\mathcal{D})$. As m increases the image of $\mathcal{D}$ becomes a convoluted and very thin ribbon extending along the unstable manifold of P , as can be observed in Fig. 5.

Fig. 9. (a) Exit basins for orbits escaping through the tokamak wall (red) and two small rectangular boxes (green and blue, respectively) with orange borders. (b)–(d) successive magnifications of rectangular boxes with black borders. The yellow line in (b) is a numerical approximation of the part of the unstable manifold of an unstable orbit embedded in the chaotic layer.

The ball $\mathcal{D}$ is a connected set, and so are its images under the mapping $\mathbf{F}$. Consider now that there is a finite value of $m = m_0$ such that $\mathbf{F}^{m_0}(\mathcal{D})$ intersects all the exit basins (as shown in Fig. 9). Because $\mathbf{F}^{m_0}(\mathcal{D})$ maps to $\mathcal{D}$ under m_0 backward iterations, all the basin structures present in $\mathbf{F}^{m_0}(\mathcal{D})$ are also mapped into $\mathcal{D}$. Since we did not make any particular assumption about the radius of $\mathcal{D}$, and since the point P can be anywhere on the stable manifold, this statement is valid for all

radii (whenever small), such that the entire stable manifold is a Wada exit basin boundary.

The reasoning we presented in the previous section leads to the conclusion that the exit basins closely follow the invariant manifold structure underlying the dynamics in the chaotic region. The exit basin boundaries are, thus, made of parts of invariant manifolds stemming from unstable periodic orbits (saddles in two dimensions) embedded in the chaotic region. The fingerprint of the Wada

4078 J. S. E. Portela et al.

property is the fact that the stable manifold of an orbit belonging to the basin boundary intercepts pieces of all exit basins.

6. Conclusions

We have described in this paper topological properties of exit basins which have potential applications in the design of experiments aiming to make uniform the plasma-wall interactions in tokamaks. The original belief was that a chaotic layer of magnetic field lines could spread particle and energy fluxes uniformly towards the tokamak wall. Further experiments suggested that this would not be necessarily so. Actually this nonuniformity may be a consequence of the escape channels which appear due to the extremely involved nature of stable and unstable manifolds embedded in the chaotic region.

The magnetic footprints on the tokamak wall (or, in general, on any obstacle placed in the chaotic region) are thus strongly affected by the fractal nature of the chaotic saddle underlying the chaotic region. Besides the fractal character, there are also Wada boundaries, for which any boundary point is arbitrarily close to points of all exit basins (when there are at least three of them). This makes for an extremely intertwined structure of basin pieces, such that it may be virtually unfeasible to make any kind of prediction regarding what exit basin a given initial condition will asymptote to, since such initial conditions are known only up to a finite precision.

For a practical application of this fact, let us suppose that an experimentalist would like to inject a particle beam in the plasma region dominated by a chaotic magnetic field, such that the beam is targeted at a given region of the tokamak wall or another obstacle, like the rectangular boxes in Fig. 9. Due to the extremely involved nature of the basin structure when the Wada property is present, it is very difficult to make reliable predictions about the behavior of the beam, as long as the particles which gyrate around magnetic field lines, thus disregarding drifts caused by field nonhomogeneities and curvatures [Chen, 1984].

The main purpose of this paper was to investigate topological properties related to the exit basins. It would be also possible to study this situation through a metric approach, computing escape rates and times, in order to quantify chaotic transport of magnetic field lines in the edge region of the tokamak, and for which there exists a number of rigorous results [Meiss, 1992].

Acknowledgments

This work was made possible through partial financial support from the following Brazilian research agencies: FAPESP and CNPq. MAFS acknowledges financial support from the Spanish Ministry of Science and Technology under project BFM2003-03081. The authors would like to acknowledge Professor Celso Grebogi for valuable discussions and useful suggestions.

References

- Abdullaev, S. S., Finken, K. H., Kaleck, A. & Spatschek, K. H. [1998] "Twist mapping for the dynamics of magnetic field lines in a tokamak ergodic divertor," *Phys. Plasmas* **5**, 196–210.
- Abdullaev, S. S., Finken, K. H. & Spatschek, K. H. [1999] "Asymptotical and mapping methods in study of ergodic divertor magnetic field in a toroidal system," *Phys. Plasmas* **6**, 153–174.
- Abdullaev, S. S., Eich, Th. & Finken, K. H. [2001] "Fractal structure of the magnetic field in the laminar zone of the dynamic ergodic divertor of the torus experiment for technology-oriented research (TEXTOR-94)," *Phys. Plasmas* **8**, 2739–2749.
- Aguirre, J., Vallejo, J. C. & Sanjuán, M. A. F. [2001] "Wada basins and chaotic invariant sets in the Hénon–Heiles system," *Phys. Rev. E* **64**, 066208.
- Aguirre, J. & Sanjuán, M. A. F. [2002] "Unpredictable behavior in the Duffing oscillator: Wada basins," *Physica D* **171**, 41–51.
- Aguirre, J. & Sanjuán, M. A. F. [2003] "Limit of small exits in open Hamiltonian systems," *Phys. Rev. E* **67**, 056201.
- Araújo, M. S. T., Vannucci, A. & Caldas, I. L. [1996] "Observation of disruptions in tokamak plasma under the influence of resonant helical magnetic fields," *Nuovo Cim. D* **18**, 807–821.
- Bleher, S., Grebogi, C., Ott, E. & Brown, R. [1988] "Fractal boundaries for exit in Hamiltonian dynamics," *Phys. Rev. A* **38**, 930–938.
- Bleher, S., Grebogi, C. & Ott, E. [1990] "Bifurcation to chaotic scattering," *Physica D* **46**, 87–121.
- Caldas, I. L., Pereira, J. M., Ullmann, K. & Viana, R. L. [1996] "Magnetic field line mappings for a tokamak with ergodic limiters," *Chaos Solit. Fract.* **7**, 991–1010.
- Caldas, I. L., Viana, R. L., Araújo, M. S. T., Vannucci, A., da Silva, E. C., Ullmann, K. & Heller, M. V. A. P. [2002] "Control of chaotic magnetic fields in tokamaks," *Braz. J. Phys.* **32**, 980–1004.
- Chen, F. F. [1984] *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, 2nd edition (Plenum Press, NY & London).

- Chen, J., Rexford, J. L. & Lee, Y. C. [1990] "Fractal boundaries in magnetotail particle dynamics," *Geophys. Res. Lett.* **17**, 1049–1052.
- Chirikov, B. [1979] "A universal instability of many-dimensional oscillator systems," *Phys. Rep.* **52**, 265–379.
- da Silva, E. C., Caldas, I. L. & Viana, R. L. [2001] "Field line diffusion and loss in a tokamak with an ergodic magnetic limiter," *Phys. Plasmas* **8**, 2855–2865.
- da Silva, E. C., Caldas, I. L., Viana, R. L. & Sanjuán, M. A. F. [2002] "Escape patterns, magnetic footprints, and homoclinic tangles due to ergodic magnetic limiters," *Phys. Plasmas* **9**, 4917–4928.
- Engelhardt, W. & Feneberg, W. [1978] "Influence of an ergodic magnetic limiter on the impurity content in a tokamak," *J. Nucl. Mat.* **76/77**, 518–520.
- Feneberg, W. [1977] "The use of external helical windings for the production of a screening layer in ASDEX and a Tokamak with a material limiter," *Proc. Eighth European Conf. Controlled Fusion and Plasma Physics*, ed. Petit-Lancy, Vol. 1 (European Physical Society), p. 3.
- Feneberg, W. & Wolf, G. H. [1981] "A helical magnetic limiter for boundary-layer control in large tokamaks," *Nucl. Fus.* **21**, 669–676.
- Feudel, U., Witt, A., Lai, Y.-C. & Grebogi, C. [1998] "Fractal and Wada basin boundaries in quasiperiodically driven systems," *Phys. Rev. E* **58**, 3060–3066.
- Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. [1983] "Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos," *Physica D* **7**, 181–200.
- Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. [1988] "Unstable periodic orbits and the dimensions of multifractal chaotic attractors," *Phys. Rev. E* **37**, 1711–1724.
- Karger, F. & Lackner, K. [1977] "Resonant helical diverter," *Phys. Lett. A* **61**, 385.
- Kennedy, J. & Yorke, J. A. [1991] "Basins of Wada," *Physica D* **51**, 213–225.
- Lai, Y. C. & Winslow, R. L. [1995] "Geometric properties of the chaotic saddle responsible for supertransients in spatiotemporal chaotic systems," *Phys. Rev. Lett.* **74**, 5208–5211.
- Lichtenberg, A. J. & Lieberman, M. A. [1992] *Regular and Chaotic Dynamics*, 2nd edition (Springer-Verlag, NY-Berlin-Heidelberg).
- Martin, T. J. & Taylor, J. B. [1984] "Ergodic behavior in a magnetic limiter," *Plas. Phys. Contr. Fus.* **26**, 321.
- McDonald, S. W., Grebogi, C., Ott, E. & Yorke, J. A. [1985] "Fractal basin boundaries," *Physica D* **17**, 125–153.
- Meiss, J. D. [1992] "Symplectic maps, variational principles, and transport," *Rev. Mod. Phys.* **64**, 795–848.
- Morrison, P. J. [2000] "Magnetic field lines, Hamiltonian dynamics, and nontwist systems," *Phys. Plasmas* **7**, 2279–2289.
- Nusse, H. E. & Yorke, J. A. [1996a] "Basins of attraction," *Science* **271**, 1376–1380.
- Nusse, H. E. & Yorke, J. A. [1996b] "Wada basin boundaries and basin cells," *Physica D* **90**, 242–261.
- Ohyabu, N., deGrassie, J. S., Brooks, N. H., Taylor, T. S. & Ikezi, H. [1984] "Preliminary results from the ergodic magnetic limiter experiment on the TEXT experimental tokamak," *J. Nucl. Mat.* **121**, 363–367.
- Ott, E. [1993] *Chaos in Dynamical Systems* (Cambridge University Press, NY).
- Péntek, A., Toroczkai, Z., Tél, T., Grebogi, C. & Yorke, J. A. [1995] "Fractal boundaries in open hydrodynamical flows: Signatures of chaotic saddles," *Phys. Rev. E* **51**, 4076.
- Poon, L., Campos, J., Ott, E. & Grebogi, C. [1996] "Wada basin boundaries in chaotic scattering," *Int. J. Bifurcation and Chaos* **6**, 251–265.
- Portela, J. E. S., Viana, R. L. & Caldas, I. L. [2003] "Chaotic magnetic field lines in tokamaks with ergodic limiters," *Physica A* **317**, 411–431.
- Roberto, M., da Silva, E. C., Caldas, I. L. & Viana, R. L. [2004] "Magnetic trapping caused by resonant perturbations in tokamaks with reversed magnetic shear," *Phys. Plasmas* **11**, 214–225.
- Sanjuán, M. A. F., Horita, T. & Aizara, H. [2003] "Opening a closed Hamiltonian map," *Chaos* **13**, 17–24.
- Schneider, J., Tel, T. & Neufeld, Z. [2002] "Dynamics of 'leaking' Hamiltonian systems," *Phys. Rev. E* **66**, 066218.
- Shen, S., Miyake, S. M., Takamura, S., Kuroda, T. & Okuda, T. [1989] "Ergodic magnetic limiter experiments in the HYBTOK-II tokamak," *J. Nucl. Mat.* **168**, 295–303.
- Sweet, D., Ott, E. & Yorke, J. A. [1999] "Complex topology in chaotic scattering: A laboratory observation," *Nature* **399**, 315.
- Takamura, S., Shen, Y., Yamada, H., Miyake, M., Tamakoshi, T. & Okuda, T. [1989] "Electric and magnetic structure of tokamak edge plasma with static and rotating helical magnetic limiter," *J. Nucl. Mat.* **162–164**, 643–647.
- Toroczkai, Z., Károlyi, G., Péntek, A., Tél, T., Grebogi, C. & Yorke, J. A. [1997] "Wada dye boundaries in open hydrodynamical flows," *Physica A* **239**, 235–243.
- Ullmann, K. & Caldas, I. L. [2000] "A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analysis," *Chaos Solit. Fract.* **11**, 2129–2140.
- Wesson, J. [1987] *Tokamaks* (Oxford University Press, Oxford, 1987).
- Wootton, A. J., Carreras, B. A., Matsumoto, H., McGuire, K., Peebles, W. A., Ritz, Ch. P., Terry, P. W. & Sweben, S. J. [1990] "Fluctuations and anomalous transport in tokamaks," *Phys. Plasmas* **2**, 2879–2903.
- Yoneyama, K. [1917] "Theory of continuous sets of points," *Tohoku Math. J.* **11–12**, 43.

EPJ manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Tokamak magnetic field lines described by simple maps

Dedicated to Professor Celso Grebogi on the occasion of his 60th birthday

J. S. E. Portela¹, I. L. Caldas¹, and R. L. Viana^{a2}

¹ Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil

² Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Caixa Postal 19081, 81531-990 Curitiba, Paraná, Brazil

Abstract. The magnetic field in a Tokamak is a superposition of an equilibrium and a perturbative part. The equilibrium magnetic field is usually determined by the solution of a two-dimensional, nonlinear, partial differential equation involving flux and current surface functions. The perturbation field comes from various sources: external and internal currents, magnetic limiters, error fields and so on. The resulting magnetic field line structure can be obtained by direct numerical integration of the field line equations. However, this is a lengthy procedure and the analysis of the solution may be very time-consuming. Otherwise we can study the magnetic field lines in a tokamak by means of simple two-dimensional, area-preserving maps, obtained either by approximations of the magnetic field line equations, or from dynamical considerations. These maps can be quickly iterated, furnishing solutions that mirror the ones obtained from direct numerical integration, and which are useful when long-term studies of field line behavior are necessary (e.g. in diffusion calculations). In this work we focus on a set of simple tokamak maps for which these advantages are specially pronounced.

1 Introduction

Tokamaks are the most promising devices for the magnetic confinement of fusion plasmas [1]. The stability of this confinement is an important problem in which the magnetic field line configuration plays a fundamental role - both by strongly influencing the transport that arises from fine scale turbulence [2] and by being the leading order approximation to the particle flux since charged particles tend to follow the magnetic field lines. Magnetic field lines are, in general, orbits of Hamiltonian systems of one-and-a-half degrees of freedom which are, provided the time-like coordinate is periodic, equivalent to two-dimensional area-preserving maps [3]. Consequently we can use such maps to describe the toroidal magnetic configurations of plasmas confined in tokamaks, what is particularly tailored for interpreting phenomena in the nonlinear dynamics framework.

The tokamak map trajectories can be obtained by directly integrating the field line differential equations, but that is a time-consuming calculation which may not be appropriate for studying long-term behavior of field lines, markedly transport properties. A more exact tokamak map could be obtained from the magnetohydrodynamical equations containing relatively few approximations, but this procedure would require numerical calculation of the functions in the map, what would take as much time as the integration of the magnetohydrodynamical

^a Corresponding author.e-mail: viana@fisica.ufpr.br

Fig. 1. Schematic view of (a) the tokamak toroidal chamber and the ergodic limiter configuration; (b) the periodic cylinder approximation and the rectangular coordinates used to describe field lines.

equations themselves [4]. Therefore approximate maps have to be considered if one wants to have the advantage of much shorter computation times.

Tokamak simple maps can result from physical considerations and mathematical approximations applied to the field line equations, or even be *ad hoc* maps whose suitability is based on the qualitative and quantitative agreement with the physical situation they describe. These approximate maps may present different levels of sophistication and represent the tokamak magnetic field line structure with various degrees of accuracy. In this work we consider some simple maps proposed to investigate the fundamental features of the tokamak magnetic field line dynamics. Some of these maps have been introduced by the authors and their collaborators over the last fifteen years.

The paper is organized as follows: in Sec. 2 we introduce basic concepts, including tokamak geometry, fundamental equations, and dynamical characteristics of two-dimensional maps. In Sec. 3 we present the standard map and the standard non-twist map, stressing their general features. Section 4 deals with maps proposed to study the chaotic field lines due to an ergodic limiter. In Sec. 5 we outline test models proposed by Balescu and co-workers, namely the tokamak and its non-twist version, the revtokamak. Section 6 treats maps used to study the field line structure due to divertors. We leave our conclusions to Sec. 7.

2 Magnetic fields in a tokamak

2.1 Tokamak geometry

The tokamak toroidal geometry is essentially characterized by its major radius, R_0 , which defines the circular magnetic axis around the symmetry axis of the torus, and its minor radius, b , measured from the magnetic axis. The angle measured from the major radius is the *toroidal angle*, ϕ , and the one from the minor radius is the *poloidal angle*, θ . The radius r , varying from the magnetic axis ($r = 0$) to the tokamak wall ($r = b$), labels a set of nested tori, which ideally correspond to the equilibrium magnetic flux surfaces. The main magnetic field of a tokamak has toroidal and poloidal components which are generated by external poloidal coils and the plasma current, respectively [1]. In addition to this equilibrium field, perturbative resonant fields can be added with many purposes, for example to control plasma-wall interactions [5,6,7,8]. The perturbative resonant fields are usually created by externally applied electric currents, like in divertors and ergodic magnetic limiters.

The bigger the tokamak aspect ratio, R_0/b , the better is the approximation of the tokamak vessel by a periodic cylinder of length $2\pi R_0$, where the magnetic axis is parameterized by the coordinate $z = R_0 \phi$ [1]. In this case the equilibrium toroidal field, B_ϕ , is nearly uniform and hence the toroidal effect can be treated as a perturbative factor or even neglected in a first approximation. Accordingly, a point in the tokamak is determined by its cylindrical

Will be inserted by the editor

3

coordinates (r, θ, z) , sketched in Fig. 1. The poloidal curvature can also be neglected when considering regions close to the tokamak wall, where it turns out not to influence results in a noticeable way. In such approximation a rectangular coordinate system can be used: $x' = b\theta$ and $y' = b - r$ [9]. In these coordinates the tokamak wall is the line segment $y' = 0$, extending from $x' = 0$ to $2\pi b$. In the following we shall use the normalized coordinates $x = x'/(2\pi b)$ and $y = y'/b$ (or $y = r/b$) unless stated otherwise.

2.2 Magnetic field line equations

By definition, magnetic field lines are parallel to the field at each point, thus, $d\mathbf{l}$ being the line element, for a given equilibrium magnetic field, $\mathbf{B}$, the field lines are determined by

$$\mathbf{B} \times d\mathbf{l} = 0, \quad (1)$$

which, in cylindrical coordinates, amounts to the following set of differential equations

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{R_0 d\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z}. \quad (2)$$

The integration of these equations gives the magnetic field lines trajectories but, since the structure of the field lines in a tokamak is Hamiltonian, magnetic field lines can be more easily appreciated by examining a return map. In such a map the time-like coordinate is the toroidal angle, hence the return map is on the Poincaré surface of section defined by the plane $z = \text{const}$. We let (r_n, θ_n) [or (x_n, y_n)] be the coordinates of the n -th piercing of a given field line with that surface, and take them as our map variables. The field line map is written, in a general form, as

$$r_{n+1} = f(r_n, \theta_n), \quad (3)$$

$$\theta_{n+1} = g(r_n, \theta_n), \quad (4)$$

where f and g depend on the magnetic field components. Due to magnetic flux conservation, it is necessary that the map be symplectic, so as to preserve areas in the Poincaré surface of section. This implies that f and g must satisfy the Jacobian condition:

$$\frac{\partial f}{\partial r_n} \frac{\partial g}{\partial \theta_n} - \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \frac{\partial g}{\partial r_n} = 1. \quad (5)$$

The *winding number*, also known as *rotational transform*, and denoted by ι , is defined as

$$\iota \equiv 2\pi \left\langle \frac{d\theta}{d\phi} \right\rangle \equiv \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\theta}{d\phi} \right) d\phi, \quad (6)$$

being the pitch angle of the helical field lines on the magnetic surfaces, and can be numerically calculated along an orbit by

$$\iota = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n - \theta_0}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta\theta_i, \quad (7)$$

where $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, and θ_0 is the initial condition.

The winding number is most commonly used in nonlinear dynamics texts, while the *safety factor*, $q = 2\pi/\iota$, is more often found in plasma physics literature. The dependence of the equilibrium safety factor q_{eq} on the radius is dictated by the details of the equilibrium magnetic field, which in turn depend also on the toroidal plasma current. An important quantity is the so-called *magnetic shear*, which is proportional to the derivative of the safety factor with respect to the radial variable.

4

Will be inserted by the editor

Let the equilibrium magnetic field of a tokamak, in the cylindrical approximation, be $\mathbf{B}^0 = (0, B_\theta^0(r), B_T)$. The magnetic field line equations (2) read

$$\frac{dr}{d\phi} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{R_0 B_\theta^0(r)}{r B_T} = \frac{\iota(r)}{2\pi}. \quad (9)$$

Since, from Eq. (8), a field line lies on a surface of constant radius, we can integrate Eqs. (8) and (9) between two successive piercings of a magnetic field line with the Poincaré surface of section, yielding

$$r_{n+1} = r_n, \quad (10)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \iota(r_{n+1}) \pmod{2\pi}, \quad (11)$$

which is written using r_{n+1} (instead of r_n) in the right-hand side of Eq. (11) in order to put Eqs. (10)-(11) into the form of a canonical transformation, such that the map equations can be obtained from a second-order generating function $F_2 = F_2(r_{n+1}, \theta_n)$ as

$$r_n = \frac{\partial F_2}{\partial \theta_n}, \quad (12)$$

$$\theta_{n+1} = \frac{\partial F_2}{\partial r_{n+1}}. \quad (13)$$

where

$$F_2(r_{n+1}, \theta_n) = r_{n+1} \theta_n + \int^{r_{n+1}} \iota(r') dr'. \quad (14)$$

A rational value of $\iota/2\pi$, say M/N , gives origin to a periodic orbit of period N of the map (10)-(11), $\theta_{n+N} = \theta_n + 2\pi M$, i. e., a field line closes on itself after N toroidal revolutions and M complete poloidal turns. An irrational value of $\iota/2\pi$ leads to a quasi-periodic orbit, which densely fills the magnetic surface. This map is the prototype of an equilibrium configuration of a tokamak, that can subsequently be perturbed by a second map. From Hamiltonian dynamics we know that such periodic orbits resonates with the perturbation, giving origin to island chains of pendular shape [10].

When the safety factor is a monotonic function of the radius (i. e., the shear is nonzero everywhere), the map is said to be *twist*. On the other hand, when q has an extreme for example, the map is called *non twist* [11,12,13]. Thus a map is twist if initial conditions on increasing radius, on a fixed poloidal position, display only increasing (or only decreasing) values of ι , being nontwist otherwise.

In terms of the map (10)-(11) the twist condition means that the derivative $\partial\theta_{n+1}/\partial r_n = \partial\iota(r_{n+1})/\partial r_n$ does not change sign over the possible values of r_n . In tokamaks, non twist profiles may result from hollow toroidal current profiles (i.e., displaying low current density close to the column center), which can be obtained by many experimental techniques and are related to enhanced confinement; for example when neutral beam injection is applied [14,15,16,17].

For twist maps, according to KAM theory, most quasi-periodic orbits (called invariant curves in the surface of section) survive to perturbations weak enough [10]. The non monotonic safety factor profile has a major influence on the trajectories topology, leading to scenarios where increasing perturbation strength causes islands in non twist region to interact in a different way from islands observed in twist maps [18].

3 Standard maps

3.1 Twist standard map

Introduced by J. B. Taylor and extensively investigated by B. Chirikov and co-workers [19,20] the (twist) standard map has been widely used for studying fundamental properties of Hamil-

Will be inserted by the editor

5

Fig. 2. Phase portraits of the standard map, showing the generic phenomenon in twist systems of island interaction leading to the destruction of KAM tori. (a), $K = 0.9$; (b) $K = 1.1$.

tonian systems. It is a radial twist map, given by the equations

$$r_{n+1} = r_n + K \sin(\theta_n) , \quad (15)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + r_{n+1} \pmod{2\pi} , \quad (16)$$

where K quantifies the strength of the perturbation acting on the radial variable.

Let a general magnetostatic perturbation of the form

$$\mathbf{B}^1 = (B_r^1(r, \theta, \phi), B_\theta^1(r, \theta, \phi), B_\phi^1(r, \theta, \phi))$$

such that the magnetic field equations (2) become

$$\frac{dr}{d\phi} \simeq \frac{R_0 B_r^1}{B_T} , \quad (17)$$

$$\frac{d\theta}{d\phi} \simeq \frac{\iota(r)}{2\pi} + \frac{R_0 B_\theta^1}{r B_T} . \quad (18)$$

where we have assumed that $|B_\phi^1| \ll |B_T|$. Supposing also that B_θ^1 is much smaller than the equilibrium toroidal field, and integrating over a complete turn we obtain

$$r_{n+1} = r_n + \frac{R_0}{B_T} \int_0^{2\pi} B_r^1(r_{n+1}, \theta_n, \phi) d\phi , \quad (19)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \iota(r_{n+1}) . \quad (20)$$

The Chirikov-Taylor standard map can be obtained by considering a highly idealized situation for which only one mode of the perturbed radial field (taken also to be independent of r) is retained,

$$\frac{R_0}{B_T} \int_0^{2\pi} B_r^1(\theta_n, \phi) d\phi \equiv K \sin(\theta_n) , \quad (21)$$

and the following monotonic safety factor profile is considered: $q(r) = 2\pi/r$, which corresponds to $\iota(r_{n+1}) = r_{n+1}$. In this case the twist condition is fulfilled, and the corresponding generating function is

$$F_2(r_{n+1}, \theta_n) = \frac{1}{2} r_{n+1}^2 + r_{n+1} \theta_n + K \cos(\theta_n) . \quad (22)$$

For these reasons, although the standard map models highly idealized tokamak magnetic fields, it is still used because it has the same fundamental properties of more complicated maps, and moreover it gives us valuable insights on the magnetic field line diffusion [21]. Many basic results obtained for the standard map remain valid for the whole class of twist maps. The standard map is also particularly useful as a description of the local dynamics of more complex maps [10].

One of the general phenomena for which the standard map already gives an overall explanation is the effect of resonant perturbation onto the previously integrable dynamics, with the raising and growth of islands and surviving invariant tori [Fig. 2(a)], as described by the Poincaré-Birkhoff and Kolmogorov-Arnold-Moser theorems [10]. Another important phenomenon is the onset of global chaos in phase-space through the interaction of nearby resonances, the invariant tori and islands being destroyed with increasing perturbation [Fig. 2(b)].

For $K < K_C \approx 0.971635406$, there are still some surviving Kolmogorov-Arnold-Moser tori between the islands, the last one being the torus with rotation number equal to the golden mean. These tori act as barriers that limit the radial diffusion of field lines. Such a large-scale diffusion is enhanced by the accelerator modes, which exist due to the double periodicity of the standard map.

In order to investigate the heat and particle loss due to cross-field transport in a tokamak it is necessary to analyze chiefly the diffusion along the radial direction. This is done, in terms of the simple maps described in this paper, by computing the mean quadratic radial deviation σ_n : considering N_0 initial conditions $(r_0(i), \theta_0(i))$ randomly chosen on a circle of a given radius:

$$\sigma_n = \langle (r_n(i) - r_0(i))^2 \rangle = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} (r_n(i) - r_0(i))^2 = 2Dn, \quad (23)$$

where $r_n(i)$ is the n -th iterate of the orbit stemming from the i -th initial condition, and D is the diffusion coefficient. For K large enough, the chaotic region is nearly homogeneous and the diffusion coefficient approaches a quasi-linear value $D_{QL} = K^2/4$ [20]. For small K , however, accelerator modes make the diffusion coefficient to present spikes.

From now on, we shall write the standard map in the following form, for further comparisons with more complicated models:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x_n), \quad (24)$$

$$x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{1}, \quad (25)$$

where $x = \theta/2\pi$ and $y = r/2\pi$.

3.2 Non-twist standard map

Playing, among the non twist systems, a similar role as the standard map for twist systems, the standard non twist map has a more recent history, but has been already extensively studied [22,23, and references therein]. The standard non twist map breaks the twist condition by displaying a quadratic safety factor profile, such that $\iota(r)$ has a local minimum at some radius (called “shearless radius”). It is usually written in the following form

$$y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n), \quad (26)$$

$$x_{n+1} = x_n + a(1 - y_{n+1}^2) \pmod{1}, \quad (27)$$

where b measures the perturbation strength, just like in the standard map, and a is a winding number profile parameter. In the same way as the standard map, the standard non-twist map may appear as a local approximation of more complicated non-twist maps [24,25]. The non twist standard map appears in tokamak models for which the safety factor profile is non-monotonic. This is the case, for example, in the first stages of the plasma discharge where the plasma column is hollow; and also as a result of non-inductive current drive like neutral beam injection.

Fig. 3. Phase portraits depicting the reconnection process in the standard non-twist map for $a = 0.345$ and (a) $b = 0.35$; (b) $b = 0.376072$; (c) $b = 0.42$; (d) $b = 0.461434$ [26].

Many important results, such as the KAM theorem, hold only for twist systems. Indeed, the standard non twist map presents new phenomena, such as the presence of two island chains of the same period at opposite senses of the shearless radius. These islands, as the perturbation becomes stronger, approach each other with reconnection of their separatrices instead of the island erosion through tori destruction which is characteristic of the Chirikov overlapping scenario that holds for twist maps [22]. The reconnection processes are mainly of two types: (i) homoclinic, where the island centers are vertically aligned; (ii) heteroclinic (or loop reconnection), where the island centers are counter-aligned, i. e., with elliptic points of one island chain aligned with hyperbolic points of the other.

The basic process of the heteroclinic is displayed in Fig. 3: the non monotonic safety factor profile leads to the existence of pairs of tori with the same q , therefore a resonant perturbation gives rise to two island chains with the same period, separated by invariant curves [Fig. 3(a)]. As the perturbation increases, the islands widths grow and their separatrices merge into a connected curve [Fig. 3(b)]. For higher values of the perturbation strength the island chains interchange the separatrix trajectories that connect the hyperbolic points, creating a loop configuration [Fig. 3(c)]. For a perturbation strength large enough there is a saddle-center bifurcation where the island chains disappear as their elliptic and hyperbolic points collide. For even higher perturbations, there remains an invariant barrier separating the regions in the phase space where the islands were located before the bifurcation [Fig. 3(d)].

The standard non twist map also exhibits the homoclinic reconnection scenario, that leads to the so-called vortex or dipole topology where, as a parameter varies, the vertically aligned hyperbolic points meet the invariant curve between the chains and then move on the invariant curve until they collide together with the elliptic points of the chains. Other reconnection scenarios have also been observed for the standard non twist map [27,28]. Only (asymmetric)

loops and vortex pairs are thought to be generic [29], as well as the vortex pair reconnection, or *tripling reconnection*, which involves the creation of a third island chain as well as a loop [30].

The loop reconnection is associated with the appearance of invariant curves that are not graphs over the x axis, the so-called *meanders*. The existence of these meanders between the reconnected island chains in the standard non twist map has an important consequence on the transport properties of a tokamak, given that it acts as a transport barrier [31,32,27,23]. However, local diffusion is found to be enhanced as reconnection processes occur [18,33].

4 Ergodic limiter maps

4.1 Martin-Taylor map

The Martin-Taylor map [9] was one of the first maps designed to model magnetic field lines in tokamaks and the first to consider the effect of an ergodic magnetic limiter. The latter is an arrangement of currents external to the plasma, which creates a perturbing magnetic field which is stronger in the vicinity of the tokamak wall. Hence the perturbation resonates chiefly with rational flux surfaces near to the wall, yielding a peripheral region of chaotic magnetic field lines, with the purpose of controlling plasma-wall interactions. It was thought, at first, that a chaotic field line layer could uniformize diffusion in the tokamak edge, thus distributing the heat and particle loading on the tokamak wall in a more uniform way, so diminishing plasma contamination through sputtering and other related processes. It turns out that this is not quite the case, since the chaotic region itself is not homogeneous, and the loadings are not uniform, but rather present magnetic footprints with a complicated (actually fractal) nature.

The Martin-Taylor map consists of the composition of two maps: an integrable map for the equilibrium dynamics and a symmetry-breaking perturbative map. The equilibrium part, M_1 , is a simple twist map, its orbits keeping a fixed radius (y), while the angular (x) advance per iteration varies linearly with the radius. This is similar to what happens with the standard map, but now with the introduction of a magnetic shear parameter, s , defined as the radial derivative of the safety factor, calculated at the plasma edge. The perturbative map, M_2 , models the ergodic magnetic limiter action and is obtained from the calculation of the magnetic field generated by a current ring mounted over the tokamak vessel. The current ring is represented by a ring-shaped coil with pairs of straight segments oriented along the toroidal direction, with currents flowing in opposite senses for adjacent segments, as depicted in Fig. 1. The limiter is supposed to act only on the thin toroidal section it occupies, the rest of the torus being characterized only by the equilibrium field.

The composition of these two maps, $M = M_1 \circ M_2$, gives the following equations:

$$x_{n+1} = x_n + sy_n + g(x_n, y_n) \pmod{2\pi}, \quad (28)$$

$$y_{n+1} = y_n + h(x_n, y_n), \quad (29)$$

where

$$g(x, y) = -pe^{-y} \cos x + sh(x, y), \quad (30)$$

$$h(x, y) = \ln |\cos(x - pe^{-y} \cos x)| - \ln |\cos x|, \quad (31)$$

where the parameter p quantifies the perturbation strength, proportional to the current in the limiter coils. This is an area-preserving map, but it is not written in terms of a second kind generating function, as is the standard map.

The effect of the changing the map parameters p and s is exemplified in Fig. 4, where we depict a phase portrait for weak perturbation, showing the formation of a narrow chaotic field line layer near the tokamak wall [Fig. 4(a)]. Doubling the magnetic shear causes this layer to enlarge substantially [Fig. 4(b)], the same effect being observed for a larger p -value [Fig. 4(c)]. The causes of this enlargement are distinct, though, for increasing p makes the island grow, whereas increasing the magnetic shear bring the islands closer to each other more than it decreases their size, as also observed for a stellarator model [34].

Will be inserted by the editor

9

Fig. 4. Phase portraits obtained from the Martin-Taylor map for (a) $s = 2\pi$, $p = 0.1$; (b) $s = 4\pi$, $p = 0.1$; (c) $s = 2\pi$, $p = 0.2$.

The Martin-Taylor map satisfies the conditions for a tokamak map proposed by Balescu [35]: it has a realistic safety factor profile, in the sense that s can be chosen appropriately, and its orbits are always bounded towards $y = 0$, whose location is left free in the model. Analytical approximate results, based on the Chirikov criterion of island overlapping [10], can be obtained for the onset of global chaos and the size of the chaotic region in the Martin-Taylor map [9], with good agreement with numerical simulations, despite the unequal widths of the islands, the deviations observed between analytical and numerical results being the results of our neglecting higher-order island interactions in the perturbative treatment [36]. The transport properties of the Martin-Taylor map have also been determined, the radial diffusion of field lines in the chaotic region being anomalous, initially displaying approximately diffusive behavior, and followed by a decrease caused by field line losses due to their collisions with the tokamak wall.

4.2 Ullmann map

The Ullmann map [37] models the magnetic fields in a tokamak with an ergodic limiter, using a second kind generating function, and it is based on a previous map [38]. Its advantage over the Martin-Taylor map are the use of parameters more closely related to physically measured quantities (like the safety factor and limiter current) and the consideration of toroidal effects. In addition, the Ullmann map satisfies the conditions for a tokamak model outlined in [35]. The

Fig. 5. Phase portrait for the Ullmann map, with $m = 7$ and $\epsilon = 0.07$.

Ullmann map is given as a composition of two maps - the equilibrium map

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1 - a_1 \sin \theta_n}, \quad (32)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \frac{2\pi}{q_{\text{eq}}(r_{n+1})} + a_1 \cos \theta_n \pmod{2\pi}, \quad (33)$$

and the perturbation map

$$r_n = r_{n+1} + \frac{mC\epsilon b}{m-1} \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-1} \sin(m\theta_n), \quad (34)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - C\epsilon \left(\frac{r_{n+1}}{b} \right)^{m-2} \cos(m\theta_n), \quad (35)$$

where the parameter a_1 gives the strength of the toroidal correction to the periodic cylindrical equilibrium, and ϵ is proportional to the current in the limiter and quantifies the perturbation strength due to the magnetic ergodic limiter, m is the number of pairs of toroidal current ring segments, b is the tokamak minor radius, and C is a geometrical factor [25].

The equilibrium part requires the specification of a safety factor profile which, in the more usual monotonic case, can be given by [39,37]

$$q_{\text{eqm}}(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left\{ 1 + \left[1 - \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\gamma+1} \right] \Theta(a-r) \right\}^{-1}, \quad (36)$$

where a is the plasma radius where the safety factor value is q_a , and γ can be adjusted to fit experimentally observed plasma profiles, and Θ is the unit step function.

Given that the Ullmann map is intended to study the tokamak edge, it is convenient to show phase portraits using the normalized rectangular coordinates, $y = 1 - r/b$ and $x = \theta/2\pi$, so that the tokamak wall lies at $y = 0$, as in the Martin-Taylor map. For a small perturbation strength, as $\epsilon = 0.07$, the monotonic Ullmann map presents a chaotic field line layer at the tokamak edge, and is mostly regular in the remaining of the phase space (Fig. 5).

Will be inserted by the editor

11

Fig. 6. Exit basins of the Ullmann map for orbits escaping through the wall at $y = 0$ (gray pixels), and a rectangular exit $w_y = 0.0182$, $w_x = 10w_y/\pi$ (black pixels), for $m = 7$ and $\epsilon = 0.07$. White pixels represent field lines which do not either hit the wall or the rectangular exit.

4.2.1 Escape basins and invariant manifolds

The main results obtained so far using the Ullmann map are related to the escape basins and invariant manifold structure, for the monotonic version of the map [39], and the destruction and transport through the barrier in the non monotonic case to be considered in the next section [25]. The concept of an *exit* [40,41] arises naturally in tokamak models, the tokamak wall itself being an exit for the field lines wandering through the chaotic region in the tokamak edge. Other types of exits are material obstacles inside the tokamak, as divertor plates, antennas, and probes, which can be placed inside the tokamak vessel with different purposes. In all cases above a field line is considered lost once it reaches the considered exit.

The *escape basin* related to a given exit is the set of initial conditions (in the Poincaré surface of section) which generates field lines that eventually hit that exit after some number of map iterations. The exits are usually set in the outer region of the tokamak, where obstacles are more likely to be found. Since this region is also typically characterized by chaotic field lines (specially if there is an ergodic limiter), we expect escape basins to have a complicated structure due to the intricacies of the manifold structure.

The exit basins can be numerically obtained by iterating a grid of initial conditions in the phase plane and plotting them according to the exit at which the field line have hit. As an example, let us consider a rectangular exit placed inside the chaotic outer region of the phase portrait depicted by Fig. 6. Black pixels represent initial conditions generating field lines that hit the rectangular exit, gray pixels are for field lines that hit the wall at $y = 0$, and white pixels generate field lines that have other fates.

The exit basins have an involved, and actually fractal structure. The nature of the basin boundaries is determined by the invariant manifolds of the unstable periodic orbits embedded in the chaotic layer. In the latter there is an infinite but countable number of saddle points, of all periods, and their invariant stable and unstable manifolds constitute a foliation of the chaotic sea [42]. Let us consider the inverse images, under the action of the Ullmann map, of

Fig. 7. Ullmann map phase portrait depicting a finite-length approximation of the stable manifold in the chaotic field line region, with $m = 7$ and $\epsilon = 0.07$.

the rectangular exit depicted in Fig. 6: it expands in one direction and shrinks along the other direction (due to the area-preserving property of the map). Such directions are provided by the unstable and stable manifolds, respectively, of unstable periodic orbits embedded in the chaotic region [42]. Chaotic trajectories are repelled along the unstable manifolds of such orbits.

In Fig. 6 the increasingly distorted rectangles to the left of the rectangular exit are inverse images of it which do not cross the other exit. Hence these inverse images belong to the corresponding exit basin. Thus, iterating backwards the exit region is, discarding orbits that hit the wall, a way of obtaining a numerical approximation to the exit basin. The exit basin boundary can be calculated in a similar fashion by iterating backwards the points of the exit boundary (shown in white in Fig. 6). Figure 7 displays a finite-length approximation of the stable manifolds, obtained by iterating 60 times backwards a large number ($\sim 10^7$) of initial conditions located in the chaotic region, the result being compatible with the exit basin boundary depicted in Fig. 6.

4.3 Non-twist Ullmann map

The Ullmann map becomes a non-twist one by considering a non-monotonic equilibrium safety factor profile such as, for example, [43]

$$q_{\text{eqn}}(r) = q_a \frac{r^2}{a^2} \left[1 - \left(1 + \beta' \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\mu+1} \Theta(a-r) \right]^{-1}, \quad (37)$$

where a is the plasma radius, q_a , γ , β , and μ are parameters that can be chosen to fit experimentally observed plasma profiles, with $\beta' = \beta(\mu+1)/(\beta+\mu+1)$, and Θ is the unit step function. The resulting non-twist Ullmann map has properties similar to the standard non-twist map, as illustrated in Fig. 8, where an invariant barrier meanders around the remaining island chain after the reconnection and bifurcation, which is the same situation depicted in Fig. 3.

Will be inserted by the editor

13

Fig. 8. Phase portrait for the non-twist Ullmann map for $\epsilon = 0.3$. The transport barrier is the rippled line meandering around the main islands.

Fig. 9. Magnifications of a region near the barrier for the non-twist Ullmann map for (a) $\epsilon = 0.3029$ and (b) $\epsilon = 0.3031$.

There are, however, two main differences between the phase portraits of the standard non twist map and the non monotonic version of the Ullmann map. The first difference is that the asymmetry of the perturbation term in the non-monotonic Ullmann map produces a wider chaotic layer below the barrier than above it. The second difference is the presence of invariant curves outside the shearless region close to the wall, which is possible due to the localized nature of a resonant perturbation.

The perturbation strength necessary for destroying the invariant barrier, ϵ_c , is numerically determined by first considering whether or not a given field line has crossed it after a large

number of iterations, which sets up an upper bound for the critical value. Secondly we vary ϵ and seek a field line that maps out an invariant curve at the barrier location, thus setting a lower bound to ϵ_c . Repeated application of this procedure leads to the value $\epsilon_c \approx 0.30303$ for the non-twist Ullmann map, which was considered in Fig. 9.

Even after the destruction of the invariant barrier an effective transport barrier persists, due to the stickiness of field lines around the many island chains present in the chaotic region. By *stickiness* we mean that, whenever there are periodic islands embedded in the chaotic sea, field lines spend a typically large number of map iterations encircling those islands before they eventually go away from them.

If the chaotic region intercepts the tokamak wall, it turns out that the field lines escape after a given time (measured in number of map iterations). For perturbation values slightly above ϵ_c the loss of field lines along the radial direction is found to occur at an exponential rate. Let us consider an ensemble of initial conditions randomly distributed over the chaotic region above the barrier. The fraction F_n of the field lines that remain in that region at the n -th iteration decays as $e^{-\beta n}$, where $\beta \approx 1.4 \times 10^{-5}$ is the escape rate determined for the non-twist Ullmann map. This exponential scaling holds for the first hundreds of thousands of iterations, after which F_n decays in a power-law fashion.

It is obtained that, similarly to the standard non-twist map [44], the transport in the non-twist Ullmann map is diffusive, i. e., the mean quadratic radial deviation of field lines increases linearly with the number of iterations. Finally, the local expansion of the twist Ullmann map around a given radial position yields the standard map with an additional perturbation term, a system already studied in the context of the break up of invariant golden tori [45]. Such an expansion for the non-twist Ullmann map similarly consists of the standard non-twist map with a symmetry-breaking additional perturbation term [13] arising from the toroidal correction [25].

5 Balescu maps

5.1 Tokamak

In the late 90's, Balescu and collaborators have proposed a field line map (*tokamak*) [35] that, although not directly derived from magnetic field equations, represent the global field line dynamics in a tokamak. It is derived from a modified version of the generating function for a stellarator subject to a localized perturbation [34]. The tokamak equations are

$$y_{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ P(x_n, y_n) + \sqrt{[P(x_n, y_n)]^2 + 4y_n} \right\}, \quad (38)$$

$$x_{n+1} = x_n + \iota(y_{n+1}) - \frac{k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(1 + y_{n+1})^2} \cos(2\pi x_n) \pmod{1}, \quad (39)$$

with

$$P(x, y) = y - 1 - \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi x), \quad (40)$$

where k is the perturbation strength and ι is the winding number. The winding number profile adopted, for a cylindrical description, is

$$\iota(y) = \frac{\iota_0}{4} (2 - y)(2 - 2y + y^2), \quad (41)$$

where $\iota_0 = 1/q(0)$ is the winding number value on the magnetic axis.

In this case the radial variable y is measured from the magnetic axis, instead of the tokamak wall, as in the Martin-Taylor and Ullmann maps. The tokamak was designed to meet some desirable properties: (i) the avoidance of negative values of y , i.e. with $y_0 = 0$ implying $y_n \geq 0$ for all n ; and (ii) the use of a realistic winding number profile. Figure 10 shows a phase portrait of the tokamak for typical parameter values, $k = 4$ and $\iota_0 = 1$, displaying a well-developed

Fig. 10. Phase portrait of the tokamak for $k = 4$ and $w = 1$.

chaotic region still bounded by invariant tori. The wall position is left free in the tokamak model.

The radial transport properties of the tokamak are similar to those obtained for the twist standard map with non-global chaos, where the existence of the KAM curves bounding the chaotic layer and sticking regions around islands leads to a sub-diffusive transport regime [35]. The stickiness phenomenon associated with the embedded islands also results in intermittent behavior, allowing a statistical description of diffusion by means of random walk models [46]. The most resistant tori to perturbation are those with noble winding numbers and found close to the main islands, just as in the standard map [47,48], agreeing with experimental observations and theoretical considerations [34]. An extensive account of the transport and the noble barriers in the tokamak can be found in [49], and a more recent study of the barriers in [50].

A closely related model, which preserves the symplectic structure and is obtained from a Hamiltonian valid for vanishing perturbation [51], results in a kind of symmetric tokamak [52]. The symmetric tokamak turns out to be more resistant to the perturbation than the non-symmetric version and the order in which the KAM curves are destroyed is also different. Nevertheless the transport properties are found to be the same for both symmetric and non-symmetric models; similar remarks being true also for the revtokamak [53].

5.2 Revtokamak

The freedom in the choice of the winding number profile allows us the use the tokamak to study non-twist regimes by simply changing the profile to a non-monotonic one, like [54]

$$\iota(y) = \iota_{\max} [1 - a(cy - 1)^2] , \quad (42)$$

where $\iota_{\max}$ is the maximum of $\iota(y)$ and the parameters a and c can be written in terms of the winding number values at two given positions, namely $\iota_0 \equiv \iota(y = 0)$ and $\iota_1 = \iota(y = 1)$:

$$a = \frac{\iota_{\max} - \iota_0}{\iota_{\max}} , \quad c = 1 + \left(\frac{\iota_{\max} - \iota_1}{\iota_{\max} - \iota_0} \right)^{1/2} . \quad (43)$$

Fig. 11. Phase portrait of the revtokamak with $k = 4$, $\iota_0 = 1/3$, $\iota_{\max} = 2/3$, and $\iota_1 = 1/6$.

Equations (38)-(39), with the profile above, constitute the so-called *revtokamak* [54].

Typical values for these constants are approximately $\iota_0 = 1/3$, $\iota_{\max} = 2/3$, and $\iota_1 = 1/6$. Small variations in these parameters can lead to significant changes in the phase space configuration. Considering these values, and $k = 4$, Fig. 11 show some orbits before the loop reconnection process. A comprehensive study of the fixed points and their stability for the revtokamak can be found in Ref. [54], where it was considered an extended phase space that includes the regions outside the physical range $0 < y < 1$. In the same way as for the tokamak, a (kind of) symmetric revtokamak can be constructed [53], with similar results holding for the symmetric versions of both the tokamak and the revtokamak.

6 Divertor maps

A divertor is a magnetic configuration created by electric currents placed externally to the tokamak, such that the field lines have escape channels, through which plasma particles can be diverted out of the tokamak wall and redirected to divertor plates, in order to control the plasma impurity content [5,7,55]. Divertors work chiefly due to the chiefly chaotic magnetic field line region near the tokamak wall, where divertor plates are usually placed. Hence field line maps are widely used in the plasma literature to model and predict divertor properties.

6.1 Simple divertor map

The simple divertor map has been presented as the simplest model for the magnetic configuration of a tokamak equipped with a divertor. The simple divertor map is particularly intended for studying the magnetic flux and footprints on the divertor plates [56]. The so-called *magnetic footprints* are the sets of points where the field lines strike those plates. The magnetic footprints on a divertor reflect the underlying dynamical structure of the chaotic field line layer, namely the homoclinic tangle of invariant manifolds which act as fast escape channels for the

Will be inserted by the editor

17

trajectories. Hence the footprints are traces of the invariant manifolds as they hit the divertor plates. Since the structure of the homoclinic tangle is self-similar we expect magnetic footprints to have a fractal nature, which actually has been confirmed experimentally [57].

The simple divertor map is given by the following equations:

$$x_{n+1} = x_n - ky_n(1 - y_n) , \quad (44)$$

$$y_{n+1} = y_n + kx_{n+1} , \quad (45)$$

where (x_n, y_n) are the rectangular coordinates on the poloidal surface of section and the parameter k determines both the safety factor and the strength of toroidal asymmetries in the magnetic field, either natural or externally imposed. Indeed, the perturbation term in Eq. (44) is ky^2 , and the safety factor per iteration, in the linearized system, denoted as q_1 is given by the solution of the following transcendental equation

$$\sin\left(\frac{2\pi}{q_1}\right) = k\left(1 - \frac{k^2}{4}\right)^{1/2} . \quad (46)$$

To the map is added a further parameter, N_{map} , which is the number of map iterations considered equivalent to one toroidal turn, introduced in order to yield a realistic safety factor profile. As an example, for $k = 0.6$, there results $q_{1 \text{ axis}} \approx 10$ and $q_{1 \text{ edge}} \approx 30$, so that $N_{\text{map}} = 10$ renders $q_{\text{axis}} \approx 1$ and $q_{\text{edge}} \approx 3$.

The strike points of the magnetic field lines on the divertor plates, which generate the magnetic footprints, may not be clearly determined from the simple divertor map, due to the discreteness of map iterations. A more accurate determination of the strike points would come from turning the time-like variable n into a continuous variable φ , which can be thought as a parameterization of the field line. The simple divertor map is then written in the form

$$x(\varphi) = x_n - k\varphi y_n(1 - y_n) , \quad (47)$$

$$y(\varphi) = y_n + k\varphi x(\varphi) , \quad (48)$$

where $\varphi \equiv N_{\text{map}}\phi/2\pi$ acts as the linear *weight* of the parameter k from the n -th to the $n+1$ -th iteration, so that $(x(0), y(0)) = (x_n, y_n)$ and $(x(1), y(1)) = (x_{n+1}, y_{n+1})$.

Another advantage of making the time-like variable a continuous one is that the simple divertor map can now be obtained as an approximate solution of the canonical equations from the integrable Hamiltonian

$$H(x, y) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{k}{3}(y^2 - y^3) , \quad (49)$$

with φ being the time-like variable, x the canonical momentum, and y the canonical position. The mechanical equivalent of Eq. (49) would describe a particle subjected to a one-dimensional potential function $U \propto y^2/2 - y^3/3$ for which $U(y \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \mp\infty$, with a well encircling $y = 0$ and a hill around $y = 1$.

The phase portrait corresponding to the equilibrium situation described by the continuous simple divertor map is depicted in Fig. 12(a): the divertor plate is placed at $y = y_{\text{plate}}$ and in a symmetric way with respect to the x coordinate. There are closed curves encircling the elliptic point at $(0, 0)$ corresponding to stable oscillations of the particle in the potential well in the mechanical equivalent, or the closed flux surfaces which contain the plasma in the tokamak. The hyperbolic point at $(0, 1)$ is the unstable equilibrium point at the top of the potential local maximum, whose manifolds form a closed loop at one side and two open branches at the other side, ending on the divertor plate.

The continuous system of Eqs. (47)-(48) is integrable but, if we discretize the time-like variable to obtain the simple divertor map, chaotic dynamics would be possible. Hence the divertor map has a thin layer of chaotic field lines at the region occupied by the separatrix connecting the elliptic and hyperbolic points. Particles reaching this chaotic layer would be thus diverted to the plate due to the chaotic transport along the layer. A typical phase portrait of the simple divertor map (for weak perturbation) can be seen in Fig. 12(b) which shows KAM

Fig. 12. (a) Schematic view of a divertor equilibrium configuration. (b) Phase portrait of the simple divertor map for $k = 0.6$.

tori surrounding the elliptic point in $(0, 0)$, one of them close to the hyperbolic point on $(0, 1)$, in accordance with the continuous description just given.

The procedure for determining the points corresponding to the collisions between field lines and the divertor plates is the following [58]: for a given set of initial conditions and a fixed plate position y_{plate} , one iterates the map until the condition $y_n \leq y_{\text{plate}} \leq y_{n+1}$ is fulfilled; then the toroidal location φ_s of the strike point is determined through Eqs. (47)-(48):

$$y_{\text{plate}} = y_n + k\varphi_s[x_n - k\varphi_sy_n(1 - y_n)] , \quad (50)$$

and the x coordinate of the strike point, x_s , from Eq. (47), is

$$x_s = x(\varphi_s) = x_n - k\varphi_sy_n(1 - y_n) . \quad (51)$$

The magnetic footprint obtained by using this routine, considering the simple divertor map with $y_{\text{plate}} = 1$ and $k = 0.6$, consists of a set of thin stripes with an involved (actually fractal) structure (Fig. 13). It has a smooth longitudinal structure with a cross-section given by a Cantor-like fractal set, with box-counting dimension $1 + D_C$, where $0 < D_C < 1$. The stripes width increases with k , but without essential structure and shape changes [58]. Considering the “open” field lines, coming from and arriving at the divertor plates, we see that the stochastic orbits quickly collide with the plates. These orbits complete an integer number of poloidal turns, and the area of the footprint generated by the field lines tracing N_p turns decreases quadratically with N_p [59].

The region corresponding to the predominantly chaotic field line layer for the simple divertor map can be approximated by a circular ring with outer radius 1 and inner radius $1 - w$, w being the width of the chaotic layer, defined as the distance along the y axis from the outermost intact torus to $y = 1$. The magnetic footprint area can be estimated by considering a rectangular grid on the divertor plate and adding the areas of those rectangles struck by field lines. The relative density of the magnetic flux on the plates then thus can be estimated by the ratio of the chaotic field line region area to the area occupied by the magnetic footprints. One key result obtained with the simple divertor map is that the magnetic flux density on the divertor plates is roughly six times bigger than the flux in the chaotic layer, for moderate perturbations [56]. Moreover, the width of the chaotic layer, w , increases with k as $k^7/3$ for $k > 0.6$, as we have estimated from the results of Ref. [58]. In addition, the footprint area grows even faster with k and, as w goes from 0.01 to 0.1, the magnetic flux density, directly related to the heat flux density, is reduced by 35 % [58].

Will be inserted by the editor

19

Fig. 13. Magnetic footprint on the divertor plate for the simple divertor map with $k = 0.6$.

6.2 Symmetric simple divertor map

In addition to the introduction of chaos in the system, the discretization of the solution for the Hamiltonian of Eq. (49) leads to an asymmetry with respect to the y axis [see Fig. 12(b)], while $H(x, y)$ is an even function of x [58]. Another difference to the Hamiltonian case is that, while the latter is time-independent, the phase portraits obtained from Eqs. (47)-(48) show a dependence on φ [58].

This has led to the introduction of the symmetric simple divertor map [58], given by:

$$y_{n+1} = y_n + 2kx_n - 2k^2y_n(1 - y_n) , \quad (52)$$

$$x_{n+1} = x_n - ky_n(1 - y_n) - ky_{n+1}(1 - y_{n+1}) , \quad (53)$$

which is the composition of the simple divertor map with its inverse with $k \rightarrow -k$. Though the symmetric simple divertor map is not as simple as its non-symmetric version, it models in a better way the dynamics of the corresponding Hamiltonian and it is the usual choice as the unperturbed model for the implementations of more sophisticated divertor models [55,60]. For $k = 0.3$, the choice $N_{\text{map}} = 10$ results in a realistic safety factor profile.

The parameter k affects the symmetric simple divertor map properties differently from the way it does in the simple divertor map, and comparisons between the two maps have to be made carefully. A useful quantity to consider is the width of the chaotic layer, w , which varies with k as $\exp(25k^2)$ for the symmetric simple divertor map. The footprint width increases with k as k^{12} , its structure and shape remaining the same as in the simple divertor map. The fraction of orbits striking the divertor plates decays with the number of poloidal turns as $1/N_p$ [61]. As w goes from 0.01 to 0.1, the magnetic flux density is reduced by 30% [61], which compares well to the value previously found for the simple divertor map.

Although the k -dependent terms can simulate general toroidal asymmetries, inherent or external to the model [56], various modified versions of the simple divertor map were introduced to take into account these asymmetries in a more realistic way. Two of these versions that have been recently studied include the so-called low- MN asymmetry, and the effect of a current carrying coil. We shall discuss these two cases in some detail.

6.2.1 Low- MN perturbation map

The low- MN (or toroidal and poloidal mode) perturbation is introduced in the map as a quadrupole field of toroidal mode number ± 1 [59], which model the unavoidable asymmetries in the equilibrium field obtained in experiments, usually of the order 10^{-4} to 10^{-3} compared to the equilibrium toroidal field [60]. The equations of the symmetric simple divertor map with low- MN perturbation are [60]:

$$y_{n+1} = y_n + 2k(1 - \delta_n)x_n - 2k^2y_n(1 - \delta_n)(1 - \delta_n - y_n) , \quad (54)$$

$$x_{n+1} = x_n - ky_n(1 - \delta_n - y_n) - ky_{n+1}(1 - \delta_n - y_{n+1}) , \quad (55)$$

where $\delta_n = \delta_1 \cos(2\pi n/N_{map})$, with δ_1 being the amplitude of the low- MN perturbation. The intrinsic perturbation parameter of the map is kept at $k = 0.3$.

The width of the chaotic layer increases with the low- MN perturbation as $\delta_1^{1/2}$, a value predicted by secular perturbation theory [10]. The perturbation causes the phase portraits not to be as symmetric as before, but its main effect, for δ_1 in the range $(10^{-4}, 10^{-3})$, is the creation of large islands in the stochastic region. In that range, the fraction Φ of the chaotic flux striking the divertor plates is approximately 75 % of the total number of field lines.

As for the simple divertor map [58], the low- MN perturbation reveals itself as a strong factor affecting the footprint properties in the symmetric simple divertor map, with the footprint topology changing from a 10-fold pattern (emerging as a consequence of our choice of $N_{map} = 10$) to a single structure for $\delta_1 \gtrsim 10^{-4}$. For $10^{-4} \leq \delta_1 \leq 10^{-3}$, the footprint area increases from two to four times with respect to its unperturbed value [60]. The average heat flux density on the plates can be estimated as $\Phi A_{sl}/A_f l$ where A_{sl} is the area of the predominantly chaotic field line region, A_f is the area of the magnetic footprint, and l is the average orbit length, the latter giving an estimate of the average time it takes for particles from the chaotic layer to reach the divertor plates.

From this numerical estimate, the heat deposition is found to increase by a factor of three for $\delta_1 \in (1 \times 10^{-4}, 5 \times 10^{-4})$, then decreasing to 70 % of its peak value at $\delta_1 = 10^{-3}$. Thus, the model assigns a noticeable effect to the small, naturally occurring asymmetries in the toroidal field. Using the density of orbits on the plates to estimate the heat deposition profile on them, it is found, however, that the perturbation makes the heat deposition more homogeneous on the divertor plates [60].

6.2.2 Dipole map

Introduced in [61], the so-called *dipole map* considers a current carrying coil placed on the y axis, with the purpose of investigating the effect of high- MN perturbations on the symmetric simple divertor map equilibrium. The map equations are [55]:

$$x_{n+1} = x_n + 2\delta_d s^3 x_{n+1} \frac{y_n - y_s + s}{[x_{n+1}^2 + (y_n - y_s + s)]^2} , \quad (56)$$

$$y_{n+1} = y_n + \delta_d s^3 x_{n+1} \frac{(y_n - y_s + s)^2 - x_{n+1}^2}{[x_{n+1}^2 + (y_n - y_s + s)]^2} , \quad (57)$$

where s is the distance from the dipole to the last intact torus and δ_d is the dipole perturbation strength, proportional to the dipole moment and to $1/s^3$, and normalized by the equilibrium toroidal magnetic field.

The dipole perturbation leads to separate chaotic layers in the phase space that result in a composite chaotic layer whose width w increases as $\delta_d^{0.39}$ for $\delta_d \in (0, 6.8 \times 10^{-6})$, and as δ_d^8 for $\delta_d \in (6.9 \times 10^{-6}, 7.3 \times 10^{-6})$. There is an abrupt width change, from $w \sim 0.1$ to $w \sim 0.11$, between these ranges, then called pre- and post-transition.

As it happens when k is varied, increasing values of δ_d lead to magnetic footprints with the same topology and shape, in contrast to the effect of the low- MN perturbation. There is an

increase in the footprint area, but only of about 50 % for $\delta_d \in (0, 7.3 \times 10^{-6})$. The fraction of field lines striking the plates decays with the number of poloidal turns as $1/N_p$, regardless of the value of δ_d . Moreover, this fraction is reduced to half of its value in the pre-transition range of δ_d , and to only 1 % of it for $\delta_d = 7.3 \times 10^{-6}$, what is attributed to the predominance of islands in the post-transition range, which reduces the chaotic area and traps part of the chaotic orbits due to the stickiness phenomenon. From the estimate $\Phi A_{sl}/A_f l$, the average heat deposition is found to decrease moderately (around 17 %) with $\delta_d \in (0, 7.3 \times 10^{-6})$. However, using the density of field lines striking the divertor plates, it is found that the dipole perturbation significantly reduces the proportion of hot spots, reducing their number in 75%, as δ_d goes from 1×10^{-6} to 7×10^{-6} , while the number of cold and medium spots increases [55].

Other variations of the simple divertor map were also proposed [59]: (i) squaring the parenthesis term in Eq. (44) results in a map that describes a double-null topology; (ii) terms added to the equations leads to a variable (“higher”) shear map; and (iii) the simple divertor map composed with a diffuser map, inspired on [9], can model the high- MN perturbations caused by localized coils of ergodic limiters. In order to simulate the plasma particle trajectories, the composition of the simple map with a random non-conservative map was also considered [56,59]. The fine structure of the footprints was then lost and the average width of the footprint was found to increase with the amplitude of the random addition, δ_R , as $\delta_R^{1/4}$.

7 Conclusions

In this work we have considered the description of magnetic field lines in tokamaks by means of simple maps. These maps are found to display the same dynamical behavior exhibited by the Hamiltonian equations that describe the tokamak magnetic field lines, despite not being directly derived from these equations in many cases. Each map presented here has its advantages and weaknesses, and the map found most adequate for a certain study depends on the phenomenon that we are describing.

Very simple tokamak maps, as the standard twist and non-twist maps, are specially important for giving us the opportunity to study analytically some of the basic dynamical phenomena, and further offering local descriptions of the tokamak dynamics. A global model for the magnetic field in a tokamak is given by the tokamap, which also displays freedom in the choice of the winding number profile. The Martin-Taylor map and Ullmann map describe the tokamak fields in the presence of ergodic magnetic limiters, with the latter also including a toroidal correction. For tokamaks equipped with divertor plates, the simple divertor map consist in a basic model for the system, to which realistic perturbations are added. As verified for both the simple divertor map and the tokamap, when we attribute a Hamiltonian to a given map (e. g., by showing that the map is an approximate solution to the Hamiltonian), the symmetric version of the map is found to mirror more accurately the dynamics of the corresponding Hamiltonian.

We have considered mapping models [52], construct from magnetic and dynamical considerations to represent the tokamak magnetic field lines behavior. More rigorous methods were developed for obtaining symplectic maps from given Hamiltonians [62,63,64]. However, to obtain a Hamiltonian appropriate for describing the tokamak dynamics, one would have, e. g., to numerically integrate realistic field lines equations on a grid, with intermediate values being found through interpolation [52]. Further methods for obtaining tokamak maps which can take into account toroidal geometry [65] or other specific considerations [66] have been proposed.

Simple maps have proven to be an important tool in the study of dynamics of magnetic field lines in tokamaks. Maps require shorter computation times when compared to the numerical integration of the magnetic field line equations - and the simpler they are, the shorter is the time needed for the simulations. We have given examples of such applications in this paper, as the design of the divertor experiments through estimates of the area of the footprints or the heat deposition density, and the quantitative characterization of the anomalous diffusion occurring in the outer tokamak region near its inner wall.

Besides this computational advantage, another asset of tokamak simple maps is that analytical treatment can be performed on them, to obtain fixed points, periodic orbits, island widths

22

Will be inserted by the editor

and so on, using the powerful methods of Hamiltonian dynamics. This analytical treatment allows one to vary the map parameters in order to make realistic choices of parameter values to be used in the design of experiments using, for example, ergodic limiters and divertor plates. We hence conclude that tokamak simple maps are not problems of purely academic interest, being rather a useful tool that provide researchers a deeper understanding of basic physical issues involved in complicated tokamak problems.

References

1. J. Wesson, *Tokamaks* (Oxford University Press, Oxford, 1987).
2. F. W. Perkins, D. E. Post, N. A. Uckan *et al.*, Nucl. Fusion **39**, 2137 (1999).
3. P. J. Morrison, Phys. Plasmas **7**, 2279 (2000).
4. O. Fischer and W. A. Cooper, Plasma Phys. Reports **24**, 784 (1998).
5. F. Karger and K. Lackner, Phys. Lett. A **61**, 385 (1977).
6. I. L. Caldas, R. L. Viana, M. S. T. Araujo *et al.*, Braz. J. Phys **32**, 980 (2002).
7. T. E. Evans, R. A. Moyer, K. H. Burrell KH *et al.*, Nature (Physics) **2**, 419 (2002).
8. M. W. Jakubowski, O. Schmitz, S. S. Abdullaev, S. Brezinsek, and K. H. Finken, Phys. Rev. Lett. **96**, 35004 (2006).
9. T. J. Martin and J. B. Taylor, Plasma Phys. Controlled Fusion **26**, 321 (1984).
10. A. J. Lichtenberg and M. A. Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer, New York 1992).
11. R. E. de Carvalho and A. M. O. de Almeida, Phys. Lett. A **162**, 457 (1992).
12. D. del Castillo-Negrete and P. J. Morrison, Phys. Fluids A **5**, 948 (1993).
13. A. Wurm, K. Fuchss, and P. J. Morrison, Americal Physical Society April Meeting, R1.00037 (2006).
14. W. Kerner and H. Tasso, Plasma Phys. Controlled Fusion **24**, 97 (1982).
15. F. M. Levinton, M. C. Zarnstorff, S. H. Batha, M. Bell, R. E. Bell, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4417 (1995).
16. E. J. Strait, L. L. Lao, M. E. Mauel, B. W. Rice, T. S. Taylor *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4421 (1995).
17. E. Mazzucato, S. H. Batha, M. Beer, M. Bell, R. E. Bell *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 3145 (1996).
18. G. Corso G and F. B. Rizzato, Phys. Rev. **58**, 8013 (1998).
19. J. M. Greene, J. Math. Phys. **20**, 1183 (1979).
20. B. V. Chirikov, Phys. Rep. **52**, 263 (1979).
21. S. S. Abdullaev, K. H. Finken, A. Kaleck, and K. H. Spatschek, Phys. Plasmas **5**, 196 (1998).
22. J. E. Howard and S. M. Hohns, Phys. Rev. A **29**, 418 (1984).
23. K. Fuchss, A. Wurms, A. Apte, and P. J. Morrison, Chaos **16**, 33120 (2006).
24. W. Horton, H. B. Park, J. M. Kwon, D. Strozzi, P. J. Morrison, and D. I. Choi, Phys. Plasmas **5**, 3910 (1998).
25. J. S. E. Portela, I. L. Caldas, R. L. Viana, and P. J. Morrison, Int. J. Bifurcat. Chaos **17** (2007).
26. A. Wurm, A. Apte, and P. J. Morrison, Braz. J. Phys. **34**, 1700 (2004).
27. S. Shinohara and Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. **100**, 219 (1998).
28. A. Wurm, A. Apte, K. Fuchss, and P. J. Morrison, Chaos **15**, 23108 (2005).
29. J. E. Howard and J. Humphreys, J. Phys. D **80**, 256 (1995).
30. E. Petrisor, Chaos, Solit. & Fract. **14**, 117 (2002).
31. D. del Castillo-Negrete, J. Greene, and P. J. Morrison, Physica D **91**, 1 (1996).
32. S. Shinohara and Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. **97**, 379 (1997).
33. S. D. Prado and G. Corso, Physica D **142**, 217 (2000).
34. H. Wobig, Z. Naturforsch., A: Phys. Sci. **42**, 1054 (1987).
35. R. Balescu, M. Vlad, and F. Spineanu, Phys. Rev. E **58**, 951 (1998).
36. J. S. E. Portela, R. L. Viana, and I. L. Caldas, Physica A **317**, 411 (2003).
37. K. Ullmann and I. L. Caldas, Chaos, Solit. & Fract. **11**, 2129 (2000).
38. R. L. Viana and I. L. Caldas, Z. Naturforsch., A: Phys. Sci. **47**, 941 (1992).
39. J. S. E. Portela, I. L. Caldas, and R. L. Viana, Int. J. Bifurcation Chaos **17** (2007).
40. J. Schneider, T. Tél, and Z. Neufeld, Phys. Rev. E **66**, 66218 (2002).
41. M. A. F. Sanjuán, T. Horita, and K. Aihara, Chaos **13**, 17 (2003).
42. F. Feudel, A. Witt, M. Gellert, J. Kurths, C. Grebogi, and M. A. F. Sanjuan, Chaos, Solit. & Fract. **24**, 947 (2005).

43. G. A. Oda and I. L. Caldas, *Chaos, Solit. & Fract.* **5**, 15 (1995).
44. G. Corso and A. J. Lichtenberg, *Physica D* **131**, 1 (1999).
45. J. M. Greene and J. Mao, *Nonlinearity* **3**, 69 (1990).
46. R. Balescu, *Phys. Rev. E* **55**, 2465 (1997).
47. J. H. Misguich, *Phys. Plasmas* **8**, 2132 (2001).
48. J. H. Misguich, J.-D. Reuss, D. Constantinescu, G. Steinbrecher, M. Vlad, F. Spineanu, B. Weyssow, and R. Balescu, *Plasma Phys. Controlled Fusion* **44**, L29 (2002).
49. J. H. Misguich, J.-D. Reuss, D. Constantinescu, G. Steinbrecher, M. Vlad, F. Spineanu, B. Weyssow, and R. Balescu, *Ann. Phys. Fr.* **28**, 1 (2003).
50. D. Constantinescu and R. Constantinescu, *Phys. Scr.* **T118**, 244 (2005).
51. M. Eberhard, *Phys. Rev. E* **71** 26411 (2005).
52. S. S. Abdullaev, *Nucl. Fusion* **44**, S12 (2004).
53. A. Wingen, K. H. Spatschek, and S. S. Abdullaev, *Contr. Plas. Phys.* **45**, 500 (2005).
54. R. Balescu, *Phys. Rev. E* **58**, 3781 (1998).
55. A. Punjabi, H. Ali, and A. Boozer, *Phys. Plasmas* **10**, 3992 (2003).
56. A. Punjabi, A. Verma, and A. Boozer, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 3322 (1992).
57. A. Wingen, M. Jakubowski, K. H. Spatschek, S. S. Abdullaev, K. H. Finken, and M. Lehen, *Phys. Plasmas* **14**, 42502 (2007).
58. A. Punjabi, A. Verma, and A. Boozer, *J. Plas. Phys.* **56**, 569 (1996).
59. A. Punjabi, A. Verma, and A. Boozer, *J. Plas. Phys.* **52**, 91 (1994).
60. H. Ali, A. Punjabi, A. Boozer, and T. Evans, *Phys. Plasmas* **11**, 1908 (1994).
61. A. Punjabi, H. Ali, and A. Boozer, *Phys. Plasmas* **4**, 337 (1997).
62. S. S. Abdullaev, *J. Phys. A: Math. Gen.* **32**, 2745 (1999).
63. S. S. Abdullaev, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 2811 (2002).
64. S. S. Abdullaev, *Phys. Rev. E* **70**, 46202 (2004).
65. E. C. da Silva, I. L. Caldas, and R. L. Viana, *Phys. Plasmas* **8**, 2855 (2001).
66. S. R. Barocio, E. Chavez-Alarcn, and C. Gutierrez-Tapia, *Braz. J. Phys.* **36**, 550 (2006).