UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Quebra da Simetria de Lorentz na Eletrodinâmica Quântica

Denny Mauricio de Oliveira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Adílson José da Silva (IFUSP) - Orientador

Prof. Dr. Alex Gomes Dias (UFABC)

Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes (IFUSP)

São Paulo

2010

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Oliveira, Denny Mauricio de
Quebra da simetria de lorentz na eletrodinâmica quântica. – São Paulo, 2010. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física – Depto. de Física Matemática Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva
Área de Concentração: Teoria Quântica de Campos
Unitermos: 1. Física; 2. Teoria de Campo e Onda; 3. Teoria Quântica de Campos; 4. Teoria de Gauge
USP/IF/SBI-037/2010

Dedico este trabalho à minha querida esposa Patrícia.

Agradeço a Deus pela dádiva de continuar vivendo.

*Debulhar o trigo
Recolher cada bago do trigo
Forjar no trigo o milagre do pão
E se fartar de pão*

*Decepar a cana
Recolher a garapa da cana
Roubar da cana a doçura do mel,
Se lambuzar de mel*

*Afagar a terra
Conhecer os desejos da terra
Cio da terra a propícia estação, e fecundar o
chão*

Milton Nascimento e Chico Buarque de Hollanda, “*Cio da terra*”

Agradecimentos

Ao Professor Adílson José da Silva, orientador, pela paciência e oportunidade concedida para a realização deste trabalho;

Ao Professor Marcelo Otávio Caminha Gomes, pelas aulas de Teoria Quântica de Campos, e aos professores do Instituto de Física, em especial aos do Departamento de Física Matemática, pelas lições ministradas;

Ao Professor José Roberto S. do Nascimento, pela sugestão do tema de estudo desta dissertação;

Aos colegas do “grupo de campos” do Departamento de Física Matemática: Fernando, Liner, Juliano, Walney, Carlos Stechhann, Roberto Maluf, Bruno, André, Eduardo, pelas discussões sobre Física, dicas, seminários e aulas assistidas;

À minha querida esposa Patrícia, por seu carinho, amor e compreensão nos momentos mais difíceis da minha vida, e por me fazer acreditar que realmente era possível;

Às minhas filhas, Isabela e Eduarda, recém-chegada a este mundo, eternas fontes de motivação e inspiração;

A todos aqueles que, em um gesto de solidariedade, contribuíram com uma parte de si para salvar minha vida;

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), pelo apoio concedido durante o período de realização deste trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação, estudamos implicações geradas pela quebra da simetria de Lorentz na Eletrodinâmica Quântica. Analisamos férmions interagindo com um campo eletromagnético nos contextos da mecânica quântica e ao efetuar correções radiativas. Na mecânica quântica, os termos de quebra da simetria de Lorentz foram tratados como perturbações à equação de Dirac, e seus valores esperados no vácuo foram obtidos. Nas correções radiativas, a quebra da simetria de Lorentz foi introduzida nessa interação para que o termo tipo Chern-Simons pudesse ser induzido em $(3+1)$ dimensões. Também discutimos as consequências geradas por este termo sobre as velocidades de propagação de fótons clássicos.

ABSTRACT

In this dissertation, we study the implications generated by the Lorentz breaking symmetry in quantum electrodynamics. We analyze fermions interacting with an electromagnetic field in the contexts of quantum mechanics and we make radiative corrections. In quantum mechanics, the terms of the Lorentz breaking symmetry were treated as perturbations to the Dirac equation, and their expected values were obtained in a vacuum. In the radiative corrections, the Lorentz breaking symmetry was introduced in this interaction for the Chern-Simons like term could be induced in $(3 + 1)$ dimensions. We also discussed the consequences generated by this term on the propagation speeds of classic photons.

Índice

1	Introdução	1
2	Simetrias discretas do campo de Dirac	7
2.1	O campo escalar como motivação	7
2.2	A equação de Dirac	11
2.3	O propagador do férmion	15
2.4	Simetrias discretas	16
2.4.1	Paridade	17
2.4.2	Inversão temporal	18
2.4.3	Conjugação de carga	20
2.5	Covariantes bilineares	20
2.6	A transformação CPT	22
3	Apresentação do modelo de violação de Lorentz para férmions	25
3.1	Introdução	25
3.2	A equação de Dirac e o propagador do férmion modificados	26
4	Implicações em Mecânica Quântica	31
4.1	O problema de Landau e a quebra de simetria de Lorentz	31
4.2	Expansão não relativística do hamiltoniano modificado	35
4.3	O efeito Zeeman anômalo modificado	38

4.3.1	O acoplamento vetorial como perturbação	39
4.3.2	O acoplamento axial como perturbação	41
5	Férmions em um campo de calibre em (2+1) Dimensões	47
5.1	Introdução	47
5.2	O propagador de Maxwell-Chern-Simons	49
5.3	Indução de Chern-Simons em $(2+1)D$	52
6	Correções Radiativas com Quebra da Simetria de Lorentz em $(3+1)D$	57
6.1	Expansão do propagador do férmion e a quebra de simetria de Lorentz	57
6.2	Indução de Chern-Simons pela quebra da simetria de Lorentz	59
6.3	Birefringência dos fótons clássicos de CS	69
7	Conclusão	75
A	Convenções adotadas	77
B	Autofunções exatas do problema de Landau relativístico	79
C	O método Foldy-Wouthuysen	83
D	O Acoplamento Spin-Órbita	85
E	Integração gaussiana em variáveis de Grassmann	89
F	Prova da relação $\ln \det Q = Tr \ln Q$	91
G	Integrais de Feynman regularizadas dimensionalmente	93
	Referências	96

1 Introdução

Há pouco mais de cem anos, Albert Einstein [1] estabeleceu uma teoria em que o papel do observador assume uma certa relevância na determinação dos fenômenos físicos e na aplicação das próprias leis da Física, quando as velocidades dos objetos em questão são próximas da velocidade da luz. Esta teoria é denominada Relatividade Restrita ou Especial. O ponto de partida para o estudo desta teoria corresponde aos postulados da constância da velocidade da luz e a validade das leis da Física que, quando aplicadas a referenciais inerciais distintos, devem descrever os fenômenos de maneiras semelhantes. Os fenômenos físicos são então descritos por equações que têm a mesma forma, ou seja, a Relatividade Restrita deve ser uma teoria *covariante*, e a conexão entre sistemas de referências descritos por equações covariantes é feita através de transformações de Lorentz, como veremos a seguir.

Como a Relatividade Restrita é uma teoria elaborada em um espaço-tempo quadridimensional, as transformações de Lorentz podem ser definidas, basicamente, em dois tipos: as rotações e as impulsões (*boosts*). As primeiras correspondem aos três tipos básicos de rotações em torno dos três eixos espaciais, enquanto que a segunda é determinada por uma mudança de velocidades. Há ainda três tipos de impulsões, cada uma ocorrendo em um dos três eixos espaciais. Assim, um sistema é dito ter simetria de Lorentz se as leis da Física não são alteradas por transformações de Lorentz dos tipos descritos anteriormente.

A simetria de Lorentz e as propriedades da Mecânica Quântica correspondem a base

para a formulação da Teoria Quântica de Campos, que descreve partículas como excitações localizadas de um campo imerso no espaço-tempo. O desenvolvimento dessas ideias, no século passado, desencadeou a formulação do *Modelo Padrão* (MP), que descreve todas as interações conhecidas no universo (forças eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca), exceto a gravidade. Um resultado importante, propriedade do MP e obtido pela teoria quântica, é a *simetria* CPT. Nesta sigla, C quer dizer conjugação de *carga*, ou seja, esta transformação converte a partícula em sua antipartícula; P corresponde à *paridade*, isto é, deve ocorrer uma inversão espacial quando esta transformação é realizada e, finalmente, T muda a direção de fluxo do tempo. Devido a essas definições, um sistema é dito ter simetria CPT se as três transformações juntas não afetarem a física do sistema. Isso é denominado *teorema* CPT, inicialmente proposto por Schwinger [2]. Uma das consequências deste teorema é o fato de que partículas e suas antipartículas devem ter cargas elétricas de mesmo módulo e sinais opostos, tempos de vida exatamente iguais, assim como massas e momentos magnéticos. As transformações discretas sofridas pelo campo de Dirac na figura de seus covariantes bilineares são estudadas no Capítulo 2 desta dissertação.

Os físicos teóricos atuais esperam que, no limite de altas energias, uma teoria unificada possa descrever a Natureza de maneira simétrica. No entanto, a simetria de Lorentz é violada na tentativa de incorporar a Teoria da Relatividade Geral¹ ao MP. O MP com gravidade descreveria sistemas físicos que devem ocorrer em escalas de altas energias, que são da ordem de grandeza da escala Planck, cuja massa é $m_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} \approx 10^{19} \text{ GeV}$, sendo G_N a constante universal de Newton. As distâncias típicas nessas circunstâncias de escala seriam da ordem de 10^{-33} cm .

A quebra da simetria de Lorentz surge também em outra área da física teórica

¹Como é bem conhecido, Einstein não obteve sucesso ao tentar formular uma teoria que engloba o eletromagnetismo e a gravidade pois, nesta última, não existe força de repulsão entre as massas.

contemporânea de altas energias: a Teoria de Cordas. Nesta teoria, a partícula pontual passa a ser um objeto unidimensional. Desta forma, quando se move no espaço-tempo, ao invés de traçar uma linha (linha mundo), esta partícula descreve uma superfície denominada *folha de mundo*. Assim, os modos normais de vibração desta superfície de mundo recuperariam as informações de descrição das partículas. Tal ideia de violação da invariância de Lorentz, no contexto da Teoria de Cordas, foi lançada pioneiramente, em 1989, por Kostelecký e Samuel [3]. Neste trabalho, os autores argumentam que tal violação pode ser estendida ao MP. Então, na segunda metade dos anos 90, surge o *Modelo Padrão Extendido* (MPE).

O MPE é uma teoria que possui todas as propriedades do MP usual - tais como a estrutura de calibre $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ e renormalizabilidade -, e a extensão que permite estabelecer violações de simetrias de Lorentz e CPT. Esta teoria então fornece uma descrição quantitativa das violações das simetrias de Lorentz e CPT, controladas por coeficientes cujos valores são determinados por experimentos específicos². Como tais experimentos são sensíveis a testes de transformações CPT, a teoria será baseada em efeitos de baixa energia, sem gravidade. Uma característica marcante desta teoria, como se sabe da literatura, é que a quebra da simetria CPT implica na quebra da simetria de Lorentz³ [5]. Esse fato permite que qualquer violação observável da simetria CPT seja descrita pelo MPE.

Em 1997, [6] Colladay, Kostelecký e colaboradores propuseram, para o setor de férmions, uma base teórica para estudos de modelos que envolvem violação de simetria CPT. Nesse trabalho, os autores argumentam que resultados obtidos através de cálculos teóricos, utilizando-se correções em mecânica quântica relativística e teoria

²Em relação a esses experimentos, na referência [4], é possível encontrar alguns detalhes, tais como a razão $\frac{m_K - m_{\bar{K}}}{m_K} \lesssim 10^{-18}$ para um sistema de kaons neutros. A massa do kaon é $0,5 \text{ GeV}$.

³Para efeito de linguagem, o termo *quebra da simetria de Lorentz* será utilizado de uma maneira geral, enquanto que o termo *quebra da simetria CPT* será utilizado de forma específica.

de perturbações (usualmente até primeira ordem de aproximação, no regime de baixas energias), devem servir como motivação para a busca, via experimentos, de limites para os campos de quebra de Lorentz na teoria de férmions. Os autores também redefiniram vários elementos importantes para o estudo da extensão da teoria de Dirac, modificados pela nova teoria, como lagrangianas, equações de Dirac, energias, propagadores, espinores de Dirac, etc. Esses elementos serão apresentados no Capítulo 3. No Capítulo 4, a teoria de violação CPT será aplicada a modelos teóricos em mecânica quântica, tais como mudanças de energia de elétrons e pósitrons relativísticos e ao efeito Zeeman anômalo.

Nesta dissertação, estudaremos os possíveis efeitos que a quebra da simetria de Lorentz podem causar em sistemas físicos da EDQ⁴. Assim, sistemas compreendidos no acoplamento de férmions com um campo de calibre serão analisados.

No início da década de 80, S. Deser, R. Jackiw e S. Templeton [7] escreveram a teoria eletromagnética de Maxwell em uma variante planar em $(2+1)D$, que preserva a invariância de Lorentz e transformações de calibre. Este modelo, denominado *teoria de Maxwell-Chern-Simons* (MCS), tem aplicabilidade a fenômenos planares de matéria condensada, com grande destaque na literatura aos supercondutores e ao efeito Hall quântico fracionário [8]. No Capítulo 5 discutimos algumas das propriedades e calculamos o termo induzido de CS proveniente do acoplamento de férmions com um campo de calibre no contexto do espaço-tempo planar.

Embora esta teoria só exista em dimensões ímpares, em 1990, Carroll, Field e Jackiw perceberam, em um trabalho pioneiro [9], que é possível formular uma teoria semelhante em $(3+1)D$, através da adição de

$$S_{CS}^{(3+1)D} = \frac{1}{2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma \quad (1.1)$$

⁴Maiores detalhes de outros testes envolvendo quebra da simetria de Lorentz na EDQ são encontrados na referência [26].

à ação de Maxwell convencional. Este termo é conhecido na literatura como termo de Carrol-Field-Jackiw. Tal termo é CPT-ímpar⁵. Apesar de transformações de calibre serem preservadas, a simetria de Lorentz é violada, porque é necessário acoplar ao termo tipo Chern-Simons (CS) um quadrivetor constante η_μ , que gera uma anisotropia do espaço-tempo.

No Capítulo 6 calculamos as correções radiativas, na aproximação de um laço, provenientes do acoplamento axial de férmions com um campo de calibre na presença da quebra da simetria de Lorentz. Tal acoplamento gera uma indução de um termo semelhante ao de CS [10], como na equação (1.1), na ação da EDQ. Essa indução é ambígua, uma vez que a proporcionalidade entre os campos de matéria e radiação depende exclusivamente do esquema de regularização adotado (tais esquemas podem ser: regularização dimensional, regularização de Pauli-Villars [11], método de *cut-off* e método do tempo próprio de Schwinger [12]). Assim, calcularemos o termo induzido utilizando o método de regularização dimensional e discutiremos algumas consequências desse resultado sobre as velocidades de propagação de fótons clássicos.

As lagrangianas (e conseqüentemente as grandezas delas derivadas) serão sempre representadas em unidades naturais $\hbar = c = 1$ nesta dissertação. Quando necessário, a métrica utilizada será dada, em quatro dimensões, por $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. As matrizes de Dirac, quando contraídas com um quadrivetor constante, obedecem as relações $\not{\epsilon} = \gamma^\mu \epsilon_\mu = \gamma_\mu \epsilon^\mu$, onde $\not{\epsilon}^2 = \epsilon^2$.

⁵O MPE também admite a adição do termo $-\frac{1}{4}\eta_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}$ à lagrangiana de Maxwell. Apesar de violar a simetria de Lorentz, este termo é CPT-par.

2 Simetrias discretas do campo de Dirac

2.1 O campo escalar como motivação

É bem conhecido que a mecânica quântica não relativística descreve satisfatoriamente os fenômenos que envolvem partículas cujas velocidades são pequenas quando comparadas à velocidade da luz. Este papel é bem realizado pela equação de Schrödinger:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t} = H\phi. \quad (2.1)$$

Historicamente, sabe-se que Schrödinger não encontrou inicialmente esta equação. Seu resultado foi o que hoje conhecemos por *equação de Klein-Gordon* (KG)¹. Schrödinger não a publicou porque não conseguiu aplicá-la aos elétrons no átomo de hidrogênio, pois se trata de uma equação relativística. A equação de KG é obtida através da relação entre massa, momento e energia relativísticos:

$$p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = m^2 \quad \rightarrow \quad E^2 = |\mathbf{p}|^2 + m^2, \quad (2.2)$$

e também através das substituições $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ e $\mathbf{p} \rightarrow -i\mathbf{\nabla}$:

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi \equiv (\square + m^2)\phi = 0. \quad (2.3)$$

onde $\square = \partial^2/\partial t^2 - \nabla^2$ é o operador de D'Alembert.

¹Mais informações históricas podem ser obtidas em *Scientific American, Gênios da Ciência - Quânticos: Os Homens que Mudaram a Física, edição especial (2005)*.

Em linguagem contemporânea, a equação de Schrödinger (2.1) é interpretada como o limite não relativístico da equação de KG.

As soluções da equação de KG são do tipo ondas planas

$$\phi(\mathbf{p}, t) \sim e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

onde, de acordo com (2.2), $E = \pm\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}$.

A equação de KG apresenta dois problemas aparentes: o espectro de energia admite *valores negativos* e a probabilidade não é *positiva definida*, pois a equação de KG é de segunda ordem em $\partial\phi/\partial t$. A mecânica quântica não relativística fornece a probabilidade e a corrente de probabilidade:

$$\rho = \phi^*\phi \quad (2.5)$$

$$\mathbf{J} = -\frac{i}{2m} (\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*), \quad (2.6)$$

que satisfazem a equação da continuidade:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0, \quad (2.7)$$

que ainda pode ser escrita na forma quadrivetorial $\partial_\mu J^\mu = 0$, com o quadrivetor corrente dado por $J^\mu = (\rho, \mathbf{J})$.

No caso relativístico, a equação de KG exige que a corrente de probabilidade seja dada por² (onde ϕ e ϕ^* satisfazem a equação de KG):

$$J^\mu = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}^\mu \phi, \quad \text{ou} \quad J^\mu = \left(i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_0 \phi, -i\phi^* \overleftrightarrow{\nabla} \phi \right). \quad (2.8)$$

A solução para os dois problemas aparentes é reinterpretar ϕ , elevando seu *status* de *função de onda de uma partícula* para um *operador que descreve campos*. Este operador de campo deve ser quantizado, utilizando-se regras específicas. A outra

²Esta notação abreviada significa $A \overleftrightarrow{\partial}^\mu B = A\partial^\mu B - (\partial^\mu A)B$.

solução é admitir que as energias positivas e negativas representam, respectivamente, as *partículas* e *antipartículas*. Esta é uma das principais características da teoria de Dirac para o tratamento relativístico do elétron, como veremos mais adiante. Definiremos agora alguns elementos de quantização canônica do campo bosônico de KG, que serão úteis quando as quantizações do campo fermiônico de Dirac forem realizadas.

O campo escalar de KG pode ser escrito como uma transformada de Fourier da seguinte maneira:

$$\phi(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x} \phi(p). \quad (2.9)$$

Este campo é solução da equação de KG. Então, podemos decompô-lo em modos de Fourier,

$$\phi(p) = f(\mathbf{p})\delta(p_0 - \omega_p) + g(\mathbf{p})\delta(p_0 + \omega_p) \quad , \quad p_0 = \pm\omega_p, \quad (2.10)$$

onde $f(\mathbf{p})$ e $g(\mathbf{p})$ são operadores que serão determinados mais adiante. Assim,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} dp_0 [f(\mathbf{p})\delta(p_0 - \omega_p) + g(\mathbf{p})\delta(p_0 + \omega_p)] e^{-ip_0 x_0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} [f(\mathbf{p})e^{-i\omega_p x_0 + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} + g(-\mathbf{p})e^{i\omega_p x_0 - i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}}] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} [f(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + g(-\mathbf{p})e^{ip \cdot x}] \Big|_{p_0 = \omega_p}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Uma escolha conveniente é

$$\frac{f(\mathbf{p})}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{a(\mathbf{p})}{\sqrt{2\omega_p}} \quad \text{e} \quad \frac{g(-\mathbf{p})}{(2\pi)^4} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{b^\dagger(\mathbf{p})}{\sqrt{2\omega_p}}, \quad (2.12)$$

e o campo (2.9) fica

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} [a(\mathbf{p})e^{-ip \cdot x} + b^\dagger(\mathbf{p})e^{ip \cdot x}]. \quad (2.13)$$

Os operadores $a^\dagger(\mathbf{p})$ e $a(\mathbf{p})$ são operadores que criam e aniquilam partículas, respectivamente. Já os operadores $b^\dagger(\mathbf{p})$ e $b(\mathbf{p})$ são os mesmos operadores para as antipartículas.

Se $a(\mathbf{p}) = b(\mathbf{p})$, o campo é real, e sua lagrangiana³ é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2. \quad (2.14)$$

Definindo o momento $\pi(\mathbf{x}, t)$ canonicamente conjugado ao campo $\phi(\mathbf{x}, t)$ como

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi(\mathbf{x}, t))} = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \quad (2.15)$$

e adotando a regra de comutação em tempos iguais,

$$[\phi(x), \pi(x')] = i\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (2.16)$$

temos que

$$[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p}')] = \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (2.17)$$

Considere o campo escalar real. Sabemos que o operador $a(\mathbf{p})$ aniquila o vácuo, ou seja, $a(\mathbf{p})|0\rangle = 0$. Então, podemos fazer a seguinte substituição

$$\langle 0|a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{p})|0\rangle \rightarrow \langle 0|[a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{p})]|0\rangle. \quad (2.18)$$

Assim, obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \langle 0|[\phi(x), \phi(y)]|0\rangle &= \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p 2\omega_{p'}}} \langle 0|[a_p e^{-ip \cdot x} + a_p^\dagger e^{ip \cdot x}, a_{p'} e^{ip' \cdot y} + a_{p'}^\dagger e^{-ip' \cdot y}]|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=+\omega_p} - \frac{1}{2\omega_p} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0=-\omega_p} \right\} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp^0}{2\pi i} \frac{-1}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2} e^{-ip \cdot (x-y)} \quad \text{para } x^0 > y^0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

³Como tratamos de uma teoria em que os campos são locais, é conveniente definir uma função $\mathcal{L}$, denominada densidade de lagrangiana, onde $L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Portanto, a terminologia *lagrangiana* se refere simplesmente à *densidade de lagrangiana*.

Definimos, então, o *propagador de Feynman* para o campo bosônico

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \quad (2.20)$$

Quando aplicamos a equação de KG a este propagador, obtemos a seguinte identidade:

$$(\square + m^2)\Delta_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y). \quad (2.21)$$

2.2 A equação de Dirac

Motivado pelo desejo de encontrar uma equação de primeira ordem relativisticamente covariante, Dirac escreveu uma equação linear na derivada temporal e no momento. Com $H_0 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta m$ representando o *hamiltoniano livre de Dirac*, a equação (2.1) toma a forma:

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = [-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta m] \psi, \quad (2.22)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ e β são matrizes $n \times n$, que devem ser determinadas, e ψ uma matriz coluna de ordem n . Para descobrir esta relação, aplicamos a derivada temporal em ambos os lados de (2.22) e encontramos:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = [-\alpha^i \alpha^j \nabla^i \nabla^j - im(\beta \alpha^i + \alpha^i \beta) \nabla^i + \beta^2 M^2] \psi. \quad (2.23)$$

Comparando com a equação de KG, vemos claramente que $\boldsymbol{\alpha}$ e β devem satisfazer as condições:

$$\begin{aligned} \alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i &= 2\delta^{ij}, \\ \beta \alpha^i + \alpha^i \beta &= 0, \\ \beta^2 &= 1. \end{aligned} \quad (2.24)$$

As relações (2.24) nos indicam, de fato, que $\boldsymbol{\alpha}$ e β *não são* números ordinários, ou seja, são *matrizes*. No entanto, como sabemos, os operadores que representam

fenômenos físicos devem ser dados por matrizes quadradas⁴. A combinação linear mais simples, a 2×2 , não é possível, pois as matrizes α e β 2×2 não existem. A próxima opção mais simples é a de dimensão 4×4 que, na *representação de Dirac* ou *representação padrão*⁵, fornece:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Esta escolha é feita com base em um teorema devido a Pauli. Isto implica que as matrizes α e β são hermitianas, e as propriedades (2.24) também se aplicam a $\alpha^\dagger$ e $\beta^\dagger$. Portanto, o hamiltoniano de Dirac em (2.22) é hermitiano. Para escrevermos a equação de Dirac em notação moderna, devemos considerar $\alpha = \gamma^0 \gamma$ e $\beta = \gamma^0$, e então temos que:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (2.26)$$

De posse da equação de Dirac acima, calcularemos agora suas autoenergias e suas soluções do tipo ondas-planas na forma $\psi = N u(p) e^{-ip \cdot x}$, cuja constante de normalização será calculada mais adiante. Considere a equação de autovalores $H_0 u^{(s)}(\mathbf{p}) = E u^{(s)}(\mathbf{p})$, com o hamiltoniano de Dirac H_0 e as autoenergias (2.2), além da representação padrão para α e β :

$$\begin{pmatrix} m & \sigma \cdot \mathbf{p} \\ \sigma \cdot \mathbf{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \eta_s \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \chi_s \\ \eta_s \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

onde $s = 1, 2$ rotulam os spins para cima e para baixo, respectivamente, $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ configuram uma base ortonormal, e η_s deve ser determinado por (2.27).

As soluções com energia positiva, para as partículas com $E = +|\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}|$, são dadas por:

$$u^{(s)}(p) = N \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\sigma \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi_s \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

⁴Esta consequência caracteriza uma *transformação linear* em seu caso particular, a *operação linear*.

⁵Veja Apêndice A.

Admitindo a existência de antipartículas na teoria de Dirac, as mesmas devem ter soluções com energias negativas, ou seja, $E = -|\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2}|$. Assim, as antipartículas devem ser pensadas como partículas com energias $E \rightarrow -E$ e momentos $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$. Sendo a equação de autovalores agora dada por $H_0 v^{(s)}(\mathbf{p}) = -E v^{(s)}(\mathbf{p})$, obtemos a solução⁶

$$v^{(s)}(p) = N' \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E + m} \chi_{-s} \\ \chi_{-s} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

A normalização do espinor (2.28), dentre outras possíveis, com $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$, é:

$$\bar{u}^{(r)}(p) u^{(s)}(p) = \delta^{rs}, \quad (2.30)$$

$$\bar{v}^{(r)}(p) v^{(s)}(p) = -\delta^{rs}. \quad (2.31)$$

de onde segue que $N = N' = \sqrt{\frac{E + m}{2m}}$.

É conveniente ainda escrevermos as seguintes relações entre os espinores obtidos na teoria de Dirac:

$$u^{(r)\dagger}(p) u^{(s)}(p) = \frac{E}{m} \delta^{rs},$$

$$v^{(r)\dagger}(p) v^{(s)}(p) = \frac{E}{m} \delta^{rs}, \quad (2.32)$$

$$u^{(r)\dagger}(p) v^{(s)}(p) = v^{(r)\dagger}(p) u^{(s)}(p) = 0.$$

Portanto, a equação de Dirac no espaço dos momentos e seus espinores normalizados para as partículas e antipartículas são, respectivamente, dados por:

⁶O espinor escolhido para os estados de energias negativas é $\chi_{-s} = -i\sigma^2 \chi_s^*$ para haver concordância com a transformação por conjugação de carga que será feita mais adiante.

$$(\not{p} - m)u^{(s)}(p) = 0 \quad \rightarrow \quad u^{(s)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

$$(\not{p} + m)v^{(s)}(p) = 0 \quad \rightarrow \quad v^{(s)}(p) = \sqrt{\frac{E+m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi_{-s} \\ \chi_{-s} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Como vimos nas seções anteriores, as soluções com energias negativas para as equações de onda relativísticas causaram um grande desconforto no início da construção da teoria. No entanto, Dirac *reinterpretou* as soluções de energias negativas para o problema. Dirac propôs um estado de vácuo, denominado *mar de Dirac*, com todos os estados de energias negativas preenchidos. Um elétron no mar de Dirac com energia negativa pode absorver radiação e ser transportado para um estado com energia positiva. O buraco (*hole*) deixado pelo elétron é reinterpretado como uma ausência de carga $+|e|$ e energia $-|E|$. Esta “ausência” é então considerada uma evidência da existência de uma *antipartícula* com carga $+|e|$ e energia $-|E|$. Então, a teoria de Dirac prevê a existência do *pósitron*, antipartícula do elétron, descoberto experimentalmente em 1932 por Carl Anderson.

Representação pictórica do mar de Dirac.

2.3 O propagador do férmion

A equação de Dirac admite uma solução arbitrária, que engloba as energias positivas e negativas, que é dada por:

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \frac{d^3p}{E/m} [c^{(s)}(p)u^{(s)}(p)e^{-ip \cdot x} + d^{(s)\dagger}(p)v^{(s)}(p)e^{ip \cdot x}] , \quad (2.35)$$

e seu operador adjunto

$$\bar{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_s \int \frac{d^3p}{E/m} [c^{(s)\dagger}(p)\bar{u}^{(s)}(p)e^{ip \cdot x} + d^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p)e^{-ip \cdot x}] , \quad (2.36)$$

onde $c^{(s)}$ e $c^{(s)\dagger}$ são operadores de aniquilação e criação de partículas, enquanto que $d^{(s)}$ e $d^{(s)\dagger}$ são os mesmos operadores para as antipartículas. Como os férmions obedecem a estatística de Fermi-Dirac, estes operadores satisfazem a seguinte regra de anticomutação

$$\{c^{(s)}(p), c^{(r)\dagger}(p')\} = \{d^{(s)}(p), d^{(r)\dagger}(p')\} = \frac{E}{m} \delta^{rs} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') . \quad (2.37)$$

Então,

$$\begin{aligned} \langle 0 | \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_s u^{(s)}(p) \bar{u}^{(s)}(p) e^{-ip \cdot (x-y)} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (i \not{\partial}_x + m) \frac{1}{2E} e^{-ip \cdot (x-y)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} \langle 0 | \bar{\psi}(x) \psi(y) | 0 \rangle &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{E} \sum_s v^{(s)}(p) \bar{v}^{(s)}(p) e^{-ip \cdot (y-x)} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i \not{\partial}_x + m) \frac{1}{2E} e^{-ip \cdot (y-x)} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Da mesma forma que foi feito com o campo de KG, obteremos, para o campo de Dirac, a função de Green retardada:

$$S_R(x-y) \equiv \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \} | 0 \rangle , \quad (2.40)$$

que satisfaz

$$S(x-y) = (i \not{\partial}_x + m) \Delta(x-y), \quad (2.41)$$

com $\Delta(x-y)$ sendo o propagador para os bósons. Aplicando o operador $-i \not{\partial}_x + m$ na expressão acima em ambos os lados pela esquerda, segue que

$$\begin{aligned} (-i \not{\partial}_x + m) S(x-y) &= (\partial^\mu \partial_\mu + m^2) \Delta(x-y) \\ &= -i \delta^{(4)}(x-y), \end{aligned} \quad (2.42)$$

onde foi utilizada a expressão (2.21).

Portanto, no espaço dos momentos,

$$i \delta^{(4)}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} i e^{-ip \cdot (x-y)} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{p} - m) e^{-ip \cdot (x-y)} S(p),$$

ou seja,

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m}. \quad (2.43)$$

Utilizando os mesmos argumentos do campo de KG, o propagador de Feynman para o campo fermiônico é definido como se segue:

$$\begin{aligned} S(x-y) &\equiv \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(y) | 0 \rangle \\ &= i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

2.4 Simetrias discretas

A teoria de Dirac apresenta, além das transformações de Lorentz, outras duas importantes simetrias tipo espaço-tempo: a transformação por *paridade* e a *inversão temporal*. A primeira, de caráter espacial, troca o sinal da parte espacial de um quadri vetor qualquer: $x^\mu = (x^0, \mathbf{x}) \rightarrow \tilde{x}_\mu = (x^0, -\mathbf{x})$ e o mesmo vale para o momento $\tilde{p}_\mu = (p_0, -\mathbf{p})$. A segunda, estritamente temporal, inverte o fluxo do tempo no cone

de luz: $-\tilde{x}_\mu = (-p^0, \mathbf{x})$ e $-p_\mu = (-x^0, \mathbf{p})$. No entanto, apesar dessas trocas, a norma no espaço-tempo de Minkowski se conserva.

Como foi visto nas seções anteriores, a teoria quântica tem como uma de suas principais virtudes a capacidade de explicar a existência de partículas e antipartículas na Natureza. Este fato acarreta em outra simetria discreta da teoria: a conversão da partícula em sua antipartícula e vice-versa. Esta simetria é denominada transformação por *conjugação de carga*. Acredita-se que a Natureza procura preservar estas três simetrias combinadas, denominada *simetria* CPT. No entanto, existem alguns processos que podem violar esta simetria. Antes de discutí-los, observaremos a atuação destas três simetrias sobre os campos e partículas de Dirac através dos covariantes bilineares.

2.4.1 Paridade

Considerando os operadores de campo de Dirac (2.35) e (2.36), procuramos por um operador unitário que troca o sinal da parte espacial dos momentos nos operadores de criação e aniquilação de partículas e antipartículas, sem *alterar seus estados de spin*:

$$\mathcal{P}c^{(s)}(p)\mathcal{P}^{-1} = \alpha_p c^{(s)}(\tilde{p}) \quad , \quad \mathcal{P}d^{(s)}(p)\mathcal{P}^{-1} = \beta_p d^{(s)}(\tilde{p}) \quad , \quad (2.45)$$

$$\mathcal{P}c^{(s)\dagger}(p)\mathcal{P}^{-1} = \alpha_p^* c^{(s)\dagger}(\tilde{p}) \quad , \quad \mathcal{P}d^{(s)\dagger}(p)\mathcal{P}^{-1} = \beta_p^* d^{(s)\dagger}(\tilde{p}) \quad ,$$

onde α_p e β_p são as fases dessa transformação. Sendo o produto escalar conservado, ou seja, $p \cdot x = \tilde{p} \cdot \tilde{x}$, com $u^{(s)}(p) = \gamma^0 u^{(s)}(\tilde{p})$ e $v^{(s)}(p) = -\gamma^0 v^{(s)}(\tilde{p})$, a transformação que procuramos é:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{E/m} \sum_s [\alpha_p c^{(s)}(\tilde{p}) u^{(s)}(p) e^{-i\tilde{p}\cdot\tilde{x}} + \beta_p^* d^{(s)\dagger}(\tilde{p}) v^{(s)}(p) e^{i\tilde{p}\cdot\tilde{x}}] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\tilde{p}}{E/m} [\alpha_p c^{(s)}(\tilde{p}) \gamma^0 u^{(s)}(\tilde{p}) e^{-i\tilde{p}\cdot\tilde{x}} - \beta_p^* d^{(s)\dagger}(\tilde{p}) \gamma^0 v^{(s)}(\tilde{p}) e^{i\tilde{p}\cdot\tilde{x}}] ,
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Adotando-se $\alpha_p = -\beta_p^*$, temos que

$$\mathcal{P}\psi(x)\mathcal{P}^{-1} \equiv \psi^p(x) = \alpha_p \gamma^0 \psi(\tilde{x}) , \tag{2.47}$$

e, analogamente para o campo adjunto,

$$\mathcal{P}\bar{\psi}(x)\mathcal{P}^{-1} \equiv \bar{\psi}^p(x) = \alpha_p^* \bar{\psi}(\tilde{x}) \gamma^0 . \tag{2.48}$$

2.4.2 Inversão temporal

A inversão do fluxo do tempo inverte o spin das partículas e antipartículas. Assim, a ação do operador de inversão temporal $\mathcal{T}$, anti-unitário, sobre os operadores de criação e aniquilação de partículas e antipartículas fornece

$$\mathcal{T} c^{(s)}(p) \mathcal{T}^{-1} = \alpha_t c^{(-s)}(\tilde{p}) \quad , \quad \mathcal{T} d^{(s)}(p) \mathcal{T}^{-1} = \beta_t d^{(-s)}(\tilde{p}) , \tag{2.49}$$

$$\mathcal{T} c^{(s)\dagger}(p) \mathcal{T}^{-1} = \alpha_t^* c^{(-s)\dagger}(\tilde{p}) \quad , \quad \mathcal{T} d^{(s)\dagger}(p) \mathcal{T}^{-1} = \beta_t^* d^{(-s)\dagger}(\tilde{p}) .$$

Os espinores χ_s , com $s = 1, 2$ foram definidos na seção 2.2.1.: $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{E/m} \sum_{-s} [\alpha_t c^{(-s)}(\tilde{p}) u^{(s)}(p) e^{-ip \cdot x} + \beta_t^* d^{(-s)\dagger}(\tilde{p}) v^{(s)}(p) e^{ip \cdot x}] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{E/m} \sum_{-s} [\alpha_t c^{(-s)}(\tilde{p}) u^{(s)*}(p) e^{i\tilde{p} \cdot x} + \beta_t^* d^{(-s)\dagger}(\tilde{p}) v^{(s)*}(p) e^{-i\tilde{p} \cdot x}] .
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Como o operador inversão temporal gira o spin, é necessária a operação que executa este papel:

$$\chi_{-s} = -i\sigma^2 \chi_s^* \quad \Rightarrow \quad \chi_s^* = i\sigma^2 \chi_{-s} . \tag{2.51}$$

De acordo com a identidade $\sigma^2 \boldsymbol{\sigma}^* = -\boldsymbol{\sigma} \sigma^2$, são convenientes as relações:

$$u^{(s)*}(p) = \gamma^1 \gamma^3 u^{(-s)}(\tilde{p}) , \tag{2.52}$$

$$v^{(s)*}(p) = \gamma^1 \gamma^3 v^{(-s)}(\tilde{p}) .$$

Assim, voltando à equação (2.50), utilizando (2.52), segue que

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3p}{E/m} \alpha_t \gamma^1 \gamma^3 \sum_{-s} [c^{(-s)}(\tilde{p}) u^{(-s)}(\tilde{p}) e^{-ip \cdot \tilde{x}} + d^{(-s)\dagger}(\tilde{p}) v^{(-s)}(\tilde{p}) e^{ip \cdot \tilde{x}}] , \tag{2.53}$$

onde escolhemos $\alpha_t = \beta_t^*$. Portanto,

$$\mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} \equiv \psi^t(x) = \alpha_t \gamma^1 \gamma^3 \psi(-\tilde{x}) , \tag{2.54}$$

enquanto que, analogamente,

$$\mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1} \equiv \bar{\psi}^t(x) = -\alpha_t^* \bar{\psi}(-\tilde{x}) \gamma^1 \gamma^3 . \tag{2.55}$$

2.4.3 Conjugação de carga

A operação por conjugação de carga age sobre os operadores de aniquilação e criação de partículas e antipartículas, sem mudar seus estados de spin, da seguinte maneira:

$$\mathcal{C} c^{(s)}(p) \mathcal{C}^{-1} = \alpha_c d^{(s)}(p) \quad , \quad \mathcal{C} d^{(s)}(p) \mathcal{C}^{-1} = \beta_c c^{(s)}(p) , \quad (2.56)$$

$$\mathcal{C} c^{(s)\dagger}(p) \mathcal{C}^{-1} = \alpha_c^* d^{(s)\dagger}(p) \quad , \quad \mathcal{C} d^{(s)\dagger}(p) \mathcal{C}^{-1} = \beta_c^* c^{(s)\dagger}(p) .$$

Então, o campo de Dirac transformado é:

$$\mathcal{C} \psi(x) \mathcal{C}^{-1} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 p}{E/m} \alpha_c \sum_s \left[d^{(s)}(p) u^{(s)}(p) e^{-ip \cdot x} + c^{(s)\dagger}(p) v^{(s)}(p) e^{ip \cdot x} \right] . \quad (2.57)$$

Como o operador por conjugação de carga não muda o estado de spin das partículas e antipartículas, é definido um operador $C = i\gamma^2\gamma^0$, que deve agir sobre um espinor que contém χ_{-s}^* . Assim, de acordo com (2.51), temos que

$$\mathcal{C} \bar{u}^{(s)T}(p) \mathcal{C}^{-1} = v^{(s)}(p) , \quad (2.58)$$

$$\mathcal{C} \bar{v}^{(s)T}(p) \mathcal{C}^{-1} = u^{(s)}(p)$$

onde

$$\mathcal{C} \psi(x) \mathcal{C}^{-1} \equiv \psi^c(x) = \alpha_c C \bar{\psi}^T(x) , \quad (2.59)$$

e

$$\mathcal{C} \bar{\psi}(x) \mathcal{C}^{-1} \equiv \bar{\psi}^c(x) = \alpha_c^* \psi^T(x) C . \quad (2.60)$$

2.5 Covariantes bilineares

Nesta seção, construiremos e classificaremos os covariantes bilineares, que são objetos que não carregam índices espinoriais e envolvem apenas dois campos espinoriais.

Essas combinações têm propriedades de transformações bem definidas no grupo de Lorentz. As matrizes γ de Dirac formam uma base de 16 matrizes 4×4 linearmente independentes. A base é formada pelos seguintes elementos:

1	escalar	1
γ^μ	vetor	4
$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$	tensor	6
$\gamma^\mu\gamma^5$	pseudo-vetor	4
γ^5	pseudo-escalar	1
TOTAL:		16

A teoria de Dirac é construída com base em densidades de lagrangianas. Assim, é possível construir e classificar os seguintes covariantes bilineares, na forma $\bar{\psi}\Gamma\psi$, com Γ representando as 16 matrizes acima, de acordo com sua natureza:

$$\begin{aligned}
E(x) &= \bar{\psi}(x)\psi(x) && (\text{escalar}) \\
V^\mu(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) && (\text{vetor}) \\
P(x) &= i\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) && (\text{pseudoescalar}) \\
A^\mu(x) &= \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma^\mu\psi(x) && (\text{vetor axial}) \\
T^{\mu\nu}(x) &= \bar{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x) && (\text{tensor})
\end{aligned}$$

Na próxima subseção há uma tabela que mostra como estes covariantes bilineares se comportam frente as transformações por paridade, inversão temporal e conjugação de carga, bem como as transformações combinadas por simetrias CPT.

2.6 A transformação CPT

De acordo com (2.47), (2.54) e (2.59), o campo de Dirac se comporta da seguinte maneira frente as transformações T, PT e CPT:

$$T : \psi^t(x) = \mathcal{T}\psi(x)\mathcal{T}^{-1} = \alpha_t \gamma^1 \gamma^3 \psi(-\tilde{x}) \quad (2.61)$$

$$PT : \psi^{pt}(x) = \mathcal{P}\psi^t(x)\mathcal{P}^{-1} = \alpha_{pt} \gamma^0 \gamma^1 \gamma^3 \psi(-x) \quad (2.62)$$

$$CPT : \psi^{cpt}(x) = \mathcal{C}\psi^{pt}(x)\mathcal{C}^{-1} = \alpha_{cpt} \gamma^5 \gamma^0 \bar{\psi}^T(-x) \quad (2.63)$$

e, de forma análoga para o campo de Dirac adjunto,

$$T : \bar{\psi}^t(x) = \mathcal{T}\bar{\psi}(x)\mathcal{T}^{-1} = -\alpha_t^* \bar{\psi}(-\tilde{x}) \gamma^1 \gamma^3 \quad (2.64)$$

$$PT : \bar{\psi}^{pt}(x) = \mathcal{P}\bar{\psi}^t(x)\mathcal{P}^{-1} = \alpha_{pt}^* \bar{\psi}(-x) \gamma^3 \gamma^1 \gamma^0 \quad (2.65)$$

$$CPT : \bar{\psi}^{cpt}(x) = \mathcal{C}\bar{\psi}^{pt}(x)\mathcal{C}^{-1} = \alpha_{cpt}^* \bar{\psi}^T(-x) \gamma^5 \gamma^0 \quad (2.66)$$

A tabela a seguir sumariza os resultados das transformações C, P, T e CPT sofridas pelos covariantes bilineares.

	C	P	T	CPT
$E(x)$	$E(x)$	$E(\tilde{x})$	$E(-\tilde{x})$	$E(-x)$
$V^\mu(x)$	$-V^\mu(x)$	$V_\mu(\tilde{x})$	$V_\mu(-\tilde{x})$	$-V^\mu(-x)$
$P(x)$	$P(x)$	$-P(\tilde{x})$	$-P(-\tilde{x})$	$P(-x)$
$A^\mu(x)$	$A^\mu(x)$	$-A_\mu(\tilde{x})$	$A_\mu(-\tilde{x})$	$-A^\mu(-x)$
$T^{\mu\nu}(x)$	$-T^{\mu\nu}(x)$	$T_{\mu\nu}(\tilde{x})$	$-T_{\mu\nu}(-\tilde{x})$	$T^{\mu\nu}(-x)$

O *Teorema CPT* diz que, em uma teoria de campos relativística, deve existir a invariância de transformação por paridade (inversão espacial) e inversão temporal (*time reversal*) seguida por uma transformação por conjugação de carga. O teorema CPT assume a veracidade das leis quânticas e invariância de Lorentz. Especificamente, o teorema CPT afirma que fenômenos descritos por qualquer teoria quântica de campo, local e invariante de Lorentz com um hamiltoniano hermitiano, devem ter esta simetria preservada⁷. Como pode ser facilmente verificado nesta tabela, os covariantes bilineares de Dirac que não preservam a simetria CPT são o vetor e o vetor axial. No entanto, vemos que $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ não preserva a transformação por conjugação de carga e $\bar{\psi}\gamma_5\gamma^\mu\psi$ não é invariante frente transformações por paridade. No próximo capítulo, apresentaremos um modelo de quebra de simetria de Lorentz para férmions. No Capítulo 4, investigaremos possíveis efeitos provocados pela quebra da simetria de Lorentz em sistemas utilizando mecânica quântica relativística.

⁷Este teorema é cuidadosamente demonstrado em [13] por Streater e Wightman.

3 Apresentação do modelo de violação de Lorentz para férmions

3.1 Introdução

No Capítulo 2 estudamos as transformações de simetrias sofridas pelos covariantes bilineares do campo fermiônico de Dirac. Tais transformações são a paridade, a inversão temporal e a conjugação de carga (veja tabela na seção 2.2.4). Vimos que os bilineares de Dirac que sofrem violações das simetrias CPT, no setor fermiônico ou da matéria, são o *vetor* e o *pseudovetor* ou *vetor axial*.

O objetivo deste capítulo é apresentar um modelo efetivo para a quebra de simetria CPT. O ponto de partida, no contexto da mecânica quântica relativística em quatro dimensões, é acoplar campos de fundo¹ aos covariantes bilineares. Se a lagrangiana da EDQ convencional é dada por

$$\mathcal{L}_{EDQ} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - e\not{A} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

devemos adicionar a ela as seguintes lagrangianas

$$\mathcal{L}_{Fermion} = -\bar{\psi}\not{a}\psi - \bar{\psi}\not{b}\gamma_5\psi - \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi + ic_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu D^\nu\psi + id_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5 D^\nu\psi,$$

$$\mathcal{L}_{Foton} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_{\mu}A_{\nu}\partial_{\rho}A_{\sigma} + \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}, \quad (3.2)$$

¹Entende-se por campo de fundo um campo cujas fontes não são acessíveis.

onde $iD_\mu = i\partial_\mu + eA_\mu$ é a derivada covariante.

A estrutura da equação de Dirac é modificada pela introdução desses termos na lagrangiana. As correções surgem nas matrizes de Dirac e na massa do férmion:

$$(i\Gamma^\mu D_\mu - M)\psi = 0, \quad (3.3)$$

onde $\Gamma_\nu = \gamma_\nu + c_{\mu\nu}\gamma^\mu + d_{\mu\nu}\gamma^\mu\gamma_5$ e $M = m + \not{a} + \not{b}\gamma_5 + \frac{1}{2}H_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$. $c_{\mu\nu}$, $d_{\mu\nu}$, a_μ , b_μ e $H_{\mu\nu}$ são campos de fundo especificados num referencial escolhido.

Cada um dos termos adicionais na lagrangiana contém um parâmetro constante cuja ordem de grandeza é muito pequena². São eles que controlam as medidas de violações de simetrias CPT e Lorentz nos experimentos. Todos os cinco monômios envolvidos, presentes na lagrangiana adicional (3.2), violam a simetria de Lorentz. Como os monômios que contêm a_μ e b_μ violam a simetria CPT, somente eles estão presentes nesta dissertação. Já os termos $H_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu}$ e $d_{\mu\nu}$, que preservam CPT, não são aqui estudados.

3.2 A equação de Dirac e o propagador do férmion modificados

A lagrangiana de férmions de massa m com os termos de quebra de simetria CPT é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(\not{p} - \not{a} - \not{b}\gamma_5 - m)\psi, \quad (3.4)$$

onde $a^\mu = (a_0, \mathbf{a})$ e $b^\mu = (b_0, \mathbf{b})$ são quadrivetores constantes.

Procuramos por soluções do tipo ondas-planas, em que $\psi^{(\alpha)} = N_u^{(\alpha)} u^{(\alpha)}(p)e^{-ip \cdot x}$ ($\alpha = 1, 2$), é um espinor de Dirac modificado com quatro componentes, onde $N_u^{(\alpha)}$ é uma constante de normalização a ser determinada.

²A ordem de grandeza dessas constantes é muito pequena quando comparadas à massa dos férmions, uma vez que violações da simetria de Lorentz, se existirem, são efeitos muito pequenos, e ainda não observados experimentalmente.

Da equação (3.4), obtemos a equação de Dirac modificada

$$(\not{p} - \not{a} - \not{b}\gamma_5 - m)\psi = 0. \quad (3.5)$$

Aplicando o *ansatz* para ψ e multiplicando a equação acima pela esquerda por $(\not{p} - \not{a} - \not{b}\gamma_5 + m)$, obtemos a seguinte relação:

$$\{(p - a)^2 - b^2 - m^2 - [\not{p} - \not{a}, \not{b}]\gamma_5\} u(p) = 0. \quad (3.6)$$

A expressão acima ainda não é diagonal, uma vez que na mesma aparecem termos com matrizes não diagonais. Para obter a equação algébrica para este modelo, é necessário multiplicar a equação acima por $(p - a)^2 - b^2 - m^2 + [\not{p} - \not{a}, \not{b}]\gamma_5$ pela esquerda:

$$\{[(p - a)^2 - b^2 - m^2]^2 - ([\not{p} - \not{a}, \not{b}]\gamma_5)^2\} u(p) = 0. \quad (3.7)$$

Vamos trabalhar o comutador acima com $\not{k} = \not{p} - \not{a}$ momentaneamente:

$$\begin{aligned} ([\not{p} - \not{a}, \not{b}]\gamma_5)^2 &= (\not{k} \not{b} - \not{b} \not{k})\gamma_5(\not{k} \not{b} - \not{b} \not{k})\gamma_5 \\ &= \not{k} \not{b} \not{k} \not{b} - \not{k} \not{b} \not{b} \not{k} - \not{b} \not{k} \not{k} \not{b} + \not{b} \not{k} \not{b} \not{k} \\ &= \not{k} \not{b} [-\not{b} \not{k} + 2(k \cdot b)] - 2k^2 b^2 + \not{b} \not{k} [-\not{k} \not{b} + 2(k \cdot b)] \\ &= -4k^2 b^2 + 2(k \cdot b) \not{k} \not{b} + 2(k \cdot b) \not{b} \not{k} \\ &= -4k^2 b^2 + 2(k \cdot b) [-\not{b} \not{k} + 2(k \cdot b)] + 2(k \cdot b) \not{b} \not{k} \\ &= -4k^2 b^2 + 4(k \cdot b)^2, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde foi utilizada a identidade $\not{c} \not{d} = -\not{d} \not{c} + 2(c \cdot d)$.

Portanto, a relação de dispersão para o modelo é

$$[(p - a)^2 - b^2 - m^2]^2 - 4[b \cdot (p - a)]^2 + 4b^2(p - a)^2 = 0. \quad (3.9)$$

Esta relação de dispersão é quártica na variável $p^0(\mathbf{p})$. Ela possui duas raízes positivas $E_u^{(\alpha)}$ e duas negativas $E_v^{(\alpha)}$, onde $\alpha = 1, 2$.

A equação (3.9) é facilmente resolvida para os casos em que b^μ é estritamente temporal ou espacial. Para o caso $b^\mu = (b_0, \mathbf{0})$, a relação de dispersão fornece

$$E_u^{(\alpha)} = \sqrt{(|\mathbf{p} - \mathbf{a}| + (-1)^\alpha b_0)^2 + m^2} + a_0, \quad (3.10)$$

$$E_v^{(\alpha)} = \sqrt{(|\mathbf{p} + \mathbf{a}| - (-1)^\alpha b_0)^2 + m^2} - a_0,$$

em que $E_{u,v}^{(\alpha)}$ indicam as energias para as partículas e suas antipartículas, respectivamente. Note que o termo a_μ provoca uma redefinição dos zeros da energia e do momento para as partículas, pois $E \rightarrow E - a_0$ e $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - \mathbf{a}$, ou seja, há uma operação por conjugação de carga: $a_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \rightarrow -a_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$.

Para o caso $b^\mu = (0, \mathbf{b})$, as soluções são

$$E_u^{(\alpha)} = \sqrt{(\mathbf{p} - \mathbf{a})^2 + m^2 + \mathbf{b}^2 + (-1)^\alpha 2\sqrt{[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a})]^2 + m^2}} + a_0, \quad (3.11)$$

$$E_v^{(\alpha)} = \sqrt{(\mathbf{p} + \mathbf{a})^2 + m^2 + \mathbf{b}^2 - (-1)^\alpha 2\sqrt{[\mathbf{b} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{a})]^2 + m^2}} - a_0.$$

Quando multiplicamos a equação (3.5) pela esquerda por γ^0 , esta equação de movimento pode ser escrita na forma hamiltoniana, onde $i \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$. Assim, temos que³

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}) + m\gamma^0 + a_0 + \gamma_5 b_0 + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{b}. \quad (3.12)$$

Vamos construir os espinores para o caso b^μ puramente temporal. O hamiltoniano é então dado por:

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}) + m\gamma^0 + a_0 + b_0 \gamma_5. \quad (3.13)$$

Na representação padrão das matrizes γ de Dirac, como é usual, obtemos os seguintes espinores

$$u^{(\alpha)}(p) = N_u^{(\alpha)} \begin{pmatrix} \chi^{(\alpha)} \\ \xi_u^{(\alpha)} \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

³ $\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{\alpha} \gamma^5 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}.$

para os estados de energia positiva e, para os estados de energia negativa,

$$v^{(\alpha)}(p) = N_v^{(\alpha)} \begin{pmatrix} \xi_v^{(\alpha)} \eta^{(\alpha)} \\ \eta^{(\alpha)} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

onde

$$\xi_u^{(\alpha)} = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a}) - b_0}{E_u^{(\alpha)} - a_0 + m}. \quad (3.16)$$

A solução para $\xi_v^{(\alpha)}$ é obtida pela troca, na expressão acima, $a_\mu \rightarrow -a_\mu$ e $b_\mu \rightarrow -b_\mu$, além da troca $E_u^{(\alpha)} \rightarrow E_v^{(\alpha)}$.

O espinor (3.15) pode ser normalizado, como foi feito no Capítulo 2, se escolhermos a mesma condição de normalização do caso da teoria convencional:

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\alpha')}(p) = \delta^{\alpha\alpha'}. \quad (3.17)$$

Utilizando a definição $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ e a autoenergia positiva (3.10) para a partícula, encontramos a constante $N_u^{(\alpha)}$ de normalização:

$$N_u^{(\alpha)} = \sqrt{\frac{E_u^{(\alpha)} - a_0 + m}{2M}}. \quad (3.18)$$

Se o espinor de duas componentes $\chi^{(\alpha)}$ for escolhido ser autovetor do operador $\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a})}{|\mathbf{p} - \mathbf{a}|}$ com autovalor $-(-1)^\alpha$, o espinor de Dirac modificado e normalizado fica

$$u^{(\alpha)}(p) = \sqrt{\frac{E_u^{(\alpha)} - a_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \chi^{(\alpha)} \\ \frac{-(-1)^{(\alpha)}|\mathbf{p} - \mathbf{a}| - b_0}{E_u^{(\alpha)} - a_0 + m} \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Procedendo de modo análogo, obtemos o espinor para os antiférmions:

$$v^{(\alpha)}(p) = \sqrt{\frac{E_v^{(\alpha)} + a_0 + m}{2m}} \begin{pmatrix} \frac{-(-1)^{(\alpha)}|\mathbf{p} + \mathbf{a}| + b_0}{E_v^{(\alpha)} + a_0 + m} \chi^{(\alpha)} \\ \chi^{(\alpha)} \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Ainda podemos obter outro elemento de grande importância na teoria da EDQ estendida: o *propagador fermiônico modificado*. O propagador de Feynman escolhido

deve satisfazer

$$(i \not{\partial} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 - m) S_{a,b}(x-y) = i \delta^{(4)}(x-y), \quad (3.21)$$

ou, escrita no espaço de Fourier,

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 - m) e^{-ip \cdot (x-y)} S_{a,b}(p) = i \delta^{(4)}(x-y) \quad (3.22)$$

fornece, através da representação de Fourier da Delta de Dirac,

$$S_{a,b}(p) = \frac{i}{\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 - m}. \quad (3.23)$$

Este propagador é escrito em sua forma invertida:

$$\begin{aligned} S_{a,b}(p) &= \frac{i}{\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 - m} = \frac{i(\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 + m)}{(\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 - m)(\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 + m)} \\ &= \frac{i(\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 + m)}{\{(p-a)^2 - b^2 - m^2 - [\not{p} - \not{a}, \not{b}] \gamma_5\}}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde foi utilizada (3.6). Utilizando também (3.9), segue que

$$S_{a,b}(p) = \frac{i(\not{p} - \not{a} - \not{b} \gamma_5 + m) \{(p-a)^2 - b^2 - m^2 + [\not{p} - \not{a}, \not{b}] \gamma_5\}}{[(p-a)^2 - b^2 - m^2]^2 - 4[(p-a) \cdot b]^2 + 4(p-a)^2 b^2}. \quad (3.25)$$

Portanto, vemos que a quebra da simetria de Lorentz modifica as relações de dispersão, as autoenergias e os espinores da teoria de Dirac convencional, além de gerar uma perturbação no hamiltoniano de Dirac livre. No caso do propagador, vemos que a modificação deixa o propagador com uma forma mais complicada que o usual (2.44).

4 Implicações em Mecânica Quântica

4.1 O problema de Landau e a quebra de simetria de Lorentz

Neste capítulo, investigaremos possíveis efeitos que a quebra da simetria de Lorentz pode causar em sistemas quânticos de elétrons interagindo com um campo eletromagnético. Iniciaremos nosso estudo com um sistema composto por elétrons interagindo com um campo magnético intenso e constante. Tal fenômeno é conhecido como *problema de Landau*.

Se consideramos os elétrons relativísticos, o hamiltoniano não perturbado deste problema é dado por

$$H_0 = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + m\gamma^0. \quad (4.1)$$

O problema terá como perturbação o hamiltoniano de interação

$$H_{int} = a_0 - \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a} + b_0\gamma_5 + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{b}. \quad (4.2)$$

As autoenergias e os autoestados exatos do problema de Landau são calculados no Apêndice B a partir do hamiltoniano não perturbado (4.1) e servirão como base para os cálculos perturbativos.

Os cálculos das correções das energias do elétron em ordem mais baixa de aproximação, com as autofunções (B.10-12), são dadas por

$$\begin{aligned}
\Delta E_{n,s}^- &= \langle \psi_{n,s}^- | H_{int}^- | \psi_{n,s}^- \rangle = \int \psi_{n,s}^{-\dagger}(x) (H_{int}^-) \psi_{n,s}^-(x) dx \\
&= \mathcal{A}_0(x) + \mathcal{A}_z(x) + \mathcal{B}_0(x) + \mathcal{B}_z(x),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0(x) &= \int \psi_{n,s}^{-\dagger}(x) (a_0) \psi_{n,s}^-(x) dx = a_0 \int \psi_{n,s}^{-\dagger}(x) \psi_{n,s}^-(x) dx \\
&= a_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_z(x) &= \langle \psi_{n,s}^- | (-\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{a}) | \psi_{n,s}^- \rangle \\
&= \int \psi_{n,s}^{-\dagger}(x) (-a_z \alpha_z) \psi_{n,s}^-(x) dx \\
&= -\frac{a_z}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{E_{n,s}^- + m}{2E_{n,s}^-} \left(1, \frac{\sigma_z p_z}{E_{n,s}^- + m} \right) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma_z p_z}{E_{n,s}^- + m} \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} [H_n(\xi)]^2 \\
&= -a_z \frac{E_{n,s}^- + m}{2E_{n,s}^-} \left(\frac{p_z}{E_{n,s}^- + m} + \frac{p_z}{E_{n,s}^- + m} \right) \\
&= -a_z \frac{p_z}{E_{n,s}^-},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(x) &= \int \psi_{n,s}^{-\dagger}(x) (b_0 \gamma_5) \psi_{n,s}^-(x) dx \\
&= \frac{b_0}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{E_{n,s}^- + m}{2E_{n,s}^-} \begin{pmatrix} 1, & \frac{\sigma_z p_z}{E_{n,s}^- + m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma_z p_z}{E_{n,s}^- + m} \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} [H_n(\xi)]^2 \\
&= -b_0 \frac{E_{n,s}^- + m}{2E_{n,s}^-} \left(\frac{sp_z}{E_{n,s}^- + m} + \frac{sp_z}{E_{n,s}^- + m} \right) \\
&= -s \frac{p_z}{E_{n,s}^-} b_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_z(x) &= \int \psi_{n,s}^{-\dagger}(x) (b_z \Sigma_z) \psi_{n,s}^-(x) dx \\
&= \frac{b_z}{2^n n! \sqrt{\pi}} \frac{E_{n,s}^- + m}{2E_{n,s}^-} \begin{pmatrix} 1, & \frac{\sigma_z p_z}{E_{n,s}^- + m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sigma_z p_z}{E_{n,s}^- + m} \end{pmatrix} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} [H_n(\xi)]^2 \\
&= b_z \frac{E_{n,s}^- + m}{2E_{n,s}^-} \left[s + \frac{sp_z^2}{(E_{n,s}^- + m)^2} \right] \\
&= sb_z \left[1 - \frac{|e|B_0(2n+1-s)}{2E_{n,s}^-(E_{n,s}^- + m)} \right].
\end{aligned}$$

Assim, somando todas as contribuições, obtemos [14]

$$\Delta E_{n,s}^- = a_0 - a_z \frac{p_z}{E_{n,s}^-} - sb_0 \frac{p_z}{E_{n,s}^-} + sb_z \left[1 - \frac{|e|B_0(2n+1-s)}{2E_{n,s}^-(E_{n,s}^- + m)} \right]. \quad (4.3)$$

Uma análise deste resultado nos fornece a ideia de que os campos a_μ e b_μ são grandezas observáveis. No entanto, este resultado deve ser analisado com mais detalhes no que se refere justamente à ordem de grandeza de seus componentes. Seguindo argumentos de Kostelecký e colaboradores [14], os termos proporcionais ao campo

magnético B_0 devem ser negligenciados pois, para $B_0 \simeq 5 T$, a razão $|eB_0|/m^2 \simeq 10^{-9}$ é muito pequena. No confinamento axial neste experimento, o momento axial é o momento de Landau p_z , que corresponde a um momento efetivo no eixo z . Como a frequência axial é bem menor que a frequência ciclotron, o termo $p_z/E_{n,s}^-$ deve ser desconsiderado. Neste contexto, a correção para as energias de Landau em termos dominantes é simplesmente

$$\Delta E_{n,s}^- \approx a_0 + s b_z. \quad (4.4)$$

Uma proposta para tentar detectar a quebra da simetria de Lorentz consiste na comparação das mudanças (*shifts*) de níveis de energia¹, *com* e *sem* inversão de spin, de elétrons e pósitrons típicos de Landau. Tais frequências são obtidas em experimentos conhecidos por *armadilhas de Penning*². Tais armadilhas são dispositivos que armazenam partículas carregadas utilizando um campo magnético constante e um campo elétrico estático espacialmente não homogêneo.

Considerando $\hbar = 1$ e as autoenergias (B.6), as frequências de transições energéticas para o elétron sem e com inversão de spin, não perturbadas, são dadas por

$$\omega^- = E_{1,-1}^- - E_{0,-1}^- \quad , \quad \bar{\omega}^- = E_{0,+1}^- - E_{1,-1}^- . \quad (4.5)$$

O teorema *CPT* afirma que ambas as frequências do elétron acima devem ser iguais às mesmas do pósitron. No entanto, as frequências *corrigidas* $\omega(\bar{\omega})^{\mp(CPT)}$, de acordo com a teoria de violação de Lorentz, para os elétrons e pósitrons, são dadas por

$$\omega^{-(CPT)} \approx \omega^{+(CPT)} \approx \omega \quad , \quad \bar{\omega}^{\mp(CPT)} \approx \bar{\omega} \pm 2b_z. \quad (4.6)$$

Note que, no resultado obtido acima, as frequências corrigidas *não dependem* de a_μ . Isso ocorre porque, como já foi discutido, este campo apenas redefine os zeros da

¹De acordo com a referência [15], tais transições energéticas, com e sem inversão de spin, são denominadas frequências de *anomalia* e *ciclotron*.

²Esta armadilha foi imaginada por F.M. Penning e rendeu a Hans Georg Dehmelt o Prêmio Nobel de Física em 1989 por sua utilização prática.

energia e momentos. O termo dominante na teoria de violação CPT é dependente do campo b_μ e é proveniente da diferença entre as frequências sem e com mudança de spin:

$$\Delta\omega \equiv \omega^{-(CPT)} - \omega^{+(CPT)} \approx 0 \quad , \quad \Delta\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}^{-(CPT)} - \bar{\omega}^{+(CPT)} \approx +4b_z. \quad (4.7)$$

Portanto, o experimento de armadilhas de Penning discutido aqui é sensível apenas à parte espacial do vetor $\mathbf{b}$ na direção do campo magnético.

4.2 Expansão não relativística do hamiltoniano modificado

Considere o hamiltoniano (3.12) de uma partícula sujeita a um campo eletromagnético (agora com o campo coulombiano) e os termos de quebra das simetrias CPT:

$$H = m\gamma^0 + \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a} - e\mathbf{A}) + eA_0 + a_0 + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{b} + \gamma_5 b_0. \quad (4.8)$$

Faremos a expansão utilizando o método Foldy-Wouthuysen³ (FW) [16]. Este método propõe reescrever o hamiltoniano acima separado em duas partes. Como as matrizes γ^5 e $\boldsymbol{\Sigma}$ são, respectivamente, *não diagonal* e *diagonal* na representação padrão adotada, temos o hamiltoniano acima escrito em termos de operadores pares e ímpares:

$$H = m\gamma^0 + \mathcal{P} + \mathcal{I}, \quad (4.9)$$

onde

$$\mathcal{P} = eA_0 + a_0 + \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{b} \quad (\text{operador par}), \quad (4.10)$$

$$\mathcal{I} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a} - e\mathbf{A}) + \gamma_5 b_0 \quad (\text{operador ímpar}). \quad (4.11)$$

³Vide Apêndice C.

Considere o *ansatz* (vide Apêndice C):

$$S = -\frac{i}{2m}\gamma^0\mathcal{I}. \quad (4.12)$$

Vamos expandir o hamiltoniano na representação FW escrevendo-o em séries de potências de $1/m$. Faremos a expansão através da fórmula de *Baker-Campbell-Hausdorff*:

$$e^{iS}He^{-iS} = H + i[S, H] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, H]] + \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H]]] + \dots \quad (4.13)$$

De outra forma,

$$H' = H + i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \frac{i}{6}[S, [S, [S, H]]] + \frac{1}{24}[S, [S, [S, [S, H]]]] \dots \quad (4.14)$$

Utilizando as relações de (anti)comutações

$$\{\gamma^0, \mathcal{I}\} = 0 \quad \text{e} \quad [\gamma^0, \mathcal{P}] = 0, \quad (4.15)$$

podemos calcular algumas relações de comutações envolvendo S e H :

$$i[S, H] = -\mathcal{I} + \frac{\gamma^0\mathcal{I}^2}{m} + \frac{\gamma^0}{2m}[\mathcal{I}, \mathcal{P}], \quad (4.16)$$

$$\frac{i^2}{2}[S, [S, H]] = -\frac{1}{2m}\gamma^0\mathcal{I}^2 - \frac{1}{2m^2}\mathcal{I}^3 - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{I}, [\mathcal{I}, \mathcal{P}]], \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, H]]] &= \frac{1}{6m^2}\mathcal{I}^3 - \frac{1}{6m^3}\gamma^0\mathcal{I}^4, \\ &- \frac{1}{48m^3}\gamma^0[\mathcal{I}, [\mathcal{I}, [\mathcal{I}, \mathcal{P}]]] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\frac{i^4}{4!}[S, [S, [S, [S, H]]]] \simeq \frac{1}{24m^3}\gamma^0\mathcal{I}^4. \quad (4.19)$$

O último termo foi obtido por indução. Adicionando todos os termos de (4.16-19), obtemos:

$$\begin{aligned} H &= \gamma^0 \left(M + \frac{1}{2m}\mathcal{I}^2 - \frac{1}{8m^2}\mathcal{I}^4 \right) + \mathcal{P} - \frac{1}{8m^2}[\mathcal{I}, [\mathcal{I}, \mathcal{P}]] \\ &+ \frac{1}{2m}\gamma^0[\mathcal{I}, \mathcal{P}] - \frac{1}{3m^2}\mathcal{I}^3 - \frac{1}{48m^3}\gamma^0[\mathcal{I}, [\mathcal{I}, [\mathcal{I}, \mathcal{P}]]], \end{aligned}$$

O hamiltoniano é então reescrito retendo-se termos proporcionais até $1/n^3$:

$$H''' = \gamma^0 \left(m + \frac{1}{2m} \mathcal{I}^2 - \frac{1}{8m^3} \mathcal{I}^4 \right) + \mathcal{P} - \frac{1}{8m^2} [\mathcal{I}, [\mathcal{I}, \mathcal{P}]]. \quad (4.20)$$

Voltemos ao operador ímpar representado em (4.11). Utilizando a fórmula

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A})(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad (4.21)$$

vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^2 &= [\boldsymbol{\alpha} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a} - e\mathbf{A}) + \gamma^5 b_0]^2 \\ &= (\mathbf{p} - \mathbf{a} - e\mathbf{A})^2 - ie\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathbf{p}) + \{\boldsymbol{\alpha}, \gamma_5\} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{a} - e\mathbf{A})b_0 + b_0^2. \end{aligned}$$

O anticomutador acima é dado por

$$\{\boldsymbol{\alpha}, \gamma_5\} = -2\boldsymbol{\Sigma}.$$

Então, com $\mathbf{p} = -i\nabla$ e $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \mathbf{a} - e\mathbf{A}$, temos que

$$\frac{1}{2m} \mathcal{I}^2 = \frac{1}{2m} [\mathbf{P} - \boldsymbol{\Sigma} b_0]^2 - \frac{e}{2m} \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B}. \quad (4.22)$$

Agora, calculemos o comutador

$$[\mathcal{I}, \mathcal{P}] = ie \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{E} - 2(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Sigma})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}). \quad (4.23)$$

Da mesma forma, obtemos o outro comutador:

$$[\mathcal{I}, [\mathcal{I}, \mathcal{P}]] = e \nabla \cdot \mathbf{E} + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + 2\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) - 4(\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{8m^2} [\mathcal{I}[\mathcal{I}, \mathcal{P}]] &= \frac{1}{8m^2} [e \nabla \cdot \mathbf{E} + i\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) + 2\boldsymbol{\Sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p})] \\ &\quad - \frac{1}{2m^2} (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{P})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Então, com todas as contribuições juntas, temos que:

$$\begin{aligned}
 H''' &= \gamma^0 \left[m + \frac{1}{2m} (\mathbf{P} - \Sigma b_0)^2 - \frac{1}{8m^3} \mathbf{P}^4 \right] \\
 &+ eA_0 + a_0 + \Sigma \cdot \mathbf{b} - \frac{e}{2m} \Sigma \cdot \mathbf{B} \\
 &- \frac{e}{4m^2} \Sigma \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{p}) + \frac{i}{8m^2} \Sigma \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \frac{e}{8m^2} \nabla \cdot \mathbf{E} \\
 &- \frac{1}{2m^2} (\Sigma \cdot \mathbf{P})(\mathbf{P} \cdot \mathbf{b}). \tag{4.25}
 \end{aligned}$$

Assim, a expressão acima corresponde ao limite não relativístico do hamiltoniano (4.8) expresso na representação FW. Este resultado é idêntico ao obtido em [17], porém foi obtido por nós através de um método diferente (FW). O termo mais interessante é o de interação spin-órbita que envolve o campo de fundo b_μ .

4.3 O efeito Zeeman anômalo modificado

O efeito Zeeman corresponde à mudança das linhas espectrais de um certo elemento devido a ação de um campo magnético externo. Para o caso de átomos cujo spin eletrônico total é nulo, as linhas de emissão se decompõem em multipletos (dubletos, tripletos, etc.), cujas características dependem essencialmente do elemento e do campo externo. Tal fenômeno é denominado *efeito Zeeman normal*, descoberto pelo físico holandês Pieter Zeeman em 1896. Para o caso em que o spin eletrônico total não é nulo, tem-se o *efeito Zeeman anômalo*: as linhas de emissão não se decompõem em dubletos ou tripletos, mas em multipletos de estrutura mais complicada. Isso ocorre porque o spin se acopla ao campo magnético externo.

Nesta seção, o efeito Zeeman anômalo será estudado na presença da quebra de simetria de Lorentz, que possivelmente fornecerá modificações no espectro de emissão do

hidrogênio. Investigaremos isso aplicando teoria de perturbações geradas, separadamente, pelos campos de fundo a_μ e b_μ .

4.3.1 O acoplamento vetorial como perturbação

O hamiltoniano com o acoplamento vetorial no limite não relativístico do modelo de quebra de simetria de Lorentz é reescrito através de (4.25) somente com os termos a^μ :

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A} - \mathbf{a})^2 - \frac{e}{2M}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA_0 + a_0. \quad (4.26)$$

Este hamiltoniano é escrito em termos do hamiltoniano de Pauli (não perturbado) como se segue:

$$H = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA_0 \right] + \left[-\frac{1}{m}(\mathbf{p} - e\mathbf{A}) \cdot \mathbf{a} + a_0 + \frac{1}{2m}\mathbf{a}^2 \right]. \quad (4.27)$$

O primeiro termo do hamiltoniano acima é o bem conhecido hamiltoniano de Pauli. O segundo termo é proveniente do acoplamento vetorial através do campo a^μ , e é o hamiltoniano de interação. Assim,

$$H_{int(a)} = \frac{i}{m}\mathbf{a} \cdot \nabla + \frac{e}{m}\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} + a_0 + \frac{\mathbf{a}^2}{2m}, \quad (4.28)$$

onde foi utilizada a relação $\mathbf{p} \cdot \mathbf{a} = -i\nabla \cdot \mathbf{a} - i\mathbf{a} \cdot \nabla = -i\mathbf{a} \cdot \nabla$. Note que, neste caso, a quebra de conjugação de carga não é mais manifesta, pois existe uma única expressão que representa o hamiltoniano para as partículas e antipartículas.

Os últimos dois termos em (4.28) são apenas duas constantes que não representam mudanças físicas nos níveis de energia, pois não se manifestam nas transições energéticas. Para aplicar a teoria de perturbações, escrevemos a função de onda ψ do átomo de hidrogênio em coordenadas esféricas para uma única partícula:

$$\psi_{n\ell m}(r, \theta, \phi) = R_{n\ell}(r)\Theta_{\ell m}(\theta)\Phi_m(\phi).$$

Utilizando o operador gradiente escrito em coordenadas esféricas

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi},$$

segue que:

$$\Delta E_{(a),1} = \frac{i}{M} \langle n\ell m | \mathbf{a} \cdot \nabla | n\ell m \rangle \quad (4.29)$$

$$= \frac{i}{M} \int \left\{ R_{n\ell}^*(r) \frac{\partial R_{n\ell}(r)}{\partial r} |\Theta_{\ell m}(\theta)|^2 |\Phi_m(\phi)|^2 \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \right. \quad (4.30)$$

$$+ \frac{|R_{n\ell}(r)|^2}{r} \Theta_{\ell m}^*(\theta) \frac{\partial \Theta_{\ell m}(\theta)}{\partial \theta} |\Phi_m(\phi)|^2 \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (4.31)$$

$$\left. + im \frac{|R_{n\ell}(r)|^2 |\Theta_{\ell m}(\theta)|^2}{r \sin \theta} |\Phi_m(\phi)|^2 \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi \right\} d^3 r.$$

Para facilitar os cálculos, escolhemos o campo $\mathbf{a}$ ao longo do eixo z , onde $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = a_z \cos \theta$, $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = -a_z \sin \theta$ e $\mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi = 0$. O primeiro termo é então escrito explicitamente:

$$\Delta E_{(a),1} = \frac{ia_z}{m} \int \left[R_{n\ell}^*(r) \frac{\partial R_{n\ell}(r)}{\partial r} r^2 dr \right] |\Theta_{\ell m}(\theta)|^2 \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (4.32)$$

Esta correção é nula, pois

$$\int_0^\pi |\Theta_{\ell m}(\theta)|^2 \sin \theta \cos \theta d\theta = 0,$$

para todas as funções associadas de Legendre.

Agora, o segundo termo é

$$\Delta E_{(a),2} = -\frac{ia_z}{m} \int \frac{|R_{n\ell}(r)|^2}{r} \Theta_{\ell m}^*(\theta) \frac{\partial \Theta_{\ell m}(\theta)}{\partial \theta} \sin^2 \theta d\theta r^2 dr.$$

Observando a integração angular, verifica-se que

$$\int_0^\pi \Theta_{\ell m}^*(\theta) \frac{\partial \Theta_{\ell m}(\theta)}{\partial \theta} \sin^2 \theta d\theta = \int_{-1}^{+1} \Theta_{\ell m}(x) \frac{\partial \Theta_{\ell m}(x)}{\partial x} (x^2 - 1) dx = 0,$$

resultado proveniente da fórmula de recorrência

$$(x^2 - 1) \frac{d}{dx} \Theta_{\ell m}(x) = \ell x \Theta_{\ell m}(x) - (\ell + m) \Theta_{\ell-1, m}(x)$$

e da relação de ortogonalidade dos polinômios de Legendre:

$$\int_{-1}^{+1} \Theta_{km}(x) \Theta_{\ell m}(x) dx = 0, \quad \text{para todo } k \neq \ell.$$

Portanto,

$$\Delta E_{(a),1} = 0, \quad (4.33)$$

Agora, analisaremos o termo que depende do potencial vetor:

$$\Delta E_{(a),2} = \frac{e}{m} \int \Psi^*(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) \Psi d^3 r.$$

Para um campo magnético intenso representado por $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$, o potencial vetor associado é $\mathbf{A} = -B_0 \left(\frac{y}{2}, -\frac{x}{2}, 0 \right)$. Isto implica que:

$$\Delta E_{(a),2} = -\frac{eB_0}{2m} \int \Psi^*(ya_x - xa_y) \Psi d^3 r. \quad (4.34)$$

Após cálculos explícitos, obtem-se que

$$\Delta E_{(a),2} = 0. \quad (4.35)$$

Portanto, concluímos que a presença do campo de fundo a_μ não afeta o espectro de energia do hidrogênio, pois o hamiltoniano (4.28) não produz nenhuma correção aos deslocamento nos níveis de energia do efeito Zeeman anômalo.

4.3.2 O acoplamento axial como perturbação

Neste caso, o hamiltoniano é dado por

$$H = \left[\frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 - \frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} + eA_0 \right] + \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} - \frac{b_0}{m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}) + \frac{b_0^2}{2m} \right]$$

$$H \equiv H_{Pauli} + H_{int(b)}. \quad (4.36)$$

O terceiro termo de $H_{int(b)}$ será negligenciado porque é uma constante e não causa efeito algum. Assim,

$$H_{int(b)} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} - \frac{b_0}{m} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A}). \quad (4.37)$$

Para obtermos as possíveis mudanças no espectro de energia do hidrogênio, é necessário utilizarmos teoria de perturbações independente do tempo até primeira ordem, cujo hamiltoniano de interação será dado por (4.37). Assim,

$$\Delta E_{(b),1} = \langle n\ell j m_j m_s | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} | n\ell j m_j m_s \rangle, \quad (4.38)$$

onde n, j, m_j são os números quânticos associados ao hidrogênio no caso em que ocorre a soma entre os momentos angulares $\mathbf{L}$ e $\mathbf{S}$ (veja o Apêndice D). Considerando-se a situação em que $j = \ell + 1/2$ e $m_j = m + 1/2$, com suas autofunções sendo representadas por (C.20) e (C.21), esta contribuição de energia pode ser calculada explicitamente:

$$\begin{aligned} \Delta E_{(b),1} &= \langle n\ell j m_j m_s | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b} | n\ell j m_j m_s \rangle = \langle j m_j | b_z \sigma_z | j m_j \rangle \\ &= \int \left(\sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^{m*} \quad \sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1*} \right) \begin{pmatrix} b_z & 0 \\ 0 & -b_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^m \\ \sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1} \end{pmatrix} d\Omega \\ &= b_z \int \left(\sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^{m*} \quad \sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1*} \right) \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^m \\ -\sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1} \end{pmatrix} d\Omega \\ &= \frac{\ell+m+1}{2\ell+1} b_z \int |Y_\ell^m|^2 d\Omega - \frac{\ell-m}{2\ell+1} b_z \int |Y_\ell^{m+1}|^2 d\Omega = \frac{2m+1}{2\ell+1} b_z \\ &= \frac{2m_j b_z}{2\ell+1}, \end{aligned} \quad (4.39)$$

onde os Y_ℓ^m são os harmônicos esféricos normalizados. Para o caso em que $j = \ell - 1/2$, obtemos $-\frac{2m_j b_z}{2\ell+1}$. Então, a contribuição total para o termo $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}$, que representa o

acoplamento axial sem campo eletromagnético, é

$$\Delta E_{\sigma \cdot b} = \pm 2 \frac{m_j b_z}{2\ell + 1}. \quad (4.40)$$

Este resultado coincide com a referência [17], mas é o dobro do resultado obtido em [18].

A energia é corrigida em primeira ordem de aproximação pelo fator $\pm m_j$. De fato, cada linha do espectro é separada em $2j + 1$ linhas, cuja separação linear é dada por $\frac{b_z}{2\ell + 1}$. Como a mudança de energia depende do módulo de $\mathbf{b}$, este resultado teórico para a correção de energia pode ser utilizado para se obter um limite superior para o parâmetro b^μ através de experimentos específicos.

A contribuição em primeira ordem do segundo termo do hamiltoniano (4.37) é escrito a seguir:

$$\Delta E_{(b),2} = -\frac{b_0}{m} \langle n\ell j m_j m_s | \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla | n\ell j m_j m_s \rangle. \quad (4.41)$$

Aqui, a função de onda $\psi_{n\ell m}$ passa a depender de uma função χ_{m_s} que depende do spin do elétron. Neste caso, a função de onda total será $\Psi_{n\ell j m_j} = \psi_{n\ell m} \chi_{m_s}$. No entanto, devemos considerar que o operador nabla deve atuar em $R_{n\ell}(r)$, $\theta_{\ell m}(\theta)$ e $\Phi_m(\phi)$, enquanto que $\boldsymbol{\sigma}$ deve atuar na função de spin. Assim,

$$\begin{aligned} \Delta E_{(b),2} = & -\frac{b_0}{m} \int \left\{ R_{n\ell}(r)^* \frac{\partial R_{n\ell}(r)}{\partial r} |\Theta_{\ell m}(\theta)|^2 |\Phi_m(\phi)|^2 \langle j m_j | \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r | j m_j \rangle \right. \\ & + \frac{|R_{n\ell}(r)|^2}{r} |\Phi_m(\phi)|^2 \Theta_{\ell m}(\theta)^* \frac{\partial \Theta_{\ell m}(\theta)}{\partial \theta} \langle j m_j | \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta | j m_j \rangle \\ & \left. + \frac{|R_{n\ell}(r)|^2 |\Theta_{\ell m}(\theta)|^2}{r \sin \theta} |\Phi_m(\phi)|^2 \langle j m_j | \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi | j m_j \rangle \right\} d^3 r. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Os produtos escalares em coordenadas cartesianas que aparecem nos valores esper-

ados entre os *kets* e os *bras* são dados por:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r &= \sin \theta \cos \phi \sigma_x + \sin \theta \sin \phi \sigma_y + \cos \theta \sigma_z, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta &= \cos \theta \cos \phi \sigma_x + \cos \theta \sin \phi \sigma_y - \sin \theta \sigma_z, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi &= -\sin \theta \sigma_x + \cos \phi \sigma_y.\end{aligned}$$

Como vemos em (4.42), somente os termos proporcionais a σ_z vão contribuir com valores esperados não nulos. Assim,

$$\begin{aligned}\Delta E_{(b),2} &= \pm \frac{ib_0 m_j}{(2\ell+1)m} \int \left[R_{n\ell}(r)^* \frac{\partial R_{n\ell}(r)}{\partial r} |\Theta_{\ell m}(\theta)|^2 \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - \frac{|R_{n\ell}(r)|^2}{r} \Theta_{\ell m}(\theta)^* \frac{\partial \Theta_{\ell m}(\theta)}{\partial \theta} \sin \theta \right] d^3 r \\ &= \pm \frac{ib_0 m_j}{(2\ell+1)m} \int \left[R(r)^* \frac{\partial R(r)}{\partial r} r^2 dr \right] \int |\Theta(\theta)|^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &\quad \pm \frac{ib_0 m_j}{(2\ell+1)m} \int \left[-\frac{|R_{n\ell}(r)|^2}{r} r^2 dr \right] \int \Theta_{\ell m}(\theta)^* \frac{\partial \Theta_{\ell m}(\theta)}{\partial \theta} \sin^2 \theta d\theta.\end{aligned}$$

As expressões obtidas acima são exatamente as mesmas obtidas para o cálculo da correção de energia para o caso do acoplamento vetorial. Assim,

$$\Delta E_{(b),2} = 0. \quad (4.43)$$

Observando novamente o hamiltoniano de interação (4.37), o termo $eb_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A}/m$ não deve oferecer nenhuma correção ao efeito Zeeman para o caso em que o hidrogênio é livre, uma vez que $\mathbf{A} = 0$. Considerando o caso em que o elétron é sujeito a um forte campo magnético, este termo não pode ser negligenciado. Para um campo magnético intenso representado por $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{e}}_z$, o potencial vetor associado é $\mathbf{A} = -B_0 \left(\frac{y}{2}, -\frac{x}{2}, 0 \right)$. Isto implica que a correção de energia, em primeira ordem de teoria de perturbações, é dado por:

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\sigma \cdot A} &= \frac{eb_0}{m} \langle n\ell jm_j m_s | \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{A} | n\ell jm_j m_s \rangle \\
&= -\frac{eb_0 B_0}{2m} \langle n\ell jm_j m_s | y\sigma_x - x\sigma_y | n\ell jm_j m_s \rangle \\
&= -\frac{eb_0 B_0}{2m} \langle jm_j | \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -ix \\ ix & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} | jm_j \rangle \\
&= 0. \quad (4.44)
\end{aligned}$$

Portanto, o único efeito perturbativo foi obtido em (4.40), cujo resultado é proporcional a $|\mathbf{b}|$, que foi gerado pelo termo de interação spin-órbita $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}$. Podemos concluir também que um campo magnético externo, mesmo intenso, não produz nenhum efeito de mudança de energia no espectro do hidrogênio.

5 Férmions em um campo de calibre em (2+1) Dimensões

5.1 Introdução

Como é bem conhecido, a teoria de calibre de Maxwell usual é descrita a partir de um campo de calibre fundamental A_μ , através da lagrangiana

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - A_\mu J^\mu, \quad (5.1)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ é o tensor antisimétrico do campo eletromagnético e J^μ é a corrente de matéria. Esta lagrangiana é invariante frente a transformações de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$; e, conseqüentemente, as equações de Euler-Lagrange de movimento

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad (5.2)$$

também são invariantes frente a mesma transformação. A corrente de matéria se conserva, pois $\partial_\nu J^\nu = 0$ devido a antisimetria de $F^{\mu\nu}$.

Na teoria eletromagnética de Maxwell convencional, o tensor $F_{\mu\nu}$ é uma matriz quadrada antisimétrica de ordem 4×4 . O número de campos nesta teoria é dado por $\frac{1}{2}D(D-1)$ que, em quatro dimensões, corresponde a três campos elétricos e três campos magnéticos. No entanto, esta teoria pode ser definida em *qualquer* dimensão, se os índices do campo de calibre A_μ variam de $\mu = 0, 1, 2, \dots, D-1$, onde D é a dimensão escolhida.

Em particular, em sistemas planares (duas dimensões espaciais e uma temporal), o campo magnético é dado por $B = \varepsilon^{ij} \partial_i A_j$, ou seja, este campo é um *escalar*. Isso acontece porque nesta teoria o potencial vetor é bidimensional, e o rotacional de um vetor em duas dimensões resulta em um escalar. Já o campo elétrico é um vetor espacial de duas componentes. Portanto, o número de campos em (2+1) dimensões é três, de acordo com a relação acima.

Uma teoria que apresenta características distintas em relação à teoria de Maxwell simplesmente reduzida dimensionalmente é a *teoria de Chern-Simons* (CS), cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - A_\mu J^\mu, \quad (5.3)$$

onde θ é o parâmetro de CS, cujo significado físico será discutido mais adiante. O símbolo $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ é o conhecido símbolo de Levi-Civita (ou tensor completamente anti-simétrico) em $(2+1)D$, cujas propriedades $\varepsilon^{012} = \varepsilon_{012} = 1$ são comumente estabelecidas. Com a transformação de calibre $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \Lambda$, a lagrangiana (5.3) varia apenas por uma divergência:

$$\mathcal{L}_{CS} \rightarrow \mathcal{L}_{CS} + \partial_\rho \left(\frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho \Lambda \right), \quad (5.4)$$

mas a ação $S = \int d^3x \mathcal{L}_{CS}$ permanece invariante, pois os termos de superfície são desprezados.

As equações clássicas de Euler-Lagrange fornecem a seguinte equação de movimento

$$J^\mu = \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}, \quad (5.5)$$

que também goza da liberdade de calibre representada acima. Também é possível observar que a corrente se conserva devido a identidade de Bianchi: $\varepsilon^{\mu\nu\rho} \partial_\mu F_{\nu\rho} = 0$.

A teoria de CS pura apresenta características interessantes. As equações de Euler-Lagrange para esta teoria, em termos das densidades de carga e corrente, são dadas

por

$$\begin{aligned}\rho &= \theta B, \\ J^i &= \theta \varepsilon^{ij} E_j.\end{aligned}\tag{5.6}$$

A primeira indica que a densidade de carga é *localmente* proporcional ao campo magnético, cuja constante de proporcionalidade é o parâmetro de CS. Assim, o efeito produzido por este termo na teoria de CS pura é anexar fluxo magnético à carga elétrica (tais partículas são denominadas *ânions*). Já a segunda relação diz que o campo elétrico é proporcional à corrente, cuja constante de proporcionalidade também é θ . Estes efeitos estão em contraste com a teoria eletromagnética de Maxwell usual.

5.2 O propagador de Maxwell-Chern-Simons

A lagrangiana desta teoria é descrita pelo acoplamento dos campos de Maxwell e CS¹:

$$\mathcal{L}_{MCS} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\theta}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\mu\partial_\nu A_\rho - \frac{1}{2}\lambda\partial_\mu A^\mu\partial^\nu A_\nu,\tag{5.7}$$

onde o último termo representa um termo de fixação de calibre para que o propagador possa ser determinado univocamente.

Assim, a ação desta teoria, em (2+1) dimensões, agora é escrita na forma

$$\begin{aligned}S &= \int d^3x \frac{1}{2} [\partial_\mu A^\mu \partial^\nu A_\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \theta \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho - \lambda \partial_\mu A^\mu \partial^\nu A_\nu] \\ &= \int d^3x \frac{1}{2} [A^\mu g_{\mu\nu} \square A^\nu - A^\mu \partial_\nu \partial_\mu A^\nu + \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\rho A^\nu - \lambda A^\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu] \\ &= \int d^3x \frac{1}{2} A^\mu [\square g_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu + \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho + \lambda \partial_\mu \partial_\nu] A^\nu,\end{aligned}\tag{5.8}$$

¹A leitura desta seção não é necessária para a compreensão do trabalho. Trata-se apenas de uma ilustração do modelo.

onde os termos divergentes são negligenciados de acordo com o teorema de Gauss.

Sendo o termo entre colchetes o núcleo da ação e o propagador de Feynman uma função de Green, o mesmo pode ser calculado através da identidade:

$$(-\square g_{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu - \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} \partial^\rho - \lambda \partial_\mu \partial_\nu) \Delta_F^{\nu\sigma}(x-y) = i\delta_\mu^\sigma \delta^3(x-y). \quad (5.9)$$

Se aplicamos a transformada de Fourier sobre o propagador

$$\Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_F^{\mu\nu}(k) e^{ik \cdot (x-y)},$$

observamos que

$$\partial_\mu \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Delta_F^{\mu\nu}(k) (ik_\mu) e^{ik \cdot (x-y)},$$

e obtemos a expressão

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu - i\theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} k^\rho - \lambda k_\mu k_\nu) \Delta_F^{\nu\sigma}(k) = i\delta_\mu^\sigma. \quad (5.10)$$

Considerando, para o cálculo de (5.10), o *ansatz* geral

$$\Delta_F^{\nu\sigma}(k) = \mathcal{A} g^{\nu\sigma} + \mathcal{B} k^\nu k^\sigma + \mathcal{C} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\tau, \quad (5.11)$$

segue que

$$\begin{aligned} & - \mathcal{A} k^2 \delta_\mu^\sigma - \mathcal{B} k^2 k_\mu k^\sigma - \mathcal{C} k^2 g_{\mu\nu} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\tau + \mathcal{A} k_\mu k^\sigma + \mathcal{B} k^2 k_\mu k^\sigma + \mathcal{C} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\mu k_\nu k_\tau - i\mathcal{A} \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} g^{\nu\sigma} k^\rho \\ & - i\mathcal{B} \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} k^\rho k^\nu k^\sigma - i\mathcal{C} \theta \varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k^\rho k_\tau - \mathcal{A} \lambda k_\mu k^\sigma - \mathcal{B} \lambda k^2 k_\mu k^\sigma - \mathcal{C} \lambda \varepsilon^{\nu\sigma\tau} k_\mu k_\nu k_\tau = i\delta_\mu^\sigma. \end{aligned}$$

Observe o segundo termo da segunda linha na expressão acima. Utilizando a identidade

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho} \varepsilon^{\nu\sigma\tau} = -\delta_\mu^\sigma \delta_\rho^\tau + \delta_\rho^\sigma \delta_\mu^\tau, \quad (5.12)$$

este termo fica

$$\begin{aligned} -i\mathcal{C}\theta\varepsilon_{\mu\nu\rho}\varepsilon^{\nu\sigma\tau}k^\rho k_\tau &= -i\mathcal{C}\theta(-\delta_\mu^\sigma\delta_\rho^\tau + \delta_\rho^\sigma\delta_\mu^\tau)k^\rho k_\tau \\ &= i\mathcal{C}\theta(k^2\delta_\mu^\sigma - k_\mu k^\sigma). \end{aligned}$$

Assim, podemos identificar um sistema de três equações com três incógnitas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ de acordo com a forma do tensor:

$$[-\mathcal{A}k^2 + i\mathcal{C}\theta k^2]\delta_\mu^\sigma = i\delta_\mu^\sigma$$

$$[\mathcal{A}(1 - \lambda) - \mathcal{B}\lambda k^2 - i\mathcal{C}\theta]k_\mu k^\sigma = 0$$

$$(-i\mathcal{A}\theta - \mathcal{C}k^2)g_{\mu\nu}\varepsilon^{\nu\sigma\tau}k_\tau = 0,$$

que, resolvido, fornece

$$\mathcal{A} = -\frac{i}{k^2 - \theta^2}$$

$$\mathcal{B} = \frac{i}{k^2(k^2 - \theta^2)} - \frac{1}{\lambda} \frac{i}{k^4}$$

$$\mathcal{C} = -\frac{\theta}{k^4 - k^2\theta^2}.$$

Portanto, de acordo com (5.11) e os resultados acima, o propagador do fóton para a teoria de MCS em (2+1) dimensões é escrito da seguinte maneira:

$$\Delta_F^{\mu\nu}(k) = -\frac{ig^{\mu\nu}}{k^2 - \theta^2} + \frac{ik^\mu k^\nu}{k^2(k^2 - \theta^2)} - \frac{\theta\varepsilon^{\mu\nu\rho}k_\rho}{k^2(k^2 - \theta^2)} - \frac{1}{\lambda} \frac{ik^\mu k^\nu}{k^4}. \quad (5.13)$$

Nessa expressão para o propagador, de modo semelhante ao que ocorre em campos massivos, é evidente a existência de um polo em $\theta = \sqrt{k^2}$, que representa uma massa. Note também que, para o caso de $\lambda \rightarrow \infty$, temos o calibre de Landau, que fornece a condição de transversalidade similar a do propagador do fóton usual.

5.3 Indução de Chern-Simons em (2+1) D

A EDQ possibilita o estudo de sistemas que envolvem interações entre férmions e um campo de calibre externo. No entanto, é interessante observar que, mesmo partindo de uma teoria de interação de férmions de massa m com um campo vetorial A_μ sem a presença de um termo de CS na dinâmica deste campo, um termo deste tipo é induzido por correções radiativas. Calcularemos este termo induzido, utilizando o formalismo de integrais de trajetórias para o campo de Dirac e expandindo o resultado até termos de segunda ordem. Assim, a lagrangiana que indica tal acoplamento é dada por:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - e \cancel{A} - m)\psi. \quad (5.14)$$

A ação efetiva para este modelo dependente do campo A_μ , na aproximação de um laço [19], é definida como se segue

$$e^{iS_{ef}(A)} = N \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int d^3x \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - e \cancel{A} - m)\psi \right], \quad (5.15)$$

onde N é uma constante de normalização.

Integrando sobre os campos de férmions², obtemos

$$e^{iS_{ef}(A)} = N \det(i\cancel{\partial} - e \cancel{A} - m), \quad (5.16)$$

ou seja³,

$$\begin{aligned} S_{ef}(A) &= -i \ln \det[i\cancel{\partial} - e \cancel{A} - m] \\ &= -i \text{Tr} \ln[i\cancel{\partial} - e \cancel{A} - m], \end{aligned} \quad (5.17)$$

onde o termo constante foi negligenciado.

²Quando calculamos a integral gaussiana em variáveis ordinárias, o determinante surge no denominador. No entanto, em gaussianas de variáveis anticomutantes (variáveis de Grassmann), o determinante aparece no numerador. Esta demonstração está no Apêndice E.

³O Apêndice F contém a demonstração desta identidade.

A expressão acima é expandida⁴ para se obter

$$\begin{aligned}
 S_{ef}[A, m] &= -iTr \ln \left[(i\partial - m) \left(\frac{i\partial - e\mathcal{A} - m}{i\partial - m} \right) \right] \\
 &= -iTr \ln(i\partial - m) - iTr \ln \left[1 - \frac{1}{i\partial - m} e\mathcal{A} \right] \\
 &= -iTr \ln(i\partial - m) + iTr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{i\partial - m} e\mathcal{A} \right]^n. \quad (5.18)
 \end{aligned}$$

O termo da expansão acima que dará origem ao termo tipo CS é o de segunda ordem, que fornece a contribuição bilinear em A_μ . Então, temos:

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} Tr \left[\frac{1}{i\partial - m} \mathcal{A} \frac{1}{i\partial - m} \mathcal{A} \right]. \quad (5.19)$$

Para o cálculo do traço da ação acima, considere $\mathcal{O}$ um operador que depende das matrizes de Dirac e dos índices internos do grupo de Lie. Então, seu traço total Tr é definido por:

$$Tr \mathcal{O} \doteq tr \, tr_D \int d^3x \langle x | \mathcal{O} | x' \rangle \Big|_{x=x'}, \quad (5.20)$$

onde o símbolo tr_D indica que o traço será calculado sobre as matrizes γ de Dirac.

Inserindo as relações de completeza ou fechamento nos espaços das posições e momentos

$$\int d^3x |x\rangle \langle x| = 1 \quad , \quad \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} |p\rangle \langle p| = 1, \quad (5.21)$$

onde $\langle x | p \rangle = \langle p | x \rangle^* = e^{ipx}$, vem que

⁴ $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$

$$\begin{aligned}
S_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} tr tr_D \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \langle x | \frac{1}{i\not{\partial} - m} | p \rangle \langle p | \not{A} | y \rangle \langle y | \frac{1}{i\not{\partial} - m} | q \rangle \langle q | \not{A} | x \rangle \\
&= \frac{ie^2}{2} tr tr_D \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\not{p} - m} \not{A}(y) \frac{1}{\not{q} - m} \not{A}(x) e^{ipx - ipy + iqy - iqx} \\
&= \frac{ie^2}{2} tr tr_D \int d^3x \int d^3y \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} + m) \not{A}(y) (\not{q} + m) \not{A}(x)}{(p^2 - m^2)(q^2 - m^2)} e^{i(p-q)(x-y)} \\
&= -\frac{ie^2}{2} tr tr_D \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{(\not{p} + m) \not{A}(-k) (\not{p} + \not{k} + m) \not{A}(k)}{[(p+k)^2 - m^2](p^2 - m^2)},
\end{aligned}$$

onde foi feita a mudança de variável $p - q \rightarrow -k$.

Vamos escrever explicitamente os termos que aparecem no numerador da integral acima:

$$\begin{aligned}
(\not{p} + m) \not{A} (\not{p} + \not{k} + m) \not{A} &= (\not{p} \not{A}) (\not{p} \not{A} + \not{k} \not{A} + m \not{A}) \\
&= \not{p} \not{A} \not{p} \not{A} + \not{p} \not{A} \not{k} \not{A} + m \not{p} \not{A} \not{A} + m \not{A} \not{p} \not{A} + m \not{A} \not{k} \not{A} + m^2 \not{A} \not{A}
\end{aligned}$$

O único termo que contribuirá com nossos cálculos é $m \not{A} \not{A}$, uma vez que $m \not{A} \not{A}$ anulará a integral em p . Assim,

$$S_{CS} = -\frac{ie^2}{2} m tr_D tr \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{\not{A} \not{k} \not{A}}{[(p+k)^2 - m^2](p^2 - m^2)}.$$

Utilizando a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{[az + b(1-z)]^2}, \quad (5.22)$$

onde $a = (k+p)^2 - m^2$ e $b = p^2 - m^2$, podemos escrever

$$az + b(1-z) = p^2 + 2(k \cdot p)z + k^2 z - m^2 = (p + kz)^2 + k^2 z(1-z) - m^2. \quad (5.23)$$

Com a mudança de variável $p \rightarrow p - kz$, e considerando $\mu^2 = m^2 - k^2 z(1-z)$ e a utilização da integral no momento p (vide Apêndice G), temos que

$$\begin{aligned}
S_{CS} &= -\frac{ie^2}{2} m \text{tr}_D \text{tr} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \not{A}(-k) \not{k} \not{A}(k) \int_0^1 dz \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - \mu^2)^2} \\
&= -\frac{ie^2}{2} m \text{tr}_D \text{tr} \int d^3 x \int d^3 y \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \not{A}(y) (-i \not{\partial}_x) \not{A}(x) e^{-ik(x-y)} \int_0^1 dz \frac{i}{8\pi|\mu|} \\
&= \frac{ie^2}{16\pi} m \text{tr} \text{tr}_D \int d^3 x \int d^3 y \not{A}(y) \not{\partial}_x \not{A}(x) g(x-y), \tag{5.24}
\end{aligned}$$

onde⁵

$$g(x-y) = 2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{|k|} \arcsin \left(\frac{|k|}{\sqrt{4m^2 - k^2}} \right) e^{-ik(x-y)}.$$

Para extrairmos o termo local de CS induzido na ação acima,, expandimos o integrando de $g(x-y)$ em torno de $k \rightarrow 0$. Assim,

$$g(x-y) = \frac{1}{|m|} \delta^{(3)}(x-y). \tag{5.25}$$

Substituindo este resultado em (5.24), obtemos

$$\begin{aligned}
S_{CS} &= \frac{ie^2}{16\pi} \frac{m}{|m|} \text{tr} \text{tr}_D \int d^3 x \int d^3 y \not{A}(y) \not{\partial}_x \not{A}(x) \delta(x-y) \\
&= \frac{ie^2}{16\pi} \frac{m}{|m|} \text{tr} \text{tr}_D \int d^3 x \text{tr}_D [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho] A_\mu \partial_\nu A_\rho.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o traço às matrizes de Dirac (veja (A.5)), obtemos a ação induzida

⁵Integral [20] sobre o parâmetro z :

$$\int \frac{dz}{|\mu|} = -\frac{1}{|k|} \arcsin \left[\frac{(2z-1)|k|}{\sqrt{4m^2 - k^2}} \right], \quad \mu^2 = m^2 - k^2 z(1-z).$$

$$S_{CS}^{(2+1)D} = -\frac{e^2}{8\pi} \frac{m}{|m|} \text{tr} \int d^3x \varepsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho. \quad (5.26)$$

Este resultado é a contribuição bilinear (abeliana) no campo de calibre encontrada em [8]. Ele indica que a interação de férmions com um campo de calibre formulado em (2+1) dimensões gera um termo semelhante ao de Chern-Simons. Como foi discutido na seção 5.2, é possível afirmar então que os quanta deste campo de calibre podem ser massivos.

Diagrama de Feynman de um laço de férmions utilizado para o cálculo da ação (5.26).

6 Correções Radiativas com Quebra da Simetria de Lorentz em $(3+1)D$

6.1 Expansão do propagador do férmion e a quebra de simetria de Lorentz

Estudamos nos Capítulos 3 e 4 a influência dos termos de quebra de simetria de Lorentz sobre a equação de Dirac e todas as grandezas dela derivadas. Aplicamos a ideia sugerida por Kostelecký e Colladay, que corresponde em tratar os termos de quebra de simetria de Lorentz como perturbações na equação de Dirac. Aplicando teoria de perturbações, obtemos como resultados correções de energias em certos sistemas quânticos na presença de termos de quebra da simetria de Lorentz.

Além dessa aplicação à mecânica quântica, a indução do termo de CS (Chern-Simons) em $(3+1)$ dimensões é um resultado interessante oferecido pela teoria de quebra de simetria de Lorentz. Neste Capítulo, procuraremos por essa indução calculando correções radiativas em um sistema de férmions acoplado a um campo de calibre no espaço quadrimensional. Iniciaremos essa busca reescrevendo o propagador de Feynman na presença da quebra da simetria de Lorentz.

No Capítulo 2, encontramos o propagador fermiônico da EDQ usual $S(p)$ (veja (2.43)). No capítulo seguinte, formulamos um propagador modificado pela quebra da simetria de Lorentz para o férmion, representado nesta dissertação por (3.23). Neste capítulo, estudaremos correções radiativas geradas pela corrente quiral $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$

acoplada a um quadrivetor b_μ , que acarreta numa violação da invariância de Lorentz, tal como foi apresentado no Capítulo 3. Assim, tomando $q' = 0$ no propagador (3.23), a quebra da simetria de Lorentz será representada pelo termo $\not{b}\gamma_5$:

$$S_b(p) = \frac{i}{\not{p} - m - \not{b}\gamma_5}. \quad (6.1)$$

O propagador acima invertido é dado por

$$S_b(p) = \frac{i(\not{p} - \not{b}\gamma_5 + m)\{p^2 - b^2 - m^2 + [\not{p}, \not{b}]\gamma_5\}}{(p^2 - b^2 - m^2)^2 - 4(p \cdot b)^2 + 4p^2 b^2}. \quad (6.2)$$

Este propagador tem uma estrutura complicada e tornaria os cálculos perturbativos mais tediosos. Entretanto, o quadrivetor b^μ , que sinaliza uma possível quebra da simetria de Lorentz na teoria, é muito pequeno e a correção por ele produzida no propagador pode ser tratada em forma perturbativa. Apliquemos assim a seguinte expansão em uma soma de termos infinitos de uma progressão geométrica cuja razão é $\not{b}\gamma_5$

$$\begin{aligned} S_b(p) &= \frac{i}{\not{p} - m} \frac{1}{1 - i \not{b}\gamma_5 S(p)} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} \left[1 + (-i \not{b}\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - m} + (-i \not{b}\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - m} (-i \not{b}\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \right] \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} (-i \not{b}\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} (-i \not{b}\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - m} (-i \not{b}\gamma_5) \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \end{aligned} \quad (6.3)$$

Assim, com $\times$ representando cada inserção $-i\not{b}\gamma_5$ no propagador, seu gráfico é dado por

$$\begin{aligned} \text{=====} \rightarrow \text{=====} &= \text{-----} \rightarrow \text{-----} + \text{-----} \rightarrow \times \rightarrow \text{-----} + \\ &\quad \text{-----} \rightarrow \times \rightarrow \times \rightarrow \text{-----} + \dots \end{aligned}$$

onde o lado esquerdo representa $S_b(p)$ e os termos do lado direito ao propagador de Feynman expandido. Na próxima seção, vamos calcular as correções radiativas utilizando este propagador expandido.

6.2 Indução de Chern-Simons pela quebra da simetria de Lorentz

As correções radiativas à ação da EDQ usual serão calculadas considerando-se um sistema de férmions acoplados a um campo A_μ formulado no espaço-tempo em (3+1) dimensões, empregando-se a perturbação $\not{b}\gamma_5$. Assim, a lagrangiana deste modelo é dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - \not{b}\gamma_5 - e\not{A} - m)\psi. \quad (6.4)$$

Para calcular o termo induzido, seguiremos os mesmos passos utilizados no Capítulo 5. A ação efetiva para este modelo, dependente do termo de quebra de simetria de Lorentz $-\bar{\psi}\not{b}\gamma_5\psi$, na aproximação de um laço é definida como se segue

$$e^{iS_{ef}[b,m]} = N \int D\bar{\psi} D\psi \exp \left[i \int d^4x \bar{\psi}(i\not{\partial} - e\not{A} - \not{b}\gamma_5 - m)\psi \right], \quad (6.5)$$

onde N é uma constante de normalização.

Com a utilização das variáveis de Grassmann, integrando sobre os campos de férmions, obtém-se

$$e^{iS_{ef}[b,m]} = N \det(i\not{\partial} - e\not{A} - \not{b}\gamma_5 - m), \quad (6.6)$$

ou seja,

$$S_{ef}[b, m] = -i \text{Tr} \ln [i\not{\partial} - e\not{A} - \not{b}\gamma_5 - m]. \quad (6.7)$$

Sendo A e B duas matrizes que não comutam, obtemos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned}
 \ln(B - A) &= \ln B \left(1 - \frac{1}{B}A\right) \\
 &= \ln B + \ln \left(1 - \frac{1}{B}A\right) \\
 &= \ln B - \frac{1}{B}A - \frac{1}{2} \frac{1}{B}A \frac{1}{B}A - \frac{1}{3} \frac{1}{B}A \frac{1}{B}A \frac{1}{B}A + \dots \\
 &= \ln B - \sum_n \frac{1}{n} \left[\frac{1}{B}A \right]^n.
 \end{aligned}$$

Sendo $A = e \not{A}$ e $B = i\not{\partial} - \not{b}\gamma_5 - m$ na expressão (6.7), temos que

$$S_{ef}[b, m] = -iTr \ln[i\not{\partial} - \not{b}\gamma_5 - m] + iTr \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{1}{i\not{\partial} - \not{b}\gamma_5 - m} e \not{A} \right]^n. \quad (6.8)$$

O primeiro termo da expansão acima corresponde a um termo constante adicionado à ação e, por isso, não tem importância, uma vez que não depende do campo de calibre A . As contribuições virão de termos para $n \geq 1$. Assim, para $n = 1$ na expansão acima, temos que

$$S_{ef}^{(1)} = ieTr \left[\frac{1}{i\not{\partial} - \not{b}\gamma_5 - m} \not{A} \right] \quad (6.9)$$

ou

$$S_{ef}^{(1)} = ieTr \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - \not{b}\gamma_5 - m} \not{A}. \quad (6.10)$$

As contribuições de (6.10) dão origem a termos do tipo *tadpoles*, que são lineares em A_μ e são divergentes no ultravioleta. Como esses termos não contribuem com a indução de CS, os mesmos serão desconsiderados nos cálculos a seguir. Entretanto, ilustramos seus gráficos em primeira ordem no campo de calibre.

Contribuições em primeira ordem de aproximação no campo de calibre denominadas *tadpoles*. O gráfico do lado esquerdo refere-se a (6.10).

As contribuições em segunda ordem, ou seja, para $n = 2$ fornecem

$$\begin{aligned}
 S_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} Tr \left[\frac{1}{i\not{D} - \not{b}\gamma_5 - m} \not{A} \frac{1}{i\not{D} - \not{b}\gamma_5 - m} \not{A} \right] \\
 &= -\frac{ie^2}{2} Tr [S_b(p) \not{A} S_b(p) \not{A}].
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

O cálculo do traço da ação acima é semelhante ao cálculo de um operador $\mathcal{O}$ que depende das matrizes de Dirac e dos índices internos do grupo de Lie. Então, seu traço total Tr é idêntico ao calculado no Capítulo 5 mas, em $(3 + 1)$ dimensões, é definido por:

$$Tr \mathcal{O} \doteq tr tr_D \int d^4x \langle x | \mathcal{O} | x' \rangle \Big|_{x=x'}, \tag{6.12}$$

onde o símbolo tr_D indica que o traço será calculado sobre as matrizes γ de Dirac na representação padrão.

Inserindo conjuntos completos de operadores normalizados nos espaços das posições e momentos

$$\int d^4x |x\rangle \langle x| = 1 \quad , \quad \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} |p\rangle \langle p| = 1, \tag{6.13}$$

onde, novamente, $\langle x|p\rangle = \langle p|x\rangle^* = e^{ipx}$, vem que

$$\begin{aligned}
 S_{ef}^{(2)} &= \frac{ie^2}{2} tr \, tr_D \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \langle x| \frac{1}{i\not{\partial} - \not{p}\gamma_5 - m} |p\rangle \langle p| \not{A}|y\rangle \langle y| \frac{1}{i\not{\partial} - \not{q}\gamma_5 - m} |q\rangle \langle q| \not{A}|x\rangle \\
 &= \frac{ie^2}{2} tr \, tr_D \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \\
 &\quad \times \frac{1}{\not{p} - \not{p}\gamma_5 - m} \not{A}(y) \frac{1}{\not{q} - \not{q}\gamma_5 - m} \not{A}(x) \langle x|p\rangle \langle p|y\rangle \langle y|q\rangle \langle q|x\rangle \\
 &= \frac{ie^2}{2} tr \, tr_D \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - \not{p}\gamma_5 - m} \int d^4y \not{A}(y) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-y)} \frac{1}{\not{p} - i\not{\partial} - \not{p}\gamma_5 - m} \not{A}(x) \\
 &= \frac{ie^2}{2} tr \, tr_D \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - \not{p}\gamma_5 - m} \int d^4y \not{A}(y) \delta(x-y) \frac{1}{\not{p} - i\not{\partial} - \not{p}\gamma_5 - m} \not{A}(x) \\
 &= \frac{ie^2}{2} tr \, tr_D \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} - \not{p}\gamma_5 - m} \not{A}(x) \frac{1}{\not{p} - i\not{\partial} - \not{p}\gamma_5 - m} \not{A}(x),
 \end{aligned}$$

onde, com a utilização da mudança de variável $p - q \rightarrow k$ e do propagador (6.1), obtemos

$$S_{ef}^{(2)} = \frac{ie^2}{2} tr \, tr_D \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} S_b(p) \not{A} S_b(p - i\not{\partial}) \not{A}. \quad (6.14)$$

Diagramas de Feynman na aproximação de um laço, em termos bilineares no campo de calibre, para o cálculo da ação (6.14) em termos do propagador fermiônico expandido. Cada termo $\times$ indica uma inserção $\not{\gamma}_5$ no propagador do férmion.

As correções radiativas serão obtidas introduzindo-se os propagadores do férmion expandido (6.2). Assim, temos que

$$\begin{aligned}
 S_b(p) &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} \not{\gamma}_5 \frac{1}{\not{p} - m} + \frac{1}{\not{p} - m} \not{\gamma}_5 \frac{1}{\not{p} - m} \not{\gamma}_5 \\
 &= \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} + \frac{i}{(p^2 - m^2)^2} (\not{p} + m) \not{\gamma}_5 (\not{p} + m) \\
 &+ \frac{1}{(p^2 - m^2)^3} (\not{p} + m) \not{\gamma}_5 (\not{p} + m) \not{\gamma}_5 (\not{p} + m) + \dots
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Utilizando as notações

$$P = \not{p} + m \quad (6.16)$$

$$B_5 = \not{b}\gamma_5 \quad (6.17)$$

$$\mathcal{D}^2 = p^2 - m^2 \quad (6.18)$$

o propagador é escrito em forma compacta até termos lineares em B_5 :

$$S_b(p) = \frac{i}{\mathcal{D}^2}P + \frac{i}{\mathcal{D}^4}PB_5P + \dots \quad (6.19)$$

Agora, expandindo o propagador $S_b(p - i\partial)$ em termos de $\tilde{B}_5 = \not{b}\gamma_5 + i\not{\partial}$, expandimos até termos lineares em $\tilde{B}_5$

$$S_b(p - i\partial) = \frac{i}{\mathcal{D}^2}P + \frac{i}{\mathcal{D}^4}P\tilde{B}_5P + \dots \quad (6.20)$$

Desenvolvendo o integrando de (6.14) em termos de (6.16) e (6.17), temos que, em notação abreviada,

$$\begin{aligned} S_b(p) \not{A} S_b(p - i\partial) \not{A} &= \left[\frac{i}{\mathcal{D}^2}P + \frac{i}{\mathcal{D}^4}PB_5P + \dots \right] \not{A} \left[\frac{i}{\mathcal{D}^2}P + \frac{i}{\mathcal{D}^4}P\tilde{B}_5P + \dots \right] \not{A} \\ &= -\frac{1}{\mathcal{D}^4}P \not{A} P \not{A} - \frac{1}{\mathcal{D}^6}P \not{A} P\tilde{B}_5P \not{A} - \frac{1}{\mathcal{D}^6}PB_5P \not{A} P \not{A} - \frac{1}{\mathcal{D}^8}PB_5P \not{A} P\tilde{B}_5P \not{A}. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Os termos que darão origem à indução de CS são aqueles que dependem somente de uma derivada do campo A_μ ¹: $\not{b}\not{A}\not{\partial}\not{A}\gamma_5$ e que darão a estrutura do termo de CS. Essa contribuição tem origem no último termo da expressão acima. Assim, utilizando as formas explícitas (6.15-18), segue que

¹Termos do tipo Maxwell envolvem derivadas.

$$\begin{aligned}
& (\not{p} + m) \not{b}_{\gamma_5} (\not{p} + m) \not{A} (\not{p} + m) (\not{b}_{\gamma_5} + i\not{\partial}) (\not{p} + m) \not{A} = \\
& (\not{p} \not{b}_{\gamma_5} \not{p} \not{A} + m \not{p} \not{b}_{\gamma_5} \not{A} + m \not{b}_{\gamma_5} \not{p} \not{A} + m^2 \not{b}_{\gamma_5} \not{A}) (\not{p} \not{b}_{\gamma_5} + i \not{p} \not{\partial} + m \not{b}_{\gamma_5} + im \not{\partial}) \\
& \quad \times (\not{p} \not{A} + m \not{A}) \\
& = i(\not{p} \not{b}_{\gamma_5} \not{p} \not{A} + m \not{p} \not{b}_{\gamma_5} \not{A} + m \not{b}_{\gamma_5} \not{p} \not{A} + m^2 \not{b}_{\gamma_5} \not{A}) (\not{p} \not{\partial} \not{p} \not{A} + m \not{p} \not{\partial} \not{A} \\
& \quad + m \not{\partial} \not{p} \not{A} + m^2 \not{\partial} \not{A}) + \dots \\
& = +i \not{p} \not{b} \not{p} \not{A} \not{p} \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 + im^2 \not{p} \not{b} \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 + im^2 \not{p} \not{b} \not{A} \not{p} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 \\
& \quad im^2 \not{p} \not{b} \not{A} \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 - im^2 \not{b} \not{p} \not{A} \not{p} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 - im^2 \not{b} \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 \\
& \quad - im^2 \not{b} \not{A} \not{p} \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 - im^4 \not{b} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 + \dots
\end{aligned}$$

Nas passagens acima, omitimos os termos que não contêm $\not{\partial}$ e aqueles que são ímpares no número de matrizes de Dirac pois, nessas condições, o cálculo do traço de termos desse tipo é nulo. Agora, vamos reduzir os termos da expressão acima de oito e seis para quatro matrizes γ utilizando as propriedades $\not{c} \not{d} = - \not{d} \not{c} + 2(c \cdot d)$ e $\not{c}^2 = c^2$:

$$\begin{aligned}
 & i \not{p} [-\not{p} \not{b} + 2(b \cdot p)] \not{A} \not{p} [-\not{p} \not{\partial} + 2(p \cdot \partial)] \not{A} \gamma_5 + im^2 \not{p} [-\not{p} \not{b} + 2(b \cdot p)] \not{A} \not{\partial} \gamma_5 \\
 & + im^2 \not{p} \not{b} \not{A} \not{p} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 + im^2 \not{p} \not{b} \not{A} [-\not{p} \not{\partial} + 2(p \cdot \partial)] \not{A} \gamma_5 \\
 & - im^2 \not{b} \not{p} [-\not{p} \not{A} + 2(p \cdot A)] \not{\partial} \not{A} \gamma_5 - im^2 \not{b} \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 \\
 & - im^2 \not{b} [-\not{p} \not{A} + 2(p \cdot A)] \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 - im^4 \not{b} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 \\
 & = ip^4 \not{b} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 - 2ip^2 \not{b} \not{A} (p \cdot \partial) \not{p} \not{A} \gamma_5 - 2ip^2 (b \cdot p) \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 \\
 & + 4i(b \cdot p) \not{p} \not{A} (p \cdot \partial) \not{p} \not{A} \gamma_5 + 2im^2 (b \cdot p) \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 + 2im^2 \not{p} \not{b} \not{A} (p \cdot \partial) \not{A} \gamma_5 \\
 & - 2im^2 (p \cdot A) \not{b} \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 - im^4 \not{b} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5
 \end{aligned} \tag{6.22}$$

O próximo passo é inserir o resultado acima na ação (6.14), além de (6.17), para calcularmos a integral nos momentos. É preciso notar que, por contagem de potências, as integrais proporcionais a p^4 têm divergência logarítmica, enquanto que as proporcionais a p^2 são finitas:

$$\int_{inf} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^4}{(p^2 - m^2)^4} \quad , \quad \int_{fin} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^4} \quad \text{e} \quad \int_{fin} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} .$$

Calculemos explicitamente o quinto termo (finito) da expressão (6.22). Utilizando (6.13), (6.20) e as integrais de Feynman calculadas explicitamente no Apêndice G, além do cálculo do traço das matrizes de Dirac, temos que:

$$\begin{aligned}
& -\frac{ie^2}{2} \text{tr}_D \int d^4x \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{2im^2(b \cdot p) \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5}{(p^2 - m^2)^4} \\
& = e^2 m^2 \int d^4x \text{tr}_D (\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_5) b_\alpha A_\nu \partial_\rho A_\sigma \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{p^\alpha p_\mu}{(p^2 - m^2)^4} \\
& = 4ie^2 m^2 \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \delta_\mu^\alpha b_\alpha A_\nu \partial_\rho A_\sigma \frac{-i}{192\pi^2 m^2} \\
& = \frac{e^2}{48\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Os quatro primeiros termos da expressão (6.22) geram termos infinitos nas integrais para a ação efetiva. Para realizar os cálculos, vamos fazer a regularização² $D = 4 - 2\epsilon$ para o cálculo das integrais divergentes. Enquanto mantivermos $\epsilon \neq 0$, essas integrais originalmente divergentes são mantidas finitas e assim podemos somá-las e subtraí-las.

Assim, calculamos a ação efetiva somando inicialmente as partes infinita, mantidas finitas pela regularização, com as partes finitas:

²Vide Apêndice G.

$$\begin{aligned}
 S_{CS} &= S_{CS}^{inf} + S_{CS}^{fin} \\
 &= -\frac{ie^2}{2} tr_D \int d^4x \left\{ \int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} [ip^4 \not{b} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 - 2ip^2 \not{b} \not{A} (p \cdot \partial) \not{p} \not{A} \gamma_5 \right. \\
 &\quad \left. - 2ip^2 (b \cdot p) \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 + 4i(b \cdot p) \not{p} \not{A} (p \cdot \partial) \not{p} \not{A} \gamma_5 \right\} \\
 &\quad - \frac{ie^2}{2} tr_D \int d^4x \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} \{ 2im^2 (b \cdot p) \not{p} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 \\
 &\quad + 2im^2 \not{p} \not{b} \not{A} (p \cdot \partial) \not{A} \gamma_5 - 2im^2 (p \cdot A) \not{b} \not{\partial} \not{p} \not{A} \gamma_5 - im^4 \not{b} \not{A} \not{\partial} \not{A} \gamma_5 \} \\
 &= 2e^2 \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ i \cdot \frac{i}{24\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right] b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right. \\
 &\quad - 2i \cdot \frac{i}{96\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right] b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma - 2i \cdot \frac{i}{96\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right] b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma \\
 &\quad \left. + 4i \cdot \frac{i}{384\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right] (b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma - b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma) \right\} \\
 &\quad + 2e^2 \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \left[2im^2 \cdot \frac{-i}{192\pi^2 m^2} b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma + 2im^2 \cdot \frac{-i}{192\pi^2 m^2} b_\nu A_\rho \partial_\mu A_\sigma \right. \\
 &\quad \left. - 2im^2 \cdot \frac{-i}{192\pi^2 m^2} b_\mu A_\rho \partial_\nu A_\sigma - im^4 \cdot \frac{i}{96\pi^2 m^4} b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma \right] \tag{6.24}
 \end{aligned}$$

Como a soma das contribuições das partes infinitas devidamente regularizadas se anulam, não há necessidade de tomarmos o limite $m \rightarrow 0$. Assim, obtemos o seguinte termo proveniente da ação efetiva [21]:

$$S_{CS}^{(3+1)D} = \frac{e^2}{12\pi^2} \int d^4x \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} b_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma . \quad (6.25)$$

Portanto, concluímos que a adição de um termo com um campo de fundo que quebra de simetria de Lorentz à lagrangiana da teoria de calibre usual induz uma ação tipo Chern-Simons no espaço-tempo quadridimensional. Como é bem observado na literatura, este termo é finito e obtido por diversos métodos de regularização. A única diferença é a constante de proporcionalidade, que depende exclusivamente do tipo de método de regularização utilizado.

6.3 Birefringência dos fótons clássicos de CS

Uma das consequências da quebra da simetria de Lorentz na EDQ em $(3+1)D$ provocadas pelo termo induzido corresponde ao fenômeno da birefringência dos fótons clássicos de CS. A lagrangiana desta teoria escrita em termos da ação (6.25), é dada por

$$\mathcal{L}_{CS}^{(3+1)D} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_\mu A_\nu \partial_\rho A_\sigma - A_\mu J^\mu , \quad (6.26)$$

onde, foi utilizada a relação

$$\eta_\mu = \frac{e^2}{6\pi^2} b_\mu . \quad (6.27)$$

Em relação a esta lagrangiana, calculemos as derivadas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_\mu\partial_\rho A_\sigma - J^\nu \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta}\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right) - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_\mu\frac{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= -\frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu\delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu\delta_\alpha^\nu)F^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_\mu A_\nu\delta_\rho^\mu\delta_\sigma^\nu \end{aligned}$$

$$\partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_\mu\partial_\rho A_\sigma \quad (6.29)$$

Rearranjando os índices de Lorentz, utilizando a antisimetria de ε e aplicando o método variacional através da equação de Euler-Lagrange, temos que

$$\partial_\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}, \quad (6.30)$$

à lagrangiana (6.26), conhecendo o resultado (5.2), obtemos

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\eta_\mu\partial_\rho A_\sigma = J^\nu. \quad (6.31)$$

Nesta teoria, a corrente também é conservada, devido a antisimetria do tensor do campo eletromagnético e a identidade de Bianchi:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \quad (6.32)$$

A identidade (6.32) representada acima assegura que as equações de Maxwell homogêneas³ $\partial_\mu F^{\mu\nu*} = 0$ permaneçam inalteradas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6.33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0. \quad (6.34)$$

³Estamos utilizando $F^{\mu\nu*} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$, $F_{0i} = E^i$ e $F_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk\ell}B^\ell$.

As modificações geradas pelo quadrivetor acoplado $\eta^\mu = (\eta_0, \boldsymbol{\eta})$ podem ser interpretadas como uma adição de um campo dependente do tempo na fonte de corrente usual:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} - \boldsymbol{\eta} \times \mathbf{E} + \eta^0 \mathbf{B} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (6.35)$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} + \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{B} = \rho. \quad (6.36)$$

Estas equações não-homogêneas também preservam a invariância de calibre. Entretanto, elas demonstram um caráter que não é encontrado na teoria padrão: a introdução da quebra de simetria de Lorentz permite que os campos elétricos sirvam como fonte para correntes e que os campos magnéticos sirvam como fonte para cargas elétricas.

Analisemos agora as consequências da quebra da simetria de Lorentz sobre a equação de movimento para o campo A_μ de CS. Na ausência de fontes externas ($J^\mu = 0$), utilizando $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, a equação de movimento (6.31) é dada por:

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) - \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_\mu \partial_\rho A_\sigma = 0. \quad (6.37)$$

Assim, com $k^\mu = (\omega, |\mathbf{k}|)$, escrevendo o campo de calibre no espaço dos momentos

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} A_\mu(k) e^{ik \cdot x}, \quad (6.38)$$

utilizando o calibre de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, obtemos a seguinte expressão

$$k^2 + i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_\mu k_\sigma = 0. \quad (6.39)$$

É conveniente multiplicar a equação acima por seu complexo conjugado:

$$\begin{aligned} (k^2 - i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \eta_\rho k_\sigma)(k^2 + i\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \eta^\alpha k^\beta) &= 0 \\ k^4 + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\eta_\rho k_\sigma)(\eta^\alpha k^\beta) &= 0. \end{aligned}$$

a expressão acima é dada por

$$k^4 + k^2 \eta^2 - (k \cdot \eta)^2 = 0, \quad (6.40)$$

e a expressão (6.39) representa a relação de dispersão para os fótons de CS em $(3+1)$ dimensões.

Considere o caso particular $\eta^\mu = (\eta^0, \mathbf{0})$ aplicado à equação (6.39). Resolvendo uma equação biquadrada para ω , obtemos duas soluções:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{|\mathbf{k}|(|\mathbf{k}| \pm \eta^0)}, \quad (6.41)$$

Esta equação indica que o termo induzido de CS gera o efeito de birefringência, ou seja, a separação dos fótons em dois modos diferentes de polarizações para o vetor $|\mathbf{k}|$ com diferentes velocidades de grupo:

$$v_{g\pm} = \frac{\partial \omega_{\pm}}{\partial |\mathbf{k}|} = \frac{|\mathbf{k}|}{\omega_{\pm}} \left(1 \pm \frac{\eta_0}{2|\mathbf{k}|} \right). \quad (6.42)$$

O fato de existir fótons viajando com diferentes velocidades de grupo, além de ser uma forte indicação da violação de Lorentz, indica também evidências para uma aparente instabilidade na teoria. Do resultado (6.42), vemos que ω se torna imaginário para os casos em que $\eta_0 > k$. Isso significa que há soluções imaginárias e instáveis, que não existem na eletrodinâmica convencional.

Na tentativa de detectar o campo de fundo η_μ , Carrol, Field e Jackiw sugeriram [?] a comparação dos resultados previstos pela teoria com dados experimentais. Assumindo o caso em que não há quebra de simetria rotacional, ou seja, $\eta^\mu = (\eta^0, \mathbf{0})$, eles confrontaram dados geomagnéticos com o campo magnético da Terra obtido pelas soluções das equações modificadas na presença de fontes. Na mesma referência, Jackiw e colaboradores propuseram resolver a equação (6.35) para o caso em que $\mathbf{E} = 0$. A solução obtida desta equação para o campo magnético é expandida em termos da

posição para se obter um termo conhecido de dipolo acrescido de uma perturbação dependente de η_0 . Conhecendo-se o valor do campo magnético na direção azimutal, é possível obter o resultado $\eta_0 \lesssim 6 \times 10^{-20} \text{ keV}$. Analisando também a polarização da luz emitida por galáxias distantes, removendo o efeito Faraday devido suas rotações, o resultado obtido foi $\eta_0 \lesssim 6 \times 10^{-20} \text{ keV}$. Maiores detalhes destes e de outros testes podem ser encontrados na referência [9], além de resultados mais recentes apresentados por Kostelecký em [22]. Apesar de todo o esforço e comparação de dados geomagnéticos e astrofísicos com resultados teóricos, nenhuma evidência de campos de quebra de simetria de Lorentz foram detectadas.

7 Conclusão

Estudamos os possíveis efeitos que a teoria do Modelo Padrão Extendido pode provocar em certos fenômenos quando novos elementos de quebra de simetria de Lorentz são introduzidos nas lagrangianas da teoria convencional. Estes efeitos foram analisados nos contextos da mecânica quântica e nas correções radiativas em um sistema de férmions interagindo com um campo de calibre. Notamos que tais efeitos são gerados pelo acoplamento axial $\bar{\psi}\gamma_5\psi$.

Construímos um ferramental teórico, no setor da matéria, que foi utilizado nos cálculos nos capítulos posteriores. Analisamos algumas implicações da quebra da simetria de Lorentz na mecânica quântica, via níveis de Landau, através das mudanças de energia com e sem inversão do spin do elétron, e notamos que tais mudanças dependem diretamente de $|\mathbf{b}|$. O hamiltoniano de Dirac modificado pela teoria foi expandido no limite não-relativístico, via método FW, e foi dividido em um hamiltoniano de Pauli, não perturbado, e um hamiltoniano de interação, dependendo da violação de Lorentz, escrito em termos de a_μ e b_μ . O efeito Zeeman foi estudado analisando-se os possíveis efeitos produzidos por esses dois campos separadamente. Foi encontrado que o campo a_μ não provoca nenhuma mudança, uma vez que o mesmo redefine os zeros da energia e do momento. No caso do acoplamento axial, foi encontrada uma mudança na energia que depende do número quântico m_j , na ausência do campo magnético. Nosso resultado é o dobro daquele encontrado na referência [18]. Na presença do campo magnético, mesmo intenso, nenhuma correção para a energia foi encontrada.

Calculamos também a ação induzida de Chern-Sompns no espaço quadrimensional. Verificamos que isso só é possível se introduzirmos o termo de quebra de simetria de Lorentz, pois o termo $\not{b}\gamma_5$ induz o cálculo de $tr_D[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5]$, que gera a estrutura necessária $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ pertinente a este termo induzido. Nosso resultado está de acordo com outros obtidos na literatura, que podem diferenciar entre si, em relação a uma constante, se diferentes métodos de regularização forem utilizados. Em nosso cálculo, utilizando o método de regularização dimensional, notamos que os termos divergentes da ação induzida se cancelam mutuamente, e o limite $m \rightarrow 0$ não se faz necessário e a ação induzida é finita.

As consequências geradas pela ação de Chern-Simons foram analisadas através do cálculo da velocidade de propagação dos fótons de Chern-Simons. Como resultado, notamos que tais velocidades são separadas em dois modos distintos de polarização. Também verificamos que as energias podem se tornar imaginárias para alguns valores específicos do campo de fundo.

É importante ressaltar que, apesar de todos os esforços teóricos realizados até aqui, na comparação de dados geomagnéticos e astrofísicos com resultados previstos pelas equações modificadas pelos termos de quebra de simetria de Lorentz, nenhuma evidência experimental em relação a tais campos de fundo foram detectadas.

A Convenções adotadas

Matrizes de Dirac em $(2+1)D$

Nesta dimensão, a métrica utilizada tem a forma $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$. As matrizes de Dirac escolhidas são

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} . \quad (\text{A.1})$$

A notação tr_D indica que os traços são calculados sobre as matrizes γ de Dirac. As mesmas têm as seguintes propriedades: $\text{tr}_D[I] = 2$ e $\text{tr}_D[\gamma^\mu] = 0$. Então, são úteis as seguintes relações:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma_\mu \gamma^\nu \gamma^\mu = -\gamma^\nu \quad (\text{A.3})$$

$$\text{tr}_D[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{A.4})$$

$$\text{tr}_D[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu] = 2i\varepsilon^{\mu\rho\nu} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{tr}_D[\gamma^\mu \gamma^\rho \gamma^\nu \gamma^\sigma] = 2(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu} - g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}) \quad (\text{A.6})$$

Matrizes de Dirac em $(3+1)D$

As matrizes de Dirac na representação padrão são dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} ,$$

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -\gamma^5$ e também satisfaz:

$$(\gamma^5)^2 = 1 \quad \text{e} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0.$$

As matrizes γ de Dirac também obedecem as seguintes regras de anticomutação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (\text{A.7})$$

Duas matrizes γ formam o seguinte objeto antissimétrico:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu].$$

Novamente, a notação tr_D indica que os traços são calculados sobre as matrizes γ de Dirac. Em $(3+1)D$, as mesmas têm as seguintes propriedades: $tr_D[I] = 4$ e $tr_D[\gamma^\mu] = 0$. Então, são úteis as seguintes relações:

$$tr_D[\gamma^\mu\gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{A.8})$$

$$tr_D[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma_5] = 0 \quad (\text{A.9})$$

$$tr_D[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho] = 4[g^{\mu\nu}g^{\sigma\rho} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}] \quad (\text{A.10})$$

$$tr_D[\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma_5] = 4i\varepsilon^{\mu\nu\sigma\rho} \quad (\text{A.11})$$

B Autofunções exatas do problema de Landau relativístico

A equação de movimento [23] de um elétron de massa m sujeito a um campo eletromagnético é dada por:

$$[\gamma^\mu(p_\mu - eA_\mu) - m]\psi = 0. \quad (\text{B.1})$$

Aplicando o operador $\gamma^\nu(p_\nu - eA_\nu) + m$ pela esquerda, temos que

$$[\gamma^\mu\gamma^\nu(p_\mu - eA_\mu)(p_\nu - eA_\nu) - m^2]\psi = 0. \quad (\text{B.2})$$

Utilizando a identidade $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu}$, segue que

$$[(p - eA)^2 + \sigma^{\mu\nu}(p_\mu - eA_\mu)(p_\nu - eA_\nu) - m^2]\psi = 0$$

$$\left[(p - eA)^2 + \frac{e}{2}\sigma^{\mu\nu}(-A_\mu p_\nu + p_\nu A_\mu + A_\nu p_\mu - p_\mu A_\nu) - m^2\right]\psi = 0,$$

onde o produto do segundo termo na primeira expressão foi anti-simetrizado. Sendo o tensor do campo eletromagnético dado por $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, temos a seguinte equação de segunda ordem:

$$\left[(p - eA)^2 - \frac{ie}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - m^2\right]\psi = 0. \quad (\text{B.3})$$

Sendo $\sigma^{\mu\nu} = (\boldsymbol{\alpha}, i\boldsymbol{\Sigma})$ e $F_{\mu\nu} = (-\mathbf{E}, \mathbf{B})$ as partes espaciais do produto $\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ e, no problema de Landau, $\mathbf{E} = 0$ e $A^\mu = (0, B_0 x \hat{\mathbf{e}}_y)$, então, temos que

$$[(p - eA)^2 + e\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{B} - m^2]\psi = 0. \quad (\text{B.4})$$

Assim, a equação de autovalores é

$$[p_x^2 + (eB_0x - p_y)^2 - e\sigma B_0]\psi = [(E^\pm)^2 - p_z^2 - m^2]\psi. \quad (\text{B.5})$$

O espectro de energia é o resultado da interação da partícula com este campo magnético intenso. Como o lado esquerdo da equação (B.5) possui um termo idêntico à equação de um oscilador harmônico, temos que as autoenergias relativísticas para os elétrons e pósitrons do problema são os conhecidos *níveis de Landau*:

$$E_{n,s}^\pm = \pm \sqrt{p_z^2 + m^2 + |e| B_0(2n + 1 - s)}, \quad (\text{B.6})$$

onde $\sigma \rightarrow s = \pm 1$ indica os spins dos elétrons e pósitrons.

As autofunções não-perturbadas dos elétrons e dos pósitrons são obtidas através de soluções estacionárias com energia E , da forma

$$\psi_{n,s}^-(x) = u^{(s)}(p) e^{-iE_{n,s}t}, \quad (\text{B.7})$$

onde

$$u = \begin{pmatrix} \varphi \\ \eta \end{pmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Assim, com as mudanças de variáveis

$$p_x \rightarrow -i \frac{d}{dx}, \quad \xi = \sqrt{eB_0} \left(x - \frac{p_y}{eB_0} \right), \quad dx = \frac{1}{\sqrt{eB_0}} d\xi, \quad \alpha = \frac{(E^\pm)^2 - m^2 - p_z^2}{eB_0},$$

a equação (B.5) é reescrita no espaço das posições, com $\varphi(x) = e^{i(p_y y + p_z z)} f(x)$, como

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \xi^2 \right] f(x) = -(\alpha + s) f(x), \quad s = \pm 1. \quad (\text{B.9})$$

Então, as soluções acima são as mesmas do oscilador harmônico:

$$\varphi(x) = N e^{i(p_y y + p_z z)} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (\text{B.10})$$

onde os $H_n(\xi)$ são os conhecidos *polinômios de Hermite*, que satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} [H_n(\xi)]^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Utilizando o espinor (2.33) com a condição de acoplamento minimal $p_\mu \rightarrow p_\mu - eA_\mu$, a auto-função não-perturbada do elétron, normalizada, é dada por (B.7) com

$$u^{(s)}(p) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{eB_0}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{E_{n,s}^- + m}{2E_{n,s}^-}} \left(\begin{array}{c} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \chi_s \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{p} - e\mathbf{A})}{E_{n,s}^- + m} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2} \chi_s \end{array} \right) e^{i(p_y y + p_z z)}, \quad (\text{B.11})$$

que satisfaz

$$\int \psi_{n,s}^{-\dagger}(x) \psi_{n,s}^-(x) dx = \delta(p' - p). \quad (\text{B.12})$$

C O método Foldy-Wouthuysen

No trabalho clássico realizado por L.L. Foldy e S. A. Wouthuysen [16] são propostas duas aplicações para partículas relativísticas: uma para partículas livres e outras para partículas sujeitas a campos eletromagnéticos externos. Em geral, transformações de uma função de onda Ψ são obtidas através de um determinado operador unitário U :

$$\Psi' = U\Psi = e^{iS}\Psi. \quad (\text{C.1})$$

A equação de Dirac convencional pode ser trabalhada da seguinte forma:

$$H\Psi = i\frac{\partial}{\partial t}\Psi \quad , \quad H U^{-1}\Psi' = i\frac{\partial}{\partial t}(U^{-1}\Psi')$$

ou

$$(U H U^{-1})\Psi' = i \left(U \frac{\partial U^{-1}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi',$$

de onde identificamos

$$H' = U H U^{-1} - iU \frac{\partial U^{-1}}{\partial t}. \quad (\text{C.2})$$

O Hamiltoniano de Dirac separado em termos pares e ímpares é dado por (4.9):

$$H = m\gamma^0 + \mathcal{P} + \mathcal{I}, \quad (\text{C.3})$$

onde $\mathcal{P}$ e $\mathcal{I}$ representam os operadores par e ímpar que obedecem as relações $[\gamma^0, \mathcal{P}] = 0$ e $\{\gamma^0, \mathcal{I}\} = 0$. A ideia é propor um operador da forma:

$$S = -i\frac{\gamma^0\mathcal{I}}{\mathcal{P}}\theta. \quad (\text{C.4})$$

Este operador pode ser substituído em (C.2) e expandido para se obter

$$U^{\pm 1} = \cos \theta \pm \frac{\gamma^0 \mathcal{I}}{\mathcal{P}} \sin \theta. \quad (\text{C.5})$$

Como S independe do tempo, o Hamiltoniano (C.2) pode ser escrito

$$\begin{aligned} H' &= \left(\cos \theta + \frac{\gamma^0 \mathcal{I}}{\mathcal{P}} \sin \theta \right) H \left(\cos \theta - \frac{\gamma^0 \mathcal{I}}{\mathcal{P}} \sin \theta \right) \\ &= (m\gamma^0 + \mathcal{I}) \left(\cos \theta - \frac{\gamma^0 \mathcal{I}}{\mathcal{P}} \sin \theta \right)^2 + \mathcal{P} \\ &= \gamma^0 (m \cos 2\theta + \mathcal{P} \sin 2\theta) + \mathcal{I} \left(\cos 2\theta - \frac{m}{\mathcal{P}} \sin 2\theta \right) + \mathcal{P}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

O Hamiltoniano então será essencialmente par se tivermos

$$\tan 2\theta = \frac{\mathcal{P}}{m}. \quad (\text{C.7})$$

Esta equação tem duas soluções, θ_1 e θ_2 , que diferem pelo fator $\pi/2$:

$$\tan \theta_1 = \frac{\mathcal{P}}{E_p + m}, \quad \tan \theta_2 = -\frac{\mathcal{P}}{E_p - m}, \quad E_p = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}. \quad (\text{C.8})$$

Assim, tomando o limite superior, os cálculos do seno e do co-seno fornecem

$$\sin \theta = \frac{\mathcal{P}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}}, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{E_p + m}{2E_p}}. \quad (\text{C.9})$$

Portanto, de (C.5), obtemos a seguinte expressão para o operador U :

$$U = \frac{E_p + m + \gamma^0 \mathcal{I}}{\sqrt{2E_p(E_p + m)}}, \quad (\text{C.10})$$

onde, na teoria de Dirac livre, $\mathcal{I} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}$.

No limite não relativístico, de (C.9) e (C.4), vemos que o operador S torna-se

$$S = -\frac{i}{2m} \gamma^0 \mathcal{I}. \quad (\text{C.11})$$

D O Acoplamento Spin-Órbita

O momento angular total correspondente ao acoplamento spin-órbita, para o elétron, corresponde à soma dos momentos angulares orbital e de spin:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} . \quad (\text{D.1})$$

No caso do elétron, o acoplamento admite os seguintes autovalores:

$$j = \ell \pm \frac{1}{2} \quad , \quad m_j = m \pm \frac{1}{2} . \quad (\text{D.2})$$

Sendo $j = \ell + \frac{1}{2}$, com $m_j = m \pm \frac{1}{2}$ fixo, podemos construir um autoestado de $\mathbf{J}$ na base $|jm_j\rangle = |\ell m\rangle \otimes |sm_s\rangle$ e outro autoestado ortogonal $|j'm_{j'}\rangle$ com $j' = \ell - \frac{1}{2}$:

$$|jm_j\rangle = \alpha |\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \beta |\ell m + 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \quad (\text{D.3})$$

$$|j'm_{j'}\rangle = \beta |\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \alpha |\ell m + 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle . \quad (\text{D.4})$$

As equações de autovalores para $\mathbf{J}$, $\mathbf{L}$ e $\mathbf{S}$, bem como para os operadores escada $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ e $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$, serão utilizadas mais adiante:

$$\mathbf{J}^2|jm_j\rangle = \hbar^2 j(j+1)|jm_j\rangle; \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{L}^2|\ell m\rangle = \hbar^2 \ell(\ell+1)|\ell m\rangle; \quad (\text{D.6})$$

$$\mathbf{S}^2|sm\rangle = \hbar^2 s(s+1)|sm\rangle; \quad (\text{D.7})$$

$$J_{\pm}|jm_j\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}(j \pm m_j + 1)(j \mp m_j)}|jm_j \pm 1\rangle = \hbar C_{j \pm m_j}|jm_j \pm 1\rangle; \quad (\text{D.8})$$

$$L_{\pm}|\ell m\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}(\ell \pm m + 1)(\ell \mp m)}|\ell m \pm 1\rangle = \hbar C_{\ell \pm m}|\ell m \pm 1\rangle; \quad (\text{D.9})$$

$$S_{\pm}|sm_s\rangle = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}(s \pm m_s + 1)(s \mp m_s)}|sm_s \pm 1\rangle = \hbar C_{s \pm m_s}|sm_s \pm 1\rangle. \quad (\text{D.10})$$

Para se obter os coeficientes do acoplamento, é necessária a utilização da identidade:

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + 2L_+ S_- + 2L_- S_+. \quad (\text{D.11})$$

Aplicando $\mathbf{J}^2$ ao estado (D.3), lançando mão da identidade (D.11) e das equações de autovalores (D.5-10), obtemos, com $S_+ \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = 0$ e $S_- \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2|jm_j\rangle &= \hbar^2 j(j+1) \left[\alpha|\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \beta|\ell m+1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \right] \\ &\equiv \alpha(\mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + 2L_+ S_- + 2L_- S_+)|\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \\ &+ \beta(\mathbf{L}^2 + \mathbf{S}^2 + 2L_z S_z + 2L_+ S_- + 2L_- S_+)|\ell m+1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \\ &= \alpha \left\{ \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + 2m \cdot \frac{1}{2} \right] |\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + 2C_{\ell m} C_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} |\ell m+1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \right\} \\ &+ \beta \left\{ \left[\ell(\ell+1) + \frac{3}{4} + 2(m+1) \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right] |\ell m+1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \right. \\ &+ \left. 2C_{\ell-m} C_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} |\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right\}. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Uma relação entre α e β é obtida se agrupamos os coeficientes de cada estado:

$$\alpha \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) - m - \frac{3}{4} \right] - 2C_{\ell-m}C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}\beta = 0 \quad (\text{D.13})$$

$$-2\alpha C_{\ell m}C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} + \beta \left[j(j+1) - \ell(\ell+1) + m + 1 - \frac{3}{4} \right] = 0. \quad (\text{D.14})$$

O determinante acima se anula para os valores de j dados por $j = \ell \pm 1/2$. Tomando $j = \ell + 1/2$ na equação (D.14), obtemos, com $C_{\ell m}$ e $C_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}$ dados por (D.9) e (D.10), uma relação entre α e β :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{\ell + m + 1}{\ell - m}}. \quad (\text{D.15})$$

No entanto, os coeficientes α e β do auto-estado (D.3) devem estar normalizados, ou seja,

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (\text{D.16})$$

Então, de (D.15) e (D.16), vemos que

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ell + m + 1}{2\ell + 1}} \quad \text{e} \quad \beta = \sqrt{\frac{\ell - m}{2\ell + 1}}. \quad (\text{D.17})$$

Portanto,

$$|jm_j\rangle = \sqrt{\frac{\ell + m + 1}{2\ell + 1}} |\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{\ell - m}{2\ell + 1}} |\ell m + 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (\text{D.18})$$

Procedendo de modo análogo, obtemos, para $j = \ell - 1/2$ e $m_j = m + 1/2$:

$$|jm_j\rangle = \sqrt{\frac{\ell - m}{2\ell + 1}} |\ell m\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{\ell + m + 1}{2\ell + 1}} |\ell m + 1\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle. \quad (\text{D.19})$$

As funções de onda para os casos $j = \ell \pm 1/2$ podem ser obtidas no espaço de coordenadas, através da conexão $\langle \theta \phi | jm_j \rangle = \psi_{j\ell \frac{1}{2} m_j}$, $\langle \theta \phi | \ell m \rangle = Y_\ell^m(\theta, \phi)$ e, definindo a base

$$\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle \equiv |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
 \psi_{j\ell\frac{1}{2}m_j} &= \sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^m |+\rangle + \sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1} |-\rangle \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^m \\ \sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1} \end{pmatrix}, \quad j = \ell + \frac{1}{2}, \quad (\text{D.20})
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \psi_{j\ell\frac{1}{2}m_j} &= \sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^m |+\rangle - \sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1} |-\rangle \\
 &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\ell-m}{2\ell+1}} Y_\ell^m \\ -\sqrt{\frac{\ell+m+1}{2\ell+1}} Y_\ell^{m+1} \end{pmatrix}, \quad j = \ell - \frac{1}{2}. \quad (\text{D.21})
 \end{aligned}$$

E Integração gaussiana em variáveis de Grassmann

Quando lidamos com férmions, a estatística exige que utilizemos variáveis anticomutantes. Variáveis que obedecem a essa propriedade são denominadas *variáveis de Grassmann*. No entanto, em contraste com integrais gaussianas em variáveis comutantes, nas integrais gaussianas que envolvem variáveis de Grassmann, o determinante da matriz no expoente aparece no numerador. Pretendemos mostrar essa relação neste Apêndice.

Sejam ξ e η duas variáveis de Grassmann e c uma variável complexa qualquer. São válidas as relações

$$\{\xi, \eta\} = 0 \quad , \quad [\xi, c] = 0 . \quad (\text{E.1})$$

de onde segue automaticamente que $\xi^2 = 0$. Utilizando as definições

$$\int d\xi \equiv 0 \quad \text{e} \quad \int d\xi (\xi) \equiv 1 , \quad (\text{E.2})$$

obtemos

$$\int d\xi \int d\eta (\eta\xi) = 1 . \quad (\text{E.3})$$

Como o campo de Dirac é definido em um espaço complexo, devemos ter

$$(\xi\eta)^* = \eta^* \xi^* = -\xi^* \eta^* . \quad (\text{E.4})$$

Vamos calcular agora uma integral gaussiana simples em variáveis de Grassmann

$$\begin{aligned}
 \int d\xi^* d\xi e^{-\xi^* c \xi} &= \int d\xi^* d\xi (1 - \xi^* c \xi) \\
 &= \int d\xi^* d\xi (1 + \xi \xi^* c) \\
 &= \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^* c) = c
 \end{aligned} \tag{E.5}$$

Note que a expansão da exponencial acima em série de Taylor é finita porque $(\xi \xi^*)^2 = 0$.

Agora, calculemos a integral introduzindo um fator $(\xi \xi^*)$:

$$\begin{aligned}
 \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^*) e^{-\xi^* c \xi} &= \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^*) (1 - \xi^* c \xi) \\
 &= \int d\xi^* d\xi (\xi \xi^* c) \left(\frac{1}{c} + \xi \xi^* \right) = 1.
 \end{aligned} \tag{E.6}$$

Precisamos integrar agora sobre n variáveis de Grassmann. Considere então n variáveis de Grassmann ξ_i e C uma matriz unitária tal que $\eta_i = C_{ij} \xi_j$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \prod_{i=1}^n \eta_i &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\dots\ell} \xi_1 \xi_2 \dots \xi_\ell \\
 &= \frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\dots\ell} C_{ii'} \xi_{i'} C_{jj'} \xi_{j'} \dots C_{\ell\ell'} \xi_{\ell'} \\
 &= \left[\frac{1}{n!} \varepsilon^{ijk\dots\ell} C_{ii'} C_{jj'} \dots C_{\ell\ell'} \right] [\xi_{i'} \xi_{j'} \dots \xi_{\ell'}] \\
 &= (\det C) \prod_i \xi_i.
 \end{aligned}$$

Sendo $D\xi = \prod_i d\xi_i$ e $D\xi^* = \prod_i d\xi_i^*$ e C_{ij} uma matriz diagonalizada, utilizando (E.6), segue então que

$$\begin{aligned}
 \int D\xi^* D\xi e^{-\xi_i^* C_{ii} \xi_i} &= \int D\xi^* D\xi e^{-\sum_i \xi_i^* c_{ii} \xi_i} \\
 &= \prod_i c_{ii} = \det C.
 \end{aligned} \tag{E.7}$$

Portanto, concluímos que o determinante da integração gaussiana em variáveis de Grassmann surge no numerador.

F Prova da relação $\ln \det Q = \text{Tr} \ln Q$

Seja a matriz diagonal $P_D = \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$ e Q_D definida como

$$\begin{aligned} Q_D &= I + P_D + \frac{1}{2}P_D^2 + \frac{1}{3!}P_D^3 \cdots \\ &= e^{P_D}, \end{aligned} \tag{F.1}$$

então,

$$P_D = \ln Q_D. \tag{F.2}$$

Desta forma, Q_D também será diagonal:

$$Q_D = \begin{pmatrix} e^{p_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q_n \end{pmatrix}. \tag{F.3}$$

Sendo U uma matriz arbitrária, multipliquemos (F.1) pela esquerda por U e pela direita por U^{-1} :

$$UQ_DU^{-1} = I + UP_DU^{-1} + \frac{1}{2}(UP_DU^{-1})(UP_DU^{-1}) + \cdots \tag{F.4}$$

Agora, seja $Q = UQ_DU^{-1}$ e $P = UP_DU^{-1}$ as matrizes *não diagonais* resultantes dessa operação. Assim, de (F.4), temos que

$$Q = I + P + \frac{1}{2}P^2 + \cdots = e^P,$$

ou

$$P = \ln Q. \quad (\text{F.5})$$

Agora, veja que:

$$\begin{aligned} \ln \det Q &= \ln \det (U Q_D U^{-1}) = \ln(q_1 q_2 \cdots q_n) \\ &= \ln e^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \\ &= p_1 + p_2 + \cdots + p_n = \sum_i p_i = \text{Tr} P. \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

Portanto, de (F.5) e (F.6), temos que

$$\ln \det Q = \text{Tr} \ln Q. \quad (\text{F.7})$$

G Integrais de Feynman regularizadas dimensionalmente

As integrais de Feynman utilizadas nesta dissertação, representadas em uma dimensão D qualquer no espaço de Minkowski [19] , são dadas por

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha} i}{(4\pi)^{D/2} m^{2\alpha-D}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{G.1})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{g_{\mu\nu}}{2} \frac{(-1)^{\alpha-1} i}{(4\pi)^{D/2} m^{2\alpha-D-2}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 1)}{\Gamma(\alpha)} \quad (\text{G.2})$$

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma}{(p^2 - m^2)^\alpha} = \frac{(-1)^{\alpha} i}{(4\pi)^{D/2} m^{2\alpha-D-4}} \frac{\Gamma(\alpha - D/2 - 2)}{4\Gamma(\alpha)} (g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad (\text{G.3})$$

Em $(2+1)D$, a integral utilizada na dissertação é dada por (G.1) com $D = 3$ e $\alpha = 2$:

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(p^2 - m^2)^2} = \frac{i}{8\pi|m|}. \quad (\text{G.4})$$

Para o caso em que $D = 4$ e $\alpha = 4$, as integrais (G.1) e (G.2) são finitas e resultam em

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p^2 - m^2)^4} = \frac{i}{96\pi^2 m^4} \quad (\text{G.5})$$

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p_\mu p_\nu}{(p^2 - m^2)^4} = -\frac{i}{192\pi^2 m^2} g_{\mu\nu} \quad (\text{G.6})$$

Contraindo a última integral nos índices de Lorentz, onde $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 4$, temos que

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{p^2}{(p^2 - m^2)^4} = -\frac{i}{48\pi^2 m^2}. \quad (\text{G.7})$$

A integral (G.3) é logaritmicamente divergente para o caso em que $D = 4$ e $\alpha = 4$. Assim, vamos analisar o comportamento desta integral na vizinhança de $D = 4 - 2\epsilon$, expandido a expressão [24]

$$\left(\frac{1}{m^2}\right)^{2-\frac{D}{2}} = 1 - \left(1 - \frac{D}{2}\right) \log(m^2) + \dots \quad (\text{G.8})$$

A expansão da função $\Gamma(\epsilon)$ é representada por

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (\text{G.9})$$

onde $\gamma \approx 0,5772$ é a constante de Euler-Mascheroni. Sendo $C(m^2)$ a constante de (G.3), para $\alpha = 4$ temos que

$$\begin{aligned} C(m^2) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{4\Gamma(4)} \left(\frac{4\pi}{m^2}\right)^\epsilon = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(\epsilon)}{4\Gamma(4)} e^{\epsilon \log(\frac{4\pi}{m^2})} \\ &= \frac{i}{384\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \left[1 + \epsilon \log \frac{4\pi}{m^2} + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left(\log \frac{4\pi}{m^2}\right)^2\right] \\ &= \frac{i}{384\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right] \end{aligned} \quad (\text{G.10})$$

Portanto,

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p_\mu p_\nu p_\rho p_\sigma}{(p^2 - m^2)^4} = \frac{i}{384\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right] (g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} + g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \quad (\text{G.11})$$

Contraindo dois índices de Lorentz, obtemos

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^2 p_\mu p_\nu}{(p^2 - m^2)^4} = \frac{i}{64\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon)\right] g_{\mu\nu} \quad (\text{G.12})$$

Novamente, contraindo os dois últimos, temos que

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{p^4}{(p^2 - m^2)^4} = \frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{1}{\epsilon} + \log \frac{4\pi}{m^2} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right]. \quad (\text{G.13})$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, Ann. der Physik 17, 981 (1905).
- [2] J. Schwinger, Phys. Rev. **82**, (1951) 914.
- [3] V. A. Kostelecký, S. Samuel, Phys. Rev. D **40**, 11886 (1989).
- [4] L. K. Gibbons *et al.* Phys. Rev. D **55**, 6625 (1997).
- [5] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **89**, 23 1602 (2002).
- [6] D. Colladay, V. A. Kostelecký, Phys. Rev. D **55**, 6760 (1997).
- [7] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, Ann. Phys. (NY) **140** (1982) 372.
- [8] G. V. Dunne, arXiv:hep-ph/99021151.
- [9] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, Phys. Rev. D **41**, 1231 (1990).
- [10] R. Jackiw and V. A. Kostelecký, Phys. Rev. Lett. **82**, 3572 (1999).
- [11] B. Altschul, *Phys. Rev D* **70**, 056005 (2004).
- [12] T. Mariz, J. R. Nascimento, A. Yu. Petrov, L. Y. Santos, A. J. da Silva
Phys.Lett.B 661:312-318,2008.
- [13] Streater, R. F. and Wightman, A. S., *PCT, Spin, Statistics, and All That*,
Benjamin Cummings, London 1964.

- [14] R. Bluhm, V. A. Kosteleký and N. Russel, *Phys. Rev. D* **57**, 3932-3943 (1998).
- [15] R. Bluhm, V. A. Kosteleký and N. Russel, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 1432 (1997).
- [16] L. L. Foldy, S. A. Wouthuysen, *Phys. Rev.*, **78**, 29 (1950).
- [17] O. G. Kharlanov, V. Ch. Zhukovsky, [arXiv:hep-th/0705.3306v1](#).
- [18] M. M. Ferreira Jr., F. M. O. Moucherek [arXiv:hep-th/0601018v3](#).
- [19] Gomes, M. O. C. *Teoria Quântica dos Campos*. Edusp, São Paulo, 2002.
- [20] Gradshteyn, I. S, Ryzhik, I. M. *Table of Integrals, Series and Products: Corrected and Enlarged Edition*. Academic Press, Inc. San Diego, 1980.
- [21] M. Gomes, T. Mariz, J. R. Nascimento, and A. J. da Silva *Phys. Rev. D* **77**, 105002 (2008).
- [22] V. A. Kosteleký and N. Russel, [arXiv:hep-th/08010287v3.3306v1](#).
- [23] V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics - Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics*, Oxford, Elsevier Butterworth-Heinemann, 2006 (Second Edition).
- [24] M. E. Peskin, D. V, Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, The Advanced Book Program, 1995.
- [25] T. Mariz, J.R. Nascimento, E. Passos *Braz.J.Phys.* 36 (2006) 1171-1177.
- [26] R. Bluhm [arXiv:hep-th/0011272v1](#).