

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



305M810T3963

**Dinâmica do Grupo de Renormalização:  
Um estudo via equações diferenciais parciais**

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3963 ex. 1

Leonardo Fernandes Guidi

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para concorrer ao título de Doutor, pelo curso de Pós-Graduação em Física – Área de concentração: Física.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Humberto Marchetti

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aldo Procacci (UFMG)

Prof. Dr. Clodoaldo Grotta Ragazzo (IME-USP)

Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti (IF-USP)

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IF-USP)

Prof. Dr. Nestor Felipe Caticha Alfonso (IF-USP)

Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

São Paulo

2003

5-09-2004  
2004

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Guidi, Leonardo Fernades

Dinâmica do Grupo de Renormalização: um estudo via equações diferencias parciais. São Paulo, 2003

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

Orientador: Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano  
Marchetti

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1.Mecânica Estatística de Equilíbrio;  
2.Grupo de Renormalização; 3. Gás de Coulomb;  
4.Gás de Dipolos; 5. Modelo Hierárquico; 6. Séries de Mayer

USP/IF/SBI-001/2004

## Agradecimentos

À Fabiana, por sua paciência e compreensão.

Aos meus pais e minha tia Iara, por seu apoio incondicional.

Ao meu orientador, Domingos, por seu apoio e entusiasmo incansáveis.

Ao professor Clodoaldo G. Ragazzo, pelas preciosas referências bibliográficas na disciplina de equações diferenciais.

Aos meus amigos que presenciaram o desenvolvimento do meu trabalho de maneira mais próxima: Arnaldo, Cassio Leandro, Claudio, Clinton, Davi, Eduardo, Fabiano, Marcelo, Nara e Roberto; meus agradecimentos pelas palavras de incentivo e por sua sincera amizade.

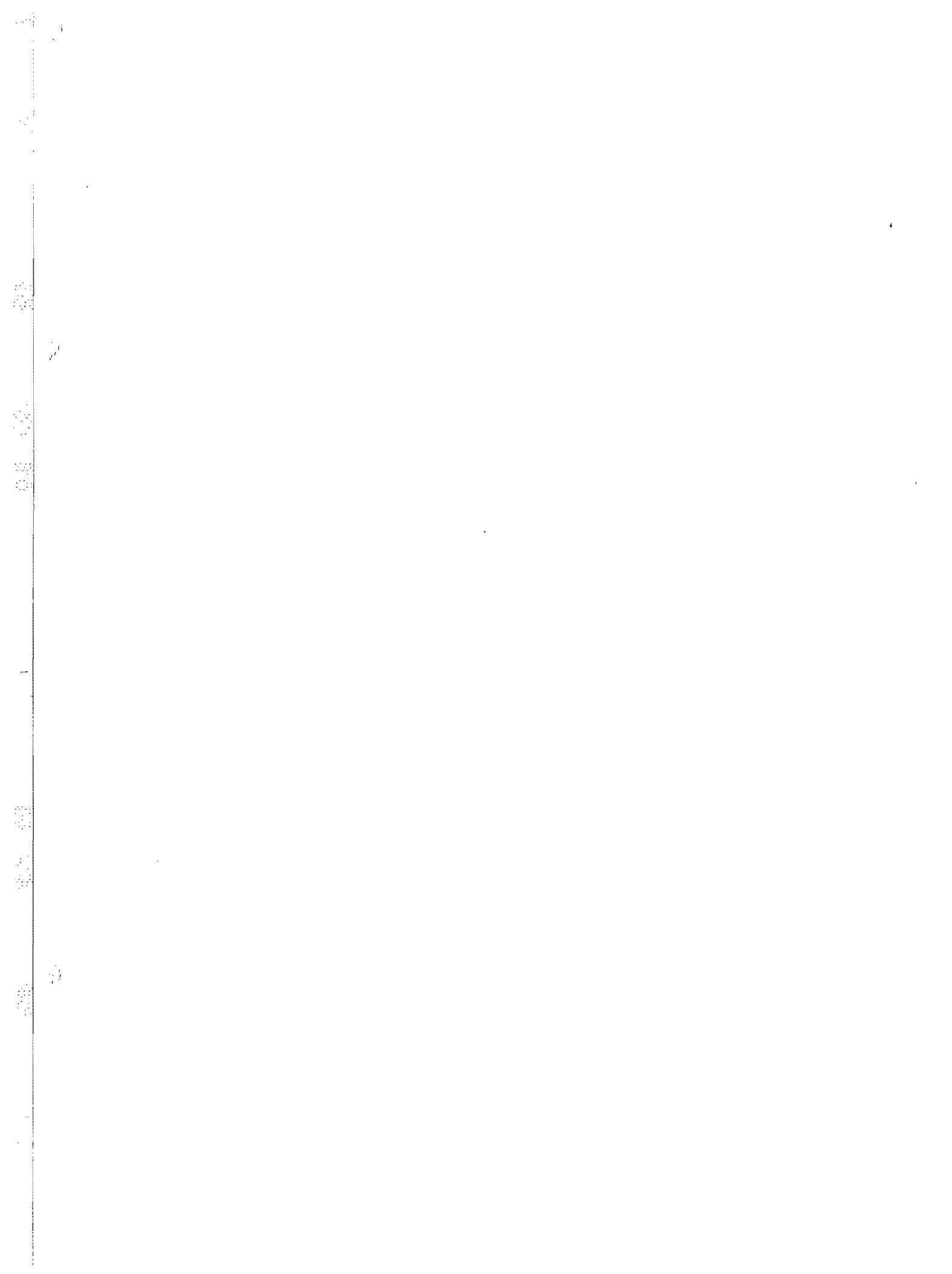
Ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo e, mais especificamente, ao seu Departamento de Física Geral, pelo acesso às suas facilidades.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pela concessão de bolsa de doutorado e pelo apoio financeiro, imprescindíveis à realização desta pesquisa.



*Data æquatione quocunque, fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice  
versa.*

Isaac Newton



## Resumo

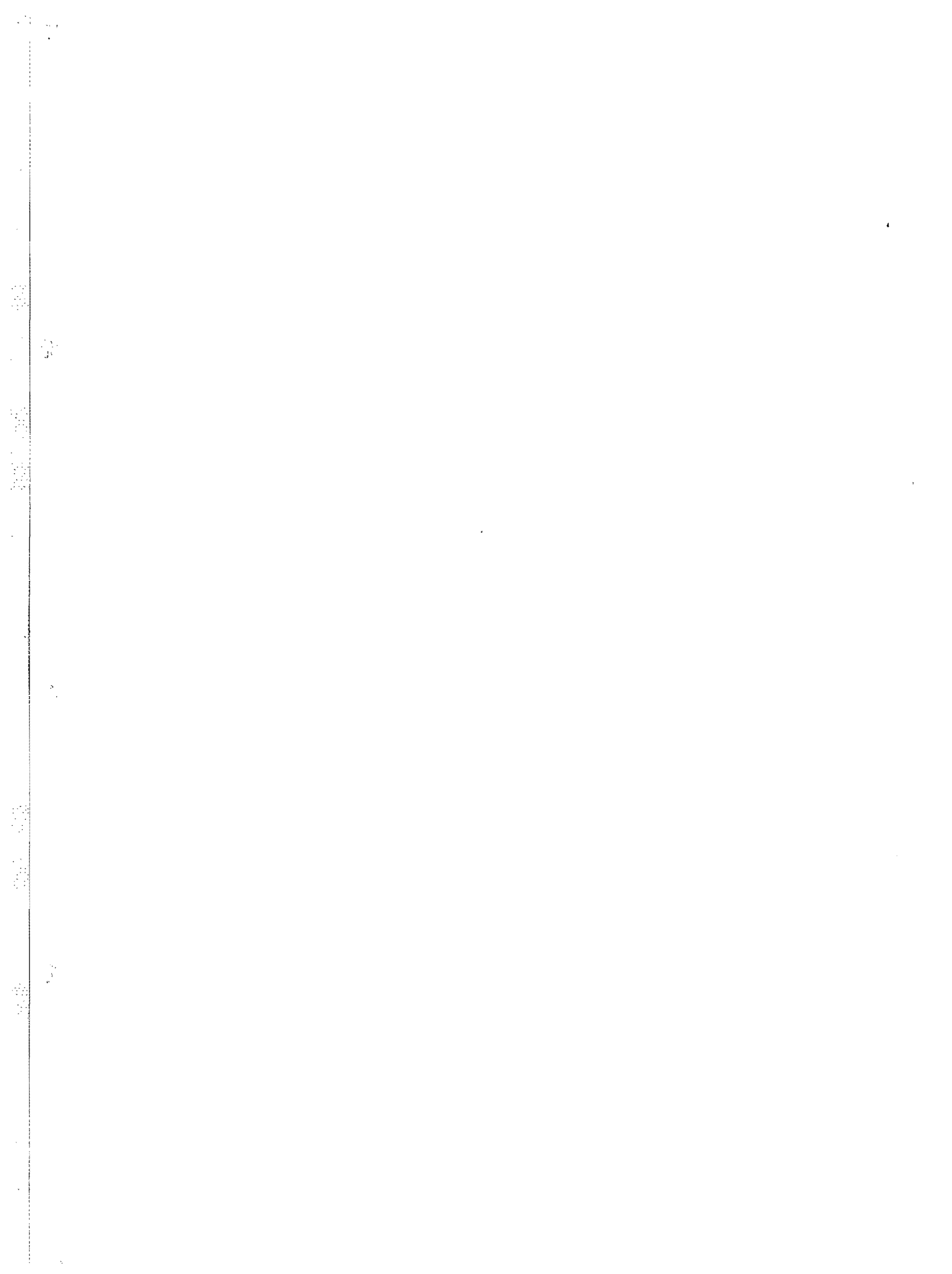
GUIDI, L. F. **Dinâmica do Grupo de Renormalização: Um estudo via equações diferenciais parciais.** Tese Doutorado – Instituto de Física, Universidade de São Paulo. 2003. pp.179

Consideramos dois tópicos distintos relacionados a modelos clássicos da mecânica estatística de equilíbrio. O primeiro constitui-se na análise de equações parabólicas semi-lineares associadas à transformação de grupo de renormalização para o gás de Coulomb hierárquico bidimensional e o gás de dipolos hierárquico em dimensão  $d > 1$  após tomarmos um limite apropriado (limite  $L \downarrow 1$  do tamanho do bloco). O outro tópico estudado foi a construção de uma função majorante  $\Phi(\beta, z)$  para a pressão termodinâmica de um gás formado por partículas interagentes com atividade  $z$  e temperatura  $\beta^{-1}$ , cuja interação entre dois corpos pode ser decomposta em escalas como um potencial estável.

Somos capazes de demonstrar que o problema de valor inicial dado pela equação do gás de Coulomb está bem definido (existência, unicidade e dependência contínua das soluções) em um espaço funcional adequado e a solução converge assintoticamente para uma das infinitas contáveis soluções de equilíbrio. Quanto ao gás de dipolos, embora não tenhamos conseguido provar a existência e unicidade das soluções, garantimos que a única solução estacionária limitada inferiormente é a trivial nula, que é uma solução estável. Ao menos no caso dos modelos hierárquicos, os resultados obtidos permitem dar uma resposta definitiva à conjectura de Gallavotti e Nicolò sobre uma seqüência infinita de transições de fase.

A função majorante é construída como a solução de uma equação diferencial parcial quase-linear de primeira ordem. Através da do método das características relacionamos a solução (majorante) à função  $W$  de Lambert cuja expansão em série possui uma singularidade originada pelo corte que a função  $W$  possui no plano complexo. A descrição da função majorante como uma função  $W$  permite uma melhora nas estimativas de raio de convergência para série de Mayer para pressão.

Palavras-chave: grupo de renormalização, gás de Coulomb, gás de dipolos, séries de Mayer, equações diferenciais parciais não lineares.





## Abstract

GUIDI, L. F. **Renormalization Group Dynamics: An study via partial differential equations.** Tese Doutorado – Instituto de Física, Universidade de São Paulo. 2003. pp.179

We have considered in this thesis two distinct topics related to classic models in equilibrium statistical mechanics. The first one is the analysis of semilinear parabolic partial differential equations given by a suitable limit (size of block  $L \downarrow 1$ ) in the renormalization group for the hierarchical version of the Coulomb gas in two dimensions and for the dipole gas in any dimension  $d > 1$ . The other topic is the construction of a majorant function  $\Phi(\beta, z)$  for the thermodynamic pressure of a gas of interacting particles with activity  $z$  and temperature  $\beta^{-1}$  whose potential admits a scale decomposition in terms of some stable potential.

We are capable to demonstrate the well-posedness (existence, uniqueness and continuous dependence of solutions) for Coulomb gas equations and the global asymptotic convergence of the flow to one of its countably many equilibrium solutions. The dipole gas equations are technically more difficult and lack the results we've achieved in Coulomb gas but, despite its difficulties, we can establish the uniqueness of the trivial solution as a equilibrium one and its stability. At least for hierarchical models, the established results give a definite answer to Gallavotti and Nicolò's conjecture of an infinite sequence of phase transitions.

The majorant function is constructed as the solution of a first order quasi-linear partial differential equation. By means of the characteristics method we are able to relate its solution (the majorant) to Lambert's W-function whose series expansion possess a singularity given by W-function's branch cut discontinuity. The majorant's representation as an W-function allows better estimates for Mayer series convergence.

Key-words: renormalization group, Coulomb gas, dipole gas, Mayer series, nonlinear partial differential equations.



## Lista de Figuras

- 2.0.1 A função distância hierárquica. O diagrama acima ilustra o caso unidimensional com  $L = 2$ . Neste caso, por exemplo, qualquer um dos quatro primeiros pontos está a uma distância de  $2^3$  unidades de qualquer um dos quatro pontos seguintes. 19
- 2.0.2 As configurações  $q$  e  $\bar{q}$ . O lado esquerdo apresenta uma região da rede  $\Lambda_N$  que suporta a configuração de cargas  $q$ . Ao lado a rede  $\Lambda_{N-1}$  com a configuração  $\bar{q}$ . A variável  $\epsilon$  trata-se de um escala que deve ser introduzida para garantir a localidade do funcional energia total para a configuração  $\bar{q}$ . Em duas dimensões e com o potencial coulombiano, não há necessidade dessa escala. 20
- 2.4.1 Trajetórias do sistema dinâmico (2.4.2). 48
- 2.4.2 Comparação entre o valor inicial da órbita de período  $2\pi$ ,  $\hat{w}_1(\alpha)$  e a órbita não limitada (Debye-Hückel),  $w_{\alpha^{-1}}(\alpha) = \alpha^{-1}$ . 55



## Sumário

Lista de Figuras	i
Capítulo 1. Introdução	1
1.1. Resumo dos resultados – conclusões	8
Capítulo 2. Gás de Coulomb bidimensional	17
2.1. A transformação de GR infinitesimal (limite $L \downarrow 1$ )	22
2.2. Existência e unicidade locais	32
2.3. Existência global	42
2.4. Soluções de equilíbrio – bifurcação	46
2.5. Dinâmica e estabilidade das soluções	55
Capítulo 3. Gás de dipolos	79
3.1. A transformação de GR infinitesimal (limite $L \downarrow 1$ )	85
3.2. Soluções triviais e de equilíbrio	90
3.3. Existência e unicidade	93
3.4. Análise Linear para EDP associada ao gás de dipolos	101
Capítulo 4. Renormalização para a série de Mayer	107
4.1. Série de Mayer	116
4.2. Equações diferenciais para majorantes da pressão	126
4.3. Método das características	133
4.4. Gás de Yukawa: uma aplicação	141
Apêndice A. Notação, teoremas de imersão e operadores setoriais	151
A.1. Notação para operadores lineares e espaços funcionais.	151
A.2. Teoremas de imersão para espaços de Sobolev	153

---

A.3. Operadores setoriais e suas potências fracionárias	155
Apêndice B. Operador de Ornstein-Uhlenbeck em $L^2(\gamma_d)$ – generalizações.	159
Apêndice C. O fluxo do GR para as funções de Ursell	171
Referências Bibliográficas	175

## CAPÍTULO 1

### Introdução

A presente tese aborda dois tópicos que, apesar de formalmente distintos, possuem em comum o fato de que uma melhor descrição dos seus fenômenos pode ser obtida por meio da análise de equações a derivadas parciais (EDP). O primeiro desses tópicos é o estudo das propriedades das distribuições de equilíbrio de modelos clássicos com interação de origem eletrostática (gás de Coulomb, gás de dipolos) no limite termodinâmico. O outro tópico abordado é o estudo das propriedades analíticas da série para a pressão de um gás no regime de baixas atividades ou baixas densidades – Série de Mayer.

O modelo conhecido como Gás de Coulomb trata-se do *ensemble* grande canônico clássico formado por partículas carregadas dispostas em uma região conexa  $\Lambda$  (contida, por exemplo, em  $\mathbb{R}^d$  ou  $\mathbb{Z}^d$ ) e sujeitas à interação eletrostática dada pela função de Green  $G(x, y)$  do operador de Laplace  $(-\Delta)$  definido em  $\Lambda$  com condições de contorno na sua fronteira  $\partial\Lambda$ .

A solução fundamental da equação de Laplace em  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  possui simetria radial e é dada por  $\Psi(|x|)$

$$(1.0.1) \quad \Psi(|x|) = \begin{cases} \frac{1}{2} |x| & d = 1 \\ -\frac{1}{2\pi} \log |x| & d = 2 \\ \frac{1}{(d-2)\sigma_d} |x|^{2-d} & d \geq 3 \end{cases}$$

onde  $\sigma_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$  é a área da superfície de uma esfera de raio unitário em dimensão  $d$ .  $\Gamma$  é a função gama de Euler.

Em geral considera-se duas condições de contorno principais. Uma delas é a condição de contorno “livre” que dá origem à função de Green do laplaciano em volume infinito,

$G_\infty(x, y)$ :

$$(1.0.2) \quad G_\infty(x, y) \equiv \Psi(|x - y|).$$

Fisicamente essa condição de contorno corresponde à situação em que a fronteira  $\partial\Lambda$  comporta-se como um “isolante perfeito”. A outra condição de contorno comumente estudada é conhecida como 0-Dirichlet e trata-se do vínculo  $G_0(x', y') = 0$  imposto sobre a função de Green,  $G_0(x', y')$ , para quaisquer  $x' \in \Lambda$  e  $y' \in \partial\Lambda$ . Quando a região  $\Lambda$  é uma esfera de raio  $R$  em dimensão  $d$ , a função de Green possui a forma explícita [20, cap. IV §2.2]

$$(1.0.3) \quad G_0(x, y) = \Psi(|x - y|) - \Psi\left(\left|\frac{|y|}{R}x - \frac{R}{|y|}y\right|\right),$$

onde  $\Phi$  é a solução fundamental (1.0.1). Fisicamente essa condição corresponde à situação em que a fronteira comporta-se como um “condutor perfeito”.

A singularidade presente nos potenciais (1.0.1) e (1.0.3) para  $d > 1$  impede a existência de algum comportamento termodinâmico para o gás pois a tendência natural das partículas de carga oposta seria a de colapsar em um ponto. Por outro lado, se todas possuírem o mesmo sinal, tendem a se afastar indefinidamente e, desta vez, é o comportamento de longa distância do potencial que traz problemas no limite termodinâmico. Portanto, na esperança de garantir a existência desse limite, faz-se necessário impor alguma forma de regularização ao potencial coulombiano como, por exemplo, a presença de volume excluído, conhecido na literatura em língua inglesa como “hardcore”. Uma outra possibilidade seria trabalhar em regiões finitas de  $\mathbb{Z}^d$  onde as partículas possuiriam suporte, e desenvolver o potencial de interação como a versão discreta da função de Green para o operador de Laplace na rede ou como a restrição à rede, dos valores tomados pelo potencial no contínuo já que o comportamento de grandes distâncias é o mesmo em ambos os casos (de acordo com [51]).

No regime de baixas atividades ou baixas densidades e, para determinados intervalos de temperatura, os gases com interação eletrostática apresentam o fenômeno conhecido como *blindagem* – mencionado na literatura em língua inglesa como “screening”. Desde



que existam cargas livres, é razoável esperar que ao introduzirmos uma carga teste neste sistema, forme-se uma “nuvem” de cargas de sinais contrários que se concentram em torno da carga teste original. O efeito dessa nuvem de cargas é a atenuação do potencial da carga teste para distâncias superiores ao raio da nuvem. Porém, se a temperatura for suficientemente baixa, as cargas disponíveis no sistema podem se combinar em dipolos, quadrupolos e demais aglomerados neutros, não restando cargas livres para blindar a carga teste. Obviamente esse argumento do tipo energia-entropia depende da forma do potencial entra as partículas. Em mecânica estatística de equilíbrio, estudamos esse efeito através de funções correlação de dois pontos.

Do ponto de vista da mecânica estatística, a blindagem se manifesta nas quantidades termodinâmicas sob a forma de uma transição de fase de natureza distinta das transições observadas em modelos com interação de curto alcance. O leitor pode consultar em [13] uma compilação recente de um grande número de resultados sobre gases de Coulomb clássicos e quânticos e também alguns resultados sobre gases de dipolos. Na presente introdução escolhemos apresentar um resumo dos resultados relacionados exclusivamente ao gás de Coulomb e ao gás de dipolos nas suas versões hierárquicas.

O modelo do gás de Coulomb bidimensional, na sua versão hierárquica, é introduzido inicialmente no artigo de Marchetti e Perez [45]. Através do mapa induzido pelo grupo de renormalização, os autores encontram o estado de equilíbrio associado à fase de Kosterlitz-Thouless. Esse estado é representado pelo ponto fixo do mapa e exhibe estabilidade linear quando a temperatura inversa  $\beta$  é maior do que um valor crítico  $\beta_c = 8\pi$ . Abaixo desse valor, o ponto fixo perde a sua estabilidade e o estado de equilíbrio deixa de ser o da fase de Kosterlitz-Thouless. A transição marcada pelo ponto  $\beta_c = 8\pi$  corresponde à transição de Kosterlitz-Thouless para o gás de Coulomb bidimensional hierárquico. Nessa mesma época, Benfatto, Gallavotti e Nicolò [4] publicam um artigo tratando da fase de Kosterlitz-Thouless para o gás de Coulomb hierárquico sob o ponto de vista da analiticidade da série de Mayer. Os autores demonstram a analiticidade da pressão em termos da densidade em

torno da origem. Demonstram também o decaimento da função de correlação truncada<sup>1</sup> para  $\beta > 8\pi$  na forma de uma lei de potências com expoente  $\beta/2\pi$ .

Em 1987, Felder [22] propôs um método de estudar a evolução do grupo de renormalização para o gás de Coulomb em dimensão  $d$  através de equações diferenciais parciais. O segundo e terceiro capítulos desta tese são inspirados nesse artigo e na abordagem por ele introduzida. Lá, o autor está principalmente interessado no comportamento das soluções estacionária e suas bifurcações parametrizadas pela dimensão  $d$  do problema e dessa forma, o caso bidimensional é lá mencionado de maneira breve, como um caso especial. Como referência, podemos citar outros artigos inspirados nesse método [39, 43].

Em um artigo subsequente [46], Marchetti e Perez apresentam, com maior detalhe, o formalismo desenvolvido em seu artigo anterior. Neste trabalho, garantem a estabilidade global dos pontos fixos do mapa na fase Kosterlitz-Thouless até  $\beta > (3\pi/2)\beta_c$  e a ausência de blindagem de cargas externas para  $\beta > \beta_c$ . Estudam com mais detalhe a bifurcação associada ao aparecimento de outro ponto fixo estável para  $\beta < \beta_c$  e uma forma fraca de blindagem nessa fase (fase plasma) associada ao decaimento da função de correlação de cargas fracionárias. Nesse caso, o potencial sentido pelas cargas fracionárias ainda apresenta comportamento logarítmico, porém possui uma constante multiplicativa menor do que a unidade, que depende da temperatura  $\beta^{-1}$ .

A questão da blindagem é retomada no artigo de Benfatto e Renn [6]. Nesse trabalho os autores verificam que sempre que existir um ponto fixo não trivial na fase plasma, a função de correlação truncada para o gás de Coulomb hierárquico decai como um lei de potência com expoente 4, independente da temperatura.

Nossa abordagem parte de um gás de Coulomb em  $\mathbb{Z}^2$  cujas partículas possuem simetria por carga, ou seja, partículas com cargas iguais mas de sinal contrário possuem a mesma atividade. No entanto a grande função de partição é descrita não pelas atividades

---

<sup>1</sup>Independente do sistema estar ou não em uma fase Kosterlitz-Thouless, os modelos hierárquicos para gases de Coulomb sempre apresentam o fenômeno de blindagem de cargas inteiras. Portanto, ao analisarmos o comportamento do sistema em suas distintas fases, devemos utilizar a forma truncada da função de correlação sempre que a mesma for estimada a partir de cargas inteiras. Esta exigência não é necessária no caso de cargas externas fracionárias.

de partícula mas pelas atividades de carga que resultam da combinatória das possibilidades de configuração de partículas que contribuem para uma determinada carga total em cada sítio de  $\mathbb{Z}^2$ .

Com vistas a estabelecer um mapa exato para a renormalização das atividades, introduzimos a *pseudométrica hierárquica*, caracterizada pelo fato de que a distância entre dois sítios da rede é a mesma para cada sítio em uma mesma hierarquia. A partir do mapa exato para a renormalização da atividade de carga e da transformação *sine-Gordon*, desenvolvemos uma equação a derivadas parciais através de um limite apropriado, conhecido na literatura [22] como *aproximação do potencial local*.

A equação para o logaritmo da transformada de Fourier da atividade (normalizada) de carga, dada por  $u : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfaz a seguinte equação parabólica semi-linear:

$$(1.0.4) \quad u_t = \frac{\beta}{4\pi} (u_{xx} - u_x^2) + 2u - \left( \frac{\beta}{4\pi} u_{xx} \right) \Big|_{x=0}$$

com condição inicial

$$u(0, x) = u_0(x),$$

onde  $x \in [0, 2\pi]$  é a variável recíproca, sob a transformação de Fourier, da variável carga que admite apenas valores inteiros (no caso do gás bidimensional, as cargas inteiras são preservadas pelo mapa de renormalização). A variável  $t$  representa um determinado ponto na evolução comandada pela renormalização. Como veremos na seção 2.1, o limite  $t \rightarrow +\infty$  está relacionado ao limite termodinâmico do sistema.

Desta forma, os pontos fixos do mapa de renormalização da atividade correspondem às soluções estacionárias da equação (1.0.4) que nos fornecem informações sobre o comportamento do gás em grandes escalas. Em particular, a propriedade do gás de Coulomb de exibir ou não blindagem se reflete sobre o conjunto das soluções estacionárias (conhecido como subespaço invariante de (1.0.4)) da equação diferencial para  $u$ .

O programa que seguimos ao estudar a equação (1.0.4) começa pela caracterização de um espaço funcional abstrato onde a equação (1.0.4) pode ser estudada como um problema de valor inicial. O que nos motivou a seguir essa abordagem foi a existência de ferramentas poderosas para a análise de equações diferenciais em espaços de Banach, por

exemplo, o teorema do ponto fixo para mapas em espaços métricos completos que será empregado na demonstração de existência e unicidade das soluções.

Uma proposta resumida de roteiro para a abordagem de um problema de valor inicial inclui os seguintes passos (com ordens distintas de dificuldade):

- Garantir a existência e unicidade locais para a solução em um espaço funcional abstrato.
- Estender o resultado de existência e unicidade até a fronteira do domínio do espaço com o objetivo de garantir mais adiante que o fluxo da equação converge para o subespaço invariante.
- Estudar o subespaço invariante da equação (espaço formado pelas soluções estacionárias).
- Garantir a inclusão do espaço abstrato em um espaço de funções suficientemente contínuas nas variáveis. Ou seja, garantir que a solução, cuja existência foi estabelecida no ítem anterior, é uma solução clássica (continuamente diferenciável) da equação a derivadas parciais. Essa etapa depende dos teoremas de imersão de espaços de Sobolev (veja o apêndice A.2) e das propriedades regularizadoras do operador de Laplace .
- Desenvolver funcionais de Liapunov [66] para a equação diferencial. De acordo com o princípio invariacional de LaSalle [40, 38], se as soluções do problema de valor inicial estiverem contidas em um subespaço compacto, então o fluxo converge para o subespaço invariante. Isto estabelece as propriedades globais de estabilidade das soluções estacionárias.
- Por fim, utilizar o princípio do máximo [55] para garantir que a hipótese do princípio de LaSalle são satisfeitas. Pelo fato da equação diferencial ser não linear (semi-linear), dispomos de teoremas como princípio do máximo para soluções clássicas apenas. Aqui podemos apreciar a importância de garantir que as soluções do problema de valor inicial são soluções clássicas.

No capítulo 3 aplicamos os procedimentos descritos no caso do gás de Coulomb, à equação originada pela renormalização da atividade de um gás formado por partículas que interagem sob a ação de um potencial dipolar.

Usualmente, o gás de dipolos hierárquico é estudado em conjunto ou como uma fase distinta do gás de Coulomb. Apontamos duas exceções: o artigo de Benfatto, Gallavotti e Nicolò [5] que trata da analiticidade da pressão para o gás de dipolos via séries de Mayer, e o artigo de Gawędzki e Kupiainen [29] que introduz um mapa de renormalização distinto do que utilizamos no capítulo 3. Nesse trabalho, os autores provam que o mapa possui apenas um ponto fixo. Esse ponto é estável e corresponde a uma distribuição gaussiana para as atividades dipolares.

No restante dessa introdução comentaremos algumas das questões que envolvem o estudo das séries de Mayer na mecânica estatística de equilíbrio.

Um dos temas principais de investigação na teoria da mecânica estatística de equilíbrio, relacionado ao estudo dos diagramas de fase, é a definição de regiões do espaço de parâmetros em que não ocorrem transições. De acordo com o teorema de Lee-Yang, estas regiões são livres de zeros da função de partição que, no caso de modelos na rede com potenciais positivos de dois corpos, corresponde ao círculo unitário no plano complexo da variável atividade. Outra forma de determinar se o diagrama de fase é livre de singularidades é através das Séries de Mayer. Embora essa teoria seja incapaz de descrever a equação de estado além do ponto de condensação, ela é capaz de tratar de sistemas definidos no contínuo para uma classe maior de potenciais aceitáveis.

O domínio de convergência das séries de Mayer para um gás de dois corpos, clássico e estável pode ser estabelecido através de diversas técnicas, como as desenvolvidas em [58, 9] e nas referências lá citadas. Existem outros casos, incluindo potenciais atrativos de curta distância e o gás de Yukawa para temperatura inversa  $\beta$  no intervalo  $(0, 4\pi)$ , que requerem o utilização de um número finito [33] ou infinito [2] de iterações das séries de Mayer.

O raio de convergência é determinada freqüentemente por uma “singularidade não física” no plano complexo da atividade  $z$ . Nesta tese, desenvolveremos series majorantes

para a pressão do gás que satisfazem equações diferenciais parciais de primeira ordem. Os majorantes são obtidos a partir da investigação da equação diferencial para as funções de Ursell, introduzidas originalmente por Brydges e Kennedy [12, 11] com o objetivo de reproduzir resultados previamente conhecidos sobre a convergência da série de Mayer [34, 57, 52, 41, 42]. O método das características será utilizado para encontrar a solução. Como no modelo de Tonks para o gás de esferas duras em uma dimensão, a singularidade da série para a pressão é manifestada pela função  $W$  de Lambert [19], o que indica a natureza combinatorial da singularidade.

Na seção seguinte serão enunciados resumidamente os resultados presentes na tese seguidos de sua interpretação física.

## 1.1. Resumo dos resultados – conclusões

**1.1.1. Gás de Coulomb bidimensional.** No capítulo 2 implementamos completamente o programa discutido anteriormente. Utilizamos uma abordagem baseada na teoria geométrica das equações diferenciais parciais.

Os resultados estão dispostos da seguinte forma, um dos principais teoremas, o teorema 2.2.1, trata da existência e unicidade das soluções para todo  $t \geq 0$ , o teorema garante ainda a dependência contínua das soluções com relação às condições iniciais e a compacidade da trajetória  $\{u(t)\}_{t \geq 0}$ . A sua demonstração ocupa as seções 2.2 e 2.3. Na seção seguinte expomos as propriedades das soluções estacionárias.

A questão das soluções estacionárias é equivalente a um problema de Sturm-Liouville não linear. Inicialmente consideramos a equação par as soluções estacionárias sem levar em conta as condições de contorno. Através de uma transformação de variáveis adequadas, somos capazes de descrever a equação diferencial como um problema Hamiltoniano clássico e, nesse caso, as condições de contorno equivalem à escolha de uma órbita de período  $2\pi$ . Para garantir a existência de uma solução com tal período foi fundamental a utilização de um lema proposto originalmente por Chicone [17] que garante a monotonicidade do período para uma família de sistemas hamiltonianos na qual se encontra a equação que é objeto de nosso interesse. O teorema 2.4.1 resume as propriedades das

soluções estacionárias. Entre essas propriedades, a que talvez mereça maior destaque é a relacionada a seqüência de bifurcações a um parâmetro  $\beta$  que envolve as soluções estacionárias.

A última subseção do capítulo 2 trata da estabilidade das soluções estacionárias. Inicialmente estabelecemos a estabilidade local (ou, respectivamente, instabilidade) das soluções estacionárias através de um argumento com base no teorema de comparação para equações diferenciais. Estes resultados estão reunidos no teorema 2.5.1. De acordo com o exposto no teorema 2.5.15, também foi possível estabelecer a estabilidade assintótica global para essas soluções. Partimos de uma abordagem variacional semelhante à proposta por Chafee e Infante [16], porém, por conter um termo não linear com derivada espacial, é difícil propor ingenuamente uma função de Liapunov que conte com as necessárias propriedades. Essa dificuldade é transposta pela técnica desenvolvida por Zelenyak, Lavrentiev Jr. e Vishnevskii [66] que propõe um novo método de construir funcionais de Liapunov para equações diferenciais parabólicas quase-lineares. Através de seu método e do princípio de invariância de LaSalle conseguimos demonstrar a estabilidade global das soluções.

Para melhor ilustrar as implicações físicas dos resultados apresentados no capítulo 2, vamos listar mais detalhadamente os resultados da seção 2.4 que trata da caracterização das soluções estacionárias. Segundo o exposto na seção 2.4, o subespaço invariante é constituído por uma solução estacionária globalmente estável e um número contável de soluções estacionárias instáveis. A variação do número de soluções relaciona-se à temperatura do gás,  $\beta^{-1}$ , de acordo com uma seqüência de bifurcações que ocorrem nos valores de  $\beta_n = 8\pi/n^2$ . Assim, além da solução trivial nula  $\psi_0$  que existe sempre, a cada  $\beta_n$  ocorre a bifurcação, a partir de  $\psi_0$ , de uma solução não trivial não nula que existe no intervalo de valores de temperatura inversa dado por  $0 < \beta \leq \beta_n$ . O ponto  $\beta_1$  caracteriza a transição de fase de Kosterlitz-Thouless para o gás de Coulomb bidimensional na rede com distância hierárquica.

No intervalo  $\beta > \beta_1$ , a única solução estacionária de (1.0.4) é a trivial nula  $\psi_0$ . Essa região de valores de  $\beta$  contém, como únicos pontos fixos do grupo de renormalização, os

estados que, em grandes escalas, são desprovidos de sítios com cargas não nulas. Todas as partículas se agruparam formando aglomerados de carga nula (dipolos, quadrupolos, etc.). Esse fase do gás é conhecida como fase multipolar de Kosterlitz-Thouless e caracteriza-se por estados com ausência de blindagem. Por não existirem cargas livres, ao incluirmos duas cargas teste nesse gás, as mesmas não experimentam qualquer alteração no potencial (constante dielétrica do vácuo).

No intervalo  $\beta_{n+1} < \beta < \beta_1$ , o subespaço é formado por uma solução estacionária globalmente estável  $\psi_1$  que bifurca da solução  $\psi_0$  no ponto  $\beta_1$ ; os demais elementos do subespaço invariante são formados pelas soluções instáveis  $\psi_0, \psi_2, \dots, \psi_n$ . No intervalo de valores de temperatura,  $(8\pi)^{-1} < \beta^{-1} < \infty$ , o modelo é caracterizado por um estado com cargas livres em todas as escalas. Essa fase é conhecida como fase plasma e nela ocorre blindagem das cargas externas. Além disso podemos observar que o estado descrito pela solução estacionária  $\psi_1$  aproxima-se muito rapidamente da solução Debye-Hückel – neste caso, uma parábola entre  $(-\pi, \pi)$  que repete-se com período  $2\pi$  – para valores de  $\beta$  não muito menores do que  $\beta_1$ .

Portanto os resultados obtidos com a análise do gás de Coulomb dão uma resposta definitiva – ao menos para o modelo com distância hierárquica – para a conjectura proposta por Gallavotti e Nicolò [28]. A conjectura baseia-se no estudo dos coeficientes para a série de Mayer do gás de Coulomb. Segundo os autores, a existência de uma seqüência de valores da temperatura  $\beta_j = 8\pi(1 - 1/(2j))$  em que os coeficientes da série divergem estaria relacionada a uma seqüência de bifurcações intermediárias entre a fase plasma,  $\beta < 4\pi$ , e a fase multipolar de Kosterlitz-Thouless,  $\beta > 8\pi$ . De acordo com os nossos resultados essa seqüência de bifurcações inexistente no caso do modelo hierárquico. Como estabeleceremos adiante, a fase plasma surge em  $\beta = 8\pi$  e é a mesma fase para todo  $\beta < 8\pi$ .

Até onde foi possível verificar na literatura, o conjunto de resultados obtidos com a análise da equação (1.0.4) é inédito e permite apreciar com detalhe a transição de Kosterlitz-Thouless, o que previamente era possível apenas através de análises perturbativas. No entanto, a equação (1.0.4) não é um objeto novo. A equação para a sua



derivada,  $v \doteq u_x$ ,

$$(1.1.1) \quad v_t = \frac{\beta}{4\pi} (v_{xx} - 2v v_x) + 2v$$

com condição de contorno

$$v(t, 0) = v(t, 2\pi) = 0,$$

é equivalente à equação proposta originalmente por Burgers (praticamente na forma em que está descrita aqui e com condições de contorno equivalentes) em 1939 [14] para estudar o comportamento de um fluido turbulento. Burgers publicou um série de artigos entre 1939 e 1941 sobre o fenômeno de turbulência em fluidos sob o ponto de vista da equação (1.0.4) e algumas extensões. Os resultados estão disponíveis em artigo publicado em 1948 [15]. Outra aplicação dessa equação é no estudo da evolução do perfil de uma chama, produto da combustão de uma mistura de gases, propagando-se verticalmente por um canal. Esse fenômeno é modelado por uma equação proposta por Rakib e Sivashinsky [56] dada por

$$(1.1.2) \quad u_t = \varepsilon u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + u - \bar{u},$$

onde  $\bar{u}$  representa o valor médio de  $u$  no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Em um artigo posterior [60], Sivashinsky propõe um modelo mais geral, a partir do qual, a equação (1.1.2) é o resultado do limite para pequenas velocidades de propagação. Em contrapartida, no limite de grandes velocidades de propagação o comportamento do perfil é modelado pela equação

$$(1.1.3) \quad u_t = \varepsilon u_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 + \mathfrak{J}(u),$$

onde o operador  $\mathfrak{J}$ ,

$$\mathfrak{J}(u) \doteq \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int dy \frac{1}{y-x} u_x(t, y)$$

é dado pela composição da transformada de Hilbert<sup>2</sup> com sinal negativo e da derivada parcial de  $u$  com relação a  $x$ .

<sup>2</sup>O símbolo *V.P.* denota o valor principal da integral.

*OBSERVAÇÃO* 1.1.1. Publicamos em [36] uma análise comparativa entre as equações (1.1.2) e (1.1.3). Elas possuem em comum o fato de admitirem bifurcações de soluções em seu subespaço invariante (espaço formado pelas soluções estacionárias) controladas pelo parâmetro  $\varepsilon$  e, como veremos na seção 2.4, o número de soluções estacionárias cresce conforme o valor do parâmetro  $\varepsilon$  diminui. Porém, diferem na complexidade do subespaço invariante e no comportamento das bifurcações. A equação (1.1.2) apresenta um subespaço invariante mais simples, formado por soluções que bifurcam a partir da solução trivial nula, em particular, a primeira solução a bifurcar é a única solução estacionária que “herda” a estabilidade linear da solução trivial, as demais bifurcações são sempre instáveis. O subespaço invariante de (1.1.3) é caracterizado por diversas bifurcações que podem surgir a partir da solução trivial ou mesmo de uma solução não trivial que por sua vez é sempre produto de uma bifurcação anterior; assim, o subespaço invariante de (1.1.3) possui um panorama formado por uma cascata de bifurcações cuja razão de crescimento é sensivelmente maior que a observada no caso da equação (1.1.2). Além disso, ao contrário da equação anterior, a solução linearmente estável (que é sempre única) troca a estabilidade sempre que uma nova bifurca a partir de si.

Tanto a equação para o gás de Coulomb (1.0.4) quanto a equação proposta por Rakib e Sivashinsky (1.1.2) dão origem a equações intimamente relacionadas a equação proposta por Burgers (1.1.1). Uma importante propriedade que todas elas partilham, para valores de  $\varepsilon$  próximos da origem, é o comportamento metaestável das soluções instáveis. Descrito rigorosamente por Berestycki, Kamin e Sivashinsky [7] e quantitativamente por Sun e Ward [62] através de métodos assintóticos, esse fenômeno está relacionado ao fato de que, a menos das condições de contorno, a derivada de uma solução estacionária é autofunção da equação linearizada em torno da mesma solução estacionária e possui autovalor nulo. Ao corrigir a autofunção para que satisfaça as condições de contorno (na literatura em língua inglesa diz-se construir uma “boundary layer”) o autovalor recebe uma correção de ordem  $\exp(-1/\varepsilon)$ .

Do ponto de vista da termodinâmica de equilíbrio para o gás de Coulomb hierárquico bidimensional, esse resultado trazido da área de equações diferenciais, implica a existência

de estados metaestáveis nesse sistema. Como veremos no decorrer do segundo capítulo, a variável  $t$  nas equações diferenciais está relacionada ao volume do sistema. Portanto, com as devidas modificações, podemos concluir que quando  $\beta \ll 1$  (altas temperaturas), existem atividades de carga, construídas a partir das derivadas das soluções instáveis de (1.0.4), sobre as quais a ação do grupo de renormalização produz quase nenhuma modificação em escalas de  $t \lesssim \exp(1/\varepsilon)$  e assim, se o sistema possui volume finito e a temperatura for suficientemente alta, o grupo de renormalização pode estacionar em uma distribuição para a atividade de carga distinta da solução de equilíbrio.

O tópico do gás de Coulomb foi também assunto da dissertação de mestrado. Porém, os resultados na forma em que estão aqui apresentados – na forma de teoremas – foram desenvolvidos ao longo da produção desta tese e levaram diversos anos para amadurecer e tomar a sua forma atual. Os resultados apresentados nesse capítulo foram publicados em conjunto com Marchetti [35].

**1.1.2. O gás de dipolos em dimensão  $d > 1$ .** O modelo do gás de dipolos na rede com pseudométrica hierárquica, objeto de estudo do capítulo 3, aparenta possuir um comportamento menos rico do que o apresentado pelo gás de Coulomb no mesmo quadro. De acordo com a análise formal empregada, esse modelo não apresenta transições de fase e, em grandes escalas, os estados de equilíbrio são sempre caracterizados pela ausência de dipolos livres. No entanto, sob o ponto de vista da equação para a evolução da atividade dipolar em dimensão  $d > 1$ ,

$$(1.1.4) \quad u_t = \beta \frac{d}{2\sigma_d} (\Delta u - |Du|^2) - \frac{d}{2} x \cdot Du + du$$

o gás de dipolos aparenta indícios de ser um problema tecnicamente delicado. Em particular, a prova de existência e unicidade local, o primeiro ponto do roteiro apresentado no início dessa introdução, carece de demonstração. O procedimento utilizado na prova de existência e unicidade, conta com a descrição da equação diferencial na forma de uma equação integral dada pela fórmula da variação das constantes. Nesse procedimento o operador linear desempenha um papel importante e, em geral, os espaços funcionais nos quais desenvolvemos a prova são relacionados ao domínio do operador linear. No caso da

equação (1.1.4), o espaço sugerido pelo operador linear não é adequado para garantir a condição de Lipschitz local para a parte não linear da equação. Neste ponto a demonstração falha. Desconhecemos na literatura alguma evidência de que esse problema possa ser contornado, se é apenas uma dificuldade técnica ou se essa impossibilidade possui implicações mais profundas sobre o caráter da equação.

Na seção 3.2, estudamos as soluções estacionárias da equação (1.1.4). O teorema 3.2.2 estende um resultado anterior de Felder [22] sobre o caráter da solução estacionária. O teorema 3.2.2 estabelece a ausência de soluções estacionárias limitadas inferiormente para a equação (1.1.4) com um multiplicador de Lagrange (vínculo da normalização da atividade) para qualquer valor de  $\beta$  e qualquer dimensão  $d$ . Esse resultado implica, ao menos formalmente, a trivialidade do comportamento do gás de dipolos.

A seção seguinte apresenta uma análise da estabilidade da solução estacionária trivial. Pela linearização da equação (1.1.4) em torno da solução – que corresponde à simples remoção do termo não linear – temos que a parte linear da mesma corresponde ao operador linear de Ornstein-Uhlenbeck [8]. Através da análise apresentada nessa subseção, podemos encontrar os autovalores (teorema 3.4.1) e as autofunções, dadas por polinômios de Laguerre. Nesse ponto é interessante compararmos esses resultados com a abordagem desenvolvida por Gawędzki e Kupiainen [29]. Utilizando uma versão distinta do procedimento de renormalização, os autores concluem que o ponto fixo da atividade dipolar é da forma

$$\exp(-c(u_0)\phi^2)$$

para uma constante positiva  $c = c(u_0)$  que depende da condição inicial;  $\phi$  é a variável recíproca do momento dipolar. Esse comportamento, no nosso caso, está relacionado à primeira autofunção que é marginalmente estável. No entanto, como ilustrado na seção, esse mesmo autovalor relaciona-se à única solução exata de (1.1.4) com exceção da solução estacionária trivial dada por

$$\exp\left(-\frac{k}{1+4kt}\phi^2\right),$$

onde  $k$  é uma constante positiva. E portanto, podemos observar essa solução converge polinomialmente em  $t$  para a solução trivial nula.

**1.1.3. Série de Mayer.** O último capítulo trata da convergência para séries de Mayer. Podemos resumir os resultados desse capítulo em dois teoremas, 4.0.3 e 4.0.4. O primeiro trata da convergência da série para um gás formado por partículas cuja interação pode ser decomposta em escalas e nessas escalas o potencial é do tipo positivo e satisfaz critérios adicionais (ver (4.0.11)-(4.0.14)). Nesses casos a série converge para valores da atividade  $z$  que pertençam ao disco

$$(1.1.5) \quad |z| < \left( e \beta \min \left\{ \int_0^t ds \|\dot{v}(s)\| e^{2 \int_s^t d\tau B(\tau)}, e^{\int_0^t d\tau B(\tau)} \int_0^t ds \|\dot{v}(s)\| \right\} \right)^{-1}.$$

O segundo teorema é uma aplicação do teorema anterior no caso do gás de Yukawa (4.4.1). Como demonstrado pelo teorema, a série do gás de Yukawa é singular nos valores  $\beta_k = 8\pi(1 + k^{-1})^{-1}$  devido à divergência ultravioleta dos primeiros  $k$  termos da série. De acordo com o teorema 4.04, a remoção desses primeiros  $k$  termos garante que a série converge sempre que

$$\beta < \beta_k \quad \text{e} \quad |z| < \frac{\beta_k - \beta}{e \beta_k \beta}.$$

Ambos os teoremas apresentam melhorias quantitativas em relação aos resultados conhecidos previamente na literatura. Porém além dessa melhoria quantitativa, devemos ressaltar que o procedimento utilizado por si só possui a virtude de ser mais claro e poderoso. A maneira pela qual obtemos as estimativas apresentadas acima está relacionada à construção de majorantes que são soluções de equações diferenciais parciais de primeira ordem que, em geral, podem ser resolvidas diretamente a partir do método das características. De acordo com esse método, o domínio de validade da solução é folheado pelas curvas características projetadas, dadas pela solução de uma equação diferencial ordinária relacionada à equação diferencial parcial. Como veremos no desenvolvimento do texto, as equações diferenciais parciais obtidas são não lineares; e essa mesma propriedade é a causa do cruzamento das características projetadas em tempo finito, o que, por sua vez,

está por de trás do surgimento de não analiticidades da solução para a equação diferencial parcial. Assim, o envelope formado pelo cruzamento das características representa a fronteira do domínio de definição das soluções analíticas da equação diferencial parcial original que está contida na região definida pela desigualdade (1.1.5).

As funções majorantes para a pressão e densidade de um gás obtidas por meio das equações diferenciais fornecem limites superiores sem a necessidade de recorrer diretamente às estimativas de contagem de grafos tipo árvore e demais análises combinatórias próprias à teoria de grafos. Na realidade, o critério de convergência dado por (1.1.5) origina-se da região de analiticidade da função  $W$  de Lambert  $W(x)$  [19] que, por sua vez, está relacionada diretamente à função geratriz exponencial das árvores enraizadas  $T(x)$  através da expressão  $T(x) = -W(-x)$ .

## CAPÍTULO 2

### Gás de Coulomb bidimensional

Este capítulo tratará do desenvolvimento do GR para o Gás de Coulomb hierárquico na forma de uma EDP para a medida *a priori* das cargas através de um procedimento conhecido na literatura como aproximação de potencial local. Esse procedimento, discutido por Felder em [22], consiste em partir do GR usual, na forma da integração sobre flutuações em blocos reescalados de dimensão  $L$ , e uma vez definida a transformação para a medida (na representação de *sine-Gordon*), tomar o limite  $L \rightarrow 1$  que permite estudar a evolução da medida não mais através de um mapa mas sim por meio de um parâmetro contínuo. Em seguida, apresentaremos um tratamento da EDP através da teoria geométrica desenvolvida por Daniel Henry [38]. Sob determinadas condições, a medida a priori para as cargas pertence a um espaço de Banach  $B$  no qual podemos definir um sistema dinâmico que descreve a evolução dessa medida pela ação da transformação do GR. Como veremos nesta subseção, partindo de qualquer medida a priori contida nesse espaço, a evolução a conduzirá a um elemento do subespaço invariante do sistema dinâmico.

Vamos considerar o *ensemble* grande canônico de partículas carregadas interagindo através de um potencial coulombiano bidimensional  $\Phi$  em um domínio  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^2$ . Definimos em  $\Lambda$  uma configuração de cargas inteiras  $q : \Lambda \rightarrow \mathbb{Z}$  que associa a cada sítio  $x$  de  $\Lambda$  uma carga total  $q(x)$ . A medida de Gibbs para uma distribuição  $q$  é expressa com a ajuda de dois funcionais, o funcional energia total  $E_\Lambda : \mathbb{Z}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(2.0.6) \quad E_\Lambda(q) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda} q(x) \Phi(x,y) q(y)$$

e o funcional medida *a priori*  $F_\Lambda : \mathbb{Z}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(2.0.7) \quad F_\Lambda(q) = \prod_{x \in \Lambda} \lambda(q(x)),$$

definida por funções reais positivas  $\lambda : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}_+$  pertencentes ao espaço das seqüências absolutamente somáveis  $\ell^1$ . A medida de Gibbs para uma configuração  $q$  é dada por  $\mu_\Lambda : \mathbb{Z}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$(2.0.8) \quad \mu_\Lambda(q) \doteq \frac{1}{\Xi_\Lambda} F_\Lambda(q) e^{-\beta E_\Lambda(q)},$$

onde  $\beta$  é o inverso da temperatura e  $\Xi_\Lambda$  é a grande função de partição,

$$\Xi_\Lambda = \sum_{q \in \mathbb{Z}^\Lambda} F_\Lambda(q) e^{-\beta E_\Lambda(q)}.$$

A interação entre as partículas depende apenas da carga das mesmas, portanto ao definir a medida discreta (2.0.7) estamos privilegiando a descrição estatística do gás através da atividade de carga total  $q(x)$  em um sítio  $x$ ,  $\lambda(q(x))$ , em detrimento das atividades de partícula  $z_\alpha$  relacionadas ao conjunto de partículas com atividades distintas indexadas por  $\alpha$ . Assim, uma vez estabelecida as características do gás dadas pelo conjunto de atividades de partícula  $\{z_\alpha\}$  e pelas propriedades de ocupação dos sítios da rede  $\mathfrak{P}$ , é um exercício de combinatória encontrar a respectiva atividade de carga  $\lambda(q; \{z_\alpha\}; \mathfrak{P})$ , a qual, por simplicidade, nos referiremos como  $\lambda(q)$ . Encontramos usualmente na literatura sobre gases de Coulomb as atividades de carga conhecidas como *standard* e *hardcore*. De acordo com [26], o Gás de Coulomb, constituído por duas espécies de partículas com a mesma atividade e cargas opostas, em vista da possibilidade de mais de uma partícula ocupar o mesmo sítio, no *ensemble* grande canônico possui atividade de carga dada por

$$\lambda_{\text{std}}(q) = I_q(2z),$$

onde  $I_q$  é a função de Bessel modificada de  $q$ -ésima ordem. Já a atividade do Gás de Coulomb *hardcore* escrita com a ajuda de deltas de Kroenecker, reflete a exigência de que cada sítio possa ser ocupado por no máximo uma partícula; sua atividade de carga é dada por

$$\lambda_{\text{hc}}(q) = \delta_{q,0} + z(\delta_{q,1} + \delta_{q,-1}).$$



Introduziremos agora o modelo para o Gás de Coulomb em sua forma hierárquica como proposto originalmente em [46]. Sejam dois inteiros  $N \geq 0$  e  $L > 1$ , o suporte para as configurações de cargas é dado pela região  $\Lambda = \Lambda_N = [-L^N + L^{N-1}, L^N]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ . Utilizaremos como interação entre as partículas a função de Green do laplaciano com condições livres,  $\Phi(|x - y|) = G_\infty(x, y) \equiv \Psi(|x - y|)$  (1.0.2) restrita<sup>1</sup> aos pontos da rede  $\Lambda_N$ , porém ao considerar a distância entre dois pontos  $x, y \in \Lambda_N$ , substituímos a métrica euclideana  $|x - y|$  pela função *distância hierárquica* expressa por  $d_L(x, y)$ :

$$(2.0.9) \quad d_L(x, y) \doteq L^{n(x,y)},$$

onde

$$n(x, y) \doteq \inf \{n \in \mathbb{N}_+ : [L^{-n}x] = [L^{-n}y]\}$$

e a notação  $[x] \in \mathbb{Z}^2$  indica o vetor cujas componentes são dadas pelas partes inteiras das componentes correspondentes de  $x \in \mathbb{R}^2$ .

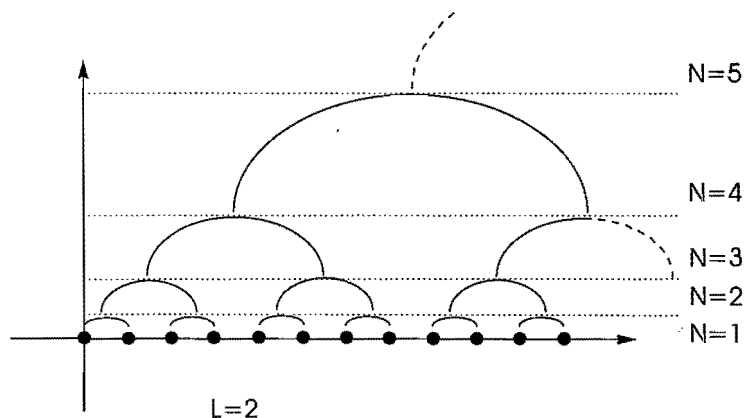


FIGURA 2.0.1. A função distância hierárquica. O diagrama acima ilustra o caso unidimensional com  $L = 2$ . Neste caso, por exemplo, qualquer um dos quatro primeiros pontos está a uma distância de  $2^3$  unidades de qualquer um dos quatro pontos seguintes.

<sup>1</sup>Poderíamos utilizar a função de Green para o laplaciano discreto na rede. No entanto, o comportamento de longa distância é também dado por  $-\log|x|$ . Como o tratamento utilizado para estudar o sistema é o grupo de renormalização, as diferenças no potencial a curta distância são absorvidas pelo processo de integração sobre flutuações. Portanto, por simplicidade, utilizamos o potencial logarítmico *ab initio*.

A distância hierárquica (2.0.9) não possui invariância translacional mas apresenta as seguintes propriedades

$$(2.0.10) \quad d_L(x, x) = L,$$

$$(2.0.11) \quad d_L(Lx, Ly) = L d_L(x, y),$$

$$(2.0.12) \quad d_L(x + \zeta, y + \xi) = d_L(x, y),$$

onde  $\zeta$  e  $\xi$  são vetores em  $\mathbb{Z}^2$  tais que  $d_L(x + \zeta, x) = L = d_L(y, y + \xi)$ . As propriedades da distância hierárquica aliadas à forma do potencial  $\Phi$  em (2.0.6) são fundamentais para garantir a *localidade* do funcional energia total sob a ação das transformações de bloco e escala na forma proposta por Kadanoff.

Vamos considerar para cada configuração  $q$  com suporte em  $\Lambda_N$ , a configuração  $\bar{q}$  formada pela soma das cargas em blocos com  $L^2$  sítios. A configuração  $\bar{q}$  possui suporte na rede contraída  $\Lambda_{N-1}$ ,  $\bar{q}: \Lambda_{N-1} \rightarrow \mathbb{Z}$  e é expressa por

$$(2.0.13) \quad \bar{q}(x) = \sum_{\substack{0 \leq y_i < L \\ i=1,2}} q(Lx + y)$$

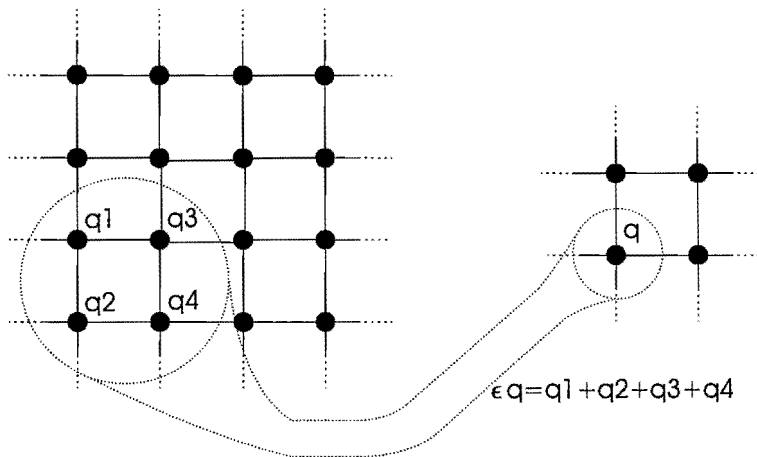


FIGURA 2.0.2. As configurações  $q$  e  $\bar{q}$ . O lado esquerdo apresenta uma região da rede  $\Lambda_N$  que suporta a configuração de cargas  $q$ . Ao lado a rede  $\Lambda_{N-1}$  com a configuração  $\bar{q}$ . A variável  $\epsilon$  trata-se de um escala que deve ser introduzida para garantir a localidade do funcional energia total para a configuração  $\bar{q}$ . Em duas dimensões e com o potencial coulombiano, não há necessidade dessa escala.

Em termos dos pontos da rede  $\Lambda_{N-1}$ , a energia total de uma configuração  $q$  com suporte em  $\Lambda_N$  pode ser escrita como

$$E_{\Lambda_N}(q) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda_{N-1}} \sum_{\substack{0 \leq \zeta_i, \xi_j < L \\ i,j=1,2}} q(Lx + \zeta) \Phi(d_L(Lx + \zeta, Ly + \xi)) q(Ly + \xi).$$

A partir da definição dos blocos de carga e da propriedade (2.0.12), podemos escrever a energia total em termos dos pontos da rede  $\Lambda_{N-1}$  e da configuração  $\bar{q}$ ,

$$E_{\Lambda_N}(q) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda_{N-1}} \bar{q}(x) \Phi(d_L(Lx, Ly)) \bar{q}(y).$$

Utilizando agora as demais propriedades da métrica hierárquica  $E_{\Lambda_N}(q)$ , podemos relacionar as energias totais das configurações  $q$  e  $\bar{q}$

$$E_{\Lambda_N}(q) = E_{\Lambda_{N-1}}(\bar{q}) - \frac{\ln L}{4\pi} \sum_{x \neq y \in \Lambda_{N-1}} \bar{q}(x) \bar{q}(y).$$

Por fim, a neutralidade das configurações bidimensionais implica a relação

$$(2.0.14) \quad E_{\Lambda_N}(q) = E_{\Lambda_{N-1}}(\bar{q}) + \frac{\ln L}{4\pi} \sum_{x \in \Lambda_{N-1}} \bar{q}(x)^2.$$

A cada configuração  $\bar{q}$ , há um conjunto de configurações  $q$  distintas relacionadas à  $\bar{q}$  por (2.0.13). Esta diversidade ou flutuação, está relacionada às propriedades de curta distância no modelo que serão “integradas” a cada escala pelo processo de renormalização. A partir de (2.0.14) podemos notar então que a medida de Gibbs de uma configuração  $\bar{q}$  difere da medida de qualquer uma das correspondentes  $q$  por um termo  $\prod \exp(\beta \ln L / 4\pi \bar{q}(x)^2)$  que depende apenas da carga em cada sítio e pode portanto ser incorporado à atividade. Assim, levando em conta a contração dos  $L^2$  sítios, definimos a transformação de GR como o mapa  $R_{L^2}$  sobre o espaço das medidas de Gibbs

$$(2.0.15) \quad [R_{L^2} \mu_{\Lambda}](\bar{q}) \doteq \sum_{\substack{q \in \mathbb{Z}^{\Lambda_N} \\ \bar{q} \text{ constante}}} \mu_{\Lambda_N}(q).$$

Levando em conta a relação (2.0.14) e a definição da transformação  $R_{L^2}$ , Marchetti e Perez [46] observaram que esta definição para a transformação de GR, ao agir sobre a

medida de Gibbs, preserva a sua estrutura e induz uma transformação sobre a atividade das cargas de maneira que o peso *a priori* para a configuração  $\bar{q}$  possui a expressão

$$F(\bar{q}) = \prod_{x \in \Lambda_{N-1}} \mathcal{R}_{L^2} \lambda(\bar{q}(x)),$$

onde  $\mathcal{R}_{L^2} : \ell^1 \rightarrow \ell^1$  é a transformação induzida pelo GR sobre as atividades de carga  $\lambda$ ,

$$(2.0.16) \quad \mathcal{R}_{L^2} \lambda(q) = L^{-\beta \frac{q^2}{4\pi}} \underbrace{(\lambda \star \lambda \star \dots \star \lambda)}_{(L^2-1) \text{ produtos}}(q)$$

e o símbolo  $\star$  denota o produto de convolução discreto

$$f \star g(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f(n-m)g(m).$$

O mapa definido pela transformação (2.0.16) foi estudado em [46] onde os autores estabeleceram a existência de um valor crítico  $\beta_c = 8\pi$  para o valor do inverso da temperatura tal que na região de valores de  $\beta > \beta_c$  a transformação possui uma solução localmente estável (solução trivial). E ainda, se  $\beta > \tilde{\beta}_c$ , essas mesmas soluções são globalmente estáveis o que implica a ausência de blindagem de cargas para qualquer valor das atividades. No ponto  $\beta_c$ , ocorre uma bifurcação supercrítica que dá origem a uma solução não trivial responsável pela forma “fraca” de blindagem.

### 2.1. A transformação de GR infinitesimal (limite $L \downarrow 1$ )

Nós partimos dessa mesma transformação e, com o auxílio da representação de *sine-Gordon* e da fórmula de Wick, somos capazes de descrever a evolução da atividade da carga através de uma EDP associada ao limite  $L \downarrow 1^+$ . Como veremos a EDP resultante permite conhecer as propriedades do modelo com maior profundidade. Em especial é possível estender os resultados obtidos com o mapa e conhecer novas propriedades da solução não trivial.

Vamos utilizar a representação de *sine-Gordon* para descrever a ação da transformação de GR (2.0.16). Seja uma seqüência  $f = \{f_n\} \in \ell^1$ , indicaremos os pares transformada e antitransformada de Fourier (discretas), respectivamente, por  $\mathcal{F}f(x) \equiv \hat{f}(x)$  e  $f = \mathcal{F}^{-1}\hat{f}$

definidos como

$$\hat{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{inx} \quad \text{e} \quad f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dx \hat{f}(x) e^{-inx}.$$

A ação da transformada sobre o mapa (2.0.16) pode ser escrita, com o auxílio dos teoremas de convolução para transformadas de Fourier, como

$$(2.1.1) \quad \widehat{\mathcal{R}_{L^2} \lambda}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x-y) \hat{\lambda}^{L^2}(y) dy,$$

onde, de acordo com a fórmula de Poisson,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{q \in \mathbb{Z}} L^{-\beta \frac{q^2}{4\pi}} e^{iqx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\beta \ln L}} \sum_{q \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{\pi}{\beta \ln L} (x+2\pi q)^2}. \end{aligned}$$

Utilizando essa última igualdade em (2.1.1) e realizando a mudança de variável  $\zeta = y+2\pi q$ , podemos escrever (2.1.1) como o produto de convolução de uma potência de  $\hat{\lambda}$  por uma medida gaussiana. Indicaremos essa nova transformação por  $\mathfrak{A}_\nu : \mathbf{L}^\nu(0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{C}^\infty[0, 2\pi]$

$$(2.1.2) \quad \mathfrak{A}_{L^2} \hat{\lambda}(x) = \widehat{\mathcal{R}_{L^2} \lambda}(x) = (\gamma * \hat{\lambda}^{L^2})(x),$$

onde  $\gamma$  é uma medida gaussiana em  $\mathbb{R}$  de média zero e variância  $\frac{\beta}{2\pi} \ln L$ ; o símbolo  $*$  representa a operação de convolução usual em  $\mathbb{R}$ .

O diagrama abaixo ilustra a relação entre os mapas para um índice  $L^2 > 1$  inteiro.

$$(2.1.3) \quad \begin{array}{ccc} \lambda & \xrightarrow{\mathcal{R}_{L^2}} & \lambda' \\ \mathfrak{F}^{-1} \updownarrow \mathfrak{F} & L^2 \in \mathbb{N}_+ & \mathfrak{F} \updownarrow \mathfrak{F}^{-1} \\ \hat{\lambda} & \xrightarrow{\mathfrak{A}_{L^2}} & \hat{\lambda}' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \lambda & \xrightarrow{\dots\dots\dots} & \lambda' \\ \mathfrak{F}^{-1} \updownarrow \mathfrak{F} & L^2 \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N} & \mathfrak{F} \updownarrow \mathfrak{F}^{-1} \\ \hat{\lambda} & \xrightarrow{\mathfrak{A}_{L^2}} & \hat{\lambda}' \end{array}$$

Porém, o mapa  $\mathfrak{R}_{L^2}$  está bem definido para  $L \in \mathbb{R}$  tais que  $L \geq 1$  (para  $L = 1$  o mapa torna-se o operador identidade). Assim, ao considerarmos o intervalo de valores do índice  $\delta \in [n, n + 1]$  para um  $n \geq 1$ , o mapa  $\mathfrak{R}_\delta$  interpola os mapas  $\mathfrak{R}_n$  e  $\mathfrak{R}_{n+1}$ .

Assim, dado um gás definido na região  $\Lambda_N$  de cardinalidade  $|\Lambda_N| = 4L^{2N}$ , é possível aplicar  $N$  vezes o mapa  $\mathfrak{R}_{L^2}$ , ou seja, a partir da definição original, uma vez definido o sistema em uma região de “volume”  $|\Lambda|$ , podemos aplicar o mapa ao sistema por um número finito de vezes, proporcional à razão  $\ln |\Lambda| / \ln L$ . Considerando essa mesma região, podemos observar que o uso do mapa  $\mathfrak{R}_{L^2}$  para estudar a evolução do grupo de renormalização conta com a liberdade quanto ao valor de  $L$  que pode tomar valores reais. Isto permite aumentar o número de vezes que o mapa pode ser aplicado quando  $L$  se aproxima superiormente do valor 1. É nesse sentido que deve ser entendido o limite  $L \rightarrow 1^+$ .

Antes de passarmos ao limite, convém analisar as propriedades regularizadoras do mapa que ilustram e servem de motivação para a análise posterior através das equações diferenciais. O mapa  $\mathfrak{R}_{L^2}$  é uma mapa não linear constituído pela elevação à potência  $L^2$  seguido pela convolução com uma medida gaussiana cuja variância está relacionada com o inverso da temperatura  $\beta$ . Como veremos, a presença da convolução com uma medida gaussiana é responsável pelas propriedades regularizadoras que se contrapõe à não-linearidade. Por sua vez a não-linearidade contém a ação fortemente suavizante da convolução que sozinha constituiria um mapa cujo ponto fixo é uma função constante.

Vamos considerar então a família de funções dada pelo conjunto  $S = \{f \in C^\infty[0, 2\pi] : 0 < f \leq 1\}$  que é fechado pela ação do mapa,  $\mathfrak{R}_{L^2} : S \rightarrow S$ . Podemos apreciar a ação do mapa sobre os elementos de  $S$  utilizando duas normas, a norma das funções de quadrado somável a Lebesgue  $\mathbf{L}^2$  e a norma do espaço de Sobolev  $\mathbf{H}_0^1$ .

### PROPOSIÇÃO 2.1.1.

Seja  $f$  uma função do conjunto  $S$  definido acima. A ação do mapa  $\mathfrak{R}_{L^2}$  sobre  $f$  é tal que

$$\|\mathfrak{R}_{L^2} f\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq L^2 e^{-\frac{\beta \ln L}{4\pi}} \|f\|_{\mathbf{H}_0^1}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Inicialmente iremos estimar a ação da convolução com uma medida gaussiana em uma função  $h(x) \in C_0^\infty(0, 2\pi)$ . Seja a medida gaussiana  $\gamma_a(x)$ ,

$$\gamma_a(x) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}ax^2}$$

e a sua convolução com a função  $h(x)$ ,

$$\gamma_a * h(x) = \int_{\mathbb{R}} dy \gamma_a(x-y)h(y).$$

Então a norma  $\mathbf{H}_0^1$  para o produto de convolução pode ser escrita como

$$\|\gamma_a * h\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 = a^2 \int_0^{2\pi} dx \left| \int_{\mathbb{R}} dy y \gamma_a(y) h(x+y) \right|^2;$$

uma vez que  $h(x)$  é infinitamente diferenciável, podemos utilizar a sua representação em termos de série de Fourier  $h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{inx}$  na integral acima. Como o integrando é somável nas duas variáveis, trocamos a ordem de integração e a realizamos na variável  $x$ ,

$$\begin{aligned} \|\gamma_a * h\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 &= 2\pi a^2 \int_{\mathbb{R}^2} dy_1 dy_2 y_1 y_2 \gamma_a(y_1) \gamma_a(y_2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 e^{in(y_1 - y_2)} \\ (2.1.4) \quad &= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 e^{-\frac{n^2}{a}} |h_n|^2. \end{aligned}$$

O caráter regularizador da convolução com a gaussiana fica patente na expressão (2.1.4).

A partir do termo  $n = 1$  obtemos a estimativa superior para a norma

$$(2.1.5) \quad \|\gamma_a * h\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq e^{-\frac{1}{2a}} \|h\|_{\mathbf{H}_0^1}.$$

Seja uma  $f$  pertencente a  $S$ , então dada uma potência  $\delta \geq 1$ ,  $f^\delta$  também pertence ao conjunto  $S$  e admite uma descrição em série  $f^\delta(x) = \sum_n f_{n,\delta} e^{inx}$ . Portanto a estimativa superior para a norma em  $\mathbf{H}_0^1$  é aplicável a  $f^\delta$ ,

$$(2.1.6) \quad \|\gamma_a * f^\delta\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq e^{-\frac{1}{2a}} \|f^\delta\|_{\mathbf{H}_0^1}.$$

Por sua vez, a norma de  $f^\delta$  pode ser estimada pela norma da função  $f$ ,

$$\begin{aligned} \|f^\delta\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 &= \int_0^{2\pi} dx |D f^\delta(x)|^2 \\ &= \delta^2 \int_0^{2\pi} dx |f^{\delta^{-1}}(x)|^2 |D f(x)|^2, \end{aligned}$$

como  $\delta - 1 \geq 0$  e  $0 < f \leq 1$ ,

$$(2.1.7) \quad \|f^\delta\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \delta \|f\|_{\mathbf{H}_0^1}.$$

Combinando as estimativas (2.1.6), (2.1.7) e utilizando os parâmetros  $a = 2\pi/(\beta \ln L)$ ,  $\delta = L^2$ , obtemos a desigualdade anunciada na proposição.  $\blacksquare$

A estimativa apresentada na proposição, apesar de sua extrema simplicidade, aponta uma mudança de regime controlada pelo valor do inverso da temperatura  $\beta$ . A partir da proposição podemos observar que o parâmetro beta possui um valor especial  $\beta_c = 8\pi$ , de maneira que o mapa definido com  $\beta > \beta_c$ , apesar de sua não-linearidade, possui um caráter fortemente suavizante sobre as funções do conjunto  $S$ . Assim, seguindo a prescrição do número máximo de aplicações do mapa  $\mathcal{R}_{L^2}$ ,  $N = \ln |\Lambda| / \ln L$  e utilizando repetidamente a estimativa para o norma de  $\mathfrak{R}_{L^2} \hat{\lambda}$ , podemos estimar a regularidade de  $\hat{\lambda}$  ao final do fluxo dado pela aplicação seguida do grupo de renormalização definido em uma região limitada  $\Lambda$ ,

$$(2.1.8) \quad \left\| (\mathfrak{R}_{L^2})^{\frac{\ln |\Lambda|}{\ln L}} \hat{\lambda} \right\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq |\Lambda|^{2 - \frac{\beta}{4\pi}} \left\| \hat{\lambda} \right\|_{\mathbf{H}_0^1}.$$

Portanto, de acordo com essa estimativa, no limite termodinâmico e quando o inverso da temperatura pertence ao intervalo  $(8\pi, \infty)$ , o fluxo do grupo de renormalização leva qualquer medida *a priori* para atividade de cargas transformada  $\hat{\lambda}$  a uma distribuição dada pela função característica da distribuição trivial  $\lambda_0(q) = \delta_{q,0}$ . Ou seja, em larga escala, a região de baixas temperaturas é caracterizada por um estado desprovido de cargas livres.



Enquanto que a estimativa (2.1.8) é suficiente para caracterização do gás a baixas temperaturas, ela, por si, não fornece informação sobre o seu comportamento no intervalo  $\beta \leq 8\pi$ . Com o objetivo de aprofundar o conhecimento sobre o fluxo do grupo de renormalização e seu ponto fixo, iremos novamente nos servir das propriedades da convolução com a gaussiana. Mas agora, levaremos em conta a sua equivalência com o *semigrupo analítico* gerado pelo laplaciano, equivalência conhecida como fórmula de Wick.

Devemos lembrar que o produto de convolução de uma função com uma medida gaussiana corresponde à solução fundamental da equação do calor. Portanto, formalmente, se associarmos a  $L^2$ -ésima potência da atividade  $\hat{\lambda}^{L^2}$  à condição inicial  $g(0)$  da equação do calor

$$g_\tau = \frac{\beta}{2\pi} \Delta g,$$

a solução será dada por  $g(\tau)$ ,

$$g(\tau) = e^{\frac{\beta}{2\pi}\tau\Delta} \hat{\lambda}^{L^2} \equiv \gamma_{\frac{2\pi}{\beta\tau}} * \hat{\lambda}^{L^2}.$$

Isto nos permite identificar que a ação do mapa  $\mathfrak{R}_{L^2}$  equivale à solução em  $\tau = \ln L$  da equação do calor com coeficiente  $\beta/2\pi$  e condição inicial  $\hat{\lambda}^{L^2}$ . Na realidade a equivalência entre a solução dada pela convolução e o operador diferencial (semigrupo) não é apenas formal, o operador laplaciano é um *operador setorial* (apêndice A.3) e de acordo com o teorema A.3.3, essa propriedade é suficiente para garantir que  $-\Delta$  é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico  $\{e^{\tau\Delta}\}_{\tau \geq 0}$ .

De acordo com a construção de Friedrichs, o operador diferencial  $-\Delta$  possui uma extensão auto-adjunta associada à sua restrição ao espaço das funções  $V = \{f \in C^\infty[0, 2\pi] : D^k f(0) = D^k f(2\pi), k = 0, 1\}$ . O espectro do operador é constituído pelo conjunto discreto  $\sigma(-\Delta|V) = \{k^2 : k \in \mathbb{Z}\}$ . Associado aos autovalores, há o conjunto das autofunções  $\{f_k \in V : f_k(x) = e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ . Como o espectro do operador é discreto, podemos expressar a função  $e^{t\Delta} f_k(x)$  através da integral (A.3.1) com contorno circundando o autovalor  $k^2$ . Dessa forma obtemos a igualdade  $e^{t\Delta} f_k(x) = e^{-tk^2} f_k(x)$  que por sua vez implica  $e^{t\Delta} f_k(x) = \gamma_{2/t} * f_k(x)$ . Portanto, o mapa  $\mathfrak{R}_{L^2}$  pode ser descrito como a ação de um

operador diferencial,

$$(2.1.9) \quad \mathfrak{R}_{L^2} \hat{\lambda}(x) = e^{\frac{\beta}{4\pi} \ln L \Delta} \hat{\lambda}^{L^2}(x).$$

A representação do mapa por meio do operador diferencial (2.1.9) é o ponto de partida para o limite  $L \rightarrow 1^+$ . Como veremos, o fluxo dado pela aplicação consecutiva do mapa, passa a ser então descrito de maneira infinitesimal por uma equação a derivadas parciais. Por simplicidade, introduziremos a função *potencial efetivo* (não normalizado)  $u$  definida a partir do logaritmo da atividade de carga após  $n$  aplicações do mapa,

$$(2.1.10) \quad u(x; n, L) = -\ln \left( (\mathfrak{R}_{L^2})^n \hat{\lambda} \right) (x).$$

O potencial efetivo é parametrizado pelo índice  $n$  e por  $L$ , a escala hierárquica da rede. Antes de estudar o limite, convém ressaltar algumas propriedades da atividade  $\lambda$  que se refletem na função  $u$ .

Sempre consideraremos situações em que a atividade das partículas que constituem o gás possuem simetria por carga, i. e.,  $\lambda(q) = \lambda(-q)$ . Essa simetria implica a paridade da medida transformada  $\hat{\lambda}(x) = \hat{\lambda}(-x)$ , propriedade que é preservada pelo mapa (2.1.1), e a anulação de todas as derivadas de ordem ímpar da função  $u$  na origem. Uma outra propriedade, imposta por conveniência, é a normalização da atividade  $\lambda$ . Com o objetivo de evitar o aparecimento de modos zero ao iterarmos seguidamente o mapa, consideraremos a aplicação do mesmo de forma normalizada:

$$(2.1.11) \quad \begin{aligned} \lambda'(q) &= \frac{\mathfrak{R}_{L^2} \lambda(q)}{\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \mathfrak{R}_{L^2} \lambda(\xi)} \\ &\Downarrow \\ \hat{\lambda}'(x) &= \frac{\mathfrak{R}_{L^2} \hat{\lambda}(x)}{\mathfrak{R}_{L^2} \hat{\lambda}(0)}. \end{aligned}$$

O mapa normalizado garante  $\hat{\lambda}'(0) \equiv 1$ , o que equivale à anulação da função  $u$  na origem dos valores de  $x$ . Portanto, essas duas propriedades da atividade estão relacionadas às condições de contorno (na variável conjugada  $x$ ) para o fluxo do potencial efetivo.

Como dissemos anteriormente, é possível chegar a uma equação a derivadas parciais para  $u$ . Uma das variáveis independentes é a variável conjugada  $x$ . A outra variável, diretamente relacionada ao limite, designaremos como *variável volumétrica*  $t$ . Essa nova variável relaciona-se aos parâmetros do fluxo discreto através da definição

$$t \doteq n \ln L,$$

onde  $L$  é a escala hierárquica da rede e  $n$  é a número de vezes que devemos reescalar a rede para trazer a uma distância hierárquica  $\mathcal{O}(1)$ , dois sítios inicialmente separados por uma distância  $L^n$ .

**DEFINIÇÃO 2.1.2** (Potencial efetivo nas variáveis  $x$  e  $t$ ). Definimos o potencial efetivo  $u : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(t, x)$ , como o limite de  $u(x; n, L)$  para  $L \downarrow 1$  e  $n \rightarrow \infty$  de forma que  $t = n \ln L$  é mantido constante; isto é, dado um  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$(2.1.12) \quad u(t, x) = \lim_{L \downarrow 1} u \left( x; \frac{t}{\ln L}, L \right) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} u \left( x; n, e^{\frac{t}{n}} \right).$$

A partir da forma diferencial para o mapa do grupo de renormalização (2.1.9) e da definição anterior, temos a seguinte expressão que relaciona o potencial efetivo que sofreu  $n + 1$  transformações,  $u(x; n + 1, e^{t'/(n+1)})$ , com o potencial imediatamente anterior,  $u(x; n, e^{t/n})$ ,

$$(2.1.13) \quad \exp \left( -u \left( x; n + 1, e^{\frac{t'}{n+1}} \right) \right) = \exp \left( e^{\frac{\beta}{4\pi} \ln L \Delta} \right) \exp \left( -e^{\frac{2t}{n}} u \left( x; n, e^{\frac{t}{n}} \right) \right),$$

lembrando que  $t' = (n + 1) \ln L$  e  $t = n \ln L$ . Segundo a definição 2.1.2, a expressão acima permite que calculemos a derivada parcial em  $t$  do potencial efetivo  $u(t, x)$ . Ao calcular a derivada parcial em  $t$ , a equação diferencial parcial para o potencial efetivo surge naturalmente das definições.

**PROPOSIÇÃO 2.1.3** (Equação diferencial parcial para o potencial efetivo).

*O potencial efetivo definido em 2.1.2 satisfaz formalmente a seguinte equação diferencial*

$$(2.1.14) \quad u_t = \alpha (u_{xx} - u_x^2) + 2u,$$

onde  $\alpha = \frac{\beta}{4\pi}$ .

DEMONSTRAÇÃO: Tomando o logaritmo em ambos os lados da equação (2.1.13) e expandindo as exponenciais em potências de  $\frac{1}{n}$  teremos,

$$\begin{aligned}
 (2.1.15) \quad u\left(x; n+1, e^{\frac{t'}{n+1}}\right) &= u\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right) \\
 &+ \left\{ \alpha u_{xx}\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right) - \alpha u_x^2\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right) + 2u\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right) \right\} \frac{t}{n} \\
 &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),
 \end{aligned}$$

onde  $\alpha = \beta/4\pi$ . E a partir da definição de derivada parcial e de 2.1.2,

$$\begin{aligned}
 (2.1.16) \quad u_t(t, x) &\doteq \lim_{t' \downarrow t} \frac{u(t', x) - u(t, x)}{t' - t} \\
 &= \lim_{t' \downarrow t} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u\left(x; n+1, e^{\frac{t'}{n+1}}\right) - u\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right)}{t' - t}.
 \end{aligned}$$

Combinando as expressões (2.1.15), (2.1.16) e levando em conta que  $t' = (n+1) \ln L = (1+n^{-1})t$  teremos

$$\begin{aligned}
 u_t(t, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{t} \left\{ \left[ \alpha u_{xx}\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right) - \alpha u_x^2\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right) + 2u\left(x; n, e^{\frac{t}{n}}\right) \right] \frac{t}{n} \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\},
 \end{aligned}$$

o que resulta na equação diferencial parcial do enunciado da proposição. ■

A simetria da atividade de carga  $\lambda(q) = \lambda(-q)$ , preservada pela transformação  $\mathfrak{R}_{L^2}$ , exige que a equação (2.1.14) satisfaça as condições de contorno de Neumann  $u_x(t, 0) = u_x(t, 2\pi) = 0$ . Além desse vínculo, gostaríamos também que a transformação preservasse a normalização da atividade dada neste caso por  $u(t, 0) = 0$ . No entanto, como podemos

observar pela equação (2.1.14), o valor do potencial efetivo no ponto  $x = 0$  obedece a equação diferencial (levando em conta as condições de contorno  $u_x(t, 0) = u_x(t, 2\pi) = 0$ )

$$u_t(t, 0) = \alpha u_{xx}(t, 0) + 2u(t, 0).$$

Portanto, mesmo que a condição inicial satisfaça o vínculo, a evolução descrita por (2.1.14) é incompatível com o mesmo, pois, como podemos verificar pela definição de potencial efetivo, o termo  $u_{xx}(t, 0)$  está relacionado ao segundo momento da distribuição dada pela atividade de carga, ou seja, para qualquer condição inicial cuja medida *a priori* admita a presença de cargas  $u_{xx}(0, 0) > 0$  o que pela equação (2.1.14) viola o vínculo.

Devemos lembrar que esse comportamento era esperado, pois a equação diferencial (2.1.14) foi desenvolvida a partir da transformação  $\mathfrak{R}_{L^2}$  que não preserva a normalização. No entanto, o desenvolvimento a partir da transformação normalizada (2.1.11) é completamente análoga e, como veremos, equivale à introdução de um multiplicador de Lagrange na equação (2.1.14).

Designaremos o potencial efetivo normalizado pela função  $\tilde{u}(t, x)$ . A equação diferencial desenvolvida a partir da transformação normalizada é dada por

$$(2.1.17) \quad \tilde{u}_t = \alpha (\tilde{u}_{xx} - \tilde{u}_x^2) + 2\tilde{u} - \alpha \tilde{u}_{xx}|_{x=0},$$

com condição de contorno  $\tilde{u}_x(t, 0) = \tilde{u}_x(t, 2\pi) = 0$ . Notação:  $\tilde{u}_{xx}|_{x=0} \equiv \tilde{u}_{xx}(t, 0)$ .

Uma vez fixada a condição inicial  $u_0(x)$ , as soluções para o potencial efetivo em suas formas normalizada e não normalizada estão relacionadas através de

$$\tilde{u}(t, x) = u(t, x) - u(t, 0)$$

e

$$u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \alpha \int_0^t ds e^{2(t-s)} \tilde{u}_{xx}(s, 0).$$

Note que  $u(t, x)$  e  $\tilde{u}(t, x)$  satisfazem as equações (2.1.14) e (2.1.17), respectivamente.

## 2.2. Existência e unicidade locais

Nesta seção nos ocuparemos de questões próprias à existência, unicidade e dependência contínua da solução da equação diferencial

$$(2.2.1) \quad v_t - \alpha(v_{xx} - 2v v_x) - 2v = 0$$

sujeita às condições de fronteira  $v(t, 0) = v(t, 2\pi)$  e à condição inicial  $v(0, x) = v_0(x)$ .

Uma vez encontrada a solução para (2.2.1) e garantida as propriedades da mesma podemos transportar esses resultados para a solução de (2.1.17) uma vez que as duas equações estão relacionadas por  $\tilde{u}(t, x) = \int_0^x dy v(t, y)$ . De uma maneira geral a equação (2.2.1) é de análise mais simples.

Para estudar a existência, unicidade e continuidade, trataremos a equação (2.2.1) como uma equação diferencial ordinária sujeita a uma condição inicial (problema de Cauchy),

$$(2.2.2) \quad \frac{d}{dt}z + Az - F(z) = 0, \quad z(0) = z_0,$$

definida em um espaço de Banach  $X$ , onde  $A$  é o operador diferencial linear

$$Az = -\alpha z_{xx}.$$

e  $F : X \rightarrow Y$ , o operador não linear

$$F(z) = -2\alpha z z_x + 2z.$$

Buscamos uma solução na forma de uma função contínua  $z : [0, T) \rightarrow X$ , sujeita à condição inicial  $z(0) = z_0 \in X$ ; tal que para  $t \in [0, T)$ ,  $z(t)$  pertença ao domínio do operador linear  $D(A) \subset X$  e que a aplicação  $t \rightarrow F(z(t))$  seja Hölder contínua:

$$\|F(z(s_1)) - F(z(s_2))\|_Y \leq C |s_1 - s_2|^\delta$$

para  $0 \leq s_2 \leq s_1 < T$  e  $\delta > 0$ .

A exigência de continuidade sobre as soluções de (2.2.2) garante que a sua solução é também solução da equação integral dada pela fórmula de variação das constantes

$$(2.2.3) \quad z(t) = e^{-tA} z_0 + \int_0^t ds e^{-(t-s)A} F(z(s)).$$

Será a partir da equação integral que seremos capazes de avaliar as questões de existência, unicidade e continuidade que estão resumidas na forma do seguinte teorema.

**TEOREMA 2.2.1.**

*O problema de valor inicial (2.2.2) possui uma única solução  $z(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  com  $z(0) = z_0 \in \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$ . Se a norma da solução  $\|z(t)\|_{\mathbf{H}_0^1}$  for limitada quando  $t \rightarrow \infty$ , então o conjunto dado pela trajetória  $\{z(t)\}_{t \geq 0}$  permanece em um conjunto compacto de  $\mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$ .*

**DEMONSTRAÇÃO** (teor.2.2.1 – existência e unicidade locais): A existência e unicidade é estabelecida através do teorema do ponto fixo para espaços métricos completos. Seja  $\Psi : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}$  o mapa definido pelo lado direito da equação (2.2.3),

$$\Psi[z(t)] = e^{-tA} z_0 + \int_0^t ds e^{-(t-s)A} F(z(s))$$

que atua sobre o espaço de Banach das funções contínuas a valores em  $X$ ,  $\mathbf{C}([0, T], X) = \mathcal{Y}$ , com a norma

$$\|f\|_{\mathbf{C}([0, T], X)} = \sup_{0 < t < T} \|f(t)\|_X.$$

Vamos admitir, por hipótese, que as seguintes condições são satisfeitas:

$$(2.2.4) \quad e^{-tA} : X \rightarrow X \text{ é um semigrupo fortemente contínuo para } t \geq 0,$$

$$(2.2.5) \quad F : X \rightarrow Y \text{ é um operador localmente Lipschitz,}$$

$$(2.2.6) \quad e^{-tA} : Y \rightarrow X \text{ para } t > 0,$$

$$(2.2.7) \quad \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(Y, X)} \leq C t^{-\gamma} \text{ para } t \in (0, 1] \text{ e algum } \gamma < 1.$$

A partir de uma constante  $\varepsilon > 0$ , definimos o conjunto

$$Z = \{z \in \mathbf{C}([0, T], X) : z(0) = z_0 \in X, \|z(t) - z_0\| \leq \varepsilon\},$$

sobre o qual age o mapa  $\Psi$ , a métrica para os elementos de  $Z$  é induzida pela norma  $\|z\|_{\mathbf{C}([0, T], X)}$ . O espírito da prova consiste em escolher  $T$  pequeno o suficiente de modo que o mapa  $\Psi : Z \rightarrow Z$  seja contrativo o que, pelo teorema do ponto fixo, implica a existência e unicidade da solução de (2.2.3) no intervalo  $t \in [0, T]$ .

Inicialmente garantiremos as condições para que o mapa  $\Psi$  leve os elementos do conjunto  $Z$  em elementos do próprio conjunto. Para tanto, escolhemos  $t_1$  pequeno o suficiente para que, de acordo com (2.2.4), a desigualdade

$$(2.2.8) \quad \|e^{-tA}z_0 - z_0\|_X \leq \varepsilon/2$$

seja satisfeita no intervalo  $t \in [0, t_1]$ . Como, pela hipótese (2.2.5) o operador  $F$  é localmente Lipschitz, temos a estimativa

$$\|F(z(t))\|_Y \leq K \|z(t)\|_X$$

que em conjunto com (2.2.6) nos fornece uma estimativa para o segundo termo da equação integral (2.2.3),

$$(2.2.9) \quad \left\| \int_0^t ds e^{-(t-s)A} F(z(s)) \right\|_X \leq \frac{C}{1-\gamma} t^{1-\gamma} K \sup_{s \in (0, t_1)} \|z(s)\|_X = \frac{C}{1-\gamma} t^{1-\gamma} K'(t_1).$$

Escolhemos então  $t_2$ ,  $t_2 \leq t_1$ , pequeno o suficiente para garantir a desigualdade

$$(2.2.10) \quad \frac{C}{1-\gamma} t_2^{1-\gamma} K'(t_1) \leq \varepsilon/2.$$

Assim, em vista de (2.2.8), (2.2.9) e (2.2.10), temos que

$$\|\Psi[z(t)] - z_0\|_X \leq \|e^{-tA}z_0 - z_0\|_X + \left\| \int_0^t ds e^{-(t-s)A} F(z(s)) \right\|_X < \varepsilon$$

para todo  $t \in [0, t_2]$ . Portanto, para todo  $T \leq t_2$ , o mapa  $\Psi$  leva os elementos de  $Z$  ao mesmo conjunto.



Para provar que  $\Psi$  é também estritamente contrativo, nos valem novamente de (2.2.5) e de (2.2.6) para garantir que

$$\begin{aligned} \|\Psi[z_1(t)] - \Psi[z_2(t)]\|_X &\leq \left\| \int_0^t ds e^{-(t-s)A} (F(z_1(s)) - F(z_2(s))) \right\|_X \\ &\leq \frac{C}{1-\gamma} t^{1-\gamma} K \sup_{s \in (0,t)} \|z_1(s) - z_2(s)\|_X. \end{aligned}$$

Basta, então, escolher um  $T \leq t_2$  que seja suficientemente pequeno para garantir a desigualdade

$$\frac{C}{1-\gamma} T^{1-\gamma} K < 1.$$

E assim, pelo teorema do ponto fixo, o mapa  $\Psi$  possui um único ponto fixo  $z$  em  $Z$  que é solução da equação integral (2.2.3).

A existência e unicidade de (2.2.3) resume-se à questão de encontrar dois espaços de Banach  $X$  e  $Y$  tais que as condições (2.2.4)–(2.2.7) sejam verificadas.

Seja o intervalo  $[0, 2\pi]$ , o operador  $A = -\alpha\Delta$  possui o domínio minimal  $\mathbf{C}_0^\infty(0, 2\pi)$  que é denso no espaço de funções de quadrado integrável à Lebesgue  $\mathbf{L}^2(0, 2\pi)$  com produto interno dado por  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} dx \overline{f(x)}g(x)$ . Levando em conta as condições de contorno de (2.2.2), o operador  $A$  possui uma extensão auto-adjunta em  $\mathbf{L}^2(0, 2\pi)$  com domínio

$$\mathbf{D}(A) = \{f \in \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) : \Delta f \in \mathbf{L}^2(0, 2\pi)\} = \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) \cap \mathbf{H}^2(0, 2\pi).$$

Seu espectro é dado pelo conjunto  $\sigma(A) = \{\alpha n^2\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , e as autofunções normalizadas são dadas por  $v_n = 1/\pi \sin nx$ . Em vista das propriedades do operador linear, a escolha usual é

$$X = \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) \text{ e } Y = \mathbf{L}^2(0, 2\pi).$$

Por ser auto-adjunto,  $A$  é também um operador setorial e, segundo o teorema A.3.3, é gerador infinitesimal do semigrupo analítico  $e^{-tA}$  e como conseqüência satisfaz a condição<sup>2</sup> (2.2.4). Para verificar as condições (2.2.6) e (2.2.7), vamos considerar um elemento  $f$  de

<sup>2</sup>Um semigrupo fortemente contínuo não necessita satisfazer a condição de analiticidade da definição A.3.2.

$Y$  representado por  $h(x) = \sum_n h_n e^{inx}$ ,  $\sum_n |h_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \|h\|_2^2 < \infty$ . Então, de acordo com a representação espectral do semigrupo,

$$e^{t\alpha\Delta} h(x) = \sum_n e^{-\alpha n^2 t} h_n e^{inx}$$

e na norma de  $X$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{t\alpha\Delta} h\|_{\mathbf{H}_0^1}^2 &= \sum_n n^2 e^{-2\alpha n^2 t} |h_n|^2 \\ &\leq \sum_n \max_n (n^2 e^{-2\alpha n^2 t}) |h_n|^2 \\ &\leq \frac{1}{2e\alpha t} \sum_n |h_n|^2. \end{aligned}$$

Segue então a estimativa  $\|e^{t\alpha\Delta} h\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \frac{1}{\sqrt{2e\alpha t}} \|h\|_2$ , que garante a norma de operador do semigrupo

$$(2.2.11) \quad \|e^{t\alpha\Delta}\|_{\mathcal{L}(L^2, \mathbf{H}_0^1)} \leq C/t^{1/2}$$

com  $C = 1/\sqrt{2e\alpha}$ . Estas duas desigualdades garantem a validade das condições (2.2.6) e (2.2.7). Resta então verificar a condição local de Lipschitz para o operador  $F : X \rightarrow Y$ .

Como o suporte dos elementos  $f$  em  $\mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$  é unidimensional, segue dos teoremas de imersão para espaços de Sobolev que esses elementos são funções absolutamente contínuas  $f(x) = \int_0^x dy Df(y)$  ( $f(x) \in \mathbf{C}^{0,1/2}[0, 2\pi]$ ) limitadas pela estimativa

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} \sup_{x \in [0, 2\pi]} |f(x)| &\leq \int_0^{2\pi} dy |Df(y)| \\ &\leq \sqrt{2\pi} \sqrt{\int_0^{2\pi} dy |Df(y)|^2} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{\mathbf{H}_0^1}. \end{aligned}$$

A última desigualdade é obtida a partir da desigualdade de Schwartz para as funções 1 e  $Df(x)$ . Utilizando essa desigualdade em conjunto com a desigualdade triangular, temos

que

$$\begin{aligned}
\|F(f) - F(g)\|_2 &\leq 2\alpha \|fDf - gDg\|_2 + 2\|f - g\|_2 \\
&\leq 2\alpha \|fDf - gDg\|_2 + 4\pi \|f - g\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
&\leq 2\alpha \|f(Df - Dg)\|_2 + 2\alpha \|(f - g)Dg\|_2 + 4\pi \|f - g\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
(2.2.13) \quad &\leq \left(2\alpha\sqrt{2\pi}(\|f\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|g\|_{\mathbf{H}_0^1}) + 4\pi\right) \|f - g\|_{\mathbf{H}_0^1},
\end{aligned}$$

ou seja, o operador  $F$  é localmente Lipschitz,  $\|F(f) - F(g)\|_2 \leq K \|f - g\|_{\mathbf{H}_0^1}$  com  $K = 2\alpha\sqrt{2\pi}(\|f\|_{\mathbf{H}_0^1} + \|g\|_{\mathbf{H}_0^1}) + 4\pi$ . Portanto, pelo teorema do ponto fixo de Banach, o mapa  $\Psi$  definido pela equação integral (2.2.3) possui solução única no intervalo  $t \in (0, T)$ . Falta apenas identificar a solução da equação integral à solução contínua da equação diferencial (2.2.2). Para tanto, devemos garantir a continuidade em  $t$  da solução da equação integral.

A partir da construção de Friedrichs para extensão auto-adjunta em  $\mathbf{L}^2(0, 2\pi)$  do operador  $-\Delta$  com a condição de contorno 0-Dirichlet, sabemos que o domínio da extensão é dado por  $\mathbf{D}(-\Delta) = \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) \cap \mathbf{L}^2(0, 2\pi)$ . Assim, dado um elemento  $f \in \mathbf{D}(-\Delta)$  (cuja representação em termos das autofunções de  $-\Delta$  é  $f(x) = \sum_n f_n e^{inx}$ ), podemos descrever a ação do operador diferencial  $\sqrt{-\Delta}$ , de acordo com a definição A.3.4, como

$$\sqrt{-\Delta} f(x) = \sum_n |n| f_n e^{inx}.$$

É interessante notar que embora  $\sqrt{-\Delta} \neq D$ ,  $\|\sqrt{-\Delta} f\|_2 = \|Df\|_2$  para  $f \in \mathbf{D}(\sqrt{-\Delta}) = \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$ , ou seja, para elementos do espaço  $\mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$ , a norma  $\|\cdot\|_{1/2}$  equivale à norma  $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1}$ .

Vamos então considerar a solução dada pela equação integral no intervalo  $0 < t < t + \tau$ .

A diferença entre as soluções no tempo  $t$  e  $t + \tau$  é dada por

$$\begin{aligned} z(t + \tau) - z(t) &= (e^{-\tau A} - I) e^{-tA} z_0 \\ &+ \int_0^t ds (e^{-\tau A} - I) e^{-(t-s)A} F(z(s)) + \int_t^{t+\tau} ds e^{-(t+\tau-s)A} F(z(s)). \end{aligned}$$

Utilizando a norma  $\|\cdot\|_{1/2}$ , a desigualdade triangular e a desigualdade de Schwartz

$$\begin{aligned} \|z(t + \tau) - z(t)\|_{1/2} &\leq \|A^{1/2} (e^{-\tau A} - I) e^{-tA} z_0\|_2 \\ &+ \int_0^t ds \|A^{1/2} (e^{-\tau A} - I) e^{-(t-s)A} F(z(s))\|_2 \\ &+ \int_t^{t+\tau} ds \|A^{1/2} e^{-(t+\tau-s)A} F(z(s))\|_2. \end{aligned}$$

Escolhemos, uma constante  $\delta > 0$  e utilizamos a estimativa (A.3.4) para o primeiro e o segundo termo do lado direito da desigualdade, assim

$$\begin{aligned} \|z(t + \tau) - z(t)\|_{1/2} &\leq \frac{1}{\delta} C_{1-\delta} \tau^\delta (\|A^{\delta+1/2} e^{-tA} z_0\|_2 \\ &+ \int_0^t ds \|A^{\delta+1/2} e^{-(t-s)A} F(z(s))\|_2) \\ &+ \int_t^{t+\tau} ds \|A^{1/2} e^{-(t+\tau-s)A} F(z(s))\|_2. \end{aligned}$$

Em seguida, utilizamos a estimativa (A.3.3) sobre os três termos do lado direito,

$$\begin{aligned} \|z(t + \tau) - z(t)\|_{1/2} &\leq \frac{1}{\delta} C_{1-\delta} \tau^\delta (C_\delta t^{-\delta} \|A^{1/2} z_0\|_2 \\ &\quad + C_{\delta+1/2} \int_0^t ds (t-s)^{-(\delta+1/2)} \|F(z(s))\|_2) \\ &\quad + C_{1/2} \int_t^{t+\tau} ds (t-\tau-s)^{-1/2} \|F(z(s))\|_2. \end{aligned}$$

Por fim, a condição de Lipschitz sobre  $F$  garante que  $\|F(z(s))\|_2 \leq K \|z(s)\|_{1/2} \leq K(\varepsilon + \|z_0\|_{1/2})$ . Levando em conta essa desigualdade, teremos então para  $\delta < 1/2$

$$\begin{aligned} \|z(t + \tau) - z(t)\|_{1/2} &\leq \frac{1}{\delta} C_{1-\delta} \left( C_\delta \|z_0\|_{1/2} t^{-\delta} + \frac{K C_{1/2+\delta}}{1/2-\delta} (\varepsilon + \|z_0\|_{1/2}) t^{1/2-\delta} \right) \tau^\delta \\ &\quad + 2C_{1/2} K (\varepsilon + \|z_0\|_{1/2}) \tau^{1/2}. \end{aligned}$$

Assim, para quaisquer  $t > 0$  e  $0 < \delta < 1/2$ , há uma constante finita  $C = C(\delta, \varepsilon, t, z_0) < \infty$ , independente de  $\tau$ , tal que

$$(2.2.14) \quad \|z(t + \tau) - z(t)\|_{1/2} \leq C \tau^\delta.$$

Combinando essa última desigualdade à propriedade Lipschitz de  $F$  (2.2.13) temos que a função  $F(z(t))$  é Hölder contínua em  $t$ . Portanto a solução  $z(t)$  é uma função contínua na variável  $t$ , o que a qualifica como solução do problema de valor inicial (2.2.2).

Para que a solução  $z(t)$  da equação integral (2.2.3) seja solução também do problema de Cauchy (2.2.2) devemos garantir a diferenciabilidade em  $t$  de  $\Psi[z(t)]$ . Como podemos constatar pela expressão (2.2.3), devemos estudar apenas o termo com a integral uma vez que o outro termo envolve apenas a aplicação de um semigrupo analítico (e portanto diferenciável em  $t$ ). Vamos então nomear o segundo termo da equação integral como  $\Phi(t)$ ,

$$\Phi(t) = \int_0^t ds e^{-(t-s)A} F(z(s))$$

e, concomitantemente, para um  $0 < \rho < t$  definiremos a função  $\Phi_\rho(t)$

$$\Phi_\rho(t) = \begin{cases} \int_0^{t-\rho} ds e^{-(t-s)A} F(z(s)), & \rho \leq t < T, \\ 0, & 0 \leq t \leq \rho. \end{cases}$$

A introdução de  $\Phi_\rho$  tem o objetivo de estudar com algum detalhe o comportamento de  $\Phi$  na vizinhança de  $t = 0$ . Em primeiro lugar, podemos observar a partir da desigualdade

$$\|\Phi(t) - \Phi_\rho(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \int_{t-\rho}^t ds \|A^{1/2} e^{-(t-s)A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2)} \|F(z(s))\|_2 = O(\rho^{1/2})$$

e com o auxílio da estimativa (2.2.11) e da propriedade de Lipschitz para  $F$ , que na topologia induzida pela norma em  $\mathbf{H}_0^1$ ,  $\Phi_\rho \rightarrow \Phi$  quando  $\rho \downarrow 0$ , uniformemente no intervalo  $0 \leq t \leq t^*$  para qualquer  $t^* < T$ . Sabemos também que, a partir de um argumento semelhante ao utilizado acima e na demonstração da Hölder continuidade de  $F$ , a norma

$$\begin{aligned} \|\Phi_\rho(t+\tau) - \Phi_\rho(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} &= \int_0^{t-\rho} ds \|(e^{-\tau A} - I)e^{-(t-s)A} F(z(s))\|_{\mathbf{H}_0^1} \\ &+ \int_{t-\rho}^{t+\tau-\rho} ds \|e^{-(t+\tau-s)A} F(z(s))\|_{\mathbf{H}_0^1} \end{aligned}$$

vai a zero quando  $\rho \downarrow 0$  para qualquer  $0 \leq t \leq t+\tau \leq t^*$ . Portanto, a função  $\Phi$  é contínua  $\Phi \in \mathbf{C}([0, T], \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi))$  e assim  $\lim_{t \downarrow 0} \|\Phi(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} = 0$ .

De acordo com (2.2.11), para  $0 \leq s < t$  o elemento  $e^{-(t-s)A} F(z(s))$  pertence ao domínio do operador  $A$ , portanto as somas de Riemann

$$\sum_{s_j \leq t-\rho} e^{-(t-s_j)A} F(z(s_j)) \Delta s_j$$

também pertencem ao domínio de  $A$ . Como o operador é fechado, o limite  $\max \Delta s_j \rightarrow 0$  garante que  $\Phi_\rho(t) \in \mathbf{D}(A)$ . Da mesma forma, temos também que

$$A\Phi_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} ds A e^{-(t-s)A} F(z(s)) = \lim_{\max \Delta s_j \rightarrow 0} A \sum_{s_j \leq t-\rho} e^{-(t-s_j)A} F(z(s_j)) \Delta s_j.$$

Reescrevendo  $A\Phi_\rho$  como

$$(2.2.15) \quad A\Phi_\rho(t) = \int_0^{t-\rho} ds A e^{-(t-s)A} (F(z(s)) - F(z(t))) + (e^{-\rho A} - e^{-tA}) F(z(t))$$

e utilizando a estimativa (A.3.3) em conjunto com a Hölder continuidade de  $F$  em  $t$  (2.2.14), veremos que na norma  $\mathbf{L}^2$ ,  $\lim_{\rho \downarrow 0} A\Phi_\rho = A\Phi$ . Notemos inicialmente que para qualquer  $0 < t < T$ ,  $\Phi_\rho(t) \in \mathbf{D}(A)$  portanto, o elemento dado por  $A\Phi_{1/n}(t)$  pertence ao espaço  $\mathbf{L}^2$ . As estimativas (A.3.3) e (2.2.14) controlam o comportamento do integrando de (2.2.15) e assim, o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} A\Phi_{1/n}(t) = A\Phi(t)$  é um elemento de  $\mathbf{L}^2$ . Devido ao fato de  $A$  ser um operador fechado, então o elemento  $\Phi(t)$  dado pelo limite da seqüência  $\Phi_{1/n}$  pertence ao domínio do operador  $A$  para qualquer  $0 < t < T$ . Vamos então considerar o intervalo  $[t_0, t_1]$ ,  $0 < t_0 < t_1 < T$ . Então, para  $t \in [t_0, t_1]$

$$\begin{aligned} \|A\Phi_\rho(t) - A\Phi(t)\|_2 &\leq \|(e^{-\rho A} - I) F(z(t))\|_2 \\ &+ \int_t^{t-\rho} ds \|Ae^{-(t-s)A} (F(z(s)) - F(z(t)))\|_2 \\ &\leq \frac{C_{1-\delta}}{\delta} K (\varepsilon + \|z_0\|_{1/2}) \rho^\delta + C_1 C K \int_t^{t-\rho} ds \rho^{-1+\delta} \\ &\leq C' \rho^\delta \end{aligned}$$

onde  $C' = C'(\delta, \varepsilon, t, z_0) < \infty$  para qualquer  $0 < \delta < 1/2$ . Portanto, uma vez que  $\Phi_\rho(t)$  é continuamente diferenciável

$$\frac{d}{dt} \Phi_\rho(t) = -A\Phi_\rho(t) + e^{-\rho A} F(z(t-\rho))$$

para  $\rho < t < T$ , o lado direito da expressão acima converge uniformemente para  $-A\Phi(t) + F(z(t))$  no intervalo  $[t_0, t_1]$  quando  $\rho \downarrow 0$ . Segue disso que  $\Phi(t)$  é continuamente diferenciável no intervalo aberto  $(0, T)$  e

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = -A\Phi(t) + F(z(t)).$$

Então, dada uma solução  $z(t)$  da equação integral (2.2.3), a integral presente nessa mesma equação é contínua e diferenciável na variável  $t$ , ou seja, se  $z(t)$  for solução de equação integral (2.2.3), ela também será solução do problema de Cauchy (2.2.2). Isto conclui a demonstração de existência, unicidade e continuidade locais. ■

### 2.3. Existência global

A extensão da demonstração de existência e unicidades locais para todo  $t \in \mathbb{R}_+$  se apóia na seguinte idéia: partindo da condição inicial  $z_0$  em  $t = 0$ , sabemos que a solução existe e é única até, pelo menos,  $t = T_0$ . Então escolhemos um  $\tau_1 < T_0$  e a solução  $z(\tau_1)$  como nova condição inicial que por sua vez existe e é única até  $t = T_1$ . Aplicando sucessivamente esse raciocínio, teremos então uma seqüência  $z_0, z(\tau_1), z(\tau_2), \dots$ . Há então duas possibilidades, ou as diferenças  $T_{n+1} - T_n$  vão decrescendo de modo suficientemente rápido para que exista um ponto  $t_c \in \mathbb{R}_+$  a partir do qual não há mais solução, e nesse caso a norma de  $z(t)$  diverge quando ela se aproxima da fronteira de seu espaço; ou então  $t_c = \infty$  e a norma da solução é finita para todo  $t > 0$ . Vamos enunciar, a seguir, uma modificação do lema de Gronwall, proposta em [38], que nos permitirá constatar que a norma da solução do problema de Cauchy (2.2.2) é finita para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**LÊMA 2.3.1** (Gronwall – Henry 81).

Sejam  $\xi$  e  $\gamma$  dois reais e duas funções contínuas e positivas  $\theta, \zeta$  definidas no intervalo  $I = (0, T)$  tal que  $\xi \geq 0, \gamma > 0$  e

$$(2.3.1) \quad \zeta(t) \leq \theta(t) + \xi \int_0^t ds (t-s)^{\gamma-1} \zeta(s).$$



Então a função  $\zeta$  obedece a seguinte desigualdade no intervalo  $I$ ,

$$(2.3.2) \quad \zeta(t) \leq \theta(t) + \int_0^t ds E'_\gamma(t-s)\theta(s),$$

onde  $E'_\gamma$  é a derivada da função  $E_\gamma$ ,

$$E_\gamma(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(n\gamma + 1)} (\xi\Gamma(\gamma)t^\gamma)^n$$

e  $\Gamma$  é a função gama de Euler. E ainda, se  $\theta(t) \leq K < \infty$  para todo  $t \in I$ , então

$$(2.3.3) \quad \zeta(t) \leq KE_\gamma(t) \leq K^* e^{\xi\Gamma(\gamma)T}$$

para uma constante finita  $K^*$ .

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $H$  o operador integral dado pela convolução

$$H\zeta(t) = \xi \int_0^t ds (t-s)^{\gamma-1} \zeta(s),$$

então a desigualdade (2.3.1) equivale formalmente a

$$\zeta(t) \leq \theta(t) + \sum_{n=1}^{\infty} H^n \theta(t),$$

onde, por sua vez,  $H^n$  é também um operador integral de convolução cuja ação pode ser apreciada com o auxílio da transformada de Laplace

$$\begin{aligned} H^n \theta(t) &= \frac{1}{\Gamma(n\gamma)} (\xi\Gamma(\gamma))^n \int_0^t ds (t-s)^{n\gamma-1} \theta(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n\gamma + 1)} (\xi\Gamma(\gamma))^n \int_0^t ds \frac{d}{dt} (t-s)^{n\gamma} \theta(s) \\ &\equiv f'_n * \theta(t), \end{aligned}$$

onde  $f_n(t) = (\xi\Gamma(\gamma)t^\gamma)^n / \Gamma(n\gamma + 1)$ .

Identificando  $E_\gamma(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(t)$  obtemos a desigualdade (2.3.2). O limite superior (2.3.3) segue do teorema fundamental do cálculo. É importante observar que a série

definida por  $E_\gamma$  é uniformemente convergente em valor absoluto para  $t \in I$ , ( $E_\gamma(0) = 1$ ) e ela é limitada superiormente por uma exponencial, pois

$$E_\gamma(T) \sim \frac{1}{\gamma} e^{\varepsilon\Gamma(\gamma)T}$$

para  $T \rightarrow \infty$  (veja o lema 7.1.1 da referência [38]). Isto conclui a demonstração. ■

**DEMONSTRAÇÃO** (teor.2.2.1 – existência e unicidade globais): O conjunto  $U$  dado pelos elementos que satisfazem a desigualdade (2.2.13) é compacto. Portanto, independentemente da escolha da condição inicial  $z_0 \in U$ , teremos o mesmo limite superior para existência local,  $T$ . E ainda, dados dois intervalos contendo a origem,  $I_1 = (t_1, t_1 + T)$  e  $I_2 = (t_2, t_2 + T)$ , existem dois elementos  $z_{0,1}, z_{0,2} \in U$  tais que as duas soluções  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  da equação (2.2.2) nos intervalos  $I_1$  com  $z_1(t_1) = z_{0,1}$  e  $I_2$  com  $z_2(t_2) = z_{0,2}$ , respectivamente, coincidem no intervalo aberto  $I_1 \cap I_2$ . Conseqüentemente, podemos definir um intervalo aberto maximal  $I_{\max} = (t_-, t_c)$  que contém a origem, no qual a solução de (2.2.2) é univocamente determinada pela união das soluções  $z_j(t)$  nos intervalos  $I_j$  com condição inicial  $z_j(t_j) = z_{0,j}$ . Por construção, não há solução para equação (2.2.2) no intervalo  $(t_0, t')$  se  $t' > t_c$ . Assim, ou  $t_c = \infty$  ou então existe uma seqüência  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}_+}$  onde  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_c$  tal que  $z(t_n)$  se aproxima da fronteira  $\partial U$  do conjunto compacto  $U$ .

Portanto, se  $t_c$  for um número finito, a solução  $z(t)$  “explode” no tempo  $t = t_c$ . No entanto, como veremos a seguir, o lema de Gronwall nos permite verificar que  $\|z(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} = \|z(t)\|_{1/2}$  permanece finita para todo  $t > 0$  garantindo a existência e unicidade globais da solução.

A partir de (2.2.3), da propriedade de Lipschitz para  $F$ , das estimativas para norma e do lema de Gronwall, temos que a solução é limitada na norma  $\mathbf{H}_0^1$  pela desigualdade

$$\begin{aligned}
 \|z(t)\|_{1/2} = \|z(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} &\leq \|e^{-tA}z_0\|_{\mathbf{H}_0^1} + K \int_0^t ds \|A^{1/2}e^{-(t-s)A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2)} \|z(s)\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
 &\leq C \|z_0\|_{\mathbf{H}_0^1} + KC_{1/2} \int_0^t ds (t-s)^{-1/2} \|z(s)\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
 (2.3.4) \qquad &\leq Ce^{KC_{1/2}\sqrt{\pi}t} \|z_0\|_{\mathbf{H}_0^1}.
 \end{aligned}$$

Portanto a solução existe e é única para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ . ■

Apresentaremos em seguida, a última parte da demonstração do teorema 2.2.1.

DEMONSTRAÇÃO (teor.2.2.1 – trajetória compacta): De acordo com o teorema A.3.7, se  $1/2 < \gamma < 1$  temos então a inclusão compacta  $\mathbf{D}(A^\gamma) \subset\subset \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) = \mathbf{D}(A^{1/2})$ . Falta apenas garantir que  $\|z(t)\|_\gamma$  permanece limitado quando  $t \rightarrow \infty$ . Para tanto, utilizaremos a mesma abordagem empregada no caso da norma  $\|z(t)\|_{1/2}$  logo acima,

$$\begin{aligned}
 \|z(t)\|_\gamma &\leq \|e^{-tA}z_0\|_\gamma + K \int_0^t ds \|A^\gamma e^{-(t-s)A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2)} \|z(s)\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
 &= \|A^{\gamma-1/2}e^{-tA}A^{1/2}z_0\|_2 + K \int_0^t ds \|A^\gamma e^{-(t-s)A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2, \mathbf{L}^2)} \|z(s)\|_{\mathbf{H}_0^1} \\
 (2.3.5) \qquad &\leq C_{\gamma-1/2}t^{1/2-\gamma}e^{-\alpha t} \|z_0\|_{\mathbf{H}_0^1} + KC_\gamma \int_0^t ds (t-s)^{-\gamma}e^{-\alpha t} \|z(s)\|_{\mathbf{H}_0^1}.
 \end{aligned}$$

Portanto se for confirmada a hipótese de que a norma  $\|z(t)\|_{\mathbf{H}_0^1}$  é limitada para todo  $t \in \mathbb{R}_+$ , segue da desigualdade acima que  $\|z(t)\|_\gamma$  permanece limitado para qualquer  $t \in \mathbb{R}_+$ . Então, nesse caso, a trajetória  $\{z(t)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$  está contida em um conjunto compacto em  $\mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$ . Isto finaliza a demonstração do teorema. ■

## 2.4. Soluções de equilíbrio – bifurcação

Nesta seção, apresentaremos uma descrição qualitativa e quantitativa das soluções de equilíbrio de (2.2.1). Essas soluções constituem o subespaço invariante da transformação de grupo de renormalização, ou seja, são os pontos fixos da transformação descrita pela equação diferencial (2.2.1).

As soluções de equilíbrio de (2.2.1) são as soluções ímpares da equação diferencial ordinária

$$(2.4.1) \quad \alpha(\psi'' - 2\psi\psi') + 2\psi = 0$$

com condições de contorno  $\psi(0) = \psi(2\pi)$  e  $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$ . É sempre possível escrever equações diferenciais ordinárias de ordem  $n$  como um sistema de  $n$  equações diferenciais de 1ª ordem (acopladas). A equação (2.4.1) pode ser escrita como o sistema

$$(2.4.2) \quad \begin{cases} w' = 2p(w - \alpha^{-1}) \\ p' = w \end{cases}$$

onde  $w = \psi'$  e  $p = \psi$ .

O seguinte teorema resume as propriedades das soluções de (2.4.1).

### TEOREMA 2.4.1.

A equação (2.4.1) apresenta dois regimes distintos separados pelo parâmetro  $\alpha = 2$  ( $\beta = 8\pi$ ). Para  $\alpha \geq 2$ , há apenas a solução trivial  $\psi_0 \equiv 0$ . Para  $\alpha < 2$  e  $k \in \mathbb{N}_+$  tal que  $2/(k+1)^2 \leq \alpha < 2/k^2$ , existem  $2k$  soluções não triviais  $\{\psi_j^+, \psi_j^-\}_{j=1}^k$  ímpares com período fundamental  $2\pi/j$  com a propriedade  $\psi_j^-(x) = \psi_j^+(x + \pi)$ . E ainda, cada par de soluções  $\psi_j^+, \psi_j^-$  bifurca da solução trivial quando o parâmetro  $\alpha$  toma o valor  $\alpha_j = 2/j^2$ .

No espaço de fase formado pelo par ordenado  $(\psi, \psi') \in \mathbb{R}^2$ , a região ocupada pelo par  $(\psi_j^\pm, \psi_j^{\pm'})$  corresponde a órbitas fechadas em torno da origem cuja amplitude aumenta monotonicamente conforme  $\alpha$  diminui.

*OBSERVAÇÃO 2.4.2.* A integração numérica dessas órbitas indica a sua rápida aproximação da órbita aberta  $\{(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}x), x \in \mathbb{R}\}$  para  $\alpha \downarrow 0$ .

O campo vetorial  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$(2.4.3) \quad (w, p) \rightarrow f(w, p) = (2p(w - \alpha^{-1}), w)$$

presente no lado direito de (2.4.2) define um sistema dinâmico. De maneira semelhante à da seção anterior, segue do teorema de Piccard, a existência e unicidade da solução  $(w(x), p(x))$ , globalmente definida em  $\mathbb{R}^2$ , tal que a condição  $(w(0), p(0)) = (w_0, p_0)$ . A existência de uma solução global e sua dependência contínua com relação à condição inicial  $(w_0, p_0)$  e ao parâmetro  $\alpha$ , segue do lema de Gronwall. Como conseqüência, o espaço de fase é folheado por órbitas mutuamente livres de intersecção, indexadas por

$$\gamma_P = \{(w(x), p(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, P = (w(0), p(0))\}$$

e que dependem continuamente de  $P$  e  $\alpha$ .

O sistema de equações (2.4.2) é invariante pela troca de sinal conjunta das variáveis  $x$  e  $p$ , portanto as órbitas são simétrica com relação ao eixo  $w$  que nomearemos como  $L = \{(w, 0) : w \in \mathbb{R}\}$ . Sem perda de generalidade, podemos escolher as condições iniciais pertencentes à região  $L$ , ou seja, escolhemos  $P = (w(0), p(0)) = (w_0, 0) \in L$  e indicamos as órbitas pelo índice  $\gamma_P = \gamma_{w_0}$ . Em seguida estudaremos as condições sobre o par  $P, \alpha$  que correspondem a órbitas fechadas.

### PROPOSIÇÃO 2.4.3.

*Cada órbita  $\gamma_P$  é univocamente determinada por um ponto  $P$  no semi-eixo positivo  $L^+ = \{(w_0, 0) : w_0 \geq 0\}$ . Para  $w_0 > 0$ , a órbita  $\gamma_{w_0}$  pode ser fechada ou ilimitada se  $\alpha w_0 < 1$  ou  $\alpha w_0 \geq 1$ , respectivamente. A órbita  $\gamma_{\alpha^{-1}} = \{(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}x) : x \in \mathbb{R}\}$  separa o espaço de fase de maneira que as órbitas à esquerda de  $\gamma_{\alpha^{-1}}$  são sempre fechadas enquanto que as demais são ilimitadas, ou seja  $\gamma_{\alpha^{-1}}$  é uma separatriz. A origem é um ponto fixo de (2.4.2); ela corresponde à órbita  $\gamma_0 = \{(0, 0)\}$  que é circundada por todas as demais órbitas fechadas.*

DEMONSTRAÇÃO: Pela regra da cadeia, derivamos a partir de (2.4.2), a equação diferencial para a relação implícita  $p(w)$ ,

$$\frac{dp}{dw} = \frac{w}{2p(w - \alpha^{-1})},$$

válida nas situações em que  $\alpha w \neq 1$ . Assim pela integração da equação anterior com condição inicial  $P = (w_0, 0)$ , obtemos a equação implícita para órbita  $\gamma_{w_0}$

$$(2.4.4) \quad p^2 = w - w_0 + \alpha^{-1} \ln \left( \frac{1 - \alpha w}{1 - \alpha w_0} \right),$$

ilustradas pela figura 2.4.1.

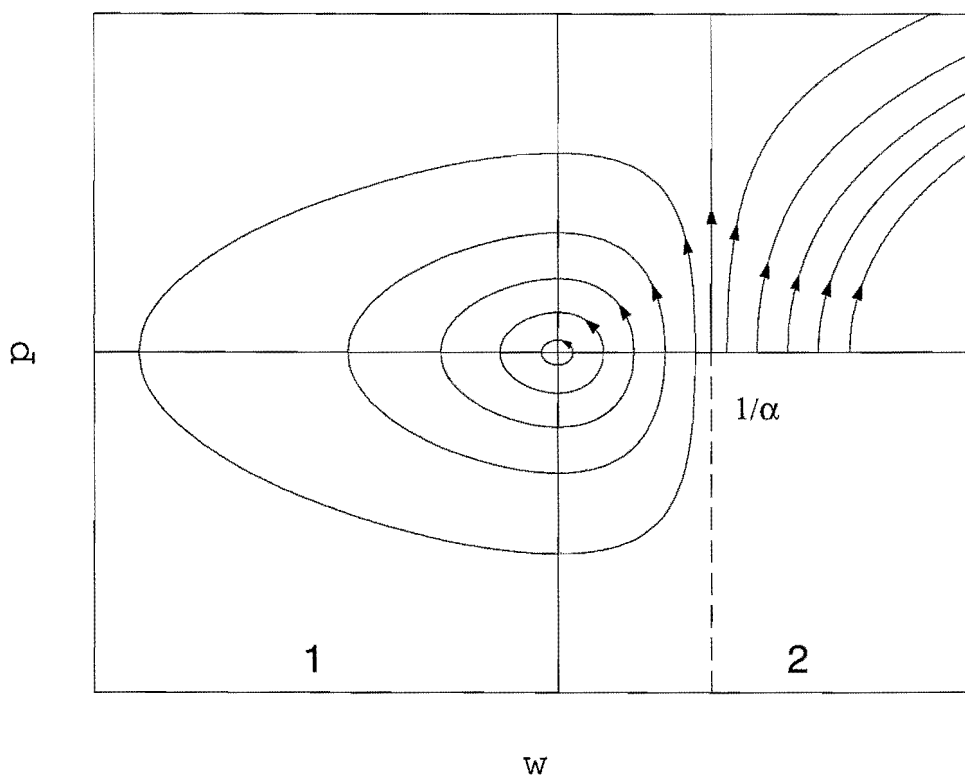


FIGURA 2.4.1. Trajetórias do sistema dinâmico (2.4.2).

O único ponto crítico do campo vetorial (2.4.3) é a origem  $(0, 0)$  que indicamos como  $\gamma_0$ . De acordo com (2.4.4), na vizinhança de  $\gamma_0$ , as órbitas são aproximadas por elipses descritas pela equação

$$(2.4.5) \quad \frac{2}{\alpha} \frac{p^2}{w_0^2} + \frac{w^2}{w_0^2} = 1 + O\left(\frac{w^3}{w_0^2}, w_0\right).$$

O que ilustra a linearização de  $f$  em torno do ponto  $(0, 0)$ , dada por uma matriz com autovalores  $\lambda_1 = i\sqrt{2\alpha^{-1}}$  e  $\lambda_2 = -i\sqrt{2\alpha^{-1}}$ .

No caso em que  $\alpha w_0 = 1$ , podemos observar pela equação (2.4.2) com condição inicial  $(w(0), p(0)) = (w_0, 0) = (\alpha^{-1}, 0)$  e por meio de indução que a solução é tal que  $\frac{d^n}{dx^n} w(0) = 0$  para todo  $n \geq 1$ ; portanto a órbita  $\gamma_{\alpha^{-1}}$  é dada por

$$\gamma_{\alpha^{-1}} = \{(\alpha^{-1}, \alpha^{-1}x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Assim, dada uma seqüência de pontos  $\{x_n\}$  tal que  $x_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ , indicamos o conjunto de pontos limite

$$\omega(P) = \{(w^*, p^*) \in \mathbb{R}^2 : \lim_{n \rightarrow \infty} (w(x_n), p(x_n)) = (w^*, p^*)\},$$

como o *conjunto  $\omega$ -limite*. Assim,  $\gamma_{\alpha^{-1}}$  separa dois tipos distintos de órbita: as fechadas (periódicas), para as quais  $\omega(P) = \gamma_P$ , e as órbitas abertas para as quais  $\omega(P) = \{\infty\}$ . Como podemos observar pela figura 2.4.1, a solução implícita (2.4.4) estabelece que para condições iniciais tais que  $w_0 < \alpha^{-1}$ , a órbita pertence ao conjunto das órbitas fechadas (região 1 da figura 2.4.1), enquanto que para  $w_0 \geq \alpha^{-1}$  as órbitas são abertas (região 2 da figura 2.4.1). ■

DEMONSTRAÇÃO (teor. 2.4.1): As soluções estacionárias que procuramos, satisfazem (2.4.2) com as condições periódicas de contorno  $w(0) = w(2\pi)$  e  $p(0) = p(2\pi)$ . Ao fixar o período  $T$  de uma órbita  $\gamma_{w_0}$  em  $T = 2\pi$ , a condição inicial  $w_0$  torna-se implicitamente dependente do parâmetro  $\alpha$ . A questão torna-se portanto, a seguinte, fixado o parâmetro  $\alpha$ , qual, ou quais valores de  $w_0$  implicam uma órbita com período  $2\pi$ ?

Vamos indicar por  $T = T(\alpha, w_0)$  o período de uma solução de (2.4.2) com condição inicial, então

$$(2.4.6) \quad T = \int_{\gamma_{w_0}} dx = 2 \int dp \frac{1}{w(p)},$$

onde, por simetria, a segunda integral é sobre o semi-plano superior do eixo  $w$ . Para  $\mathcal{D} = \{(\alpha, w_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : \alpha w_0 \leq 1\}$ , definimos a função contínua  $G_j : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$

$$G_j = T - \frac{2\pi}{j}.$$

Como veremos a seguir, para  $j = 1, 2, \dots$  temos que  $G_j(2/j^2, 0) = 0$ .

A partir da aproximação para a equação das órbitas próximas à origem (2.4.5), podemos notar que no limite  $w_0 \rightarrow 0$ , a equação para a órbita nas variáveis  $\tilde{w} = w/w_0$  e  $\tilde{p} = p/w_0$  é dada por  $2\alpha^{-1}\tilde{p}^2 + \tilde{w}^2 = 1$ , e portanto, o período dessas órbitas, no limite, é  $T_L$ ,

$$(2.4.7) \quad T_L = 4 \int_0^{\sqrt{\alpha/2}} d\tilde{p} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha^{-1}\tilde{p}^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Assim, por continuidade, para  $\alpha_j = 2/j^2$ , temos que  $T_L = 2\pi/j$  e conseqüentemente,  $G(\alpha_j, 0) = 0$ .

Portanto, se garantirmos que

$$(2.4.8) \quad \frac{\partial}{\partial w_0} T > 0$$

para quaisquer  $(\alpha, w_0) \in \mathcal{D}$ , então, pelo teorema da função implícita, existirá para cada  $j \in \mathbb{N}_+$ , uma única função monótona decrescente,  $\hat{w}_j : [0, 2/j^2] \rightarrow \mathbb{R}_+$  tal que,  $\hat{w}(2/j^2) = 0$  e  $G_j(\alpha, \hat{w}_j(\alpha)) = 0$  para  $0 \leq \alpha \leq 2/j^2$ .

Notemos inicialmente que a partir de (2.4.2) e pela mudança de escala das variáveis  $x \rightarrow \bar{x} = x/\sqrt{\alpha}$ ,  $w \rightarrow \bar{w} = \alpha w$  e  $p \rightarrow \bar{p} = \sqrt{\alpha}p$  que o período obedece a relação

$$(2.4.9) \quad T(\alpha, w_0) = \sqrt{\alpha}T(1, \alpha w_0).$$

Esse fato, em conjunto com a desigualdade (2.4.8) asseguram que a função  $T$  é uma função monótona crescente em ambos os argumentos de maneira independente.

Segue disto que se  $\alpha < 2$ , então para cada  $j = 1, 2, \dots, k$  tal que  $2/(k+1)^2 \leq \alpha < 2/k^2$ , existe uma única função  $\hat{w}_j$  tal que  $\hat{w}_j(2/j^2) = 0$ . As soluções não triviais  $\psi_1^\pm, \psi_2^\pm, \dots, \psi_k^\pm$  de (2.4.1) são as componentes  $p$  das órbitas  $\gamma_{\hat{w}_j}$  que dão  $j$  voltas em torno



da origem:  $\psi_j^+$  é uma função de período  $2\pi$  com período fundamental  $2\pi/j$ ,  $(\psi_j^+)'(0) > 0$  e é tal que  $\psi_j^+(x + \pi) = \psi_j^-(x)$ . Por outro lado, se  $\alpha \geq 2$ , como  $T(\alpha, w_0)$  é uma função monotonicamente crescente em  $w_0$  e por (2.4.7),  $T(\alpha, 0) \geq 2\pi$ , se  $\alpha \geq 2$ , então além do caso  $j = 1$ , não há função  $\hat{w}(\alpha)$  que satisfaça  $G_j(\alpha, \hat{w}_j(\alpha)) = 0$ . Estas considerações reduzem a demonstração do teorema 2.4.1 à demonstração da validade da desigualdade (2.4.8).

Para demonstrar a desigualdade (2.4.8), será conveniente realizarmos uma mudança de variáveis que possibilitará escrever o sistema de equações (2.4.2) como um sistema hamiltoniano. Vamos, portanto, introduzir a nova variável

$$q = \ln(1 - \alpha w),$$

definida nos casos em que  $\alpha w < 1$  (soluções periódicas – órbitas fechadas). Em vista do comportamento de escala do período (2.4.9), escolheremos, sem perda de generalidade,  $\alpha = 1$ , assim, na nova variável o sistema (2.4.2) é descrito como o sistema hamiltoniano

$$\begin{cases} q' = 2p \\ p' = 1 - e^q, \end{cases}$$

cujas função energia  $H(q, p)$  é dada por

$$H(q, p) = p^2 + e^q - q - 1.$$

Quando escrita em termos da nova variável, a equação implícita para as órbitas (2.4.4) corresponde à órbita com energia  $H(q, p) = E$

$$E = -w_0 - \ln(1 - w_0).$$

Indicaremos as órbitas nesse sistema pela energia,  $\gamma_E$ . E como conseqüência do fato de que

$$\frac{d}{dw_0} E = \frac{w_0}{1 - w_0} > 0,$$

existe uma correspondência biunívoca entre as famílias de órbitas fechadas  $\{\gamma_{w_0}, 0 \leq w_0 < 1\}$  e  $\{\gamma_E, 0 \leq E < \infty\}$ .

Seja  $\tilde{T} = \tilde{T}(E)$  o período de uma órbita  $\gamma_E$ ,

$$(2.4.10) \quad \tilde{T} = \int_{\gamma_E} dx = \int_{q_-}^{q_+} dq \frac{1}{p}.$$

Pela conservação da energia, temos que  $p(q, E) = \sqrt{E - v(q)}$  onde  $v(q)$  é a energia potencial dada por

$$(2.4.11) \quad v(q) = e^q - q - 1.$$

Os limites de integração  $q_+$  e  $q_-$  são, respectivamente, as raízes positiva e negativa da equação  $v(q) = E$ . A desigualdade (2.4.8) se verifica se e somente se  $d\tilde{T}/dE > 0$  uniformemente para todo  $E \in \mathbb{R}_+$ . Para demonstrar essa desigualdade faremos uso do seguinte critério de monotonicidade proposto por Chicone em [17] (uma outra referência é [18]).

**LEMA 2.4.4** (Chicone 87).

Seja  $v \in C^3(\mathbb{R})$  uma função três vezes diferenciável e seja  $f(q) = -v'(q)$ . Se  $v/f^2$  for uma função convexa com

$$\left(\frac{v}{f^2}\right)'' = \frac{6v(v'')^2 - 3(v')^2v'' - 2vv'v'''}{(v')^4} > 0, \quad q \neq 0,$$

então a função período  $\tilde{T}$  é uma função monótona e estritamente crescente em  $E$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Com o objetivo de produzir uma representação integral conveniente para  $d\tilde{T}/dE$ , vamos introduzir uma nova quantidade dada por

$$(2.4.12) \quad K \doteq \frac{1}{3} \int_{q_-}^{q_+} dq p^3 \left(\frac{v}{f^2}\right)''.$$

Realizando a integração por partes de  $K$  duas vezes,

$$K = \frac{p^3}{3} \left(\frac{v}{f^2}\right)' \Big|_{q_-}^{q_+} - \frac{pv}{2f} \Big|_{q_-}^{q_+} + \int_{q_-}^{q_+} dq (pf)' \frac{v}{f^2}.$$

Como  $p(q) = \sqrt{E - v(q)}$ , temos as seguintes propriedades,

$$(2.4.13) \quad \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{f}{2p} \quad \text{e por definição,} \quad p(q_{\pm}) = 0.$$

Utilizando esses fatos, a expressão para  $K$  torna-se

$$K = \frac{1}{2} \int_{q_-}^{q_+} dq \left( \frac{v}{2p} + vp \frac{f'}{f^2} \right).$$

Levando em conta a identidade  $(v/f)' = -1 - vf'/f^2$  e novamente integrando por partes,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_{q_-}^{q_+} dq \left( \frac{v}{2p} - p \left( \frac{v}{f} \right)' - p \right) \\ &= -\frac{1}{2} p \left( \frac{v}{f} \right) \Big|_{q_-}^{q_+} + \frac{1}{2} \int_{q_-}^{q_+} dq \left( \frac{v}{p} - p \right) \\ (2.4.14) \quad &= \frac{1}{2} \int_{q_-}^{q_+} dq \left( \frac{E}{p} - 2p \right), \end{aligned}$$

na última igualdade, usamos a relação  $v = E - p^2$ .

A partir de (2.4.10), (2.4.12) e (2.4.14) nos temos que

$$E\tilde{T} = 2 \int_{q_-}^{q_+} dq p + \frac{2}{3} \int_{q_-}^{q_+} dq p^3 \left( \frac{v}{f^2} \right)''.$$

A derivada dessa equação em relação a  $E$  é dada por

$$\tilde{T} + E \frac{d}{dE} \tilde{T} = \int_{q_-}^{q_+} dq \frac{1}{p} + \int_{q_-}^{q_+} dq p \left( \frac{v}{f^2} \right)''.$$

Uma vez que o período possui a representação (2.4.10), a expressão acima nos fornece a representação integral para a derivada do período,

$$\frac{d}{dE} \tilde{T} = \frac{1}{E} \int_{q_-}^{q_+} dq p \left( \frac{v}{f^2} \right)''.$$

Assim, pela hipótese do lema

$$\frac{d}{dE} \tilde{T} > 0.$$



Resta então verificar se a desigualdade do lema é satisfeita por (2.4.11). Notemos que

$$\left(\frac{v}{f^2}\right)'' (v')^4 = e^q g(q),$$

onde

$$g(q) = e^{2q} + 4(1 - q)e^q - 2q - 5$$

é tal que  $g(0) = g'(0) = 0$  e  $g''(q) = 4e^q v(q) \geq 0$ , portanto  $g(q) \geq 0$  (a igualdade só se verifica em  $q = 0$ ). Assim, com o auxílio do lema 2.4.4, concluímos a demonstração do teorema 2.4.1. ■

Ao impor as condições de contorno  $\psi(0) = \psi(2\pi)$ ,  $\psi'(0) = \psi'(2\pi)$  e buscar apenas as soluções ímpares de (2.4.1) estamos admitindo soluções que podem não ter significado físico. Vejamos, a partir das definições de potencial efetivo (2.1.10), da sua normalização (2.1.11) e da equação (2.2.1) as condições de contorno em  $x = 0$  estão sujeitas a

$$(2.4.15) \quad \psi(0) = i \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} q \lambda^*(q)}{\sum_{q \in \mathbb{Z}} \lambda^*(q)} = 0$$

e

$$(2.4.16) \quad \psi'(0) = \frac{\sum_{q \in \mathbb{Z}} q^2 \lambda^*(q)}{\sum_{q \in \mathbb{Z}} \lambda^*(q)} \geq 0,$$

onde  $\lambda^*$  é a atividade de carga *a priori* para o ponto fixo do grupo de renormalização. De acordo com os mapas e as equações diferenciais as condições de contorno (2.4.15) e (2.4.16), relacionadas à simetria por carga e à positividade do segundo momento da distribuição, respectivamente, são propriedades invariantes. Portanto, apenas as soluções estacionárias  $\psi_0, \psi_1^+, \psi_2^+, \dots$  correspondem às soluções estacionárias da equação (2.2.1) com significado físico.

A figura seguinte apresenta a relação entre a condição inicial  $w_0$  e o parâmetro  $\alpha$  para duas órbitas distintas,  $\gamma_\alpha$  e  $\gamma_{\bar{w}_1}$ . De acordo com (2.4.6), essa relação é resultado da solução da equação

$$T(\alpha, w_0) = 2\pi.$$

Enquanto que para a órbita  $\gamma_{\alpha^{-1}}$ , a relação é dada explicitamente por  $w_0 = \alpha^{-1}$ , a relação para órbita  $\gamma_{\widehat{w}_1}$ , envolve a integração numérica da mesma. Na representação *sine-Gordon*, o potencial efetivo  $u(x) = \int_0^x dy \psi(y) = x^2/(2\alpha)$  dado pela órbita  $\gamma_{\alpha^{-1}}$  corresponde ao regime de Debye-Hückel com comprimento de Debye  $\alpha$ . Embora o regime de Debye-

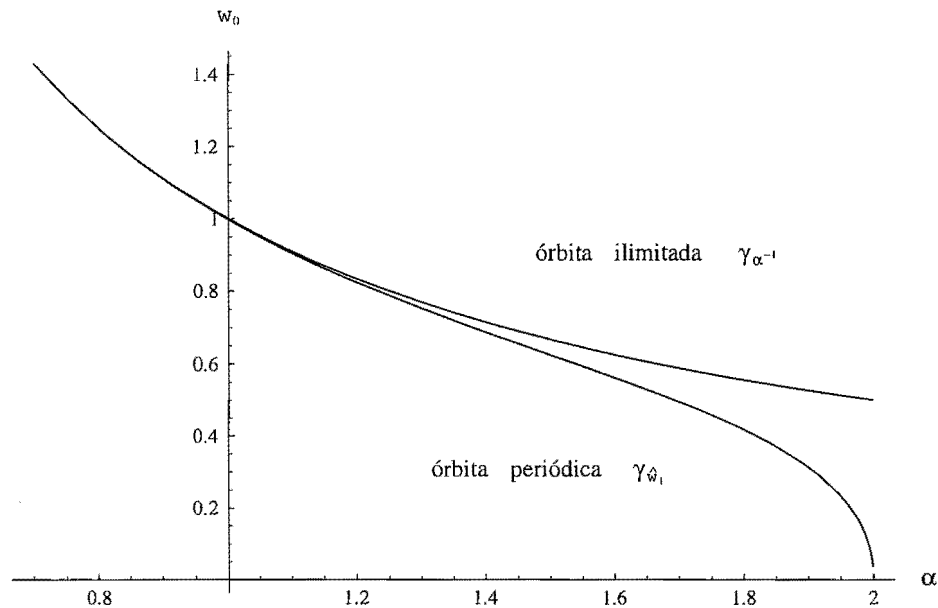


FIGURA 2.4.2. Comparação entre o valor inicial da órbita de período  $2\pi$ ,  $\widehat{w}_1(\alpha)$  e a órbita não limitada (Debye-Hückel),  $w_{\alpha^{-1}}(\alpha) = \alpha^{-1}$ .

Hückel não seja alcançado para qualquer  $\alpha > 0$ , podemos perceber pelo gráfico acima que as condições iniciais da órbita  $\gamma_{\widehat{w}_1}$  se aproximam rapidamente<sup>3</sup> de  $\alpha^{-1}$ . Em termos do potencial efetivo, esse fenômeno se reflete no comportamento assintótico do potencial relacionado à órbita  $\gamma_{\widehat{w}_1}$

$$u_{\gamma_{\widehat{w}_1}}(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} \frac{(x \bmod 2\pi)^2}{2\alpha}.$$

## 2.5. Dinâmica e estabilidade das soluções

Seja  $z(t; z_0)$  a solução do problema de Cauchy (2.2.2). De acordo com a análise que desenvolvemos na seção 2.2.1, a solução pode ser descrita como a ação de um semigrupo (não linear)  $S(t)$ ,

$$(2.5.1) \quad z(t, z_0) = S(t)z_0, \quad z(t_1; z(t_2; z_0)) = S(t_1 + t_2)z_0 = S(t_1)S(t_2)z_0,$$

<sup>3</sup>análise numérica indica que em  $\alpha = 1$ , a diferença entre a condição inicial para  $\gamma_{\widehat{w}_1}$  e  $\alpha^{-1}$  está na sexta casa decimal.

definido em um subconjunto fechado  $\mathcal{V} \subset \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$  com a topologia induzida pela norma de gráfico  $\|\cdot\|_{1/2} = \|\cdot\|_{\mathbf{H}_0^1}$ .

Nesta seção, apresentaremos a análise de estabilidade para as soluções de equilíbrio descritas na seção 2.2.2. Podemos entender a estabilidade local de uma solução estacionária  $\psi$  como a propriedade do semigrupo de ser uniformemente contínuo em  $\psi \in \mathcal{V}$  para todo tempo  $t \geq 0$ , ou seja, dizemos que uma solução estacionária  $\psi$  é localmente estável se, dada uma vizinhança de  $\psi$ ,  $\|z_1 - \psi\|_{\mathbf{H}_0^1} < \delta$  e um  $\varepsilon > 0$ , temos que  $\|z(t; z_1) - z(t; \psi)\|_{\mathbf{H}_0^1} < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Se além disso,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t; z_1) - z(t; \psi)\|_{\mathbf{H}_0^1} = 0$  então dizemos que a solução  $\psi$  é uniformemente assintoticamente estável.

Apresentaremos também uma análise da estabilidade global para as soluções estacionárias. Esta análise é uma forma de análise variacional desenvolvida originalmente por LaSalle e utilizada com sucesso por Chafee e Infante [16] (uma outra referência é o próprio Henry [38]) na análise de estabilidade em equações diferenciais parciais semilineares parabólicas. A análise envolve o estudo de um funcional de Liapunov que se origina a partir das equações de Euler-Lagrange para a equação diferencial parcial, e como veremos, se a equação possuir alguma não linearidade que envolva o termo de derivada, encontrar esse funcional torna-se um problema consideravelmente mais sutil. Este é o nosso caso. Essa dificuldade pode ser contornada através da técnica desenvolvida por Zelenyak, Lavrentiev Jr. e Vishnevskii [66] que permite construir famílias de funcionais de Liapunov para uma equação diferencial parcial quase-linear. Por ser uma técnica recente, faremos uma descrição da mesma antes de aplicá-la à equação de nosso interesse.

Começaremos pela análise local.

**TEOREMA 2.5.1** (estabilidade local).

*Existe uma vizinhança  $\mathcal{U} \subset \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$  da origem, tal que para  $\alpha > 2$  e  $z_0 \in \mathcal{U}$  temos que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t; z_0)\|_{\mathbf{H}_0^1} = 0$ , ou seja, a solução estacionária  $\psi_0 \equiv 0$  é local e assintoticamente estável. Se  $\alpha < 2$  é tal que  $2/(k+1)^2 \leq \alpha < 2/k^2$ , então entre todas as soluções de equilíbrio de (2.2.2)  $(\psi_0, \psi_1^\pm, \psi_2^\pm, \dots, \psi_k^\pm)$ , apenas as soluções  $\psi_1^\pm$  são local e assintoticamente estáveis. Portanto existe um  $\rho > 0$  tal que, se  $\|z_0 - \psi\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \rho$ , então  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|z(t; z_0) - \psi\|_{\mathbf{H}_0^1} = 0$  para  $\psi = \psi_1^\pm$ ; e para qualquer seqüência  $\{z_n\}_{n \geq 1}$  com*

$\lim_{t \rightarrow \infty} \|z_n - \psi\|_{\mathbf{H}_0^1} = 0$ , nos temos que  $\sup_{t > 0} \|z(t; z_n) - \psi\|_{\mathbf{H}_0^1} \geq \varepsilon > 0$  para quaisquer  $n$  e  $\psi_j^\pm$ ,  $j \neq 1$ .

Ao invés de trabalhar diretamente com a equação (2.2.2), será conveniente considerar a equação para a diferença  $z - \psi = \zeta$ , onde  $z$  é uma solução de (2.2.2) e  $\psi$  uma das soluções estacionárias da mesma equação. Então a equação para  $\zeta$  é a seguinte,

$$(2.5.2) \quad \frac{d}{dt}\zeta + L[\psi]\zeta = F(\zeta),$$

onde, neste caso,  $F : \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) \rightarrow \mathbf{L}^2(0, 2\pi)$  é o operador não linear

$$(2.5.3) \quad F(\zeta) = -2\alpha\zeta\zeta_x$$

e  $L[\psi]$  o operador linear

$$(2.5.4) \quad L[\psi]\zeta = -\alpha\zeta_{xx} + 2\alpha\psi\zeta_x - 2(1 - \alpha\psi')\zeta.$$

**DEMONSTRAÇÃO** (teor. 2.5.1): A prova do teorema 2.5.1 segue a partir dos dois teoremas seguintes. ■

**TEOREMA 2.5.2.**

Seja  $L = L[\psi]$  o operador linear definido em (2.5.4). Se o espectro do operador  $L$ ,  $\sigma(L)$  está contido no conjunto  $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \geq c\}$  para algum  $c > 0$ , então  $\zeta \equiv 0$  é a única solução uniforme e assintoticamente estável de (2.5.2). Por outro lado, se  $\sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda < 0\} \neq \emptyset$ , então  $\zeta \equiv 0$  é instável.

**TEOREMA 2.5.3.**

Seja  $L = L[\psi]$  o operador linear definido em (2.5.4). Então sempre que  $\psi = \psi_0$  e  $\alpha > 2$ , ou então  $\psi = \psi_1^\pm$  e  $\alpha < 2$ , o espectro de  $L$  é tal que  $\inf(\lambda \in \sigma(L)) > 0$ . Se  $\alpha$  é tal que  $2/(k+1)^2 \leq \alpha < 2/k^2$  para  $k \in \mathbb{N}_+$ , então  $\sigma(L) \cap \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda < 0\} \neq \emptyset$  para  $\psi = \psi_0$  e  $\psi = \psi_j^\pm$ ,  $j = 2, \dots, k$ .

DEMONSTRAÇÃO (teor. 2.5.2): Segue de (2.2.3), (2.2.13), (A.3.3) e da hipótese sobre o espectro de  $L$  que

$$(2.5.5) \quad \|\zeta(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq C_{1/2} e^{-ct} \|\zeta_0\|_{\mathbf{H}_0^1} + \xi \int_0^t ds (t-s)^{-1/2} e^{-c(t-s)} \|\zeta(s)\|_{\mathbf{H}_0^1}^2$$

onde  $c > 0$ ,  $C_{1/2} = 1/\sqrt{2e}$  e  $\xi = 2\sqrt{2\pi\alpha}$ .

Vamos assumir que no intervalo  $(0, t)$ ,  $\|\zeta(s)\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \rho$  para um  $\rho$  que satisfaça

$$(2.5.6) \quad \xi \int_0^\infty dt t^{-1/2} e^{-ct} = \xi \sqrt{\frac{\pi}{c}} < \frac{1}{2\rho}.$$

Se  $\|\zeta_0\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \rho\sqrt{e/2}$ , então o lado direito da desigualdade (2.5.5) pode ser limitada superiormente por

$$\|\zeta(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \frac{\rho}{2} + \rho^2 \xi \int_0^\infty ds (t-s)^{-1/2} e^{-c(t-s)} < \rho,$$

o que implica a existência e unicidade da solução de (2.5.2) com  $\|\zeta(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \rho$  para todo  $t > 0$ . Retornando à equação (2.5.5), se combinarmos a estimativa  $\|\zeta(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} < \rho$  a uma pequena alteração do lema de Gronwall, tal que  $E_{1/2}(t) = \sum_{n=0}^\infty (\rho\xi\sqrt{\pi t})^n / \Gamma(n/2 + 1)$ , teremos a partir de (2.5.6) que

$$\begin{aligned} \|\zeta(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} &\leq C_{1/2} \|\zeta_0\|_{\mathbf{H}_0^1} E_{1/2}(t) e^{-ct} \\ &\leq C_{1/2} \|\zeta_0\|_{\mathbf{H}_0^1} \left(1 + \rho\xi\sqrt{t}\right) e^{-(c-\rho^2\xi^2\pi)t} \\ &\leq \frac{1}{2e} \|\zeta_0\|_{\mathbf{H}_0^1} \left(1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{ct}{\pi}}\right) e^{-3ct/4}. \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação de estabilidade do teorema 2.5.2, uma vez que (2.5.2) define um sistema dinâmico em um subconjunto fechado  $\mathcal{V}_\rho = \{\zeta \in \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) : \|\zeta\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \rho\}$  com a propriedade de que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\zeta(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} = 0$  se  $\|\zeta_0\|_{\mathbf{H}_0^1} = \|\zeta_0 - \psi\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \rho\sqrt{e/2}$ . ■

DEMONSTRAÇÃO (teor. 2.5.3): Seja  $\psi = \psi_0$ , então o operador linear  $L[\psi_0]$  possui a expressão simples dada por

$$L[\psi_0] = -\alpha\Delta - 2.$$



Assim, o teorema segue do espectro de  $L[\psi_0]$ , dado por  $\sigma(L[\psi_0]) = \{\alpha n^2 - 2\}_{n \in \mathbb{N}_+}$ .

Consideremos agora, as soluções não triviais de (2.4.1) as quais designaremos genericamente por  $\psi$ . De acordo com o teorema 2.5.2, a solução  $\psi$  é assintoticamente estável se  $\sigma(L[\psi]) > 0$  e instável se  $\sigma(L[\psi]) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$ .

Notemos inicialmente que, por paridade  $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ . Seja então,  $\varphi$  solução da equação

$$(2.5.7) \quad L[\psi]\varphi = 0$$

no domínio  $0 < x < \pi$  com condição inicial

$$(2.5.8) \quad \varphi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \varphi'(0) = 1.$$

Da mesma forma que na referência [38], faremos uso do teorema da comparação para equações diferenciais com o objetivo de relacionar as propriedades de estabilidade das soluções  $\psi$  à positividade de  $\varphi$ , solução de (2.5.7). Como veremos,  $\psi$  é assintoticamente estável se  $\varphi(x) > 0$  no intervalo  $0 < x \leq \pi$ . Por outro lado, se  $\varphi(x) < 0$  em alguma região do intervalo  $0 < x \leq \pi$ , então  $\psi$  é instável.

Como utilizaremos o teorema da comparação, será necessário reescrever a equação (2.5.7) em sua forma auto-adjunta. Seja então, o peso  $p(x)$ ,

$$p(x) \doteq e^{-2 \int_0^x dy \psi(y)}$$

que torna  $L[\psi]$  no operador auto-adjunto

$$(2.5.9) \quad pL[\psi]\zeta = -\alpha (p\zeta')' - 2p(1 - \alpha\psi')\zeta.$$

Segundo o produto interno definido por  $(f, g)_p \doteq \int_{-\pi}^{\pi} dx p(x)f(x)g(x)$ , temos que para quaisquer funções  $\zeta$  e  $\eta$  de período  $2\pi$ ,  $(Lf, g)_p = (f, Lg)_p$ .

**TEOREMA 2.5.4** (comparação).

Sejam  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  duas soluções reais da equação

$$pL[\psi]\zeta = f_i, \quad i = 1, 2,$$

no domínio  $(0, \pi)$ , sujeitas às condições  $\zeta_1(0) = \zeta_1(\pi) = 0$ ,  $\zeta_1'(0) > 0$  e  $\zeta_2(0) = 0$ ,  $\zeta_2'(0) > 0$ . Se  $\zeta_1 > 0$  e  $f_i = f_i(\zeta; x)$  é tal que

$$f_2 > f_1$$

no domínio  $(0, \pi)$ , então  $\zeta_2$  deve se anular em algum ponto desse domínio. Caso contrário, se  $\zeta_1 > 0$  e

$$f_2 < f_1$$

no mesmo domínio aberto, então  $\zeta_2 > 0$  no intervalo  $(0, \pi]$ .

DEMONSTRAÇÃO: Vamos considerar inicialmente o caso  $f_2 > f_1$  e assumir que  $\zeta_2 > 0$  em  $(0, \pi)$ . Então, a partir da equação (2.5.9) e da hipótese do teorema,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^\pi dx (f_2 - f_1) &= (\zeta_1, L\zeta_2)_p - (L\zeta_1, \zeta_2)_p \\ &= 2\alpha \int_0^\pi dx ((p\zeta_1')' - \zeta_1 (p\zeta_2')) \\ &= 2\alpha \int_0^\pi dx (p(\zeta_1'\zeta_2 - \zeta_1\zeta_2'))', \end{aligned}$$

o que, em vista das condições de contorno consideradas no teorema, implica a contradição

$$p(\pi)\zeta_1'(\pi)\zeta_2(\pi) > 0.$$

Como, por hipótese,  $\zeta_1(\pi) = 0$  e  $\zeta_1 > 0$  em  $(0, \pi)$ , temos que  $\zeta_1'(\pi) < 0$ . Portanto deve existir algum ponto  $\bar{x} \in (0, \pi)$  tal que  $\zeta_2(\bar{x}) = 0$ .

Vamos agora considerar o caso em que  $f_2 < f_1$  e assumir que existe um ponto  $\bar{x}$  no intervalo  $(0, \pi)$  tal que  $\zeta_2(\bar{x}) = 0$  e  $\zeta_2 > 0$  no intervalo  $(0, \bar{x})$  (e, conseqüentemente,  $\zeta_2'(\bar{x}) < 0$ ). Novamente, a partir da equação (2.5.9) e das hipóteses do teorema,

$$p(\bar{x})\zeta_1(\bar{x})\zeta_2'(\bar{x}) > 0.$$

Como, por hipótese,  $\zeta_1(\bar{x}) > 0$ , temos a contradição  $\zeta_2'(\bar{x}) > 0$ . Portanto, nesse caso, podemos concluir que  $\zeta_2 > 0$  no intervalo  $(0, \pi]$ . ■

Se considerarmos a seguinte equação de autovalores

$$L[\psi]\theta = \lambda\theta$$

no intervalo  $(0, \pi)$  para o menor autovalor  $\lambda$  no espaço das soluções periódicas ímpares,  $\theta$  satisfará as condições as quais  $\zeta_1$  está sujeita no teorema 2.5.4 com  $f_1 = \lambda p \zeta$ . Assim, aplicando o teorema 2.5.4 à equação de autovalores acima, temos a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 2.5.5.**

*O menor autovalor  $\lambda$  do operador  $L[\psi]$  é positivo se a solução  $\varphi$  da equação (2.5.7) sujeita às condições (2.5.8) for tal que  $\varphi > 0$  no intervalo  $(0, \pi)$ . Por outro lado, o menor autovalor será negativo se existir um ponto  $\bar{x} \in (0, \pi)$  tal que  $\varphi(\bar{x}) = 0$ .*

A partir das soluções estacionárias não triviais  $\psi$ , introduzimos uma nova função  $\chi$ , dada por

$$(2.5.10) \quad \chi = c(-\alpha\psi'' + 4\psi)$$

onde  $c > 0$  é escolhido de maneira que  $\chi'(0) = 1$ . Como  $\psi$  satisfaz a equação (2.4.1) e, por ser uma solução que corresponde a uma órbita fechada no espaço de fase,  $1 - \alpha\psi' > 0$ , podemos concluir que

$$\chi(0) = 0 \quad \text{e} \quad \chi > 0$$

sempre que  $\psi > 0$ . Além dessas propriedades, temos também a seguinte proposição sobre  $\chi$ :

**PROPOSIÇÃO 2.5.6.**

$$(2.5.11) \quad L[\psi]\chi = 8c\alpha^2\psi(\psi')^2 > 0$$

no mesmo intervalo  $(0, \bar{x})$  em que  $\psi > 0$ .

DEMONSTRAÇÃO: A partir da equação (2.4.1), temos que

$$(2.5.12) \quad -\alpha\psi'' = 2\psi(1 - \alpha\psi').$$

Derivando (2.5.12) duas vezes,

$$-\alpha(\psi'')'' = -2\alpha\psi(\psi'')' + 2(1 - 3\alpha\psi')\psi''$$

e utilizando essa igualdade na expressão para  $L[\psi]\psi''$  teremos

$$\begin{aligned} L[\psi]\psi'' &= -\alpha(\psi'')'' + 2\alpha\psi(\psi'')' - 2(1 - \alpha\psi')\psi'' \\ &= -4\alpha\psi'\psi'' \\ &= 8\psi'\psi(1 - \alpha\psi'). \end{aligned}$$

E finalmente, a ação do operador  $L[\psi]$  sobre  $\psi$  é dada por

$$\begin{aligned} L[\psi]\psi &= -\alpha\psi'' + 2\alpha\psi\psi' - 2(1 - \alpha\psi')\psi \\ &= 2\alpha\psi\psi'. \end{aligned}$$

Combinando as expressões acima para  $L[\psi]\psi''$  e  $L[\psi]\psi$  concluímos a demonstração. ■

Vamos considerar agora, a função  $\chi$  definida em (2.5.10) com  $\psi = \psi_1^+$ . Como  $\psi_1^+$  é também estritamente positiva no intervalo aberto  $(0, \pi)$ , por construção, a função  $\chi$  também o será nesse mesmo intervalo. Portanto, podemos utilizar a proposição 2.5.6 e o teorema da comparação 2.5.4 para as equações (2.5.11),  $L[\psi_1^+]\chi = g_1 > 0$ , e (2.5.7),  $L[\psi_1^+]\varphi = g_2 \equiv 0$ , ambas definidas no intervalo aberto  $(0, \pi)$ . E concluir que  $\varphi > 0$  no intervalo  $(0, \pi]$ . Assim, segundo a proposição 2.5.5, a estabilidade da solução  $\psi_1^+$  resulta da positividade de  $\varphi$ .

Ao estudar a instabilidade das demais soluções estacionárias, levaremos em conta a ação do operador  $L[\psi]$  sobre  $\psi'$ ,

$$\begin{aligned}
 L[\psi]\psi' &= -\alpha\psi''' + 2\alpha\psi\psi'' - 2(1 - \alpha\psi')\psi' \\
 &= (-\alpha\psi'' + 2\alpha\psi\psi' - 2\psi)' \\
 (2.5.13) \quad &= 0.
 \end{aligned}$$

A última igualdade deve-se à equação para  $\psi$ , (2.4.1). A partir da definição das soluções estacionárias  $\psi_j^\pm$ , temos que as soluções  $\psi = \psi_j^+$  com  $j \geq 2$  possuem período fundamental  $2\pi/j$  e satisfazem a igualdade  $\psi(\pi/j) = \psi''(\pi/j) = 0$ . Uma vez que  $\psi'(0) > 0$ , temos que essas mesmas soluções são estritamente negativas no intervalo aberto  $(\pi/j, 2\pi/j)$  e atingem o seu mínimo no ponto  $\underline{x} = \frac{3\pi}{2j}$ . Como podemos verificar por (2.5.7) e (2.5.13), as funções  $\varphi$  e  $\psi'$  satisfazem a mesma equação auto-adjunta  $pL[\psi]\zeta = 0$ , logo o seu wronskiano é uma constante não nula,

$$\begin{aligned}
 W(\varphi, \psi'; x) &= \begin{vmatrix} \varphi & \psi' \\ -\alpha p\varphi' & -\alpha p\psi'' \end{vmatrix} \\
 &= \alpha(\varphi'\psi' - \varphi\psi'').
 \end{aligned}$$

Escolhendo o ponto  $x = 0$  e lembrando que  $p(0) = 1$ ,  $\varphi(0) = 1$ ,  $\varphi'(0) = 1$  e  $(\psi_j^+)'(0) > 0$ , concluímos que o wronskiano é positivo,

$$W(\varphi, \psi'; 0) = \alpha\psi'(0) > 0.$$

Utilizamos agora a expressão para o wronskiano calculado em um ponto que corresponde a um mínimo da função  $\psi$ , o ponto  $\underline{x} = \frac{3\pi}{2j}$ ,

$$W(\varphi, \psi'; \underline{x}) = -\alpha p(\underline{x})\varphi(\underline{x})\psi''(\underline{x}) > 0.$$

Como  $\underline{x}$  é o ponto onde  $\psi$  possui um mínimo, então  $\psi''(\underline{x}) > 0$ . Em vista da desigualdade acima, a desigualdade  $\psi''(\underline{x}) > 0$  implica  $\varphi(\underline{x}) < 0$ . Portanto, segue da proposição 2.5.5,

que as soluções  $\psi_j^+$ ,  $j = 2, 3, \dots, k$ , são instáveis uma vez que  $\underline{x} \in (0, \pi)$  para  $j \geq 2$  e, conseqüentemente, existe um  $\bar{x} \in (0, \pi)$ ,  $\bar{x} < \underline{x}$ , tal que  $\varphi(\bar{x}) = 0$ .

Através de pequenas modificações nos argumentos apresentados, podemos demonstrar também a estabilidade da solução  $\psi_1^-$  e a instabilidade das demais soluções  $\psi_2^-, \psi_3^-, \dots, \psi_k^-$ . Isto conclui a demonstração do teorema 2.5.2 e, conseqüentemente, a demonstração do teorema 2.5.1. ■

O final desta seção é dedicado à estabilidade global das soluções estacionárias. A estabilidade global é estudada por meio da análise variacional baseada na construção de funcionais de Liapunov.

A solução da equação diferencial (2.2.2) com condição inicial  $z(0) = z_0 \in \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$  define um sistema dinâmico  $S(t)$

$$S(t)z_0 = z(t)$$

no espaço métrico completo  $\mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$  com métrica induzida pela norma.

**DEFINIÇÃO 2.5.7.** Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um sistema dinâmico em um espaço métrico completo  $\mathcal{U}$ . Um *funcional de Liapunov* é definido como um funcional real  $V$  definido em  $\mathcal{U}$  tal que

$$\dot{V}(u) = \overline{\lim}_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} (V(S(t)u) - V(u)) \leq 0$$

para todo  $u \in \mathcal{U}$ . Não se exclui a possibilidade de que  $V(u) = -\infty$ .

**TEOREMA 2.5.8.**

Seja  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  um sistema dinâmico em  $\mathcal{U}$  tal que a solução trivialmente nula seja uma solução de equilíbrio. Vamos assumir que  $V$  é um funcional de Liapunov em  $\mathcal{U}$  que satisfaz  $V(0) = 0$  e  $V(u) \geq f(\|u\|)$  para  $u \in \mathcal{U}$ , onde  $f(\cdot)$  é uma função contínua e estritamente crescente com as propriedades  $f(0) = 0$  e  $f(r) > 0$  para  $r > 0$ . Então  $u \equiv 0$  é estável.

Se além dessas propriedades, o funcional ainda satisfizer a desigualdade  $\dot{V}(u) \leq -f_1(\|u\|)$ , onde  $f_1(\cdot)$  é também uma função positiva, contínua e estritamente crescente tal que  $f_1(0) = 0$ ; então a solução estacionária  $u^* \equiv 0$  será uniforme e assintoticamente estável.

**DEMONSTRAÇÃO:** Para cada  $k > 0$  definimos uma vizinhança da origem  $\mathcal{U}_k$ . Por hipótese, cada  $\mathcal{U}_k$  é positivamente invariante : seja  $u \in \mathcal{U}_k$ , então  $V(S(t)u) \leq V(u) < k$  para todo  $t \geq 0$ . Se  $V(u) \geq f(\|u\|)$ , então, para qualquer  $\varepsilon > 0$ , existe um  $k = f(\varepsilon) > 0$  tal que a desigualdade  $V(u) \leq k$  garante que  $\|u\| \leq \varepsilon$ . Assim, pela continuidade do funcional  $V$ , existe um  $\delta > 0$  tal que  $\|u\| < \delta$  implica  $u \in \mathcal{U}_k$ , portanto  $S(t)u \in \mathcal{U}_k$  para todo  $t \geq 0$ . Segue disso que  $\|S(t)u\| \leq \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ , ou seja, a solução identicamente nula é estável.

Por hipótese,  $V(S(t)u)$  é uma função decrescente em  $t$ , limitada inferiormente por zero. Vamos então supor que exista uma constante positiva  $c > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(S(t)u) = c$ , logo  $\inf_{t \geq 0} \|S(t)u\| = c_1 > 0$  e, de acordo com as hipóteses do teorema,  $\sup_{t \geq 0} \dot{V}(S(t)u) \leq -f_1(c_1)$ . No entanto, isto contradiz o fato de que  $V(S(t)u) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$ . Portanto  $V(S(t)u)$  e  $\|S(t)u\|$  aproximam-se de zero quando  $t \rightarrow \infty$ . ■

De um modo geral, é muito difícil encontrar um funcional de Liapunov que satisfaça todas as exigências do teorema anterior. Nesse sentido, o “princípio de invariância”, proposto originalmente por LaSalle [40] para equações diferenciais ordinárias e posteriormente estendido por Hale [37] para sistemas dinâmicos mais gerais, permite a utilização do funcional de Liapunov sob condições menos restritivas. Os dois teoremas seguintes expõem esse princípio:

**TEOREMA 2.5.9.**

*Dado um espaço métrico completo  $\mathcal{U}$ , vamos supor que para um  $u_0 \in \mathcal{U}$ , o sistema dinâmico  $\{S(t)u_0\}_{t \geq 0}$  esteja contido em um compacto  $\mathcal{K} \subset \mathcal{U}$ . Então o conjunto  $\omega$ -limite*

$$\omega(u_0) = \bigcap_{\tau \geq 0} \overline{\{S(\tau)S(t)u_0\}_{t \geq 0}}$$

*é um conjunto não vazio, compacto, invariante e conexo. Além disso o conjunto apresenta a seguinte propriedade:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(S(t)u_0, \omega(u_0)) = 0$ .*

**DEMONSTRAÇÃO:** O conjunto  $\omega(u_0)$  é dado pela intersecção de uma coleção decrescente de conjuntos compactos não vazios, logo  $\omega(u_0)$  é compacto e não vazio. As provas de

invariância e conectividade seguem de argumentos de compacidade e estão descritas em [38]. ■

**TEOREMA 2.5.10.**

Seja  $V$  um funcional de Liapunov definido em um espaço métrico completo  $\mathcal{U}$ ; vamos definir os conjuntos  $\mathcal{E} = \{u \in \mathcal{U} : \dot{V}(u) = 0\}$  e  $\mathcal{M}$ , o subconjunto invariante maximal de  $\mathcal{E}$ . Se  $\{S(t)u_0\}_{t \geq 0}$  está contido em um subconjunto compacto de  $\mathcal{U}$ , então para  $t \rightarrow \infty$  temos que  $S(t)u_0 \rightarrow \mathcal{M}$ .

DEMONSTRAÇÃO: Por hipótese,  $V(S(t)u_0)$  é decrescente para  $t \geq 0$  e é limitada, portanto, existe um  $c > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(S(t)u_0) = c$ . Se  $g \in \omega(u_0)$ , então  $V(g) = c$  e  $V(S(t)g) = c$  para  $t \geq 0$  e portanto  $\dot{V}(g) = 0$ . Assim,  $\omega(u_0) \subset \mathcal{E}$  e conseqüentemente  $\omega(u_0) \subset \mathcal{M}$ . ■

O princípio de invariância de LaSalle será a ferramenta que utilizaremos para estudar a estabilidade global das soluções estacionárias. No entanto, como podemos observar pelo enunciado do teorema 2.5.10, para fazermos uso desse princípio devemos garantir que as soluções do problema de Cauchy (2.2.2) estão contidas em um subconjunto compacto no espaço onde estão definidas. De acordo com o teorema 2.2.1, a solução estará contida em um subconjunto compacto de  $\mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$  se for uma solução limitada para todo tempo.

Veremos a seguir que, devido a um teorema sobre regularidade para soluções de equações diferenciais parciais elípticas, a solução  $z(t)$  da equação (2.2.2), na realidade, é uma solução clássica (é contínua e possui primeira e segunda derivada contínuas) então com o auxílio do princípio do máximo, verificamos que a solução é limitada em todo tempo.

**TEOREMA 2.5.11** (Regularidade para soluções fracas).

Seja o aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $m$  um inteiro não negativo. Vamos assumir que o operador elíptico  $L$ ,

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (a_{i,j}(x) \frac{\partial}{\partial x_j}) + \sum_{i=1}^m b_i(x) + c(x)$$

é tal que  $a_{i,j}, b_i, c \in \mathbf{C}^{m+1}(\Omega)$ . Vamos supor que  $u \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  é solução fraca da equação diferencial

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$



Vamos assumir ainda que  $\partial\Omega$  é  $C^{m+2}$ . Então

$$u \in \mathbf{H}^{m+2}(\Omega)$$

e satisfaz a estimativa

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{m+2}} \leq C(\|f\|_{\mathbf{H}^1} + \|u\|_{\mathbf{L}^2}),$$

onde a constante  $C$  depende apenas de  $m$ ,  $\Omega$  e dos coeficientes do operador  $L$ .

**LEMA 2.5.12.**

A solução da equação diferencial (2.2.2),  $z(t)$  com condição inicial  $z(0) = z_0 \in \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$  é tal que  $z(t) \in C^{2,1/2}[0, 2\pi]$  para todo  $t > 0$  e além disso, satisfaz a desigualdade

$$(2.5.14) \quad \frac{1}{\alpha}(x - \pi) < z(t, x) < \frac{1}{\alpha}x$$

no intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ .

DEMONSTRAÇÃO: Para qualquer tempo  $t > 0$ , a solução da equação (2.2.2) pertence ao domínio do operador  $-\Delta$ ,  $\mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) \cap \mathbf{H}^2(0, 2\pi)$ . De acordo com os teoremas de imersão para espaços de Sobolev, um elemento  $u$  do espaço  $\mathbf{H}^2(0, 2\pi)$  possui um representante absolutamente contínuo  $u^*(x)$  ( $u = u^*(x)$  para quase todo  $x$ ) que pertence ao espaço de Hölder  $C^{1,1/2}[0, 2\pi]$ . Portanto, para  $t > 0$ ,  $z(t, x) \in C^{1,1/2}[0, 2\pi]$ .

Assim, temos a desigualdade (2.2.12)

$$(2.5.15) \quad \sup_{x \in [0, 2\pi]} |z(t, x)| \leq \sqrt{2\pi} \|z(t)\|_{\mathbf{H}_0^1} \leq \sqrt{2\pi} \|z(t)\|_{\mathbf{H}^1}.$$

De maneira semelhante,  $z_x$  é uma função absolutamente contínua que pertence ao espaço  $C^{0,1/2}[0, 2\pi]$ . Sendo assim,

$$z_x(t, x) = z_x(t, 0) + \int_0^x dy z_{xx}(t, y)$$

e, em valor absoluto, temos a desigualdade

$$\begin{aligned}
|z_x(t, x)| &\leq |z_x(t, 0)| + \int_0^x dy |z_{xx}(t, y)| \\
&\leq \|z_x\|_{\mathbf{C}^{0,1/2}} + \sqrt{2\pi} \|z_{xx}\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned}$$

Os teoremas de imersão para espaços de Sobolev garantem a desigualdade

$$\|u\|_{\mathbf{C}^{k-1,1/2}[0,2\pi]} \leq C \|u\|_{\mathbf{H}^k(0,2\pi)},$$

onde  $C$  é uma constante que depende apenas de  $k$ . Portanto utilizando essa desigualdade em combinação com a anterior, temos a seguinte estimativa para o supremo da função  $z_x(t, x)$ :

$$(2.5.16) \quad \sup_{x \in [0, 2\pi]} |z_x(t, x)| \leq K \|z_x(t)\|_{\mathbf{H}^1}.$$

A partir das estimativas superiores para  $z(t)$  e  $z_x(t)$  dadas respectivamente por (2.5.15) e (2.5.16), concluiremos que a função dada pelo produto  $z(t)z_x(t)$  pertence aos espaço  $\mathbf{H}^1(0, 2\pi)$ . Vejamos. Segundo a definição da norma para o espaço  $\mathbf{H}^1$ ,

$$\begin{aligned}
\|z z_x\|_{\mathbf{H}^1} &= \|z z_x\|_{\mathbf{L}^2} + \|z_x^2 + z z_{xx}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq \|z z_x\|_{\mathbf{L}^2} + \|z_x^2\|_{\mathbf{L}^2} + \|z z_{xx}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq K \|z_x\|_{\mathbf{H}^1} (\|z\|_{\mathbf{L}^2} + \|z_x\|_{\mathbf{L}^2}) + \sqrt{2\pi} \|z\|_{\mathbf{H}^1} \|z_{xx}\|_{\mathbf{L}^2} \\
&\leq (K 2\pi + (2\pi)^{3/2}) \|z_x\|_{\mathbf{H}^1} \|z\|_{\mathbf{H}^2}.
\end{aligned}$$

Apesar de grosseira, a estimativa anterior garante que  $z(t)z_x(t) \in \mathbf{H}^1(0, 2\pi)$  para todo  $t > 0$ , uma vez que  $z(t) \in \mathbf{H}^2(0, 2\pi)$  e  $z_x(t) \in \mathbf{H}^1(0, 2\pi)$  nesse mesmo intervalo.

Vamos considerar agora a equação (2.2.2) reescrita como

$$\begin{cases} -\alpha z_{xx} + 2z & = f(t) \in \mathbf{H}^1(0, 2\pi) \\ z(t, 0) = z(t, 2\pi) & = 0 \end{cases}$$

onde  $f(t) = z_t(t) + 2\alpha z(t) z_x(t)$ . Sabemos que essa equação possui a solução fraca  $z(t) \in \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi)$ . Portanto segundo o teorema 2.5.11, essa solução pertence também ao espaço  $\mathbf{H}^3(0, 2\pi)$  e novamente pelos teoremas de imersão para espaços de Sobolev, a solução  $z(t) \in \mathbf{C}^{2,1/2}[0, 2\pi]$ , ou seja a solução da equação diferencial (2.2.2) é uma solução clássica.

Por ser uma solução clássica, podemos recorrer à formulação do princípio do máximo para equações parabólicas não lineares como a descrita por Protter e Weinberger [55]. Então, vamos considerar o operador

$$G[z] \doteq z_t + A z - F(z)$$

e a equação (2.2.2) reescrita em termos de  $G$ ,

$$G[z] = 0.$$

com as condições de contorno  $z(t, 0) = z(t, 2\pi) = 0$  e condição inicial  $z(0, x) = z_0(x)$ .

Vamos supor que existam duas funções  $\zeta_- = \zeta_-(t, x)$  e  $\zeta_+ = \zeta_+(t, x)$  tais que

$$(2.5.17) \quad G[\zeta_+] \leq 0 \leq G[\zeta_-]$$

para todos os pontos da região  $U = (0, \tau) \times (0, \pi)$ . Vamos supor ainda que essas funções satisfaçam as seguintes desigualdades: na fronteira  $y = 1, 2$  e  $0 \leq t \leq \tau$

$$\zeta_-(t, y) \leq 0 \leq \zeta_+(t, y);$$

e para  $0 \leq x \leq \pi$

$$\zeta_-(0, x) \leq z_0(x) \leq \zeta_+(0, x).$$

Então, pelo princípio do máximo (teorema 12 do capítulo 3 de [55]), temos que

$$(2.5.18) \quad \zeta_-(t, x) \leq z(t, x) \leq \zeta_+(t, x)$$

na região fechada  $\bar{U} = [0, \tau] \times [0, \pi]$ .

Escolhemos duas constantes positivas  $\theta$  e  $\delta$ , tais que  $\alpha\theta \geq 1$  e  $\alpha\delta \geq 1$ . A partir dessas constantes, podemos observar que as funções

$$\zeta_-(x) = \theta(x - \pi)$$

e

$$\zeta_+(x) = \delta x$$

implicam as desigualdades

$$G[\zeta_-] = 2\theta(\alpha\theta - 1)(\pi - x) \geq 0$$

e

$$G[\zeta_+] = -2\delta(\alpha\delta - 1)x \leq 0.$$

Uma vez que a desigualdade (2.5.17) é uniforme no tempo, segue que a desigualdade (2.5.18) é mantida em toda a região  $\mathbb{R}_+ \times [0, \pi]$ .

A a solução  $z(t)$  é limitada independentemente do valor que  $\alpha z_x(t)$  assume. Porém se no instante  $t = 0$  a condição inicial for tal que a desigualdade  $\alpha z_0 < 1$  é satisfeita, ela o será para todo tempo  $t > 0$ . Podemos observar esse comportamento considerando a equação diferencial sem o termo laplaciano,  $z_t = (1 - \alpha z_x)z$ . Note que a razão com que  $|z(t)|$  aumenta, tende a zero conforme a desigualdade satura. A inclusão do termo laplaciano só aumenta a suavidade da solução e impede ainda mais que  $z_x(t)$  ultrapasse o limite imposto pela desigualdade. Esse mesmo argumento justifica a desigualdade estrita (2.5.14). Isto conclui a demonstração do teorema. ■

O resultado sobre a estabilidade global das soluções estacionárias de (2.2.2) segue da combinação do teorema 2.5.10 e do lema 2.5.12. No entanto, falta ainda encontrar um funcional de Liapunov apropriado. Como já havíamos afirmado, encontrar tais funcionais nem sempre é uma tarefa simples. Neste campo, o trabalho desenvolvido por Chafee e Infante [16] apresenta uma maneira elegante e simples de construir os funcionais, a partir da equação de Euler-Lagrange associada a equações diferencial parcial semilineares

cujos termos de derivadas são lineares. Consideremos, por exemplo, para uma função real  $f \in C^2(\mathbb{R})$ , a equação diferencial não linear

$$u_t = u_{xx} + \lambda f(u)$$

com condições de contorno  $u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$  e condição inicial  $u(0, x) = u_0(x) \in C^1[0, \pi]$ . Chafee e Infante sugerem para essa equação o funcional  $V_\lambda$  dado por

$$V_\lambda(\phi) = \int_0^\pi dx \left( \frac{1}{2} \phi'(x)^2 - \lambda \int_0^{\phi(x)} f(\xi) d\xi \right).$$

Ao tomar a derivada total, podemos notar que  $V_\lambda$  satisfaz os critérios para um funcional de Liapunov,

$$\frac{d}{dt} V_\lambda(u(t, \cdot)) = - \int_0^\pi dx (u_t(t, x))^2 \leq 0.$$

Essa abordagem apresenta dificuldades ao tratarmos de equações que possuem não linearidades nos termos de derivada. Nesta última parte cuidaremos de construir um funcional de Liapunov para a equação (2.2.2), através de uma generalização para os funcionais dados por equações de Euler-Lagrange proposta por Zelenyak e Belosov[65, 1].

O método de construção de funcionais de Liapunov que utilizaremos aqui trata-se de uma generalização da construção proposta por Chafee e Infante. Apresentaremos o método descrito em [66]. Nesta referência, os autores apresentam um teorema de existência de funcionais de Liapunov para equações diferenciais parciais parabólicas quase-lineares com uma variável espacial. E, a demonstração do teorema, os autores apresentam o método de construção desses funcionais. Como veremos, o funcional é semelhante ao gerado a partir da equação de Euler -Lagrange, a diferença neste caso é a introdução de um peso  $\rho$  que pode depender das variáveis independentes, da variável dependente e de sua derivada espacial. Esse funcional é chamado de *funcional de Liapunov de primeira ordem*<sup>4</sup>. Os próximos parágrafos apresentam a descrição do funcional.

<sup>4</sup>A ordem do funcional é dada pela maior ordem de derivada da solução da qual o funcional depende. Ou seja, se o funcional depende de termos da forma  $u_x$  mas não de termos  $u_{xx}$ , ele é de primeira ordem.

Vamos considerar o seguinte problema quase-linear

$$u_t = Mu = a(x, u, u_x) u_{xx} + b(x, u, u_x),$$

$$(2.5.19) \quad c_i u_x(t, 1) + h_i(u(t, i)) = 0; \quad i = 0, 2\pi; \quad t > 0,$$

$$u(0, x) = u_0(x)$$

na faixa  $(t, x) \in Q = [0, \infty) \times [0, 2\pi]$  ou no retângulo  $(t, x) \in Q_T = [0, T] \times [0, 2\pi]$ . Vamos assumir também que  $a, b, h_i \in C^3$  em todos os argumentos<sup>5</sup>. Vamos exigir também que

$$a(x, p, w) \geq a_0 > 0, \quad (x, p, w) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2,$$

$$c_i^2 + h_i'^2(p) \geq a_0 > 0, \quad p \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 2\pi, \quad (c_i = \text{const})$$

$$u_0(x) \in E = \{f(x) \in C^2[0, 1] : c_i f'(i) + h_i(f(i)) = 0, \quad i = 0, 2\pi\}.$$

*DEFINIÇÃO 2.5.13.* Dizemos que um par de funções  $\rho$  e  $\Phi(x, p, w)$  geram um funcional de Liapunov se para cada solução do problema (2.5.19)  $u(t, x)$ , diferenciável uma vez em  $t$  e duas vezes em  $x$ , é válida a igualdade

$$(2.5.20) \quad \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} dx \Phi(x, u, u_x) = - \int_0^{2\pi} dx \rho(x, u, u_x) M(u) u_t,$$

onde  $\rho \geq 0$ .

Levando em conta (2.5.19) e a identidade anterior, temos que

$$\frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} dx \Phi(x, u, u_x) = - \int_0^{2\pi} dx \rho(x, u, u_x) u_t^2.$$

Assim, para  $\rho > 0$ , o funcional

$$(2.5.21) \quad V(u) = \int_0^{2\pi} dx \Phi(x, u, u_x),$$

<sup>5</sup>Essa exigência pode ser enfraquecida.

decrece estritamente em  $t$  ao longo da solução da equação (2.5.19), exceto no caso em que  $u$  for uma solução estacionária. Veremos logo adiante que a equação (2.5.20) com  $\rho > 0$  é equivalente à equação de Euler-Lagrange com o funcional (2.5.21).

Dada a função  $u(t, x)$  que resolve a equação diferencial (2.5.19), nós vamos assumir que existem  $\rho$  e  $\Phi$  que satisfaçam (2.5.20). Realizando a derivada e integrando por partes (2.5.20) a mesma equação passa a ter a forma

$$(2.5.22) \quad \int_0^{2\pi} dx u_t \left( \frac{\partial \Phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} u_t \Big|_{x=0}^{2\pi} = - \int_0^{2\pi} dx \rho u_t (a u_{xx} + b).$$

Para que a igualdade acima seja válida, basta que as seguintes condições sejam verificadas

$$(2.5.23) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2}(x, p, w) = \rho a(x, p, w)$$

$$(2.5.24) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial w} + w \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p \partial w} - \frac{\partial \Phi}{\partial p} = \rho b(x, p, w)$$

$$(2.5.25) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} u_t \Big|_{x=0} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_x} u_t \Big|_{x=2\pi} = 0$$

As duas primeiras devem ser válidas para todos os valores  $(x, p, w) \in [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2$ , e a última expressão deve ser válida para a solução do problema (2.5.19). A solução para (2.5.23) é da forma

$$(2.5.26) \quad \Phi(x, p, w) = \int_0^w d\varpi (w - \varpi) \rho a(x, p, w) + w z_1(x, p) + z_2(x, p)$$

onde  $z_1$  e  $z_2$  são funções arbitrárias de  $(x, p)$ . Substituindo (2.5.26) em (2.5.24) chegamos à expressão

$$(2.5.27) \quad \int_0^w d\varpi (\rho a)_x + \int_0^w d\varpi \varpi (\rho a)_p + (z_1)_x - (z_2)_x = \rho b.$$

Agora o nosso objetivo é encontrar um equação para  $\rho$  a partir da expressão acima. A expressão anterior deve ser válida para todo valor de  $w$ , em especial deve ser válida para

$w = 0$ . Portanto,

$$(2.5.28) \quad (z_1)_x - (z_2)_x = \rho b(x, p, 0).$$

Diferenciando (2.5.27) com respeito a  $w$  resulta em

$$(2.5.29) \quad a\rho_x + wa\rho_p - b\rho_w + (a_x + wa_p - b_w)\rho = 0.$$

Essas duas novas equações formam um sistema cuja solução é equivalente à solução da equação (2.5.27).

Lembrando que a função  $a(x, p, w)$  é estritamente negativa, podemos resolver a equação (2.5.29) por meio do método das características com relação à variável  $x$ . A equação das características é dada por

$$(2.5.30) \quad \frac{dp}{dx} = w,$$

$$(2.5.31) \quad \frac{dw}{dx} = -\frac{b}{a}(x, p, w),$$

$$(2.5.32) \quad \frac{d\rho}{dx} = -\rho \frac{(a_x + wa_p - b_w)}{a}.$$

As duas primeiras equações representam o problema de Cauchy associado à solução estacionária de (2.5.19). Se para cada condição inicial  $x_0 \in [0, 2\pi]$ ,  $p(x_0) = y_0$  e  $w(x_0) = y_1$  do sistema (2.5.30, 2.5.31) existe um  $x_1$  tal que a solução é regular no intervalo  $[x_0, x_1]$ , então, a menos das funções  $z_1(x, p)$  e  $z_2(x, p)$ , podemos encontrar uma solução para  $\rho$  e assim, determinar  $\Phi(x, u, u_x)$  e o funcional de Liapunov associado.

Em vista da equação (2.5.26) e das condições contorno (2.5.25), a função  $z_1(x, p)$  é dada por

$$z_1(x, p) = -x \int_0^{g_{2\pi}(p)} d\varpi \rho a(2\pi, p, w) + (x-1) \int_0^{g_0(p)} d\varpi \rho a(0, p, w),$$



onde

$$g_i(p) = \begin{cases} \frac{h_i(p)}{c_i}, & \text{se } c_i \neq 0 \\ 0, & \text{se } c_i = 0 \end{cases}$$

para  $i = 0, 2\pi$ . Ou seja, se as condições de contorno da equação diferencial não envolver derivadas, então  $z_1 = 0$ .

Uma vez conhecidas as funções  $\rho(x, p, w)$  e  $z_1(x, p)$ , podemos resolver a equação (2.5.28) e encontrar  $z_2$ ,

$$z_2(x, p) = \int_0^p d\xi ((z_1)_x(x, \xi) - \rho b(x, \xi, 0)).$$

Assim, conhecidas as funções  $\rho$ ,  $z_1$  e  $z_2$ , temos finalmente a expressão  $\Phi(x, p, w)$  dada por (2.5.26).

A partir desse método temos a seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO 2.5.14.**

Seja  $S(t)z_0 = z(t; z_0)$  o sistema dinâmico em  $\mathcal{V}$  dado por (2.5.1). Então o par de funções

$$(2.5.33) \quad \rho(w) = \frac{1}{1 - \alpha w}$$

e

$$(2.5.34) \quad \Phi(p, w) = (\alpha^{-1} - w) \ln(1 - \alpha w) + w - p^2$$

geram o funcional de Liapunov

$$(2.5.35) \quad V(z) = \int_0^{2\pi} dx \Phi(z, z_x) \quad \text{com} \quad \dot{V}(z) = - \int_0^{2\pi} dx \rho(z_x) z_t^2.$$

DEMONSTRAÇÃO: A partir da equação (2.2.2) montamos o seguinte sistema<sup>6</sup> para encontrar o peso  $\rho$ :

$$(2.5.36) \quad \frac{d}{dx}p = w,$$

$$(2.5.37) \quad \frac{d}{dx}w = 2p \left( w - \frac{1}{\alpha} \right),$$

$$(2.5.38) \quad \frac{d}{dx}\rho = -2p\rho.$$

Utilizando a regra da cadeia e as equações (2.5.37) e (2.5.38), temos a seguinte igualdade

$$\int d\rho \frac{1}{\rho} = -\alpha \int dw \frac{1}{1 - \alpha w}$$

e por uma escolha adequada das constantes de integração, encontramos a expressão para o peso

$$\rho(w) = \frac{1}{1 - \alpha w}.$$

Como as condições de contorno da equação (2.2.2) não envolvem derivadas, temos que  $z_1(x, p) = 0$ . E utilizando as expressões de  $\rho(w)$  e  $\dot{b}(x, p, w) = -2\alpha pw + 2p$ ,

$$z_2(x, p) = -2 \int_0^p d\xi \xi = -p^2$$

Agora, através da equação (2.5.26) e das funções  $\rho$ ,  $z_1$ ,  $z_2$ , obtemos a função  $\Phi$  e conseqüentemente o funcional de Liapunov (2.5.35). ■

Combinando os resultados desta seção podemos enunciar o teorema que trata da estabilidade global das soluções da equação diferencial com condições iniciais restritas as situações de interesse físico (soluções periódicas que representam um distribuição com segundo momento positivo).

#### TEOREMA 2.5.15.

Para  $\alpha > 2$ ,  $\psi_0 = 0$  é a única solução global e assintoticamente estável da equação

<sup>6</sup>Note que as duas primeiras equações são as equações para as órbitas associadas às soluções estacionárias

diferencial parcial (2.2.1) no domínio

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbf{H}_0^1(0, 2\pi) \cap \mathbf{H}^2(0, 2\pi) : v(0) = 0, v_x(0) > 0 \text{ e } \alpha v_x < 1\}.$$

Se  $\alpha < 2$ , a origem é instável em  $\mathcal{C}$  e existe um conjunto aberto e denso  $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$  tal que para condições iniciais  $v_0 \in \mathcal{U}$ , temos o seguinte limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t; v_0) = \psi_1^+$ .

DEMONSTRAÇÃO: Segue dos teoremas de existência e unicidades globais, do lema sobre a compacidade da solução 2.5.12 e do princípio de invariância de LaSalle 2.5.10, que o sistema dinâmico, na forma da solução da equação diferencial, conduz os elementos do conjunto  $\mathcal{C}$ , assintoticamente, ao conjunto  $\omega$ -limite,  $\omega(v(0; \cdot)) \subset \{\psi : \dot{V}(\psi) = 0\}$ .

A partir da forma do funcional de Liapunov (2.5.35), temos que  $\dot{V}(\psi) = 0$  se e somente se satisfizerem a equação

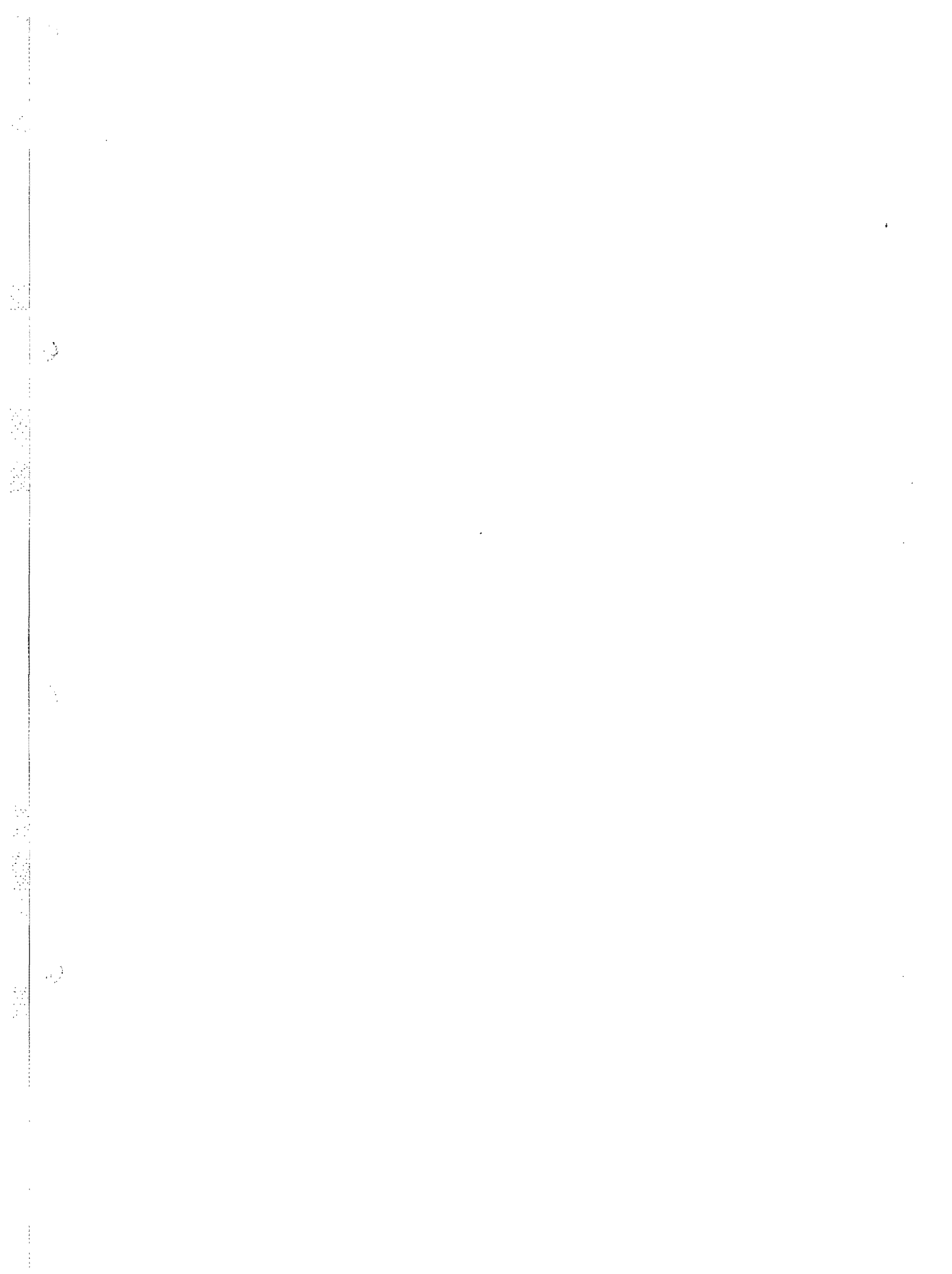
$$\alpha \psi_{xx} - 2\alpha \psi \psi_x + 2\psi = 0,$$

cujas soluções, por hipótese e segundo o teorema 2.5.1, são dadas por  $\psi_0, \psi_j^+$  para  $j = 1, \dots, k$ . Recordando o que foi desenvolvido sobre as soluções estacionárias, para  $\alpha \geq 2$  a única solução estacionária é  $\psi_0$  e facilmente podemos constatar que a mesma é linearmente estável quando  $\alpha > 2$ . Portanto, para esses valores de  $\alpha$ , o conjunto  $\omega$ -limite é constituído somente pela solução  $\psi_0$ .

Na região  $\alpha < 2$ , o espectro do operador linearizado em torno das soluções de equilíbrio  $\psi_j^+$  é puro-ponto e real, portanto, todos os pontos de equilíbrio são hiperbólicos. Assim, a partir do conjunto discreto  $\mathcal{E} = \{v \in \mathcal{C} : \dot{V}(v) = 0\}$ , temos uma decomposição do espaço  $\mathcal{C}$  em termos da seguinte união disjunta,

$$\mathcal{C} = \bigcup_{\psi \in \mathcal{E}} \mathcal{W}^s(\psi),$$

onde  $\mathcal{W}^s(\psi) = \{u_0 \in \mathcal{C} : v(t; u_0) \rightarrow \psi \text{ quando } t \rightarrow \infty\}$ . De acordo com [38, teoremas 6.1.9 e 6.1.10], cada variedade estável  $\mathcal{W}^s(\psi)$  é uma subvariedade imersa e  $\mathbf{C}^1$  (em  $t$ ) de  $\mathcal{C}$ ; e se  $\psi$  for localmente instável, então  $\mathcal{W}^s(\psi)$  possui codimensão maior ou igual a 1. Portanto,  $\mathcal{C}$  é dada pela união finita de conjuntos abertos conexos (os espaços  $\mathcal{W}^s(\psi)$  para  $\psi \in \mathcal{E}$  estáveis) com conjunto fechado e, em nenhuma parte, denso. ■



## CAPÍTULO 3

### Gás de dipolos

À semelhança do modelo estudado no capítulo anterior, neste capítulo estudaremos o comportamento de uma gás formados por partículas que interagem através de um potencial de origem coulombiana. Enquanto que no gás de Coulomb o estado interno das partículas é caracterizado unicamente pela carga das mesmas, como seu próprio nome indica, as partículas constituintes do gás de dipolos são caracterizadas unicamente por seu momento dipolar  $m$ . Nesse sentido, o gás de dipolos corresponde ao regime de baixa temperatura e densidade no qual as partículas (pontuais) de carga oposta estão combinadas duas a duas e cada par está suficientemente afastado dos demais.

O gás de dipolos, apesar de algumas dificuldades técnicas, possui um comportamento menos rico do que o gás de Coulomb. Em particular, permite que realizemos uma análise do mesmo em qualquer dimensão  $d \geq 2$  de maneira unificada sem a necessidade de qualquer ferramenta adicional.

Vamos considerar um *ensemble* de partículas de carga nula e momento de dipolo  $m \in \mathbb{R}^d$  contidas em uma região do espaço  $\mathbb{R}^d$ . Sejam duas partículas  $\xi_1$  e  $\xi_2$  com momentos dipolar  $m_1$  e  $m_2$  e localizadas em  $x, y \in \mathbb{R}^d$  ( $x \neq y$ ), respectivamente. A interação entre elas é intermediada pela ação exclusiva do potencial dipolar  $\Theta$ :

$$(3.0.39) \quad \Theta(\xi_1, \xi_2) \doteq - (m_1 \cdot D_x) (m_2 \cdot D_y) \Phi(x, y),$$

onde  $\Phi(x, y) \equiv \Phi(|x - y|)$  é o potencial coulombiano dado pela função de Green do laplaciano com condições de contorno livres (1.0.2). Levando em conta a forma da função de Green, podemos também expressar o potencial em  $\mathbb{R}^d$  como

$$(3.0.40) \quad \Theta(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sigma_d} \frac{m_1 \cdot m_2 |x - y|^2 - d(x - y) \cdot m_1 (x - y) \cdot m_2}{|x - y|^{d+2}}$$

O suporte para a distribuição dos dipolos será o mesmo utilizado para o gás de Coulomb bidimensional. Portanto, consideraremos as redes  $\Lambda_N \subset \mathbb{Z}^d$  dadas por

$$\Lambda_N = [-L^N + L^{N+1}, L^N]^d \cap \mathbb{Z}^d.$$

Definimos em  $\Lambda_N$  a configuração  $m$  como uma função  $m : \Lambda_N \rightarrow \mathbb{R}^d$  que associa a cada ponto  $x$  da rede  $\Lambda_N$  um vetor momento de dipolo  $m(x) \in \mathbb{R}^d$ .

A interação dipolar, como ilustrado pela expressão (3.0.40), não depende apenas da distância entre os dipolos. Portanto, para definir o potencial dipolar na rede  $\Lambda_N$  e construir assim o funcional energia total, devemos antes estabelecer o significado da expressão (3.0.40) em  $\Lambda_N$  considerando que as distâncias entre seus pontos é calculada a partir da pseudo-métrica hierárquica (2.0.9). Assim, lembrando a forma do potencial que adotamos para o gás de Coulomb (1.0.1), iremos considerar inicialmente o potencial entre dois momentos de dipolo  $m(x)$  e  $m(y)$ , localizados em respectivamente em  $x, y \in \Lambda_N \subset \mathbb{Z}^d$ , descrito pela expressão

$$(3.0.41) \quad H(m(x), m(y)) = \frac{m(x) \cdot m(y)}{\sigma_d \|r(x, y)\|^d} - d \frac{m(x) \cdot r(x, y) m(y) \cdot r(x, y)}{\sigma_d \|r(x, y)\|^{2+d}},$$

onde  $r(x, y)$  é o vetor de componentes

$$(r(x, y))_i = \begin{cases} \begin{cases} \text{sinal}((x)_i - (y)_i) L & , (x)_i \neq (y)_i \\ 0 & , (x)_i = (y)_i \end{cases} & , \text{ se } d_L(x, y) = L \\ \begin{cases} \text{sinal}((x)_i - (y)_i) d_L((x)_i, (y)_i) & , (x)_i \neq (y)_i \\ 0 & , (x)_i = (y)_i \end{cases} & , \text{ se } d_L(x, y) > L \end{cases}$$

cuja norma  $\|r(x, y)\|$  é dada por

$$\|r(x, y)\| = d_L(x, y).$$

Uma vez definida a interação entre os dipolos, construímos à semelhança do capítulo anterior, a medida de Gibbs para o *ensemble* grande canônico através dos funcionais energia total e peso *a priori*. A cada configuração  $m$  definimos o funcional energia total  $E : (\mathbb{R}^d)^{\Lambda_N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$E(m) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda_N} H(m(x), m(y))$$

e o funcional peso *a priori*  $F : (\mathbb{R}^d)^{\Lambda_N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$F(m) = \prod_{x \in \Lambda_N} \lambda(m(x)).$$

Denominamos a atividade dipolar por  $\lambda : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ , uma função integrável à Lebesgue.

Munido desses dois funcionais podemos expressar, formalmente, a medida de Gibbs  $\mu_{\Lambda_N} : (\mathbb{R}^d)^{\Lambda_N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,

$$(3.0.42) \quad \mu_{\Lambda_N}(m) \doteq \frac{1}{\Xi_{\Lambda_N}} F(m) e^{-\beta E(m)}$$

onde  $\beta$  é o inverso da temperatura e

$$\Xi_{\Lambda_N} = \int d(m) F(m) e^{-\beta E(m)}$$

é a grande função de partição.

O comportamento de escala do potencial dipolar (3.0.41), construído com esse objetivo, nos permite implementar o procedimento de renormalização de maneira análoga à realizada no capítulo anterior para o gás de Coulomb. Vamos então considerar para cada configuração  $m$  com suporte em  $\Lambda_N$ , a configuração  $\bar{m}$  formada pela soma reescalada dos momentos em blocos com  $L^d$  sítios. Essa nova configuração  $\bar{m}$  possui suporte na rede contraída  $\Lambda_{N-1}$  e é dada por

$$(3.0.43) \quad \bar{m}(x) = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{0 \leq y_i < L \\ i=1,2,\dots,d}} m(Lx + y)$$

onde  $\varepsilon = \varepsilon(d)$  é uma escala que depende da dimensão do espaço  $\mathbb{Z}^d \supset \Lambda_N$ .

Em termos dos pontos da rede  $\Lambda_{N-1}$ , a energia total de uma configuração  $m$  com suporte em  $\Lambda_N$  pode ser escrita como

$$(3.0.44) \quad E_{\Lambda_N}(m) = \frac{1}{2} \sum_{x,y \in \Lambda_{N-1}} \sum_{\substack{\zeta_i, \xi_j \\ i,j=1,2,\dots,d}} H(m(Lx + \zeta), m(Ly + \xi)).$$

A partir da definição do potencial  $H$ , (3.0.41), temos que

$$\begin{aligned} E_{\Lambda_N}(m) &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{L^d} \sum_{x \neq y \in \Lambda_{N-1}} H(\bar{m}(x), \bar{m}(y)) + \frac{1}{2} \sum_{x \in \Lambda_{N-1}} H(m(Lx + \zeta), m(Lx + \xi)) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{L^d} \sum_{x \neq y \in \Lambda_{N-1}} H(\bar{m}(x), \bar{m}(y)) + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\sigma_d L^d} \sum_{x \in \Lambda_{N-1}} \bar{m}(x)^2 \\ &\quad - \frac{d}{2\sigma_d L^d} \sum_{x \in \Lambda_{N-1}} \sum_{\substack{\zeta_i, \xi_j \\ i,j=1,2,\dots,d}} m(Lx + \zeta) \cdot \mathbf{e}(\zeta, \xi) m(Lx + \xi) \cdot \mathbf{e}(\zeta, \xi) \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{e}(\zeta, \xi) = r(\zeta, \xi)/L$ . Pela escolha da escala

$$(3.0.45) \quad \varepsilon = L^{d/2},$$

temos que

$$(3.0.46) \quad E_{\Lambda_N}(m) = E_{\Lambda_{N-1}}(\bar{m}) + \frac{1}{2} \sum_{x \in \Lambda_{N-1}} (1 - L^{-d}) \bar{m}(x)^2 - \sum_{x \in \Lambda_{N-1}} H_0(x, m)$$

onde o termo  $H_0(x, m)$ ,

$$(3.0.47) \quad H_0(x, m) = \frac{d}{2\sigma_d L^d} \sum_{\substack{\zeta_i, \xi_j \\ i,j=1,2,\dots,d}} m(Lx + \zeta) \cdot \mathbf{e}(\zeta, \xi) m(Lx + \xi) \cdot \mathbf{e}(\zeta, \xi)$$

corresponde à parcela da auto-energia dos dipolos da configuração  $\bar{m}$  que relaciona-se à sua “estrutura interna”. Isto é, mesmo que inicialmente os dipolos sejam caracterizados pela ausência de estrutura interna, ou seja, dipolos cuja auto-energia é dada por  $m^2/(\sigma_d L^d)$ , o procedimento de renormalização acrescenta, a cada passo, termos de auto-energia da forma (3.0.47).



A relação entre as energias totais para as configurações  $m$  e  $\bar{m}$  dada por (3.0.46) contrasta com a correspondente relação no caso do gás de Coulomb (2.0.14) pela presença do termo  $H_0(x, m)$ . Ao contrário do gás de Coulomb, no qual a energia da configuração na rede  $\Lambda_N$  pode ser expressa exclusivamente em termos do estado interno (carga total) das partículas nos pontos da rede  $\Lambda_{N-1}$ , a energia de uma dada configuração de dipolos depende da maneira como eles estão distribuídos mesmo no nível dos vizinhos mais próximos. Como veremos, essa propriedade se refletirá na forma como a atividade dipolar é transformada pelo grupo de renormalização e será o motivo principal que nos leva a assumir uma forma mais simples para a interação dipolar.

Relembrando a definição formal para a transformação de grupo de renormalização como o mapa  $R_{L^d}$  sobre o espaço das medidas de Gibbs,

$$[R_{L^d} \mu_{\Lambda_N}](\bar{m}) \doteq \int_{\substack{(\mathbb{R}^d)^{\Lambda_N} \\ \bar{m} \text{ constante}}} d(m) \mu_{\Lambda_N}(m).$$

Podemos observar que, em virtude da expressão (3.0.46), a transformação de grupo de renormalização para a medida de Gibbs induz uma transformação sobre o funcional peso *a priori* que passa a ser descrito por

$$F'(\bar{m}) = \prod_{x \in \Lambda_{N-1}} \lambda'(\bar{m}(x)),$$

onde

$$(3.0.48) \quad \lambda'(\bar{m}) \doteq [\mathcal{R}_{L^d} \lambda](\bar{m}) = e^{-\frac{\beta}{2\sigma_d}(1-L^{-d})\bar{m}^2} \Upsilon(L^{\frac{d}{2}}\bar{m}),$$

$$\Upsilon(m) \doteq \int_{\mathbb{R}^{L^{d-1}}} \prod_{\zeta} dm(\zeta) \delta\left(\bar{m} - \sum_{\zeta} m(\zeta)\right) e^{-\beta H_0(0, m)} \prod_{\zeta} \lambda(m(\zeta))$$

e  $\zeta$  indexa os vetores que ligam os vizinhos mais próximos (distância hierárquica  $d_L = L$ ). A equação para transformação da atividade dipolar dada pela expressão anterior não está definida para todas as temperaturas e qualquer atividade pois o primeiro termo no produto de convolução não é integrável e portanto a integrabilidade da atividade transformada dependerá do balanço entre as contribuições do termo  $\exp(-\beta H_0(0, m))$  e das atividades.

Como ilustração vamos considerar o caso mais simples que pode ser verificado diretamente: a rede bidimensional com  $L = 2$  e com atividade inicial dada por

$$\lambda(m) = \frac{1}{2\pi} z e^{-\frac{1}{2} z m^2}, \quad z > 0.$$

De acordo com a transformação (3.0.48), temos que

$$\lambda'(m) = \frac{1}{8\pi} \frac{z^3}{\sqrt{(z - \alpha)(z + \alpha)^2(z + 3\alpha)}} e^{-\frac{1}{2} \left( 3\alpha + \frac{z^2 - 2\alpha z - \alpha^2}{z} \right) m^2},$$

onde  $\alpha = \beta/8\pi$ . A atividade transformada é integrável na variável  $m \in \mathbb{R}^2$  apenas para temperaturas que satisfaçam a desigualdade

$$\beta < 4\pi(1 + \sqrt{5})z \equiv \beta_0.$$

Se aplicarmos novamente a transformação, a atividade resultante será integrável apenas para os valores de  $\beta$  tais que

$$\beta < 2\pi \left( 3 - \sqrt{5} + \sqrt{6} \sqrt{5 - \sqrt{5}} \right) z \equiv \beta_1 < \beta_0;$$

e assim, sucessivamente, teremos uma seqüência decrescente de valores críticos  $\beta_n$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Os valores  $\beta_0$  e  $\beta_1$  são os únicos que podem ser calculados explicitamente, os demais podem ser obtidos por meio de métodos numéricos como, por exemplo, o método de Newton-Raphson. Uma análise numérica preliminar indica um comportamento exponencial em  $n$  para  $\beta_n$  o que aponta a existência de um valor  $\beta_* = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 8\pi z$ . Conseqüentemente, o grupo de renormalização entendido como a transformação (3.0.48) estaria definido apenas na região de temperaturas suficientemente altas,  $\beta < \beta_* = 8\pi$ .

Em vista das dificuldades mencionadas no parágrafo anterior, ao invés de estudar o gás de dipolos através do potencial (3.0.41), utilizaremos uma versão simplificada dada pela expressão

$$(3.0.49) \quad \Phi_D(m(x), m(y)) \doteq \frac{m(x) \cdot m(y)}{\|r(x, y)\|^d}.$$

Esta forma do potencial dipolar foi estudada também por Gawędzski e Kupiainen [30]. Equivale à situação em que os momentos de dipolo estão imersos em um espaço ortogonal ao espaço ocupado pelos pontos da rede, assim o segundo termo do potencial (3.0.41) é sempre nulo e resultando na expressão (3.0.49).

A implementação de grupo de renormalização que utilizaremos nesta situação é a mesma. O efeito causado pela alteração do potencial dipolar se faz sentir pela ausência do termo  $\exp(-\beta H_0(0, m))$  no produto de convolução que define a transformação da atividade (3.0.48). A transformação da atividade é dada por

$$(3.0.50) \quad \lambda'(m) \doteq [\mathcal{R}_{L^d} \lambda](m) = e^{-\frac{\beta}{2\sigma_d}(1-L^{-d})m^2} \left( \underbrace{\lambda * \dots * \lambda}_{(L^d-1) \text{ produtos}} \right) (L^{\frac{d}{2}} m).$$

### 3.1. A transformação de GR infinitesimal (limite $L \downarrow 1$ )

Como estamos interessados em obter o limite  $L \downarrow 1$  da transformação, iremos considerar a versão *sine-Gordon* para a transformação da atividade. A transformação na versão *sine-Gordon* está definida para valores do parâmetro  $L$  que pertençam ao conjunto dos números reais maiores do que a unidade; como ilustrado no diagrama (2.1.3), a transformação dipolar com  $L$  dado por um número real pode ser considerada como uma interpolação entre as transformações definidas pelos parâmetros  $L_1^d$  e  $L_2^d$  inteiros imediatamente inferior e superior a  $L^d$ , respectivamente.

Utilizaremos a transformada de Fourier e sua inversa dados respectivamente por

$$[\mathcal{F}f](x) \equiv \widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} d^d y f(y) e^{-iy \cdot x}, \quad [\mathcal{F}\widehat{f}](y) \equiv f(y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d^d x \widehat{f}(x) e^{iy \cdot x}.$$

Através da transformada de Fourier, definimos a transformação da atividade na versão *sine-Gordon*,  $\mathfrak{R}_{L^d}$ , pela expressão:

$$\left[ \mathfrak{R}_{L^d} \widehat{\lambda} \right] (x) \doteq \left[ \widehat{\mathcal{R}_{L^d} \lambda} \right] (x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d^d y \lambda'(y) e^{-iy \cdot x}.$$

Os teoremas de convolução para transformadas de Fourier garantem a troca de produtos ordinários por produtos de convolução e vice-versa, portanto a transformação para a

atividade dipolar toma a forma

$$(3.1.1) \quad \left[ \mathfrak{R}_{L^d} \widehat{\lambda} \right] (x) = \left[ \gamma_M * \widehat{\lambda}^{L^d} \right] (L^{\frac{d}{2}} x),$$

onde  $\gamma_M$  é uma distribuição gaussiana  $d$ -dimensional com média zero e matriz de variância

$$(3.1.2) \quad M = \frac{\beta(1 - L^{-d})}{L^d \sigma_d} I_d.$$

$I_d$  é a matriz identidade  $d \times d$ .

De maneira análoga ao caso do gás de Coulomb, a transformação da atividade na versão *sine-Gordon* corresponde à solução de uma equação a derivadas parciais. No caso do gás de Coulomb, a equação diferencial trata-se da equação do calor. No entanto, como a expressão (3.1.1), além da convolução com uma distribuição gaussiana, dispõe também de uma escala  $L^{d/2}$  no argumento, a equação diferencial equivalente é a equação conhecida como *equação de Ornstein-Uhlenbeck*:

$$(3.1.3) \quad g_t = D \cdot CDg - \delta x \cdot Dg, \quad g(0) = g_0,$$

onde  $C$  é uma matriz positiva definida e  $\delta$  é um escalar.

O apêndice B contém algumas das propriedades dessa equação e sua solução, em particular, o resultado pelo qual temos interesse imediato.

**TEOREMA 3.1.1** (Equação de Ornstein-Uhlenbeck).

Seja  $C$  uma matriz positiva definida  $d \times d$ , um escalar  $\delta$  e uma distribuição de quadrado integrável  $g_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ . Vamos considerar a seguinte equação linear a derivadas parciais

$$g_t + \mathcal{A}g = 0, \quad g(0) = g_0$$

onde  $-\mathcal{A}$  é o operador diferencial auto-adjunto

$$-\mathcal{A} = D \cdot CD - \delta x \cdot D.$$

Então, a equação possui uma solução  $g(t)$ ,  $g \in C^\omega(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d))$ , dada pela ação do semigrupo analítico  $\{e^{-tA}\}_{t>0}$ :

$$g(t) = e^{-tA}g_0 \equiv \mathfrak{D}_\delta[\gamma_U * g_0](x),$$

onde para uma função  $f(x)$

$$\mathfrak{D}_\delta[f](x) \doteq f(e^{-\delta}x)$$

e  $\gamma_U$  é a distribuição gaussiana com matriz de variância dada por

$$U = \frac{(1 - e^{-2\delta})}{\delta} C.$$

Assim, a partir do teorema 3.1.1 e das expressões (3.1.1) e (3.1.2), podemos reescrever a ação do grupo de renormalização sobre a atividade dipolar como a ação de um semigrupo analítico (de  $t = 0$  a  $t = 1$ ) gerado pelo operador diferencial auto-adjunto,

$$(3.1.4) \quad [\mathfrak{R}_{L^d} \widehat{\lambda}](x) = \left[ \exp \left( \beta \frac{d \ln L}{2L^{-d} \sigma_d} I_d \Delta - \frac{d}{2} \ln L (x \cdot D) \right) \widehat{\lambda}^{L^d} \right](x).$$

Da mesma maneira empregada no capítulo anterior, definimos o potencial efetivo a partir do logaritmo da atividade após  $n$  aplicações da transformação (3.1.4),

$$(3.1.5) \quad u(x; n, L) \doteq -\ln \left( (\mathfrak{R}_{L^d})^n \widehat{\lambda}(x) \right).$$

Por um abuso de linguagem, redefinimos o potencial efetivo após os limites  $L \downarrow 1$  e  $n \rightarrow \infty$  que definem a nova variável (contínua)  $t = n \ln L$ .

**DEFINIÇÃO 3.1.2** (Potencial efetivo nas variáveis  $x$  e  $t$ ). Definimos o potencial efetivo  $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(t, x)$ , como o limite de  $u(x; n, L)$  para  $L \downarrow 1$  e  $n \rightarrow \infty$  de forma que  $t = n \ln L$  é mantido constante; isto é, dado um  $t \in \mathbb{R}_+$ ,

$$(3.1.6) \quad u(t, x) = \lim_{L \downarrow 1} u \left( x; \frac{t}{\ln L}, L \right) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} u \left( x; n, e^{\frac{t}{n}} \right).$$

A seguinte proposição trata da passagem da transformação (3.1.5) para uma equação diferencial parcial para o potencial efetivo.

**PROPOSIÇÃO 3.1.3** (Equação diferencial parcial para o potencial efetivo).

O potencial efetivo definido em 3.1.2 satisfaz a seguinte equação diferencial,

$$(3.1.7) \quad u_t = \beta \frac{d}{2\sigma_d} (\Delta u - |Du|^2) - \frac{d}{2} x \cdot Du + d u.$$

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração desta proposição é análoga à demonstração da proposição 2.1.3. Neste caso a transformação (3.1.5) relaciona o potencial efetivo antes e após a sua ação pela expressão

$$(3.1.8) \quad u(x; n+1, L) = -\ln \left\{ \exp \left[ \beta \frac{d}{2\sigma_d} \frac{t}{n} e^{-\frac{t}{n}} I_d \Delta - \frac{d}{2} \frac{t}{n} (x \cdot D) \right] \exp \left[ -e^{\frac{t}{n}} u(x; n, L) \right] \right\},$$

lembrando que  $t' = (n+1) \ln L$  e  $t = n \ln L$ . Segundo a definição 3.1.2, a expressão acima permite que calculemos a derivada parcial em  $t$  do potencial efetivo  $u(t, x)$ .

Expandindo o lado direito de (3.1.8) em potências de  $\frac{1}{n}$  teremos,

$$(3.1.9) \quad u \left( x; n+1, e^{\frac{t'}{n+1}} \right) = u + d \left( u - \frac{1}{2} x \cdot Du - \frac{\beta}{2\sigma_d} (-\Delta u + |Du|^2) \right) \frac{t}{n} + O \left( \frac{1}{n^2} \right),$$

onde, por simplicidade, omitimos os argumentos de  $u = u(x, n, e^{t/n})$ . E a partir da definição de derivada parcial e de 3.1.2,

$$(3.1.10) \quad \begin{aligned} u_t(t, x) &\doteq \lim_{t' \downarrow t} \frac{u(t', x) - u(t, x)}{t' - t} \\ &= \lim_{t' \downarrow t} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u \left( x; n+1, e^{\frac{t'}{n+1}} \right) - u \left( x; n, e^{\frac{t}{n}} \right)}{t' - t}. \end{aligned}$$

Combinando as expressões (2.1.15), (3.1.10) e levando em conta que  $t' = (n+1) \ln L = (1+n^{-1})t$  teremos

$$\begin{aligned} u_t(t, x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{t} \left\{ d \left[ u - \frac{1}{2} x \cdot Du - \frac{\beta}{2\sigma_d} (-\Delta u + |Du|^2) \right] \frac{t}{n} \right. \\ &\quad \left. + O \left( \frac{1}{n^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

o que resulta na equação diferencial parcial do enunciado da proposição. ■

De maneira análoga à do Gás de Coulomb, devemos impor sobre a equação (3.1.7) condições que sejam compatíveis com as propriedades da função peso *a priori*, em particular, a normalização e a invariância por rotação das soluções. Podemos observar pela transformação (3.0.50) que se inicialmente o meio for isotrópico, ou seja, o peso *a priori* depende apenas do valor em módulo do dipolo, então o sistema formado pelos blocos de dipolos manterá essa propriedade. Portanto, partindo de uma condição inicial que seja invariante por rotação, a solução de (3.1.7) também o será.

A outra propriedade que devemos levar em conta é a normalização. A transformação do grupo de renormalização descrita pela equação (3.0.50) não garante a normalização do peso *a priori*. Naturalmente, essa propriedade se reflete na equação para o fluxo do potencial efetivo. De acordo com a equação para o potencial efetivo, e levando em conta apenas as soluções que possuem simetria radial, teremos que na origem  $x = 0$ , as soluções satisfazem a seguinte relação,

$$(3.1.11) \quad \frac{1}{d} u_t(t, 0) = \frac{\beta}{2\sigma_d} \Delta u(t, 0) + u(t, 0),$$

uma vez que  $Du|_{x=0} = 0$  para todo  $t$ .

Portanto, de maneira análoga ao caso do Gás de Coulomb, devemos utilizar um multiplicador de Lagrange na equação (3.1.7) para garantir que a sua solução corresponda a um peso *a priori* normalizado. O multiplicador a ser incluído na equação para o potencial efetivo “controla” a normalização ao retirar o laplaciano da expressão anterior. Assim a equação para o potencial efetivo normalizado,  $\tilde{u}(t, x)$  é dada por

$$(3.1.12) \quad \tilde{u}_t = \beta \frac{d}{2\sigma_d} (\Delta \tilde{u} - |D\tilde{u}|^2) - \frac{d}{2} x \cdot D\tilde{u} + d\tilde{u} - \frac{\beta}{2\sigma_d} \Delta \tilde{u}|_{x=0}$$

com condição de contorno  $\tilde{u}(t, 0) = 0$ .

Uma vez fixada a condição inicial  $u_0(x)$ , as soluções para o potencial efetivo em suas formas normalizada e não normalizada estarão relacionadas através das expressões

$$(3.1.13) \quad \tilde{u}(t, x) = u(t, x) - u(t, 0)$$

e

$$(3.1.14) \quad u(t, x) = \tilde{u}(t, x) + \beta \frac{d}{2\sigma_d} \int_0^t ds e^{d(t-s)} \Delta \tilde{u}(s, 0).$$

### 3.2. Soluções triviais e de equilíbrio

Os pontos fixos do grupo de renormalização correspondem às soluções de equilíbrio da equação diferencial parcial para o fluxo do potencial efetivo (3.1.7). O resultado dessa seção estabelece que a única solução de equilíbrio da equação para o fluxo do potencial efetivo é a solução trivialmente nula. Esse resultado deve-se originalmente a [22], a partir de um argumento variacional sugerido por Giga e Kohn [31] para estudar o surgimento de singularidades auto-similares para uma equação não linear do calor. Como veremos esse argumento pode ser aplicado também às equações (3.1.7) e (3.1.12). Em seu artigo, Felder considera a seguinte equação para o fluxo da atividade dipolar  $d$ -dimensional:

$$(3.2.1) \quad u_t - \frac{1}{2} (\Delta u - |Du|^2) + \frac{d}{2} x \cdot Du - d u = 0.$$

Acompanhada do teorema sobre a sua solução de equilíbrio.

**TEOREMA 3.2.1** (Felder, 1987).

*Seja  $u^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução estacionária de (3.2.1) limitada inferiormente e  $C^2$ . Então  $u$  é identicamente nula.*

Como veremos a seguir, podemos estabelecer o mesmo resultado para a equação que descreve a evolução da atividade dipolar normalizada (3.1.12). A prova é muito semelhante à prova da teorema 3.2.1. Antes porém, por simplicidade, iremos considerar algumas transformações de escala que retiram a dependência explícita de (3.1.12) em relação aos parâmetros  $\beta$  e  $d$ .

As transformações

$$x \mapsto \sqrt{\frac{\sigma_d}{\beta}} x, \quad t \mapsto \frac{d}{2} t,$$



permitem reescrever a equação para o fluxo da atividade dipolar (3.1.12) como

$$(3.2.2) \quad u_t = \Delta u - |Du|^2 - x \cdot Du + 2u - \Delta u|_{x=0}$$

com condição inicial  $u(0, x) = u_0(\sqrt{\sigma_d/\beta} x)$ . Sobre a solução de equilíbrio da equação anterior podemos afirmar que:

**TEOREMA 3.2.2.**

Seja  $u^* : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  uma solução estacionária de (3.2.2) limitada inferiormente e  $C^2$ . Então  $u$  é identicamente nula.

DEMONSTRAÇÃO: Seja  $\varrho = \exp[-u^*(x)]$ . Se  $u^*$  é solução estacionária de (3.2.2) então  $\varrho$  é uma solução positiva da equação

$$(3.2.3) \quad \Delta \varrho - x \cdot D\varrho + 2\varrho \ln \varrho - \varrho (D\varrho|_{x=0}) = 0.$$

A demonstração consiste em verificar que o gradiente de  $\varrho$  é constante. Com esse objetivo, utilizaremos três identidades obtidas pela multiplicação da equação (3.2.3) por  $\varrho$ ,  $|x|^2 \varrho$  e  $x \cdot D\varrho$ , seguida da integração em  $\mathbb{R}^d$  com o peso  $e^{-|x|^2/2}$ . Como, por hipótese, a solução  $u^*$  é limitada inferiormente, a operação mencionada resultará nas seguintes identidades,

$$\mathcal{J}_1 = 0,$$

$$\mathcal{J}_2 = 0,$$

$$\mathcal{J}_3 = 0,$$

originadas dos termos  $\varrho$ ,  $|x|^2 \varrho$  e  $x \cdot D\varrho$ , respectivamente. As integrais  $\mathcal{J}_1$ ,  $\mathcal{J}_2$  e  $\mathcal{J}_3$  são dadas por

$$\mathcal{J}_1 = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x e^{-\frac{|x|^2}{2}} (-|D\varrho|^2 + 2\varrho^2 \ln \varrho - \varrho^2 K),$$

$$\mathcal{J}_2 = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x e^{-\frac{|x|^2}{2}} (-|x|^2 |D\varrho|^2 - 2\varrho x \cdot D\varrho + 2|x|^2 \varrho^2 \ln \varrho - |x|^2 \varrho^2 K),$$

$$\mathcal{J}_3 = \int_{\mathbb{R}^d} d^d x e^{-\frac{|x|^2}{2}} \left( -|D\varrho|^2 - \varrho x \cdot D\varrho + \frac{1}{2} (|x|^2 - d) (-|D\varrho|^2 - 2\varrho^2 \ln \varrho + \varrho^2 K) \right),$$

onde  $K = \Delta \varrho|_{x=0}$ .

Pela escolha da combinação linear das integrais acima, na forma

$$d\mathcal{J}_1 - \mathcal{J}_2 + 2\mathcal{J}_3 = 0,$$

temos a seguinte identidade

$$-2 \int_{\mathbb{R}^d} d^d x e^{-\frac{|x|^2}{2}} |D\varrho|^2 = 0.$$

Portanto,  $\varrho$  é uma função constante e, de acordo com (3.2.3),  $\varrho \equiv 1$ . Assim, em concordância com condição de contorno  $u(t, 0) = 0$  obedecida pelas soluções de (3.2.2), concluímos que  $u^* \equiv 0$ . ■

Na realidade, como podemos observar pela demonstração do teorema anterior, basta supor que a solução estacionária  $u^*$  seja limitada inferiormente por  $-s x^2$  para algum  $s$  real positivo.

Além da solução trivial nula, a equação (3.2.2) possui ainda uma família de soluções exatas, não estacionárias, indexadas pelo parâmetro real positivo  $k$ ,

$$(3.2.4) \quad u(t, x) = \frac{k}{1 + 4kt} |x|^2,$$

A menos de uma constante de normalização  $\mathcal{N}$ , essas soluções correspondem a atividades dipolares  $\lambda(m)$

$$\lambda(m) = \frac{1}{\mathcal{N}} e^{-\frac{\beta}{2\sigma_d} (\frac{1}{2k} + dt) |m|^2}.$$

Ou seja, se partirmos de um sistema descrito inicialmente por um peso *a priori* (atividade dipolar) de perfil gaussiano, o mesmo é preservado pela transformação de grupo de renormalização. A ação da transformação consiste em concentrar a medida em torno da origem.

Lembrando que a atividade dipolar é dada pela transformada inversa de Fourier de  $\exp(-u)$  (3.1.5) e de acordo com o teorema 3.2.2, temos então que o ponto fixo da transformação, encontrado a partir da solução estacionária  $u^*$  de (3.2.2), corresponde à distribuição delta de Dirac,  $\lambda(m) = \delta(m)$ .

O subespaço invariante das soluções para a evolução do potencial efetivo dipolar contrasta fortemente com o subespaço das soluções para o potencial efetivo das cargas no caso do gás de Coulomb. Aqui o único estado de equilíbrio regular é a solução trivial nula. Não há bifurcação e portanto o gás de dipolo possui como único estado de equilíbrio uma distribuição caracterizada pela ausência de dipolos em grandes escalas.

### 3.3. Existência e unicidade

Nesta subseção apresentaremos uma tentativa de demonstração da existência e unicidade da solução da equação para o fluxo não normalizado do potencial efetivo dipolar. De maneira análoga à utilizada na demonstração da existência e unicidade da solução para a equação do gás de Coulomb, empregaremos aqui uma abordagem via teorema do ponto fixo de Banach.

Vamos considerar a equação para o fluxo não normalizado do potencial efetivo. Realizamos essa escolha por simplicidade e pela possibilidade de transportar os resultados obtidos para a solução da equação normalizada através da relação entre as duas (3.1.13) e (3.1.14).

A partir dessas considerações, seja o problema de valor inicial dado por

$$(3.3.1) \quad \frac{d}{dt}z + Az - F(z) = 0, \quad z(0) = z_0,$$

definido em um espaço de Banach  $X$  a ser determinado. O operador diferencial linear  $A$  é dado por

$$(3.3.2) \quad Az = -\Delta z + x \cdot Dz$$

e o operador não linear  $F : X \rightarrow Y$

$$(3.3.3) \quad F(z) = -|Dz|^2 + 2z.$$

Relembrando os resultados do capítulo anterior, a abordagem via teorema do ponto fixo de Banach tipicamente garante além da existência e unicidade locais, a dependência contínua com respeito à condição inicial. A sua aplicação exige em geral dois espaços de Banach distintos  $X$  e  $Y$ . O espaço  $X$  é o espaço onde a solução,  $z(t) \in X$ , reside. O espaço  $Y$  é o contra-domínio do operador não linear  $F$ . O operador linear é o gerador de um semigrupo linear fortemente contínuo  $T(t)$ , a partir do qual é possível descrever a equação diferencial na forma integral

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t ds T(t-s)F(z(s)).$$

Assim, a validade do teorema depende do comportamento da norma de  $T(t) : Y \rightarrow X$  na vizinhança de  $t = 0$  e do operador não linear que deve ser localmente Lipschitz, i. e., dado um  $x \in X$  e uma vizinhança de  $x$ ,  $V \subset X$ , diz-se que o operador é localmente Lipschitz se

$$\|F(y) - F(x)\|_Y \leq K \|y - x\|_X$$

para todo  $y \in V$ .

Uma vez garantida a existência e unicidade locais é possível estender esses resultados para todo o tempo através do lema de Gronwall.

Podemos notar por sua definição que o operador  $A$  possui o domínio minimal formado pelas funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em  $\mathbb{R}^d$ ,  $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ . Nesse domínio, vamos considerar o produto interno com peso gaussiano,  $(\cdot, \cdot)_{\gamma_d}$  dado por

$$(3.3.4) \quad (f, g)_{\gamma_d} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{1}{2}|x|^2} d^d x f(x)g(x).$$

Podemos verificar que o operador  $A$  é simétrico nesse domínio, assim, dadas duas funções  $f, g \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(3.3.5) \quad (Af, g)_{\gamma_d} = (f, Ag)_{\gamma_d}$$

e

$$(3.3.6) \quad (Af, f)_{\gamma_d} = (Df, Df)_{\gamma_d} \geq 0$$

Levando em conta que o espaço vetorial  $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  é denso no espaço das funções de quadrado integrável  $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d, d\gamma_d) \equiv \mathbf{L}^2(\gamma_d)$ , vamos considerar as derivadas presentes no operador  $A$  em sua forma fraca. De acordo com o lema B.0.11, o domínio do operador é tal que

$$\mathcal{D}(A) = \{f \in \mathbf{L}^2(\gamma_d) : Af \in \mathbf{L}^2(\gamma_d)\} = \mathbf{H}^2(\gamma_d),$$

e seu espectro é puramente pontual

$$\sigma(A) = \{n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Pela densidade de  $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  em  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$ , as propriedades de simetria (3.3.5) e não negatividade (3.3.6) do operador  $A$  são válidas também no espaço  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$ . Se somarmos a isso o fato de que o domínio do operador, dado pelo espaço de Sobolev  $\mathbf{H}^2(\gamma_d)$ , é denso em  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$  podemos utilizar a construção de Friedrichs para obter a extensão auto-adjunta do operador  $A$ ,  $A|_{\mathcal{D}(A)}$ , que, por um abuso de linguagem, designaremos como  $A$ .

Por ser auto-adjunto, o operador  $A$  é também setorial. Assim, os mesmos argumentos utilizados na demonstração de existência e unicidade das soluções da equação diferencial para o gás de Coulomb, podem ser empregadas na presente equação, bastando apenas verificar as exigências da prova para as estimativas do operador linear e da parte não linear da equação (3.3.1).

De acordo com as propriedades da parte linear do operador (operador O-U), uma escolha adequada dos espaços é por

$$X = \mathbf{H}^1(\gamma_d) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \quad \text{e} \quad Y = \mathbf{L}^2(\gamma_d).$$

De modo análogo ao utilizado na prova do teorema 2.2.1, vamos considerar a solução da equação diferencial como um elemento  $z \in \mathbf{C}([0, T], X)$  com norma

$$\|z\|_{\mathbf{C}([0, T], \mathbf{H}^1(\gamma_d))} = \sup_{0 < t < T} \|z(t)\|_{\mathbf{H}^1(\gamma_d)}.$$

Portanto, verificamos a existência e unicidade local se as seguintes condições forem satisfeitas,

$$(3.3.7) e^{-tA} : \mathbf{H}^1(\gamma_d) \rightarrow \mathbf{H}^1(\gamma_d) \text{ é um semigrupo fortemente contínuo para } t \geq 0,$$

$$(3.3.8) F : \mathbf{H}^1(\gamma_d) \rightarrow \mathbf{L}^2(\gamma_d) \text{ é um operador localmente Lipschitz,}$$

$$(3.3.9) e^{-tA} : \mathbf{L}^2(\gamma_d) \rightarrow \mathbf{H}^1(\gamma_d) \text{ para } t > 0,$$

$$(3.3.10) \quad \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\gamma_d), \mathbf{H}^1(\gamma_d))} \leq C t^{-\epsilon} \text{ para } t \in (0, 1] \text{ e algum } \epsilon < 1.$$

A primeira condição segue do lema B.0.11 e do fato de que a base formada pelos polinômios de Hermite é densa em  $\mathbf{H}^1(\gamma_d)$ . Vamos então nos concentrar em demonstrar as demais condições. Iniciaremos pelas condições que envolvem diretamente a parte linear da equação: as condições (3.3.9) e (3.3.10). Por fim verificaremos que a condição de Lipschitz para o termo não linear não é satisfeita.

Seja um  $f \in \mathbf{L}^2(\gamma_d)$ . A cada  $n = 0, 1, \dots$  indicamos por  $\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_n : \mathbf{L}^2(\gamma_d) \rightarrow \mathfrak{H}_n \subset \mathbf{L}^2(\gamma_d)$ , o projetor sobre o subespaço  $\mathfrak{H}_n$  que é formado pela combinação linear de polinômios de Hermite  $H_\nu$  onde  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$  é um multi-índice tal que  $|\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i = n$ . Os subespaços  $\mathfrak{H}_k$  são mutuamente ortogonais e sua soma direta coincide com o espaço das funções de quadrado integrável com peso gaussiano, ou seja,  $\mathbf{L}^2(\gamma_d) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathfrak{H}_n$ .

De acordo com a definição dos polinômios de Hermite, B.0.9, a norma de Sobolev  $\mathbf{H}^1(\gamma_d)$  para  $H_\nu$  é dada por

$$(3.3.11) \quad \|H_\nu\|_{\mathbf{H}^1(\gamma_d)}^2 = \|H_\nu\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2 + \|D H_\nu\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2.$$

A identidade (B.0.13) permite relacionar as derivadas parciais dos polinômios do subespaço  $\mathfrak{H}_n$  aos polinômios do subespaço  $\mathfrak{H}_{n-1}$  :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} H_\nu(x) = \sqrt{\nu_i} H_{\nu_1, \dots, \nu_i-1, \dots, \nu_d}(x),$$

onde  $|\nu| = n$ . Como, por definição,  $\|H_\nu\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2 = 1$ , a identidade anterior permite avaliar a norma de Sobolev (3.3.12)

$$\|H_\nu\|_{\mathbf{H}^1(\gamma_d)}^2 = 1 + |\nu| = 1 + n.$$

Assim, a norma de Sobolev de  $e^{-At}f$  pode ser estimada começando por sua decomposição por meio dos projetores  $\mathcal{P}_n$ :

$$\begin{aligned} e^{-At}f &= e^{-At} \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{P}_n f \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nt} \mathcal{P}_n f, \end{aligned}$$

a última igualdade segue do lema sobre o espectro do operador (semigrupo). Cada projeção  $\mathcal{P}_n f$  é constituída por polinômios  $H_\nu$  com  $|\nu| = n$ , logo

$$(3.3.12) \quad \|e^{-At}f\|_{\mathbf{H}^1(\gamma_d)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (1+n)e^{-nt} \|\mathcal{P}_n f\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2.$$

Como por hipótese  $f \in \mathbf{L}^2(\gamma_d)$ , temos que

$$\|f\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\mathcal{P}_n f\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2 < \infty.$$

E assim, em vista de (3.3.12), podemos notar que  $\|e^{-At}f\|_{\mathbf{H}^1(\gamma_d)}^2 < \infty$  para qualquer  $t > 0$ , ou seja, a condição (3.3.9),  $e^{-At} : \mathbf{L}^2(\gamma_d) \rightarrow \mathbf{H}^1(\gamma_d)$  é satisfeita.

Há pelo menos duas maneiras simples de estimar superiormente a expressão (3.3.12), podemos limitar superiormente a norma da projeção pela norma de  $f$ ,  $\|\mathcal{P}_n f\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)} \leq \|f\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}$ , e então calcular o somatório  $\sum_n (1+n)e^{-nt}$ ; ou então encontrar o maior termo entre  $(1+n)e^{-nt}$  e utilizá-lo para majorar a soma. Dessa forma, ao menos formalmente, limitamos a norma de Sobolev de  $e^{-At}f$  por

$$\|e^{-At}f\|_{\mathbf{H}^1(\gamma_d)} \leq C(t) \|f\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)},$$

onde

$$C(t) = \min \left\{ \left( \sum_{n=1}^{\infty} (1+n)e^{-2nt} \right)^{1/2}, \left( \max_n (1+n)e^{-nt} \right)^{1/2} \right\}.$$

Não é difícil verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+n)e^{-2nt} = \frac{1}{4}(1 + \coth t)$$

e que

$$\max_n (1+n)e^{-nt} \leq \begin{cases} \frac{1}{2t}e^{2t-1}, & 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 1, & t > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Portanto, temos que

$$\|e^{-At}f\|_{\mathbf{H}^1(\gamma_d)} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \|f\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)} \implies \|e^{-At}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{H}^1(\gamma_d), \mathbf{L}^2(\gamma_d))} \leq \frac{1}{\sqrt{t}},$$

para  $0 < t \leq 1$  e assim verificamos a condição (3.3.10) com  $\epsilon = 1/2$ .

Resta verificar a condição de Lipschitz para o operador não linear  $F$ . Sejam duas funções  $f, g \in \mathbf{H}^2(\gamma_d)$  sobre as quais age o operador não linear  $F$ ,

$$F[f] - F[g] = |Df|^2 - |Dg|^2 + 2(f-g) = D(f+g) \cdot D(f-g) + 2(f-g).$$

Vamos nos concentrar no termo não linear de  $F$ ,

$$\|D(f+g) \cdot D(f-g)\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} d\gamma_d |D(f+g)|^2 |D(f-g)|^2.$$

A partir da última integral e da desigualdade de Hölder com  $p \in (1, \infty)$ , temos que

$$(3.3.13) \quad \|D(f+g) \cdot D(f-g)\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2 \leq \|D(f+g)\|_{\mathbf{L}^{2p}(\gamma_d)}^2 \|D(f-g)\|_{\mathbf{L}^{2p'}(\gamma_d)}^2,$$

onde  $1/p + 1/p' = 1$ . Para que a desigualdade seja válida, os elementos  $f$  e  $g$  devem pertencer aos espaços  $\mathbf{L}^{2p}(\gamma_d)$  e  $\mathbf{L}^{2p'}(\gamma_d)$ . Se esses mesmo elementos satisfazem a equação diferencial então pertencem ao domínio do operador  $A$ , ou seja  $f, g \in \mathbf{H}^2(\gamma_d)$ . Portanto, as funções dadas pela norma do gradiente (no sentido fraco) de  $f$  e  $g$  pertencem ao espaço de Sobolev  $\mathbf{H}^1(\gamma_d)$ . Os teoremas de imersão para espaço de Sobolev  $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega)$  para um



aberto contíguo e limitado  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  garantem a imersão compacta  $\mathbf{W}^{m,p}(\Omega) \subset\subset \mathbf{L}^q(\Omega)$  para  $1 \leq q < \infty$  quando  $mp = d$ . Como para qualquer elemento  $Df \in \mathbf{H}^1(\gamma_d)$  é sempre possível encontrar uma função  $\zeta \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  tal que  $\zeta Df \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ , temos que os elementos dados por  $|Df|, |Dg| \in \mathbf{H}^1(\gamma_2)$  pertencem também ao espaço  $\mathbf{L}^q(\gamma_2)$  para qualquer  $1 \leq q < \infty$ .

Porém, não é possível utilizar a desigualdade de Hölder em (3.3.13) com  $p = 1, \infty$ , pois neste caso, como podemos verificar facilmente, os polinômios  $x^n$  não pertencem ao espaço  $\mathbf{L}^\infty(\gamma_d)$ .

A presente situação é distinta daquela em que o operador diferencial linear é formado apenas pelo operador de Laplace. Na ausência do termo  $x \cdot D$ , podemos trabalhar com o par de espaços de Banach  $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d)$  e  $\mathcal{D}((I + \Delta)^\alpha) = \mathbf{L}_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d)$  para um real  $\alpha \geq 0$ . O espaço  $\mathbf{L}_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d)$  é conhecido como espaço do potencial de Bessel [61] e constitui uma “extensão” do espaço de Sobolev  $\mathbf{W}^{m,p}(\mathbb{R}^d)$  nos casos em que  $m$  não é um inteiro. Para  $1 < p < \infty$  e  $2\alpha \in \mathbb{N}$  ele equivale ao espaço  $\mathbf{W}^{2\alpha,p}(\mathbb{R}^d)$ . A vantagem de se utilizar esses espaços são as suas propriedades de imersão; além das imersões próprias aos espaços de Sobolev quando  $2\alpha \in \mathbb{N}$  e  $1 < p < \infty$ , ele possui também as imersões:

- $2\alpha p < d$ : Existe um  $q^* = pd/(d - 2\alpha p)$  tal que para qualquer  $p \leq q \leq q^*$  verificamos a imersão  $\mathbf{L}_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^d)$ .
- $2\alpha p > d$ : Para qualquer  $0 \leq \nu < 2\alpha - d/p$  verificamos a imersão  $\mathbf{L}_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{C}^{[\nu], \nu - [\nu]}(\mathbb{R}^d)$ .
- $0 \leq k < 2\alpha$ ,  $k \in \mathbb{N}$ : Existe um  $q^{**} = pd/(d - p(2\alpha - k))$  tal que para qualquer  $1 < q \leq q^{**}$  verificamos a imersão  $\mathbf{L}_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{W}^{k,q}(\mathbb{R}^d)$ .

Portanto é sempre possível encontrar um par de espaços  $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d)$  e  $\mathbf{L}_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d)$  com  $(1/2 + d/2p) < \alpha < 1$  o que implica a imersão  $\mathbf{L}_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathbf{C}^{1,\epsilon}(\mathbb{R}^d)$ . Como os elementos do espaço são formados por funções contínuas, limitadas, com primeiras derivadas também

contínuas e limitadas, podemos utilizar a desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
 \|D(f+g) \cdot D(f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p &\leq \|D(f+g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^p \|D(f-g)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^p \\
 &\leq K \|f+g\|_{L_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d)}^p \|f-g\|_{L_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d)}^p \\
 &= K' \|f-g\|_{L_{2\alpha}^p(\mathbb{R}^d)}^p.
 \end{aligned}$$

A ausência de imersões dos espaços de Sobolev com peso em espaços de funções contínuas e limitadas impede a utilização da desigualdade de Hölder saturada e por este meio não somos capazes de verificar a condição de Lipschitz local para a parte diferencial não linear do operador  $F$ .

Na realidade, podemos construir espaços a partir de potências fracionárias do operador O-U, esses espaços são descritos em [8], porém as imersões disponíveis [27] são em espaços de funções contínuas com crescimento limitado por uma gaussiana com média zero e sinal trocado e assim, os elementos desse espaço não possuem estimativas  $\|\cdot\|_{L^\infty(\gamma_d)} < \infty$ .

Sem a condição local de Lipschitz não é possível verificar a existência e unicidade através do teorema do ponto fixo de Banach para a equação descrita na sua forma integral. Não encontramos na literatura especializada em equações a derivadas parciais referência sobre equações equivalentes à equação do fluxo do GR para o potencial efetivo dipolar. Além da tentativa esboçada nesta seção, procuramos também uma prova alternativa através do princípio do máximo, nesse caso, como a equação possui suporte em todo  $\mathbb{R}^d$ , procuramos aplicar uma versão não linear do princípio de Phragmén-Lindelöf como o descrito em [55] para garantir a existência e unicidade para funções contínuas suficientemente regulares. No entanto, mesmo nesse novo quadro, o comportamento dos termos não lineares da equação no infinito dificulta uma abordagem direta por esse método.

Até onde foi possível verificar, a existência e unicidade para essas equações diferenciais em espaços abstratos é um problema em aberto.

### 3.4. Análise Linear para EDP associada ao gás de dipolos

Os teoremas 3.2.1 e 3.2.2 garantem que a solução trivial nula é a única solução estacionária limitada inferiormente tanto para equação normalizada (3.2.2) quanto para a equação de dipolos não normalizada,

$$(3.4.1) \quad u_t = \Delta u - |Du|^2 - x \cdot Du + 2u.$$

Por simplicidade faremos a análise de estabilidade apenas para a equação não normalizada. Em vista das relações entre as soluções normalizadas e não normalizadas (3.1.13), (3.1.14), os resultados obtidos para a uma das equações pode ser utilizado de maneira clara na análise da outra.

A linearização da equação (3.4.1) em torno da solução trivialmente nula é realizada simplesmente pela exclusão do termo não-linear  $|Du|^2$ . É possível estudar a equação diferencial parcial resultante como um problema de valor inicial em um espaço de Banach convenientemente definido. Esse problema está resolvido no apêndice B. Vamos apenas exigir que o domínio seja formado por soluções com simetria radial. Portanto, designaremos os subespaços de  $L^p(\gamma_d)$  e  $\mathbf{W}^{m,p}(\gamma_d)$  com simetria radial como  $L^p_\rho(\gamma_d)$  e  $\mathbf{W}^{m,p}_\rho(\gamma_d)$  respectivamente. Devido a sua simetria esses espaços equivalem às versões unidimensionais dos espaços de Lebesgue e de Sobolev (localmente somáveis). A seguinte proposição trata dos autovalores e autofunções do operador linear e é um reflexo direto das propriedades já estudadas no apêndice B.

#### TEOREMA 3.4.1.

Seja  $A$  o operador linear auto-adjunto definido em (3.3.2) com domínio  $\mathcal{D}(A) = \mathbf{H}_r^2(\gamma_d)$ . O espectro de  $A$ ,  $\sigma(A)$ , é dado pelo conjunto de valores reais positivos

$$\sigma(A) = \{2n : n \in \mathbb{N}\}.$$

A cada autovalor  $2n$  está associada uma autofunção  $h_n$ ,  $Ah_n = 2nh_n$ , normalizada,  $\|h_n\|_{L^2(\gamma_d)} = 1$  :

$$h_n(x) = \frac{1}{N_\Omega N_\rho} L_n^{\frac{d-2}{2}} \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right),$$

onde  $L_n^\alpha(x)$  é o polinômio de Laguerre.  $\mathcal{N}_\Omega$  é a parte angular da normalização e  $\mathcal{N}_\rho$  a parte radial,

$$\mathcal{N}_\Omega = \frac{(2\pi)^{d/4}}{\sqrt{\Gamma(d/2)}}, \quad \mathcal{N}_\rho = \sqrt{\frac{\Gamma(n+d/2)}{n!}}$$

e  $\Gamma$  é a função gama de Euler.

DEMONSTRAÇÃO: A demonstração é análoga à demonstração do lema B.0.11. A diferença está no fato de considerarmos apenas os subespaços com simetria radial. Para isso, vamos introduzir a função geratriz para os polinômios de Hermite em dimensão  $d$ ,

$$(3.4.2) \quad G_a(x; \tau) = e^{-\tau^2 + 2\tau a \cdot x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^n}{n!} H_n(a \cdot x), \quad a, x \in \mathbb{R}^d.$$

$H_n$  é o polinômio de Hermite de grau  $n$ . Por uma questão de conveniência, nesta demonstração consideraremos os polinômios de Hermite definido por

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-x^2}.$$

A ação do semigrupo  $e^{-tA}$  sobre  $G_a(x; \tau)$  nos fornece informação sobre os autovalores e autovetores do operador diferencial  $A$ . De maneira análoga à desenvolvida em B.0.11, temos que

$$(3.4.3) \quad e^{-tA} G_a(x; \tau) = G_a(x; e^{-t}\tau),$$

para todo vetor  $a \in \mathbb{R}^d$  tal que  $|a|^2 = 1/2$ .

Considerando a representação de  $G_a(x; \tau)$  em termos de polinômios de Hermite (3.4.2), a ação do semigrupo  $e^{-tA}$  descrita pela equação anterior corresponde a seguinte relação:

$$(3.4.4) \quad e^{-tA} H_n(a \cdot x) = e^{-nt} H_n(a \cdot x),$$

onde  $|a|^2 = 1/2$ .

A cada autovalor  $n$ , está associado um subespaço formado pelas funções  $H_n(a \cdot x)$  tais que  $|a|^2 = 1/2$ . Desses subespaços, só nos interessam as funções que possuem simetria radial, essas serão as autofunções  $h_n$  do operador  $A$ . Portanto, podemos descartar de imediato os polinômios de Hermite de ordem ímpar, por serem eles incompatíveis com a

exigência de simetria radial na origem. Os demais elementos de cada subespaço devem ser combinados linearmente na forma de autofunções com simetria radial.

Construímos essas autofunções  $c$  por meio da integração sobre todos os vetores  $a$  de módulo igual a  $1/2$ , o que corresponde à integração sobre os ângulos no argumento dos polinômios de Hermite de ordem par. Portanto, a menos de uma constante de normalização, as autofunções  $h_n$  são descritas por

$$(3.4.5) \quad h_n(|x|) \doteq \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{S^d} dS H_{2n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} x \cdot n \right),$$

onde  $S^d$  é esfera de raio unitário em dimensão  $d$  e  $n$  o vetor unitário perpendicular ao elemento de área  $dS$ . A partir da expressão anterior, encontraremos a expressão exata das autofunções através da escolha do vetor  $x$  paralelo à coordenada azimutal, dessa forma, podemos reescrever a integral anterior como

$$(3.4.6) \quad \begin{aligned} h_n(|x|) &= \frac{1}{\mathcal{N}'} \int_0^\pi (\sin \theta)^{d-2} d\theta H_{2n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |x| \cos \theta \right), \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}'} \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2)^{\frac{d-3}{2}} H_{2n} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} |x| \xi \right), \end{aligned}$$

onde na última passagem realizamos a mudança de variável  $\cos \theta = \xi$ . A integral (3.4.6) é conhecida [21, pg. 195],

$$\int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\alpha-1/2} H_{2n}(\sqrt{x} t) dt = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} (2n)! \Gamma(\alpha + 1/2)}{\Gamma(n + \alpha + 1)} L_n^\alpha(x),$$

para qualquer  $\alpha$  complexo tal que  $\Re(\alpha) > -1/2$ . Assim, com a escolha de  $\alpha = (d-2)/2$ , teremos para  $d > 1$ ,

$$h_n(|x|) = \frac{1}{\mathcal{N}''} L_n^{\frac{d-2}{2}} \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right).$$

Através das relações funcionais para polinômios de Laguerre é possível verificar diretamente que as funções  $h_n$  são autofunções do operador diferencial de Ornstein-Uhlenbeck com autovalor  $-2n$ :

$$(3.4.7) \quad \Delta h_n - x \cdot D h_n = -2n h_n.$$

De acordo com [21, pg. 189], os polinômios de Laguerre obedecem a seguinte relação funcional

$$\frac{d}{dx} L_n^\alpha(x) = \frac{1}{x} (n L_n^\alpha(x) - (n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(x)).$$

Portanto, a ação dos operadores diferenciais  $x \cdot D$  e  $\Delta$  sobre  $h_n$  é descrita respectivamente por

$$x \cdot D h_n = 2n L_n^{\frac{d-2}{2}} - 2 \left( n + \frac{d-2}{2} \right) L_{n-1}^{\frac{d-2}{2}},$$

$$\begin{aligned} \Delta h_n &= \frac{1}{|x|^2} \left( (2d + 4(n-1)) n L_n^{\frac{d-2}{2}} - (8(n-1) + 2d) \left( n + \frac{d-2}{2} \right) L_{n-1}^{\frac{d-2}{2}} \right. \\ &\quad \left. + 4 \left( n + \frac{d-2}{2} \right) \left( n + \frac{d-2}{2} - 1 \right) L_{n-2}^{\frac{d-2}{2}} \right); \end{aligned}$$

para não carregar a notação, suprimimos os argumentos dos polinômios. Agora, utilizamos uma outra identidade funcional para os polinômios de Laguerre [44] segundo a qual,

$$L_{n-2}^\alpha(x) = \frac{1}{n + \alpha - 1} ((2n + \alpha - 1 - x) L_{n-1}^\alpha(x) - n L_n^\alpha(x)).$$

A partir dessa identidade, podemos reescrever o laplaciano de  $h_n$  como

$$(3.4.8) \quad \Delta h_n = -2 \left( n + \frac{d-2}{2} \right) L_{n-1}^{\frac{d-2}{2}},$$

o que permite estabelecer a equação de autovalores (3.4.7).

A constante de normalização  $\mathcal{N}'$  na definição da autofunção (3.4.5) pode ser dividida em duas partes, uma angular  $\mathcal{N}_\Omega$  e a outra parte relacionada à normalização do polinômio de Laguerre no espaço  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$ . Assim,

$$\|h_n\|_{\mathbf{L}^2(\gamma_d)}^2 = \frac{1}{\mathcal{N}_\Omega^2} \int_{S^d} dS \frac{1}{\mathcal{N}_\rho^2} \int_0^\infty dx x^{d-1} \left( L_n^{\frac{d-2}{2}} \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right) \right)^2 e^{-\frac{1}{2} x^2}.$$

A primeira integral no lado direito da equação anterior corresponde a área da superfície da esfera unitária em dimensão  $d$ , dessa forma a constante de normalização  $\mathcal{N}_\Omega$  corresponde à raiz quadrada do inverso desse valor. A outra constante de normalização é encontrada

com a ajuda da mudança de variável  $r = x^2/2$  para a segunda integração na expressão anterior,

$$\frac{1}{\mathcal{N}_\rho^2} \int_0^\infty dr r^{\frac{d-2}{2}} \left( L_n^{\frac{d-2}{2}}(r) \right)^2 e^{-r} = 1,$$

o que resulta na igualdade

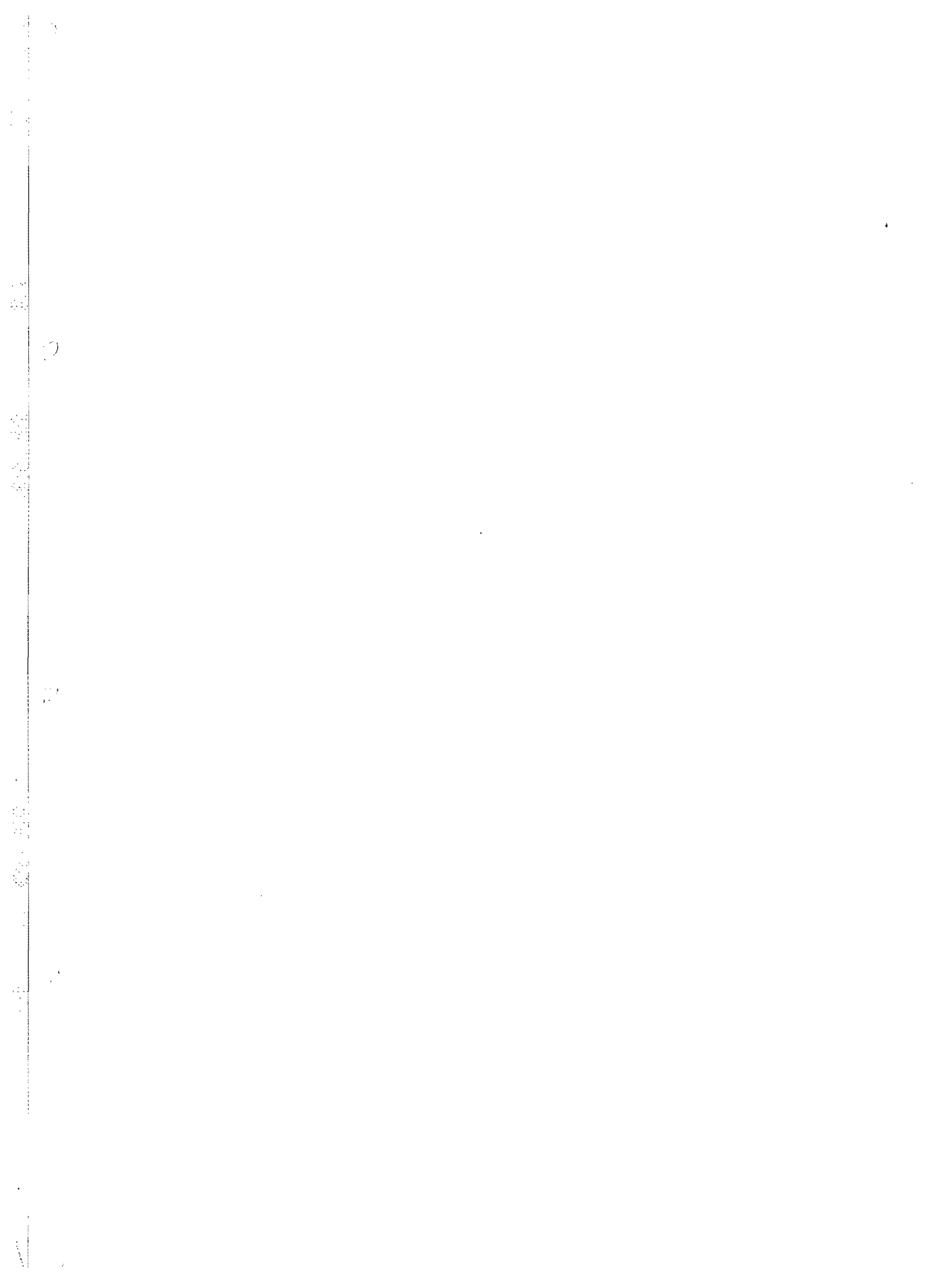
$$\frac{1}{\mathcal{N}_\rho^2} \frac{\Gamma(n + d/2)}{\Gamma(n)} = 1$$

■

O autovalor de índice  $n = 0$  é instável, no entanto trata-se de uma constante e na realidade é uma simetria contínua da equação diferencial e a normalização da solução descarta esse modo. Os demais autovalores do operador  $A + 2$  são da forma  $2(1 - n)$  para  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Podemos notar que o índice  $n = 1$  corresponde a um autovalor nulo, no entanto, ele está associado à autofunção  $h_1$  cuja forma normalizada corresponde à função

$$\tilde{h}_1 = L_1^{\frac{d-2}{2}} \left( \frac{1}{2} |x|^2 \right) - L_1^{\frac{d-2}{2}}(0) = -\frac{1}{2} |x|^2.$$

Como foi visto na seção anterior, as funções quadráticas constituem uma solução do problema não linear (3.2.4) que decresce polinomialmente com o tempo. Portanto, apesar do autovalor de  $u_1$  ser linearmente marginal, essa autofunção é estável.





## CAPÍTULO 4

### Renormalização para a série de Mayer

Podemos entender a série de Mayer como uma expansão em série, desenvolvida a partir do gás ideal formado por partículas não interagentes.

Vamos considerar o sistema constituído por um número contável de partículas cujo estado é descrito pelo par  $(x, \sigma) = \xi$ , onde  $x$  representa a posição da partícula em um domínio  $\Lambda$  e  $\sigma$  é a variável que descreve o seu estado interno,  $\sigma \in S$ .  $\Lambda$  é um domínio limitado de  $\mathbb{R}^d$ , ou então, é uma coleção finita de pontos da rede  $\mathbb{Z}^d$ . Em geral,  $S$  é um espaço compacto, por exemplo, em um gás de Coulomb com dois componentes temos  $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$  e  $S = \{-1, +1\}$ ; no caso de um gás de dipolos em rede,  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  e  $S = \{\mathbf{e} : \mathbf{e} \in \mathbb{S}^d\}$ , onde  $\mathbb{S}^d$  é o conjunto de vetores unitários em  $\mathbb{R}^d$ . Designamos como  $\Omega = \Lambda \times S$  o espaço onde está definida a variável  $\xi$ .

Então, o espaço de medida de um partícula solitária é dado por  $(\Omega, \Sigma, \rho)$  onde  $\Sigma$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos em  $\Omega$ , da forma

$$\mathcal{C} = \{\xi \in \Omega : (l_1(\xi), \dots, l_n(\xi)) \in \mathcal{C}_0\}, \quad l_i \in \Omega^*,$$

onde  $\mathcal{C}_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  ( $\sigma$ -álgebra gerada pelos abertos em  $\mathbb{R}^n$ ) e  $\Omega^*$  é o dual topológico de  $\Omega$ , dado pelo espaço formado pelos funcionais lineares contínuos sobre  $\Omega$  (neste caso,  $\Omega$  é um espaço de dimensão finita, assim  $\Sigma = \mathcal{B}(\Omega)$ ); e finalmente a medida positiva  $\rho(d\xi) = \mu(dx) \nu(d\sigma)$  com suporte em  $\Sigma$ .

Supondo que as partículas possuam uma interação de dois corpos representada pelo potencial<sup>1</sup>  $v : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  e que a atividade da partícula não dependa de seu

---

<sup>1</sup>A inclusão de  $\{+\infty\}$  entre os possíveis valores que o potencial pode assumir tem como objetivo a remoção de determinados estados do conjunto de estados admissíveis e assim, garantir a existência da grande função de partição  $\Xi_\Lambda$ . Os estados removidos são aqueles que permitem a coexistência de um número arbitrário de partículas em uma região finita do domínio  $\Lambda$ .

estado interno, podemos escrever a grande função de partição  $\Xi_\Lambda$  como

$$(4.0.9) \quad \Xi_\Lambda(\beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) \psi_n(\boldsymbol{\xi}),$$

onde  $\beta$  é o inverso da temperatura,  $z$  é a atividade da partícula e a cada estado de  $n$  partículas representado pelo vetor  $\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \Omega^n$  está associado o fator de Boltzmann  $\psi_n$ :

$$(4.0.10) \quad \psi_n(\boldsymbol{\xi}) \equiv \psi(\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) \doteq e^{-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} v(\xi_i, \xi_j)}.$$

Estamos interessados em potenciais da forma

$$\beta v(\xi_1, \xi_2) \equiv \omega(\sigma_1, \sigma_2, x_1 - x_2),$$

onde  $\omega : S \times S \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função mensurável que satisfaz as seguintes condições,

- Regular na origem :

$$(4.0.11) \quad |\omega(\sigma_1, \sigma_2, 0)| \leq B < \infty$$

- Simétrica :

$$(4.0.12) \quad \omega(\sigma_1, \sigma_2, x) = \omega(\sigma_2, \sigma_1, x) = \omega(\sigma_1, \sigma_2, -x)$$

- Somável :

$$(4.0.13) \quad \|w\| \doteq \sup_{\sigma_1} \int_{\Omega} d\nu(\sigma) d\mu(x) |\omega(\sigma_1, \sigma, x)| < \infty$$

- Positiva :

$$(4.0.14) \quad \sum_{1 \leq i, j \leq n} \bar{\tau}_i \tau_j \omega(\sigma_i, \sigma_j, x_i - x_j) \geq 0,$$

para quaisquer  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ ,  $\tau_1, \dots, \tau_n \in \mathbb{C}$  e  $n = 1, 2, \dots$

As propriedades de regularidade e de positividade do potencial garantem que o mesmo é também estável no sentido de Ruelle [58]: se realizarmos a escolha  $\tau_i = 1$  para todo  $i$ ,

então a partir de (4.0.14), temos que

$$\beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} v(\xi_i, \xi_j) + \sum_{i=1}^n \omega(\sigma_i, \sigma_i, 0) \geq 0.$$

Utilizando agora a hipótese de regularidade na origem (4.0.11), teremos a seguinte desigualdade

$$(4.0.15) \quad \beta \sum_{1 \leq i < j \leq n} v(\xi_i, \xi_j) \geq -\frac{1}{2} B n,$$

conhecida como condição de estabilidade do potencial. A estabilidade (4.0.15) é uma condição suficiente para garantir a convergência da grande função de partição em volume finito:

$$\begin{aligned} \Xi_\Lambda(\beta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) \psi_n(\boldsymbol{\xi}) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) e^{\frac{1}{2} B n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left( z e^{\frac{1}{2} B |\Omega|} \right)^n}{n!} = e^{z e^{\frac{1}{2} B |\Omega|}}. \end{aligned}$$

Além de implicar a estabilidade do potencial, a condição de positividade permite uma representação alternativa para a grande função de partição. Em conjunto com uma definição apropriada para o produto interno de funções com suporte em  $\Omega$ , o potencial define uma forma quadrática positiva, a partir da qual o fator de Boltzmann pode ser representado como a transformada de Fourier de uma medida gaussiana. A grande função de partição descrita a partir dessa nova representação para os fatores de Boltzmann é conhecida como representação *sine-Gordon*. Então por uma redefinição conveniente das atividades das partículas, a grande função de partição resultante torna-se um produto de convolução com uma medida gaussiana de média zero e covariância dada pela forma positiva induzida pelo potencial.

Em vista dessa descrição da grande função de partição como um produto de convolução com uma medida gaussiana; ao considerarmos uma decomposição contínua do potencial de interação, segue naturalmente que a grande função de partição é solução de uma equação diferencial parcial parabólica, a equação do calor. O restante desta seção é dedicado ao desenvolvimento dessa idéia.

Sejam  $\phi, \theta \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ , definimos o produto interno  $(\cdot, \cdot) : \mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$(\phi, \theta) \doteq \int_{\Omega} \rho(d\xi) \phi(\xi) \theta(\xi).$$

Assim, a condição (4.0.14) nos permite definir a forma positiva dada por

$$(\phi, v\phi) = \int_{\Omega^2} \rho(d\xi') \rho(d\xi) \phi(\xi') v(\xi', \xi) \phi(\xi) \geq 0.$$

A partir dessa forma e do seguinte teorema – uma versão em dimensão infinita do teorema de Bochner<sup>2</sup>– temos que a expressão

$$e^{-\frac{\beta}{2}(\phi, v\phi)}$$

é a transformada de Fourier de uma medida gaussiana  $\gamma_{\beta v}$ .

**TEOREMA 4.0.2** (Minlos, 1959).

*Uma medida  $\mu$  definida sobre um espaço localmente conexo  $X$  é gaussiana se e somente se sua transformada de Fourier, dada por*

$$\widehat{\mu}(\phi) = \int_X e^{i(\phi, x)} \mu(dx),$$

*possui a seguinte expressão*

$$\widehat{\mu}(\phi) = e^{(iL(\phi) - \frac{1}{2}B(\phi, \phi))},$$

*onde  $L$  é um funcional linear definido sobre  $X^*$  (o dual topológico de  $X$ ) e  $B$  é um funcional bilinear simétrico sobre  $X^*$  tal que a forma quadrática  $\phi \mapsto B(\phi, \phi)$  é não negativa.*

<sup>2</sup>Segundo Simon[59], esse teorema é um caso especial do teorema de Minlos[49]. Utilizamos aqui a versão apresentada em [8, seção 2.2].

Portanto, de acordo com o teorema, a medida gaussiana  $\gamma_{\beta v}$  é tal que satisfaz a igualdade

$$(4.0.16) \quad e^{-\frac{\beta}{2}(\phi, v \phi)} = \int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) e^{i\sqrt{\beta}(\phi, \zeta)}$$

e, nesse caso, é caracterizada pela média nula,

$$\int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) \theta(\zeta) = 0$$

e covariância

$$\int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) \theta(\zeta) \theta'(\zeta) = \beta(\theta, v \theta').$$

Seja a função indicadora,  $\eta_n \in \mathcal{D}(\Omega)$ , definida por

$$(4.0.17) \quad \eta_n(y) \equiv \eta(y; \mathcal{P}_n \xi) \doteq \sum_{j=1}^n \delta(y - \xi_j),$$

onde  $\delta$  é a distribuição delta de Dirac, e  $\xi = (\xi_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . A partir dessa função e de (4.0.16), podemos relacionar o fator de Boltzmann às integrais gaussianas. Vejamos, de acordo com a definição da função indicadora, temos a partir de (4.0.16) que

$$e^{-\frac{\beta}{2}(\eta_n, v \eta_n)} = \int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) e^{i\sqrt{\beta} \sum_{j=1}^n \zeta(\xi_j)}.$$

Por outro lado, novamente, segundo a definição da função indicadora e do fator de Boltzmann, o lado esquerdo da equação acima satisfaz a igualdade

$$e^{-\frac{\beta}{2}(\eta_n, v \eta_n)} = e^{-\beta(\sum_{i < j \leq n} v(\xi_i, \xi_j) + \sum_{j=1}^n v(\xi_j, \xi_j))} = \psi_n(\xi) e^{-\beta \sum_{j=1}^n v(\xi_j, \xi_j)}.$$

Combinando as duas última expressões, temos então que o fator de Boltzmann pode ser escrito como

$$(4.0.18) \quad \psi_n(\xi) = \int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) \prod_{j=1}^n : e^{i\sqrt{\beta} \zeta(\xi_j)} :_{\beta v},$$

onde  $: \cdot :_{\beta v}$  é a expressão conhecida como ordenamento de Wick,

$$: e^{i\phi(\xi)} :_{\beta v} \doteq e^{i\phi(\xi) + \frac{\beta}{2} v(\xi, \xi)}.$$

Assumindo que a série (4.0.9) converge, segue pela substituição da nova expressão para o fator de Boltzmann (4.0.18) que a grande função de partição pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\Xi_{\Lambda}(\beta, z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \xi) \int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) \prod_{j=1}^n : e^{i\sqrt{\beta}\zeta(\xi_j)} :_{\beta v}, \\ &= \int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \xi) \prod_{j=1}^n z : e^{i\sqrt{\beta}\zeta(\xi_j)} :_{\beta v}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$(4.0.19) \quad \Xi_{\Lambda}(\beta, z) = \int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) e^{V_0(\zeta)},$$

onde

$$V_0(\zeta; z) = z \int_{\Omega} d\rho(\xi) : e^{i\sqrt{\beta}\zeta(\xi)} :_{\beta v}.$$

A representação da grande função de partição dada por (4.0.19) é conhecida como representação *sine-Gordon*. Esta representação será útil na análise do comportamento dos sistemas cujos potenciais não satisfazem as propriedades (4.0.11) e (4.0.13). Como exemplos mais imediatos temos o potencial de Coulomb  $(\Delta)^{-1}$  dado pela solução fundamental da equação de Laplace, o de potencial de dipolos  $(\sigma \cdot D)(\sigma' \cdot D')(\Delta)^{-1}$  – ambos não satisfazem a condição de somabilidade – e o potencial de Yukawa  $(\Delta + 1)^{-1}$  que não satisfaz a condição de regularidade na origem. Essas dificuldades são contornadas pela decomposição a um parâmetro da covariância dada por

$$(4.0.20) \quad v(\xi, \xi') \doteq \int_{t_0}^T ds \frac{\partial}{\partial s} v(s, \xi, \xi') \equiv \int_{t_0}^T ds \dot{v}(s, \xi, \xi'),$$

de forma que  $\int_{\tau}^{\tau'} ds \|\dot{v}(s)\| < \infty$  e  $B(t) < \infty$  para qualquer intervalo finito  $(\tau, \tau')$ .

Ao invés de utilizar o potencial decomposto diretamente na grande função de partição  $\Xi_{\Lambda}(\beta, z)$ , vamos introduzir uma versão generalizada de  $\Xi_{\Lambda}$ , construída levando-se em conta que a atividade de partícula depende de seu estado  $\xi$ , ou seja a atividade é da forma  $z(\xi)$ .

Definimos assim a grande função de partição  $\Xi_{\Lambda, v}(\beta, z)$ :

$$(4.0.21) \quad \Xi_{\Lambda, v}(\beta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \xi) z_n(\xi) \psi_n(\xi),$$

onde

$$z_n(\xi) = \prod_{j=1}^n z(\xi_j).$$

*OBSERVAÇÃO 4.0.3.* A expressão original para a grande função de partição é recuperada no caso em que  $z(\xi) \equiv z$ .

A partir dessa nova notação e considerando que a atividade da  $j$ -ésima partícula é dada por  $ze^{i\varphi(\xi_j)}$ , podemos descrever a grande função de partição  $\Xi_{\Lambda}(\beta, ze^{i\varphi})$  como o produto de convolução

$$(4.0.22) \quad \Xi_{\Lambda, v}(\beta, ze^{i\varphi}) = \int_{\Omega} \gamma_{\beta v}(d\zeta) e^{V_0(\zeta + \varphi)} = (\gamma_{\beta v} * e^{V_0})(\varphi).$$

Isto motiva a introdução da quantidade  $V_{\Lambda}(t, \varphi; z)$  definida como o logaritmo da grande função de partição  $\Xi_{\Lambda, v(t)}(\beta, ze^{i\varphi})$  com potencial na escala  $t$ ,  $v(t) \doteq \int_0^t ds \dot{v}(s)$

$$(4.0.23) \quad V_{\Lambda}(t, \varphi; z) \doteq \ln (\gamma_{\beta v(t)} * e^{V_0(\cdot; z)})(\varphi)$$

tal que  $V_{\Lambda}(0, \varphi; z) = V_0(\varphi; z)$ . A partir de (4.0.22), podemos notar que  $V_{\Lambda}$  e a pressão em volume finito  $p_{\Lambda}(\beta, z)$  – em um sistema cujas partículas interagem através de um potencial  $v(t)$  – estão relacionadas pela igualdade

$$(4.0.24) \quad \beta p_{\Lambda}(\beta, z) = \frac{1}{|\Lambda|} V_{\Lambda}(t, 0; z).$$

Por sua vez, como  $\Xi_{\Lambda, \dot{v}(t)}(\beta, ze^{i\varphi})$  e  $\exp V_{\Lambda}(t, \varphi; z)$  são descritos através de um produto de convolução com uma medida gaussiana cuja covariância depende de um parâmetro  $t$ , essas mesmas funções são solução da equação do calor,

$$\frac{\partial}{\partial t} \Upsilon = \beta \left( \frac{\partial}{\partial \varphi}, \dot{v}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \Upsilon \equiv \int_{\Omega^2} \rho(d\zeta') \rho(d\zeta) \dot{v}(\zeta', \zeta) \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial \varphi(\zeta) \partial \varphi(\zeta')}, \quad t > t_0$$

com condição inicial  $\Upsilon(0, \varphi) = e^{V_0(\varphi; z)}$ . Em termos da variável  $V_\Lambda$ , a equação é dada então pela EDP semilinear

$$(4.0.25) \quad \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} V_\Lambda = \left( \frac{\partial}{\partial \varphi}, \dot{v}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) V_\Lambda + \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\Lambda, \dot{v}(t) \frac{\partial}{\partial \varphi} V_\Lambda \right).$$

Podemos notar a partir das expressões (4.0.20), (4.0.23) e da relação entre a pressão,  $p_\Lambda$ , e a função  $V_\Lambda$ , que o limite  $t \rightarrow t_0$ :

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow t_0} V_\Lambda(t, 0; z) &= V_0(0; z) \\ &= z \int_{\Omega} d\rho(\xi) = z |\Lambda| \end{aligned}$$

corresponde à situação em que as partículas não mais interagem, ou seja, a condição inicial da equação (4.0.25) é dada pela função  $V_0$  de um gás ideal. O fluxo representado pela equação (4.0.25) descreve a evolução da “pressão” controlada pela decomposição do potencial entre as partículas (4.0.20). O fluxo descreve a interpolação entre a situação em que as mesmas estão livres de interação ( $t = 0$ ) e a situação em que a interação é dada pelo potencial original ( $t = T$ ).

Na seção seguinte, ao invés de estudar diretamente a equação (4.0.25), seguiremos a proposta original de Brydges e Kennedy [12] que consiste em utilizar a decomposição do potencial (4.0.20) e assim construir um sistema de equações diferenciais parciais acopladas para funções<sup>3</sup> que permitem estimar os coeficientes da série perturbativa para a pressão em termos da atividade – essa série é conhecida como série de Mayer. Nossa contribuição consiste no desenvolvimento, a partir das equações acopladas construídas por Brydges e Kennedy, de uma EDP quasilinear cuja solução,  $\Phi(t, z)$ , é um limite superior para a pressão. Podemos resumir esse resultado na forma do seguinte teorema:

**TEOREMA 4.0.4.**

*Existe uma função  $\Phi = \Phi(t, z)$ , continuamente diferenciável em  $t$  e real analítica em  $z$*

<sup>3</sup>conhecidas como funções de Ursell



que satisfaz a equação

$$\Phi_t = \frac{1}{2}\beta \|\dot{v}(t)\| (z\Phi_z)^2 + B(t) (z\Phi_z - z)$$

com condição inicial  $\Phi(0, z) = z$ , tal que para  $p_\Lambda(\beta, z)$ , a pressão do gás em volume finito, a desigualdade

$$\beta p_\Lambda(\beta, z) \leq \Phi(\beta, z)$$

é válida uniformemente em  $\Lambda$ . A solução  $\Phi$  possui uma representação em termos de uma série de potências com coeficientes positivos

$$\Phi(t, z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} g_n(t) z^n$$

que converge no disco aberto

$$|z| < \left( e\beta \min \left\{ \int_0^t ds \|\dot{v}(s)\| e^{2\int_s^t d\tau B(\tau)}, e^{\int_0^t d\tau B(\tau)} \int_0^t ds \|\dot{v}(s)\| \right\} \right)^{-1}.$$

Como aplicação do teorema anterior, estudamos o modelo conhecido como gás de Yukawa. Sabemos pela literatura (por exemplo, [12] e as referências lá citadas) que esse modelo, cujo potencial não satisfaz a condição de regularidade na origem (4.0.11), apresenta uma série infinita de transições no intervalo de valores de temperatura inversa  $\beta \in [4\pi, 8\pi]$ . Essas transições estão relacionadas à formação de dipolos, quadrupolos, etc. E a cada transição, sucessivos coeficientes da série de Mayer divergem, começando pelo coeficiente do termo  $z^2$ , que diverge em  $\beta = 4\pi$ .

O potencial de Yukawa pode ser decomposto de acordo com a prescrição (4.0.20) de maneira que o potencial decomposto na escala  $t$ ,  $\dot{v}(t)$ , satisfaz as propriedades (4.0.11)-(4.0.14). Assim, através de mudanças de escala, do último teorema e tomando um limite conveniente, somos capazes de demonstrar o seguinte teorema sobre a convergência da série de Mayer para o gás.

**TEOREMA 4.0.5.**

*Dado um inteiro,  $n > 1$ , a pressão do gás de Yukawa representada em termos de uma série de Mayer desprovida da parte singular de ordem até  $n$ , existe e a série é convergente*

para valores de  $\beta$  e  $z$  tais que

$$\beta < \beta_n \quad e \quad |z| < \frac{\beta_n - \beta}{e \beta_n \beta}$$

onde  $\beta_n = 8\pi(1 + (n - 1)^{-1})^{-1}$  é o  $n$ -ésimo ponto de transição.

A demonstração dos teoremas 4.0.4 e 4.0.5 será desenvolvida ao longo das seções 4.3 e 4.4 respectivamente.

#### 4.1. Série de Mayer

A pressão a volume finito de um sistema descrito pela grande função de partição  $\Xi_\Lambda(\beta, z)$  é dada por  $p_\Lambda$ :

$$(4.1.1) \quad p_\Lambda(\beta, z) = \frac{1}{\beta |\Lambda|} \ln \Xi_\Lambda(\beta z).$$

O limite termodinâmico, caso exista é dado por  $p(\beta z) = \lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{K}^d} p_\Lambda(\beta, z)$ , onde  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{Z}$ .

Vamos reescrever a grande função de partição através de produtórios,

$$\begin{aligned} \Xi_\Lambda(\beta z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) \psi_n(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) \prod_{i < j=1}^n (e^{-\beta v(\xi_i, \xi_j)} - 1 + 1) \\ (4.1.2) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) \prod_{i < j=1}^n (f_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) + 1), \end{aligned}$$

onde

$$f_{i,j}(\boldsymbol{\xi}) = e^{-\beta v(\xi_i, \xi_j)} - 1.$$

Ao abrirmos o produtório em (4.1.2), chegamos à seguinte expressão para  $\Xi_\Lambda$ ,

$$\Xi_\Lambda(\beta z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \boldsymbol{\xi}) \sum_{g \in \mathcal{M}(n)} \prod_{(i,j) \in E(g)} f_{i,j}(\boldsymbol{\xi}),$$

onde  $\mathcal{M}(n)$  representa o conjunto de grafos de Mayer com  $n$  vértices. Um grafo  $g$  não orientado é formado por um conjunto ordenado de pontos  $V(g)$ , cujos elementos são chamados de vértices de  $g$ , e por um conjunto de pares ordenados  $E(g) = \{\langle i, j \rangle : i < j \in V(g)\}$  chamado de conjunto das arestas de  $g$ . Um grafo não orientado  $g$  é um grafo de Mayer se e somente se entre cada par de vértices existir uma única aresta ou então nenhuma aresta. Os grafos de Mayer podem ainda ser classificados como conexos ou desconexos. Dizemos que um grafo  $g$  é conexo se dados quaisquer par de vértices  $i, j \in V(g)$  há pelo menos uma coleção de arestas  $\{\langle i, k_0 \rangle, \langle k_0, k_1 \rangle, \dots, \langle k_{m-1}, k_m \rangle, \langle k_m, j \rangle\} \subset E(g)$  que os conecta. Denominamos o subconjunto dos grafos conexos de Mayer com  $n$  vértices como  $\mathcal{M}^c(n)$ .

A série de Mayer é a série para a pressão em termos da atividade, expressa por

$$(4.1.3) \quad \beta p_\Lambda(\beta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{\Lambda, n} z^n}{n!}$$

onde os coeficientes  $b_{\Lambda, n}$  são dados pela expressão

$$(4.1.4) \quad b_{\Lambda, n} = \frac{1}{|\Lambda|} \int_{\Omega^n} \rho(d\mathcal{P}_n \xi) \psi_n^c(\xi)$$

e  $\psi_n^c(\xi) \equiv \psi^c(\mathcal{P}_n \xi)$  é a função de Ursell com  $n$  componentes. Por sua vez, a função de Ursell é dada pela soma sobre todos os grafos conexos do produto dos pesos  $f_{i, j}$  associados a cada aresta  $\langle i, j \rangle$  dos grafos,

$$(4.1.5) \quad \psi_n^c(\mathcal{P}_n \xi) = \sum_{g \in \mathcal{M}^c(n)} \prod_{\langle i, j \rangle \in E(g)} f_{i, j}(\xi).$$

Podemos apreciar a relação entre o fator de Boltzmann e as funções de Ursell sem a necessidade de recorrer à teoria de grafos. Para tanto, utilizamos<sup>4</sup> a construção algébrica proposta por Ruelle[58].

Seja  $\mathfrak{A}$  o espaço vetorial sobre  $\mathbb{C}$  formado pelas seqüências  $\psi = (\psi_n(\xi))_{n \geq 0}$  de funções mensuráveis à Lebesgue  $\psi_n(\psi) = \psi(\mathcal{P}_n \xi)$  em  $(\mathbb{R} \times S)^n$  para  $n \geq 1$  e  $\psi_0(\psi) = \psi(\mathcal{P}_0 \xi) \in \mathbb{C}$ . Definimos a operação produto  $\bullet : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  para quaisquer duas seqüências  $\psi_1, \psi_2$

<sup>4</sup>Para a conveniência do leitor, incluímos no apêndice C, a demonstração na forma em que foi proposta originalmente no artigo de Brydges e Kennedy[12].

como a seqüência

$$\psi_1 \bullet \psi_2 = \psi = (\psi_n(\xi))_n,$$

cujas componentes são dadas por

$$\psi_n(\xi) = \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} \psi_1(\mathcal{P}_I \xi) \psi_2(\mathcal{P}_{\mathbb{C}I} \xi),$$

onde  $\mathbb{C}I = \{1, \dots, n\} \setminus I$ . O espaço vetorial  $\mathfrak{A}$  munido da operação  $\bullet$  forma uma álgebra comutativa com elemento identidade dado  $\mathbf{1} = (\delta_n(\xi))_{n \geq 0}$  dado por

$$\delta(\mathcal{P}_I \xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } I = \emptyset \\ 0 & \text{se } I \neq \emptyset \end{cases}.$$

Sejam  $\mathfrak{A}_0$  e  $\mathfrak{A}_1$  o subespaço e o subespaço afim das seqüências  $\psi = (\psi_n(\xi))_{n \geq 0}$  tais que  $\psi_0(\xi) = 0$  e  $\psi_1(\xi) = 0$ , respectivamente. Definimos então a exponencial algébrica das seqüências  $\varphi = (\varphi_n(\xi))_{n \geq 0}$ ,

$$\text{Exp} : \mathfrak{A}_0 \rightarrow \mathfrak{A}_1,$$

a partir da série formal

$$\text{Exp}(\varphi) = \mathbf{1} + \varphi + \frac{1}{2} \varphi \bullet \varphi + \dots + \frac{1}{n!} \underbrace{\varphi \bullet \dots \bullet \varphi}_{n-1 \text{ produtos}} + \dots$$

e analogamente, definimos o logaritmo algébrico das seqüências  $\varphi$

$$\mathcal{L}n : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_0$$

como

$$\mathcal{L}n(\mathbf{1} + \varphi) = \varphi - \frac{1}{2} \varphi \bullet \varphi + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \underbrace{\varphi \bullet \dots \bullet \varphi}_{n-1 \text{ produtos}} + \dots$$

para  $\varphi \in \mathfrak{A}_0$ .

Assim, temos para quaisquer  $\psi, \varphi \in \mathfrak{A}_0$ ,

$$\mathcal{L}n(\text{Exp}(\psi)) = \psi \quad \text{e} \quad \text{Exp}(\mathcal{L}n(\mathbf{1} + \varphi)) = \mathbf{1} + \varphi$$

o que as caracteriza como sendo funções inversas algébricas, uma da outra.

Em vista dessas propriedades temos a seguinte proposição

**PROPOSIÇÃO 4.1.1.**

A seqüência  $\psi = (\psi_n)_{n \geq 0}$  formada por  $\psi_0 = \psi_1(\xi) = 1$  e, no caso em que  $n \geq 2$ , pelos fatores de Boltzmann (4.0.10), é a exponencial algébrica da seqüência  $\psi^c = (\psi_n^c)_{n \geq 0}$  formada pelas funções de Ursell dadas por (4.1.5) com  $\psi_0^c = 0$  e  $\psi_1^c(\xi) = 1$ , ou seja,

$$(4.1.6) \quad \psi = \mathcal{E}xp(\psi^c).$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja o produto interno dado por  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$(4.1.7) \quad \langle \psi, \varphi \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int \rho(d\mathcal{P}_n \xi) \psi_n(\xi) \varphi_n(\xi)$$

e seja  $\chi = (\chi_n(\xi))_{n \geq 0}$  a seqüência em  $\mathfrak{A}$  tal que

$$\chi_n(\xi) = \prod_{j=1}^n \chi_\Lambda(\xi_j)$$

onde  $\chi_\Lambda(\xi)$  exprime a função característica do conjunto  $\Lambda$ ;

$$\chi_\Lambda(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \in \Lambda \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Lambda \end{cases}.$$

Podemos observar que<sup>5</sup>

$$\langle \chi, \psi \bullet \varphi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle \langle \chi, \varphi \rangle.$$

A partir dessa igualdade; das expressões (4.1.6) e (4.1.7); e da grande função de partição (4.0.9), temos que

$$\begin{aligned} \Xi_\Lambda(\beta, z) &= \langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \mathcal{E}xp(\psi^c) \rangle \\ &= e^{\langle \chi, \psi^c \rangle}. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>O mapa  $\psi \mapsto \langle \chi, \psi \rangle = \langle \chi, \psi \rangle(z)$  define um homeomorfismo de  $\mathfrak{A}$  na álgebra das séries formais de potências.

Em vista das expressões (4.1.3)-(4.1.5), a igualdade acima permite verificar a proposição.

■

Sabemos que a estabilidade do potencial garante a analiticidade da série para pressão  $p_\Lambda(\beta, z)$  em uma vizinhança de  $z = 0$  para qualquer volume finito  $|\Lambda| < \infty$ . Ao estudar o comportamento de série para a pressão (4.1.3) no limite termodinâmico, devemos tratar de duas questões, uma relaciona-se ao comportamento dos coeficientes da série  $b_{\Lambda, n}$  no limite  $|\Lambda| \uparrow \infty$ , ou seja devemos garantir a existência para todo  $n$  do limite

$$(4.1.8) \quad b_n \doteq \lim_{|\Lambda| \uparrow \infty} b_{\Lambda, n}.$$

A outra questão é o comportamento da série dada pelos coeficientes  $b_n$

$$(4.1.9) \quad \beta p(\beta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

Essas questões relacionam-se ao fato de que no domínio de analiticidade da pressão (no limite termodinâmico), podemos realizar a troca dos limites

$$\beta p(\beta, z) \doteq \lim_{|\Lambda| \uparrow \infty} \beta p_\Lambda(\beta, z) = \lim_{|\Lambda| \uparrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{\Lambda, n}}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lim_{|\Lambda| \uparrow \infty} b_{\Lambda, n})}{n!} z^n$$

que define (4.1.8). Portanto, na região de analiticidade da pressão, as expressões dadas por (4.1.8) e (4.1.9) devem existir e ser finitas.

A primeira questão, como podemos notar pela definição de  $b_{\Lambda, n}$  (4.1.4), pode ser garantida pela integrabilidade do potencial, nesse sentido a integrabilidade exigida em (4.0.13) é uma condição suficiente mas não necessária para assegurar a existência dos coeficientes  $b_n$ . Como aponta o artigo de Procacci *et alii* [54], apesar de não ser integrável, o potencial dipolar gera coeficientes  $b_n$  finitos (apesar de não garantir a convergência da série (4.1.9)) para qualquer valor da temperatura  $\beta^{-1}$ . O seu resultado utiliza os grafos de Mayer diretamente e argumentos de simetria do potencial. Utilizando um abordagem distinta, iremos concluir na seção 4.4 que, para determinados intervalos da temperatura, os coeficientes de  $b_n$  dados pelo potencial de Yukawa existem e a série (4.1.9) está bem

definida, concluiremos ainda que nos intervalos em que alguns dos termos  $b_n$  divergem, a série continua bem definida desde que os termos divergentes sejam removidos.

A questão da convergência da série (4.1.9) é mais delicada e envolve um problema do tipo balanço entre energia e entropia. Ao estimar os coeficientes  $b_{\Lambda,n}$  é difícil encontrar uma boa estimativa das integrais que envolvem o potencial  $e$ , ao mesmo tempo, controlar a entropia gerada pela proliferação de grafos de Mayer. A seguinte proposição, enunciada sem a sua prova<sup>6</sup>, ajuda a ilustrar essa dificuldade.

**PROPOSIÇÃO 4.1.2.**

*Se o potencial satisfaz as hipóteses (4.0.11)-(4.0.14), então para cada grafo de Mayer conexo de  $n$  vértices  $g \in \mathcal{M}^c(n)$  a parcela do coeficiente  $b_n$  dado por esse potencial e associada unicamente ao gráfico  $g$ , definida como  $b_n(g)$ , existe e é limitada superiormente pela estimativa*

$$|b_n(g)| < C^{l(g)},$$

onde  $C > 0$  é uma constante finita e  $l(g)$  é o número de arestas de um grafo  $g$  de  $n$  vértices;  $(n-1) \leq l(n) \leq \binom{n}{2}$ .

Para obter uma estimativa superior para  $b_n$ , resta ainda somar sobre o número de grafos com  $n$  vértices. Apesar de não dispormos<sup>7</sup> de uma expressão exata para  $d_n \doteq |\mathcal{M}^c(n)|$ , é razoável supor que o seu valor não é apreciavelmente inferior à cardinalidade de todos os grafos de Mayer (incluindo os desconexos) com  $n$  vértices cuja expressão exata é dada por

$$|\mathcal{M}(n)| = 2^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Dessa forma, estimamos superiormente a cardinalidade do conjunto de grafos de Mayer conexos com  $n$  vértices e  $l$  arestas pela cardinalidade dos grafos de Mayer, incluindo os desconexos, com  $n$  vértices e  $l$  arestas,  $\binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{l}$ , o que em vista da proposição 4.1.2,

<sup>6</sup>A prova dessa proposição, bem como de outros resultados sobre a convergência da série de Mayer, como a expansão em árvores, estão expostos de maneira didática no artigo de Neves[50].

<sup>7</sup>A cardinalidade do conjunto dos gráficos conexos com  $n \geq 1$  vértices enumeráveis satisfaz a relação de recorrência [64, seção 3.10]

$$n 2^{\binom{n}{2}} = \sum_m \binom{n}{m} m d_m 2^{\binom{n-m}{2}}.$$

implica

$$|b_n| \leq \sum_{l=n-1}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{l} C^l \lesssim \sum_{l=0}^{\frac{1}{2}n(n-1)} \binom{\frac{1}{2}n(n-1)}{l} C^l = (1+C)^{\frac{1}{2}n(n-1)}.$$

Lembrando que  $n! \sim e^{n \ln n}$ , o comportamento da estimativa para os coeficientes não permite garantir a convergência da série (4.1.9). Portanto qualquer tentativa de garantir a analiticidade da série deve levar em conta uma reorganização dos grafos ou cancelamentos oriundos da função de Ursell, antes de tomar estimativas em valor absoluto.

A primeira demonstração da convergência da série foi obtida por Groeneveld [34] para o caso de um potencial radialmente simétrico e estritamente repulsivo utilizando as equações integrais de Kirkwood-Salsburg (equações integrais para as funções de correlação de  $n$  pontos). Ruelle, Penrose e Lebowitz [57, 52, 41], ainda trabalhando com as equações de Kirkwood-Salsburg e com as equações de Mayer-Montroll, melhoram as estimativas e diminuíram as restrições sobre o potencial de interação. Posteriormente, Penrose [53] mostrou que quando as interações são puramente repulsivas, a soma de todos os grafos conexos com  $n$  vértices é dominada pela soma sobre grafos do tipo árvore com o mesmo número de vértices. Esse resultado garante a convergência da série, pois, de acordo com o teorema de Cayley, o número de grafos do tipo árvore com  $n$  vértices é exatamente  $n^{n-2}$ .

Motivados por uma análise de grupo de renormalização introduzida por Göpfert e Mack [33], onde a utilização das fórmulas para grafos do tipo árvore em conjunto com decomposição do potencial em escalas permite estabelecer a convergência da série de Mayer para a pressão no gás de Yukawa; Brydges e Kennedy propõe em dois artigos [11] e [12], a decomposição do potencial em escalas através de um parâmetro contínuo, e. g.,

$$v(\xi_i, \xi_j) \doteq \int_{\alpha}^{\omega} d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} v(\tau, \xi_i, \xi_j).$$

Assim, o potencial na escala  $\tau$ ,  $v(\tau, \xi_i, \xi_j)$ ,  $\tau \in (\alpha, \omega)$ , varia entre a situação onde as partículas estão completamente desacopladas – gás ideal –  $v(\alpha, \xi_i, \xi_j) = 0$  até o potencial original no extremo do intervalo dos valores de  $t$ ,  $v(\omega, \xi_i, \xi_j) = v(\xi_i, \xi_j)$ . Através da introdução dessa decomposição em escalas é possível derivar uma equação diferencial para



o fluxo das funções de Ursell (4.1.5) em termos do parâmetro de escala  $\tau$ . Esse formalismo permite, em particular, o tratamento da escala como o inverso da temperatura  $\beta$ , nesse caso o domínio seria dado por  $(0, \beta)$ . Para tanto basta considerar  $v(\tau, \xi_i, \xi_j) \equiv v(\xi_i, \xi_j)$  e desta forma  $\beta v(\xi_i, \xi_j) = \int_0^\beta d\tau v(\tau, \xi_i, \xi_j)$ .

Partimos desse mesmo formalismo ao desenvolver uma equação cuja solução, que pode ser obtida de maneira exata, é um limite superior para a pressão de um gás estritamente repulsivo. A equação que obtemos e sua solução incorporam automaticamente as estimativas combinatórias para grafos que permite estabelecer a existência de uma região de analiticidade para a pressão. Através de mudanças de escala, veremos que é possível estender esse resultado para potenciais cujas decomposições em escalas satisfaçam as hipóteses (4.0.11)-(4.0.14). Isto nos permitirá estudar com maior detalhe a analiticidade da pressão no gás de Yukawa.

Vamos então considerar a função  $u(t, \xi)$ ,

$$u(t, \xi) = e^{-\beta \sum_{j < k} v(t, \xi_j, \xi_k) + i\sqrt{\beta} \sum_j \zeta(\xi_j)}.$$

A partir da qual, definimos a forma complexa do fator de Boltzmann  $u_n(t, \xi)$ ,

$$(4.1.10) \quad u_n(t, \xi) \doteq u(t, \mathcal{P}_n \xi) = e^{-\beta \sum_{1 \leq j < k \leq n} v(t, \xi_j, \xi_k) + i\sqrt{\beta} \sum_{j=1}^n \zeta(\xi_j)}$$

para  $n \geq 2$ .

podemos notar que  $u_n(t, \xi)$  pode ser descrito como o resultado de um produto de convolução:

$$(4.1.11) \quad u_n(t, \xi) = \psi_n(\xi) e^{i\sqrt{\beta}(\zeta, \eta_n)} = \gamma_{\beta v(t)} * : e^{i\sqrt{\beta}(\zeta, \eta_n)} :_{\beta v(t)},$$

onde  $\psi_n$  é o fator de Boltzmann (4.0.10) e  $\eta_n$  a função indicadora (4.0.17). A partir dos fatores de Boltzmann (4.1.10),  $u_n$ , com  $n \geq 2$  e das funções  $u_0(t) = 1$ ,  $u_1(t, \xi) = e^{i\sqrt{\beta}\zeta(\xi)}$ , construímos a seqüência  $\mathbf{u}(t) = (u_n(t, \xi))_{n \geq 0}$ . Em seguida, definimos a decomposição do potencial  $v(t, \xi_i, \xi_j)$  de maneira que em  $t = 0$ , temos  $v(0, \xi_i, \xi_j) = 0$  (ausência de interação) e  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = \left( e^{i\sqrt{\beta} \sum_{j=1}^n \zeta(\xi_j)} \right)_{n \geq 0}$  é a seqüência com componentes  $u_n(0, \xi) = e^{i\sqrt{\beta}(\zeta, \eta_n)}$  quando  $n \geq 1$  e  $u_0(0) = 1$ . Como (4.1.11) é dado pelo produto de convolução de uma

função com uma medida gaussiana, a seqüência corresponde à solução de uma equação do calor (fórmula de Wick). A seguinte proposição trata dessa propriedade da seqüência  $\mathbf{u}(t)$ .

**PROPOSIÇÃO 4.1.3.**

A seqüência  $\mathbf{u}(t) = (u_n(t, \xi))_{n \geq 0}$  é a solução formal da seguinte equação do calor

$$(4.1.12) \quad \mathbf{u}_t = \frac{1}{2} \Delta_{v(t)} \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0,$$

onde o operador diferencial  $\Delta_A$  age sobre cada componente de  $\mathbf{u}$  segundo a expressão<sup>8</sup>

$$(4.1.13) \quad \Delta_A u_n \doteq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq n \\ i \neq j}} A(\xi_i, \xi_j) \frac{\partial^2}{\partial \zeta(\xi_i) \partial \zeta(\xi_j)} u_n.$$

Como o potencial  $v(t)$  é do tipo positivo (transformada de Fourier positiva  $\widehat{v} = \mathcal{F}(v) \geq 0$ ) e, segundo os teoremas de convolução para transformadas de Fourier, pode ser escrito como  $v = \sqrt{v} * \sqrt{v} \doteq \mathcal{F}^{-1}(\sqrt{\widehat{v}} \sqrt{\widehat{v}})$ , temos que o operador diferencial  $\Delta_v$  pode ser descrito através da ação conjunta do operador diferencial  $D_{\sqrt{v}}$  e seu adjunto através da expressão  $\Delta_v = D_{\sqrt{v}}^* D_{\sqrt{v}}$ .

Como as seqüências  $\mathbf{u}(t)$  são também elementos da álgebra  $\mathfrak{A}$ , podemos definir as seqüências de funções de Ursell complexas  $\phi(t) = (\phi_n(t, \xi))_{n \geq 0}$  a partir da expressão

$$\phi(t) = \mathcal{L}n(\mathbf{u}(t)).$$

A partir da equação diferencial do calor (4.1.12) e da função logaritmo algébrico, somos capazes de desenvolver a equação diferencial para as seqüências de funções de Ursell complexas  $\phi(t)$  e, dessa forma, obtemos as equações para as próprias funções de Ursell

<sup>8</sup>As derivadas na expressão (4.1.13) são derivadas parciais com respeito à variável  $\zeta$  no ponto  $\xi$ . Note que essa definição permite que  $\xi$  tome valores em um intervalo contínuo.

$\psi_n^c(t, \xi)$  no caso  $\zeta = 0$ . Temos então,

$$\begin{aligned}\phi_t &= \frac{1}{u} \bullet u_t \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{E} \exp(-\phi) \bullet \left( \Delta_{\dot{v}(t)} \mathcal{E} \exp(\phi) \right) \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{\dot{v}(t)} \phi + \frac{1}{2} D_{\sqrt{\dot{v}(t)}}^* \phi \bullet D_{\sqrt{\dot{v}(t)}} \phi.\end{aligned}$$

Assim, a equação anterior implica a equação diferencial parcial

$$(4.1.14) \quad \frac{\partial}{\partial t} \psi_n^c(t, \xi) = -K_n(t, \xi) \psi_n^c(t, \xi) - \frac{1}{2} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} K(t, \mathcal{P}_I \xi, \mathcal{P}_{\mathbb{C}I} \xi) \psi^c(t, \mathcal{P}_I \xi) \psi^c(t, \mathcal{P}_{\mathbb{C}I} \xi)$$

onde

$$K_n(t, \xi) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \beta \dot{v}(t, \xi_i, \xi_j)$$

e

$$K(t, \mathcal{P}_I \xi, \mathcal{P}_J \xi) = \sum_{i \in I, j \in J} \beta \dot{v}(t, \xi_i, \xi_j).$$

A condição inicial  $\psi_0^c = (\psi_{0,n}^c(\xi))_{n \geq 0}$  é dada por

$$\psi_{0,n}^c(\mathcal{P}_I \xi) = \begin{cases} 1 & \text{se } |I| = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Através da fórmula da variação das constantes, podemos reescrever a equação diferencial (4.1.14) como a seguinte equação integral :

$$(4.1.15) \quad \psi_n^c(t, \xi) = -\frac{1}{2} \int_0^t ds e^{-\int_s^t d\tau K_n(\tau, \xi)} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} K(s, \mathcal{P}_I \xi, \mathcal{P}_{\mathbb{C}I} \xi) \psi^c(s, \mathcal{P}_I \xi) \psi^c(s, \mathcal{P}_{\mathbb{C}I} \xi),$$

para  $n > 1$  com  $\psi_0^c(t, \xi) = 0$  e  $\psi_1^c(t, \xi) = 1$  para todo  $t \geq 0$ .

Se for possível provar a convergência uniforme para a série da pressão (4.1.3), então podemos trocar a os limites  $\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{R}^d}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty}$  resultando na série para pressão no limite

termodinâmico  $p(\beta z)$

$$(4.1.16) \quad \beta p(\beta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n z^n}{n!}.$$

Se essa série possuir um raio de convergência  $|z| < R$ , então podemos concluir que para atividades menores que  $R$  a série (4.1.16) descreve o comportamento da pressão de maneira apropriada. No valor  $z = R$  a série diverge, no entanto essa divergência pode ou não estar relacionada a uma transição de fase que só existe quando a singularidade envolver a parte real positiva de  $z$  (domínio de valores de  $z$  com sentido físico). Nada impede que a divergência ocorra devido a uma singularidade fora do eixo real positivo de  $z$ . Um caso clássico conhecido é o gás de Tonks<sup>9</sup> [63]. Esse gás é um modelo exatamente solúvel no qual a pressão e atividade estão relacionadas pela expressão

$$(4.1.17) \quad \beta p = \frac{W(az)}{a},$$

onde  $a$  é um parâmetro real positivo do modelo e  $W$  é a função  $W$  de Lambert, definida implicitamente como  $x = W(x)e^{W(x)}$ . A função  $W$  de Lambert<sup>10</sup> possui um ponto de ramificação em  $x = -e^{-1}$ . Essa singularidade implica a divergência da série para pressão do gás de Tonks no valor da atividade  $z = (ae)^{-1}$ , porém como a singularidade está na região de valores negativos de  $z$ , apesar da divergência da série, a pressão descrita por (4.1.17) não possui nenhuma singularidade no eixo real positivo sendo analítica na vizinhança de  $z$  positiva. Em síntese, a convergência da série garante a analiticidade da pressão mas, no entanto, a sua divergência não é garantia da existência de uma transição de fase.

#### 4.2. Equações diferenciais para majorantes da pressão

A descrição dos coeficientes obtida a partir da equação integral (4.1.15) é mais apropriada ao desenvolvimento de estimativas indutivas para a pressão. Como veremos adiante,

<sup>9</sup>O gás formado por esferas em uma dimensão cuja interação é do tipo núcleo duro. Formalmente, o potencial  $\phi(r)$  é nulo para todo  $r > a$  e  $\phi(r) = \infty$  se  $r \leq a$ . Também existe solução exata no caso em que a dimensão é infinita[23, 24, 25].

<sup>10</sup>A referência [19] apresenta um estudo extenso das propriedades da função  $W$  de Lambert.

é possível estabelecer relações de recorrência para normas do coeficiente e através delas limitar superiormente a pressão. O limite superior para a série da pressão garante a região de analiticidade da pressão em termos do inverso da temperatura  $\beta$ , da atividade e demais propriedades do gás. Em geral o raio de convergência decresce com  $\beta$  e não é possível encontrar um raio mínimo não nulo para o qual a série é analítica para qualquer valor da temperatura. Esses resultados já são conhecidos na literatura, no entanto a sua prova, mesmo após a descrição dos coeficientes na forma da equação integral (4.1.15), não prescinde de uma análise combinatória relacionada às funções de Ursell. Nós propomos uma maneira mais simples de se alcançar esses resultados seguindo o caminho indicado por Brydges e Kennedy em [12]. Nesse trabalho os autores propõe o uso da equação integral (4.1.15) no desenvolvimento de uma equação a derivadas parciais cuja solução é um majorante para a série do logaritmo da função de partição. No entanto não chegaram a desenvolver essa idéia em todo o seu potencial, em particular, a busca de uma expressão exata para os majorantes. Veremos adiante que a união dessa idéias às técnicas para a solução de equações a derivadas parciais permite estabelecer as estimativas para a convergência da série de Mayer sem a necessidade de resultados combinatórios. Permite também uma melhor compreensão da natureza da divergência presente nas séries dos majorantes que é semelhante à divergência presente na série de Mayer para o gás de Tonks.

Nosso objetivo é encontrar uma função  $\Phi_\Lambda(\beta, z)$  que seja uma majorante da pressão (4.1.3),  $\Phi_\Lambda(\beta, z) \geq p_\Lambda(\beta, z)$ . Partindo da expressão para os coeficientes da série (4.1.3), vamos considerar a seguinte norma para as funções de Ursell,

$$(4.2.1) \quad \|\psi_I^c(t)\| \equiv c_{\Lambda,n}(t) \doteq \sup_{\xi_1} \int_{\Lambda} \prod_{\substack{j \in I \\ j \neq 1}} \rho(d\xi_j) |\psi^c(t, \xi)|.$$

A partir dos coeficientes  $c_n(t)$ , definimos a função  $\varphi_\Lambda(\beta, z)$  na forma da série

$$(4.2.2) \quad \varphi_\Lambda(\beta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{\Lambda,n} z^n}{n!}.$$

Os coeficientes  $c_{\Lambda,n}(t)$  são positivos portanto a série (4.2.2) é sempre maior ou igual a pressão. No entanto, calcular o valor dos termos  $c_{\Lambda,n}(t)$  pode ser tão complexo quanto

resolver a própria equação (4.1.14). A estratégia é utilizar não a equação diferencial mas sim a equação integral (4.1.15) e, a partir dela, desenvolver uma relação de recorrência para o limite superior de cada coeficiente  $c_{\Lambda,n}(t)$ , dado por  $g_n(t)$  tal que

$$\frac{c_{\Lambda,n}(t)}{n!} \leq g_n(t)$$

uniformemente em  $\Lambda$ . O majorante  $\Phi(\beta, z)$  é então descrito pela série formada por esses coeficientes,

$$(4.2.3) \quad \Phi(\beta, z) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n z^n$$

e assim, por construção,

$$\beta p_{\Lambda,n}(\beta, z) \leq \varphi_{\Lambda}(\beta, z) \leq \Phi_{\Lambda}(\beta, z).$$

As estimativas para os coeficientes  $g_n(t)$  são obtidas através da equação integral (4.1.15). A partir dessas estimativas e levando em conta que  $\Phi$  é representado por uma série, será possível descrever o majorante como a solução de uma equação integral. Por sua vez, a equação integral obtida pode ser facilmente transformada em uma EDP quase-linear de primeira ordem.

Vamos considerar um potencial  $v(\xi_i, \xi_j)$  que pode ser decomposto em escalas segundo a expressão

$$(4.2.4) \quad v(t, \xi_i, \xi_j) \doteq \int_0^t d\tau \dot{v}(\tau, \xi_i, \xi_j)$$

e de maneira que o potencial na escala  $\tau$ ,  $\dot{v}(\tau, \xi_i, \xi_j)$  satisfaça as condições (4.0.11)-(4.0.14).

No restante desse capítulo, utilizaremos a seguinte notação:

$$(4.2.5) \quad \mathcal{H}(t) \doteq \beta \|\dot{v}(t)\| \quad \text{e} \quad \nu(s, t) \doteq \int_s^t d\tau B(\tau).$$

Desta forma, a partir da equação integral para as funções de Ursell<sup>11</sup> (4.1.15), temos, em valor absoluto, a seguinte desigualdade,

$$|\psi_I^c(t)| \leq \frac{1}{2} \sum_{J \subset I} \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} |\psi_J^c(s)| |\psi_{\complement J}^c(s)| \sum_{j \in J, i \in \complement J} \beta |\dot{v}(s, \xi_i, \xi_j)|,$$

onde  $\complement J = I \setminus J$ . A partir dessa estimativa para as funções de Ursell e da expressão para os coeficientes da série  $\varphi_{\Lambda, n}(t)$  (4.2.3), temos que

$$\begin{aligned} c_{\Lambda, n}(t) &\leq \sup_{\xi_j} \int_{\Omega^{|\Lambda|}} \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \rho(d\xi_i) |\psi_I^c(t)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{\xi_j} \int_{\Omega^{|\Lambda|}} \prod_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \rho(d\xi_i) \left( \sum_{J \subset I} \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} |\psi_J^c(s)| |\psi_{\complement J}^c(s)| \sum_{j \in J, i \in \complement J} \beta |\dot{v}(s, \xi_i, \xi_j)| \right). \end{aligned}$$

A cada par de subconjuntos  $J$  e  $\complement J$  o índice  $j$  associado à variável  $\xi_j$ , responsável pela maximização do lado direito da desigualdade anterior, pode estar tanto no subconjunto  $J$  quanto no subconjunto  $\complement J$ . Por simplicidade vamos imaginar que ele esteja no subconjunto  $\complement J$ . Note que a cada par de subconjuntos podemos escolher um índice  $k : \complement J \ni k \neq j$  e realizar a integração sobre as demais variáveis com índices em  $J$ .

Portanto para cada  $J$  e  $\complement J$ , teremos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \sup_{\xi_j} \int_{\Omega^{|\Lambda|}} \prod_{\substack{k \in \complement J \\ k \neq j}} \rho(d\xi_k) \prod_{l \in J} \rho(d\xi_l) \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} |\psi_J^c(s)| |\psi_{\complement J}^c(s)| \sum_{l \in J, k \in \complement J} \beta |\dot{v}(s, \xi_k, \xi_l)| \\ &\leq \frac{1}{2} |J| \sup_{\xi_j} \int_{\Omega^{|\complement J|}} \prod_{\substack{k \in \complement J \\ k \neq j}} \rho(d\xi_k) \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} c_{\Lambda, |J|}(s) |\psi_{\complement J}^c(s)| \sum_{k \in \complement J} \mathcal{H}(s) \\ &\leq \frac{1}{2} |J| |\complement J| \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} c_{\Lambda, |J|}(s) c_{\Lambda, |\complement J|}(\tau s) \mathcal{H}(s) \end{aligned}$$

**OBSERVAÇÃO 4.2.1.** Na passagem da primeira para a segunda linha na expressão acima, utilizamos o fato do potencial ser somável. Isto nos possibilita limitar superiormente a sua integral em volume finito pela norma  $L^1$ . Essa passagem equivale a tomar o limite

<sup>11</sup>Com o objetivo de não carregar a notação, na ausência de ambigüidades, omitimos no argumento das funções de Ursell, a dependência da mesma nas variáveis que caracterizam o estado do conjunto de partículas. Assim, quando indicamos  $\psi_I^c(t)$ , nos referimos à função de Ursell  $\psi_I^c(t, \mathcal{P}_I \xi)$ .

termodinâmico e uma vez que a equação para os coeficientes não mais depende do volume  $|\Lambda|$ , a desigualdade presente na última linha da expressão acima é também válida para os coeficientes  $c_n(t)$ . Portanto, a partir deste ponto, trabalharemos apenas com os coeficientes do sistema no limite termodinâmico,  $c_n(t)$  e  $g_n(t)$ .

*OBSERVAÇÃO 4.2.2.* Se o índice  $i$  estiver no subconjunto  $J$ , por um desenvolvimento análogo, teremos o mesmo resultado.

Assim, as desigualdades acima garantem que os coeficientes  $c_n(t)$  satisfazem a desigualdade

$$c_n(t) \leq \frac{1}{2} \sum_{J \subset I} \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} |J| |\complement J| c_{|J|}(s) c_{|\complement J|}(s) \mathcal{H}(s)$$

Os coeficientes  $c_n(t)$  não dependem das variáveis  $\xi_i$  mas apenas da cardinalidade  $n = |I|$  do conjunto de índices, portanto a soma sobre os subconjuntos resultará em um termo binomial  $\binom{|I|}{|J|}$  e assim

$$(4.2.6) \quad c_n(t) \leq \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} m(n-m) c_m(s) c_{n-m}(s) \mathcal{H}(s),$$

e no caso em que  $|I| = 1$ , por definição temos  $c_1(t) = 1$ . A partir dessa desigualdade formulamos a equação de recorrência para os coeficientes  $g_n(t) = c_n(t)/n!$  do majorante  $\Phi(t, z)$ ,

$$(4.2.7) \quad g_n(t) = \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} \sum_{m=1}^{n-1} m(n-m) g_m(s) g_{n-m}(s) \mathcal{H}(s).$$

O próximo passo envolve a substituição da equação (4.2.7) na série (4.2.3) que após a reorganização dos termos trará como resultado uma equação integral para  $\Phi(t, z)$ .

Partimos inicialmente da expressão dada pela substituição de (4.2.7) na série para  $\Phi(t, z)$ ,

$$\begin{aligned} \Phi(t, z) &= z + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} z^n \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} \sum_{m=1}^{n-1} \binom{n}{m} m(n-m) g_m(s) g_{n-m}(s) \mathcal{H}(s) \\ &= z + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^t ds e^{n\nu(s,t)} \sum_{m=1}^{n-1} m g_m(s) z^m (n-m) g_{n-m}(s) z^{n-m} \mathcal{H}(s). \end{aligned}$$



Após o rearranjo dos termos e índices, a soma dupla anterior pode ser descrita na seguinte forma,

$$\begin{aligned}
 \Phi(t, z) &= z + \frac{1}{2} \int_0^t ds \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} m g_m(s) z^m e^{m\nu(s,t)} p g_p(s) z^p e^{p\nu(s,t)} \mathcal{H}(s) \\
 (4.2.8) \quad &= z + \frac{1}{2} \int_0^t ds \mathcal{H}(s) \left( \sum_{p=1}^{\infty} p g_p(s) z^p e^{p\nu(s,t)} \right)^2
 \end{aligned}$$

Lembrando que, segundo a definição de  $\Phi(t, z)$ , a sua derivada parcial na atividade,  $\frac{\partial}{\partial z} \Phi(t, z)$ , é dada pela série

$$(4.2.9) \quad \frac{\partial}{\partial z} \Phi(t, z) = \sum_{n=1}^{\infty} n g_n(t) z^{n-1},$$

podemos, a partir de (4.2.8), representar o majorante  $\Phi(t, z)$  como a solução da seguinte equação integro-diferencial,

$$(4.2.10) \quad \Phi(t, z) = z + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \mathcal{H}(s) \left( (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \right)^2.$$

É mais conveniente estudar não a equação integro-diferencial mas sim a equação diferencial que resulta do seu desenvolvimento. Vamos então realizar a derivação de (4.2.10) com respeito a  $t$ ,

$$(4.2.11) \quad \Phi_t = \frac{1}{2} \mathcal{H}(t) (z\Phi_z)^2 + \int_0^t ds \mathcal{H}(s) (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \frac{\partial}{\partial t} \left( (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \right).$$

Agora, utilizando a expressão (4.2.9) no termo  $\left( (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \right)_t$  acima, e de acordo com a definição de  $\nu(s, t)$ , temos que

$$\begin{aligned}
 \left( (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \right)_t &= \sum_{n=1}^{\infty} n^2 B(t) g_n(s) (ze^{\nu(s,t)})^n \\
 &= B(t) z \left( (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \right)_z
 \end{aligned}$$

que substituído na equação (4.2.11), resulta em

$$(4.2.12) \quad \Phi_t = \frac{1}{2} \mathcal{H}(t) (z\Phi_z)^2 + B(t) \int_0^t ds \mathcal{H}(s) (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) z \left( (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \right)_z.$$

Por outro lado, a partir da equação (4.2.10), temos que

$$(4.2.13) \quad z\Phi_z = z + \int_0^t ds \mathcal{H}(s) (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) z \left( (z\Phi_z)(s, ze^{\nu(s,t)}) \right)_z.$$

Identificando as integrais em (4.2.12) e (4.2.13) chegamos finalmente a equação integral para o majorante:

$$(4.2.14) \quad \Phi_t = \frac{1}{2} \mathcal{H}(t) (z\Phi_z)^2 + B(t) (z\Phi_z - z)$$

com condição inicial  $\Phi(0, z) = z$ .

O comportamento da solução da equação diferencial (4.2.14) pode ser estudado através do método das características, no entanto, a sua derivada na atividade  $\Theta(t, z) = \frac{\partial}{\partial z} \Phi(t, z)$  apresenta melhores propriedades sob o ponto de vista da análise da equação.

Lembrando que a densidade a volume finito,  $\rho_\Lambda$ , pode ser representada como<sup>12</sup>

$$\rho_\Lambda(\beta, z) = z \frac{\partial p_\Lambda}{\partial z}(\beta, z),$$

temos que a densidade é majorada pela função  $\Theta(t, z)$ :

$$\rho_\Lambda(\beta, z) \leq z\Theta(\beta, z).$$

E de acordo com a sua definição e com a equação (4.2.14), a função  $\Theta$  satisfaz a seguinte equação quase-linear de primeira ordem

$$(4.2.15) \quad \Theta_t = \mathcal{H}(t) (z\Theta^2 + z^2\Theta\Theta_z) + B(t) (z\Theta_z + \Theta - 1)$$

com condição inicial  $\Theta(0, z) \equiv 1$ .

<sup>12</sup>e portanto a sua descrição através das séries de Mayer apresenta o mesmo raio de convergência da série para a pressão.

Em vista das definições, procuramos por soluções da equação (4.2.15) da forma

$$(4.2.16) \quad \Theta(t, z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} C_n(t) z^{n-1}$$

com  $C_n(t) = nA_n(t) \geq 0$ .

### 4.3. Método das características

Nesta seção vamos analisar a convergência da série de Mayer sob o ponto de vista da equação (4.2.15). Procuramos um subconjunto do quadrante  $\{(t, z) : t, z \geq 0\}$  no qual a solução do problema de valor inicial (4.2.15) exista e seja único. Para tanto, vamos nos valer do método das características e considerar as funções  $U(t) \doteq \Theta(t, z(t))$  onde  $\Theta$  é a solução de (4.2.15) ao longo da curva  $z(t)$ . As funções  $U(t)$  e  $z(t)$  são conhecidas como *funções características* da equação a derivadas parciais. A função  $z(t)$  é também conhecida como característica projetada.

Dividimos a análise da equação (4.2.15) em dois casos principais segundo a estimativa de regularidade de potencial na escala  $t$ ,  $B(t)$ . Um deles é o caso em que o potencial é estritamente repulsivo,  $v(\xi_i, \xi_j) \geq 0$ , caracterizado por  $B(t) \equiv 0$ . Estudaremos esse caso primeiro. Na outra subseção faremos a análise do caso geral. Como veremos, a equação (4.2.15) possui certa arbitrariedade na definição de uma mudança de escala que permite relacionar as suas soluções às da equação para o potencial estritamente repulsivo.

**4.3.1. Potencial estritamente repulsivo.** Os potenciais estritamente repulsivos são caracterizados pela identidade  $B(t) \equiv 0$ . Nesse caso a equação (4.2.15) toma a forma

$$(4.3.1) \quad \Theta_t = \mathcal{H}(t) (z\Theta^2 + z^2\Theta\Theta_z)$$

com  $\Theta(0, z) = 1$ .

É conveniente realizar uma mudança de escala na variável  $t$  dada por

$$\tau = \int_0^t ds \mathcal{H}(s)$$

e

$$U(\tau) = \Theta(t(\tau), z(\tau)).$$

Nesse caso, a combinação da equação (4.3.1) com a derivada total de  $U(\tau)$  resulta no sistema de equações

$$(4.3.2) \quad \frac{d}{d\tau} U = z U^2$$

$$(4.3.3) \quad \frac{d}{d\tau} z = -z^2 U$$

Dessa forma, o conjunto das soluções  $U(\tau)$  definidas sobre as características projetadas  $z(\tau)$  constitui a solução da equação diferencial parcial.

As equações (4.3.3), (4.3.2) em conjunto com a regra da cadeia permitem encontrar uma equação mais simples para a função implícita  $U(z)$ ,

$$\frac{d}{dz} U = -\frac{U}{z}$$

e assim, uma vez que as condições iniciais da EDP implicam  $U(0, z(0)) = 1$  e  $z(0) = z_0$ , a relação implícita entre  $U$  e  $z$  é dada por

$$(4.3.4) \quad U(z) = z_0/z.$$

Como essa relação vale para qualquer  $\tau$ , vamos utilizá-la na equação (4.3.3), com o objetivo de encontrar uma expressão explícita para a característica projetada em função de  $\tau$ . Podemos notar então que a equação para a característica projetada é dada por

$$\frac{d}{d\tau} z = -z_0 z,$$

com condição inicial  $z(0) = z_0$ . Utilizando a notação  $z(\tau; z_0)$  para expressar a solução da equação anterior, temos que

$$(4.3.5) \quad z(\tau; z_0) = z_0 e^{-z_0 \tau}.$$

*OBSERVAÇÃO* 4.3.1. A expressão da característica projetada (4.3.5) permite notar que a solução da equação diferencial (4.2.15) apresenta não analiticidades relacionadas ao cruzamento de suas características. Dadas duas características distintas,  $z(\tau; z_1)$  e  $z(\tau; z_2)$ , podemos notar que, a partir da expressão (4.3.5), as curvas irão se cruzar no valor de  $\tau^*$  dado por

$$(4.3.6) \quad \tau^* = \frac{\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{(z_1 - z_2)}.$$

A partir de (4.3.4) e de (4.3.6), podemos observar que no ponto  $(\tau^*, z)$ , a característica  $U(z)$ , definida implicitamente a partir da projetada  $z(\tau; z_1)$ , toma o valor  $z_1/z$  enquanto que, no mesmo ponto, se escolhermos a projetada  $z(\tau; z_2)$ ,  $U(z)$  tomará o valor  $z_2/z$ . Como por hipótese  $z_1 \neq z_2$ , a solução da equação diferencial parcial no ponto  $(\tau, z)$  não está bem definida.

A solução  $\Theta(t, z)$  é dada por  $U(z) = z_0/z$ , com  $z_0$  dado em termos de  $z$  e  $\tau$ . A partir de (4.3.5), temos que

$$z_0 = -\frac{W(-z\tau)}{\tau},$$

onde  $W$  é a função  $W$  de Lambert. Assim; a solução de (4.3.1) é dada por

$$\Theta(t, z) = -\frac{W\left(-z \int_0^t ds \mathcal{H}(s)\right)}{z \int_0^t ds \mathcal{H}(s)}$$

definida sempre que

$$z e \int_0^t ds \mathcal{H}(s) < 1.$$

Conseqüentemente o majorante para a pressão é dado por

$$\Phi(t, z) = \int_0^z d\varsigma \Theta(t, \varsigma) = -\frac{2W\left(-z \int_0^t ds \mathcal{H}(s)\right) + W\left(-z \int_0^t ds \mathcal{H}(s)\right)^2}{2 \int_0^t ds \mathcal{H}(s)}.$$

Devido à função  $W$  de Lambert, o majorante possui um corte no plano complexo na região  $[1/(e \int_0^t ds \mathcal{H}(s)), \infty)$ . O efeito desse corte é a divergência da série majorante para pressão no valor da atividade, apesar de a função propriamente dita, ser finita nesse ponto.

Portanto, para o gás somável não negativo, através desse método, só podemos garantir a analiticidade da pressão para valores suficientemente pequenos da atividade  $z$ ,

$$(4.3.7) \quad z < \frac{1}{e \int_0^t ds \mathcal{H}(s)}.$$

A condição para convergência da série dada por (4.3.7) está de acordo com o teorema 2 de [12] no caso  $B(t) \equiv 0$ . A estimativa original de Ruelle [58, seção 4.5] equivale ao caso em que  $\int_0^t ds \mathcal{H}(s) = \beta \|\dot{v}\| \geq \|1 - e^{-\beta \dot{v}}\|$  e portanto a desigualdade (4.3.7) constitui uma pequena melhoria em relação à estimativa original de Ruelle.

*OBSERVAÇÃO 4.3.2.* Se  $v(t) = t\beta\phi$ , a estimativa do teorema 2 de [12] para potenciais estáveis ( $B(t) \neq 0$ ) pode ser melhorada. Na presente situação a condição de convergência (4.3.7) corresponde à condição

$$(4.3.8) \quad e\beta |z| e^{\beta B} \|\phi\| < 1$$

enquanto que a condição em [12] (veja também a condição (4.3.20) adiante) corresponde a

$$(4.3.9) \quad e\beta |z| e^{\beta B} \frac{\sinh \beta B}{\beta B} \|\phi\| < 1$$

(lembramos que  $\sinh x/x \geq 1$ ). A estimativa foi obtida originalmente por Brydges e Federbush [10, equação (11) da ref.].

**4.3.2. Potencial estável .** Apesar de não sermos capazes de obter uma solução explícita para a equação (4.2.14), podemos desenvolver uma solução que limita superiormente  $\Theta(t, z)$ . Essa solução,  $\bar{\Theta}(t, z)$ , cuja existência implica a convergência absoluta do majorante para a série de Mayer da densidade, satisfaz a equação (4.3.1) para um potencial estritamente repulsivo com  $\mathcal{H}(t)$  substituído por  $\mathcal{H}(t)/f(t)$ , onde  $f(t)$  é função escolhida apropriadamente. Como veremos, nesta subseção, a escolha que utilizaremos para  $f$  é tal que a função  $\bar{\Theta}(t, z)$  satisfaz uma equação para um potencial estritamente positivo. Nosso procedimento subtrai o “mistério” relacionado à liberdade na escolha de  $f$  que permite encontrar critérios distintos para a convergência da série.

Propomos a mudança de variáveis  $w = f(t)z$  e  $\Theta(t, z) = f(t)\Psi(t, f(t)z)$ , onde  $f$  é uma função tal que  $f(t) \geq 1$ ,  $f(0) = 1$ . Pela regra da cadeia, temos que

$$\Theta_t = f \left( \Psi_t + \frac{f'}{f} \Psi + \frac{f'}{f} w \Psi_w \right),$$

$$z\Theta_z = f w \Psi_w,$$

o que, em conjunto com a equação (4.2.14), traduz-se na expressão

$$\Psi_t - \left( B - \frac{f'}{f} + \mathcal{H} w \Psi \right) w \Psi_w = \left( B - \frac{f'}{f} \right) \Psi + \mathcal{H} w \Psi^2 - \frac{B}{f}.$$

Pela escolha

$$f(t) = e^{\int_0^t ds \mathcal{H}(s)}$$

temos que

$$\Psi_t - \mathcal{H} w^2 \Psi \Psi_w = \mathcal{H} w \Psi^2 - \frac{B}{f}$$

$$(4.3.10) \quad \leq \mathcal{H} w \Psi^2,$$

onde a desigualdade segue da positividade de  $f$  e de  $B$ . Notemos portanto, que  $\Psi$  satisfaz (4.3.1) como uma desigualdade.

Da mesma forma que na subseção anterior, vamos definir

$$\tau = \int_0^t ds \mathcal{H}(s)$$

e

$$(4.3.11) \quad U(\tau) = \Psi(t(\tau), w(\tau)).$$

Assim, utilizando a regra da cadeia e a desigualdade (4.3.10), temos que

$$\frac{d}{d\tau}U \leq wU^2,$$

$$\frac{d}{d\tau}w = -w^2U,$$

com condições iniciais  $U(0) = 1$  e  $w(0) = w_0$ . As equações acima podem então ser descritas na nova variáveis  $V(\tau) = wU(\tau)$  e em  $w$  como

$$\frac{d}{d\tau}V \leq 0$$

$$\frac{d}{d\tau}w = -V$$

com  $V(0) = w_0$ , o que implica as desigualdades

$$(4.3.12) \quad V(\tau) \leq w_0$$

e

$$(4.3.13) \quad w(\tau) \geq w_0 e^{-w_0 \tau}.$$

Com o objetivo de encontrar uma desigualdade para  $w_0(t, z)$  que satisfaça (4.3.13), reescrevemos (4.3.13) como

$$-w_0 \tau e^{-w_0 \tau} \geq -w \tau,$$

segue então da monotonicidade da função  $W$  de Lambert que

$$(4.3.14) \quad w_0(t, w) \leq -\frac{1}{\tau} W(-w\tau),$$

desde que o argumento da função  $W$  obedeça a desigualdade

$$w\tau = z e^{\int_0^t ds B(s)} \int_0^t ds \mathcal{H}(s) < e^{-1}.$$



Assim, combinando (4.3.14) e (4.3.12) na equação (4.3.11), temos que

$$\Theta(t, z) = \frac{V(t(\tau))}{z} \leq \bar{\Theta}(t, z),$$

onde

$$(4.3.15) \quad \bar{\Theta}(t, z) = -\frac{1}{z \int_0^t ds \mathcal{H}(s)} W \left( -z e^{\int_0^t ds B(s)} \int_0^t ds \mathcal{H}(s) \right)$$

que está bem definida na região compreendida pela desigualdade

$$z < \frac{1}{e^{1+\int_0^t ds B(s)} \int_0^t ds \mathcal{H}(s)}.$$

Podemos ir além da desigualdade (4.3.13) através de uma pequena modificação na mudança de escala que define  $\Psi$ . Para tanto, vamos utilizar a seguinte definição  $\Theta(t, z) = \Psi(t, f(t)z)$ . Utilizando a regra da cadeia, obtemos desta vez

$$\Psi_t - \frac{\mathcal{H}}{f} w^2 \Psi \Psi_w = \left( B - \frac{f'}{f} \right) w \Psi_w + \mathcal{B} \Psi - B + \frac{\mathcal{H}}{f} w \Psi^2.$$

Utilizando a escolha para a função  $f$  dada por

$$(4.3.16) \quad f(t) = e^{2 \int_0^t ds B(s)}$$

e o fato de que

$$\begin{aligned} -w \Psi_w + \Psi - 1 &= -\sum_{n=2}^{\infty} (n-1) C_n w^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n w^{n-1} - 1 \\ &= -\sum_{n=2}^{\infty} (n-2) C_n w^{n-1} \leq 0 \end{aligned}$$

e em vista de (4.2.16) e de que  $w = z f(t) \geq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \Psi_t - \frac{\mathcal{H}}{f} w^2 \Psi \Psi_w &= B(-w \Psi_w + \Psi - 1) + \frac{\mathcal{H}}{f} w \Psi^2 \\ &\leq \frac{\mathcal{H}}{f} w \Psi^2. \end{aligned}$$

Definimos então

$$(4.3.17) \quad \tau = \int_0^t ds \frac{\mathcal{H}(s)}{f(s)}$$

e repetimos os passos (4.3.16)-(4.3.15). Desde que seja satisfeita a desigualdade

$$(4.3.18) \quad \begin{aligned} w\tau &= zf(t) \int_0^t ds \frac{\mathcal{H}(s)}{f(s)} \\ &= z \int_0^t ds e^{2 \int_s^t d\tau B(\tau)} \mathcal{H}(s) < e^{-1}, \end{aligned}$$

a solução do problema de valor inicial (4.2.15) é dominada pelo majorante  $\bar{\Theta}(t, z)$ :

$$(4.3.19) \quad \Theta(t, z) \leq -\frac{1}{z \int_0^t ds e^{2 \int_s^t d\tau B(\tau)} \mathcal{H}(s)} W \left( -z \int_0^t ds e^{2 \int_s^t d\tau B(\tau)} \mathcal{H}(s) \right) = \bar{\Theta}(t, z).$$

Trabalhando diretamente com a equação integral (4.1.15), Brydges e Kennedy [11] estabeleceram recursivamente a seguinte desigualdade para os coeficientes de Ursell  $c_n$ ,

$$c_n(t) \leq (f(t)\tau(t)z)^{n-1} n^{n-2}$$

com  $f$  e  $\tau$  dados por (4.3.16) e (4.3.17) respectivamente. Dessa forma, de acordo com a expressão da série de Taylor para a função  $W$  de Lambert [19], o majorante para a densidade no caso do potencial estável satisfaz a desigualdade

$$\begin{aligned} \Theta(t, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n(t)}{(n-1)!} z^{n-1} \\ &\leq -\frac{1}{f\tau z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} (-f\tau z)^n = -\frac{1}{\tau w} W(-\tau w) \end{aligned}$$

que corresponde exatamente à (4.3.19).

Portanto, a partir de (4.3.18), temos que a série de Mayer (4.3.18) converge para valores de  $(t, z)$  tais que a seguinte desigualdade seja verificada

$$(4.3.20) \quad z < \frac{1}{e \int_0^t ds e^{2 \int_s^t d\tau B(\tau)} \mathcal{H}(s)}.$$

Isto está de acordo com o teorema 2 de [12]. O critério de convergência dado por (4.3.20) apresenta vantagens sobre o critério anterior (4.3.9) quando  $v(t) = \beta\phi$  é uma decomposição em multi-escalas de um potencial que não satisfaz a condição de regularidade na origem (4.0.11) ou a condição de somabilidade (4.0.13). Como o observado em [11], uma estimativa de estabilidade fraca ( $B(t)$  grande) em pequenas distâncias,  $t \ll 1$ , pode ser compensada pela baixa intensidade da interação,  $\mathcal{H} = \|\dot{v}\|$ , nessas escalas.

#### 4.4. Gás de Yukawa: uma aplicação

Nesta seção iremos ilustrar a utilidade do critério de convergência (4.3.20) para a análise do problema ultravioleta do gás de Yukawa com  $\beta < 4\pi$ . O procedimento das subseções anteriores será estendido ainda mais para superar a seqüência de singularidades presentes no intervalo  $4\pi \leq \beta < 8\pi$ .

**4.4.1. O Gás de Yukawa.** Nesta subseção desenvolveremos uma função majorante,  $\Theta(\beta, z)$ , para a série de Mayer da função densidade para um gás de Yukawa bidimensional. Nesse sistema as partículas possuem como variável de estado interno a carga  $\sigma$  que pode tomar valores no conjunto  $\{-1, 1\}$ . As partículas constituintes do gás interagem através do potencial de Yukawa

$$\begin{aligned} v(\xi_1, \xi_2) &= \sigma_1 \sigma_2 (-\Delta + 1)^{-1}(x_1, x_2) \\ (4.4.1) \qquad &= \frac{\sigma_1 \sigma_2}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-ik \cdot (x_1 - x_2)}}{k^2 + 1} d^2 k \end{aligned}$$

onde  $-\Delta$  é operador de Laplace em  $\mathbb{R}^2$ . O potencial (4.0.15) viola a condição de regularidade na origem (4.0.11), uma vez que

$$|v(\xi, \xi)| = \frac{1}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{2\eta}{\eta^2 + 1} d\eta = \frac{\beta}{4\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \ln(R^2 + 1)$$

diverge logaritmicamente no limite ultravioleta. Realizamos a mudança da variável  $\beta v$  segundo a expressão

$$(4.4.2) \quad \begin{aligned} \omega(t, |x_1 - x_2|) &= \beta \sigma_1 \sigma_2 (-\Delta + \nu(t))^{-1} (x_1, x_2) \\ &= \frac{\beta \sigma_1 \sigma_2}{2\pi} K_0 \left( \sqrt{\nu(t)} |x_1 - x_2| \right) \end{aligned}$$

onde  $K_0$  é a função de Bessel modificada de segunda espécie (veja por exemplo [32] p. 126) e  $\nu$  é uma função monotonicamente decrescente tal que

$$\nu(-\infty) = \infty \quad \text{and} \quad \nu(0) = 1.$$

A função  $\nu$  com as propriedades mencionadas permite a decomposição do potencial em escalas segundo a expressão abaixo,

$$\omega(t, r) = \int_{-\infty}^t ds \dot{\omega}(s, r),$$

onde

$$(4.4.3) \quad \dot{\omega}(s, r) = \frac{\beta \sigma_1 \sigma_2}{4\pi} \frac{\nu'(s)}{\sqrt{\nu(s)}} r K_0' \left( \sqrt{\nu(s)} r \right).$$

De acordo com (4.2.5) e (4.2.5), temos a seguinte proposição

**PROPOSIÇÃO 4.4.1.**

Para cada  $-\infty < s < 0$ ,  $\dot{\omega}(s, x - y)$  é um potencial positivo que satisfaz as propriedades (4.0.11)-(4.0.14) com

$$(4.4.4) \quad B(s) = \frac{1}{2} |\dot{\omega}(s, 0)| = \frac{\beta}{8\pi} (-\ln \nu(s))'$$

e

$$(4.4.5) \quad \mathcal{H}(s) = \|\dot{\omega}(s, \cdot)\| = -\beta \frac{\nu'(s)}{\nu^2(s)}.$$

DEMONSTRAÇÃO: A verificação das propriedades (4.0.11)-(4.0.14) segue imediatamente da definição (4.4.1), desde que (4.4.4) e (4.4.5) sejam satisfeitas. A utilização da fórmula de

Cauchy para a integral (4.4.1) (com 1 no lugar de  $\nu(t)$ ) na direção  $x - y$  implica

$$\omega(t, r) = \frac{\beta\sigma_1\sigma_2}{2\pi} g\left(\sqrt{\nu(t)}r\right)$$

onde

$$(4.4.6) \quad g(w) \doteq \int_0^\infty dk \frac{e^{-w\sqrt{k^2+1}}}{\sqrt{k^2+1}}.$$

Utilizando a escolha  $w = \sqrt{\nu(s)}r$ , temos pela regra da cadeia

$$(4.4.7) \quad (g \circ w)' = -w' \int_0^\infty dk e^{-w\sqrt{k^2+1}} = -\frac{w'}{w} \int_w^\infty d\zeta \frac{e^{-\zeta}}{\sqrt{\zeta^2 - w^2}} \zeta \equiv -\frac{w'}{w} h(w),$$

o que permite reescrever a equação (4.4.3) como

$$(4.4.8) \quad \dot{\omega}(s, r) = \frac{-\beta\sigma_1\sigma_2}{4\pi} \frac{\nu'(s)}{\nu(s)} h\left(\sqrt{\nu(s)}r\right).$$

Assim, tomando o valor absoluto de (4.4.8) em  $r = 0$ , temos a expressão (4.4.4). Notemos que por hipótese  $-\nu(s) \geq 0$ . Pela integração de (4.4.6) multiplicado pela variável  $w$ , temos

$$(4.4.9) \quad \int_0^\infty dw g(w)w = \int_0^\infty dk \frac{1}{(k^2+1)^{3/2}} = 1,$$

o que implica

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\omega}(s, \cdot) \right\| &= \frac{\beta}{2\pi} \frac{d}{ds} 2\pi \int_0^\infty dr g\left(\sqrt{\nu(s)}r\right) r \\ &= \beta \left( \frac{1}{\nu(s)} \right)' \end{aligned}$$

e conclui a demonstração. ■

O majorante para densidade no gás de Yukawa,  $\Theta(t, z)$ , satisfaz a equação (4.2.15) com  $B$  e  $\mathcal{H}$  dados por (4.4.4) e (4.4.5), respectivamente, e condição inicial  $\Theta(t_0, z) = 1$  onde  $t_0$  faz o papel de um “cutoff” ultravioleta que será removido ao tomarmos o limite  $t_0 \rightarrow -\infty$ .

Assim, utilizando a estimativa oferecida pela expressão (4.3.20), obtemos os critérios de convergência da série no limite em que o “cutoff” é removido.

De acordo com as definições para  $\mathcal{H}(t)$  e  $B(t)$ , dadas por (4.4.5) e (4.4.4), respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^0 d\tau \mathcal{H}(\tau) e^{2 \int_{\tau}^0 ds B(s)} &= -\beta \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^0 d\tau \frac{\nu'(\tau)}{\nu^{2-\beta/4\pi}(\tau)} \\ &= \frac{4\pi\beta}{4\pi - \beta} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \{1 - \nu^{\beta/4\pi-1}(t_0)\} = \frac{4\pi\beta}{4\pi - \beta}. \end{aligned}$$

O limite anterior é válido para todo  $\beta < 4\pi$ , independentemente da função de escala  $\nu$ . Assim, de acordo com o critério fornecido pela desigualdade (4.3.20), a série de Mayer para o gás de Yukawa converge sempre que

$$\beta < 4\pi \quad \text{e} \quad |z| < \frac{4\pi - \beta}{4\pi\beta e}.$$

**4.4.2. O gás de Yukawa para  $4\pi < \beta < 8\pi$ .** De acordo com as análises apresentadas por Benfatto, Gallavotti, Brydges *et alli* [3, 12], a série de Mayer para o gás de Yukawa diverge para valores de  $\beta$  no intervalo  $4\pi \leq \beta < 6\pi$  devido à divergência no limite do ultravioleta da segunda função de Ursell  $\psi_2^c(t, \xi)$ . Nesta subseção definimos uma expressão para o majorante renormalizado da densidade,  $\Theta^R(\beta, z)$ , definido como o majorante  $\Theta(\beta, z)$  desprovido da parte singular  $\psi_2^c(t, \xi)$ , e demonstraremos que  $\Theta^R(\beta, z)$  representa uma série de Mayer convergente para  $\beta < 16\pi/3$ .

No intervalo  $16\pi/3 \leq \beta < 6\pi$ , o limite superior para  $\psi_3^c(t, \xi)$ , dado pelo coeficiente  $g_3$ , também diverge no limite ultravioleta. Embora  $\beta = 16\pi/3$  não seja um ponto de transição para o modelo do gás de Yukawa, o nosso procedimento considera este valor e, de maneira mais geral, todos os valores  $\beta_n$ ,

$$(4.4.10) \quad \beta_n = 8\pi \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} = 8\pi \frac{n}{n+1}, \quad n \geq 1$$

como pontos de singularidade do modelo. Discutiremos então como estender o resultado para a  $n$ -ésima transição finalizando a demonstração do teorema 4.0.5.

A partir da definição, a função de Ursell  $\psi_2^c(t, \xi)$  é dada explicitamente pela expressão

$$\psi_2^c(t, \xi) \equiv \psi_2^c(t, \xi_1, \xi_2) = e^{-\omega(t, \xi_1, \xi_2)} - 1.$$

Pela introdução do “cutoff”  $t_0$  e dos demais ajustes necessários nos limites de integração em conjunto com (4.4.2), temos que

$$(4.4.11) \quad \psi_2^c(t, \xi_1, \xi_2) = \exp \left\{ \frac{-\beta \sigma_1 \sigma_2}{2\pi} \left( K_0 \left( \sqrt{\nu(t)} r_{12} \right) - K_0 \left( \sqrt{\nu(t_0)} r_{12} \right) \right) \right\} - 1$$

onde  $r_{12} = |x_1 - x_2|$ .

Como objetivo de isolar a singularidade de (4.4.11), trocamos

$$c_2(t) = \sup_{\xi_1 \in \Omega} \int d\rho(\xi_2) |\psi_2^c(t, \xi_1, \xi_2)|$$

por uma versão mais detalhada

$$c_2^\pm(t) = \sup_{x_1 \in \Lambda} \int d\mu(x_2) \left| \frac{1}{2} \sum_{\substack{\sigma_1, \sigma_2 \in \{-1, 1\}: \\ \sigma_1 \sigma_2 = \pm}} \psi_2^c(t, \xi_1, \xi_2) \right|$$

que diferencia a situação em que o termo  $\sigma_1 \sigma_2$  é positivo ou negativo. Utilizando o fato de que  $K_0(x)$  é uma função monotonicamente decrescente e levando em conta que  $1 - e^{-\delta K} \leq \delta K$  para  $\delta K \geq 0$ , temos que

$$\begin{aligned} c_2^+(t) &\leq \beta \int_0^\infty dr \left( K_0 \left( \sqrt{\nu(t)} r \right) - K_0 \left( \sqrt{\nu(t_0)} r \right) \right) \\ &\leq \beta \left( \frac{1}{\nu(t)} - \frac{1}{\nu(t_0)} \right). \end{aligned}$$

Ou seja, o coeficiente dado pelo limite  $\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} c_2^+(t) = \beta/\nu(t)$  é limitado para todo  $t$ .

Quando  $\sigma_1 \sigma_2 = -1$ , temos que  $-\dot{\omega}(s, r) \geq 0$ . Para avaliar o coeficiente  $c_2^-(t)$  vamos recorrer à definição da função de Ursell  $\psi_2^c$ , a partir da equação integral (4.1.15):

$$(4.4.12) \quad \psi_2^c(t, r) = - \int_0^t ds \dot{\omega}(s, r) e^{-\int_s^t d\tau \dot{\omega}(\tau, r)}.$$

Em vista da expressão (4.4.8), e do lado direito de (4.4.12),

(4.4.13)

$$c_2^-(t) = -\frac{\beta}{2} \int_0^\infty dr r \int_{t_0}^t ds \frac{-\nu'(s)}{\nu(s)} h(\sqrt{\nu(s)r}) \exp \left\{ -\frac{\beta}{4\pi} \int_s^t d\tau \frac{-\nu'(\tau)}{\nu(\tau)} h(\sqrt{\nu(\tau)r}) \right\}$$

Devemos observar que  $h(w)$  é uma função monotona decrescente com  $h(0) = 1$  e, de acordo com (4.4.7), (4.4.9) e pela integração por partes,

$$\int_0^\infty dw w h(w) = \int_0^\infty dw w^2 g'(w) = 2 \int_0^\infty dw w g(w) = 2.$$

Como  $\nu$  é também uma função monótona decrescente, temos para qualquer  $r$  e  $s \leq \tau \leq t$

$$(4.4.14) \quad \nu(s) \geq \nu(\tau) \geq \nu(t) \implies h(\sqrt{\nu(s)r}) \leq h(\sqrt{\nu(\tau)r}) \leq h(\sqrt{\nu(t)r}).$$

Utilizando a desigualdade anterior na integral presente na exponencial do lado direito de (4.4.13), podemos limitar superiormente o coeficiente  $c_2^-(t)$

$$\begin{aligned} c_2^-(t) &\leq -\frac{\beta}{2} \int_0^\infty dr r \int_{t_0}^t ds \frac{-\nu'(s)}{\nu(s)} h(\sqrt{\nu(s)r}) \left( \frac{\nu(s)}{\nu(t)} \right)^{\frac{\beta}{4\pi}} \\ &= -\frac{\beta}{2} \int_0^\infty dy y \frac{h(y)}{\nu(t)^{\frac{\beta}{4\pi}}} \int_{t_0}^t ds -\nu'(s) \nu(s)^{\frac{\beta}{4\pi}-2} \\ &= \frac{4\pi}{\beta - 4\pi} \left( \frac{\nu(t_0)^{\frac{\beta}{4\pi}-1}}{\nu(t)^{\frac{\beta}{4\pi}}} - \frac{1}{\nu(t)} \right). \end{aligned}$$

Da mesma forma, podemos utilizar a desigualdade (4.4.14) para limitar inferiormente o coeficiente  $c_2^-(t)$ :

$$\begin{aligned} c_2^-(t) &\geq -\frac{\beta}{2} \int_0^\infty dr r \int_{t_0}^t ds \frac{-\nu'(s)}{\nu(s)} h(\sqrt{\nu(s)r}) \left( \frac{\nu(s)}{\nu(t)} \right)^{\frac{\beta}{4\pi} h(\sqrt{\nu(s)r})} \\ &= -\frac{\beta}{2} \int_0^\infty dy y h(y) \int_{t_0}^t ds \frac{-\nu'(s)}{\nu(s)^2} \left( \frac{\nu(s)}{\nu(t)} \right)^{\frac{\beta}{4\pi} h(y)}. \end{aligned}$$



Dado em  $\varepsilon > 0$ , existe um  $\delta(\varepsilon) > 0$  e uma constante  $\mathcal{C}(\varepsilon) > 0$  tais que  $\frac{\beta}{4\pi} - \varepsilon > 1$  e

$$\begin{aligned} c_2^-(t) &\geq -\frac{\beta}{2} \int_0^{\delta(\varepsilon)} dy y h(y) \int_{t_0}^t ds \frac{-\nu'(s)}{\nu(s)^2} \left( \frac{\nu(s)}{\nu(t)} \right)^{\frac{\beta}{4\pi} h(y)} \\ &\geq \mathcal{C}(\varepsilon) \left( \frac{\nu(t_0)^{\frac{\beta}{4\pi} - 1 - \varepsilon}}{\nu(t)^{\frac{\beta}{4\pi} - \varepsilon}} - \frac{1}{\nu(t)} \right). \end{aligned}$$

Por definição  $\nu(-\infty) = \infty$ , portanto, de acordo com as suas estimativas superior e inferior, o coeficiente  $c_2^-(t)$  diverge no limite  $t_0 \rightarrow -\infty$ . Em contrapartida,  $c_2^+(t)$  permanece limitado para todo  $\beta > 0$ .

Iremos agora desenvolver a equação para o majorante (4.2.15) com o coeficiente singular  $g_2$  removido através de um multiplicador de Lagrange. Isto pode ser realizado de maneira distintas. Poderíamos, por exemplo, definir  $\Theta^R$  tal que  $\Theta_z^R(t, 0) = 0$  para todo  $t \geq 0$ ,

$$\Theta_z^R(t, z) = 1 + \sum_{n=3}^{\infty} n g_n(t) z^{n-1},$$

como solução de

$$\Theta_t = \mathcal{H}(z\Theta^2 + z^2\Theta\Theta_z) + B(z\Theta_z + \Theta - 1) - z(\mathcal{H} + 2B\Theta_z(t, 0))$$

com  $\Theta(0, z) = 1$ . Notemos que  $d\Theta_z^R(t, 0)/dt = \Theta_{tz}^R(t, 0) = 0$  o que é consequência da regularidade de  $\Theta^R$ . Uma vez que a parte linear da equação (4.2.15) é responsável por tornar  $g_2$  singular, nos poderíamos, alternativamente, incluir no multiplicador de Lagrange somente termos proporcionais a  $B$

$$(4.4.15) \quad \Theta_t = \mathcal{H}(z\Theta^2 + z^2\Theta\Theta_z) + B(z\Theta_z + \Theta - 1) - \frac{1}{2}zB\Theta_z(t, 0)$$

(com um quarto da intensidade necessária para anulá-lo). Como na subseção 4.3.2, definimos  $\Theta_2(t, z) = \Psi(t, w)$ , onde  $w = f_2(t)z$  e

$$(4.4.16) \quad f_2(t) = \exp \left\{ \frac{3}{2} \int_0^t ds B(s) \right\},$$

e utilizando (lembramos que  $C_n = ng_n$ )

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}w\Psi_w + \Psi - 1 - \frac{1}{2}w\Psi_w(t, 0) &= -\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)C_n w^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}C_n w^{n-1} - 1 - \frac{1}{2}C_2 \\ &= -\frac{1}{2}\sum_{n=3}^{\infty}(n-3)C_n w^{n-1} \leq 0, \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \Psi_t - \frac{\mathcal{H}}{f_2}w^2\Psi\Psi_w &= \left(B - \frac{f_2'}{f_2}\right)w\Psi_w + B\left(\Psi - 1 - \frac{1}{2}C_2\right) + \frac{\mathcal{H}}{f_2}w\Psi^2 \\ &= B\left(-\frac{1}{2}w\Psi_w + \Psi - 1 - \frac{1}{2}C_2\right) + \frac{\mathcal{H}}{f_2}w\Psi^2 \\ &\leq \frac{\mathcal{H}}{f_2}w\Psi^2. \end{aligned}$$

Pela repetição dos passos (4.3.11) -(4.3.15) com  $\tau = \int_{t_0}^t ds (\mathcal{H}/f_2)(s)$ , teremos, desde que seja satisfeita a desigualdade

$$(4.4.17) \quad w\tau = z f_2(t) \int_{t_0}^t ds \frac{\mathcal{H}}{f_2}(s) = z \int_{t_0}^t ds \exp\left\{\frac{3}{2}\int_s^t d\tau B(\tau)\right\} \mathcal{H}(s) < 1/e,$$

que a solução do problema de valor inicial (4.4.15)  $\Theta_2$  satisfaz

$$(4.4.18) \quad \Theta_2(t, z) \leq \frac{-1}{\tau w} W(-\tau w).$$

Substituindo (4.4.4) e (4.4.5) em (4.4.17) com  $t = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^0 ds \exp\left\{\frac{3}{2}\int_s^0 d\tau B(\tau)\right\} \mathcal{H}(s) &= -\beta \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \int_{t_0}^0 ds \frac{\nu'(s)}{\nu^{2-3\beta/16\pi}(s)} \\ &= \frac{16\pi\beta}{16\pi - 3\beta} \end{aligned}$$

desde que  $\beta < 16\pi/3$ , independentemente da função de escala  $\nu$ . Portanto, a série de Mayer para o gás de Yukawa, com a parte singular de  $\psi_2^c$  “removida”, converge se

$$\beta < \frac{16}{3}\pi \quad \text{e} \quad |z| < \frac{16\pi - 3\beta}{16\pi\beta e}.$$

A extensão do resultado para o caso  $\beta < \beta_n = 8\pi(1+n^{-1})^{-1}$  segue imediatamente da equação renormalizada

$$(4.4.19) \quad \Theta_t = \mathcal{H}(z\Theta^2 + z^2\Theta\Theta_z) + B(z\Theta_z + \Theta - 1) - B \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j!} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \left(z^j \frac{\partial^j}{\partial z^j} \Theta\right)(t, 0)$$

com  $\Theta(0, z) = 1$ . Neste caso, definimos, de maneira análoga,  $\Theta(t, z) = \Psi(t, w)$ , onde  $w = f_n(t)z$  e

$$(4.4.20) \quad f_n(t) = \exp \left\{ \frac{n+1}{n} \int_0^t ds B(s) \right\},$$

e utilizamos o fato de que

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{f'_n}{f_n}\right) w\Psi_w + \Psi - 1 - \sum_{m=2}^n \left(1 - \frac{m-1}{n}\right) C_m w^{m-1} \\ &= -\frac{1}{n} \sum_{m=n}^{\infty} (m-n) C_m w^{m-1} \leq 0 \end{aligned}$$

para obter a desigualdade

$$\Psi_t - \frac{\mathcal{H}}{f_n} w^2 \Psi \Psi_w \leq \frac{\mathcal{H}}{f_n} w \Psi^2.$$

Indicando a solução do problema de valor inicial (4.4.19) por  $\Theta_n$ , temos que

$$(4.4.21) \quad \Theta_n(t, z) \leq \frac{-1}{\tau w} W(-\tau w)$$

desde que

$$(4.4.22) \quad w\tau = z f_n(t) \int_{t_0}^t ds \frac{\mathcal{H}}{f_n}(s) = z \int_{t_0}^t ds \exp \left\{ \frac{n+1}{n} \int_s^t B(\tau) d\tau \right\} \mathcal{H}(s) < 1/e.$$

Pela repetição das mesmas operações efetuadas anteriormente, somos capazes de concluir que a série de Mayer para o gás de Yukawa, com a parte singular de  $\psi_j^c$  para  $j = 2, \dots, n$  “removida”, converge se

$$\beta < \beta_n \quad \text{e} \quad |z| < \frac{\beta_n - \beta}{\beta_n \beta e}$$

com  $\beta_n$  dado por (4.4.10). Isto conclui a demonstração do teorema 4.0.5.

*OBSERVAÇÃO* 4.4.2. A convergência de  $\Theta$  para  $\beta < 16\pi/3$  com um termo  $O(z)$  omitido foi obtida originalmente a partir da equação integral (4.1.15) por Brydges e Kennedy [12]. Porém devemos enfatizar que o método proposto neste texto é mais direto e prescinde de condições extras sobre o raio de convergência como no caso do teorema 4.3 em [12]

## APÊNDICE A

### Notação, teoremas de imersão e operadores setoriais

O objetivo deste apêndice é de fixar a notação utilizada e de apresentar alguns teoremas necessários à demonstração dos resultados obtidos através do estudo das equações diferenciais parciais associadas ao fluxo do grupo de renormalização para modelos da mecânica estatística de equilíbrio.

Os teoremas de imersão em espaços de Sobolev e os que tratam dos operadores setoriais são apresentados aqui sem as respectivas demonstrações. Não as apresentamos neste texto pelo temor de sobrecarregá-lo e pelo fato de que as demonstrações estão descritas com detalhe nas referências que utilizamos para estudá-los. A seção sobre teoremas de imersão é baseada nos teoremas apresentados em [47]. A seção sobre operadores setoriais e suas potências fracionárias é baseada no texto [38].

#### A.1. Notação para operadores lineares e espaços funcionais.

- $C(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é contínua}\}$ , espaço vetorial das funções contínuas. É um espaço de Banach  $X$  com a norma “sup” usual,

$$\|f\|_{C(U)} = \sup_{y \in U} |f(y)|.$$

- $C^k(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é } k \text{ vezes continuamente diferenciável}\}$ , espaço vetorial das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis de  $U$ . É um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{C^k(U)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{C(U)}.$$

- $C_b(U), C_b^k(U) =$  espaços vetoriais das funções contínuas e continuamente diferenciáveis formado pelas funções uniformemente limitadas e com derivadas uniformemente limitadas em  $\bar{U}$ .

- $\mathbf{C}_0(U), \mathbf{C}_0^k(U)$  = espaços vetoriais das funções contínuas e continuamente diferenciáveis formado pelas funções com suporte compacto em  $U$ .
- $\mathbf{C}^\omega(U)$  = espaço vetorial das funções analíticas em uma vizinhança do domínio  $U$ .
- $\mathbf{C}^{[\nu], \nu - [\nu]}(U)$  = é o espaço vetorial conhecido como espaço de Hölder formado pelas funções  $\mathbf{C}_b^{[\nu]}(U)$  cuja  $[\nu]$ -ésima derivada é uma função Hölder contínua com expoente  $\nu - [\nu]$ :

$$\|f\|_{\mathbf{C}^{[\nu], \nu - [\nu]}(U)} = \|f\|_{\mathbf{C}^{[\nu]}(U)} + \sup_{x \neq y} \frac{|D^{[\nu]}f(x) - D^{[\nu]}f(y)|}{|x - y|^{\nu - [\nu]}} < \infty.$$

- $\mathbf{L}^p(U, d\mu)$  = é o espaço das funções integráveis à Lebesgue em  $U$ . É um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{\mathbf{L}^p(U, d\mu)} = \left( \int_U d\mu(x) |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Usualmente denominamos  $\mathbf{L}^p(U) = \mathbf{L}^p(U, dx)$  e, em particular,  $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d) = \mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d, dx)$ .

- $\mathbf{L}^\infty(U, d\mu)$  = é o espaço das funções integráveis à Lebesgue em  $U$  e que são essencialmente limitadas em  $U$ , ou seja,  $f$  é limitada em qualquer região de  $U$  com medida não nula onde a função está definida. Esse espaço é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{\mathbf{L}^\infty(U, d\mu)} = \sup_{x \in U} \text{ess} |f(x)|.$$

- $\mathbf{L}_{\text{loc}}^p(U, d\mu) = \{f \in \mathbf{L}^p(V, d\mu) \text{ para todo } V \subset\subset U\}$ .
- $\mathbf{W}^{k,p}(U, d\mu)$  = subespaço das funções  $f \in \mathbf{L}^p(U, d\mu)$  tais que para cada multi-índice  $|\alpha| < k$ ,  $D^\alpha f$  existe no sentido fraco (distribuição) e pertence ao espaço  $\mathbf{L}^p(U, d\mu)$ . Esse espaço é conhecido como espaços de Sobolev e são espaços de Banach com a norma

$$\|f\|_{\mathbf{W}^{k,p}(U, d\mu)} = \begin{cases} \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_U d\mu(x) |D^\alpha f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in U} \text{ess} |D^\alpha f(x)|, & p = \infty. \end{cases}$$

- $\mathbf{H}^k(U, d\mu) = \mathbf{W}^{k,2}(U, d\mu)$ . Esses espaços são também espaços de Hilbert com o produto interno  $(\cdot, \cdot)_\mu$ :

$$(f, g)_\mu = \int_U d\mu f(x)g(x).$$

- $\mathbf{W}_0^{k,p}(U, d\mu) =$  fecho do espaço  $\mathbf{C}_0^k(U)$  na norma do espaço  $\mathbf{W}^{k,p}(U, d\mu)$ . Uma função  $f$  pertence ao espaço  $\mathbf{W}_0^{k,p}(U, d\mu)$  se e somente se existir uma seqüência de funções  $\{f_m\}$  pertencentes ao espaço  $\mathbf{C}_0^k(U)$  tal que  $f_m \rightarrow f$  em  $\mathbf{W}^{k,p}(U, d\mu)$ . Podemos esse espaço como aquele constituído dos elementos  $f \in \mathbf{W}^{k,p}(U, d\mu)$  tais que “ $D^\alpha f = 0$  em  $\partial U$ ” para todos  $|\alpha| \leq k - 1$ .
- $\mathbf{H}_0^k(U, d\mu) = \mathbf{W}_0^{k,2}(U, d\mu)$

## A.2. Teoremas de imersão para espaços de Sobolev

Nesta seção vamos expor alguns teoremas sobre imersão para espaços de Sobolev que serão úteis ao desenvolvimento de alguns tópicos desta tese. Dizemos que o espaço de Banach  $X$  está continuamente imerso em no espaço de Banach  $Y$ , ou simplesmente, que  $X$  está imerso em  $Y$  ( $X \hookrightarrow Y$ ), quando  $X \subset Y$  e para todo  $f \in X$ , existe uma constante positiva  $C < \infty$ , independente de  $f$  tal que

$$\|f\|_Y \leq C \|f\|_X.$$

No caso dos espaços de Sobolev  $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ , dependendo da relação entre  $k, p$  e  $d$  temos distintas imersões contínuas, o seguinte teorema resume os resultados para esse espaço.

### TEOREMA A.2.1.

Seja  $d \geq 2$  e  $1 \leq p < \infty$ . Então se  $kp < d$ , temos que

$$\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^d),$$

para todo  $q$  que satisfaça a desigualdade  $p \leq q \leq q^* = \frac{dp}{d-kp}$ .

Se  $kp = d$ , temos que

$$\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^d),$$

para  $p \leq q < \infty$ .

Seja  $m$  um inteiro não negativo tal que  $m < k - d/p < m + 1$ . Então se  $kp < d$ , temos que

$$\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathbf{C}^{m,\lambda}(\mathbb{R}^d),$$

onde  $0 < \lambda \leq k - m - d/p$  se  $k - m - d/p < 1$ , ou,  $0 < \lambda < 1$  se  $k - m - d/p = 1$ .

Quando  $d = 1$  é possível obter uma melhor regularidade para os elementos de  $\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R})$ ,

**TEOREMA A.2.2.**

Temos que para  $k \geq 1$ ,

$$\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbf{C}^{k-1,\lambda}(\mathbb{R}),$$

com  $0 < \lambda \leq 1 - 1/p$  se  $p > 1$ . E

$$\mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathbf{C}_b^{k-1}(\mathbb{R}^d)$$

se  $p = 1$ .

O espaços de Sobolev  $\mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d)$  também possuem teoremas de imersão em espaços de funções uniformemente limitadas:

**TEOREMA A.2.3.**

Temos para  $d \geq 1$  e  $k \geq 1$ ,

$$\mathbf{W}^{k,\infty}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathbf{C}^{k-1,1}(\mathbb{R}^d).$$

Dado um aberto  $U \subset \mathbb{R}^d$ , é possível introduzir um operador linear contínuo, conhecido como operador de prolongamento,  $\mathfrak{W}$ ,

$$\mathfrak{W} : \mathbf{W}^{k,p}(U) \rightarrow \mathbf{W}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$$

tal que  $\mathfrak{W}f|_U = f$  em  $U$ .

A partir dos teoremas de imersão para espaços de Sobolev em  $\mathbb{R}^d$  e do operador de prolongamento, é possível obter também teoremas de imersão para os espaços de Sobolev  $\mathbf{W}^{k,p}(U, dx)$  com as mesma propriedades dos teoremas anteriores desde que o  $U$  seja de classe  $C^k$ .



Finalmente existem os teoremas que garantem a imersão compacta para os espaços  $\mathbf{W}^{k,p}(U, dx)$ .

**TEOREMA A.2.4.**

Seja  $U$  um subconjunto limitado de  $\mathbb{R}^d$  de classe  $C^k$  e  $1 \leq p \leq \infty$ . Então as seguintes imersões são compactas:

$$\mathbf{W}^{k,p}(U, dx) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(U, dx), \text{ para } 1 \leq q < q^* = \frac{dp}{d-kp} \text{ se } kp < d.$$

$$\mathbf{W}^{k,p}(U, dx) \hookrightarrow \mathbf{L}^q(U, dx), \text{ para } 1 \leq q < \infty \text{ se } kp = d.$$

$\mathbf{W}^{k,p}(U, dx) \hookrightarrow C^m(\bar{U})$  para um  $m$  inteiro não negativo tal que  $m < k - d/p \leq m + 1$  se  $kp > d$ .

### A.3. Operadores setoriais e suas potências fracionárias

**DEFINIÇÃO A.3.1** (operador setorial). Um operador setorial  $A$  é definido como um operador linear fechado e densamente definido que age sobre um espaço de Banach  $X$ , tal que para um ângulo  $\phi \in (0, \pi/2)$  e dois números reais quaisquer  $a$  e  $M \geq 1$ , o setor no plano complexo

$$\Sigma_{a,\phi} = \{\lambda \mid \phi \leq \arg(\lambda - a) \leq \pi, \lambda \neq a\}$$

está contido no resolvente de  $A$  e para todo  $\lambda \in \Sigma_{a,\phi}$ , temos na norma de operadores<sup>1</sup>

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{M}{|\lambda - a|}.$$

**DEFINIÇÃO A.3.2** (semigrupo analítico). Um semigrupo analítico em um espaço de Banach  $X$  é uma família indexada de operadores lineares agindo em  $X$ ,  $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ , e que satisfazem as seguintes propriedades:

- $T(0) = I$ ,  $T(t)T(s) = T(t+s)$  para  $t \geq 0$  e  $s \geq 0$ .
- Para qualquer elemento  $x \in X$ ,  $\lim_{t \downarrow 0} T(t)x = x$ .
- Para qualquer elemento  $x \in X$ , a aplicação  $t \rightarrow T(t)x$  é real analítica no intervalo  $0 < t < \infty$ .

<sup>1</sup>Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços de Banach e  $B : X \rightarrow Y$  um operador pertencente ao espaço das  $\mathcal{L}(X, Y)$ . A norma de operadores é a norma de  $\mathcal{L}(X, Y)$ , expressa como  $\|B\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \doteq \sup_{\|x\|_X \leq 1} \|Bx\|_Y$ .

O gerador infinitesimal do semigrupo,  $L$  é definido pelo limite  $Lx = \lim_{t \downarrow 0} (T(t)x - x)/t$ , seu domínio  $\mathbf{D}(L)$  é constituído pelos elementos de  $X$  para os quais o limite está bem definido. Representamos o semigrupo em termos de seu gerador infinitesimal como  $e^{tL}$ .

**TEOREMA A.3.3** (Henry – teorema 1.3.4).

Se  $A$  é um operador setorial, então  $-A$  é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico  $\{e^{-tA}\}_{t \geq 0}$ , definido pela integral de Dunford-Taylor

$$(A.3.1) \quad e^{-tA} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\lambda + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

onde  $\Gamma$  é um contorno contido no resolvente de  $-A$  tal que  $\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \arg \lambda = \pm \theta$  para algum  $\theta \in (\pi/2, \pi)$ . Além disso,  $e^{-tA}$  pode ser continuado analiticamente no setor  $\{t \neq 0 : |\arg t| < \varepsilon\}$  que contém o eixo real positivo, e se  $\Re \sigma(A) > a$ , então para  $t > 0$  temos as seguintes estimativas na norma de operadores

$$(A.3.2) \quad \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq C e^{-at} \quad e \quad \|Ae^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq \frac{C}{t} e^{-at}.$$

**DEFINIÇÃO A.3.4** (potência fracionária de  $A$ ). Seja  $A$  um operador setorial positivo no espaço  $X$ , e um real  $\delta > 0$ , definimos o operador  $A^{-\delta}$  pela expressão

$$A^{-\delta} = \frac{1}{\Gamma(\delta)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{\delta-1} e^{-\tau A}.$$

$A^{-\delta}$  é um operador linear limitado em  $X$ , biunívoco e satisfaz a relação  $A^{-\alpha} A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$  para quaisquer  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ . A potência fracionária de  $A$  é definida como a inversão de  $A^{-\delta}$ ,  $A^{\delta} = (A^{-\delta})^{-1}$  com domínio  $\mathbf{D}(A^{\delta})$  dado pela imagem do operador  $A^{-\delta}$ .

Associada às potências fracionárias de  $A$ , definimos também a norma do gráfico:

**DEFINIÇÃO A.3.5.** Se  $A$  é um operador setorial definido em um espaço de Banach  $X$ , então, para cada  $\delta \geq 0$  estão definidas as normas

$$\|x\|_{\delta} = \|A_1^{\delta} x\|_X$$

para todo  $x \in X^\delta = \mathbf{D}(A_1^\delta)$ , onde  $A_1 = A + aI$  com  $a$  escolhido de forma que  $\Re\sigma(A_1) > 0$ . Como demonstrado em [38], escolhas diferentes de  $a$  resultam em normas equivalentes em  $X^\delta$ , portanto omitimos qualquer dependência na escolha de  $a$ .

**TEOREMA A.3.6.**

Seja  $A$  um operador setorial definido no espaço de Banach  $X$  tal que a parte real de seu espectro é estritamente positiva,  $\Re\sigma(A) > a > 0$ . Então, para  $\delta \geq 0$ , existe uma constante  $0 < C_\delta \leq (\delta/e)^\delta$  tal que para  $t > 0$

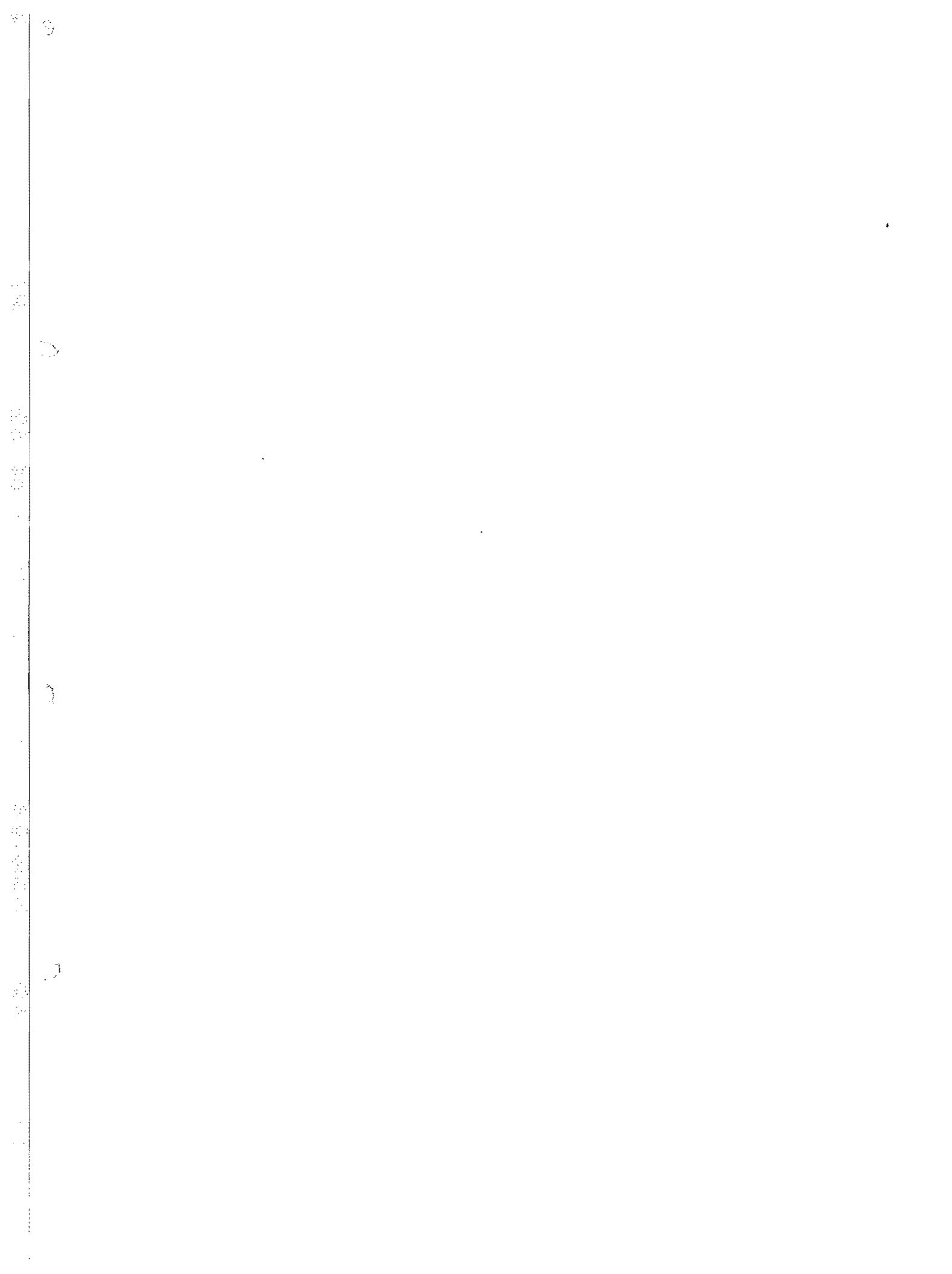
$$(A.3.3) \quad \|A^\delta e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq C_\delta t^{-\delta} e^{-ta}.$$

Além disso, para um  $x \in \mathbf{D}(A^\delta)$  e  $0 < \delta \leq 1$ ,

$$(A.3.4) \quad \|(e^{-tA} - I)x\|_X \leq \frac{1}{\delta} C_{1-\delta} t^\delta \|A^\delta x\|_X.$$

**TEOREMA A.3.7.**

Se  $A$  é um operador setorial em um espaço de Banach  $X$ , então  $X^\delta$  é um espaço de Banach na norma  $\|\cdot\|_\delta$  para um  $\delta \geq 0$ ,  $X^0 = X$  e para  $\delta \geq \beta \geq 0$ , o espaço  $X^\delta$  é um sub-espaço denso de  $X^\beta$  com inclusão contínua ( $\|x\|_\beta \leq C \|x\|_\delta$  para  $x \in X^\delta$ ). Se  $A$  possui resolvente compacto, então a inclusão  $X^\delta \subset X^\beta$  é compacta quando  $\delta > \beta \geq 0$ .



## APÊNDICE B

### Operador de Ornstein-Uhlenbeck em $L^2(\gamma_d)$ – generalizações.

Neste apêndice, nosso interesse principal está focalizado no operador diferencial conhecido como operador diferencial de Ornstein-Uhlenbeck (operador O-U), em particular na sua ação sobre espaços de Hilbert  $L^2(\gamma_d)$ . Vamos considerar o operador O-U dado por  $L$ ,

$$(B.0.5) \quad L \doteq \vartheta \Delta + \delta x \cdot D,$$

onde  $\vartheta$  é uma constante real positiva e  $\delta$  é uma constante real não nula. O operador gera um semigrupo  $T_t$  a partir do qual podemos representar a solução do problema de Cauchy,

$$(B.0.6) \quad \frac{d}{dt}u = Lu$$

com condição inicial  $u(0) = u_0$  como  $u(t, x) = [T_t u_0](x)$ .

Apresentaremos uma solução para a equação (B.0.6) definida no espaço das funções  $L^2(\mathbb{R}^d)$  sem o peso gaussiano. Nesse espaço podemos estudar a equação (B.0.6) através de sua versão para as transformadas de Fourier. As propriedades da transformada de Fourier são úteis por transformar o problema original em uma equação diferencial parcial de primeira ordem, o que permite que desenvolvamos uma solução explícita através do método das características. Feito isso, basta retornar ao problema original através da transformada inversa.

Utilizaremos a seguinte definição para a transformada e sua inversa,

$$[\mathcal{F}f](x) \equiv \widehat{f}(x) \doteq \int_{\mathbb{R}^d} d^d y e^{-i x \cdot y} f(y),$$

$$[\mathcal{F}^{-1}\widehat{f}](x) \equiv f(x) \doteq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} d^d y e^{i x \cdot y} \widehat{f}(y).$$

Assim, a equação diferencial para a transformada de  $u(t, x)$ ,  $v(t, x) = [\mathcal{F}u(t, \cdot)](x)$  é dada por

$$(B.0.7) \quad \frac{d}{dt}v = \Lambda v, \quad v(0) = v_0 \equiv [\mathcal{F}u_0],$$

onde o operador diferencial  $\Lambda$  é dado por

$$(B.0.8) \quad \Lambda = -\vartheta |x|^2 - \delta d - \delta x \cdot D.$$

A solução da equação (B.0.7) é obtida através do método das características: designaremos a solução  $v(t, x)$  quando  $x$  pertencer à curva característica  $x(t)$  como  $\Upsilon(t)$ ,

$$\Upsilon(t) \doteq v(t, x(t)).$$

Dessa forma a derivada de  $\Upsilon(t)$  é tal que,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Upsilon &= \frac{\partial}{\partial t}v + \frac{d}{dt}x \cdot Dv, \\ &= -(\vartheta |x|^2 + \delta d)\Upsilon - \left(\delta x - \frac{d}{dt}x\right) \cdot Dv. \end{aligned}$$

A partir da última igualdade temos as equações para características,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Upsilon &= -(\vartheta |x|^2 + \delta d)\Upsilon \\ \frac{d}{dt}x_i &= \delta x_i, \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, d. \end{cases}$$

A solução é dada então por

$$x_i(t) = x_i(0) e^{\delta t}$$

e,

$$\Upsilon(t) = \Upsilon(0) \exp\left(-\delta dt - \frac{\vartheta}{2\delta}(1 - e^{2\delta t}) |x|^2(0)\right).$$

Combinando a informação sobre o valor de  $\Upsilon(t)$  sobre cada característica  $x(t)$  com a curva que a mesma descreve, ou seja, realizando as substituições  $\Upsilon(0) \mapsto v(0, x(0)) = v_0(x(0))$

e em seguida  $x_i(0) \mapsto x_i(t) e^{-\delta t}$ , teremos

$$v(t, x) = v_0(x e^{-\delta t}) \exp\left(-\delta t + \frac{\vartheta}{2\delta}(1 - e^{-2\delta t})|x|^2\right).$$

Agora, basta aplicarmos a transformada inversa à solução anterior para obter a solução da equação O-U (B.0.6). Levando em conta os teoremas de convolução para transformada de Fourier, chegamos à seguinte proposição:

**PROPOSIÇÃO B.0.8.**

Seja  $\vartheta$  uma constante real positiva,  $\delta$  uma constante real e uma função de quadrado integrável  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  que é condição inicial da seguinte equação diferencial linear

$$u_t - Lu = 0, \quad u(0) = u_0,$$

onde  $L$  é o operador diferencial auto-adjunto

$$L = \vartheta \Delta + \delta x \cdot D.$$

Então a equação possui uma solução  $u(t) \in C^\omega(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))$  que pode ser representada pela ação do semigrupo  $\{e^{tL}\}_{t>0}$ :

$$u(t) = (e^{tL} u_0)(x) \equiv \mathfrak{D}_{-\delta}[u_0 * \mu_U](x),$$

onde

$$\mathfrak{D}_{-\delta}[f](x) \doteq f(e^{\delta t} x)$$

e  $\mu_U$  é a distribuição gaussiana com matriz de variância dada por

$$U = \frac{\vartheta}{\delta}(e^{t\delta} - 1) I$$

e  $I$  é a matriz unitária  $d \times d$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** A analiticidade do semigrupo segue do fato do operador ser auto-adjunto com espectro limitado inferiormente (como observado em (3.3.6),  $L$  é um operador positivo) o que garante que o mesmo é um operador setorial de acordo com a definição A.3.1. Portanto segue do teorema A.3.3 que  $L$  gera um semigrupo analítico. ■

**DEFINIÇÃO B.0.10.** Seja  $\nu$  um multi-índice,  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)$  formado por índices  $\nu_i \in \mathbb{N}$ . Definimos o polinômio  $H_\nu$  sobre o espaço  $\mathbb{R}^d$  a partir dos polinômios de Hermite na reta na forma

$$H_\nu(x) \equiv H_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d}(x) \doteq \prod_{i=1}^d H_{\nu_i}(x_i),$$

onde  $H_{\nu_i}$  são os polinômios na reta e  $x_i$  as componentes do vetor  $x \in \mathbb{R}^d$ .

A cada  $k = 0, 1, \dots$ , vamos expressar por  $\mathfrak{H}_k$  o subespaço linear fechado de  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$  formado pela combinação linear dos polinômios de Hermite  $H_\nu$  com  $|\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i = k$ . Então é possível verificar que os subespaços  $\mathfrak{H}_k$  são mutuamente ortogonais e que  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$  é formado pela soma direta deles (veja por exemplo [8]).

O teorema seguinte trata da ação do operador O-U no espaço  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$ .

**LEMA B.0.11.**

Seja  $L$  o operador linear O-U (B.0.9) definido no domínio  $\mathcal{D}(L)$

$$\mathcal{D}(L) = \{f \in \mathbf{L}^2(\gamma_d) : Lf \in \mathbf{L}^2(\gamma_d)\}.$$

Então, o espectro de  $L$ ,  $\sigma(L)$ , é dado pelo conjunto de valores reais positivos

$$\sigma(L) = \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

A cada autovalor  $n$  está associado um subespaço de  $\mathbf{L}^2(\gamma_d)$ ,  $\mathfrak{H}_k$ , formado pela combinação linear dos polinômios de Hermite definidos em  $\mathbb{R}^d$ ,  $H_{\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d}(x)$  tais que  $\sum_{i=1}^d \nu_i = n$ . Além disso o domínio do operador coincide com o espaço de Sobolev  $\mathbf{H}^2(\gamma_d)$ .

**DEMONSTRAÇÃO:** Seja  $e^{tL}$  o semigrupo de Ornstein-Uhlenbeck gerado pelo operador diferencial (B.0.9), de acordo com a fórmula de Mehler (B.0.10), a ação do semigrupo sobre um elemento  $f \in \mathbf{L}^p(\gamma_d)$  possui uma representação integral dada pela operação de convolução com uma medida gaussiana,

$$(B.0.14) \quad [e^{tL}f](x) = [f * \gamma_{(1-e^{-2t})I_d}](e^{-t}x) \in \mathbf{L}^p(\gamma_d).$$



Vamos considerar também, a seguinte generalização da função geratriz para os polinômios de Hermite em dimensão  $d$ , dada pelo produto da geratriz para cada  $x_i$ :

$$(B.0.15) \quad \begin{aligned} G_d(x; \tau) &\doteq e^{-\frac{d}{2}\tau^2 + \tau \mathbf{1} \cdot x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\nu| \leq n} \delta_{|\nu|, n} \frac{\tau^n}{\sqrt{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_d!}} H_\nu(x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \end{aligned}$$

onde  $a$  é uma constante real,  $\delta$  é o delta de Kroenecker,  $\mathbf{1}$  é o vetor unitário em dimensão  $d$  e  $\nu$  é o multi-índice  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)$  com  $|\nu| = \sum_{i=1}^d \nu_i$ .

Combinando a representação integral do semigrupo à função geratriz para os polinômios de Hermite (B.0.15) somos capazes de encontrar o espectro do operador O-U e as autofunções associadas.

A ação de  $e^{tL}$  sobre  $G_d(x; \tau)$  nos fornece informação sobre os autovalores e autovetores do operador associado ao semi-grupo. Vejamos, utilizando a representação (B.0.14)

$$e^{tL} G_d(x; \tau) = e^{-\frac{d}{2}\tau^2 + \tau e^{-t} \mathbf{1} \cdot x} \left( \frac{1}{2\pi(1-e^{-2t})} \right)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d y e^{-\tau \mathbf{1} \cdot y - \frac{1}{2(1-e^{-2t})} |y|^2}.$$

A mudança de variável  $y = \omega - \tau(1-e^{-2t}) \mathbf{1}$ , permite reescrever a integral acima na forma

$$(B.0.16) \quad \begin{aligned} e^{tL} G_d(x; \tau) &= e^{-\frac{d}{2}e^{-2t}\tau^2 + \tau e^{-t} \mathbf{1} \cdot x} \underbrace{\left( \frac{1}{2\pi(1-e^{-2t})} \right)^{\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d \omega e^{-\frac{1}{2(1-e^{-2t})} |\omega|^2}}_{=1} \\ &= G_d(x; e^{-t}\tau) \end{aligned}$$

Considerando agora a representação de  $G_d(x; \tau)$  em termos de polinômios de Hermite (B.0.15), a ação do operador  $e^{tL}$  descrita pela equação anterior corresponde a seguinte relação:

$$e^{tL} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\nu| \leq n} C_{\nu, n} \tau^n H_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\nu| \leq n} C_{\nu, n} (e^{-t}\tau)^n H_\nu(x),$$

onde

$$C_{\nu, n} = \frac{\delta_{|\nu|, n}}{\sqrt{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_d!}}.$$

Como o semigrupo  $e^{tL}$  é linear,

O semigrupo gerado pelo operador  $\mathfrak{L}$ ,  $T_t = e^{t\mathfrak{L}}$ , integra a representação explícita para a solução da equação (B.0.20), descrita originalmente por Kolmogorov,

$$(B.0.22) \quad u(t, x) = T_t u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det Q_t}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d y e^{-y \cdot Q_t^{-1} y} u_0(e^{tB} - y), \quad t > 0,$$

onde

$$(B.0.23) \quad Q_t = \int_0^t ds e^{sB} Q e^{sB^*}$$

e  $B^*$  é a transposta de  $B$ .

Podemos notar que a solução (B.0.22) é da forma

$$(B.0.24) \quad u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^d} dy P_t(x, y) u_0(y),$$

onde a função positiva  $P_t(x, y)$  satisfaz as seguintes relações

$$(B.0.25) \quad \int_{\mathbb{R}^d} d^d y P_t(x, y) = 1, \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

$$(B.0.26) \quad P_{t+s} = \int_{\mathbb{R}^d} d^d z P_t(x, z) P_s(z, y), \quad t, s > 0, x, y \in \mathbb{R}^d.$$

A igualdade (B.0.26) é conhecida como equação de Chapman-Kolmogorov.

Por satisfazer as relações anteriores, a função  $P_t$  é uma densidade de probabilidade para todo  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ . A equação (B.0.20) e sua solução, escrita com a ajuda de uma função densidade de probabilidade, ilustram as conexões entre os campos de equações diferenciais parabólicas e da teoria de probabilidade.

Apesar de possuir um significado probabilístico, a expressão (B.0.24), considerada de forma isolada, não permite construir uma solução para a equação O-U. Uma maneira construtiva de chegar a solução foi proposta originalmente por Ito – a teoria dos processos estocásticos. De acordo com ela, uma generalização natural do método das características aplicada à equação O-U consiste no estudo das soluções da seguinte equação (equação de

Langevin) :

$$(B.0.27) \quad dX = BX \, dt + Q^{1/2} dW(t), \quad X(0) = x,$$

onde  $W(t)$  é um processo de Wiener (movimento browniano) em  $\mathbb{R}^d$  com matriz de covariância  $Q$ . As soluções da equação de Langevin são as características estocásticas  $X(t, x)$ , a partir das quais obtemos a solução  $u(t, x)$ ,

$$u(t, x) = \mathbb{E}[u_0(X(t, x))], \quad t \geq 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

A fórmula da variação das constantes pode ser empregada para resolver a equação estocástica, assim, temos que

$$X(t, x) = S(t)x + \int_0^t ds S(t-s) Q^{1/2} dW(s),$$

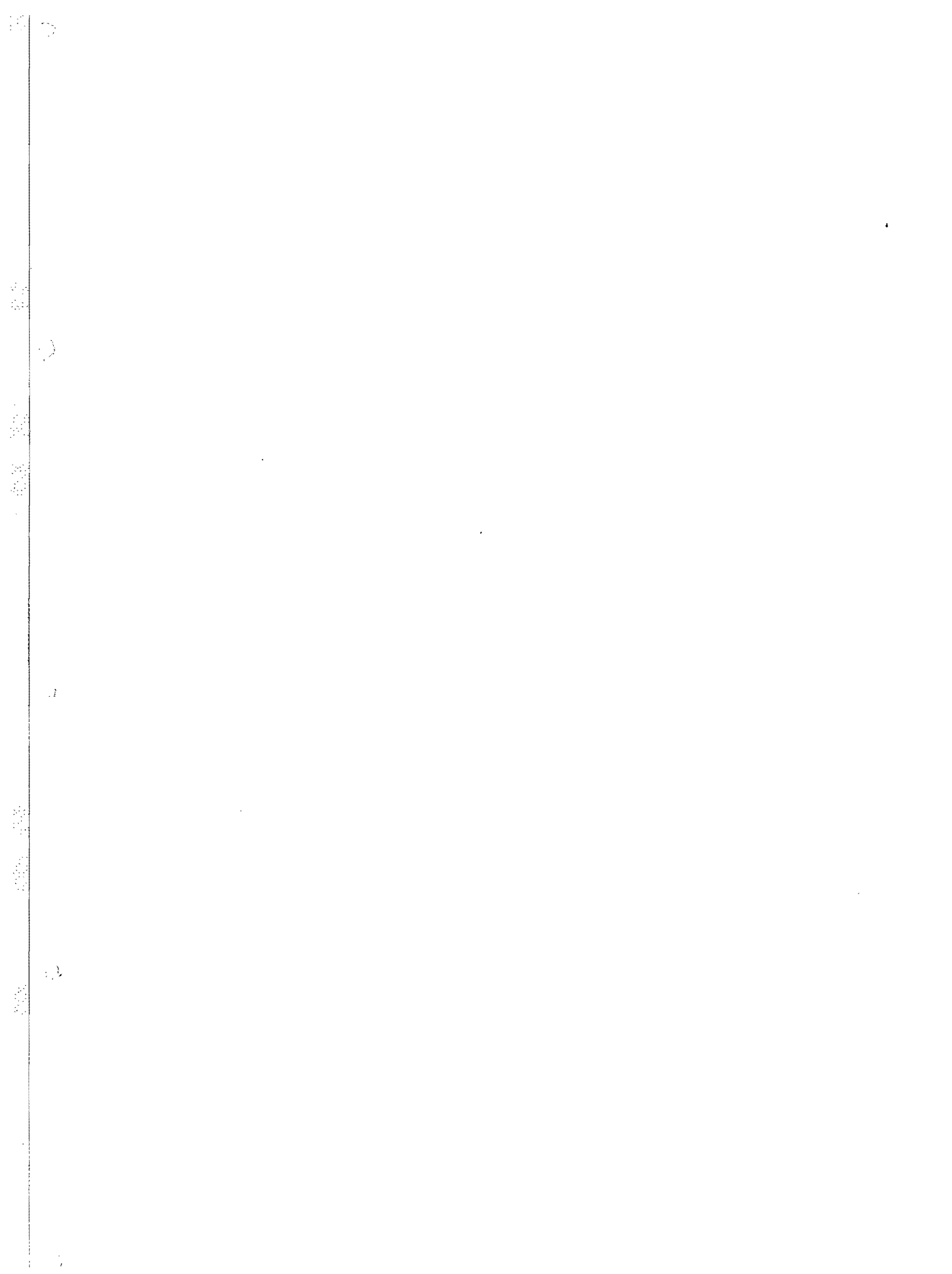
onde  $S(t) = \exp(Bt)$  é a solução fundamental de (B.0.27).

Resultados recentes ([48] e as referências lá contidas), conseguem descrever o espectro do operador O-U,  $\mathcal{L}$ , no espaço  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$  a partir do semigrupo por ele gerado. Sabe-se que, devido à compacidade do resolvente para qualquer  $1 < p < \infty$ , o espectro do operador é discreto e formado por um conjunto de autovalores de multiplicidade finita. Novamente, devido à compacidade do resolvente, o espectro não depende de  $p$ . É possível demonstrar que os autovalores do operador dependem apenas dos autovalores da matriz  $B$ . Seja  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$  o conjunto dos autovalores de  $B$ , então o espectro do operador O-U,  $\sigma(\mathcal{L})$ :

$$\sigma(\mathcal{L}) = \left\{ \sum_{i=1}^r n_i \lambda_i : n_i \in \mathbb{N} \right\},$$

além disso, as autofunções correspondentes são formadas por polinômios e formam uma base completa em  $L^p(\mathbb{R}^d, \mu)$ .

Portanto o espectro do operador diferencial  $\Delta - x \cdot D$  reflete o fato de que a sua matriz  $B$  é dada por  $-I_d$ ; como  $-1$  é um autovalor de multiplicidade  $d$ , o espectro é dado pelo conjunto dos inteiros não positivos.



## APÊNDICE C

### O fluxo do GR para as funções de Ursell

Em dois artigos [11] e [12], Brydges e Kennedy sugerem a decomposição do potencial em várias escalas, e. g.,

$$(C.0.28) \quad \phi(x_i, x_j) := \int_{\alpha}^{\omega} d\tau \frac{d}{d\tau} \phi_{\text{esc}}(\tau x_i, x_j) \equiv \int_{\alpha}^{\omega} d\tau v(\tau x_i, x_j).$$

Assim o potencial na escala  $t$ ,  $\phi_{\text{esc}}(t, x_i, x_j)$ ,  $t \in (\alpha, \omega)$ , varia entre a situação onde as partículas estão completamente desacopladas – gás ideal –  $\phi_{\text{esc}}(\alpha, x_i, x_j) = 0$  até o potencial original no extremo do intervalo dos valores de  $t$ ,  $\phi_{\text{esc}}(\omega, x_i, x_j) = \phi(x_i, x_j)$ . Através da introdução dessa decomposição em escalas é possível derivar uma equação diferencial para o fluxo das funções de Ursell (4.1.5) em termos do parâmetro de escala  $t$ . Esse formalismo permite, em particular, o tratamento da escala como o inverso da temperatura  $\beta$ , nesse caso o domínio seria dado por  $(0, \beta)$ . Para tanto basta considerar  $v(\tau, x_i, x_j) \equiv \phi(x_i, x_j)$  e desta forma  $\beta\phi(x_i, x_j) = \int_0^{\beta} d\tau v(\tau x_i, x_j)$ .

Sem deixar de ser preciso e para aliviar a notação, a partir desse ponto vamos considerar para um dado conjunto de índices  $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\psi_I^c(t) \equiv \psi^c(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ . De maneira semelhante para os termos que envolvem o potencial,  $v_{i,j}(t) \equiv v(t, x_i, x_j)$  e assim por diante para os demais termos. As equações para as funções de Ursell são descritas pelo seguinte lema:

**LEMA C.0.12** (Brydges-Kennedy, 1987).

*Sejam as coordenadas espaciais  $x_1, \dots, x_n$ . O sistema de equações para as funções de Ursell  $\psi_I^c(t)$  é dado por*

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\psi_I^c}{dt} = - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \psi_I^c(t) - \frac{1}{2} \sum_{J \subset I} \psi_J^c(t) \psi_{I \setminus J}^c(t) \sum_{j \in J, i \in I \setminus J} v_{i,j}(t)$$

com condição inicial

$$\psi_I^c(t_0) = \begin{cases} 1, & |I| = 1 \\ 0, & |I| > 1 \end{cases},$$

onde a soma em  $J \subset I$  se estende sobre os subconjuntos próprios de  $I$ . A solução da equação é única em seu intervalo de existência  $t \in [t_0, T)$ .

DEMONSTRAÇÃO: A função de Ursell em escala  $t$  é dada, por definição, pela expressão

$$\psi_I^c(t) = \sum_{\substack{G \\ \text{conexo em } I}} \prod_{\langle i,j \rangle \in E(G)} e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{i,j}(\tau)} - 1.$$

A partir dessa definição podemos derivar a equação diferencial,

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\psi_I^c}{dt} = - \sum_{\substack{G \\ \text{conexo em } I}} \sum_{\langle i,j \rangle \in E(G)} v_{i,j}(t) e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{i,j}(\tau)} \prod_{\substack{\langle k,l \rangle \in E(G): \\ \langle k,l \rangle \neq \langle i,j \rangle}} e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1.$$

A última equação pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta} \frac{d\psi_I^c}{dt} &= - \sum_{\substack{G \\ \text{conexo em } I}} \sum_{\langle i,j \rangle \in E(G)} v_{i,j}(t) e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{i,j}(\tau)} \prod_{\substack{\langle k,l \rangle \in E(G): \\ \langle k,l \rangle \neq \langle i,j \rangle}} e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1. \\ &= - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{i,j}(\tau)} \sum_{\substack{G \text{ conexo:} \\ \langle i,j \rangle \in E(G)}} \prod_{\substack{\langle k,l \rangle \in E(G): \\ \langle k,l \rangle \neq \langle i,j \rangle}} e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \\ &= - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \sum_{\substack{G \text{ conexo:} \\ \langle i,j \rangle \in E(G)}} \prod_{\substack{\langle k,l \rangle \in E(G) \\ \langle k,l \rangle \neq \langle i,j \rangle}} \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \right) \left( \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{i,j}(\tau)} - 1 \right) + 1 \right) \\ &= - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \sum_{\substack{G \text{ conexo:} \\ \langle i,j \rangle \in E(G)}} \prod_{\langle k,l \rangle \in E(G)} \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \right) \\ \text{(C.0.29)} \quad &= \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \sum_{\substack{G \text{ conexo:} \\ \langle i,j \rangle \in E(G)}} \prod_{\substack{\langle k,l \rangle \in E(G): \\ \langle k,l \rangle \neq \langle i,j \rangle}} \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \right). \end{aligned}$$

O primeiro termo da última equação pode ser desmembrado em duas partes:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \sum_{\substack{G \\ \text{conexo}}} \prod_{\langle k,l \rangle \in E(G)} \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \right) \\
& + \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \sum_{\substack{G \text{ conexo:} \\ \langle i,j \rangle \notin E(G)}} \prod_{\langle k,l \rangle \in E(G)} \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Destes dois, o primeiro termo é igual a  $-\sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \psi_I^c(t)$  e a soma do segundo termo com o segundo termo da equação (C.0.29) pode ser fatorada, teremos então

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} \frac{d\psi_I^c}{dt} &= - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \psi_I^c(t) \\
&+ \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \left( \sum_{\substack{G \text{ conexo:} \\ \langle i,j \rangle \notin E(G)}} \prod_{\langle k,l \rangle \in E(G)} \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{\substack{G \text{ conexo:} \\ \langle i,j \rangle \in E(G)}} \prod_{\substack{\langle k,l \rangle \in E(G) \\ \langle k,l \rangle \neq \langle i,j \rangle}} \left( e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1 \right) \right)
\end{aligned}$$

Finalmente, ao observar o termo entre parênteses na equação anterior, podemos notar que devido a relação de um para um entre os grafos conexos que não dispõem da ligação  $\langle i, j \rangle$  (no primeiro somatório) e os grafos no segundo somatório que possuem duas partes, individualmente conexas, unidas pela ligação  $\langle i, j \rangle$ . Levando em conta que possuem sinais contrários, os únicos termos que sobrevivem são aqueles dados pelos grafos nos quais a ligação  $\langle i, j \rangle$  conecta duas outras partes do grafo que são também, por si só, conexas. Então,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\beta} \frac{d\psi_I^c}{dt} &= - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \psi_I^c(t) \\
&- \frac{1}{2} \sum_{\substack{J \subset I: \\ j \in J, i \in I \setminus J}} v_{i,j}(t) \sum_{\substack{G_1 \\ \text{vértices em } J}} \sum_{\substack{G_2 \\ \text{vértices em } I \setminus J}} \prod_{\langle k,l \rangle \in E(G_1) \cup E(G_2)} e^{-\beta \int_{\alpha}^t dr v_{k,l}(\tau)} - 1.
\end{aligned}$$

Agora o último termo da equação pode também ser descrito como uma função de Ursell e assim a equação diferencial para as funções de Ursell em uma escala  $t$  é dada por

$$\frac{1}{\beta} \frac{d\psi_I^c}{dt} = - \sum_{i < j \in I} v_{i,j}(t) \psi_I^c(t) - \frac{1}{2} \sum_{J \subset I} \psi_J^c(t) \psi_{I \setminus J}^c(t) \sum_{j \in J, i \in I \setminus J} v_{i,j}(t),$$

com condição inicial

$$\psi_I^c(t_0) = \begin{cases} 1, & |I| = 1 \\ 0, & |I| > 1 \end{cases}.$$

A partir da equação diferencial ordinária e através do método da variação de parâmetros encontramos a equação integral

$$\frac{1}{\beta} \psi_I^c(t) = -\frac{1}{2} \sum_{J \subset I} \int_{t_0}^t d\tau \exp \left\{ -\beta \sum_{i < j \in I} \int_{\tau}^t ds v_{i,j}(s) \right\} \psi_J^c(\tau) \psi_{I \setminus J}^c(\tau) \sum_{j \in J, i \in I \setminus J} v_{i,j}(\tau)$$

com  $\psi_{\{i\}}^c(t) \equiv 1$ , para todo  $i \in I$ .

Podemos verificar que a solução da equação é única supondo que existe uma função  $\varphi_I^c(t)$  que é outra solução da equação com as mesmas condições iniciais. Se  $|I| = 1$ , então por hipótese,  $\psi_I^c(t) = \varphi_I^c(t) \equiv 1$ . Uma vez que o termo não linear no lado direito da equação envolve apenas termos  $\varphi_J^c(t)$  tais que  $|J| < |I|$ , temos que

$$\frac{d}{dt} (\psi_I^c(t) - \varphi_I^c(t)) = - \sum_{i,j \in I} v_{i,j}(t) (\psi_I^c(t) - \varphi_I^c(t))$$

e portanto  $\psi_I^c(t) = \varphi_I^c(t)$  para todo  $t$  no intervalo de existência. ■



## Referências Bibliográficas

- [1] V. S. BELONOSOV AND T. I. ZELENYAK, *Nonlocal Problems in the Theory of Quasilinear Parabolic Equations*, Izd. Novos. Gos. Univ., 1975.
- [2] G. BENFATTO, *An iterated Mayer series expansion for the Yukawa gas*, J. of Stat. Phys., 41 (1985), pp. 671–684.
- [3] G. BENFATTO, G. GALLAVOTTI, AND F. NICOLÒ, *On the massive sine-Gordon equation in the first few regions of collapse*, Comm. Math. Phys., 83 (1982), pp. 387–410.
- [4] ———, *The dipole phase in the two-dimensional hierarchical Coulomb gas; analyticity and correlations decay*, Comm. Math. Phys., 106 (1986), pp. 277–288.
- [5] ———, *On the analyticity of the pressure in the hierarchical dipole gas*, J. of Stat. Phys., 55 (1989), pp. 739–744.
- [6] G. BENFATTO AND J. RENN, *Nontrivial fixed point and screening in the hierarchical two-dimensional Coulomb gas*, J. of Stat. Phys., 67 (1992), pp. 957–980.
- [7] H. BERESTYCKI, S. KAMIN, AND G. I. SIVASHINSKY, *Metastability in a flame front evolution equation*, Interfaces Free Bound., 3 (2001), pp. 361–392.
- [8] V. I. BOGACHEV, *Gaussian Measures*, vol. 62 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 1998.
- [9] D. C. BRYDGES, *A short Course on Cluster Expansions*, K. Ostervald and R. Stora ed., 1986.
- [10] D. C. BRYDGES AND P. FEDERBUSH, *A new form of the Mayer expansion in classical statistical mechanics*, J. Math. Phys., 19 (1978), pp. 2064–2067.
- [11] D. C. BRYDGES AND T. KENNEDY, *Convergence of multiscale Mayer series*, in VIII<sup>th</sup> International congress in mathematical physics, Marseille 1986, M. Mebkhout and R. Seneor, eds., World Scientific, 1987, pp. 311–317.
- [12] ———, *Mayer expansions and the Hamilton-Jacobi equation*, J. of Stat. Phys., 48 (1987), pp. 19–49.
- [13] D. C. BRYDGES AND A. P. MARTIN, *Coulomb systems at low density: A review*, J. of Stat. Phys., 96 (1999), pp. 1163–1330.
- [14] J. M. BURGERS, *Mathematical examples illustrating relations occurring in the theory of turbulent fluid motion.*, Verh. Nederl. Akad. Wetensch., Afd. Natuurk. Sect. 1., 17 (1939), pp. 1–53.

- 
- [15] ———, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, in *Advances in Applied Mechanics*, R. von Mises and T. von Kármán, eds., Academic Press, Inc., 1948, pp. 171–199.
- [16] N. CHAFEE AND E. F. INFANTE, *A bifurcation problem for a nonlinear partial differential equation of parabolic type*, *J. Applicable Anal.*, 4 (1974), pp. 17–37.
- [17] C. CHICONE, *The monotonicity of the period function for planar hamiltonian vector fields*, *J. of Diff. Eqns.*, 69 (1987), pp. 310–321.
- [18] W. A. COPPEL AND L. GAVRILOV, *The period function of a hamiltonian quadratic system*, *Diff. and Int. Eqns.*, 6 (1993), pp. 1357–1365.
- [19] R. M. CORLESS, G. H. GONNET, D. E. G. HARE, D. J. JEFFREY, AND D. E. KNUTH, *On the Lambert W function*, *Adv. Comp.Math.*, 5 (1996), pp. 329–359.
- [20] R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of Mathematical Physics*, vol. II, John Wiley & Sons, 1989.
- [21] A. ERDÉLYI, ed., *Higher Transcendental Functions*, vol. II, McGraw Hill, 1953–1955.
- [22] G. FELDER, *Renormalization group in the local potential approximation*, *Comm. Math. Phys.*, 111 (1987), pp. 101–121.
- [23] H. L. FRISCH, N. RIVIER, AND D. WYLER, *Classical hard-sphere fluid in infinitely many dimensions*, *Phys. Rev. Lett.*, 54 (1985), pp. 2061–2063.
- [24] ———, *Erratum: Classical hard-sphere fluid in infinitely many dimensions*, *Phys. Rev. Lett.*, 55 (1985), p. 550.
- [25] ———, *Hard-sphere fluid in infinitely many dimensions*, *Phys. Rev. A*, 36 (1987), pp. 2422–2431.
- [26] J. FRÖLICH AND T. SPENCER, *The Kosterlitz-Touless transition in two-dimensional abelian spin systems and the Coulomb gas*, *Comm. Math. Phys.*, 81 (1981), pp. 527–602.
- [27] N. N. FROLOV, *Imbedding theorems for spaces of functions of a countable number of variables and their applications*, *Siberian Math. J.*, 22 (1981), pp. 638–652.
- [28] G. GALLAVOTTI AND F. NICOLÒ, *The ‘screening phase transition’ in the two-dimensional Coulomb gas*, *J. of Stat. Phys.*, 39 (1985), pp. 133–156.
- [29] K. GAWĘDZKI AND A. KUPIAINEN, *Triviality of  $\phi_4^4$  and all that in a hierarchical model approximation*, *J. of Stat. Phys.*, 29 (1982), pp. 683–698.
- [30] ———, *Lattice dipole gas and  $(\nabla\phi)^4$  models at long distances: decay of correlations and scaling limit*, *Comm. Math. Phys.*, 92 (1984), pp. 531–553.
- [31] Y. GIGA AND R. V. KOHN, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 38 (1985), pp. 297–319.
- [32] J. GLIMM AND A. JAFFE, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Springer-Verlag, 1981.

- 
- [33] M. GÖPFERT AND G. MACK, *Iterated Mayer series expansion for classical gases at low temperatures*, Comm. Math. Phys., 81 (1981), pp. 97–126.
- [34] J. GROENEVELD, *Two theorems on classical many-particle systems*, Physics Letters, 3 (1962), pp. 50–51.
- [35] L. F. GUIDI AND D. H. U. MARCHETTI, *Renormalization group flow of the two-dimensional hierarchical Coulomb gas*, Comm. Math. Phys., 219 (2001), pp. 671–702.
- [36] ———, *A comparison analysis of Sivashinsky's type evolution equation describing flame propagation in channels*, Phys. Letters A, 308 (2003), pp. 162–172.
- [37] J. K. HALE, *Dynamical systems and stability*, J. Math. Anal. Appl., 26 (1969), pp. 39–59.
- [38] D. HENRY, *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*, vol. 840 of Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1981.
- [39] T. KAPPELER, K. PINN, AND C. WIECZERKOWSKI, *Renormalization group flow of a hierarchical sine-Gordon model by partial differential equations*, Comm. Math. Phys., 136 (1991), pp. 357–368.
- [40] J. P. LASALLE, *An invariance principle in the theory of stability*, in Differential Equations and Dynamical Systems: Proceedings of an International Symposium held at the University of Puerto Rico, Mayaguez, Puerto Rico, December 27-30, 1965, J. K. Hale and J. P. LaSalle, eds., Academic Press, Inc, 1967, pp. 277–286.
- [41] J. L. LEBOWITZ AND O. PENROSE, *Convergence of virial expansions*, J. Math. Phys., 5 (1964), pp. 841–847.
- [42] ———, *Analytic and clustering properties of thermodynamic functions and distribution functions for classical lattice and continuum systems*, Comm. Math. Phys., 11 (1968), pp. 99–124.
- [43] D. C. LEWIS, *Renormalization group fixed points in the local potential approximation for  $d \geq 3$* , Comm. Math. Phys., 170 (1995), pp. 529–539.
- [44] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, AND R. P. SONI, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, McGraw Hill, 3<sup>rd</sup> ed., 1966.
- [45] D. H. U. MARCHETTI AND J. F. PEREZ, *A hierarchical model exhibiting the Kosterlitz–Thouless fixed point*, Phys. Letters A, 118 (1986), pp. 74–76.
- [46] ———, *The Kosterlitz–Thouless phase transition in two-dimensional hierarchical Coulomb gases*, J. of Stat. Phys., 55 (1989), pp. 141–156.
- [47] L. A. D. J. MEDEIROS AND M. M. MIRANDA, *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elípticos não Homogêneos)*, Wiley-Interscience Publishers, 1988.
- [48] G. METAFUNE, D. PALLARA, AND E. PRIOLA, *Spectrum of Ornstein-Uhlenbeck operators in  $L^p$  spaces with respect to invariant measures*, J. Funct. Anal., 196 (2002), pp. 40–60.

- 
- [49] R. A. MINLOS, *Generalized random processes and their extension in measure*, Trudy Moskov. Mat. Obšč., 8 (1959), pp. 497–518.
- [50] A. G. M. NEVES, *Convergência da série de Mayer em altas temperaturas*, Matemática Universitária, 30 (2001), pp. 67–101.
- [51] C. PAIVA AND J. F. PEREZ, *A hierarchical model for random walks in random media*, J. of Stat. Phys., 71 (1993), pp. 435–452.
- [52] O. PENROSE, *Convergence of fugacity expansions for fluids and lattice gases*, J. Math. Phys., 4 (1963), pp. 1312–1320.
- [53] ———, *Convergence of fugacity expansions for classical systems*, in Statistical Mechanics: Foundations and Applications, IUPAP meeting (Copenhagen, 1966), T. A. Bak, ed., Benjamin Inc., 1967, pp. 101–109.
- [54] A. PROCACCI, E. PEREIRA, A. G. M. NEVES, AND D. H. U. MARCHETTI, *Coulomb interaction symmetries and the Mayer series in the two dimensional dipole gas*, J. of Stat. Phys., 87 (1997), pp. 877–889.
- [55] M. H. PROTTER AND H. F. WEINBERGER, *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, Inc., 1964.
- [56] Z. RAKIB AND G. I. SIVASHINSKY, *Instabilities in upward propagating flames*, Comb. Sci. and Tech., 54 (1987), pp. 69–84.
- [57] D. RUELLE, *Correlations functions of classical gases*, Annals of Physics, 25 (1963), pp. 109–120.
- [58] D. RUELLE, *Statistical mechanics: Rigorous results*, Advanced Book Classics, Addison-Wesley publishing Company, Inc., 1988.
- [59] B. SIMON, *Functional Integration and Quantum Physics*, vol. 86 of Pure and Applied Mathematics, Acaemic Press, Inc., 1979.
- [60] G. I. SIVASHINSKY, *On the intrinsic dynamics of premixed flames*, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A, 332 (1990), pp. 135–148.
- [61] E. M. STEIN, *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, vol. 30 of Princeton Mathematical Series, Princeton University Press, 1970.
- [62] X. SUN AND M. J. WARD, *Metastability for a generalized Burgers equation with applications to propagating flame fronts*, European J. Appl. Math., 10 (1999), pp. 27–53.
- [63] L. TONKS, *The complete equation of state of one, two and three dimensional gases of hard elastic spheres*, Phys. Rev., 50 (1936), pp. 955–963.
- [64] H. S. WILF, ed., *Generatingfunctionology*, Academic Press, Inc., segunda ed., 1994.
- [65] T. I. ZELENYAK, *On stabilizing solutions of boundary-value problems for a parabolic second order equation with one spatial variable*, Diff. Equat., 4 (1968), pp. 34–45.

- 
- [66] T. I. ZELENYAK, M. M. LAVRENTIEV JR., AND M. P. VISHNEVSKII, *Qualitative Theory of Parabolic Equations Part 1*, VSP, primeira ed., 1997.