SBI-IFUSP

Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física-Matemática

Tese de Doutorado

Contribuições Logarítmicas na Temperatura na Teoria de Yang-Mills no Calibre Axial Temporal

Alex Guerra

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel - IFUSP

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Alfredo Takashi Suzuki - IFT - UNESP

Prof. Dr. Henrique Fleming - IFUSP

Prof. Dr. João Barcelos-Neto - UFRJ

Prof. Dr. Jorge Lacerda de Lyra - IFUSP

São Paulo

2002

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3692
ex. 1

del. 29/04/02

536.5
G934c
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e
Informação
do Instituto de Física da Universidade de São
Paulo

Guerra, Alex

Contribuições Logarítmicas na Temperatura na
Teoria de Yang-Mills no Calibre Axial Temporal.
São Paulo 2002.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento de Física
Matemática

Orientador: Prof. Dr. Josif Frenkel
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Logaritmos; 2. Campos;
3. Yang-Mills; 4. Temperatura;
5. Temporal.

USP/IF/SBI-040/2002

Resumo

Esta tese estuda as contribuições proporcionais a $\ln(T)$ da função de três pontos na teoria de Yang-Mills no calibre axial temporal na ordem de um loop no limite de altas temperaturas. Nós provamos que tais contribuições satisfazem uma identidade de Ward abeliana que as relaciona com o tensor de polarização do glúon, concluindo que são invariantes de Lorentz e têm a mesma estrutura dos pólos ultravioleta que ocorrem a temperatura zero. Usando uma simples prescrição para as constantes de renormalização e as equações do grupo de renormalização a temperatura finita, foi possível mostrar que a constante de acoplamento efetiva decai logarithmicamente em função da temperatura, de acordo com a liberdade assintótica, e é idêntica ao resultado obtido numa classe geral de calibres covariantes.

Abstract

This thesis studies the $\ln(T)$ contributions of the three-point function in the Yang-Mills theory in the temporal axial gauge at one-loop level in the high-temperature limit. We proved that such contributions satisfy an abelian Ward identity which relates them with the gluon polarization tensor, concluding that they are Lorentz invariant and have the same structure of the ultraviolet poles which occur at zero temperature. Using a simple prescription for the renormalization constants and the finite-temperature renormalization group equations, it was possible to show that the effective coupling constant decreases logarithmically as a function of temperature, in accordance with asymptotic freedom, and is identical to the result obtained in a general class of covariant gauges.

Sumário

Introdução	1
1 Introdução à Teoria de Campos a Temperatura Finita	4
1.1 Mecânica Estatística Quântica e o Campo Escalar Neutro . . .	4
1.2 Amplitudes de Espalhamento Frontais	9
1.3 Teoria de Yang-Mills	13
1.4 Grupo de Renormalização a Temperatura Finita	17
2 Contribuições Logarítmicas do Tensor de Polarização	21
3 Contribuições Logarítmicas da Função de Três Glúons	28
3.1 Cálculo da Função de Três Glúons	28
3.2 Contribuições Logarítmicas	32
3.3 Simetria BRS e a Função de Três Glúons Exata	37
4 Conclusão	41
A Integraís Angulares	43
B Cálculos Envolvendo Computação Simbólica	45

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, em primeiro lugar, ao professor Josif Frenkel pela orientação e amizade oferecidas durante estes anos, e a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desta tese. Agradeço também ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Introdução

A Teoria de Campos a Temperatura Finita é a associação da Teoria de Campos com a Mecânica Estatística a fim de entender o comportamento da matéria quando a temperatura é extremamente elevada, a tal ponto, por exemplo, em que os prótons, nêutrons e píons se fundem para formar o chamado plasma de quarks e glúons. Apesar destas temperaturas envolverem condições extremas muito distantes da experiência humana diária, elas têm uma importância fundamental para a compreensão de diversos processos, como o estado da matéria nuclear dentro de uma estrela de nêutrons, processos que aconteceram no princípio do universo ou ainda colisões ultra-relativísticas de íons pesados [1–3].

Um dos aspectos mais importantes da teoria é o estudo de como os efeitos térmicos afetam a interação forte. Em geral, a temperatura zero, esta interação pode ser caracterizada por uma constante de acoplamento efetiva $g(\mu)$, onde μ representa uma escala de energia que aparece naturalmente após o procedimento de renormalização. Uma das características mais importantes da Cromodinâmica Quântica é a liberdade assintótica [4, 5], ou seja, a constante de acoplamento $g(\mu)$ é uma função decrescente da energia, o que está de acordo com o confinamento dos quarks nas condições usuais e todas as outras observações experimentais realizadas até hoje [6].

Quando correções térmicas são levadas em consideração, ocorre uma dependência induzida da constante de acoplamento efetiva na temperatura, isto é, $g = g(\mu, T)$. Embora o estudo das propriedades de $g(\mu, T)$ tenha se iniciado há algum tempo [7], ainda persistem problemas importantes sobre seu comportamento no regime de altas temperaturas. Em primeiro lugar, as propriedades termodinâmicas de um sistema são calculadas a partir do potencial termodinâmico [8], que é obtido em teoria de perturbação a partir dos diagramas de Feynman sem momentos externos [2]. Usando o formalismo de tempo imaginário [2, 3], no qual ocorre a substituição do tempo pela temperatura, e a ausência de parâmetros dimensionais externos, é natural esperar que a constante de acoplamento a ser aplicada nas expressões para as propriedades termodinâmicas deva decair logicamente em função da

temperatura devido à liberdade assintótica. Fisicamente, acredita-se que à medida que a temperatura aumente, haja um aumento da energia interna dos quarks e uma diminuição de $g(\mu, T)$, até que a partir de certa temperatura crítica os hádrons se sobreponham e passe a existir um plasma de quarks e glúons livres. No entanto, não há razão a priori para que a constante de acoplamento efetiva seja assintoticamente pequena em altas temperaturas como resultado de uma solução formal das equações do grupo de renormalização a temperatura finita. Em outras palavras, é preciso verificar se há um escalonamento real entre μ e T de forma que a temperatura sirva de escala de energia para um sistema em equilíbrio termodinâmico.

Na referência [9], foram usados argumentos gerais que indicam que as contribuições sub-dominantes logarítmicas na temperatura são covariantes por transformações de Lorentz para quaisquer funções de Green térmicas no limite de altas temperaturas, relacionando-se de forma muito simples com os pólos ultravioleta da teoria a temperatura zero. De fato, a falta de invariância de Lorentz geral muda significativamente as estruturas tensoriais das funções de Green, levando a uma ambiguidade na prescrição usada no cálculo das constantes de renormalização [10]. Aliás, verificou-se até mesmo uma discrepância entre valores de $g(\mu, T)$ calculados a partir de vértices diferentes no mesmo calibre no caso de funções de Green com momentos externos [11, 12]. Entretanto, foi possível definir uma prescrição simples que inclui de forma natural as contribuições proporcionais a $\ln(T)$ das funções de dois e três glúons nas constantes de renormalização e conseqüentemente na constante de acoplamento efetiva, confirmando a previsão de um decréscimo logarítmico [13]. Atualmente, estes argumentos foram confirmados por cálculos explícitos na ordem de um loop para uma teoria de Yang-Mills [14] numa classe geral de calibres covariantes [15].

Nesta tese, foram investigadas as contribuições logarítmicas da função de três pontos na teoria de Yang-Mills no calibre axial temporal na ordem de um loop no limite de altas temperaturas, a fim de sustentar os argumentos e cálculos descritos no parágrafo anterior, já que a constante de acoplamento efetiva, aparecendo explicitamente nas fórmulas de observáveis como a pressão, não deve depender do calibre escolhido. O método de cálculo, baseado numa continuação analítica do formalismo de tempo imaginário, consiste em expressar os diagramas de Feynman a temperatura finita em termos de amplitudes de espalhamento frontais de partículas térmicas na concha de massa [16–18]. A princípio, o calibre axial temporal tem a vantagem de preservar somente os graus de liberdade físicos (ausência de fantasmas) além de não oferecer uma complicação adicional para a estrutura tensorial das funções de Green [19], pois a temperatura finita o quadrvetor que define o referencial de repouso do sistema deve ser considerado desde o início para

qualquer calibre. Devido à complexidade, os cálculos usaram programas escritos em Maple [20], obtendo-se a forma geral das contribuições logarítmicas, as quais provou-se explicitamente estar relacionadas com as contribuições similares do tensor de polarização do glúon através de uma identidade de Ward abeliana. Assim, ao aplicar esta identidade à estrutura tensorial mais geral possível para a função de três glúons, mostrou-se que é necessário que as contribuições da forma $\ln(T)$ desta última tenham a mesma estrutura dos pólos ultravioleta com o intuito de reproduzir a invariância de Lorentz e a transversalidade das suas correspondentes na auto-energia do glúon no calibre axial temporal [21]. Desta forma, de modo análogo e com os mesmos resultados encontrados numa classe geral de calibres covariantes, foi possível incluir de forma natural as contribuições logarítmicas em $g(\mu, T)$.

Esta tese está organizada da seguinte forma: o primeiro capítulo apresenta uma breve introdução a Teoria de Campos a Temperatura Finita. O método das amplitudes de espalhamento frontais é desenvolvido com a ajuda da teoria escalar $\lambda\phi^3$, a qual serve de modelo simplificado para a teoria de Yang-Mills [22]. Além disso, discute-se em detalhe o grupo de renormalização a temperatura finita e o comportamento da constante de acoplamento efetiva. No segundo capítulo, apresentamos os cálculos e a expansão em altas temperaturas que levam às contribuições logarítmicas do tensor de polarização do glúon. O terceiro capítulo é dedicado às contribuições da forma $\ln(T)$ da função de três glúons, à identidade de Ward abeliana e sua análise como resultado da invariância BRS [23] e às consequências para $g(\mu, T)$. O último capítulo apresenta as conclusões do trabalho. Os apêndices A e B apresentam, respectivamente, as várias integrais angulares presentes no decorrer da tese e os cálculos envolvendo computação simbólica.

Neste trabalho, foram utilizados o sistema de unidades $\hbar = c = k_B = 1$ e a métrica $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = k_0^2 - \mathbf{k}^2$.

Capítulo 1

Introdução à Teoria de Campos a Temperatura Finita

Este primeiro capítulo apresenta uma breve introdução à Teoria de Campos a Temperatura Finita baseada no formalismo de tempo imaginário. O procedimento de quantização usado é a representação de Feynman das amplitudes de probabilidade por meio de integrais de trajetória [24] porque este método se torna praticamente indispensável na extensão às teorias de calibre. Na seção 1.1, são apresentados os casos mais simples, ou seja, a Mecânica Estatística Quântica, que nada mais é do que a Teoria de Campos a Temperatura Finita com dimensão espacial igual a zero, mais a generalização para o campo escalar neutro. A seção 1.2 é dedicada ao desenvolvimento do método das amplitudes de espalhamento frontais e a expansão em altas temperaturas obtida a partir dele, usando como exemplo a teoria escalar $\lambda\phi^3$. A seção 1.3 estende os resultados à teoria de Yang-Mills e discute os problemas e vantagens relacionados com a escolha do calibre axial temporal. Por último, a seção 1.4 estuda o grupo de renormalização a temperatura finita e o comportamento da constante de acoplamento efetiva. Para maiores detalhes, recomendamos as referências [2], [3] e [8].

1.1 Mecânica Estatística Quântica e o Campo Escalar Neutro

Os sistemas relativísticos em equilíbrio termodinâmico não apresentam, em geral, o número total de partículas como uma quantidade conservada. Portanto, é conveniente descrevê-los por meio do chamado ensemble grande-canônico, no qual o sistema pode trocar partículas e energia com um reservatório térmico, mantendo fixos a temperatura T , o volume V e os potenciais

químicos μ_i associados com um conjunto N_i de quantidades conservadas. Nesta tese, todos os cálculos se referem a este ensemble, mas considerando $\mu_i = 0$, o que é uma simplificação considerável (praticamente inevitável) que limita o domínio de validade dos resultados a sistemas em baixas densidades.

A descrição estatística de um sistema é baseada no operador densidade:

$$\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}}, \quad (1.1)$$

com $\hat{H}$ representando o operador hamiltoniano e $\beta = 1/T$. A média no ensemble de um observável A representado pelo operador hermitiano $\hat{A}$ é definida por:

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A})}{\text{Tr} \hat{\rho}} = Z^{-1} \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{A}), \quad (1.2)$$

onde o símbolo Tr significa a operação de traço.

A função de partição $Z = \text{Tr} \hat{\rho}$ merece um destaque especial, pois através dela pode-se calcular todas as propriedades termodinâmicas do sistema, tais como a pressão, energia, entropia, etc. No caso de uma partícula se movendo num potencial independente do tempo $V(q)$, por exemplo, podemos escrever o traço em relação ao conjunto completo de autovetores do operador posição:

$$Z(\beta) = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \int dq \langle q | e^{-\beta \hat{H}} | q \rangle. \quad (1.3)$$

É possível encontrar uma representação de Z na forma de uma integral de trajetória reconhecendo que $\hat{\rho}$ pode ser encarado formalmente como um operador de evolução para tempos imaginários, ou seja, o integrando na equação acima é um prolongamento analítico para tempos imaginários da amplitude de probabilidade geral entre um estado $|q_i\rangle$ no instante $t = 0$ e outro estado $|q_f\rangle$ em $t = t_f$:

$$\begin{aligned} F(q_f, t_f; q_i, 0) &= \langle q_f | e^{-i\hat{H}t_f} | q_i \rangle \\ &= \int [dq] \exp \left\{ i \int_0^{t_f} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2(t) - V(q(t)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

com m a massa da partícula, $\dot{q} = dq/dt$ e o símbolo $[dq]$ representando uma medida responsável pela integração sobre todas as configurações clássicas que têm como condição de contorno q_i em $t = 0$ e q_f em $t = t_f$. De fato, fazendo a mudança de variáveis $it = \tau$ (rotação de Wick) com a condição $it_f = \beta$ em (1.4) e substituindo o resultado em (1.3), encontra-se:

$$Z(\beta) = \int_{\text{per}} [dq] \exp \left\{ - \int_0^\beta d\tau \left[\frac{1}{2} m \dot{q}^2(\tau) + V(q(\tau)) \right] \right\}, \quad (1.5)$$

onde $\dot{q}$ significa agora $dq/d\tau$. O subscripto per é resultado da operação de traço e indica uma integração sobre todas as trajetórias periódicas de $q(\tau)$ com período β .

Em vista da conexão futura com a Teoria de Campos, é interessante introduzir o funcional gerador $Z(\beta; j)$, com $Z(\beta) = Z(\beta; 0)$, através da definição:

$$Z(\beta; j) = \int_{\text{per}} [dq] \exp \left[-S(\beta) + \int_0^\beta d\tau j(\tau) q(\tau) \right]. \quad (1.6)$$

A diferenciação funcional de (1.6) com relação à corrente j gera a média térmica do produto ordenado no tempo imaginário dos operadores posição na representação de Heisenberg:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z(\beta)} \frac{\delta^n Z(\beta; j)}{\delta j(\tau_1) \cdots \delta j(\tau_n)} \Big|_{j=0} &= \frac{1}{Z(\beta)} \int_{\text{per}} [dq] q(\tau_1) \cdots q(\tau_n) e^{-S(\beta)} \\ &= \langle T(\hat{q}(\tau_1) \cdots \hat{q}(\tau_n)) \rangle, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\hat{q}(-i\tau) = e^{\hat{H}\tau} \hat{q}(0) e^{-\hat{H}\tau}. \quad (1.8)$$

Para provar a equação (1.7), basta usar a definição (1.2) e inserir o conjunto de auto-estados de $\hat{q}$ para diferentes tempos entre o intervalo em questão, levando à formulação funcional da média estatística.

O propagador no tempo imaginário $\Delta(\tau)$ é definido por:

$$\Delta(\tau) = \langle T(\hat{q}(-i\tau) \hat{q}(0)) \rangle, \quad (1.9)$$

com o valor de τ restrito a princípio ao intervalo $[0, \beta]$. Além disso, a ciclicidade do traço prova a seguinte propriedade:

$$\Delta(\tau - \beta) = \Delta(\tau), \quad (1.10)$$

o que garante a periodicidade de $\Delta(\tau)$.

Agora, vamos considerar $m = 1$ e $V(q)$ o potencial de um oscilador harmônico:

$$V(q) = \frac{1}{2} \omega^2 q^2, \quad (1.11)$$

já que esta é a situação análoga a um modo de um campo quântico livre. Através de uma integração por partes e da mudança de variáveis:

$$q'(\tau) = q(\tau) - \int_0^\beta d\tau' D(\tau, \tau') j(\tau'), \quad (1.12)$$

onde $D(\tau, \tau')$ satisfaz a equação de movimento:

$$\left(-\frac{d^2}{d\tau^2} + \omega^2 \right) D(\tau, \tau') = \delta(\tau - \tau'), \quad (1.13)$$

é possível resolver a integral gaussiana em (1.6):

$$Z(\beta; j) = Z(\beta) \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau d\tau' j(\tau) D(\tau, \tau') j(\tau') \right]. \quad (1.14)$$

É importante notar que a mudança de variáveis (1.12) preserva a periodicidade de $q(\tau)$.

A partir deste resultado de $Z(\beta; j)$, da equação (1.7) e da definição (1.9), temos a identificação:

$$D(\tau, \tau') = \Delta(\tau - \tau'). \quad (1.15)$$

Em geral, trabalhar no espaço de momentos simplifica os cálculos e com este objetivo a seguinte expansão é feita:

$$\Delta(i\omega_n) = \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \Delta(\tau), \quad (1.16)$$

com a respectiva inversa:

$$\Delta(\tau) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_n \tau} \Delta(i\omega_n). \quad (1.17)$$

O fato de $\Delta(\tau)$ ser periódico indica que a transformada de Fourier é feita no intervalo finito $[0, \beta]$, levando as chamadas frequências de Matsubara ω_n a ter valores discretos:

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.18)$$

Substituindo a expansão (1.16) na equação (1.13), obtém-se:

$$\Delta(i\omega_n) = \frac{1}{\omega_n^2 + \omega^2}, \quad (1.19)$$

que é chamado de propagador de tempo imaginário ou de Matsubara.

A passagem da Mecânica Estatística para a Teoria de Campos é feita de modo análogo ao caso em que $T = 0$. Na situação mais simples, a nova variável dinâmica é o campo escalar neutro $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$, de forma que as variáveis espaciais x_i ($i = 1 \dots 3$) generalizem para infinitos graus de liberdade os índices i dos operadores posição $\hat{q}_i$ num sistema quântico de muitos corpos. Já a estrutura temporal permanece a mesma.

No espaço de Minkowski, a lagrangiana que descreve um sistema de bósons auto-interagentes com massa m é:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - V(\phi), \quad (1.20)$$

onde $V(\phi)$ representa o tipo de interação entre as partículas. Pelas considerações feitas anteriormente, a generalização do funcional gerador (1.6) é:

$$Z(\beta; j) = \int_{\text{per}} [d\phi] \exp \left[-S(\beta) + \int_0^\beta d\tau \int d^3x j(x) \phi(x) \right], \quad (1.21)$$

$$S(\beta) = \int_0^\beta d\tau \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + V(\phi) \right], \quad (1.22)$$

com $x = (\tau, \mathbf{r})$.

No caso de um campo livre, $Z(\beta; j)$ assume uma forma análoga a da equação (1.14):

$$Z(\beta; j) = Z(\beta) \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x d^4y j(x) D(x-y) j(y) \right], \quad (1.23)$$

onde a seguinte notação é adotada por simplicidade:

$$\int_0^\beta d^4x = \int_0^\beta d\tau \int d^3x. \quad (1.24)$$

O propagador $D(x-y)$ é a solução periódica da equação diferencial parcial:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 + m^2 \right) D(x-y) = \delta(\tau_x - \tau_y) \delta(\mathbf{r}_x - \mathbf{r}_y). \quad (1.25)$$

No espaço de momentos, a equação acima é resolvida facilmente, o que nos permite escrever o propagador como:

$$D(k) = \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{k}^2 + m^2}, \quad k = (i\omega_n, \mathbf{k}), \quad \omega_n = \frac{2\pi n}{\beta}. \quad (1.26)$$

Geralmente, a exponencial envolvendo $V(\phi)$ na equação (1.21) sofre uma expansão em série de potências, dando origem a uma teoria de perturbação heurística cuja validade depende da intensidade da interação. Para obter as regras de Feynman, é conveniente escrever o funcional gerador $Z(\beta; j)$ da seguinte forma:

$$Z(\beta; j) = \exp \left(- \int_0^\beta d^4x V \left(\frac{\delta}{\delta j(x)} \right) \right) \exp \left[\frac{1}{2} \int_0^\beta d^4x d^4y j(x) D(x-y) j(y) \right]. \quad (1.27)$$

A equação acima é muito parecida com a usada para se obter as regras de Feynman a temperatura zero no espaço euclidiano. No espaço de momentos,

o fato das frequências de Matsubara serem discretas leva à inclusão de um fator β para cada delta de Kronecker de conservação das frequências e a inclusão de um fator T para cada loop térmico, além da substituição do propagador usual pelo propagador de tempo imaginário.

No caso da teoria $\lambda\phi^3$ em seis dimensões, que de modo similar à teoria de Yang-Mills possui liberdade assintótica [22], o potencial é dado por:

$$V(\phi) = -\lambda \frac{\phi^3}{3!}, \quad (1.28)$$

o que dá origem às seguintes modificações em relação às regras diagramáticas usuais:

- loops térmicos:

$$T \sum \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5}, \quad (1.29)$$

- vértices:

$$\lambda \beta (2\pi)^5 \delta(\sum \omega, 0) \delta(\sum \mathbf{k}). \quad (1.30)$$

1.2 Amplitudes de Espalhamento Frontais

Esta seção é dedicada ao cálculo da auto-energia térmica da teoria $\lambda\phi^3$ na ordem de um loop no regime de altas temperaturas usando as regras de Feynman desenvolvidas na seção anterior. Os principais objetivos são fornecer um exemplo do mecanismo de funcionamento da teoria e descrever o método das amplitudes de espalhamento frontais num modelo simplificado de forma que possa ser estendido facilmente para a teoria de Yang-Mills.

A auto-energia Π é dada pela primeira correção à função de dois pontos, que está representada pelo diagrama da figura 1.1. Sua expressão analítica é:

$$\Pi(k, T) = \frac{\lambda^2}{2} T \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} D(Q) D(Q+k). \quad (1.31)$$

A soma sobre as frequências de Matsubara é feita usando-se a seguinte identidade:

$$T \sum_n F(Q_0 = 2\pi i n T = i\omega_n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dQ_0 N(Q_0) F(Q_0), \quad (1.32)$$

Figura 1.1: primeira correção à função de dois pontos.

onde $N(Q_0) = [\exp(\beta Q_0) - 1]^{-1}$ é a distribuição de Bose-Einstein e o contorno C envolve todos os pólos $Q_0 = 2\pi in/\beta$ desta distribuição no sentido anti-horário. Portanto, a auto-energia pode ser escrita:

$$\Pi(k, T) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} \frac{1}{2\pi i} \oint_C dQ_0 N(Q_0) \frac{1}{Q_0^2 - Q^2} \frac{1}{(Q_0 + k)^2 - (Q + k)^2}. \quad (1.33)$$

O contorno original C pode ser deformado da forma como mostra a figura 1.2 porque a função $N(Q_0)$ evita contribuições das regiões onde o módulo de Q_0 tende a infinito. Na parte do contorno do lado esquerdo do eixo imaginário, podemos fazer a mudança $Q \rightarrow -Q$, sendo Q o quadrivetor $(Q_0, \mathbf{Q})$, o que leva ao resultado:

$$\Pi(k, T) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} \frac{1}{2\pi i} \left[- \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ_0 N(-Q_0) \frac{1}{Q^2} \frac{1}{(Q - k)^2} + \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ_0 N(Q_0) \frac{1}{Q^2} \frac{1}{(Q + k)^2} \right], \quad (1.34)$$

com $Q^2 = Q_0^2 - \mathbf{Q}^2$.

Usando a relação $N(Q_0) + N(-Q_0) = -1$, percebe-se que $\Pi(k, T)$ é constituída de duas partes: um termo independente mais outro dependente da temperatura (parte térmica). É fácil mostrar que a parte independente é simplesmente a auto-energia a temperatura zero da teoria euclidianizada, o que pode ser considerado um fato geral na Teoria de Campos a Temperatura Finita. Vamos considerar somente a parte térmica, que por um abuso de notação continuaremos denotando por $\Pi(k, T)$:

$$\Pi(k, T) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+\epsilon}^{i\infty+\epsilon} dQ_0 N(Q_0) \left[\frac{1}{Q^2} \frac{1}{(Q + k)^2} + Q \rightarrow -Q \right]. \quad (1.35)$$

Figura 1.2: contorno deformado no plano Q_0 .

A integral no plano complexo pode ser calculada através do teorema de Cauchy, fechando-se o contorno com uma semi-circunferência de raio tendendo ao infinito como mostra a figura 1.3. Em primeiro lugar, a contribuição proveniente dos pólos em $Q_0 = |\mathbf{Q}|$ é dada por:

$$\Pi_1(k, T) = \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} \frac{N(|\mathbf{Q}|)}{2|\mathbf{Q}|} \left[\frac{1}{k^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}} + \frac{1}{k^2 - 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}} \right], \quad (1.36)$$

com $\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} = k_0 Q_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}$.

Figura 1.3: fechamento do contorno C .

Na realidade, a contribuição proveniente do pólo em $Q_0 = -k_0 + |\mathbf{Q} + \mathbf{k}|$ é idêntica a calculada anteriormente porque no formalismo de tempo imaginário $Q_0 = 2\pi i m / \beta$ (m fixo). Este fato pode ser verificado fazendo a mudança

de variáveis $Q \rightarrow Q - k$ e usando a relação:

$$N(Q_0 - k_0) = N(Q_0). \quad (1.37)$$

Portanto, o resultado final é:

$$\Pi(k, T) = -\lambda^2 \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} \frac{N(|Q|)}{2|Q|} \left[\frac{1}{k^2 + 2k \cdot Q} + \frac{1}{k^2 - 2k \cdot Q} \right]. \quad (1.38)$$

Vale notar que o integrando na equação acima é uma função racional de k_0 , a qual agora pode ser prolongada analiticamente para valores contínuos arbitrários da energia.

Concluindo, a parte térmica da função de dois pontos pode ser expressa como uma integral no espaço de momentos de amplitudes de espalhamento frontais de partículas térmicas na concha de massa:

$$\Pi(k, T) = - \int \frac{d^5 Q}{(2\pi)^5} \frac{N(|Q|)}{2|Q|} [A_1 + A_2], \quad (1.39)$$

com as amplitudes A_i sendo calculadas com a substituição $Q_0 = i\omega_n$ no propagador de tempo imaginário. Estas amplitudes estão representadas na figura 1.4.

Figura 1.4: gráficos de espalhamento associados com a função de dois pontos.

Esta relação entre os loops térmicos e as amplitudes de espalhamento frontais é claramente válida para um número maior de propagadores e constitui um método extremamente poderoso para os cálculos a temperatura finita, já que não é necessário avaliar o somatório sobre as frequências de Matsubara. Dado um diagrama de Feynman, temos de considerar as amplitudes de espalhamento obtidas pelos vários modos diferentes de “quebrá-lo”. Além disso, este método facilita a extensão dos resultados para valores arbitrários dos momentos externos.

O limite de altas temperaturas equivale a dizer que T é muito maior que os demais parâmetros com dimensão de energia existentes no problema. Em

nosso caso particular, este limite é dado pelo regime $T \gg k_0, |\mathbf{k}|$. A presença da distribuição $N(|\mathbf{Q}|)$ faz com que a principal contribuição venha da região $|\mathbf{Q}| \sim T$, o que nos permite fazer a expansão:

$$\frac{1}{k^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}} \simeq \frac{1}{2\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}} - \frac{k^2}{(2\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q})^2} + \dots \quad (1.40)$$

Voltaremos no próximo capítulo a discutir mais detalhadamente esta expansão. Assim, considerando somente os termos dominantes na temperatura [25]:

$$\Pi(k, T) = \frac{\lambda^2}{64\pi^3} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin^2 \theta}{(\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^2} \int_0^\infty d|\mathbf{Q}| |\mathbf{Q}| N(|\mathbf{Q}|), \quad (1.41)$$

onde $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{Q}} = k_0 - |\mathbf{k}| \cos \theta$. A integral angular é elementar e além disso, usando o resultado [26]:

$$\int_0^\infty dx x N(x) = \frac{\pi^2 T^2}{6}, \quad (1.42)$$

é possível chegar a:

$$\Pi^{(T^2)} = \frac{\lambda^2 T^2}{96\pi} \left(1 - \frac{k_0^2}{|\mathbf{k}|^2} \right) \left[1 - \frac{k_0}{2|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} \right) \right]. \quad (1.43)$$

A proporcionalidade a T^2 mais a própria definição da auto-energia fazem com que interpretemos fisicamente a quantidade $\Pi^{(T^2)}(k_0 = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0)$ como uma massa térmica adquirida pelas partículas devido à agitação térmica:

$$m_T^2 = \Pi^{(T^2)}(k_0 = 0, \mathbf{k} \rightarrow 0) = \frac{\lambda^2 T^2}{96\pi}. \quad (1.44)$$

1.3 Teoria de Yang-Mills

Atualmente, presume-se que a Cromodinâmica Quântica seja a teoria que explique a dinâmica da interação forte, a qual, por exemplo, é responsável pela estabilidade do núcleo atômico. Ela é um caso especial das chamadas teorias de Yang-Mills, que são baseadas na união de dois ingredientes básicos: o princípio de invariância de calibre e os grupos de Lie compactos. No caso da QCD, o grupo $SU(3)$ é usado para representar uma simetria interna local exata chamada de simetria de cor. As partículas elementares são os chamados quarks, que são os férmions (spin 1/2) constituintes da matéria, e os glúons, que são os bósons (spin 1) de massa zero que mediam a interação. Além da simetria de cor, os quarks possuem uma outra simetria inexacta (também

representada pelo grupo $SU(3)$), a qual propicia sua classificação em termos de sabores.

A lagrangiana da teoria de Yang-Mills é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (1.45)$$

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.46)$$

com g denotando a constante de acoplamento e f^{abc} as constantes de estrutura anti-simétricas do grupo $SU(N)$. Os índices a, b e c variam de 1 até a dimensão $(N^2 - 1)$. Ao contrário da Eletrodinâmica Quântica, as equações acima mostram que os glúons interagem entre si com uma intensidade definida por g . Acredita-se que $g \simeq 1$, inviabilizando os cálculos perturbativos, mas ao mesmo tempo, a constante de acoplamento efetiva $g(\mu)$, a qual leva em consideração as correções quânticas, diminui a medida que se aumenta a escala de energia μ , permitindo o uso da teoria de perturbação para altas energias (possivelmente temperaturas). A temperatura finita, correções térmicas induzem uma dependência $g(\mu, T)$ que é estudada na próxima seção.

A propriedade mais marcante da lagrangiana (1.45) é a invariância por transformações de calibre. Esta característica por ser demonstrada por meio de uma transformação de calibre infinitesimal:

$$\delta A_\mu^a(x) = D_\mu^{ab}(x)\omega^b(x) = (\partial_\mu \delta^{ab} + gf^{abc}A_\mu^c(x))\omega^b(x), \quad (1.47)$$

onde D_μ^{ab} é a derivada covariante e as funções infinitesimais escalares $\omega^b(x)$ parametrizam a transformação.

O primeiro passo do processo de quantização é escrever uma expressão para a função de partição generalizando da forma mais simples os resultados obtidos para o campo escalar:

$$Z(\beta) = \int_{\text{per}} [dA] \exp \left\{ - \int_0^\beta d^4x \mathcal{L} \right\}, \quad (1.48)$$

$$[dA] = \prod_{\mu,a} [dA_\mu^a]. \quad (1.49)$$

Apesar de Z ser formalmente invariante por uma transformação de calibre, ela não é capaz de produzir uma teoria de perturbação que possa ser interpretada por meio de diagramas. Este fato pode ser provado notando que a parte quadrática da lagrangiana (1.45) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}A^{\mu a}[\Box g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu]A^{\nu a}, \quad (1.50)$$

$$\square = \partial^\mu \partial_\mu. \quad (1.51)$$

Infelizmente, o operador $(\square g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu)$ não tem inverso, pois no espaço de momentos ele é um projetor no subespaço ortogonal a k_μ . Desta forma, não é possível definir o propagador do glúon.

A razão desta dificuldade está na integração indiscriminada sobre todas as configurações periódicas do campo A_μ . Como a medida $[dA]$ e a ação são individualmente invariantes de calibre, a integral que defini Z possui um fator divergente proporcional ao volume do grupo de calibre. A integração funcional leva em conta configurações do campo que são indistinguíveis fisicamente.

A solução para este problema [27] consiste em integrar somente sobre as configurações do campo que não são relacionadas por uma transformação de calibre. Para tanto, é necessário impor uma condição adicional sobre os campos:

$$f^b(A_\mu^a) = 0, \quad (1.52)$$

onde f^b são funções que eliminam a possibilidade de configurações diferentes levarem à mesma situação física, ou seja, elas determinam os potenciais univocamente. Esta forma de se integrar sobre classes de equivalência é implementada com a introdução da função $\delta(f^b(A_\mu^a))$ na definição (1.48). No entanto, este procedimento depende da escolha particular das funções f^b e para eliminar esta dependência é preciso introduzir o determinante funcional obtido com a variação de f^b por uma transformação de calibre infinitesimal:

$$\text{Det} \left(\frac{\delta f^a}{\delta \omega^b} \right). \quad (1.53)$$

De fato, se considerarmos a medida $[dA] = [\bar{d}A][d\omega]$, com $[\bar{d}A]$ representando somente as configurações inequivalentes, a combinação da função delta mais o determinante acima leva a uma integração somente sobre as últimas.

Portanto, a definição da função de partição é modificada para:

$$Z(\beta) = \int_{\text{per}} [dA] \delta(f^b(A_\mu^a)) \text{Det} \left(\frac{\delta f^a}{\delta \omega^b} \right) \exp\{-S(A_\mu^a)\}. \quad (1.54)$$

Como estamos interessados numa expansão perturbativa, é conveniente introduzir a função delta dentro da exponencial na equação acima, dando origem a uma lagrangiana efetiva. Isto pode ser feito substituindo $f^b(A_\mu^a)$ por $f^b(A_\mu^a) - \theta^b(x)$, onde $\theta^b(x)$ é uma função escalar arbitrária. Além disso, multiplica-se o resultado pela constante:

$$\int [d\theta] \exp \left\{ -\frac{1}{2\xi} \int_0^\beta d^4x \theta_a^2(x) \right\}. \quad (1.55)$$

Por último, invertendo a ordem das integrações, surge o seguinte resultado:

$$Z(\beta) = \int_{\text{per}} [dA] \text{Det} \left(\frac{\delta f^a}{\delta \omega^b} \right) \exp \left\{ - \int_0^\beta d^4x \mathcal{L}_{ef} \right\}, \quad (1.56)$$

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2\xi} (f^b (A_\mu^a))^2. \quad (1.57)$$

É importante notar que, ao contrário da Teoria de Campos usual, o determinante funcional não pode ser absorvido numa renormalização de Z , pois em geral ele depende da temperatura. Aliás, pode ser demonstrado [28] que ele é responsável por cancelar os graus de liberdade que não são físicos no cálculo da função de partição.

Agora, é possível introduzir uma fonte J_μ^a e obter o funcional gerador $Z(\beta; J)$, de forma análoga ao campo escalar:

$$Z(\beta; J) = \int_{\text{per}} [dA] \text{Det} \left(\frac{\delta f^a}{\delta \omega^b} \right) \exp \left\{ - \int_0^\beta d^4x [\mathcal{L}_{ef} - J_\mu^a(x) A^{\mu a}(x)] \right\}. \quad (1.58)$$

A partir da derivação funcional de $Z(\beta; J)$ em relação à fonte é possível encontrar as funções de Green térmicas da teoria. Em geral, a presença do termo de fixação de calibre e da fonte J_μ^a fazem com que o funcional gerador não seja mais invariante por transformações de calibre, o que também se reflete nas funções de Green. Entretanto, espera-se que a constante de acoplamento efetiva seja independentes da escolha do calibre, o que é difícil de se provar antecipadamente.

O calibre axial temporal é definido pelas relações:

$$\xi \rightarrow 0, \quad f^b = \delta^{ab} n^\mu, \quad n = (1, 0, 0, 0). \quad (1.59)$$

Tais condições, satisfeito o requerimento de que os campos vão a zero no infinito, eliminam completamente a invariância por transformações de calibre. Isto evidencia a sua característica de manter somente os graus de liberdade físicos. É também fácil verificar a relação:

$$\frac{\delta f^a}{\delta \omega^b} = \delta^{ab} \partial_0, \quad (1.60)$$

o que deixa o determinante funcional independente do campo. Assim, o calibre axial temporal é livre do acoplamento entre A_μ^a e os chamados campos fantasmas, os quais são campos que não representam partículas reais e que servem para cancelar graus de liberdade extra introduzidos por uma escolha de fixação de calibre que não elimina completamente a arbitrariedade do campo.

Portanto, o funcional gerador pode ser escrito simplesmente:

$$Z(\beta; J) = \int_{\text{per}} [dA] \delta(A_0) \text{Det}(\partial_0) \exp \left\{ - \int_0^\beta d^4x [\mathcal{L} - J_\mu^a(x) A^{\mu a}(x)] \right\}. \quad (1.61)$$

A condição $A_\mu^0 = 0$ impõe as seguintes condições no propagador no espaço de momentos:

$$D_{00}^{ab} = D_{0i}^{ab} = D_{i0}^{ab} = 0, \quad (1.62)$$

$$D_{ij}^{ab}(Q_0, \mathbf{Q}) = \frac{\delta^{ab}}{Q^2} \left(\delta_{ij} + \frac{Q_i Q_j}{Q_0^2} \right). \quad (1.63)$$

Assim, o propagador pode ser escrito:

$$D_{\mu\nu}^{ab}(Q) = \frac{\delta^{ab}}{Q^2} \left[\delta^{\mu\nu} - \frac{Q^\mu n^\nu + Q^\nu n^\mu}{Q \cdot n} + \frac{Q^\mu Q^\nu}{(Q \cdot n)^2} \right], \quad (1.64)$$

com $Q^2 = (2\pi n\beta)^2 + \mathbf{Q}^2$. As regras de Feynman são similares às da teoria a temperatura zero euclidianizada com as mesmas modificações assinaladas para a teoria $\lambda\phi^3$.

A princípio, a escolha do calibre axial temporal não parece conveniente devido à introdução do quadrivetor n . Quando $T = 0$, isto é verdade, já que a invariância de Lorentz simplifica os cálculos. No entanto, a temperatura finita, o quadrivetor n também define o referencial de repouso do banho térmico, devendo ser levado em conta nas decomposições tensoriais de amplitudes mesmo em calibres covariantes. Assim, apesar da complexidade do propagador, o calibre axial temporal apresenta uma alternativa viável nos cálculos a temperatura finita. Uma possível fonte de problemas é a presença dos pólos $1/Q_0$ no propagador, o que torna o método de substituir a soma de frequências por uma integral de contorno muito difícil, inviabilizando o método das amplitudes de espalhamento frontais. Todavia, na referência [29], mostrou-se que, tomando-se todos os cuidados necessários, o limite de altas temperaturas é univocamente determinado.

1.4 Grupo de Renormalização a Temperatura Finita

Na Teoria de Campos usual, o procedimento de renormalização introduz uma escala de energia μ nas funções de Green e nos outros parâmetros da teoria. Esta escala está ligada à arbitrariedade em se escolher qual é a parte infinita de uma grandeza, ou seja, quanto da parte finita também pode ser incluída.

No entanto, a Física deve ser independente de μ . Esta aparente contradição é resolvida pelo fato de que a dependência induzida pode ser escolhida de tal forma a justamente preservar a invariância dos resultados em relação à escolha da escala de energia, dando origem às equações do grupo de renormalização, as quais governam o comportamento das grandezas da teoria em relação às variações de μ . É importante notar que os argumentos que levam a tais equações são independentes da teoria de perturbação, fazendo com que seus resultados sejam um importante complemento para os limites obtidos a partir de resultados perturbativos. No caso da teoria de Yang-Mills com o grupo de simetria $SU(N)$ na ordem de um loop, a constante de acoplamento efetiva é dada por:

$$g^2(\mu) = \frac{48\pi^2}{11N \ln(\mu^2/\Lambda^2)}, \quad (1.65)$$

onde Λ é o parâmetro de escala típico a ser determinado experimentalmente. A liberdade assintótica está no fato de g ser uma função decrescente da energia.

A temperatura finita, o potencial termodinâmico é calculado a partir das funções de Green de grau zero nos momentos externos. Portanto, espera-se que seja natural substituir μ por T na equação (1.65) ao usar o valor da constante de acoplamento efetiva nas fórmulas dos observáveis termodinâmicos. De fato, o único parâmetro dimensional que poderia substituir μ é a temperatura. Mas é preciso confirmar esta previsão através de uma análise do grupo de renormalização a temperatura finita e do cálculo explícito das contribuições térmicas das funções de Green.

Como foi mostrado com o cálculo explícito da auto-energia da teoria $\lambda\phi^3$ na seção anterior, as funções de Green térmicas geralmente podem ser separadas em duas partes: aquela que independe da temperatura, igualando-se ao resultado usual, mais a parte térmica que se anula para $T = 0$. Em geral, esta última é finita porque a distribuição de Bose-Einstein funciona como um "cutoff" no momento interno. Assim, os procedimentos necessários para renormalizar a teoria a temperatura zero não se alteram a temperatura finita. Em outras palavras, não há a necessidade de inclusão de contratermos com partes divergentes dependentes da temperatura. Usando a regularização dimensional em $(4 - 2\epsilon)$ dimensões, a forma geral da constante Z_g usado na renormalização da constante de acoplamento pode ser escolhida como:

$$g_0 = g\mu^\epsilon (Z_g)^{-1/2}, \quad (1.66)$$

$$Z_g = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} g^{2i} \left[\sum_{j=1}^i \frac{A_i^{(j)}}{\epsilon^j} + f^{(i)}(\mu, T) \right], \quad (1.67)$$

onde g_0 é a constante não-renormalizada e a contribuição divergente $A_i^{(j)}/\epsilon^j$ independe de μ e T , sendo obtida a partir dos cálculos a temperatura zero, pois $f^{(i)}(\mu, T)$ tende a zero no limite de baixas temperaturas. Em nosso caso específico, Z_g foi escolhido como o produto de duas constantes presentes nos contratermos usados na renormalização do campo e da constante de acoplamento:

$$g_0 = g\mu^\epsilon Z_1 Z_3^{-3/2}. \quad (1.68)$$

Portanto, Z_3 e Z_1 são calculados a partir do tensor de polarização do glúon e da função de três glúons respectivamente.

Caso as contribuições térmicas proporcionais a $\ln(T)$ provenientes destas funções tenham a mesma estrutura tensorial e os mesmos coeficientes (a menos de um sinal) dos pólos ultravioleta, é possível incluí-las de forma natural em Z_g e em $g(\mu, T)$. Isto pode ser provado notando que pode-se adicionar qualquer função finita à constante de renormalização Z_g , como uma espécie de esquema de subtração mínima modificado. As presenças de g_0^2 e do pólo na parte independente da temperatura contribuem com os seguintes termos no limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$C \frac{g^2 \mu^{2\epsilon}}{2\epsilon} \simeq C g^2 \left[\frac{1}{2\epsilon} + \ln(\mu) \right], \quad (1.69)$$

com C representando um coeficiente qualquer. De acordo com a hipótese, temos que a parte logarítmica é:

$$-C g^2 \ln(T). \quad (1.70)$$

Desta forma, usando a equação (1.67), somam-se as duas equações acima e o resultado é absorvido em Z_g :

$$f^{(1)}(\mu, T) = -2A^{(1)} \ln \left(\frac{T}{\mu} \right), \quad (1.71)$$

$$Z_g(T/\mu) = 1 + 2g^2 A^{(1)} \left[\frac{1}{2\epsilon} - \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) \right]. \quad (1.72)$$

As equações do grupo de renormalização para a constante de acoplamento são obtidas a partir da independência de g_0 em relação a μ e T [10]:

$$\mu \frac{\partial g_0}{\partial \mu} = 0, \quad (1.73)$$

$$T \frac{\partial g_0}{\partial T} = 0. \quad (1.74)$$

Substituindo as definições (1.66) e (1.67) nas equações acima e considerando até a primeira ordem em teoria de perturbação :

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = g^3 \left[\frac{\mu}{2} \frac{\partial f^{(1)}(\mu, T)}{\partial \mu} - A^{(1)} \right], \quad (1.75)$$

$$T \frac{\partial g}{\partial T} = \frac{g^3 T}{2} \frac{\partial f^{(1)}(\mu/T)}{\partial T}. \quad (1.76)$$

A solução geral pode ser encontrada integrando-se (1.75) de μ_0 até μ e (1.76) de T_0 a T :

$$g^2(\mu, T) = \frac{g^2(\mu_0, T_0)}{1 + g^2(\mu_0, T_0) \{ 2A^{(1)} \ln(\mu/\mu_0) - [f^{(1)}(\mu, T) - f^{(1)}(\mu_0, T_0)] \}}. \quad (1.77)$$

A equação acima descreve a evolução da constante de acoplamento como uma função da escala de energia e da temperatura, com (μ_0, T_0) representando um ponto de referência. Substituindo o valor de $f^{(1)}$ obtido na equação (1.71):

$$g^2(T) = \frac{g^2(T_0)}{1 + 2g^2(T_0)A^{(1)} \ln(T/T_0)}. \quad (1.78)$$

Assim, a constante de acoplamento efetiva g não pode ser encarada como uma função de duas escalas de energia distintas. A temperatura substitui a escala de energia arbitrária para um sistema em equilíbrio termodinâmico, como era possível de se imaginar intuitivamente. Se possuímos uma constante $g(\mu)$ determinada experimentalmente nas condições usuais, seu valor pode ser extrapolado a temperatura finita pela relação:

$$g^2(T) = \frac{g^2(\mu)}{1 + 2g^2(\mu)A^{(1)} \ln(T/\mu)}. \quad (1.79)$$

De fato, nos capítulos posteriores mostraremos o cálculo do coeficiente $A^{(1)}$, levando à justificativa da afirmação inicial de que seria de se esperar a substituição de μ por T na equação (1.65):

$$g^2(T) = \frac{48\pi^2}{11N \ln(T^2/\Lambda^2)}. \quad (1.80)$$

Com certeza, este resultado é típico do formalismo de tempo imaginário, no qual se faz a substituição do tempo imaginário pela temperatura. No formalismo de tempo real, por exemplo, as duas escalas de energia definidas por μ e T são independentes e não há razão para imaginar um escalonamento. Além disso, é importante notar que no caso das funções de Green térmicas com momentos externos, estes funcionam como parâmetros dimensionais extras, o que leva a uma análise mais detalhada em termos das contribuições quadráticas, lineares, etc.

Capítulo 2

Contribuições Logarítmicas do Tensor de Polarização

Este capítulo apresenta o cálculo detalhado das contribuições logarítmicas do tensor de polarização do glúon no calibre axial temporal na ordem de um loop no limite de altas temperaturas. Estas contribuições são idênticas em estrutura aos pólos ultravioleta da teoria a menos da substituição do fator $1/2\epsilon$ por $\ln(T)$. De posse deste resultado, foi possível extrair a constante de renormalização Z_3 usando a prescrição descrita no capítulo anterior. O procedimento de cálculo é uma extensão natural do método das amplitudes de espalhamento frontais descrito anteriormente. Para uma discussão mais detalhada do tensor de polarização usando métodos tradicionais de cálculo, indicamos a referência [19]. Além disso, a referência [21] apresenta os resultados para uma classe geral de calibres temporais.

A temperatura zero, o tensor de polarização do glúon é definido por:

$$\Pi_{\mu\nu} = (D_{\mu\nu})^{-1} - (D_{\mu\nu}^F)^{-1}, \quad (2.1)$$

onde $D_{\mu\nu}$ é o propagador na presença de interação e $D_{\mu\nu}^F$ o da teoria livre. Note que a dependência nos índices de grupo não foi escrita pelo fato de ser simplesmente o fator δ^{ab} . Além disso, o tensor de polarização é um invariante de Lorentz e satisfaz a condição de transversalidade $k^\mu \Pi_{\mu\nu} = 0$ (conservação da corrente), dando origem à estrutura no espaço de momentos:

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu). \quad (2.2)$$

Quando $T \neq 0$, perde-se a invariância de Lorentz e a condição de transversalidade depende do calibre usado e da ordem na temperatura. No calibre axial temporal, mostrou-se que a parte térmica de $\Pi_{\mu\nu}$ é exatamente transversal na ordem de um loop, envolvendo todas as ordens na temperatura, ao

contrário do calibre de Feynman [19, 21]. Com esta informação, a estrutura da auto-energia térmica do glúon pode ser escrita como [2]:

$$\Pi_{\mu\nu} = G P_{\mu\nu}^T + F P_{\mu\nu}^L, \quad (2.3)$$

$$P_{00}^T = P_{0i}^T = P_{i0}^T = 0, \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}, \quad (2.4)$$

$$P_{\mu\nu}^L = -g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - P_{\mu\nu}^T. \quad (2.5)$$

As funções $P_{\mu\nu}^L$ e $P_{\mu\nu}^T$ podem depender de k_0 e $\mathbf{k}$ separadamente e representam a estrutura mais geral compatível com a condição de transversalidade. Elas também são completamente determinadas por Π_{ii} e Π_{00} , já que de acordo com as últimas definições:

$$F = \frac{k^2}{\mathbf{k}^2} \Pi_{00}, \quad (2.6)$$

$$G = \frac{1}{2} \left(\Pi_{ii} - \frac{k_0^2}{\mathbf{k}^2} \Pi_{00} \right). \quad (2.7)$$

Como foi visto no capítulo anterior, o calibre axial temporal não possui os chamados campos fantasmas, e portanto o tensor de polarização é calculado através das integrais representadas pelos diagramas de Feynman da figura 2.1.

Figura 2.1: Gráficos que contribuem para o tensor de polarização.

Estes diagramas podem ser calculados através da técnica de expressar os loops térmicos em termos de integrais de amplitudes de espalhamento frontais na concha de massa. No entanto, estas amplitudes devem ser calculadas a temperatura zero de acordo com as regras:

- vértice de três glúons:

$$-g f_{abc} V_{\mu\nu\rho}(p, q, r), \quad (2.8)$$

$$V_{\mu\nu\rho}(p, q, r) = g_{\mu\nu}(p - q)_\rho + g_{\nu\rho}(q - r)_\mu + g_{\rho\mu}(r - p)_\nu. \quad (2.9)$$

- vértice de quatro glúons:

$$-ig^2 [f_{eab}f_{ecd}(g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho}) + f_{eac}f_{edb}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\rho} - g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}) + f_{ead}f_{ebc}(g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho} - g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu})]. \quad (2.10)$$

As convenções de momentos e índices usadas nestas regras estão representadas nas figuras 2.2 e 2.3.

Figura 2.2: vértice de três glúons.

Figura 2.3: vértice de quatro glúons.

As amplitudes de espalhamento obtidas com as possíveis maneiras de se “quebrar” os diagramas estão representadas na figura 2.4:

Figura 2.4: Amplitudes de espalhamento que contribuem para a auto-energia térmica.

Assim, de acordo com as regras estabelecidas, podemos escrevê-las:

$$A_1 = -g^2 f_{acd}f_{bcd}V_{\mu\rho\alpha}(k, -Q-k, Q)D^{\rho\sigma}(Q+k)Q^2D^{\alpha\lambda}(Q) \times V_{\nu\sigma\lambda}(-k, Q+k, -Q) + k \rightarrow -k, \quad (2.11)$$

$$A_2 = -g^2 f_{acd} f_{bcd} Q^2 D^{\alpha\lambda}(Q) (2g_{\mu\nu} g_{\alpha\lambda} - g_{\mu\alpha} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\alpha}). \quad (2.12)$$

Note que nestas amplitudes, de modo diferente ao da teoria escalar $\lambda\phi^3$, ficam “sobrando” dois índices de Lorentz e dois índices de grupo. Na verdade, através da integral no plano complexo usada na dedução do método das amplitudes de espalhamento, fica claro que os índices restantes foram contraídos com o operador:

$$P^{\alpha\lambda}(Q) = Q^2 D^{\alpha\lambda}(Q), \quad (2.13)$$

que está fisicamente associado com os possíveis estados de polarização do glúon.

Após uma álgebra considerável e com a ajuda da relação $\delta_{ab} f_{acd} f_{bcd} = N$ (para o grupo $SU(N)$) [6], a parte térmica da componente Π_{00} é dada por:

$$\Pi_{00}(k, T) = g^2 N \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{N(|Q|)}{2|Q|} \left\{ 4 + \frac{(2|Q| + k_0)^2}{k^2 + 2k \cdot Q} \times \left[\left(\frac{k \times Q}{|Q| + k_0} \right)^2 - 2 \right] + k \rightarrow -k \right\}. \quad (2.14)$$

A primeira informação que pode ser extraída são os termos dominantes em altas temperaturas, ou sendo mais preciso, quando a temperatura é muito maior que os momentos externos. Com este objetivo, faz-se a expansão:

$$\frac{1}{k^2 + 2k \cdot Q} \simeq \frac{1}{2k \cdot Q} - \frac{k^2}{(2k \cdot Q)^2} + \dots \quad (2.15)$$

As diversas potências de $(k \cdot Q)$ dão origem aos termos proporcionais a T^2 , $\ln(T)$, etc.

No regime de altas temperaturas, os termos dominantes da componente temporal são:

$$\Pi_{00}^{(T^2)} = g^2 N \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{N(|Q|)}{2|Q|} \left[4 - \frac{8k_0}{k \cdot \hat{Q}} + \frac{4k^2}{(k \cdot \hat{Q})^2} \right], \quad (2.16)$$

com $\hat{Q} \equiv (1, Q/|Q|)$. As integrais angulares são facilmente resolvidas a partir daquela encontrada no cálculo da auto-energia escalar (ver Apêndice A), enquanto a parte térmica fornece o familiar resultado $\pi^2 T^2/6$. O resultado final é:

$$\Pi_{00}^{(T^2)} = g^2 N \frac{T^2}{3} \left[1 - \frac{k_0}{2|k|} \ln \left(\frac{k_0 + |k|}{k_0 - |k|} \right) \right]. \quad (2.17)$$

A proporcionalidade a T^2 indica uma possível interpretação em termos de uma massa térmica do glúon, a qual tem um papel fundamental na dinâmica

da interação forte. Voltando ao cálculo das contribuições logarítmicas, são recolhidos os termos proporcionais a $|\mathbf{Q}|^{-2}$ na expansão em série de potências da expressão entre chaves na equação (2.14):

$$\Pi_{00}^{\ln(T)} = Ng^2 \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{N(|\mathbf{Q}|)}{|\mathbf{Q}|^3} \left[\frac{k^6}{2(k \cdot \hat{Q})^4} - \frac{k^4 k_0}{(k \cdot \hat{Q})^3} + \frac{k^2 k_0^2}{2(k \cdot \hat{Q})^2} - \frac{k^2}{(k \cdot \hat{Q})^2} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{Q})^2}{|\mathbf{Q}|^2} - 2 \frac{k_0}{k \cdot \hat{Q}} \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{Q})^2}{|\mathbf{Q}|^2} \right]. \quad (2.18)$$

Há um desacoplamento entre a parte angular e a parte térmica. O limite de integração inferior desta última deve satisfazer a condição:

$$|\mathbf{Q}| \simeq T \gg k_0, |\mathbf{k}|. \quad (2.19)$$

Usando a expansão em série de potências da distribuição de Bose-Einstein:

$$N(|\mathbf{Q}|) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta |\mathbf{Q}|} \quad (2.20)$$

mais os resultados [26]:

$$\int_u^{\infty} \frac{dx}{x} e^{-x} = -\ln(u) - \gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n u^n}{n n!}, \quad (2.21)$$

$$\xi(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}, \quad \xi(0) = -\frac{1}{2}, \quad (2.22)$$

é fácil ver que parte térmica não depende do limite inferior de integração e contribui com $-1/2 \ln(T)$. Após a resolução das integrais angulares, conclui-se que:

$$\Pi_{00}^{\ln(T)} = \frac{11}{24\pi^2} g^2 N |\mathbf{k}|^2 \ln(T). \quad (2.23)$$

De modo análogo, temos a seguinte expressão para Π_{ii} :

$$\begin{aligned} \Pi_{ii}(k, T) = g^2 N \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{N(|\mathbf{Q}|)}{2|\mathbf{Q}|} \left\{ 8 + \frac{1}{k^2 + 2\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q}} \left[10|\mathbf{Q}|^2 + 4\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q} \right. \right. \\ \left. \left. + 10|\mathbf{k}|^2 - 6 \frac{(\mathbf{k} \times \mathbf{Q})^2}{|\mathbf{Q}|^2} + \frac{1}{(|\mathbf{Q}| + k_0)^2} \left((\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q})^2 \left(2 - \frac{|\mathbf{k}|^2}{|\mathbf{Q}|^2} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - (|\mathbf{Q}|^2 - |\mathbf{k}|^2)^2 - |\mathbf{Q}|^4 \right) \right] + k \rightarrow -k \right\}. \quad (2.24) \end{aligned}$$

Quando se analisa os termos dominantes no limite de altas temperaturas, o resultado é parecido com o obtido para $\Pi_{00}^{\ln(T)}$:

$$\Pi_{ii}^{\ln(T)} = g^2 N \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{N(|\mathbf{Q}|)}{2|\mathbf{Q}|} \left[4 + \frac{8k_0}{(k \cdot \hat{Q})} - \frac{4k^2}{(k \cdot \hat{Q})^2} \right], \quad (2.25)$$

e com base na comparação do resultado da componente temporal, pode-se ver que:

$$\Pi_{ii}^{(T^2)} = g^2 N \frac{T^2}{6} \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} \right). \quad (2.26)$$

Nós podemos usar também a expansão em altas temperaturas no integrando entre chaves na equação (2.24). de onde surge a contribuição logarítmica:

$$\begin{aligned} \Pi_{ii}^{\ln(T)} = g^2 N \int \frac{d^3 Q}{(2\pi)^3} \frac{N(|\mathbf{Q}|)}{|\mathbf{Q}|^3} & \left\{ \frac{k^4}{2(k \cdot \hat{Q})^4} (\mathbf{k} \times \mathbf{Q})^2 + \frac{k^2}{(k \cdot \hat{Q})^2} \right. \\ & \times \left[\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q})^2}{|\mathbf{Q}|^2} - 3|\mathbf{k}|^2 + \frac{3}{2}k_0^2 \right] + \frac{k_0}{(k \cdot \hat{Q})} \left[4k_0^2 - 2\frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{Q})^2}{|\mathbf{Q}|^2} - 2|\mathbf{k}|^2 \right] \Bigg\}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

O resultado final é:

$$\Pi_{ii}^{\ln(T)} = \frac{11}{24\pi^2} g^2 N (2k^2 + k_0^2) \ln(T). \quad (2.28)$$

Agora, usando a equação acima mais as equações (2.6), (2.7) e (2.23), é possível calcular as funções de estrutura F e G :

$$F = G = \frac{11}{24\pi^2} g^2 N \ln(T) k^2, \quad (2.29)$$

que é um invariantes de Lorentz.

A estrutura tensorial de $\Pi_{\mu\nu}^{\ln(T)}$ é obtida com a ajuda da identidade:

$$P_{\mu\nu}^T + P_{\mu\nu}^L = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (2.30)$$

mais a equação (2.3):

$$\Pi_{\mu\nu}^{\ln(T)} = \frac{11}{24\pi^2} g^2 N \ln(T) (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu). \quad (2.31)$$

A parte independente da temperatura na auto-energia térmica completa possui o pólo ultravioleta regularizado [30]:

$$\Pi_{\mu\nu}^{\text{div}} = -\frac{11}{24\pi^2}g^2N\frac{\mu^{2\epsilon}}{2\epsilon}(-k^2g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu), \quad (2.32)$$

onde a dimensão do espaço-tempo é $4 - 2\epsilon$ e μ a escala de renormalização.

Portanto, comparando as duas últimas equações, pode-se ver que os coeficientes de $\ln(T)$ e $1/2\epsilon$ são iguais a menos de um sinal relativo. Esta identidade de estruturas permite que a parte logarítmica seja incluída de forma natural na constante de renormalização como uma parte finita qualquer. Usando a prescrição descrita no capítulo anterior, a constante Z_3 assume a forma:

$$Z_3(T/\mu) = 1 - \frac{11}{24\pi^2}g^2N\left[\frac{1}{2\epsilon} - \ln\left(\frac{T}{\mu}\right)\right]. \quad (2.33)$$

Vale ressaltar que, caso a parte proporcional a $\ln(T)$ não tivesse a mesma estrutura dos pólos ultravioleta, seria necessário usar outro método para definir a constante Z_3 , como a subtração numa escala $k^2 = \mu^2$, por exemplo.

Capítulo 3

Contribuições Logarítmicas da Função de Três Glúons

Neste capítulo, é apresentado o cálculo das contribuições logarítmicas da função de três glúons a partir do método das amplitudes de espalhamento frontais. A seção 3.1 descreve o cálculo dos diagramas de Feynman que compõem a função e a expansão em altas temperaturas. A seção 3.2 é dedicada às contribuições proporcionais a $\ln(T)$. Provou-se explicitamente que estas contribuições satisfazem uma identidade de Ward abeliana que as relaciona com as contribuições do tensor de polarização calculadas no capítulo anterior. Por último, a seção 3.3 discute a validade da identidade abeliana para a função de três glúons exata sob o ponto de vista da invariância BRS. Os detalhes computacionais dos cálculos estão descritos no apêndice B.

3.1 Cálculo da Função de Três Glúons

Devido à ausência de campos fantasmas, os diagramas de Feynman que compõem a função de três glúons no calibre axial temporal estão expostos na figura 3.1. No segundo diagrama, deve-se considerar as variações obtidas com a permutação cíclica dos momentos externos e índices de Lorentz correspondentes. A experiência acumulada com a teoria escalar $\lambda\phi^3$ e o tensor de polarização do glúon mostra que, no método das amplitudes de espalhamento frontais, deve-se considerar as amplitudes típicas obtidas a partir da quebra das linhas internas dos diagramas. Tais amplitudes estão representadas na figura 3.2. Além disso, um aspecto importante do cálculo deve ser recapitulado: a inclusão dos termos obtidos com a mudança de sinal do momento interno. Ao contrário do tensor de polarização, os termos obtidos com a mudança $Q \rightarrow -Q$ não são simplesmente equivalentes às variações de

sinais dos momentos externos, o que nos leva à forma mais geral presente na equação (1.35.)

Figura 3.1: Diagramas que formam a função de três glúons. No segundo diagrama (à direita), está implícita a soma obtida com a permutação cíclica dos momentos externos e índices correspondentes.

Figura 3.2: Amplitudes de espalhamento frontais típicas resultantes dos diagramas da figura 3.1.

Usando as regras diagramáticas no espaço de Minkowski, são obtidos os seguintes resultados para as amplitudes típicas:

$$A_{\mu\nu\rho}^{(1)} = g^3 \frac{N}{2} f_{abc} V_{\mu\lambda\alpha}(k_1, -Q - k_1, Q) D^{\lambda\gamma}(Q + k_1) \times V_{\nu\sigma\gamma}(k_2, -Q + k_3, Q + k_1) D^{\sigma\eta}(Q - k_3) V_{\rho\beta\eta}(k_3, -Q, Q - k_3) P^{\alpha\beta}(Q), \quad (3.1)$$

$$A_{\mu\nu\rho}^{(2)} = -ig^3 \frac{3N}{2} f_{abc} V_{\mu\lambda\alpha}(k_1, -Q - k_1, Q) D^{\lambda\sigma}(Q + k_1) \times (g_{\nu\beta} g_{\rho\sigma} - g_{\nu\sigma} g_{\beta\rho}) P^{\alpha\beta}(Q), \quad (3.2)$$

onde foram usados a conservação global de momento e os seguintes resultados válidos para o grupo SU(N) [6]:

$$f_{ade}f_{bef}f_{cfd} = \frac{N}{2}f_{abc}, \quad (3.3)$$

$$f_{ade}f_{gde} = N\delta_{ag}. \quad (3.4)$$

O operador $P^{\alpha\beta}(Q)$ está definido na equação (2.13).

O resultado completo da função de três glúons é calculado a partir da integração destas amplitudes com o momento interno Q na concha de massa. Portanto, levando em conta as considerações iniciais e de forma análoga à equação (1.39), sua parte térmica pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(k, T) = \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \frac{N(|Q|)}{2|Q|} \left\{ A_{\mu\nu\rho}^{(1)} + A_{\mu\nu\rho}^{(2)} + Q \rightarrow -Q + \text{permc} \right\}, \quad (3.5)$$

sendo que k representa o conjunto (k_1, k_2, k_3) . O símbolo permc significa somar as permutações cíclicas dos termos anteriores com respeito aos momentos e índices de Lorentz correspondentes.

Os termos dominantes em altas temperaturas, de modo semelhante ao que foi feito no caso do tensor de polarização, são obtidos a partir da expansão:

$$\frac{1}{k_i^2 + 2k_i \cdot Q} \simeq \frac{1}{2k_i \cdot Q} - \frac{k_i^2}{(2k_i \cdot Q)^2} + \dots, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.6)$$

Em geral, as potências ímpares em Q se cancelam quando se somam os termos de troca $Q \rightarrow -Q$. Assim, neste limite, não há contribuições lineares na temperatura, já que estes viriam dos termos de grau -1 no momento interno. As contribuições quadráticas e logarítmicas em T têm origem nos termos de grau 0 e -2 respectivamente.

O cálculo de $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$ e a expansão em altas temperaturas exigem o uso de métodos computacionais devido à complexidade envolvida. Usando o programa de manipulação matemática simbólica Maple, foi possível obter o limite em altas temperaturas (até a ordem logarítmica) do integrando da equação (3.5). O programa usado está descrito em detalhes no apêndice B. O resultado total possui mais de 1400 termos e desta forma não está presente explicitamente nesta tese, já que as dificuldades de interpretação são óbvias, sendo preferível analisá-lo a partir de suas propriedades e possíveis identidades.

Duas propriedades importantes de $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$ que puderam ser comprovadas explicitamente pelo programa de cálculo foram a ausência de termos no integrando de grau -1 no momento interno, como já fora previsto anteriormente,

e uma anti-simetria em relação aos momentos externos e seus respectivos índices de Lorentz. Este último fato é necessário devido à fatorização da constante de estrutura de grupo f_{abc} nas amplitudes de espalhamento descritas nas equações (3.1) e (3.2).

Apesar de não ser o objetivo principal deste trabalho, a parte quadrática na temperatura também merece destaque e serve como um importante teste para os cálculos. Em primeiro lugar, existem argumentos gerais [17, 31, 32] que dizem que a parte quadrática deve ser invariante de calibre e obedecer ao mesmo tipo de identidade de Ward abeliana que pretende-se provar para as contribuições logarítmicas. O resultado obtido para a contribuição proporcional a T^2 foi:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{(T^2)} = g^2 N \frac{T^2}{48} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathcal{M}_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3, \hat{Q}), \quad (3.7)$$

onde $\int d\Omega$ denota uma integração sobre a parte espacial de $\hat{Q} \equiv (1, \vec{Q})$ e $\mathcal{M}_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3, \hat{Q})$ é um tensor de grau zero no momento interno. Por simplicidade de notação, omitiram-se os fatores igf_{abc} .

Conforme dito anteriormente, $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{(T^2)}$ deve obedecer a mesma identidade do vértice fundamental $\Gamma_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3)$:

$$k_1^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{(T^2)}(k_1, k_2, k_3) = \Pi_{\nu\rho}^{(T^2)}(k_3) - \Pi_{\nu\rho}^{(T^2)}(k_2). \quad (3.8)$$

A identidade acima torna-se clara com o seguinte resultado obtido a partir do programa de cálculo:

$$k_1^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{(T^2)} = g^2 N \frac{T^2}{6} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[g_{\nu\rho} - \frac{k_{3\rho} \hat{Q}_\nu}{\hat{Q} \cdot k_3} - \frac{k_{3\nu} \hat{Q}_\rho}{\hat{Q} \cdot k_3} + \frac{k_3^2 \hat{Q}_\nu \hat{Q}_\rho}{(\hat{Q} \cdot k_3)^2} - k_3 \rightarrow k_2 \right]. \quad (3.9)$$

O primeiro termo do integrando da equação acima, por exemplo, nada mais é do que a parte quadrática do tensor de polarização do glúon em função do quadri-vetor k_3 escrita de forma covariante [15]. É importante notar que esta identidade não permite a conclusão de que a estrutura tensorial da parte quadrática é idêntica a dos pólos ultravioleta, ao contrário do que pretende-se provar para a parte logarítmica. Isto se deve ao fato de que $\Pi_{\nu\rho}^{(T^2)}$, apesar de transversal no calibre axial temporal, não é um invariante de Lorentz, ou seja, ele possui uma dependência explícita no quadri-vetor n , o qual define o referencial de repouso do banho térmico.

3.2 Contribuições Logarítmicas

De forma análoga ao que foi descrito na seção anterior, o resultado para a parte proporcional a $\ln(T)$ é dado por:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{\ln(T)} = -g^2 N \frac{\ln(T)}{16\pi^2} \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathcal{L}_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3, \hat{Q}), \quad (3.10)$$

com $\mathcal{L}_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3, \hat{Q})$ representando um tensor de grau -2 em $\hat{Q}$. Novamente, foi retirado o fator igf_{abc} . O primeiro passo da análise foi verificar se a parte logarítmica obedeceria a mesma identidade de Ward da parte quadrática. Com este objetivo, um programa em Maple (também descrito no apêndice B) foi escrito para calcular a contração de $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{\ln(T)}$ com um de seus quadrivetores. O resultado obtido foi:

$$k_1^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{\ln(T)} = C \int \frac{d\Omega}{4\pi} [\mathcal{G}_{\nu\rho}(k_3, \hat{Q}) - \mathcal{G}_{\nu\rho}(k_2, \hat{Q})], \quad (3.11)$$

onde, para simplificar a notação, todas as constantes foram agrupadas em C . O tensor $\mathcal{G}_{\mu\nu}$ é simétrico nos índices de Lorentz e a partir dele pode-se definir a seguinte integral:

$$I_{\mu\nu}(k, n) = C \int \frac{d\Omega}{4\pi} \mathcal{G}_{\mu\nu}(k, \hat{Q}). \quad (3.12)$$

Apesar de haver uma grande simplificação em relação ao problema original, a integral $I_{\mu\nu}(k, n)$ ainda possui um número considerável de termos e portanto é mais conveniente analisá-la sob o ponto de vista de uma decomposição numa base tensorial. Além disso, não possuímos nenhuma informação preliminar como no caso do tensor de polarização. Uma base bastante interessante foi proposta por Weldon [33]:

$$A_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - B_{\mu\nu} - D_{\mu\nu}. \quad (3.13)$$

$$B_{\mu\nu} = -\frac{(k \cdot n)^2 k_\mu k_\nu - k^2 k \cdot n (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu) + k^4 n_\mu n_\nu}{k^2 |\mathbf{k}|^2}, \quad (3.14)$$

$$C_{\mu\nu} = \frac{2k \cdot n k_\mu k_\nu - k^2 (k_\mu n_\nu + k_\nu n_\mu)}{k^2 |\mathbf{k}|}, \quad (3.15)$$

$$D_{\mu\nu} = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}. \quad (3.16)$$

Os tensores $A_{\mu\nu}$ e $B_{\mu\nu}$ são transversais em relação ao quadrivetor k , sendo respectivamente transversal e longitudinal em relação à componente espacial

$\mathbf{k}$. Os outros dois tensores, $C_{\mu\nu}$ e $D_{\mu\nu}$, não são transversais em relação a $\mathbf{k}$. Além disso, a base proposta acima é ortogonal.

Em geral, qualquer tensor que dependa de $\mathbf{k}$ e $\mathbf{n}$ pode ser escrito como uma combinação linear da forma:

$$I_{\mu\nu} = I_A A_{\mu\nu} + I_B B_{\mu\nu} + I_C C_{\mu\nu} + I_D D_{\mu\nu}. \quad (3.17)$$

Assim, uma condição necessária e suficiente para que $I_{\mu\nu}$ seja transversal, isto é, $k^\mu I_{\mu\nu}(\mathbf{k}, \mathbf{n}) = 0$, é que:

$$I_C = I_D = 0. \quad (3.18)$$

De fato, a condição acima foi provada através da contração com $C_{\mu\nu}$ e $D_{\mu\nu}$. As outras constantes de estrutura foram calculadas a partir das contrações com os tensores restantes:

$$I_A = C \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[4k^2 - 8 \frac{k^2(k \cdot \mathbf{n})^2}{|\mathbf{k}|^2} + 2 \frac{k^6}{|\mathbf{k}|^2 (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^2} + 7 \frac{k^4}{(\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^2} \right. \\ \left. + 4 \frac{k^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} + \frac{k^8}{|\mathbf{k}|^2 (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^4} + \frac{k^4(k \cdot \mathbf{n})^2}{|\mathbf{k}|^2 (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^2} \right. \\ \left. - 2 \frac{k^6 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{k}|^2 (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^3} + 2 \frac{k^4}{|\mathbf{k}|^2} \right], \quad (3.19)$$

$$I_B = C \int \frac{d\Omega}{4\pi} \left[-8 \frac{k^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} - 2 \frac{k^4(k \cdot \mathbf{n})^2}{|\mathbf{k}|^2 (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^2} + 4 \frac{k^6 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n}}{(\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^3 |\mathbf{k}|^2} \right. \\ \left. - 4 \frac{k^4}{|\mathbf{k}|^2} - 4 \frac{k^6}{|\mathbf{k}|^2 (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^2} - 2 \frac{k^8}{|\mathbf{k}|^2 (\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})^4} + 16 \frac{k^2(k \cdot \mathbf{n})^2}{|\mathbf{k}|^2} \right]. \quad (3.20)$$

As integrais angulares presentes nestas constantes de estrutura foram calculadas em detalhe no apêndice A a partir de derivadas da mesma integral básica:

$$\int_0^\pi d\theta \frac{1}{(\hat{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{k})} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} \right). \quad (3.21)$$

Portanto, substituindo tais resultados nas equações (3.19) e (3.20) e usando um pouco de álgebra, encontra-se:

$$I_A = I_B = \frac{22}{3} k^2 C. \quad (3.22)$$

Agora, usando as equações (3.13), (3.16) e (3.17) mais a constante:

$$C = -g^2 N \frac{\ln(T)}{16\pi^2}, \quad (3.23)$$

vê-se facilmente que:

$$I_{\mu\nu}(k) = \frac{11}{24\pi^2} g^2 N \ln(T) (-k^2 g_{\mu\nu} + k_\nu k_\mu), \quad (3.24)$$

que é simplesmente a parte logarítmica do tensor de polarização do glúon discutida no segundo capítulo. Deste modo, usando a equação (3.11) e a definição (3.12), prova-se que a contribuição logarítmica obedece à identidade de Ward abeliana:

$$k_1^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}^{\ln(T)} = \Pi_{\nu\rho}^{\ln(T)}(k_3) - \Pi_{\nu\rho}^{\ln(T)}(k_2). \quad (3.25)$$

Todavia, o resultado realmente notável não é a transversalidade, mas sim a invariância de Lorentz comprovada explicitamente. A fim de obter as consequências da relação (3.25) para a estrutura tensorial da parte logarítmica da função de três glúons, é preciso considerar a base tensorial mais geral que pode ser escrita a partir dos momentos externos k_1 , k_2 e k_3 mais o quadrivetor $n = (1, 0, 0, 0)$, respeitando as propriedades de simetria de $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{\ln(T)}$. Uma base possível é aquela composta pelos seguintes tensores:

$$S_{\mu\nu\rho}^1 = g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\rho + g_{\rho\mu}(k_3 - k_1)_\nu + g_{\nu\rho}(k_2 - k_3)_\mu, \quad (3.26)$$

$$S_{\mu\nu\rho}^2 = n_\mu n_\nu n_\rho, \quad (3.27)$$

$$S_{\mu\nu\rho}^3 = n_\mu n_\nu (k_1 - k_2)_\rho + n_\rho n_\mu (k_3 - k_1)_\nu + n_\nu n_\rho (k_2 - k_3)_\mu, \quad (3.28)$$

$$S_{\mu\nu\rho}^4 = n_\mu g_{\nu\rho} + n_\nu g_{\mu\rho} + n_\rho g_{\mu\nu}, \quad (3.29)$$

$$S_{\mu\nu\rho}^5 = n_\mu (k_{2\nu} k_{2\rho} - k_{3\nu} k_{3\rho}) + n_\nu (k_{3\rho} k_{3\mu} - k_{1\mu} k_{1\rho}) + n_\rho (k_{1\mu} k_{1\nu} - k_{2\nu} k_{2\mu}), \quad (3.30)$$

$$S_{\mu\nu\rho}^6 = n_\mu k_{1\nu} (k_2 - k_3)_\rho + n_\mu k_{1\rho} (k_2 - k_3)_\nu + n_\nu k_{2\rho} (k_3 - k_1)_\mu + n_\nu k_{2\mu} (k_3 - k_1)_\rho + n_\rho k_{3\mu} (k_1 - k_2)_\nu + n_\rho k_{3\nu} (k_1 - k_2)_\mu, \quad (3.31)$$

$$S_{\mu\nu\rho}^7 = k_{1\nu} k_{1\rho} (k_2 - k_3)_\mu + k_{1\mu} k_{1\nu} (k_2 - k_3)_\rho + k_{1\mu} k_{1\rho} (k_2 - k_3)_\nu + k_{3\mu} k_{3\nu} (k_1 - k_2)_\rho + k_{3\rho} k_{3\mu} (k_1 - k_2)_\nu + k_{3\rho} k_{3\nu} (k_1 - k_2)_\mu + k_{2\mu} k_{2\rho} (k_3 - k_1)_\nu + k_{2\nu} k_{2\rho} (k_3 - k_1)_\mu + k_{2\nu} k_{2\mu} (k_3 - k_1)_\rho, \quad (3.32)$$

$$S_{\mu\nu\rho}^8 = k_{1\rho} k_{2\mu} k_{3\nu} - k_{1\nu} k_{2\rho} k_{3\mu}. \quad (3.33)$$

Portanto, pode-se escrever:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{\ln(T)} = \sum_{i=1}^8 C_i(k_1, k_2, k_3, n) S_{\mu\nu\rho}^i, \quad (3.34)$$

onde os coeficientes $C_i(k_1, k_2, k_3, n)$ só poderiam ser calculados explicitamente através da integração angular de todos os termos obtidos através do programa de cálculo.

Ao contrair a expansão (3.34) com o quadrivetor k_1^μ e usando a conservação total de momento, surge uma equação que não serve para encontrar os valores dos coeficientes C_i , mas indica quais devem ser nulos, já que o resultado final deve ser somente a diferença de dois tensores transversais e invariantes de Lorentz. Após uma álgebra considerável, as seguintes equações puderam ser obtidas:

$$C_8(k_3^2 - k_2^2) = 0, \quad (3.35)$$

$$C_7(k_3^2 - k_2^2) = 0, \quad (3.36)$$

$$2C_6(k_2^2 - k_3^2) + C_5(k_3^2 - k_2^2) = 0, \quad (3.37)$$

$$-8C_4 + 4C_6(k_3^2 - k_2^2) + 2C_5(k_2^2 - k_3^2) = 0. \quad (3.38)$$

Usando as duas últimas equações acima, é fácil chegar à conclusão que $C_4 = 0$. Além disso, há as equações adicionais:

$$C_3(k_2 \cdot n + k_3 \cdot n) = 0, \quad (3.39)$$

$$C_2(k_2 \cdot n + k_3 \cdot n) = 0. \quad (3.40)$$

Contraindo a identidade (3.25) com $g_{\mu\nu}$, surge também a relação:

$$C_6(k_2 \cdot k_3 k_3 \cdot n - k_2 \cdot k_3 k_2 \cdot n) = 0, \quad (3.41)$$

que combinada com a equação (3.37) nos diz que $C_5 = 0$.

Assim, o único coeficiente que não deve ser necessariamente nulo é C_1 , cujo valor é obtido a partir de equação (3.24):

$$C_1 = -\frac{11}{24\pi^2} g^2 N \ln(T). \quad (3.42)$$

A conclusão a que chegamos é que a identidade de Ward abeliana (3.25) mostra que a estrutura tensorial da parte logarítmica da função de três glúons deve ser:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{\ln(T)} = -\frac{11}{24\pi^2} g^2 N \ln(T) V_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3), \quad (3.43)$$

com $V_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3)$ representando o vértice fundamental de três glúons:

$$V_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3) = g_{\mu\nu}(k_1 - k_2)_\rho + g_{\nu\rho}(k_2 - k_3)_\mu + g_{\rho\mu}(k_3 - k_1)_\nu. \quad (3.44)$$

A estrutura acima é similar a dos pólos ultravioleta a temperatura zero:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{\text{div}} = \frac{11}{24\pi^2} g^2 N \frac{\mu^{2\epsilon}}{2\epsilon} V_{\mu\nu\rho}(k_1, k_2, k_3). \quad (3.45)$$

A constante de renormalização Z_1 é calculada de modo análogo a Z_3 :

$$Z_1(T/\mu) = 1 - \frac{11}{24\pi^2} g^2 N \left[\frac{1}{2\epsilon} - \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) \right]. \quad (3.46)$$

Portanto, temos que $Z_1 = Z_3$. A princípio, a temperatura zero, este é um resultado conhecido devido às identidades de Slavnov-Taylor [6], as quais são baseadas na simetria BRS e na invariância de Lorentz. A temperatura finita, este não é um resultado óbvio pois, como foi mencionado na introdução, esta última propriedade não se verifica, além dos resultados obtidos na literatura variarem de acordo com os vértices escolhidos.

A constante de renormalização total Z_g é obtida através das equações (1.67) e (1.68):

$$\begin{aligned} Z_g &= \left\{ 1 - \frac{11}{24\pi^2} g^2 N \left[\frac{1}{2\epsilon} - \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) \right] \right\}^{-1/2} \\ &\simeq 1 + \frac{11}{48\pi^2} g^2 N \left[\frac{1}{2\epsilon} - \ln \left(\frac{T}{\mu} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.47)$$

que nos permite usar a solução geral (1.79):

$$g^2(T) = \frac{g^2(\mu)}{1 + \frac{11}{48\pi^2} g^2 N \ln(T/\mu)}, \quad (3.48)$$

e que pode ainda ser escrita como:

$$g^2(T) = \frac{48\pi^2}{11N \ln(T^2/\Lambda^2)}. \quad (3.49)$$

O resultado acima é idêntico ao obtido para uma classe geral de calibres covariantes e pode ser usado, por exemplo, para complementar o resultado perturbativo da pressão de um plasma de quarks e glúons [19]:

$$P = -\frac{\pi^2}{45}(N^2 - 1)T^4 + \frac{g^2(T)}{144}N(N^2 - 1)T^4 - \frac{g^3(T)}{12\pi}(N^2 - 1)\left(\frac{N}{3}\right)^{3/2}T^4 + \dots \quad (3.50)$$

3.3 Simetria BRS e a Função de Três Glúons Exata

O objetivo desta seção é verificar se a identidade abeliana discutida nas seções anteriores vale além da aproximação de amplitudes frontais de partículas na concha de massa. Com esse objetivo, vamos estudar as consequências da simetria BRS na estrutura da função de três glúons exata no calibre axial temporal. Isto quer dizer que, além de justificar nossos resultados obtidos com as partes quadrática e logarítmica, ele vai além e afirma que tal identidade deve valer em todas as ordens em teoria de perturbação, incluindo termos dominantes e sub-dominantes na temperatura.

Como nosso interesse está em provar algo a cerca das funções de Green térmicas, considere a seguinte ação efetiva:

$$\begin{aligned}
 I = & \int d^4x d^4y J^{\mu a}(x) G_{\mu}^{ab}(x-y) \eta^b(y) + \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A^{\mu a}(x) \Gamma_{\mu\nu}^{ab}(x-y) A^{\nu b}(y) \\
 & + \int d^4x d^4y d^4z J^{\mu a}(x) H_{\mu\nu}^{abc}(x, y, z) \eta^b(y) A^{\nu c}(z) \\
 & + \frac{1}{3!} \int d^4x d^4y d^4z A^{\mu a}(x) A^{\nu b}(y) A^{\rho c}(z) \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(x, y, z) + \dots, \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

onde as reticências indicam, como vai ser mostrado mais adiante, termos sem importância para o cálculo. Na equação acima, vários pontos devem ser notados. Em primeiro lugar, observa-se que $J^{\mu a}$ é a fonte introduzida com a transformação BRS e η^b representa o campo fantasma. Além disso, as funções G_{μ}^{ab} e $H_{\mu\nu}^{abc}$ representam os acoplamentos fonte-fantasma e fonte-fantasma-glúons respectivamente. Na ordem zero em teoria de perturbação (nível de árvore):

$$G_{\mu, \text{tree}}^{ab} = \delta^{ab} \partial_{\mu}, \quad (3.52)$$

$$H_{\mu\nu, \text{tree}}^{abc} = -ig \delta_{\mu\nu} f^{abc}. \quad (3.53)$$

Por último, a ação efetiva I deve ser ligeiramente modificada para não incluir os termos de fixação de calibre na parte quadrática nos campos [6], ou seja, no espaço de momentos e em nível de árvore:

$$\Gamma_{\mu\nu, \text{tree}}^{ab}(k) = \delta^{ab} (k_{\mu} k_{\nu} - k^2 g_{\mu\nu}). \quad (3.54)$$

A invariância da Cromodinâmica Quântica por uma transformação do tipo BRS requer que:

$$\int d^4x \left[\frac{\delta I}{\delta A_{\mu}^a(x)} \frac{\delta I}{\delta J^{\mu a}(x)} + \frac{\delta I}{\delta \eta^a(x)} \frac{\delta I}{\delta \eta^a(x)} \right] = 0, \quad (3.55)$$

com j^a denotando a outra fonte da transformação relacionada com o campo fantasma, ou seja, existe na lagrangiana uma interação da forma:

$$-\frac{1}{2} g j^a \bar{\eta}^b \eta^c f^{abc}. \quad (3.56)$$

Nesta altura, é importante discutir melhor a razão pela qual vários termos adicionais foram desprezados na definição (3.51). Pela forma que a ação efetiva possui, fica claro que a identidade procurada envolve a diferenciação funcional consecutiva da equação (3.55) com respeito aos campos $A^{\nu b}(y)$, $A^{\rho c}(z)$ e $\eta^d(w)$. Todavia, a própria definição de ação efetiva diz que as funções de Green térmicas são obtidas por diferenciação dos campos, colocando posteriormente os mesmos e suas respectivas fontes iguais a zero. Portanto, os únicos termos que possuem o número correto de campos são aqueles presentes na equação (3.51).

Substituindo a definição (3.51) na equação (3.55) e fazendo as derivadas adicionais, percebe-se que a parte envolvendo j^a é igual a zero e após uma álgebra tediosa mas direta surge a relação:

$$\int d^4x [\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(x-y) H_{\rho}^{\mu,adc}(x,w,z) + \Gamma_{\mu\rho}^{ac}(x-z) H_{\nu}^{\mu,adb}(x,w,y) + \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(x,y,z) G^{\mu,ad}(x-w)] = 0, \quad (3.57)$$

onde foi usado o fato de $\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}$ possuir uma simetria completa por permutações dos momentos externos, índices de Lorentz e de cor. Porém, vale ressaltar que vários termos foram desprezados por não ter o número correto de campos. No espaço de momentos, esta relação pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{ab}(q) H_{\rho}^{\mu,adc}(p,q,r) + \Gamma_{\mu\rho}^{ac}(r) H_{\nu}^{\mu,adb}(p,q,r) + \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc}(p,q,r) G^{\mu,ad}(p) = 0, \quad (3.58)$$

com p, q e r representando um conjunto de quadrimomentos tal que:

$$p + q + r = 0. \quad (3.59)$$

A princípio, a equação (3.58) pode ser analisada perturbativamente até a ordem de um loop. Portanto, usando as equações (3.52), (3.53) e (3.54) mais a conservação total dos momentos, a seguinte identidade é automaticamente satisfeita em nível de árvore:

$$p^{\mu} \Gamma_{\mu\nu\rho}^{\text{tree}}(p,q,r) = \Gamma_{\nu\rho}^{\text{tree}}(r) - \Gamma_{\nu\rho}^{\text{tree}}(q), \quad (3.60)$$

pois:

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc, \text{tree}}(p,q,r) = i g f^{abc} \Gamma_{\mu\nu\rho}^{\text{tree}}(p,q,r), \quad (3.61)$$

$$\Gamma_{\mu\nu\rho}^{\text{tree}}(p, q, r) = g_{\mu\nu}(p - q)_\rho + g_{\nu\rho}(q - r)_\mu + g_{\rho\mu}(r - p)_\nu. \quad (3.62)$$

Note que a identidade é válida a menos de um fator if^{abc} na função de três glúons.

Na ordem de um loop, o resultado é mais complicado:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\mu\nu}^{ab(1)}(q)H_{\rho, \text{tree}}^{\mu, adc} + \Gamma_{\mu\rho}^{ac(1)}(r)H_{\nu, \text{tree}}^{\mu, adb} + \Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc(1)}G_{\text{tree}}^{\mu, ad}(p) \\ &= -[G^{\mu, ad(1)}(p)\Gamma_{\mu\nu\rho}^{abc, \text{tree}} + \Gamma_{\mu\nu}^{ab, \text{tree}}(q)H_{\rho}^{\mu, adc(1)} + \Gamma_{\mu\rho}^{ac, \text{tree}}(r)H_{\nu}^{\mu, adb(1)}]. \end{aligned} \quad (3.63)$$

A fim de provar que o segundo membro da equação acima é zero, é preciso estudar os diagramas que contribuem para G e H . Tais diagramas estão representados na figura 3.1.

Figura 3.3: Diagramas que contribuem para G e H na ordem de um loop.

É interessante notar que, apesar de não representar nenhum tipo de partícula real, o campo fantasma é fundamental no estudo da invariância BRS. Entretanto, devido à natureza do calibre axial, os fantasmas acabam se desacoplando completamente da identidade de Ward. Para entender este fato, considere a interação glúons-fantasma induzida na lagrangiana a partir do determinante funcional necessário para o procedimento de quantização:

$$\int [d\eta][d\bar{\eta}] e^{-\int d^4x \bar{\eta}^a(x) n^\mu D_\mu^{ab} \eta^b(x)}, \quad (3.64)$$

onde $n = (1, 0, 0, 0)$ é o quadrivetor de fixação de calibre e D_μ^{ab} é a derivada covariante:

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - i f^{abc} A_\mu^c. \quad (3.65)$$

Assim, torna-se claro que o vértice desta interação envolve a multiplicação por n^μ . Lembrando que no calibre axial o propagador é definido por:

$$D_{\mu\nu}(Q) = -\frac{i}{Q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{(Q_\mu n_\nu + Q_\nu n_\mu)}{Q \cdot n} + \frac{Q_\mu Q_\nu}{(Q \cdot n)^2} \right], \quad (3.66)$$

tem-se que $n^\mu D_{\mu\nu}(Q)^{(n)} = 0$. Portanto, os diagramas presentes na figura 3.1 são obviamente iguais a zero:

$$G_\mu^{ab(1)} = 0, \quad (3.67)$$

$$H_{\mu\nu}^{abc(1)} = 0. \quad (3.68)$$

Mais do que isso, este argumento pode ser generalizado em todas as ordens em teoria de perturbação e pode-se escrever que $G_\mu^{ab} = 0$ e $H_{\mu\nu}^{abc} = 0$.

Com o segundo membro da equação (3.63) sendo igual a zero, a seguinte identidade é válida para a função de três glúons exata:

$$p^\mu \Gamma_{\mu\nu\rho}(p, q, r) = \Gamma_{\nu\rho}(r) - \Gamma_{\nu\rho}(q). \quad (3.69)$$

Concluindo, esta conclusão geral justifica e expande nossos resultados anteriores para a função exata, envolvendo todas as ordens na temperatura.

Capítulo 4

Conclusão

Nesta tese, foram calculadas as contribuições logarítmicas da função de três glúons no calibre axial temporal na ordem de um loop no regime de altas temperaturas. O método de cálculo consistiu em expressar os loops térmicos em termos de amplitudes de espalhamento frontais na concha de massa. Devido à complexidade e número de termos, foi usado um programa escrito em Maple para calcular as amplitudes e fazer a expansão no limite de altas temperaturas. O resultado final foi expresso em termos de uma integral angular no momento interno, possuindo todas as propriedades de simetria apropriadas.

Além disso, provou-se explicitamente que tais contribuições satisfazem uma identidade de Ward abeliana que as relaciona com a parte logarítmica do tensor de polarização do glúon. Sendo as últimas idênticas em estrutura aos pólos ultravioleta da teoria a temperatura zero, impõe-se uma grande restrição à possível estrutura da parte logarítmica da função de três glúons. Após a aplicação da identidade de Ward numa estrutura geral formada pelos momentos externos mais o quadrivetor que define o referencial de repouso do sistema, obedecendo às propriedades de simetria apropriadas, chega-se à conclusão de que a forma deve ser a mesma dos pólos ultravioleta da teoria, ou seja, proporcional ao vértice fundamental de três glúons.

Portanto, as contribuições logarítmicas do tensor de polarização e da função de três glúons podem ser absorvidas de forma natural nas respectivas constantes de renormalização através de uma prescrição simples. Estas últimas se combinam de tal forma que, analisadas sob o ponto de vista do grupo de renormalização a temperatura finita, dão origem a uma constante de acoplamento efetiva onde ocorre um escalonamento entre a escala de renormalização e a temperatura, isto é, a própria temperatura serve de escala de energia. O resultado final para a constante de acoplamento efetiva decai logaritmicamente com a temperatura, de acordo com a liberdade assintótica,

e é idêntico ao obtido para uma classe geral de calibres covariantes, podendo ser aplicada nos observáveis termodinâmicos de um plasma de quarks e glúons livres.

Apêndice A

Integrais Angulares

Neste apêndice, resolvemos as integrais angulares do tipo:

$$I_n = \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{(k_0 - |\mathbf{k}| \cos \theta)^n}. \quad (\text{A.1})$$

$$H_n = \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(k_0 - |\mathbf{k}| \cos \theta)^n}. \quad (\text{A.2})$$

Em geral, tanto I_n quanto H_n podem ser calculadas a partir das seguintes integrais elementares:

$$I_1 = \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{(k_0 - |\mathbf{k}| \cos \theta)} = \frac{1}{|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} \right). \quad (\text{A.3})$$

$$H_1 = \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(k_0 - |\mathbf{k}| \cos \theta)} = \frac{k_0^2}{|\mathbf{k}|^3} \left[\ln \left(\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} \right) - \frac{2|\mathbf{k}|}{k_0} \right]. \quad (\text{A.4})$$

É uma tarefa simples ver que I_n e H_n podem ser calculadas a partir de I_{n-1} e H_{n-1} :

$$I_n = \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{(k_0 - |\mathbf{k}| \cos \theta)^n} = -\frac{1}{(n-1)} \frac{dI_{n-1}}{dk_0}. \quad (\text{A.5})$$

$$H_n = \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta \cos^2 \theta}{(k_0 - |\mathbf{k}| \cos \theta)^n} = -\frac{1}{(n-1)} \frac{dH_{n-1}}{dk_0}. \quad (\text{A.6})$$

Assim, temos fórmulas iterativas que nos fornecem os resultados:

$$I_2 = \frac{2}{k^2}. \quad (\text{A.7})$$

$$I_3 = \frac{2k_0}{k^4}. \quad (\text{A.8})$$

$$I_4 = \frac{2k_0^2}{k^6} + \frac{2|\mathbf{k}|^2}{3k^6}. \quad (\text{A.9})$$

$$H_2 = \frac{2}{|\mathbf{k}|^2} \left[1 + \frac{k_0^2}{k^2} - \frac{k_0}{|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} \right) \right]. \quad (\text{A.10})$$

$$H_3 = \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \left[\frac{2k_0|\mathbf{k}|^2}{k^4} - \frac{2k_0}{k^2} + \frac{1}{|\mathbf{k}|} \ln \left(\frac{k_0 + |\mathbf{k}|}{k_0 - |\mathbf{k}|} \right) \right]. \quad (\text{A.11})$$

$$H_4 = \frac{2}{k^2} \left(\frac{4k_0^2}{3k^4} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (\text{A.12})$$

Apêndice B

Cálculos Envolvendo Computação Simbólica

Este apêndice apresenta os programas usados nos cálculos envolvendo a função de três glúons. Na notação do Maple, o símbolo $\&$ representa o produto escalar quando aplicado entre dois quadrivetores:

$$k \& q \equiv k \cdot q = k_0 q_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}.$$

Quando aplicado entre um quadrivetor e um índice, representa uma direção arbitrária deste quadrivetor, por exemplo, $k \& mu \equiv k_\mu$. Os comandos que realizam as operações básicas de cálculo tensorial fazem parte do pacote HIP.

1-Leitura do pacote HIP mais as definições dos quadrivetores e índices.

```
> read hip;
> setfv(mu,nu,rho,sigma,q,Q,k1,k2,k3,n);
> setdp([n,n,1],[Q,Q,0],[q,q,0]);
> setindex(m1,m2,m3,m4,m5,m6);
```

2-Definições do propagador (sem o pólo) e vértices (sem as constantes de estrutura).

```
> read 'qcd_axial.m';
> d(mu,nu,q);
```

$$(\mu \& \nu) - \frac{(\mu \& q)(n \& \nu) + (\nu \& q)(\mu \& n)}{n \& q} + \frac{(\mu \& q)(\nu \& q)}{(n \& q)^2}$$

```
> v3gluons(mu,nu,rho,k1,k2,k3);
```

$$(\mu \& \nu)(\rho \& (k1 - k2)) + (\nu \& \rho)(\mu \& (k2 - k3)) \\ + (\mu \& \rho)(\nu \& (k3 - k1))$$

```

> v4gluons1(mu,nu,rho,sigma);
      2 (μ & . ν) (ρ & . σ) - (μ & . ρ) (ν & . σ) - (μ & . σ) (ν & . ρ)

> v4gluons2(mu,nu,rho,sigma);
      (μ & . ν) (ρ & . σ) - (μ & . σ) (ν & . ρ)

```

3-Cálculo do primeiro diagrama.

3.1-Cálculo do integrando (sem as permutações).

```

> a1 := v3gluons(mu,m1,m2,k1,-q - k1,q) * d(m1,m3,q + k1)
> * v3gluons(nu,m4,m3,k2,-q + k3,q + k1) * d(m4,m5,q - k3)
> * v3gluons(rho,m6,m5,k3,-q,q - k3) * d(m2,m6,q)/((k1 & . k1
> + 2 * k1 & . q) * (k3 & . k3 - 2 * k3 & . q)):
> a2 := contract(contract(contract(contract(contract(
> contract(a1,m1),m2),m3),m4),m5),m6): nops(expand("));

```

3190

3.2-Expansão em altas temperaturas ($1/x = |Q|$).

```

> lista1 := [q & . mu = Q & . mu/x,q & . nu = Q & . nu/x,q & . rho
> = Q & . rho/x,q & . n = Q & . n/x,seq(q & . k.i = Q & . k.i/x,
> i = 1..3)]:
> a3 := expand(convert(series(subs(lista1,a2),x = 0,6),
> polynom)): nops("");

```

767

3.3-Cálculo do integrando completo.

```

> a4 := a3 + subs(Q = -Q,a3):
> lista2 := [k1 = k3,k2 = k1,k3 = k2,mu = rho,nu = mu,rho = nu]:
> lista3 := [k1 = k2,k2 = k3,k3 = k1,mu = nu,nu = rho,rho = mu]:
> a5 := expand(a4 + subs(lista2,a4) + subs(lista3,a4)): nops("");

```

1440

3.4-Extração da partes proporcionais a T^2 e a $\ln T$.

```

> f3gluons1_t2 := subs(x = 0,a5):
> f3gluons1_t := coeff(a5,x);
      f3gluons1_t := 0

```

```
> f3gluons1_ln := coeff(a5,x^2): nops("");
```

1422

3.5-Salva os resultados

```
> save f3gluons1_t2,f3gluons1_ln,'f3gluons1.m';
```

4-Cálculo do segundo diagrama.

4.1-Cálculo do integrando (sem as permutações).

```
> b1 := 3 * v3gluons(mu,m1,m2,k1,-q - k1,q) * d(m1,m3,q + k1) *
> d(m2,m4,q) * v4gluons2(nu,m4,rho,m3)/(k1 &. k1 + 2 * k1 &. q):
> b2 := contract(contract(contract(contract(b1,m1),m2),m3),m4):
> nops(expand("));
```

82

4.2-Expansão em altas temperaturas ($1/x = |Q|$).

```
> lista1 := [q &. mu = Q &. mu/x,q &. nu = Q &. nu/x,q &. rho
> = Q &. rho/x,q &. n = Q &. n/x,q &. k1 = Q &. k1/x]:
> b3 := expand(convert(series(subs(lista1,b2),x = 0,5),
> polynom)): nops("");
```

130

4.3-Cálculo do integrando completo.

```
> b4 := b3 + subs(Q = -Q,b3):
> lista2 := [k1 = k3,mu = rho,nu = mu,rho = nu]:
> lista3 := [k1 = k2,mu = nu,nu = rho,rho = mu]:
> b5 := expand(b4 + subs(lista2,b4) + subs(lista3,b4)):
> nops("");
```

108

4.4-Extração dos termos proporcionais a T^2 e a $\ln T$.

```
> f3gluons2_t2 := subs(x = 0,b5);
```

$f3gluons2_t2 := 0$

```
> f3gluons2_t := coeff(b5,x);
```

$f3gluons2_t := 0$

```
> f3gluons2_ln := coeff(b5,x^2):
```

4.5-Salva o resultado.

```
> save f3gluons2_ln,'f3gluons2.m';
```

5-Prova da identidade de Ward para a parte quadrática.

5.1-Fixa o quadrvetor n .

```
> setdp([Q,n,1]);
```

5.2-Anti-simetria nos momentos externos.

```
> f3gluons_t2 := f3gluons1_t2:
> lista1 := [k1 = k2,mu = nu,k2 = k1,nu = mu]:
> lista2 := [k1 = k3,mu = rho,k3 = k1,rho = mu]:
> lista3 := [k2 = k3,nu = rho,k3 = k2,rho = nu]:
> expand(f3gluons_t2 + subs(lista1,f3gluons_t2));
```

0

```
> expand(f3gluons_t2 + subs(lista2,f3gluons_t2));
```

0

```
> expand(f3gluons_t2 + subs(lista3,f3gluons_t2));
```

0

5.3-Contração com o momento k_1 .

```
> ward_t2 := expand(subs(k1 = -k2 - k3,subs(mu = k1,
> f3gluons_t2)));
```

$$\begin{aligned} ward_t2 := & 8 \frac{(Q \& . \rho)(Q \& . \nu)(k3 \& . k3)}{(Q \& . k3)^2} + 8 \frac{(Q \& . \rho)(k2 \& . \nu)}{Q \& . k2} \\ & - 8 \frac{(k3 \& . \rho)(Q \& . \nu)}{Q \& . k3} - 8 \frac{(Q \& . \rho)(Q \& . \nu)(k2 \& . k2)}{(Q \& . k2)^2} \\ & + 8 \frac{(k2 \& . \rho)(Q \& . \nu)}{Q \& . k2} - 8 \frac{(k3 \& . \nu)(Q \& . \rho)}{Q \& . k3} \end{aligned}$$

6-Prova da indentidade de Ward para a parte logarítmica.

6.1-Soma das contribuições dos dois diagramas.

```
> f3gluons_ln := f3gluons1_ln + f3gluons2_ln: nops("");
```

1422

6.2-Anti-simetria nos momentos externos.

```
> expand(f3gluons_ln + subs(lista1,f3gluons_ln));
```

0

```
> expand(f3gluons_ln + subs(lista2,f3gluons_ln));
```

0

```
> expand(f3gluons_ln + subs(lista3,f3gluons_ln));
```

0

6.3-Contração com o momento k_1 e separação em duas partes simétricas.

```
> ward_ln := expand(subs(k1 = -k2 - k3,subs(mu = k1,  
> f3gluons_ln))): nops("");
```

60

```
> ward1_ln := subs(k2 &. nu = 0,k2 &. rho = 0,k2 &. k2 = 0,  
> k2 &. n = 0,ward_ln):
```

```
> ward2_ln := subs(k3 &. nu = 0,k3 &. rho = 0,k3 &. k3 = 0,  
> k3 &. n = 0,ward_ln):
```

```
> ward_ln - ward1_ln - ward2_ln;
```

0

```
> ward1_ln;
```

$$\begin{aligned}
& -4(n \& \nu)(k3 \& k3)(Q \& \rho) + 4(n \& \rho)(k3 \& \nu)(Q \& k3) \\
& - 4(Q \& \nu)(n \& \rho)(k3 \& k3) + 4 \frac{(k3 \& n)^2(Q \& \nu)(k3 \& \rho)}{Q \& k3} \\
& + 8(k3 \& k3)(n \& \nu)(n \& \rho) + 4 \frac{(k3 \& k3)^2(Q \& \nu)(Q \& \rho)}{(Q \& k3)^2} \\
& + 8 \frac{(k3 \& n)(Q \& \nu)(k3 \& k3)(Q \& \rho)}{Q \& k3} - 4(k3 \& \rho)(k3 \& n)(Q \& \nu) \\
& - 4(k3 \& n)(n \& \rho)(k3 \& \nu) - 2 \frac{(k3 \& k3)^2(k3 \& \nu)(Q \& \rho)}{(Q \& k3)^3} \\
& - 2 \frac{(k3 \& k3)^2(k3 \& \rho)(Q \& \nu)}{(Q \& k3)^3} + 2 \frac{(Q \& \rho)(Q \& \nu)(k3 \& k3)^3}{(Q \& k3)^4} \\
& + 4(Q \& k3)(k3 \& \rho)(n \& \nu) - 8 \frac{(k3 \& \rho)(k3 \& \nu)(k3 \& n)}{Q \& k3} \\
& - 4(k3 \& \rho)(k3 \& n)(n \& \nu) + 4 \frac{(k3 \& k3)(k3 \& \nu)(Q \& \rho)(k3 \& n)}{(Q \& k3)^2} \\
& + 8 \frac{(k3 \& k3)^2(\nu \& \rho)}{(Q \& k3)^2} - 4 \frac{(k3 \& k3)(k3 \& \rho)(Q \& \nu)}{Q \& k3} \\
& - 4 \frac{(k3 \& k3)^2(n \& \nu)(Q \& \rho)}{(Q \& k3)^2} - 4 \frac{(k3 \& k3)(n \& \nu)(k3 \& n)(Q \& \rho)}{Q \& k3} \\
& - 4 \frac{(k3 \& k3)(k3 \& \nu)(Q \& \rho)}{Q \& k3} - 6 \frac{(k3 \& k3)(k3 \& \rho)(k3 \& \nu)}{(Q \& k3)^2} \\
& + 4 \frac{(k3 \& k3)(k3 \& \rho)(n \& \nu)}{Q \& k3} + 4(k3 \& k3)(\nu \& \rho) \\
& - 4 \frac{(k3 \& n)(Q \& \nu)(n \& \rho)(k3 \& k3)}{Q \& k3} + 4 \frac{(k3 \& k3)(n \& \rho)(k3 \& \nu)}{Q \& k3} \\
& + 4 \frac{(k3 \& k3)(Q \& \nu)(k3 \& n)(k3 \& \rho)}{(Q \& k3)^2} + 4 \frac{(Q \& \rho)(k3 \& \nu)(k3 \& n)^2}{Q \& k3} \\
& - 4 \frac{(k3 \& k3)^2(Q \& \nu)(n \& \rho)}{(Q \& k3)^2} - 4(Q \& \rho)(k3 \& \nu)(k3 \& n)
\end{aligned}$$


```

> ward1_ln + subs(k2 = k3, ward2_ln);
0

> lista4 := [nu = rho, rho = nu]:
> expand(ward1_ln - subs(lista4, ward1_ln));
0

```

6.4-Definição da base tensorial ($mk_3 = |\mathbf{k}_3|$) e cálculo das constantes de estrutura.

```

> lista5 := [nu = m1, rho = m2]:
> Anu_rho := nu &. rho - Bnu_rho - Dnu_rho;
      Anu_rho := (nu &. rho) - Bnu_rho - Dnu_rho

> Bnu_rho := -((k3 &. n)^2 * k3 &. nu * k3 &. rho - k3 &. k3
> * k3 &. n * (k3 &. nu * n &. rho + k3 &. rho * n &. nu)
> + (k3 &. k3)^2 * n &. nu * n &. rho)/(k3 &. k3 * (mk3)^2);

Bnu_rho := -((k3 &. n)^2 (k3 &. nu) (k3 &. rho) -
      (k3 &. k3) (k3 &. n) ((n &. rho) (k3 &. nu) + (k3 &. rho) (n &. nu))
      + (k3 &. k3)^2 (n &. nu) (n &. rho)) / ((k3 &. k3) mk3^2)

> Cnu_rho := (2 * k3 &. n * k3 &. nu * k3 &. rho - k3 &. k3
> * (k3 &. nu * n &. rho + k3 &. rho * n &. nu))/(k3 &. k3
> * mk3);

Cnu_rho := (2 (k3 &. n) (k3 &. nu) (k3 &. rho)
      - (k3 &. k3) ((n &. rho) (k3 &. nu) + (k3 &. rho) (n &. nu))) / (
      (k3 &. k3) mk3)

> Dnu_rho := k3 &. nu * k3 &. rho / k3 &. k3;
      Dnu_rho := (k3 &. nu) (k3 &. rho) /
      k3 &. k3

> contract(subs(lista5, ward1_ln * Cnu_rho));
0

```

```
> contract(subs(lista5,ward1_ln * Dnu_rho));
```

0

```
> coef_A := 1/2 * contract(subs(lista5,ward1_ln * Anu_rho));
```

$$\begin{aligned} \text{coef_A} := & 4(k_3 \& k_3) + 2 \frac{(k_3 \& k_3)^3}{(Q \& k_3)^2 m k_3^2} + \frac{(k_3 \& k_3)^4}{(Q \& k_3)^4 m k_3^2} \\ & - 8 \frac{(k_3 \& n)^2 (k_3 \& k_3)}{m k_3^2} + 7 \frac{(k_3 \& k_3)^2}{(Q \& k_3)^2} + 2 \frac{(k_3 \& k_3)^2}{m k_3^2} \\ & + 4 \frac{(Q \& k_3)(k_3 \& n)(k_3 \& k_3)}{m k_3^2} + \frac{(k_3 \& k_3)^2 (k_3 \& n)^2}{(Q \& k_3)^2 m k_3^2} \\ & - 2 \frac{(k_3 \& k_3)^3 (k_3 \& n)}{(Q \& k_3)^3 m k_3^2} \end{aligned}$$

```
> coef_B := expand(contract(subs(lista5,ward1_ln * Bnu_rho)));
```

$$\begin{aligned} \text{coef_B} := & -2 \frac{(k_3 \& k_3)^4}{(Q \& k_3)^4 m k_3^2} + 4 \frac{(k_3 \& k_3)^3 (k_3 \& n)}{(Q \& k_3)^3 m k_3^2} \\ & - 8 \frac{(Q \& k_3)(k_3 \& n)(k_3 \& k_3)}{m k_3^2} - 4 \frac{(k_3 \& k_3)^3}{(Q \& k_3)^2 m k_3^2} \\ & - 2 \frac{(k_3 \& k_3)^2 (k_3 \& n)^2}{(Q \& k_3)^2 m k_3^2} + 16 \frac{(k_3 \& n)^2 (k_3 \& k_3)}{m k_3^2} \\ & - 4 \frac{(k_3 \& k_3)^2}{m k_3^2} \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] J. C. Collins e M. J. Perry, Phys. Rev. Lett. **34**, 1353 (1975).
- [2] J. I. Kapusta. *Finite-Temperature Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1989).
- [3] M. L. Bellac. *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996).
- [4] D. J. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [5] H. D. Politzer. Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [6] T. Muta. *Foundations of Quantum Chromodynamics* (World Scientific, Singapore, 1987).
- [7] H. Matsumoto, S. Nakano, e J. Umezawa, Phys. Rev. D **29**, 1116 (1984).
- [8] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, *Statistical Physics* (Addison-Wesley, 1959).
- [9] J. Frenkel e J. C. Taylor, Nucl. Phys. B **410**, 3 (1994).
- [10] M. Chaichian e M. Hayashi, Acta Physica Polonica B **8**, 1703 (1996).
- [11] H. Nakkagawa, A. Niégawa, e H. Yokota, Phys. Rev. D **38**, 2566 (1988).
- [12] P. Elmfors e R. Kolies, Phys. Rev. D **51**, 774 (1995).
- [13] J. Frenkel e F. T. Brandt, Phys. Rev. D **55**, 7808 (1997).
- [14] C. N. Yang e R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).
- [15] J. Frenkel e F. T. Brandt, Phys. Rev. D **56**, 2453 (1997).
- [16] G. Barton, Ann. Phys. (NY) **200**, 271 (1990).
- [17] J. Frenkel e J. C. Taylor, Nucl. Phys. B **374**, 152 (1992).

- [18] J. Frenkel, F. T. Brandt, e A. Guerra, *Interntl. J. of Mod. Phys. A*, Vol. 13, **24**, 4281 (1998).
- [19] K. Kajantie e J. I. Kapusta, *Ann. Phys. (NY)* **160**, 477 (1985).
- [20] A. Heck, *Introduction to Maple* (Springer-Verlag, New York, 1993).
- [21] J. Frenkel, F. T. Brandt, e F. R. Machado, *Phys. Rev. D* **61**, 125014 (2000).
- [22] A. J. Macfarlane e G. Woo, *Nucl. Phys. B* **77**, 91 (1974).
- [23] C. Becchi, A. Rouet, e R. Stora, *Ann. Phys. (NY)* **98**, 287 (1976).
- [24] R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
- [25] A. P. Almeida, J. Frenkel, e J. C. Taylor, *Phys. Rev. D* **45**, 2081 (1992).
- [26] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1980).
- [27] L. D. Faddeev e V. N. Popov, *Phys. Lett. B* **25**, 29 (1967).
- [28] C. W. Bernard, *Phys. Rev. D* **9**, 3312 (1974).
- [29] G. Leibbrandt e M. Staley, *Nucl. Phys. B* **428**, 469 (1994).
- [30] G. Leibbrandt, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 1067 (1987).
- [31] J. C. Taylor e S. M. H. Wong, *Nucl. Phys. B* **346**, 115 (1990).
- [32] E. Braaten e R. D. Pisarski, *Phys. Rev. D* **45**, 1827 (1992).
- [33] H. Weldon, *Ann. Phys. (NY)* **271** (1999), 141.