

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**ESTUDO DO MODELO CP^{N-1} EM $(2+1)D$ NÃO
COMUTATIVO SUPERSIMÉTRICO COM O CAMPO
BÁSICO NA REPRESENTAÇÃO FUNDAMENTAL**

Fernando Teixeira da Silva Filho

Tese apresentada ao Instituto de Física
como parte dos requisitos para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

São Paulo

2007

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**ESTUDO DO MODELO CP^{N-1} EM $(2+1)D$ NÃO COMUTATIVO
SUPERSIMÉTRICO COM O CAMPO BÁSICO NA REPRESENTAÇÃO
FUNDAMENTAL**

Fernando Teixeira da Silva Filho

Orientador: Prof. Dr. Adilson José da Silva

Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Adilson José da Silva - IFUSP

Prof. Dr. Marcus Venicius Cougo Pinto - UFRJ

Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento - UFPB

Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt - IFUSP

Prof. Dr. Josif Frenkel - IFUSP

São Paulo

2007

”E não sabendo que era impossível, foi e fez.”

(anônimo)

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Teorias quânticas de campos formuladas num espaço-tempo não comu- tativo	8
1.1 O formalismo de Weyl-Groenewold-Moyal	8
1.2 Cálculo dos vértices de interação na teoria não comutativa	13
1.3 A mistura infravermelho/ultravioleta	16
2 Supersimetria em (2+1)D	20
2.1 Notação e convenções	20
2.2 Álgebra de Grassmann	22
2.3 O superespaço em (2+1)D	25
2.4 O multiplete escalar	30
2.5 O multiplete vetorial	32
2.6 Quantização e regras de Feynman	38
3 A expansão 1/N	42

3.1	A expansão perturbativa	42
3.2	A expansão de modelos vetoriais em $1/N$	44
4	O modelo CP^{N-1} não comutativo supersimétrico	47
4.1	Apresentação do modelo	47
4.2	Estudo da estrutura de fase	50
4.3	A ação efetiva da função de dois pontos do supercampo Σ	56
4.4	A ação efetiva da função de dois pontos do supercampo espinorial de calibre A_μ	59
4.5	A mistura entre os supercampos Σ e A^α	71
4.6	Estudo da renormalizabilidade do modelo	74
4.7	Correções subdominantes da ação efetiva da função de dois pontos do su- percampo ϕ	78
	Conclusões	91
	Bibliografia	92

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Adilson José da Silva pela orientação e amizade que pude desfrutar durante o período de realização deste trabalho.

Aos componentes do nosso grupo de pesquisa, Prof.Dr.Marcelo Gomes, André Carlos Lehum, Bruno André Charneski, Dr.Alysson Ferrari, Carlos Stechhahn e Liner Yamashiro dos Santos, pelo convívio amistoso e produtivo.

Aos colegas de pós-graduação do Departamento de Física Matemática.

Às secretárias do departamento, Amélia, Simone e Bete, pela solicitude e facilidades de suporte a este trabalho.

Aos funcionários do Instituto de Física, através dos quais tive acesso a todos os recursos disponibilizados pela Universidade de São Paulo para realizar este trabalho.

À Geny Aleixo pelo companheirismo, cumplicidade, infinita paciência e constante incentivo.

À CAPES pelo essencial suporte financeiro.

RESUMO

Nesta tese estudamos o modelo CP^{N-1} não comutativo supersimétrico em $(2 + 1)$ dimensões do espaço-tempo, onde o campo básico está na representação fundamental. Diferentemente do caso em que o campo básico está na representação adjunta, já estudado na literatura, o modelo por nós estudado se reduz ao modelo CP^{N-1} supersimétrico usual no limite comutativo. Analisamos a estrutura de fase do modelo e calculamos as correções dominantes e subdominantes na expansão $1/N$. Provamos que a teoria é livre de singularidades infravermelhas não integráveis e é renormalizável na ordem dominante. A função de vértice de dois pontos do campo básico é calculada e renormalizada de uma forma explicitamente supersimétrica na ordem subdominante.

ABSTRACT

In this thesis we study the noncommutative supersymmetric CP^{N-1} model in $(2 + 1)$ space-time dimensions, where the basic field is in the fundamental representation which, differently to the adjoint representation already studied in the literature, goes to the usual supersymmetric CP^{N-1} model in the commutative limit. We analyse the phase structure of the model and calculate the leading and subleading corrections in a $1/N$ expansion. We prove that the theory is free of non-integrable UV/IR infrared singularities and is renormalizable in the leading order. The two point vertex function of the basic field is also calculated and renormalized in an explicitly supersymmetric way up to the subleading order.

Introdução

No início do século XX, com o estabelecimento da teoria da relatividade restrita e da mecânica quântica, logo nos primeiros trabalhos sobre o que então se denominava mecânica quântica relativística, embrião da teoria quântica dos campos, a questão da ocorrência de divergências nos cálculos de observáveis físicos já se fazia presente. Por exemplo, em 1939 Weisskopf [1] publicou um trabalho no qual calculava a auto-energia do elétron, chegando a um resultado que apresentava divergências logarítmicas e quadráticas.

Com o intuito de procurar sanar esse problema, Heisenberg [2] sugere a existência de um comprimento mínimo, aquém do qual a noção de localidade perde o significado. Possivelmente motivado a partir de uma forte analogia com o procedimento de quantização no espaço de fase clássico (contínuo) por ele formulado, levantou a possibilidade de introduzir relações de incerteza para as coordenadas do espaço-tempo como uma forma de evitar tais singularidades, o que significa supor uma estrutura quantizada do espaço-tempo. Aparentemente Heisenberg [3] sugeriu esta idéia a Peierls, que a aplicou num modelo fenomenológico de sistemas eletrônicos interagindo com um campo externo. Peierls comentou as idéias de Heisenberg com Pauli, que as discutiu com Oppenheimer [4], que por sua vez as comentou com o então seu aluno H. Snyder. Em 1947 Snyder publicou um trabalho [5] no qual as coordenadas do espaço-tempo obedeciam às relações de comutação :

$$[x, y] = i\frac{\alpha^2}{\hbar}L_z \quad , \quad [t, x] = i\frac{\alpha^2}{\hbar c}M_x,$$

$$\begin{aligned}
[y, z] &= i\frac{\alpha^2}{\hbar}L_x \quad , \quad [t, y] = i\frac{\alpha^2}{\hbar c}M_y, \\
[z, x] &= i\frac{\alpha^2}{\hbar}L_y \quad , \quad [t, z] = i\frac{\alpha^2}{\hbar c}M_z,
\end{aligned} \tag{1}$$

onde a constante α tem dimensão de comprimento e $L_{x,y,z}$, $M_{x,y,z}$ são os geradores do grupo de Lorentz. No limite $\alpha \rightarrow 0$ as expressões acima se reduzem ao espaço-tempo comutativo. No modelo formulado por Snyder era preservada a invariância de Lorentz. Como em (1) a quantização do espaço-tempo é implementada por relações de comutação não nulas entre as coordenadas, as teorias formuladas com esta hipótese viriam a ser conhecidas como teorias não comutativas.

Em seguida Snyder publicou um outro trabalho apresentando uma formulação do campo eletromagnético num espaço-tempo quantizado, obtendo equações invariantes relativisticamente [6]. No mesmo ano Yang publicou um trabalho no qual era apresentado um modelo de espaço-tempo quantizado a partir de um espaço-tempo de deSitter [7], no qual além da invariância de Lorentz era também mantida a invariância por translações, ou seja, uma extensão do modelo inicial proposto por Snyder.

Após estes primeiros trabalhos a hipótese de um espaço-tempo não comutativo foi abandonada frente ao enorme sucesso que estava sendo obtido com o programa de renormalização, em especial quando aplicado na eletrodinâmica quântica, onde a concordância entre os valores previstos para observáveis e os medidos experimentalmente é excelente. Como ilustração, apresentamos os resultados para o valor do momento magnético do elétron

$$\boldsymbol{\mu} = g\frac{e}{2m}\mathbf{S}, \tag{2}$$

no qual a quantidade medida envolve o fator "g", cujos valores teórico [8] e experimental [9] são, respectivamente

$$\begin{aligned}
\left(\frac{g-2}{2}\right)_{TEOR} &= 1159652153.5(1.2)(28.0) \times 10^{-12}, \\
\left(\frac{g-2}{2}\right)_{EXP} &= 1159652180,85(76) \times 10^{-12}.
\end{aligned} \tag{3}$$

A partir dos anos 90 a hipótese de um espaço-tempo não comutativo foi retomada com vigor, a partir de novas motivações. Uma delas, talvez a principal, é proveniente da

teoria de cordas, segundo a qual a dinâmica de uma D-brana na presença de um campo magnético de fundo pode ser descrita, no limite de baixas energias, por uma teoria de calibre não comutativa [10, 11].

Outro exemplo a favor da hipótese de não comutatividade do espaço-tempo surge quando consideramos distâncias da ordem do comprimento de Planck

$$\lambda_P = \sqrt{G\hbar/c^3} \cong 1,6 \times 10^{-35}m. \quad (4)$$

Heuristicamente [12], pelo princípio da incerteza de Heisenberg, a medição de uma coordenada de posição com uma precisão \mathcal{P} acarreta numa incerteza no momento correspondente da ordem de $1/\mathcal{P}$. Aplicando este resultado à gravitação, uma energia da mesma ordem que o momento seria transmitida para o sistema pois, a partir da equação de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\eta_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (5)$$

o tensor de energia-momento gera um campo gravitacional caracterizado pelo tensor métrico $\eta_{\mu\nu}$, e quanto mais precisa for a medida da coordenada de posição maior será o campo gravitacional, e na situação em que ele é intenso o suficiente a ponto de evitar que a luz ou outro sinal vindo da região de observação escapem, a idéia de localização estrita perde o significado. Além disso, do fato de $T_{\mu\nu}$ ser uma grandeza quantizada ($T_{\mu\nu} \equiv \langle 0 | T_{\mu\nu} | 0 \rangle$) torna-se natural, pode-se dizer, que o primeiro membro da equação (5) também seja tratado como uma grandeza quântica, o que reforça a idéia da natureza discreta do espaço-tempo.

Não obstante o vigor da retomada, as teorias não comutativas apresentam algumas características que merecem atenção especial, pois as mesmas podem invalidar os modelos físicos nos quais o formalismo que implementa a não comutatividade é aplicado.

A primeira questão a ser apontada diz respeito ao tratamento perturbativo e à renormalizabilidade das teorias. O tratamento perturbativo se deve à impossibilidade de obter uma solução exata para a grande maioria dos problemas físicos. Como alternativa, tais problemas são tratados de forma aproximada mediante uma expansão, usualmente em termos de potências da constante do acoplamento do termo de interação do modelo, ou ainda, como

nesta tese, na expansão de modelos vetoriais em $1/N$, onde "N" é o número de campos presentes, por exemplo, no multipletto escalar $\zeta \equiv (\zeta_1, \dots, \zeta_N)$. No cálculo de observáveis podem ocorrer divergências ultravioletas, e por conta disso é necessário introduzir um regulador para controlar estas divergências e, por uma redefinição dos parâmetros do modelo, tais como constante de acoplamento, massa e função de onda, eliminar essas divergências. Este procedimento é conhecido como renormalização da teoria.

Como ocorre nas teorias comutativas, as teorias não comutativas também apresentam divergências ultravioletas, e portanto precisam ser renormalizadas. Assim como nem todas as teorias de campos comutativas são renormalizáveis, o que restringe a aplicabilidade das mesmas uma teoria efetiva, o mesmo ocorre com as teorias não comutativas, de modo que a questão de verificar se é possível separar os resultados finitos das teorias e eliminar as divergências permanece.

Outra questão que entra em cena neste ponto é uma característica típica das teorias não comutativas. Quando a implementação da não comutatividade é feita através do formalismo de Weyl-Groenewold-Moyal, pode surgir, nos cálculos dos diagramas de Feynman, uma contribuição que mistura o momento interno do laço com o momento das linhas externas. Esta mistura pode ter o efeito nefasto de uma divergência ultravioleta oriunda da integral do laço induzir uma divergência infravermelha no momento externo na mesma ordem. Por exemplo, uma divergência ultravioleta linear induz uma divergência infravermelha também linear, e assim por diante. Este fato é conhecido como mistura infravermelha/ultravioleta (IV/UV), a qual pode invalidar a expansão perturbativa.

Um número muito grande de trabalhos sobre teorias quânticas de campos não comutativas foi realizado por pesquisadores espalhados pelo mundo, onde muitos modelos já estudados no contexto de teorias comutativas foram revistos sob a ótica do formalismo que implementa a não comutatividade. Dentro deste movimento, nosso grupo de trabalho realizou diversos estudos sobre as teorias não comutativas [13, 14, 15].

Uma extensão natural dos trabalhos realizados foi o estudo de teorias não comutativas aplicando o formalismo de supercampos, uma vez que as mesmas têm um comportamento

ultravioleta menos divergente e, portanto, menos sujeitas à mistura IV/UV [16, 17, 18, 19]. Um bom exemplo deste melhor comportamento pode ser encontrado nos trabalhos realizados pelo nosso grupo sobre o modelo sigma não linear supersimétrico não comutativo [20, 21].

Historicamente, o modelo sigma linear com simetria $O(4)$ foi introduzido por Gell-Mann e Levy em 1960 [22] para o estudo fenomenológico da interação entre nucleons e pions [23]. Neste modelo, a simetria quiral é realizada com a introdução de 4 campos escalares satisfazendo o vínculo

$$\sum_{i=1}^4 \phi_i^\dagger \phi_i = 1, \quad (6)$$

o qual pode ser resolvido, por exemplo, para o campo ϕ_4 escrito em função dos outros três, resultando em uma ação fortemente não linear. A maneira de contornar esta dificuldade foi introduzir um campo extra "multiplicador de Lagrange" Σ , o qual impõe na ação o vínculo acima entre os campos ϕ_i através do termo adicional

$$\Sigma \left(\sum_{i=1}^4 \phi_i^\dagger \phi_i - 1 \right). \quad (7)$$

Esta mudança caracteriza o que passou a ser conhecido como modelo sigma não linear. Encontra-se disponível na literatura uma vasta gama de aplicações dos modelos sigma, algumas das quais podem ser encontradas em [24, 25, 26, 27].

O modelo CP^{N-1} é uma das generalizações do modelo sigma não linear quando o grupo de simetria é $SU(N)$, tendo sido bastante estudado a partir do fim dos anos 70 [28, 29]. Uma característica interessante desta classe de modelos sigma não linear é a introdução de um campo de calibre com simetria $U(1)$ que classicamente não possui dinâmica, o que é uma grande simplificação no estudo dos mesmos. A dinâmica do campo de calibre é gerada a partir das correções radiativas.

Mesmo com essa estrutura mais simples, o modelo CP^{N-1} em $(2+1)D$ reproduz alguns efeitos típicos de teorias de calibre mais complicadas, como a teoria de Yang-Mills em $(3+1)D$. Em [30] D'Adda, di Vecchia e Lüscher demonstraram que em $(2+1)D$

as partículas fundamentais do modelo estariam confinadas por uma força coulombiana. Os mesmos autores em [31] estudaram, no limite de baixas energias, férmions acoplados minimamente ao modelo CP^{N-1} em $(2+1)D$, mostrando que na expansão $1/N$ os férmions pesados estão confinados, a simetria chiral $U(1)$ é espontaneamente quebrada e, por conta da anomalia axial, um boson massivo não ocorre. Em 1980 Are'feva e Azakov [32] provaram, na expansão $1/N$, a renormalizabilidade ultravioleta do modelo CP^{N-1} em $(1+1)D$ e $(2+1)D$. Em $(1+1)D$ o modelo apresenta divergências infravermelhas em ordens superiores a $1/N$ e em $(2+1)D$ o modelo apresenta uma transição de fase. Uma identidade diagramática se observa no modelo, a partir da qual diagramas divergentes são cancelados, isto é, a teoria é finita mesmo que a ação não tenha contratermos para absorver essas divergências.

Nosso grupo de trabalho realizou estudos sobre o modelo CP^{N-1} , que resultaram em duas teses de doutorado. Em [33] foram investigadas possíveis extensões do modelo CP^{N-1} em $(2+1)D$ para o espaço não comutativo, no contexto da expansão $1/N$. Em [34] o modelo CP^{N-1} em $(2+1)D$ é estudado quando acoplado com férmions nas extensões minimal e supersimétrica, também no contexto da expansão $1/N$.

No trabalho que deu origem a esta tese [35], estudamos o modelo CP^{N-1} em $(2+1)D$ não comutativo com o campo básico na representação fundamental na expansão $1/N$ no formalismo de supercampos, isto é, numa abordagem explicitamente supersimétrica.

No capítulo 1 apresentamos o formalismo que implementa a não comutatividade das coordenadas do espaço-tempo e suas decorrências nos modelos de teorias quânticas de campos. No capítulo 2 apresentamos a supersimetria em $(2+1)D$, onde definimos o conceito de superespaço e supercampos como funções que tomam valores nesse superespaço. Apresentamos a álgebra dos operadores supersimétricos e também como se realiza uma teoria de campos neste formalismo. A expansão perturbativa em $1/N$ é apresentada brevemente no capítulo 3. No capítulo 4 apresentamos o modelo estudado, que corresponde ao núcleo desta tese. Esta apresentação é feita com riqueza de detalhes com o objetivo de tornar o texto, esperamos, acessível a uma primeira abordagem sobre o tema. O fechamento do

trabalho é apresentado nas conclusões.

Notações: a menos que explicitado em alguns pontos do texto, adotamos o sistema natural de unidades, no qual $\hbar = c = 1$. Para caracterizar o espaço-tempo tridimensional adotamos a métrica $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1)$. e com isso a transformada de Fourier de uma função é definida como $\tilde{f}(k) = \int d^3x e^{-ik \cdot x} f(x)$, onde $k \cdot x = -k^0 x^0 + \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$.

Capítulo 1

Teorias quânticas de campos formuladas num espaço-tempo não comutativo

Apresentamos a implementação da não comutatividade das coordenadas do espaço-tempo através do produto Moyal e na sequência descrevemos as decorrências deste formalismo em modelos de teoria quântica de campos.

1.1 O formalismo de Weyl-Groenewold-Moyal

Nesta seção apresentamos o formalismo através do qual a não comutatividade é implementada. O texto que segue foi redigido a partir das referências [12, 36, 37, 38].

O espaço-tempo não comutativo é introduzido postulando que o tempo e as coordenadas de posição são operadores hermitianos satisfazendo a álgebra

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\Theta^{\mu\nu}\hat{\mathbf{1}}, \quad (1.1)$$

onde $\Theta^{\mu\nu}$ são novas constantes da natureza com dimensão L^2 , cujos valores podem ser representados por uma matriz real antisimétrica $D \times D$, onde D é a dimensão do espaço-

tempo. A condição de $\Theta^{\mu\nu}$ ser real decorre de que o comutador de operadores hermitianos é antihermitiano.

Nesta tese, com o objetivo de evitar problemas de unitariedade [39] consideraremos somente a não comutatividade entre as coordenadas espaciais, e para isso tomaremos $\Theta_{0i} = 0$, com $i = 1, 2$. Esta não é a única maneira de garantir a unitariedade da teoria, pois existem esquemas mais sofisticados de implementação da não comutatividade sem necessidade da restrição aqui imposta [40, 41, 42, 43].

A condição de não comutatividade apresentada em (1.1) impede a construção de uma base com auto-estados das coordenadas, o que induz para medidas no espaço-tempo, em modo semelhante ao da relação de comutação $[x, p_x] = i$ no espaço de fase para a mecânica quântica, uma relação de incerteza entre as coordenadas dada por

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} | \Theta^{\mu\nu} |. \quad (1.2)$$

O espaço-tempo passa a ser formado por "células de Planck", com área definida pelo parâmetro Θ , o qual estabelece uma escala de comprimento fundamental para a teoria.

A partir das definições acima apresentadas, é possível apresentar de uma forma intuitiva uma característica das teorias não comutativas. Das relações de incerteza

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar, \quad \Delta y \Delta p_y \sim \hbar, \quad \Delta x \Delta y \sim \Theta, \quad (1.3)$$

obtemos as novas relações

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta y} = \frac{\Delta p_y}{\Delta x} \sim \frac{\hbar}{\Theta}. \quad (1.4)$$

Se $\Delta x \rightarrow 0$ necessariamente $\Delta p_y \rightarrow 0$, o que implica em $\Delta y \rightarrow \infty$ e $\Delta p_x \rightarrow \infty$, de onde tiramos que o conhecimento preciso de uma componente do momento, cujo valor pode, por exemplo, estar na região ultravioleta(UV), implica em uma incerteza grande na outra componente do momento, indicando que ela pode ter um valor na região infravermelha(IV). Este efeito é conhecido como mistura IV/UV, característico das teorias não comutativas, que será apresentado de forma detalhada a seguir.

A imposição de um espaço-tempo quantizado gera dificuldades para a formulação de teorias quânticas de campos. Os resultados físicos dessas teorias decorrem basicamente do cálculo de amplitudes de transição. Como os campos são operadores que atuam no espaço de Fock, quando as coordenadas x^μ são promovidas a operadores a questão que se apresenta é como calcular essas amplitudes de transição.

O formalismo de Weyl-Groenewold-Moyal aparece como uma alternativa, tendo como idéia básica um mapeamento entre o espaço onde os campos são funções dos operadores \hat{x}^μ e o espaço das funções clássicas. Motivado por uma forte analogia com a transformada de Fourier, é introduzido o operador $T(k)$, com k_μ sendo c-números, definido como

$$T(k, \hat{x}) = e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}, \quad (1.5)$$

com as propriedades:

$$\begin{aligned} \hat{x}^\mu = \hat{x}^{\mu\dagger} &\rightarrow T^\dagger(k, \hat{x}) = T(-k, \hat{x}), \\ \text{Tr}T(k) &= \int d^D x \langle x | e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} | x \rangle = \int d^D x e^{ik_\mu x^\mu} = (2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_\mu), \\ T(k, \hat{x})T(k', \hat{x}) &= T(k + k', \hat{x})e^{-\frac{i}{2}k_\mu k'_\nu \Theta^{\mu\nu}}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

onde a última propriedade decorre da relação de Baker-Campbell-Hausdorff

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]},$$

com a condição adicional $[x^\mu, \Theta^{\mu\nu}] = 0$.

A partir de (1.5) podemos então associar a uma função clássica $\phi(x)$ um operador $\Phi(\hat{x})$ definido por

$$\Phi(\hat{x}) = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D x \int d^D k T(k, \hat{x}) e^{-ik_\mu x^\mu} \phi(x),$$

que, em termos da transformada de Fourier de $\phi(x)$, dada por

$$\tilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{-ik_\mu x^\mu} \phi(x),$$

pode ser escrito como

$$\Phi(\hat{x}) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T(k, \hat{x}) \tilde{\phi}(k). \quad (1.7)$$

A expressão (1.7) pode ser invertida de acordo com

$$\begin{aligned} \Phi(\hat{x}) T^\dagger(k', \hat{x}) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T(k, \hat{x}) T^\dagger(k', \hat{x}) \tilde{\phi}(k), \\ \Phi(\hat{x}) T^\dagger(k') &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T(k - k', \hat{x}) e^{\frac{i}{2} k_\mu k'_\nu \Theta^{\mu\nu}} \tilde{\phi}(k), \\ Tr [\Phi(\hat{x}) T^\dagger(k', \hat{x})] &= \tilde{\phi}(k'), \end{aligned}$$

sendo imediato o resultado

$$\phi(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} Tr [\Phi(\hat{x}) T^\dagger(k, \hat{x})]. \quad (1.8)$$

A partir de (1.8) o produto Moyal de duas funções clássicas é definido como

$$\phi_1(x) \star \phi_2(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} Tr [\Phi_1(\hat{x}) \Phi_2(\hat{x}) T^\dagger(k, \hat{x})],$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \phi_1(x) \star \phi_2(x) &= \int \int \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) e^{-ik_\mu x^\mu} \\ &\quad \cdot Tr [T(k_1, \hat{x}) T(k_2, \hat{x}) T^\dagger(k, \hat{x})], \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) e^{-ik_\mu x^\mu} e^{-ik_\mu y^\mu} e^{-\frac{i}{2} k_{1\mu} \Theta^{\mu\nu} k_{2\nu}}, \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) e^{-ik_\mu x^\mu} e^{-ik_\mu y^\mu} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{i}{2} k_1^\mu \Theta_{\mu\nu} k_2^\nu + \dots \right), \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \int \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_2(k_2) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} + \dots \right) \\ &\quad \cdot e^{-ik_\mu x^\mu} e^{-ik_\nu y^\nu}, \\ &= \lim_{y \rightarrow x} e^{\frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \Theta_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu}} \phi_1(x) \phi_2(y). \end{aligned} \quad (1.9)$$

A natureza não local do produto Moyal fica explicitada, e no limite $\Theta \rightarrow 0$ ele se reduz ao produto ordinário. Observe também que, a partir da definição apresentada em (1.9), para $\phi_1(x) = x^\mu$ e $\phi_2(x) = x^\nu$ obtem-se

$$[x^\mu, x^\nu]_\star = x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\Theta^{\mu\nu}, \quad (1.10)$$

ou seja, a álgebra apresentada em (1.1) é realizada sem a necessidade de tratar as coordenadas do espaço-tempo como operadores.

A definição do Produto Moyal tem a generalização para um número arbitrário de funções de acordo com

$$\begin{aligned} \phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \cdots \star \phi_N(x) &= \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik_\mu x^\mu} \text{Tr} [\Phi_1(q)\Phi_2(q) \cdots \Phi_N(q)T^\dagger(k)], \\ &= \int \prod_{j=1}^N \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1) \cdots \tilde{\phi}_N(k_N) e^{i(k_1 + \cdots + k_N)_\mu x^\mu} \exp \left\{ -i \sum_{i < j=1}^N k_i \wedge k_j \right\}, \end{aligned} \quad (1.11)$$

Onde foi introduzida a notação $k_\mu \wedge k_\nu = 1/2 k_\mu \theta^{\mu\nu} k_\nu$.

Decorrem de forma imediata as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} a - & \quad [\phi_1(x) \star \phi_2(x)] \star \phi_3(x) = \phi_1(x) \star [\phi_2(x) \star \phi_3(x)], \\ b - & \quad [\phi_1(x) \star \phi_2(x)]^\star = \phi_2^\star(x) \star \phi_1^\star(x), \\ c - & \quad \int d^D x (\phi_1 \star \cdots \star \phi_N)(x) = \int d^D x (\phi_N \star \phi_1 \star \cdots \star \phi_{N-1})(x) = \\ & \quad = \int d^D x (\phi_{N-1} \star \phi_N \star \phi_1 \star \cdots \star \phi_{N-2})(x) = \cdots, \\ d - & \quad \int d^D x (\phi_1 \star \cdots \star \phi_N)(x) = \int d^D x (\phi_1 \star \cdots \star \phi_{N-1})(x) \phi_N(x). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Um caso particular de 1.12-c e 1.12-d fornece o resultado

$$\int d^D x \phi_1(x) \star \phi_2(x) = \int d^D x \phi_2(x) \star \phi_1(x) = \int d^D x \phi_1(x) \phi_2(x), \quad (1.13)$$

ou seja, a parte quadrática da ação de uma teoria de campo é invariante sob a implementação do formalismo de Weyl-Groenewold-Moyal. Uma consequência imediata desse resultado é que a estrutura dos propagadores dos campos, determinados a partir da parte

quadrática da ação, não se altera no espaço não comutativo. O mesmo não ocorre na parte da ação que descreve a interação entre os campos, como mostraremos na próxima seção.

1.2 Cálculo dos vértices de interação na teoria não comutativa

A partir da ação que descreve uma teoria de campo, os cálculos das amplitudes de transição são feitos a partir das regras de Feynman, que consistem basicamente no conhecimento dos propagadores dos campos livres e das expressões dos vértices de interação entre os campos. Os vértices de interação geralmente têm uma estrutura polinomial, envolvendo o produto de três ou mais campos, iguais ou não, cujas expressões no espaço não comutativo se modificam, como mostrado a seguir.

Considerando inicialmente o caso de campos bosônicos, para os quais é imposta a relação de comutação em tempos iguais

$$\begin{aligned} [\phi_i(x), \phi_j(y)]|_{x_0=y_0} &= \phi_i(x)\phi_j(y) - \phi_j(x)\phi_i(y) = 0, \\ [\phi_i(x), \phi_i(y)]|_{x_0=y_0} &= 0, \end{aligned} \tag{1.14}$$

as modificações que ocorrem são apresentadas a seguir através de alguns exemplos. A situação mais simples corresponde ao produto de três campos iguais:

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) &= \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) e^{-ik_1 \wedge k_2} \\ &e^{-i(k_1+k_2) \wedge k_3} (2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_1 + k_2 + k_3)_\mu, \end{aligned}$$

que pode ser reescrito como

$$\int d^D x \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) = \int \prod_{j=1}^2 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(-k_1 - k_2) e^{-ik_1 \wedge k_2}.$$

O resultado acima pode ser simetrizado como segue :

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) &= \frac{1}{2} \int \prod_{j=1}^2 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(-k_1 - k_2) e^{-ik_1 \wedge k_2} + \\ &+ \frac{1}{2} \int \prod_{j=1}^2 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(-k_2 - k_1) e^{-ik_2 \wedge k_1}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

onde no segundo termo foi feita a mudança de variável $k_1 \longleftrightarrow k_2$. Uma vez que os campos comutam, como apresentado em (1.14), podemos então escrever

$$\int d^D x \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) = \int \prod_{j=1}^2 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(-k_1 - k_2) \cos[k_1 \wedge k_2]. \quad (1.16)$$

O resultado acima mostra a característica mais notável do produto Moyal, que é o aparecimento de um fator de fase envolvendo o parâmetro Θ , que se anula no limite comutativo $\Theta \rightarrow 0$. A simetrização para escrever o resultado como uma função trigonométrica pode se mostrar conveniente.

O resultado apresentado em (1.16) se repete para $\int d^D x \phi_1(x) \star \phi_1(x) \star \phi_2(x)$.

Para o caso onde a interação envolve o produto de quatro campos, nos exemplos abaixo fica explicitado o efeito da troca das posições relativas entre os campos. Os resultados que são apresentados a seguir estão na forma simetrizada.

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) \star \phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \phi_2(x) &= \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_1(k_2) \tilde{\phi}_2(k_3) \tilde{\phi}_2(k_4) \\ &(2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)_\mu \cos[k_1 \wedge k_2] \cos[k_3 \wedge k_4], \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} \int d^D x \phi_1(x) \star \phi_2(x) \star \phi_1(x) \star \phi_2(x) &= \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}_1(k_1) \tilde{\phi}_1(k_2) \tilde{\phi}_2(k_3) \tilde{\phi}_2(k_4) \\ &(2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)_\mu \cos[k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4], \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
\int d^D x \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) \star \phi(x) &= \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_1) \tilde{\phi}(k_2) \tilde{\phi}(k_3) \tilde{\phi}(k_4) \\
(2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)_\mu &\frac{1}{3} \left\{ \cos[k_1 \wedge k_2 + k_1 \wedge k_3 + k_2 \wedge k_3] + \right. \\
&+ \cos[k_1 \wedge k_2 + k_1 \wedge k_3 - k_2 \wedge k_3] + \left. \cos[k_1 \wedge k_2 - k_1 \wedge k_3 - k_2 \wedge k_3] \right\}. \quad (1.19)
\end{aligned}$$

No caso de campos fermiônicos, para os quais são as relações de anticomutação em tempos iguais

$$\begin{aligned}
\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta^\dagger(y)\} |_{x_0=y_0} &= \psi_\alpha(x) \psi_\beta^\dagger(y) + \psi_\beta^\dagger(y) \psi_\alpha(x) = \delta_{\alpha\beta} \delta^{D-1}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
\{\psi_\alpha(x), \psi_\beta(y)\} |_{x_0=y_0} &= \{\psi_\alpha^\dagger(x), \psi_\beta^\dagger(y)\} |_{x_0=y_0} = 0, \quad (1.20)
\end{aligned}$$

novamente o caso mais simples corresponde ao produto de três campos iguais, cujo resultado é dado por

$$\begin{aligned}
\int d^D x \psi(x) \star \psi(x) \star \psi(x) &= \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\psi}(k_1) \tilde{\psi}(k_2) \tilde{\psi}(k_3) \\
(2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_1 + k_2 + k_3)_\mu &e^{-ik_1 \wedge k_2}, \quad (1.21)
\end{aligned}$$

o qual pode ser simetrizado e escrito como

$$\begin{aligned}
\int d^D x \psi(x) \star \psi(x) \star \psi(x) &= -i \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\psi}(k_1) \tilde{\psi}(k_2) \tilde{\psi}(k_3) \\
(2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta(k_1 + k_2 + k_3)_\mu &\sin[k_1 \wedge k_2]. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

Assim como no caso de campos bosônicos, o resultado do produto de quatro campos fermiônicos depende da posição relativa dos campos, como pode ser verificado nos exemplos abaixo:

$$\begin{aligned}
\int d^D x \psi_1(x) \star \psi_2(x) \star \psi_1(x) \star \psi_2(x) &= - \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\psi}_1(k_1) \tilde{\psi}_1(k_2) \tilde{\psi}_2(k_3) \tilde{\psi}_2(k_4) \\
(2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta^D \left(\sum_j k_{j\mu} \right) &\sin[k_1 \wedge k_2] \sin[k_3 \wedge k_4], \quad (1.23)
\end{aligned}$$

$$\int d^D x \psi_1(x) \star \psi_2(x) \star \psi_1(x) \star \psi_2(x) = - \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^D k_j}{(2\pi)^D} \tilde{\psi}_1(k_1) \tilde{\psi}_2(k_2) \tilde{\psi}_1(k_3) \tilde{\psi}_2(k_4) \\ (2\pi)^D \prod_{\mu=0}^{D-1} \delta^D \left(\sum_j k_{j\mu} \right) \sin [k_1 \wedge k_2 + k_3 \wedge k_4]. \quad (1.24)$$

A partir dos resultados acima apresentados observamos que a implementação do produto Moyal acarreta no aparecimento de um fator de fase nos vértices de interação, o qual pode introduzir problemas graves na expansão perturbativa de uma teoria de campo, podendo inclusive inviabilizar a expansão.

1.3 A mistura infravermelho/ultravioleta

Os resultados importantes desta seção serão apresentados através de um exemplo. Consideremos a teoria escalar não comutativa em $(3+1)D$ descrita pela ação

$$S = \int d^4 x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi - \frac{\lambda}{4} \phi \star \phi \star \phi \star \phi \right]. \quad (1.25)$$

Como citado anteriormente, a parte livre da ação é igual à teoria comutativa, havendo diferença apenas no termo de interação. As regras de Feynman no espaço dos momentos são dadas por:

1. Propagador do campo escalar:

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}, \quad (1.26)$$

2. Vértice quadrilinear:

$$\Gamma_{\phi\phi\phi\phi} = -i \frac{\lambda}{3} (2\pi)^4 \prod_{\alpha=0}^3 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \left\{ \cos(k_1 \wedge k_2 + k_1 \wedge k_3 + k_2 \wedge k_3)_\alpha + \right. \\ \left. + \cos(k_1 \wedge k_2 + k_1 \wedge k_3 - k_2 \wedge k_3) + \cos(k_1 \wedge k_2 - k_1 \wedge k_3 - k_2 \wedge k_3) \right\}. \quad (1.27)$$

A correção perturbativa da função de dois pontos, na aproximação de um laço, para o campo ϕ , representada pelo diagrama

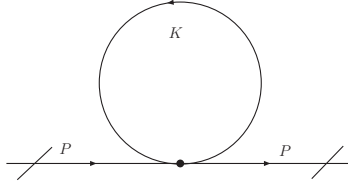


Figura 1.1: Autoenergia do campo ϕ

é dada pela expressão

$$\begin{aligned}
\Sigma(p) &= -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2 + \cos(2k \wedge p)}{k^2 + m^2}, \\
&= -\frac{\lambda}{3} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2} - \frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\cos(2k \wedge p)}{k^2 + m^2}, \\
&= \Sigma_P(p) + \Sigma_{NP}(p).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

O primeiro termo de (1.28) é igual ao que se obtém na teoria comutativa, o qual é denominado planar, enquanto que o segundo termo é denominado não planar, no qual aparece um fator trigonométrico, característico das teorias não comutativas.

O termo planar $\Sigma_P(p)$ é quadraticamente divergente, mostrando que as teorias não comutativas necessitam ser renormalizadas, ao contrário do que se esperava quando foi considerada a idéia do espaço-tempo quantizado.

No termo não planar $\Sigma_{NP}(p)$ a presença do fator trigonométrico torna a integral finita para altos valores $k \rightarrow \infty$ do momento interno do laço pelo efeito oscilatório do fator trigonométrico. No limite do momento externo $p \rightarrow 0$ no integrando de $\Sigma_{NP}(p)$ o mesmo apresenta uma divergência quadrática

$$\Sigma_{NP}(p \rightarrow 0) = -\frac{\lambda}{6} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + m^2}. \tag{1.29}$$

Por outro lado, calculando explicitamente $\Sigma_{NP}(p)$ [44] obtemos

$$\Sigma_{NP}(p) \sim \frac{1}{\Theta^{\mu\nu} p_\nu \Theta_{\mu\lambda} p^\lambda} \sim \frac{1}{\Theta^2 p^2}, \tag{1.30}$$

mostrando que no limite $p \rightarrow 0$ após a integração a divergência surge como um polo quadrático na região de baixos momentos, isto é, temos uma divergência quadrática infravermelha. Este comportamento vinculado, no qual a uma divergência ultravioleta

quadrática temos associada uma divergência infravermelha quadrática, que se manifesta dependendo de como o limite de baixo momento externo seja tomado, no integrando ou no resultado da integração, é a principal característica da teoria quântica de campos não comutativa, denominada mistura infravermelho/ultravioleta (IV/UV).

Podemos verificar a invalidação da expansão perturbativa pela presença da divergência infravermelha quadrática, verificando o efeito da inserção do diagrama que representa $\Sigma(p)$ um número "n" arbitrário de vezes num diagrama de ordem superior, como apresentado na figura abaixo.

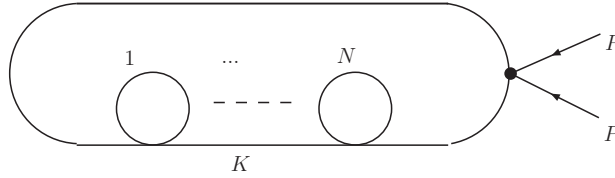


Figura 1.2: Inserção de Σ num diagrama de ordem superior

Considerando apenas a contribuição não planar, a expressão do diagrama de ordem superior é dada por

$$\Sigma_{SUP}(p) \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Theta^{2n} k^{2n}} \left(-\frac{i}{k^2 + m^2} \right)^{n+1} \cos(2k \wedge p). \quad (1.31)$$

No limite $k \rightarrow 0$ temos que

$$\Sigma_{SUP}(p) \sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{\Theta^{2n} k^{2n}}, \quad (1.32)$$

mostrando um forte comportamento singular no IV, tanto mais forte quanto maior for o número "n" de inserções. A divergência infravermelha quadrática é denominada singularidade infravermelha não integrável, dado o pior comportamento do integrando (1.32) quanto maior o número de inserções. Caso essa divergência fosse linear uma análise semelhante mostra que ainda teríamos a mesma dificuldade ilustrada na equação (1.32). Entretanto, se a divergência IV for apenas logarítmica Σ_{SUP} não vai apresentar divergências e portanto são aceitáveis.

Uma última observação é que este modelo não se reduz à sua versão comutativa no limite $\Theta \rightarrow 0$ pois, como podemos verificar em (1.30) e (1.32), neste limite temos uma singularidade infravermelha.

Capítulo 2

Supersimetria em $(2+1)D$

Neste capítulo apresentamos o formalismo da teoria de campos formulada no superespaço em $(2+1)D$. Os tópicos abordados não esgotam o assunto, mas apresentam todas as informações necessárias para o estudo do modelo CP^{N-1} na versão supersimétrica, tendo sido escrito a partir das referências [45, 46, 47, 48, 49].

2.1 Notação e convenções

Neste trabalho adotaremos que índices latinos tomam valores $(0, 1, 2)$ e índices gregos tomam valores $(1, 2)$.

O grupo de Lorentz é $SL(2, R)$ e a representação fundamental correspondente age sobre espinores de Majorana com duas componentes $\psi^\alpha = (\psi^1, \psi^2)$. Todos os espinores são anticomutantes.

A transformação entre as representações covariante ou contravariante dos espinores é feita pelo símbolo antisimétrico definido como

$$C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Adotando como regra de contração dos índices o sentido "noroeste-sudeste", podemos definir $C^{\alpha\beta}$ como

$$C_{\mu\nu} = C^{\alpha\beta}C_{\alpha\mu}C_{\beta\nu} \quad \rightarrow \quad C^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

e a partir deste resultado temos que

$$C_{\alpha\beta}C^{\rho\sigma} = \delta_{\alpha}^{\rho}\delta_{\beta}^{\sigma} - \delta_{\beta}^{\rho}\delta_{\alpha}^{\sigma}. \quad (2.3)$$

Podemos definir os símbolos com índices mistos como segue :

$$C^{\alpha}_{\cdot\beta} = C^{\alpha\rho}C_{\rho\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\delta_{\beta}^{\alpha}, \quad (2.4)$$

$$C_{\alpha\cdot}^{\beta} = C^{\rho\beta}C_{\rho\alpha} = -C^{\beta\rho}C_{\rho\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_{\alpha}^{\beta}. \quad (2.5)$$

Com as representações acima os espinores com índices covariantes são dados por

$$\psi_{\alpha} = \psi^{\beta}C_{\beta\alpha} = (\psi_1, \psi_2) = (i\psi^2, -i\psi^1), \quad (2.6)$$

sendo imediato que $\psi^{\alpha} = C^{\alpha\beta}\psi_{\beta}$. Observe que enquanto ψ^{α} é real, ψ_{α} é imaginário.

Por definição

$$\psi^2 = \frac{1}{2}\psi^{\alpha}\psi_{\alpha}, \quad (2.7)$$

sendo importante ressaltar que

$$\psi^2 = \frac{1}{2}\psi^{\alpha}\psi_{\alpha} = \frac{1}{2}C^{\alpha\beta}\psi_{\beta}\psi_{\alpha} = -\frac{1}{2}C^{\beta\alpha}\psi_{\beta}\psi_{\alpha} = -\frac{1}{2}\psi_{\beta}\psi^{\beta}. \quad (2.8)$$

Uma propriedade decorrente da anticomutatividade dos espinores é

$$\begin{aligned} \psi^2 &= \frac{1}{2}C^{\alpha\beta}\psi_{\beta}\psi_{\alpha}, \\ C_{\rho\sigma}\psi^2 &= \frac{1}{2}C_{\rho\sigma}C^{\alpha\beta}\psi_{\beta}\psi_{\alpha} \rightarrow \psi_{\rho}\psi_{\sigma} = -C_{\rho\sigma}\psi^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Como será adotada a notação espinorial para todas as representações de Lorentz, vamos definir o conjunto de matrizes gama

$$(\gamma^0)_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma^1)_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\gamma^2)_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

com $(\gamma_a)^{\alpha\beta} = (\gamma^b)^{\alpha\beta} \eta_{ba}$. As matrizes gama com índices covariantes e contravariantes são obtidas com a aplicação de (2.1) e (2.2) em (2.10).

A partir das definições anteriores os vetores no espaço de Minkowski com 3 componentes independentes x^a podem ser representados pelo biespinor contravariante de traço nulo definido como

$$x_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = x^a (\gamma_a)_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = \begin{pmatrix} x^2 & x^0 + x^1 \\ -x^0 + x^1 & -x^2 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Da mesma forma que x^μ , $x_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}$ tem 3 componentes independentes. As representações covariante e mista decorrem a partir de

$$x_{\alpha\beta} = x_{\cdot\beta}^{\mu\cdot} C_{\mu\alpha} = x_a (\gamma^a)_{\alpha\beta}, \quad (2.12)$$

$$x^{\alpha\beta} = C^{\beta\mu} x_{\cdot\mu}^{\alpha\cdot} = x_a (\gamma^a)^{\alpha\beta}, \quad (2.13)$$

A definição apresentada em (2.13) pode ser invertida, dando como resultado

$$x_a = \frac{1}{2} x^{\alpha\beta} (\gamma_a)_{\beta\alpha}. \quad (2.14)$$

Nas operações que seguirão, os biespinores são objetos comutantes, uma vez que o efeito de anticomutação em um índice é compensado pela anticomutação no outro índice.

2.2 Álgebra de Grassmann

Com o objetivo de apresentar as operações básicas com variáveis anticomutantes, o espaço de Grassmann em uma dimensão se mostra adequado. Seja θ a variável que satisfaz a

álgebra $\{\theta, \theta\} = 0 \rightarrow \theta^2 = 0$. Esta propriedade permite que uma função arbitrária $f(\theta)$ possa ser expandida numa série de Taylor finita

$$\begin{aligned} f(\theta) &= f(0) + \left. \frac{df(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0} \theta, \\ &= a + b\theta. \end{aligned} \tag{2.15}$$

A operação de derivação é definida como

$$\frac{d\theta}{d\theta} \doteq 1,$$

enquanto a integração é definida de modo a ser invariante por uma translação da variável de Grassmann, ou seja,

$$\begin{aligned} \int d\theta f(\theta) &= \int d\theta f(\theta + \alpha), \\ \int d\theta (a + b\theta) &= \int d\theta [a + b(\theta + \alpha)], \end{aligned}$$

levando aos resultados

$$\int d\theta \doteq 0, \quad \int d\theta\theta = \mathcal{C}, \tag{2.16}$$

onde \mathcal{C} tem um valor qualquer, permitindo portanto a definição

$$\int d\theta\theta \doteq 1. \tag{2.17}$$

Como decorrência das definições acima as operações de derivação e integração para as variáveis de Grassmann são equivalentes

$$\int d\theta f(\theta) = \frac{df(\theta)}{d\theta}. \tag{2.18}$$

A álgebra de Grassmann bidimensional é construída a partir das variáveis θ^α satisfazendo a relação de anticomutação

$$\{\theta^\alpha, \theta^\beta\} = 0. \tag{2.19}$$

Decorrem de forma imediata as igualdades

$$\begin{aligned} 1- \quad & \theta^\alpha \theta^\alpha = 0, \\ 2- \quad & \theta^2 \doteq \frac{1}{2} \theta^\alpha \theta_\alpha = \frac{1}{2} \theta^\alpha \theta^\beta C_{\beta\alpha} = i\theta^1 \theta^2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como consequência de 2.20 uma função arbitrária pode ser expandida numa série de Taylor finita de acordo com

$$f(\theta) = f_0 + f_{1\alpha} \theta^\alpha + f_2 \theta^2,$$

onde f_0 e f_2 são escalares e $f_{1\alpha}$ é um espinor com duas componentes.

A derivada covariante é definida como

$$\partial_\alpha \theta^\beta \doteq \frac{\partial \theta^\beta}{\partial \theta^\alpha} = \delta_\alpha^\beta = C_\alpha^{\cdot\beta}, \quad (2.21)$$

a partir da qual decorrem

$$\begin{aligned} 1- \quad & \partial_\alpha \theta_\beta = \partial_\alpha \theta^\sigma C_{\sigma\beta} = \delta_\alpha^\sigma C_{\sigma\beta} = C_{\alpha\beta}, \\ 2- \quad & \partial_\alpha \theta^2 = \frac{1}{2} \partial_\alpha \theta^\beta \theta_\beta = \theta_\alpha. \end{aligned} \quad (2.22)$$

A partir de (2.21) define-se a derivada contravariante de acordo com

$$\partial^\alpha \doteq C^{\alpha\beta} \partial_\beta,$$

e com isso o laplaciano para as variáveis de Grassmann é dado por

$$\begin{aligned} \partial^2 & \doteq \frac{1}{2} \partial^\alpha \partial_\alpha, \\ & = \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \partial_\beta \partial_\alpha \\ & = -i \partial_1 \partial_2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

com os seguintes resultados decorrentes:

$$\partial^2 \theta_\alpha = 0, \quad (2.24)$$

$$\partial^2 \theta^2 = -1. \quad (2.25)$$

De maneira análoga à álgebra de Grassmann em uma dimensão, a integração é uma operação equivalente à derivação

$$\begin{aligned}\int d\theta_\alpha 1 &\doteq \partial_\alpha 1 = 0, \\ \int d\theta_\alpha \theta^\beta &= \partial_\alpha \theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \\ \int d^2\theta &= \int i d\theta_2 d\theta_1 = i \partial_2 \partial_1 = \partial^2.\end{aligned}\tag{2.26}$$

A partir do resultado

$$\int d^2\theta \theta^2 = i \partial_2 \partial_1 (i \theta^1 \theta^2) = -1,\tag{2.27}$$

a função delta de Dirac grassmanniana pode ser definida como

$$\delta^2(\theta) = -\theta^2,\tag{2.28}$$

reproduzindo o resultado conhecido

$$\int d^2\theta \delta^2(\theta - \theta') f(\theta) = f(\theta')\tag{2.29}$$

2.3 O superespaço em (2+1)D

O superespaço é definido a partir das coordenadas comutantes usuais do espaço de Minkowski $x^a \equiv (x^0, x^1, x^2)$, que podem ser representados pelo espinor de dois índices $x^{\alpha\beta}$, e por duas coordenadas espinoriais (e portanto anticomutantes) $\theta^\nu \equiv (\theta^1, \theta^2)$, representadas coletivamente por $z^5 = (x, \theta)$. Por conta das coordenadas de Minkowski serem comutantes e as espinorias anticomutantes, as mesmas são freqüentemente referidas como coordenadas bosônicas e fermiônicas, respectivamente.

A operação de derivação das coordenadas fermiônicas foi apresentada na seção anterior em (2.21), e para as coordenadas bosônicas a derivada covariante é uma extensão da derivação usual, definida como

$$\partial_{\mu\nu} = \partial_a (\gamma^a)_{\mu\nu}\tag{2.30}$$

cuja aplicação em $x^{\alpha\beta}$ é dada por

$$\partial_{\mu\nu}x^{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial x^{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu\nu}} = \frac{1}{2}\delta_{(\mu}^{\alpha}\delta_{\nu)}^{\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{\mu}^{\alpha}\delta_{\nu}^{\beta} + \delta_{\mu}^{\beta}\delta_{\nu}^{\alpha}), \quad (2.31)$$

enquanto que a derivada contravariante (ou superior) é dada por $\partial^{\alpha\beta} = C^{\alpha\mu}C^{\beta\nu}\partial_{\mu\nu}$. As demais operações com as variáveis bosônicas são as usuais.

Os operadores de derivação têm as propriedades de hermiticidade

$$(i\partial_{\mu})^{\dagger} = -(i\partial_{\mu}), \quad (2.32)$$

$$(i\partial_{\mu\nu})^{\dagger} = +(i\partial_{\mu\nu}). \quad (2.33)$$

Funções definidas no superespaço são denominadas supercampos $F_{\dots}(z) \equiv F_{\dots}(x, \theta)$, onde os pontos indicam possíveis índices de simetria interna e (ou) índices de Lorentz. Os supercampos se transformam da maneira usual sob o grupo de Poincaré com os geradores de translação P_a reescritos como um bispinor $P_{\alpha\beta}$, os geradores de rotação M_{ab} e introduzindo os geradores espinoriais de supersimetria Q_{μ} , satisfazendo as relações adicionais que correspondem à álgebra da supersimetria

$$[P_{\mu\nu}, P_{\alpha\beta}] = 0, \quad (2.34)$$

$$\{Q_{\mu}, Q_{\nu}\} = 2P_{\mu\nu}, \quad (2.35)$$

$$[Q_{\mu}, P_{\alpha\beta}] = 0, \quad (2.36)$$

mantidas as relações de comutação usuais com M_{ab} . Esta álgebra é realizada a partir dos geradores definidos como

$$P_{\mu\nu} = i\partial_{\mu\nu}, \quad (2.37)$$

$$Q_{\mu} = i(\partial_{\mu} - i\theta^{\nu}\partial_{\nu\mu}) \quad (2.38)$$

A ação do gerador de supersimetria Q_{μ} , pode ser evidenciada a partir do resultado de sua aplicação a um supercampo, e com esse objetivo alguns resultados, que serão melhor detalhados em uma seção subsequente, são aqui apresentados.

Considerando inicialmente o supercampo escalar, que é um objeto bosônico, o mesmo pode

ser representado em componentes pela expansão de Taylor nas variáveis de Grassmann de acordo com

$$\Phi(z) \equiv \Phi(x, \theta) = A(x) + B^\alpha(x) \theta_\alpha + F(x) \theta^2, \quad (2.39)$$

onde $A(x)$ e $C(x)$ são funções bosônicas e $B^\alpha(x)$ é um espinor (que contraído com θ_α produz um objeto bosônico). A aplicação do operador Q_μ em $\Phi(z)$ fornece

$$\begin{aligned} Q_\mu \Phi(x, \theta) &= i(\partial_\mu - i\theta^\nu \partial_{\nu\mu}) (A(x) + B^\alpha(x) \theta_\alpha + F(x) \theta^2), \\ &= -iB_\mu(x) + iF(x) \theta_\mu + \theta^\nu \partial_{\nu\mu} A(x) - \theta^2 \partial_{\nu\mu} B^\nu(x), \end{aligned} \quad (2.40)$$

ou seja, a aplicação do gerador de supersimetria em objeto bosônico produz um objeto fermiônico (todos os termos tem um índice livre).

No caso de um supercampo espinorial, que pode ser escrito em termos de suas componentes de acordo com

$$A_\alpha(x, \theta) = \chi_\alpha(x) + B(x) \theta_\alpha + \theta^\beta V_{\beta\alpha}(x) + E_\alpha(x) \theta^2,$$

onde $\chi_\alpha(x)$ e $E_\alpha(x)$ são funções fermiônicas, $B(x)$ é uma função bosônica e $V_{\beta\alpha}(x)$ é um espinor com dois índices (que se comporta como um objeto bosônico). A aplicação do operador Q_μ tem como resultado

$$\begin{aligned} Q_\mu A_\alpha(x, \theta) &= i(\partial_\mu - i\theta^\nu \partial_{\nu\mu}) (\chi_\alpha(x) + B(x) \theta_\alpha + \theta^\beta V_{\beta\alpha}(x) + E_\alpha(x) \theta^2), \\ &= (iC_{\mu\alpha} - \partial_{\mu\alpha}) B(x) + iV_{\mu\alpha}(x) + i\theta_\mu D_\alpha(x) + \theta^\nu \partial_{\nu\mu} \chi_\alpha(x) + \\ &\quad + \theta^2 \partial_{\cdot\mu}^\beta V_{\beta\alpha}(x), \end{aligned} \quad (2.41)$$

que é um objeto bosônico, pois cada um dos termos tem dois índices livres e portanto se comportando como um biespinor. Com os exemplos acima fica clara a ação do gerador de supersimetria Q_μ nos supercampos, ou seja, alterar a sua natureza de bosônico \rightleftharpoons fermiônico.

Outro resultado interessante sobre a "transmutação" dos supercampos surge a partir da

aplicação do operador $\exp \{-i\epsilon^\lambda Q_\lambda\}$, com ϵ^λ infinitesimal, em um supercampo $\psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu)$

:

$$\begin{aligned}
e^{-i\epsilon^\lambda Q_\lambda} \psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu) &= [1 - i\epsilon^\lambda Q_\lambda] \psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \\
&= \psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu) + \epsilon^\lambda \partial_\lambda \psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu) - \frac{i}{2} (\epsilon^\lambda \theta^\rho + \epsilon^\rho \theta^\lambda) \partial_{\rho\lambda} \psi(x^{\mu\nu}, \theta^\mu), \\
&= \psi(x'^{\mu\nu}, \theta'^\mu),
\end{aligned} \tag{2.42}$$

onde

$$\begin{aligned}
x'^{\mu\nu} &= x^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \epsilon^{(\mu} \theta^{\nu)}, \\
\theta'^\mu &= \theta^\mu + \epsilon^\mu.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

e com isso fica mostrado que a ação do gerador de supersimetria corresponde a uma translação infinitesimal no superespaço.

Derivadas invariantes supersimetricamente podem ser definidas como

$$D_{\mu\nu} = \partial_{\mu\nu}, \tag{2.44}$$

$$D_\mu = \partial_\mu + i\theta^\nu \partial_{\nu\mu}, \tag{2.45}$$

para objetos bosônicos e fermiônicos, respectivamente.

A seguir são apresentadas algumas identidades envolvendo os operadores $\partial_{\mu\nu}$ e D_μ , essenciais para o cálculo dos diagramas de Feynman para modelos de teoria de campos formulados no superespaço, denominados supergráficos.

1 - O anticomutador $\{D_\alpha, D_\beta\}$ pode ser calculado explicitamente a partir da definição :

$$\begin{aligned}
\{D_\alpha, D_\beta\} &= \{\partial_\alpha + i\theta^\mu \partial_{\mu\alpha}, \partial_\beta + i\theta^\nu \partial_{\nu\beta}\} = \{\partial_\alpha, \partial_\beta\} + i\{\partial_\alpha, \theta^\nu \partial_{\nu\beta}\} + i\{\theta^\mu \partial_{\mu\alpha}, \partial_\beta\} - \\
&- \{\theta^\mu \partial_{\mu\alpha}, \theta^\nu \partial_{\nu\beta}\}, \text{ com o resultado}
\end{aligned}$$

$$\{D_\alpha, D_\beta\} = i\delta_\alpha^\nu \partial_{\nu\beta} + i\delta_\beta^\mu \partial_{\mu\alpha} = 2i\partial_{\alpha\beta}. \tag{2.46}$$

2 - A partir da definição $D^2 = 1/2 D^\alpha D_\alpha = 1/2 C^{\alpha\beta} D_\beta D_\alpha$ o comutador dos operadores D_μ pode ser determinado multiplicando esta expressão por $C_{\mu\nu}$:

$C_{\mu\nu}D^2 = 1/2C_{\mu\nu}C^{\alpha\beta}D_\beta D_\alpha = 1/2(\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta - \delta_\nu^\alpha\delta_\mu^\beta)D_\beta D_\alpha = 1/2(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu)$, e portanto

$$[D_\mu, D_\nu] = -2C_{\mu\nu}D^2. \quad (2.47)$$

3-A partir de (2.46) e (2.47) é imediato que

$$D_\alpha D_\beta = i\partial_{\alpha\beta} - C_{\alpha\beta}D^2. \quad (2.48)$$

4- A premultiplicação pelo operador D^α em (2.48) tem como resultado $2D^2D_\beta + D_\beta D^2 = i\partial_{\alpha\beta}D^\alpha$; posmutiplicando a mesma expressão pelo operador D^β e, em seguida, renomeando os índices de acordo com $\alpha \rightleftharpoons \beta$ obtem-se $-2D_\beta D^2 - D^2D_\beta = i\partial_{\alpha\beta}D^\beta$, e com isso

$$D^2D_\beta = -D_\beta D^2 \rightarrow \{D^2, D_\beta\} = 0. \quad (2.49)$$

5- Aplicando pela esquerda o operador D^α na expressão apresentada em (2.48):

$D^\alpha D_\alpha D_\beta = iD^\alpha\partial_{\alpha\beta} - D^\alpha C_{\alpha\beta}D^2$, que pode ser reescrita como $2D^2D_\beta = i\partial_{\alpha\beta}D^\alpha - D_\beta D^2$, chegando ao resultado

$$D^2D_\beta = -D_\beta D^2 = i\partial_{\beta\alpha}D^\alpha, \quad (2.50)$$

sendo imediato que $D^2D^\beta = -D^\beta D^2 = -i\partial^{\beta\alpha}D_\alpha$.

6- Premultiplicando o operador D^ν na expressão (2.47):

$D^\nu D_\mu D_\nu - D^\mu D_\mu D_\nu = -2D^\nu C_{\mu\nu}D^2$, e com isso $D^\nu D_\mu D_\nu = 2\{D^2, D_\nu\}$, de modo que

$$D^\nu D_\mu D_\nu = 0. \quad (2.51)$$

7- O operador $D^4 = (D^2)^2$ é dado por

$$D^4 = \frac{1}{2}D^\alpha D_\alpha D^2 = -\frac{i}{2}D^\alpha\partial_{\alpha\beta}D^\beta = -\frac{i}{2}\partial_{\alpha\beta}(i\partial^{\alpha\beta} - C^{\alpha\beta}D^2),$$

e, portanto,

$$D^4 = \frac{1}{2}\partial_{\alpha\beta}\partial^{\alpha\beta} \equiv \square. \quad (2.52)$$

Um supercampo é usualmente representado em componentes, que nada mais é do que a expansão de Taylor nas variáveis de Grassmann, e por conta disso a expressão sinônima multipletto é freqüentemente usada. Nesta tese, os supercampos de interesse são o escalar e o vetorial, e nas seções que seguem os mesmos são apresentados de forma detalhada.

2.4 O multipletto escalar

A representação mais simples da supersimetria é o supercampo real $\Phi(x, \theta)$, que é representado em termos de suas componentes como

$$\Phi(x, \theta) = A(x) + \theta^\alpha B_\alpha(x) - \theta^2 F(x), \quad (2.53)$$

onde $A(x)$ e $F(x)$ são escalares, enquanto que $B_\alpha(x)$ é um espinor com duas componentes. Essas componentes também podem ser definidas como projeções de $\Phi(x, \theta)$ como segue:

$$\begin{aligned} A(x) &= \Phi(x, \theta) |, \\ B_\alpha(x) &= D_\alpha \Phi(x, \theta) |, \\ F(x) &= D^2 \Phi(x, \theta) |, \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde a barra " | " tem o significado de, após efetuar a operação no supercampo $\Phi(x, \theta)$, deve-se tomar $\theta = 0$.

Com essa notação a integração sobre variáveis de Grassmann, como apresentada em(2.26), pode também ser realizada como

$$\int d^2\theta = \partial^2 = D^2 |. \quad (2.55)$$

Como ilustração de uma teoria de campo formulada no superespaço, consideremos a parte cinética da ação construída com o multipletto escalar, dada por

$$S_{CIN} = -\frac{1}{2} \int d^5z D^\alpha \phi D_\alpha \phi, \quad (2.56)$$

que por uma integração por partes e desprezando os termos de superfície é reescrita como

$$S_{CIN} = \frac{1}{2} \int d^5 z \phi D^\alpha D_\alpha \phi. \quad (2.57)$$

Aplicando (2.55) obtemos

$$\begin{aligned} S_{CIN} &= \frac{1}{2} \int d^5 z \Phi D^\alpha D_\alpha \Phi, \\ &= \int d^3 x D^2 (\Phi D^2 \Phi) |, \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 x D^\alpha D_\alpha (\Phi D^2 \Phi) |, \\ &= \frac{1}{2} \int d^3 x D^\alpha (D_\alpha \Phi D^2 \Phi + \Phi D_\alpha D^2 \Phi) |, \\ &= \int d^3 x (D^2 \Phi D^2 \Phi + D^\alpha \Phi D_\alpha D^2 \Phi + \Phi \square \Phi) |, \end{aligned} \quad (2.58)$$

mostrando que a ação escrita em termos das componentes do supercampo $\Phi(x, \theta)$ é dada por

$$S_{CIN} = \int d^3 x (F^2 - iB^\alpha \partial_{\alpha\beta} B^\beta + A \square A), \quad (2.59)$$

mostrando a presença da lagrangiana de Dirac não massiva para o campo $B^\alpha(x)$ e da lagrangiana de Klein-Gordon não massiva para o campo $A(x)$, o que caracteriza os campos acima como parceiros supersimétricos. O campo $F(x)$ não apresenta dinâmica e sua importância está em manter a ação com o mesmo número de graus de liberdade bosônicos e fermiônicos.

No caso de um supercampo escalar complexo, a sua representação em componentes é a mesma que o supercampo real (2.54), no entanto a similaridade entre os mesmos se limita a apenas isso, tendo em vista a necessidade de impor que a ação de uma teoria seja invariante sob transformação dos supercampos. Por exemplo, no caso de uma transformação de fase global

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{iK} \Phi, \quad \bar{\Phi} \rightarrow \bar{\Phi}' = \bar{\Phi} e^{-iK}, \quad (2.60)$$

, onde K é constante, considerando no momento apenas a parte cinética da ação de uma teoria descrita por $S_{CIN} = \int d^5 z D^\alpha \bar{\Phi} D_\alpha \Phi$, a mesma se mantém invariante. No entanto,

para uma transformação de fase local, na qual K é um supercampo escalar real dado por

$$K(x, \theta) = \omega(x) + \theta^\alpha \sigma_\alpha(x) - \theta^2 \tau(x), \quad (2.61)$$

a ação não é invariante. Com o objetivo de construir uma ação que seja invariante define-se a derivada espinorial covariante

$$\nabla_\alpha = D_\alpha - iA_\alpha, \quad (2.62)$$

onde A_α é um supercampo espinorial real, denominado conexão espinorial de calibre.

Impondo que $(\nabla_\alpha \Phi)' = e^{iK} \nabla_\alpha \Phi$ chega-se à lei de transformação

$$\nabla'_\alpha = e^{iK} \nabla_\alpha e^{-iK}, \quad (2.63)$$

e, conseqüentemente

$$A'_\alpha = e^{iK} (A_\alpha + D_\alpha K) e^{-iK}. \quad (2.64)$$

2.5 O multiplete vetorial

Na seção anterior foi evidenciada a necessidade de introduzir o supercampo A_α , visando manter invariante a ação sob uma transformação local. Passemos agora a uma descrição mais detalhada sobre o mesmo.

Assim como o supercampo escalar, A_α pode ser escrito em componentes mediante a expansão numa série de Taylor nas variáveis de Grassmann

$$A_\beta(x, \theta) = \chi_\beta(x) - \theta_\beta B(x) + i\theta^\alpha V_{\alpha\beta}(x) - \theta^2 (\lambda_\beta(x) + i\partial_{\beta\alpha} \chi^\alpha(x)), \quad (2.65)$$

onde χ_β e λ_β são espinores reais com duas componentes, $V_{\alpha\beta}$ um biespinor real e simétrico e $B(x)$ um escalar. Estas componentes podem ser expressas em termos de projeções do supercampo A_α .

É imediato que

$$\chi_\beta = A_\beta |. \quad (2.66)$$

Aplicando o operador D_β em A_α obtemos

$$D_\beta A_\alpha = -C_{\beta\alpha}B + iV_{\beta\alpha} + \theta^\mu (i\partial_{\mu\beta}\chi_\alpha - C_{\mu\beta}\lambda_\alpha - iC_{\mu\beta}\partial_{\alpha\nu}\chi^\nu) + \theta^2 (-i\partial_{\beta\alpha}B + \partial_{\beta\mu}V_{\cdot\alpha}^\mu), \quad (2.67)$$

de modo que

$$D_\beta A_\alpha | = -C_{\beta\alpha}B + iV_{\beta\alpha}, \quad (2.68)$$

e, a partir deste resultado

$$\begin{aligned} V_{\alpha\beta} &= -\frac{i}{2}(D_\alpha A_\beta + D_\beta A_\alpha) | \equiv -\frac{i}{2}D_{(\alpha}A_{\beta)} |, \\ B &= \frac{1}{2}D^\alpha A_\alpha |. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Aplicando D^α em (2.67) obtemos

$$\lambda_\beta = D^\alpha D_\beta A_\alpha |. \quad (2.70)$$

Quando o supercampo Γ_α se transforma como apresentado em (2.64) e aqui reescrito

$$A'_\alpha = e^{iK} (A_\alpha + D_\alpha K) e^{-iK}, \quad (2.71)$$

com o supercampo K apresentado em (2.61), a transformação de suas componentes pode ser determinada observando que

$$e^{\pm iK} = e^{\pm i\omega} [1 \pm \alpha i\theta^\alpha \sigma_\alpha + \theta^2 (\sigma^2 \mp i\tau)], \quad (2.72)$$

e, a partir desse resultado, tiramos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} e^{\pm iK} | &= e^{\pm i\omega}, \\ D_\alpha e^{\pm iK} | &= \pm \sigma_\alpha e^{\pm i\omega}, \\ D_\beta D_\alpha e^{\pm iK} | &= e^{\pm i\omega} [C_{\beta\alpha} (\sigma^2 \mp i\tau) \mp \partial_{\beta\alpha}\omega], \\ D^2 e^{\pm iK} | &= e^{\pm i\omega} (-\sigma^2 \pm i\tau). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Com isso tiramos que, com $A'_\beta = \chi'_\beta - \theta_\beta B' + i\theta^\alpha V'_{\alpha\beta} - \theta^2 (\lambda'_\beta + i\partial_{\beta\alpha}\chi'^\alpha)$, as suas componentes se modificarão como

$$\begin{aligned}\delta\chi_\beta &= \sigma_\beta, \\ \delta B &= \tau, \\ \delta V_{\alpha\beta} &= \partial_{\alpha\beta}\omega, \\ \delta\lambda &= 0.\end{aligned}\tag{2.74}$$

Por razões que ficarão claras a seguir vamos definir o supercampo espinorial

$$W^\alpha = \frac{1}{2}D^\beta D^\alpha A_\beta.\tag{2.75}$$

A partir de (2.51) é imediato que $D_\alpha W^\alpha = 0$, com identidade decorrente

$$D_\beta D_\alpha W^\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad i\partial_{\beta\alpha}W^\alpha = D^2W_\beta.\tag{2.76}$$

Podemos escrever W_α em termos de suas componentes como

$$W_\alpha = a_\alpha - \theta_\alpha b + \theta^\beta f_{\beta\alpha} - \theta^2 d_\alpha,\tag{2.77}$$

as quais podem ser determinadas a partir de projeções de W_α , e estão relacionadas com as componentes de Γ_α como segue:

$$\begin{aligned}a_\alpha &= W_\alpha | = \frac{1}{2}\lambda_\alpha, \\ b &= D^\alpha W_\alpha | = 0, \\ f_{\beta\alpha} &= D_\beta W_\alpha | = -\frac{1}{2}(\partial_\beta^\lambda V_{\lambda\alpha} + \partial_\alpha^\lambda V_{\lambda\beta}), \\ d_\alpha &= D^2 W_\alpha | = -\frac{i}{2}\partial_{\alpha\beta}\lambda^\beta.\end{aligned}\tag{2.78}$$

Com os resultados acima reescrevemos W_α em termos de suas componentes como

$$W_\alpha = a_\alpha + \theta^\beta f_{\beta\alpha} - \theta^2 d_\alpha.\tag{2.79}$$

Para mostrar a extensão do formalismo da teoria dos campos para o superespaço, vamos apresentar algumas ações que podem ser definidas com o supercampo espinorial.

Consideremos em primeiro lugar a ação

$$S = \frac{1}{g^2} \int d^5 z W^2 = \frac{1}{2g^2} \int d^3 x d^2 \theta W^\alpha W_\alpha, \quad (2.80)$$

que é escrita em termos das componentes de W^α como

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2g^2} \int d^3 x D^2 (W^\alpha W_\alpha) |, \\ &= \frac{1}{4g^2} \int d^3 x D^\beta D_\beta (W^\alpha W_\alpha) |, \\ &= \frac{1}{g^2} \int d^3 x \left(W^\alpha D^2 W_\alpha - \frac{1}{2} D^\beta W^\alpha D_\beta W_\alpha \right) |, \\ &= \frac{1}{g^2} \int d^3 x \left(a^\alpha d_\alpha - \frac{1}{2} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right), \\ &= \frac{1}{4g^2} \int d^3 x \left[i \lambda^\alpha \partial_{\alpha\dot{\beta}} \lambda_{\dot{\beta}} - \frac{1}{2} \left(\partial^{\alpha\lambda} V_{\lambda\dot{\beta}} + \partial^{\beta\lambda} V_{\lambda\dot{\alpha}} \right) \left(\partial_{\alpha\dot{\lambda}} V_{\lambda\beta} + \partial_{\beta\dot{\lambda}} V_{\lambda\alpha} \right) \right], \quad (2.81) \end{aligned}$$

apresentando a lagrangiana de Dirac não massiva para o supercampo λ_α e o termo de Maxwell escrito no formalismo do superespaço, dado por $V^{\alpha\beta} = \mathcal{A}^a (\gamma_a)^{\alpha\beta}$, onde $\mathcal{A}^a = (\varphi, \mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)$.

Consideremos agora o caso do acoplamento do supercampo de matéria com um supercampo de calibre através da ação

$$S = -\frac{1}{2} \int d^5 z \nabla^\alpha \bar{\phi} \nabla_\alpha \phi, \quad (2.82)$$

onde ϕ é um multiplete escalar complexo e $\nabla_\alpha = D_\alpha \mp i A_\alpha$ quando aplicado em ϕ ou em $\bar{\phi}$, respectivamente. De maneira análoga ao que já foi feito podemos representar o supercampo ϕ em termos de suas componentes de acordo com

$$\phi(x, \theta) = a(x) + \theta^\alpha \xi_\alpha(x) - \theta^2 f(x), \quad (2.83)$$

onde as componentes são projeções do supercampo dadas por

$$\begin{aligned} a(x) &= \phi(x, \theta) |, \\ \xi_\alpha(x) &= D_\alpha \phi(x, \theta) |, \\ f(x) &= D^2 \phi(x, \theta) |. \end{aligned} \quad (2.84)$$

A expressão da ação em termos das componentes dos supercampos é determinada a partir de

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2} \int d^5z (D^\alpha + i\Gamma^\alpha) \bar{\phi} (D_\alpha - i\Gamma_\alpha) \phi, \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3x D^2 [D^\alpha \bar{\phi} D_\alpha \phi - iD^\alpha \bar{\phi} \Gamma_\alpha \phi + i\Gamma^\alpha \bar{\phi} D_\alpha \phi + \Gamma^\alpha \bar{\phi} \Gamma_\alpha \phi] |, \quad (2.85)
\end{aligned}$$

e aplicando o operador D^2 obtemos

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left\{ D^2 D^\alpha \bar{\phi} D_\alpha \phi - D^\beta D^\alpha \bar{\phi} D_\beta D_\alpha \phi + D^\alpha \bar{\phi} D^2 D_\alpha \phi - iD^2 D^\alpha \bar{\phi} A_\alpha \phi + \right. \\
&\quad + iD^\beta D^\alpha \bar{\phi} D_\beta A_\alpha \phi - iD^\beta D^\alpha \bar{\phi} A_\alpha D_\beta \phi - iD^\alpha \bar{\phi} A_\alpha D^2 \phi + iD^2 A^\alpha \bar{\phi} D_\alpha \phi - \\
&\quad - iD_\beta A_\alpha D^\beta \bar{\phi} D^\alpha \phi - iD_\beta A_\alpha \bar{\phi} D^\beta D^\alpha \phi + iA^\alpha D^2 \bar{\phi} D_\alpha \phi + iA_\alpha D_\beta \bar{\phi} D^\beta D^\alpha \phi + \\
&\quad + iA^\alpha \bar{\phi} D^2 D_\alpha \phi + D^2 A^\alpha \bar{\phi} A_\alpha \phi - D_\beta A_\alpha D^\beta \bar{\phi} A^\alpha \phi - D_\beta A_\alpha \bar{\phi} D^\beta A^\alpha \phi + \\
&\quad + D_\beta A_\alpha \bar{\phi} A^\alpha D^\beta \phi - A^\alpha D^\beta \bar{\phi} A_\alpha D_\beta \phi + A^\alpha \bar{\phi} D_\beta A_\alpha D^\beta \phi + A^\alpha \bar{\phi} D^2 A_\alpha \phi + \\
&\quad \left. + A^\alpha \bar{\phi} A_\alpha D^2 \phi \right\} |. \quad (2.86)
\end{aligned}$$

Aplicando as propriedades das derivadas espinoriais, o resultado apresentado em (2.68) para $D_\beta \Gamma_\alpha |$ e escrevendo A_β em componentes como apresentado (2.65) obtemos

$$\begin{aligned}
S &= \int d^3x \left\{ \bar{f}f - \bar{f}\chi^2 - i\bar{f}Ba + \bar{f}\chi^\alpha \xi_\alpha + \bar{\chi}^2 f - \bar{\chi}^2 \chi^2 - i\bar{\chi}^2 Ba + \bar{\chi}^2 \chi^\alpha \xi_\alpha - i\bar{a}\bar{B}f - \right. \\
&\quad - i\bar{a}\bar{B}\chi^2 + \bar{a}\bar{B}Ba + i\bar{a}\bar{B}\chi^\alpha \xi_\alpha - \bar{\xi}^\alpha \bar{\chi}_\alpha f + \bar{\xi}^\alpha \bar{\chi}_\alpha \chi^2 + i\bar{\xi}^\alpha \chi_\alpha Ba - \bar{\xi}^\alpha \bar{\chi}_\alpha \chi^\beta \xi_\beta - \\
&\quad - \bar{\xi}^\alpha (i\partial_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}) \xi^\beta + ia\bar{\xi}^\alpha (i\partial_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}) \chi^\beta - \bar{a}a\bar{\chi}^\alpha (i\partial_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}) \chi^\beta - \\
&\quad - i\bar{a}\bar{\chi}^\alpha (i\partial_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}) \xi^\beta - +i\bar{\xi}^\alpha \lambda_\alpha a - i\bar{a}\bar{\chi}^\alpha \chi^\beta \partial_{\alpha\beta} a + i\bar{\xi}^\alpha \lambda_\alpha a + i\bar{a}\bar{\lambda}^\alpha \xi_\alpha - \\
&\quad \left. - \bar{a} (\bar{\chi}^\alpha \lambda_\alpha - \bar{\lambda}^\alpha \chi_\alpha) a + \bar{a} (\partial_{\alpha\beta} - iV_{\alpha\beta})^2 a \right\}. \quad (2.87)
\end{aligned}$$

É possível e, como pode ser verificado a seguir, desejável, expressar o supercampo ϕ em termos de componentes covariantes dadas por

$$\phi(x, \theta) = A(x) + \theta^\alpha \psi_\alpha(x) - \theta^2 F(x), \quad (2.88)$$

onde

$$\begin{aligned}
A(x) &= \phi(x, \theta) |, \\
\psi_\alpha(x) &= \nabla_\alpha \phi(x, \theta) |, \\
F(x) &= \nabla^2 \phi(x, \theta) |.
\end{aligned} \tag{2.89}$$

A relação entre as componentes apresentadas em (2.84) e (2.89) é dada por

$$\begin{aligned}
A(x) &= a(x), \\
\psi_\alpha(x) &= \xi_\alpha(x) - i\chi_\alpha a(x), \\
F(x) &= f(x) - \chi^2(x) a(x) - i[B(x) a(x) + \chi^\alpha(x) \xi_\alpha(x)].
\end{aligned} \tag{2.90}$$

A vantagem em utilizar as componentes definidas em (2.89) é que, quando o supercampo sofre uma transformação não local $\phi \rightarrow \phi' = e^{iK} \phi$, a partir de (2.63) tiramos os resultados

$$\begin{aligned}
\nabla_\alpha \phi &\rightarrow \nabla'_\alpha \phi' = e^{iK} \nabla_\alpha \phi \\
\nabla^2 \phi &\rightarrow \nabla'^2 \phi' = e^{iK} \nabla^2 \phi,
\end{aligned} \tag{2.91}$$

e com isso as componentes se transformarão de acordo com

$$\begin{aligned}
A' &= \phi' | = e^{i\omega} A, \\
\psi'_\alpha &= \nabla'_\alpha \phi' | = e^{i\omega} \psi_\alpha, \\
F' &= \nabla'^2 \phi' | = e^{i\omega} F,
\end{aligned} \tag{2.92}$$

onde utilizamos o resultado apresentado em (2.73). No caso em que $f(x, \theta)$ é um objeto invariante podemos aplicar o resultado

$$\int d^3x d^2\theta f(x, \theta) = \int d^3x D^2 \theta f(x, \theta) | = \int d^3x \nabla^2 \theta f(x, \theta) |. \tag{2.93}$$

Com os resultados apresentados podemos escrever (2.82) como

$$\begin{aligned}
S &= \int d^5z \bar{\phi} \nabla^2 \phi = \int d^3x \nabla^2 [\bar{\phi} \nabla^2 \phi] |, \\
&= \int d^3x \left\{ \bar{F} F - \bar{\psi}^\alpha (i\partial_{\alpha\beta} + V_{\alpha\beta}) \psi^\beta + i\bar{\psi}^\alpha \lambda_\alpha A - i\bar{A} \bar{\lambda}_\alpha \psi^\alpha + \right. \\
&\quad \left. + \bar{A} (\partial_{\alpha\beta} - iV_{\alpha\beta})^2 A \right\}.
\end{aligned} \tag{2.94}$$

2.6 Quantização e regras de Feynman

A implementação das regras de Feynman, e com isso poder estender o tratamento perturbativo para o formalismo do superespaço, pode ser feita sem grandes dificuldades adicionais a partir da forte analogia que se verifica entre uma teoria formulada no superespaço com uma formulada no espaço usual. Nessa última a teoria é desenvolvida a partir da definição de uma ação, a qual contém uma parte quadrática nos campos presentes e termos de interação e/ou autointeração entre os campos. Os propagadores dos campos são obtidos a partir da parte quadrática e os vértices do modelo a partir dos termos de interação.

No superespaço a teoria também parte de uma ação escrita em termos dos supercampos, na qual também identificamos uma parte quadrática e termos de interação, com o detalhe crucial de poder aplicar todo o formalismo da teoria quântica dos campos considerando o supercampo como um objeto único, sem a necessidade de explicitar as suas componentes, apresentadas nas seções 2.4 e 2.5. Da mesma forma que na teoria usual, a partir da parte quadrática obtemos os (super)propagadores e dos termos de interação obtemos os vértices.

Como uma ilustração e antecipando um resultado que será utilizado no capítulo que descreve o modelo estudado nesta tese, consideremos o gerador funcional de um supercampo escalar complexo massivo com uma autointeração arbitrária, dado por

$$Z(J, \bar{J}) = \int \mathcal{D}\bar{\phi}\mathcal{D}\phi \exp \left\{ i \int d^5z [\bar{\phi} (D^2 - m) \phi + \bar{J}\phi + \bar{\phi}J + f(\phi, \bar{\phi})] \right\}. \quad (2.95)$$

O propagador do supercampo ϕ é obtido pela inversão da parte quadrática da ação de acordo com

$$(D_z^2 - m) \Delta(z - z') = i\delta^5(z - z'), \quad (2.96)$$

a partir do qual obtemos

$$\begin{aligned} \Delta(z - z') \equiv \langle 0 | T \{ \bar{\phi}_a(z) \phi_b(z') \} | 0 \rangle &= \frac{i}{D_z^2 - m} \delta^5(z - z'), \\ &= i \frac{D_z^2 + m}{\square - m^2} \delta^5(z - z'). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Explicitando que $\delta^5(z - z') = \delta^3(x - x') \delta^2(\theta - \theta')$ e aplicando a transformada de Fourier nas coordenadas de Minkowski o propagador do supercampo no espaço dos momentos é dado por

$$\langle 0 | T \{ \tilde{\phi}(k, \theta) \tilde{\phi}(-k, \theta') \} | 0 \rangle = -i \frac{D^2 + m}{k^2 + m^2} \delta^2(\theta - \theta'), \quad (2.98)$$

onde foi aplicado que no espaço dos momentos $\square \equiv -k^2$. Este resultado pode ser generalizado para

$$\langle 0 | T \{ \bar{\phi}_a(k, \theta) \phi_b(-k, \theta') \} | 0 \rangle = -i \delta_{ab} \frac{D^2 + m}{k^2 + m^2} \delta^2(\theta - \theta'), \quad (2.99)$$

onde por simplicidade de notação foi feita a substituição $\tilde{\phi}(k, \theta) \equiv \phi(k, \theta)$. Também por simplicidade de notação adotaremos a partir deste ponto a representação dos propagadores dos supercampos como

$$\langle 0 | T \{ \dots \} | 0 \rangle \rightarrow \langle \dots \rangle. \quad (2.100)$$

No que se refere aos vértices de interação/autointeração no formalismo de supercampos, considerando por simplicidade uma teoria com somente um supercampo escalar real, os mesmos apresentam uma estrutura do tipo

$$S_{INT} = \int d^3x d^2\theta \phi D^\alpha \phi D^\beta \phi D^2 \phi \dots, \quad (2.101)$$

ou seja, podem envolver o produto entre o supercampo e operadores $D^\alpha, D^2 \dots$ aplicados em ϕ . O vértice tem tantas linhas quantas forem o número de vezes que o supercampo aparece no mesmo. Os propagadores decorrem das contrações das linhas, formando laços pelos quais circulam os momentos externos e os oriundos dos próprios laços. Estes momentos surgem naturalmente quando escrevemos a transformada de Fourier das coordenadas de Minkowski do vértice. Cada vértice ainda contribui com uma integral sobre as variáveis de Grassmann $d^2\theta$.

Uma abordagem conveniente para os cálculos perturbativos na teoria de campos usual e que se mantém no formalismo do superespaço é o cálculo da ação efetiva, que é obtida

usualmente a partir da transformada de Legendre do funcional gerador $W(J)$ para os supergráficos conexos, e que consiste na soma das contribuições provenientes dos gráficos irreduzíveis de uma partícula (1PI), nos quais os propagadores das linhas externas são amputados e substituídos pelos supercampos $\phi(p_i, \theta_i)$, com integrações em p_i e θ_i . Sendo assim, a ação efetiva pode ser representada pela forma geral

$$\Gamma(\phi) = \sum_N \frac{1}{N!} \int \prod_{j=1}^N \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_j \phi(p_1, \theta_1) \dots \phi(p_N, \theta_N) (2\pi)^3 \delta^3 \left(\sum_{j=1}^N p_j \right) \cdot \prod_L \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \prod_{VI} \int d^2 \theta \prod P \prod V, \quad (2.102)$$

onde L : laços, VI : vértices internos, P : propagadores e V : vértices.

O integrando da ação efetiva é, em princípio, uma função não local das coordenadas de Minkowski x^a , ou seja, não polinomial nos momentos p^a , e das variáveis de Grassmann $\theta_1, \dots, \theta_N$. No entanto, é possível manipular as integrações nas variáveis de Grassmann de forma a reduzir a ação efetiva ao produtos de todos os supercampos ϕ 's calculados em uma única variável θ . Para verificar tal afirmação, consideremos um supergráfico com um número arbitrário de laços, construídos a partir de vértices que podem ser identificados como $i-1, i, i+1, \dots$. Os vértices são conectados por propagadores que contêm funções delta nas variáveis de Grassmann $\delta^2(\theta_i - \theta_{i+1})$ com operadores $D^\alpha, D^2 \dots$ aplicados sobre as mesmas. Para um laço em especial e fixando a atenção a uma de suas linhas, os operadores D 's podem ser combinados a partir do resultado

$$D_\alpha(k, \theta_i) \delta^2(\theta_i - \theta_{i+1}) = -D_\alpha(-k, \theta_{i+1}) \delta^2(\theta_i - \theta_{i+1}), \quad (2.103)$$

mostrando que podemos transferir o(s) operador(es) de uma extremidade da linha para outra. Estes operadores podem ser transferidos, por integrações por partes aplicando a regra de Leibnitz, para outras linhas internas e/ou externas, e com isso liberamos uma função delta de Grassmann, permitindo a integração direta na variável da função delta. O exemplo abaixo

$$\int \int d^2 \theta_i d^2 \theta_{i+1} \delta^2(\theta_i - \theta_{i+1}) \phi(k, \theta_i) \phi(-k, \theta_{i+1}) = \int d^2 \theta_i \phi(k, \theta_i) \phi(-k, \theta_i) \quad (2.104)$$

ilustra os resultados que vão sendo obtidos. A partir da definição da função delta de Grassmann apresentada em (2.28) temos as seguintes regras

$$\begin{aligned}
\delta^2(\theta_i - \theta_j) \delta^2(\theta_i - \theta_j) &\sim \theta^4 = 0, \\
\delta^2(\theta_i - \theta_j) D^\alpha \delta^2(\theta_i - \theta_j) &\sim \theta^3 = 0, \\
\delta^2(\theta_i - \theta_j) D^2 \delta^2(\theta_i - \theta_j) &= \delta^2(\theta_i - \theta_j).
\end{aligned} \tag{2.105}$$

A aplicação seqüencial deste procedimento reduz o cálculo a uma única variável de Grassmann, reduzindo a ação efetiva a uma expressão do tipo

$$\Gamma(\phi) = \int \prod_{j=1}^N \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta G(p_1, \dots, p_N) \phi(p_1, \theta) \dots D^\alpha \phi(p_i, \theta) \dots D^2 \phi(p_j, \theta), \tag{2.106}$$

onde $G(p_1, \dots, p_N)$ é obtido a partir da integrais nos momentos dos laços internos.

Capítulo 3

A expansão $1/N$

A expansão perturbativa de modelos vetoriais em $1/N$, onde N é o número de campos, utilizada nesta tese, é apresentada.

3.1 A expansão perturbativa

São muito poucos os problemas da física que podem ser resolvidos de forma exata, sem a necessidade de alguma aproximação. Ao elaborarmos um modelo que pretende explicar uma classe de fenômenos observados na natureza, freqüentemente somos forçados a fazer simplificações e a usar esquemas de aproximação que visam colocar o problema em estudo numa forma possível de ser tratada pelos métodos analíticos disponíveis. Em outras palavras, nos valem dos métodos perturbativos.

No contexto da teoria quântica dos campos, todo modelo é construído a partir de uma densidade de lagrangiana \mathcal{L} , a qual pode conter um número qualquer de campos distintos, e que sempre pode ser dividida em duas partes

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{INT}, \quad (3.1)$$

onde \mathcal{L}_0 é a parte livre, que descreve a dinâmica de cada um dos campos presentes no modelo, enquanto \mathcal{L}_{INT} descreve as interações entre campos distintos ou ainda autointerações. Considerando que a interação ocorre em $-\infty < t_i < t < t_f < \infty$, o conhecimento

da amplitude de probabilidade para um processo no qual o sistema em estudo faz uma transição de um estado inicial $|i\rangle$ em t_i para um estado final $|f\rangle$ em t_f , dada por $\langle f | i \rangle$, é, pode-se dizer, o objetivo central da teoria quântica dos campos, como também é no caso da mecânica quântica.

De uma forma explícita, determinar $\langle f | i \rangle$ significa conhecer as funções de Green $\langle 0 | T\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n) | 0 \rangle$ de cada um dos campos em interação, que é obtida pela fórmula de Gell-Mann Low

$$\langle \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n) \rangle = \frac{{}^0\langle 0 | T\varphi_0(x_1), \dots, \varphi_0(x_n) e^{i \int d^D x \mathcal{L}_{INT}(\varphi_0)} | 0 \rangle^0}{{}^0\langle 0 | T e^{i \int d^D x \mathcal{L}_{INT}(\varphi_0)} | 0 \rangle^0}, \quad (3.2)$$

onde o índice "0" representa os campos livres. A expansão perturbativa é realizada a partir de

$$e^{iS} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iS)^n}{n!}. \quad (3.3)$$

Como exemplo, consideremos o caso da eletrodinâmica quântica, que é descrita pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{0A} + \mathcal{L}_{0\psi} + \mathcal{L}_{INT}, \quad (3.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{0A} &= -\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) - \frac{\lambda}{2} (\partial_\mu A^\mu)^2, \\ \mathcal{L}_{0\psi} &= i\bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi, \\ \mathcal{L}_{INT} &= -e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu, \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde ψ é um espinor de Dirac e A_μ é o campo de calibre. O termo de interação contém a carga do elétron que, por ser pequena, permite a realização da expansão apresentada em (3.3). Este procedimento é denominado expansão na constante de acoplamento. Outro ponto importante é a renormalizabilidade do modelo, pois $[\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu] = M^{\frac{5}{2}}$ com $[e] = M^{\frac{1}{2}}$ em $(2+1)D$, e em $(3+1)D$ $[\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu] = M^4$ com a constante de acoplamento adimensional. Se considerarmos agora o modelo de Gross-Neveu, descrito pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L}_{GN} = i\bar{\psi}^a \gamma^\mu \partial_\mu \psi^a + g_0 (\bar{\psi}^a \psi^a)^2, \quad (3.6)$$

onde ψ^a é um espinor com duas componentes e $a = 1, \dots, N$. Em $(1 + 1) D$, vemos a partir da parte cinética de \mathcal{L}_{GN} que $[\psi^a] = M^{\frac{1}{2}}$, a constante de acoplamento g_0 é adimensional e o modelo é renormalizável, o que o torna tratável pela expansão perturbativa. No entanto, em $(2 + 1) D$ $[\psi^a] = M^1$ e com isso a dimensão do termo de interação da lagrangiana é maior do que a dimensão do espaço-tempo, a constante de acoplamento tem dimensão $[g_0] = M^{-1}$ e com isso o modelo não é renormalizável.

Outro aspecto fundamental para a realização da expansão perturbativa na constante de acoplamento é que a mesma seja "pequena", pois caso contrário a expansão perturbativa não converge nem assintoticamente, e com isso os resultados obtidos perdem o significado.

3.2 A expansão de modelos vetoriais em $1/N$

Uma opção para a realização da expansão perturbativa pode ser implementada quando o modelo em estudo contem um campo que pode ser representado por uma n-upla de campos $\phi = (\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_N)^T$, o qual recebe a denominação de modelo vetorial, e a expansão é feita na número "N" de campos [52, 51, 50].

Como exemplo, consideremos a teoria escalar ϕ^4 em $(3 + 1) D$ com uma interação quártica, descrita pela densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a - \frac{g_0}{8} (\phi^a \phi^a) (\phi^b \phi^b), \quad (3.7)$$

onde ϕ^a são campos escalares, $a, b = 1, \dots, N$ e a soma nos índices repetidos está subentendida. O vértice do modelo é $-ig_0$ e o propagador livre é dado por

$$\langle \phi^a(p) \phi^b(-p) \rangle = i \frac{\delta^{ab}}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}. \quad (3.8)$$

Este modelo é renormalizável na expansão perturbativa da constante de acoplamento g_0 , e a expansão $1/N$ é uma outra opção de abordagem, apresentada aqui como uma ilustração do método.

Para implementar a expansão inicialmente redefinimos a constante de acoplamento do termo de interação como

$$g_0 = \frac{\lambda_0}{N}, \quad (3.9)$$

e introduzimos um campo auxiliar Σ , modificando a densidade de lagrangiana com o acréscimo do termo

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{N}{2\lambda_0} \left(\Sigma - \frac{\lambda_0}{2N} \phi^a \phi^a \right)^2, \quad (3.10)$$

de modo que a mesma passa a ser escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a + \frac{N}{2\lambda_0} \Sigma^2 - \frac{1}{2} \Sigma \phi^a \phi^a. \quad (3.11)$$

As equações de movimento dos campos ϕ^a e Σ são dadas por

$$(\partial^2 + m^2 - \Sigma) \phi^a = 0, \quad (3.12)$$

$$\Sigma - \frac{\lambda_0}{2N} \phi^a \phi^a = 0. \quad (3.13)$$

A equação (3.13) é uma equação de vínculo, e portanto não altera a dinâmica do modelo. Como podemos observar em (3.11), o modelo passa a ter apenas um vértice de interação trilinear $\Sigma \phi^a \phi^a$, e conseqüentemente as regras de Feynman do modelo se alteram, sendo dadas por:

$$\text{Propagador do campo } \phi : \langle \phi^a(p) \phi^b(-p) \rangle = i \frac{\delta^{ab}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon};$$

$$\text{Propagador do campo } \Sigma : \Delta_\Sigma = i \frac{\lambda_0}{N};$$

$$\text{Vértice trilinear} : \Gamma_{\Sigma \phi^a \phi^b} = -i \delta^{ab} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3).$$

Vemos que o propagador do campo escalar ϕ não se altera e que o campo Σ não tem dinâmica. No entanto, o mesmo adquire uma dinâmica quando é feito o cálculo da função

de dois pontos [50].

Uma questão que merece ser ressaltada é que a expansão perturbativa é feita em ordens de $1/N$ e não na constante de acoplamento, significando que as contribuições numa dada ordem são oriundas de diagramas de Feynman com um número qualquer de laços, podendo tornar o estudo de um modelo nesse formalismo extremamente complicado.

Capítulo 4

O modelo CP^{N-1} não comutativo supersimétrico

Apresentamos neste capítulo o estudo do modelo CP^{N-1} não comutativo supersimétrico com o campo básico na representação fundamental. Estudamos a estrutura de fase e verificamos que é igual à estrutura do modelo comutativo. A partir do cálculo das correções radiativas dos supercampos de vínculo e de calibre, mostramos que os mesmos adquirem dinâmica, e com isso calculamos as correções subdominantes da função de dois pontos do supercampo básico. Todos os cálculos são feitos num formalismo explicitamente supersimétrico.

4.1 Apresentação do modelo

O modelo CP^{N-1} bosônico em $(2+1)D$ no espaço-tempo comutativo, com o campo de matéria na representação fundamental, é definido pela ação [32]

$$S = \int d^3x \left\{ \overline{D^\mu \phi_a} D_\mu \phi_a + \sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a - \frac{N}{g_0} \right) \right\}, \quad (4.1)$$

onde $\phi \equiv (\phi_1 \dots \phi_N)$ é uma n-upla de campos escalares complexos e σ é um campo escalar multiplicador de Lagrange que impõe o vínculo

$$\phi_a \bar{\phi}_a = N/g_0, \quad (4.2)$$

no qual está subentendida a soma no índice $a = 1, \dots, N$. A derivada covariante é dada por $D^\mu = \partial^\mu - iA^\mu$, onde A^μ é um campo de calibre vetorial auxiliar, sendo classicamente a corrente

$$A^\mu = i \frac{\phi_a \partial^\mu \bar{\phi}_a - (\partial^\mu \phi_a) \bar{\phi}_a}{2\phi_a \bar{\phi}_a}. \quad (4.3)$$

Este modelo pode ser generalizado para o espaço-tempo não comutativo substituindo o produto usual entre campos pelo produto Moyal, definido em (1.9), e como o objetivo desta tese é estender os estudos feitos sobre o modelo CP^{N-1} não comutativo para o superespaço, a ação do modelo é reescrita como

$$S = - \int d^5z \left\{ \frac{1}{2} \overline{\nabla^\alpha \phi_a} \star \nabla_\alpha \phi_a + \Sigma \star \left(\phi_a \star \bar{\phi}_a - \frac{N}{g} \right) \right\}, \quad (4.4)$$

onde ϕ_a é uma n-upla de supercampos escalares complexos, Σ é um supercampo escalar complexo multiplicador de Lagrange que impõe o vínculo $\phi_a \star \bar{\phi}_a = N/g_0$. A derivada espinorial covariante ∇_α foi definida em (2.62) e aqui reescrita $\nabla_\alpha = D_\alpha - iA_\alpha$, onde A_α é um supercampo espinorial de calibre auxiliar com duas componentes. Com estas definições temos

$$\nabla_\alpha \phi_a = D_\alpha \phi_a - iA_\alpha \star \phi_a \quad \rightarrow \quad \overline{\nabla^\alpha \phi_a} = D^\alpha \bar{\phi}_a + i\bar{\phi}_a \star A^\alpha, \quad (4.5)$$

e com isso a ação é dada por

$$S = - \int d^3x d^2\theta \left\{ \frac{1}{2} D^\alpha \bar{\phi}_a D_\alpha \phi_a - \frac{i}{2} D^\alpha \bar{\phi}_a A_\alpha \phi_a - \frac{i}{2} \bar{\phi}_a A_\alpha D^\alpha \phi_a + \frac{1}{2} \bar{\phi}_a A^\alpha A_\alpha \phi_a + \Sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a - \frac{N}{g_0} \right) \right\}, \quad (4.6)$$

onde o produto Moyal entre os supercampos está subentendido, o qual, convém ressaltar, afeta somente as coordenadas de Minkowski x^μ . A ação acima (4.6) é invariante sob uma

transformação global $U(N)$ e sob uma transformação de calibre $U(1)$. As transformações infinitesimais para os supercampos são dadas por

$$\begin{aligned}
\phi_a &\rightarrow \phi'_a = (1 + iK) \star \phi_a, \\
\bar{\phi}_a &\rightarrow \bar{\phi}'_a = \bar{\phi}_a \star (1 - iK), \\
A_\alpha &\rightarrow A'_\alpha = A_\alpha + D_\alpha K + i[K, A_\alpha]_\star, \\
\Sigma &\rightarrow \Sigma' = \Sigma + i[K, \Sigma]_\star,
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde K é um supercampo escalar real. O ordenamento dos supercampos ϕ_a e $\bar{\phi}_a$ impõe a necessidade de que o supercampo Σ também se transforme para que a ação permaneça invariante, pois

$$\Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a \rightarrow \Sigma' \star \phi'_a \star \bar{\phi}'_a = \Sigma' \star e^{iK} \star \phi_a \star \bar{\phi}_a \star e^{-iK}, \tag{4.8}$$

que pode, como decorrência da invariância do produto Moyal por uma permutação cíclica dos termos, como apresentado em (1.12), ser reescrito como

$$\Sigma' \star \phi'_a \star \bar{\phi}'_a = e^{-iK} \star \Sigma' \star e^{iK} \star \phi_a \star \bar{\phi}_a, \tag{4.9}$$

e, portanto,

$$\Sigma = e^{-iK} \star \Sigma' \star e^{iK} \quad \Rightarrow \quad \Sigma' = e^{iK} \star \Sigma \star e^{-iK}. \tag{4.10}$$

No limite comutativo $\Theta \rightarrow 0$ esta transformação desaparece. Caso tivesse sido adotado no termo de vínculo de (4.6) o ordenamento $\bar{\phi}_a \phi_a$, o supercampo Σ também não precisaria se transformar, porém, como será detalhado a seguir, ocorreria uma mistura entre os supercampos Σ e A_α , o que corresponderia ao estudo de uma outra extensão não comutativa do modelo CP^{N-1} .

Os supercampos da ação apresentada em (4.6) são não renormalizados e podem ser escritos em termos de objetos renormalizados de acordo com as definições

$$\begin{aligned}
\phi_a &= Z_1^{1/2} \phi_{Ra}, \\
A^\alpha &= Z_3 A_R^\alpha, \\
\Sigma &= Z_2 \Sigma_R,
\end{aligned} \tag{4.11}$$

e com isso a ação é dada por

$$\begin{aligned}
S = & - \int d^5 z \left\{ \frac{Z_1}{2} D^\alpha \bar{\phi}_{Ra} D_\alpha \phi_{Ra} - i \frac{Z_1 Z_3}{2} D^\alpha \bar{\phi}_{Ra} A_{R\alpha} \phi_{Ra} - i \frac{Z_1 Z_3}{2} \bar{\phi}_{Ra} A_{R\alpha} D^\alpha \phi_{Ra} + \right. \\
& \left. + \frac{Z_1 Z_3^2}{2} \bar{\phi}_{Ra} A_{R\alpha} A_{R\alpha} \phi_{Ra} + Z_2 \Sigma_R \left(Z_1 \phi_{Ra} \bar{\phi}_{Ra} - \frac{N}{g_0} \right) \right\}. \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Os contratermos das funções de onda e das constantes de acoplamento são definidos como

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 1 + \delta_\phi, \\
Z_1 Z_3 &= (1 + \delta_\phi) (1 + \delta_A) = 1 + \delta_e, \\
Z_1 Z_3^2 &= (1 + \delta_\phi) (1 + \delta_A)^2 = 1 + \delta_b, \\
Z_1 Z_2 &= (1 + \delta_\phi) (1 + \delta_\Sigma) = 1 + \delta_c, \\
\frac{Z_2}{g_0} &= \frac{\mu}{g} + \delta_g, \tag{4.13}
\end{aligned}$$

onde μ é um parâmetro arbitrário com dimensão de massa e g é a constante de acoplamento renormalizada adimensional. Substituindo (4.13) na ação (4.12) e omitindo, por simplicidade de notação, o índice R que indica os supercampos renormalizados, obtemos

$$\begin{aligned}
S = & - \int d^5 z \left\{ \frac{1}{2} D^\alpha \bar{\phi}_a D_\alpha \phi_a - \frac{i}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a A_\alpha \phi_a + \bar{\phi}_a A_\alpha D^\alpha \phi_a) + \right. \\
& + \frac{1}{2} \bar{\phi}_a A^\alpha A_\alpha \phi_a + \Sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a - \frac{N\mu}{g} \right) - i \frac{\delta_e}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a A_\alpha \phi_a + \bar{\phi}_a A_\alpha D^\alpha \phi_a) + \\
& \left. + \frac{\delta_b}{2} \bar{\phi}_a A^\alpha A_\alpha \phi_a + \frac{\delta_\phi}{2} D^\alpha \bar{\phi}_a D_\alpha \phi_a + \delta_c \Sigma \phi_a \bar{\phi}_a - \delta_g N \Sigma \right\}. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

4.2 Estudo da estrutura de fase

Suponhamos que os supercampos $\Sigma(x, \theta)$ e $\phi(x, \theta)$ tenham valores esperados no vácuo não nulos¹

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \Sigma(x, \theta) | 0 \rangle &= m, \\
\langle 0 | \phi_N(x, \theta) | 0 \rangle &= \sqrt{N} v, \tag{4.15}
\end{aligned}$$

¹Não serão consideradas fases quânticas possíveis que poderiam surgir de soluções solitônicas não comutativas clássicas, que podem ser singulares para $\theta \rightarrow 0$ [53]

onde por simplicidade foi escolhida a componente $a = N$ para o supercampo ϕ . Redefinindo os supercampos de modo a terem valores esperados no vácuo iguais a zero

$$\begin{aligned}
\phi_b(x, \theta) &\rightarrow \phi_b(x, \theta), \quad b = 1, \dots, N-1, \\
\phi_N(x, \theta) &\rightarrow \phi_N(x, \theta) + v\sqrt{N}, \\
\bar{\phi}_N(x, \theta) &\rightarrow \bar{\phi}_N(x, \theta) + \bar{v}\sqrt{N}, \\
A_\alpha(x, \theta) &\rightarrow A_\alpha(x, \theta),
\end{aligned} \tag{4.16}$$

a ação apresentada em (4.14) é reescrita como

$$\begin{aligned}
S = \int d^5z \left\{ \bar{\phi}_a (D^2 - m) \phi_a - \Sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a + Nv\bar{v} - \frac{N\mu}{g} - \delta_g N \right) - \frac{1}{2} \bar{\phi}_a A^\alpha A_\alpha \phi_a + \right. \\
+ \frac{i}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a A_\alpha \phi_a + \bar{\phi}_a A_\alpha D^\alpha \phi_a) + \frac{i}{2} (v\sqrt{N} D^\alpha \bar{\phi}_N A_\alpha + \bar{v}\sqrt{N} A_\alpha D^\alpha \phi_N) - \\
- \frac{1}{2} (v\sqrt{N} \bar{\phi}_N A^\alpha A_\alpha + \bar{v}\sqrt{N} A^\alpha A_\alpha \phi_N + Nv\bar{v} A^\alpha A_\alpha) - \sqrt{N} (\Sigma + m) (\phi_N \bar{v} + v \bar{\phi}_N) + \\
+ \delta_\phi \bar{\phi}_a D^2 \phi_a + i \frac{\delta_e}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a A_\alpha \phi_a + \bar{\phi}_a A_\alpha D^\alpha \phi_a) + i \frac{\delta_e}{2} (v\sqrt{N} D^\alpha \bar{\phi}_N A_\alpha + \bar{v}\sqrt{N} A_\alpha D^\alpha \phi_N) - \\
- \frac{\delta_b}{2} \bar{\phi}_a A^\alpha A_\alpha \phi_a - \frac{\delta_b}{2} (v\sqrt{N} \bar{\phi}_N A^\alpha A_\alpha + \bar{v}\sqrt{N} A^\alpha A_\alpha \phi_N + Nv\bar{v} A^\alpha A_\alpha) - \delta_c \Sigma \phi_a \bar{\phi}_a - \\
\left. - \delta_c m \phi_a \bar{\phi}_a - \delta_c N v \bar{v} \Sigma - \delta_c \sqrt{N} (\Sigma + m) (\phi_N \bar{v} + v \bar{\phi}_N) \right\}. \tag{4.17}
\end{aligned}$$

A imposição de que os valores esperados no vácuo dos supercampos Σ e ϕ sejam iguais a zero implica em que as ações efetivas das funções de um ponto dos mesmos sejam iguais a zero. Em outras palavras, a equação de gap destes supercampos é igual a zero.

Para fins de representação dos diagramas de Feynman correspondentes e também nos demais diagramas que serão apresentados no desenvolvimento desta tese, o supercampo ϕ será representado por uma linha contínua, o supercampo Σ por uma linha tracejada e o supercampo A_α por uma linha ondulada.

Uma vez que no cálculo da ação efetiva os propagadores das linhas externas são substituídos pelos supercampos correspondentes, isto pode ser feito logo de início, tratando os supercampos como objetos clássicos, os quais não serão contraídos gerando propagadores.

A equação de gap para o supercampo Σ é dada pela soma de dois diagramas, como apresentado abaixo :

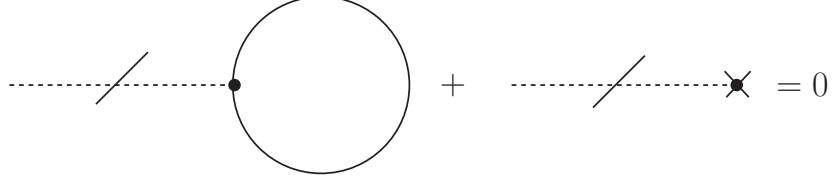


Figura 4.1: Supergráfico da equação de gap para o campo Σ

Temos que $\Gamma_\Sigma = \Gamma_{\Sigma_1} + \Gamma_{\Sigma_2}$, que correspondem ao primeiro e segundo diagrama, respectivamente. O termo Γ_{Σ_1} é dado por

$$\Gamma_{\Sigma_1} = \langle -i \int d^3x d^2\theta \Sigma(x, \theta) \star \phi_a(x, \theta) \star \bar{\phi}_a(x, \theta) \rangle, \quad (4.18)$$

e adotando a notação simplificada para a transformada de Fourier dos supercampos $\tilde{\Sigma}(k, \theta) \rightarrow \Sigma(k, \theta)$, a expressão (4.18) no espaço dos momentos é escrita como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma_1} &= -i \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} d^2\theta (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) e^{-i[k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3]} \\ &\quad \Sigma(k_1, \theta) (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + k_3) \langle : \phi_a(k_2, \theta) \bar{\phi}_a(k_3, \theta) : \rangle. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Realizando as integrações para eliminar as funções delta de Dirac e, como o propagador do supercampo ϕ no espaço dos momentos é dado por

$$\langle \phi_a(p, \theta_1) \bar{\phi}_b(-p, \theta_2) \rangle = -i \delta_{ab} \frac{D^2 + m}{p^2 + m^2} \delta_{12}, \quad (4.20)$$

onde $\delta_{12} = \delta^2(\theta_1 - \theta_2)$, obtemos

$$\Gamma_{\Sigma_1} = -N \int d^2\theta \Sigma(p=0, \theta) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2}. \quad (4.21)$$

O termo Γ_{Σ_2} no espaço dos momentos é dado por

$$\Gamma_{\Sigma_2} = -i \left(N v \bar{v} - \frac{N\mu}{g} - N\delta_g \right) \int d^2\theta \Sigma(p=0, \theta), \quad (4.22)$$

de forma que a equação de gap para o supercampo Σ , dada pela soma dos termos apresentados em (4.21) e (4.22), tem como resultado

$$\Gamma_\Sigma = i \int_\varepsilon \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} + \frac{\mu}{g} + \delta_g(\varepsilon) - v\bar{v} = 0, \quad (4.23)$$

onde o símbolo ε na integral e em δ_g representa um regulador ultravioleta, necessário devido à presença de uma divergência linear em (4.23). Adotando o procedimento da regularização dimensional [54], o resultado desta integral é

$$i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{k^2 + m^2} = \frac{|m|}{4\pi}, \quad (4.24)$$

e, portanto, (4.23) passa a ser escrita como

$$\frac{|m|}{4\pi} + \frac{\mu}{g} + \delta_g - v\bar{v} = 0 \quad (4.25)$$

e, desta forma, o contratermo δ_g passa a ser finito, provendo uma renormalização finita e arbitrária para a equação de gap. Uma escolha conveniente para o contratermo é $\delta_g = -\mu/4\pi$, onde $\mu > 0$ foi introduzido em (4.13), e a solução da equação de gap é dada por

$$g = \frac{\mu}{v\bar{v} + (\mu - |m|)/4\pi} \quad (4.26)$$

As contribuições para a ação efetiva da função de um ponto do supercampo ϕ vêm dos termos da ação do modelo $-(1 + \delta_c)\sqrt{N}m\bar{v}\phi_N$ e $-(1 + \delta_c)\sqrt{N}mv\bar{\phi}_N$, e como os campos ϕ e $\bar{\phi}$ são tratados como independentes, obtemos

$$\Gamma_{\bar{\phi}} = -i(1 + \delta_c)\sqrt{N}mv \int d^2\theta \bar{\phi}_N(p=0, \theta) = 0 \quad \rightarrow \quad mv = 0, \quad (4.27)$$

$$\Gamma_\phi = -i(1 + \delta_c)\sqrt{N}m\bar{v} \int d^2\theta \phi_N(p=0, \theta) = 0 \quad \rightarrow \quad m\bar{v} = 0. \quad (4.28)$$

Como será mostrado a seguir, os supercampos A_α e Σ , que inicialmente implementam vínculos no modelo, ao se calcular as ações efetivas das funções de dois pontos os mesmos adquirem uma dinâmica com propagadores da ordem $1/N$, o que implica no fato de que as contribuições dos mesmos são de uma ordem subdominante e portanto desconsideradas. Por exemplo, os termos da ação $-1/2(1 + \delta_b)\left(v\sqrt{N}\bar{\phi}_N A^\alpha A_\alpha + \bar{v}\sqrt{N}A^\alpha A_\alpha \phi_N\right)$ dão

contribuições da ordem $N^{-1/2}$, subdominante em relação à ordem N^0 .

A partir das equações (4.27) e (4.28) verifica-se que o modelo apresenta duas fases:

1- Uma fase com simetria $SU(N - 1)$ na qual ϕ_N tem um valor esperado no vácuo não nulo $\langle \phi_N \rangle = \sqrt{N}v \neq 0$, o que ocorre para

$$g = \frac{4\pi}{1 + 4\pi\bar{v}v/\mu} 4\pi. \quad (4.29)$$

O valor da função β nesta fase é dado por

$$\beta(g) \equiv \mu \frac{dg}{d\mu} = \frac{(4\pi)^2 \bar{v}v}{(\mu + 4\pi\bar{v}v)^2} = g \left(1 - \frac{g}{4\pi}\right), \quad (4.30)$$

mostrando que $\beta \rightarrow 0$ para $\mu \rightarrow \infty$, o que caracteriza um ponto fixo ultravioleta para $g = 4\pi$.

2- Uma fase simétrica na qual ϕ tem uma massa induzida $m \neq 0$, porém com valor esperado no vácuo $\langle \phi \rangle = 0$, para

$$g = \frac{4\pi}{1 - |m|/\mu} 4\pi. \quad (4.31)$$

Calculando o valor da função β na fase simétrica obtemos

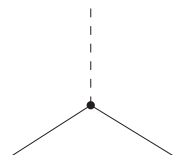
$$\beta(g) \equiv \mu \frac{dg}{d\mu} = 4\pi \frac{|m|/\mu}{(1 - |m|/\mu)^2} = g \left(1 - \frac{g}{4\pi}\right), \quad (4.32)$$

ou seja, o comportamento ultravioleta do modelo nas duas fases é o mesmo. Este resultado é o mesmo obtido na estudo do modelo comutativo correspondente, apresentado em [55].

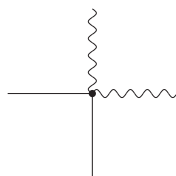
Uma vez que o comportamento ultravioleta do modelo nas duas fases é o mesmo, o trabalho que segue será feito na fase simétrica, na qual a ação do modelo se reduz a

$$\begin{aligned} S = \int d^5z \left\{ \bar{\phi}_a (D^2 - m) \phi_a - \Sigma \left(\phi_a \bar{\phi}_a + \frac{|m| N}{4\pi} \right) - \frac{1}{2} \bar{\phi}_a A^\alpha A_\alpha \phi_a + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a A_\alpha \phi_a + \bar{\phi}_a A_\alpha D^\alpha \phi_a) + \delta_\phi \bar{\phi}_a D^2 \phi_a - \frac{\delta_b}{2} \bar{\phi}_a A^\alpha A_\alpha \phi_a + \right. \\ \left. + \frac{i\delta_e}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a A_\alpha \phi_a + \bar{\phi}_a A_\alpha D^\alpha \phi_a) - \delta_c (\Sigma + m) \phi_a \bar{\phi}_a \right\}. \quad (4.33) \end{aligned}$$

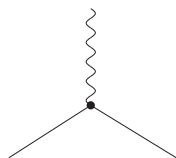
A partir da ação do modelo que será estudado as regras de Feynmann podem ser estabelecidas. Os vértices de interação são:



$$\Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a : -ie^{-ik_2 \wedge k_3} \Sigma(k_1, \theta) \phi_a(k_2, \theta) \bar{\phi}_a(k_3, \theta),$$



$$\bar{\phi}_a \star A^\alpha \star A_\alpha \star \phi_a : \frac{i}{2} \cos(k_1 \wedge k_2) e^{-ik_3 \wedge k_4} A^\alpha(k_1, \theta) A_\alpha(k_2, \theta) \phi_a(k_3, \theta) \bar{\phi}_a(k_4, \theta),$$



$$\frac{i}{2} (D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a + \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a) : \frac{1}{2} e^{-ik_2 \wedge k_3} A^\alpha(k_1, \theta) D_\alpha [\phi_a(k_2, \theta) \bar{\phi}_a(k_3, \theta)].$$

4.3 A ação efetiva da função de dois pontos do supercampo Σ

A função de dois pontos do supercampo Σ , representada na figura abaixo

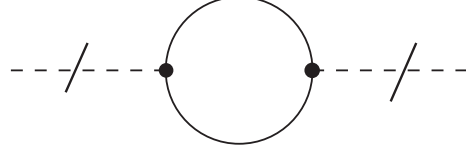


Figura 4.2: Função de dois pontos do supercampo Σ

tem sua ação efetiva escrita como

$$\Gamma_{\Sigma\Sigma} = \frac{1}{2} \langle : -i \int d^5 z_1 \Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a :: -i \int d^5 z_2 \Sigma \star \phi_b \star \bar{\phi}_b : \rangle, \quad (4.34)$$

que no espaço dos momentos é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma\Sigma} &= -\frac{1}{2} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\ &e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \langle : \Sigma(k_1, \theta_1) \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) : \\ &: \Sigma(p_1, \theta_2) \phi_a(p_2, \theta_2) \bar{\phi}_a(p_3, \theta_2) : \rangle. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Após realizar as contrações dos supercampos obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma\Sigma} &= -\frac{1}{2} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\ &e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_3) (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_2) \\ &\langle \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) \rangle \langle \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) \phi_b(p_2, \theta_2) \rangle \\ &\Sigma(k_1, \theta_1) \Sigma(p_1, \theta_2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

dando como resultado após as integrações das funções delta

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma\Sigma} &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \phi_a(-k - p, \theta_1) \bar{\phi}_b(k + p, \theta_2) \rangle \\ &\langle \bar{\phi}_a(k, \theta_1) \phi_b(-k, \theta_2) \rangle \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2). \end{aligned} \quad (4.37)$$

Substituindo a expressão do propagador do supercampo ϕ , apresentada em (4.20), obtemos

$$\Gamma_{\Sigma\Sigma} = \frac{N}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \cdot (D_1^2 + m) \delta_{12} (D_1^2 + m) \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2). \quad (4.38)$$

O caráter não local dessa ação é explicitado no fator $f(p)$, definido como

$$\begin{aligned} f(p) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]}, \\ &= -\frac{1}{4\pi\sqrt{p^2}} \arctan\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p^2}{m^2}}\right), \end{aligned} \quad (4.39)$$

com valores limites

$$\begin{aligned} -\frac{1}{8\pi m} & \quad p \rightarrow 0, \\ -\frac{1}{8|p|} & \quad p \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

O procedimento de cálculo em (4.38) consiste em, mediante integrações por partes nas coordenadas bosônicas, liberar as funções delta nas variáveis de Grassmann, reduzindo o resultado a apenas uma variável grassmanniana. Isto é feito com o auxílio das propriedades das derivadas covariantes supersimétricas apresentadas no capítulo anterior. Como os cálculos são feitos no espaço dos momentos, algumas propriedades são reescritas como segue:

$$\begin{aligned} 1 - D_\mu D_\nu \Phi(p, \theta) &= (i\partial_{\mu\nu} - C_{\mu\nu} D^2) \Phi(p, \theta) \quad \rightarrow \quad (-p_{\mu\nu} - C_{\mu\nu} D^2) \Phi(p, \theta); \\ 2 - D^2 D_\mu \Phi(p, \theta) &= i\partial_{\mu\nu} D^\nu \Phi(p, \theta) \quad \rightarrow \quad -p_{\mu\nu} D^\nu \Phi(p, \theta); \\ 3 - (D^2)^2 \Phi(p, \theta) &= \frac{1}{2} \partial_{\mu\nu} \partial^{\mu\nu} \Phi(p, \theta) \quad \rightarrow \quad -p^2 \Phi(p, \theta). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Como um exemplo para mostrar como se realiza esta álgebra, a apresentada em (4.38) é feita em detalhe:

$$\begin{aligned}
& (D_1^2 + m) \delta_{12} (D_1^2 + m) \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) = \\
&= D_1^2 \delta_{12} D_1^2 \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + m \delta_{12} D_1^2 \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + \\
&+ m D_1^2 \delta_{12} \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + m^2 \delta_{12} \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) = \\
&= \frac{1}{2} D_{\alpha 1} \delta_{12} D_1^\alpha D_1^2 \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + \frac{1}{2} D_{\alpha 1} \delta_{12} D_1^2 \delta_{12} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + \\
&+ \frac{m}{2} D_{\alpha 1} \delta_{12} D_1^\alpha \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + \frac{m}{2} D_{\alpha 1} \delta_{12} \delta_{12} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + \\
&+ m \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) = \\
&= -\frac{1}{2} \delta_{12} D_{\alpha 1} D^{\alpha 1} D_1^2 \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) - \frac{1}{2} \delta_{12} D_1^\alpha D_1^2 \delta_{12} D_{\alpha 1} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) - \\
&- \frac{1}{2} \delta_{12} D_{\alpha 1} D_1^2 \delta_{12} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) - \frac{1}{2} \delta_{12} D_1^2 \delta_{12} D_{\alpha 1} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) - \\
&- \frac{m}{2} \delta_{12} D_{\alpha 1} D_1^\alpha \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + \frac{m}{2} \delta_{12} D_1^\alpha \delta_{12} D_{\alpha 1} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) - \\
&- \frac{m}{2} \delta_{12} D_{\alpha 1} \delta_{12} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) - \frac{m}{2} \delta_{12} \delta_{12} D_{\alpha 1} D_1^\alpha \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) + \\
&+ m \delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) = \\
&= \delta_{12} (D_1^2 + 2m) \Sigma(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2). \tag{4.41}
\end{aligned}$$

O resultado final de (4.41) por uma integração por partes pode ser reescrito como $\delta_{12} \Sigma(p, \theta_1) (D_1^2 + 2m) \Sigma(-p, \theta_2)$. Efetuando uma integração em uma das variáveis de Grassmann obtemos como resultado

$$\Gamma_{\Sigma\Sigma} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \frac{1}{2} \Sigma(p, \theta) \{ N f(p) (D^2 + 2m) \} \Sigma(-p, \theta), \tag{4.42}$$

que nos mostra o surgimento de um termo cinético não local na ordem dominante $1/N$, de modo que o supercampo Σ adquire um superpropagador, dado pela inversão do núcleo de (4.42) de acordo com

$$\langle : \Sigma(p, \theta_1) :: \Sigma(-p, \theta_2) : \rangle \mathcal{O} = i, \tag{4.43}$$

onde $\mathcal{O} = N f(p) (D^2 + 2m)$, e com isso obtemos

$$\langle : \Sigma(p, \theta_1) :: \Sigma(-p, \theta_2) : \rangle = -\frac{i}{N f(p)} \frac{D^2 - 2m}{p^2 + 4m^2} \delta_{12}. \tag{4.44}$$

Com os resultados obtidos é possível obter uma generalização para o formalismo de supercampos da identidade diagramática devida a Aref'eva [32]

Uma vez que o supercampo Σ inicialmente não tem dinâmica, o superpropagador apre-

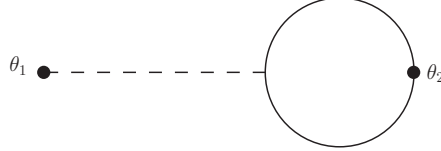


Figura 4.3:

sentado em (4.44) corresponde ao propagador completo, que se relaciona com o núcleo \mathcal{O} como $\langle : \Sigma(p, \theta_1) :: \Sigma(-p, \theta_2) : \rangle = -i/\mathcal{O}$ e portanto a identidade diagramática apresentada na figura (4.3) é dada por

$$\mathcal{O} \langle : \Sigma(p, \theta_1) :: \Sigma(-p, \theta_2) : \rangle = i\delta_{12}, \quad (4.45)$$

que corresponde à generalização da identidade de Aref'eva para o formalismo de supercampos.

4.4 A ação efetiva da função de dois pontos do supercampo espinorial de calibre A_μ

A ação efetiva Γ_{AA} do supercampo A_α tem duas contribuições, sendo a primeira proveniente do supergráfico

cujas expressão é dada por

$$\Gamma_{AA}^1 = \langle : -\frac{i}{2} \int d^5z \bar{\phi}_a \star A^\alpha \star A_\alpha \star \phi_a : \rangle, \quad (4.46)$$

que no espaço dos momentos é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^1 &= -\frac{i}{2} \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^3k_j}{(2\pi)^3} d^2\theta \langle : \bar{\phi}_a(k_1, \theta) A^\alpha(k_2, \theta) A_\alpha(k_3, \theta) \phi_a(k_4, \theta) : \rangle \\ &\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3 + k_4) + k_2 \wedge (k_3 + k_4) + k_3 \wedge k_4\}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

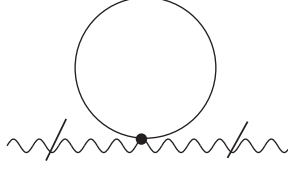


Figura 4.4: Γ_{AA}^1

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^1 &= -\frac{i}{2} \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_4) \\ &\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3 + k_4) + k_2 \wedge (k_3 + k_4) + k_3 \wedge k_4\}} \langle : \bar{\phi}_a(k_1, \theta) \phi_a(k_4, \theta) : \rangle \\ &\quad A^\alpha(k_2, \theta) A_\alpha(k_3, \theta). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Efetuando as integrações, substituindo a expressão do propagador de ϕ e renomeando as variáveis obtemos

$$\Gamma_{AA}^1 = \frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int_\varepsilon \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{C^{\alpha\beta}}{k^2 + m^2} A_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta), \quad (4.49)$$

onde ε é um regulador ultravioleta. Observe que neste resultado o fator de fase que caracteriza o produto Moyal não aparece, sendo portanto igual ao que se obtém na teoria comutativa. Por uma conveniência que ficará clara em seguida, efetuaremos a mudança de variável $k \rightarrow k + p$, de modo que o resultado final é dado por

$$\Gamma_{AA}^1 = \frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int_\varepsilon \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{C^{\alpha\beta}}{(k+p)^2 + m^2} A_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta). \quad (4.50)$$

A segunda contribuição para a ação efetiva é proveniente do termo representado pelo supergráfico

cuja expressão é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^2 &= \frac{1}{2} \langle : i \frac{i}{2} \int d^5 z_1 (D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a + \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a) : \\ &\quad : i \frac{i}{2} \int d^5 z_2 (D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b + \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b) : \rangle, \end{aligned}$$

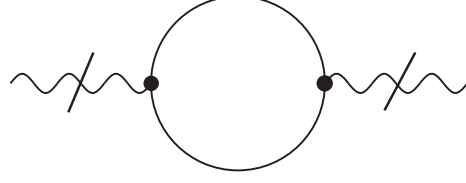


Figura 4.5: Γ_{AA}^2

dando origem às contribuições

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^2 &= \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \left\{ \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a :: D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b : \rangle + \right. \\
&+ \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a :: \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b ; \rangle + \langle : \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a :: D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b : \rangle + \\
&+ \left. \langle : \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a :: \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b : \rangle \right\} \\
&= \Gamma_{AA}^{2.1} + \Gamma_{AA}^{2.2} + \Gamma_{AA}^{2.3} + \Gamma_{AA}^{2.4}. \tag{4.51}
\end{aligned}$$

A primeira contribuição, explicitando o produto Moyal no espaço dos momentos, é dada por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{2.1} &= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) \phi_a(k_3, \theta_1) : \\
&: D^\beta \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\beta(p_2, \theta_2) \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle, \tag{4.52}
\end{aligned}$$

que, após efetuarmos as contrações dos campos, é escrito como

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_3) (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_1) \\
&\langle D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) \phi_b(p_3, \theta_2) \rangle \langle \phi_a(k_3, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \\
&A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2) \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Fazendo as integrações nas funções delta e renomeando as variáveis obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{2.1} &= -\frac{1}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \langle D^\alpha \bar{\phi}_a(-k-p, \theta_1) \phi_b(k+p, \theta_2) \rangle \\ &\quad \langle \phi_a(k, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_1).\end{aligned}\quad (4.54)$$

As expressões dos propagadores que aparecem em (4.54) são dadas por

$$\begin{aligned}\langle D^\alpha \bar{\phi}_a(-k-p, \theta_1) \phi_b(k+p, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} D_1^\alpha \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\ \langle \phi_a(k, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle &= i\delta_{ab} D_2^\beta \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12},\end{aligned}\quad (4.55)$$

onde o índice inferior $D_{1,2}$ indica em qual variável de Grassmann a derivada espinorial supersimétrica está atuando. Com os resultados acima (4.54) é dada por

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{2.1} &= \frac{N}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \\ &\quad D_1^\alpha (D_1^2 + m) \delta_{12} D_2^\beta (D_1^2 + m) \delta_{12} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2).\end{aligned}\quad (4.56)$$

Utilizando as propriedades $D_2^\beta D_1^2 \delta_{12} = D_1^\beta D_1^2 \delta_{12}$ e $D_2^\beta \delta_{12} = -D_1^\beta \delta_{12}$ obtemos

$$\begin{aligned}\Gamma_{AA}^{2.1} &= \frac{N}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \\ &\quad D_1^\alpha (D_1^2 + m) \delta_{12} D_1^\beta (D_1^2 - m) \delta_{12} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2).\end{aligned}\quad (4.57)$$

Como feito na caso da ação efetiva do supercampo Σ , faremos integrações por partes para liberar a primeira função delta das variáveis de Grassmann em (4.69), na qual o termo com as derivadas covariantes supersimétricas se decompõe em quatro, cada uma dando as contribuições

$$\begin{aligned}D_1^\alpha D_1^2 \delta_{12} D_1^\beta D_1^2 \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= \delta_{12} (-k^2 C^{\alpha\beta} + k^{\alpha\beta} D_1^2 + k^{\mu\beta} D_{\mu 1} D_1^\alpha) A_{\alpha 1} A_{\beta 2}, \\ -m D_1^\alpha D_1^2 \delta_{12} D_1^\beta \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= \delta_{12} (-m k^{\alpha\beta} - m C^{\alpha\beta} D_1^2 - m C^{\mu\beta} D_{\mu 1} D_1^\alpha) A_{\alpha 1} A_{\beta 2}, \\ m D_1^\alpha \delta_{12} D_1^\beta D_1^2 \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= \delta_{12} m k^{\alpha\beta} A_{\alpha 1} A_{\beta 2}, \\ -m^2 D_1^\alpha \delta_{12} D_1^\beta \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= -\delta_{12} m^2 C^{\alpha\beta} A_{\alpha 1} A_{\beta 2},\end{aligned}\quad (4.58)$$

onde foram adotadas as notações simplificadas $A_{\alpha 1} = A_\alpha(p, \theta_1)$ e $A_{\beta 2} = A_\beta(-p, \theta_2)$. Somando as contribuições acima e integrando em uma das variáveis de Grassmann obtemos

$$\Gamma_{AA}^{2.1} = \frac{N}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \left\{ -(k^2 + m^2) C^{\alpha\beta} + (k^{\alpha\beta} - m C^{\alpha\beta}) D_1^2 + (k^{\mu\beta} - m C^{\mu\beta}) D_{1\mu} D_1^\alpha \right\} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2). \quad (4.59)$$

O segundo termo $\Gamma_{AA}^{2.2}$ é dado por

$$\Gamma_{AA}^{2.2} = \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) \phi_a(k_3, \theta_1) : \rangle : \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\beta(p_2, \theta_2) D^\beta \phi_b(p_3, \theta_2) \rangle, \quad (4.60)$$

$$= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_1) (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_3) \langle \phi_a(k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \langle D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) D^\beta \phi_b(p_3, \theta_2) \rangle A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2), \quad (4.61)$$

$$= \frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \phi_a(-k-p, \theta_1) \bar{\phi}_b(k+p, \theta_2) \rangle \langle D^\alpha \bar{\phi}_a(k, \theta_1) D^\beta \phi_b(-k, \theta_2) \rangle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_1). \quad (4.62)$$

Os superpropagadores são dados por

$$\begin{aligned} \langle \phi_a(-k-p, \theta_1) \bar{\phi}_b(k+p, \theta_2) \rangle &= -i \delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\ \langle D^\alpha \bar{\phi}_a(k, \theta_1) D^\beta \phi_b(-k, \theta_2) \rangle &= -i \delta_{ab} D_1^\alpha D_2^\beta \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12}, \\ &= -i \delta_{ab} D_1^\alpha D_1^\beta \frac{D_1^2 - m}{k^2 + m^2} \delta_{12}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Substituindo as expressões acima obtemos

$$\Gamma_{AA}^{2.2} = -\frac{N}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} (D_1^2 + m) \delta_{12} D_1^\alpha D_1^\beta (D_1^2 - m) \delta_{12} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2). \quad (4.64)$$

Integrando por partes nas coordenadas bosônicas e aplicando a álgebra dos operadores supersimétricos chegamos a

$$\begin{aligned}
D_1^2 \delta_{12} D_1^\alpha D_1^\beta D_1^2 \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= \delta_{12} (k^2 C^{\alpha\beta} - k^{\alpha\beta} D_1^2) A_{\alpha 1} A_{\beta 2}, \\
-m D_1^2 \delta_{12} D_1^\alpha D_1^\beta \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= \delta_{12} (m k^{\alpha\beta} + m C^{\alpha\beta} D_1^2) A_{\alpha 1} A_{\beta 2} \\
m \delta_{12} D_1^\alpha D_1^\beta D_1^2 \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= -\delta_{12} m k^{\alpha\beta} A_{\alpha 1} A_{\beta 2}, \\
-m^2 \delta_{12} D_1^\alpha D_1^\beta \delta_{12} A_{\alpha 1} A_{\beta 2} &= \delta_{12} m^2 C^{\alpha\beta} A_{\alpha 1} A_{\beta 2}.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Somando as contribuições acima e substituindo em (4.64) obtemos, após a integração em uma das variáveis de Grassmann

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{2.2} &= -\frac{N}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} \\
&\quad \left\{ (k^2 + m^2) C^{\alpha\beta} - (k^{\alpha\beta} - m C^{\alpha\beta} D^2) \right\} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2).
\end{aligned} \tag{4.66}$$

O termo $\Gamma_{AA}^{2.3}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{2.3} &= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \langle : \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) : \\
&\quad : D^\beta \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\beta(p_2, \theta_2) \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle,
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_3) (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_1) \\
&\quad \langle \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) \phi_b(p_3, \theta_2) \rangle \langle D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \\
&\quad A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2),
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \bar{\phi}_a(-k-p, \theta_1) \phi_b(k+p, \theta_2) \rangle \\
&\quad \langle D^\alpha \phi_a(k, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_1).
\end{aligned} \tag{4.69}$$

As expressões dos superpropagadores são dadas por

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\phi}_a(-k-p, \theta_1) \phi_b(k+p, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\
\langle D^\alpha \phi_a(k, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} D_1^\alpha D_2^\beta \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12}, \\
&= -i\delta_{ab} D_1^\alpha D_1^\beta \frac{D_1^2 - m}{k^2 + m^2} \delta_{12}. \tag{4.70}
\end{aligned}$$

Como se observa, a expressão de $\Gamma_{AA}^{2,3}$ é idêntica à de $\Gamma_{AA}^{2,2}$, e portanto

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{2,3} &= -\frac{N}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2] [k^2 + m^2]} \\
&\quad \left\{ (k^2 + m^2) C^{\alpha\beta} - (k^{\alpha\beta} - m C^{\alpha\beta} D^2) \right\} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2). \tag{4.71}
\end{aligned}$$

O último termo $\Gamma_{AA}^{2,4}$ é dado por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{AA}^{2,4} &= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \langle: \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) : \\
&\quad : \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\beta(p_2, \theta_2) D^\beta \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle, \tag{4.72} \\
&= -\frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_1) (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_3) \\
&\quad \langle D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \langle \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) D^\beta \phi_b(p_3, \theta_2) \rangle \\
&\quad A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2), \\
&= -\frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle D^\alpha \phi_a(-k-p, \theta_1) \bar{\phi}_b(k+p, \theta_2) \rangle \\
&\quad \langle \bar{\phi}_a(k, \theta_1) D^\beta \phi_b(-k, \theta_2) \rangle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_1). \tag{4.73}
\end{aligned}$$

Os superpropagadores são dados por

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha \phi_a(-k-p, \theta_1) \bar{\phi}_b(k+p, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} D_1^\alpha \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\
\langle \bar{\phi}_a(k, \theta_1) D^\beta \phi_b(-k, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} D_2^\beta \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12}, \\
&= -i\delta_{ab} D_1^\beta \frac{D_1^2 - m}{k^2 + m^2} \delta_{12}. \tag{4.74}
\end{aligned}$$

Novamente se verifica que o termo $\Gamma_{AA}^{2,4}$ é idêntico ao termo $\Gamma_{AA}^{2,1}$, e portanto seu resultado final é

$$\Gamma_{AA}^2 = \frac{N}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \left\{ -(k^2 + m^2) C^{\alpha\beta} + (k^{\alpha\beta} - mC^{\alpha\beta}) D_1^2 + (k^{\mu\beta} - mC^{\mu\beta}) D_{1\mu} D_1^\alpha \right\} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2). \quad (4.75)$$

Somando as quatro contribuições obtemos

$$\Gamma_{AA}^2 = -\frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int_\epsilon \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{C^{\alpha\beta}}{[(k+p)^2 + m^2]} + \frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \left\{ (k^{\alpha\beta} - mC^{\alpha\beta}) D^2 + \frac{1}{2} (k^{\mu\beta} - mC^{\mu\beta}) D_\mu D^\alpha \right\} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2). \quad (4.76)$$

Com os resultados obtidos a ação efetiva da função de dois pontos do supercampo espinorial de calibre A_μ na aproximação $1/N$ é dada pela soma de Γ_{AA}^1 (4.50) e Γ_{AA}^2 (4.76)

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA} &= \frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int_\epsilon \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{C^{\alpha\beta}}{(k+p)^2 + m^2} A_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) - \\ &- \frac{N}{2} \int_\epsilon \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{C^{\alpha\beta}}{[(k+p)^2 + m^2]} A_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) + \\ &+ \frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \left\{ (k^{\alpha\beta} - mC^{\alpha\beta}) D^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (k^{\mu\beta} - mC^{\mu\beta}) D_\mu D^\alpha \right\} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2), \\ &= \frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} \left\{ (k^{\alpha\beta} - mC^{\alpha\beta}) D^2 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2} (k^{\mu\beta} - mC^{\mu\beta}) D_\mu D^\alpha \right\} A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2). \end{aligned} \quad (4.77)$$

A partir desse resultado duas observações devem ser feitas. A primeira delas é que as divergências lineares presentes em $\Gamma_{AA}^{2,1}$ e Γ_{AA}^2 se cancelam, de forma que a ação efetiva Γ_{AA}^2 apresenta neste ponto do trabalho no máximo uma divergência logarítmica. A segunda observação é a ausência do fator de fase que caracteriza uma teoria não comutativa, ou

seja, o resultado obtido é igual ao de uma teoria comutativa. A ação apresentada em (4.77) pode ser reescrita como

$$\Gamma_{AA}^2 = \frac{N}{2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} (k^{\alpha\beta} - mC^{\alpha\beta}) \left(D^2 A_\alpha(p, \theta) + \frac{1}{2} D_\alpha D^\gamma A_\gamma(p, \theta) \right) A_\beta(-p, \theta). \quad (4.78)$$

Aplicando a identidade

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{k^{\alpha\beta}}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]} = -\frac{p^{\alpha\beta}}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{[(k+p)^2 + m^2][k^2 + m^2]}, \quad (4.79)$$

obtemos

$$\Gamma_{AA}^2 = -\frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) (p^{\alpha\beta} + 2mC^{\alpha\beta}) \left\{ D^2 A_\alpha(p, \theta) + \frac{1}{2} D_\alpha D^\gamma A_\gamma(p, \theta) \right\} A_\beta(-p, \theta), \quad (4.80)$$

onde $f(p)$ foi definido em (4.39), o qual explicita o caráter não local da ação. O super-campo espinorial W_α , como definido em (2.75), é aqui reescrito

$$W^\alpha(p, \theta) = \frac{1}{2} D^\gamma D^\alpha A_\gamma(p, \theta), \quad (4.81)$$

o qual, aplicando a relação apresentada em (2.47) é reescrito como

$$W^\alpha(p, \theta) = D^2 A^\alpha(p, \theta) + \frac{1}{2} D^\alpha D^\gamma A_\gamma(p, \theta), \quad (4.82)$$

e sendo assim Γ_{AA}^2 é dado por

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^2 &= -\frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) (p^{\alpha\beta} + 2mC^{\alpha\beta}) W_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta), \\ &= -\frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) [p^{\alpha\beta} W_\alpha(p, \theta) A_\beta(-p, \theta) + 2mW_\alpha(p, \theta) A^\alpha(-p, \theta)] \end{aligned} \quad (4.83)$$

A partir da definição de W_α , aplicando (2.51) é imediato que

$$D^\alpha W_\alpha = 0, \quad (4.84)$$

e sendo assim

$$D^\beta D^\alpha W_\alpha = 0 \rightarrow p^{\beta\alpha} W_\alpha = -D^2 W^\beta. \quad (4.85)$$

Desta forma Γ_{AA}^2 é reescrito como

$$\Gamma_{AA}^2 = \frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) (D^2 + 2m) W^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta). \quad (4.86)$$

Integrando por partes o primeiro termo da expressão acima e aplicando (4.82) podemos escrever

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^2 &= \frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) \left\{ W^\alpha(p, \theta) W_\alpha(-p, \theta) - \frac{1}{2} W^\alpha(p, \theta) D_\alpha D^\gamma A_\gamma(-p, \theta) + \right. \\ &\quad \left. + 2m W^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) \right\}, \\ &= \frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) \left\{ W^\alpha(p, \theta) W_\alpha(-p, \theta) - \frac{1}{2} D_\alpha W^\alpha(p, \theta) D^\gamma A_\gamma(-p, \theta) + \right. \\ &\quad \left. + 2m W^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) \right\}, \\ &= \frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) \left\{ W^\alpha(p, \theta) W_\alpha(-p, \theta) + 2m W^\alpha(p, \theta) A_\alpha(-p, \theta) \right\}, \end{aligned} \quad (4.87)$$

mostrando que Γ_{AA}^2 pode ser escrita em função dos termos não locais de Maxwell e Chern-Simons induzidos. O limite local obtido pela aproximação $f(p) \simeq f(0) = -1/8\pi m$ fornece para o coeficiente de Chern-Simons induzido o valor $N/16\pi$.

O propagador do supercampo A^α , a partir de (4.86) reescrito como

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^2 &= \frac{N}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) W^\beta(p, \theta) (D^2 + 2m) A_\beta(-p, \theta), \\ &= -\frac{N}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta f(p) A_\alpha(p, \theta) (D^\beta D^\alpha D^2 + 2m) A_\beta(-p, \theta), \end{aligned} \quad (4.88)$$

pode ser determinado a partir de uma fixação de calibre. Uma escolha freqüente é o calibre de Wess-Zumino, no qual as componentes $\chi_\beta(x)$ e $B(x)$ do supercampo A_β , definidas em (2.65), são iguais a zero. Esta escolha simplifica em muito os cálculos em termos das componentes do supercampo, no entanto a quebra explícita da supersimetria leva a outras dificuldades, além de ser inadequada na abordagem deste trabalho, pois os cálculos

estão sendo feitos a partir dos supercampos e não em termos de suas componentes. Sendo assim, será adotado um termo de fixação de calibre não local covariante dado por

$$\begin{aligned} S_{FC} &= \frac{N}{8\xi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) D^\alpha A_\alpha(p, \theta) D^2 D^\beta A_\beta(-p, \theta), \\ &= -\frac{N}{8\xi} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) A_\alpha(p, \theta) (D^\alpha D^\beta D^2) A_\beta(-p, \theta). \end{aligned} \quad (4.89)$$

Somando (4.89) e (4.88) a ação efetiva, quadrática em A^α , é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{AA}^2 &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \frac{1}{2} A_\alpha(p, \theta) \left\{ -\frac{Nf(p)}{4} \{D^\beta D^\alpha (D^2 + 2m) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\xi} D^\alpha D^\beta D^2\} \right\} A_\beta(-p, \theta), \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \frac{1}{2} A_\alpha \mathcal{O}^{\alpha\beta} A_\beta \end{aligned} \quad (4.90)$$

O propagador de A^α pode ser determinado a partir da inversão do núcleo $\mathcal{O}^{\alpha\beta}$ de (4.90) de acordo com

$$\mathcal{O}^{\alpha\beta} \Delta_{\beta\gamma} = i\delta_\gamma^\alpha. \quad (4.91)$$

Supondo que o propagador $\Delta_{\beta\gamma}$ tem uma estrutura dada por

$$\Delta_{\beta\gamma} = AD_\beta D_\gamma + BD_\gamma D_\beta, \quad (4.92)$$

obtemos

$$\begin{aligned} p^\alpha_\gamma \left[\frac{2p^2}{\xi} A + (-2p^2 + 4mD^2) B \right] + \delta_\gamma^\alpha \left[\frac{2p^2}{\xi} D^2 A + (D^2 D^\beta D^2 D_\beta + 2mD^\beta D^2 D_\beta) B \right] = \\ = \frac{4i}{Nf(p)} \delta_\gamma^\alpha, \end{aligned} \quad (4.93)$$

de onde tiramos os valores de A e B:

$$\begin{aligned} A &= \frac{i}{Nf(p)} \frac{\xi D^2}{p^4}, \\ B &= \frac{i}{Nf(p)} \frac{D^2 - 2m}{p^2 (p^2 + 4m^2)}, \end{aligned} \quad (4.94)$$

e portanto o propagador do supercampo A^α é dado por

$$\langle A^\alpha(p, \theta_1) A^\beta(-p, \theta_2) \rangle = \frac{i}{Nf(p)} \left(\frac{(D^2 - 2m) D^\beta D^\alpha}{p^2 (p^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D^2 D^\alpha D^\beta}{p^4} \right) \delta_{12}. \quad (4.95)$$

Devido à introdução do termo de fixação de calibre S_{FC} definido em (4.89) é necessário adicionar na ação do modelo um termo correspondente aos campos fantasmas de Faddev-Popov induzidos pela fixação de calibre. A partir da transformação do supercampo de calibre A_α apresentada em (4.7) e da ação de fixação de calibre a ação de Faddev-Popov é dada por

$$S_{FP} = -\frac{N}{8} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta f(p) (c' D^2 c - i c' D^\alpha [A_\alpha, c]_*), \quad (4.96)$$

e, mediante a inversão da parte quadrática da ação, o propagador dos campos fantasma é dado por

$$\langle c'(p, \theta_1) c(-p, \theta_2) \rangle = -i \frac{4}{Nf(p)} \frac{D^2}{p^2} \delta_{12}. \quad (4.97)$$

As contribuições dos campos fantasma surgem, por exemplo, no diagrama

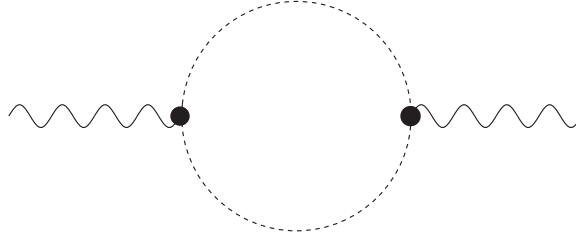


Figura 4.6: Diagrama que envolve o campo fantasma

com os campos fantasma representados por linhas pontilhadas, os quais passam a contribuir a partir da ordem $1/N^2$, ou seja, acima da ordem que está sendo considerada neste trabalho.

4.5 A mistura entre os supercampos Σ e A^α

Na expansão da ação do modelo que está sendo estudado aparecem termos de mistura entre os supercampos A_μ e Σ , provenientes dos vértices $-\Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a$ e $i/2(D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a + \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a)$, dando origem a duas contribuições. A primeira delas é representada pelo supergráfico abaixo,

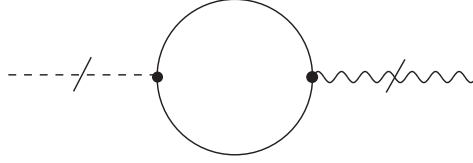


Figura 4.7: $\Gamma_{\Sigma A}$

cuja expressão analítica é

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma A} &= \frac{1}{2} \langle : -i \int d^5 z_1 \Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a :: i \frac{i}{2} \int d^5 z_2 (D^\alpha \bar{\phi}_b \star A_\alpha \star \phi_b + \bar{\phi}_b \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_b) : \rangle, \\ &= \frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\ &\langle : \Sigma(k_1, \theta_1) \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) :: D^\alpha \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\alpha(p_2, \theta_2) \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle \\ &e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} + \end{aligned} \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\ &\langle : \Sigma(k_1, \theta_1) \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) :: \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\alpha(p_2, \theta_2) D^\alpha \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle \\ &e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}}. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Efetuando as contrações dos supercampos chegamos em

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Sigma A} &= \frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\ &e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_3) (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_1) \\ &\langle \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) \phi_b(p_3, \theta_2) \rangle \langle \phi_a(k_2, \theta_1) D^\alpha \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \\ &\Sigma(k_1, \theta_1) A_\alpha(p_2, \theta_2) - \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
& e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_3) (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_1) \quad (4.101) \\
& \langle \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \langle \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) D^\alpha \phi_b(p_1, \theta_2) \rangle \\
& \Sigma(k_1, \theta_1) A_\alpha(p_2, \theta_2).
\end{aligned}$$

Fazendo as integrações e renomeando as variáveis obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\Sigma A} &= \frac{i}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \bar{\phi}_a(-p - k, \theta_1) \phi_b(p + k, \theta_2) \rangle \\
& \langle \phi_a(k, \theta_1) D^\alpha \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle \Sigma(p, \theta_1) A_\alpha(-p, \theta_2) - \quad (4.102)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{i}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \phi_a(-p - k, \theta_1) \bar{\phi}_b(p + k, \theta_2) \rangle \\
& \langle \bar{\phi}_a(k, \theta_1) D^\alpha \phi_b(-k, \theta_2) \rangle \Sigma(p, \theta_1) A_\alpha(-p, \theta_2). \quad (4.103)
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\langle \bar{\phi}_a(-p - k, \theta_1) \phi_b(p + k, \theta_2) \rangle &= \langle \phi_a(-p - k, \theta_1) \bar{\phi}_b(p + k, \theta_2) \rangle \\
&= -i \delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{(k + p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\
\langle \phi_a(k, \theta_1) D^\alpha \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle &= \langle \bar{\phi}_a(k, \theta_1) D^\alpha \phi_b(-k, \theta_2) \rangle \\
&= -i \delta_{ab} D_1^\alpha \frac{D_1^2 - m}{k^2 + m^2} \delta_{12} \quad (4.104)
\end{aligned}$$

os termos (4.102) e (4.103) de $\Gamma_{\Sigma A}$ se cancelam.

A segunda contribuição é proveniente do supergráfico

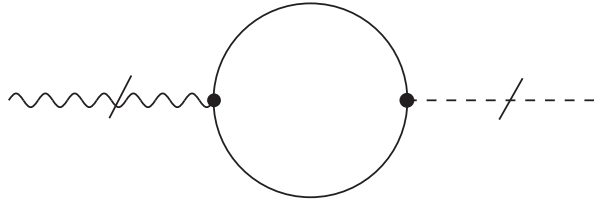


Figura 4.8: $\Gamma_{A\Sigma}$

cuja expressão é dada por

$$\begin{aligned}
\Gamma_{A\Sigma} &= \frac{1}{2} \langle : i \frac{i}{2} \int d^5 z_1 (D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a + \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a) :: -i \int d^5 z_2 \Sigma \star \phi_b \star \bar{\phi}_b : \rangle, \\
&= \frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) \phi_a(k_3, \theta_1) :: \Sigma(p_1, \theta_2) \phi_b(p_2, \theta_2) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) : \rangle \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} + \tag{4.105}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad \langle : \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) :: \Sigma(p_1, \theta_2) \phi_b(p_2, \theta_2) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) : \rangle \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}}. \tag{4.106}
\end{aligned}$$

Após a contração dos supercampos obtemos a expressão com os superpropagadores e os campos externos, tendo como resultado

$$\begin{aligned}
\Gamma_{A\Sigma} &= \frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_3) (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_2) \\
&\quad \langle \phi_a(k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) \rangle \langle D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) \phi_b(p_2, \theta_2) \rangle \\
&\quad A_\alpha(k_2, \theta_1) \Sigma(p_1, \theta_2) - \tag{4.107}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&- \frac{i}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_3) (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_2) \\
&\quad \langle \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) \phi_b(p_2, \theta_2) \rangle \langle D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) \rangle \\
&\quad A_\alpha(k_2, \theta_1) \Sigma(p_1, \theta_2). \tag{4.108}
\end{aligned}$$

Fazendo as integrações nas variáveis das funções delta e renomeando as mesmas obtemos

$$\Gamma_{A\Sigma} = \frac{i}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \langle \phi_a(-p-k, \theta_1) \bar{\phi}_b(p+k, \theta_2) \rangle \langle D^\alpha \bar{\phi}_a(k, \theta_1) \phi_b(-k, \theta_2) \rangle A_\alpha(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) - \quad (4.109)$$

$$-\frac{i}{4} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \langle \bar{\phi}_a(-p-k, \theta_1) \phi_b(p+k, \theta_2) \rangle \langle D^\alpha \phi_a(k, \theta_1) \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle \Sigma(p, \theta_1) A_\alpha(-p, \theta_2). \quad (4.110)$$

Os propagadores em (4.109 e (4.110) são dados por

$$\begin{aligned} \langle \phi_a(-p-k, \theta_1) \bar{\phi}_b(p+k, \theta_2) \rangle &= \langle \bar{\phi}_a(-p-k, \theta_1) \phi_b(p+k, \theta_2) \rangle \\ &= -i\delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\ \langle D^\alpha \bar{\phi}_a(k, \theta_1) \phi_b(-k, \theta_2) \rangle &= \langle D^\alpha \phi_a(k, \theta_1) \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle \\ &= -i\delta_{ab} D_1^\alpha \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12}, \end{aligned} \quad (4.111)$$

que acarreta no cancelamento dos termos, da mesma forma que ocorreu com a contribuição $\Gamma_{\Sigma A}$.

Desta forma verificou-se que no modelo estudado não ocorre a mistura entre os supercampos Σ e A^α , e além disso observamos a ausência do fator de fase típico das teorias não comutativas, ou seja, o resultado é igual ao de uma teoria comutativa. Se no modelo fosse adotado um termo de vínculo dado por $\Sigma \star (\bar{\phi}_a \star \phi_a - N/g)$ não ocorreria o cancelamento e o modelo teria um propagador misto $\langle A_\alpha(p, \theta_1) \Sigma(-p, \theta_2) \rangle$ com um fator de fase, o qual passaria a produzir termos não planares e, podemos dizer, teríamos outro modelo.

4.6 Estudo da renormalizabilidade do modelo

Vamos nesta seção investigar a renormalizabilidade do modelo que está sendo estudado na ordem dominante $1/N$. Para tanto, iniciaremos com a apresentação dos elementos que permitem determinar o grau de divergência superficial ω dos supergráficos de Feynman do modelo.

Para um supergráfico arbitrário γ , definiremos para os vértices de interação :

V_1 : número de vértices do tipo $D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a + \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D_\alpha \phi_a$;

V_2 : número de vértices do tipo $\bar{\phi}_a \star A^\alpha \star A_\alpha \star \phi_a$;

V_3 : número de vértices do tipo $\Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a$;

V_c : número de vértices do tipo $c' \star D^\beta [A_\beta, c]_\star$.

Para os propagadores dos supercampos denotaremos:

P_ϕ : número de propagadores do supercampo escalar $\langle \bar{\phi}_a \phi_a \rangle \sim D^2/k^2$;

P_A : número de propagadores do supercampo espinorial $\langle A^\alpha A^\beta \rangle \sim D^2/k^2$,

P_Σ : número de propagadores do supercampo de vínculo $\langle \Sigma \Sigma \rangle \sim D^2/k$,

P_c : número de propagadores do supercampo fantasma $\langle c' c \rangle \sim D^2/k$,

No cálculo do grau de divergência superficial ω temos associado para cada laço um fator 3 devido à integração d^3k e um fator -1 pela contração no espaço de Grassmann a um ponto (a aplicação da propriedade $\delta_{12} D^2 \delta_{12} = \delta_{12}$ retira do numerador um operador D^2 , que corresponde a uma potência linear no momento). Os propagadores dos supercampos A_α e ϕ contribuem com uma potência -1 no momento, enquanto que o vértice V_1 contribui com o fator $1/2$ e o vértice V_c fornece o fator $-1/2$. Denominando L o número de laços do supergráfico γ , o grau de divergência superficial do mesmo é

$$\omega = 2L - P_\phi - P_A + \frac{1}{2}V_1 - \frac{1}{2}V_c. \quad (4.112)$$

Aplicando a identidade topológica de Euler $L + V - P = 1$ obtemos

$$\omega = 2 + P_\phi + P_A + 2(P_\Sigma + P_c) - \frac{3}{2}V_1 - 2(V_2 + V_3) - \frac{5}{2}V_c. \quad (4.113)$$

Para um supergráfico arbitrário γ , o número de propagadores P_i pode ser expresso em termos do número de campos N_i e do número de linhas externas E_i pela identidade topológica

$$P_i = \frac{1}{2}(N_i - E_i). \quad (4.114)$$

Outra relação é que o número total de campos num supergráfico é dado pela soma de campos que chegam num dado vértice. Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} N_\phi &= 2(V_1 + V_2 + V_3) \quad ; \quad N_A = V_1 + 2V_2 + V_c, \\ N_\Sigma &= V_3 \quad ; \quad N_c = 2V_c. \end{aligned} \quad (4.115)$$

Aplicando (4.114) e (4.115) em (4.113) obtemos

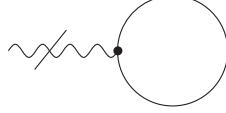
$$\omega = 2 - \frac{1}{2}(E_\phi + E_A + N_D) - E_\Sigma - E_c, \quad (4.116)$$

onde N_D é o número de derivadas covariantes atuando nas linhas externas. Para termos uma contribuição isoescalar para a ação efetiva, estas variáveis estão sujeitas aos vínculos em que E_ϕ e $E_A + N_D$ são números pares.

A partir da equação (4.116) vemos que, independentemente dos diagramas de vácuo, as correções quânticas para a ação efetiva com maior divergência são linearmente divergentes no limite ultravioleta, que podem ser nocivas para a renormalizabilidade do modelo, uma vez que elas podem gerar singularidades lineares ultravioletas/infravermelhas (UV/IV) não integráveis. É essencial assegurar que singularidades lineares UV/IV não apareçam, uma vez que elas poderiam invalidar a expansão $1/N$ em ordens maiores [56].

Alguns dos supergráficos com $\omega = 1$ foram analisados nesta tese e não apresentaram divergências lineares nocivas : o supergráfico correspondente à ação efetiva do supercampo espinorial A_α ($E_A = 2$), calculado na seção 4.4, e o supergráfico da equação de gap do

supercampo de vínculo Σ , no qual $E_\Sigma = 1$. A única contribuição remanescente com $\omega = 1$ é proveniente do supergráfico



no qual $E_A = 1$ e $N_D = 1$; no entanto, a contribuição deste supergráfico é nula, pois ele é proporcional a

$$\Gamma_A \sim \int d^2\theta_1 D^\alpha (D^2 + 2m) \delta_{11} = 0. \quad (4.117)$$

Uma vez que na ação S_{CT} não tem um contratermo correspondente, o fato desta contribuição ser finita é essencial para a renormalizabilidade do modelo.

Vamos agora focar nossa atenção nos supergráficos com contagem de potências logarítmica. Eles geram singularidades infravermelhas UV/IV integráveis, em princípio inofensivas. No entanto, alguns destes supergráficos ainda podem apresentar contribuições com divergência ultravioleta para a ação efetiva, sem que hajam contratermos na ação S_{CT} para fazer o cancelamento das mesmas. Analisando os supergráficos com $\omega = 0$, vários deles são potencialmente divergentes. A ação efetiva da função de dois pontos do supercampo Σ , apresentada na seção 4.3, tem $E_\Sigma = 2$, no entanto no nosso estudo ela se mostrou finita. Na sessão 4.5 estudamos a mistura entre os supercampos A_α e Σ , cujo supergráfico tem $E_A = 1$, $E_\Sigma = 1$ e $N_D = 1$, porém a contribuição do mesmo é nula.

Ainda permanecem algumas possibilidades nocivas, tais como supergráficos com $E_A =$, $E_\phi = 4$, $E_A = 2$ e $E_\Sigma = 1$, $E_A = 3$ e $N_D = 1$, porém após verificarmos que o fator de fase induzido pelo produto Moyal é planar em todos estes casos, podemos considerar que as partes logaritmicamente divergentes das integrais de Feynman serão proporcionais a

$$\mathcal{I}_{feynman} \sim \int_\varepsilon d^3k \frac{k^{\alpha\beta}}{(k^2)^2}, \quad (4.118)$$

que se anula com a integração simétrica no momento do laço.

Como para os supergráficos remanescentes temos contratermos na ação S_{CT} , o modelo é, em princípio, renormalizável. Uma verificação explícita da renormalizabilidade do modelo estudado nesta tese envolveria o cálculo das correções subdominantes de diversas funções de vértice, e um exemplo deste cálculo é apresentado a seguir.

4.7 Correções subdominantes da ação efetiva da função de dois pontos do supercampo ϕ

No modelo que está sendo estudado, um resultado muito interessante, apresentado nas seções 4.3 e 4.4, é que os supercampos A_α e Σ adquirem a partir das correções radiativas na ordem $1/N$ uma dinâmica, pois para os mesmos foram construídos os seus propagadores. Como consequência, é possível calcular as correções radiativas do supercampo ϕ . Apresentamos a seguir o cálculo da ação efetiva da função de dois pontos deste supercampo ($\Gamma_{\phi\phi}$). A partir dos vértices de interação do modelo podemos identificar três contribuições para a ação efetiva.

A primeira contribuição, oriunda do vértice $-\Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a$, é representada pelo supergráfico abaixo.

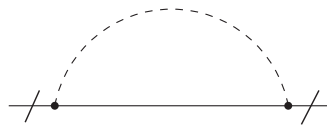


Figura 4.9: $\Gamma_{\phi\phi}^1$

A expressão analítica de $\Gamma_{\phi\phi}^1$ é

$$\Gamma_{\phi\phi}^1 = \frac{1}{2} \langle : -i \int d^5 z_1 \Sigma \star \phi_a \star \bar{\phi}_a :: -i \int d^5 z_2 \Sigma \star \phi_b \star \bar{\phi}_b : \rangle, \quad (4.119)$$

que no espaço dos momentos, explicitando o produto Moyal, é reescrita como

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) \\
&\quad \langle : \Sigma(k_1, \theta_1) \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) :: \Sigma(p_1, \theta_2) \phi_b(p_2, \theta_2) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) : \rangle \\
&\quad e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} .
\end{aligned} \tag{4.120}$$

Uma vez que a contração entre os campos ϕ pode ser feita de duas maneiras, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^1 &= -\frac{1}{2} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_1) \langle \Sigma(k_1, \theta_1) \Sigma(p_1, \theta_2) \rangle \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_3) \langle \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) \rangle \\
&\quad \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) \phi_b(p_2, \theta_2) -
\end{aligned} \tag{4.121}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_1) \langle \Sigma(k_1, \theta_1) \Sigma(p_1, \theta_2) \rangle \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_2) \langle \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) \phi_b(p_2, \theta_2) \rangle \\
&\quad \phi_a(k_2, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) .
\end{aligned} \tag{4.122}$$

Renomeando as variáveis em (4.122) $a \leftrightarrow b$, $\theta_1 \leftrightarrow \theta_2$ e $k \leftrightarrow p$ verificamos que os dois termos de $\Gamma_{\phi\phi}^1$ são idênticos. Após procedermos às integrações utilizando as funções delta e renomeando as variáveis obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^1 &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \Sigma(-k - p, \theta_1) \Sigma(k + p, \theta_2) \rangle \\
&\quad \langle \phi_a(k, \theta_1) \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_b(-p, \theta_2) .
\end{aligned} \tag{4.123}$$

As expressões dos propagadores em (4.123) são dadas por

$$\begin{aligned}
\langle \Sigma(-k-p, \theta_1) \Sigma(k+p, \theta_2) \rangle &= -\frac{i}{Nf(-p-k)} \frac{D_1^2 - 2m}{(k+p)^2 + 4m^2} \delta_{12}, \\
&= \frac{i}{Nf(p+k)} \frac{D_1^2 - 2m}{(k+p)^2 + 4m^2} \delta_{12}, \\
\langle \phi_a(k, \theta_1) \bar{\phi}_b(-k, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{k^2 + m^2} \delta_{12},
\end{aligned} \tag{4.124}$$

e, portanto, obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^1 &= -\frac{1}{N} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta_1 d^2\theta_2 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k+p) [(k+p)^2 + 4m^2] [k^2 + m^2]} \\
&\quad (D_1^2 - 2m) \delta_{12} (D_1^2 + m) \delta_{12} \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_a(-p, \theta_2).
\end{aligned} \tag{4.125}$$

Integrando por partes e aplicando as propriedades da derivada covariante supersimétrica, após integrarmos em uma das variáveis de Grassmann, obtemos

$$\Gamma_{\phi\phi}^1 = \frac{1}{N} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\bar{\phi}_a(p, \theta) (D^2 - m) \phi_a(-p, \theta)}{f(k+p) [(k+p)^2 + 4m^2] [k^2 + m^2]}. \tag{4.126}$$

Por uma contagem de potência, este termo tem uma divergência logarítmica.

A segunda contribuição, proveniente do vértice $-1/2\bar{\phi}_a \star A^\alpha \star A_\alpha \star \phi_a$, é representada pelo supergráfico

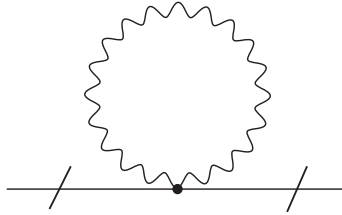


Figura 4.10: $\Gamma_{\phi\phi}^2$

cuja expressão é dada por

$$\Gamma_{\phi\phi}^2 = \langle : -\frac{i}{2} \int d^5z \bar{\phi}_a \star A^\alpha \star A_\alpha \star \phi_a : \rangle. \tag{4.127}$$

Como no cálculo anterior, no espaço dos momentos $\Gamma_{\phi\phi}^2$ é reescrita como

$$\Gamma_{\phi\phi}^2 = \langle : -\frac{i}{2} \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3 + k_4) + k_2 \wedge (k_3 + k_4) + k_3 \wedge k_4\}} (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \langle : \bar{\phi}_a(k_1, \theta) A^\alpha(k_2, \theta) :: A_\alpha(k_3, \theta) \phi_a(k_4, \theta) : \rangle, \rangle$$

que com a contração entre os campos de calibre tem como resultado

$$\begin{aligned} &= -\frac{i}{2} C^{\alpha\beta} \int \prod_{j=1}^4 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3 + k_4) + k_2 \wedge (k_3 + k_4) + k_3 \wedge k_4\}} \\ &\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + k_3) \langle A_\beta(k_2, \theta) A_\alpha(k_3, \theta) \rangle \\ &\quad \bar{\phi}_a(k_1, \theta) \phi_a(k_4, \theta). \end{aligned} \quad (4.128)$$

Efetuada as integrações nas variáveis das funções delta e renomeando as variáveis chegamos à expressão

$$\Gamma_{\phi\phi}^2 = -\frac{i}{2} C^{\alpha\beta} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta \langle : A_\beta(k, \theta) A_\alpha(-k, \theta) : \rangle \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta). \quad (4.129)$$

O propagador do campo espinorial de calibre A_α apresentado em (4.95), mediante a aplicação das propriedades da derivada covariante supersimétrica, pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha(p, \theta_1) A_\beta(-p, \theta_2) \rangle &= \frac{i}{N f(p)} \left\{ -\frac{2m p_{\alpha\beta}}{p^2(p^2 + 4m^2)} - \left(\frac{1}{p^2 + 4m^2} - \frac{\xi}{p^2} \right) C_{\alpha\beta} - \right. \\ &\quad \left. -\frac{p_{\alpha\beta}}{p^2} \left(\frac{1}{p^2 + 4m^2} + \frac{\xi}{p^2} \right) D^2 - \frac{2m C_{\alpha\beta}}{p^2(p^2 + 4m^2)} D^2 \right\} \delta_{12}. \end{aligned} \quad (4.130)$$

Como $D^2 \delta_{12} = -1$ e $\delta^2(0) = 0$ obtemos

$$\Gamma_{\phi\phi}^2 = \frac{1}{N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{2m}{f(k) k^2 (k^2 + 4m^2)} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta). \quad (4.131)$$

Neste termo também se verifica uma divergência logarítmica.

A terceira contribuição é oriunda do vértice $i/2 (D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a + \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a)$, sendo representada graficamente pelo supergráfico abaixo.

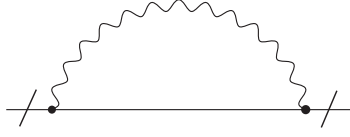


Figura 4.11: $\Gamma_{\phi\phi}^3$

A expressão de $\Gamma_{\phi\phi}^3$ é

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^3 &= \frac{1}{2} \langle : i \frac{i}{2} \int d^5 z_1 (D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a + \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a) : \\ &: i \frac{i}{2} \int d^5 z_2 (D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b + \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b) : \rangle, \end{aligned} \quad (4.132)$$

mostrando que o mesmo se decompõe em quatro termos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{3.1} &= \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a :: D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b : \rangle, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{3.3} &= \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a :: \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b : \rangle, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{3.3} &= \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a :: D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b : \rangle, \\ \Gamma_{\phi\phi}^{3.4} &= \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a :: \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b : \rangle. \end{aligned} \quad (4.133)$$

A primeira contribuição é dada por

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.1} = \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a :: D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b : \rangle, \quad (4.134)$$

que, como já mostrado anteriormente, é reescrito como

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{3.1} &= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\ &(2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i \{ k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3 \}} \\ &\langle : D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) \phi_a(k_3, \theta_1) :: D^\beta \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\beta(p_2, \theta_2) \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Em (4.135) existem duas possibilidades de contração entre os campos ϕ , e por uma renomeação das variáveis verifica-se que os dois termos decorrentes das contrações são iguais, dando como resultado

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.1} &= \frac{1}{4} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_1) \langle \phi_a(k_3, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \\
&\quad (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_2) \langle A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2) \rangle \\
&\quad D^\alpha \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) \phi_b(p_3, \theta_2). \tag{4.136}
\end{aligned}$$

Integrando nas variáveis das funções delta e renomeando as variáveis obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.1} &= \frac{1}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \phi_a(-k - p, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(k + p, \theta_2) \rangle \\
&\quad \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle D^\alpha \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_b(-p, \theta_2). \tag{4.137}
\end{aligned}$$

A ausência do fator de fase mostra o mesmo resultado da teoria comutativa para esta função de dois pontos na ordem de 1 laço.

Reescrevendo as expressões dos propagadores

$$\begin{aligned}
\langle \phi_a(-k - p, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(k + p, \theta_2) \rangle &= -i \delta_{ab} D_1^\beta \frac{D_1^2 - m}{(k + p)^2 + m^2} \delta_{12}, \tag{4.138} \\
\langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle &= \frac{i}{N f(k)} \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12},
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões dos propagadores em (4.137) obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.1} &= \frac{1}{4N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{D_1^\beta (D_1^2 - m) \delta_{12}}{f(k) [(k + p)^2 + m^2]} \\
&\quad \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12} D^\alpha \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_b(-p, \theta_2). \tag{4.139}
\end{aligned}$$

Integrando por partes para liberar a primeira função delta, aplicando as propriedades das derivadas covariantes supersimétricas e em seguida integrando numa das variáveis de Grassmann obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.1} &= \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k + p)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right. \\
&\quad \left. [- (4k^2 + 8m^2) D^2 - 2k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 + m) - 8mp^2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi}{k^4} (-4k^2 D^2 - 2k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 - m)) \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta). \tag{4.140}
\end{aligned}$$

O segundo termo de $\Gamma_{\phi\phi}^3$ é dado por

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.2} = \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : D^\alpha \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star \phi_a :: \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b ; \rangle, \quad (4.141)$$

e é reescrito como

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3 (k_1 + k_2 + k_3) \\ &(2\pi)^3 \delta^3 (p_1 + p_2 + p_3) e^{-i \{ k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3 \}} \\ &\langle : D^\alpha \bar{\phi}_a (k_1, \theta_1) A_\alpha (k_2, \theta_1) \phi_a (k_3, \theta_1) :: \bar{\phi}_b (p_1, \theta_2) A_\beta (p_2, \theta_2) D^\beta \phi_b (p_3, \theta_2) : \rangle. \end{aligned} \quad (4.142)$$

Como existem dois modos possíveis de contrair os supercampos ϕ obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{3.2} &= \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3 (k_1 + k_2 + k_3) \\ &(2\pi)^3 \delta^3 (p_1 + p_2 + p_3) e^{-i \{ k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3 \}} \\ &(2\pi)^3 \delta^3 (k_3 + p_1) \langle \phi_a (k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b (p_1, \theta_2) \rangle \\ &(2\pi)^3 \delta^3 (k_2 + p_2) \langle A_\alpha (k_2, \theta_1) A_\beta (p_2, \theta_2) \rangle \\ &D^\alpha \bar{\phi}_a (k_1, \theta_1) D^\beta \phi_b (p_3, \theta_2) + \end{aligned} \quad (4.143)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3 (k_1 + k_2 + k_3) \\ &(2\pi)^3 \delta^3 (p_1 + p_2 + p_3) e^{-i \{ k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3 \}} \\ &(2\pi)^3 \delta^3 (k_1 + p_3) \langle D^\alpha \bar{\phi}_a (k_1, \theta_1) D^\beta \phi_b (p_3, \theta_2) \rangle \\ &(2\pi)^3 \delta^3 (k_2 + p_2) \langle A_\alpha (k_2, \theta_1) A_\beta (p_2, \theta_2) \rangle \\ &\phi_a (k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b (p_1, \theta_2). \end{aligned} \quad (4.144)$$

Integrando nas variáveis das funções delta e renomeando as variáveis chegamos a

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{3.2} &= \frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \phi_a (-k - p, \theta_1) \bar{\phi}_b (k + p, \theta_2) \rangle \\ &\langle A_\alpha (k, \theta_1) A_\beta (-k, \theta_2) \rangle D^\alpha \bar{\phi}_a (p, \theta_1) D^\beta \phi_b (-p, \theta_2) + \end{aligned} \quad (4.145)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle D^\alpha \bar{\phi}_a (-k - p, \theta_1) D^\beta \phi_b (k + p, \theta_2) \rangle \\ &\langle A_\alpha (k, \theta_1) A_\beta (-k, \theta_2) \rangle \phi_a (p, \theta_1) \bar{\phi}_b (-p, \theta_2). \end{aligned} \quad (4.146)$$

Novamente observamos a ausência do fator de fase no resultado, sendo igual ao resultado da teoria comutativa. As expressões dos propagadores das equações (4.145) e (4.146) são

$$\begin{aligned}
\langle \phi_a(-k-p, \theta_1) \bar{\phi}_b(k+p, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} \frac{D_1^2 + m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\
\langle D^\alpha \bar{\phi}_a(-k-p, \theta_1) D^\beta \phi_b(k+p, \theta_2) \rangle &= -i\delta_{ab} D_1^\alpha D_1^\beta \frac{D_1^2 - m}{(k+p)^2 + m^2} \delta_{12}, \\
\langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle &= \frac{i}{Nf(k)} \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12}.
\end{aligned} \tag{4.147}$$

O resultado da aplicação dessas expressões é

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3,2} &= \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(D_1^2 + m) \delta_{12}}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \\
&\quad \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12} D^\alpha \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_b(-p, \theta_2) + \\
&\quad + \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{D_1^\alpha D_1^\beta (D_1^2 - m) \delta_{12}}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \\
&\quad \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12} D^\alpha \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_b(-p, \theta_2). \tag{4.148}
\end{aligned}$$

Integrando por partes para liberar a primeira função delta e aplicando as propriedades das derivadas obtemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3,2} &= \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right. \\
&\quad \left. [- (2k^2 + 4m^2) D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 + m) - 4mp^2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi}{k^4} (-2k^2 D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 - m) + 4mk^2) \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta) + \\
&\quad + \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right. \\
&\quad \left. [- (4k^2 + 8m^2) D^2 - 2k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 + m) - 8mp^2] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\xi}{k^4} (-2k^2 D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 - m)) \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta) \tag{4.149}
\end{aligned}$$

O cálculo de $\Gamma_{\phi\phi}^{3.3}$ e $\Gamma_{\phi\phi}^{3.4}$ é idêntico ao dos dois primeiros acima apresentados, e sendo assim serão apresentadas somente os resultados das passagens intermediárias. Para $\Gamma_{\phi\phi}^{3.3}$ obtemos

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.3} = \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a :: D^\beta \bar{\phi}_b \star A_\beta \star \phi_b ; \rangle, \quad (4.150)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.3} = \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\ (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\ \langle : \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) :: D^\beta \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\beta(p_2, \theta_2) \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle,$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.3} = \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\ (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\ (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_1) \langle \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) \phi_b(p_1, \theta_2) \rangle \\ (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_2) \langle A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2) \rangle \\ D^\alpha \phi_a(k_1, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) + \quad (4.151)$$

$$+ \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\ (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\ (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_3) \langle D^\alpha \phi_a(k_1, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(p_3, \theta_2) \rangle \\ (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_2) \langle A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2) \rangle \bar{\phi}_a(k_3, \theta_1) \phi_b(p_1, \theta_2), \quad (4.152)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.3} = \frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \bar{\phi}_a(-k - p, \theta_1) \phi_b(k + p, \theta_2) \rangle \\ \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle D^\alpha \phi_a(p, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(-p, \theta_2) + \quad (4.153)$$

$$+ \frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle D^\alpha \phi_a(-k - p, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(k + p, \theta_2) \rangle \\ \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_b(-p, \theta_2), \quad (4.154)$$

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.3} = \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{(D_1^2 + m) \delta_{12}}{f(k) [(k + p)^2 + m^2]} \\ \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12} D^\alpha \phi_a(p, \theta_1) D^\beta \bar{\phi}_b(-p, \theta_2) + \quad (4.155)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{D_1^\alpha D_1^\beta (D_1^2 - m) \delta_{12}}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \\
& \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12} \bar{\phi}_a(p, \theta_1) \phi_b(-p, \theta_2), \quad (4.156)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.3} & = \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right. \\
& \left[-(2k^2 + 4m^2) D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 + m) - 4mp^2 \right] + \\
& \left. + \frac{\xi}{k^4} (-2k^2 D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 - m)) \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta) + \\
& + \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right. \\
& \left[-(4k^2 + 8m^2) D^2 - 2k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 + m) - 8mp^2 \right] + \\
& \left. + \frac{\xi}{k^4} (-2k^2 D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 - m) + 4mk^2) \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta). \quad (4.157)
\end{aligned}$$

Para $\Gamma_{\phi\phi}^{3.4}$ obtemos

$$\Gamma_{\phi\phi}^{3.4} = \frac{1}{8} \int d^5 z_1 d^5 z_2 \langle : \bar{\phi}_a \star A_\alpha \star D^\alpha \phi_a :: \bar{\phi}_b \star A_\beta \star D^\beta \phi_b : \rangle, \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.4} & = \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\
& (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\
& \langle : \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) A_\alpha(k_2, \theta_1) D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) :: \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) A_\beta(p_2, \theta_2) D^\beta \phi_b(p_3, \theta_2) : \rangle.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.4} & = \frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\
& (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\
& (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + p_3) \langle \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) D^\beta \phi_b(p_3, \theta_2) \rangle \\
& (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_2) \langle A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2) \rangle \\
& D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) - \quad (4.159)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8} \int \prod_{j=1}^3 \frac{d^3 k_j}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 (2\pi)^3 \delta^3(k_1 + k_2 + k_3) \\
& (2\pi)^3 \delta^3(p_1 + p_2 + p_3) e^{-i\{k_1 \wedge (k_2 + k_3) + k_2 \wedge k_3 + p_1 \wedge (p_2 + p_3) + p_2 \wedge p_3\}} \\
& (2\pi)^3 \delta^3(k_3 + p_1) \langle D^\alpha \phi_a(k_3, \theta_1) \bar{\phi}_b(p_1, \theta_2) \rangle \\
& (2\pi)^3 \delta^3(k_2 + p_2) \langle A_\alpha(k_2, \theta_1) A_\beta(p_2, \theta_2) \rangle \bar{\phi}_a(k_1, \theta_1) D^\beta \phi_b(p_3, \theta_2), \\
\Gamma_{\phi\phi}^{3.4} = & \frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle \bar{\phi}_a(-k - p, \theta_1) D^\beta \phi_b(k + p, \theta_2) \rangle \\
& \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle D^\alpha \phi_a(p, \theta_1) \bar{\phi}_b(-p, \theta_2) - \tag{4.160}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \langle D^\alpha \phi_a(-k - p, \theta_1) \bar{\phi}_b(k + p, \theta_2) \rangle \\
& \langle A_\alpha(k, \theta_1) A_\beta(-k, \theta_2) \rangle \bar{\phi}_a(p, \theta_1) D^\beta \phi_b(-p, \theta_2), \tag{4.161}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.4} = & \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{D_1^\beta (D_1^2 - m) \delta_{12}}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \\
& \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12} D^\alpha \phi_a(p, \theta_1) \bar{\phi}_b(-p, \theta_2) - \tag{4.162}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta_1 d^2 \theta_2 \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{D_1^\alpha (D_1^2 + m) \delta_{12}}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \\
& \left[\frac{(D_1^2 - 2m) D_{\beta 1} D_{\alpha 1}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} + \xi \frac{D_1^2 D_{\alpha 1} D_{\beta 1}}{k^4} \right] \delta_{12} \bar{\phi}_a(p, \theta_1) D_2^\beta \phi_b(-p, \theta_2), \tag{4.163}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\phi\phi}^{3.4} = & \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right. \\
& \left[-(2k^2 + 4m^2) D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 + m) - 4mp^2 \right] + \\
& \left. + \frac{\xi}{k^4} (-2k^2 D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 - m)) \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta) + \\
& + \frac{1}{8N} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^2 \theta \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \left\{ \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right. \\
& \left[-(2k^2 + 4m^2) D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 + m) - 4mp^2 \right] + \\
& \left. + \frac{\xi}{k^4} (-2k^2 D^2 - k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} (D^2 - m)) \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta) \tag{4.164}
\end{aligned}$$

Somando os resultados apresentados em (4.140), (4.149), (4.157) e (4.164), e aplicando a identidade $D^4 = -p^2$ temos o resultado

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^3 = & \frac{1}{N} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) [(k+p)^2 + m^2]} \left\{ -\frac{k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}}{k^2 (k^2 + 4m^2)} (D^2 + m) - \right. \\ & -\frac{2D^2}{k^2 + 4m^2} - \xi \frac{k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta}}{k^4} (D^2 - m) - \frac{\xi}{k^2} (D^2 - m) + \\ & \left. + \frac{4mD^2 (D^2 - m)}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right\} \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta). \end{aligned} \quad (4.165)$$

Somando as contribuições apresentadas em (4.126), (4.131) e (4.165) a ação efetiva da função de dois pontos do supercampo ϕ é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi} = & -\frac{1}{N} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k)} \left\{ \frac{(D^2 - m)^2}{k^2 [k^2 + 4m^2] [(k+p)^2 + m^2]} + \right. \\ & \left. + \xi \frac{k^2 + 2k \cdot p}{k^4 [(k+p)^2 + m^2]} + \frac{1}{k^2 (k^2 + 4m^2)} \right\} \\ & (D^2 - m) \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta), \end{aligned} \quad (4.166)$$

onde foi aplicada a identidade $k_{\alpha\beta} p^{\alpha\beta} = (k+p)^2 - k^2 + D^4$.

Este resultado pode ser reescrito explicitando a sua parte divergente

$$\Gamma_{\phi\phi}^{DIV} = -\frac{1}{N} (1 + \xi) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{f(k) k^3} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} d^2\theta (D^2 - m) \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta), \quad (4.167)$$

sendo igual a zero para $\xi = -1$, e para um valor arbitrário de ξ pode ser cancelada pelos contratermos δ_ϕ e δ_c definidos em (4.13), impondo que $\delta_\Sigma = 0$.

A parte finita da ação efetiva é dada por

$$\begin{aligned} \Gamma_{\phi\phi}^{FIN} = & -\frac{1}{N} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} d^2\theta \frac{1}{f(k)} \left\{ \frac{(D^2 - m)^2}{k^2 [k^2 + 4m^2] [(k+p)^2 + m^2]} + \xi \frac{2k \cdot p}{k^4 (k^2 + 4m^2)} \right\} \\ & (D^2 - m) \bar{\phi}_a(p, \theta) \phi_a(-p, \theta). \end{aligned} \quad (4.168)$$

Um ponto que merece ser ressaltado neste trabalho é que a renormalização da ação efetiva da função de dois pontos do supercampo ϕ foi realizada numa abordagem explicitamente supersimétrica, o que não ocorreria no caso em que fosse adotado o calibre de Wess-Zumino [55], onde as componentes bosônica e fermiônica do supercampo ϕ recebem

renormalizações de função de onda diferentes.

Para podermos fazer um estudo mais completo da renormalizabilidade do modelo na ordem $1/N$ seria necessário calcular a ação efetiva da função de três pontos $\Gamma_{A\phi\phi}$, que envolvem supergráficos com um e dois laços no momento, e este cálculo é muito mais complicado dos que os realizados, mesmo com os recursos do software desenvolvido por A.A.Ferrari [57]. Tais cálculos serão retomados num trabalho a ser feito na sequência.

A identidade diagramática apresentada na figura (4.3) e na equação (4.45), generalizada neste trabalho para o formalismo de supercampos, é essencial para garantir o cancelamento de diversas divergências ultravioletas. Na verdade, no modelo CP^{N-1} usual, isto é, comutativo e não supersimétrico, a prova da renormalizabilidade numa ordem arbitrária da expansão $1/N$ depende fortemente desta identidade.

Conclusões

Nesta tese estudamos o modelo CP^{N-1} em $(2+1)D$ na versão não comutativa supersimétrica com o campo básico na representação fundamental. Verificamos que o modelo tem a mesma estrutura de fases que a sua versão comutativa. Diferentemente da análise prévia feita em [34], o modelo por nós estudado se reduz classicamente, no limite $\Theta \rightarrow 0$, ao modelo CP^{N-1} supersimétrico usual, isto é, comutativo. No nível quântico, a mistura IV/UV produz somente divergências infravermelhas logarítmicas, tanto que a renormalizabilidade do modelo na ordem dominante $1/N$ foi explicitamente verificada.

A abordagem aplicando o formalismo de supercampos assegura uma renormalização manifestamente supersimétrica, que não acontece no caso do formalismo em que os supercampos são escritos em termos de suas componentes. Em [55], onde o comportamento ultravioleta do modelo CP^{N-1} comutativo supersimétrico foi considerado, os parceiros supersimétricos escalar e fermiônico recebem renormalizações diferentes, de modo que a invariância supersimétrica da teoria quântica não é manifesta. Este problema não aparece no formalismo de supercampos.

Nós também estudamos a primeira correção subdominante para a ação efetiva do supercampo ϕ , e mostramos que ela se torna finita apenas com uma renormalização de função de onda. Este cálculo explícito é inédito na literatura, mesmo no caso comutativo.

A continuação natural desse trabalho seria o estudo da relação entre a não comutatividade e a estrutura de fase do modelo, o estudo do mesmo na presença de condições de contorno e o efeito Casimir.

Referências Bibliográficas

- [1] V.S.Weisskopf,"On the self-energy and the electromagnetic field of the eletron", Phys.Rev. **56**, 72, 1939.
- [2] W.Heisenberg, "The universal length appearing in the theory of elementary particles", Ann.Phys. Ser**5**, 32, 20-33, 1938.
- [3] Wolfgang Pauli Scientific Correspondence, vol.II, 15, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1985.
- [4] Wolfgang Pauli Scientific Correspondence, vol.III, 380, Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag, 1993.
- [5] H.Snyder, "Quantized Space-Time", Phys. Rev. **71**, 38, 1947.
- [6] H.Snyder, "The electromagnetic field in quntized space-time", Phys.Rev. **72**, 68, 1947.
- [7] C.N.Yang, "On quantized space-time", Phys.Rev. **72**, 874,1947.
- [8] V.W.Hughes, T.Kinoshita, "Anomalous g values of the electron and the muon", Rev.Mod.Phys. **71**, 26, 1987.
- [9] g. Gabrielse et all, "The magnet in the electron", Physics World, Feb.2007, 32.
- [10] N.Seiberg, E.Witten, "String theory and noncommutative geometry", JHEP **9909**, 032, 1999, hep-th/9908142.

- [11] M.Douglas, C.M.Hull, "D-branes and the noncommutative torus", JHEP **9802**, 008, 1998, hep-th/9711165.
- [12] M.Gomes, "Renormalization in noncommutative field theory", Proceedings of the XI Jorge André Swieca Summer School, Particles and Fields, edited by G.A.Alves, O.J.P.Éboli e V.O.Rivelles, World Scientific Singapore, 2002.
- [13] H.O.Girotti, M.Gomes, V.O.Rivelles, A.J.da Silva, "A consistent noncommutative field theory :the Wess-Zumino model", Nucl.Phys. **B587**, 299,2000, hep-th/0005272.
- [14] H.O.Girotti, M.Gomes, V.O.Rivelles, A.J.da Silva,"The low energy limit of the non-commutative Wess-Zumino model", JHEP **0205**, 040, 2002; hep-th/0101159.
- [15] H.O.Girotti, M.Gomes, A.Y.Petrov, V.O.Rivelles, A.J.da Silva, "Spontaneous symmetry breaking in noncommutative field theory", Phys.Rev. **D67**, 125003, 2003; hep-th/0207220.
- [16] A.A.Ferrari, H.O.Girotti, M.Gomes, A.Y.Petrov, A.A.Ribeiro, A.J da Silva,"On the finiteness of noncommutative supersymmetric QED(3) in the covariant superfield formulation", Phys.Lett. **B77**, 83, 2003; hep-th/0309193.
- [17] A.A.Ferrari, H.O.Girotti, M.Gomes, A.Y.Petrov, A.A.Ribeiro, V.O.Rivelles, A.J da Silva, "Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric QED(4)", Phys.Rev. **D69**, 025008,2004; hep-th/0309154.
- [18] A.A.Ferrari, H.O.Girotti, M.Gomes, A.Y.Petrov, A.A.Ribeiro, V.O.Rivelles, A.J da Silva, "Towards a consistent noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory: superfield covariant analysis", Phys.Rev. **D70**, 085012, 2004; hep-th/0407040.
- [19] A.A.Ferrari, H.O.Girotti, M.Gomes, A.Y.Petrov, A.A.Ribeiro, A.J da Silva, "On the consistency of the three-dimentional noncommutative supersymmetric Yang-Mills theory", Phys.Lett. **B601**, 89, 2004; hep-th/0407064.

- [20] H.O.Girotti, M.Gomes, V.O.Rivelles, A.J.da Silva, "The three-dimensional noncommutative nonlinear sigma model in superspace", Phys.Lett. **B521**, 119, 2001; hep-th/0109222.
- [21] H.O.Girotti, M.Gomes, V.O.Rivelles, A.J.da Silva, "The noncommutative supersymmetric nonlinear sigma model". Int.J.Mod.Phys. **A17**,1503,2002; hep-th/0102101.
- [22] M.Gell-Mann, M.Levy, "The axial vector current in beta decay", Nu.Cim. **16**, 705, 1960.
- [23] B.W.Lee, "Chiral Dynamics", New York Gordon and Breach Science Publishers, 1972.
- [24] J.Zinn-Justin, "Quantum field theory and critical phenomena", Oxford Science Publication, 1989.
- [25] V.A.Miranski, "Dynamical symmetry breaking in quantum field theories", World Scientific Publishing Company, 1993.
- [26] W.J.Zakrzewski, "Low dimensional sigma models", Adam Hilger, 1990.
- [27] R.Rajamaran, "Solitons and confinement", North-Holland Publishing Company, 1987.
- [28] H.Eichenher, " $SU(N)$ invariant nonlinear sigma models", PhD thesis (Heidelberg,1978), Nucl.Phys. **B146**, 393, 1979.
- [29] I.Y.Are'feva, "Phase transition in the three-dimensional chiral field", Ann.Phys. **117**, 381, 1979.
- [30] A.D.D'adda, M.Lüsher. P.Di Vecchia, "A $1/N$ expandable series of non-linear sigma models with instantons", Nucl.Phys. **B146**, 63, 1979.
- [31] A.D.D'adda, M.Lüsher. P.Di Vecchia, "Confinement and chiral symmetry breaking in CP^{N-1} models with quarks", Nucl.Phys. **B152**, 125, 1978.

- [32] I.Y.Aref'eva and S.I. Azakov :”Renormalization and phase transition in the quantum CP^{N-1} model (D=2,3)”, Nucl.Phys. **B162**, 298, 1980.
- [33] E.A.Asano, H.O.Girotti, M.Gomes, A.Y. Petrov, A.G.Rodrigues e A. J.da Silva, ”(2 + 1) dimensional noncommutative CP^{N-1} model, Tese de doutorado, Phys.Rev. **D69**, 1005012, 2004; hep-th/0402013.
- [34] E.A.Asano, A.G.Rodrigues, M.Gomes e A.J.da Silva, ”Coupling fermions to the three-dimensional noncommutative CP^{N-1} model: minimal and supersymmetric extensions”, Tese de doutorado, Phys.Rev. **D69**, 0605012, 2004; hep-th/0307114.
- [35] A.A.Ferrari, A.C.Lehum, A.J.da Silva, F.Teixeira, ”The supersymmetric (2 + 1) D noncommutative CP^{N-1} model in the fundamental representation”, J.Phys. **A40**, 7803, 2007; hep-th/0612226.
- [36] H.O.Girotti, ”Noncommutative quantum field theories”, Lectures delivered at the XII Jorge André Swieca Summer School, Particles and Fields, 2003, hep-th/0301237.
- [37] R.J.Szabo, ”Quantum field theories on noncommutative spaces”, Phys.Rep. **378**, 207, 2003, hep-th/0109162.
- [38] M.R.Douglas, N.A.Nekrasov, ”Noncommutative field theory”, Rev.Mod.Phys. **73**, 977, 2001.
- [39] J.Gomis, T.Meheh, ”Space-time noncommutative field theories and unitarity”, Nucl.Phys. **B591**, 265, 2000; hep-th/0005129.
- [40] S.Doplicher, K.Fredenhagen, J.E.Roberts, ”The quantum structure of spacetime at the Planck scale and quantum fields”, Commun.Math.Phys. **172**, 187, 1995.
- [41] D.Bahns, S.Doplicher, K.Fredenhagen, G.Piacitelli, ”On the unitarity problem in space-time noncommutative theories”, Phys.Lett. **B533**, 178, 2002.

- [42] Y.Liao, K.Sibold, "Time-ordered perturbation theory on noncommutative space-time 2. Unitarity", Eur.Phys.J. **C25**, 469, 2002.
- [43] A.P.Balachandran, T.R.Govindarajan, C.Molina, P. Teotonio-Sobrinho, "Unitary quantum physics with space-time noncommutativity", hep-th/0406125.
- [44] Gelfand and Shilov "Generalized Functions".Academic Press **V1**,1966.
- [45] S.J.Gates, M.T.Grisaru, M.Rocek, W.Siegel "Superspace or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry", Benjamin/Cummings, 1983.
- [46] F.R.Ruiz, P. van Nieuwenhuizen "Lectures on Supersymmetry and Supergravity in 2+1 Dimensions and Regularization of Supersymmetric Gauge Theories", Published in Tlaxcala 1996 "Recent developments in gravitation and mathematical physics".
- [47] H.J.W.M.Kirsten, A.Wiedemann, "Supersymmetry - An introduction with conceptual and calculational details", World Scientific, 1987.
- [48] J.Wess, B.Zumino, "A lagrangian model invariant under supergauge transformations", Phys.Lett. **B49**, 52, 1974.
- [49] J.Wess, B.Zumino, "Supergauge transformations in four dimensions", Nucl.Phys. **B70**, 39, 1974.
- [50] S.Coleman, "Aspects of symmetry",Selected Erice lectures of Sidney Coleman, Cambridge University Press, **chap.8**, 1985.
- [51] A.V. Manohar, "Large N QCD", hep-ph/9802419.
- [52] G.'T Hooft, "Large N", hep-th/0204069.
- [53] , R.Gopakumar, S.Minwalla, A.Strominger, "Noncommutative Solitons", hep-th/0003160, 2000.

- [54] W. Siegel, "Supersymmetric dimensional regularization via dimensional reduction", Phys.Lett. **B84**, 193, 1979.
- [55] T.Inami, Y. Saito and M. Yamamoto, "Vanishing next-to-leading corrections to the β -function of the susy CP^{N-1} model in three dimensions", Prog. Theor. Phys. **103**, 1283, 2000; hep-th/0003013.
- [56] S.Minwalla, M.Van Raamsdonk, N.Seiberg, "Noncommutative perturbative dynamics", JHEP **02**, 020, 2000; hep-th/9912072.
- [57] A.A.Ferrari, "SusyMath: A mathematica package for quantum superfield calculations", Comp.Phys.Commun. **176**, 334, 2007; <http://fma.if.usp.br/~alys-son/SusyMath>.