Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Perturbações de Sistemas Gravitacionais Dependentes do Tempo

Autor: Carlos Eduardo Pellicer de Oliveira
Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IF-USP)
Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (UNICAMP)
Prof. Dr. Frank Michael Forger (IME-USP)

São Paulo
2007

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Oliveira, Carlos Eduardo Pellicer de

Perturbações de sistemas gravitacionais
dependentes do tempo São Paulo, 2007.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Elcio Abdalla
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Gravitação;
2. Teoria de perturbação;
3. Buracos Negros;
4. Colapso Gravitacional.

USP/IF/SBI-041/2007

Resumo

Estudamos a evolução temporal de perturbações escalares na vizinhança de uma estrela com densidade uniforme que colapsa em um buraco negro. O trabalho começa com um estudo básico de gravitação e modos quasi-normais. O objetivo principal é resolver a equação de Klein-Gordon sem massa para a perturbação escalar, cuja solução depende de métodos numéricos.

Com este objetivo, tratamos os aspectos teóricos de buracos negros e estrelas a partir da solução prevista pela Relatividade Geral para um buraco negro, estrelas com densidade uniforme e estrelas em colapso. Estudamos também uma maneira de reduzirmos a Equação de Klein-Gordon para uma forma conveniente de ser integrada, assim como os métodos numéricos necessários para resolver essa equação.

Encontramos soluções para os modos variando a massa M , o raio inicial R e o rótulo do momento angular l . Essas soluções são irregulares em muitas situações, mas em geral elas são crescentes, de acordo com o comportamento observado de explosões de Supernovas.

Abstract

This work is a study on the time evolution of scalar perturbations around a star collapsing to a black hole. It starts with a basic study of gravitation and quasi-normal modes. The aim is to derive the solution of the massless Klein-Gordon equation, that depends on numerical methods.

Aiming at this goal, we studied theoretical aspects of stars, black holes and gravitational collapse. The methods include coordinate substitutions to modify the Klein-Gordon equation to a simple form. We also studied numerical methods for partial differential equations.

Solutions of the quasi-normal modes were found with different values of M , R and l . The solutions are irregular in several situations, but some of them display increasing modes, that could be explained by the explosive behavior of Supernovas.

Dedicatória

“Dedico este trabalho a todos que me ajudaram e me apoiaram nessa etapa da minha vida”

Agradecimentos

Aos meus pais e irmãos, que muito me apoiaram, com menção especial à minha sobrinha Sofia.

Ao meu orientador Prof. Elcio Abdalla, por todo o trabalho que desenvolvemos juntos. Agradeço toda a ajuda profissional e às nossas conversas, de temas variados.

Aos colegas de departamento, Alan, Bertha, Carlos Molina, Cecília, Davi, Jéferson, Karlúcio, Michele, Rodrigo e Sandro, com quem sempre pude contar pra todas as dúvidas que tive no meu trabalho. Às secretárias do departamento e o pessoal do setor de informática, Amélia, Bete, Simone, João e Sybele, que me ajudaram em vários problemas não acadêmicos.

Aos meus amigos da graduação, André, Attis, Caio, Caroline, Daniel, Elton, Francisco, Gabriel Landi, Gabriel Weber, João Pedro, Pedro Ivo, Rebeca e Yair, que me acompanharam por vários anos e continuam sendo ótimas companhias.

Aos sifus Serra e de Paula, e a todos os instrutores da academia de Kung Fu, a dedicação, perseverança e disciplina desenvolvidas no treinamento foram muito úteis nesse trabalho.

À FAPESP, pelo apoio financeiro.

Sumário

1	Introdução	8
1.1	Princípios da Relatividade Geral	9
1.2	Equação de movimento	11
1.3	Equações de campo	13
1.4	Solução de Schwarzschild	15
1.5	Buracos Negros	17
1.6	Estrelas	19
1.7	Estrelas com densidade uniforme	21
1.8	Campos esfericamente simétricos dependentes do tempo	22
2	Modos Quasi-normais	30
2.1	Método de integração direta	31
2.2	Método Semi-Analítico	33
3	Métodos Numéricos	38
3.1	Método de Newton-Raphson	38
3.2	Método de diferenças finitas em uma dimensão	40
3.3	Método de diferenças finitas em duas dimensões	41
3.4	Equação de onda	48
4	Perturbações de Estrelas	51
4.1	Transformação de Coordenadas	54
4.2	Solução Numérica das Coordenadas Especiais	55
4.3	Cálculo dos Modos Quasi-Normais	60
4.4	Cálculo de $\eta(r, t)$, $\xi(r, t)$ e $V(r, t)$	62
4.5	Resultados	65
5	Conclusões	75
A	Notações e Convenções	77
B	Código-fonte	78

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é um entendimento melhor de Relatividade Geral, Gravitação, Buracos Negros e do espaço-tempo onde estamos. Esse objetivo é um tanto quanto vasto, e ao seguir em busca dele é mais fácil se perder do que chegar em algum resultado concreto. É melhor então estudar algum tema específico com começo, meio e fim. O que antes era objetivo torna-se consequência e, sem perceber, pode-se percorrer um longo caminho que antes parecia impossível.

O tema escolhido é o estudo da evolução temporal das perturbações escalares nas vizinhanças de um objeto dependente do tempo. Estudaremos o espaço-tempo deformado por esse objeto que queremos estudar.

A Relatividade Restrita engloba o espaço e o tempo numa só variedade para mostrar que tanto as equações de Maxwell quanto a Mecânica de Newton são invariantes por um mesmo grupo de transformação, as transformações de Lorentz. Albert Einstein publicou esses resultados em 1905. No entanto, essa teoria não é capaz de explicar a interação gravitacional.

Até então, Einstein sabia de experiências que mostravam que a massa inercial era igual à massa gravitacional a menos de uma diferença de uma parte em 10^9 . Massa inercial é a quantidade de inércia, a “resistência” a uma força sobre um corpo, e massa gravitacional é proporcional à interação gravitacional. Não há motivação na teoria newtoniana para que essas massas sejam iguais, mas as experiências indicavam que eram. Em 1907 Einstein publica o Princípio de Equivalência entre Gravitação e Inércia, umas das bases da Relatividade Geral.

No final do século XIX, Mach publica o seu ponto de vista quanto a referencial inercial: até então referencial inercial era definido em relação ao espaço absoluto. O princípio de Mach acaba com a idéia de espaço absoluto, e diz que referencial inercial é aquele que não tem aceleração em relação às estrelas fixas.

Em 1915, depois de incorporar esses princípios com o aparato matemático dado pelo cálculo tensorial, Einstein publicou a Teoria da Relatividade Geral. Vamos aos princípios da teoria.

1.1 Princípios da Relatividade Geral

- Princípio de Mach

A primeira lei de Newton define um referencial inercial, que é privilegiado pela teoria newtoniana. Em um referencial acelerado, com aceleração $\vec{a}$, a força medida em um corpo de massa m difere por uma quantidade $m\vec{a}$ da força medida em um referencial inercial. Este fator é conhecido como força de inércia que é tratada algumas vezes como uma força “fictícia”, como se não fosse real, ao contrário da força gravitacional, que tinha como origem uma interação. Para o campo gravitacional, assim como nas forças de inércia, existe um referencial onde o campo gravitacional medido pelo observador é nulo. Seria esse observador privilegiado, tendo a teoria que ser desenvolvida nesse referencial? Qual a relação desse referencial com um referencial inercial? Seria a gravitação uma força fictícia, ou as forças de inércia uma força real?

A idéia de Mach, proposta em 1893, é de que não existe movimento absoluto, apenas movimento relativo. Para um objeto em um universo vazio a idéia de movimento não faz sentido, pois não há nenhuma referência. É a presença de matéria que determina as propriedades inerciais dos objetos. No nosso universo, a maior parte da matéria está concentrada nas estrelas fixas,¹ então um referencial é dito inercial apenas se ele não estiver acelerado em relação às estrelas fixas.

Se, por um acaso, a distribuição de matéria se concentrasse em uma direção, os efeitos de inércia iriam depender da direção. Como não há nenhuma observação de tal dependência, temos um indício de que o universo é isotrópico. O ponto importante é que é a distribuição de matéria que determina a geometria.

As forças de inércia podem ser tratadas como forças reais, como a gravidade, ou a força gravitacional pode ser tratada como fictícia. A diferença é irrelevante para a teoria. O importante apenas é as duas forças (inercial e gravitacional) serem do mesmo tipo.

- Princípio de Equivalência entre Gravitação e Inércia

¹Hoje estas hipóteses mudaram bastante, mas de fato a Relatividade Geral pode englobar a maioria das mudanças.

Um campo gravitacional é localmente indistinguível do campo de aceleração de um referencial acelerado. Para todo e qualquer campo gravitacional existe um sistema de coordenadas onde este campo não é percebido por nenhuma experiência local. Na Mecânica Clássica esse fato é uma coincidência, mas aparece na Relatividade Geral como princípio.

Praticamente todos os livros sobre o assunto ilustram esse princípio com o exemplo do elevador em queda livre, elevador no espaço sem gravidade, elevador na terra e elevador no espaço puxado por um foguete acelerado. O exemplo apresentado aqui não é tão bom, mas é mais fácil de ser testado, precisa apenas de um carro e um pêndulo, ao invés de um elevador e um foguete. Seja um pêndulo pendurado preso ao espelho retrovisor do carro. Se o carro estiver com velocidade uniforme numa superfície horizontal o pêndulo estará apontando para baixo (ângulo entre o fio e o eixo vertical igual a zero). Acelerando o carro, o pêndulo se inclina para trás. Subindo uma ladeira o pêndulo também inclina para trás. Um observador dentro do carro é incapaz de dizer se a inclinação é devida à aceleração do carro ou devida à inclinação da ladeira sem olhar pra fora². Este observador pode desacelerar o carro enquanto ele está subindo a ladeira. Ao desacelerar, o pêndulo se inclina pra frente, e com o valor conveniente de desaceleração, o pêndulo pode estar reto. Essa situação é idêntica ao carro andando com velocidade uniforme numa superfície horizontal.

- Princípio da Covariância Geral

Dois observadores diferentes não podem discordar de um mesmo fenômeno. Apesar de terem pontos de vista diferentes, as observações devem ser equivalentes. Matematicamente este princípio quer dizer que as equações da teoria devem ser representadas por igualdades entre tensores quadridimensionais.

- Princípio do Mínimo Acoplamento Gravitacional

Nenhum termo contendo explicitamente o tensor de curvatura deve ser usado na transição da Relatividade Restrita para a Relatividade Geral. Este princípio é uma espécie de “Navalha de Occam” da teoria.

- Princípio da Correspondência

²O problema desse exemplo é que o observador poderia medir a tensão no fio do pêndulo, que seria diferente nas duas situações. Este exemplo é bom mesmo porque é fácil de uma pessoa testar que um referencial acelerado pode não perceber um campo gravitacional.

A Relatividade Geral, na ausência de matéria, deve tender à Relatividade Restrita. Da mesma forma, a Relatividade Geral deve tender à Gravitação de Newton numa aproximação de campo fraco

1.2 Equação de movimento

Vamos partir dos princípios da teoria para chegar às equações de campo da Relatividade Geral. Pelo princípio de equivalência, para qualquer campo gravitacional existe um sistema de coordenadas específico $\tilde{x}^\mu$ onde uma partícula teria trajetória retilínea, ou seja,

$$\frac{d^2 \tilde{x}^\mu}{d\tau^2} = 0 ,$$

com $d\tau^2 = -\eta_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu$.

Para um sistema de coordenadas arbitrário x^μ , a equação de movimento é dada por

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 .$$

Queremos isolar o termo com $\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2}$. Basta multiplicar a equação de movimento por $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha}$ sabendo-se que

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\lambda .$$

A equação de movimento toma a forma

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 .$$

A quantidade $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é a conexão afim, definida por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} .$$

A conexão obviamente não é um tensor, visto que no sistema de coordenadas $\tilde{x}^\mu$ ele é nulo e num sistema geral não o é.

No sistema de coordenadas arbitrário x^μ , definimos o tempo próprio pela expressão

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu ,$$

que pode ser escrita como

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu ,$$

com $g_{\mu\nu}$ definido por

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} .$$

O tensor $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. Sendo uma medida intrínseca da distância dependendo da posição, este tensor nos dá a informação da deformação do espaço como consequência do campo gravitacional. Na verdade, o campo gravitacional não “causa” a curvatura do espaço, sendo ele mesmo a própria curvatura do espaço. Pode-se mostrar que a conexão se relaciona com a métrica pela expressão

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} \left(\frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) .$$

No limite newtoniano a equação de movimento deve tender à segunda lei de Newton. Para uma partícula com velocidade bem menor que a da luz as componentes espaciais de $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ podem ser desprezadas. Então podemos simplificar a equação de movimento da seguinte forma,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 0 . \quad (1.1)$$

Para um campo estacionário, as derivadas temporais da métrica devem ser nulas, então podemos escrever Γ_{00}^μ como

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\nu} . \quad (1.2)$$

Para um campo fraco, a métrica deve ser um pequeno desvio da métrica de Minkowsky, pois a deformação do espaço é muito pequena,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} .$$

Ignorando os termos da ordem de h^2 , reescrevemos a equação (1.2) como

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\nu} .$$

A componente 0 da equação (1.1) resulta em $\frac{d^2 t}{d\tau^2} = 0$, ou seja, $\frac{dt}{d\tau} = \text{constante}$. Consideramos as componentes espaciais, dividimos a equação de movimento por $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$ e escrevemos-las na forma vetorial como

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} .$$

A equação correspondente na teoria newtoniana é

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi ,$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. Deste modo, h_{00} deve se relacionar com o potencial como $h_{00} = -2\phi + \text{constante}$. Para grandes distâncias h_{00} deve tender a zero. Se supusermos que o potencial gravitacional tenda também a zero, a constante indeterminada é nula. A componente 00 do tensor métrico deve ser então

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) . \quad (1.3)$$

1.3 Equações de campo

A equação de campo para o potencial é dado pela equação de Poisson,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho ,$$

onde ρ é a densidade de massa. Essa densidade é a componente 00 do tensor de Maxwell, $T_{\mu\nu}$, que tem a informação da densidade de energia e momento de uma região. A equação de Poisson pode ser escrita como

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} . \quad (1.4)$$

Pela forma do limite newtoniano, a forma das equações da campo da Relatividade Geral deve ser

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} .$$

$G_{\mu\nu}$ deve ser um tensor simétrico com termos com até duas derivadas da métrica. Então deve ser uma combinação linear do tensor de Ricci e do produto direto do escalar de curvatura com a métrica. Estes tensores são contrações do tensor de Riemann, que é dado em função da conexão por

$$R^\lambda_{\mu\nu\sigma} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\sigma\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\eta} .$$

Contraindo os índices λ e ν , temos o tensor de Ricci,

$$R_{\mu\sigma} = R^\lambda_{\mu\lambda\sigma} ,$$

e o escalar de curvatura é dado por

$$R = g^{\mu\sigma} R_{\mu\sigma} .$$

O tensor $G_{\mu\nu}$ deve então ser da forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 R G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} .$$

Como $T_{\mu\nu}$ é conservado, $G_{\mu\nu}$ deve ser também. Aplicando essa condição, chega-se a

$$G^\mu_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2 \right) R_{;\nu} .$$

$R_{;\nu}$ é em geral diferente de zero, então $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ e

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) .$$

No limite newtoniano, G_{00} tende a $C_1 \nabla^2 g_{00}$. Comparando com a equação (1.4) vemos que a constante C_1 deve ser igual a 1 e as equações de campo da Relatividade Geral tomam a forma

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (1.5)$$

também conhecidas como Equações de Einstein.

Existe uma forma alternativa das Equações de Einstein conveniente em alguns casos. Contraindo (1.5) com $g^{\mu\nu}$ temos

$$R = 8\pi G T^\mu_{\mu} . \quad (1.6)$$

Substituindo esse resultado na equação (1.5) e isolando $R_{\mu\nu}$ encontramos

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_{\lambda} \right) , \quad (1.7)$$

ou então,

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu} ,$$

sendo $S_{\mu\nu}$ o termo entre parênteses da equação (1.7).

1.4 Solução de Schwarzschild

Para uma solução estática e isotrópica, as componentes do tensor métrico não podem depender do tempo, e os termos não invariantes por rotação devem se anular. A forma mais geral da métrica ds^2 para esse caso é

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + 2E(r)d\vec{x} \cdot d\vec{x} + D(r)(\vec{x} \cdot d\vec{x})^2 + C(r)d\vec{x}^2 ,$$

onde F , E , D e C são funções arbitrárias de r . Em coordenadas esféricas, a equação acima é escrita como

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + 2rE(r)dtdr + r^2D(r)dr^2 + C(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) .$$

A componente fora da diagonal pode ser eliminada redefinindo a coordenada temporal de modo que

$$t' = t - \int r \frac{E(r)}{F(r)} dr .$$

Com essa nova coordenada, ds^2 fica da seguinte forma

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + G(r)dr^2 + C(r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2) ,$$

onde

$$G(r) = r^2 \left(D(r) + \frac{E^2(r)}{F(r)} \right) ,$$

é apenas outra função arbitrária de r . Podemos fazer a mesma redefinição feita em t para a coordenada r , de modo que eliminamos mais uma função arbitrária. Seja $r'^2 = C(r)r^2$. Eliminando as linhas das variáveis, ds^2 toma a forma padrão

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) .$$

com $B(r') = F(r)$ e

$$A(r') = \left(1 + \frac{G(r)}{C(r)} \right) \left(1 + \frac{r}{2} \frac{C'(r)}{C(r)} \right)^{-2} .$$

Calculando o tensor de Ricci, temos os seguintes componentes não nulos

$$\begin{aligned}
R_{00} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{1}{4} \frac{B'}{A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{B'}{A} , \\
R_{11} &= \frac{1}{2} \frac{B''}{B} - \frac{1}{4} \frac{B'}{B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} , \\
R_{22} &= 1 + \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} , \\
R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta .
\end{aligned}$$

Para o espaço vazio, $T_{\mu\nu} = 0$, e contraindo as equações de Einstein com $g^{\mu\nu}$ temos que $R = 0$, então as equações de campo para o espaço vazio são

$$R_{\mu\nu} = 0 .$$

Tomemos a combinação

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = 0 ,$$

que se anula por $R_{\mu\nu} = 0$. Temos a seguinte consequência,

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 ,$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial r} \ln(AB) = 0 ,$$

que nos diz que o produto AB é constante. Para $r \rightarrow \infty$ a métrica deve tender à métrica de um espaço plano

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1 .$$

Portanto a constante acima deve ser unitária, ou seja,

$$A(r) = \frac{1}{B(r)} .$$

Substituindo em R_{22} temos,

$$1 - rB'(r) - B(r) = 0 ,$$

$$\frac{d}{dr} [rB(r)] = 1 ,$$

$$rB(r) = r + \text{constante} .$$

Entretanto, como visto na equação (1.3), a função $B(r)$ deve se comportar como $1 + 2\phi$ onde ϕ é o potencial gravitacional da teoria newtoniana. Assim, a constante indeterminada deve ser $2MG$ e a métrica de Schwarzschild, em coordenadas com velocidade da luz diferente de 1, toma a forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (1.8)$$

Esta é a solução chamada solução de Schwarzschild. Ela tem uma singularidade em $r = \frac{2MG}{c^2}$, que pode ser removida por uma transformação de coordenadas conveniente. Entretanto, para um observador externo, sinais de luz emitidos de regiões próximas à essa singularidade sofrem um desvio para o vermelho, maior o desvio quanto mais próximo da singularidade é emitido o sinal. Este observador verá um objeto levar um tempo infinito para chegar à singularidade (devido aos atrasos dos sinais de luz emitidos), e nenhum sinal de luz emitido de $r < \frac{2MG}{c^2}$ chegará a este observador externo. Por esse motivo, a solução de Schwarzschild descreve um objeto com uma região totalmente inacessível para um observador externo, invisível porque a luz não é emitida, e portanto chamada de Buraco Negro e a esfera com raio $r = \frac{2MG}{c^2}$ é chamada de horizonte de eventos.

1.5 Buracos Negros

Buracos Negros foram conjecturados pela primeira vez por Laplace no contexto da teoria newtoniana como um objeto tão denso que a velocidade de escape desse objeto é maior do que a luz. Igualando a energia cinética de um corpo fugindo desse objeto com a energia potencial gravitacional na superfície, encontramos a velocidade de escape. Substituindo a velocidade de escape com a velocidade da luz, encontra-se que o raio máximo desse objeto deve ser justamente $r = \frac{2MG}{c^2}$, o raio de Schwarzschild de um buraco negro. Então, pela teoria newtoniana, buracos negros podem ser classificados como objetos cujo raio é menor que o seu raio de Schwarzschild.

Na Relatividade Geral, o buraco negro mais simples é descrito pela métrica de Schwarzschild, encontrada por Karl Schwarzschild em 1916. Este buraco negro é estático, esfericamente simétrico, eletricamente neutro e sem rotação.

As características deste buraco negro, como diagrama de espaço-tempo nas coordenadas de Schwarzschild, movimento de uma partícula teste e horizonte de eventos podem ser encontrados em bons livros de Relatividade Geral, em particular [1] e [2].

A característica desse buraco negro mais importante para este trabalho é a análise da equação de Klein-Gordon para um campo escalar sem massa na redondeza do horizonte de eventos. Mais adiante será explicada a razão. Seja a equação de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi) = 0 .$$

Essa equação, nas coordenadas de Schwarzschild pode ser resolvida por separação de variáveis, substituindo-se $\Phi(r, t, \theta, \phi) = \frac{\psi(r, t)}{r} Y_l^m(\theta, \phi)$ na equação acima, onde $Y_l^m(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos. Obtemos para a equação radial

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial\psi}{\partial r} \right] + V(r)\psi = 0 . \quad (1.9)$$

Seria conveniente se o coeficiente da derivada de segunda ordem em t fosse o mesmo da derivada de segunda ordem em r . Mais adiante explicaremos que essa simplificação implica em métodos mais simples de se resolver essa equação. Podemos, no entanto, fazer uma mudança de coordenadas onde a equação tem essa propriedade. De fato, se usarmos que $\frac{\partial}{\partial r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r}$ atingiremos este objetivo.

Isto é realizado pela transformação

$$r^* = r + 2M \ln |r - 2M| + \text{constante} . \quad (1.10)$$

Substituído-a na equação (1.9), obtemos

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^{*2}} + V(r)\psi = 0 ,$$

onde o potencial $V(r)$ depende de r^* através de r pela inversa de (1.10)

A coordenada r^* definida por (1.10) é chamada de coordenada tartaruga pois o valor de r^* tende a $-\infty$ quando $r \rightarrow 2M$, ou seja, um observador se movendo em r^* na direção negativa vai se aproximando cada vez mais de $r = 2M$ mas nunca chega no horizonte de eventos, assim como no paradoxo de Aquiles e a tartaruga.

1.6 Estrelas

Tentemos agora uma solução que descreva uma estrela sem rotação (esfericamente simétrica). Temos duas regiões distintas, uma dentro de uma esfera de raio R , caracterizada por um fluido com pressão p e densidade de energia própria ρ , e uma região fora da esfera de raio R , vazio.

Vamos partir de uma métrica isotrópica, que como já visto na solução de Schwarzschild pode ser escrita como

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + A(r)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) .$$

O tensor de energia-momento para um fluido, como pode ser visto em [1] e [2], é dado por

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu ,$$

onde U^μ é a velocidade do fluido, que satisfaz

$$g^{\mu\nu}U_\mu U_\nu = -1 .$$

Para um fluido em repouso temos

$$\begin{aligned} U_1 &= U_2 = U_3 = 0 , \\ U_0 &= -\sqrt{B(r)} . \end{aligned}$$

As equações de Einstein, na forma da equação (1.7) e com $G = 1$, para esse sistema são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} = -4\pi (\rho + 3p) B , \\ R_{11} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} = -4\pi (\rho - p) A , \\ R_{22} &= -1 + \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} = -4\pi (\rho - p) r^2 . \end{aligned}$$

A condição de conservação de energia-momento, $T_{;\mu}^{\mu\nu} = 0$, implica em

$$\frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \sqrt{g} (p + \rho) U^\mu U^\nu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu (p + \rho) U^\lambda U^\nu = 0 . \quad (1.11)$$

Sabendo que as componentes espaciais de U^μ e todas as derivadas temporais são nulas, podemos afirmar que $\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^\lambda}$ e multiplicando a equação (1.11) por $g_{\mu\lambda}$ temos

$$-\frac{\partial p}{\partial x^\lambda} = (p + \rho)\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \ln(g_{00})^{-\frac{1}{2}} . \quad (1.12)$$

Essa equação é a condição para equilíbrio hidrostático e sua componente radial para o caso particular da estrela é

$$\frac{B'}{B} = -\frac{2p'}{p + \rho} .$$

A combinação

$$\frac{R_{00}}{2B} + \frac{R_{11}}{2A} + \frac{R_{22}}{r^2} = -\frac{A'}{Ar^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Ar^2} = -8\pi\rho$$

pode ser escrita na forma

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r}{A} \right) = 1 - 8\pi\rho r^2 .$$

A solução finita na origem é obtida integrando a equação acima de 0 a r , o que resulta em

$$A(r) = \left[1 - \frac{2M(r)}{r} \right]^{-1}$$

com

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\tilde{r}^2 \rho(\tilde{r}) d\tilde{r} . \quad (1.13)$$

A quantidade $M(r)$ poderia, à primeira vista, ser interpretada como a massa contida dentro da esfera de raio r . Essa quantidade incorpora também a energia do campo gravitacional, não apenas a massa, que deveria ser calculada por

$$M(r) = \int_0^r 4\pi\tilde{r}^2 \sqrt{-g}\rho(\tilde{r}) d\tilde{r} .$$

A quantidade $M(r)$ é então a energia que a quantidade de matéria da estrela teria se estivesse dispersa no infinito.

Usando a solução para $A(r)$ e a condição de equilíbrio hidrostático no termo R_{22} da equação de Einstein temos

$$-1 + \left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right] \left[1 - \frac{rp'}{p + \rho}\right] + \frac{M(r)}{r} - 4\pi\rho r^2 = -4\pi(\rho - p)r^2 ,$$

e isolando o termo com $p'(r)$ obtemos

$$-r^2 p'(r) = M\rho \left(1 + \frac{p}{\rho}\right) \left(1 - \frac{4\pi r^3 p}{M}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} . \quad (1.14)$$

Suponhamos agora $\rho(r)$, $M(r)$ e $p(r)$ conhecidos, e voltemos à condição de equilíbrio hidrostático, (equação (1.12)). Chegamos à equação

$$\frac{B'}{B} = \frac{2}{r^2} [M(r) + 4\pi r^3 p(r)] \left[1 - \frac{2M(r)}{r}\right]^{-1} ,$$

cujas solução é

$$B(r) = \exp \left\{ - \int_r^\infty \frac{2}{\tilde{r}^2} [M(\tilde{r}) + 4\pi \tilde{r}^3 p(\tilde{r})] \left[1 - \frac{2M(\tilde{r})}{\tilde{r}}\right]^{-1} d\tilde{r} \right\} ,$$

onde fixamos a constante de integração de modo que $\lim_{r \rightarrow \infty} B(r) = 1$.

Fora da estrela $p(r) = \rho(r) = 0$, $M(r) = M(R) = \text{constante}$. Assim as componentes da métrica são

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1 - \frac{2M(R)}{r} ,$$

o que é a solução de Schwarzschild para o exterior da estrela.

1.7 Estrelas com densidade uniforme

Para um caso particular onde o fluido é incompressível, supomos $\rho = \text{cte}$. Então a equação (1.14) fica

$$\frac{-p'(r)}{[\rho + p(r)] \left[\frac{\rho}{3} + p(r)\right]} = 4\pi r \left(1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}\right)^{-1} .$$

Supondo-se que a pressão seja nula na superfície e integrando de fora pra dentro temos

$$\frac{p(r) + \rho}{3p(r) + \rho} = \left(\frac{1 - \frac{8\pi\rho R^2}{3}}{1 - \frac{8\pi\rho r^2}{3}} \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

onde R é o raio da estrela.

Isolando-se $p(r)$ e expressando ρ em função da massa estelar e raio, encontramos

$$p(r) = \frac{3M}{4\pi R^3} \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}}{\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} - 3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}}} \right) .$$

As componentes da métrica nesse caso são

$$A(r) = \left(1 - \frac{2Mr^2}{R^3} \right)^{-1}$$

e

$$B(r) = \frac{1}{4} \left(3\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} \right)^2 .$$

A pressão é infinita para

$$r_\infty = \sqrt{9R^2 - \frac{4R^3}{M}} .$$

Para a pressão não divergir para nenhum valor de r real, r_∞ deve ser imaginário. Deste modo, obtemos um vínculo entre o raio e a massa. Voltando para unidades com G e c diferentes de 1, temos a seguinte condição

$$\frac{MG}{c^2} < \frac{4}{9}R .$$

Nesse caso, o raio de Schwarzschild é menor que $\frac{8}{9}$ do raio da estrela, logo não há nenhuma singularidade na solução tanto dentro quanto fora da estrela. A referência [1] prova que esta condição deve valer para todas as estrelas, com densidade uniforme ou não.

1.8 Campos esfericamente simétricos dependentes do tempo

Encontramos uma solução de estrela com densidade uniforme, tentemos agora uma solução de um objeto inicialmente com densidade uniforme e dependente do tempo, colapsando para um buraco negro.

Um campo esfericamente simétrico dependente do tempo pode ser expresso por uma métrica da forma

$$ds^2 = -B(r, t)dt^2 + A(r, t)dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) .$$

As componentes independentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{B''}{2A} + \frac{B'A'}{4A^2} - \frac{B'}{Ar} + \frac{B'^2}{4AB} + \frac{\ddot{A}}{2A} - \frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{4AB} , \\ R_{01} &= -\frac{\dot{A}}{Ar} , \\ R_{11} &= \frac{B''}{2B} - \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{A'B'}{4AB} - \frac{A'}{Ar} - \frac{\ddot{A}}{2B} - \frac{\dot{A}^2}{4A^2} - \frac{\dot{B}\dot{A}}{4AB} , \\ R_{22} &= -1 + \frac{1}{A} - \frac{rA'}{2A^2} + \frac{rB'}{2AB} , \end{aligned}$$

e as outras componentes são

$$\begin{aligned} R_{33} &= R_{22}\sin^2\theta , \\ R_{12} &= R_{13} = R_{23} = R_{02} = R_{03} = 0 . \end{aligned}$$

A referência [1] prova o teorema de Birkhoff, que diz que um campo gravitacional esfericamente simétrico no espaço vazio deve ser estático. Então a solução no exterior da estrela não depende do tempo e é dada pela solução de Schwarzschild (equação (1.8)). Resta agora encontrar a solução no interior da estrela.

Para a solução interior, vamos mudar para um sistema de coordenadas mais conveniente, as coordenadas comóveis. Trata-se de um sistema de coordenadas que se move de acordo com o movimento das partículas, no nosso caso, de acordo com o fluido estelar. Nesse sistema de coordenadas as partículas estão em posições fixas, mas a distância entre elas muda com o tempo. É como se desenhássemos linhas de latitude e longitude numa esfera. O raio da esfera pode diminuir com o tempo, mas as coordenadas das partículas permanece constante. Um relógio neste sistema de coordenadas está em queda livre, e sua leitura portanto dará o tempo próprio. Então, neste sistema de coordenadas, $g_{00} = -1$, e

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j .$$

Como a métrica é esfericamente simétrica, ela deve ser da forma

$$ds^2 = -dt^2 + U(r, t)dr^2 + V(r, t) (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) .$$

As componentes independentes do tensor de Ricci são

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} , \\ R_{01} &= \frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} , \\ R_{11} &= \frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{V'U'}{4U^2} - \frac{\ddot{V}}{2} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4U} . \end{aligned}$$

Para um fluido com pressão desprezível

$$T^{\mu\nu} = \rho U^\mu U^\nu ,$$

e para um sistema de coordenadas comóveis ³

$$\begin{aligned} U^0 &= 1 , \\ U^1 &= U^2 = U^3 = 0 . \end{aligned} \tag{1.15}$$

As equações $T^\mu_{\nu;\mu} = 0$ são automaticamente satisfeitos para $\nu = 1, 2, 3$. Para $\nu = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\dot{U}}{2U} + \frac{\dot{V}}{V} \right) = 0 ,$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho V \sqrt{U} \right) = 0 . \tag{1.16}$$

Como já visto na equação (1.7), podemos escrever as equações de Einstein da seguinte forma

$$R_{\mu\nu} = -8\pi S_{\mu\nu} ,$$

com

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda_\lambda = \rho \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu \right) .$$

³A letra U é utilizada tanto para a velocidade do fluido quanto para a componente da métrica, típico problema de um alfabeto finito. Como as componentes da velocidade já são 1 ou 0, ela não será mais representada por U . Isso deve evitar qualquer confusão.

As componentes não nulas de $S_{\mu\nu}$ são

$$\begin{aligned} S_{00} &= \frac{\rho}{2} , \\ S_{11} &= \rho \frac{U}{2} , \\ S_{22} &= \rho \frac{V}{2} , \\ S_{33} &= S_{22} \sin^2 \theta . \end{aligned}$$

Substituindo $R_{\mu\nu}$ e $S_{\mu\nu}$ encontrados nas equações de Einstein, temos

$$\frac{1}{U} \left(\frac{V''}{V} - \frac{V'^2}{2V^2} - \frac{U'V'}{2UV} \right) - \frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{U}\dot{V}}{2UV} = -4\pi\rho , \quad (1.17)$$

$$-\frac{1}{V} + \frac{1}{U} \left(\frac{V''}{2V} - \frac{U'V'}{4UV} \right) - \frac{\ddot{V}}{2V} - \frac{\dot{V}\dot{U}}{4VU} = -4\pi\rho , \quad (1.18)$$

$$\frac{\ddot{U}}{2U} + \frac{\ddot{V}}{V} - \frac{\dot{U}^2}{4U^2} - \frac{\dot{V}^2}{2V^2} = -4\pi\rho , \quad (1.19)$$

$$\frac{\dot{V}'}{V} - \frac{V'\dot{V}}{2V^2} - \frac{\dot{U}V'}{2UV} = 0 . \quad (1.20)$$

Supondo-se ρ dependente apenas do tempo, isto é, uniforme para cada valor específico de t , e fazendo-se uma separação de variáveis, podemos escrever as funções U e V como

$$\begin{aligned} U(r, t) &= R^2(t)f(r), \\ V(r, t) &= S^2(t)g(r). \end{aligned}$$

Da equação (1.20) temos que

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{\dot{R}}{R}$$

e pode-se normalizar f e g tal que $S(t) = R(t)$. Podemos também redefinir a coordenada radial de modo que eliminamos uma das funções arbitrárias da métrica. Seja

$$\begin{aligned} U(r, t) &= R^2(t)f(r) , \\ V(r, t) &= R^2(t)r^2 , \end{aligned}$$

as equações (1.17) e (1.18) tomam a forma

$$-\frac{f'(r)}{rf^2(r)} - \ddot{R}(t)R(t) - 2\dot{R}^2 = -4\pi R^2(t)\rho(t) , \quad (1.21)$$

$$\left[-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rf^2(r)} - \frac{f'(r)}{2rf^2(r)} \right] - \ddot{R}(t)R(t) - 2\dot{R}^2 = -4\pi R^2(t)\rho(t) . \quad (1.22)$$

O primeiro termo de cada uma das equações acima é obviamente constante, sendo convenientemente escolhido como $-2k$,

$$-\frac{f'(r)}{rf^2(r)} = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{rf^2(r)} - \frac{f'(r)}{2rf^2(r)} = -2k .$$

A solução única para $f(r)$ é

$$f(r) = \frac{1}{1 - kr^2} .$$

Então a solução no interior da estrela é

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] . \quad (1.23)$$

Falta agora calcular $R(t)$ e $\rho(t)$. Voltando à equação (1.16), podemos mostrar que

$$\rho(t)R^3(t) = \text{constante} .$$

Normalizando r de modo que $R(0) = 1$ temos

$$\rho(t) = \frac{\rho(0)}{R^3(t)} .$$

Voltando às equações (1.21) e (1.22) temos que

$$\begin{aligned} -2k - \ddot{R}(t)R(t) - 2\dot{R}^2(t) &= -4\pi\rho(0)R^{-1}(t) , \\ \ddot{R}(t)R(t) &= -\frac{4\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t) . \end{aligned}$$

Somando as duas equações obtemos

$$\dot{R}^2(t) = -k + \frac{8\pi}{3}\rho(0)R^{-1}(t) .$$

Supondo-se que o fluido esteja inicialmente em repouso, $\dot{R}(0) = 0$, então

$$k = \frac{8\pi}{3}\rho(0) . \quad (1.24)$$

A equação para $R(t)$ fica então

$$\dot{R}^2(t) = k [R^{-1}(t) - 1] .$$

A solução para essa equação é dada por uma ciclóide descrita pelas equações paramétricas

$$\begin{aligned} t &= \frac{\psi + \operatorname{sen}\psi}{2\sqrt{k}} , \\ R &= \frac{1 + \cos\psi}{2} . \end{aligned}$$

$R(t)$ vai para zero quando $\psi = \pi$, ou seja, para um certo tempo T definido por

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho(0)}} ,$$

vemos que fluido esférico com densidade inicial $\rho(0)$ e pressão zero vai colapsar do repouso para um estado com densidade de energia própria infinita.

Fora da estrela, pelo teorema de Birkhoff, a solução para a métrica pode ser dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right) d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\bar{\theta}^2 + \operatorname{sen}^2\bar{\theta} d\bar{\phi}^2) .$$

Para comparar as métricas devemos mudar a solução interior para a forma padrão. Comparando com a equação (1.23) é imediato que $\bar{r} = rR(t)$, $\bar{\theta} = \theta$ e $\bar{\phi} = \phi$.

Para achar a coordenada $\bar{t}$ usa-se a técnica do “fator de integração” descrita na referência [1] e o resultado é

$$\bar{t} = \sqrt{\frac{1 - ka^2}{k}} \int_{S(r,t)}^1 \frac{dR}{1 - \frac{ka^2}{R}} \sqrt{\frac{R}{1 - R}} , \quad (1.25)$$

com

$$S(r, t) = 1 - \sqrt{\frac{1 - kr^2}{1 - ka^2}} (1 - R(t)) ,$$

onde a é uma constante arbitrária que pode ser escolhida como o raio inicial da estrela.

A solução no interior da estrela toma a forma

$$ds^2 = -B(\bar{r}, \bar{t})d\bar{t}^2 + A(\bar{r}, \bar{t})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 (d\bar{\theta}^2 + \text{se} n n^2 \bar{\theta} d\bar{\phi}^2) , \quad (1.26)$$

com

$$B = \frac{R}{S} \sqrt{\frac{1-kr^2}{1-ka^2}} \frac{\left(1 - \frac{ka^2}{S}\right)^2}{1 - \frac{kr^2}{R}} , \quad (1.27)$$

$$A = \left(1 - \frac{kr^2}{R}\right)^{-1} . \quad (1.28)$$

No raio da estrela

$$\begin{aligned} \bar{r} &= aR(t) , \\ \bar{t} &= \sqrt{\frac{1-ka^2}{k}} \int_{R(t)}^1 \frac{dR}{1 - \frac{ka^2}{R}} \sqrt{\frac{R}{1-R}} , \\ B &= \left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right) , \\ A &= \left(1 - \frac{ka^2}{R(t)}\right)^{-1} . \end{aligned}$$

Comparando com a solução exterior, as soluções se encaixam continuamente se

$$k = \frac{2M}{a^3} .$$

Comparando com (1.24) temos

$$M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho(0) ,$$

ou seja, para a solução dentro e fora da estrela formarem uma solução contínua é necessário que a massa da estrela seja igual à densidade inicial vezes o volume inicial da estrela.

Um sinal de luz emitido numa direção radial em um determinado tempo $\bar{t}$ terá $\frac{d\bar{r}}{dt}$ dado pela solução exterior. Por ser um sinal de luz, deve obedecer à condição $ds = 0$. Para um observador externo, esse sinal vai chegar num ponto distante $\bar{r}$ no tempo

$$\bar{t}' = \bar{t} + \int_{aR(t)}^{\bar{r}'} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr .$$

Tanto $\bar{t}$ quanto $\bar{t}'$ tendem ao infinito quando o raio da estrela tende ao raio de Schwarzschild, ou seja, quando

$$R(t) = \frac{2M}{a} = ka^2 .$$

O colapso para o raio de Schwarzschild levará um tempo infinito para um observador externo, pois sinais de luz emitidos constantemente por um emissor no raio da estrela tem um desvio para o vermelho tendendo ao infinito à medida que o raio da estrela tende ao raio de Schwarzschild. Passado o raio de Schwarzschild, os sinais emitidos não saem da região interior, então o colapso para $R(t) = 0$ é inobservável para o observador externo.

Esta solução dependente do tempo descreve um colapso estelar, e seu estudo pode nos dar informações sobre objetos experimentando esse colapso, como supernovas. Uma supernova é uma explosão que dá origem a um objeto extremamente luminoso. Esse objeto pode emitir em alguns meses a mesma energia que o sol emite em 10 bilhões de anos, então é de se esperar que ondas na redondeza desses objetos sejam instáveis.

Usaremos essa solução para estudar a evolução temporal de perturbações na redondeza desses objetos. Essa perturbação obedece à equação de Klein-Gordon, e a solução é uma oscilação com frequência complexa, também conhecida como Modos Quasi-Normais.

Capítulo 2

Modos Quasi-normais

Se batermos em um sino, perturbamos sua superfície, e voltando à configuração original, o sino vibra o ar em sua volta emitindo um som, que vai diminuindo com o tempo. Matematicamente, a frequência do som pode ser expressa por uma frequência complexa chamada de frequência quasi-normal. Uma corda vibrante em um meio também apresenta uma frequência quasi-normal, a oscilação vai diminuindo com o tempo à medida em que o fio perde energia para o meio.

A solução do problema do decaimento α , proposta por Gamow na referência [3], trata de uma partícula confinada num poço de potencial unidimensional com duas barreiras finitas. Supondo que não haja incidência vindo de $-\infty$ ou de $+\infty$, temos 5 regiões distintas, com 8 coeficientes. As 4 fronteiras dão 8 condições de contorno e a condição de normalização será um vínculo sobre a energia, que acaba sendo complexa. Assim, em um ponto fixo, há um decaimento exponencial no tempo da amplitude de probabilidade. O decaimento da partícula para $|x|$ grande terá um comportamento de modos quasi-normais.

Na Gravitação, perturbações na solução de um Buraco Negro ou de um objeto estelar se comportam como modos quasi-normais. Assim como nos sistemas já citados, essa perturbação evolui no tempo como uma oscilação com frequência complexa, sendo a parte real responsável pelo período da oscilação e a parte imaginária pelo amortecimento ou pela amplificação.

Os modos quasi-normais podem, a princípio, ser vistos em detectores de ondas gravitacionais. Eles carregam informações do objeto estelar que os emitiu, como massa, carga e momento angular. Esses modos podem inclusive dar informações sobre dimensões extras (ver referência [4]).

Um modo normal pode ser expresso na forma

$$\psi_n(x, t) \simeq \chi_n(x) \exp(i\omega_n t)$$

com ω_n real. A solução geral é uma superposição dos modos normais. Os modos quasi-normais possuem a mesma forma, mas com frequências complexas, como já mencionado. Suas propriedades gerais, mais complexas que aquelas dos modos normais, foram, sob o ponto de vista matemático, bastante estudadas na literatura, não sendo objeto de discussão nesta dissertação (ver referência [5]).

De modo geral, essas perturbações devem obedecer à equação de Klein-Gordon sem massa, que para a solução de Schwarzschild pode ser reduzida a

$$-\frac{\partial^2 \psi_l}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial r^{*2}} + V_l(r^*)\psi_l = 0 \quad (2.1)$$

onde r^* é a coordenada tartaruga. O potencial efetivo para perturbações axiais é dado por

$$V_l(r^*) = \left(1 - \frac{2M}{r(r^*)}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r(r^*)^2} + \frac{2M(1-s^2)}{r(r^*)^3} \right] \quad (2.2)$$

onde $s = 0, 1, 2$ para perturbações escalares, eletromagnéticas ou gravitacionais, respectivamente, e $r(r^*)$ é a função inversa da coordenada tartaruga. Como neste trabalho estudaremos apenas as perturbações escalares, sugerimos as referências [6] e [7] como guia para os outros tipos de perturbações.

Para este trabalho será considerada apenas a perturbação escalar. Isto significa que estamos supondo a existência de uma perturbação que, por definição, obedece à equação de Klein-Gordon. Para se estudar uma perturbação gravitacional, deveríamos perturbar as equações de Einstein. O procedimento é bem conhecido [8] e na verdade leva a generalizações da equação de Klein-Gordon. Por simplicidade consideramos aqui apenas o caso escalar. Basta então resolver a equação de Klein-Gordon para a métrica de uma estrela dependente do tempo, ou então em colapso apresentada no capítulo anterior utilizando métodos numéricos a serem tratados.

Para uma boa abordagem da teoria dos modos quasi-normais, as referências [6], [9] e [7] são as mais indicadas. As referências [10], [11], [12] e [13] tratam de problemas dependentes do tempo, mas nada tão drástico como um colapso estelar. Seguem abaixo alguns métodos existentes na literatura para obtermosmos a solução da equação (2.1).

2.1 Método de integração direta

Este método de integração é desenvolvido em um domínio diferente do sugerido pela equação (2.1). Apesar da equação de Klein-Gordon ser expressa

no domínio $r - t$, a ausência de termos com primeira derivada permite o tratamento dessa equação em um domínio mais conveniente. Este problema é detalhado na referência [14] com o nome de “Problema de Condições Iniciais Características”. Sejam as coordenadas nula retardada u e nula avançada v definidas por

$$\begin{aligned} u &= t - r^* , \\ v &= t + r^* . \end{aligned}$$

Nesse domínio, as derivadas que aparecem na equação (2.1) são expressas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} , \\ \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} . \end{aligned}$$

Podemos então escrever a equação de Klein-Gordon como

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4} V[r(u, v)] \psi = 0 . \quad (2.3)$$

Utilizando um resultado do método numérico explicado no próximo capítulo e definindo

$$\begin{aligned} \psi_N &= \psi(u + \Delta u, v + \Delta v) , \\ \psi_S &= \psi(u - \Delta u, v - \Delta v) , \\ \psi_E &= \psi(u + \Delta u, v - \Delta v) , \\ \psi_W &= \psi(u - \Delta u, v + \Delta v) , \end{aligned}$$

podemos substituir $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$ por

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} = \frac{\psi_N - \psi_E - \psi_W + \psi_S}{\Delta u \Delta v} .$$

Podemos também substituir $\psi(u, v)$ na equação (2.3) por

$$\psi(u, v) = \frac{1}{2} (\psi_E + \psi_W) . \quad (2.4)$$

Isolando ψ_N temos então que

$$\psi_N = \psi_W + \psi_E - \psi_S - \Delta u \Delta v V(r) \frac{\psi_W + \psi_E}{8} . \quad (2.5)$$

Figura 2.1: Célula computacional para $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v}$.

A figura acima mostra a célula computacional utilizada por este método. Como cada ponto N depende apenas dos pontos S , E e W , dado um conjunto de condições iniciais nas retas $u = 0$ e $v = 0$, encontra-se o valor de ψ dentro do ângulo formado por estas retas.

2.2 Método Semi-Analítico

Analizando a equação (2.1), supõe-se uma dependência temporal na forma $e^{i\omega t}$. Podemos então escrever essa equação como

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + Q(x) \psi = 0 ,$$

onde x é a coordenada tartaruga e $Q(x) = \omega^2 + V(x)$. Esta equação tem a mesma forma da equação de Schrödinger, que teria $Q(x) = -\frac{2m}{\hbar^2} [V(x) - E]$. Dada a semelhança, podemos usar a aproximação WKB tão estudada na Mecânica Quântica para resolver o problema dos Modos Quasi-Normais.

A função $-Q(x)$ é constante em $x = \pm\infty$ e atinge um máximo na vizinhança de $x = 0$. Suponhamos que haja duas raízes de $Q(x)$, ou pontos de retorno clássicos, denotados por x_1 e x_2 . Podemos dividir o domínio da função em 3 regiões por tais pontos de retorno.

Figura 2.2: Variação da função $-Q(x)$.

Entre os pontos de retorno a função $-Q(x)$ atinge um máximo, x_0 . A região à esquerda de x_2 é definida como região III. Entre os pontos de retorno, região II. E à direita de x_1 , região I. Nas regiões I e III, as funções de onda são dadas pela aproximação WKB.

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= Q^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \pm i \int_{x_2}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} , \\ \psi_{III}(x) &= Q^{-\frac{1}{4}} \exp \left\{ \pm i \int_x^{x_1} \sqrt{Q(t)} dt \right\} .\end{aligned}$$

Na região II, aproximamos $Q(x)$ por uma parábola, ou seja, tomamos $Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0)^2$, onde $Q_0 = Q(x_0)$ e $Q_0'' = \frac{d^2Q}{dx^2}|_{x_0}$. Definindo $k = \frac{1}{2}Q_0''$, $t = (4k)^{-\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}}(x - x_0)$ e $\nu + \frac{1}{2} = -i \frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}}$ a equação de Klein-Gordon fica da forma

$$\frac{d^2\psi_{II}}{dt^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 \right) \psi_{II} = 0 ,$$

cujas soluções são as funções parabólicas cilíndricas $D_\nu(t)$, encontradas na referência [15], e a solução geral toma a forma

$$\psi_{II} = AD_\nu(t) + BD_{-\nu-1}(it) .$$

Para $|t|$ grande, devemos tomar as expansões assintóticas de $D_\nu(t)$, também tratadas na referência [15], e expressando essas expansões em termos de $(x - x_0)$ temos que

$$\begin{aligned} \psi_{II} = & B e^{-\frac{3i\pi(\nu+1)}{4}} (4k)^{-(\nu+1)} (x - x_0)^{-(\nu+1)} e^{i\frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} \\ & + \left[A + \frac{B (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}}{\Gamma(\nu+1)} \right] e^{\frac{i\nu\pi}{4}} (4k)^{\frac{\nu}{4}} (x - x_0)^\nu e^{-i\frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} \end{aligned}$$

para $x \gg x_2$, e

$$\begin{aligned} \psi_{II} = & A e^{-\frac{3i\pi\nu}{4}} (4k)^{\frac{\nu}{4}} (x_0 - x)^\nu e^{-i\frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} \\ & \left[B - iA \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{i\nu\pi}{2}}}{\Gamma(-\nu)} \right] e^{i\frac{\pi(\nu+1)}{4}} (4k)^{-\frac{\nu+1}{4}} (x - x_0)^{-(\nu+1)} e^{i\frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} \end{aligned}$$

para $x \ll x_1$.

Apenas os termos com $e^{-i\frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}}$ encaixam com a forma assintótica da aproximação WKB de ψ_I e ψ_{III} , então os termos restantes, ou seja, com $e^{i\frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}}$ devem se anular. Para isso, basta que $B = 0$ e $\Gamma(-\nu) = \infty$. Esta última condição implica que ν deve ser um número inteiro, então, os modos devem obedecer à seguinte relação

$$\frac{Q_0}{\sqrt{2Q_0''}} = i \left(n + \frac{1}{2} \right) .$$

A forma assintótica de ψ_{II} fica da forma

$$\psi_{II}(x) = A e^{\frac{i\pi\nu}{4}} (4k)^{\frac{\nu}{4}} (x - x_0)^\nu e^{-i\frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} .$$

As formas assintóticas de ψ_I e ψ_{III} devem ser iguais à forma assintótica acima quando x assume um valor entre x_1 e x_2 . Lembrando que pela aproximação WKB ψ_I é dado por

$$\psi_I(x) = \frac{C_\pm}{Q^{\frac{1}{4}}} \exp \left\{ \pm i \int_{x_2}^x \sqrt{Q(t)} dt \right\} .$$

Para valores de x na região II, aproximamos $Q(t)$ por uma parábola, então faremos a seguinte substituição na equação acima

$$Q(t) \simeq Q_0 + \frac{Q_0''}{2} (t - x_0)^2 ,$$

que resulta em

$$\psi_I(x) \simeq \frac{C_{\pm}}{\sqrt[4]{\frac{Q_0''}{2} \left[\frac{2Q_0}{Q_0''} + (x - x_0)^2 \right]^{\frac{1}{4}}}} \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{Q_0''}{2}} \int_{x_2}^x \sqrt{\frac{2Q_0}{Q_0''} + (t - x_0)^2} dt \right\} . \quad (2.6)$$

Pode-se fazer a seguinte aproximação,

$$\left[\frac{2Q_0}{Q_0''} + (x - x_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \simeq (x - x_0) , \quad (2.7)$$

que é utilizada no denominador da equação (2.6), que deixa a solução $\psi_I(x)$ da forma

$$\psi_I(x) = C_{\pm} k^{-\frac{1}{4}} (x - x_0)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \pm i \sqrt{\frac{Q_0''}{2}} \int_{x_2}^x \sqrt{\frac{2Q_0}{Q_0''} + (t - x_0)^2} dt \right\} . \quad (2.8)$$

Utilizando o seguinte resultado

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x \sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 - a^2} \right) ,$$

e a aproximação (2.7), segue que

$$\psi_I = C_{\pm} k^{-\frac{1}{4}} (x - x_0)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \pm i \frac{k^{\frac{1}{2}}}{2} (x - x_0)^2 \right\} \exp \left\{ \pm i k^{\frac{1}{2}} \frac{Q_0}{Q_0''} \ln [2 (x - x_0)] \right\} .$$

O termo que vem da substituição de $t = x_2$ na integral pode ser absorvido pela constante arbitrária $C_{\pm}$, assim como o fator 2 no argumento do logaritmo. Substituindo as quantidades encontradas na expressão, pode-se reduzir $\psi_I(x)$ a

$$\psi_I = C_{\pm} k^{-\frac{1}{4}} (x - x_0)^{-\frac{1}{2}} e^{\pm i \frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} \exp \left\{ \mp \left(\nu + \frac{1}{2} \right) \ln (x - x_0) \right\} .$$

Seja $C_+ = 0$ e $C_- = C$, então

$$\psi_I = C k^{-\frac{1}{2}} (x - x_0)^{\nu} e^{-i \frac{\sqrt{k}(x-x_0)^2}{2}} .$$

A forma assintótica de ψ_I é idêntica à forma assintótica de ψ_{II} a menos de uma constante que pode ser absorvida pela constante arbitrária C . O cálculo para ψ_{III} é análogo.

Este método é particularmente útil para soluções estáticas, que como tal, devem ser estáveis. Ele é utilizado para calcular modos-quasinormais nas referências [16], [17], [18] e [19]. Estas referências tratam dos casos de Schwarzschild, Reissner-Nordström (buracos negros com carga) e Kerr (buracos negros com rotação).

No caso deste trabalho, dependente do tempo, escolheu-se resolver a equação de Klein-Gordon utilizando métodos numéricos no domínio do tempo.

Capítulo 3

Métodos Numéricos

Métodos numéricos são, muitas vezes, a única alternativa para encontrar a solução de um problema específico. Muitos problemas não têm solução analítica, isto é, a solução não pode ser escrita em termos das funções elementares (polinomial, trigonométrica, exponencial, etc.) e, portanto, o estudo de métodos numéricos é tão importante quanto o estudo dos tópicos tratados no capítulo anterior.

O caso do problema da integração direta para Modos Quasi-Normais é um exemplo de problemas cuja solução depende de métodos numéricos. No capítulo anterior ilustramos um dos métodos utilizados para obtermos a solução, entretanto, para uma métrica dependente do tempo, a mudança de variáveis para u e v feita não é em geral conveniente, sendo necessário um método numérico que trate do domínio do tempo.

Este capítulo é dedicado ao método numérico desenvolvido diretamente para este domínio. Inicialmente vamos ilustrar o Método de Newton-Raphson, depois vamos tratar o Método de Diferenças Finitas. Pode-se mostrar que o método de integração no domínio $u - v$ nada mais é que o Método de Diferenças Finitas em um sistema de coordenadas conveniente.

3.1 Método de Newton-Raphson

Como vimos na equação (2.2), algumas quantidades devem ser calculadas por funções implícitas. A mesma necessidade ocorre no cálculo da métrica de uma estrela esfericamente simétrica em colapso, onde existe uma função dada por uma ciclóide, calculada através de funções paramétricas.

O problema pode ser resumido em achar o valor de uma variável x através de y com a relação $y = f(x)$, sem termos conhecimento de uma função inversa para $f(x)$. Então, dado um certo y_0 , o x_0 desejado deve ser raiz da função

$g(x) = f(x) - y_0$. Nos dois casos tratados nesse trabalho as funções são unidimensionais. Para uma dimensão, o problema é eficientemente resolvido pelo Método de Newton-Raphson.

O Método de Newton-Raphson, ou método das tangentes, serve para encontrar a raiz de uma função. Dado uma tentativa inicial x_0 , calcula-se o valor da função nesse ponto, e o valor da derivada da função nesse ponto. Traça-se uma reta tangente a $f(x)$ passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$. A próxima tentativa, x_1 , é o ponto onde essa reta tangente cruza com a abscissa. Este processo é repetido diversas vezes.

Um suposto x_n é dito solução se o módulo da função nesse ponto for menor que um valor tolerável, ou se o módulo da diferença de x_n com o x anterior for menor que um outro valor tolerável, não necessariamente o mesmo.

Calculando a aproximação x_{n+1} em função de x_n e $f(x)$, chega-se à expressão

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} ,$$

comparando com a aproximação de Taylor para uma função unidimensional

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + O(h^2) ,$$

e supondo $f(x+h) = 0$, o valor a ser incrementado a x para anular a função é $h \simeq -\frac{f(x)}{f'(x)}$. A aproximação tende quadraticamente à solução, o que garante a sua rápida convergência.

Alguns problemas podem aparecer, como por exemplo no caso de existir uma derivada nula, que faz o valor de x_{n+1} tender ao infinito, ou no caso de existir mais de uma raiz real. Esses problemas não ocorrem se a primeira e a segunda derivada não mudam de sinal no intervalo desejado. Para mais detalhes, ver referência [20]. Neste trabalho, as funções utilizadas não apresentam esses problemas. Um problema que ocorreu neste trabalho, no entanto, foi ao achar o zero da coordenada tartaruga. Algumas vezes o algoritmo mandava a tentativa x_n para um valor de $r < 2M$, com isso o algoritmo calcula o valor de um logaritmo negativo, que não é real. Por isso o algoritmo nunca chegava a uma solução. Este problema é contornado simplesmente rebatendo a tentativa menor do que $2M$ para um valor maior do que $2M$.

3.2 Método de diferenças finitas em uma dimensão

Este método é muito simples, e serve muito bem como ilustração antes de tratarmos o método para duas dimensões. Seja uma equação diferencial ordinária de primeira ordem não homogênea

$$\frac{dx}{dt} = f(t) , \quad (3.1)$$

onde $f(t)$ é uma função suave conhecida. Sabemos que

$$\frac{dx}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} .$$

Assumindo um erro da ordem de h pode-se escrever

$$\frac{dx}{dt} \simeq \frac{x(t+h) - x(t)}{h} .$$

Então a equação diferencial (3.1) pode ser escrita como

$$\frac{x(t+h) - x(t)}{h} = f(t)$$

e pode ser rearranjada como

$$x(t+h) = x(t) + hf(t) . \quad (3.2)$$

Então, sabendo-se o valor de $x(t)$ em um instante específico, podemos calcular o valor de x no instante $t+h$. Dada uma condição inicial $x(t_0)$ podemos calcular o valor de $x(t)$ em todos os intervalos finitos espaçados de uma distância h um do outro.

Em uma dimensão não há preocupações com condições de contorno. A equação (3.2) ilustra bem o processo de estimar o valor de um $f(t)$ para um tempo grande a partir de interações de uma determinada condição inicial. O tempo máximo que este método estima é dado pelo número de interações calculadas e a precisão desejada.

Como o exemplo dado é uma equação diferencial de primeira ordem, cada ponto a ser calculado depende apenas de um ponto, o anterior. Para uma equação de segunda ordem, cada ponto vai depender de dois anteriores. Essa dependência faz todo o sentido porque mesmo analiticamente uma equação de segunda ordem precisa de duas condições iniciais para determinar uma solução, como o valor inicial e o valor da primeira derivada. No método

numérico, determinar a primeira derivada significa determinar o ponto seguinte, então as duas condições iniciais já citadas determinam os dois primeiros pontos e o método numérico estima os outros. Como não foi utilizada nenhuma equação unidimensional nesse problema, esse método para equações de segunda ordem não será detalhado, pois basta eliminar uma das variáveis do método para duas dimensões.

3.3 Método de diferenças finitas em duas dimensões

Este é o método utilizado para calcular os Modos Quasi-Normais. Como já foi dito, a existência de termos com derivadas de primeira ordem na equação diferencial impede o uso dos outros métodos já citados, ou os fazem ser tão trabalhoso quanto este método.

Assim como no caso unidimensional, vamos dividir o nosso domínio em pontos discretos e substituir a equação diferencial por uma equação de diferença finita. Equações diferenciais de segunda ordem podem ser classificadas em 3 casos: hiperbólicos, elípticos e parabólicos. O caso hiperbólico ocorre quando o sinal do termo com duas derivadas em uma variável é oposto ao sinal do termo com duas derivadas na outra variável. Se um desses dois termos for nulo, a equação é parabólica.

Para uma métrica euclidiana, a equação de Klein-Gordon resultará em uma equação elíptica, como a equação de Poisson. Para uma métrica lorentziana, uma equação hiperbólica, como a equação de onda. Consequentemente, a equação dos Modos Quasi-Normais será hiperbólica. Entretanto, o método numérico é o mesmo para todos os casos, então vamos tratar de um caso geral.

Para uma função de duas variáveis, a série de Taylor é dada por

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \binom{n}{k} \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}}(x, y) \Delta x^k \Delta y^{n-k} .$$

Reescrevendo a equação acima até o termo com $n = 2$ temos

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y + \Delta y) = & f(x, y) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Delta y \right] \quad (3.3) \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \Delta x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \Delta y^2 \right] + O(\Delta^3) . \end{aligned}$$

Essa expressão será utilizada para aproximar as derivadas que aparecem em uma equação diferencial parcial linear de segunda ordem, com o objetivo de obter uma equação de diferenças finitas. A forma mais geral da equação diferencial é

$$c_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + c_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + c_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + c_4 \frac{\partial f}{\partial x} + c_5 \frac{\partial f}{\partial y} + c_6 f + c_7 = 0 . \quad (3.4)$$

Os coeficientes c_n podem depender de x e y . Se não dependerem, a equação é dita “com coeficientes constantes”. Se c_7 for nulo, a equação é homogênea. O sinal de c_1 e c_2 vai determinar se a equação é hiperbólica ou elíptica. O método numérico não exige que esses coeficientes sejam constantes, e no caso do problema dos Modos Quasi-Normais eles não serão.

Com a equação (3.3) podemos tomar a seguinte diferença

$$f(x + \Delta x, y) - 2f(x, y) + f(x - \Delta x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) \Delta x^2 + O(\Delta x^4) .$$

Então, dividindo a equação acima por Δx^2 , pode-se substituir

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{f(x + \Delta x, y) - 2f(x, y) + f(x - \Delta x, y)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) . \quad (3.5)$$

Dividindo o domínio em pontos discretos

$$\begin{aligned} x &= x_0 + j * \Delta x , \\ y &= y_0 + l * \Delta y , \end{aligned}$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f_{j,l} , \\ f(x + \Delta x, y) &= f_{j+1,l} , \\ f(x - \Delta x, y) &= f_{j-1,l} , \\ f(x, y + \Delta y) &= f_{j,l+1} , \\ f(x, y - \Delta y) &= f_{j,l-1} . \end{aligned}$$

Essa notação, além de simples de escrever, é muito conveniente para o código do programa que executará o método numérico, pois a função $f(x, y)$

será representada por uma matriz real com índices j e l representando os pontos do domínio onde a função pode ser calculada. Voltando à equação (3.5), podemos substituir a segunda derivada em relação a x pela seguinte diferença

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{f_{j+1,l} - 2f_{j,l} + f_{j-1,l}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) .$$

Analogamente, os outros termos da equação diferencial parcial são substituídos por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{f_{j,l+1} - 2f_{j,l} + f_{j,l-1}}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{f_{j+1,l+1} - f_{j-1,l+1} - f_{j+1,l-1} + f_{j-1,l-1}}{4\Delta x \Delta y} + O(\Delta x \Delta y), \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{f_{j+1,l} - f_{j-1,l}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{f_{j,l+1} - f_{j,l-1}}{2\Delta y} + O(\Delta y^2). \end{aligned}$$

Num diagrama representando os pontos onde o método numérico pode calcular $f(x, y)$ por uma grade, podemos representar essas diferenças pelas seguintes células computacionais,

Figura 3.1: Célula computacional para $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Figura 3.2: Célula computacional para $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Figura 3.3: Célula computacional para $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Figura 3.4: Célula computacional para $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Figura 3.5: Célula computacional para $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Para um problema elíptico, deve-se atribuir as condições de contorno em uma região, como nos lados de um quadrado, para calcular o valor aproximado de $f(x, y)$ dentro dessa região apenas para os pontos da grade. Quanto maior a quantidade de pontos na grade, maior a precisão, porém o método exige mais cálculos e um maior armazenamento de informações

Figura 3.6: Domínio da solução para o problema elíptico. As células pretas representam a condição de contorno.

Para um problema de valor inicial (hiperbólico, sendo o tempo uma das variáveis), em geral além das condições de contorno (na primeira e última coluna), define-se duas condições iniciais. O valor da função para $t = 0$ e o valor da derivada da função para esse mesmo instante. O valor da função em $t = 0$ define a primeira linha, a derivada define a segunda linha, e como cada ponto depende apenas das duas linhas anteriores, calcula-se todas as linhas acima delas. Ao contrário do problema de condição de contorno (elíptico) que tem um limite definido e calcula-se a função dentro desse limite, temos uma linha inicial, e podemos calcular quantas linhas quisermos (limitado pela quantidade de informações que podemos armazenar no computador), e mesmo os limites da condição de contorno podem ser evitados se usarmos uma diferença assimétrica para substituir as derivadas somente para esses pontos.

Figura 3.7: Domínio da solução para o problema hiperbólico. As células pretas representam a condição inicial.

Na equação (3.5), os termos escolhidos são simétricos, mas podemos também fazer a seguinte substituição

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x + 2\Delta x, y) - 2f(x + \Delta x, y) + f(x, y)}{\Delta x^2} + O(\Delta x) ,$$

que é a forma assimétrica avançada para $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Na forma simétrica, os termos da ordem de Δx^3 da expansão de Taylor se cancelam, por isso a substituição dada pela equação (3.5) possui um erro da ordem de Δx^2 . Na substituição assimétrica, esses termos não se cancelam, e, portanto, o erro é da ordem de Δx .

Em termos dos pontos da grade escolhida, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{f_{j+2,l} - 2f_{j+1,l} + f_{j,l}}{\Delta x^2} + O(\Delta x) , \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{f_{j,l+2} - 2f_{j,l+1} + f_{j,l}}{\Delta y^2} + O(\Delta y) . \end{aligned}$$

Dada duas linhas de condição inicial ($l = 0, 1$) calcula-se $f_{j,l+2}$ como função dos pontos $f_{j,l+1}$, $f_{j,l}$, $f_{j+1,l}$ e $f_{j+2,l}$.

Figura 3.8: Célula assimétrica para a evolução da equação diferencial.

Como podemos ver na figura acima, o valor de $f_{j,l+2}$ depende apenas de pontos abaixo e à direita, então para a coluna rotulada por $j = 0$, ao invés de impor condições de contorno sem justificativas físicas, podemos simplesmente utilizar a forma assimétrica do método de diferenças finitas. Para a coluna rotulada por $j = N$, onde N é o número de colunas, podemos usar a forma assimétrica retrasada dada por

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f_{j,l} - 2f_{j-1,l} + f_{j-2,l}}{\Delta x^2} + O(\Delta x)$$

para calcular $f_{j,l+2}$ dependendo apenas de pontos abaixo e à esquerda.

Para uma equação diferencial cujo termo com derivadas mistas é diferente de zero, o cálculo para cada ponto de uma linha vai depender de outros dois pontos dessa mesma linha, não apenas de pontos de linhas anteriores. Ou se resolve para cada linha um sistema de N equações lineares, sendo N o número de pontos na linha, ou fixam-se duas colunas consecutivas de condição de contorno, que equivale a fixar o valor da solução em uma região contínua e não em uma fronteira.

Para evitar esse problema, pode-se definir um novo sistema de coordenadas $(\bar{x}, \bar{y})$ onde o termo de derivadas mistas é nulo. Pode-se também definir essa transformação de modo que o termo que multiplica a segunda derivada em x seja igual a mais ou menos a segunda derivada em y (em geral é bom manter o sinal da equação original). A solução para esta transformação de coordenadas é semelhante à solução da Equação de onda apresentada abaixo, e desenvolvida em mais detalhes para o caso específico da Equação de Klein-Gordon para a perturbação escalar no capítulo seguinte.

3.4 Equação de onda

O objetivo de estudar a equação de onda é que existe um truque para transformar uma equação diferencial de segunda ordem em um sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem. Esse truque não resolve a equação de Klein-Gordon, mas no próximo capítulo faremos uma mudança de coordenadas cuja solução é dada por um sistema de equações diferenciais idêntico à solução da equação de onda, com a exceção de que os coeficientes não são constantes.

Seja a equação de onda unidimensional, que nada mais é que um caso bem particular da equação (3.4),

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 .$$

Definindo as funções

$$\begin{aligned} r &= c \frac{\partial f}{\partial x} , \\ s &= \frac{\partial f}{\partial t} , \end{aligned}$$

podemos transformar a equação de segunda ordem em duas equações de primeira ordem, a saber

$$\begin{aligned}\frac{\partial r}{\partial t} &= c \frac{\partial s}{\partial x} , \\ \frac{\partial s}{\partial t} &= c \frac{\partial r}{\partial x} .\end{aligned}$$

Para uma equação de primeira ordem deve-se fazer a substituição

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_{j,l+1} - f_{j,l}}{\Delta t} + O(\Delta t) ,$$

pois nesse caso é necessário conhecer apenas uma linha de condições iniciais para calcular a linha seguinte.

O domínio da solução desse sistema de equações é idêntico ao domínio da equação diferencial hiperbólica, e não há motivos para não ser igual, pois a equação de onda é hiperbólica. A única diferença é que por se tratar de equações de primeira ordem, precisamos apenas de uma linha de condição inicial. Como existem funções que devemos impor a condição inicial, o número de condições impostas não muda, fisicamente o problema continua o mesmo.

Figura 3.9: Domínio da solução. As células pretas representam a condição inicial e as células em preto e branco as condições de contorno. A célula indicada por $(j,l+1)$ depende das células indicadas abaixo dela.

As equações de diferenças finitas para o problema são

$$r_{j,l+1} = r_{j,l} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (s_{j+1,l} - s_{j-1,l}),$$

$$s_{j,l+1} = s_{j,l} + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (r_{j+1,l} - r_{j-1,l}).$$

Como pode ser visto na referência [21], esse algoritmo é fácil de se obter, ocupa pouca memória e roda rapidamente. Entretanto, o algoritmo é instável, isto é, os erros numéricos crescem com as interações.

Pela condição de estabilidade de von Neumann (ver referência [21]) existe uma quantidade chamada de fator de amplificação cujo módulo quadrado deve ser menor que 1 para o algoritmo ser estável. Para esse algoritmo o fator de amplificação é

$$\xi(k) = 1 - i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x).$$

O algoritmo é incondicionalmente instável.

Substituindo $s_{j,l}$ e $r_{j,l}$ nas equações de diferenças finitas pela média na vizinhança em j , ou seja

$$r_{j,l+1} = \frac{1}{2} (r_{j+1,l} + r_{j-1,l}) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (s_{j+1,l} - s_{j-1,l}),$$

$$s_{j,l+1} = \frac{1}{2} (s_{j+1,l} + s_{j-1,l}) + \frac{c\Delta t}{2\Delta x} (r_{j+1,l} - r_{j-1,l}),$$

o fator de amplificação passa a ser

$$\xi(k) = \cos(k\Delta x) - i \frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{sen}(k\Delta x).$$

Para $|\xi(k)|^2 \leq 1$ é necessário que

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Obedecendo este critério, o algoritmo não apresenta problemas de estabilidade e pode ser calculado com eficiência e pouco espaço de armazenamento.

Munidos de todos esses métodos, podemos finalmente escrever um algoritmo que resolva o nosso problema, que é basicamente a solução de uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea com coeficientes não constantes. Agora que temos todo o aparato teórico e numérico necessários, podemos partir para perturbações de estrelas.

Capítulo 4

Perturbações de Estrelas

Neste capítulo estudamos a solução dos Modos Quasi-Normais para um sistema gravitacional, ou seja, encontramos numericamente a solução da equação de Klein-Gordon para uma métrica específica.

Inicialmente vamos desenvolver o problema para uma métrica esfericamente simétrica arbitrária, dada por

$$ds^2 = -B(r, t) dt^2 + A(r, t) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 ,$$

onde $B(r, t)$ e $A(r, t)$ são duas funções arbitrárias de r e t .

O objetivo de trabalhar com métricas arbitrárias é poder utilizar o mesmo programa desenvolvido neste trabalho em outros projetos, bastando apenas mudar no código numérico a função que descreve a forma particular de B e A . Quando não for mais possível prosseguir com uma métrica arbitrária utilizaremos a solução encontrada que descreve um colapso gravitacional, com as funções B e A dadas pelas equações (1.27) e (1.28) respectivamente.

A equação de Klein-Gordon, como utilizada no problema, é dada por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi) = 0 .$$

O termo $\sqrt{-g}$ é dado por

$$\sqrt{-g} = \sqrt{AB} r^2 \sin \theta .$$

Desenvolvendo a conta, temos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] + \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] + \\ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 . \end{aligned}$$

Como a métrica é esfericamente simétrica, podemos separar as variáveis angulares supondo uma dependência na forma de harmônicos esféricos,

$$\Phi(r, t, \theta, \varphi) = \phi(r, t) Y_{lm}(\theta, \varphi) .$$

A dependência angular se desacopla utilizando

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial Y_l^m}{\partial \theta} \right] + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_l^m}{\partial \varphi^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} Y_l^m = 0 .$$

Assim a equação para $\phi(r, t)$ fica

$$-\frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] + \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi = 0 .$$

Agora o problema depende apenas de r e t .

Pode-se definir uma função arbitrária $f(r, t)$ de modo que

$$\phi(r, t) = \frac{\psi(r, t)}{f(r, t)} .$$

Assim, podemos tomar uma escolha conveniente de $f(r, t)$ que simplifique a equação de Klein-Gordon, quem sabe até mesmo anular um termo.

Seguindo com o desenvolvimento da equação de Klein-Gordon, temos

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\dot{\psi}}{f} \right] + \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{\partial}{\partial t} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\dot{f}}{f^2} \psi \right] + \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{\psi'}{f} \right] \\ & - \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{f'}{f^2} \psi \right] - \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{\psi}{f} = 0 . \end{aligned}$$

Aplicando regras simples de cálculo, a equação acima pode ser substituída

por

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt{AB}} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} \frac{1}{f} \ddot{\psi} - \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\dot{f}}{f^2} \dot{\psi} + \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\dot{A}}{2Bf} \dot{\psi} - \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\dot{B}}{2Bf} \dot{\psi} \right] \\
& + \frac{1}{\sqrt{AB}} \left[\sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\dot{f}}{f^2} \dot{\psi} + \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\ddot{f}}{f^2} \psi - \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{2\dot{f}^2}{f^3} \psi + \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\dot{f}}{f^2} \frac{\dot{A}}{2B} \psi \right. \\
& \quad \left. - \sqrt{\frac{A}{B}} \frac{\dot{f}}{f^2} \frac{\dot{B}}{2B} \psi \right] + \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{r^2} \left[\sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \psi'' + \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{2r}{f} \psi' - \sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{f'}{f^2} \psi' \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{A}{B}} r^2 \frac{B'}{2A} \psi' - \sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{A'}{2A} \psi' \right] - \frac{1}{\sqrt{AB}} \frac{1}{r^2} \left[\sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{f'}{f^2} \psi' \right. \\
& \quad \left. + 2r \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{f'}{f^2} \psi + \sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{f''}{f^2} \psi - \sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{2(f')^2}{f^3} \right. \\
& \quad \left. + \sqrt{\frac{A}{B}} r^2 \frac{f'}{f^2} \frac{B'}{2A} \psi - \sqrt{\frac{B}{A}} r^2 \frac{f'}{f^2} \frac{A'}{2A} \psi \right] - \frac{l(l+1)}{r^2} \frac{1}{f} \psi = 0 .
\end{aligned}$$

Multiplicando por f e agrupando os termos, temos

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{B} \ddot{\psi} + \left[\frac{2}{B} \frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{2B} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B} \frac{\dot{B}}{B} \right] \dot{\psi} \\
& + \frac{1}{A} \psi'' + \left[\frac{2}{Ar} - \frac{2}{A} \frac{f'}{f} + \frac{1}{2A} \frac{B'}{B} - \frac{1}{2A} \frac{A'}{A} \right] \psi' \\
& + \left[\frac{1}{B} \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{2}{B} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 + \frac{1}{2B} \frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B} \frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{B}}{B} - \frac{2}{Ar} \frac{f'}{f} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{A} \frac{f''}{f} + \frac{2}{A} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 - \frac{1}{2A} \frac{f'}{f} \frac{B'}{B} + \frac{1}{2A} \frac{f'}{f} \frac{A'}{A} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi = 0 .
\end{aligned}$$

Essa é a forma mais conveniente que podemos escrever a equação de Klein-Gordon nas coordenadas r e t . Porém, para o problema de Modos Quasi-Normais, mesmo no caso mais simples, o de Schwarzschild, podemos fazer uma mudança de coordenadas para simplificar o problema. No caso de Schwarzschild, o resultado da transformação de coordenadas deve ser uma equação conveniente de ser integrada diretamente no domínio $u - v$.

4.1 Transformação de Coordenadas

Pode-se fazer uma transformação de coordenadas para que nessas novas coordenadas a função que multiplique a segunda derivada no tempo seja igual à função que multiplica a segunda derivada no raio, mas com o sinal trocado. Assim o tratamento numérico do problema é simplificado

Seja

$$\begin{aligned} r &= r(x, \tau) , \\ t &= t(x, \tau) . \end{aligned}$$

Substituindo na equação de Klein-Gordon, temos que

$$\begin{aligned} & \left[-\frac{1}{B}\dot{\tau}^2 + \frac{1}{A}\tau'^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \left[-\frac{1}{B}\dot{x}^2 + \frac{1}{A}x'^2 \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ & + \left[-\frac{1}{B}2\dot{\tau}\dot{x} + \frac{1}{A}2\tau'x' \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial \tau} + \left\{ \left[\frac{2}{B}\frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{2B}\frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B}\frac{\dot{B}}{B} \right] \dot{\tau} \right. \\ & + \left[\frac{2}{Ar} - \frac{2}{A}\frac{f'}{f} + \frac{1}{2A}\frac{B'}{B} - \frac{1}{2A}\frac{A'}{A} \right] \tau' - \frac{\ddot{\tau}}{B} + \frac{\tau''}{A} \left. \right\} \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \\ & + \left\{ \left[\frac{2}{B}\frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{2B}\frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B}\frac{\dot{B}}{B} \right] \dot{x} + \left[\frac{2}{Ar} - \frac{2}{A}\frac{f'}{f} + \frac{1}{2A}\frac{B'}{B} - \frac{1}{2A}\frac{A'}{A} \right] x' \right. \\ & - \left. \frac{\ddot{x}}{B} + \frac{x''}{A} \right\} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \left[\frac{1}{B}\frac{\ddot{f}}{f} - \frac{2}{B}\left(\frac{\dot{f}}{f}\right)^2 + \frac{1}{2B}\frac{\dot{f}}{f}\frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B}\frac{\dot{f}}{f}\frac{\dot{B}}{B} - \frac{2}{Ar}\frac{f'}{f} \right. \\ & - \left. \frac{1}{A}\frac{f''}{f} + \frac{2}{A}\left(\frac{f'}{f}\right)^2 - \frac{1}{2A}\frac{f'}{f}\frac{B'}{B} + \frac{1}{2A}\frac{f'}{f}\frac{A'}{A} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \psi = 0. \quad (4.1) \end{aligned}$$

Para a equação tomar a forma conveniente já citada, de que o termo com duas derivadas em x seja menos o termo com duas derivadas em τ , e também que o termo com derivada mista seja nulo, é necessário que

$$-\frac{1}{B}\dot{\tau}^2 + \frac{1}{A}\tau'^2 = \frac{1}{B}\dot{x}^2 - \frac{1}{A}x'^2 \quad (4.2)$$

e

$$-\frac{1}{B}\dot{\tau}\dot{x} + \frac{1}{A}\tau'x' = 0. \quad (4.3)$$

Façamos uma pausa e consideremos o caso de Schwarzschild. Devemos testar se as equações acima são válidas para esse caso, afinal uma generalização sempre deve englobar os casos simples conhecidos.

Para a solução de Schwarzschild, sabemos que $B(r, t) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, assim como $A(r, t) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$ e $f(r, t) = r$.

A equação (4.3) admite solução do tipo $\tau = t$ e $x = x(r)$, a equação (4.2) fica

$$\begin{aligned} -\dot{\tau}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \tau'^2 &= \dot{x}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 x'^2, \\ -1 &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 x'^2, \\ x' &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \\ x(r) &= r + 2M \ln(r - 2M), \end{aligned}$$

ou seja, $x(r)$ é a coordenada tartaruga.

Os termos com uma derivada se anulam com a escolha de $f(r, t) = r$, ou seja, $x = r + 2M \ln(r - 2M)$ e $\tau = t$ levam a equação de Klein-Gordon para a forma apresentada na equação (2.1) com $x = r^*$.

Voltando ao caso geral, com A e B funções arbitrárias de r e t . Precisamos de um método numérico para resolver as equações (4.3) e (4.2).

4.2 Solução Numérica das Coordenadas Especiais

Voltando à equação (4.3), podemos isolar $\dot{x}$ como

$$\dot{x} = \frac{B}{A} \frac{\tau'}{\dot{\tau}} x'. \quad (4.4)$$

Para substituir na equação (4.2) e obter o seguinte resultado,

$$-\frac{1}{B} \dot{\tau}^2 + \frac{1}{A} \tau'^2 = \frac{1}{B} \frac{B^2}{A^2} \frac{\tau'^2}{\dot{\tau}^2} x'^2 - \frac{1}{A} x'^2,$$

que pode ser rearranjado como

$$-\frac{1}{B} \dot{\tau}^2 + \frac{1}{A} \tau'^2 = \frac{B}{A} \frac{x'^2}{\dot{\tau}^2} \left(-\frac{1}{B} \dot{\tau}^2 + \frac{1}{A} \tau'^2 \right).$$

O termo entre parênteses é o termo que multiplica $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}$ e é diferente de zero, portanto podemos dividir a equação acima pelo termo entre parênteses e obter

$$\frac{B}{A} \frac{x'^2}{\dot{\tau}^2} = 1,$$

Isolando $\dot{\tau}$ temos uma das equações do sistema que devemos resolver, que é

$$\dot{\tau} = \sqrt{\frac{B}{A}} x' . \quad (4.5)$$

Substituindo o resultado acima em (4.4) temos a segunda equação do sistema,

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{B}{A}} \tau' . \quad (4.6)$$

Nota-se que esse sistema de equações diferenciais é idêntico ao sistema de equações que resolve a equação de onda. A única diferença é que, na equação de onda, as derivadas espaciais eram acompanhadas apenas de c , enquanto na solução das coordenadas especiais temos $\sqrt{\frac{B}{A}}$. Essa diferença é irrelevante para o método numérico apresentado, então, podemos tomar as seguintes diferenças finitas

$$\begin{aligned} \dot{x}_{j,l} &= \frac{x_{j,l+1} - x_{j,l}}{\Delta t} , \\ x'_{j,l} &= \frac{x_{j+1,l} - x_{j-1,l}}{2\Delta r} , \\ \dot{\tau}_{j,l} &= \frac{\tau_{j,l+1} - \tau_{j,l}}{\Delta t} , \\ \tau'_{j,l} &= \frac{\tau_{j+1,l} - \tau_{j-1,l}}{2\Delta r} . \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} x_{j,l+1} &= x_{j,l} + \frac{\Delta t}{2\Delta r} \sqrt{\frac{B_{j,l}}{A_{j,l}}} (\tau_{j+1,l} - \tau_{j-1,l}) , \\ \tau_{j,l+1} &= \tau_{j,l} + \frac{\Delta t}{2\Delta r} \sqrt{\frac{B_{j,l}}{A_{j,l}}} (x_{j+1,l} - x_{j-1,l}) . \end{aligned}$$

Por condições de estabilidade numérica, como explicado no caso da solução da equação de onda, os termos $x_{j,l}$ e $\tau_{j,l}$ devem ser trocados por $(x_{j+1,l} + x_{j-1,l})/2$ e $(\tau_{j+1,l} + \tau_{j-1,l})/2$, respectivamente. A equação de diferenças finitas para $x(r, t)$ e $\tau(r, t)$ ficam

$$x_{j,l+1} = \frac{1}{2} (x_{j+1,l} + x_{j-1,l}) + \frac{\Delta t}{2\Delta r} \sqrt{\frac{B_{j,l}}{A_{j,l}}} (\tau_{j+1,l} - \tau_{j-1,l}) , \quad (4.7)$$

$$\tau_{j,l+1} = \frac{1}{2} (\tau_{j+1,l} + \tau_{j-1,l}) + \frac{\Delta t}{2\Delta r} \sqrt{\frac{B_{j,l}}{A_{j,l}}} (x_{j+1,l} - x_{j-1,l}) . \quad (4.8)$$

Com a condição inicial $\tau = t$, temos que para $l = 0$, $\tau_{j,0} = 0$ e $\dot{\tau}_{j,0} = 1$, então

$$x' = \sqrt{\frac{A(r, 0)}{B(r, 0)}}.$$

Não é possível prosseguir com A e B arbitrários como estávamos fazendo até agora. Vamos então a partir de agora tratar especificamente do caso de uma estrela em colapso, extensamente tratado no capítulo 1, e com a forma particular de A e B dadas pelas equações (1.28) e (1.27), respectivamente. Podemos ver nas figuras abaixo que a medida que o tempo vai avançando, as soluções analíticas de A e B tendem à métrica de Schwarzschild na região exterior à estrela, como era de se esperar de um colapso esfericamente simétrico.

Figura 4.1: Gráfico de $A(r, t)$. Cada linha corresponde a um valor de t constante

Figura 4.2: Gráfico de $B(r, t)$. Cada linha corresponde a um valor de t constante

Nos gráficos acima as funções foram deslocadas para cima com um deslocamento diferente para cada valor de t , pois para r maior que o raio da estrela os gráficos são idênticos e fica mais difícil ver que à medida que o tempo avança a métrica tenda a solução de Schwarzschild. As linhas que terminam em cima em cada uma das figuras acima é a solução de Schwarzschild.

Neste caso particular a condição inicial para x pode ser resolvida analiticamente como

$$x(r, 0) = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{8k-9k^2a^2}} \arctan \sqrt{\frac{(3\sqrt{1-ka^2}+1)(1-\sqrt{1-kr^2})}{(3\sqrt{1-ka^2}-1)(1+\sqrt{1-kr^2})}} & r \leq a \\ r + 2M \ln(r - 2M) - D & r > a \end{cases} \quad (4.9)$$

onde a constante D é tal que $x(r, 0)$ é uma função contínua.

Como condição de contorno, sabe-se que fora da estrela a solução é analítica e dada pela coordenada tartaruga, então, para os pontos do domínio que estiverem fora da estrela, o valor fixado é $x = r + 2M \ln(r - 2M) - D$ e $\tau = t$. Para $j = 0$, ou seja, a coluna da esquerda, utilizamos a forma assimétrica das equações de diferenças finitas pra evitar fixar uma solução, pois não encontramos nenhuma justificativa física para tal.

O código utilizado para calcular a solução numérica de $x(r, t)$ e $\tau(r, t)$ está apresentado no apêndice. Como podemos ver na figura abaixo, a condição inicial se assemelha a uma reta, assim como a solução no interior da estrela.

À medida que o raio da estrela (que é facilmente localizado pelo “bico” do gráfico se aproxima do raio de Schwarzschild, a coordenada x tende à coordenada tartaruga. Nesse caso, o nome coordenada tartaruga não é adequado, pois para tempos pequenos, x é aproximadamente uma reta, ou seja, se Aquiles for rápido o suficiente, ele consegue ultrapassar a tartaruga (horizonte de eventos).

Figura 4.3: Gráficos de $x(r, t)$. Cada linha corresponde a um valor de t constante.

Para a coordenada especial relativa ao tempo, podemos ver no gráfico abaixo que para alguns observadores dentro da estrela seus relógios podem acelerar e desacelerar em relação a observadores fora da estrela. No entanto, depois que a estrela finalmente colapsa em um buraco negro, os relógios de todos os observadores apresentam o mesmo resultado. O gráfico abaixo exhibe este comportamento. Para as regiões não mostradas no gráfico abaixo, $\tau = t$.

Figura 4.4: Gráficos de $\tau(r, t)$. Cada linha corresponde a um valor de r constante.

4.3 Cálculo dos Modos Quasi-Normais

Com a solução numérica das coordenadas especiais, podemos finalmente calcular os Modos Quasi-Normais. Voltando à equação de Klein-Gordon, podemos escrevê-la da forma

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \eta(x, \tau) \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \xi(x, \tau) \frac{\partial \psi}{\partial x} + V(x, \tau) \psi = 0. \quad (4.10)$$

Esta é a forma da equação que vamos utilizar no método de diferenças finitas. Ainda não escolhemos $f(r, t)$ para a métrica do colapso estelar. Poderíamos definir f de forma a anular uma das funções da equação acima, mas essa escolha não é conveniente em geral, e queremos que o algoritmo implementado englobe todos esses casos. Para um caso particular com $\eta = 0$ ou $\xi = 0$, basta mudar o código para que essas funções retornem zero independente dos valores das variáveis. Para o caso da estrela em colapso, nenhuma dessas funções é nula.

Aplicando o método de diferenças finitas na equação (4.10), devemos

substituir as derivadas pelas seguintes diferenças finitas

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} &= \frac{\psi_{j,l+1} - 2\psi_{j,l} + \psi_{j,l-1}}{\Delta \tau^2}, \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \frac{\psi_{j+1,l} - 2\psi_{j,l} + \psi_{j-1,l}}{\Delta x^2}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial \tau} &= \frac{\psi_{j,l+1} - \psi_{j,l-1}}{2\Delta \tau}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\psi_{j+1,l} - \psi_{j-1,l}}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

Substituindo na equação (4.10) e isolando o termo $\psi_{j,l+1}$ temos

$$\begin{aligned}\psi_{j,l+1} = & \left(1 - \frac{\eta(x, \tau)\Delta \tau}{2}\right)^{-1} \left[2\psi_{j,l} - \psi_{j,l-1} + \frac{\Delta \tau^2}{\Delta x^2} (\psi_{j+1,l} - 2\psi_{j,l} + \psi_{j-1,l}) \right. \\ & \left. - \frac{\eta(x, \tau)\Delta \tau}{2} \psi_{j,l-1} + \frac{\xi(x, \tau)\Delta \tau^2}{2\Delta x} (\psi_{j+1,l} - \psi_{j-1,l}) + V(x, \tau)\Delta \tau^2 \psi_{j,l} \right] \quad (4.11)\end{aligned}$$

Tomando a seguinte condição inicial

$$\psi_{x,0} = \frac{A}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (4.12)$$

e usando a forma assimétrica da equação de diferenças finitas para não depender das condições de contorno, podemos calcular $\psi(x, \tau)$. Mas nas contas acima está implícito que conhecemos as funções η , ξ e V em termos de x e τ , o que não é o caso.

Pode-se então calcular essas funções em termos das coordenadas especiais, ou calcular r e t em função de x e τ . Escolhemos a segunda alternativa.

A maneira mais rigorosa de fazer esse cálculo é usando o método de Newton em duas dimensões, mas para usar esse método é necessário conhecer a matriz jacobiana da transformação, que pode ser calculada por diferenças finitas.

Outro problema é que só conhecemos os valores de x e τ para valores tabelados de r e t . Teríamos que calcular outros valores de x e τ por interpolação em duas dimensões (spline). Achados os valores de r e t pelo método de Newton, teríamos também que achar o valor das derivadas de x e τ nesse ponto. Esses valores poderiam ser calculados também por interpolação, usando pontos calculados por diferenças finitas.

Tantos processos numéricos exigiriam muita memória para armazenar tanta informação, e os erros numéricos se acumulariam entre um processo e outro, por isso decidimos fazer uma busca nas tabelas de $x(r, t)$ e $\tau(r, t)$ para

achar qual ponto (r, t) tem o valor de x e τ mais próximo de um dado x_0 e τ_0 .

Agora basta simplificar as funções η , ξ e V para uma forma mais conveniente. As funções com um “ $\sim$ ” são termos da equação de Klein-Gordon antes de serem divididas pelo termo que multiplica $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}$, ou seja, os termos correspondentes da equação (4.1)

4.4 Cálculo de $\eta(r, t)$, $\xi(r, t)$ e $V(r, t)$

Inicialmente nesse cálculo, voltamos à situação geral com A e B arbitrários. Como queremos um código numérico que englobe outros possíveis valores de A e B , vamos escrever as funções $\eta(r, t)$, $\xi(r, t)$ e $V(r, t)$ como função de A e B sem fixar um valor. O próprio código numérico vai se encarregar de atribuir esses valores.

A função $\eta(r, t)$ é a função que multiplica a derivada temporal simples da equação de Klein-Gordon, $\xi(r, t)$ é a função que multiplica a derivada espacial simples e $V(r, t)$ multiplica ψ . Antes de dividir pelo coeficiente de $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}$ temos o seguinte

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(r, t) &= \left[\frac{2}{B} \frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{2B} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B} \frac{\dot{B}}{B} \right] \dot{\tau} + \left[\frac{2}{Ar} - \frac{2}{A} \frac{f'}{f} + \frac{1}{2A} \frac{B'}{B} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2A} \frac{A'}{A} \right] \tau' - \frac{\ddot{\tau}}{B} + \frac{\tau''}{A}, \\ \tilde{\xi}(r, t) &= \left[\frac{2}{B} \frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{2B} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B} \frac{\dot{B}}{B} \right] \dot{x} + \left[\frac{2}{Ar} - \frac{2}{A} \frac{f'}{f} + \frac{1}{2A} \frac{B'}{B} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2A} \frac{A'}{A} \right] x' - \frac{\ddot{x}}{B} + \frac{x''}{A}. \\ \tilde{V}(r, t) &= \frac{1}{B} \frac{\ddot{f}}{f} - \frac{2}{B} \left(\frac{\dot{f}}{f} \right)^2 + \frac{1}{2B} \frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{2B} \frac{\dot{f}}{f} \frac{\dot{B}}{B} - \frac{2}{Ar} \frac{f'}{f} - \frac{1}{A} \frac{f''}{f} \\ &\quad + \frac{2}{A} \left(\frac{f'}{f} \right)^2 + \frac{1}{2A} \frac{f'}{f} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2}.\end{aligned}$$

Podemos simplificar as equações acima para $\tilde{\eta}(r, t)$ e $\tilde{\xi}(r, t)$ derivando as equações (4.5) e (4.6) de modo que

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(r, t) &= \left[\frac{2}{B} \frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{B} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{B} \frac{\dot{B}}{B} \right] \dot{\tau} + \left[\frac{2}{Ar} - \frac{2}{A} \frac{f'}{f} \right] \tau' . \\ \tilde{\xi}(r, t) &= \left[\frac{2}{B} \frac{\dot{f}}{f} + \frac{1}{B} \frac{\dot{A}}{A} - \frac{1}{B} \frac{\dot{B}}{B} \right] \dot{x} + \left[\frac{2}{Ar} - \frac{2}{A} \frac{f'}{f} \right] x' .\end{aligned}$$

Pode-se definir $f(r, t)$ de modo a anular um dos termos da equação diferencial, mas para isso teríamos outra equação diferencial a resolver e ainda seriam carregados erros inerentes ao método numérico. Um resultado interessante que podemos obter das equações acima é que para A e B independentes do tempo, a escolha de $f(r, t) = r$ implica em $\eta = 0$ e $\xi = 0$ independente da forma de A e B . Ou seja, para qualquer solução estática esfericamente simétrica, a transformação de coordenadas aqui tratadas e a escolha de $f(r, t) = r$ transforma a equação de Klein-Gordon em uma forma conveniente de ser integrada diretamente no domínio $u - v$.

Mesmo para o caso geral, vamos escolher $f(r, t) = r$ para simplificar as funções, apesar de não anulá-las. Essa escolha é conveniente para $V(r, t)$, pois reduzimos o número de termos nessa equação de 9 para 7. As funções após a substituição de $f(r, t) = r$ são

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(r, t) &= \frac{1}{B} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{\tau} , \\ \tilde{\xi}(r, t) &= \frac{1}{B} \left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right) \dot{x} , \\ \tilde{V}(r, t) &= \frac{1}{2Ar} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} ,\end{aligned}$$

e finalmente dividindo pelo termo que multiplica $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2}$, temos a seguinte forma final para as funções,

$$\eta(r, t) = \frac{\dot{\tau}}{B} \frac{\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right)}{\left(\frac{\dot{\tau}^2}{B} - \frac{\tau'^2}{A} \right)}, \quad (4.13)$$

$$\xi(r, t) = \frac{\dot{x}}{B} \frac{\left(\frac{\dot{A}}{A} - \frac{\dot{B}}{B} \right)}{\left(\frac{\dot{\tau}^2}{B} - \frac{\tau'^2}{A} \right)}, \quad (4.14)$$

$$V(r, t) = \frac{1}{\left(\frac{\dot{\tau}^2}{B} - \frac{\tau'^2}{A} \right)} \left[\frac{1}{2Ar} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right]. \quad (4.15)$$

Essas funções, para B e A dadas pela solução encontrada para um colapso estelar, apresentam o seguinte comportamento.

Figura 4.5: Gráficos de $\xi(r, t)$ para valores de t constantes.

Figura 4.6: Gráficos de $\eta(r, t)$ para valores de t constantes.

Figura 4.7: Gráficos de $V(r, t)$ para valores de t constante.

4.5 Resultados

Depois de compilar o código descrito no apêndice e executar o programa, encontramos comportamentos diferentes para os Modos Quasi-Normais, de-

pendendo do valor atribuído de raio inicial R e massa¹ M . O comportamento do modo não depende da posição x onde calculamos, isto é, não depende da condição inicial. No entanto, algumas excessões são observadas.

Um dos resultados obtidos, mais precisamente para $M = 1 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$, apresenta o seguinte comportamento variando o rótulo do momento angular l

Figura 4.8: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 1,0 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$.

Como podemos ver, esses Modos Quasi-Normais são crescentes, o oposto do comportamento visto em casos estáticos, como o Buraco Negro de Schwarzschild. Em algumas culturas esse comportamento é visto como explosivo. Os modos crescem indefinidamente. Um comportamento semelhante pode ser observado nos seguintes gráficos

¹Não exatamente a massa, mas a quantidade definida pela equação (1.13)

Figura 4.9: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 2,0 \times 10^7$ e $R = 2 \times 10^8$.

Figura 4.10: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 1,5 \times 10^7$ e $R = 2 \times 10^8$.

Nesses casos, os modos crescem como no caso para $M = 1,0 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$, porém, depois de um certo instante, ele para de crescer e mantém a oscilação constante. Não sabemos se o caso onde o modo cresce indefinidamente ele realmente cresce indefinidamente ou se apenas não calculamos o modo até o instante em que ele para de crescer. Esse caso de

crescimento indefinido possui a mesma razão $\frac{R}{M}$ que um dos casos onde o crescimento para, isso pode ser um indício de que o crescimento pode parar em um instante não calculado, principalmente que o caso com $R = 2 \times 10^8$ foi calculado para um tempo maior, e é justamente nesse tempo maior que o modo para de crescer.

Há casos também que apresentam um comportamento irregular, mas com amplitude variando dentro de uma certa região como podemos ver nos gráficos abaixo

Figura 4.11: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 3,5 \times 10^7$ e $R = 2 \times 10^8$.

Figura 4.12: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 2,5 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$.

Esses modos são curiosos. São uma oscilação com amplitude variável, ou seja, a amplitude não é uma função exponencial com coeficiente constante. E não sabemos também se os modos cresceram até chegar a essa região de amplitude, ou se essa região é apenas um transiente e esses valores de M e R apresentam comportamento assintótico para um tempo maior que os outros modos. Mantendo o valor de R fixo, podemos ver que os valores de M dos modos acima são valores intermediários sobre os valores variados de M , o que no mínimo os torna ainda mais curiosos.

Desconfiamos que os gráficos acima possam ser transientes devidos aos seguintes modos, que possuem de fato um transiente irregular e crescem indefinidamente após um certo valor, porém sem oscilar

Figura 4.13: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 4,0 \times 10^7$ e $R = 2 \times 10^8$.

Figura 4.14: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 2,0 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$.

Figura 4.15: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 3,0 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$.

Novamente não vamos concluir informações que podem não ser verdade. Os modos acima parecem não oscilar depois de um certo tempo, mas não sabemos se a parte real da frequência quasi-normal é realmente zero ou se ela apenas é muito pequena. E como ocorre em outros comportamentos, nesse há dois casos com a mesma razão $\frac{R}{M}$. para o outro caso, deveríamos calcular os modos para $M = 6 \times 10^7$ e $R = 2 \times 10^8$ para verificar se o mesmo comportamento ocorre, mas ainda não calculamos modos com esse valor de M . Esse comportamento é qualitativamente oposto aos casos com $R = 2 \times 10^8$ e $M = 1,5 \times 10^7$ ou $2,0 \times 10^7$, que começam crescendo a param.

Para $R = 1 \times 10^8$, e $M = 3,5 \times 10^7$ ou $M = 4,0 \times 10^7$, não há gráficos apresentáveis. Analisando os dados fornecidos pelo programa, vemos que os modos crescem muito rapidamente para o limite comportado pela variável utilizada no código (um valor por volta de 10^{300}). Esses casos estão muito próximos do limite $M < \frac{4}{9}R$ que a estrela deve obedecer para a pressão não assumir valores tendendo ao infinito.

Além dos modos calculados mudarem completamente de comportamento variando M , encontramos alguns modos que para o mesmo valor de R e M apresentam comportamentos distintos para valores de l diferentes.

Figura 4.16: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 3,0 \times 10^7$ e $R = 2 \times 10^8$.

Figura 4.17: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 1,5 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$.

Os casos exibidos acima possuem comportamento de oscilar irregularmente em uma região, mas em um deles, os casos que não exibem esse comportamento cresce oscilando regularmente, e a amplitude para de crescer, ou a amplitude cresce regularmente indefinidamente. E os casos acima possuem

a mesma razão $\frac{R}{M}$. Esses casos são um indício de que os casos com oscilação irregular sejam apenas transientes.

Mas temos um bom motivo para achar que os casos com oscilação irregular com amplitude em uma região possam não ser transientes. Voltando para o caso com $R = 1 \times 10^8$ e $M = 2,5 \times 10^8$, mas vamos exibir agora apenas com $l = 0$

Figura 4.18: Gráfico de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 2,5 \times 10^7$ e $R = 1 \times 10^8$ e $l = 0$.

Essa oscilação não é exatamente irregular. A amplitude não é constante e varia dentro de uma região, como já classificado esse caso, mas a variação é também uma oscilação regular. É como se o amortecimento fosse imaginário, e a oscilação dos modos nesse caso é um batimento de duas oscilações. Este fenômeno pode ser devido à presença de modos mais altos, tais como em [22], [23] e [24]. Ao contrário dos outros tipos de comportamento, esse comportamento em particular não se repete mudando o valor de x onde calculamos o modo.

E para completar a nossa grande variedade de comportamentos que os Modos Quasi-Normais exibem, temos ainda um caso que podemos apenas classificar como “estranho”, pois não encaixa em nenhuma classificação anterior

Figura 4.19: Gráficos de $|\psi(x, \tau)|$ com $M = 1,0 \times 10^7$ e $R = 2 \times 10^8$.

Estes modos apresentam inicialmente uma oscilação com período muito baixo, e amplitude regular que termina quase constante. Essa primeira região pode ser um transiente, mas a amplitude é precisamente a mesma para todos os valores de l apresentados no gráfico. Depois dessa região, o comportamento parece ser uma oscilação com período grande, mas não podemos afirmar isso com certeza ainda. Para este caso não foi calculado ainda um caso parecido com a mesma razão de $\frac{R}{M}$

Capítulo 5

Conclusões

Uma pergunta natural vem à cabeça ao deparar com diversos comportamentos exibidos pelos Modos Quasi-Normais: O que isso significa? Infelizmente não foi possível responder claramente a esse pergunta neste trabalho, mas esperamos chegar a uma conclusão precisa nos próximos meses. Podemos no entanto analisar qualitativamente as informações obtidas.

Pelo fato de alguns dos Modos Quasi-Normais serem crescentes, e não encontrarmos nenhum modo decrescente, vemos que o colapso estelar é instável por perturbações escalares. Como as perturbações escalares são instáveis, espera-se que perturbações eletromagnéticas e gravitacionais também o sejam, mas esses casos ainda serão estudados e verificaremos se esse fenômeno de fato ocorre.

Em um sistema mais simples com comportamento de Modos Quasi-Normais, como o som de um sino, se ocorressem modos crescentes, certamente em algum momento o material do sino não suportaria a oscilação e quebraria. Para uma estrela colapsando em um Buraco Negro, concluímos que esta estrela deve em algum momento explodir por não poder manter uma oscilação crescente.

Sabe-se que Supernovas são de fato fenômenos explosivos, emitindo em alguns meses mais energia que o sol emite em milhões de anos. Porém, na métrica caracterizada pelas equações (1.27) e (1.28), não há nenhuma informação que implique em emissão de partículas, supomos apenas uma implosão. Os nossos resultados de modos crescentes são um indício de que uma estrela em colapso gravitacional deve de fato explodir como mostram as observações.

Nessa mesma métrica de colapso, supomos também simetria esférica, e tratamos os Modos Quasi-Normais como defeitos pequenos nessa simetria esférica. Mas não há justificativas físicas para supor simetria esférica, porque equivale a supor uma estrela sem rotação. Fizemos essa suposição por

simplicidade. Ao comparar os resultados com as observações, não podemos esquecer que os fenômenos observados possuem na maioria dos casos velocidade angular não nula. Mas como o nosso caso simples sem rotação é instável, podemos esperar também que casos com rotação também sejam instáveis. Não faria sentido o sistema passar a ser estável com rotação, então acreditamos que os resultados obtidos nesse trabalho corroboram qualitativamente as observações de Supernovas.

As coordenadas especiais $x(r, t)$ e $\tau(r, t)$ podem ser úteis no tratamento de problemas esfericamente simétricos dependentes do tempo, e também dão importantes informações físicas dos objetos estudados, mas como a solução em geral deve ser dada por um método numérico, ela pode carregar um erro indesejável. Uma boa atribuição da função $f(r, t)$ simplifica o problema, e essa função é particularmente útil se for possível obter uma solução analítica que elimine os termos com uma derivada da equação de Klein-Gordon. Vimos que para uma métrica estática esfericamente simétrica, a escolha de $f(r, t) = r$ sempre anula esses termos.

Como mencionado, concentraremos nossos esforços no desenvolvimento de um modelo que possa explicar os vários comportamentos exibidos pelos Modos Quasi-Normais de uma perturbação escalar de um colapso gravitacional esfericamente simétrico. Estudaremos também outros tipos de perturbações. Temos um grande desafio pela frente.

Apêndice A

Notações e Convenções

- Índices latinos (como i, j e k) rotulam as coordenadas espaciais e variam de 1 a 3. Índices gregos (como μ, ν e σ) rotulam as coordenadas do espaço-tempo, variando de 0 a 4, sendo 0 o rótulo da coordenada temporal.
- A métrica de um espaço-tempo plano em coordenadas cartesianas tem os elementos diagonais dados por $(-1, +1, +1, +1)$.
- Índices repetidos denotam uma soma sobre os valores que estes índices podem assumir.
- Um ponto em cima de uma quantidade denota uma derivada temporal $\left(\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t}\right)$. Uma linha denota uma derivada em relação à coordenada radial $\left(A' = \frac{\partial A}{\partial r}\right)$.
- Vetores cartesianos são representados por uma flecha $\left(\vec{A} = A^i\right)$.
- A constante da gravitação G e a velocidade da luz c são iguais a 1, exceto quando são representadas explicitamente.

Apêndice B

Código-fonte

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

#define R0 (2*M+1) /* Raio inicial */
#define T0 0.0 /* Tempo inicial */
#define XISO (2*M+1)
#define TAU0 0.0
#define T1 (M_PI/(2*sqrt(k))) /* Tempo de colapso */
#define E0 1.E8 /* Raio inicial da estrela em 10^8 centímetros */
#define M 1.5E7 /* Massa da estrela em centímetros (G=c=1) */
#define ln log /* Pra escrever de maneira mais legível */
#define L 0 /* Momento angular */
#define tol 1.E-5 /* Tolerância. Admite-se um erro de até essa ordem */

FILE *RZERO, *R01, *R02, *R03, *R04, *R05, *R06, *R07, *R08, *R09, *R10;
FILE *TZERO, *T01, *T02, *T03, *T04, *T05, *T06, *T07, *T08, *T09, *T10;
FILE *EZERO, *E01, *E02, *E03, *E04, *E05, *E06, *E07, *E08, *E09, *E10;
FILE *CZERO, *C01, *C02, *C03, *C04, *C05, *C06, *C07, *C08, *C09, *C10;
FILE *VZERO, *V01, *V02, *V03, *V04, *V05, *V06, *V07, *V08, *V09, *V10;
FILE *PZERO, *P01, *P02, *P03, *P04, *P05, *P06, *P07, *P08, *P09, *P10;

int NR, NT; /* Número de pontos na primeira linha */
int NXIS, NTAU;
double **xis, **tau, **psi;

double dr, dt; /* Passo */
double dxis, dtau; /* Passo */
double k, D;
int a,b; /*Marcadores de limite, a em E0, e b em T1 */

double R (double t);
double S (double r, double t);
```

```

double A (double r, double t);
double B (double r, double t);
double eta (int j, int l);
double xi (int j, int l);
double V (int j, int l);
double newton (double t);
double tartaruga (double r);
void delta ();
double erredexis(double restrela);

int main(){

    int i, j, l, c, d, jini, jfim;
    int j2,l2,iaux, laux;
    int passo;

    double r,t;
    double restrela, testrela;
    double discr, disct; /* Discontinuidades */
    double XISMAX=0.0,TAUMAX=0.0;
    double minimo;

    /* Parâmetros da condição inicial PSI(r,0) que é uma gaussiana.*/
    double mu, sigma, amplitude;
    mu = (double) E0;
    sigma = (double) M;
    amplitude = (double) 1.E3;

    RZERO=fopen("r00.dat","w");
    R01=fopen("r01.dat","w");
    R02=fopen("r02.dat","w");
    R03=fopen("r03.dat","w");
    R04=fopen("r04.dat","w");
    R05=fopen("r05.dat","w");
    R06=fopen("r06.dat","w");
    R07=fopen("r07.dat","w");
    R08=fopen("r08.dat","w");
    R09=fopen("r09.dat","w");
    R10=fopen("r10.dat","w");
    TZERO=fopen("t00.dat","w");
    T01=fopen("t01.dat","w");
    T02=fopen("t02.dat","w");
    T03=fopen("t03.dat","w");
    T04=fopen("t04.dat","w");
    T05=fopen("t05.dat","w");
    T06=fopen("t06.dat","w");
    T07=fopen("t07.dat","w");
    T08=fopen("t08.dat","w");
    T09=fopen("t09.dat","w");

```

```

T10=fopen("t10.dat","w");
EZERO=fopen("e00.dat","w");
E01=fopen("e01.dat","w");
E02=fopen("e02.dat","w");
E03=fopen("e03.dat","w");
E04=fopen("e04.dat","w");
E05=fopen("e05.dat","w");
E06=fopen("e06.dat","w");
E07=fopen("e07.dat","w");
E08=fopen("e08.dat","w");
E09=fopen("e09.dat","w");
E10=fopen("e10.dat","w");
CZERO=fopen("c00.dat","w");
C01=fopen("c01.dat","w");
C02=fopen("c02.dat","w");
C03=fopen("c03.dat","w");
C04=fopen("c04.dat","w");
C05=fopen("c05.dat","w");
C06=fopen("c06.dat","w");
C07=fopen("c07.dat","w");
C08=fopen("c08.dat","w");
C09=fopen("c09.dat","w");
C10=fopen("c10.dat","w");
VZERO=fopen("v00.dat","w");
V01=fopen("v01.dat","w");
V02=fopen("v02.dat","w");
V03=fopen("v03.dat","w");
V04=fopen("v04.dat","w");
V05=fopen("v05.dat","w");
V06=fopen("v06.dat","w");
V07=fopen("v07.dat","w");
V08=fopen("v08.dat","w");
V09=fopen("v09.dat","w");
V10=fopen("v10.dat","w");
PZERO=fopen("p00.dat","w");
P01=fopen("p01.dat","w");
P02=fopen("p02.dat","w");
P03=fopen("p03.dat","w");
P04=fopen("p04.dat","w");
P05=fopen("p05.dat","w");
P06=fopen("p06.dat","w");
P07=fopen("p07.dat","w");
P08=fopen("p08.dat","w");
P09=fopen("p09.dat","w");
P10=fopen("p10.dat","w");

NR = (int) 2000; /* Número de pontos na primeira linha */
NT = (int) 2000; /* Número de pontos na primeira coluna */

```



```

NXIS = NR;
NTAU = 5*NT;
/*****
/* Atenção, dt deve ser menor ou igual a dr obrigatoriamente */
dt = (double) 4*E0/NT;          /* precisão */
dr = (double) 4*E0/NR;          /* precisão */
dtau=dt;
dxis=dr;
/*****
k = (double) ((2*M)/(E0*E0*E0));
ntrial = 100;

xis = (double **) malloc ( (NR+1) * sizeof (double *));
tau = (double **) malloc ( (NR+1) * sizeof (double *));
psi = (double **) malloc ( (NXIS+1) * sizeof (double *));
for(i=0;i<=NR;i++) {
    xis[i] = (double *) malloc ( (NT+1) * sizeof (double));
    tau[i] = (double *) malloc ( (NT+1) * sizeof (double));
}
for(i=0;i<=NXIS;i++){
    psi[i] = (double *) malloc ( (NTAU+1) * sizeof (double));
}

delta();

for(i=0;i<NR;i++){
    if ( R0 + (i+1)*dr > E0 ) {
        a=i;
        break;
    }
}

for(i=0;i<NT;i++){
    if ( E0*R(T0 + (i+1)*dt) < 2*M ) {
        b=i;
        break;
    }
}

/* Condições iniciais */
for(j=0; j<=NR; j++){

    r = (double) (R0) + j*dr;

    t = (double) (T0);

    tau[j][0] = t;

    xis[j][0] = tartaruga(r);

```

```

}

/* Cálculo preliminar de xis(r,t) e tau(r,t) */
for( l = 0 ; l <= NT ; l++ ){
    for( j = 0 ; j <= NR ; j++ ){

        r = (double) (R0) + j*dr;

        t = (double) (T0) + l*dt;

        if (j>0) {

if ( (l+1) > b ) {
    xis[j][l+1] = r + 2*M*ln(r-2*M) - D;
    tau[j][l+1] = t+dt;
}
else {
    if ( r > E0*R(t+dt) ) {
        xis[j][l+1] = r + 2*M*ln(r-2*M) - D;
        tau[j][l+1] = t+dt;
    }
    else {

        xis[j][l+1] = (xis[j+1][l]+xis[j-1][l])/2 +
(dt/dr)*sqrt((B(r,t))/(A(r,t)))*(tau[j+1][l] - tau[j-1][l])/2;

        tau[j][l+1] = (tau[j+1][l]+tau[j-1][l])/2 +
(dt/dr)*sqrt((B(r,t))/(A(r,t)))*(xis[j+1][l] - xis[j-1][l])/2;

        if (xis[j][l+1] > XISMAX) XISMAX=xis[j][l+1];
        if (tau[j][l+1] > TAUMAX) TAUMAX=tau[j][l+1];

    }
}
        }
    else {
/* Este else é para o caso de j=0, que calculo pela forma assimétrica */
/* para não precisar de condições de contorno */
if ( (l+1)>b ) {
    xis[j][l+1] = r + 2*M*ln(r-2*M) - D;
    tau[j][l+1] = t+dt;
}
else {

    xis[j][l+1] = xis[j][l] + (dt/dr)*sqrt((B(r,t))/(A(r,t)))*
(tau[j+1][l] - tau[j][l]);

```

```

        tau[j][l+1] = tau[j][l] + (dt/dr)*sqrt((B(r,t))/(A(r,t)))*
(xis[j+1][l] - xis[j][l]);

        if (xis[j][l+1] > XISMAX) XISMAX=xis[j][l+1];
        if (tau[j][l+1] > TAUMAX) TAUMAX=tau[j][l+1];

    }

    }

}

/* Correção das descontinuidades no raio da estrela */
for(l=0;l<b;l++) {

    t = T0 + l*dt;

    for(i=0;i<NR;i++){
        if ( R0 + (i+1)*dr > E0*R(t) ) {
c=i;
break;
        }
    }

    discr = xis[c+1][l] - xis[c][l];
    disct = tau[c+1][l] - tau[c][l];

    for(j=0;j<=c;j++) {
        xis[j][l] = xis[j][l] + discr;
        tau[j][l] = tau[j][l] + disct;
    }

}

/*Condição inicial*/
for (j=0;j<=NXIS;j++) {
    restrela = XIS0 + j*dxis;
    psi[j][1] = psi[j][0] = amplitude*exp(
-1*((restrela-mu)*(restrela-mu))/(2*sigma*sigma) );
}

for (l=1;l<NTAU;l++) {
    for (j=0;j<=NXIS;j++) {

        restrela = XIS0 + j*dxis;
        testrela = TAU0 + l*dtau;

        if (testrela > TAUMAX) {

```

```

t=testrela;
r=erredexis(restrela);

for(j2=0;j2<=NR;j2++)
    if ( (R0 + (j2+1)*dr) > r ) break;

for(l2=0;l2<=NR;l2++)
    if ( (R0 + (l2+1)*dr) > r ) break;

    }
    else if (restrela > XISMAX) {
t=testrela;
r=erredexis(restrela);

for(j2=0;j2<=NR;j2++)
    if ( (R0 + (j2+1)*dr) > r ) break;

for(l2=0;l2<=NR;l2++)
    if ( (R0 + (l2+1)*dr) > r ) break;

    }
    else{

jini=0;
jfim=NR;

while(jini!=jfim){
    jaux=(jini+jfim)/2;

    if ( xis[jaux][0] < restrela ) jini=jaux+1;
    else jfim = jaux;
}

    }

j2=jini;

minimo=1.0e10;
jaux=j2;

for(laux=0;laux<=b;laux++){
if(jaux==0) {

    if ( (fabs(xis[jaux][laux+1]-restrela) +
fabs(tau[jaux][laux+1]-testrela)) < minimo ){
        minimo=(fabs(xis[jaux][laux+1]-restrela) +
fabs(tau[jaux][laux+1]-testrela));
        l2=laux+1;

```

```

    }
    if ( (fabs(xis[jaux+1][laux+1]-restrela) +
    fabs(tau[jaux+1][laux+1]-testrela)) < minimo ){
        minimo=(fabs(xis[jaux+1][laux+1]-restrela) +
    fabs(tau[jaux+1][laux+1]-testrela));
        l2=laux+1;
       iaux=iaux+1;
    }
}
else{

    if ( (fabs(xis[jaux][laux+1]-restrela) +
    fabs(tau[jaux][laux+1]-testrela)) < minimo ){
        minimo=(fabs(xis[jaux][laux+1]-restrela) +
    fabs(tau[jaux][laux+1]-testrela));
        l2=laux+1;
    }
    if ( (fabs(xis[jaux+1][laux+1]-restrela) +
    fabs(tau[jaux+1][laux+1]-testrela)) < minimo ){
        minimo=(fabs(xis[jaux+1][laux+1]-restrela) +
    fabs(tau[jaux+1][laux+1]-testrela));
        l2=laux+1;
       iaux=iaux+1;
    }
    if ( (fabs(xis[jaux-1][laux+1]-restrela) +
    fabs(tau[jaux-1][laux+1]-testrela)) < minimo ){
        minimo=(fabs(xis[jaux-1][laux+1]-restrela)+
    fabs(tau[jaux-1][laux+1]-testrela));
        l2=laux+1;
       iaux=iaux-1;
    }
}
}

    }
    j2=iaux;

    if(j==0){

psi[j][l+1] = (1 - (eta(j2,l2)*dtau)/2)*
( 2*psi[j][l] - psi[j][l-1] +
(psi[j+2][l] - 2*psi[j+1][l] + psi[j][l])*(dtau*dtau)/(dxis*dxis) -
psi[j][l-1]*(eta(j2,l2)*dtau)*0.5 +
(psi[j+1][l]-psi[j][l])*xi(j2,l2)*dtau*dtau/dxis +
V(j2,l2)*dtau*dtau*psi[j][l]);

    }
    else{
if(j==NXIS){

```

```

    psi[j][l+1]=psi[j-1][l+1];

}
else{

    psi[j][l+1] = (1 - (eta(j2,l2)*dtau)/2)*
    ( 2*psi[j][l] - psi[j][l-1] +
    (psi[j+1][l] - 2*psi[j][l] + psi[j-1][l])*(dtau*dtau)/(dxis*dxis) -
    psi[j][l-1]*(eta(j2,l2)*dtau)*0.5 +
    (psi[j+1][l]-psi[j-1][l])*0.5*xi(j2,l2)*dtau*dtau/dxis +
    V(j2,l2)*dtau*dtau*0.5*(psi[j+1][l]+psi[j-1][l]));

}

    }

}

/*Imprimindo resultados*/
passo=NTAU/10;

for(j=0;j<=NTAU;j++){
    t = T0 + j*dtau;
    fprintf(PZERO,"%g %g\n",t,fabs(psi[0][j]));
    fprintf(P01,"%g %g\n",t,fabs(psi[1*passo][j]));
    fprintf(P02,"%g %g\n",t,fabs(psi[2*passo][j]));
    fprintf(P03,"%g %g\n",t,fabs(psi[3*passo][j]));
    fprintf(P04,"%g %g\n",t,fabs(psi[4*passo][j]));
    fprintf(P05,"%g %g\n",t,fabs(psi[5*passo][j]));
    fprintf(P06,"%g %g\n",t,fabs(psi[6*passo][j]));
    fprintf(P07,"%g %g\n",t,fabs(psi[7*passo][j]));
    fprintf(P08,"%g %g\n",t,fabs(psi[8*passo][j]));
    fprintf(P09,"%g %g\n",t,fabs(psi[9*passo][j]));
    fprintf(P10,"%g %g\n",t,fabs(psi[10*passo][j]));
}

passo=NT/10;

for(j=0;j<NR;j++){
    r = R0 + j*dr;
    fprintf(RZERO,"%g %g\n",r,xis[j][0]);
    fprintf(R01,"%g %g\n",r,xis[j][1*passo]);
    fprintf(R02,"%g %g\n",r,xis[j][2*passo]);
    fprintf(R03,"%g %g\n",r,xis[j][3*passo]);
    fprintf(R04,"%g %g\n",r,xis[j][4*passo]);
    fprintf(R05,"%g %g\n",r,xis[j][5*passo]);
    fprintf(R06,"%g %g\n",r,xis[j][6*passo]);
    fprintf(R07,"%g %g\n",r,xis[j][7*passo]);
    fprintf(R08,"%g %g\n",r,xis[j][8*passo]);
}

```

```

fprintf(R09,"%g %g\n",r,xis[j][9*passo]);
fprintf(R10,"%g %g\n",r,xis[j][10*passo]);
fprintf(TZERO,"%g %g\n",r,tau[j][0]);
fprintf(T01,"%g %g\n",r,tau[j][1*passo]);
fprintf(T02,"%g %g\n",r,tau[j][2*passo]);
fprintf(T03,"%g %g\n",r,tau[j][3*passo]);
fprintf(T04,"%g %g\n",r,tau[j][4*passo]);
fprintf(T05,"%g %g\n",r,tau[j][5*passo]);
fprintf(T06,"%g %g\n",r,tau[j][6*passo]);
fprintf(T07,"%g %g\n",r,tau[j][7*passo]);
fprintf(T08,"%g %g\n",r,tau[j][8*passo]);
fprintf(T09,"%g %g\n",r,tau[j][9*passo]);
fprintf(T10,"%g %g\n",r,tau[j][10*passo]);
fprintf(EZERO,"%g %g\n",r,eta(j,0));
fprintf(E01,"%g %g\n",r,eta(j,1*passo));
fprintf(E02,"%g %g\n",r,eta(j,2*passo));
fprintf(E03,"%g %g\n",r,eta(j,3*passo));
fprintf(E04,"%g %g\n",r,eta(j,4*passo));
fprintf(E05,"%g %g\n",r,eta(j,5*passo));
fprintf(E06,"%g %g\n",r,eta(j,6*passo));
fprintf(E07,"%g %g\n",r,eta(j,7*passo));
fprintf(E08,"%g %g\n",r,eta(j,8*passo));
fprintf(E09,"%g %g\n",r,eta(j,9*passo));
fprintf(E10,"%g %g\n",r,eta(j,10*passo));
fprintf(CZERO,"%g %g\n",r,xi(j,0));
fprintf(C01,"%g %g\n",r,xi(j,1*passo));
fprintf(C02,"%g %g\n",r,xi(j,2*passo));
fprintf(C03,"%g %g\n",r,xi(j,3*passo));
fprintf(C04,"%g %g\n",r,xi(j,4*passo));
fprintf(C05,"%g %g\n",r,xi(j,5*passo));
fprintf(C06,"%g %g\n",r,xi(j,6*passo));
fprintf(C07,"%g %g\n",r,xi(j,7*passo));
fprintf(C08,"%g %g\n",r,xi(j,8*passo));
fprintf(C09,"%g %g\n",r,xi(j,9*passo));
fprintf(C10,"%g %g\n",r,xi(j,10*passo));
fprintf(VZERO,"%g %g\n",r,V(j,0));
fprintf(V01,"%g %g\n",r,V(j,1*passo));
fprintf(V02,"%g %g\n",r,V(j,2*passo));
fprintf(V03,"%g %g\n",r,V(j,3*passo));
fprintf(V04,"%g %g\n",r,V(j,4*passo));
fprintf(V05,"%g %g\n",r,V(j,5*passo));
fprintf(V06,"%g %g\n",r,V(j,6*passo));
fprintf(V07,"%g %g\n",r,V(j,7*passo));
fprintf(V08,"%g %g\n",r,V(j,8*passo));
fprintf(V09,"%g %g\n",r,V(j,9*passo));
fprintf(V10,"%g %g\n",r,V(j,10*passo));
}

fclose(RZERO);

```

```
fclose(R01);
fclose(R02);
fclose(R03);
fclose(R04);
fclose(R05);
fclose(R06);
fclose(R07);
fclose(R08);
fclose(R09);
fclose(R10);
fclose(TZERO);
fclose(T01);
fclose(T02);
fclose(T03);
fclose(T04);
fclose(T05);
fclose(T06);
fclose(T07);
fclose(T08);
fclose(T09);
fclose(T10);
fclose(EZERO);
fclose(E01);
fclose(E02);
fclose(E03);
fclose(E04);
fclose(E05);
fclose(E06);
fclose(E07);
fclose(E08);
fclose(E09);
fclose(E10);
fclose(CZERO);
fclose(C01);
fclose(C02);
fclose(C03);
fclose(C04);
fclose(C05);
fclose(C06);
fclose(C07);
fclose(C08);
fclose(C09);
fclose(C10);
fclose(VZERO);
fclose(V01);
fclose(V02);
fclose(V03);
fclose(V04);
fclose(V05);
```



```

    fclose(V06);
    fclose(V07);
    fclose(V08);
    fclose(V09);
    fclose(V10);
    fclose(PZERO);
    fclose(P01);
    fclose(P02);
    fclose(P03);
    fclose(P04);
    fclose(P05);
    fclose(P06);
    fclose(P07);
    fclose(P08);
    fclose(P09);
    fclose(P10);

    return 0;
}

double R (double t){

    double psi;

    psi = newton(t);

    return ((1+cos(psi))/2);
}

double S (double r, double t){
    return (double)( 1. - sqrt( (1.-k*r*r)/(1.-k*E0*E0) )*(1. - R(t)) );
}

double newton (double t){

    int i;
    double psi, psi0, psi1, tol1, tol2, FF, FF1;

    psi0=0.1;
    tol1=0.00001;
    tol2=-0.00001;

    for(;;){

        FF = psi0 + sin(psi0) - 2*sqrt(k)*t ;
        FF1= 1 + cos(psi0);
        psi1=psi0-(FF/FF1);

        if ((FF>=tol2)&&(FF<=tol1)) {

```

```

        psi=psi0;
        break;
    }

    if (((psi1-psi0)>=tol2)&&((psi1-psi0)<=tol1)) {
        psi=psi0;
        break;
    }

    psi0=psi1;

    if(psi1>1.E8){
        psi0=psi1/(1.E8);
    }

}

return psi;
}

double A (double r, double t){
    double x;
    x = R(t);
    if ( t > T0 + b*dt ) {
        return 1/(1-((2*M)/r));
    }
    else {
        if ( r > E0*x ) {
            return 1/(1-((2*M)/r));
        }
        else {
            return 1/( 1 - (k*r*r/(x*x*x)) );
        }
    }
}

double B (double r, double t){
    double x,y;
    x=R(t);
    y=S((r/x),t);

    if ( t > T0 + b*dt ) {
        return (1-((2*M)/r));
    }
    else {
        if ( r > E0*x ) {
            return (1-((2*M)/r));
        }
        else {

```

```

        return (x/y)*sqrt( (1-k*r*r/(x*x))/(1-k*E0*E0) )*(
(1-k*E0*E0/y)*(1-k*E0*E0/y)/(1-k*r*r/(x*x*x)));
    }
}

double eta (int j, int l) {
    /* Essa função vale zero fora da estrela */

    double r,t;

    r = R0 + j*dr;
    t = T0 + l*dr;

    if(l==0){
        return 0;
    }
    else{

        if (l>b) {
            return 0;
        }
        else {

            if ( r > E0*R(t) ) {
return 0;
            }
            else {

if (j==0) {
    return ( (1/(B(r,t)))*( A(r,t+dt)/(A(r,t)) -
A(r,t-dt)/(A(r,t))-B(r,t+dt)/(B(r,t))+B(r,t+dt)/(B(r,t)))*
(tau[j][l+1]-tau[j][l-1])/(8*dt*dt))/(((tau[j][l+1]-tau[j][l-1])*
(tau[j][l+1]-tau[j][l-1])/(4*dt*dt*B(r,t)))
-((tau[j+1][l]-tau[j][l])*(tau[j+1][l]-tau[j][l])/(dr*dr*A(r,t)))));
}
else {

    return ( (1/(B(r,t)))*( A(r,t+dt)/(A(r,t)) -
A(r,t-dt)/(A(r,t))- B(r,t+dt)/(B(r,t)) + B(r,t+dt)/(B(r,t)))*
(tau[j][l+1]-tau[j][l-1])/(8*dt*dt) )/(((tau[j][l+1]-tau[j][l-1])*
(tau[j][l+1]-tau[j][l-1])/(4*dt*dt*B(r,t)))
-((tau[j+1][l]-tau[j-1][l])*(tau[j+1][l]-tau[j-1][l])/(4*dr*dr*A(r,t)))));
}

        }
    }
}
}

```

```

double xi (int j, int l) {
    /* Essa função vale zero fora da estrela */

    double r,t;

    r = R0 + j*dr;
    t = T0 + l*dr;

    if(l==0){
        return 0;
    }
    else{

        if (l>b) {
            return 0;
        }
        else {

            if ( r > E0*R(t) ) {
return 0;
            }
            else {

if(j==0) {

    return ( (1/(B(r,t)))*( A(r,t+dt)/(A(r,t)) -
A(r,t-dt)/(A(r,t)) -B(r,t+dt)/(B(r,t))+B(r,t+dt)/(B(r,t)))*
(xis[j] [l+1]-xis[j] [l-1])/(8*dt*dt))/(((tau[j] [l+1]-tau[j] [l-1])*
(tau[j] [l+1]-tau[j] [l-1])/(4*dt*dt*B(r,t)))
-((tau[j+1] [l]-tau[j] [l])*(tau[j+1] [l]-tau[j] [l])/(dr*dr*A(r,t)))));
}
else{

    return ( (1/(B(r,t)))*( A(r,t+dt)/(A(r,t)) -
A(r,t-dt)/(A(r,t)) - B(r,t+dt)/(B(r,t)) + B(r,t+dt)/(B(r,t)))*
(xis[j] [l+1]-xis[j] [l-1])/(8*dt*dt))/(((tau[j] [l+1]-tau[j] [l-1])*
(tau[j] [l+1]-tau[j] [l-1])/(4*dt*dt*B(r,t))) -
((tau[j+1] [l]-tau[j-1] [l])*(tau[j+1] [l]-tau[j-1] [l])/
(4*dr*dr*A(r,t)))));

}
        }
    }
}

double V (int j, int l){

```

```

double r,t;

r = R0 + j*dr;
t = T0 + l*dr;

if (l==0) {

    if (j==0) {

        return (double) ( ( A(r+dr,t)/(A(r,t)) - A(r-dr,t)/(A(r,t)) -
B(r+dr,t)/(B(r,t))+B(r-dr,t)/(B(r,t)))/(4*r*dr*(A(r,t)))-L*(L+1)/(r*r))
/(((tau[j][l+1]-tau[j][l])*(tau[j][l+1]-tau[j][l])/(dt*dt*B(r,t))) -
((tau[j+1][l]-tau[j][l])*(tau[j+1][l]-tau[j][l])/(dr*dr*A(r,t)))) );
    }
    else {

        return (double) ( ( A(r+dr,t)/(A(r,t)) - A(r-dr,t)/(A(r,t)) -
B(r+dr,t)/(B(r,t)) + B(r-dr,t)/(B(r,t)))/(4*r*dr*(A(r,t)))-L*(L+1)/(r*r))
/( ( (tau[j][l+1]-tau[j][l])*(tau[j][l+1]-tau[j][l])/(dt*dt*B(r,t))) -
((tau[j+1][l]-tau[j-1][l])*(tau[j+1][l]-tau[j-1][l])/(4*dr*dr*A(r,t)))));
    }
}
else {

    if (j==0){

        return (double) ((A(r+dr,t)/(A(r,t))-A(r-dr,t)/(A(r,t)))-
B(r+dr,t)/(B(r,t))+B(r-dr,t)/(B(r,t)))/(4*r*dr*(A(r,t)) -
L*(L+1)/(r*r))/(((tau[j][l+1]-tau[j][l-1])*(tau[j][l+1]-tau[j][l-1])/
(4*dt*dt*B(r,t)))-((tau[j+1][l]-tau[j][l])*(tau[j+1][l]-tau[j][l])/
(dr*dr*A(r,t)))));
    }
    else{

        return (double) ( (A(r+dr,t)/(A(r,t))-A(r-dr,t)/(A(r,t)))-
B(r+dr,t)/(B(r,t))+B(r-dr,t)/(B(r,t)))/(4*dr*r*(A(r,t))
- L*(L+1)/(r*r))/(((tau[j][l+1]-tau[j][l-1])*(tau[j][l+1]-tau[j][l-1])/
(4*dt*dt*B(r,t)))-((tau[j+1][l]-tau[j-1][l])*(tau[j+1][l]-tau[j-1][l])/
(4*dr*dr*A(r,t)))));
    }
}
}

double tartaruga (double r) {
    if ( r <= E0 ) {
        return ( ( 4/sqrt(8*k-9*k*k*E0*E0 ) ) *atan(
sqrt(((3*sqrt(1-k*E0*E0)+1) * (1-sqrt(1-k*r*r)))

```

```

/( (3*sqrt(1-k*E0*E0) -1 )*(1+sqrt(1-k*r*r)))));
}
else{
    return ( r + 2*M*ln( r - 2*M ) - D );
}
}

void delta (){
    int i;
    int j;

    double d;

    for(i=0;i<=NR;i++){
        if( (R0 + i*dr) < E0 )
        {
j=i;
        }
    }

    d = ((4/sqrt(8*k-9*k*k*E0*E0))*atan(sqrt(((3*sqrt(1-k*E0*E0)+1)*
( 1 - sqrt( 1 - k*(R0+j*dr)*(R0+j*dr)) ))/((3*sqrt(1-k*E0*E0)-1)*
(1+sqrt(1-k*(R0+j*dr)*(R0+j*dr)))))) - ((4/sqrt(8*k-9*k*k*E0*E0))*
atan( sqrt( ((3*sqrt(1-k*E0*E0) +1 ) * (1-sqrt(1-k*(R0+(j-1)*dr)*
(R0+(j-1)*dr))))/((3*sqrt(1-k*E0*E0)-1)*(1+sqrt(1-k*(R0+(j-1)*dr)*
(R0+(j-1)*dr)))) ) ) ) );

    D = ( (R0+(j+1)*dr) + 2*M*ln( (R0 + (j+1)*dr) - 2*M ) ) -
( (4/sqrt(8*k-9*k*k*E0*E0) )*atan( sqrt(((3*sqrt(1-k*E0*E0)+1)*
( 1 - sqrt(1-k*(R0+j*dr)*(R0+j*dr))))/((3*sqrt(1-k*E0*E0)-1)*
(1+sqrt(1-k*(R0+j*dr)*(R0+j*dr)))))))-d;

    return;
}

double erredexis(double restrela){

    int i;
    double r, r0, r1, tol1, tol2, FF, FF1;

    r0=restrela;
    tol1=1;
    tol2=-1;

    if(r1<2*M) r1=4*M-r1;

    for(;;){

        FF = ( r0 + 2*M*ln( r0 - 2*M ) - D - restrela);

```

```

FF1= r0/(r0-2*M);
r1=r0-(FF/FF1);

if ((FF>=tol2)&&(FF<=tol1)) {
    r=r0;
    break;
}

if (((r1-r0)>=tol2)&&((r1-r0)<=tol1)) {
    r=r0;
    break;
}

r0=r1;

}

return r;
}

```

Referências Bibliográficas

- [1] Weinberg S., *Gravitation and Cosmology* John Wiley & Sons (1972)
- [2] D’Inverno R. “*Introducing Einstein’s Relativity*”, Oxford University Press, New York 2004
- [3] Gamow, G., “*Zur Quantentheorie des Atomkernes*”, Z. Phys. 51, 204-212 (1928)
- [4] Maartens R., Seahra S. S., Clarkson C., “*Detecting extra dimensions with gravity wave spectroscopy: the black string brane-world*”, Phys. Rev. Lett. 94 121302, (2005).
- [5] Bachelot, A., Motet-Bachelet A., “*Les résonances d’un trou noir de Schwarzschild*”, Annales de l’Institut Henri Poincare, v. 59, n. 1, p. 3-68, 1993
- [6] Kokkotas K. D., “*Quasi-Normal Modes of Stars and Black Holes*”, gr-qc/9909058.
- [7] Nollert H., “*Quasinormal modes: the characteristic ‘sound’ of black holes and neutron stars*”, Class. Quant Grav. 16, R159-R216 (1999).
- [8] Chandrasekhar S., “*The Mathematical Theory of Black Holes*”, Oxford University, New York, (1983).
- [9] Cardoso, V. “*Quasi Normal Modes and Gravitational Radiation in Black Holes Spacetimes*”, Ph.D. Thesis (Advisor: Jose Pizarro de Sande e Lemos), gr-qc/0404093.
- [10] Hod S., “*Wave Tails in Time Dependent Backgrounds*”, gr-qc 0201017 v1
- [11] Abdalla E., Chirenti C.B.M.H., Saa A., “*Quasinormal modes for the Vaidya metric*”, gr-qc 0609036 v2

- [12] Shao C., Wang B., Abdalla E., Su R., “*Quasinormal modes in time-dependent black hole background*”, gr-qc 0410025 v2
- [13] Xue L., Shen Z., Wang B., Su R., “*Numerical simulation of Quasi-Normal Modes in time-dependent background*”, gr-qc 0304109 v2
- [14] Molina C., “*Propagação de Campos em Buracos Negros Esféricos*”, tese de doutorado, 2003.
- [15] Bender C. M. e Orszag S. A., “*Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*” McGraw-Hill, New York (1978)
- [16] Iyer S., Will C. M., “*Black Hole Normal Modes: A WKB Approach. I. Foundations and Application of a Higher-order WKB Analysis of Potential-barrier Scattering*” Phys. Rev. D **35** 12 (1987)
- [17] Iyer S., “*Black Hole Normal Modes. A WKB Approach. II. Schwarzschild Black Holes*” Phys. Rev. D **35** 12 (1987)
- [18] Kokkotas K. D., Schutz B. F., “*Black Hole Normal Modes. A WKB Approach. III. The Reissner-Nordström Black Hole*” Phys. Rev. D **37** 12 (1998)
- [19] Seidel E., Iyer S. “*Black Hole Normal Modes. A WKB Approach. IV. Kerr Black Holes*” Phys. Rev. D **41** 2 (1990)
- [20] Humes A. F. P. C., Melo I. S. H., Martins W.T., Yoshida L.K. “*Noções de Cálculo Numérico*”, Mcgraw-Hill (1984)
- [21] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P., “*Numerical Recipes in C*”, Cambridge University Press, (2002).
- [22] Abdalla E., Giugno D. “*Shedding Some New Lights upon the Stellar Quasi-Normal Modes*”, arxiv:gr-qc/0612183
- [23] Abdalla E., Giugno D. “*An Extensive Search for Overtones in Schwarzschild Black Holes*”, arxiv:gr-qc/0611023
- [24] Giugno D. “*Estrelas Compactas e Buracos Negros - Um Estudo Comparativo de Propriedades Físicas e Modos Quasi-Normais*”, tese de doutorado, 2006.
- [25] R. H. Price, *Phys. Rev.* **D 5** (1972) 2419, 2439.
- [26] G. T. Horowitz and V. E. Hubeny, *Phys. Rev.* **D** hep-th/9909056; G. T. Horowitz, *Class. Quant. Grav.* **17** (2000) 1107.

- [27] B. Wang, C. Y. Lin and E. Abdalla, *Phys. Lett. B* **481** (2000) 79, hep-th/0003295.
- [28] B. Wang, C. Molina and E. Abdalla *Phys. Rev. D*
- [29] Jiong-Ming Zhu, Bin Wang, E. A., *Phys. Rev. D* hep-th/0101133.
- [30] W. Unno, Y. Osaki, H. Ando, H. Saio, and H. Shibahashi, *Non-radial Oscillations of Stars*, Tokyo University Press, Tokyo, 1989
- [31] T. Regge and J. A. Wheeler, *J.A. Phys. Rev.* **108** (1957) 1063–1069.
- [32] K.S. Thorne and A. Campolattaro *Astrophys. J.* **149** (1967) 591–611;
R.H. Price and K.S. Thorne, *Astrophys. J.*, **155**, (1969) 163–182.
- [33] A. Chamblin, S. Hawking e H. Reall *Phys. Rev. D* **61** (2000) 065007
- [34] Sanjeev S. Seahra, Chris Clarkson, Roy Maartens gr-qc/0408032.
- [35] Schutz B. F., Will C.M., “*Black Hole Normal Modes: A Semianalytic Approach*” *Astrophys. J.*, **291** L33-L36 (1985).
- [36] Cardoso V., Dias O. J. C., Lemos J. P. S., Yoshida S., “*The Black Hole Bomb and Superradiant Instabilities*” hep-th/0404096 v3.
- [37] Teukolsky S. A., “*Perturbations of a Rotating Black Hole. I. Fundamental Equations for Gravitational, Electromagnetic, and Neutrino-field Perturbations*” *Astrophys. J.* **185** 635-647 (1973).
- [38] Choptuik M. W., “*Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field*” *Phys. Rev.* **70** 1 (1993)
- [39] Frolov V., Novikov I., *Black Hole Physics*, Springer (1998)