Universidade de São Paulo

Instituto de Física

**Perturbações lineares de buracos negros: estabilidade,
modos quase-normais e caudas.**

Olexandr Zhydenko

Orientador : Prof. Dr. Élcio Abdalla

Tese de doutorado apresentada no
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Élcio Abdalla (Orientador, IFUSP)

Prof. Dr. Alberto Vasquez Saa (IMECC, Unicamp)

Prof. Dr. Laerte Sodré Junior (IAGUSP)

Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin (UFABC)

Prof. Dr. Patrício Aníbal Letelier Sotomayor (IMECC, Unicamp)

São Paulo
2009

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e
Informação
do Instituto de Física da Universidade de São
Paulo

Zhydenko, Olexandr

Perturbações lineares de buracos negros: estabilidade,
modos quase normais e caudas, São Paulo, 2009.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Institutos de Física - Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Élcio Abdalla

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Relatividade (Física); 2. Física Teórica;
3. Teoria de Campos e Ondas; 4. Física computacional

USP/IF/SBI-046/2009

Resumo

Buracos negros têm as suas oscilações próprias, que são chamadas modos quase-normais. As oscilações próprias de buracos negros astrofísicos podem ser observadas no futuro mais próximo com a ajuda de detectores de ondas gravitacionais. Os modos quase-normais são também muito importantes no contexto de teste da estabilidade de objetos negros, da correspondência anti-de Sitter/Teoria Campos Conformes (AdS/CFT) e nas teorias em dimensões mais altas, como os cenários de mundo-brana e teoria das cordas.

Esta tese revê um número de trabalhos, que fornecem um estudo completo do espectro quase-normal de grande classe de buracos negros em quatro e mais altas dimensões para campos de vários spins e perturbações gravitacionais. Foi estudada numericamente a dependência dos modos quase-normais sobre um número de fatores, como a presença da constante cosmológica, o parâmetro de Gauss-Bonnet ou o aéter no espaço-tempo, a dependência do espectro sobre os parâmetros do buraco negro e os campos em consideração. Pela análise do espectro quase-normal, foi estudada a estabilidade de buracos negros Reissner-Nordström-de Sitter em dimensões mais altas, buracos negros de Kaluza-Klein com horizontes esmagados, buracos negros de Gauss-Bonnet e cordas negras. Uma atenção especial foi prestada à evolução de campos massivos no contexto de vários buracos negros. Foram considerados os seus toques quase-normais e as caudas de tempo tardio.

Além disso, foram apresentadas duas novas técnicas numéricas: uma generalização da melhora de Nollert para do método de Frobenius para problemas em dimensões mais altas e um método qualitativamente novo, que permite calcular frequências quase-normais de buracos negros, cujas métricas não são conhecidas analiticamente. Também foi considerada uma possibilidade da construção do análogo acústico do buraco negro de Schwarzschild.

Abstract

Black holes have their proper oscillations, which are called the quasi-normal modes. The proper oscillations of astrophysical black holes can be observed in the nearest future with the help of gravitational wave detectors. Quasi-normal modes are also very important in the context of testing of the stability of black objects, the anti-de Sitter/Conformal Field Theory (AdS/CFT) correspondence and in higher dimensional theories, such as the brane-world scenarios and string theory.

This dissertation reviews a number of works, which provide a thorough study of the quasi-normal spectrum of a wide class of black holes in four and higher dimensions for fields of various spin and gravitational perturbations. We have studied numerically the dependance of the quasi-normal modes on a number of factors, such as the presence of the cosmological constant, the Gauss-Bonnet parameter or the aether in the space-time, the dependance of the spectrum on parameters of the black hole and fields under consideration. By the analysis of the quasi-normal spectrum, we have studied the stability of higher dimensional Reissner-Nordström-de Sitter black holes, Kaluza-Klein black holes with squashed horizons, Gauss-Bonnet black holes and black strings. Special attention is paid to the evolution of massive fields in the background of various black holes. We have considered their quasi-normal ringing and the late-time tails.

In addition, we present two new numerical techniques: a generalisation of the Nollert improvement of the Frobenius method for higher dimensional problems and a qualitatively new method, which allows to calculate quasi-normal frequencies for black holes, which metrics are not known analytically. Also we considered a possibility of construction of the acoustic analogue of the Schwarzschild black hole.

Sumário

1	Introdução	11
2	Perturbações de um buraco negro	15
2.1	Equação de perturbações perto de um buraco negro	15
2.2	Evolução temporal das perturbações	18
2.3	Propriedades do espectro quase-normal	20
2.3.1	Condições de contorno	20
2.3.2	O espectro quase-normal e a estabilidade de buracos negros	22
2.3.3	Isoespectralidade	23
3	Métodos numéricos para o cálculo de modos quase-normais	25
3.1	Ajustando dados do perfil temporal	25
3.2	Aproximação pelo potencial de Pöschl-Teller	26
3.3	O método de WKB	28
3.4	Método de Frobenius	31
3.4.1	Série de Frobenius	31
3.4.2	O método de uma fração contínua	32
3.4.3	Melhora de Nollert	33
3.4.4	Continuação da série de Frobenius por pontos centrais	34
3.4.5	Generalização da série de Frobenius	35
3.4.6	Série de Frobenius para a parte radial da equação de campo carregado no contexto de Kerr-Newman-de Sitter	36
3.4.7	Série de Frobenius para a equação do campo escalar massivo no contexto Reissner-Nordström-de Sitter de dimensões mais altas	37
3.5	O método de Horowitz-Hubeny	38
4	Perturbações de buracos negros quadridimensionais	41
4.1	Modos quase-normais de buracos negros de Schwarzschild e de Schwarzschild-de Sitter	41
4.2	Sobretons altos no espectro quase-normal	42
4.3	O decaimento dos campos carregados escalar e Dirac no contexto de Kerr-Newman-de Sitter	44
5	Perturbações de buracos negros em dimensões mais altas	47
5.1	Estabilidade e modos quase-normais de buracos negros Reissner-Nordström-de Sitter	47
5.2	(In)estabilidade de buracos negros D -dimensionais na teoria de Gauss-Bonnet . . .	51
5.3	Modos quase-normais de campos do Modelo Padrão localizados na brana	54
5.3.1	Buracos negros de Kerr	55
5.3.2	Buracos negros de Gauss-Bonnet	57

5.4	Perturbações de buracos negros esmagados de Kaluza-Klein	60
5.4.1	Os modos quase-normais de campo escalar para buracos negros esmagados de Kaluza-Klein com rotação	61
5.4.2	Modos quase-normais gravitacionais para buracos negros esmagados de Kaluza-Klein sem rotação	64
6	Campos massivos em torno de buracos negros	67
6.1	Evolução de campos massivos. Quase-ressonâncias	67
6.2	Espectro quase-normal do campo escalar massivo em torno de buracos negros Schwarzschild	68
6.3	Estabilidade e modos quase-normais do campo escalar massivo em torno de buracos negros de Kerr	71
6.4	Modos quase-normais de cordas negras e a instabilidade de Gregory-Laflamme . . .	73
6.5	Caudas de tempo tardio de campos massivos	77
7	Modos quase-normais de buracos negros cujas métricas são desconhecidas analiticamente	79
7.1	Métodos numéricos	79
7.2	Modos quase-normais do buraco negro com cabelo escalar	81
7.3	Perturbações e modos quase-normais de buracos negros na teoria de Einstein-Aéter	84
8	Perturbações de buracos negros de Schwarzschild em laboratórios	89
8.1	Análogo acústico de gravidade	89
8.2	Bocal de Laval	90
8.3	Bocal de Laval para o buraco negro de Schwarzschild	92
9	Sumário	95

Lista de Figuras

2.1	A grade de integração. Cada célula da grade representa um passo de integração. Os pontos grossos ilustram a escolha de (S, W, E, N) para o passo particular da integração. Os dados iniciais estão especificados ao lado esquerdo e ao fundo do losango.	19
2.2	As três etapas da evolução das perturbações gravitacionais do buraco negro de Schwarzschild ($l = 2$ tipo vetorial, $\Lambda = 0$, $R = 22M$). O tempo é medido em unidades do raio do horizonte.	20
3.1	As três regiões separadas pelos dois pontos de virada $Q(x) = 0$.	28
4.1	As partes real e imaginária da frequência quase-normal fundamental do buraco negro Schwarzschild-de Sitter para perturbações escalares ($l = 2$), eletromagnéticas ($l = 2$), gravitacionais ($l = 2$), e Dirac ($\kappa = 2$) são plotadas com linhas azuis sólidas, vermelhas tracejadas, verdes pontilhadas-tracejadas e pretas pontilhadas, respectivamente.	42
4.2	A parte real das frequências quase-normais que decaem rapidamente como uma função da parte imaginária ($\kappa_{\pm} = 1$ perturbações do campo de Dirac sem massa no contexto de Schwarzschild). As frequências foram medidas em unidades inversas da massa do buraco negro.	43
4.3	A parte real das frequências quase-normais que decaem rapidamente como uma função da parte imaginária para o buraco negro Schwarzschild-de Sitter ($l = 1$ perturbações eletromagnéticas, $\Lambda M^2 = 0.02$). As frequências foram medidas em unidades inversas da massa do buraco negro.	44
4.4	A parte real das frequências quase-normais que decaem rapidamente como uma função da parte imaginária ($l = 2$ perturbações métricas do buraco negro Schwarzschild-de Sitter, $\Lambda M^2 = 0.02$). As frequências foram medidas em unidades inversas da massa do buraco negro.	45
4.5	A parte real e a parte imaginária da frequência quase-normal fundamental do campo escalar ($l = 0$) carregado (q) para o buraco negro carregado (Q).	45
5.1	Potenciais efetivos e perfis temporais para perturbações gravitacionais do tipo escalar, $D = 5$ (azul)... $D = 11$ (vermelho) ($l = 2$, $Q = 0$, $\Lambda = 0$). Para D mais alto tanto o pico como o espaço negativo do potencial aumentam. Perfil para D mais alto decai mais rapidamente. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+ .	49
5.2	Perfis temporais para perturbações gravitacionais do tipo escalar de buraco negro Schwarzschild-de Sitter 11-dimensional ($Q = 0$, $D = 11$, $\rho = r_+/r_{\infty}$) para $\rho = 0.3$ (azul), $\rho = 0.5$ (verde), $\rho = 0.7$ (amarelo), $\rho = 0.8$ (laranja), $\rho = 0.9$ (vermelho). Perfil para ρ mais alto decai mais lentamente. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+ .	49

5.3	Perfis temporais para perturbações gravitacionais do tipo “-” escalar do buraco negro Reissner-Nordström-de Sitter ($D = 11$, $\rho = r_+/r_\infty = 0.8$, $l = 2$) para vários valores da carga do buraco negro $q = Q/Q_{ext}$: $q=0.4$ (marrom) $q=0.5$ (azul) $q=0.6$ (verde) $q=0.7$ (laranja) $q=0.8$ (vermelho) $q=0.9$ (magenta). Para menor q o crescimento do perfil é mais lento.	50
5.4	A região paramétrica de instabilidade na esquina topo direita do quadrado ($\rho = r_+/r_\infty$, $q = Q/Q_{ext}$) para $D = 7$ (topo, preto), $D = 8$ (azul), $D = 9$ (verde), $D = 10$ (vermelho), $D = 11$ (abaixo, magenta).	51
5.5	O quadro de instabilidade de perturbações gravitacionais de buracos negros Gauss-Bonnet do tipo tensorial, que se desenvolvem para grandes números de multipolo: $D = 6$, $l = 8$ (vermelho), $l = 12$ (verde), $l = 16$ (azul), $\alpha = 1.3$. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+	54
5.6	O limiar α como uma função do número de multipolo l inverso para perturbações de buracos negros Gauss-Bonnet ($D = 6$) do tipo tensorial. Os pontos $l = 16, 20, 32, 40, 50, 64$ foram ajustados pela linha $\alpha = 2.627l^{-1} + 1.005$. O resultado teórico é $\alpha_t \approx 1.006$ (o valor de α é medido em unidades do horizonte de eventos r_+).	55
5.7	O quadro de evolução no domínio de tempo para perturbações gravitacionais de buracos negros de Gauss-Bonnet do tipo escalar $D = 10$, $l = 2$, $\alpha = 0.01$. Pode-se ver que dois modos estão dominando nas diferentes etapas. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+	56
5.8	Modos quase-normais fundamentais do buraco negro de 6 dimensões projetado na 4-brana.	58
5.9	Alguns sobretons mais altos do campo eletromagnético do buraco negro de Kerr de 6 dimensões projetado na 4-brana ($l = 3$, $m = 0$) para o intervalo $(0, r_+)$ do parâmetro do momento angular a com um passo de $r_+/8$	59
5.10	Modos quase-normais para buracos negros de Kerr em dimensões mais altas ($a = r_+$) projetado na 4-brana.	60
5.11	O fator de qualidade do campo escalar localizado na 4-brana como uma função do parâmetro de Gauss-Bonnet α ($D = 9$, $l = 1$).	61
5.12	Os perfis temporais do campo escalar sem massa localizado na brana para o buraco negro de Gauss-Bonnet ($D = 7$, $\alpha = 5$) para $l = 0$ (azul), $l = 1$ (verde), $l = 2$ (laranja), $l = 4$ (vermelho). O maior l corresponde à vida mais longa do toque quase-normal e ao decaimento mais rápido da cauda.	62
5.13	Partes real e imaginária da frequência quase-normal fundamental do campo escalar de teste ($l = 0$) para buracos negros esmagados de Kaluza-Klein com rotação.	64
5.14	Partes real e imaginária da frequência quase-normal fundamental para perturbações métricas ($M = J = 0$) $ K = 0$ (azuis), $ K = 1$ (vermelhas), $ K = 2$ (amarelas) de buracos negros esmagados de Kaluza-Klein. Os valores mais altos de K correspondem à frequência de oscilação mais alta e decaimento mais lento.	65
6.1	Três modos quase-normais mais altos ($l = 0$) do buraco negro de Schwarzschild ($D = 6$) para o campo escalar massivo de vários μ . A frequência para $\mu = 0$ tem a maior parte imaginária. Os pontos foram traçados com o passo de $\Delta\mu r_+ = 1/2$. As linhas sólidas marcam o mesmo número de sobretom.	69

6.2	Frequências quase-normais fundamentais do buraco negro de Schwarzschild D -dimensional para o campo escalar massivo ($l = 0$) de vários μ . A frequência para $\mu = 0$ tem a maior parte imaginária. Os pontos foram traçados com o passo de $\Delta\mu r_+ = 1/10$. As linhas sólidas marcam o mesmo número de D	70
6.3	Frequências quase-normais fundamentais do buraco negro de Schwarzschild ($D = 6$) para o campo escalar massivo como função da massa do campo μ para $l = 0, 1, 2$ (representado como pontos, losangos e triângulos respectivamente). A linha tracejada corresponde a $\text{Re}(\omega) = \mu$	71
6.4	Sobretons altos do buraco negro de Schwarzschild para o campo escalar massivo ($D = 4, l = 0$) para $\mu r_+ = 0.6$ (pontos) e $\mu r_+ = 6.0$ (caixas).	72
6.5	A frequência quase-normal fundamental de buracos negros de Kerr para o campo escalar massivo como uma função do número azimutal m para $l = 6, a = 0.15r_+, \mu r_+ = 0.2$	73
6.6	Perfis temporais das perturbações de cordas negras para $kr_+ = 2.5$: $n = 2$ (vermelho, topo), $n = 3$ (laranja), $n = 4$ (verde), $n = 5$ (azul, abaixo). O decaimento de tempo tardio para $n \geq 3$ é $\Psi \propto t^{-(n+6)/2} \text{sen}(kt)$	75
6.7	Perfis temporais de perturbações de cordas negras para $n = 1$ $kr_+ = 0.84$ (magenta, topo), $kr_+ = 0.87$ (vermelha), $kr_+ = 0.88$ (laranja), $kr_+ = 0.9$ (verde), $kr_+ = 1.1$ (azul, abaixo). Pode-se ver dois modos concomitantes: para k grande o modo oscilante domina, perto do valor crítico de k o modo dominante não oscila, para valores instáveis de k o modo dominante cresce. A escala é logarítmica, para que as linhas retas correspondam a um crescimento ou decrescimento exponencial.	76
7.1	O potencial efetivo para perturbações eletromagnéticas perto do buraco negro de Schwarzschild ($r_+ = 1, l = 2$) e o mesmo potencial interpolado numericamente perto do seu máximo.	80
7.2	Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em Q para o buraco negro com cabelo escalar. A parte imaginária rapidamente diminui enquanto “a carga escalar” Q aumenta. A parte real chega o seu máximo e depois rapidamente cai até o zero. Ela desaparece para algumas cargas não críticas $Q_0 < \xi^{-1/2}$. Para $Q \geq Q_0$ a parte real se anula e a frequência é puramente imaginária (dentro da precisão numérica).	83
7.3	Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em Λ para o buraco negro com cabelo escalar. A parte real cresce para “cargas escalares” Q relativamente pequenas, mas para grande $Q = 2.2$ ela também consegue o máximo e depois cai e desaparece para $\Lambda \approx -0.292$. Para valores de Λ maiores a parte real fica nula e as frequências puramente imaginárias existem. A parte imaginária diminui quase linearmente enquanto Λ cresce.	84
7.4	Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em $\xi < \frac{3}{16}$ para o buraco negro com cabelo escalar. A parte imaginária diminui enquanto ξ cresce. A rapidez de tal redução depende de Λ e Q . Para alguns Λ e Q (como apresentado no gráfico de baixo) a parte real pode cair a zero e as frequências puramente imaginárias aparecem para maior ξ	85

7.5	Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em μ para o buraco negro com cabelo escalar. Somente $0 \leq \mu^2 \leq -4\xi\Lambda$ foi considerado. A parte real modifica-se dentro de uma variedade comparativamente pequena. A parte imaginária alcança o seu máximo permanecendo negativa. Para este valor de μ as oscilações têm maior tempo de vida, mas elas ainda decaem e quase-ressonâncias não são observadas. Para maiores massas de campo escalar a parte imaginária da frequência diminui e a taxa de decaimento é mais alta.	86
7.6	As primeiras cinco frequências quase-normais do buraco negro com cabelo escalar $\Lambda = -0.1$, $Q = 1$, $\xi = 0.1$, $\mu = 0$. Os sobretons altos se aproximam de um espaçamento eqüidistante.	87
7.7	Evolução temporal de perturbações gravitacionais axiais ($l = 2$) para teoria de Einstein-Aéter não-reduzida, $c_1 = 0.1$ (linha verde) e $c_1 = 0.4$ (linha vermelha), em comparação com o caso de Schwarzschild $c_1 = 0$ (linha azul). Para c_1 mais alto, foi observado o decaimento mais rápido das perturbações.	88
8.1	A forma dos bocais de Laval e o potencial efetivo nas coordenadas do bocal.	93

Agradecimentos

Em primeiro lugar, eu gostaria de agradecer a meu orientador Prof. Dr. Élcio Abdalla por toda sua ajuda e apoio durante meu Doutorado, pelas discussões estimulantes e pela colaboração. Agradeço muito pela sua inestimável ajuda e por ter lido e corrigido o português na tese.

Os meus agradecimentos especiais são para o Dr. Roman Konoplya, cuja contribuição para todos os resultados apresentados é impossível exagerar. Ele foi (e é) não somente o melhor colaborador, mas também um bom amigo, cujas ajuda e conselhos são muito importantes para mim. Ele também me ajudou muito com a preparação do texto da tese.

A seguir, eu agradeço à Bárbara Idino Konoplya por toda sua ajuda e, especialmente, por ler o primeiro esboço da tese e corrigir a maior parte dos meus erros em português.

Eu também gostaria de agradecer ao Prof. Dr. Carlos Molina pela colaboração e pela ajuda com a minha adaptação ao estilo de vida brasileiro.

Agradeço aos meus colaboradores Élcio Abdalla, K. H. C. Castello-Branco, Hideki Ishihara, Panagiota Kanti, Masashi Kimura, Roman Konoplya, Carlos Molina, Keijo Murata, Jiro Soda pelas suas contribuições aos resultados apresentados.

Muito obrigado a João da Silva Borges, Amélia Aparecida Ferrari Genova, Sybele Guedes de Paulo Groff e Simone Toyoko Shinomiya pela ajuda, a todos os funcionários do Departamento de Física Matemática do IFUSP pelo trabalho deles e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio financeiro.

Capítulo 1

Introdução

A relatividade geral implica dois fenômenos qualitativamente novos, que não podem ser descritos dentro da gravidade de Newton. Primeiro, existem objetos com massas tão grandes, que a velocidade de escape deles excede a velocidade da luz. Esses objetos foram chamados buracos negros. Segundo, a relatividade geral prevê ondas gravitacionais, que aparecem por causa da limitação da velocidade de interações gravitacionais. Essas ondas podem ser detectadas no futuro mais próximo com a ajuda de antenas gravitacionais. Durante os últimos anos houve um avanço na construção dos detectores de ondas gravitacionais, como LIGO, GEO, VIRGO, TAMA e o detector planejado na base de espaço LISA, e a detecção de ondas gravitacionais é esperada para logo [1].

Uma das fontes mais promissoras de ondas gravitacionais são choques entre buracos negros e/ou de uma estrela e um buraco negro. O resultado desses processos é um buraco negro com uma massa maior, que absorve as ondas gravitacionais. Por isso, as ondas gravitacionais rapidamente decaem e, no tempo suficientemente tarde, podem ser consideradas como pequenas perturbações da métrica do buraco negro. Isto significa que pode-se estudar as perturbações lineares, negligenciando as correções das ordens maiores. Essa aproximação para o comportamento das ondas gravitacionais no tempo tardio fornece uma boa precisão, que foi verificada por simulações completas não-lineares de colisões de dois buracos negros [2].

Acontece que o comportamento das perturbações gravitacionais no tempo tardio não depende do jeito que elas foram induzidas. Na etapa do tempo tardio da evolução das perturbações gravitacionais observam-se oscilações decrescentes, que dão lugar às caudas assintóticas no tempo muito tardio. As oscilações decrescentes são caracterizadas por frequências complexas, que são chamadas *modos quase-normais*. A parte real de uma frequência complexa descreve a frequência real da oscilação, enquanto a parte imaginária é a taxa de decaimento da oscilação particular. O conjunto das frequências quase-normais forma o espectro. Dependendo somente dos parâmetros do buraco negro, o espectro quase-normal parece ser uma característica importante de um buraco negro, ou como é dito a sua impressão digital. Por isso, a detecção dos modos quase-normais permite determinar os parâmetros do buraco negro e compará-los com os obtidos por expectativas astronômicas [3].

Apesar de serem bem descritos pela aproximação linear, os modos quase-normais, quando detectados, podem ser usados para verificar a relatividade geral como uma teoria completamente não linear. Isto permite estudar alguns aspectos da teoria gravitacional que não podem ser confirmados experimentalmente sem considerar o regime de gravidade forte. Um bom exemplo é um fenômeno da violação da simetria Lorentz local. Se assumir-se que existem o estado em repouso local preferido em cada ponto do espaço-tempo, é possível descrever este estado por um campo vetorial de unidade do tipo tempo. Este campo vetorial é chamado “aéter” [4]. Os parâmetros da teoria do aéter podem ser limitados por correções post-Newton achados a partir de observações astronômicas. Todavia,

esses limites não respondem à pergunta se o aéter existe ou não. Assim, um dos jeitos possíveis de se observar o efeito do aéter é a determinação da deslocação correspondente no espectro quase-normal de buracos negros.

Outra motivação para estudar as perturbações de buracos negros é a verificação da estabilidade deles. Isto é uma propriedade muito importante para teorias em dimensões mais altas, como os cenários de mundo-brana e a teoria das cordas [5]. Já que em número de dimensões maior do que quatro não há o teorema de unicidade, a estabilidade pode ser o critério que selecionará soluções físicas entre vários “objetos negros”: buracos negros, branas negras, anéis negros etc. É fácil compreender que o espectro quase-normal de uma configuração estável contém somente modos decrescentes, enquanto os objetos negros, que são instáveis com relação às perturbações pequenas, devem conter pelo menos um modo crescente no seu espectro.

Além disso, o espectro quase-normal pode ser interpretado no contexto da correspondência anti-de Sitter/Teoria Campos Conformes (AdS/CFT) [6]. Um buraco negro no espaço-tempo anti-de Sitter corresponde ao estado termal na Teoria dual de Campos Conformes. A temperatura do estado termal coincide com a temperatura de Hawking do buraco negro. Dentro da dualidade AdS/CFT o espectro quase-normal do buraco negro em AdS corresponde aos pólos das funções retardadas de Green no lado de CFT [7]. Devido à correspondência AdS/CFT é possível calcular efeitos não-perturbativos da teoria de campos com a temperatura finita na regime de acoplamento forte estudando buracos negros nos espaços-tempo anti-de Sitter. Os parâmetros hidrodinâmicos do plasma de quarks-glúons foram calculados dentro desta aproximação, mostrando um bom acordo com os resultados obtidos nos experimentos no Colisor Relativístico de Íons Pesados (RHIC) [8].

Dentro do trabalho presente fornece-se o estudo detalhado das perturbações lineares de uma classe grande de buracos negros e acha-se o espectro quase-normal dos campos escalar, Dirac, Maxwell e as perturbações gravitacionais. Foram Estudados os espectros quase-normais desses campos em quatro e maior número das dimensões, dentro das teorias de Einstein, de Einstein-Aéter, cenários de mundo-brana com e sem as correções de Gauss-Bonnet. Foi considerada a influência da constante cosmológica nas frequências quase-normais e no comportamento assintótico de sobretons altos. Foram calculados modos quase-normais de campos escalar carregado e de Dirac no contexto Kerr-Newman-de Sitter.

Também foi estudado o espectro quase-normal do campo escalar massivo para buracos negros de Schwarzschild, Tangherlini e anti-de Sitter com cabelo escalar e o campo vetorial massivo no contexto de Schwarzschild. Foram fornecidas discussões abrangentes sobre propriedades do espectro quase-normal e as caudas de tempo tardio de campos massivos. Foi considerado o aparecimento das oscilações da vida infinitamente longa (*quase-ressonâncias*) para determinados valores das massas do buraco negro e do campo.

Foi comprovada a instabilidade dos buracos negros Reissner-Nordström-de Sitter para valores suficientemente grandes da carga do buraco negro e da constante cosmológica. Pela análise numérica do espectro quase-normal, apoia-se a estabilidade dos buracos negros Kaluza-Klein com horizontes esmagados, a região da instabilidade dos buracos negros Gauss-Bonnet e a instabilidade de cordas negras com relação a ondas de comprimento longo. Mostra-se o aparecimento dessas instabilidades no domínio de tempo. Também foi comprovada a estabilidade do campo escalar massivo no contexto do buraco negro de Kerr.

Foram revisados os métodos numéricos utilizados para a análise: a simulação temporal, a aproximação pelo potencial de Pöschl-Teller, a aproximação de WKB e o método de Frobenius.

Foi proposta uma generalização da melhora de Nollert do método de Frobenius para os problemas em dimensões mais altas. Essa melhora fornece a melhor convergência do procedimento numérico, que é crucial para o caso quando a parte imaginária da frequência quase-normal é muito maior do

que a sua parte real e para o cálculo dos modos quase-normais de campos massivos.

Também foi descrito um novo instrumento numérico, que foi desenvolvido para o cálculo das frequências quase-normais de um buraco negro, cuja métrica não é conhecida analiticamente, mas pode ser achada como uma solução numérica de um conjunto de equações diferenciais. Essa técnica apoia a expectativa natural que as frequências quase-normais dominantes dependem principalmente da região próxima ao buraco negro e não dependem do comportamento da métrica em grandes distâncias. Esse método foi verificado também pela integração temporal.

Além disso, discute-se uma possibilidade interessante da observação do análogo acústico do buraco negro Schwarzschild em laboratórios.

Este trabalho visa esclarecer um número de perguntas sobre o comportamento de perturbações de buracos negros. Fornece-se uma análise abrangente das perturbações de buracos negros em várias teorias para dar o quadro completo de modos quase-normais, caudas de tempo tardio e estabilidade de buracos negros. Os resultados apresentados foram publicados em [9–26].

Capítulo 2

Perturbações de um buraco negro

2.1 Equação de perturbações perto de um buraco negro

A dinâmica da relatividade geral em D dimensões de espaço-tempo é descrita pela ação de Einstein-Hilbert

$$S = \int \sqrt{|g|} \left(\frac{1}{16\pi} (R - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M \right) d^D x, \quad (2.1)$$

onde foi usado o sistema de unidade geométrico, para que a velocidade da luz, c , e a constante gravitacional, γ , fossem definidas iguais a um. A assinatura métrica é escolhida como $(+ - - - \dots)$. R é a curvatura escalar de Ricci, $\mathcal{L}_M$ descreve todos os campos de matéria $\phi_{(i)}$ que aparecem na teoria e Λ é a constante cosmológica.

A variação da ação (2.1) permite encontrar as equações de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab}, \quad (2.2)$$

e as equações de campo no espaço-tempo curvo

$$\frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta \phi_{(i)}} = 0. \quad (2.3)$$

O tensor de energia-momento T_{ab} em (2.2) é definido como

$$T_{ab} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g} \mathcal{L}_M}{\partial g^{ab}}.$$

A solução geral das equações (2.2, 2.3) é alguma métrica e campos no contexto desta métrica

$$ds^2 = g_{ab}(x) dx^a dx^b, \quad \phi_{(i)} = \phi_{(i)}(x). \quad (2.4)$$

Estudamos um buraco negro estacionário, para o qual g_{ab} e $\phi_{(i)}$ não dependem do tempo no sistema apropriado de coordenadas e calibre.

Consideremos as perturbações da métrica e dos campos como uma soma de um campo de fundo não-perturbado g_{ab}^0 , ϕ_i^0 e as perturbações reais δg_{ab} , $\delta \phi_{(i)}$

$$\begin{aligned} g_{ab} &\rightarrow g_{ab}^0 + \delta g_{ab}; \\ \phi_{(i)} &\rightarrow \phi_{(i)}^0 + \delta \phi_{(i)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

As perturbações são consideradas pequenas, isto é, descartam-se as contribuições da ordem $\mathcal{O}(\delta g_{ab})^2$, $\mathcal{O}(\delta g_{ab}\delta\phi_i)$ e $\mathcal{O}(\delta\phi_i)^2$.

Depois de se substituir (2.5) em (2.2, 2.3) e levando-se em conta que g_{ab}^0 e ϕ_i^0 também satisfazem as equações (2.2, 2.3), é possível achar um conjunto de equações lineares para as perturbações δg_{ab} e $\delta\phi_i$.

Neste capítulo consideramos a solução estacionária esfericamente simétrica em 4 dimensões com $T_{ab} = 0$, que descreve um buraco negro no vácuo. Esta solução é dada pela métrica bem conhecida

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \Lambda \frac{r^2}{3}, \quad (2.6)$$

onde M é a massa do buraco negro e Λ é a constante cosmológica.

Para $\Lambda = 0$ a métrica (2.6) descreve um buraco negro de Schwarzschild. Se a constante cosmológica for positiva ($\Lambda > 0$), obtemos um buraco negro Schwarzschild-de Sitter, enquanto para valores negativos da constante cosmológica ($\Lambda < 0$) o buraco negro chama-se Schwarzschild-anti-de Sitter.

Desde que $T_{ab} = 0$, as perturbações de campos em tal contexto não são ligadas às perturbações da métrica e, por isso, são equivalentes para os campos de teste no contexto do buraco negro.

Descrevemos a separação de variáveis. Como um exemplo consideremos o campo escalar de teste que satisfaz à equação de Klein-Gordon no espaço-tempo curvo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^a} g^{ab} \sqrt{-g} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^b} = \frac{1}{f(r)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial r} f(r) \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{2f(r)}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\Delta_{\theta,\phi} \Phi}{r^2} = 0, \quad (2.7)$$

onde

$$\Delta_{\theta,\phi} = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

é a parte angular do Laplasiano.

Para separar as variáveis angulares foi escolhido o seguinte ansatz:

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\Psi_{l,m}(t, r)}{r} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (2.8)$$

onde $Y_{l,m}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos, que são funções próprias do operador $\Delta_{\theta,\phi}$

$$\Delta_{\theta,\phi} Y_{l,m}(\theta, \phi) = -l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \phi). \quad (2.9)$$

Os números inteiros $l \geq 0$ e $|m| \leq l$ são chamados, respectivamente, o número de multipolo e o número de azimuth.

Depois da substituição (2.8) em (2.7) encontramos a equação de onda para a função $\Psi_{l,m}(t, r)$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_\star^2} + V_l(r) \right) \Psi_{l,m}(t, r) = 0, \quad (2.10)$$

onde o potencial efetivo tem a forma

$$V_l(r) = f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} \right), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.11)$$

A variável r_* é a chamada *coordenada tartaruga*. Ela é definida, a menos de uma constante arbitrária, como

$$dr_* = \frac{dr}{f(r)}. \quad (2.12)$$

Se $\Lambda \geq 0$ a coordenada tartaruga faz o mapa de toda a região fora do buraco negro no intervalo $(-\infty, \infty)$. No espaço anti-de Sitter ($\Lambda < 0$) o intervalo torna-se $(-\infty, r_{*\infty})$, onde $r_{*\infty}$ é um valor finito que depende da constante de integração (2.12).

Também se podem considerar outros campos de teste perto do buraco negro. Na maior parte dos casos, depois da separação das variáveis angulares, somos capazes de reduzir as equações do movimento para tais campos (2.3) para o conjunto das equações de onda da forma (2.10).

Pode-se achar que o campo de Dirac de teste sem massa é descrito pelos potenciais efetivos [29]

$$V_{D\pm} = f(r) \frac{\kappa_{\pm}^2}{r^2} \pm \frac{d}{dr_*} \frac{\kappa_{\pm} \sqrt{f(r)}}{r}, \quad \kappa_{\pm} = 1, 2, 3 \dots \quad (2.13)$$

e o campo eletromagnético é descrito pelo potencial [30]

$$V_{EM} = f(r) \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad l = 1, 2, 3 \dots \quad (2.14)$$

A equação (2.2) permite encontrar as equações de movimento para as perturbações métricas δg_{ab} (2.5). É conveniente classificar os componentes do tensor δg_{ab} com relação à lei de transformação em rotações sobre a esfera em torno do buraco negro. Eles podem ser dos tipos *escalar*, *vetorial* e *tensorial*, denotados por s , v e t respectivamente

$$\delta g_{ab} = \begin{pmatrix} s & s & v & v \\ s & s & v & v \\ v & v & t & t \\ v & v & t & t \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Para simplificar as equações de perturbações da métrica utilizamos a invariância com relação às transformações infinitesimais das coordenadas. Essas transformações atuam como transformações de calibre nas perturbações métricas

$$x^a \rightarrow x^a + \delta x^a \quad \implies \quad \delta g_{ab} \rightarrow \delta g_{ab} + \delta x_{a;b} + \delta x_{b;a}.$$

A liberdade de calibre permite simplificar as equações de perturbação [31]. Depois da fixação do calibre de Regge-Wheeler, as perturbações são descritas pelos potenciais [30]

$$V_s(r) = \frac{2f(r)}{r^3} \frac{9M^3 + 3c^2Mr^2 + c^2(1+c)r^3 + 3M^2(3cr - \Lambda r^3)}{(3M + cr)^2}, \quad (2.16)$$

$$V_v(r) = f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right), \quad (2.17)$$

$$c = \frac{l(l+1)}{2} - 1, \quad l = 2, 3, 4 \dots$$

para os tipos escalar e vetorial respectivamente. As perturbações do tipo tensorial, em 4 dimensões, são eliminadas por esta fixação do calibre. Contudo, as perturbações da métrica de buracos negros em dimensões mais altas podem ser de todos os três tipos [32].

Segundo a classificação de Chandrasekhar [33], as perturbações do tipo vetorial são chamadas *axiais* porque elas transmitem a rotação diferencial ao buraco negro. As perturbações do tipo escalar são chamadas *polares*. Eles são relacionados com deformações infinitésimas do horizonte de eventos. Quaisquer perturbações de buraco negro esfericamente simétrico em 4 dimensões pode ser dividida em sua parte polar e axial em qualquer calibre [34].

Observemos que os números de multipolo $l = 0, 1$ para perturbações gravitacionais e $l = 0$ para perturbações de campo eletromagnético não são dinâmicas. Por exemplo, $l = 0$ perturbações gravitacionais são esfericamente simétricas e, por isso, obedecem o teorema de Birkhoff. Elas correspondem a uma modificação infinitesimal da massa do buraco negro, levando a outra solução estática de buraco negro. Semelhantemente, perturbações $l = 0$ de campo eletromagnético e perturbações gravitacionais $l = 1$ correspondem, respectivamente, a uma mudança infinitesimal da carga e da posição do buraco negro [31].

2.2 Evolução temporal das perturbações

Para integrar a equação (2.10) numericamente usamos a técnica desenvolvida por Gundlach, Price e Pullin [35]. Reescrevemos a equação de onda (2.10) nos termos das chamadas coordenadas de cone de luz, $du = dt - dr_*$ e $dv = dt + dr_*$

$$\left(4\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + V(u, v)\right) \Psi(u, v) = 0. \quad (2.18)$$

Consideremos o operador da evolução de tempo nessas coordenadas

$$\begin{aligned} \exp\left(h\frac{\partial}{\partial t}\right) &= \exp\left(h\frac{\partial}{\partial u} + h\frac{\partial}{\partial v}\right) = \exp\left(h\frac{\partial}{\partial u}\right) + \exp\left(h\frac{\partial}{\partial v}\right) - 1 + \\ &+ \frac{h^2}{2} \left(\exp\left(h\frac{\partial}{\partial u}\right) + \exp\left(h\frac{\partial}{\partial v}\right)\right) \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Atuando este operador em Ψ e levando em conta (2.18), encontramos

$$\Psi(N) = \Psi(W) + \Psi(E) - \Psi(S) - \frac{h^2}{8} V(S) (\Psi(W) + \Psi(E)) + \mathcal{O}(h^4), \quad (2.19)$$

onde introduzimos as letras para marcar os pontos como $S = (u, v)$, $W = (u + h, v)$, $E = (u, v + h)$, $N = (u + h, v + h)$.

A equação (2.19) permite calcular os valores de Ψ dentro do losango, construído nas duas superfícies nulas $u = u_0$ e $v = v_0$ (ver o fig. 2.1), começando pelos dados iniciais especificados nelas.

Vamos estudar, como um exemplo qualitativo, o perfil temporal das perturbações gravitacionais do tipo vetorial do buraco negro de Schwarzschild $\Psi(t, r = R)$ (o fig. 2.2). Podemos dividir a evolução das perturbações em três etapas. A primeira etapa depende das condições iniciais e do ponto R . No tempo tardio ($t \sim R$) vemos o amortecimento exponencial da amplitude das perturbações, que é seguida pelas assim chamadas caudas no tempo tardio assintoticamente ($t \gg M$).

Pode-se observar, que, depois da irrupção inicial na primeira etapa, o comportamento da amplitude das perturbações não depende das condições iniciais. Sendo independente da fonte das perturbações, ele depende só dos parâmetros do campo e do buraco negro. Por isso, a lei de amortecimento no tempo tardio parece ser uma característica importante do buraco negro.

Figura 2.1: A grade de integração. Cada célula da grade representa um passo de integração. Os pontos grossos ilustram a escolha de (S, W, E, N) para o passo particular da integração. Os dados iniciais estão especificados ao lado esquerdo e ao fundo do losango.

O amortecimento exponencial das perturbações é chamado *toque quase-normal*. Ele pode ser dividido em uma superposição de oscilações exponencialmente decrescentes, que podem ser representadas como um conjunto de frequências complexas, chamadas *modos quase-normais*. A parte real de uma frequência quase-normal descreve a frequência real da oscilação, enquanto a parte imaginária é a taxa de decaimento dela. Na seção seguinte estudaremos as propriedades básicas do espectro quase-normal de buracos negros.

No caso em consideração, as caudas de tempo tardio decaem segundo a lei de potência inversa. O comportamento qualitativamente semelhante foi observado para o decaimento de todos campos sem massa em contextos assintoticamente planos. Mas as caudas de tempo tardio parecem ser muito sensíveis ao comportamento assintótico do potencial: em espaços-tempo assintoticamente anti-de Sitter o toque quase-normal governa o decaimento de perturbações todo tempo [7]. As perturbações de buraco negro no espaço-tempo de Sitter têm caudas exponenciais, se a constante cosmológica for grande, e ambas as caudas, potenciais e exponenciais, se a constante cosmológica for pequena [36, 37].

Figura 2.2: As três etapas da evolução das perturbações gravitacionais do buraco negro de Schwarzschild ($l = 2$ tipo vetorial, $\Lambda = 0$, $R = 22M$). O tempo é medido em unidades do raio do horizonte.

2.3 Propriedades do espectro quase-normal

2.3.1 Condições de contorno

Para estudar o espectro quase-normal de um buraco negro é conveniente fazer a transformada de Fourier da função

$$\Psi(t, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) Q_{\omega_n}(r). \quad (2.20)$$

Podemos constatar que geralmente as funções $\{\exp(-i\omega_n t)\}$, onde $\{\omega_n\}$ é espectro quase-normal, não formam a base no espaço vetorial das soluções da equação (2.10). Por isso, o sinal não pode ser expandido em termos dessas funções para tempo todo. De fato, como vemos na fig. 2.2, o decaimento exponencial no tempo tardio assintoticamente é trocada pela lei de decaimento tipo potência, que é mais lenta. Além disso, a expansão (2.20) é apropriada para descrever a época de toque quase-normal.

Daqui em diante, omitiremos o índice n de ω . Suporemos que ω seja qualquer frequência do espectro quase-normal.

A função Q_ω satisfaz à equação linear

$$\left(\frac{d^2}{dr_\star^2} + \omega^2 - V(r) \right) Q_\omega(r) = 0. \quad (2.21)$$

Assim, a procura dos modos quase-normais é reduzida ao problema de achar as frequências

próprias da equação (2.21). Como estamos interessados no que acontece na região R fora do buraco negro, temos que impor as condições de contorno no horizonte de eventos e no horizonte cosmológico para $\Lambda > 0$ (ou no infinito espacial para $\Lambda \leq 0$). Para fazer isto precisamos estudar as singularidades da equação (2.21) naqueles pontos.

Estudaremos as propriedades gerais dos pontos singulares da equação (2.21). Primeiro observamos que em qualquer horizonte

$$V \propto f(r) = o\left(\frac{1}{r_\star}\right). \quad (2.22)$$

Para comprovar (2.22) foram considerados dois tipos de horizonte:

1. $f(r \rightarrow h) = (r - h)f'(h) + o(r - h)$

então

$$r_\star = \frac{1}{f'(h)} \ln \left| \frac{r}{h} - 1 \right| (1 + o(r - h)).$$

Assim, achamos que a contribuição dominante é

$$f(r \rightarrow h) \sim hf'(h) \exp(f'(h)r_\star) \sim hf'(h) \exp\left(\ln \left| \frac{r}{h} - 1 \right| \right) = o\left(\frac{1}{r_\star}\right)$$

Este termo decai exponencialmente com $r_\star$ porque

$$\lim_{r \rightarrow h} \ln \left| \frac{r}{h} - 1 \right| = -\infty.$$

2. $f(r \rightarrow h) = A(r - h)^\alpha + o(r - h)^\alpha$, $\alpha > 1$ então

$$r_\star = -\frac{1}{A(\alpha - 1)(r - h)^{\alpha - 1}} (1 + o(r - h))$$

e

$$f(r \rightarrow h) = \frac{r - h}{(\alpha - 1)r_\star} + o(r - h)^\alpha = o\left(\frac{1}{r_\star}\right).$$

Se $\Lambda = 0$, a condição (2.22) no infinito espacial também é satisfeita para os potenciais (2.11, 2.13, 2.14, 2.16, 2.17). De fato, $r \sim r_\star$ e

$$V(r) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_\star^2}\right) = o\left(\frac{1}{r_\star}\right).$$

Como o potencial satisfaz (2.22), o comportamento da frequência própria nos limites pode ser

$$Q_\omega \propto \exp(\pm i\omega r_\star). \quad (2.23)$$

As condições de contorno apropriadas do problema em consideração são puramente onda, que entra no horizonte de eventos, e onda, que sai do horizonte cosmológico (infinito espacial)

$$\begin{aligned} r_\star \rightarrow -\infty : & \quad Q_\omega \propto \exp(-i\omega r_\star), \\ r_\star \rightarrow +\infty : & \quad Q_\omega \propto \exp(+i\omega r_\star). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Esta escolha das condições de contorno implicam que, depois que o buraco negro foi perturbado, não há nenhum sinal, que vem do buraco negro ou de qualquer fonte remota [33]. Isto significa que a fonte das perturbações atua só antes da primeira etapa da evolução. Depois disso, consideremos só a resposta do buraco negro, provocada pelas perturbações.

Para um buraco negro 4 dimensional de Schwarzschild-anti-de Sitter ($\Lambda < 0$), pode-se achar que as soluções linearmente independentes no infinito espacial ($r \rightarrow \infty$) são

$$Q_1 \propto r, \quad Q_2 \propto r^{-2}.$$

Como não supomos ter uma amplitude infinita de perturbação no infinito espacial, devemos selecionar Q_2 como a condição de contorno apropriada lá, isto é, impomos a condição de Dirichlet no limite de AdS [7]

$$Q_\omega(r = \infty) = 0. \quad (2.25)$$

As condições de contorno de Dirichlet são normalmente impostas no infinito espacial em contextos assintoticamente anti-de Sitter (ver por exemplo [38]).

2.3.2 O espectro quase-normal e a estabilidade de buracos negros

Buracos negros instáveis não existem na natureza, então a propriedade importante de qualquer solução de buraco negro é a estabilidade dela contra perturbações. Infelizmente, é possível de comprovar analiticamente a estabilidade só de algumas soluções das equações de Einstein, que são relativamente simples. Por isso o teste numérico da estabilidade é importante para o estudo de buracos negros. A instabilidade implica a existência de modos crescentes no espectro quase-normal. É claro, que a aproximação linear é suficiente para esse teste. De fato, se o buraco negro for estável, quaisquer perturbações decairão até que a aproximação linear seja válida. Se o espectro quase-normal tiver um modo crescente, a amplitude de perturbações crescerá até que sejamos compelidos para considerar a reação de volta não linear das perturbações na métrica. Neste caso, afirmamos, pelo menos, que para obter a solução estável precisamos levar em consideração esta correção não linear, que pode ser também não-estacionária.

É importante constatar que o buraco negro é instável mesmo que tenha só um modo crescente no seu espectro. Por isso, para comprovar a estabilidade do buraco negro, devemos mostrar que o espectro quase-normal não contém nenhum modo crescente, isto é, a frequência com a parte imaginária positiva. Isto faz a prova numérica da estabilidade de um buraco negro extremamente complicada.

Mas em alguns casos somos capazes de comprovar a estabilidade analiticamente. Vamos multiplicar a equação (2.21) pelo complexo conjugado Q_ω^* e integrar o primeiro termo pelas partes

$$Q_\omega^*(r_*) \frac{dQ_\omega(r_*)}{dr_*} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\omega^2 |Q_\omega(r_*)|^2 - V |Q_\omega(r_*)|^2 - \left| \frac{dQ_\omega(r_*)}{dr_*} \right|^2 \right) dr_* = 0.$$

Levando em consideração as condições de contorno (2.24) achamos

$$i\omega A + \omega^2 B = \int_{-\infty}^{\infty} \left(V(r) |Q_\omega(r_*)|^2 + \left| \frac{dQ_\omega(r_*)}{dr_*} \right|^2 \right) dr_*, \quad (2.26)$$

onde $A = |Q_\omega(r_* = \infty)|^2 + |Q_\omega(r_* = -\infty)|^2 > 0$, $B = \int_{-\infty}^{\infty} |Q_\omega(r_*)|^2 dr_* > 0$.

A parte imaginária de (2.26) se lê

$$\text{Re}(\omega)A + 2\text{Re}(\omega)\text{Im}(\omega)B = 0. \quad (2.27)$$

Pode-se ver que $\text{Im}(\omega) < 0$ excetuando o caso $\text{Re}(\omega) = 0$. Assim, conclui-se que *os modos crescentes não oscilam* (ver a seção. 5.2).

Se o potencial for positivo na região R fora do horizonte de eventos e $\text{Re}(\omega) = 0$, a parte real de (2.26) implica que a parte imaginária da frequência permanece negativa

$$-\text{Im}(\omega)A - \text{Im}(\omega)^2B > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Im}(\omega) < 0.$$

É claro, que o lado direito de (2.26) pode ser positivo embora $V(r)$ não seja positivo em cada ponto. Introduzindo a nova derivada $D = \frac{d}{dr_\star} + S(r_\star)$ podemos reescrever a integral como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(V(r) |Q_\omega(r_\star)|^2 + \left| \frac{dQ_\omega(r_\star)}{dr_\star} \right|^2 \right) dr_\star = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{V} |Q_\omega(r_\star)|^2 + |DQ_\omega|^2 \right) dr_\star - \left[S(r_\star) |Q_\omega(r_\star)|^2 \right]_{r_\star=-\infty}^{r_\star=\infty},$$

onde $\tilde{V} = V + \frac{dS}{dr_\star} - S^2$. Assim, concluímos que se acharmos a função $S(r_\star)$ tal que $S(r_\star = \infty) \leq 0$, $S(r_\star = -\infty) \geq 0$ e $\tilde{V} \geq 0$, o lado direito de (2.26) fica positivo e, por isso, $\text{Im}(\omega) < 0$.

Esta técnica é chamada *deformação S* e permite comprovar a estabilidade para alguns casos, quando o potencial não é definido positivo [39]. É importante notar que se acharmos uma função S apropriada, comprovamos a estabilidade do buraco negro. No caso contrário não saberíamos se o buraco negro é estável ou não.

A mesma abordagem pode ser usada no modo semelhante para os buracos negros anti-de Sitter. Devemos pôr somente $r_{\star\infty}$ como o limite superior das integrais e utilizar (2.25). Então obtemos $A = |Q_\omega(r_\star = -\infty)|^2 > 0$ e a exigência para S no infinito espacial se lê $S(r_\star = r_{\star\infty}) < \infty$.

Como devemos adivinhar a função S apropriada, a técnica da deformação S permite a prova de estabilidade só para potenciais relativamente simples. Para casos mais complicados somos capazes provar a estabilidade do buraco negro só numericamente.

2.3.3 Isoespectralidade

Vamos considerar duas equações (2.21) com os potenciais efetivos, tomados como V^+ e V^- , com

$$V^\pm = W^2(r_\star) \pm \frac{dW(r_\star)}{dr_\star} + \beta, \quad (2.28)$$

onde $W(r_\star)$ é alguma função finita e β é uma constante. Então, se Q_ω^+ é uma função própria de (2.21) para o potencial V^+ , a função própria do potencial V^- é dada (até um fator arbitrário) por

$$Q_\omega^- = \left(W - \frac{d}{dr_\star} \right) Q_\omega^+, \quad (2.29)$$

correspondente ao mesmo valor próprio de ω . Assim concluímos que o espectro quase-normal é o mesmo para os potenciais V^+ and V^- .

Consideremos os exemplos de isospectrality para uns buracos negros de Schwarzschild((-anti)-de Sitter). Pode-se verificar [33] que os potenciais (2.16) e (2.17) podem ser obtidos tomando

$$W = \frac{2M}{r^2} - \frac{3+2c}{3r} + \frac{3c^2+2c^3-9\Lambda M^2}{3c(3M+cr)} - \frac{1}{3M} \left(c^2 + c - \frac{3\Lambda M^2}{c} \right), \quad \beta = -\frac{c^2(c+1)^2}{9M^2}.$$

Os potenciais para o campo de Dirac (2.13) são, obviamente, também isoespectrais.

É claro que se um dos potenciais isoespectrais for positivo fora do horizonte de eventos, como podemos notar para $V_s(r)$ ($c \geq 2$), ambos não levam a modos crescentes, implicando estabilidade contra a perturbação. Outro caso possível de potenciais estáveis é $\beta \geq 0$, como acontece para (2.13). Para comprovar a estabilidade use-se somente a técnica da deformação S com $S = \pm W$. De fato, todos os potenciais (2.11, 2.13, 2.14, 2.16, 2.17) são positivos para $-\infty < r_\star < \infty$, por meio disso, a estabilidade do buraco negro de Schwarzschild é evidente.

Capítulo 3

Métodos numéricos para o cálculo de modos quase-normais

3.1 Ajustando dados do perfil temporal

A abordagem mais direta à procura de modos quase-normais é a integração numérica da equação (2.10) como descrito na seção 2.2. Os resultados da integração temporal são dados de perfil temporal $\{\Psi(t=0), \Psi(t=h), \Psi(t=2h) \dots\}$ que podem ser utilizados para calcular os modos quase-normais.

O método simples de Prony é descrito para ajustar os dados do perfil pela superposição de expoentes decrescentes (ver por exemplo [40] e suas referências)

$$\Psi(t) \simeq \sum_{i=1}^p C_i e^{-i\omega_i t}. \quad (3.1)$$

Supõe-se que a época de toque quase-normal começa em $t = 0$ e termina em $t = Nh$, onde $N \geq 2p - 1$ é de número inteiro. Então a fórmula (3.1) é válida para cada valor dos dados do perfil

$$x_n \equiv \Psi(nh) = \sum_{j=1}^p C_j e^{-i\omega_j nh} = \sum_{j=1}^p C_j z_j^n. \quad (3.2)$$

O método de Prony permite achar z_i nos termos dos conhecidos x_n e, como h também é conhecido, também permite calcular as frequências quase-normais ω_i . Para fazer isto, é definida uma função polinomial $A(z)$ como

$$A(z) = \prod_{j=1}^p (z - z_j) = \sum_{m=0}^p \alpha_m z^{p-m}, \quad \alpha_0 = 1. \quad (3.3)$$

Consideremos a soma

$$\sum_{m=0}^p \alpha_m x_{n-m} = \sum_{m=0}^p \alpha_m \sum_{j=1}^p C_j z_j^{n-m} = \sum_{j=1}^p C_j z_j^{n-p} \sum_{m=0}^p \alpha_m z_j^{p-m} = \sum_{j=1}^p C_j z_j^{n-p} A(z_j) = 0.$$

Levando em conta que $\alpha_0 = 1$ encontra-se

$$\sum_{m=1}^p \alpha_m x_{n-m} = -x_n. \quad (3.4)$$

Substituindo $n = p..N$ em (3.4), obtêm-se $N - p + 1 \geq p$ equações lineares para p coeficientes desconhecidos α_m .

Reescrevendo essas equações na forma de matriz

$$\begin{pmatrix} x_{p-1} & x_{p-2} & \dots & x_0 \\ x_p & x_{p-1} & \dots & x_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N-1} & x_{N-2} & \dots & x_{N-p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x_p \\ x_{p+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Tal equação de matriz

$$X\alpha = -x$$

pode ser resolvida no sentido de mínimos-quadrados

$$\alpha = -(X^+X)^{-1}X^+x, \quad (3.5)$$

onde X^+ denota a transposição Hermitiana da matriz X .

Depois que os coeficientes α_m da função polinomial $A(z)$ são achados, pode-se calcular numericamente as raízes z_j do polinômio e as frequências quase-normais

$$\omega_j = \frac{i}{h} \ln(z_j).$$

Como o estágio quase-normal não é um intervalo temporal precisamente definido, na prática, é difícil determinar quando o toque quase-normal começa. De fato, quando observamos oscilações explicitamente decrescentes, normalmente é visto somente o modo fundamental, enquanto os sobretons mais altos, que se decaem rapidamente, já estão exponencialmente suprimidos. Como são pequenas correções ao sinal, tais oscilações decrescentes mais altas são indistinguíveis de erros numéricos nessa aproximação. Então, é difícil achar os sobretons mais altos. Normalmente, o método de Prony permite calcular no máximo seis raízes do polinômio $A(z)$, inclusive os complexos conjugados, que correspondem à simetria $\omega \leftrightarrow (-\omega^*)^*$. Esta simetria existe somente porque a equação de onda (2.10) é real. Por isso, de fato, é possível calcular somente duas ou, às vezes, três frequências dominantes.

Para determinar o começo da época de toque quase-normal mais precisamente, pode-se utilizar a seguinte técnica [41]: encontra-se o modo ω_1 quase-normal dominante e o coeficiente correspondente C_1 em algum intervalo de tempo tardio. Então pode-se subtrair esta oscilação dos dados numéricos e obter os dados do perfil sem a contribuição do modo dominante. Depois disto, pode-se ver o toque do primeiro sobreton. Se a vida do toque quase-normal for longa o suficiente, é possível de achar, passo a passo, sobretons mais altos, assegurando-se de que o erro numérico dos dados iniciais é menor do que o sinal depois de retirar as contribuições dos modos mais lento-decrescentes.

3.2 Aproximação pelo potencial de Pöschl-Teller

O método mais fácil para o cálculo dos modos quase-normais no domínio de frequência é a aproximação do potencial efetivo pelo potencial de Pöschl-Teller. Este método foi sugerido por Bahram Mashhoon [42, 43].

Supondo-se que o potencial na equação (2.21) seja invariante sob a transformação

$$V(r^*, \alpha) = V(-ir^*, \alpha'),$$

onde α é um parâmetro e α' depende de α .

Consideremos a solução da equação com o potencial invertido

$$\frac{d^2 Q_\Omega}{dr_*^2} + (-\Omega^2 + V)Q_\Omega = 0, \quad (3.6)$$

com as condições de contorno que são características dos estados limitados, se $\text{Re}(\Omega) > 0$

$$Q_\Omega \propto e^{\mp \Omega r_*}, \quad r_* \rightarrow \pm \infty. \quad (3.7)$$

É fácil de ver que esta solução está relacionada à solução de (2.21) com condições de contorno quase-normais (2.24) de um modo simples,

$$Q_\omega(r_*, \alpha) = Q_\Omega(-ir_*, \alpha'), \quad \omega(\alpha) = \Omega(\alpha'). \quad (3.8)$$

Assim, o problema dos modos quase-normais é reduzido agora ao problema de estados limitados para um potencial invertido $V \rightarrow -V$, que é um espaço suave, aproximando-se de zero nos contornos infinitos. Este espaço pode ser aproximado pelo potencial de Pöschl-Teller

$$V_{PT} = \frac{V_0}{\cosh^2 \alpha(r_* - r_*^0)}, \quad (3.9)$$

onde V_0 é a altura do potencial efetivo e $-2V_0\alpha^2$ é a curvatura do potencial no seu máximo. Os estados limitados do potencial de Pöschl-Teller são conhecidos na forma analítica [44]

$$\Omega = \alpha \left(- \left(n + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{V_0}{\alpha^2} \right)^{1/2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

O potencial (3.9) é obviamente invariante sob a transformação

$$V_{PT}(r_*, \alpha) = V_{PT}(-ir_*, i\alpha).$$

Por isso, os modos quase-normais para o potencial inverso de Pöschl-Teller são

$$\omega(\alpha) = \Omega(i\alpha) = \pm \left(V_0 - \frac{\alpha^2}{4} \right)^{1/2} - i\alpha \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.11)$$

Tecnicamente precisa-se ajustar um potencial efetivo dado a um potencial inverso de Pöschl-Teller. No capítulo 7 será visto que em muitos casos, para se determinar os modos quase-normais dominantes, é essencial o comportamento do potencial efetivo somente perto do buraco negro. Por isso, o ajuste da altura do potencial efetivo V_0 e da sua curvatura $-2V_0\alpha^2$ são de fato suficientes para estimar as frequências quase-normais.

Esse método dá resultados precisos o suficiente para o regime de números multipolares l altos. Particularmente, para perturbações gravitacionais dos buracos negros de Schwarzschild $D = 4$, os modos quase-normais fundamentais, obtidos pelo método de Mashhoon, dão um erro relativo de não mais de 2% para o multipolo mais baixo $l = 2$, e aproximadamente de frações de um por cento para os multipolos mais altos.

Há casos quando o potencial efetivo de um buraco negro é *exatamente* o potencial de Pöschl-Teller. Esses são os buracos negros Schwarzschild-de Sitter [45] e Reissner-Nordström-de Sitter com um valor extremo do termo Λ em $D \geq 4$ dimensões de espaço-tempo [46].

Figura 3.1: As três regiões separadas pelos dois pontos de virada $Q(x) = 0$.

3.3 O método de WKB

Para avaliar modos quase-normais de potenciais efetivos mais complicados é conveniente utilizar o método de WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin), que fornece uma boa precisão. A técnica de WKB foi aplicada para achar os modos quase-normais de buracos negros pela primeira vez por Schutz e Will [47].

Para simplificar as notações deste trabalho, reescreve-se a equação de onda (2.21) na forma

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + Q(x)\Psi(x) = 0, \quad (3.12)$$

isto é, identifica-se $x \equiv r_*$, $Q \equiv \omega^2 - V$, e $\Psi \equiv Q_\omega$.

Introduzindo o parâmetro WKB ϵ para monitorar as ordens da expansão WKB. A aproximação assintótica de WKB em ambos infinitos tem a forma geral

$$\Psi(x) \propto \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n(x)\epsilon^n}{\epsilon}\right). \quad (3.13)$$

Substituindo a expansão (3.13) na equação de onda (3.12), e igualando as mesmas potências de ϵ , acha-se

$$S_0(x) = \pm i \int_{x_0}^x Q(\eta)^{1/2} d\eta, \quad (3.14)$$

$$S_1(x) = -\frac{1}{4} \ln Q(x). \quad (3.15)$$

As duas escolhas de sinal em (3.14) correspondem às ondas que entram ou que saem em quaisquer dos infinitos $x = \pm\infty$.

Assim, em $x \rightarrow +\infty$ (região I), $Q(x) \rightarrow \omega^2$ na ordem dominante, para que $S_0 \rightarrow +i\omega x$ para uma onda que sai no infinito e $S_0 \rightarrow -i\omega x$ para uma onda que entra do infinito. De maneira

semelhante, no horizonte de eventos $x \rightarrow -\infty$ (região III), $S_0 \rightarrow i\omega x$ para uma onda que entra do horizonte de eventos, enquanto $S_0 \rightarrow -i\omega x$ para uma onda que sai ao horizonte de eventos. Essas quatro soluções serão designadas como Ψ_+^I , Ψ_-^I , Ψ_+^{III} e Ψ_-^{III} respectivamente para sinais positivos e negativos em S_0 nas regiões I e III (ver o fig. 3.1). Assim,

$$\Psi_+^I \sim e^{+i\omega x}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \Psi_-^I \sim e^{-i\omega x}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (3.16)$$

$$\Psi_+^{III} \sim e^{+i\omega x}, \quad x \rightarrow -\infty, \quad \Psi_-^{III} \sim e^{-i\omega x}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (3.17)$$

As soluções gerais nas regiões I e III são

$$\Psi = Z_{in}^I \Psi_-^I + Z_{out}^I \Psi_+^I, \quad (3.18)$$

$$\Psi = Z_{in}^{III} \Psi_+^{III} + Z_{out}^{III} \Psi_-^{III}, \quad (3.19)$$

As amplitudes em $x \rightarrow \infty$ são conectadas com as amplitudes em $x \rightarrow -\infty$ pela relação linear de matriz

$$\begin{pmatrix} Z_{out}^{III} \\ Z_{in}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{out}^I \\ Z_{in}^I \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Agora é preciso combinar ambas as soluções WKB da forma (3.13) nas regiões I e III com uma solução na região II, pelos dois pontos de virada $Q(x) = 0$.

Se os pontos de virada forem próximos, isto é se $-Q(x)_{max} \ll Q(\pm\infty)$, então a solução na região II pode ser bem aproximada pela série de Taylor

$$Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2}Q_0''(x - x_0)^2 + \mathcal{O}((x - x_0)^3), \quad (3.21)$$

onde x_0 é o ponto de máximo da função $Q(x)$, $Q_0 = Q(x_0)$, e Q_0'' é a derivada segunda com relação a x no ponto $x = x_0$. A região II corresponde a

$$|x - x_0| < \sqrt{\frac{-2Q_0}{Q_0''}} \approx \epsilon^{1/2}. \quad (3.22)$$

A última relação dá também a região de validade da aproximação de WKB: ϵ deve ser pequeno.

Introduzimos as novas funções

$$t = (2Q_0'')^{1/4} e^{i\pi/4} (x - x_0), \quad (3.23)$$

$$\nu + \frac{1}{2} = -iQ_0/(2Q_0'')^{1/2}. \quad (3.24)$$

Então a equação de onda (3.12) assume a forma

$$\frac{d^2\Psi}{dt^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}t^2 \right) \Psi = 0. \quad (3.25)$$

A solução geral desta equação pode ser expressa em termos das funções de cilindro parabólico $D_\nu(t)$,

$$\Psi = AD_\nu(t) + BD_{-\nu-1}(it). \quad (3.26)$$

As assintóticas de grande $|t|$ dessa solução são

$$\Psi \approx B e^{-3i\pi(\nu+1)/4} (4k)^{-(\nu+1)/4} (x - x_0)^{-(\nu+1)} e^{ik^{1/2}(x-x_0)^2/2} +$$

$$(A + B(2\pi)^{1/2}e^{-i\nu\pi/2}/\Gamma(\nu+1))e^{i\pi\nu/4}(4k)^{\nu/4}(x-x_0)^\nu e^{-ik^{1/2}(x-x_0)^2/2}, \quad x \gg x_2, \quad (3.27)$$

$$\Psi \approx Ae^{-3i\pi\nu/4}(4k)^{\nu/4}(x-x_0)^\nu e^{-ik^{1/2}(x-x_0)^2/2} +$$

$$(B - iA(2\pi)^{1/2}e^{-i\nu\pi/2}/\Gamma(-\nu))e^{i\pi(\nu+1)/4}(4k)^{-(\nu+1)/4}(x-x_0)^{-(\nu+1)}e^{ik^{1/2}(x-x_0)^2/2}, \quad x \ll x_1, \quad (3.28)$$

onde $k = \frac{1}{2}Q_0''$.

Equiparando os coeficientes correspondentes em (3.27), (3.28) e eliminando A e B , obtêm-se os elementos da matriz S ,

$$\begin{pmatrix} Z_{out}^{III} \\ Z_{in}^{III} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi\nu} & iR^2e^{i\pi\nu}(2\pi)^{1/2}/\Gamma(\nu+1) \\ R^{-2}(2\pi)^{1/2}/\Gamma(-\nu) & -e^{i\pi\nu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{out}^I \\ Z_{in}^I \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

onde

$$R = (\nu+1)^{(\nu+1/2)/2}e^{-(\nu+1/2)/2}. \quad (3.30)$$

Quando se faz a expansão em ordens de WKB mais altas, a matriz S tem a mesma forma geral, somente com outro R , ainda dependendo somente de ν . Nota-se que para um buraco negro não há qualquer onda “refletida pelo horizonte”, então $Z_{in}^{III} = 0$, e por causa das condições de contorno quase-normais, não há ondas que vêm do infinito, isto é $Z_{in}^I = 0$. Ambas condições são satisfeitas por (3.29) somente quando

$$\Gamma(-\nu) = \infty, \quad (3.31)$$

e, conseqüentemente, ν deve ser um número inteiro. Então, da relação (3.24) acha-se

$$n + \frac{1}{2} = -iQ_0/(2Q_0'')^{1/2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.32)$$

A última relação dá os modos quase-normais complexos rotulados por um número de sobretom n com a precisão da primeira ordem de WKB [47]. Mais tarde, esta aproximação foi extendida à terceira ordem de WKB além da aproximação eikonal por Iyer e Will [48] e à sexta ordem por Konoplya [49, 50]. Para fazer a extensão de WKB da ordem superior é suficiente expandir a série de WKB até ordens mais altas de ϵ (3.13) e achar o número apropriado de termos consecutivos na expansão de Taylor (3.21). Como a matriz S (3.20) depende somente de ν , pode-se achar os seus elementos S_{ij} simplesmente resolvendo o problema interior na região II em ordens mais altas de ϵ [48], e sem uma combinação explícita da solução interior com soluções WKB nas regiões I e III para cada ordem.

Passando de Q ao potencial efetivo V , a fórmula de WKB da sexta ordem tem a forma

$$\frac{i(\omega^2 - V_0)}{\sqrt{-2V_0''}} - \Lambda_2 - \Lambda_3 - \Lambda_4 - \Lambda_5 - \Lambda_6 = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

onde os termos de correção Λ_i dependem do valor do potencial efetivo e de suas derivadas (até a ordem $2i$) no máximo dele.

Foi mostrado em [51] que a fórmula de WKB, extendida à sexta ordem, dá o erro relativo, que é aproximadamente duas ordens menor do que o erro da 3ª ordem de WKB. Ainda deve-se lembrar que, na realidade, a série de WKB converge só assintoticamente e a redução conseqüente do erro relativo em cada ordem de WKB não é garantida. Por isso, é razoável desenvolver uma técnica WKB modificada na chamada ordem ótima [52]. Esta última, dá melhores resultados de sobretons n moderadamente mais altos e, sobretudo, quando $n > l$. Ainda, em muitos casos quando $n \leq l$, a fórmula de WKB da 6ª ordem dá melhores resultados do que a abordagem da ótima ordem.

Em alguns casos, a aproximação de WKB precisa de modificações: por exemplo, quando considerando um campo escalar massivo no contexto de um buraco negro, o potencial efetivo tem um mínimo local longe de um buraco negro. Este mínimo local induz duas modificações na abordagem de WKB. Primeiro, há três pontos de virada que separam todo o espaço em quatro regiões, de modo que três combinações sejam necessárias. Segundo, um termo subdominante influente na expansão assintótica WKB no infinito espacial (3.19) aparece (ver a seção 3.4.7).

3.4 Método de Frobenius

3.4.1 Série de Frobenius

O método mais preciso para buscar valores próprios da equação (2.21) é o método de Frobenius, que permite achar modos quase-normais com precisão arbitrária e não exige a forma especial do potencial efetivo. Este método permite calcular também sobretons mais altos de buracos negros. Isto foi feito pela primeira vez por E. W. Leaver para buracos negros de Schwarzschild e Kerr [53].

Consideremos a equação diferencial da segunda ordem de forma mais geral do que (2.10)

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + p(r) \frac{d}{dr} + q(r) \right) R(r) = 0, \quad (3.34)$$

onde as funções $p(r)$ e $q(r)$ dependem da frequência própria ω .

Começemos pela análise do caráter de pontos singulares desta equação. Há dois pontos, que são sempre singulares: o horizonte de eventos $r = r_+$ e o horizonte cosmológico (ou o infinito espacial) $r = r_\infty$. Normalmente, há também outros pontos singulares, que dependem de $p(r)$ e $q(r)$. Por definição, os modos quase-normais são valores próprios de ω com as condições de contorno que correspondem à onda que sai do horizonte cosmológico (infinito espacial) e a onda que entra no horizonte de eventos de buraco negro. Assim, é possível definir a função $R(r)$ como uma multiplicação de algum fator e a série de Frobenius. O fator é divergente nesses pontos singulares. Ele é escolhido para a série ser convergente na região $r_+ \leq r \leq r_\infty$. Se $p(r)$ e $q(r)$ forem funções racionais de r , pode-se construir tal série nos termos das funções racionais,

$$R(r) = \begin{cases} \left(\frac{r - r_\infty}{r - r_0} \right)^{i\Omega} \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^{-i\beta} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \frac{r_\infty - r_0}{r_\infty - r_+} \right)^k, & r_\infty < \infty, \\ e^{i\Omega r} (r - r_0)^\sigma \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^{-i\beta} \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^k, & r_\infty = \infty. \end{cases} \quad (3.35)$$

Os valores Ω , σ e β são definidos para satisfazer (3.34) nos pontos singulares $r = r_+$ e $r = r_\infty$. As condições de contorno quase-normais fixam $Re(\Omega)$ e $Re(\beta)$, que devem ser escolhidos do mesmo sinal que $Re(\omega)$.

Consideremos a série

$$u(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k. \quad (3.36)$$

Se todos os pontos singulares da equação (3.34) satisfizerem $|z| > 1$, a série (3.36) é convergente em $z = 1$ ($r = r_\infty$), se e somente se o valor de ω for a frequência própria da equação (3.34). Se houver pelo menos um ponto singular dentro do círculo de unidade, é preciso continuar a série (3.36) através de alguns pontos centrais (ver a seção 3.4.4) para testar a convergência no horizonte cosmológico ou no infinito espacial.

Observe, que a definição de z contém um parâmetro arbitrário $r_0 < r_+$. Na maior parte dos casos, este parâmetro pode ser escolhido para mover todas as singularidades para fora do círculo de unidade.

3.4.2 O método de uma fração contínua

Substituindo (3.35) em (3.34), pode-se obter uma relação de recorrência de N termos para os coeficientes b_i

$$\sum_{j=0}^{\min(N-1,i)} c_{j,i}^{(N)}(\omega) b_{i-j} = 0, \quad i > 0, \quad (3.37)$$

onde os coeficientes $c_{j,i}^{(N)}(\omega)$ ($0 \leq j \leq \min(N-1, i)$) dependem de ω .

Agora é reduzido o número de termos na relação de recorrência

$$\sum_{j=0}^{\min(k,i)} c_{j,i}^{(k+1)}(\omega) b_{i-j} = 0 \quad (3.38)$$

por um, isto é, achamos $c_{j,i}^{(k)}(\omega)$ que satisfazem a equação

$$\sum_{j=0}^{\min(k-1,i)} c_{j,i}^{(k)}(\omega) b_{i-j} = 0. \quad (3.39)$$

Para $i \geq k$, pode-se reescrever a expressão acima como

$$\frac{c_{k,i}^{(k+1)}(\omega)}{c_{k-1,i-1}^{(k)}(\omega)} \sum_{j=1}^k c_{j-1,i-1}^{(k)}(\omega) b_{i-j} = 0. \quad (3.40)$$

Subtraindo (3.40) de (3.38) acha-se a relação (3.39) explicitamente. Assim obtém-se,

$$c_{j,i}^{(k)}(\omega) = c_{j,i}^{(k+1)}(\omega), \quad j = 0, \text{ ou } i < k,$$

$$c_{j,i}^{(k)}(\omega) = c_{j,i}^{(k+1)}(\omega) - \frac{c_{k,i}^{(k+1)}(\omega) c_{j-1,i-1}^{(k)}(\omega)}{c_{k-1,i-1}^{(k)}(\omega)}.$$

Este procedimento é chamado *eliminações de Gauss*, e permite determinar os coeficientes na relação de recorrência de três termos, numericamente, para um ω dado até qualquer i finito

$$c_{0,i}^{(3)} b_i + c_{1,i}^{(3)} b_{i-1} + c_{2,i}^{(3)} b_{i-2} = 0, \quad i > 1 \quad (3.41a)$$

$$c_{0,1}^{(3)} b_1 + c_{1,1}^{(3)} b_0 = 0. \quad (3.41b)$$

A complexidade do procedimento é *linear* com relação a i e N .

Se a série de Frobenius for convergente, pode-se achar b_1/b_0 de (3.41b) e substituí-lo em (3.41a)

$$\frac{b_1}{b_0} = -\frac{c_{1,1}^{(3)}}{c_{0,1}^{(3)}} = -\frac{c_{2,2}^{(3)}}{c_{1,2}^{(3)}} - \frac{c_{0,2}^{(3)} c_{2,3}^{(3)}}{c_{1,3}^{(3)}} - \frac{c_{0,3}^{(3)} c_{2,4}^{(3)}}{c_{1,4}^{(3)}} \dots \quad (3.42)$$

Finalmente acha-se

$$0 = c_{1,1}^{(3)} - \frac{c_{0,1}^{(3)} c_{2,2}^{(3)}}{c_{1,2}^{(3)} -} \frac{c_{0,2}^{(3)} c_{2,3}^{(3)}}{c_{1,3}^{(3)} -} \dots, \quad (3.43)$$

o que pode ser invertido n vezes

$$c_{1,n+1}^{(3)} - \frac{c_{2,n}^{(3)} c_{0,n-1}^{(3)}}{c_{1,n-1}^{(3)} -} \frac{c_{2,n-1}^{(3)} c_{0,n-2}^{(3)}}{c_{1,n-2}^{(3)} -} \dots \frac{c_{2,2}^{(3)} c_{0,1}^{(3)}}{c_{1,1}^{(3)} -} = \frac{c_{0,n+1}^{(3)} c_{2,n+2}^{(3)}}{c_{1,n+2}^{(3)} -} \frac{c_{0,n+2}^{(3)} c_{2,n+3}^{(3)}}{c_{1,n+3}^{(3)} -} \dots. \quad (3.44)$$

A equação (3.44) com a *fração contínua infinita* do lado direito pode ser resolvida numericamente minimizando o valor absoluto da diferença entre os lados esquerdo e direito. A equação tem um número infinito de raízes, que correspondem ao espectro quase-normal, mas para cada n a raiz mais estável é diferente. Em geral, tem-se que usar a equação n vezes invertida para achar o n^o modo quase-normal. A exigência de que a fração contínua seja convergente, permite restringir a sua profundidade por algum valor grande, sempre assegurando-se de que um aumento neste valor não modifica os resultados finais dentro da precisão desejada.

3.4.3 Melhora de Nollert

Acontece que a convergência da fração contínua infinita fica pior, se a parte imaginária de ω aumentar com relação à parte real. Isto significa que para calcular os sobretons mais altos corretamente, deve-se aumentar a profundidade da fração contínua, o que aumenta dramaticamente o tempo do cálculo. A convergência é ruim também se r_0 em (3.35) não for um ponto singular. Tal fixação de r_0 é necessária para mover todos os pontos singulares para fora do círculo de unidade para buracos negros de Schwarzschild em dimensões mais altas.

O problema da convergência lenta foi contornado em [54] para a relação de recorrência de três termos e generalizada para N 's mais altos em [18]. Consideremos

$$-\frac{b_n}{b_{n-1}} = R_n = \frac{c_{2,n+1}^{(3)}}{c_{1,n+1}^{(3)} -} \frac{c_{0,n+1}^{(3)} c_{2,n+2}^{(3)}}{c_{1,n+2}^{(3)} -} \dots, \quad (3.45)$$

que para n grande pode ser expandida como

$$R_n(\omega) = C_0(\omega) + \frac{C_1(\omega)}{\sqrt{n}} + \frac{C_2(\omega)}{n} + \dots. \quad (3.46)$$

Para achar os coeficientes C_j de (3.46), divide-se a equação (3.37) por b_{i-N+1} e utiliza-se a definição $R_n = -b_n/b_{n-1}$. Encontra-se a equação

$$\sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j c_{j,i}^{(N)}(\omega) \prod_{k=0}^{N-2-j} R_{i-k} = 0. \quad (3.47)$$

Para n grande, $c_{j,n}^{(N)}(\omega) \propto n^2$. Assim, substituindo a expansão (3.46) em (3.47), acha-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j c_{j,n}^{(N)}(\omega) C_0^{N-1-j}(\omega) = 0. \quad (3.48)$$

Em geral, a equação (3.48) tem $N - 1$ raízes (de fato há raízes múltiplas). Uma das raízes (também múltipla) é *sempre* $C_0 = -1$, implicando que o raio de convergência da série (3.35) é

unitário. Outras raízes aparecem por causa da existência de pontos singulares adicionais da equação (3.34). Assim seleciona-se $C_0 = -1$.

Depois de fixar $C_0 = -1$ pode-se achar uma equação com relação a C_1^2 . Para fixar o sinal de C_1 pode-se utilizar a convergência da série (3.35) em $z = 1$. Por isso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \quad \text{i. e. } \nexists N : \forall n > N \quad |b_n| > |b_{n-1}|.$$

Como para n grande tem-se

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} \sim -R_n \sim -C_0 - \frac{C_1}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{C_1}{\sqrt{n}},$$

descobre-se que a parte real de C_1 *não pode ser negativa*.

Depois que o sinal de C_1 for fixado, os outros coeficientes em (3.46) podem ser achados passo a passo a partir de (3.47) sem encontrar indeterminações.

Como pode-se calcular os coeficientes C_j , a expansão (3.46) pôde ser utilizada como uma aproximação inicial do “restante” da fração contínua infinita. Para assegurar a convergência de (3.46) para um valor dado de ω , tem-se que começar da aproximação encontrada dentro da fração contínua (3.44) profundamente o suficiente. A expansão dá uma boa aproximação para R_n . Por isso, a profundidade necessária é menor do que ela seria, se fosse começada de algum valor arbitrário.

3.4.4 Continuação da série de Frobenius por pontos centrais

Consideremos o caso quando não é possível fixar o parâmetro r_0 em (3.35) de tal jeito que todas as singularidades, exceto $r = r_+$ e $r = r_\infty$, se movem para fora do círculo de unidade. Neste caso existe pelo menos uma singularidade, para qual $|z| < 1$. Esta singularidade implica menor raio de convergência para a série (3.36). Para testar que a função $u(z)$ é convergente em $z = 1$, deve-se continuar a série analiticamente, construindo iterativamente as expansões de $u(z)$ em alguns pontos centrais [55].

Equaciona-se a expansão de série em dois pontos

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{b}_n (z - z_0)^n, \quad (3.49)$$

onde $z = z_0$ é um ponto central dentro do raio de convergência de (3.36).

Os coeficientes $\tilde{b}_n$ também satisfazem a relação de recorrência de N termos, que poderia ser reduzida à relação de três termos

$$\tilde{c}_{0,i}^{(3)} \tilde{b}_i + \tilde{c}_{1,i}^{(3)} \tilde{b}_{i-1} + \tilde{c}_{2,i}^{(3)} \tilde{b}_{i-2} = 0, \quad i > 1. \quad (3.50)$$

Para achar $\tilde{b}_1/\tilde{b}_2$, deve-se utilizar a condição no horizonte de eventos levando em conta

$$\tilde{b}_0 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_0^n, \quad \tilde{b}_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n z_0^{n-1}. \quad (3.51)$$

De (3.41b) e (3.41a) acham-se os coeficientes b_n substituindo-os em (3.50). Se $z = 1$ for o ponto singular mais próximo a $z = z_0$, obtém-se a equação com relação a ω como

$$\frac{\tilde{b}_1}{\tilde{b}_0} = -\frac{\tilde{c}_{2,2}^{(3)}}{\tilde{c}_{1,2}^{(3)}} - \frac{\tilde{c}_{0,2}^{(3)} \tilde{c}_{2,3}^{(3)}}{\tilde{c}_{1,3}^{(3)}} - \frac{\tilde{c}_{0,3}^{(3)} \tilde{c}_{2,4}^{(3)}}{\tilde{c}_{1,4}^{(3)}} \cdots \quad (3.52)$$

Senão, tem-se que repetir o procedimento, construindo a série (3.49) para os pontos centrais seguintes $z_1, z_2, z_3, \dots$, até que o horizonte cosmológico (ou infinito espacial) pareça estar dentro do raio de convergência.

É preciso observar que, se a convergência da fração contínua do lado direito de (3.52) for lenta, pode-se utilizar a melhora de Nollert. Como o raio da convergência da série de Frobenius é agora menor que um ($R < 1$), deve-se selecionar $C_0 = -R^{-1}$ em (3.46).

3.4.5 Generalização da série de Frobenius

A expansão da série (3.36) não deve necessariamente ser feita nos termos da potência de uma função racional de r . Para alguns objetivos, a escolha mais conveniente é a expansão nos termos de um outro conjunto completo de funções no espaço de Hilbert apropriado. Aqui considera-se, como um exemplo, um buraco negro Kerr-Newman-de Sitter, que é descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = -\rho^2 \left(\frac{dr^2}{\Delta_r} + \frac{d\theta^2}{\Delta_\theta} \right) - \frac{\Delta_\theta \sin^2 \theta}{(1+\alpha)^2 \rho^2} [adt - (r^2 + a^2)d\varphi]^2 + \frac{\Delta_r}{(1+\alpha)^2 \rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2, \quad (3.53)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta_r &= (r^2 + a^2) \left(1 - \frac{\alpha}{a^2} r^2 \right) - 2Mr + Q^2, \\ \Delta_\theta &= 1 + \alpha \cos^2 \theta, \quad \alpha = \frac{\Lambda a^2}{3}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

M é a massa do buraco negro, Q é a carga, a é o parâmetro de rotação, e Λ é a constante cosmológica.

Depois da separação das variáveis, a parte angular da equação do movimento para o campo (carregado) sem massa reduz-se a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dx} (1 + \alpha x^2) (1 - x^2) \frac{d}{dx} + \lambda - s(1 - \alpha) + \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha} \xi^2 - 2\alpha x^2 + \right. \\ & \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha x^2} \left(2s(\alpha m - (1 + \alpha)\xi)x - \frac{(1 + \alpha)^2}{\alpha} \xi^2 - 2m(1 + \alpha)\xi + s^2 \right) - \\ & \left. - \frac{(1 + \alpha)^2 m^2}{(1 + \alpha x^2)(1 - x^2)} - \frac{(1 + \alpha)(s^2 + 2smx)}{1 - x^2} \right) S(x) = 0, \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde λ é a constante de separação $\xi = a\omega$, $x = \cos(\theta)$, s é o spin do campo e m é a projeção do momento angular do campo para o eixo de rotação do buraco negro, $0 \leq s \leq 2$ e m são números (semi)inteiros.

A série apropriada para a função S é [56]

$$S(z) = z^{A_1} (z - 1)^{A_2} (z - z_s)^{A_3} (z - z_\infty) \sum_{n=0}^{\infty} b_n u_n(z), \quad (3.56)$$

onde

$$\begin{aligned} z &= \frac{\sqrt{\alpha} - i}{2} \frac{x + 1}{x\sqrt{\alpha} - i}, \quad z_s = -\frac{i(1 + i\sqrt{\alpha})^2}{4\sqrt{\alpha}}, \quad z_\infty = -\frac{i(1 + i\sqrt{\alpha})}{2\sqrt{\alpha}}, \\ A_1 &= \frac{|m - s|}{2}, \quad A_2 = \frac{|m + s|}{2}, \quad A_3 = \pm \frac{i}{2} \left(\frac{1 + \alpha}{\sqrt{\alpha}} \xi - \sqrt{\alpha} \xi - is \right), \end{aligned}$$

e a expansão é feita nos termos dos polinômios de Jacobi

$$u_n(z) = F(-n, n + \bar{\omega}; \gamma; z) = (-1)^n \frac{\Gamma(2n + \bar{\omega})n!}{\Gamma(n + \gamma)} P_n^{(\bar{\omega} - \gamma, \gamma - 1)}(2z - 1),$$

onde $\bar{\omega} = 2A_1 + 2A_2 + 1$ e $\gamma = 2A_1 + 1$.

Os coeficientes b_n em (3.56) satisfazem a relação de recorrência de três termos (3.41a, 3.41b) com

$$c_{0,n}^{(3)} = \pm \frac{i}{\sqrt{\alpha}} \xi \frac{n(n + A_1 + A_2 \mp s)(n + 2A_2)}{2(2n + 2A_1 + 2A_2 + 1)(n + A_1 + A_2)}, \quad (3.57)$$

$$c_{1,n}^{(3)} = \frac{i}{\sqrt{\alpha}} \left\{ \pm \xi \frac{J_n}{2(n + A_1 + A_2)(n + A_1 + A_2 - 1)} + \frac{(n - 1)(n + 2A_1 + 2A_2)}{4} - \frac{1}{4} \left[\lambda - 2A_1A_2 - A_1 - A_2 + 2(m + s \mp (2A_1 + 1))\xi - \frac{m^2 - s^2}{2} - s \right] \right\}, \quad (3.58)$$

$$c_{2,n}^{(3)} = \mp \frac{i}{\sqrt{\alpha}} \xi \frac{(n - 1 + A_1 + A_2 \pm s)(n - 1 + 2A_1)(n - 1 + 2A_1 + 2A_2)}{2(2n + 2A_1 + 2A_2 - 3)(n - 1 + A_1 + A_2)}, \quad (3.59)$$

onde

$$J_n = (n - 1)(n + 2A_1 + 2A_2)(A_1 - A_2) + (A_1 + A_2 \pm s + 1)((n - 1)(n + 2A_1 + 2A_2) + (2A_1 + 1)(A_1 + A_2)).$$

Como a série (3.56) deve ser convergente em $z = 1$, é possível resolver numericamente a equação (3.44), e achar, por meio desta, a constante de separação como uma função da frequência.

No limite de Reissner-Nordström-de Sitter ($a \rightarrow 0$) a equação (3.44) reduz-se a $c_{1,n}^{(3)} = 0$. Neste caso o valor de λ não depende de ω

$$\lambda = (l - s + 1)(l + s), \quad l = n + A_1 + A_2 \geq \max(|m|, |s|).$$

3.4.6 Série de Frobenius para a parte radial da equação de campo carregado no contexto de Kerr-Newman-de Sitter

A parte radial da equação de movimento de campo (carregado) sem massa é da forma (3.34) e lê-se [56]

$$\left\{ \Delta_r^{-s} \frac{d}{dr} \Delta_r^{s+1} \frac{d}{dr} + \frac{1}{\Delta_r} \left(K^2 - isK \frac{d\Delta_r}{dr} \right) + 4is(1 + \alpha)\omega r - \frac{2\alpha}{a^2}(s + 1)(2s + 1)r^2 + 2s(1 - \alpha) - 2isqQ - \lambda \right\} R(r) = 0, \quad (3.60)$$

onde $K = [\omega(r^2 + a^2) - am](1 + \alpha) - qQr$, q é a carga do campo.

A série apropriada de Frobenius foi achada na forma [22]

$$R(r) = \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{-s - 2iK(r_+)/\Delta'_r(r_+)} e^{iB(r)} r^{-2s-1} u \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \frac{r_\infty - r_-}{r_\infty - r_+} \right) \quad (3.61)$$

Há que se observar, que para se obter a relação de recorrência para ambos os tipos de limites (assintoticamente plano e de Sitter), introduz-se o expoente $e^{iB(r)}$ tal que $\frac{dB(r)}{dr} = \frac{K}{\Delta_r}$. Este expoente descreve uma onda que sai nos horizontes e no infinito espacial. Assim, é preciso compensar a onda que sai no horizonte de eventos. Por isso, o fator 2 aparece na potência do primeiro multiplicador

em (3.61). O parâmetro r_0 foi fixado para ser o horizonte interior r_- , para mover todas as singularidades para fora do círculo de unidade e, ao mesmo tempo, fornecer a melhor convergência da fração contínua infinita (3.44).

Como λ pode ser calculado numericamente como uma função de ω (ver a seção 3.4.5), é possível resolver a equação (3.44) com relação a ω .

No limite de Reissner-Nordström-de Sitter ($a = 0$) para campo neutro ($q = 0$) obtêm-se $K = \omega r^2$ e

$$R(r) = \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \right)^{-s - i\omega/\kappa} e^{i\omega r_*} r^{-2s-1} u \left(\frac{r - r_+}{r - r_-} \frac{r_\infty - r_-}{r_\infty - r_+} \right). \quad (3.62)$$

A coordenada tartaruga é definida por $dr_* = \frac{r^2 dr}{\Delta_r}$, e $\kappa = \frac{\Delta'_r(r_+)}{2r_+^2}$ é a gravidade da superfície no horizonte de eventos.

3.4.7 Série de Frobenius para a equação do campo escalar massivo no contexto Reissner-Nordström-de Sitter de dimensões mais altas

Um buraco negro Reissner-Nordström-de Sitter D -dimensional descreve-se pela métrica

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega_{D-2}, \quad (3.63)$$

onde $d\Omega_{D-2}$ é o elemento de linha de uma esfera $(D-2)$ -dimensional,

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r^{D-3}} + \frac{Q^2}{r^{2D-6}} - \frac{2\Lambda r^2}{(D-1)(D-2)}. \quad (3.64)$$

Depois da separação das variáveis angulares e variável de tempo, a parte radial da equação de movimento para o campo escalar massivo $(\square + \mu^2)\Psi = 0$ é reduzida à equação de onda

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2} + \omega^2 - f(r) \left(\mu^2 + \frac{l(l+D-3)}{r^2} + \frac{f'(r)(D-2)}{2r} + \frac{f(r)(D-2)(D-4)}{4r^2} \right) \right) r^{\frac{D-2}{2}} R(r) = 0, \quad (3.65)$$

onde o número inteiro $l = 0, 1, 2, \dots$ parametriza a constante angular de separação.

A série de Frobenius neste caso é

$$R(r) = \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{iA(r)} r^{-\frac{D-2}{2}} u \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \frac{r_\infty - r_0}{r_\infty - r_+} \right), \quad (3.66)$$

onde $\kappa = \frac{1}{2}f'(r_+)$, $e^{iA(r)}$ descreve a onda que sai para o infinito espacial e horizontes $\frac{dA(r)}{dr} = \frac{\sqrt{\omega^2 - \mu^2 f(r)}}{f(r)}$. O sinal no expoente foi fixado pela condição de contorno quase-normal: a parte real de $A(r \rightarrow r_\infty)$ deve ser do mesmo sinal que a parte real da frequência própria ω . Esta escolha do sinal faz a onda sair para o horizonte cosmológico (ou infinito espacial).

Para um campo sem massa ($\mu = 0$) esse expoente é $e^{i\omega r_*}$ [20] e a série de Frobenius lê-se

$$R(r) = \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^{-\frac{i\omega}{\kappa}} e^{i\omega r_*} r^{-\frac{D-2}{2}} u \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \frac{r_\infty - r_0}{r_\infty - r_+} \right). \quad (3.67)$$

Como para $D = 4$ pode-se escolher $r_0 = r_-$, vem-se a (3.62) ($s = 0$).

No horizonte cosmológico é possível observar o mesmo comportamento assintótico do expoente

$$e^{iA(r)} \sim e^{i\omega r_*}, \quad r \rightarrow r_\infty < \infty.$$

Se $\Lambda = 0$, $D \geq 5$, $f(r) = 1 + o(r^{-1})$, pode-se escrever a série de Frobenius como [18]

$$R(r) = \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^{-\frac{i\omega}{2\kappa}} e^{ir\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} r^{-\frac{D-2}{2}} u \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right). \quad (3.68)$$

Para $D = 4$ o termo de ordem $\sim r^{-1}$ em $f(r)$ leva à contribuição não trivial [57]

$$R(r) = \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^{-\frac{i\omega}{2\kappa}} e^{ir\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} (r - r_0)^{ir + \sqrt{\omega^2 - \mu^2} + ir + 2\mu^2/2} \sqrt{\omega^2 - \mu^2} r^{-\frac{D-2}{2}} u \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right). \quad (3.69)$$

A mesma abordagem pode ser aplicada para as equações de movimento para o campo de Maxwell e as perturbações gravitacionais, porque as suas partes radiais podem ser reduzidas à forma (3.34) [58, 59]. Na prática, os coeficientes de fração contínua parecem ser tão complicados para tais casos, que não é possível computar modos quase-normais com este método durante um tempo aceitável.

3.5 O método de Horowitz-Hubeny

Para achar modos quase-normais nos espaços-tempo assintoticamente anti-de Sitter, normalmente é preciso impor as condições de contorno de Dirichlet no infinito espacial. Assim, pode-se achar a expansão apropriada para a função $R(r)$ em (3.34) sem a consideração do ponto de singularidade no infinito. Este método foi proposto por Horowitz e Hubeny [7]. Definimos

$$R = z^{-i\omega/(2\kappa)} \psi(z), \quad z = \frac{r - r_+}{r - r_-}, \quad (3.70)$$

onde κ é a gravidade da superfície no horizonte de eventos.

Se substituirmos (3.70) em (3.34), descobrimos que $\psi(z)$ satisfaz a equação

$$s(z)\psi''(z) + \frac{t(z)}{z}\psi'(z) + \frac{u(z)}{z^2}\psi(z) = 0, \quad (3.71)$$

onde

$$s(z) = \sum_{n=0}^{N_s} s_n z^n, \quad t(z) = \sum_{n=0}^{N_t} t_n z^n, \quad u(z) = \sum_{n=1}^{N_u} u_n z^n,$$

são funções polinomiais de z .

Como a função $\psi(z)$ é regular no horizonte de eventos $z = 0$, pode-se expandi-la como

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \quad (3.72)$$

A condição de contorno de Dirichlet no infinito espacial $\psi(1) = 0$ lê-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0. \quad (3.73)$$

Substituindo (3.72) em (3.71), pode-se encontrar a relação de recorrência para as coeficientes a_n

$$a_n = - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{k(k-1)s_{n-k} + kt_{n-k} + u_{n-k}}{n(n-1)s_0 + nt_0}. \quad (3.74)$$

A equação (3.74) permite calcular todos a_n começando de um a_0 arbitrário, que fixa a escala de $\psi(z)$. Substituindo a_n em (3.73), encontra-se a equação com relação à frequência própria ω . Na prática, como a série (3.73) é convergente, soma-se um número finito de termos e resolve-se (3.73) com relação a ω . Para assegurar que este truncamento não causa um resultado incorreto deve-se aumentar o número de termos até que o valor de ω não se modifique em relação à precisão de que se necessita.

Há que se observar, que, para a soma (3.73) ser convergente, r_- tem que ser um ponto singular da equação (3.34), e todas as outras singularidades, exceto $r = r_+$ e $r = r_\infty$, devem pôr-se fora do círculo de unidade $|z| > 1$. Se ambas essas condições forem impossíveis de se satisfazer, deve-se usar o método de fração contínua com a fixação apropriada do comportamento de R no infinito espacial.

Capítulo 4

Perturbações de buracos negros quadridimensionais

4.1 Modos quase-normais de buracos negros de Schwarzschild e de Schwarzschild-de Sitter

Perturbações de buracos negros quadridimensionais foram estudadas extensivamente no contexto da possibilidade de observar o toque quase-normal com a ajuda de detectores de ondas gravitacionais (ver revisões [34, 60]). Como no nosso Universo a constante cosmológica parece ser positiva, a sua correção ao espectro quase-normal deve ser levada em conta. Perturbações gravitacionais de buracos negros esfericamente simétricos no contexto de Sitter foram estudadas pela primeira vez por integração numérica (ver a seção 2.2) in [30].

Em [9] estudam-se pela primeira vez modos quase-normais de campo Dirac sem massa e campo eletromagnético no contexto de Schwarzschild-de Sitter. Também estudam-se perturbações escalares sem massa e gravitacionais de buracos negros Schwarzschild-de Sitter, usando a 6ª ordem da aproximação de WKB (ver a seção 3.3), que fornece resultados mais precisos. Substituindo os potenciais efetivos para as perturbações escalares, eletromagnéticas, Dirac e gravitacionais (2.11, 2.13, 2.14, 2.16, 2.17) na fórmula WKB (3.33), foi achado que a presença da constante cosmológica leva a diminuir a frequência real de oscilação e ao decaimento mais lento (ver a fig. 4.1).

Para grande l as expressões analíticas foram achadas [9]

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - 9M^2\Lambda}}{3\sqrt{3}M} \left(l + \frac{1}{2} - \left(n + \frac{1}{2} \right) i \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{l} \right), \quad (4.1a)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{1 - 9M^2\Lambda}}{3\sqrt{3}M} \left(\kappa_{\pm} - \left(n + \frac{1}{2} \right) i \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{\kappa_{\pm}} \right). \quad (4.1b)$$

Como a massa do buraco negro se aproxima de seu valor extremo, os potenciais efetivos (2.11, 2.13, 2.14, 2.16, 2.17) se parecem com o potencial de Pöshl-Teller (ver a seção 3.2). Assim, usando a abordagem de Pöshl-Teller, foi encontrado em [45] que, no limite próximo ao extremo do buraco negro Schwarzschild-de Sitter, as frequências quase-normais são proporcionais à gravidade da superfície

Figura 4.1: As partes real e imaginária da frequência quase-normal fundamental do buraco negro Schwarzschild-de Sitter para perturbações escalares ($l = 2$), eletromagnéticas ($l = 2$), gravitacionais ($l = 2$), e Dirac ($\kappa = 2$) são plotadas com linhas azuis sólidas, vermelhas tracejadas, verdes pontilhadas-tracejadas e pretas pontilhadas, respectivamente.

no horizonte de eventos $\kappa = \frac{1}{2}f'(r_+)$

$$\omega = \kappa \left(\sqrt{(l+1-s)(l+s) - \frac{1}{4}} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + o(\kappa), \quad (4.2a)$$

$$\omega = \kappa \left(\sqrt{\kappa_{\pm}^2 - \frac{1}{4}} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + o(\kappa). \quad (4.2b)$$

Apesar da contribuição dominante da parte imaginária não depender do spin s do campo, as perturbações métricas decaem mais lentamente entre as perturbações consideradas para todos os valores de Λ .

4.2 Sobretons altos no espectro quase-normal

Embora, na prática, possam-se observar somente as oscilações que decaem lentamente, as frequências com grande parte imaginária atraíram alguma atenção no contexto da termodinâmica de buracos negros. Tais frequências são chamadas sobretons altos. Como a sua parte imaginária é muito grande, a aproximação de WKB não é apropriada e deve-se usar o método de Frobenius, que é mais preciso (ver a seção 3.4).

Foi sugerido em [61] que o valor assintótico da parte real da frequência quase-normal (isto é, quando a parte imaginária aproxima-se do infinito) coincide com o chamado parâmetro de Barbero-Immirzi [62, 63]. Este parâmetro deve ser fixado para prever a fórmula de Bekenstein-Hawking para a entropia dentro da estrutura de Gravidade quântica em loop. Para buracos negros de Schwarzschild foi achado numericamente [54] e analiticamente [64] que o comportamento assintótico da frequência quase-normal é dado por

$$\omega_n r_+ = \frac{\ln(3)}{4\pi} - \frac{i(n+1/2)}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2})$$

para as perturbações gravitacionais e para o campo escalar de teste, enquanto que, para as perturbações eletromagnéticas, a parte real aproxima-se assintoticamente de zero

$$\omega_n r_+ = -\frac{in}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}).$$

Figura 4.2: A parte real das frequências quase-normais que decaem rapidamente como uma função da parte imaginária ($\kappa_{\pm} = 1$ perturbações do campo de Dirac sem massa no contexto de Schwarzschild). As frequências foram medidas em unidades inversas da massa do buraco negro.

Foi mostrado numericamente em [11] que para perturbações do campo de Dirac sem massa, o valor assintótico da parte real das frequências quase-normais que decaem rapidamente é também zero (ver o fig. 4.2). O espaçamento correto da parte imaginária foi achado depois em [65], utilizando uma forma alternativa do potencial efetivo para as perturbações de Dirac. A fórmula assintótica para os sobretons altos do campo de Dirac sem massa no contexto de Schwarzschild lê-se

$$\omega_n r_+ \sim -\frac{in}{2}.$$

Usando o método de Frobenius (ver a seção 3.4), para buracos negros Schwarzschild-de Sitter foi achado pela primeira vez em [10] que novamente a parte real das frequências quase-normais para perturbações eletromagnéticas aproxima-se assintoticamente de zero, satisfazendo

$$\omega_n \sim i\kappa n \quad \cup \quad \omega_n \sim i\kappa_{\infty} n,$$

onde $\kappa = \frac{1}{2}f'(r_+)$ e $\kappa_{\infty} = \frac{1}{2}f'(r_{\infty})$ são as gravidades da superfície no horizonte do buraco negro e no horizonte cosmológico, respectivamente (ver o fig. 4.3). Esse resultado foi depois confirmado analiticamente em [66].

A parte real dos modos quase-normais para perturbações métricas não se aproxima de uma constante. As frequências com a parte imaginária grande satisfazem a equação não-algébrica

$$\cosh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa} - \frac{\pi\omega}{\kappa_{\infty}}\right) + 3 \cosh\left(\frac{\pi\omega}{\kappa} + \frac{\pi\omega}{\kappa_{\infty}}\right) \sim 0,$$

Figura 4.3: A parte real das frequências quase-normais que decaem rapidamente como uma função da parte imaginária para o buraco negro Schwarzschild-de Sitter ($l = 1$ perturbações eletromagnéticas, $\Lambda M^2 = 0.02$). As frequências foram medidas em unidades inversas da massa do buraco negro.

que implica oscilação da parte real como uma função da parte imaginária (ver o fig. 4.4).

4.3 O decaimento dos campos carregados escalar e Dirac no contexto de Kerr-Newman-de Sitter

Para buracos negros carregados, a eletrodinâmica de campo escalar pode descrever a interação de um campo carregado com um campo eletromagnético de fundo do buraco negro. Quando a influência do spin do campo é ignorada, pode-se considerar o campo escalar carregado. As caudas de tempo tardio dos cabelos escalares carregados foram estudadas pela primeira vez por Hod [67, 68] no contexto de colapso gravitacional. Os modos quase-normais de campo escalar carregado para vários buracos negros foram estudados pela primeira vez em [69]. Os modos quase-normais de campo escalar massivo carregado para buracos negros de Reissner-Nordström foram considerados em [70]. O decaimento de campo de Dirac carregado no contexto de Reissner-Nordström foi estudado em [71]. A lei de decaimento das caudas de tempo tardio de campo de Dirac massivo carregado também foi achada para buracos negros de Reissner Nordström [72] e Kerr-Newman [73]. Mas os cálculos dos modos quase-normais nos trabalhos acima mencionados foram limitados pela precisão da terceira ordem de WKB. A precisão de WKB não permite estudar os modos quase-normais dos buracos negros carregados próximo ao extremo. A taxa de decaimento de campos carregados no contexto Reissner-Nordström próximo ao extremo é a mesma dentro da precisão de WKB.

Figura 4.4: A parte real das freqüências quase-normais que decaem rapidamente como uma função da parte imaginária ($l = 2$ perturbações métricas do buraco negro Schwarzschild-de Sitter, $\Lambda M^2 = 0.02$). As freqüências foram medidas em unidades inversas da massa do buraco negro.

Figura 4.5: A parte real e a parte imaginária da freqüência quase-normal fundamental do campo escalar ($l = 0$) carregado (q) para o buraco negro carregado (Q).

O estudo numérico de frequências quase-normais dos campos carregados (tanto escalar como Dirac) no contexto de Kerr-Newman-de Sitter foi feito em [22] utilizando um método de Frobenius muito mais preciso (ver as seções 3.4.5, 3.4.6). Foi mostrado que para um valor de Q não muito grande, o campo carregado decai mais rapidamente do que o campo neutro. Para o valor de Q próximo ao extremo, o campo carregado decai mais devagar do que o campo neutro (ver a fig. 4.5).

Resumimos brevemente o que acontece, se um buraco negro tiver carga e rotação. Mede-se todas as quantidades em unidades do tamanho do horizonte de eventos.

- Como visto em seções prévias, a presença da constante cosmológica diminui os valores absolutos das partes real e imaginária de ω .
- Já é sabido, também, que quando o número multipolar l aumenta, a parte real de ω cresce, enquanto a parte imaginária de ω se aproxima de uma constante.
- Perturbações métricas decaem mais devagar do que qualquer perturbação de campo de mesmo l .
- A dependência de ω na carga do campo q e do buraco negro Q é mostrada na figura 4.5
 - Se $qQ > 0$, a parte real de ω cresce monotonicamente já que a carga de campo q aumenta. Ela cresce também, já que a carga do buraco negro Q aumenta, alcança um valor máximo em um alto (perto do extremo) valor de Q , e depois diminui.
 - Se $qQ < 0$, a parte real de ω diminui quando a carga do buraco negro ou do campo cresce.
 - A parte imaginária de ω tem um comportamento mais difícil, na maior parte dos casos, reduzindo o seu valor absoluto com o crescimento de qQ .
- A influência do parâmetro de rotação depende significativamente da projeção do momento de campo no eixo de rotação do buraco negro m . Depois esta dependência será considerada para o campo escalar massivo no contexto de Kerr (ver a seção 6.3). Qualitativamente o mesmo comportamento foi observado para buracos negros de Kerr, projetados na brana (ver a seção 5.3.1).

Capítulo 5

Perturbações de buracos negros em dimensões mais altas

5.1 Estabilidade e modos quase-normais de buracos negros Reissner-Nordström-de Sitter

Nos últimos anos, os buracos negros em dimensões mais altas atraíram um interesse considerável no contexto da teoria das cordas e em modelos de mundo-brana [74–79]. Alguns desses modelos permitem que um raio de compactificação das dimensões extras seja de um tamanho macroscópico [80, 81]. Por isso as dimensões extras são importantes para estudar buracos negros pequenos. Tais buracos negros podem ser produzidos nos colisores de partículas de nova geração, provavelmente em energias da ordem $\sim 1TeV$ [82–85].

Sendo uma característica importante de buraco negro, o seu espectro quase-normal pode ser usado em futuros experimentos para achar o número de dimensões extra e outros parâmetros da teoria. Por isso estuda-se o espectro quase-normal de buracos negros dentro de cenários diferentes com vários números possíveis de dimensões extras.

Quando um buraco negro é muito menor do que o tamanho das dimensões extras, ele pode ser descrito pela teoria de Einstein D -dimensional. A generalização D -dimensional da métrica de Schwarzschild foi feita por Tangherlini [86].

Consideremos o buraco negro Reissner-Nordström-de Sitter D -dimensional, que é descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega_d^2, \quad (5.1)$$

onde $d\Omega_d$ é o elemento de linha de d -esfera, $d = D - 2$, $f(r) = 1 - X + Z - Y$. As quantidades adimensionais X , Y , Z são definidas como

$$X = \frac{dM\mathcal{A}_d}{4\pi r^{d-1}}, \quad Y = \frac{2\Lambda r^2}{d(d+1)}, \quad Z = \frac{Q^2}{r^{2d-2}},$$

onde $\mathcal{A}_d = \frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)}$ é a área de uma d -esfera unitária, M é a massa do buraco negro, Q é a carga do buraco negro e Λ é a constante cosmológica.

As perturbações das equações de Einstein-Maxwell podem ser reduzidas à forma de onda (2.10). O potencial efetivo correspondente depende da lei de transformação deles, sob rotações na d -esfera (2.15). Assim, há três tipos de perturbações, descritas por três potenciais efetivos: tensorial (V_T),

vetorial (V_V) e escalar (V_S). A forma explícita dos potenciais foi derivada em [58]

$$V_T(r) = \frac{f(r)}{r^2} \left(\lambda + d + \frac{f'(r)rd}{2} + \frac{f(r)d(d-2)}{4} \right), \quad (5.2)$$

$$V_V(r) = \frac{f(r)}{r^2} \left(\lambda + d \pm \sqrt{X^2 \frac{(d^2-1)^2}{4} + 2Z\lambda d(d-1)} \times \right. \\ \left. \times \frac{d(d-2)(1-Y) + Zd(5d-2) - X(d^2+2)}{4} \right), \quad (5.3)$$

$$V_S(r) = f(r) \frac{U_{\pm}}{64r^2 H_{\pm}^2} \quad (5.4)$$

onde

$$H_+ = 1 - \frac{d(d+1)}{2} \delta X,$$

$$H_- = \lambda + \frac{d(d+1)}{2} (1 + \lambda \delta) X,$$

$$U_+ = [-4d^3(d+2)(d+1)^2 \delta^2 X^2 - 48d^2(d+1)(d-2) \delta X - 16(d-2)(d-4)] Y \\ - \delta^3 d^3 (3d-2)(d+1)^4 (1 + \lambda \delta) X^4 + 4\delta^2 d^2 (d+1)^2 \{ (d+1)(3d-2) \lambda \delta + 4d^2 + d - 2 \} X^3 \\ + 4\delta(d+1) \{ (d-2)(d-4)(d+1)(\lambda + d^2) \delta - 7d^3 + 7d^2 - 14d + 8 \} X^2 \\ + \{ 16(d+1) (-4\lambda + 3d^2(d-2)) \delta - 16(3d-2)(d-2) \} X + 64\lambda + 16d(d+2), \\ U_- = [-4d^3(d+2)(d+1)^2 (1 + \lambda \delta)^2 X^2 + 48d^2(d+1)(d-2) \lambda (1 + \lambda \delta) X - 16(d-2)(d-4) \lambda^2] Y \\ - d^3 (3d-2)(d+1)^4 \delta (1 + \lambda \delta)^3 X^4 - 4d^2 (d+1)^2 (1 + \lambda \delta)^2 \{ (d+1)(3d-2) \lambda \delta - d^2 \} X^3 \\ + 4(d+1)(1 + \lambda \delta) \{ \lambda(d-2)(d-4)(d+1)(\lambda + d^2) \delta + 4d(2d^2 - 3d + 4) \lambda \\ + d^2(d-2)(d-4)(d+1) \} X^2 + 64\lambda^3 + 16d(d+2) \lambda^2 \\ - 16\lambda \{ (d+1) \lambda (-4\lambda + 3d^2(d-2)) \delta + 3d(d-4) \lambda + 3d^2(d+1)(d-2) \} X.$$

Aqui foi definido $\lambda = (l+d)(l-1)$ pelo número de multipolo $l = 2, 3, 4, \dots$. O valor δ é uma constante adimensional

$$2\lambda\delta = \sqrt{1 + \frac{16\lambda Z}{(d+1)^2 X^2}} - 1.$$

Observe, que o potencial efetivo para perturbações do tipo tensorial coincide com o potencial para um campo escalar de teste (3.65) para $l \geq 2$. Perturbações métricas dos tipos vetorial e escalar são ligadas a perturbações do campo eletromagnético. Para buracos negros neutros ($Q = 0$) os tipos “+” potenciais são reduzidos ao potencial efetivo para o campo de Maxwell de teste e os tipos “-” V_V e V_S descrevem as perturbações métricas puras do tipo vetorial e escalar, respectivamente.

Foi provado analiticamente que o buraco negro é estável contra perturbações gravitacionais dos tipos tensorial e vetorial [58]. O potencial efetivo do tipo escalar (5.4) não é definido positivo, tendo um espaço negativo para l pequeno. Como o potencial efetivo tem uma forma extremamente complicada, o ansatz apropriado para a técnica de deformação S (ver a seção 2.3.2) não foi encontrado. Por isso, a estabilidade de buracos negros contra perturbações do tipo escalar não foi provada analiticamente.

A estabilidade de buracos negros Schwarzschild-de Sitter em dimensões mais altas foi provada numericamente em [20]. Foi mostrado no domínio temporal, que as perturbações gravitacionais do tipo escalar decaem para a massa do buraco negro e o termo Λ arbitrários (ver as figs. 5.1, 5.2).

Figura 5.1: Potenciais efetivos e perfis temporais para perturbações gravitacionais do tipo escalar, $D = 5$ (azul) ... $D = 11$ (vermelho) ($l = 2$, $Q = 0$, $\Lambda = 0$). Para D mais alto tanto o pico como o espaço negativo do potencial aumentam. Perfil para D mais alto decai mais rapidamente. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+ .

Figura 5.2: Perfis temporais para perturbações gravitacionais do tipo escalar de buraco negro Schwarzschild-de Sitter 11-dimensional ($Q = 0$, $D = 11$, $\rho = r_+/r_\infty$) para $\rho = 0.3$ (azul), $\rho = 0.5$ (verde), $\rho = 0.7$ (amarelo), $\rho = 0.8$ (laranja), $\rho = 0.9$ (vermelho). Perfil para ρ mais alto decai mais lentamente. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+ .

Figura 5.3: Perfis temporais para perturbações gravitacionais do tipo “-” escalar do buraco negro Reissner-Nordström-de Sitter ($D = 11$, $\rho = r_+/r_\infty = 0.8$, $l = 2$) para vários valores da carga do buraco negro $q = Q/Q_{ext}$: $q=0.4$ (marrom) $q=0.5$ (azul) $q=0.6$ (verde) $q=0.7$ (laranja) $q=0.8$ (vermelho) $q=0.9$ (magenta). Para menor q o crescimento do perfil é mais lento.

Também foram estudados os modos quase-normais para todos os tipos de perturbações gravitacionais para buracos negros D -dimensionais esfericamente simétricos. Como para os objetivos de observação somente a frequência quase-normal dominante é essencial, os cálculos foram restritos somente ao modo fundamental ($l = 2$). Contudo, usando a aproximação WKB, é possível achar a fórmula para l grande para quaisquer parâmetros de buraco negro dados.

A dependência de modos quase-normais no termo Λ é qualitativamente a mesma da dos buracos negros quadridimensionais: tanto a parte real como a parte imaginária da frequência quase-normal reduzem os seus valores absolutos enquanto a constante cosmológica cresce (ver a fig. 5.2). Também foi observado que as partes real e imaginária da frequência quase-normal são funções não-monotônicas da carga do buraco negro, na maior parte dos casos reduzindo os seus valores absolutos enquanto Q cresce.

Em [27] foi mostrado pela primeira vez que buracos negros Reissner-Nordström-de Sitter são gravitacionalmente instáveis para valores grandes da carga elétrica e da constante cosmológica em $D \geq 7$ dimensões de espaço-tempo. Na figura 5.3 pode-se ver os perfis temporais para as perturbações gravitacionais lineares do tipo escalar “-” (5.4) do buraco negro Reissner-Nordström-de Sitter próximo ao extremo em $D = 11$ dimensões. Para os valores suficientemente pequenos da carga do buraco negro pode-se observar o quadro habitual do toque quase-normal. Então, como a carga do buraco negro cresce, um modo puramente imaginário (sem oscilação) torna-se dominante, reduzindo a sua taxa de decaimento até conseguir o ponto de limiar da instabilidade. Depois de

Figura 5.4: A região paramétrica de instabilidade na esquina topo direita do quadrado ($\rho = r_+/r_\infty$, $q = Q/Q_{ext}$) para $D = 7$ (topo, preto), $D = 8$ (azul), $D = 9$ (verde), $D = 10$ (vermelho), $D = 11$ (abaixo, magenta).

cruzar o ponto da instabilidade observa-se o modo crescente que não oscila (ver a seção 2.3.2). A sua taxa de crescimento aumenta como a carga do buraco negro cresce. Por isso, pode-se concluir, que exatamente no ponto de limiar da instabilidade há alguma solução estática ($\omega = 0$) da equação de perturbação. A solução estática no ponto de limiar da instabilidade foi observada também no domínio de tempo para as cordas negras (ver a seção 6.4).

A região paramétrica da instabilidade é mostrada na figura 5.4. Quanto maior é o número de dimensões D , maior é a região da instabilidade observada. Embora a região da instabilidade aumente com D , os buracos negros carregados no espaço-tempo assintoticamente plano são estáveis pelo menos para $D \leq 11$. A instabilidade ocorre se *tanto* a carga do buraco negro *como* a constante cosmológica forem suficientemente grandes.

5.2 (In)estabilidade de buracos negros D -dimensionais na teoria de Gauss-Bonnet

A gravidade quântica em dimensões mais altas implica correções à relatividade geral clássica. A correção da ordem dominante ao Lagrangiano é chamada de termo de Gauss-Bonnet [87]. Este

termo é quadrático em curvatura e desaparece para $D = 4$. A ação efetiva é dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G_D} \int d^D x \sqrt{-g} (R + \alpha(R_{abcd}R^{abcd} - 4R_{cd}R^{cd} + R^2)), \quad (5.5)$$

onde α é uma constante positiva de acoplamento, $[\alpha] = L^2$.

A solução de buraco negro esfericamente simétrico, que satisfaz as correspondentes equações do movimento, é descrita pelo elemento de linha (5.1) com

$$f(r) = 1 + \frac{r^2}{\alpha(D-3)(D-4)}(1 - q(r)), \quad q(r) = \sqrt{1 + \frac{\alpha(D-2)(D-3)(D-4)M\mathcal{A}_{D-2}}{2\pi r^{D-1}}}, \quad (5.6)$$

que se reduz à métrica de Tangherlini [86] no limite de $\alpha \rightarrow 0$.

Os modos quase-normais e as caudas de tempo tardio do campo escalar de teste para buracos negros na teoria de Gauss-Bonnet foram estudados em [88, 89].

As correções quânticas implicam que o potencial efetivo para as perturbações gravitacionais do tipo tensorial (V_T) não coincide com o potencial para o campo escalar de teste [90]. Os potenciais efetivos para perturbações gravitacionais do tipo vetorial (V_V) e do tipo escalar (V_S) foram achados em [91]. Eles são dados pelas fórmulas

$$V_T(r) = f(r) \frac{(D-2)(c+1)}{r^2} \left(3 - \frac{B(r)}{A(r)} \right) + \frac{1}{\sqrt{r^{D-2}A(r)q(r)}} \frac{d^2}{dr_*^2} \sqrt{r^{D-2}A(r)q(r)}, \quad (5.7)$$

$$V_V(r) = f(r) \frac{(D-2)c}{r^2} A(r) + \sqrt{r^{D-2}A(r)q(r)} \frac{d^2}{dr_*^2} \frac{1}{\sqrt{r^{D-2}A(r)q(r)}}, \quad (5.8)$$

$$V_S(r) = \frac{f(r)U(r)}{64r^2(D-3)^2A(r)^2q(r)^8(4cq(r) + (D-1)R(q(r)^2 - 1))^2}, \quad (5.9)$$

onde foram usadas as quantidades adimensionais

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{1}{q(r)^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{D-3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{D-3} \right), \\ B(r) &= A(r)^2 \left(1 + \frac{1}{D-4} \right) + \left(1 - \frac{1}{D-4} \right), \\ R &= \frac{r^2}{\alpha(D-3)(D-4)}, \\ c &= \frac{l(l+D-3)}{D-2} - 1, \quad l = 2, 3, 4, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U(r) = & 5(D-1)^6 R^2(1+R) - 3(D-1)^5 R((D-1)R^2 + 24c(1+R))q(r) + \\
& + 2(D-1)^4(24c(D-1)R^2 + 168c^2(1+R) - (D-1)R^2(-3+5R+7D(1+R)))q(r)^2 + \\
& + 2(D-1)^4 R(-184c^2 + (D-1)(13+D)R^2 + c(-84+44R+84D(1+R)))q(r)^3 + \\
& + (D-1)^3(384c^3 - 48c(2+D(3D-5))R^2 + 192c^2(-11+D+(-15+D)R) + \\
& + (D-1)R^2(-3(7+55R) + D(26+106R+7D(1+R))))q(r)^4 + \\
& + (D-1)^3 R(-64c^2(D-38) + (D-1)(71+D(7D-90))R^2 + \\
& + 16c(303+255R+13D^2(1+R) - 2D(73+81R)))q(r)^5 + \\
& + 4(D-1)^2(96c^3(-7+D) - 8c(D-1)(145-74D+6D^2)R^2 - \\
& - 8c^2(9-175R+D(-58-34R+11D(1+R))) + (D-1)R^2(-5(79+23R) + \\
& + D(5(57+41R) + D(-81-89R+7D(1+R))))q(r)^6 - \\
& - 4(D-1)^2 R(8c^2(43+(72-13D)D) + (D-1)(-63+D(99+D(-49+5D))))R^2 + \\
& + 4c(321+465R+D(121-39R+D(-123-107R+17D(1+R))))q(r)^7 + \\
& + (D-1)(128c^3(-9+D)(D-5) + 32c(D-1)(246+D(9+D(-55+8D))))R^2 + \\
& + 64c^2(D-5)(D^2-3+(49+(D-4)D)R) - \\
& - (D-1)R^2(1173+565R+D(-4(997+349R) + D(6(393+217R) + \\
& + D(-548-452R+45D(1+R))))q(r)^8 + \\
& + (D-1)R(-64c^2(D-5)(36+D(-13+3D)) + \\
& + (D-1)(635+D(-1204+3D(294+D(-92+9D))))R^2 - \\
& - 8c(D-5)(63+31R+D(127+191R+D(-47+D+(-79+D)R)))q(r)^9 + \\
& + 2(D-5)(64c^3(D-5)(D-3) + 8c(D-1)(-27+D(141+(-43+D)D)))R^2 + \\
& + 8c^2(D-5)(-3+77R+D(D-2+(D-18)R)) + (D-1)^2 R^2(-33(R-7) + \\
& + D(59+43R+D(-59-35R+9D(1+R))))q(r)^{10} - \\
& - 2(D-5)R(24c^2(-11+D)(D-5)(D-3) + (D-1)^2(-65+D(81+D(7D-39))))R^2 + \\
& + 12c(-7+D)(D-5)(D-3)(D-1)(1+R))q(r)^{11} + \\
& + (D-5)^2(-1+D)R^2(16c(26+(D-9)D) + \\
& + (D-1)(77-3R+D(-18+D+(D-2)R)))q(r)^{12} + \\
& + (D-5)^2(D-3)^2(D-1)^2 R^3 q(r)^{13}.
\end{aligned}$$

Os modos quase-normais de perturbações gravitacionais de buracos negros Einstein-Gauss-Bonnet foram achados no domínio temporal (ver a seção 3.1) pela primeira vez em [23]. Conseqüentemente, foi confirmada a instabilidade desses buracos negros em espaços-tempo de cinco e seis dimensões, provada analiticamente em [92].

Perturbações do tipo escalar são instáveis em cinco dimensões para $\alpha > 0.207r_+^2$, enquanto que perturbações do tipo tensorial são instáveis em seis dimensões para $\alpha > 1.006r_+^2$. Pode-se ver na figura 5.5 que quanto maior l , mais cedo o crescimento de instabilidade ocorre, e mais forte será a taxa de crescimento. Na região perto do valor de limiar de α , pode-se observar o crescimento somente para l grande o suficiente, enquanto as perturbações do número multipolar menor não estão crescendo. Para cada l há algum valor máximo de α para o qual as perturbações não estão crescendo. Para achar o valor de limiar de α numericamente extrapola-se esse valor para $l \rightarrow \infty$ (ver a fig. 5.6). Os buracos negros Einstein-Gauss-Bonnet em espaço-tempos $D \geq 7$ são estáveis.

Em unidades do raio do horizonte de eventos, a parte imaginária de modos quase-normais fundamentais diminui, quando α aumenta, para todos os números de D e todos os tipos de perturbações.

Figura 5.5: O quadro de instabilidade de perturbações gravitacionais de buracos negros Gauss-Bonnet do tipo tensorial, que se desenvolvem para grandes números de multipolo: $D = 6$, $l = 8$ (vermelho), $l = 12$ (verde), $l = 16$ (azul), $\alpha = 1.3$. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+ .

Diferentemente da parte imaginária, a frequência real de oscilação não se comporta uniformemente: ela diminui enquanto α cresce para a maior parte de casos de modos tensorial e vetorial. O comportamento do modo escalar é diferente: há *dois* modos, que competem pela dominância, em etapas diferentes do toque quase-normal. Esta superposição de modos, também com os coeficientes de excitação competidores, faz a dependência do modo quasi-normal fundamental do tipo escalar não monotônico em α e D . Na figura 5.7 pode-se ver que na primeira etapa a frequência real do modo dominante é muito maior do que na segunda etapa, enquanto a sua taxa de decaimento fica quase a mesma.

5.3 Modos quase-normais de campos do Modelo Padrão localizados na brana

Outro cenário possível é que as partículas do Modelo Padrão (escalares, fermions e bosons de calibre) são restringidas para viver na $3 + 1$ -brana, que é encaixada no volume de dimensões mais altas, enquanto os grávitons também podem propagar no volume. Por isso, quando estuda-se a propagação dos campos perto de um buraco negro D -dimensional, deve-se considerar o contexto gravitacional induzido na brana. Se o tamanho das dimensões extras for grande, comparando-se

ℓ	α
8	1.346
10	1.274
12	1.227
16	1.170
20	1.136
32	1.087
40	1.070
50	1.058
64	1.047

Figura 5.6: O limiar α como uma função do número de multipolo l inverso para perturbações de buracos negros Gauss-Bonnet ($D = 6$) do tipo tensorial. Os pontos $l = 16, 20, 32, 40, 50, 64$ foram ajustados pela linha $\alpha = 2.627l^{-1} + 1.005$. O resultado teórico é $\alpha_t \approx 1.006$ (o valor de α é medido em unidades do horizonte de eventos r_+).

com o tamanho do buraco negro, o contexto induzido é dado pela projeção da métrica do buraco negro D -dimensional para a brana, fixando os valores das coordenadas angulares adicionais que descrevem os $(D - 4)$ dimensões espaciais extra [93, 94].

5.3.1 Buracos negros de Kerr

O toque quase-normal de campos localizados na brana que propagam no contexto gravitacional, induzido por buracos negros de Schwarzschild, Reissner-Nordström e Schwarzschild-(anti) de Sitter, foi estudado em [95]. Mas, durante as colisões de alta energia de partículas elementares que resultam na criação de buracos negros, não é natural esperar que somente as colisões frontais se realizariam, levando a buracos negros esfericamente simétricos. As colisões com um parâmetro de impacto não-nulo, são as que ocorrem com maior probabilidade, e, além do mais, para essas colisões a secção transversal de produção do buraco negro é maximizada [96]. Por isso, os buracos negros microscópicos com rotação deveriam ser a situação mais genérica, e o efeito do momento angular do buraco negro nos espectros quase-normais de campos localizados na brana é essencial e não pode ser desprezado. Este efeito foi estudado em [17].

O elemento de linha, descrevendo um buraco negro neutro com rotação em dimensões mais altas, é dado pela solução de Myers-Perry [97]. Depois da projeção da métrica de Myers-Perry para a brana, o contexto na brana assume a forma [96]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{\Sigma r^{D-5}}\right) dt^2 + \frac{2a\mu \sin^2\theta}{\Sigma r^{D-5}} dt d\varphi - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2\mu \sin^2\theta}{\Sigma r^{D-5}}\right) \sin^2\theta d\varphi^2, \quad (5.10)$$

onde

$$\Delta = r^2 + a^2 - \frac{\mu}{r^{D-5}}, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta. \quad (5.11)$$

Figura 5.7: O quadro de evolução no domínio de tempo para perturbações gravitacionais de buracos negros de Gauss-Bonnet do tipo escalar $D = 10$, $l = 2$, $\alpha = 0.01$. Pode-se ver que dois modos estão dominando nas diferentes etapas. Todas as quantidades são medidas em unidades do horizonte de eventos r_+ .

Os parâmetros μ e a são relacionados à massa M e ao momento angular J , respectivamente, do buraco negro, pelas definições [97]

$$M = \frac{(D-2) \pi^{(D-1)/2}}{\kappa_D^2 \Gamma[(D-1)/2]} \mu, \quad J = \frac{2Ma}{D-2}, \quad (5.12)$$

onde $\kappa_D^2 = 8\pi G = 8\pi/M_*^{D-2}$ é a constante de Newton D -dimensional. O raio do horizonte de eventos r_+ parametriza a massa do buraco negro

$$\mu = r_+^{D-5}(r_+^2 + a^2).$$

Observemos aqui, que o buraco negro em dimensões mais altas é considerado tendo somente um componente do momento angular não-nulo sobre um eixo na brana. Isto é por causa da suposição simplificada de que as partículas que criaram o buraco negro foram restringidas para viver em uma brana infinitamente fina, por isso, durante a colisão, elas tiveram um parâmetro de impacto não-nulo somente em um plano bidimensional ao longo desta brana.

As equações de movimento dos campos do Modelo Padrão no contexto (5.10) podem ser reduzidas

às equações ligadas às partes angular

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dS_{s,\ell}^m}{d\theta} \right) + \\ & + \left[-\frac{2ms \cot\theta}{\sin\theta} - \frac{m^2}{\sin^2\theta} - a^2\omega^2 \sin^2\theta - 2a\omega s \cos\theta - s - s^2 \cot^2\theta + 2a\omega m + \lambda \right] S(\theta) = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

e radial

$$\Delta^s \frac{d}{dr} \left(\Delta^{1-s} \frac{dP_s}{dr} \right) + \left(\frac{K^2 - isK\Delta'}{\Delta} + 4is\omega r - \lambda \right) R(r) = 0, \quad (5.14)$$

onde λ é a constante de separação, m é o número azimutal, $s = 0, 1/2, 1$ para campos escalar, fermion e boson de calibre, respectivamente, e K é definido como

$$K = (r^2 + a^2)\omega - am.$$

Para resolver numericamente as equações (5.13) e (5.14) usa-se o método de Frobenius. Como (3.55) coincide com (5.13) no limite de $\alpha \rightarrow 0$, a equação para a parte angular pode ser resolvida como descrito na seção 3.4.5. A análise dos pontos singulares da equação (5.14) permite achar a série de Frobenius para a função $R(r)$ [17]

$$R(r) = \frac{e^{i\omega r}}{r - r_0} \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^{-i\beta} \sum_{i=0}^{\infty} b_i \left(\frac{r - r_+}{r - r_0} \right)^i, \quad (5.15)$$

onde β foi fixado (ver a seção 3.4.6) como

$$\beta = \frac{K(r_+)}{\Delta'(r_+)} = \frac{\omega r_+(r_+^2 + a^2) - mar_+}{(D-5)(r_+^2 + a^2) + 2r_+^2}.$$

Da figura 5.8, facilmente observa-se que, como a aumenta, os valores absolutos tanto da parte real como da parte imaginária da frequência quase-normal fundamental diminuem. Isto faz o tempo de decaimento ser mais longo e as oscilações de campo na brana serem de longa vida. Para grande a pode-se observar que o tempo de vida de um sinal de fermion é mais longo para o valor positivo do número azimutal m . O mesmo comportamento foi observado também para o campo escalar: o tempo de vida da oscilação do campo cresce enquanto m aumenta.

Na figura 5.9, foram expostos alguns dos sobretons mais altos de um campo de calibre localizado na brana (com $l = 3$, $m = 0$). Para todos os sobretons mais altos, foi achado que um aumento em a conduz novamente à redução dos valores absolutos tanto das partes reais como das partes imaginárias.

Para a fixo acha-se que, como D aumenta, a parte imaginária da frequência quase-normal diminui enquanto a parte real modifica-se insignificamente (ver a fig. 5.10). Este comportamento da parte real é diferente do caso de buracos negros D -dimensionais, que não são projetados na brana (ver a seção 5.1). Para aqueles buracos negros a parte real da frequência quase-normal também cresce enquanto D aumenta. Por isso, conclui-se que os buracos negros em dimensões mais altas são melhores osciladores do que os buracos negros projetados na 4-brana.

5.3.2 Buracos negros de Gauss-Bonnet

Dentro de cenários com grandes dimensões extra da gravidade de escala TeV, o espaço-tempo clássico, induzido por mini buracos negros, tem uma grande curvatura ao longo do plano de colisão

Figura 5.8: Modos quase-normais fundamentais do buraco negro de 6 dimensões projetado na 4-brana.

transversal. Assim, os efeitos de gravidade quântica e, em particular, correções mais altas da curvatura à gravidade de Einstein, não podem ser ignoradas [98]. Por isso, as correções quânticas, fornecidas pela teoria de Gauss-Bonnet (ver a seção 5.2), devem ser levadas em conta, quando mini buracos negros são considerados.

Neste contexto, a propagação de campos do Modelo Padrão localizado na brana no contexto induzido pelo buraco negro de Gauss-Bonnet foi estudada numericamente pela primeira vez em [25].

A métrica induzida na brana é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.16)$$

com a função $f(r)$ definida em (5.6).

Os potenciais efetivos para os campos do Modelo Padrão podem ser derivados do mesmo jeito que no caso de Schwarzschild-de Sitter. A sua forma explícita pode ser obtida substituindo a função $f(r)$ de (5.6) nos potenciais efetivos para o campo escalar de teste (2.11), o campo de Dirac sem massa (2.13), e o campo de Maxwell (2.14).

Bem como para os buracos negros de Schwarzschild, as oscilações de campos do Modelo Padrão localizados na brana decaem mais rapidamente para valores de D mais altos. Por outro lado, o termo de Gauss-Bonnet faz com que as perturbações decaiam mais lentamente. A parte real das frequências quase-normais tem um comportamento mais complicado: para $D = 5$ ela diminui enquanto α cresce, mas em dimensões mais altas ela começa a crescer primeiramente e então diminui depois que um valor de α é alcançado. Contudo, o fator de qualidade $Q = \frac{\text{Re}(\omega)}{2\text{Im}(\omega)}$ aumenta já que α cresce para todos os campos e todos os valores de D (ver a fig. 5.11).

Como pode-se ver no domínio de tempo (ver a fig. 5.12), as caudas de tempo tardio decaem

Figura 5.9: Alguns sobretons mais altos do campo eletromagnético do buraco negro de Kerr de 6 dimensões projetado na 4-brana ($l = 3$, $m = 0$) para o intervalo $(0, r_+)$ do parâmetro do momento angular a com um passo de $r_+/8$.

segundo a lei de potência inversa, que foi achada na forma [25]

$$\Psi \propto t^{-(2l+D-1)}. \quad (5.17)$$

Esta lei depende somente do número de multipolo l e do número de dimensões extra D .

Utilizando a fórmula de WKB, é possível achar as correções de Gauss-Bonnet ao limite de multipolo grande

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega_R(1 + \alpha A_1 + \dots) \left(l + \frac{1}{2} \right) - i\Omega_I(1 + \alpha B_1 + \dots) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \omega &= \Omega_R(1 + \alpha A_1 + \dots) \kappa_{\pm} - i\Omega_I(1 + \alpha B_1 + \dots) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\kappa_{\pm}}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \Omega_R &= \frac{1}{R_0} \sqrt{\frac{D-3}{D-1}}, \quad \Omega_I = \frac{1}{R_0} \frac{D-3}{\sqrt{D-1}}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

onde R_0 é o ponto, onde o potencial efetivo chega o seu máximo para l grande

$$\left(\frac{R_0}{r_+} \right)^{D-3} = \frac{D-1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{l}\right).$$

Vê-se que para multipolos grandes o fator de qualidade também diminui enquanto D cresce

$$Q \sim \frac{\Omega_R}{\Omega_I} = \frac{1}{\sqrt{D-3}}.$$

Figura 5.10: Modos quase-normais para buracos negros de Kerr em dimensões mais altas ($a = r_+$) projetado na 4-brana.

As correções da primeira ordem de α são dadas por

$$A_1 = -\frac{1}{r_+^2} \frac{D-4}{D-1} \left(\frac{D-1}{2} - \frac{r_+^2}{R_0^2} \right) < 0,$$

$$B_1 = -\frac{1}{r_+^2} \frac{D-4}{D-1} \left(\frac{D-1}{2} + (D-2) \frac{R_0^2}{r_+^2} \right) < 0,$$

implicando redução mais rápida do valor absoluto da parte imaginária do que redução da parte real. Isto significa que o fator de qualidade cresce enquanto α aumenta. Assim conclui-se, que o limite de multipolo grande se assemelha com as propriedades principais dos modos quase-normais fundamentais para número de multipolo pequeno.

5.4 Perturbações de buracos negros esmagados de Kaluza-Klein

Se o raio de compactificação das dimensões extras for comparável com o tamanho dos buracos negros deve-se levar em conta o tamanho de dimensões extras. Tal modelo de buracos negros em dimensões mais altas tem a estrutura assintótica do tipo Kaluza-Klein. O exemplo mais simples de objetos negros de cinco dimensões com a geometria Kaluza-Klein é a corda negra, que é o produto direto de um buraco negro em quatro dimensões e um círculo. Esses objetos parecem diferentes de buracos negros de quatro dimensões somente em energias suficientemente altas, quando os modos de Kaluza-Klein são excitados. Por isso, dentro desses espaços-tempo precisa-se de um regime de alta energia para se poder observar as dimensões extra. Ao mesmo tempo, existem soluções exatas

Figura 5.11: O fator de qualidade do campo escalar localizado na 4-brana como uma função do parâmetro de Gauss-Bonnet α ($D = 9$, $l = 1$).

de buracos negros de Kaluza-Klein com horizontes esmagados, que se parecem com buracos negros esmagados de cinco dimensões perto do horizonte de eventos, e com um espaço-tempo Kaluza-Klein no infinito espacial. Devido à estrutura de fibrado não trivial, o tamanho da dimensão extra poderia ser observado até nas energias baixas, por exemplo, pela detecção de sua radiação de Hawking [99].

Ao meu conhecimento, as frequências quase-normais de tais buracos negros foram estudadas pela primeira vez em [24].

5.4.1 Os modos quase-normais de campo escalar para buracos negros esmagados de Kaluza-Klein com rotação

O buraco negro esmagado de Kaluza-Klein de cinco dimensões com rotação com dois momentos angulares iguais é descrito por

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\Sigma_0}{\Delta_0} k(r)^2 dr^2 - \frac{r^2 + a^2}{4} [k(r)(d\sigma_1^2 + d\sigma_2^2) + d\sigma_3^2] - \frac{M}{r^2 + a^2} (dt - \frac{a}{2} d\sigma_3)^2, \quad (5.19)$$

com

$$d\sigma_1 = -\sin\psi d\theta + \cos\psi \sin\theta d\phi, \quad d\sigma_2 = \cos\psi d\theta + \sin\psi \sin\theta d\phi, \quad d\sigma_3 = d\psi + \cos\theta d\phi, \quad (5.20)$$

Figura 5.12: Os perfis temporais do campo escalar sem massa localizado na brana para o buraco negro de Gauss-Bonnet ($D = 7$, $\alpha = 5$) para $l = 0$ (azul), $l = 1$ (verde), $l = 2$ (laranja), $l = 4$ (vermelho). O maior l corresponde à vida mais longa do toque quase-normal e ao decaimento mais rápido da cauda.

onde $0 < \theta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$ e $0 < \psi < 4\pi$. Os parâmetros são dados por

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= r^2(r^2 + a^2), \\ \Delta_0 &= (r^2 + a^2)^2 - Mr^2, \\ k(r) &= \frac{(r_\infty^2 - r_+^2)(r_\infty^2 - r_-^2)}{(r_\infty^2 - r^2)^2}.\end{aligned}\tag{5.21}$$

Aqui M e a correspondem à massa e momentos angulares, respectivamente. Valores r_+ e r_- são os horizontes exterior e interior do buraco negro. Eles relacionam-se a M e a por $a^4 = (r_+ r_-)^2$, $M - 2a^2 = r_+^2 + r_-^2$. O parâmetro r_∞ corresponde ao infinito espacial. No espaço de parâmetros $0 < r_- \leq r_+ < r_\infty$, r é restringido pela variedade $0 < r < r_\infty$. A forma do horizonte do buraco negro é deformada pelo parâmetro $k(r_+)$.

A equação de onda para o campo escalar sem massa $\Phi(t, r, \theta, \phi, \psi)$ no contexto (5.19) é dado por

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi(t, r, \theta, \phi, \psi) = 0.\tag{5.22}$$

Selecionando o ansatz

$$\Phi(t, r, \theta, \phi, \psi) = e^{-i\omega t} R(\rho) e^{im\phi + i\lambda\psi} S(\theta),$$

onde $S(\theta)$ é a chamada harmônica esférica, as variáveis radial e temporal podem ser separadas de variáveis angulares, de modo a equação final de onda leia-se

$$\frac{d}{d\rho} \left[\Delta \frac{dR(\rho)}{d\rho} \right] + \left[\frac{\tilde{H}^2}{\Delta} + \Lambda - l(l+1) + \lambda^2 \right] R(\rho) = 0, \quad (5.23)$$

onde l é o número inteiro de multipolo não negativo, $|m| < l$ e $|2\lambda| < 2l$ são números inteiros,

$$\tilde{H}^2 = \frac{Mr_\infty^2(\rho + \rho_0)^4}{H^4(r_\infty^2 + a^2)^2} \left[\omega - \frac{\lambda a H^2(r_\infty^2 + a^2)}{\rho_0 r_\infty^3} \right]^2, \quad (5.24)$$

$$\Lambda = \frac{4\rho_0^2 r_\infty^6 (\rho + \rho_0)^2}{H^2(r_\infty^2 + a^2)^4} \omega^2 - \frac{4\lambda^2 (\rho + \rho_0)^2}{r_\infty^2 + a^2}, \quad (5.25)$$

$$H^2 = \frac{\rho + \rho_0}{\rho + \frac{a^2}{r_\infty^2 + a^2} \rho_0}. \quad (5.26)$$

A coordenada radial ρ é dada por

$$\rho = \rho_0 \frac{r^2}{r_\infty^2 - r^2}, \quad (5.27)$$

com

$$\begin{aligned} \rho_0^2 &= \frac{k_0}{4} (r_\infty^2 + a^2), \\ k_0 &= k(r=0) = \frac{(r_\infty^2 + a^2)^2 - Mr_\infty^2}{r_\infty^4}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Observe que os três parâmetros ρ_0 e $\rho_\pm = \rho_0 r_\pm^2 / (r_\infty^2 - r_\pm^2)$ podem definir a métrica (5.19) se $r_\infty < \infty$. Em alguns trabalhos eles são usados para parametrizar o buraco negro a em vez dos parâmetros $r_\infty, r_\pm$.

Os modos quase-normais foram achados com o método de Frobenius (ver a seção 3.4), utilizando a expansão [24]

$$R = \left(\frac{r^2 - r_+^2}{r^2 - r_-^2} \right)^{-i\beta} e^{i\rho\Omega} \rho^{i\nu-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{r^2 - r_+^2}{r^2 - r_-^2} \right)^n, \quad (5.29)$$

onde β, ν e Ω são escolhidos para eliminar as singularidades em $r = r_+$ e $r = r_\infty$. O sinal de α e Ω é escolhido para que permaneçam no mesmo quadrante complexo que ω .

Os modos quase-normais fundamentais são apresentados na figura 5.13. Pode-se ver que a frequência real de oscilação exerce um crescimento irregular (com mínimos locais) quando r_∞ está aumentando até valores de r_∞ moderadamente grandes. Para r_∞ maior, o crescimento de $\text{Re}(\omega)$ modifica-se em decrescimento monotônico. A parte imaginária de ω que determina a taxa de decaimento também tem um crescimento irregular inicial quando r_∞ aumenta, mas para r_∞ maior, os dois cenários são possíveis: ou decrescimento monotônico (para valores de r_- grandes) ou crescimento monotônico (para r_- pequeno e moderado). Assim, para uma massa e momento angular do buraco negro dados, pode-se obter o tamanho da dimensão extra r_∞ de valores de modos quase-normais da radiação emitida.

Figura 5.13: Partes real e imaginária da frequência quase-normal fundamental do campo escalar de teste ($l = 0$) para buracos negros esmagados de Kaluza-Klein com rotação.

5.4.2 Modos quase-normais gravitacionais para buracos negros esmagados de Kaluza-Klein sem rotação

Na subseção prévia, o campo escalar foi considerado no contexto de buracos negros esmagados de Kaluza-Klein. Contudo, as perturbações tensoriais são mais interessantes do ponto de vista da estabilidade e da possibilidade de observar ondas gravitacionais de buracos negros.

A métrica do buraco negro esmagado de Kaluza-Klein não carregado sem rotação é um caso particular da métrica (5.19)

$$ds^2 = F(\rho)d\tau^2 - \frac{G(\rho)^2}{F(\rho)}d\rho^2 - 4\rho^2 G(\rho)^2 d\sigma^+ d\sigma^- - \frac{r_\infty^2}{4G(\rho)^2} (d\sigma^3)^2, \quad (5.30)$$

onde define-se $\tau = 2\rho_0 t / r_\infty$ e

$$F(\rho) = 1 - \frac{\rho_+}{\rho}, \quad G(\rho)^2 = 1 + \frac{\rho_0}{\rho}, \quad r_\infty^2 = 4\rho_0(\rho_+ + \rho_0).$$

Aqui, foi usada a base

$$d\sigma^\pm = \frac{1}{2}(d\sigma^1 \mp id\sigma^2).$$

Como o espaço-tempo tem a simetria $SU(2) \times U(1)$, as perturbações métricas podem ser classificadas por valores próprios J, M para $SU(2)$ e K para $U(1)$. Aqui foram considerados somente modos nulos $J = M = 0$. Mesmo neste caso, como $d\sigma^\pm$ leva a valores próprios $K = \pm 1$, cada componente pode ter valor próprio K diferente. É importante reconhecer que os componentes com K diferente são separados. Por isso têm-se as equações mestras para cada K . Para obter equações mestras, escolheu-se a condição de calibre como

$$h_{3+} = h_{3-} = h_{+-} = h_{tt} = h_{t3} = 0. \quad (5.31)$$

Como foi mostrado em [100], as equações de perturbação para o modo $|K| = 2$ podem ser reduzidas à equação de onda para h_{++} com o potencial efetivo na forma

$$V_2 = \frac{-(\rho_+ - \rho)}{16\rho^3\rho_0(\rho_+ + \rho_0)(\rho + \rho_0)^3} \left[64\rho^5 + 256\rho^4\rho_0 - 32\rho^3\rho_0(\rho_+ - 11\rho_0) + 9\rho_+\rho_0^3(\rho_+ + \rho_0) \right. \\ \left. + 8\rho^2\rho_0(2\rho_+^2 - 5\rho_+\rho_0 + 25\rho_0^2) + \rho\rho_0^2(20\rho_+^2 - 9\rho_+\rho_0 + 35\rho_0^2) \right]. \quad (5.32)$$

Figura 5.14: Partes real e imaginária da frequência quase-normal fundamental para perturbações métricas ($M = J = 0$) $|K| = 0$ (azuis), $|K| = 1$ (vermelhas), $|K| = 2$ (amarelas) de buracos negros esmagados de Kaluza-Klein. Os valores mais altos de K correspondem à frequência de oscilação mais alta e decaimento mais lento.

Semelhantemente, as equações de perturbação para o modo $|K| = 1$ podem ser reduzidas à equação de onda para $h_{\rho+}$ com o potencial efetivo

$$V_1 = \left(1 - \frac{\rho_+}{\rho}\right) \left[\frac{1}{\rho_+ \rho_0} + \frac{7(-\rho_+ + \rho)}{16(\rho + \rho_0)^3} + \frac{17\rho_+ - 19\rho}{8\rho(\rho + \rho_0)^2} + \frac{9(-3\rho_+ + 7\rho)}{16\rho^2(\rho + \rho_0)} + \frac{\rho_+ - \rho}{\rho_+^2 \rho + \rho_+ \rho \rho_0} \right. \\ \left. - \frac{8(\rho_+ - \rho)^2 \rho}{(\rho_+ - 2\rho)(\rho_+ \rho_0 - \rho(\rho + 2\rho_0))^2} - \frac{2(\rho_+ + 2\rho)}{(\rho_+ - 2\rho)(\rho_+ \rho_0 - \rho(\rho + 2\rho_0))} \right]. \quad (5.33)$$

Finalmente, para o modo $K = 0$, obtém-se a equação de onda para h_{33} com o potencial efetivo

$$V_0 = \frac{-(\rho_+ - \rho)}{16\rho^3(\rho + \rho_0)^3(4\rho + 3\rho_0)^2} \left[256\rho_+ \rho^4 + 64\rho^3(17\rho_+ + 2\rho)\rho_0 + 48\rho^2(32\rho_+ + 11\rho)\rho_0^2 \right. \\ \left. + 60\rho(13\rho_+ + 12\rho)\rho_0^3 + 9(9\rho_+ + 35\rho)\rho_0^4 \right]. \quad (5.34)$$

Os modos quase-normais fundamentais calculados com o método de WKB da 6ª ordem (ver a seção 3.3) são apresentados na figura 5.14. A parte real de ω diminui para valores de ρ_0 mais altos. O valor absoluto da parte imaginária tem o máximo para $K \neq 0$. Para valores de ρ_0 não grandes os modos quase-normais de tais perturbações de buracos negros de Kaluza-Klein têm uma vida mais longa. O seu comportamento para valores de ρ_0 pequenos no domínio de tempo parece-se com caudas de campo massivo (ver o capítulo 6), que ocorrem muito mais cedo.

É importante observar que se a frequência quase-normal for conhecida, pode-se achar o tamanho da dimensão extra no modelo de buraco negro considerado, de modo que os modos quase-normais levam a uma oportunidade de se “investigar” uma dimensão extra em energias baixas. Detalhadamente, quando um modo quase-normal dominante é medido, pode-se compará-lo com a frequência achada numericamente e descobrir qual é o valor de ρ_0 e o raio do horizonte de eventos que corresponde ao modo quase-normal observado. Deste modo, pode-se determinar os parâmetros do buraco negro e o tamanho da dimensão extra, assumindo que não existe qualquer outro buraco negro de Kaluza-Klein com características semelhantes. Também não se observa qualquer modo crescente, o que sustenta a estabilidade de tais buracos negros.

Capítulo 6

Campos massivos em torno de buracos negros

6.1 Evolução de campos massivos. Quase-ressonâncias

Nos capítulos prévios foram considerados campos sem massa que propagam no contexto de vários buracos negros. Indo além disso, agora será apresentada a evolução de campos massivos.

Observa-se que um campo escalar com o termo de massa pode ser interpretado como um campo escalar sem massa que auto-interage dentro do regime de perturbações pequenas [101]. Um campo escalar sem massa, quando considerado em modelos com dimensões extra do tipo de Randall-Sundrum [77, 78], ganha uma massa efetiva grande por causa do momento de Kaluza-Klein. Também, a massa efetiva é adquirida por um campo escalar sem massa nas proximidades de buracos negros magnetizados [102].

Começamos pela consideração de um campo escalar massivo de teste no contexto Schwarzschild D -dimensional, dado pelo métrico (5.1) com

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^{D-3}.$$

A equação de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^a} g^{ab} \sqrt{-g} \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x^b} = -\mu^2 \Phi(x), \quad (6.1)$$

que governa a evolução do campo escalar massivo no contexto curvo, pode ser reduzida à equação de onda (2.10) com o potencial efetivo

$$V(r) = f(r) \left(\mu^2 + \frac{l(l+D-3)}{r^2} + \frac{(D-4)(D-2)}{4r^2} f(r) + \frac{D-2}{2r} f'(r) \right), \quad (6.2)$$

onde μ é a massa do campo e $l = 0, 1, 2, \dots$ é o número de multipolo.

Pode-se ver que o potencial (6.2) não desaparece no infinito espacial. Ele modifica o comportamento das funções próprias Q_ω (2.10), de modo que

$$r_\star \rightarrow +\infty : \quad Q_\omega \propto \exp(i\chi r_\star) \quad (6.3)$$

onde $\chi = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$ (ver a seção 3.4.7).

Repetindo os cálculos da seção 2.3.2, ao invés de (2.27) encontra-se [12]

$$\operatorname{Re}(\chi)|Q_\omega(r_\star = \infty)|^2 + \operatorname{Re}(\omega)|Q_\omega(r_\star = -\infty)|^2 + 2\operatorname{Re}(\omega)\operatorname{Im}(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} |Q_\omega(r_\star)|^2 dr_\star = 0. \quad (6.4)$$

Como $\operatorname{Re}(\chi)$ tem o mesmo sinal que $\operatorname{Re}(\omega)$, os modos instáveis não oscilam (ver a seção 6.4).

Para alguns valores da massa do buraco negro M e da massa do campo escalar μ as frequências puramente reais foram observadas. Tais oscilações têm vida infinitamente longa e foram chamadas quase-ressonâncias [57]. De fato, para campos massivos as frequências quase-normais não precisam ser complexas. Suponhamos que para alguns parâmetros tem-se $\operatorname{Im}(\omega) = 0$, de modo que $\operatorname{Re}(\chi) = 0$. Isto implica em

$$Q_\omega(r_\star = -\infty) = 0. \quad (6.5)$$

Isto significa que não há qualquer onda no horizonte de eventos e, porque $\operatorname{Re}(\chi) = 0$, nenhuma transmissão de energia ao infinito espacial. Por isso tais oscilações não decaem. A situação é semelhante às ondas permanentes em uma corda fixa. A exigência para χ ser imaginário, limita as frequências puramente reais pela massa do campo, o que foi indicado em [12],

$$\omega_{QRM} < \mu. \quad (6.6)$$

O fenômeno da quase-ressonância existe já que o potencial efetivo não é zero no infinito espacial. Se o potencial desaparecer em $r_\star \rightarrow \pm\infty$ a condição $\operatorname{Im}(\omega) = 0$ não satisfaz (2.27). Assim, por exemplo, não há nenhuma quase-ressonância no espectro do campo escalar massivo no contexto de Schwarzschild-de Sitter.

6.2 Espectro quase-normal do campo escalar massivo em torno de buracos negros Schwarzschild

Os modos quase-normais do campo escalar massivo em torno de buracos negros 4-dimensionais de Schwarzschild, Kerr [103] e Reissner-Nordström [70] e do campo massivo de Dirac no contexto de Schwarzschild 4-dimensional [104] foram calculados dentro da 3ª ordem da aproximação de WKB. Mas a fórmula de WKB, usada para os cálculos, é válida somente para um campo com massa pequena. Para uma massa grande a aproximação de WKB precisa de modificações (ver a seção 3.3), que não foram levadas em conta anteriormente [70, 103, 104].

O espectro quase-normal do campo escalar massivo para buracos negros de Reissner-Nordström foi estudado pela primeira vez pelo método de Frobenius, que é mais preciso, por Ohashi e Sakagami [57]. Eles encontraram as quase-ressonâncias e supuseram que elas aparecem em uma situação restritiva e os modos quase-normais podem desaparecer quando a massa do campo excede um certo valor. Achamos [12] que depois de chegar uma quase-ressonância somente uma frequência quase-normal desaparece. Os sobretons mais altos permanecem no espectro para qualquer massa do campo finita.

O espectro quase-normal de campos escalares massivos no contexto de Schwarzschild D -dimensional foi estudado pela primeira vez em [18] utilizando o método de Frobenius.

Na figura 6.1 pode-se ver, que o aumento da massa do campo dá a origem à redução da parte imaginária do modo quase-normal até alcançar a taxa de decaimento nula. Quando alguns valores de limiar de μr_+ são excedidos, determinados modos quase-normais “desaparecem”. Quanto maior é a massa do campo, mais os primeiros sobretons compartilham este destino. O desaparecimento

Figura 6.1: Três modos quase-normais mais altos ($l = 0$) do buraco negro de Schwarzschild ($D = 6$) para o campo escalar massivo de vários μ . A frequência para $\mu = 0$ tem a maior parte imaginária. Os pontos foram traçados com o passo de $\Delta\mu r_+ = 1/2$. As linhas sólidas marcam o mesmo número de sobreton.

de um número finito de modos implica que para uma massa grande algum sobreton mais alto transforma-se em uma frequência fundamental, tendo a mais longa vida entre o resto dos modos. Todavia, o espectro quase-normal permanece infinito para qualquer massa finita de campo.

O comportamento do modo fundamental depende qualitativamente do número D . Para $D = 4, 5$, o modo fundamental comporta-se como sobretons mais altos: reduz a sua parte imaginária, chega à quase-ressonância para algum valor de μ , e desaparece. Para $D \geq 6$ observa-se um quadro qualitativamente diferente (ver a fig. 6.2). Como μ cresce, a parte imaginária do modo fundamental tende a zero assintoticamente enquanto a parte real aproxima-se de μ (ver a fig. 6.3).

Essa propriedade do comportamento da frequência fundamental para D grande leva a outro fato notável. Como para a massa do campo alta a parte imaginária do modo fundamental tende a zero só assintoticamente (ver a fig. 6.2), e a parte imaginária de sobretons mais altos alcança zero para algum valor finito de μr_+ (ver a fig. 6.3), há alguns valores de μr_+ para os quais as partes imaginárias de dois sobretons são as mesmas. Depois que um desses valores é alcançado, os sobretons podem ser distinguidos somente pela sua parte real e o toque quase-normal tem duas frequências dominantes no seu espectro. Assim pode-se observar a superposição daquelas duas frequências em tempos tardios do toque quase-normal.

A dependência na massa é qualitativamente a mesma para todos os números de multipolo (ver a fig. 6.3). Como a parte real da frequência quase-normal de l mais alto é maior, as quase-ressonâncias são alcançadas para maior μ para satisfazer o vínculo (6.6).

Figura 6.2: Frequências quase-normais fundamentais do buraco negro de Schwarzschild D -dimensional para o campo escalar massivo ($l = 0$) de vários μ . A frequência para $\mu = 0$ tem a maior parte imaginária. Os pontos foram traçados com o passo de $\Delta\mu r_+ = 1/10$. As linhas sólidas marcam o mesmo número de D .

Foi mostrado tanto analiticamente como numericamente [12, 18] que os sobretons assintoticamente altos não dependem da massa do campo e satisfazem a mesma fórmula como no caso sem massa

$$\omega_n = \frac{f'(r_+)}{4\pi} \left(\pm \ln(3) - 2\pi i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) = T_{Hawking} \left(\pm \ln(3) - 2\pi i \left(n + \frac{1}{2} \right) \right).$$

É importante observar que apesar de na maior parte de casos os modos quase-normais dos campos de spin diferente mostrarem qualitativamente o mesmo comportamento, quando o campo é massivo o spin do campo torna-se crucial. Os modos quase-normais do campo vetorial massivo para buracos negros 4-dimensionais foram estudados em [105]. Foi achado que o modo fundamental mostra correlação com a massa do campo totalmente diferente de todos os sobretons mais altos remanescentes. Para campos escalar massivo e vetorial massivo o comportamento da frequência fundamental é qualitativamente semelhante: a parte real cresce com μ , enquanto o valor absoluto da parte imaginária diminui até chegar a zero (quase-ressonância) e depois desaparece. A parte real dos sobretons mais altos, diminui a valores muito pequenos, e o valor absoluto da parte imaginária está crescendo com μ , levando à existência de modos imaginários quase puros que somente decaem sem oscilações.

$\text{Re}(\omega) r_+, \text{Im}(\omega) r_+$

Figura 6.3: Frequências quase-normais fundamentais do buraco negro de Schwarzschild ($D = 6$) para o campo escalar massivo como função da massa do campo μ para $l = 0, 1, 2$ (representado como pontos, losangos e triângulos respectivamente). A linha tracejada corresponde a $\text{Re}(\omega) = \mu$.

6.3 Estabilidade e modos quase-normais do campo escalar massivo em torno de buracos negros de Kerr

A análise do espectro quase-normal permite também comprovar numericamente a estabilidade de campos massivos no contexto de Kerr [14]. A estabilidade foi comprovada analiticamente apenas para valores altos da massa do campo [106]:

$$\mu \geq \frac{|m|a}{2Mr_+} \sqrt{1 + \frac{2M}{r_+} + \frac{a^2}{r_+^2}}. \quad (6.7)$$

Em princípio, como o número azimutal aparece do lado direito, para qualquer massa de campo finita pode-se encontrar tais tipos de perturbações, para as quais, a estabilidade não foi provada. Na prática, a prova numérica é reduzida à verificação de que não há qualquer modo crescente no espectro quase-normal para massa de campo pequena e valor de m alto o suficiente [14].

A métrica de Kerr é descrita por (3.53), colocando-se $Q = 0$, $\Lambda = 0$. A equação de Klein-Gordon do campo escalar massivo (6.1) neste contexto, depois de substituir o ansatz

$$\Phi(t, r, \theta, \phi) = e^{-i\omega t} e^{im\phi} R(r) S(\theta),$$

permite separar variáveis. A parte radial satisfaz

$$\frac{d}{dr} \left(\Delta_r \frac{dR(r)}{dr} \right) + \left(\frac{K^2}{\Delta_r} - \lambda - \mu^2 r^2 \right) R(r) = 0, \quad (6.8)$$

Figura 6.4: Sobretons altos do buraco negro de Schwarzschild para o campo escalar massivo ($D = 4$, $l = 0$) para $\mu r_+ = 0.6$ (pontos) e $\mu r_+ = 6.0$ (caixas).

onde λ é a constante de separação,

$$\Delta_r = r^2 + a^2 - 2Mr, \quad K = \omega(r^2 + a^2) - am. \quad (6.9)$$

A parte angular

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{dS(\theta)}{d\theta} \right) + \left(-\frac{m^2}{\sin^2\theta} - a^2\omega^2 \sin^2\theta - a^2\mu^2 \cos^2\theta + 2am\omega + \lambda \right) S(\theta) = 0 \quad (6.10)$$

é equivalente a (5.13) até a redefinição de variáveis e pode ser resolvida como descrito na seção 3.4.5.

A série de Frobenius apropriada para (6.8) é dada por

$$R(r) = \exp(i\chi r) \left(\frac{r}{r_+} - \frac{a^2}{r_+^2} \right)^{i\sigma-1} \left(\frac{rr_+ - r_+^2}{rr_+ - a^2} \right)^{-i\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\frac{rr_+ - r_+^2}{rr_+ - a^2} \right)^k, \quad (6.11)$$

onde $\chi = \sqrt{\omega^2 - \mu^2}$.

Os coeficientes a_k de (6.11) satisfazem a relação de recorrência de três termos (3.41), que permite achar o espectro numericamente e comprovar que ele não contém modos instáveis [14].

Pode-se ver que apesar da vida da oscilação quase-normal aumentar monotonicamente com o número azimutal m , a sua parte imaginária permanece limitada (ver a fig. 6.5) e, por meio disso, não mostra qualquer tendência à instabilidade. Por isso, conclui-se que a fórmula (6.7) implica em estabilidade para massas grandes.

Figura 6.5: A frequência quase-normal fundamental de buracos negros de Kerr para o campo escalar massivo como uma função do número azimutal m para $l = 6$, $a = 0.15r_+$, $\mu r_+ = 0.2$.

A dependência da frequência quase-normal na massa μ do campo é qualitativamente a mesma para o caso de Schwarzschild: maior μ leva à redução considerável da taxa de decaimento e, finalmente, às quase-ressonâncias (ver a seção 6.2).

A dependência do parâmetro de rotação a é mais complicada. Para $m = 0$ a parte imaginária de frequências quase-normais reduz o seu valor absoluto já que a cresce enquanto a parte real aumenta, alcança o máximo e depois diminui.

6.4 Modos quase-normais de cordas negras e a instabilidade de Gregory-Laflamme

Diferentemente da gravidade de Einstein de quatro dimensões, que permite a existência de buracos negros, as teorias em dimensões mais altas, como os cenários de mundo na brana e a teoria das cordas, permitem a existência de um número de objetos “negros”: buracos negros em dimensões mais altas, cordas e branas negras, anéis e saturnos negros entre outros. Em mais do que quatro dimensões, falta o teorema de unicidade, então a estabilidade pode ser o critério que selecionará soluções físicas entre esta variedade de soluções.

Segundo os cenários de mundo na brana, se a matéria localizada na brana sofrer um colapso gravitacional, um buraco negro com o horizonte estendido à direção transversal extra se formará.

Este objeto parece um buraco negro na brana, mas é, de fato, uma corda negra na teoria completa D -dimensional. Tais cordas negras sofrem da chamada instabilidade de Gregory-Laflamme [107, 108], que é a instabilidade gravitacional das perturbações métricas do tipo escalar de ondas de comprimento longo. Os valores de limiar do vetor da onda k no qual a instabilidade aparece foram achados em [109].

A evolução das perturbações lineares esfericamente simétricas de cordas negras D -dimensionais em domínio de tempo e de frequência foi estudada em [26]. Pela primeira vez os modos quase-normais e os perfis temporais foram estudados no setor estável. Também a aparência da instabilidade de Gregory-Laflamme foi mostrada no domínio de tempo.

Observemos, que as equações para perturbações gravitacionais contém o momento de Kaluza-Klein. A contribuição deste momento no correspondente potencial efetivo se parece com o termo de massa.

Para a corda negra estática em $D \geq 5$ dimensões de espaço-tempo, o contexto métrico pode ser descrito como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = f(r) dt^2 - \frac{dr^2}{f(r)} - r^2 d\Omega_{D-3}^2 - dz^2, \quad (6.12)$$

onde

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^n, \quad n = D - 4.$$

e $d\Omega_{D-3}^2$ é o elemento de linha em uma $(D - 3)$ -esfera unitária.

A direção z é periodicamente identificada pela relação $z = z + 2\pi R$. Serão estudadas as perturbações $(D - 3)$ -esfericamente simétricas, que podem-se escritas da forma

$$\delta g_{\mu\nu} = e^{ikz} a_{\mu\nu}(t, r), \quad k = \frac{m}{R}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

As equações de Einstein perturbadas no vácuo têm a forma

$$\delta R_{\mu\nu} = 0. \quad (6.13)$$

As perturbações podem ser reduzidas à forma, em que os únicos componentes não-nulos de $a_{\mu\nu}$, são

$$a_{tt} = h_t, \quad a_{rr} = h_r, \quad a_{zz} = h_z, \quad a_{tr} = \dot{h}_v, \quad a_{zr} = -ik h_v.$$

As equações de Einstein linearizadas levam a um conjunto de equações ligadas que determinam os quatro perfis radiais acima. Contudo, pode-se eliminar h_v , h_r e h_t dessas equações para produzir uma única equação de segunda ordem para h_z :

$$\ddot{h}_z = f(r)^2 h_z'' + p(r) h_z' + q(r) h_z, \quad (6.14)$$

onde

$$\begin{aligned} p(r) &= \frac{f(r)^2}{r} \left(1 + \frac{n}{f(r)} - \frac{4(2+n)k^2 r^2}{2k^2 r^2 + n(n+1)(r_+/r)^n} \right), \\ q(r) &= -k^2 f(r) \frac{2k^2 r^2 - n(n+3)(r_+/r)^n}{2k^2 r^2 + n(n+1)(r_+/r)^n}. \end{aligned}$$

Definindo

$$h_z(t, r) = \frac{r^{-(n-1)/2}}{2k^2 r^2 + n(n+1)(r_+/r)^n} \Psi(t, r),$$

Figura 6.6: Perfis temporais das perturbações de cordas negras para $kr_+ = 2.5$: $n = 2$ (vermelho, topo), $n = 3$ (laranja), $n = 4$ (verde), $n = 5$ (azul, abaixo). O decaimento de tempo tardio para $n \geq 3$ é $\Psi \propto t^{-(n+6)/2} \text{sen}(kt)$.

pode-se reduzir a equação (6.14) à equação de onda

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r_\star^2} + V(r) \right) \Psi = 0, \quad (6.15)$$

onde $dr_\star = \frac{dr}{f(r)}$ é a coordenada tartaruga. Aqui, o potencial efetivo $V(r)$ é dado por

$$V(r) = \frac{f(r)}{4r^2} \frac{U(r)}{(2k^2r^2 + n(n+1)(r_+/r)^n)^2},$$

onde

$$\begin{aligned} U(r) = & 16k^6r^6 + 4k^4r^4(n+5)(3f(r) - 2n + 3nf(r)) - \\ & - 4k^2r^2n(n+1)(n(n+5) + f(r)(2n^2 + 7n + 9)) \left(\frac{r_+}{r} \right)^n - \\ & - n^2(n+1)^3(f(r) - 2n + nf(r)) \left(\frac{r_+}{r} \right)^{2n}. \end{aligned}$$

Pode-se ver que k desempenha o papel da massa efetiva. No tempo assintoticamente tardio observam-se caudas que decaem segundo a lei de potência e têm a frequência de oscilação igual a k (ver a fig. 6.6), parecendo-se com o comportamento assintótico de campos massivos perto

Figura 6.7: Perfis temporais de perturbações de cordas negras para $n = 1$ $kr_+ = 0.84$ (magenta, topo), $kr_+ = 0.87$ (vermelha), $kr_+ = 0.88$ (laranja), $kr_+ = 0.9$ (verde), $kr_+ = 1.1$ (azul, abaixo). Pode-se ver dois modos concomitantes: para k grande o modo oscilante domina, perto do valor crítico de k o modo dominante não oscila, para valores instáveis de k o modo dominante cresce. A escala é logarítmica, para que as linhas retas correspondam a um crescimento ou decrescimento exponencial.

de buracos negros de Schwarzschild (ver a seção 6.5). O comportamento do primeiro sobretom é qualitativamente semelhante àquele do modo fundamental de campos massivos de buracos negros de Schwarzschild em dimensões mais altas (ver a seção 6.2).

- Para $D = 5$ ($n = 1$), conforme k cresce, a parte imaginária do primeiro sobretom diminui rapidamente e desaparece para algum valor de limiar de k , enquanto a sua parte real fica menor do que o valor de limiar. Depois que o valor de limiar de k for alcançado, o primeiro sobretom “desaparece”.

- Para $D \geq 6$ ($n \geq 2$), a parte imaginária do primeiro sobretom fica pequena para k grande, enquanto a parte real se aproxima de k assintoticamente.

Embora o primeiro sobretom das cordas negras esfericamente simétricas se comporte de mesmo modo que o modo fundamental de campos massivos perto de buracos negros de Schwarzschild em dimensões mais altas, os outros modos têm um comportamento completamente diferente. O modo fundamental de perturbações da corda negra é puramente imaginário. Ele cresce para valores de k pequenos, levando à instabilidade da corda negra (ver o fig. 6.7). Para valores de k moderadamente grandes, suficientemente longe da instabilidade, o perfil tem a mesma forma que o perfil para campos massivos, mas, quando aproximando o ponto da instabilidade, a frequência real da oscilação e a taxa de decaimento se reduzem consideravelmente. Depois de cruzar o ponto da instabilidade observa-se

que começando de valores muito pequenos, $\text{Im}(\omega) > 0$ estão aumentando lentamente (enquanto $\text{Re}(\omega) = 0$). Por isso, pode-se concluir, que há alguma solução estática $\omega = 0$ da equação de onda, que se mostra exatamente no ponto de limiar da instabilidade.

6.5 Caudas de tempo tardio de campos massivos

O comportamento de tempo tardio de perturbações de buracos negros foi estudado pela primeira vez por R. Price, quem mostrou que as perturbações gravitacionais e do campo escalar sem massa decaem como $\propto t^{-(2l+3)}$ no tempo assintoticamente tardio [110, 111]. Em [112] Bičák achou que o campo escalar sem massa no contexto de Reissner-Nordström decai como $\propto t^{-(2l+2)}$ para $|Q| < M$ e como $\propto t^{-(l+2)}$ para carga extremada do buraco negro $|Q| = M$. Para buracos negros de Schwarzschild-de Sitter e Reissner-Nordström-de Sitter, ao invés das caudas da lei de potência, as caudas exponenciais foram encontradas [36].

Em espaços-tempo de dimensões mais altas o comportamento no tempo tardio depende também do número de dimensões extra. Foi achado que campos escalar e vetorial sem massa, e perturbações gravitacionais de buracos negros de Schwarzschild em dimensões mais altas têm a lei de decaimento $\propto t^{-(2l+D-2)}$ para D ímpares [113] e $\propto t^{-(2l+3D-8)}$ para $D > 4$ pares [114]. O mesmo comportamento no tempo tardio foi observado para os buracos negros de Gauss-Bonnet em dimensões ímpares [89]. As caudas de tempo tardio dos campos do Modelo Padrão localizados na brana foram estudadas em [25]. A sua lei de decaimento no tempo tardio é $\propto t^{-(2l+D-1)}$.

Observemos que o decaimento no tempo tardio de perturbações na gravidade completamente não linear não concorda com a teoria linear em número de dimensões maior do que quatro. Considerando um campo escalar sem massa e levando em conta a reação de volta do campo sobre a métrica, pode-se achar que a taxa de decaimento de tempo tardio é menor, coincidindo com a previsão da teoria linear somente em quatro dimensões [115].

O comportamento de campos massivos no tempo tardio é qualitativamente diferente do que os sem massa: no tempo tardio o perfil de decaimento é a cauda da lei de potência inversa *oscilatória*. Também, a massa do campo implica um comportamento diferente no tempo tardio intermediário ($1 \ll t/M < (\mu M)^{-3}$) e no tempo assintoticamente tardio ($t/M > (\mu M)^{-3}$).

Para um campo escalar massivo com a massa μ no contexto do buraco negro de Schwarzschild, as perturbações decaem como $\propto t^{-(l+3/2)}\text{sen}(\mu t)$ no tempo tardio intermediário [101] e como $\propto t^{-(5/6)}\text{sen}(\mu t)$ no tempo assintoticamente tardio [116, 117]. O mesmo comportamento no tempo assintoticamente tardio foi encontrado também para as perturbações de campos escalares massivos do buraco negro dilatônico [118] e do buraco negro de Kerr [119] e para o campo de Dirac massivo no contexto de Schwarzschild [72].

Para buracos negros de Schwarzschild em dimensões mais altas o comportamento no tempo tardio intermediário do campo escalar massivo foi achado, como sendo $\propto t^{-(l+(D-1)/2)}\text{sen}(\mu t)$ [120].

O comportamento no tempo tardio do campo vetorial massivo foi estudado tanto numericamente como analiticamente pela primeira vez em [15]. No tempo tardio intermediário a lei de decaimento depende da polarização, sendo ou $\propto t^{-(l+1/2)}\text{sen}(\mu t)$, ou $\propto t^{-(l+3/2)}\text{sen}(\mu t)$, ou $\propto t^{-(l+5/2)}\text{sen}(\mu t)$. No tempo assintoticamente tardio o comportamento é o mesmo, como para outros campos massivos, $\propto t^{-(5/6)}\text{sen}(\mu t)$. Por isso, conclui-se que a lei de decaimento no tempo assintoticamente tardio *não depende* do spin do campo.

A lei de decaimento no tempo tardio de perturbações sem massa, o comportamento no tempo tardio intermediário e assintoticamente tardio de perturbações de campos massivos para vários spins em contextos assintoticamente planos é apresentada na tabela seguinte.

perturbações	sem massa	massiva (intermediário)	massiva (assintot.)
$s = 0$ ($4D$ Schw.)	$t^{-(2l+3)}$	$t^{-(l+3/2)}\text{sen}(\mu t)$	$t^{-(5/6)}\text{sen}(\mu t)$
$s = 1$ ($4D$ Schw.)	$t^{-(2l+3)}$	$\{t^{-(l+1/2)}, t^{-(l+3/2)}, t^{-(l+5/2)}\}\text{sen}(\mu t)$	$t^{-(5/6)}\text{sen}(\mu t)$
$s = 2$ ($4D$ Schw.)	$t^{-(2l+3)}$		
$s = 0$ ($4D$ Kerr)	$t^{-(2l+3)}$	$t^{-(l+3/2)}\text{sen}(\mu t)$	$t^{-(5/6)}\text{sen}(\mu t)$
$s = 0$ ($4D$ R-N)	$t^{-(2l+2)}$		
$s = 0$ (D ímpares)	$t^{-(2l+D-2)}$	$t^{-(l+(D-1)/2)}\text{sen}(\mu t)$	
$s = 0$ (D pares)	$t^{-(2l+3D-8)}$	$t^{-(l+(D-1)/2)}\text{sen}(\mu t)$	
na 4-brana	$t^{-(2l+D-1)}$		

Capítulo 7

Modos quase-normais de buracos negros cujas métricas são desconhecidas analiticamente

7.1 Métodos numéricos

Buracos negros são objetos compactos. Por isso, é natural esperar que o seu toque quase-normal, sendo a propriedade do buraco negro, pelo menos na ordem dominante, não depende do que acontece a grande distância do buraco negro.

Acontece que as frequências dominantes dependem, na maior parte, do comportamento da solução do buraco negro em uma região perto do horizonte de eventos. Assim pode-se achá-los no domínio de frequência, mesmo se o comportamento da solução a grande distância não for conhecido.

Dois exemplos qualitativamente diferentes foram considerados neste contexto: o buraco negro com cabelo escalar no contexto anti-de Sitter e o buraco negro Einstein-Aether no contexto assintoticamente plano. Em ambos os tipos de contexto o comportamento da solução a grandes distâncias não é importante [28]:

- Para um contexto assintoticamente anti-de Sitter normalmente as condições de contorno de Dirichlet são impostas no infinito espacial. A parte mais significativa das perturbações métricas fica, por meio disso, perto do buraco negro. Por isso, o comportamento da solução nesta região causa uma influência dominante no espectro quase-normal [13].

- Para o caso assintoticamente plano a procura dos modos quase-normais pode ser reduzida ao problema de espalhamento. Por isso, as frequências quase-normais são determinadas principalmente pela forma do potencial efetivo perto de seu pico [16, 19].

Para calcular frequências quase-normais para o contexto assintoticamente anti-de Sitter pode-se usar o método de Horowitz-Hubeny, descrito na seção 3.5. É claro que se $s(z)$, $t(z)$ e $u(z)$ em (3.71) forem séries que convergem no infinito espacial ($z = 1$) rápido o suficiente, então ainda é possível calcular y_n porque ele depende insignificamente dos termos mais altos das séries. Para achar as expansões para as séries $s(z)$, $t(z)$ e $u(z)$, pode-se utilizar equações que definem a solução do buraco negro. É possível fazer isto sempre porque $s(z)$, $t(z)$ e $u(z)$ podem ser expressados explicitamente em termos dos coeficientes métricos e de suas derivadas.

Assim, os modos quase-normais podem ser achados sem resolver as equações do buraco negro. É suficiente encontrar expansões de série para os coeficientes métricos perto do horizonte. É importante observar que se pode controlar a precisão das frequências próprias ω impondo convergência do

Figura 7.1: O potencial efetivo para perturbações eletromagnéticas perto do buraco negro de Schwarzschild ($r_+ = 1$, $l = 2$) e o mesmo potencial interpolado numericamente perto do seu máximo.

resultado achado com relação ao aumento do número dos termos de expansão para todas as séries [13].

Para soluções de buracos negros assintoticamente planos é conveniente utilizar o método de WKB (ver a seção 3.3), onde as soluções assintóticas da equação de onda perto do horizonte de eventos e perto do infinito espacial são combinadas com a expansão de Taylor perto do pico do potencial. Foi concluído, por isso, que os modos quase-normais lento-decrescentes são determinados principalmente pelo comportamento do potencial efetivo perto do seu pico.

Esta afirmação foi verificada considerando o potencial do buraco negro de Schwarzschild e também dois outros potenciais, que se põem próximos ao potencial de Schwarzschild perto do seu máximo, mas têm comportamentos muito diferentes longe do buraco negro. Esses dois potenciais são escolhidos de modo seguinte. Foram escolhidos alguns pontos perto do máximo do potencial efetivo. O primeiro potencial é uma interpolação desses pontos por splines cúbicos (ver a fig. 7.1). O segundo potencial é ajustado para esses pontos por uma razão de funções polinomiais.

Como a fórmula de WKB contém o valor do potencial efetivo e as suas derivadas no pico do potencial, achamos que os resultados obtidos com a ajuda dos três potenciais constituem boa aproximação se a interpolação e o ajuste forem feitos com a precisão apropriada [16]. Apesar das derivadas mais altas do nosso potencial de interpolação não serem definidas, é possível avaliá-las passo a passo interpolando do mesmo jeito a primeira e todas as derivadas consecutivas do potencial. Resulta que o potencial de interpolação é muito sensível a erros numéricos. Por isso, para calcular os modos quase-normais com a precisão apropriada, deve-se calcular os valores do potencial com uma precisão muito alta. De fato, para objetivos práticos pode-se utilizar o ajuste do potencial que

não acumula o erro numérico.

Para testar a precisão desta abordagem pode-se utilizar o fato que a fórmula de WKB da sexta ordem dá o erro relativo menor do que a da terceira ordem (ver a seção 3.3). Como a ordem mais alta de WKB depende das derivadas mais altas do potencial efetivo, que são mais sensíveis à precisão de interpolação ou ajuste, a ordem mais alta da fórmula de WKB deve dar alguns valores casuais, se a precisão não for suficiente.

A independência dos modos quase-normais do comportamento do potencial efetivo a grande distância, que foi inspirada pela fórmula de WKB, não está relacionada com o método de WKB. Contudo, como a fórmula de WKB depende somente do potencial perto do seu pico, é impossível comprovar a afirmação dentro da aproximação descrita. Por isso, é importante verificar os resultados com um método diferente. Para fazer isto, achamos no domínio temporal os modos quase-normais de perturbações gravitacionais de buracos negros na teoria de Einstein-Aéther. As frequências calculadas mostram o acordo excelente com os resultados de WKB [19].

7.2 Modos quase-normais do buraco negro com cabelo escalar

Desde o trabalho de J. Bekenstein [121], é bem conhecido que buracos negros não podem ter cabelo escalar dentro do acoplamento mínimo. Contudo, como foi encontrado em [122, 123], há uma possibilidade de vestir um buraco negro quadridimensional no espaço-tempo anti-de Sitter com um campo escalar clássico não minimamente ligado. Em [124] os resultados foram estendidos para configurações em dimensões mais altas. Apesar de vivermos no universo de Sitter, os buracos negros no contexto anti-de Sitter atraíram um interesse considerável por causa da correspondência AdS/CFT [6]. Neste contexto, o toque quase-normal do campo escalar massivo não minimamente ligado ao buraco negro no contexto anti-de Sitter foi estudado pela primeira vez em [13].

Consideremos a solução esfericamente simétrica

$$ds^2 = N(r)e^{2\delta(r)}dt^2 - N(r)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (7.1)$$

da ação, que descreve um campo escalar ϕ auto-interativo com o acoplamento não mínimo à gravidade,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2} \xi R\phi^2 - \frac{\mu^2\phi^2}{2} \right], \quad (7.2)$$

onde R é o escalar de Ricci, Λ é a constante cosmológica, ξ é a constante de acoplamento e

$$(\nabla\phi)^2 = \nabla_a\phi\nabla^a\phi.$$

Para simplificar as equações de movimento foi usada a transformação conforme

$$\bar{g}_{ab} = (1 - \xi\phi^2)g_{ab}. \quad (7.3)$$

Depois da transformação, a ação toma a forma

$$S = \int d^4\bar{x} \sqrt{-\bar{g}} \left(\frac{1}{2} (\bar{R} - 2\Lambda) - \frac{1}{2} (\bar{\nabla}\Phi)^2 - U(\Phi) \right), \quad (7.4)$$

onde foram definidos

$$\Phi = \int d\phi \sqrt{\frac{(1 - \xi\phi^2) + 6\xi^2\phi^2}{(1 - \xi\phi^2)^2}}, \quad U(\Phi) = \frac{\frac{\mu^2\phi^2}{2} + \Lambda\xi\phi^2(2 - \xi\phi^2)}{(1 - \xi\phi^2)^2}. \quad (7.5)$$

A métrica toma a forma seguinte

$$d\bar{s}^2 = \bar{N}(\bar{r})e^{2\bar{\delta}(\bar{r})}dt^2 - \bar{N}(\bar{r})^{-1}d\bar{r}^2 - \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (7.6)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{r} &= (1 - \xi\phi^2)^{\frac{1}{2}} r, \\ \bar{N} &= N(1 - \xi\phi^2 - \xi r\phi\phi')^2 (1 - \xi\phi^2)^{-2}, \\ \bar{N}e^{2\bar{\delta}} &= Ne^{2\delta}(1 - \xi\phi^2). \end{aligned}$$

Variando a ação, pode-se encontrar as equações de movimento seguintes [123]

$$\frac{d(\bar{r}\bar{N})}{d\bar{r}} = 1 - \Lambda\bar{r}^2 - \bar{r}^2 \left(\frac{\bar{N}}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\bar{r}} \right)^2 + U(\Phi) \right), \quad (7.7a)$$

$$\frac{d\bar{\delta}}{d\bar{r}} = \frac{\bar{r}}{2} \left(\frac{d\Phi}{d\bar{r}} \right)^2, \quad (7.7b)$$

$$0 = \bar{N} \frac{d^2\Phi}{d\bar{r}^2} + \left(\bar{N} \frac{d\bar{\delta}}{d\bar{r}} + \frac{d\bar{N}}{d\bar{r}} + \frac{2\bar{N}}{\bar{r}} \right) \frac{d\Phi}{d\bar{r}} - \frac{dU}{d\Phi}. \quad (7.7c)$$

Para obter as expansões de série para os coeficientes métricos (7.6), tem-se de impor algumas condições de contorno, que se associam com os parâmetros do buraco negro. Foram usados os parâmetros seguintes. O raio do horizonte de eventos $\bar{r}_+$ pode ser escolhido arbitrariamente para fixar a escala de comprimento. Esta escolha define a condição de contorno para $\bar{N}$: $\bar{N}(\bar{r}_+) = 0$. Para medir todos os valores dimensionais em unidades de $\bar{r}_+$, escolhe-se $\bar{r}_+ = 1$. O valor $\bar{\delta}(\bar{r}_+)$ é escolhido arbitrariamente para fixar a escala de tempo. Para introduzir as condições de contorno no mesmo ponto impomos $\bar{\delta}(\bar{r}_+) = 0$, que é diferente da escolha de Winstanley $\bar{\delta}(\infty) = 0$. O último parâmetro $\phi(\bar{r}_+) = Q$ pode ser associado com a carga escalar do buraco negro.

A equação de perturbação esfericamente simétrica para

$$\delta\Phi = e^{-i\omega t} \frac{Q_\omega(r)}{r}$$

toma a forma de onda (2.21), onde o potencial de perturbação é dado por [122]:

$$V(\bar{r}) = \frac{\bar{N}e^{2\bar{\delta}}}{\bar{r}^2} \left((1 - (U + \Lambda)\bar{r}^2) \left(1 - \bar{r}^2 \left(\frac{d\Phi}{d\bar{r}} \right)^2 \right) - \bar{N} + 2\bar{r}^3 \frac{dU}{d\Phi} \frac{d\Phi}{d\bar{r}} + \bar{r}^2 \frac{d^2U}{d\Phi^2} \right). \quad (7.8)$$

A coordenada tartaruga é dada por

$$\frac{d\bar{r}^*}{d\bar{r}} = e^{\bar{\delta}} \bar{N}. \quad (7.9)$$

Esto é semelhante ao caso anti-de Sitter ordinário:

$$\begin{aligned} \bar{r} = \bar{r}_+ &\iff \bar{r}^* = \infty, \\ \bar{r} = \infty &\iff \bar{r}^* = 0. \end{aligned}$$

Esta perturbação corresponde à modificação infinitésima da massa do buraco negro e é semelhante às perturbações escalares de multipolo nulo perto de um buraco negro sem cabelo. A diferença

Figura 7.2: **Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em Q para o buraco negro com cabelo escalar.** A parte imaginária rapidamente diminui enquanto “a carga escalar” Q aumenta. A parte real chega o seu máximo e depois rapidamente cai até o zero. Ela desaparece para algumas cargas não críticas $Q_0 < \xi^{-1/2}$. Para $Q \geq Q_0$ a parte real se anula e a frequência é puramente imaginária (dentro da precisão numérica).

crucial é que a perturbação de um campo escalar por causa do cabelo dá uma correção de primeira ordem à métrica.

Para calcular os modos quase-normais são achadas as expansões de série perto do horizonte de eventos do buraco negro para Φ , $\bar{\delta}$ e $\bar{N}$ usando as equações (7.7). Como $\bar{N}$ cresce no infinito espacial, é conveniente achar a série para a função $g = \bar{N}/\bar{r}^2$ em vez de $\bar{N}$. Depois que as séries para as funções métricas são conhecidas pode-se achar a série para o potencial efetivo (7.8) e, finalmente, para $s(z)$, $t(z)$ e $u(z)$ em (3.71). Então utilizamos a técnica descrita na seção prévia.

Foi achado [13] que a parte imaginária dos modos quase-normais modifica-se monotonicamente como uma função de Λ , Q e ξ . A massa do campo escalar μ faz a parte imaginária reduzir o seu valor absoluto mas não desaparecer. O valor alcança um mínimo para uma massa determinada e depois aumenta muito rapidamente (ver a fig. 7.5). Assim, nenhuma oscilação com vida infinitamente longa aparece.

A parte real tem um comportamento mais complicado e depende significativamente dos parâmetros Q e Λ (ver as figuras 7.2 e 7.3). Outros parâmetros, ξ e μ , modificam a parte real dentro dos limites relativamente pequenos (ver as figuras 7.4 e 7.5). Para valores relativamente grandes de ξ , Λ e Q as frequências puramente imaginárias aparecem.

A partir da figura 7.6 vê-se que os sobretons mais altos tendem ao espaçamento equidistante semelhantemente ao comportamento do espectro de buraco negro sem cabelo no contexto anti-de Sitter [125].

Figura 7.3: Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em Λ para o buraco negro com cabelo escalar. A parte real cresce para “cargas escalares” Q relativamente pequenas, mas para grande $Q = 2.2$ ela também consegue o máximo e depois cai e desaparece para $\Lambda \approx -0.292$. Para valores de Λ maiores a parte real fica nula e as frequências puramente imaginárias existem. A parte imaginária diminui quase linearmente enquanto Λ cresce.

7.3 Perturbações e modos quase-normais de buracos negros na teoria de Einstein-Aéther

A relatividade geral é baseada na invariância local de Lorentz. Mas muitas tentativas de ultrapassar a simetria local de Lorentz apareceram. Aéther pode ser considerado como um estado em repouso local preferido em cada ponto do espaço-tempo por causa de alguma física desconhecida. A teoria de Einstein-Aéther é a relatividade geral ligada a um campo vetorial dinâmico do tipo temporal, que é chamado “aéther”. Esta teoria é o que vem em vez da relatividade geral usual quando a simetria local de Lorentz é quebrada. O campo vetorial quebra a invariância local relativística, enquanto que a simetria rotacional no sistema de referência preferencial fica conservada (ver a revisão [4]).

É importante que a diferença significativa entre as teorias de Einstein e de Einstein-Aéther deve ser vista no regime de campo forte, por exemplo, observando o espectro quase-normal característico de buracos negros. Assim, a existência de aéther pode ser testada nos próximos experimentos com a nova geração de antenas gravitacionais. Neste contexto, o espectro quase-normal dos campos de teste escalar e eletromagnético [16] e para as perturbações gravitacionais [19] foi estudado.

A solução para uma métrica de buraco negro na teoria de Einstein-Aéther foi achada numericamente em [126, 127]. Como a solução analítica não é conhecida, para calcular os modos quase-normais, pode-se ajustar o potencial efetivo como descrito na seção 7.1.

O Lagrangiano da teoria de Einstein-Aéther completa que forma a ação invariante de difeomor-

Figura 7.4: **Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em $\xi < \frac{3}{16}$ para o buraco negro com cabelo escalar.** A parte imaginária diminui enquanto ξ cresce. A rapidez de tal redução depende de Λ e Q . Para alguns Λ e Q (como apresentado no gráfico de baixo) a parte real pode cair a zero e as frequências puramente imaginárias aparecem para maior ξ .

fismos mais geral da métrica do espaço-tempo g_{ab} e do campo de aéter u^a , envolvendo não mais do que duas derivadas, é dado por

$$L = -R - K^{ab}_{mn} \nabla_a u^m \nabla_b u^n - \lambda(g_{ab} u^a u^b - 1), \quad (7.10)$$

onde R é o escalar de Ricci, λ é o multiplicador de Lagrange, que fornece o vínculo unitário do tipo temporal

$$K^{ab}_{mn} = c_1 g^{ab} g_{mn} + c_2 \delta_m^a \delta_n^b + c_3 \delta_n^a \delta_m^b + c_4 u^a u^b g_{mn},$$

onde c_i são constantes adimensionais.

A simetria esférica permite fixar $c_4 = 0$. Seguindo [126, 127], será considerada a teoria de Einstein-Aéter chamada *não-reduzida*, para a qual $c_3 = 0$, e pode-se usar a redefinição do campo, que fixa o coeficiente c_2 :

$$c_2 = -\frac{c_1^3}{2 - 4c_1 + 3c_1^2},$$

para que c_1 seja o parâmetro livre.

A métrica de um buraco negro estático esfericamente simétrico é

$$ds^2 = N(r)dt^2 - \frac{B^2(r)}{N(r)}dr^2 - r^2 d\Omega^2, \quad (7.11)$$

onde as funções $N(r)$ e $B(r)$ são dadas pela integração numérica perto do horizonte de eventos do buraco negro.

Figura 7.5: **Dependência das partes real e imaginária da frequência quase-normal em μ para o buraco negro com cabelo escalar.** Somente $0 \leq \mu^2 \leq -4\xi\Lambda$ foi considerado. A parte real modifica-se dentro de uma variedade comparativamente pequena. A parte imaginária alcança o seu máximo permanecendo negativa. Para este valor de μ as oscilações têm maior tempo de vida, mas elas ainda decaem e quase-ressonâncias não são observadas. Para maiores massas de campo escalar a parte imaginária da frequência diminui e a taxa de decaimento é mais alta.

As equações de perturbação podem ser reduzidas à forma de onda (2.10) com os potenciais efetivos

$$V_s = N(r) \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr_*} \frac{N(r)}{B(r)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.12a)$$

$$V_e = N(r) \frac{l(l+1)}{r^2}, \quad l = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.12b)$$

$$V_g = N(r) \frac{(l+2)(l-1)}{r^2} + \frac{2N^2(r)}{B^2(r)r^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr_*} \frac{N(r)}{B(r)}, \quad l = 2, 3, 4, \dots, \quad (7.12c)$$

para perturbações escalares, Maxwell e gravitacionais axiais, respectivamente.

A coordenada tartaruga é definida como

$$dr_* = \frac{B(r)}{N(r)} dr.$$

Observe, que como o valor de fundo da ligação de aéter é pequeno em comparação com as características do contexto do buraco negro grande, a métrica de Schwarzschild é ligeiramente corrigida pelo aéter. Por isso, quando considerando as perturbações da métrica, são desconsideadas perturbações pequenas de aéter, mantendo somente as perturbações lineares do tensor de Ricci.

Figura 7.6: **As primeiras cinco frequências quase-normais do buraco negro com cabelo escalar** $\Lambda = -0.1$, $Q = 1$, $\xi = 0.1$, $\mu = 0$. Os sobretons altos se aproximam de um espaçamento equidistante.

Como $N(r)$ e $B(r)$ são conhecidos numericamente, pode-se utilizar a técnica de ajuste [16]. Para ajustar $N(r)$ e $B(r)$, as funções foram escolhidas como frações de dois polinômios, que são caracterizados pelo número de termos nos seus numeradores e denominadores. Há um número ótimo para o qual a convergência da série de WKB é melhor. Na prática, para achar o número ótimo de termos para $N(r)$ procura-se a diferença mínima entre valores da terceira e da sexta ordem de WKB, primeiramente, para o caso $B(r) = 1$. Quando acharmos o ajuste ótimo para $N(r)$ de modo semelhante, isto é, procurando a melhor convergência de WKB, ajusta-se também $B(r)$ de modo ótimo. A convergência rápida de WKB mostra que as derivadas mais altas dos coeficientes métricos são calculadas com a melhor precisão.

Foi achado, que como c_1 cresce, a frequência quase-normal fundamental aumenta o valor absoluto das suas partes real e imaginária. Isto foi verificado também no domínio de tempo [19]. Na figura 7.7 vê-se, que para c_1 mais alto o período de oscilação e o tempo de vida das perturbações reduzem. Conclui-se que aéter, se existir, poderia ser indiretamente observado pela detecção de espectros característicos de buracos negros.

Figura 7.7: Evolução temporal de perturbações gravitacionais axiais ($l = 2$) para teoria de Einstein-Aéter não-reduzida, $c_1 = 0.1$ (linha verde) e $c_1 = 0.4$ (linha vermelha), em comparação com o caso de Schwarzschild $c_1 = 0$ (linha azul). Para c_1 mais alto, foi observado o decaimento mais rápido das perturbações.

Capítulo 8

Perturbações de buracos negros de Schwarzschild em laboratórios

8.1 Análogo acústico de gravidade

Além da possibilidade de observar os modos quase-normais dos buracos negros com a ajuda de uma nova geração de antenas gravitacionais, há uma janela para observação do análogo acústico de um buraco negro em laboratórios. Isto é o bem conhecido análogo de Unruh de buracos negros [128, 129], que são os horizontes aparentes que aparecem em um fluido com uma velocidade espaço-dependente, na presença de pontos sônicos. A onda, que passou pelo ponto sônico, não pode propagar para trás, imitando por meio disso, o efeito do horizonte em pontos sônicos.

A dinâmica de ondas sonoras em um fluido pode ser descrita pela propagação de um campo escalar em algum contexto efetivo. Acontece, que o fluxo constante esfericamente simétrico não pode reproduzir a geometria de Schwarzschild por causa da equação de continuidade (ver [130] para revisão). Pode-se construir ou um análogo acústico, que é conforme ao buraco negro de Schwarzschild,

$$ds^2 \propto r^{-3/2} \left(\left(1 - \frac{r_+}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_+}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right), \quad (8.1)$$

ou um análogo exato do buraco negro 7-dimensional, projetado na 4-brana (ver a seção 5.3)

$$ds^2 = \left(1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^4\right) dt^2 - \left(1 - \left(\frac{r_+}{r}\right)^4\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (8.2)$$

Se tivesse uma analogia completa com alguma solução conhecida das equações de Einstein, por exemplo, a solução de Schwarzschild, poder-se-ia ver, nos experimentos acústicos a coincidência numérica com umas características de prototipo, não só qualitativa, mas exata até uma precisão experimental. Para modos quase-normais, que são governados pela forma da equação de onda, esta correspondência numérica significaria que o potencial efetivo das perturbações de algum sistema hidrodinâmico coincide com um potencial efetivo do buraco negro. Felizmente, a consideração das perturbações de um gás em bocal de Laval [131] dá-nos tal oportunidade de encontrar um sistema, que obedece o mesmo potencial efetivo que um buraco negro de Schwarzschild, [21].

8.2 Bocal de Laval

O bocal de Laval canônico é um tubo convergente-divergente, estreito ao meio. Ele permite acelerar o gás até a velocidade sônica na sua garganta, conseguindo velocidades supersônicas depois de passar pela garganta. As perturbações do gás no bocal de Laval podem ser consideradas unidimensionais, se a secção não se modificar rápido demais ao longo do comprimento do bocal. Será mostrado que o potencial efetivo correspondente para perturbações em um bocal de Laval canônico pode ser feito igual ao potencial para perturbações de buracos negros de Schwarzschild, escolhendo uma forma específica de bocal.

Assume-se que um gás no bocal de Laval pode ser descrito pelas equações de movimento para o fluido perfeito e que o fluxo é semi-unidimensional. As equações de continuidade, de conservação do momento e da energia lêem-se respectivamente

$$\partial_t(\rho A) + \partial_x(\rho v A) = 0, \quad (8.3a)$$

$$\partial_t(\rho v A) + \partial_x[(\rho v^2 + p)A] = 0, \quad (8.3b)$$

$$\partial_t(\epsilon A) + \partial_x[(\epsilon + p)vA] = 0. \quad (8.3c)$$

Aqui ρ é a densidade, v é a velocidade do fluido, p é a pressão, A é a secção transversal do bocal, e

$$\epsilon = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \quad (8.4)$$

é a densidade da energia. O coeficiente de expansão adiabática para moléculas di-atômicas do ar é

$$\gamma = 1 + 2/n = 7/5 = 1.4 \quad (n = 5).$$

Assume-se que o fluxo não tem qualquer descontinuidade da entropia. Então o fluido é isentrópico

$$p \propto \rho^\gamma. \quad (8.5)$$

Em vez de (8.3b), pode-se usar a equação de Euler

$$\rho(\partial_t + v\partial_x)v = -\partial_x p. \quad (8.6)$$

Para o fluido isentrópico, (8.6) é reduzido à equação de Bernoulli

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2}(\partial_x \Phi)^2 + h(\rho) = 0, \quad (8.7)$$

onde $h(\rho) \equiv \int \rho^{-1} dp$ é a entalpia específica e $\Phi = \int v dx$ é o potencial da velocidade.

Seguindo [131], as equações de perturbação em tal bocal podem ser reduzidas a

$$\left[\frac{d^2}{dx^{*2}} + \kappa^2 - V(x^*) \right] H_\omega = 0, \quad (8.8)$$

$$\kappa = \frac{\omega}{c_{s0}}, \quad (8.9)$$

$$V(x^*) = \frac{1}{g^2} \left[\frac{g}{2} \frac{d^2 g}{dx^{*2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{dg}{dx^*} \right)^2 \right]. \quad (8.10)$$

Aqui $c_{s0} = \sqrt{\gamma RT/\mu}$ é a velocidade de estagnação do som, que foi usada para medir x^* em metros. A variável x^* é um análogo acústico da coordenada tartaruga que satisfaz

$$x^*(x = +\infty) = +\infty, \quad x^*(x = 0) = -\infty,$$

cuja solução é

$$x^* = c_{s0} \int \frac{c_s dx}{c_s^2 - v^2}. \quad (8.11)$$

A função H_ω representa perturbações pequenas do fluxo do gás,

$$H_\omega(x) = g^{1/2} \int dt e^{i\omega(t-f(x))} \phi(t, x), \quad (8.12)$$

$$g = \frac{\rho A}{c_s}, \quad (8.13)$$

$$f(x) = \int \frac{|v| dx}{c_s^2 - v^2}. \quad (8.14)$$

A velocidade de som é dada por

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho}. \quad (8.15)$$

Como (8.8) é invariante com respeito à re-escalada de g , pode-se fixar os coeficientes em (8.13) arbitrariamente:

$$g = \frac{\rho A}{2\rho^{(\gamma-1)/2}}. \quad (8.16)$$

Até um coeficiente, A pode ser achado em termos de ρ como [21]

$$A^{-1} = (1 - \rho^{(\gamma-1)})^{1/2} \rho. \quad (8.17)$$

Acha-se

$$g = \frac{\rho^{(1-\gamma)/2}}{2(1 - \rho^{(\gamma-1)})^{1/2}} = \frac{\rho^{(1-\gamma)}}{2(\rho^{(1-\gamma)} - 1)^{1/2}}. \quad (8.18)$$

Daqui resulta que

$$\rho^{1-\gamma} = 2g^2 (1 \pm \sqrt{1 - g^{-2}}). \quad (8.19)$$

O sinal em (8.19) deve ser escolhido para que ρ seja uma função monotônica com respeito à coordenada transversal. Como será mostrado depois, a função g para o buraco negro de Schwarzschild pode ser escolhida também monotônica na região R , finita no horizonte e infinita no infinito espacial. Por isso, seleciona-se o sinal negativo,

$$\rho^{1-\gamma} = 2g^2 (1 - \sqrt{1 - g^{-2}}), \quad g > 1. \quad (8.20)$$

Substituindo (8.19) em (8.17), encontra-se a área transversal como uma função de g ,

$$A = \frac{\sqrt{2} (2g^2 (1 - \sqrt{1 - g^{-2}}))^{1/(\gamma-1)}}{\sqrt{1 - \sqrt{1 - g^{-2}}}}. \quad (8.21)$$

Para o fluxo isentrópico constante, (8.7) pode ser reescrito como

$$\frac{v^2}{c_s^2} = \frac{2}{\gamma - 1} (\rho^{1-\gamma} - 1) = \frac{2}{\gamma - 1} (2g^2 (1 - \sqrt{1 - g^{-2}}) - 1). \quad (8.22)$$

Como $v = c_s$ no horizonte de eventos, g deve ser finito lá, e

$$g \Big|_{e.h.} = \frac{\gamma + 1}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma - 1}} = \frac{3}{\sqrt{5}} > 1. \quad (8.23)$$

Esta exigência fixa ambas as constantes da integração.

8.3 Bocal de Laval para o buraco negro de Schwarzschild

Como g permite achar a secção transversal A e, por meio disso, a forma do bocal de Laval, se acha tal $g(x)$ que leva à mesma expressão para o potencial do bocal (8.8), como o potencial efetivo para o buraco negro de Schwarzschild [21],

$$V(r) = \left(1 - \frac{1}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{1-s^2}{r^3}\right), \quad (r_+ = 1), \quad (8.24)$$

onde $l \geq s$ é o número inteiro de multipolo. O número inteiro $s = 0, 1, 2$ descreve as perturbações dos campos de spin diferente: $s = 0$ para o campo escalar de teste, $s = 1$ para o campo de Maxwell e $s = 2$ para as perturbações gravitacionais do tipo axial.

Para achar g que produz o potencial necessário (8.24), identificam-se as coordenadas “tartarugas” da solução do buraco negro e do bocal de Laval

$$dr^* = dx^* = \frac{\rho^{(1-\gamma)/2} dx}{1 - v^2/c_s^2} = \frac{\sqrt{2g^2(1 - \sqrt{1 - g^{-2}})} dx}{1 - \frac{2}{\gamma-1} \left(2g^2(1 - \sqrt{1 - g^{-2}}) - 1\right)}. \quad (8.25)$$

A equação (8.25) relaciona a coordenada real do bocal x e a coordenada radial da solução de Schwarzschild r . É conveniente porque é possível achar a equação para $g(r)$ explicitamente,

$$\frac{f(r)f'(r)g'(r) + f(r)^2g''(r)}{2g(r)} - \frac{f(r)^2g'(r)^2}{4g(r)^2} = V(r). \quad (8.26)$$

Isto implica que a forma do bocal de Laval é parametrada por r e $x^*(r) = r^*(r)$. Observe, que como o raio do horizonte de eventos foi escolhido sendo unitário, a coordenada do bocal x é medida nas unidades de raio do horizonte de eventos.

A solução geral da equação (8.26) contém duas constantes arbitrárias. Elas podem ser fixadas de um modo único pela condição (8.23). A exigência que a solução deve ser finita em $r = 1$ fixa uma das constantes. Então a outra constante re-escala $g(r)$, e deve ser fixada pelo seu valor em $r = 1$. Finalmente, a solução de (8.26), para l e s arbitrários, que satisfaz (8.23), é dada pela fórmula

$$\begin{aligned} g(r) &= \frac{\gamma+1}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}} \sum_{n=s}^l \left(\frac{(-1)^{n+s}(l+n)!}{(n+s)!(n-s)!(l-n)!} r^{n+1} \right)^2 = \\ &= \frac{\gamma+1}{2\sqrt{2}\sqrt{\gamma-1}} r^{2s+2} \left(\frac{\Gamma(1+l+s)_2F_1(s-l, s+l+1, 1+2s, r)}{\Gamma(1+l-s)\Gamma(1+2s)} \right)^2. \end{aligned} \quad (8.27)$$

Pode-se verificar facilmente que a solução acima de fato satisfaz a equação (8.23), para quaisquer l e s fixos.

A equação (8.25) permite achar a dependência da coordenada transversal do bocal x no parâmetro r ,

$$x = \int_1^r \frac{\left(\gamma+1 - 4g(r)^2 \left(1 - \sqrt{1 - g(r)^{-2}}\right)\right) dr}{f(r)(\gamma-1)\sqrt{2g(r)^2 \left(1 - \sqrt{1 - g(r)^{-2}}\right)}}. \quad (8.28)$$

A constante de integração foi escolhida para que x desapareça no ponto sônico.

$$s = l = 0$$

$$s = l = 1$$

$$s = l = 2$$

Figura 8.1: A forma dos bocais de Laval e o potencial efetivo nas coordenadas do bocal.

Agora pode-se achar a forma necessária do bocal de Laval. Isto é, achar a secção transversal dela $A(x)$. Somente tem-se de substituir $g(r)$, dado em (8.27), e passar à coordenada transversal do bocal x . O raio do bocal de Laval como uma função da coordenada transversal x é mostrado na figura 8.1. Observe, que o bocal canônico de Laval está divergindo no fim da trajetória de fluxo, para que $A_{x=\infty} = \infty$. De fato, a fórmula (8.27) implica a divergência pelo menos como $\sim r^2$. Todavia, a divergência do bocal ainda deixa manter a representação unidimensional do movimento, porque x é medido em unidades de raio do buraco negro, isto é, pode-se “puxar” o bocal ao longo da coordenada transversal x para fazer a área do bocal modificar-se tão lentamente quanto desejar. Tal “puxão” significa simplesmente que se obtém a correspondência com um buraco negro maior.

De maneira semelhante, pode-se achar a forma do bocal de Laval para as perturbações gravitacionais do tipo polar [21]. As formas dos bocais para modelar perturbações gravitacionais polares e axiais são muito ligeiramente diferentes.

Deve ser lembrado também que a analogia acústica *precisa* é estabelecida somente para um campo escalar. A possibilidade de se reproduzir o potencial $V(r)$ de campos de spins diferentes, certamente, não significa que se pode reproduzir todas as características daqueles campos em um modelo acústico.

O análogo acústico, obtido para as perturbações dos buracos negros de Schwarzschild, não é

limitado somente por problemas de modos quase-normais, mas permite a investigação geral de propagação de campos, inclusive tais processos como espalhamento e tunelamento de ondas e partículas.

Capítulo 9

Sumário

Resumindo os resultados desta tese:

- Foi feito o estudo completo da influência da constante cosmológica no espectro quase-normal do buraco negro de Schwarzschild para campos de vários spins. Foi achado que a presença da constante cosmológica diminui os valores absolutos das partes real e imaginária de frequências quase-normais. Também foi achado analiticamente o limite de multipolo grande para frequências quase-normais de buracos negros Schwarzschild-de Sitter (seção 4.1).
- Foi estudado o comportamento de sobretons altos para os campos de Dirac sem massa e escalar massivo no contexto de Schwarzschild e para o campo electromagnético de teste e as perturbações gravitacionais do buraco negro Schwarzschild-de Sitter. Foi mostrado numericamente que a parte real da frequência quase-normal assintoticamente aproxima o zero para os campos de Dirac e eletromagnético, mas tem um comportamento oscilatório para as perturbações gravitacionais do buraco negro Schwarzschild-de Sitter. Esses resultados foram confirmados depois analiticamente (seção 4.2). O comportamento de sobretons altos para o campo escalar massivo foi estudado tanto analiticamente como numericamente. Foi mostrado que o comportamento assintótico não depende da massa do campo e coincide com a fórmula analítica conhecida para o campo escalar sem massa (seção 6.2).
- Foi investigado o espectro quase-normal dos campos escalar e Dirac eletricamente carregados no contexto do buraco negro Kerr-Newman-de Sitter. Uma atenção especial foi prestada à influência da interação eletromagnética entre o buraco negro e o campo de teste no espectro quase-normal (seção 4.3).
- Foi estudado o espectro quase-normal de perturbações gravitacionais dos buracos negros neutros e eletricamente carregados em dimensões mais altas com uma constante cosmológica positiva. Foram consideradas todas as espécies das perturbações e comprovado que buracos negros Schwarzschild-de Sitter em dimensões mais altas são estáveis. Foi mostrado que os buracos negros em dimensões mais altas são instáveis se tanto a carga do buraco negro como a constante cosmológica forem grandes o suficiente. Foi achada a região paramétrica da instabilidade (seção 5.1).
- Foram consideradas perturbações gravitacionais de buracos negros em dimensões mais altas na teoria de Einstein-Gauss-Bonnet. Foi achado que a presença do parâmetro de Gauss-Bonnet diminui a parte imaginária de frequências quase-normais, fazendo com que as oscilações sejam de vida mais longa. Também foi estudado o desenvolvimento da instabilidade dos buracos negros de Gauss-Bonnet em cinco e seis dimensões (seção 5.2).
- Foram achados modos quase-normais e caudas de tempo tardio dos buracos negros com rotação e dos buracos negros Gauss-Bonnet sem rotação para os campos do Modelo Padrão localizados em

uma 4-brana (seção 5.3).

- Foram estudados modos quase-normais dos buracos negros de Kaluza-Klein com horizontes esmagados. Foram considerados o campo escalar de teste perto de buracos negros esmagados de Kaluza-Klein com rotação e as perturbações gravitacionais de buracos negros esmagados de Kaluza-Klein sem rotação (seção 5.4).

- Foram calculados os espectros quase-normais do campo escalar massivo nos contextos do buraco negro de Tangherlini (seção 6.2), do buraco negro de Kerr (seção 6.3) e do buraco negro com cabelo escalar assintoticamente anti-de Sitter (seção 7.2). Foi achado que o campo escalar massivo é estável nesses contextos e foram fornecidas discussões abrangentes sobre propriedades do espectro quase-normal deles e das quase-ressonâncias (seção 6.1). Também foram estudadas as caudas de tempo tardio para o campo vetorial massivo no contexto de Schwarzschild e encontrado que assintoticamente a lei de decaimento de tempo tardio não depende do spin do campo massivo (seção 6.5).

- Foram achados modos quase-normais e caudas das perturbações gravitacionais de cordas negras. Também foi considerado o desenvolvimento da instabilidade de uma corda negra de ondas de comprimento longo no domínio de tempo (seção 6.4).

- Foi estudada a influência da quebra da simetria Lorentz local dentro da teoria Einstein-Aéther no espectro quase-normal do buraco negro de Schwarzschild. Foi achado que a presença do aéter aumenta o valor absoluto das partes real e imaginária da frequência quase-normal fundamental (seção 7.3).

- Foi proposta uma possibilidade da observação do análogo acústico do buraco negro de Schwarzschild em um bocal de Laval. Foram achadas as formas particulares dos bocais de Laval para os quais os potenciais efetivos coincidirão com os potenciais efetivos para campos de teste ou perturbações gravitacionais do buraco negro de Schwarzschild (capítulo 8).

- Foram desenvolvidos dois novos instrumentos numéricos:

- 1) a generalização da melhora de Nollert do método de Frobenius para problemas em dimensões mais altas, que fornece uma melhor convergência do procedimento numérico (seção 3.4).

- 2) o método do cálculo das frequências quase-normais de um buraco negro, cuja métrica não é conhecida analiticamente, mas pode ser achada como uma solução numérica de um conjunto de equações diferenciais (seção 7.1).

Todos os resultados apresentados aqui foram obtidos por nós pela primeira vez, e são, por meio disso, novos.

Referências Bibliográficas

- [1] E. E. Flanagan, (1997), [gr-qc/9804024].
- [2] P. Anninos, D. Hobill, E. Seidel, L. Smarr, and W.-M. Suen, Phys. Rev. Lett. **71**, 2851 (1993).
- [3] C. V. Vishveshwara, Nature **227**, 936 (1970).
- [4] C. Eling, T. Jacobson, and D. Mattingly, (2004), [gr-qc/0410001].
- [5] R. Emparan and H. S. Reall, Living Rev. Rel. **11**, 6 (2008), [0801.3471].
- [6] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998), [hep-th/9711200].
- [7] G. T. Horowitz and V. E. Hubeny, Phys. Rev. **D62**, 024027 (2000), [hep-th/9909056].
- [8] G. Policastro, D. T. Son, and A. O. Starinets, JHEP **09**, 043 (2002), [hep-th/0205052].
- [9] A. Zhidenko, Class. Quant. Grav. **21**, 273 (2004), [gr-qc/0307012].
- [10] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, JHEP **06**, 037 (2004), [hep-th/0402080].
- [11] K. H. C. Castello-Branco, R. A. Konoplya, and A. Zhidenko, Phys. Rev. **D71**, 047502 (2005), [hep-th/0411055].
- [12] R. A. Konoplya and A. V. Zhidenko, Phys. Lett. **B609**, 377 (2005), [gr-qc/0411059].
- [13] A. Zhidenko, Class. Quant. Grav. **23**, 3155 (2006), [gr-qc/0510039].
- [14] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Phys. Rev. **D73**, 124040 (2006), [gr-qc/0605013].
- [15] R. A. Konoplya, C. Molina, and A. Zhidenko, Phys. Rev. **D75**, 084004 (2007), [gr-qc/0602047].
- [16] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Phys. Lett. **B644**, 186 (2007), [gr-qc/0605082].
- [17] P. Kanti, R. A. Konoplya, and A. Zhidenko, Phys. Rev. **D74**, 064008 (2006), [gr-qc/0607048].
- [18] A. Zhidenko, Phys. Rev. **D74**, 064017 (2006), [gr-qc/0607133].
- [19] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Phys. Lett. **B648**, 236 (2007), [hep-th/0611226].
- [20] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Nucl. Phys. **B777**, 182 (2007), [hep-th/0703231].
- [21] E. Abdalla, R. A. Konoplya, and A. Zhidenko, Class. Quant. Grav. **24**, 5901 (2007), [0706.2489].
- [22] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Phys. Rev. **D76**, 084018 (2007), [0707.1890].

- [23] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, Phys. Rev. **D77**, 104004 (2008), [0802.0267].
- [24] H. Ishihara *et al.*, Phys. Rev. **D77**, 084019 (2008), [0802.0655].
- [25] A. Zhidenko, Phys. Rev. **D78**, 024007 (2008), [0802.2262].
- [26] R. A. Konoplya, K. Murata, J. Soda, and A. Zhidenko, Phys. Rev. **D78**, 084012 (2008), [0807.1897].
- [27] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, (2008), [0809.2822].
- [28] A. Zhidenko, (2007), [0705.2254].
- [29] D. R. Brill and J. A. Wheeler, Rev. Mod. Phys. **29**, 465 (1957).
- [30] F. Mellor and I. Moss, Phys. Rev. **D41**, 403 (1990).
- [31] T. Regge and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957).
- [32] H. Kodama and A. Ishibashi, Prog. Theor. Phys. **110**, 701 (2003), [hep-th/0305147].
- [33] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford University Press, New York, 1983).
- [34] H.-P. Nollert, Class. Quant. Grav. **16**, R159 (1999).
- [35] C. Gundlach, R. H. Price, and J. Pullin, Phys. Rev. **D49**, 883 (1994), [gr-qc/9307009].
- [36] P. R. Brady, C. M. Chambers, W. Krivan, and P. Laguna, Phys. Rev. **D55**, 7538 (1997), [gr-qc/9611056].
- [37] P. R. Brady, C. M. Chambers, W. G. Laarakkers, and E. Poisson, Phys. Rev. **D60**, 064003 (1999), [gr-qc/9902010].
- [38] P. K. Kovtun and A. O. Starinets, Phys. Rev. **D72**, 086009 (2005), [hep-th/0506184].
- [39] H. Kodama and A. Ishibashi, (2003), [gr-qc/0312012].
- [40] E. Berti, V. Cardoso, J. A. Gonzalez, and U. Sperhake, Phys. Rev. **D75**, 124017 (2007), [gr-qc/0701086].
- [41] E. Abdalla and D. Giugno, Braz. J. Phys. **37**, 450 (2007), [gr-qc/0611023].
- [42] H.-J. Blome and B. Mashhoon, Phys. Lett. A **100**, 231 (1984).
- [43] V. Ferrari and B. Mashhoon, Phys. Rev. Lett. **52**, 1361 (1984).
- [44] G. Pöschl and E. Teller, Z. Phys. **83**, 143 (1933).
- [45] V. Cardoso and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. **D67**, 084020 (2003), [gr-qc/0301078].
- [46] C. Molina, Phys. Rev. **D68**, 064007 (2003), [gr-qc/0304053].
- [47] B. Schutz and C. Will, Astrophys. J. Lett. **291**, L33 (1985).
- [48] S. Iyer and C. M. Will, Phys. Rev. D **35**, 3621 (1987).

- [49] R. A. Konoplya, Phys. Rev. **D68**, 024018 (2003), [gr-qc/0303052].
- [50] R. A. Konoplya, Phys. Rev. **D68**, 124017 (2003), [hep-th/0309030].
- [51] R. A. Konoplya, J. Phys. Stud. **8**, 93 (2004).
- [52] N. Froeman, P. O. Froeman, N. Andersson, and A. Hoekback, Phys. Rev. **D45**, 2609 (1992).
- [53] E. W. Leaver, Proc. Roy. Soc. Lond. **A402**, 285 (1985).
- [54] H.-P. Nollert, Phys. Rev. D **47**, 5253 (1993).
- [55] A. Rostworowski, Acta Phys. Polon. **B38**, 81 (2007), [gr-qc/0606110].
- [56] H. Suzuki, E. Takasugi, and H. Umetsu, Prog. Theor. Phys. **100**, 491 (1998), [gr-qc/9805064].
- [57] A. Ohashi and M.-a. Sakagami, Class. Quant. Grav. **21**, 3973 (2004), [gr-qc/0407009].
- [58] H. Kodama and A. Ishibashi, Prog. Theor. Phys. **111**, 29 (2004), [hep-th/0308128].
- [59] A. Ishibashi and H. Kodama, Prog. Theor. Phys. **110**, 901 (2003), [hep-th/0305185].
- [60] K. D. Kokkotas and B. G. Schmidt, Living Rev. Rel. **2**, 2 (1999), [gr-qc/9909058].
- [61] S. Hod, Phys. Rev. Lett. **81**, 4293 (1998).
- [62] J. F. Barbero G., Phys. Rev. **D51**, 5507 (1995), [gr-qc/9410014].
- [63] G. Immirzi, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **57**, 65 (1997), [gr-qc/9701052].
- [64] L. Motl, Adv. Theor. Math. Phys. **6**, 1135 (2003), [gr-qc/0212096].
- [65] J.-l. Jing, Phys. Rev. **D71**, 124006 (2005), [gr-qc/0502023].
- [66] V. Cardoso, J. Natario, and R. Schiappa, J. Math. Phys. **45**, 4698 (2004), [hep-th/0403132].
- [67] S. Hod and T. Piran, Phys. Rev. **D58**, 024017 (1998), [gr-qc/9712041].
- [68] S. Hod and T. Piran, Phys. Rev. **D58**, 024018 (1998), [gr-qc/9801001].
- [69] R. A. Konoplya, Phys. Rev. **D66**, 084007 (2002), [gr-qc/0207028].
- [70] R. A. Konoplya, Phys. Lett. **B550**, 117 (2002), [gr-qc/0210105].
- [71] W. Zhou and J.-Y. Zhu, Int. J. Mod. Phys. **D13**, 1105 (2004), [gr-qc/0309071].
- [72] J. Jing, Phys. Rev. **D72**, 027501 (2005), [gr-qc/0408090].
- [73] X. He and J. Jing, Nucl. Phys. **B755**, 313 (2006), [gr-qc/0611003].
- [74] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263 (1998), [hep-ph/9803315].
- [75] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Rev. **D59**, 086004 (1999), [hep-ph/9807344].

- [76] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, and G. R. Dvali, Phys. Lett. **B436**, 257 (1998), [hep-ph/9804398].
- [77] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999), [hep-ph/9905221].
- [78] L. Randall and R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999), [hep-th/9906064].
- [79] E. Abdalla, B. Cuadros-Melgar, A. B. Pavan, and C. Molina, Nucl. Phys. **B752**, 40 (2006), [gr-qc/0604033].
- [80] D. Cremades, L. E. Ibanez, and F. Marchesano, Nucl. Phys. **B643**, 93 (2002), [hep-th/0205074].
- [81] C. Kokorelis, Nucl. Phys. **B677**, 115 (2004), [hep-th/0207234].
- [82] P. C. Argyres, S. Dimopoulos, and J. March-Russell, Phys. Lett. **B441**, 96 (1998), [hep-th/9808138].
- [83] T. Banks and W. Fischler, (1999), [hep-th/9906038].
- [84] S. B. Giddings and S. D. Thomas, Phys. Rev. **D65**, 056010 (2002), [hep-ph/0106219].
- [85] S. Dimopoulos and G. L. Landsberg, Phys. Rev. Lett. **87**, 161602 (2001), [hep-ph/0106295].
- [86] F. R. Tangherlini, Nuovo Cim. **27**, 636 (1963).
- [87] D. G. Boulware and S. Deser, Phys. Rev. Lett. **55**, 2656 (1985).
- [88] R. Konoplya, Phys. Rev. **D71**, 024038 (2005), [hep-th/0410057].
- [89] E. Abdalla, R. A. Konoplya, and C. Molina, Phys. Rev. **D72**, 084006 (2005), [hep-th/0507100].
- [90] G. Dotti and R. J. Gleiser, Phys. Rev. **D72**, 044018 (2005), [gr-qc/0503117].
- [91] R. J. Gleiser and G. Dotti, Phys. Rev. **D72**, 124002 (2005), [gr-qc/0510069].
- [92] M. Beroiz, G. Dotti, and R. J. Gleiser, Phys. Rev. **D76**, 024012 (2007), [hep-th/0703074].
- [93] P. Kanti and J. March-Russell, Phys. Rev. **D66**, 024023 (2002), [hep-ph/0203223].
- [94] P. Kanti and J. March-Russell, Phys. Rev. **D67**, 104019 (2003), [hep-ph/0212199].
- [95] P. Kanti and R. A. Konoplya, Phys. Rev. **D73**, 044002 (2006), [hep-th/0512257].
- [96] P. Kanti, Int. J. Mod. Phys. **A19**, 4899 (2004), [hep-ph/0402168].
- [97] R. C. Myers and M. J. Perry, Ann. Phys. **172**, 304 (1986).
- [98] V. S. Rychkov, Phys. Rev. **D70**, 044003 (2004), [hep-ph/0401116].
- [99] H. Ishihara and J. Soda, Phys. Rev. **D76**, 064022 (2007), [hep-th/0702180].
- [100] M. Kimura, K. Murata, H. Ishihara, and J. Soda, Phys. Rev. **D77**, 064015 (2008), [arXiv:0712.4202 [hep-th]].
- [101] S. Hod and T. Piran, Phys. Rev. **D58**, 044018 (1998), [gr-qc/9801059].

- [102] R. A. Konoplya and R. D. B. Fontana, Phys. Lett. **B659**, 375 (2008), [0707.1156].
- [103] L. E. Simone and C. M. Will, Class. Quant. Grav. **9**, 963 (1992).
- [104] H. T. Cho, Phys. Rev. **D68**, 024003 (2003), [gr-qc/0303078].
- [105] R. A. Konoplya, Phys. Rev. **D73**, 024009 (2006), [gr-qc/0509026].
- [106] H. R. Beyer, Commun. Math. Phys. **221**, 659 (2001), [astro-ph/0008236].
- [107] R. Gregory and R. Laflamme, Phys. Rev. Lett. **70**, 2837 (1993), [hep-th/9301052].
- [108] R. Gregory and R. Laflamme, Nucl. Phys. **B428**, 399 (1994), [hep-th/9404071].
- [109] J. L. Hovdebo and R. C. Myers, Phys. Rev. **D73**, 084013 (2006), [hep-th/0601079].
- [110] R. H. Price, Phys. Rev. **D5**, 2419 (1972).
- [111] R. H. Price, Phys. Rev. **D5**, 2439 (1972).
- [112] J. Bičák, Gen. Relativ. Gravit. **3**, 331 (1972).
- [113] V. Cardoso, S. Yoshida, O. J. C. Dias, and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. **D68**, 061503 (2003), [hep-th/0307122].
- [114] P. Bizon, T. Chmaj, and A. Rostworowski, Phys. Rev. **D76**, 124035 (2007), [0708.1769].
- [115] P. Bizon, T. Chmaj, and A. Rostworowski, (2008), [0812.4333].
- [116] H. Koyama and A. Tomimatsu, Phys. Rev. **D64**, 044014 (2001), [gr-qc/0103086].
- [117] H. Koyama and A. Tomimatsu, Phys. Rev. **D65**, 084031 (2002), [gr-qc/0112075].
- [118] R. Moderski and M. Rogatko, Phys. Rev. **D64**, 044024 (2001), [gr-qc/0105056].
- [119] L. M. Burko and G. Khanna, Phys. Rev. **D70**, 044018 (2004), [gr-qc/0403018].
- [120] R. Moderski and M. Rogatko, Phys. Rev. **D72**, 044027 (2005), [hep-th/0508175].
- [121] J. D. Bekenstein, Ann. Phys. **82**, 535 (1974).
- [122] E. Winstanley, Found. Phys. **33**, 111 (2003), [gr-qc/0205092].
- [123] E. Winstanley, Class. Quant. Grav. **22**, 2233 (2005), [gr-qc/0501096].
- [124] E. Radu and E. Winstanley, Phys. Rev. **D72**, 024017 (2005), [gr-qc/0503095].
- [125] V. Cardoso, R. Konoplya, and J. P. S. Lemos, Phys. Rev. **D68**, 044024 (2003), [gr-qc/0305037].
- [126] C. Eling and T. Jacobson, Class. Quant. Grav. **23**, 5625 (2006), [gr-qc/0603058].
- [127] C. Eling and T. Jacobson, Class. Quant. Grav. **23**, 5643 (2006), [gr-qc/0604088].
- [128] W. G. Unruh, Phys. Rev. Lett. **46**, 1351 (1981).

- [129] W. G. Unruh, Phys. Rev. **D51**, 2827 (1995).
- [130] C. Barcelo, S. Liberati, and M. Visser, Living Rev. Rel. **8**, 12 (2005), [gr-qc/0505065].
- [131] S. Okuzumi and M.-a. Sakagami, Phys. Rev. **D76**, 084027 (2007), [gr-qc/0703070].