

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

**Estrutura dos Estados Exóticos do
Charmônio Utilizando as Regras de Soma
da QCD**

Stefano Ivo Finazzo

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Orientadora: Profa. Dra. Marina Nielsen

Comissão examinadora:

Profa. Dra. Marina Nielsen (USP)

Prof. Dr. Renato Higa (USP)

Prof. Dr. Ricardo D'Elia Matheus (UNESP)

São Paulo

2012

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Finazzo, Stefano Ivo

Estrutura dos Estados Exóticos do Charmônio
Utilizando
as Regras de Soma da QCD. São Paulo, 2012.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Depto. Física Experimental.

Orientador: Profa. Dra. Marina Nielsen

Área de Concentração: Física.

Unitermos: 1. Cromodinâmica Quântica; 2. Física de Partículas; 3. Física Nuclear; 4. Física de Alta Energia.

USP/IF/SBI-005/2012

Agradecimentos

Aos meus pais - pelo apoio dado durante todos esses anos.

Ao Pinho - pelos livros de Física e Matemática que me fizeram ganhar curiosidade por essa coisa toda.

A Marina Nielsen - pela orientação enérgica e objetiva, e ao mesmo tempo muito bem humorada.

Ao pessoal do GRHAFITE: Jorgivan, David, Ricardo, Jorge, Raphael, André, Bruno, Paulo, Anderson e todos outros - pelas discussões sobre física e outros assuntos (aleatórios ou não).

Ao pessoal dos outros cantos do IF - Pascholati, Viktor, Nayara, LM, Talles, Eliane, Leandro - e à garota do tempo do IAG, Lívia - pela amizade e pelos papos jogados fora.

A Anabell, Eva, Guida, Nina, Serena, Laila, Francesca e Duda - pelo apoio canino.

Aos srs. F. Zappa, J. Hendrix, B. Dickinson, J. Brown, F. Kuti, G. Clinton, J. Morrison, F. Mercury e I. Kilmister; às sras. S. Simons, Y. Kajiura, Y. Kanno, G. Slick e E. Evans; e aos demais srs. e sras. cujos nomes não passaram na minha cabeça no momento - pela companhia musical diária nos Jaçanãs da vida.

Ao FSM (Flying Spaghetti Monster) - *for touching me with his noodly appendage.* (R)Amen e carbo diem!

Ao CNPq (de Março de 2010 a Julho de 2010) e a Fapesp (de Agosto de 2010 a Janeiro de 2012 - Processo 02320-4/2010) - pelo apoio financeiro.

We live on an island surrounded by a sea of ignorance. As our island of knowledge grows, so does the shore of our ignorance.

John Archibald Wheeler

Anyone who believes that the laws of physics are mere social conventions is invited to try transgressing those conventions from the windows of my apartment (I live on the twenty-first floor).

Alan Sokal

Resumo

Recentemente, a colaboração CDF encontrou evidência para uma nova ressonância do tipo do charmônio no espectro de massa invariante do decaimento $B^\pm \rightarrow K^\pm J/\psi \phi$. Esta ressonância tem uma massa de $4274.4_{-6.7}^{+8.4} (estat) \pm 1.9 (sist)$ MeV - recebendo, portanto, o nome de Y(4274) - e largura total de decaimento de $32.3_{-15.3}^{+21.9} (estat) \pm 7.6 (sist)$ MeV. A significância estatística para esta estrutura é cerca de 3.1σ . Usando as regras de soma da QCD e um modelo molecular similar a um modelo proposto anteriormente para explicar a estrutura das ressonâncias Y(3930) e Y(4140), estudamos o Y(4274) como a molécula hadrônica $D_{s0} \bar{D}_s + h.c.$ com $J^{PC} = 0^{-+}$, e seu possível parceiro molecular, a molécula $D_0 \bar{D} + h.c.$. Obtivemos que $m_{D_{s0} \bar{D}_s} = (4.78 \pm 0.54)$ GeV, um resultado compatível, dentro da estimativa do erro, com a massa do Y(4274). Para seu parceiro molecular, temos que $m_{D_0 \bar{D}} = (4.55 \pm 0.49)$ GeV. Os estados moleculares análogos do tipo do botomônio, $B_{s0} \bar{B}_s + h.c.$ e $B_0 \bar{B} + h.c.$, também foram estudados.

Abstract

Recently, the CDF collaboration found evidence for a new charmonium-like resonance on the $B^\pm \rightarrow K^\pm J/\psi \phi$ invariant mass spectrum. This resonance has a mass of $4274.4_{-6.7}^{+8.4} (stat) \pm 1.9 (syst)$ MeV - thus being named the Y(4274) resonance - and total decay width of $32.3_{-15.3}^{+21.9} (stat) \pm 7.6 (syst)$ MeV. The statistical significance of this structure is approximately 3.1σ . Using the QCD sum rules and a molecular model similar to a model previously proposed to explain the structure of the Y(3930) and Y(4140) resonances, we studied the Y(4274) as the hadronic molecule $D_{s0} \bar{D}_s + h.c.$ with $J^{PC} = 0^{-+}$ and its molecular partner, the molecule $D_0 \bar{D} + h.c.$. We obtained that $m_{D_{s0} \bar{D}_s} = (4.78 \pm 0.54)$ GeV, a result that is compatible, within the error estimates, with the mass of Y(4274). For its molecular partner, we have that $m_{D_0 \bar{D}} = (4.55 \pm 0.49)$ GeV. The analogous bottomonium-like molecular states, $B_{s0} \bar{B}_s + h.c.$ e $B_0 \bar{B} + h.c.$, were also studied.

Sumário

1	Introdução	p. 1
1.1	Espectroscopia do Charmônio e Estados Exóticos	p. 1
1.2	Estados $Y(3930)$, $Y(4140)$ e $Y(4274)$ - Evidências Experimentais	p. 3
1.2.1	$Y(3930)$	p. 3
1.2.2	$Y(4140)$	p. 4
1.2.3	$Y(4274)$	p. 4
1.3	Modelos Moleculares	p. 5
1.3.1	$Y(3930)$ e $Y(4140)$	p. 5
1.3.2	$Y(4274)$	p. 6
1.4	As Regras de Soma da QCD	p. 7
1.5	Objetivos	p. 8
2	As regras de soma da QCD	p. 9
2.1	Motivação	p. 9
2.2	O princípio da dualidade quark-hádron - Visão geral	p. 9
2.3	Funções de correlação e o princípio da dualidade	p. 10
2.4	A função de correlação no lado da OPE	p. 11
2.4.1	Teorema de Wick	p. 12
2.4.2	O propagador não-perturbativo	p. 13
2.4.2.1	Gauge do ponto fixo	p. 14
2.4.2.2	Contribuições perturbativas	p. 14
2.4.2.3	Contribuições não-perturbativas	p. 18

2.4.2.4	Contribuições não-fatorizáveis	p. 21
2.4.2.5	Representação diagramática e outras considerações	p. 23
2.5	O lado fenomenológico	p. 24
2.5.1	A relação espectral	p. 24
2.5.2	A parametrização pólo+contínuo	p. 26
2.6	O princípio da dualidade quark-hádron	p. 26
2.6.1	A validade das regras de soma e a janela de Borel	p. 28
3	Cálculo do Lado da OPE	p. 30
3.1	Estudo das Correntes Interpolantes	p. 30
3.1.1	Paridade	p. 31
3.1.2	Conjugação de Carga	p. 31
3.2	Aplicação do Teorema de Wick	p. 32
3.3	Substituição do Propagador Não-perturbativo	p. 34
3.4	Exemplo de cálculo de diagramas	p. 35
3.5	Resultados para as densidades espectrais no lado da OPE	p. 37
3.5.1	O caso da molécula $D_0\bar{D}+h.c.$ e das moléculas do tipo do botomônio	p. 41
3.5.2	Hipótese de fatorização	p. 41
4	As regras de soma para as correntes moleculares	p. 43
4.1	As regras de soma	p. 43
4.2	Parâmetros utilizados	p. 44
4.3	Molécula $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$	p. 45
4.3.1	Convergência da OPE	p. 45
4.3.2	Estabelecendo a Janela de Borel	p. 46
4.3.3	Cálculo da Massa	p. 49
4.4	Molécula $D_0\bar{D} + h.c.$	p. 51

4.4.1	Convergência da OPE e Janela de Borel	p. 51
4.4.2	Cálculo da Massa	p. 52
4.5	Molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$	p. 55
4.6	Molécula $B_0\bar{B} + h.c.$	p. 58
4.7	Discussão	p. 58
5	Conclusões	p. 62
	Apêndice A – Convenções, Notação e Fórmulas Úteis	p. 63
A.1	Métrica	p. 63
A.2	Algebra de Dirac	p. 63
A.3	Traços de Matrizes de Dirac	p. 65
A.4	Geradores de SU(3)	p. 65
A.5	Identidade Útil	p. 66
	Apêndice B – O Propagador Não-perturbativo	p. 67
B.1	Propagador não-perturbativo para quarks leves	p. 67
B.2	Propagador não-perturbativo para quarks pesados	p. 68
	Apêndice C – Transformada de Borel	p. 69
	Apêndice D – Cálculo das Integrais	p. 71
D.1	Integrais no Espaço dos Momentos	p. 71
D.2	Integrais no Espaço de Configurações	p. 72
D.3	Integrais nas variáveis gregas	p. 74
D.4	Integrais em λ	p. 75
D.5	As Integrais Gerais	p. 77
D.6	Resumo das Integrais Gerais	p. 78
D.6.1	Integrais do tipo 1	p. 79

D.6.2	Integrais do tipo 2	p. 80
D.6.3	Integrais do tipo 3	p. 81
D.6.4	Integrais do tipo 4	p. 81
D.7	Exemplo de Uso das Integrais	p. 82

Lista de Figuras

1.1	Espectro do charmônio.	p. 2
1.2	Representações pictóricas de possíveis estruturas exóticas.	p. 3
1.3	Espectro de massa invariante do $B^\pm \rightarrow K^\pm J/\psi\phi$	p. 5
1.4	Espectro de massa invariante do $B \rightarrow J/\psi\omega K$ [21].	p. 7
2.1	Representação diagramática da função de correlação $\Pi(x)$	p. 11
2.2	Contribuição ao propagador perturbativo do diagrama da interação do quark q com um gluon externo.	p. 16
2.3	Representação diagramática do propagador não-perturbativo.	p. 23
3.1	Exemplo de diagrama.	p. 35
3.2	Diagramas perturbativos.	p. 36
3.3	Diagramas no lado da OPE	p. 42
4.1	Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.	p. 46
4.2	Estudo da convergência da OPE para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$	p. 47
4.3	Massa do estado $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$, considerando-se a OPE truncada em algumas dimensões.	p. 48
4.4	Contribuição relativa do pólo e do contínuo para a corrente $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$	p. 49
4.5	Massa do estado $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0	p. 50
4.6	Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.	p. 52
4.7	Estudo da convergência da OPE para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$	p. 53

4.8	Massa do estado $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0	p. 53
4.9	Contribuição relativa do polo e do contínuo para a corrente $D_0\bar{D} + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$	p. 54
4.10	Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 11.3 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.	p. 56
4.11	Estudo da convergência da OPE para a molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$	p. 56
4.12	Contribuição relativa do pólo e do contínuo para a corrente $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 11.3 \text{ GeV}$	p. 57
4.13	Massa do estado $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0	p. 57
4.14	Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $B_0\bar{B} + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 11.1 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.	p. 59
4.15	Estudo da convergência da OPE para a molécula $B_0\bar{B} + h.c.$	p. 60
4.16	Contribuição relativa do polo e do contínuo para a corrente $B_0\bar{B} + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 11.1 \text{ GeV}$	p. 60
4.17	Massa do estado $B_0\bar{B} + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0	p. 61

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros usados nas regras de soma.	p. 44
4.2	Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$	p. 49
4.3	Estimativas dos erros devido às variações dos parâmetros, para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$	p. 51
4.4	Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$	p. 54
4.5	Estimativas dos erros devido às variações dos parâmetros, para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$	p. 54
4.6	Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$	p. 59
4.7	Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $B_0\bar{B} + h.c.$	p. 59
4.8	Massas e acoplamentos obtidos - resultados finais.	p. 59

1 *Introdução*

Desde 2003 a espectroscopia de mésons pesados passou por uma renascença devido à descoberta do estado do tipo do charmônio $X(3872)$ pela Colaboração Belle [1]. Uma vez que a interpretação desta partícula, via modelos de potencial [2], como um estado excitado no espectro do charmônio é desfavorecida, abriu-se a possibilidade do $X(3872)$ ser um hádron exótico - um hádron cuja estrutura interna não é simplesmente a de um bárion (qqq) ou de um méson ($q\bar{q}$). Nos anos seguintes foram descobertas outras ressonâncias [3, 4] que, como o $X(3872)$, não admitiam explicações simples por modelos de potencial - sendo, portanto, possíveis candidatos a estados exóticos. A questão de qual é a estrutura destes novos estados é central para a compreensão da estrutura hadrônica e das interações fortes.

Neste trabalho estudamos um destes novos estados, o $Y(4274)$. A idéia básica é utilizar as regras de soma da QCD (QCDSR - *QCD Sum Rules*) [5] para analisar a viabilidade de uma estrutura molecular (uma estrutura exótica) para este estado.

Neste capítulo, após uma apresentação dos novos estados e das evidências experimentais para a ressonância $Y(4274)$, introduzimos o modelo molecular estudado e os objetivos deste trabalho. No capítulo 2 discutimos os fundamentos das regras de soma da QCD. Os detalhes do cálculo no lado da QCD, necessário para o uso das regras de soma, são expostos no capítulo 3. No capítulo 4 realizamos as regras de soma da QCD para o modelo utilizado e discutimos os resultados dos cálculos, relatando as principais conclusões no capítulo 5.

1.1 **Espectroscopia do Charmônio e Estados Exóticos**

Na Figura 1.1 é apresentado o espectro do charmônio [6], junto com os novos estados do tipo do charmônio descobertos após 2003. Estes novos estados possuem um conjunto de características que dificultam sua caracterização como sendo estados do charmônio.

Por exemplo, a maior parte destes novos estados está acima do limiar para decaimento em charme aberto (ou seja, em partículas com número de charme diferente de zero, como os mésons D , compostos por um quark c e um quark leve $q = u, d, s$), como indicado na Figura 1.1; contudo, decaimentos destes estados em charme aberto não foram observados. Alguns destes estados violam simetrias aproximadas para estados do charmônio, como o $X(3872)$, que apresenta forte violação da simetria de isospin [7].

Embora os modelos de potencial possam descrever isoladamente uma ou algumas das propriedades observadas desses novos estados, como números quânticos, massas ou larguras de decaimento, eles não conseguem descrever simultaneamente todas estas propriedades. Isto motiva a criação de modelos em que a estrutura destes estados não é somente a de um par $c\bar{c}$, ou seja, modelos em que estes estados são exóticos.

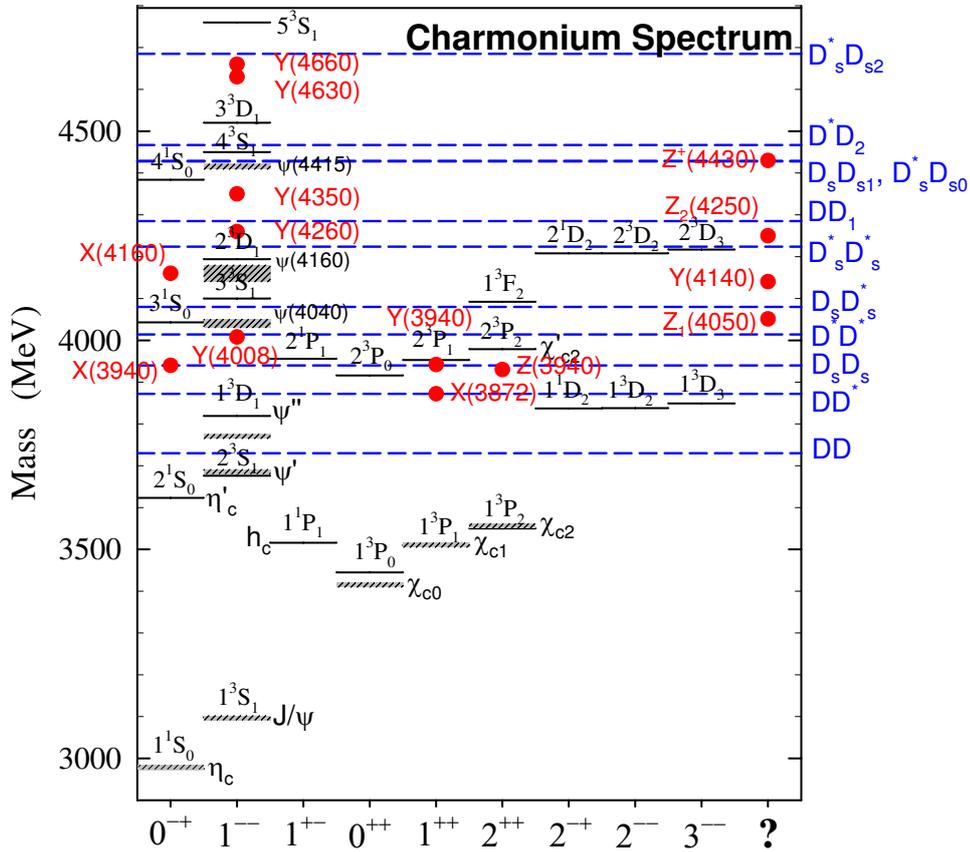


Figura 1.1: Espectro do charmônio [6]. As linhas cheias são previsões do modelo de potencial. As linhas tracejadas horizontais representam os limiares de decaimento em mésons D e os pontos indicam os novos estados descobertos após 2003, junto com possíveis atribuições de J^{PC} . A última coluna indica estados para os quais não há nenhum indício de quais são os prováveis números quânticos.

A idéia de estados exóticos não é recente ou exclusiva aos novos estados no espectro do charmônio: em 1976 Voloshin e Okun [8] propuseram a existência de moléculas hadrônicas

formadas por mésons D ; em 1977 Jaffe [9] propôs a existência de estados ligados de 4 quarks (tetraquarks) para explicar a estrutura dos mésons escalares leves.

Entre os modelos elaborados para explicar a estrutura destes novos estados do tipo do charmônio temos: modelos moleculares [10], que explicam os novos estados como estados ligados de dois mésons com charme aberto; tetraquarks [11], um estado ligado e compacto de quatro quarks; hadrocharmônio [12], que seria uma configuração composta de um J/Ψ envolto numa nuvem de mésons leves; e estados híbridos [13], que seriam estados $c\bar{c}$ em que o campo de gluons se encontra num estado excitado. Uma representação pictórica destes modelos está na Figura 1.2.

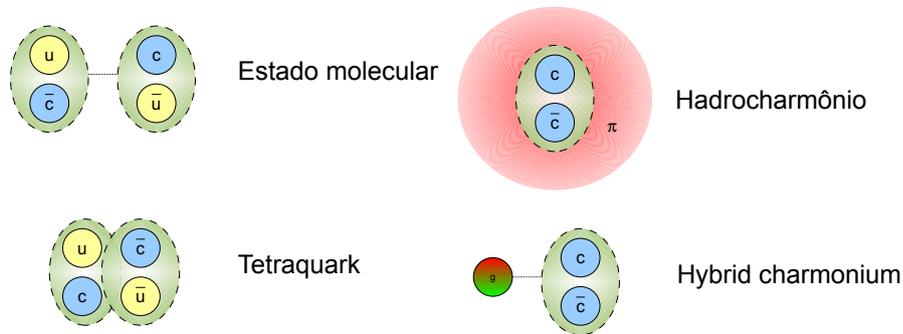


Figura 1.2: Representações pictóricas de possíveis estruturas exóticas.

1.2 Estados $Y(3930), Y(4140)$ e $Y(4274)$ - Evidências Experimentais

Nesta seção apresentaremos os resultados experimentais para três dos novos estados do tipo do charmônio. O que estes três estados possuem em comum é o fato deles aparecerem no decaimento do méson B em $J/\Psi K A$, onde A é um méson vetorial (no caso, $A = \phi, \omega$). Além disso, as informações disponíveis sugerem estruturas moleculares muito semelhantes para estes estados, como explicado com mais detalhes na próxima seção.

1.2.1 $Y(3930)$

Em 2005, ao estudar o decaimento $B \rightarrow K\omega J/\psi$, a colaboração Belle observou um pico no espectro de massa invariante $J/\psi\omega$ [14]. Interpretando este pico como sendo devido a uma ressonância, a colaboração Belle obteve, para os parâmetros da ressonância, a massa $m = (3943 \pm 11 \pm 13)$ MeV e a largura total de decaimento $\Gamma = (87 \pm 22(\text{estat}) \pm$

26(*sist*) MeV. Em 2008, a colaboração BaBar confirmou a observação desta ressonância [15], obtendo $m = (3914.6_{-3.4}^{+3.8}(\text{estat}) \pm 2.0(\text{sist}))$ MeV e $\Gamma = (34_{-8}^{+12}(\text{estat}) \pm 5(\text{sist}))$ MeV. O valor médio para a massa, (3929 ± 7) MeV, tornou este estado conhecido como $Y(3930)$.¹

O estado $Y(3930)$ está acima do limiar para decaimento em mésons com charme aberto (Figura 1.1), canais que deveriam contribuir com a maior parte de sua largura no caso em que $Y(3930)$ fosse um estado convencional do charmônio. O modo de decaimento observado, com charme oculto, $Y \rightarrow J/\psi\omega$, deveria possuir uma razão de decaimento pequena, não sendo o canal principal de decaimento do $Y(3930)$. Contudo, a largura total estreita do $Y(3930)$ e a falta de observações do decaimento do $Y(3930)$ em charme aberto desfavorecem a interpretação do $Y(3930)$ como um estado convencional do charmônio.

1.2.2 $Y(4140)$

O estado $Y(4140)$ foi descoberto pela colaboração CDF [16] no decaimento $B^+ \rightarrow K^+ J/\psi\phi$, através da observação de um pico no espectro de massa invariante do $J/\psi\phi$. A massa desta ressonância obtida nesta primeira observação, $(4143.0 \pm 2.9(\text{estat}) \pm 1.2(\text{sist}))$ MeV deu origem ao nome $Y(4140)$. Em 2010 a colaboração CDF, em busca de confirmação para o estado $Y(4140)$, estudou, com mais estatística, os canais $B^\pm \rightarrow K^\pm J/\psi\phi$ [17, 18]. A existência do $Y(4140)$ foi verificada com mais de 5σ de confiança. Obteve-se a massa $4143.0_{-3.0}^{+2.9}(\text{estat}) \pm 2.5(\text{sist})$ MeV e a largura de decaimento total $(15.3_{-6.1}^{+10.4}(\text{estat}) \pm 2.5(\text{sist}))$ MeV.

Pelos mesmos argumentos já utilizados para o $Y(3930)$, uma interpretação do $Y(4140)$ como um estado convencional do charmônio é desfavorecida.

1.2.3 $Y(4274)$

Nos novos estudos dos canais $B^\pm \rightarrow K^\pm J/\psi\phi$ realizados pelo CDF [17, 18], além de confirmada a existência do $Y(4140)$, foram encontradas evidências para a existência de uma nova ressonância com 3.1σ de significância estatística (Figura 1.3). A massa determinada para esta nova ressonância foi $(4274.4_{-6.7}^{+8.4}(\text{estat}) \pm 1.9(\text{sist}))$ MeV, com largura total de decaimento $(32.3_{-15.3}^{+21.9}(\text{estat}) \pm 7.6(\text{sist}))$ MeV. Devido à sua massa, esta possível ressonância foi batizada de $Y(4274)$. Da mesma forma que para os estados $Y(3930)$ e

¹Cabe notar que as massas obtidas pelas colaborações não são compatíveis, indicando que possivelmente temos duas ressonâncias, ao invés de uma. Contudo, as características das ressonâncias obtidas em cada um dos experimentos levam naturalmente à identificação de ambos picos como sendo devido a apenas uma ressonância - conferir [3, 4] para uma discussão.

$Y(4140)$, apesar de acima do threshold de decaimento em charme aberto, este estado possui uma largura pequena, o que desfavorece uma interpretação deste estado como estado convencional do charmônio.

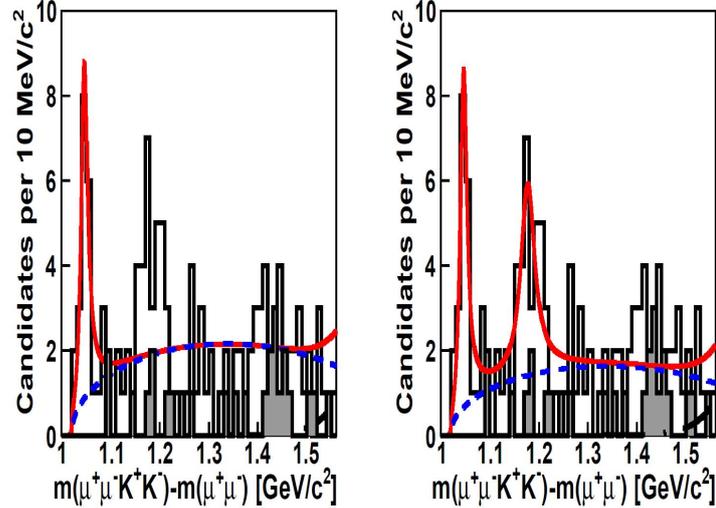


Figura 1.3: Histograma de diferença de massa ΔM entre $\mu^+\mu^-K^+K^-$ e $\mu^+\mu^-$ para eventos na janela de massa do B^\pm observado pelo CDF [18]. A figura à esquerda representa um ajuste considerando apenas a ressonância $Y(4140)$. A figura à direita considera um ajuste do $Y(4140)$ e uma segunda ressonância, nomeada de $Y(4274)$. A curva cheia é o resultado do ajuste. A curva tracejada é o background previsto.

1.3 Modelos Moleculares

Uma possível explicação para a estrutura dos estados $Y(3930)$, $Y(4140)$ e $Y(4274)$ é a de que estes estados sejam estados moleculares - esta explicação fornece um padrão comum para os três estados, além de prever a existência de um quarto estado, o parceiro molecular do $Y(4274)$.

1.3.1 $Y(3930)$ e $Y(4140)$

Começemos estudando o $Y(4140)$. Este estado decai pelo canal $Y \rightarrow J/\psi\phi$. Como temos dois mésons vetoriais com números quânticos $J^{PC} = 1^{--} 2$ como produtos da reação, e como a conjugação de carga é uma simetria da reação, temos que a C-paridade

²Notação: J é o momento angular total do estado, S é o momento angular intrínseco e L é o momento angular orbital do estado, P é a paridade e C a conjugação de carga (C-paridade). Onda S, P, D, ... significa $L = 0, 1, 2, \dots$. No capítulo 3 discutimos um pouco mais formalmente os números quânticos P e C .

do Y é positiva: $C = (-1)^{(-1)+(-1)} = +1$. Além disso, temos que, em onda S ($L = 0$), os valores possíveis de momento angular total J para o $Y(4140)$ são 0, 1 e 2, com paridade $P = (-1)(-1)(-1)^L = +1$. Como temos que $C = (-1)^{L+S} = (-1)^S$, e que $J = S$ em onda S, o estado com $J = 1$ em onda S leva a $C = -1$, o que é inconsistente com a atribuição anterior - isto implica que $J = 0, 2$. Logo, $J^{PC} = 0^{++}$ e 2^{++} são as atribuições possíveis de J^{PC} para o $Y(4140)$ em onda S. Em onda P ($L = 1$), podemos ter $J^{PC} = 1^{-+}$ - este conjunto de números quânticos é inconsistente com a estrutura $q\bar{q}$ de um méson e representa um conjunto de números quânticos exóticos. Portanto, assumindo o caso mais simples possível, $L = 0$ e o menor J possível, temos que os números quânticos do $Y(4140)$ são $J^{PC} = 0^{++}$. Uma análise análoga se aplica ao $Y(3930)$, que decai pelo canal $Y \rightarrow J/\psi\omega$.

Outro fato interessante é que os estados $Y(3930)$ e $Y(4140)$ estão próximos do limiar de produção de dois mésons D^* e D_s^* , respectivamente, sendo que $m_{Y(3930)} - 2m_{D^*} \approx m_{Y(4140)} - 2m_{D_s^*} \approx -90 \text{ MeV}^3$. Além disso, temos que $m_{Y(4140)} - m_{Y(3930)} \approx m_\phi - m_\omega \approx 200 \text{ MeV}$. Finalmente, considerando que $J^P = 1^-$ para os mésons D^* e D_s^* , um estado ligado de D^* e \bar{D}^* (ou D_s^* e \bar{D}_s^*) com $L = 0$ possui $J^{PC} = 0^{++}$. Com estas considerações em mente, Liu e Zhu [20] propuseram um modelo em que os estados $Y(3930)$ e $Y(4140)$ seriam parceiros moleculares. O estado $Y(3930)$ seria a molécula $D^*\bar{D}^*$ e o estado $Y(4140)$ seu parceiro molecular $D_s^*\bar{D}_s^*$, ambos estados com $J^{PC} = 0^{++}$. Ambos estados teriam aproximadamente a mesma energia de ligação $\sim 90 \text{ MeV}$ e a diferença entre suas massas seria devido a diferença de estrutura de sabor dos mésons D^* ($2m_s \sim 200 \text{ MeV}$).

1.3.2 $Y(4274)$

O estado $Y(4274)$ se encontra próximo do limiar de produção do par $D_{s0}(2317)\bar{D}_s + h.c.$,⁴ $m_{Y(4274)} - (m_{D_{s0}(2317)} + m_{D_s}) \approx -11 \text{ MeV}$. Tendo em conta este fato e também o canal em que este estado foi descoberto, $Y \rightarrow J/\psi\phi$, e com base nos modelos moleculares para o $Y(3930)$ e $Y(4140)$, teve origem a idéia [21] de que o $Y(4274)$ seria o estado molecular $D_{s0}(2317)\bar{D}_s + h.c.$ com $J^{PC} = 0^{-+}$. Uma previsão deste modelo é a existência do parceiro molecular $D_0(2400)\bar{D} + h.c.$ com $J^{PC} = 0^{-+}$, que poderia ser observado no canal $Y \rightarrow J/\psi\omega$ (Figura 1.4).

³Para referência, as massas dos mésons D [19]: $m_{D^{*0}} = 2007 \text{ MeV}$, $m_{D^{*\pm}} = 2010 \text{ MeV}$, $m_{D_s^{*\pm}} = 2112 \text{ MeV}$ e $m_{D_s^0} = 1968 \text{ MeV}$

⁴Notemos que os mésons $D_{s0}(2317)$ e $D_0(2400)$ tem $J^P = 0^-$ e que os mésons D_s e D tem $J^P = 0^+$. Na literatura, a nomenclatura para os mésons $D_{s0}(2317)$ e $D_0(2400)$ ainda não foi uniformizada. No PDG [19], o méson $D_{s0}(2317)$ é denominado $D_{s0}^*(2317)$ e o méson $D_0(2400)$ denominado $D_0^*(2400)$. Contudo, os primeiros nomes também são comuns. Neste trabalho adotamos o primeiro conjunto de nomes.

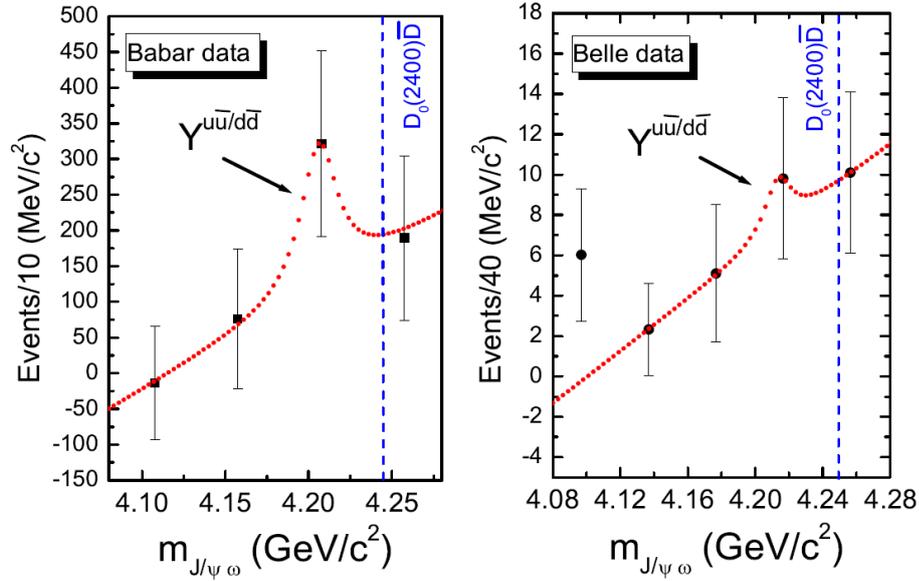


Figura 1.4: Espectro de massa invariante do $B \rightarrow J/\psi\omega K$ [21], observado pela colaboração Belle (esquerda) e pela colaboração BaBar (direita), apresentando um possível acúmulo na região de 4200 MeV, que, segundo os autores de [21], representaria uma possível evidência para o parceiro molecular de $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$, $D_0\bar{D} + h.c.$.

1.4 As Regras de Soma da QCD

A ferramenta padrão para cálculos em teorias quânticas de campo, a teoria de perturbações, revela-se pouco útil para se estudar o espectro hadrônico usando a QCD. Para altas energias, a liberdade assintótica da QCD é válida - os quarks são quase livres e a constante de acoplamento efetiva da QCD, $\alpha_s(Q^2)$, é pequena, de forma que a expansão perturbativa em termos da constante de acoplamento α_s é uma boa aproximação. Na escala hadrônica, a escala de energias e de momentos transferidos típica é da ordem de 1 GeV e estamos no regime do confinamento; como nesta escala $\alpha_s(Q^2)$ é da ordem de 1, a expansão perturbativa não é uma boa opção e deve-se procurar uma técnica não-perturbativa.

As regras de soma da QCD [5], cujos fundamentos serão explorados com mais detalhes no capítulo seguinte, consistem numa ferramenta útil, embora aproximada, para se realizar cálculos não-perturbativos. Fundamentada no princípio da dualidade quark-hádron - a equivalência aproximada entre uma descrição perturbativa de um hádron por meio dos graus de liberdade de quarks e gluons e uma descrição usando os graus de liberdade hadrônicos - ela permite calcular grandezas observáveis sobre os estados hadrônicos, como massas e larguras de decaimento. Informações não-perturbativas são incluídas na descrição perturbativa por meio do uso da OPE (Operator Product Expansion) de Wil-

son e da introdução dos condensados do vácuo. Devido às várias aproximações adotadas (como o próprio princípio da dualidade), as QCDSR possuem uma precisão intrinsecamente limitada; contudo, elas permitem um cálculo analítico de observáveis na escala hadrônica partindo-se de princípios básicos da QCD, sendo que as grandezas físicas são expressas em termos de parâmetros fundamentais da QCD, como massas dos quarks e condensados - esta é uma das principais vantagens das QCDSR.

Tendo em vista estas características, as QCDSR se tornaram uma ferramenta adequada para o estudo dos novos estados do tipo do charmônio [4].

1.5 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é realizar um estudo do estado $Y(4274)$ como uma molécula $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$, usando as regras de soma da QCD para calcular a massa desta molécula e verificar a viabilidade deste modelo molecular para descrever o $Y(4274)$. Um estudo completo da molécula parceira, $D_0\bar{D} + h.c.$ também é realizado. O cálculo é realizado considerando-se todos condensados até dimensão 10, supondo a hipótese de fatorização para os condensados de dimensão mais alta, e em primeira ordem na massa do quark estranho, m_s . São realizadas também predições, via QCDSR, das massas dos estados moleculares correspondentes compostos de mésons B, $B_{s0}\bar{B}_s + h.c.$ e $B_0\bar{B} + h.c.$ com $J^{PC} = 0^{-+}$.

2 *As regras de soma da QCD*

2.1 Motivação

A QCD fornece uma descrição satisfatória da física das interações fortes nas regiões de grandes momentos Q transferidos (ou, equivalentemente, de curtas distâncias), onde vale o regime de liberdade assintótica, os quarks são quase livres e os cálculos perturbativos confiáveis. Contudo, para o estudo da região de pequenos momentos transferidos (ou, equivalentemente, de grandes distâncias) entra-se no regime do confinamento, quando a constante de acoplamento efetiva $\alpha_s(Q^2)$ é grande (~ 1), dificultando o uso da teoria de perturbações. Como os hádrons são formados no regime do confinamento, é necessário partir para técnicas não-perturbativas para se estudar o espectro hadrônico.

Uma técnica que permite extrair informações não-perturbativas são as regras de soma da QCD [5, 22], que são utilizadas neste trabalho para se determinar as massas dos estados moleculares. Neste capítulo descreveremos os fundamentos das QCDSR, as aproximações realizadas e as limitações da técnica.

2.2 O princípio da dualidade quark-hádron - Visão geral

O princípio fundamental das regras de soma é o *princípio da dualidade quark-hádron*, que afirma que existe uma região intermediária em Q^2 em que a descrição de um hádron considerando os graus de liberdades de quarks e gluons como graus de liberdade fundamentais, por meio das técnicas perturbativas usuais (válidas para Q^2 grande, no regime da liberdade assintótica) suplementadas pela OPE (*Operator Product Expansion* - Expansão em Produto de Operadores) de Wilson [23], é equivalente a uma descrição do mesmo sistema considerando os hádrons como os graus de liberdade fundamentais. Por meio desta equivalência é possível extrair informações sobre os estados hadrônicos.

Contudo, esta dualidade é necessariamente aproximada [24]. Por um lado, na descrição via quarks e gluons, a OPE é uma expansão assintótica válida somente no regime perturbativo. Para descrever a física não-perturbativa a grandes distâncias, a OPE é estendida além de seu domínio de validade, além de ser, em cálculos práticos, necessariamente truncada. Por outro lado, na descrição por meio dos graus de liberdade hadrônicos somos levados a separar o estado fundamental dos demais estados excitados, utilizando uma descrição aproximada para estes últimos. Isto implica que as QCDSR possuem uma limitação de precisão intrínseca.

2.3 Funções de correlação e o princípio da dualidade

Para aplicar o princípio da dualidade, as QCDSR partem da *função de correlação* (também chamada de *correlator* ou *função de dois pontos*) definida por¹

$$\Pi(q) \equiv i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T [j(x) j^\dagger(0)] | 0 \rangle, \quad (2.1)$$

onde q é o 4-vetor momento total e $j(x)$ é a *corrente interpolante* construída a partir de campos de quarks (e/ou glúons, no caso de glueballs e estados híbridos). A corrente interpolante $j(x)$ é construída de forma a refletir a estrutura do hádron a ser estudado; por exemplo, $j(x)$ deve possuir o mesmo conteúdo de quarks e os mesmos números quânticos do hádron em questão. Neste trabalho necessitaremos apenas de correntes escalares. Contudo, as mesmas considerações, com as devidas alterações, se aplicam a correntes vetoriais ou espinoriais. No espaço de configurações temos que o correlator é dado por

$$\Pi(x) = i \langle 0 | T [j(x) j^\dagger(0)] | 0 \rangle. \quad (2.2)$$

Na Figura 2.1 apresentamos uma representação diagramática do correlator.

Uma forma de estudar a equação (2.1) é através de um cálculo perturbativo considerando os graus de liberdade de quarks e glúons usados na construção da corrente interpolante j , utilizando a OPE de Wilson para separar as contribuições perturbativas de curto alcance das contribuições não-perturbativas de longo alcance. Este cálculo é válido para momentos transferidos q^2 grandes, devido à liberdade assintótica da QCD - para q^2 pequeno a validade do cálculo perturbativo é posta em xeque. A função de dois pontos avaliada desta forma é chamada de *lado da OPE* ou *lado da QCD* e denotada Π^{OPE} .

¹As convenções para a métrica de Minkowski e para o sistema de unidades utilizado, além das identidades da álgebra de Dirac e do SU(3) usadas neste trabalho, podem ser encontradas no Apêndice A.

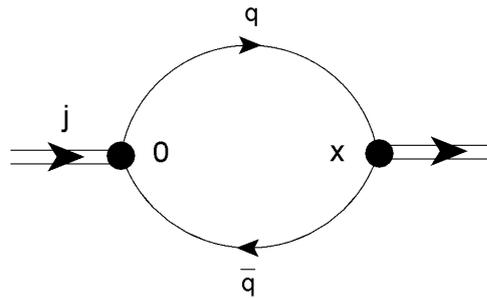


Figura 2.1: Representação diagramática da função de correlação $\Pi(x)$.

Outra forma de calcular (2.1) é estudar o sistema em questão considerando seus graus de liberdade hadrônicos - posto de outra forma, considera-se que o campo básico do sistema é dado pela própria corrente interpolante j e não pelos campos de quarks e glúons. Isto é realizado através do uso de um conjunto de completo de estados hadrônicos para j . A função de dois pontos calculada desta forma é chamada de *lado fenomenológico* e denotada Π^{fen} , devido ao fato de que não são considerados os graus de liberdades fundamentais do sistema (quarks e glúons) e também devido ao fato de que são introduzidos parâmetros (como a massa do estado fundamental e constantes de acoplamento) que não podem ser calculados através desta descrição. Esta é uma descrição adequada para um sistema hadrônico no regime do confinamento.

O princípio da dualidade quark-hádron consiste (na sua forma ingênua) assumir que $\Pi^{\text{OPE}}(q) = \Pi^{\text{fen}}(q)$ para alguma região em q^2 - ou seja, que é equivalente descrever o sistema através dos seus graus de liberdade hadrônicos ou através dos graus de liberdade fundamentais. Contudo, pelas razões que serão explicitadas nas seções seguintes, é mais interessante considerar a transformada de Borel do princípio da dualidade. Através desta equivalência, é possível extrair as informações sobre o hádron analisado calculando os parâmetros introduzidos no lado fenomenológico.

Antes de se aplicar o princípio da dualidade, é necessário entender como é realizado o cálculo no lado da OPE e no lado fenomenológico - este é o objetivo das próximas seções.

2.4 A função de correlação no lado da OPE

O princípio básico da OPE é a separação entre contribuições de curto e longo alcance no cálculo de produtos de operadores locais. Em outras palavras, a OPE consiste na

possibilidade de se poder escrever, para um produto de operadores \hat{A} e \hat{B} ,

$$i \int d^4x e^{iq \cdot x} T[\hat{A}(x)\hat{B}(0)] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(q) \hat{O}_n \quad (2.3)$$

onde $C_n(q)$ são coeficientes avaliados perturbativamente que descrevem a física de curto alcance, \hat{O}_n são operadores locais que descrevem a física não-perturbativa de longo alcance e n é a dimensão do operador. Esta equação é exata se tomada no contexto de teoria de perturbações (ou seja, q^2 grande); caso contrário, a equação (2.3) perde sua validade [25]. Contudo, existe a possibilidade de que, mesmo numa região de q na escala hadrônica, fora do regime de validade de (2.3), os primeiros termos da OPE sirvam como aproximação para o cálculo de $\Pi(q)$ - neste caso dizemos que a OPE “converge”. Esta extensão da OPE fora do regime perturbativo para o regime não-perturbativo é uma das aproximações utilizadas nas regras de soma.

2.4.1 Teorema de Wick

Para obter os coeficientes C_n e os operadores locais \hat{O}_n consideraremos, como um exemplo concreto, o caso de uma corrente escalar $j(x) = \bar{q}_a(x)q_a(x)$, onde $q(x)$ é um campo fermiônico de quarks e a é um índice de cor.

Primeiro consideremos o teorema de Wick [26] aplicado ao valor esperado no vácuo de um produto de dois campos fermiônicos,

$$\langle 0|T[q_a(x)\bar{q}_b(0)]|0\rangle = {}_p\langle 0|T[q_a(x)\bar{q}_b(0)]|0\rangle_p + \langle 0|[q_a(x)\bar{q}_b(0)]|0\rangle, \quad (2.4)$$

onde T indica o ordenamento temporal, $|0\rangle$ é o vácuo da teoria interagente, $|0\rangle_p$ é o vácuo perturbativo e $:\hat{O}:$ indica o ordenamento normal do operador \hat{O} . Se o vácuo da QCD $|0\rangle$ correspondesse ao vácuo perturbativo $|0\rangle_p$, o valor esperado no vácuo de qualquer operador ordenado normalmente seria nulo (com a exceção do operador identidade)². Considerando que a definição do propagador fermiônico é

$$S_{ab}(x) \equiv \langle 0|T[q_a(x)\bar{q}_b(0)]|0\rangle \quad (2.5)$$

temos, de (2.4), que

$$S_{ab}(x) = S_{ab}^p(x) + \langle 0|[q_a(x)\bar{q}_b(0)]|0\rangle, \quad (2.6)$$

²Numa teoria livre, o ordenamento normal consiste em posicionar todos operadores de aniquilação à direita dos operadores de criação. Segue imediatamente que ao calcular o valor esperado de um operador (diferente do operador identidade) ordenado normalmente um operador de aniquilação encontrará $|0\rangle_p$ ou um operador de criação encontrará ${}_p\langle 0|$, resultando num valor esperado nulo.

onde

$$S_{ab}^p(x) = {}_p\langle 0|T [q_a(x)\bar{q}_b(0)] |0\rangle_p \quad (2.7)$$

é o propagador perturbativo. O segundo termo de (2.6) concentra as informações não-perturbativas necessárias para se construir o propagador completo.

Estas considerações sugerem uma forma de se incluir as contribuições não-perturbativas no cálculo de (2.1) para a corrente escalar $j(x) = \bar{q}_a(x)q_a(x)$. Primeiro utilizamos o teorema de Wick para reescrever (2.1) em termos de $S_{ab}^p(x)$ e de $\langle 0| : [q_a(x)\bar{q}_b(0)] : |0\rangle$. Explicitando os índices de Dirac, temos que

$$\begin{aligned} \langle 0|T [j(x)j^\dagger(0)] |0\rangle &= \langle 0|T [(\bar{q}_{a,\alpha}(x)q_{a,\alpha}(x))(q_{b,\beta}(0)\bar{q}_{b,\beta}(0))] |0\rangle \\ &= S_{ab,\alpha\beta}^p(x)S_{ba,\beta\alpha}^p(-x) + \dots \\ &= \text{Tr} [S_{ab}^p(x)S_{ba}^p(-x)] + \dots, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde Tr indica o traço nos índices de Dirac e (\dots) indica os demais termos da expansão de Wick que não são completamente contraídos (ou seja, possuem fatores que são valores esperados no vácuo de operadores normalmente ordenados). Para levar em conta estes termos, usamos (2.6) para absorver os produtos normais nos propagadores livres; o resultado é que os propagadores a serem usados são os propagadores não-perturbativos. Em outras palavras, temos que a função de dois pontos é reescrita na forma

$$\langle 0|T [j(x)j^\dagger(0)] |0\rangle = \text{Tr} [S_{ab}(x)S_{ba}(-x)], \quad (2.9)$$

onde $S_{ab}(x)$ é o propagador não-perturbativo (2.6).

Para prosseguir, precisamos escrever a OPE para o propagador não-perturbativo (2.6).

2.4.2 O propagador não-perturbativo

Nesta seção detalhamos como é calculado o propagador de quarks não-perturbativo utilizado nas QCDSR. Para quarks leves (ou seja, $q = u, d, s$), trabalha-se no espaço das coordenadas, sendo feita uma expansão em potências da massa do quark, m_q . Para quarks pesados ($q = c, b$) é mais conveniente escrever o propagador não-perturbativo no espaço dos momentos.

2.4.2.1 Gauge do ponto fixo

Para realizar os cálculos, devemos fixar um gauge para os graus de liberdade gluônicos. No caso, o gauge escolhido é o gauge do ponto fixo (ou gauge de Fock-Schwinger), que introduziremos a seguir. O campo de gauge é dado por $A_\mu(x) \equiv A_\mu^B(x)t^B$, onde t^B , ($B = 1, 2, \dots, 8$), são os geradores da álgebra de Lie de SU(3) de cor³. O tensor de campo $G_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^B t^B$ é definido por

$$G_{\mu\nu}^B = \partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B + gf^{BCD}A_\mu^C A_\nu^D, \quad (2.10)$$

onde f^{BCD} são as constantes de estrutura do grupo SU(3) e g é a constante de acoplamento das interações fortes. O gauge do ponto fixo é dado pela escolha

$$x^\mu A_\mu = 0. \quad (2.11)$$

Este gauge possui duas vantagens. A primeira delas é que o potencial vetor A_μ pode ser expresso em termos diretamente em termos de $G_{\mu\nu}$ [27]

$$A_\mu^B(x) \approx -\frac{1}{2}G_{\mu\nu}^B(0)x^\nu. \quad (2.12)$$

A segunda vantagem é que, como será visto mais adiante (Seção 2.4.2.3), uma expansão do campo de quarks $q(x^\mu)$ em potências de x resulta numa expressão escrita em termos das derivadas covariantes ao invés de em termos das derivadas ordinárias.

2.4.2.2 Contribuições perturbativas

Propagador livre Vamos estudar o propagador perturbativo $S_{ab}^p(x)$. A primeira contribuição a $S_{ab}^p(x)$, de ordem zero em teoria de perturbações, corresponde ao propagador fermiônico livre. No espaço dos momentos temos que⁴

$$S_{ab}^{p0}(p) = \frac{i}{\not{p} - m_q + i\epsilon} \delta_{ab}. \quad (2.13)$$

Expandindo em série de Taylor em torno de $m_q = 0$ e retendo os termos lineares em m_q ,

$$S_{ab}^{p0}(p) = \frac{i}{\not{p}} \delta_{ab} + \frac{i m_q}{p^2} \delta_{ab} + O(m_q^2). \quad (2.14)$$

³As propriedades necessárias dos geradores de SU(3) se encontram no Apêndice A.

⁴No que segue, sempre que a estrutura analítica do propagador e a posição dos pólos não for relevante, omitiremos o termo $i\epsilon$ no propagador livre.

A seguir, fazemos uma transformada de Fourier para passar o propagador para o espaço das coordenadas

$$S_{ab}^{p0}(x) = i \frac{\delta_{ab}}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{\not{p} + m_q}{p^2}. \quad (2.15)$$

Para calcular as integrais, notamos primeiro que

$$\int d^4p \frac{\not{p}}{p^2} e^{ip \cdot x} = -i \gamma^\mu \partial_\mu \int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{1}{p^2} \quad (2.16)$$

Logo, é somente necessário calcular a integral do lado direito de (2.16). Isto é feito por meio de uma rotação de Wick para passar a integral do espaço de Minkowski para o espaço euclidiano; ou seja, faz-se a substituição $p_0 \rightarrow ip_{0E}$ na componente temporal de p ; isto resulta também nas transformações $p^2 \rightarrow -p_E^2$ e $p \cdot x \rightarrow -p_E \cdot x_E$. O índice E indica que se tratam de quadrivetores no espaço euclidiano. Também utilizamos a identidade⁵

$$\frac{1}{(p_E^2)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^n e^{-\alpha p_E^2}. \quad (2.17)$$

Com estas manipulações, obtemos

$$\int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{1}{p^2} = -i \int_0^\infty d\alpha \int d^4p_E e^{-ip_E \cdot x_E - \alpha p_E^2}. \quad (2.18)$$

Completando quadrados no expoente, resolvendo as integrais gaussianas em p e então a integral em α obtemos

$$\int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{1}{p^2} = \frac{4i\pi^2}{x^2}. \quad (2.19)$$

E, de (2.16),

$$\int d^4p e^{ip \cdot x} \frac{\not{p}}{p^2} = \frac{8\pi^2 \not{x}}{x^4}. \quad (2.20)$$

Finalmente, usando as equações (2.19) e (2.20) em (2.15) obtemos a contribuição do propagador livre no espaço das coordenadas,

$$S_{ab}^{p0}(x) = \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} \delta_{ab} - \frac{m_q}{4\pi x^2} \delta_{ab}. \quad (2.21)$$

Interação com um gluon externo A contribuição ao propagador perturbativo S_{ab}^p em primeira ordem de teoria de perturbações vem do diagrama de Feynman da interação do quark com um campo de gluons externo (Figura 2.2). A lagrangeana de interação quark-gluon é

$$\mathcal{L}_{int} = g \bar{q}_a \gamma^\mu A_\mu^B t_{ab}^B q_b \quad (2.22)$$

⁵Para verificar (2.17) basta integrar por partes o lado direito n vezes

A regra de Feynman correspondente ao vértice qqg (no espaço dos momentos) é, portanto, $ig_s\gamma^\mu t^B$; para os propagadores de quarks, usamos (2.13). Incluindo o campo externo $A_\mu(q)$ no espaço dos momentos, o diagrama da Figura 2.2 resulta na seguinte contribuição ao propagador perturbativo no espaço dos momentos:

$$S_{ab}^{p1}(p) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{p} - m_q} \right) (ig_s\gamma^\mu A_\mu^B(q)t_{ab}^B) \left(\frac{i}{(\not{p} + \not{q}) - m_q} \right). \quad (2.23)$$

A transformada de Fourier da relação (2.12), válida no gauge do ponto fixo, fornece

$$A_\mu^B(q) \approx \frac{i}{2}(2\pi)^4 G_{\mu\nu}^B(0) \frac{\partial}{\partial q_\nu} \delta^{(4)}(q). \quad (2.24)$$

Logo,

$$S_{ab}^{p1}(p) = g t_{ab}^B \left(\frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2} \right) \frac{1}{2} \gamma^\mu G_{\mu\nu}^B(0) \left[\frac{\partial}{\partial q_\nu} \frac{(\not{p} + \not{q}) + m_q}{(p+q)^2 - m_q^2} \right]_{q=0}. \quad (2.25)$$

Fazendo as derivadas indicadas em (2.25) obtemos

$$S_{ab}^{p1}(p) = \frac{g}{2} t_{ab}^B G_{\mu\nu}^B(0) \left(\frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2} \right) \left[\frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{p^2 - m_q^2} - 2\gamma^\mu p^\nu \frac{\not{p} + m_q}{(p^2 - m_q^2)^2} \right]. \quad (2.26)$$

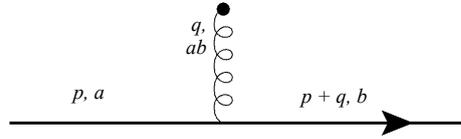


Figura 2.2: Contribuição ao propagador perturbativo do diagrama da interação do quark q com um glúon externo. Os momentos carregados pelo quark e pelo glúon, e os índices de cor correspondentes, estão indicados na figura.

É possível simplificar esta expressão [28, 29]. Para tanto, fazemos uso da identidade⁶

$$(\not{p} + m_q)\gamma^\mu p^\nu (\not{p} + m_q) = -\gamma^\mu p^\nu (p^2 - m_q^2) + 2p^\mu p^\nu (\not{p} + m_q), \quad (2.27)$$

e também da observação que $G_{\mu\nu}^B$ é anti-simétrico em μ, ν , o que implica que $G_{\mu\nu}^B p^\mu p^\nu = 0$.

Assim, obtemos que

$$S_{ab}^{p1}(p) = \frac{g}{2} t_{ab}^B G_{\mu\nu}^B(0) \frac{1}{(p^2 - m_q^2)^2} [(\not{p} + m_q)\gamma^\mu \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu]. \quad (2.28)$$

Novamente, como $G_{\mu\nu}^B$ é anti-simétrico em μ, ν , é necessário considerar apenas a parte anti-

⁶Para verificar (2.27), basta anti-comutar γ^μ e $\not{p} + m_q$ no lado esquerdo, obtendo imediatamente o lado direito. Igualmente, para verificar (2.30) basta, no lado esquerdo, anticomutar convenientemente \not{p} com as matrizes de Dirac.

simétrica no interior dos colchetes em (2.28). Podemos, então, fazer a seguinte substituição

$$\gamma^\mu p^\nu \rightarrow \frac{1}{2}(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu). \quad (2.29)$$

Usando a identidade

$$[\gamma^\mu \gamma^\nu, \not{p}] = 2(\gamma^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu) \quad (2.30)$$

deduz-se que a transformação (2.29) é equivalente a

$$\gamma^\mu p^\nu \rightarrow \frac{1}{4}[\gamma^\mu \gamma^\nu, \not{p}]. \quad (2.31)$$

Assim, obtemos que

$$G_{\mu\nu}^B(0) [(\not{p} + m_q)\gamma^\mu \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu] = G_{\mu\nu}^B(0) \left[\frac{1}{2}(\gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} + \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu) + m_q \gamma^\mu \gamma^\nu \right]. \quad (2.32)$$

Notando que a anti-simetrização de $\gamma^\mu \gamma^\nu$ leva ao uso das matrizes σ (conf. (A.12)),

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \rightarrow \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -i\sigma^{\mu\nu}, \quad (2.33)$$

chegamos à forma final da contribuição perturbativa devido à interação do quark com um gluon externo

$$S_{ab}^{p1}(p) = -\frac{ig}{4} t_{ab}^B G_{\mu\nu}^B(0) \frac{\not{p} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{p} + 2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 - m_q^2)^2}. \quad (2.34)$$

Passando para o espaço das configurações, expandindo até primeira ordem em m_q e usando as transformadas de Fourier⁷

$$\int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{1}{(p^2)^2} = -i\pi^2 \ln(-x^2) \quad \text{e} \quad \int d^4p e^{-ip \cdot x} \frac{\not{p}}{(p^2)^2} = \frac{4\pi^2 \not{x}}{x^2}, \quad (2.35)$$

obtemos a expressão desta contribuição perturbativa no espaço de configurações, válida para quarks leves,

$$S_{ab}^{p1}(x) = -t_{ab}^B \frac{i}{2^5 \pi^2 x^2} g G_{\mu\nu}^B(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x}) - t_{ab}^B \frac{m_q}{2^5 \pi^2} g G_{\mu\nu}^B(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2). \quad (2.36)$$

É possível considerar contribuições perturbativas com a inserção de dois ou três gluons externos. Os resultados no espaço dos momentos[28] estão listados no Apêndice B.

⁷A segunda transformada em (2.35) segue imediatamente da primeira. Para mostrar a primeira fórmula em (2.35) o procedimento inicial é o mesmo usado em (2.19) e (2.20): faz-se uma rotação de Wick e usa-se a equação (2.17), resolvendo a integral gaussiana nos momentos. A integral unidimensional resultante é divergente na origem - contudo, por razões que serão explicadas neste e no próximo capítulo, apenas termos que podem possuir uma parte imaginária são relevantes. Portanto, o procedimento descrito no Apêndice D, que resulta na equação (D.35), pode ser usado com este fim.

2.4.2.3 Contribuições não-perturbativas

Vamos tratar agora o segundo termo de (2.6), que denotaremos $S_{\alpha\beta,ab}^{np}$, escrito agora com os índices de Dirac explicitos

$$S_{\alpha\beta,ab}^{np}(x) \equiv \langle 0 | : [q_{\alpha,a}(x)\bar{q}_{\beta,b}(0)] : | 0 \rangle. \quad (2.37)$$

Em S^{np} serão incluídas as contribuições não perturbativas ao propagador. Para tratar com a equação (2.37) primeiramente deve ser notado que a OPE é válida para um cálculo de curtas distâncias. Ou seja, pode-se assumir que x é pequeno e fazer uma expansão de $q_{\alpha}^a(x)$ em potências de x em torno de $x = 0$, obtendo-se

$$q_{\alpha}^a(x) = q_{\alpha}^a(0) + x^{\mu} \partial_{\mu} q_{\alpha}^a(x)|_{x=0} + \frac{1}{2} x^{\mu} x^{\nu} \partial_{\mu} \partial_{\nu} q_{\alpha}^a(x)|_{x=0} + \dots \quad (2.38)$$

Contudo, no calibre do ponto fixo tem-se $x^{\mu} A_{\mu} = 0$. Assim, com a definição usual da derivada covariante

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} - igA_{\mu}, \quad (2.39)$$

temos que $x^{\mu} D_{\mu} = x^{\mu} \partial_{\mu}$, o que implica que (2.38) assume a forma

$$q_{\alpha}^a(x) = q_{\alpha}^a(0) + x^{\mu} D_{\mu} q_{\alpha}^a(x)|_{x=0} + \frac{1}{2} x^{\mu} x^{\nu} D_{\mu} D_{\nu} q_{\alpha}^a(x)|_{x=0} + \dots \quad (2.40)$$

Esta expansão é escrita numa forma envolvendo apenas derivadas covariantes - este fato consiste na segunda vantagem do gauge do ponto fixo aludida anteriormente.

Substituindo-se (2.40) em (2.37) obtemos termos com potências crescentes em x , que serão estudados em separado.

Termo de ordem 0 O termo de ordem 0 em x é dado por

$$S_{\alpha\beta,ab}^{np0}(x) \equiv \langle 0 | : q_{\alpha,a}(0)\bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle. \quad (2.41)$$

Notando que o lado direito é independente de x , ele deve ser proporcional ao produto direto de uma matriz constante nos índices de cor a e b e de uma matriz constante nos índices de Dirac α e β . Considerando a forma de (2.41) vemos que a única estrutura compatível é

$$\langle 0 | : q_{\alpha,a}(0)\bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} N_0, \quad (2.42)$$

onde N_0 é uma constante de normalização. Para obter o valor desta constante, contraímos (2.42) com $\delta_{ba} \delta_{\beta\alpha}$, além de anticomutar, no lado esquerdo, os campos fermiônicos q e \bar{q} . Fazendo isto, obtém-se que $N_0 = -\langle \bar{q}q \rangle / 12$, onde introduzimos o condensado $\langle \bar{q}q \rangle$ definido

por

$$\langle \bar{q}q \rangle \equiv \langle 0 | : [\bar{q}_\alpha^a(0)q_\alpha^a(0)] : | 0 \rangle. \quad (2.43)$$

Portanto, a primeira contribuição não-perturbativa ao propagador é dada por (omitindo os índices de Dirac)

$$S_{ab}^{np0}(x) = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{3 \cdot 2^2} \delta_{ab}. \quad (2.44)$$

Em (2.44), $\langle \bar{q}q \rangle$ possui dimensão 3 e é chamado de *condensado de quarks* ou *condensado quiral*. Seu valor numérico pode ser estimado por meio da hipótese PCAC (Partially Conserved Axial Current) [30]. A estimativa que usaremos, para $q = u, d$, é [31]

$$\langle \bar{q}q \rangle = -(0.23 \pm 0.03)^3 \text{ GeV}^3 \quad (2.45)$$

Uma estimativa do condensado de quark estranho $\langle \bar{s}s \rangle$ é dada por [32]

$$\langle \bar{s}s \rangle = \rho \langle \bar{q}q \rangle, \text{ onde } \rho = 0.8. \quad (2.46)$$

Termo de primeira ordem O termo linear em x é

$$S_{\alpha\beta,ab}^{np1}(x) \equiv x^\mu \langle 0 | : D_\mu q_{\alpha,a}(0) \bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle. \quad (2.47)$$

Para o elemento de matriz em (2.47) temos que a única estrutura de índices de Lorentz, de cor e de Dirac permitida é

$$\langle 0 | : D_\mu q_{\alpha,a}(0) \bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle = (\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta_{ab} N_1, \quad (2.48)$$

onde N_1 é uma constante de normalização. Para calcular N_1 contraímos (2.48) com $(\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \delta^{ba}$ e anticomutamos os campos, obtendo

$$\langle : \bar{q} \not{D} q : \rangle = - \overbrace{(\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma^\mu])}^{4\delta_\mu^\mu=16} \overbrace{(\delta_{aa})}^3 N_1 = -48 N_1. \quad (2.49)$$

Agora, como q satisfaz a equação de Dirac,

$$\not{D}q = -im_q q, \quad (2.50)$$

temos que

$$\langle : \bar{q} \not{D} q : \rangle = -im_q \langle \bar{q}q \rangle. \quad (2.51)$$

Assim, usando (2.51) em (2.49), chegamos ao valor de N_1 ,

$$N_1 = \frac{im_q}{48} \langle \bar{q}q \rangle. \quad (2.52)$$

Portanto, combinando (2.47) com (2.48) e (2.52), temos a contribuição de primeira ordem ao propagador não-perturbativo,

$$S_{ab}^{np1}(x) = \frac{i m_q \langle \bar{q}q \rangle}{3 \cdot 2^4} \not{x} \delta_{ab}. \quad (2.53)$$

Termo de segunda ordem O termo quadrático em x é

$$S_{\alpha\beta,ab}^{np2}(x) \equiv \frac{1}{2} x^\mu x^\nu \langle 0 | : D_\mu D_\nu q_{\alpha,a}(0) \bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle. \quad (2.54)$$

O elemento de matriz em (2.54) pode ser escrito como⁸

$$\langle 0 | : D_\mu D_\nu q_{\alpha,a}(0) \bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle = g_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ab} N_2, \quad (2.55)$$

onde N_2 é a constante de normalização. Contraindo (2.55) com $g^{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{ba}$ obtemos que

$$\langle \bar{q} D^2 q \rangle = -48 N_2. \quad (2.56)$$

Por outro lado, diretamente a partir da definição de derivada covariante (2.39) é possível verificar que

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig G_{\mu\nu}. \quad (2.57)$$

Contraindo (2.57) com $\sigma^{\mu\nu}$ temos que

$$\sigma^{\mu\nu} [D_\mu, D_\nu] = -ig \sigma \cdot G, \quad (2.58)$$

onde $\sigma \cdot G \equiv \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu}$. Expandindo o lado esquerdo de (2.58) (usando (A.12)) vemos que

$$2i(\not{D}\not{D} - D^2)q = -ig \sigma \cdot Gq. \quad (2.59)$$

Como q satisfaz a equação de movimento (2.50), $\not{D}\not{D}q \propto m_q^2 q$, podendo ser desprezado se trabalharmos até primeira ordem em m_q . Assim,

$$D^2 q = \frac{1}{2} g \sigma \cdot Gq. \quad (2.60)$$

Usando (2.60) em (2.56), finalmente calculamos o valor de N_2 ,

$$N_2 = -\frac{1}{96} \langle \bar{q} g \sigma \cdot Gq \rangle. \quad (2.61)$$

Logo, com este valor de N_2 em (2.55) e (2.54), temos que a contribuição de segunda ordem

⁸A estrutura de Dirac e de Lorentz mais geral admissível para o elemento de matriz em (2.54) é $A\sigma_{\mu\nu} + Bg_{\mu\nu}$, onde A, B são constantes. Contudo, $x^\mu x^\nu \sigma_{\mu\nu} = 0$, pois $x^\mu x^\nu$ é simétrico e $\sigma_{\mu\nu}$ anti-simétrico em μ, ν . Portanto, o termo em $\sigma_{\mu\nu}$ não contribui ao propagador não-perturbativo.

em x ao propagador não-perturbativo é

$$S_{ab}^{np2}(x) = -\frac{x^2}{3 \cdot 2^6} \langle \bar{q}g\sigma \cdot Gq \rangle \delta_{ab} \quad (2.62)$$

Na equação (2.62), $\langle \bar{q}g\sigma \cdot Gq \rangle$ possui dimensão 5 e é denominado *condensado misto de quarks e gluons*. É usual parametrizá-lo em termos do condensado de quarks,

$$\langle \bar{q}g\sigma \cdot Gq \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle, \quad (2.63)$$

onde $m_0^2 \approx 0.8 \text{ GeV}^2$ [33].

2.4.2.4 Contribuições não-fatorizáveis

Além das contribuições ao propagador não-perturbativo discutidas anteriormente, podemos considerar também contribuições em que o quark q emite um gluon, que é absorvido pelo propagador de outro quark, q' . As contribuições não-perturbativas que envolvem esta troca de gluons são origem de índices livres no propagador de q , que devem ser contraídos com índices correspondentes no propagador de q' , sendo portanto chamadas de não-fatorizáveis.

Estas contribuições se originam da função de dois pontos (2.37), com a inserção de um gluon externo (o gluon trocado entre q e q'),

$$S_{\alpha\beta,ab}^{mf,A}(x) \equiv \langle 0 | : q_{\alpha,a}(x) g G_{\mu\nu}^A \bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle. \quad (2.64)$$

Os índices de Lorentz μ, ν e o índice A devem estar contraídos, no propagador de q , com os índices correspondentes no propagador de q' . De resto, o cálculo do propagador não-fatorizável é análogo ao restante propagador não-perturbativo: inserimos a expansão de $q(x)$ (2.40) em (2.64) e estudamos os termos resultantes ordem a ordem em x .

Termo de ordem 0 O termo de ordem 0 é

$$S_{\alpha\beta,ab,\mu\nu}^{mf0,A}(x) \equiv \langle 0 | : q_{\alpha,a}(0) g G_{\mu\nu}^A \bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle. \quad (2.65)$$

O elemento de matriz pode ser escrito na forma

$$\langle 0 | : q_{\alpha,a}(0) g G_{\mu\nu}^A \bar{q}_{\beta,b}(0) : | 0 \rangle = (\sigma_{\mu\nu})_{\alpha\beta} t_{ab}^A N_3. \quad (2.66)$$

Contraindo com $(\sigma^{\mu\nu})_{\beta\alpha} t_{ba}^A$, trocando a ordem dos campos fermiônicos e usando a identidade (A.28) temos que

$$N_3 = -\frac{1}{3 \cdot 2^6} \langle \bar{q} g \sigma \cdot G q \rangle \quad (2.67)$$

Logo, a contribuição ao propagador não-fatorizável de ordem 0 em x é

$$S_{ab,\mu\nu}^{nf0,A} = -\frac{1}{3 \cdot 2^6} \langle \bar{q} g \sigma \cdot G q \rangle \sigma_{\mu\nu} t_{ab}^A \quad (2.68)$$

Termo de primeira ordem Seguindo o mesmo procedimento, encontramos que o termo de primeira ordem em x é dado por (omitindo índices de Dirac)

$$S_{ab,\mu\nu}^{nf1,A}(x) \equiv x^\rho \langle 0 | : D_\rho q_a(0) g G_{\mu\nu}^A \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle = \frac{i m_q \langle \bar{q} g \sigma \cdot G q \rangle}{3 \cdot 2^8} t_{ab}^A (\not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x}) \quad (2.69)$$

Termo de segunda ordem O termo não-fatorizável de segunda ordem em x é dado por

$$S_{ab,\mu\nu}^{nf2,A}(x) \equiv \frac{x^\rho x^\lambda}{2} \langle 0 | : D_\rho D_\lambda q_a(0) g G_{\mu\nu}^A \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle = -\frac{\langle \bar{q} g \sigma \cdot G D^2 q \rangle}{3 \cdot 2^8} x^2 \sigma_{\mu\nu} t_{ab}^A \quad (2.70)$$

Usando as equações (2.60) e (A.29) temos que esta contribuição pode ser escrita como

$$S_{ab,\mu\nu}^{nf2,A}(x) = -\frac{\langle \bar{q} q \rangle \langle g^2 G^2 \rangle}{3 \cdot 2^{10}} x^2 \sigma_{\mu\nu} t_{ab}^A, \quad (2.71)$$

onde o condensado de dimensão 4

$$\langle g^2 G^2 \rangle \equiv \langle 0 | : g^2 G_{\mu\nu}^B G^{B,\mu\nu} : | 0 \rangle \quad (2.72)$$

é denominado *condensado de gluons*. Este condensado também aparece quando consideramos contribuições perturbativas com gluons externos, como a dada Figura 2.2 e pela equação (2.36), via o uso da identidade (A.29). Neste trabalho usaremos a seguinte estimativa, retirada das regras de soma aplicadas a resultados experimentais de $e^+ e^- \rightarrow$ (hádrons com isospin I=1)[34]

$$\langle g^2 G^2 \rangle \approx 0.88 \text{ GeV}^4. \quad (2.73)$$

Outro condensado usado neste trabalho é o *condensado de três gluons*, de dimensão 6, definido por

$$\langle g^3 G^3 \rangle \equiv \langle 0 | : g^3 f_{ABC} G_{\mu\nu}^A G_{\nu\rho}^B G_{\rho\mu}^C : | 0 \rangle. \quad (2.74)$$

A estimativa de $\langle g^3 G^3 \rangle$ utilizada é[5]

$$\langle g^3 G^3 \rangle \approx 0.045 \text{ GeV}^6. \quad (2.75)$$

2.4.2.5 Representação diagramática e outras considerações

Reunindo todos os resultados das subseções anteriores temos o propagador não perturbativo usado nas QCDSR. A forma mais conveniente de expressar o resultado final para o propagador é usar uma representação diagramática, como ilustrado na Figura 2.3. Esta representação diagramática permite, como será visto no Capítulo 3, a construção de diagramas que permitem ordenar o cálculo no lado da OPE. Todas as parcelas do propagador não-perturbativo para quarks leves ($q = u, d, s$) e suas correspondentes representações diagramáticas encontram-se no Apêndice B - neste Apêndice também reunimos os resultados para o propagador não-perturbativo para quarks pesados ($Q = c, b$) no espaço dos momentos.

Na construção da OPE e do propagador não perturbativo fomos levados a definir diversos condensados. Deve-se ressaltar que estes condensados referem-se a propriedades fundamentais do vácuo da QCD. Em especial, o condensado de quarks (2.43) e o condensado de gluons (2.72) são diretamente relacionados com a quebra espontânea da simetria quiral e com anomalia do traço[30]. Portanto, na construção do correlator no lado da QCD não temos parâmetros livres.

$$S_{ab}(x) = \delta_{ab} \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} + \delta_{ab} \frac{m_q}{2^2 \pi^2 x^4} + -\frac{\delta_{ab}}{3 \cdot 2^2} \langle \bar{q}q \rangle + \dots$$

Figura 2.3: Representação diagramática do propagador não-perturbativo.

Antes de prosseguir, é útil notar que para o propagador não perturbativo para quarks pesados apresentado no Apêndice B são considerados apenas os condensados de gluons. A razão disto é que para quarks pesados Q uma estimativa do condensado $\langle \bar{Q}Q \rangle$ é dada por[5]

$$\langle \bar{Q}Q \rangle \approx -\frac{1}{48\pi^2 m_Q} \langle g^2 G^2 \rangle, \quad (2.76)$$

sendo suprimida pela massa do quark m_Q .

2.5 O lado fenomenológico

No lado da OPE, consideramos um cálculo perturbativo do correlator, usando os graus de liberdade de quarks e gluons e parametrizando efeitos não-perturbativos nos condensados de vácuo. Isto corresponde a partir da liberdade assintótica, de $Q^2 \rightarrow \infty$. No lado fenomenológico parte-se do confinamento; usamos os graus de liberdade adequados numa descrição de baixas energias (hádrons), considerando valores de Q^2 na escala hadrônica.

2.5.1 A relação espectral

O primeiro passo para estudar o lado fenomenológico é escrever a relação espectral para a função de dois pontos. Começamos inserindo um conjunto completo de estados hadrônicos $|H(k)\rangle$, onde k é o 4-momento do hádron, no correlator (2.1), via a relação de completudeza para $|H(k)\rangle$. Também levando em conta a definição do produto temporalmente ordenado chegamos a

$$\begin{aligned} \Pi(x) = i \sum_H \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} & [\theta(x_0) \langle 0|j(x)|H(k)\rangle \langle H(k)|j^\dagger(0)|0\rangle + \\ & + \theta(-x_0) \langle 0|j^\dagger(0)|H(k)\rangle \langle H(k)|j(x)|0\rangle]. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Usando operadores de translação,

$$j(x) = e^{ip \cdot x} j(0) e^{-ip \cdot x}, \quad (2.78)$$

temos que

$$\Pi(x) = i \sum_H \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} [\theta(x_0) e^{-ik \cdot x} + \theta(-x_0) e^{+ik \cdot x}] |\langle 0|j(0)|H(k)\rangle|^2. \quad (2.79)$$

Podemos identificar, em (2.79), o propagador de Feynman [26]⁹,

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_0} [\theta(x_0) e^{-ik \cdot x} + \theta(-x_0) e^{ik \cdot x}] = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - E_H^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot x}, \quad (2.80)$$

onde E_H é a energia do estado $|H(k)\rangle$. Portanto,

$$\Pi(x) = - \sum_H \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - E_H^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot x} |\langle 0|j(0)|H(k)\rangle|^2. \quad (2.81)$$

⁹O elemento de matriz em (2.79) é constante, independente de k .

Introduzindo

$$\int_0^{\infty} dq^2 \delta(q^2 - E_H^2) = 1 \quad (2.82)$$

chegamos, finalmente, a

$$\Pi(x) = - \int d^4k \int_0^{\infty} dq^2 \frac{1}{k^2 - q^2 + i\epsilon} e^{-ik \cdot x} \rho(q^2) \quad (2.83)$$

onde definimos a densidade espectral $\rho(q^2)$ via

$$\rho(q^2) \equiv (2\pi)^4 \sum_H |\langle 0|j(0)|H(k)\rangle|^2 \delta(q^2 - E_H^2). \quad (2.84)$$

Renomeando $q^2 = s$ e passando para o espaço dos momentos, temos que

$$\Pi(k) = \int_0^{\infty} ds \frac{1}{s - k^2 - i\epsilon} \rho(s). \quad (2.85)$$

A equação (2.85) é conhecida como a relação espectral. A densidade espectral $\rho(q^2)$ assume, por definição, valores reais e positivos. A densidade $\rho(q^2)$ possui uma estrutura típica: temos um pico representando o estado fundamental (de massa m_H), um conjunto de estados excitados e, acima de $2m_H$, um contínuo de estados de várias partículas. Em termos do correlator, isto implica que $\Pi(k^2)$, tomado como função de k^2 complexo, possui no eixo real positivo pólos simples e um *branch cut* correspondentes, respectivamente, aos estados fundamental e excitados, e aos estados de várias partículas [26]. Portanto, o conhecimento da função espectral é uma forma alternativa de codificar as informações contidas na função de dois pontos.

Será útil inverter a equação (2.85). Para tanto, vamos calcular $\text{Im}\Pi(k)$,

$$2i\text{Im}\Pi(k) = \Pi(k) - \Pi^*(k) = \int_0^{\infty} ds \left(\frac{1}{s - k^2 - i\epsilon} - \frac{1}{s - k^2 + i\epsilon} \right) \rho(k^2). \quad (2.86)$$

Contudo, como vale a identidade (x real)

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \text{P} \frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x), \quad (2.87)$$

onde x é um número real e P indica o valor principal de Cauchy, segue que

$$\rho(k^2) = \frac{\text{Im}\Pi(k^2)}{\pi}. \quad (2.88)$$

2.5.2 A parametrização pólo+contínuo

Uma forma útil de escrever a densidade espectral é separar o estado fundamental do conjunto dos demais estados excitados,

$$\rho^{\text{fen}}(s) = \lambda^2 \delta(s - m_H^2) + \theta(s - s_0) \rho^{\text{cont}}(s), \quad (2.89)$$

onde $\lambda \equiv \langle 0|j|H \rangle$ indica o acoplamento da corrente interpolante com o estado fundamental e s_0 é o limiar do contínuo, um parâmetro que indica o início da contribuição de $\rho^{\text{cont}}(s)$, a densidade espectral dos demais estados. Uma aproximação simples para $\rho^{\text{cont}}(s)$ é

$$\rho^{\text{cont}}(s) = \rho^{\text{OPE}}(s) \equiv \frac{\text{Im}\Pi^{\text{OPE}}(s)}{\pi}, \quad (2.90)$$

onde o $\Pi^{\text{OPE}}(s)$ é o correlator calculado no lado da OPE. A função de dois pontos $\Pi^{\text{OPE}}(s)$ é calculada com 4-momento euclidiano; a passagem para 4-momento de Minkowski é feita por uma continuação analítica. Com as equações (2.89) e (2.90) podemos reescrever a relação espectral em (2.85) na forma

$$\Pi^{\text{fen}}(k) = \frac{\lambda^2}{m_H^2 - k^2} + \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{1}{s - k^2} \rho^{\text{OPE}}(s). \quad (2.91)$$

O lado da OPE pode ser reescrito na forma de uma relação espectral,

$$\Pi^{\text{OPE}}(q) = \int_{s_{\text{min}}}^{\infty} ds \frac{1}{s - q^2} \rho^{\text{OPE}}(s), \quad (2.92)$$

onde s_{min} é um possível limite cinemático à integral. No caso de correntes que envolvam dois quarks pesados ($Q = c, b$), $s_{\text{min}} = 4m_Q^2$ - isto será discutido com mais detalhes no Capítulo 3 e no Apêndice D.

2.6 O princípio da dualidade quark-hádrón

Com os resultados das seções anteriores, temos duas descrições distintas da função de dois pontos: o correlator no lado da QCD, $\Pi^{\text{OPE}}(k)$, válido para $Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$, quando a liberdade assintótica da QCD garante a validade da expansão perturbativa; e o correlator no lado fenomenológico, $\Pi^{\text{fen}}(k)$, adequado para descrever a física na escala hadrônica $Q^2 \lesssim 1 \text{ GeV}^2$.

As regras de soma da QCD partem do princípio da dualidade: assume-se que ambas descrições são válidas em um certo intervalo de $Q^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ [5], ou seja, que $\Pi^{\text{OPE}}(q) = \Pi^{\text{fen}}(q)$. O uso do princípio da dualidade permite usar o lado da OPE para

determinar parâmetros do estado fundamental no lado fenomenológico (m_H e λ). No lado da OPE, as entradas são parâmetros fundamentais da QCD como massas dos quarks e os condensados do vácuo. No lado fenomenológico, o uso da parametrização polo+contínuo introduz um parâmetro livre, o limiar do contínuo s_0 . Contudo, s_0 deve satisfazer certos critérios físicos; por exemplo, $s_0 > m_H^2$ - o primeiro estado excitado deve estar acima do estado fundamental. Finalmente, como o princípio da dualidade é uma aproximação e, em cálculos práticos, a OPE é truncada, há uma certa dependência de grandezas físicas com q^2 . Exigir que esta dependência seja pequena é a base de um critério para avaliar a validade das regras de soma, como discutiremos em detalhes no Capítulo 4. Portanto, o único parâmetro aproximadamente livre é o limiar do contínuo s_0 .

O uso do princípio da dualidade diretamente na forma $\Pi^{\text{OPE}}(q) = \Pi^{\text{fen}}(q)$ é pouco útil; é interessante introduzir a transformada de Borel¹⁰ do princípio da dualidade, $\hat{\Pi}^{\text{OPE}}(M^2) = \hat{\Pi}^{\text{fen}}(M^2)$, onde M^2 é a variável transformada, $Q^2 \rightarrow M^2$, denominada *massa de Borel*.¹¹ Há três razões para tanto:

1. No lado da OPE, o processo de renormalização introduz termos de subtração em (2.92). Devido à forma dos contratermos introduzidos na lagrangeana da QCD, estes termos de subtração dão origem a polinômios em q em (2.92). Como (conf. (C.4)) $\beta[(Q^2)^n] = 0$, $n \geq 0$, estes termos de subtração são eliminados pela transformada de Borel.
2. Ainda no lado da OPE, a menos dos termos de subtração, temos a expansão geral da OPE dada pela equação (2.3). Se d é a dimensão de Π , d_{C_n} a dimensão do coeficiente C_n e $d_{\hat{O}_n}$ a dimensão do operador \hat{O}_n , então, por consistência, $d = d_{C_n} + d_{\hat{O}_n}$. Assim, operadores de dimensão progressivamente mais alta correspondem a coeficientes com dimensão progressivamente menor, eventualmente negativa. A contribuição dos termos com coeficientes de dimensão negativa é da forma geral

$$\Delta\Pi^{\text{OPE}}(Q^2) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(Q^2)^n}. \quad (2.93)$$

Realizando a transformada de Borel (usando (C.5)) temos que

$$\Delta\hat{\Pi}^{\text{OPE}}(M^2) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!(M^2)^n}. \quad (2.94)$$

¹⁰No Apêndice C apresentamos a definição da transformada de Borel e de suas principais propriedades.

¹¹O nome, embora seja o usado na literatura, é infeliz. Embora M possua dimensão de massa, não corresponde à massa de alguma grandeza física. A interpretação para a massa de Borel é que ela é a variável que corresponde ao momento euclidiano Q^2 após a transformação de Borel.

Logo, as contribuições de condensados de dimensão superior recebem uma supressão fatorial. Isso implica que, após a transformada de Borel, a convergência da OPE é melhorada.

3. No lado fenomenológico (equação (2.91)), o fator $1/(s + Q^2)$ é transformado (via (C.6)) em e^{-s/M^2} ; isso implica que contribuições do contínuo (com $s > s_0$) recebem uma supressão exponencial.

Portanto, o efeito global da transformada de Borel é melhorar a convergência da OPE para Q^2 pequeno no lado da QCD e suprimir contribuições do contínuo no lado fenomenológico, aprimorando as regras de soma.

Assim, tomando a transformada de Borel de (2.91) e (2.92), e impondo que $\hat{\Pi}^{\text{OPE}}(M^2) = \hat{\Pi}^{\text{fen}}(M^2)$ chegamos à seguinte regra de soma

$$\int_{s_{\min}}^{\infty} ds e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s) = \lambda^2 e^{-m_H^2/M^2} + \int_{s_0}^{\infty} ds e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s). \quad (2.95)$$

que podemos reescrever na forma

$$\lambda^2 e^{-m_H^2/M^2} = \int_{s_{\min}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s). \quad (2.96)$$

O lado direito de (2.96) será referido, no que segue, como *lado da OPE*. Derivando (2.96) com respeito a $1/M^2$ e então dividindo o resultado por (2.96) obtemos uma expressão explícita para a massa do estado fundamental,

$$m_H^2 = \frac{\int_{s_{\min}}^{s_0} ds s e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s)}{\int_{s_{\min}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s)}. \quad (2.97)$$

2.6.1 A validade das regras de soma e a janela de Borel

A regra de soma (2.96) não é válida para todo valor de M^2 . Para M^2 grande, os estados do contínuo começam a contribuir na relação de dispersão e a aproximação pólo+contínuo perde sua validade. Para M^2 pequeno, nos aproximamos do regime do confinamento e a OPE perde sua validade. A validade de (2.96) depende da existência de um intervalo de M^2 , chamado de *janela de Borel*, dentro do qual a aproximação pólo+contínuo é razoável e a OPE possui boa convergência. Além disso, a massa calculada pela (2.97) é

um parâmetro físico e não deve depender de M^2 ; contudo, como a OPE é truncada e o princípio da dualidade aproximado, m_H calculado via (2.97) pode depender de M^2 , o que leva a exigência de que a dependência de m_H com M^2 seja suave. Finalmente, o limiar do contínuo s_0 , embora seja um parâmetro livre, não é arbitrário. Estas considerações levam a testes de auto-consistência para verificar a razoabilidade das regras de soma. Enunciaremos mais precisamente estes testes no Capítulo 4.

3 Cálculo do Lado da OPE

Para utilizar as regras de soma no estudo das moléculas hadrônicas $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$ e $D_0\bar{D} + h.c.$ é necessário estabelecer correntes interpolantes que representem estas moléculas e calcular os correlatores (ou, equivalentemente, as densidades espectrais) correspondentes no lado da OPE - realizar estas duas etapas são os objetivos deste capítulo.

3.1 Estudo das Correntes Interpolantes

Para construir uma corrente interpolante para a molécula $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$ (com $J^{PC} = 0^{-+}$) partimos de duas correntes que representam os mésons D_{s0} , $j_{D_{s0}}(x) = \bar{s}_a(x)c_a(x)$, e D_s , $j_{D_s}(x) = \bar{c}_a(x)\gamma_5 s_a(x)$, onde $s(x)$ é o campo de quarks estranho, $c(x)$ é o campo de quarks charme e explicitamos os índices de cor. Uma possível escolha de corrente interpolante para representar a molécula $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$ é, então, $j_{D_{s0}\bar{D}_s}(x) \sim j_{D_{s0}}(x)j_{D_s}(x) + h.c.$ ¹. Portanto, a corrente interpolante usada para descrever o estado $Y(4274)$ como uma molécula $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$ com $J^{PC} = 0^{-+}$ é

$$j_{D_{s0}\bar{D}_s}(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} [(\bar{s}_a(x)c_a(x))(\bar{c}_b(x)\gamma_5 s_b(x)) + (\bar{c}_a(x)s_a(x))(\bar{s}_b(x)\gamma_5 c_b(x))], \quad (3.1)$$

onde o fator $i/\sqrt{2}$ é necessário para garantir que $j_{D_{s0}\bar{D}_s}$ seja hermiteano e possua a normalização correta, e o sinal relativo + entre as duas parcelas garantirá, como discutido a seguir, a conjugação de carga positiva, $C = +1$. Para obter a corrente interpolante para o parceiro molecular $D_0\bar{D} + h.c.$ basta substituir $s \rightarrow q$ em (3.1), onde $q = u, d$ é o campo de quarks up ou down, respectivamente,

$$j_{D_0\bar{D}}(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} [(\bar{q}_a(x)c_a(x))(\bar{c}_b(x)\gamma_5 q_b(x)) + (\bar{c}_a(x)q_a(x))(\bar{q}_b(x)\gamma_5 c_b(x))]. \quad (3.2)$$

¹A rigor, esta corrente interpolante e todas outras correntes apresentadas a seguir *não* representam moléculas hadrônicas pois são todas correntes *locais*, produtos de correntes interpolantes de mésons avaliadas no mesmo ponto. O nome molecular dado à corrente vem do fato de que a corrente é produto de duas correntes interpolantes singletos de cor que representam mésons D . Até que ponto o uso destas correntes moleculares é uma boa aproximação para descrever moléculas mesônicas é uma questão em aberto.

Antes de iniciar o cálculo do lado da OPE, precisamos confirmar se a corrente interpolante (3.1) possui os números quânticos para descrever a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ com $J^{PC} = 0^{-+}$, determinando suas propriedades de transformação sob transformações de Lorentz, paridade e conjugação de carga.

É imediato que as correntes interpolantes são adequadas para descrever uma molécula escalar, pois temos um acomplamento de duas correntes mesônicas escalares da forma $\bar{q}_a q'_a$; assim, $J = 0$.

3.1.1 Paridade

Para determinar a paridade de (3.1), lembremos a ação do operador de paridade \hat{P} sobre um campo espinorial ψ e em seu adjunto $\bar{\psi}$,

$$\hat{P}\psi\hat{P}^{-1} = \gamma_0\psi \quad \text{e} \quad \hat{P}\bar{\psi}\hat{P}^{-1} = \bar{\psi}\gamma_0. \quad (3.3)$$

Logo,

$$\hat{P}\bar{c}s\hat{P}^{-1} = (\hat{P}\bar{c}\hat{P}^{-1})(\hat{P}s\hat{P}^{-1}) = \bar{c}\gamma_0\gamma_0s = \bar{c}s. \quad (3.4)$$

Analogamente, $\hat{P}\bar{s}\gamma_5c\hat{P}^{-1} = -\bar{c}\gamma_5s$. Concluimos que $\hat{P}(\bar{s}\gamma_5c)(\bar{c}s)\hat{P}^{-1} = -(\bar{s}\gamma_5c)(\bar{c}s)$. Repetindo o argumento para a segunda parcela de (3.1) vemos que

$$\hat{P}j_{D_{s_0}\bar{D}_s}\hat{P}^{-1} = -j_{D_{s_0}\bar{D}_s}. \quad (3.5)$$

Portanto, para a corrente (3.1) $P = -1$.

3.1.2 Conjugação de Carga

Resta determinar o comportamento de (3.1) sob conjugação de carga. A ação do operador de conjugação de carga \hat{C} sobre um campo espinorial é dada por

$$\hat{C}\psi\hat{C}^{-1} = C\bar{\psi}^T \quad \text{e} \quad \hat{C}\bar{\psi}\hat{C}^{-1} = \psi^T C^\dagger, \quad (3.6)$$

onde C é a matriz de conjugação de carga (que age no espaço dos espinores de Dirac). Uma representação possível para C é [26]

$$C = i\gamma_0\gamma_2. \quad (3.7)$$

A matriz C satisfaz as propriedades

$$C^\dagger = C^{-1} = -C \quad \text{e} \quad C\gamma_\mu^T C^\dagger = -\gamma_\mu. \quad (3.8)$$

Usando as equações (3.6) e (3.7) com as propriedades (3.8) temos, por exemplo, que

$$\hat{C}\bar{c}s\hat{C}^{-1} = c^T \underbrace{C^\dagger}_{=C^{-1}} C\bar{s}^T = (\bar{s}c)^T = \bar{s}c. \quad (3.9)$$

Temos também que

$$\begin{aligned} \hat{C}\bar{s}\gamma_5 c\hat{C}^{-1} &= s^T C^\dagger \gamma_5 C \bar{c}^T = s^T C^\dagger (i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3) C \bar{c}^T = \\ &= s^T (iC^\dagger \gamma_0 C C^\dagger \gamma_1 C C^\dagger \gamma_2 C C^\dagger \gamma_3 C) \bar{c}^T = \\ &= s^T (i(-\gamma_0^T)(-\gamma_1^T)(-\gamma_2^T)(-\gamma_3^T)) \bar{c}^T = \\ &= i(\bar{c}\gamma_3\gamma_2\gamma_1\gamma_0 s)^T = \bar{c}(i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3)s = \\ &= \bar{c}\gamma_5 s \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde, na penúltima linha, usamos o fato que o termo dentro do primeiro parênteses é um número e então usamos a álgebra de Dirac (A.3) para reordenar as matrizes de Dirac. Portanto, reunindo as equações (3.9) e (3.10) temos que

$$\hat{C}(\bar{s}\gamma_5 c)(\bar{c}s)\hat{C}^{-1} = (\bar{c}\gamma_5 s)(\bar{s}c). \quad (3.11)$$

Segue que, usando (3.11) em (3.1),

$$\hat{C}j_{D_{s0}\bar{D}_s+h.c.}\hat{C}^{-1} = +j_{D_{s0}\bar{D}_s+h.c.}. \quad (3.12)$$

Portanto, verificamos que $C = +1$. Concluimos, portanto, que a corrente (3.1) (ou, equivalentemente, (3.2)) possui $J^{PC} = 0^{-+}$.²

3.2 Aplicação do Teorema de Wick

O primeiro passo para o cálculo da OPE é a introdução da corrente (3.1) no correlator (2.1), que reproduzimos aqui por conveniência:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle. \quad (3.13)$$

²Se o sinal relativo em (3.1) fosse $-$ o argumento anterior levaria a $C = -1$.

Fazendo isto obtemos

$$\begin{aligned} \Pi(q) = & -\frac{i}{2} \int d^4x e^{iq \cdot x} \{ \langle 0|T [(\bar{s}_a c_a)(\bar{c}_b \gamma_5 s_b)(x)(\bar{s}_c c_c)(\bar{c}_d \gamma_5 s_d)(0)] |0\rangle + \\ & + \langle 0|T [(\bar{s}_a c_a)(\bar{c}_b \gamma_5 s_b)(x)(\bar{c}_c s_c)(\bar{s}_d \gamma_5 c_d)(0)] |0\rangle + \\ & + \langle 0|T [(\bar{c}_a s_a)(\bar{s}_b \gamma_5 c_b)(x)(\bar{s}_c c_c)(\bar{c}_d \gamma_5 s_d)(0)] |0\rangle + \\ & + \langle 0|T [(\bar{c}_a s_a)(\bar{s}_b \gamma_5 c_b)(x)(\bar{c}_c s_c)(\bar{s}_d \gamma_5 c_d)(0)] |0\rangle \}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Vamos estudar o primeiro termo de (3.14),

$$P_1(x) \equiv \langle 0|T [(\bar{s}_a c_a)(\bar{c}_b \gamma_5 s_b)(x)(\bar{s}_c c_c)(\bar{c}_d \gamma_5 s_d)(0)] |0\rangle. \quad (3.15)$$

Explicitando os índices de Dirac temos que

$$P_1(x) = \gamma_{jk}^5 \gamma_{mn}^5 \langle 0|T [\bar{s}_i^a(x) c_i^a(x) \bar{c}_j^b(x) s_k^b(x) \bar{s}_l^c(0) c_l^c(0) \bar{c}_m^d(0) s_n^d(0)] |0\rangle. \quad (3.16)$$

Aplicando o teorema de Wick (onde os propagadores livres são trocados pelos propagadores não-perturbativos, conforme discutido no Capítulo 2) chegamos a

$$P_1(x) = \gamma_{jk}^5 \gamma_{mn}^5 S_{kl}^{s,bc}(x) S_{lj}^{c,cb}(-x) S_{im}^{c,ad}(x) S_{ni}^{s,da}(-x), \quad (3.17)$$

onde S^c é o propagador para o quark c e S^s é o propagador para o quark s . Identificando os traços nos índices de Dirac temos então que

$$P_1(x) = \text{Tr} [S_{bc}^s(x) S_{cb}^c(-x) \gamma^5] \text{Tr} [S_{da}^s(-x) S_{ad}^c(x) \gamma^5]. \quad (3.18)$$

Finalmente, como usaremos os propagadores dos quarks pesados no espaço dos momentos, introduzimos a transformada de Fourier de $S^c(x)$,

$$S_{ab}^c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ip \cdot x} S_{ab}^c(p). \quad (3.19)$$

Usando (3.19) em (3.18) obtemos (após uma troca conveniente dos índices de cor)

$$P_1(x) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4p_1 d^4p_2 e^{-ip \cdot x} \text{Tr} [S_{ab}^s(x) S_{ba}^c(-p_1) \gamma^5] \text{Tr} [S_{cd}^s(-x) S_{dc}^c(p_2) \gamma^5]. \quad (3.20)$$

Repetindo este procedimento para os demais termos de (3.14) obtemos a forma final do correlator no lado da OPE após a aplicação do teorema de Wick

$$\begin{aligned} \Pi(q) = & -\frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x d^4p_1 d^4p_2 e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} \times \\ & \times \{ \text{Tr} [S_{ab}^s(x) S_{ba}^c(-p_1) \gamma^5] \text{Tr} [S_{cd}^s(-x) S_{dc}^c(p_2) \gamma^5] + \\ & + \text{Tr} [S_{ab}^c(p_1) S_{ba}^s(-x) \gamma^5] \text{Tr} [S_{cd}^c(-p_2) S_{dc}^s(x) \gamma^5] + \\ & + \text{Tr} [S_{ab}^s(x) \gamma^5 S_{ba}^c(-p_1) \gamma^5] \text{Tr} [S_{cd}^c(p_2) S_{dc}^s(-x)] + \\ & + \text{Tr} [S_{ab}^s(-x) \gamma^5 S_{ba}^c(p_1) \gamma^5] \text{Tr} [S_{cd}^c(-p_2) S_{dc}^s(x)] \}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.3 Substituição do Propagador Não-perturbativo

O próximo passo no cálculo da função de dois pontos no lado da OPE é a substituição do propagador não-perturbativo (Apêndice B) na equação (3.21).

Antes de tudo, é útil notar que os dois primeiros termos de (3.21) fornecem contribuições nulas com o uso do propagador não-perturbativo - o uso das identidades dos traços (A.19) a (A.23) asseguram que esses termos são nulos. Portanto, isso permite nos concentrarmos nos dois últimos termos de (3.21).

Para manter os cálculos organizados é útil definir

$$T_5(x, p) \equiv \text{Tr} [S_{ab}^s \gamma^5(x) S_{ba}^c(p) \gamma^5] \quad (3.22)$$

e

$$T_0(x, p) \equiv \text{Tr} [S_{ab}^s(x) S_{ba}^c(p)]. \quad (3.23)$$

Com estas definições, temos que (3.21) assume a forma

$$\Pi(q) = -\frac{i}{2} \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x d^4p_1 d^4p_2 e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} [T_5(-x, p_1) T_0(x, -p_2) + T_5(x, -p_1) T_0(-x, p_2)] \quad (3.24)$$

Devido à estrutura do propagador não-perturbativo e de (3.22) e (3.23), o cálculo dos traços em T_0 e T_5 sempre resulta em estruturas com dependência em x e p apenas nos produtos escalares $x \cdot p$, x^2 e p^2 . Assim, valem as identidades

$$T_{0(5)}(-x, p) = T_{0(5)}(x, -p). \quad (3.25)$$

Portanto, apenas um dos termos de (3.24) precisa ser calculado - podemos reescrever

(3.24) na forma

$$\Pi(q) = -i \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x d^4p_1 d^4p_2 e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} [T_5(-x, p_1) T_0(x, -p_2)]. \quad (3.26)$$

Com o correlator escrito nesta forma, podemos usar a diagramática para facilitar a substituição do propagador não-perturbativo. Na Figura 3.1 apresentamos um exemplo de diagrama - o termo T_5 sempre será representado pelas duas linhas superiores e o termo T_0 pelas duas linhas inferiores. Os diagramas apresentados pela Figura 3.1 representam o termo correspondente de (3.26) obtido pela substituição das parcelas correspondentes do propagador não-perturbativo (Apêndice B).

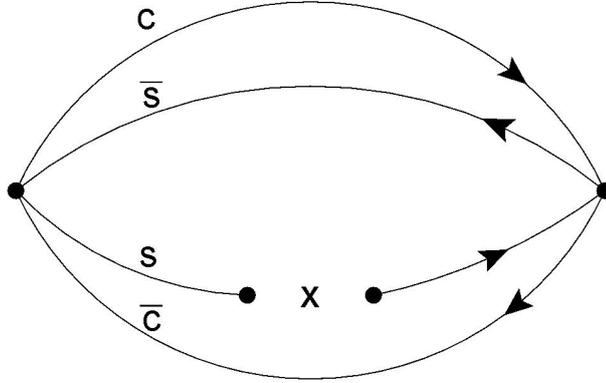


Figura 3.1: Exemplo de diagrama. As linhas superiores (inferiores) representam T_5 (T_0) em (3.26), respectivamente.

3.4 Exemplo de cálculo de diagramas

Vamos exemplificar o cálculo de diagramas através do cálculo dos diagramas perturbativos ilustrados na Figura 3.2. Começando pelo diagrama da Figura 3.2a temos que, substituindo as partes relevantes do propagador não-perturbativo (Apêndice B) em (3.24),

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{diag(a)}}(q) &= -i \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4x d^4p_1 d^4p_2 e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} \times \\ &\times \text{Tr} \left[\left(-\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} \delta_{ab} \right) \gamma^5 \left(i \delta_{ba} \frac{(\not{p}_1 + m_c)}{p_1^2 - m_c^2} \right) \gamma^5 \right] \times \\ &\times \text{Tr} \left[\left(+\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} \delta_{cd} \right) \left(i \delta_{dc} \frac{(-\not{p}_2 + m_c)}{p_2^2 - m_c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Calculando os traços e simplificando (usando as identidades para as matrizes de Dirac e para a álgebra para o SU(3) listadas no Apêndice A) chegamos a

$$\Pi_{\text{diag(a)}}(q) = \frac{i 3^2}{2^6 \pi^{12}} \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 x e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} \frac{(x \cdot p_1)(x \cdot p_2)}{x^8 (p_1^2 - m_c^2)(p_2^2 - m_c^2)}. \quad (3.28)$$

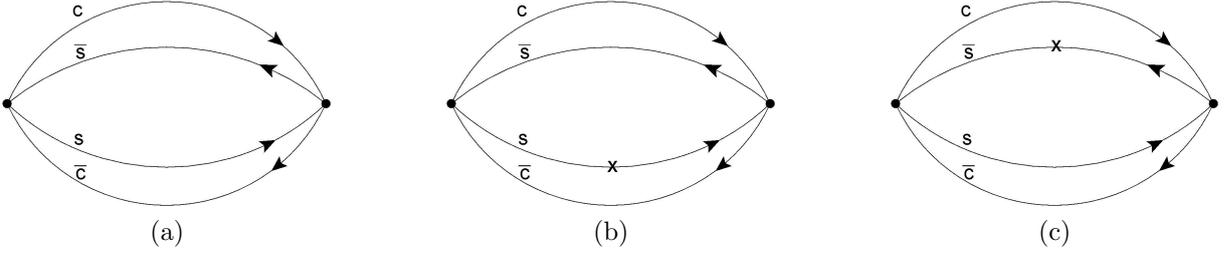


Figura 3.2: Diagramas perturbativos.

Os diagramas (b) e (c) da Figura 3.2 são calculados de forma análoga. Para o diagrama (b) temos que

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{diag(b)}}(q) &= -i \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 x d^4 p_1 d^4 p_2 e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} \times \\ &\times \text{Tr} \left[\left(-\frac{i}{2\pi^2 x^4} \delta_{ab} \not{x} \right) \gamma^5 \left(i \delta_{ba} \frac{(\not{p}_1 + m_c)}{p_1^2 - m_c^2} \right) \gamma^5 \right] \times \\ &\times \text{Tr} \left[\left(-\frac{m_s}{2^2 \pi^2 x^2} \delta_{cd} \right) \left(i \delta_{dc} \frac{(-\not{p}_2 + m_c)}{p_2^2 - m_c^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

e, para o diagrama (c), temos que

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{diag(c)}}(q) &= -i \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 x d^4 p_1 d^4 p_2 e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} \times \\ &\times \text{Tr} \left[\left(-\frac{m_s}{2^2 \pi^2 x^2} \delta_{ab} \right) \gamma^5 \left(i \delta_{ba} \frac{(\not{p}_1 + m_c)}{p_1^2 - m_c^2} \right) \gamma^5 \right] \times \\ &\times \text{Tr} \left[\left(+\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} \delta_{cd} \right) \left(i \delta_{dc} \frac{(-\not{p}_2 + m_c)}{p_2^2 - m_c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Após o cálculo dos traços concluímos que

$$\Pi_{\text{diag(b)}}(q) = -\Pi_{\text{diag(c)}}(q). \quad (3.31)$$

Portanto, quando somados, os diagramas (b) e (c) se cancelam. A contribuição perturbativa ao correlator é dada apenas pelo diagrama (a). Este cancelamento de diagramas é resultado da estrutura de Dirac dos traços. No diagrama (b) é necessário anticomutar uma vez a matriz γ_5 com \not{p}_1 , enquanto que no diagrama (c) isto não é necessário. Como o

restante dos cálculos é idêntico para ambos diagramas, ao final dos cálculos há um sinal de diferença. Este cancelamento de diagramas é recorrente e é devido à estrutura das correntes (3.1) e (3.2).

Voltando ao diagrama (a), (3.28), as integrais são divergentes e devem ser regularizadas. Contudo, como estamos interessados apenas na parte imaginária finita de $\Pi(q)$ (para o cálculo da densidade espectral $\rho(s)$) podemos lançar mão de uma técnica (descrita em detalhes no Apêndice D) que permite extrair $\text{Im}\Pi(q)$. No final do Apêndice D (Seção D.7) aplicamos esta técnica ao diagrama (a), como exemplo, obtendo ao final a equação (D.73):

$$\rho(s)_{\text{diag(a)}} = \frac{\text{Im}[\Pi(q)]}{\pi} = \frac{3}{2^{11}\pi^6} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\alpha^3} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{d\beta}{\beta^3} (1 - \alpha - \beta) [m_c^2(\alpha + \beta) - \alpha\beta s]^4, \quad (3.32)$$

onde os limites de integração para α e β são dados por (D.39) e (D.40),

$$\alpha_{\min} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_{\max} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}}{2} \quad (3.33)$$

e

$$\beta_{\min} = \frac{\alpha m_c^2}{s\alpha - m_c^2} \quad \text{e} \quad \beta_{\max} = 1 - \alpha. \quad (3.34)$$

A extração de $\text{Im}[\Pi(q)]$ também resulta num limite inferior para a integração em s (conf. a equação (2.92) e (D.37)), $s_{\min} = 4m_c^2$.

3.5 Resultados para as densidades espectrais no lado da OPE

Todos os diagramas que possuem contribuições não-nulas à OPE são apresentados na Figura 3.3, ordenados em ordem crescente de dimensão do condensado. Além disso, consideramos as correções devido à massa do quark s , m_s , apenas até diagramas de dimensão 6; para dimensões superiores, que já representam correções pequenas à OPE, esses diagramas foram desconsiderados. Notemos que as contribuições não-nulas de diagramas de dimensão 7 e 9 são proporcionais a m_s , podendo ser desprezadas.

O procedimento descrito na seção anterior pode ser aplicado para todos os diagramas da Figura 3.3. Vamos compilar os resultados obtidos para o cálculo de $\rho^{\text{OPE}}(s)$. Antes de

começar, é útil introduzir as definições

$$F(s, \alpha, \beta) \equiv m_c^2(\alpha + \beta) - \alpha\beta s \quad e \quad G(s, \alpha) \equiv m_c^2 - s\alpha(1 - \alpha). \quad (3.35)$$

A densidade espectral no lado da OPE $\rho^{\text{OPE}}(s)$ é a seguinte soma

$$\rho^{\text{OPE}}(s) = \sum_{D=0}^{10} \rho^{[D]}(s), \quad (3.36)$$

onde D é a dimensão do condensado correspondente ($D = 0$ corresponde à contribuição perturbativa, $\rho^{\text{pert}}(s)$). Temos que $\rho^{[7]}(s) \approx \rho^{[9]}(s) \approx 0$. Os demais termos são dados a seguir.

Contribuições perturbativas

Basta calcular o diagrama (a) da Figura 3.3, como já delineado na seção anterior - o resultado é a equação (3.32). Na notação acima,

$$\rho^{\text{pert}}(s) = \frac{3}{2^{11}\pi^6} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\alpha^3} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{d\beta}{\beta^3} (1 - \alpha - \beta) F(s, \alpha, \beta)^4. \quad (3.37)$$

Contribuições de condensados de dimensão 3

Corresponde à soma dos diagramas (b) e (c) da Figura 3.3.

$$\begin{aligned} \rho^{[3]}(s) = \rho^{\langle \bar{s}s \rangle}(s) &= \frac{3m_s \langle \bar{s}s \rangle}{2^7 \pi^4} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)} G(s, \alpha)^2 + \\ &\quad - \frac{3m_s m_c^2 \langle \bar{s}s \rangle}{2^5 \pi^4} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\alpha} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{d\beta}{\beta} F(s, \alpha, \beta) \end{aligned} \quad (3.38)$$

Contribuições de condensados de dimensão 4

Corresponde à soma dos diagramas (d) e (e) da Figura 3.3.

$$\begin{aligned} \rho^{[4]}(s) = \rho^{\langle g^2 G^2 \rangle}(s) &= \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{2^{11} \pi^6} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} d\alpha \int_{\beta_{min}}^{\beta_{max}} \frac{d\beta}{\beta^2} F(s, \alpha, \beta) \times \\ &\times \left[\frac{3}{\alpha} F(s, \alpha, \beta) + 2(1 - \alpha - \beta) \frac{m_c^2}{\beta} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

Contribuições de condensados de dimensão 5

Corresponde à soma dos diagramas (f) a (i) da Figura 3.3.

$$\begin{aligned} \rho^{[5]}(s) = \rho^{\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle}(s) &= - \frac{3m_c^2 m_s \langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle}{2^7 \pi^4} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 - 4m_c^2/s}}{1 - \sqrt{1 - 4m_c^2/s}} \right] + \\ &- \frac{m_s \langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle}{2^7 \pi^4} (2m_c^2 - s) \sqrt{1 - 4m_c^2/s} + \\ &+ \frac{3m_c^2 m_s \langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle}{2^6 \pi^4} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} d\alpha \ln \left[(1 - \alpha) \left(\frac{s}{m_c^2} - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

Contribuições de condensados de dimensão 6

Corresponde à soma dos diagramas (j) (proporcional a $\langle \bar{s}s \rangle^2$) e (k) (proporcional a $\langle g^3 G^3 \rangle$) da Figura 3.3.

$$\rho^{[6]}(s) = \rho^{\langle \bar{s}s \rangle^2}(s) + \rho^{\langle g^3 G^3 \rangle}(s), \quad (3.41)$$

onde

$$\rho^{\langle \bar{s}s \rangle^2}(s) = - \frac{m_c^2 \langle \bar{s}s \rangle^2}{2^4 \pi^2} \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}} \quad e \quad (3.42)$$

$$\rho^{\langle g^3 G^3 \rangle}(s) = \frac{\langle g^3 G^3 \rangle}{2^{12} \pi^6} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} d\alpha \int_{\beta_{min}}^{\beta_{max}} \frac{d\beta}{\beta^3} (1 - \alpha - \beta) (F(s, \alpha, \beta) + 2\alpha m_c^2). \quad (3.43)$$

Contribuições de condensados de dimensão 8

Corresponde à soma dos diagramas (l) e (m) (proporcionais a $\langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle$) com os diagramas (n) a (p) (proporcionais a $\langle g^2 G^2 \rangle^2$) da Figura 3.3.

$$\rho^{[8]}(s) = \rho^{\langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle}(s) + \rho^{\langle g^2G^2 \rangle^2}(s), \quad (3.44)$$

onde

$$\rho^{\langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle}(s) = \frac{m_c^2 \langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle}{2^5 \pi^2} \int_0^1 d\alpha \left[1 + \frac{m_c^2/M^2}{\alpha(1-\alpha)} - \frac{2}{1-\alpha} \right] \delta \left(s - \frac{m_c^2}{\alpha(1-\alpha)} \right) \quad e \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} \rho^{\langle g^2G^2 \rangle^2}(s) &= \frac{m_c^2 \langle g^2G^2 \rangle^2}{3^2 \cdot 2^{14} \pi^6} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta^2} \theta(1-\alpha-\beta) \left[\frac{m_c^2}{\alpha^2 M^2} (1-\alpha-\beta) - 6 \right] \times \\ &\times \delta \left(s - \frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \right) + \frac{\langle g^2G^2 \rangle^2}{2^{14} \pi^6} \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Contribuições de condensados de dimensão 10

Corresponde à soma dos diagramas (q) a (s) (proporcionais a $\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle^2$), dos diagramas (t) a (v) (proporcionais a $\langle g^2G^2 \rangle \langle \bar{s}s \rangle^2$) e dos diagramas (x) e (y) (proporcionais a $\langle g^3G^3 \rangle \langle g^2G^2 \rangle$) da Figura 3.3.

$$\rho^{[10]}(s) = \rho^{\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle^2}(s) + \rho^{\langle g^2G^2 \rangle \langle \bar{s}s \rangle^2}(s) + \rho^{\langle g^3G^3 \rangle \langle g^2G^2 \rangle}(s), \quad (3.47)$$

onde

$$\begin{aligned} \rho^{\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle^2}(s) &= \frac{\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle^2}{2^8 \pi^2} \int_0^1 d\alpha \delta \left(s - \frac{m_c^2}{\alpha(1-\alpha)} \right) \times \\ &\times \left[-\frac{4m_c^2/M^2}{\alpha(1-\alpha)} + \frac{4m_c^4/M^4}{\alpha^2(1-\alpha)} - \frac{m_c^6/M^6}{\alpha^2(1-\alpha)^2} \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \rho^{\langle g^2G^2 \rangle \langle \bar{s}s \rangle^2}(s) &= \frac{\langle g^2G^2 \rangle \langle \bar{s}s \rangle^2}{3^2 \cdot 2^7 \pi^2} \int_0^1 d\alpha \delta \left(s - \frac{m_c^2}{\alpha(1-\alpha)} \right) \times \\ &\times \left[\frac{3^2 \cdot 2m_c^4/M^4}{\alpha^2(1-\alpha)} + \frac{2m_c^4/M^4}{(1-\alpha)^3} - \frac{m_c^6/M^6}{\alpha^2(1-\alpha)^2} - \frac{3 \cdot 2m_c^2/M^2}{(1-\alpha)^2} \right] \quad e \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \rho^{\langle g^3G^3 \rangle \langle g^2G^2 \rangle}(s) &= \frac{\langle g^3G^3 \rangle \langle g^2G^2 \rangle}{3^2 \cdot 2^{15} \pi^6} \int_0^1 d\alpha \int_0^1 \frac{d\beta}{\beta^2} \theta(1-\alpha-\beta) \delta \left(s - \frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta} \right) \times \\ &\times \left[-3 + \frac{6m_c^2}{M^2\beta} + \frac{(1-\alpha-\beta)m_c^2/M^2}{\alpha^2} - \frac{2(1-\alpha-\beta)m_c^4/M^4}{\alpha^2\beta} \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

3.5.1 O caso da molécula $D_0\bar{D} + h.c.$ e das moléculas do tipo do botomônio

Para obter a densidade espectral no lado da OPE para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$, basta fazer, nas equações (3.37) a (3.50) a substituição $s \rightarrow q$ e $m_s \rightarrow m_{u,d} \approx 0$. Em particular, as contribuições de condensados com dimensão ímpares são nulas - a primeira contribuição não-perturbativa não-nula se torna a do condensado de gluons $\langle g^2 G^2 \rangle$.

As densidades espectrais para as moléculas do tipo do botomônio $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$ e $B_0\bar{B} + h.c.$ podem ser obtidas das densidades espectrais das moléculas do tipo do charmônio $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ e $D_0\bar{D} + h.c.$ realizando apenas a substituição $c \rightarrow b$.

3.5.2 Hipótese de fatorização

No cálculo da OPE, para o condensado de quatro quarks de dimensão 6 e para todos os condensados de dimensão 8 e 10 nós usamos a hipótese de fatorização ou hipótese de saturação do vácuo. Por exemplo, o condensado de quatro quarks $\langle \bar{q}\gamma^\mu q \bar{q}\gamma_\mu q \rangle$ foi aproximado por $\langle \bar{q}q \rangle^2$. Para estudar efeitos da violação desta hipótese, introduziremos no Capítulo seguinte possíveis violações desta aproximação.

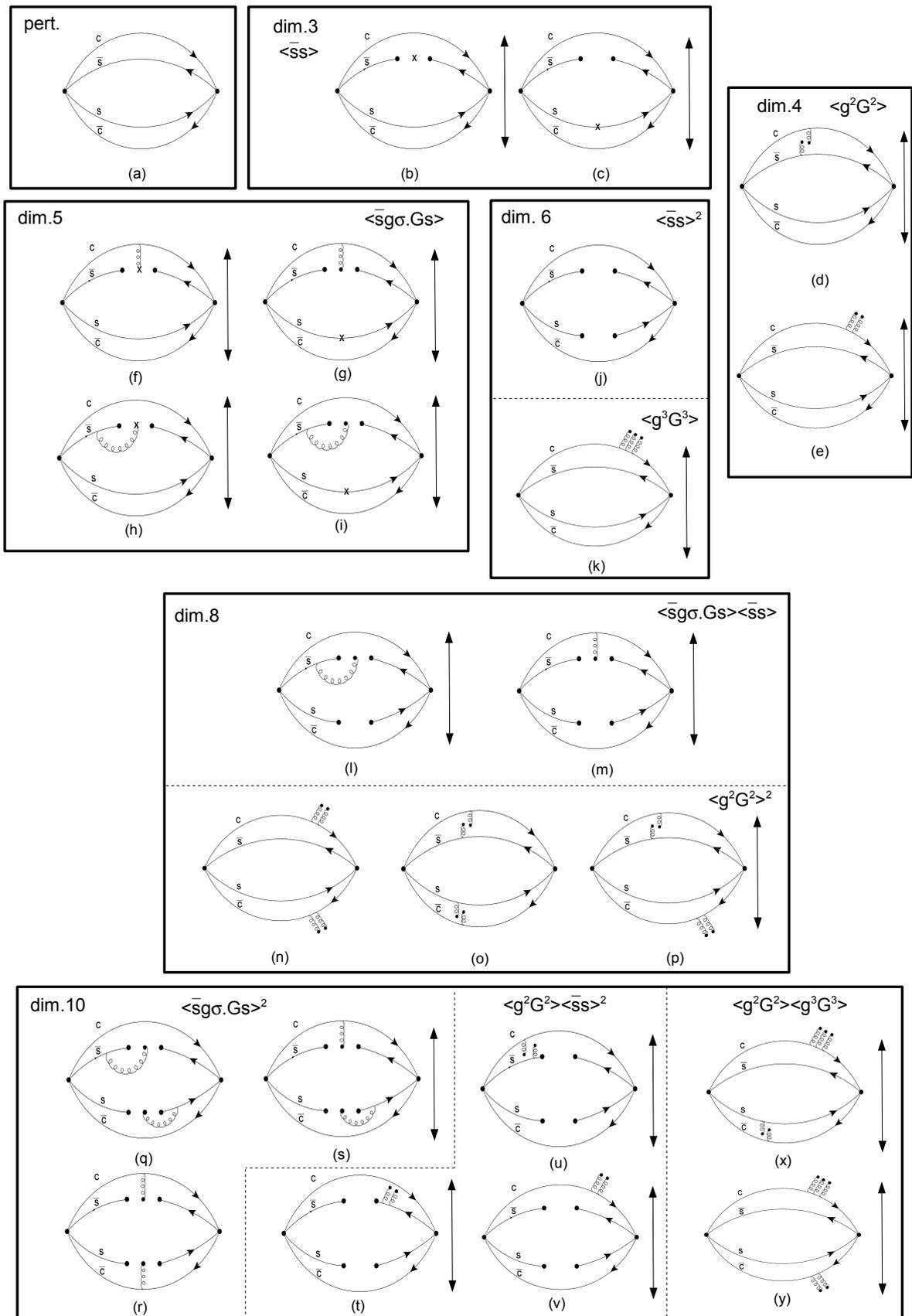


Figura 3.3: Diagramas não-nulos considerados no cálculo do correlator no lado da OPE. Diagramas com duas flechas ao lado indica que o diagrama espelhado através do eixo passando pelos dois vértices deve também ser considerado.

4 *As regras de soma para as correntes moleculares*

Com os resultados dos cálculos das densidades espectrais no lado da OPE apresentados no capítulo anterior (equações (3.37) a (3.50)), podemos partir à próxima etapa do cálculo - o estudo das regra de soma para as moléculas $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ e $D_0\bar{D} + h.c.$, extraindo ao final as massas destes estados. Ao final do capítulo realizaremos o estudo análogo para as moléculas no espectro do botomônio, $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$ e $B_0\bar{B} + h.c.$.

4.1 *As regras de soma*

As regras de soma para uma corrente escalar foram discutidas no capítulo 2. Ao final da discussão, após a parametrização pólo+contínuo e realizando a transformada de Borel dos lados fenomenológico e da OPE, chegamos à regra de soma (2.96) e à equação (2.97), que serão usadas para determinar a massa do estado fundamental m_H e o acoplamento $\lambda = \langle 0|j|H\rangle$. Reproduzimos a primeira destas equações aqui

$$\lambda^2 e^{-m_H^2/M^2} = \int_{s_{min}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s) \quad (4.1)$$

Quanto a segunda, ao introduzir $\rho^{\text{OPE}}(s)$, calculado no capítulo anterior, em (4.1) notamos que alguns termos da densidade espectral (os termos contendo as funções delta) podem ser prontamente integrados em s - estes termos serão denominados $\hat{\Pi}^{\text{OPE}'}$. Isto implica que a expressão para a massa m_H , equação (2.97), é modificada para

$$m_H^2 = \frac{\int_{s_0}^{s_0} ds s e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s) - \frac{d\hat{\Pi}^{\text{OPE}'}}{d(1/M^2)}}{\int_{s_{min}}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho^{\text{OPE}}(s) + \hat{\Pi}^{\text{OPE}'}}(M^2). \quad (4.2)$$

O lado direito da (4.1), como já notado no Capítulo 2, será referido como sendo o lado da OPE.

4.2 Parâmetros utilizados

Antes de partir para o cálculo em si, temos de fixar os valores das massas e condensados. Na Tabela 4.1 apresentamos os valores utilizados. Lembramos que m_0 é o fator que parametriza o condensado misto em função do condensado de quarks, $\langle \bar{q}g\sigma \cdot Gq \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle$, e que ρ é a razão entre o condensado de quarks leves ($q = u, d$) e o condensado de quark estranho, $\rho = \langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{q}q \rangle$. As estimativas usadas para os valores dos condensados foram discutidas no Capítulo 2. Para as massas dos quarks s e c , usamos as estimativas de [35] e [34]. Para a massa do quark b usamos, por consistência, a estimativa de [29]. Os valores das massas e dos condensados utilizados são consistentes com os valores usados em outros cálculos de regras de soma para correntes moleculares e de tetraquarks [29, 36, 37, 38], o que permite a comparação direta dos resultados.

Tabela 4.1: Parâmetros usados nas regras de soma.

Parâmetro	Valor
m_s	$(130 \pm 30) \text{ MeV}$
m_c	$(1.23 \pm 0.05) \text{ GeV}$
m_b	$(4.24 \pm 0.06) \text{ GeV}$
$\langle \bar{q}q \rangle$	$-(0.23 \pm 0.03)^3 \text{ GeV}^3$
ρ	0.8
m_0^2	$(0.8 \pm 0.1) \text{ GeV}^2$
$\langle g^2 G^2 \rangle$	0.88 GeV^4
$\langle g^3 G^3 \rangle$	0.045 GeV^6

É importante ressaltar que o único parâmetro livre nas regras de soma é o limiar do contínuo s_0 , definido em (2.89). Contudo, s_0 não é arbitrário - para que as regras de soma sejam consistentes devemos, certamente, ter $\sqrt{s_0} > m_H$, onde m_H é a massa do estado fundamental correspondente à corrente interpolante utilizada. Além disso, $\sqrt{s_0}$ não pode ser muito maior que m_H - isso indica que pode se estar desprezando partes relevantes do contínuo. Fenomenologicamente, $\sqrt{s_0}$ deve ser cerca de 500 MeV superior a m_H . Isso indica um critério de auto-consistência para as regras de soma: s_0 é escolhido de forma que o valor de m_H , determinado via regras de soma, esteja no intervalo $300 \text{ MeV} < \sqrt{s_0} - m_H < 800 \text{ MeV}$.

A massa de Borel M^2 não é um parâmetro livre. Se a teoria de perturbações fosse aplicável na região de interesse ($Q^2 \sim 1 \text{ GeV}$) e se fossem usados todos os operadores

possíveis para a OPE, o cálculo da massa (via a eq. (4.2)) não deveria depender do particular valor de M^2 utilizado. Contudo, como a OPE é utilizada fora do regime perturbativo e, além disso, truncada até operadores de determinada dimensão, surge uma dependência com M^2 nos cálculos. Esta observação fornecerá um critério importante para determinar a validade das regras de soma - exigiremos que a dependência de m_H com M^2 seja suave.

4.3 Molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$

4.3.1 Convergência da OPE

Para podermos aplicar as regras de soma, é necessário certificar-se que a OPE truncada apresenta boa convergência. Além de sugerir a validade dos cálculos perturbativos, o critério da convergência da OPE fornece um critério para fixar um limite inferior da massa de Borel M^2 para a aplicação das regras de soma.

Vamos iniciar estudando as ordens de grandeza de cada uma das contribuições à OPE. A Figura 4.1 mostra as contribuições de cada condensado para o lado da OPE em função da massa de Borel, para $\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$. A contribuição dominante é a perturbativa, seguida das contribuições dos termos de proporcionais a $\langle \bar{s}s \rangle$ (dimensão 3), que constitui cerca de 10% da contribuição perturbativa, e das contribuições do condensado de gluons $\langle g^2 G^2 \rangle$ (dim. 4). A contribuição de dimensão 5 devida ao condensado $\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle$ (proporcional à m_s) é algumas vezes menor que a contribuição principal de dimensão 6, $\langle \bar{s}s \rangle^2$. A outra contribuição de dimensão 6, proporcional a $\langle g^3 G^3 \rangle$, é suprimida. As demais contribuições, de dimensão 8 e 10, são menores que o termo perturbativo por cerca de três ordens grandeza. Contudo, também é possível ver que uma contribuição de dimensão 8 (com o condensado $\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle \langle \bar{s}s \rangle$) é da ordem de grandeza de uma contribuição de dimensão 5 (o condensado misto $\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle$) - embora isto possa ser explicado pelo fato de que a contribuição de dimensão 5 é suprimida por m_s . A próxima contribuição relevante é de um condensado de dimensão 10 usualmente desprezado, $\langle g^2 G^2 \rangle \langle \bar{s}s \rangle^2$, sendo superior a contribuições de condensados de dimensão 10 que se esperariam serem dominantes (como $\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle^2$). Isto indica que para realizar um truncamento consistente da OPE devemos incluir estas contribuições.

Conhecendo as ordens de grandeza de cada uma das contribuições à OPE, o próximo passo é um estudo da convergência da OPE para M^2 pequeno (ou seja, quando a OPE é pouco confiável). Na Figura 4.2 é apresentado um estudo da convergência da OPE (para

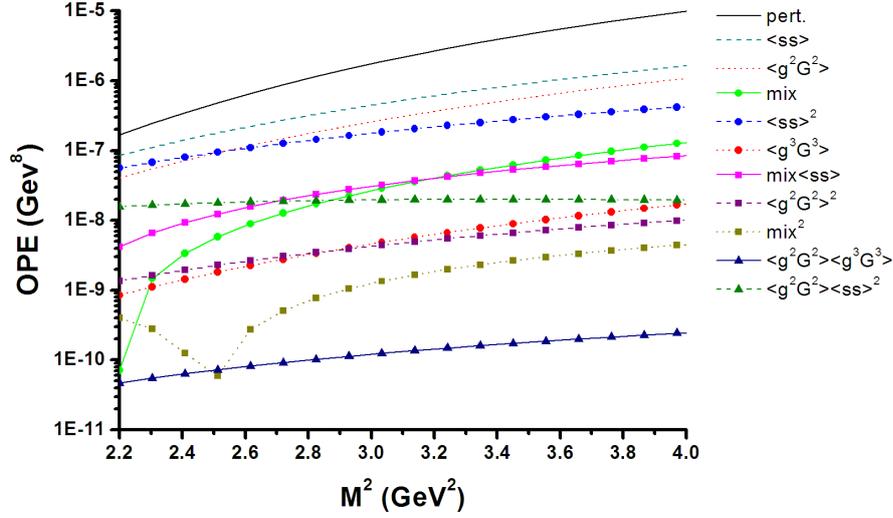


Figura 4.1: Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.

($\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$) - nesta figura, todas contribuições de condensados de mesma dimensão foram somadas e os resultados ordenados em dimensão crescente dos condensados. Vemos que o impacto da introdução dos condensados de dimensão superior a 6 é pequeno.

Impor uma boa convergência da OPE estabelece um critério para fixar um limite inferior para M^2 . Para tanto, determinamos que o impacto relativo das contribuições de dimensão 10 seja no máximo 10% no total da OPE - ou seja, estabelecemos que $|(OPE(10) - OPE(8))/OPE(10)| \lesssim 0.1$, onde $OPE(n)$ significa a OPE truncada na dimensão n . Com este critério determina-se que $M^2 > 2.4 \text{ GeV}^2$. Entretanto, este limite inferior preliminar será modificado, a seguir, ao se considerar a estabilidade da massa.

4.3.2 Estabelecendo a Janela de Borel

Como discutido na seção anterior, caso o princípio da dualidade fosse exato e a OPE não fosse truncada, a massa do estado não dependeria de M^2 . Contudo, a OPE é truncada em uma ordem finita. Isto introduz uma dependência da massa do estado com M^2 . Nesta seção, determinaremos um intervalo em M^2 em que o princípio da dualidade é válido e as regras de soma podem ser aplicadas - este intervalo é denominado *janela de Borel* para as regras de soma em questão.

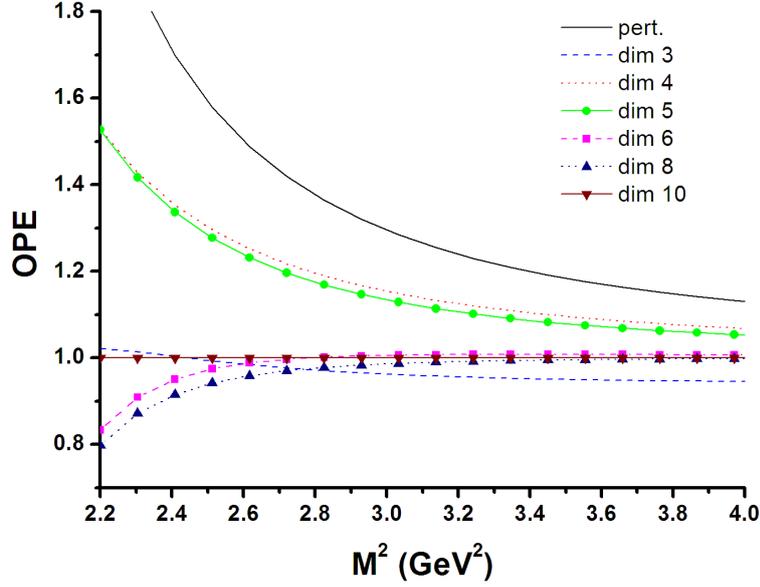


Figura 4.2: Estudo da convergência da OPE para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$, para $\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$. Cada linha é a soma da contribuição de dimensão indicada na legenda com todas linhas anteriores, dividido pelo valor total da OPE.

Uma primeira restrição ao limite inferior em M^2 é, como discutido, imposta pela convergência da OPE: $M^2 > 2.4 \text{ GeV}^2$. Outro critério que deve ser levado em conta é a estabilidade da massa - a massa do estado, calculada via (4.2), não pode depender fortemente de M^2 . Para estudar isto, calculamos a massa do estado para $\sqrt{s_0} = 5.2 \text{ GeV}$ em função de M^2 , truncando-se a OPE em contribuições de dimensão 6, dimensão 8 e dimensão 10 (Figura 4.3). Vemos que a adição de contribuições de dimensão superior tornam a dependência da massa do estado com M^2 mais suave, principalmente para M^2 pequeno. Para $M^2 \gtrsim 3 \text{ GeV}^2$, contudo, todos truncamentos fornecem aproximadamente o mesmo resultado. Truncando-se na dimensão 10, vemos que temos boa estabilidade da massa para $M^2 \gtrsim 2.8 \text{ GeV}^2$, o que fornece um limite inferior mais estrito para a janela de Borel.

Temos agora de fixar o limite superior da janela de Borel. Para tanto, usamos o critério da dominância do pólo sobre o contínuo. Isto é feito lembrando-se que parametrizamos a densidade espectral no lado fenomenológico como um pólo (o estado fundamental) mais um contínuo de estados com limiar em s_0 (equação (2.89)). Para M^2 grande, a contribuição do contínuo se torna relevante e a validade das regras de soma reduzida. Para estimar a contribuição do contínuo, tomamos $s_0 \rightarrow \infty$ no lado da OPE em (4.1) - esta é uma estimativa de $OPE_{\text{polo}+\text{contínuo}}(M^2)$. O resultado obtido considerando-se valores de s_0

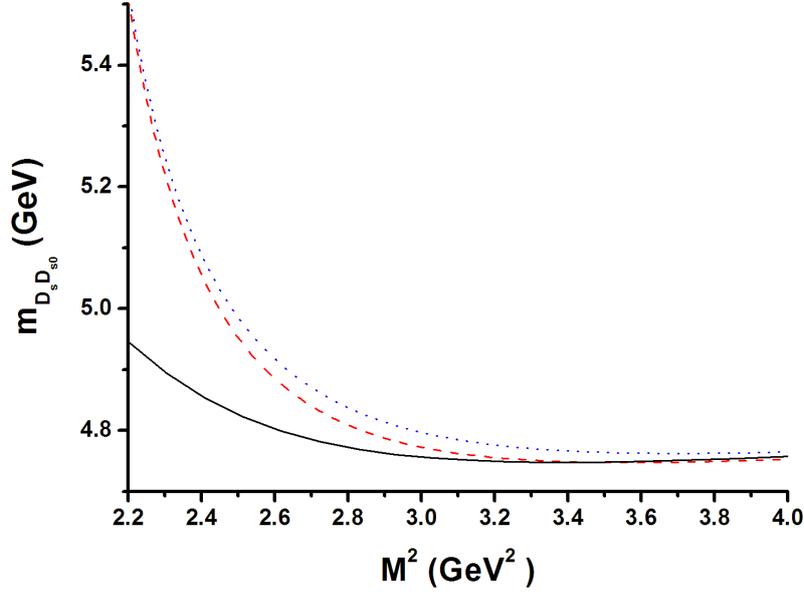


Figura 4.3: Massa do estado $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 5.2$ GeV. A linha tracejada indica a massa obtida truncando-se a OPE na dimensão 6, a linha pontilhada a massa obtida truncando-se a OPE na dimensão 8 e a linha cheia o resultado obtido quando incluímos a OPE completa até dimensão 10.

segundo a regra fenomenológica é chamado de $OPE_{\text{polo}}(M^2)$. Temos que a contribuição do contínuo é estimada como sendo

$$OPE_{\text{contínuo}}(M^2) = OPE_{\text{polo+contínuo}}(M^2) - OPE_{\text{polo}}(M^2). \quad (4.3)$$

O limite superior da janela de Borel é obtido estabelecendo-se que a contribuição relativa do pólo seja superior à contribuição do contínuo:

$$OPE_{\text{contínuo}}(M^2) > OPE_{\text{polo}}(M^2) \implies \frac{OPE_{\text{polo}}(M^2)}{OPE_{\text{polo+contínuo}}(M^2)} > \frac{OPE_{\text{contínuo}}(M^2)}{OPE_{\text{polo+contínuo}}(M^2)} \quad (4.4)$$

Na Figura 4.4 temos um exemplo da aplicação deste critério (para $\sqrt{s_0} = 5.2$ GeV). Vemos que o critério (4.4) é satisfeito para $M^2 < 3.66$ GeV², o que fixa o limite superior da janela de Borel para este s_0 . Repetindo esta análise para $\sqrt{s_0}$ de 5.1 GeV a 5.3 GeV, obtemos a Tabela 4.2. Para $\sqrt{s_0} \leq 5.0$ GeV a janela de Borel ou é muito estreita para ser considerada na análise ou não existe.

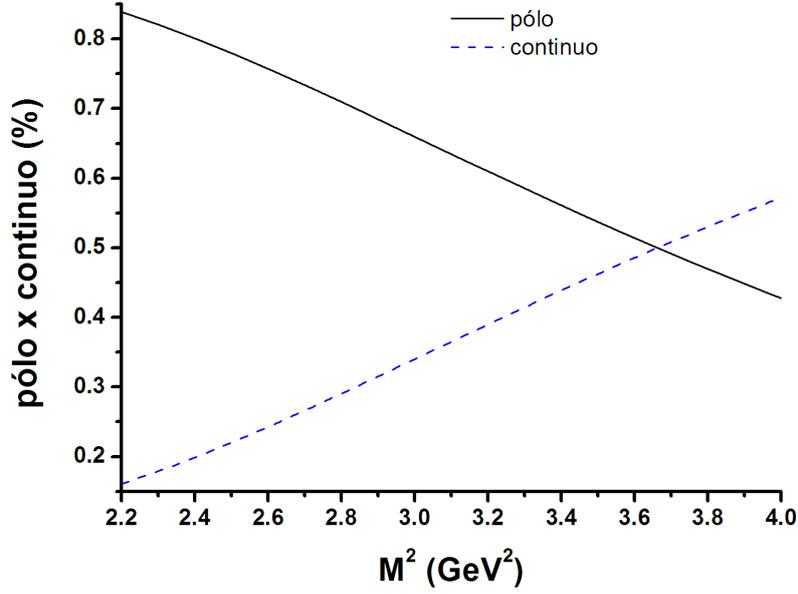


Figura 4.4: Contribuição relativa do pólo e do contínuo para a corrente $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 5.2$ GeV.

Tabela 4.2: Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$. O extremo inferior da janela de Borel é $M_{inf}^2 = 2.8$ GeV². Para $\sqrt{s_0} \leq 5.0$ GeV a janela de Borel é muito estreita ou não existe.

$\sqrt{s_0}$ (GeV)	M_{sup}^2 (GeV ²)
5.1	3.43
5.2	3.66
5.3	3.90

4.3.3 Cálculo da Massa

Com as janelas de Borel fixadas podemos partir para o cálculo da massa. Na Figura 4.5 apresentamos a massa do estado em função de M^2 , para os valores de s_0 da Tabela 4.2. Vemos que uma primeira estimativa da massa é $m_{D_s\bar{D}_{s_0}} \sim (4.7 - 4.8)$ GeV, o que sugere que os valores de s_0 escolhidos satisfazem à regra fenomenológica ($\sqrt{s_0}$ cerca de 500 MeV superior a m_H) e indica que as regras de soma são consistentes.

Para determinar um valor final para a massa e estimar o erro correspondente primeiro, para cada valor de s_0 utilizado, calculamos a massa média dentro da janela de Borel correspondente, e então consideramos os valores extremos para a massa dentro da janela de Borel. Isto fornece $m_{D_s\bar{D}_{s_0}} \sim (4.75 \pm 0.06)$ GeV - esta estimativa do erro fornece uma estimativa inicial dos erros introduzidos pelo truncamento da OPE e pela variação de s_0 .

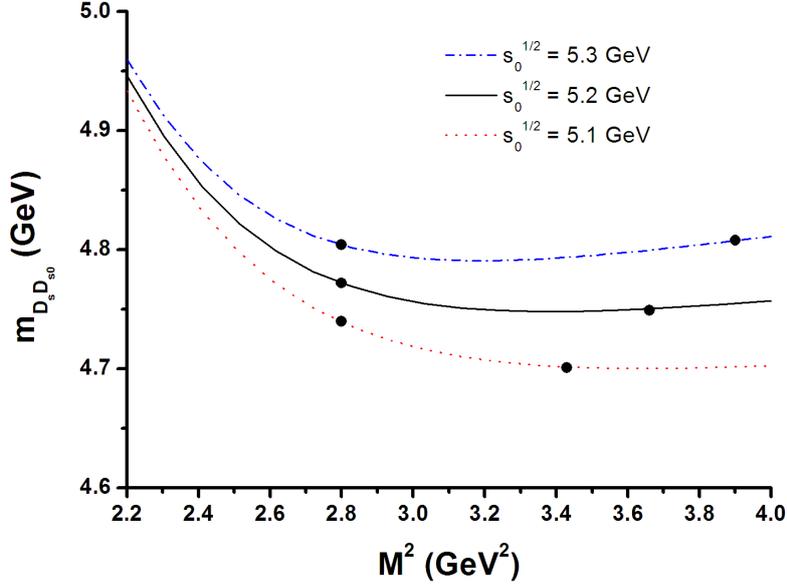


Figura 4.5: Massa do estado $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0 . As janelas de Borel para cada valor de s_0 estão indicadas pelos círculos sobre as linhas correspondentes.

Feito isto, fixamos s_0 no valor central ($\sqrt{s_0} = 5.2$ GeV) e consideremos o cálculo da massa quando variamos os parâmetros dentro das incertezas (Tabela 4.1). Além disso, para estudar o impacto da violação da hipótese de saturação do vácuo nos condensados de dimensão 6 e superior, introduzimos nos termos proporcionais a $\langle\bar{q}q\rangle^2$ um fator de proporcionalidade K . Em todas expressões em que este condensado aparece, fazemos a seguinte substituição

$$\langle\bar{q}q\rangle^2 \rightarrow K\langle\bar{q}q\rangle^2 \quad (4.5)$$

onde K varia no intervalo $0.5 \leq K \leq 2.0$ - $K = 1$ indica que a hipótese de saturação é exata. Isto fornece mais uma fonte de estimativas do erro. Com estas considerações, obtemos as estimativas dos erros indicadas na Tabela 4.3.

Considerando-se os erros devido ao truncamento da OPE e os resultados da Tabela 4.3, obtemos o resultado final para as regras de soma para o estado $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$

$$m_{D_s\bar{D}_{s_0}} = (4.78 \pm 0.54) \text{ GeV}, \quad (4.6)$$

um resultado compatível com a massa do $Y(4274)$, no limite do erro estimado.¹

¹Uma nota sobre as estimativas dos erros: em geral, na literatura, os erros relativos estimados são muito inferiores aos obtidos neste trabalho. Considerando-se a acurácia típica das regras de soma, a falta de controle sobre as aproximações tomadas, em especial a dualidade quark-hádron, que introduzem

Tabela 4.3: Estimativas dos erros devido às variações dos parâmetros, para a molécula $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$. O parâmetro K , com $0.5 \leq K \leq 2.0$, é utilizado para estudar a violação da hipótese de fatorização.

Parâmetro	Massa obtida (GeV)
m_c	(4.76 ± 0.07)
m_s	(4.76 ± 0.06)
$\langle\bar{q}q\rangle$	(4.89 ± 0.27)
m_0^2	(4.753 ± 0.003)
K	(4.80 ± 0.11)

Também, usando (4.1), podemos calcular um valor para o acoplamento λ entre a corrente interpolante e o estado molecular. Obtemos que

$$\lambda_{D_s\bar{D}_{s0}} = (0.060 \pm 0.039) \text{ GeV}^5. \quad (4.7)$$

4.4 Molécula $D_0\bar{D} + h.c.$

Para realizar o estudo das regras de soma para o parceiro molecular de $D_{s0}\bar{D}_s + h.c., D_0\bar{D} + h.c.$, tomamos as expressões (3.37) a (3.50), com a substituição $s \rightarrow u, d$, sendo que tomamos $m_{u,d} \approx 0$. Todas contribuições de condensados de dimensão ímpar, proporcionais a m_q , são nulas neste caso.

4.4.1 Convergência da OPE e Janela de Borel

Na Figura 4.6 apresentamos as contribuições de cada condensado à OPE, em escala logarítmica, para $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$. Vemos que as duas contribuições mais relevantes são as do condensado de glúons $\langle g^2 G^2 \rangle$ e do condensado de quatro quarks $\langle\bar{q}q\rangle^2$. As demais contribuições, de dimensão 8 e 10, seguem a mesma ordenação da corrente $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$

Realizando o estudo da convergência da OPE (Figura 4.7), é possível ver que boa convergência é obtida para $M^2 \gtrsim 2.4 \text{ GeV}^2$. Contudo, analisando também a estabilidade da massa (Figura 4.8) vemos que devemos escolher $M_{inf}^2 = 2.7 \text{ GeV}^2$. Comparando a

erros que não podem ser estimados adequadamente com as técnicas presentes, e as várias arbitrariedades tomadas na análise das regras de soma (como, por exemplo, os critérios para fixar as janelas de Borel), acreditamos que estas estimativas são demasiadamente otimistas. Para obter uma estimativa do erro final que não seja subestimada, tomamos duas medidas: a primeira é não considerar os erros obtidos como incertezas, de origem estatística - isto é impossível face às arbitrariedades realizadas na análise das QCDSR e à impossibilidade de estimar confiavelmente os erros introduzidos pelas aproximações; a segunda é somar linearmente, ao invés de quadraticamente, os erros - isto resulta num erro final superior, possivelmente mais condizente com as regras de soma.

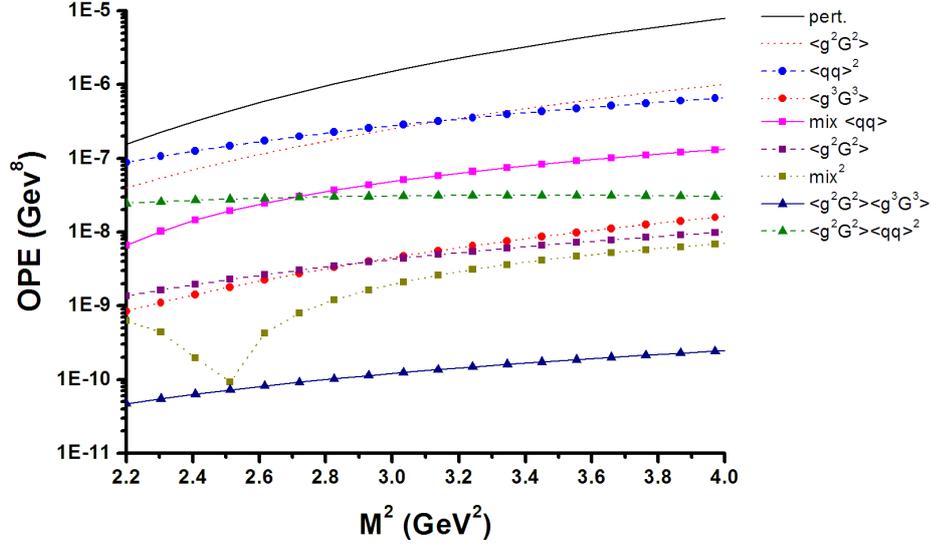


Figura 4.6: Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.

estabilidade da massa obtida no caso da molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$, Figura 4.3, vemos que o comportamento das curvas de massa é invertido para M^2 pequeno e que temos curvas menos estáveis para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$.

O limite superior da janela de Borel é fixado, para cada valor de s_0 utilizado, através do critério da dominância do pólo. A partir da Figura 4.9 vemos que, para $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$, $M_{sup}^2 = 3.40 \text{ GeV}^2$. Na Tabela 4.4 os limites de massa de Borel para cada s_0 são apresentados. Para $\sqrt{s_0} \leq 4.8 \text{ GeV}$ a janela de Borel ou é muito estreita ou não existe.

4.4.2 Cálculo da Massa

A partir da Figura 4.8 vemos que uma primeira estimativa da massa é $\sim 4.5 \text{ GeV}$, o que indica que a escolha de s_0 é consistente com a massa obtida pelas regras de soma. Considerando a estabilidade da massa dentro das janelas de Borel para os valores de s_0 escolhidos, obtemos $m_{D\bar{D}_0} \sim (4.52 \pm 0.08) \text{ GeV}$.

A seguir, com s_0 fixo no valor central, $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$, levamos em conta variações dos parâmetros dentro das incertezas indicadas na Tabela 4.1, junto com a variação do parâmetro da violação de hipótese de saturação K , obtendo os resultados para as estimativas dos erros indicados na Tabela 4.5.

Levando em conta todas estimativas dos erros, obtemos o valor final para a massa do

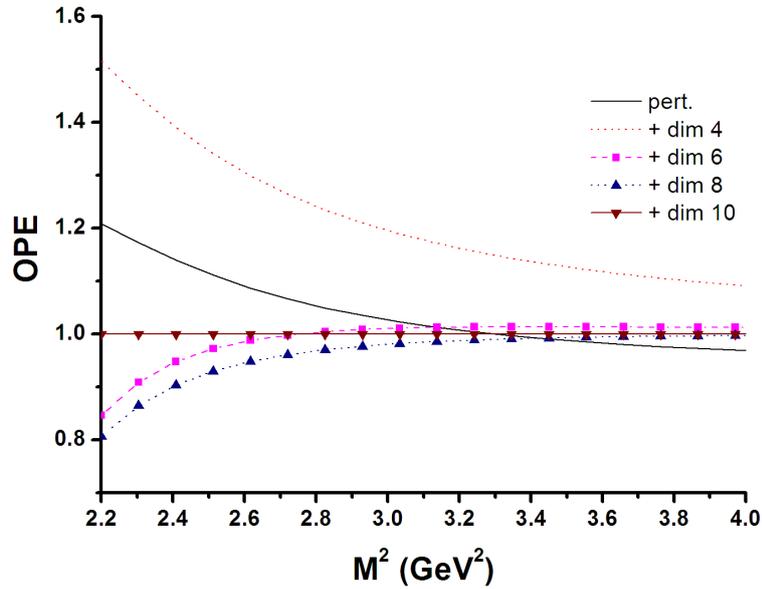


Figura 4.7: Estudo da convergência da OPE para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$, para $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$. Cada linha é a soma da contribuição de dimensão indicada na legenda com todas linhas anteriores, dividido pelo valor total da OPE.

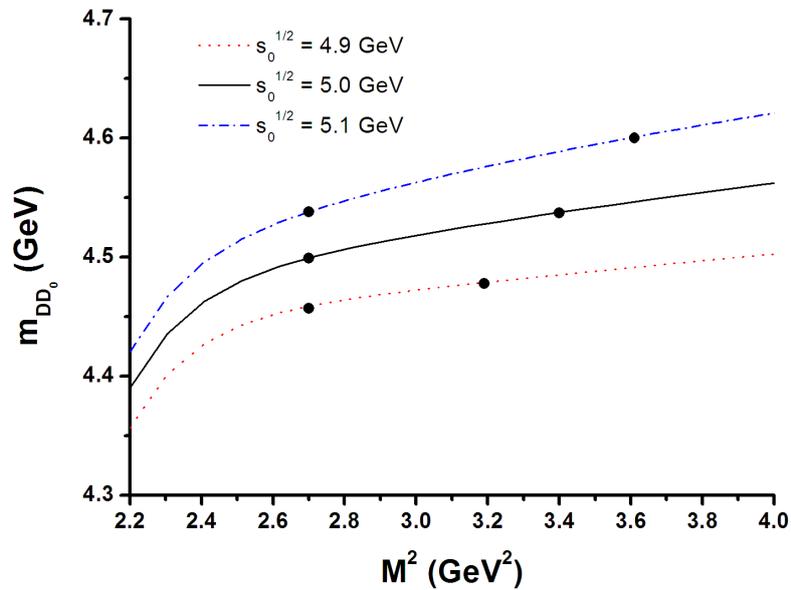


Figura 4.8: Massa do estado $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0 . As janelas de Borel para cada valor de s_0 estão indicadas pelos círculos sobre as linhas correspondentes.

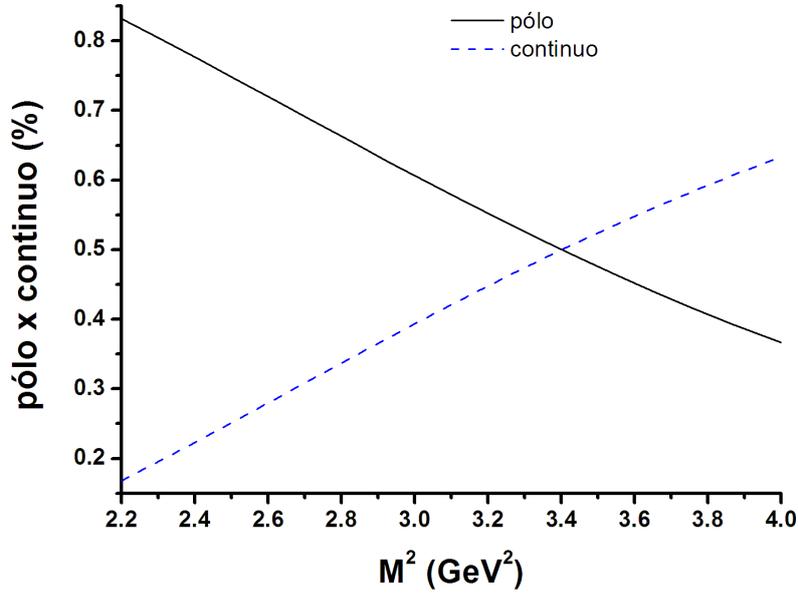


Figura 4.9: Contribuição relativa do polo e do contínuo para a corrente $D_0\bar{D} + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 5 \text{ GeV}$.

Tabela 4.4: Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$. O extremo inferior da janela de Borel é $M_{inf}^2 = 2.7 \text{ GeV}^2$. Para $\sqrt{s_0} \leq 4.8 \text{ GeV}$ a janela de Borel é muito estreita ou não existe.

$\sqrt{s_0}$ (GeV)	M_{sup}^2 (GeV) ²
4.9	3.19
5.0	3.40
5.1	3.61

Tabela 4.5: Estimativas dos erros devido às variações dos parâmetros, para a molécula $D_0\bar{D} + h.c.$. O parâmetro K , considerado no intervalo $0.5 \leq K \leq 2.0$, é utilizado para estudar a violação da hipótese de fatorização.

Parâmetro	Massa obtida (GeV)
m_c	$(4.52 \pm 0,05)$
$\langle \bar{q}q \rangle$	(4.62 ± 0.20)
m_0^2	(4.519 ± 0.004)
K	(4.61 ± 0.18)

estado $D_0\bar{D} + h.c.$,

$$m_{D\bar{D}_0} = (4.55 \pm 0.49) \text{ GeV}. \quad (4.8)$$

Também obtemos o valor do acoplamento da corrente interpolante com a molécula,

$$\lambda_{D\bar{D}_0} = (0.054 \pm 0.039) \text{ GeV}^5. \quad (4.9)$$

4.5 Molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$

O cálculo apresentado no Capítulo 3 e nas seções anteriores pode ser usado para estimar a massa das moléculas com quark b , $B_{(s)0}\bar{B}_{(s)} + h.c.$, bastando substituir $c \rightarrow b$. Isto permite fazer previsões sobre o espectro de estados do tipo do botomônio. Os cálculos e a discussão são semelhantes aos apresentados nas seções anteriores; nos concentraremos apenas nos principais resultados. Vamos iniciar pela corrente $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$.

Na Figura 4.10 temos a contribuição à OPE (em escala logarítmica) de cada condensado, para $\sqrt{s_0} = 11.3 \text{ GeV}$. Em comparação com o gráfico análogo para a molécula $D_{(s)0}\bar{D}_{(s)} + h.c.$, Figura 4.1, temos que, embora por um lado a contribuição dos condensados $\langle g^3 G^3 \rangle$ e de dimensão 8 e 10 sejam suprimidas por várias ordens de grandeza, o condensado de dimensão 8 $\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle \langle \bar{s}s \rangle$ possui uma contribuição da mesma ordem de grandeza que o condensado de gluons $\langle g^2 G^2 \rangle$ e o condensado misto $\langle \bar{s}g\sigma \cdot Gs \rangle$. Na Figura 4.11 vemos que o critério de convergência da OPE é satisfeito para quase todo M^2 . Contudo, examinando a estabilidade da massa (Figura 4.13), pode-se concluir que o limite inferior da janela de Borel é $M_{inf}^2 = 7.0 \text{ GeV}^2$. O critério da dominância do pólo sobre o contínuo (ilustrado na Figura 4.12 para $\sqrt{s_0} = 11.3 \text{ GeV}$) determina os limites superiores de massa de Borel apresentados na Tabela 4.6. A Figura 4.13 apresenta a massa da molécula em função de M^2 . Vemos que o critério fenomenológico para s_0 é satisfeito. Levando-se em conta variações em s_0 e em todos parâmetros (Tabela 4.1) calculamos a massa da molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$ e o respectivo acoplamento,

$$m_{B_s\bar{B}_{s_0}} = (10.80 \pm 0.50) \text{ GeV} \quad \text{e} \quad (4.10)$$

$$\lambda_{B_s\bar{B}_{s_0}} = (0.12 \pm 0.11) \text{ GeV}^5. \quad (4.11)$$

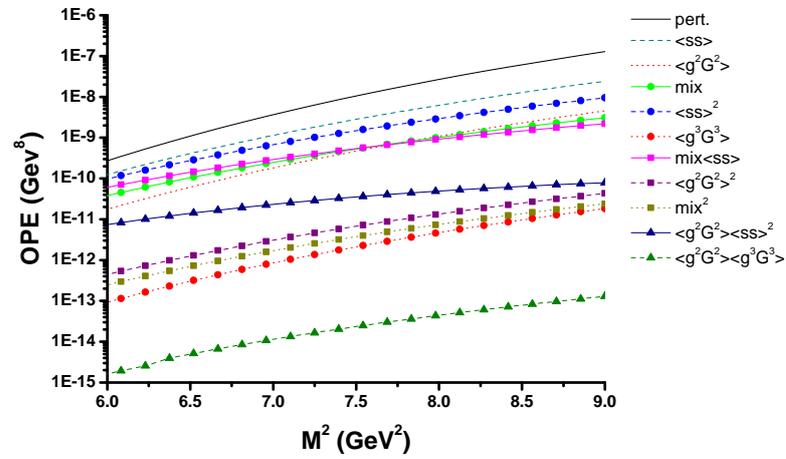


Figura 4.10: Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 11.3 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.

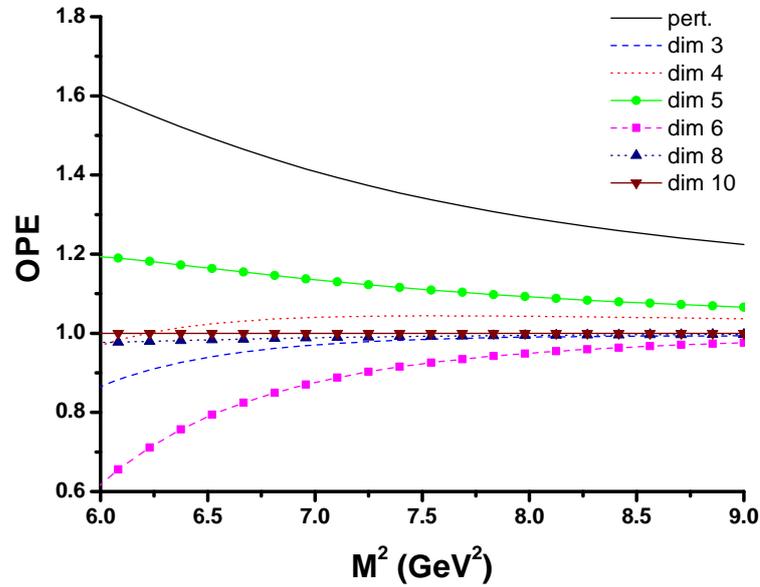


Figura 4.11: Estudo da convergência da OPE para a molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$, para $\sqrt{s_0} = 11.3 \text{ GeV}$. Cada linha é a soma da contribuição de dimensão indicada na legenda com todas linhas anteriores, dividido pelo valor total da OPE.

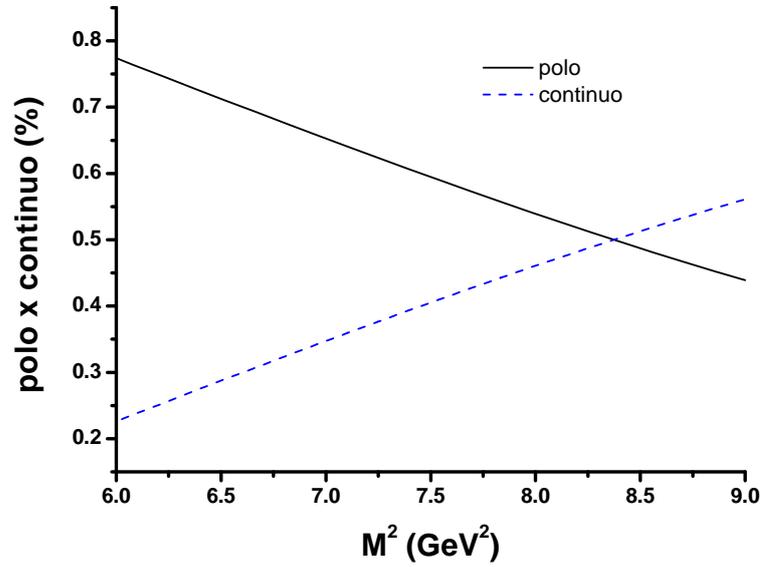


Figura 4.12: Contribuição relativa do pólo e do contínuo para a corrente $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 11.3$ GeV.

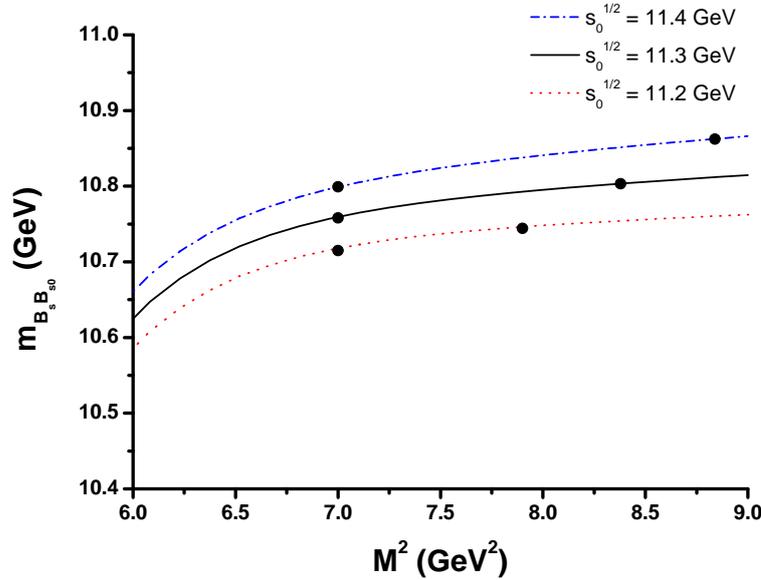


Figura 4.13: Massa do estado $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0 . As janelas de Borel para cada valor de s_0 estão indicadas pelos círculos sobre as linhas correspondentes.

4.6 Molécula $B_0\bar{B} + h.c.$

Vamos agora estudar o parceiro molecular de $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$, $B_0\bar{B} + h.c.$. Na Figura 4.14 temos a contribuição à OPE (em escala logarítmica) de cada condensado, para $\sqrt{s_0} = 11.1$ GeV - o resultado é qualitativamente semelhante ao caso da Figura 4.6; a principal diferença está que as contribuições de dimensão superior (à exceção de $\langle\bar{s}g\sigma \cdot Gs\rangle\langle\bar{s}s\rangle$) são suprimidas por ordens de grandeza maiores. A partir da Figura 4.15 vemos que o critério da convergência da OPE é satisfeito para qualquer M^2 no intervalo considerado; contudo, a estabilidade da massa (Figura 4.17) sugere $M_{inf}^2 = 7.0$ GeV². O critério da dominância do pólo sobre o contínuo (mostrado, na Figura 4.16, para $\sqrt{s_0} = 11.1$ GeV) fixa os limites superiores de massa de Borel (Tabela 4.6). A partir da Figura 4.17, vemos que a escolha de s_0 é razoável. Finalmente, considerando variações em s_0 e nos parâmetros, obtemos que

$$m_{B\bar{B}_0} = (10.55 \pm 0.37) \text{ GeV} \quad e \quad (4.12)$$

$$\lambda_{B\bar{B}_0} = (0.110 \pm 0.068) \text{ GeV}^5. \quad (4.13)$$

4.7 Discussão

Resumimos, na Tabela 4.8, os resultados obtidos para todas correntes moleculares estudadas. Vemos que o resultado obtido para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$ é compatível, dentro da estimativa do erro, com a massa do estado Y(4274) - contudo, esta compatibilidade é no limite do erro estimado. O resultado obtido para o parceiro molecular $D_0\bar{D} + h.c.$ é consistente com o acúmulo em cerca de 4200 MeV observado no espectro de massa invariante do $B \rightarrow J/\psi\omega K$, Figura 1.4.

A massa predita para o parceiro molecular, $D_0\bar{D} + h.c.$, é cerca de 230 MeV abaixo da massa obtida para a molécula $D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$. Este resultado é consistente com a diferença de conteúdos de quarks das duas moléculas. Cabe notar que este cenário é contrário ao que surge no estudo das moléculas parceiras $D_s^*D_s^*$ e D^*D^* com $J^{PC} = 0^{++}$ via regras de soma [38]. Incluindo parte dos condensados de dimensão 8, determina-se que

$$m_{D_s^*\bar{D}_s^*} = (4.14 \pm 0.09) \text{ GeV} \quad e \quad m_{D^*\bar{D}^*} = (4.13 \pm 0.11) \text{ GeV}. \quad (4.14)$$

Neste caso, os resultados obtidos para ambas moléculas levam a praticamente a mesma massa, a despeito da alteração da estrutura de sabor. Uma possível explicação para este fato seria que, para a molécula $D^*\bar{D}^*$, os mésons D^* poderiam interagir via troca

Tabela 4.6: Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$. O extremo inferior da janela de Borel é $M_{inf}^2 = 7.0 \text{ GeV}^2$. Para $\sqrt{s_0} \leq 11.1 \text{ GeV}$ a janela de Borel é muito estreita ou não existe.

$\sqrt{s_0}(\text{GeV})$	$M_{sup}^2(\text{GeV}^2)$
11.2	7.90
11.3	8.38
11.4	8.84

Tabela 4.7: Extremo superior da janela de Borel em função do limiar do contínuo $\sqrt{s_0}$, para a molécula $B_0\bar{B} + h.c.$. O extremo inferior da janela de Borel é $M_{inf}^2 = 7.0 \text{ GeV}^2$. Para $\sqrt{s_0} \leq 10.9 \text{ GeV}$ a janela de Borel é muito estreita ou não existe.

$\sqrt{s_0}(\text{GeV})$	$M_{sup}^2(\text{GeV}^2)$
11.0	7.47
11.1	7.89
11.2	8.31

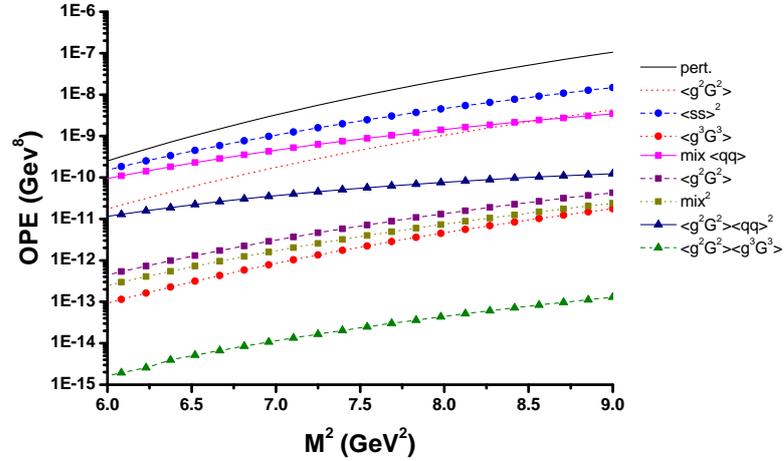


Figura 4.14: Valor absoluto das contribuições à OPE para a molécula $B_0\bar{B} + h.c.$, ordenadas por condensado, para $\sqrt{s_0} = 11.1 \text{ GeV}$ e em escala logarítmica.

Tabela 4.8: Massas e acoplamentos obtidos - resultados finais.

Corrente Interpolante	Massa (GeV)	$\lambda (\text{GeV}^5)$
$D_{s_0}\bar{D}_s + h.c.$	4.78 ± 0.54	0.060 ± 0.039
$D_0\bar{D} + h.c.$	4.55 ± 0.49	0.054 ± 0.039
$B_{s_0}\bar{B}_s + h.c.$	10.80 ± 0.50	0.12 ± 0.11
$B_0\bar{B} + h.c.$	10.55 ± 0.37	0.110 ± 0.068

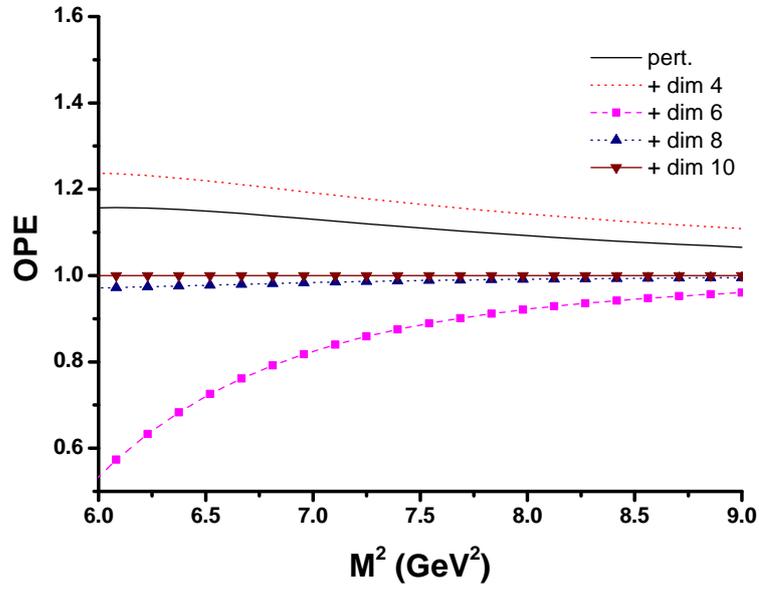


Figura 4.15: Estudo da convergência da OPE para a molécula $B_0\bar{B} + h.c.$, para $\sqrt{s_0} = 11.1$ GeV. Cada linha é a soma da contribuição de dimensão indicada na legenda com todas linhas anteriores, dividido pelo valor total da OPE.

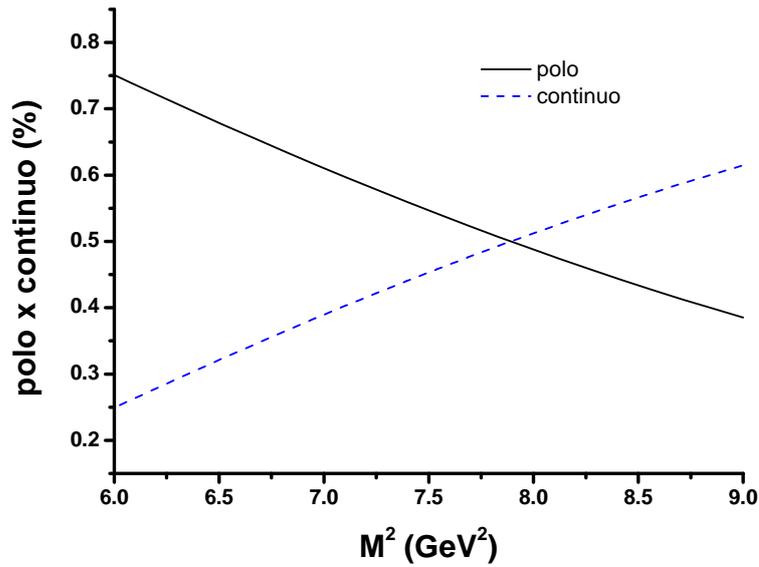


Figura 4.16: Contribuição relativa do pólo e do contínuo para a corrente $B_0\bar{B} + h.c.$, em função da massa de Borel M^2 , para $\sqrt{s_0} = 11.1$ GeV.

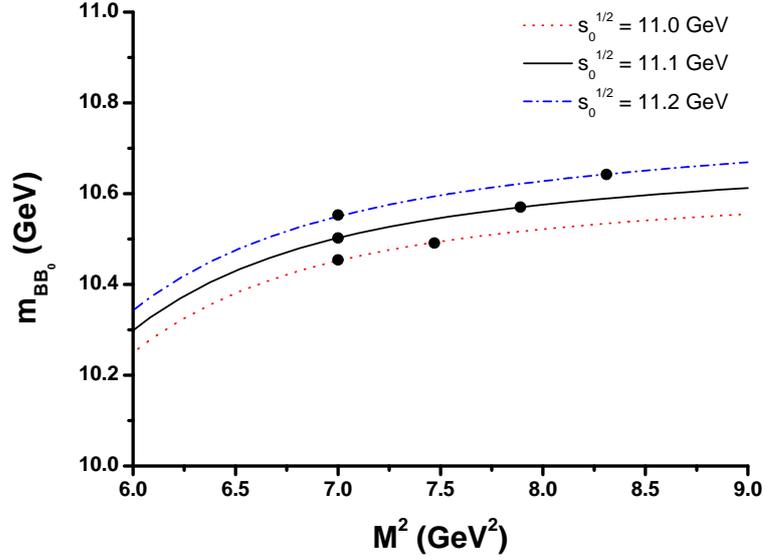


Figura 4.17: Massa do estado $B_0 \bar{B} + h.c.$ em função da massa de Borel, para alguns valores de s_0 . As janelas de Borel para cada valor de s_0 estão indicadas pelos círculos sobre as linhas correspondentes.

de pions, o que não pode ocorrer com sua parceira molecular $D_s^* \bar{D}_s^*$. Como as regras de soma não levam em conta trocas de mésons leves, este mecanismo poderia reduzir a massa da molécula $D^* \bar{D}^*$ do valor calculado em [38] até a massa observada do $Y(3930)$. Analogamente, na molécula $D_0 \bar{D} + h.c.$ pode ocorrer trocas de pions entre os mésons D , enquanto que na molécula $D_{s_0} \bar{D}_s + h.c.$ não. Assim, é possível que massa do $D_0 \bar{D} + h.c.$ seja menor que o resultado calculado via regras de soma e indicado na Tabela 4.8, estando mais próximo do acúmulo observado em 4200 MeV.

No caso das regras de soma para os parceiros moleculares $D_s^* \bar{D}_s^*$ e $D^* \bar{D}^*$, os valores dos acoplamentos λ obtidos são

$$\lambda_{D_s^* \bar{D}_s^*} = (0.0422 \pm 0.0083) \text{ GeV}^5 \quad \text{e} \quad \lambda_{D^* \bar{D}^*} = (0.0420 \pm 0.0096) \text{ GeV}^5. \quad (4.15)$$

Os acoplamentos obtidos para as moléculas $D_{s_0} \bar{D}_s + h.c.$ e $D_0 \bar{D} + h.c.$ são da mesma ordem de grandeza que os obtidos para as moléculas $D_s^* \bar{D}_s^*$ e $D^* \bar{D}^*$, o que sugere que as correntes interpolantes utilizadas descrevem bem os estados moleculares em questão.

Os resultados da Tabela 4.8 podem ser ainda comparados com resultados calculados em QCDSR para modelos de tetraquarks pseudo-escalares [39], onde os autores obtiveram, para seis correntes possíveis de tetraquarks com $J^{PC} = 0^{-+}$, massas entre 4.55 e 4.72 GeV, sendo portanto compatíveis com os resultados calculados para as correntes moleculares.

5 Conclusões

O estudo, via regras de soma da QCD, da molécula $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$ com $J^{PC} = 0^{-+}$ leva a resultados para a massa compatíveis, dentro do erro estimado, com a massa da ressonância $Y(4274)$, embora essa compatibilidade seja no limite do intervalo. As regras de soma utilizadas foram auto-consistentes, satisfazendo os critérios de convergência da OPE, estabilidade da massa, existência de janelas de Borel e consistência nas escolhas dos limiares do contínuo; caso os critérios de auto-consistência não fossem satisfeitos (supondo que a massa calculada se mantivesse inalterada), a confiança no resultado obtido para a massa das moléculas seria reduzida e seria possível afirmar que as estruturas moleculares estudadas não são favorecidas pelas regras de soma. Em suma, não podemos descartar a estrutura molecular $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$ para a ressonância $Y(4274)$.

O estudo do parceiro molecular de $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$, $D_0\bar{D} + h.c.$, revelou uma massa cerca de 300 MeV acima do acúmulo observado na Figura 1.4, embora ainda compatível com ele. A diferença de massa entre as duas moléculas, ~ 230 MeV, pode ser explicada pela diferença na estrutura de sabor das moléculas. Isto vai de encontro aos estudos, via regras de soma, dos parceiros moleculares $D_s^*\bar{D}_s^*$ e $D^*\bar{D}^*$. Também foram realizadas previsões para os estados moleculares do tipo do botomônio $B_{s0}\bar{B}_s + h.c.$ e $B_0\bar{B} + h.c.$.

Os resultados relativos às moléculas $D_{s0}\bar{D}_s + h.c.$ e $D_0\bar{D} + h.c.$ foram publicados em [40].

APÊNDICE A – Convenções, Notação e Fórmulas Úteis

O sistema de unidades utilizado é o natural, onde

$$\hbar = c = 1. \tag{A.1}$$

A.1 Métrica

A assinatura usada para a métrica de Minkowski em 4 dimensões $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) é

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

A.2 Álgebra de Dirac

As matrizes de Dirac γ_μ satisfazem a álgebra de Dirac [26]

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}. \tag{A.3}$$

Independentemente da representação e dimensionalidade, as matrizes de Dirac satisfazem a propriedade

$$\gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 = \gamma_\mu^\dagger. \tag{A.4}$$

Num espaço-tempo de 4 dimensões, temos que

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4. \tag{A.5}$$

Introduzimos também a notação usual (a é um 4-vetor qualquer)

$$\not{a} \equiv a_\mu \gamma^\mu \quad (\text{A.6})$$

Em quatro dimensões espaço-temporais a mínima dimensionalidade de uma representação da álgebra de Dirac é 4. Neste trabalho vamos usar a representação de Dirac:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

onde 0,1 e $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ são as matrizes nula, identidade e de Pauli 2x2.

Em quatro dimensões é possível definir a matriz γ_5

$$\gamma_5 \equiv i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3, \quad (\text{A.8})$$

onde $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ é o (pseudo)tensor totalmente anti-simétrico em 4 dimensões.

A matriz γ_5 anticomuta com todas matrizes de Dirac

$$\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Além disso, γ_5 é hermiteana

$$\gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad (\text{A.10})$$

e satisfaz

$$\gamma_5^2 = 1. \quad (\text{A.11})$$

É útil também definir as matrizes $\sigma_{\mu\nu}$:

$$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] = i(\gamma_\mu \gamma_\nu - g_{\mu\nu}) \quad (\text{A.12})$$

Temos que $\sigma_{\mu\nu}$ satisfaz as propriedades

$$\sigma^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} = 12 \quad \text{e} \quad (\text{A.13})$$

$$\sigma^{\mu\nu} \not{a} \sigma_{\mu\nu} = 0. \quad (\text{A.14})$$

A.3 Traços de Matrizes de Dirac

Em quatro dimensões os traços de produtos de matrizes de Dirac satisfazem as seguintes relações:

$$\text{Tr} [\text{num. impar de matrizes de Dirac}] = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\text{Tr} [1] = 4 \quad (\text{A.16})$$

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu} \quad (\text{A.17})$$

$$\text{Tr} [\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] = 4(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}) \quad (\text{A.18})$$

$$\text{Tr} [\gamma_5] = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu] = 0 \quad (\text{A.20})$$

$$\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu] = 0 \quad (\text{A.21})$$

$$\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho] = 0 \quad (\text{A.22})$$

$$\text{Tr} [\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma] = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (\text{A.23})$$

$$\text{Tr} [\sigma_{\mu\nu}] = 0 \quad (\text{A.24})$$

A.4 Geradores de SU(3)

Os geradores de SU(3), t_{ab}^A (onde $A = 1, 2, \dots, 8$ e $a, b = 1, 2, 3$ são o índice do gerador e os índices de cor, respectivamente), são matrizes hermiteanas ($t^{A\dagger} = t^A$) e de traço nulo,

$$\text{Tr} [t^A] \equiv t_{aa}^A = 0, \quad (\text{A.25})$$

e que satisfazem a relação de comutação fundamental

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C, \quad (\text{A.26})$$

onde f^{ABC} são as constantes de estrutura de SU(3).

As seguintes propriedades dos geradores de SU(3) t_{ab}^A também são necessárias neste trabalho:

$$\text{Tr} [t^A t^B] = \frac{\delta^{AB}}{2} \quad (\text{A.27})$$

$$t_{ab}^A t_{cd}^A = \frac{1}{2} \left(\delta_{ad} \delta_{bc} - \frac{1}{3} \delta_{ab} \delta_{cd} \right) \quad (\text{A.28})$$

A.5 Identidade Útil

A identidade a seguir é útil no cálculo de diagramas que envolvem linhas gluônicas.

$$\langle : g^2 G_{\mu\nu}^A G_{\alpha\beta}^B : \rangle = \frac{\delta^{AB}}{3 \cdot 2^5} \langle g^2 G^2 \rangle (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}) \quad (\text{A.29})$$

Para provar esta identidade, basta notar que a estrutura indicial no lado direito é a única permitida (pois os índices A e B correspondem a gluons distintos, e o tensor de campo $G_{\mu\nu}$ é anti-simétrico nos índices μ, ν). Logo, o lado esquerdo é proporcional ao lado direito. Para calcular a constante de proporcionalidade, basta contrair ambos lados com $\delta^{AB}(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha})$.

APÊNDICE B – O Propagador Não-perturbativo

B.1 Propagador não-perturbativo para quarks leves

Reunindo os resultados descritos no Capítulo 2 temos que, para quarks leves ($q = u, d, s$), o propagador não-perturbativo $S_{ab}^{np}(x)$ é a soma dos seguintes termos, acompanhados de suas respectivas representações diagramáticas:

$\delta_{ab} \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$	
$-\delta_{ab} \frac{m_q}{2^2 \pi^2 x^2}$	
$-\frac{\delta_{ab}}{3 \cdot 2^2} \langle \bar{q}q \rangle$	
$i\delta_{ab} \frac{m_q}{3 \cdot 2^4} \not{x} \langle \bar{q}q \rangle$	
(*) $-i t_{ab}^B \frac{g G_{\mu\nu}^B(0)}{2^5 \pi^2 x^2} (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x})$	
(*) $-t_{ab}^B \frac{m_q g G_{\mu\nu}^B(0)}{2^5 \pi^2} \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2)$	
(Y) $-\delta_{ab} \frac{m_q \langle g^2 G^2 \rangle}{3 \cdot 2^9 \pi^2} x^2 \ln(-x^2)$	
(Y) $-\frac{x^4}{3^3 \cdot 2^{10}} \langle \bar{q}q \rangle \langle g^2 G^2 \rangle \delta_{ab}$	
$-\delta_{ab} \frac{x^2}{3 \cdot 2^6} \langle \bar{q}g\sigma \cdot Gq \rangle$	
$i\delta_{ab} \frac{x^2 m_q}{3^2 \cdot 2^7} \not{x} \langle \bar{q}g\sigma \cdot Gq \rangle$	

$$\begin{aligned}
(**) \quad & -t_{ab}^B \frac{1}{3 \cdot 2^6} \sigma_{\mu\nu} \langle \bar{q} g \sigma \cdot G q \rangle & \text{---} \bullet \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \bullet \text{---} \\
(**) \quad & i t_{ab}^B \frac{m_q}{3 \cdot 2^8} \langle \bar{q} g \sigma \cdot G q \rangle (\not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x}) & \text{---} \bullet \times \bullet \text{---} \\
(**) \quad & -\frac{x^2}{3 \cdot 2^{10}} \langle \bar{q} q \rangle \langle g^2 G^2 \rangle \sigma_{\mu\nu} \tau_{ab}^B & \text{---} \bullet \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \bullet \text{---}
\end{aligned}$$

Esta expansão é válida no gauge do ponto fixo ($x^\mu A_\mu = 0$) e até primeira ordem na massa do quark leve, m_q . Os termos marcados com (**) são os termos não-fatorizáveis e exigem um cuidado especial. Estes termos do propagador sempre devem estar associados a uma linha de gluons perturbativa em outro propagador, com o termo gG omitido. Outra menção deve ser feita às linhas com emissão de gluons, marcadas com (*). Quando são associadas com outra linha (*), a tomada do valor esperado no vácuo deve ser subentendida. Com isso, o uso da identidade (A.29) permite reescrever o resultado em termos do condensado de gluons $\langle g^2 G^2 \rangle$. As linhas marcadas com (Y) vem do cálculo de um diagrama com dois gluons externos - este resultado pode ser encontrado em [41].

B.2 Propagador não-perturbativo para quarks pesados

Para quarks pesados ($Q = c, b$), a expansão em m_Q não pode ser mais realizada. O propagador não-perturbativo para quarks pesados, portanto, é escrito no espaço dos momentos. Além disso, neste caso não é necessário levar em conta condensados de quarks - eles são suprimidos pela equação (2.76). O propagador é a soma das parcelas a seguir, acompanhadas de suas respectivas representações diagramáticas [28]:

$$\begin{aligned}
& i \delta_{ab} \frac{\not{p} + m_Q}{p^2 - m_Q^2} & \text{---} \longrightarrow \\
(*) \quad & -\frac{i}{4} g_s^B t_{ab}^B G_{\mu\nu}^B(0) \frac{\sigma^{\mu\nu} \not{p} + \not{p} \sigma^{\mu\nu} + 2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 - m_Q^2)^2} & \text{---} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \longrightarrow \\
& \frac{i m_Q \delta_{ab}}{3 \cdot 2^2} \langle g^2 G^2 \rangle \frac{p^2 + m_Q \not{p}}{(p^2 - m_Q^2)^4} & \text{---} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \longrightarrow \\
& \frac{i \delta_{ab}}{3 \cdot 2^4} \langle g^3 G^3 \rangle \frac{\not{p}(p^2 + 7m_Q^2) + m_Q(6p^2 + 2m_Q^2)}{(p^2 - m_Q^2)^5} & \text{---} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{gluon} \\ \downarrow \end{array} \longrightarrow
\end{aligned}$$

APÊNDICE C – Transformada de Borel

Neste apêndice descreveremos a transformada de Borel, discutiremos sua relação com a transformada de Laplace e listaremos as transformadas usadas nesta dissertação.

A transformada de Borel de uma função $f : D \subset \Re \rightarrow \Re$ é a função $\hat{f} : \hat{D} \subset \Re \rightarrow \Re$ definida por

$$\beta [f(Q^2)] = \hat{f}(M^2) \equiv \lim_{\substack{n \rightarrow \infty, Q^2 \rightarrow \infty \\ M^2 = Q^2/n \text{ finito}}} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left(-\frac{d}{dQ^2} \right)^n f(Q^2) \quad (\text{C.1})$$

O domínio da transformada de Borel, \hat{D} , é dado por todo M^2 tal que o limite acima exista.

Impondo certas condições sobre $f(Q^2)$, é possível mostrar que a transformada de Borel é a transformada inversa de Laplace. Post [42] demonstrou esta equivalência, sob condições bem gerais. Para nossos fins, o resultado mais restrito a seguir é suficiente (conf. [43] para uma demonstração). Temos que vale o teorema:

Teorema - Fórmula de Inversão de Post Se $f : [0, \infty) \rightarrow \Re$ é uma função contínua e se f satisfizer, para algum b real,

$$\sup_{Q^2 > 0} \frac{f(Q^2)}{e^{bQ^2}} < \infty \quad (\text{f é de ordem exponencial}) \quad (\text{C.2})$$

então a transformada de Laplace de f , $F(s)$, existe para todo $s > b$. Além disso $F(s)$ é infinitamente diferenciável para $s > b$ e

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1} [F(s)] = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{t} \right)^{k+1} F^{(k)} \left(\frac{k}{t} \right) \quad (\text{C.3})$$

para $\forall t \in \Re, t > 0$, onde $F^{(k)}$ é a k -ésima derivada de F .

Escrevendo $Q^2 = k/t$, temos que $M^2 = Q^2/k = 1/t$ é constante. Assim, (C.3) é equivalente a (C.1). Todas funções contínuas de crescimento suficientemente lento,

como polinômios, funções racionais e exponenciais, são de ordem exponencial. Assim, este teorema permite escrever imediatamente transformadas de Borel consultando-se uma tabela de transformadas de Laplace.

Logo, podemos escrever imediatamente as seguintes transformadas de Borel utilizadas neste trabalho

$$\beta [(Q^2)^n] = 0, n \geq 0 \quad (C.4)$$

$$\beta \left[\frac{1}{(Q^2)^n} \right] = \frac{1}{(n-1)!(M^2)^{n-1}}, n > 0 \quad (C.5)$$

$$\beta \left[\frac{1}{(Q^2 + s)^n} \right] = \frac{e^{-s/M^2}}{(n-1)!(M^2)^{n-1}}, n > 0 \quad (C.6)$$

Outras transformadas úteis são obtidas usando-se as expressões acima. Por exemplo, temos que

$$\beta \left[\frac{Q^2}{(Q^2 + s)^n} \right] = \frac{e^{-s/M^2}}{(n-2)!(M^2)^{n-2}} \left[1 - \frac{s}{M^2} \frac{1}{n-1} \right], n > 1, \quad (C.7)$$

onde o lado direito é obtido somando e subtraindo s no numerador do lado esquerdo e então usando (C.6). Também temos

$$\beta \left[\frac{Q^4}{(Q^2 + s)^n} \right] = \frac{e^{-s/M^2}}{(n-3)!(M^2)^{n-3}} \left[1 - 2 \frac{s}{M^2} \frac{1}{n-2} + \frac{s^2}{M^4} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \right], n > 2, \quad (C.8)$$

obtida considerando o binômio $(Q^2 + s)^2$ e (C.6).

APÊNDICE D – Cálculo das Integrais

No cálculo de $\Pi^{\text{OPE}}(q)$ é recorrente o aparecimento de integrais da forma

$$\int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 x e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x} \frac{1}{(p_1^2 - m_c^2)^m (p_2^2 - m_c^2)^n (x^2)^o}, \quad (\text{D.1})$$

onde m e n são inteiros positivos, o é inteiro e outras de formas similares, como a que surge no cálculo do diagrama perturbativo, dado pela equação (3.28). De um modo geral, tais integrais são divergentes e um processo de regularização deve ser utilizado no seu cálculo. Contudo, como devido à equação (2.88) para determinar a densidade espectral ρ^{OPE} necessitamos calcular apenas $\text{Im} [\Pi^{\text{OPE}}]$, podemos lançar mão de uma técnica, desenvolvida em [29, 36] e baseada no uso dos parâmetros de Schwinger [44], que extrai a parte imaginária finita de tais integrais¹. O objetivo desta seção é descrever esta técnica.

D.1 Integrais no Espaço dos Momentos

Inicialmente vamos calcular as integrais no espaço dos momentos que surgem em (D.1) e integrais similares, ou seja, integrais da forma geral

$$I_n^p(x) \equiv \int d^4 p \frac{e^{-ip\cdot x}}{(p^2 - m_c^2)^n} \quad (\text{D.2})$$

e da forma

$$I_{\mu;n}^p(x) \equiv \int d^4 p \frac{e^{-ip\cdot x} p_\mu}{(p^2 - m_c^2)^n} \quad (\text{D.3})$$

com n inteiro positivo par. O caso vetorial pode ser reduzido ao caso escalar pois temos imediatamente que

$$I_{\mu;n}^p(x) = i \frac{\partial}{\partial x^\mu} I_n^p(x). \quad (\text{D.4})$$

Vamos iniciar pelo caso escalar, (D.2). Para poder utilizar integrais gaussianas no cálculo de (D.2) realizamos uma rotação de Wick ($x_0 \rightarrow -ix_{0E}$, $d^4 x \rightarrow -id^4 x_E$, $x^2 \rightarrow -x_E^2$,

¹Formalmente, para que os cálculos a seguir façam sentido, seria necessário especificar de antemão um processo de regularização (regularização dimensional, de Pauli-Villars, etc.). Na prática, sempre pensamos que as integrais já estão convenientemente regularizadas.

$p_0 \rightarrow ip_{0E}$, $d^4p \rightarrow id^4p_E$ e $p^2 \rightarrow -p_E^2$, sendo que o produto escalar é agora com a métrica euclidiana e o índice E indica um vetor no espaço euclidiano), obtendo que

$$I_n^p(x) = i(-1)^n \int d^4p_E \frac{e^{ip_E \cdot x_E}}{(m^2 + p_E^2)^n}. \quad (\text{D.5})$$

O próximo passo é exponenciar o denominador, usando a identidade (2.17), a saber

$$\frac{1}{(p_E^2 + m_c^2)^{n+1}} = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty d\alpha \alpha^n e^{-\alpha(p_E^2 + m_c^2)}. \quad (\text{D.6})$$

Usando (D.5) e (D.6) temos que

$$I_n^p(x) = \frac{i(-1)^n}{\Gamma(n)} \int d\alpha e^{-\alpha m_c^2} \alpha^{n-1} \int d^4p_E e^{-\alpha p_E^2 + ip_E \cdot x_E}. \quad (\text{D.7})$$

Completando quadrados no segundo expoente de (D.7), integrando em p_E e retornando ao espaço de Minkowski chegamos ao resultado para $I_n^p(x)$:

$$I_n^p(x) \equiv \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot x}}{(p^2 - m_c^2)^n} = \frac{i(-1)^n \pi^2}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{3-n}} e^{-\alpha m_c^2 + \frac{x^2}{4\alpha}}. \quad (\text{D.8})$$

E para o caso vetorial, usando (D.3),

$$I_{\mu;n}^p(x) \equiv \int d^4p \frac{e^{-ip \cdot x} p_\mu}{(p^2 - m_c^2)^n} = \frac{(-1)^{n+1} \pi^2}{2\Gamma(n)} x_\mu \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{4-n}} e^{-\alpha m_c^2 + \frac{x^2}{4\alpha}}. \quad (\text{D.9})$$

D.2 Integrais no Espaço de Configurações

O uso das integrais (D.8) e (D.9) nas integrais da forma (D.1) e similares substitui cada uma das integrais no elemento de volume d^4p por integrais em apenas uma variável - no que segue, convencionaremos que as integrais em p_1 (p_2) estão associadas a integrais nas variáveis α (β), respectivamente. Após integrar no espaço dos momentos, obtemos integrais em x com a forma geral

$$I_n^x \equiv \int \frac{d^4x}{(x^2)^n} e^{iq \cdot x + \frac{(\alpha+\beta)}{4\alpha\beta} x^2}, \quad (\text{D.10})$$

onde n é inteiro. Há duas possibilidades para n que levam a cálculos distintos: podemos ter n positivo (Caso 1) ou n não-positivo (Caso 2).

Caso 1 - $n > 0$ Neste caso, mostraremos ser válida a seguinte expressão geral

$$I_n^x = \frac{(-1)^{n-1} i \pi^2}{\Gamma(n) 4^{n-2}} \int_0^\infty \frac{d\gamma}{\gamma^{n-1}} \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2} e^{\frac{-\alpha\beta\gamma Q^2}{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}} \quad (\text{D.11})$$

onde $Q^2 = -q^2$.

Para mostrar a validade de (D.11) partimos de (D.10), realizando uma rotação de Wick. Também introduzimos o momento euclidiano $Q = q_E$. Procedendo desta forma em (D.10) temos

$$I_n^x = -i \int \frac{d^4 x_E}{(-x_E^2)^n} e^{-iQ \cdot x_E - x_E^2 \left(\frac{\alpha + \beta}{4\alpha\beta} \right)}. \quad (\text{D.12})$$

Também temos que

$$\frac{1}{x_E^n} = \int_0^\infty d\delta e^{-\delta x_E^2} \frac{\delta^{n-1}}{\Gamma(n)}. \quad (\text{D.13})$$

Realizando a substituição $\delta = 1/(4\gamma)$ em (D.13) e então substituindo em (D.12) chegamos a

$$I_n^x = \frac{i(-1)^{n-1}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{d\gamma}{4^n \gamma^{n+1}} \int d^4 x_E e^{-iQ \cdot x_E - x_E^2 \left(\frac{\alpha\beta\gamma}{4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)} \right)}. \quad (\text{D.14})$$

Por último, realizando a integral gaussiana em (D.14) chegamos ao resultado (D.11).

Caso 2 - $n \leq 0$ Consideremos o caso em que $n = 0$. Temos então uma integral gaussiana que pode ser prontamente integrada resultando em

$$I_0^x = -\frac{i2^4 \pi^2 \alpha^2 \beta^2}{(\alpha + \beta)^2} e^{-\frac{Q^2 \alpha\beta}{\alpha + \beta}}. \quad (\text{D.15})$$

O caso em que $n < 0$ é obtido de $n = 0$ usando uma relação de recorrência. Defina-se $A \equiv (\alpha + \beta)/(\alpha\beta)$. Então é imediato verificar que $I_n^x = 4\partial_A I_{n-1}^x$. Usando esta relação de recorrência e (D.15) obtemos as integrais necessárias para este trabalho

$$I_{-1}^x = +i \frac{2^6 \pi^2 \alpha^3 \beta^3}{(\alpha + \beta)^3} \left(2 - \frac{\alpha\beta Q^2}{\alpha + \beta} \right) e^{-\frac{Q^2 \alpha\beta}{\alpha + \beta}}, \quad (\text{D.16})$$

$$I_{-2}^x = -i \frac{2^8 \pi^2 \alpha^4 \beta^4}{(\alpha + \beta)^4} \left(6 - \frac{6\alpha\beta Q^2}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha^2 \beta^2 Q^4}{(\alpha + \beta)^2} \right) e^{-\frac{Q^2 \alpha\beta}{\alpha + \beta}} \quad e \quad (\text{D.17})$$

$$I_{-3}^x = +i \frac{2^{10} \pi^2 \alpha^5 \beta^5}{(\alpha + \beta)^5} \left(24 - \frac{36\alpha\beta Q^2}{\alpha + \beta} + \frac{12\alpha^2 \beta^2 Q^4}{(\alpha + \beta)^2} - \frac{\alpha^3 \beta^3 Q^6}{(\alpha + \beta)^3} \right) e^{-\frac{Q^2 \alpha\beta}{\alpha + \beta}}. \quad (\text{D.18})$$

Em geral, podemos escrever

$$I_{-n}^x = \frac{i(-1)^{n+1} 4^{n+2} \pi^2 \alpha^{n+2} \beta^{n+2}}{(\alpha + \beta)^{n+2}} e^{-\frac{Q^2 \alpha\beta}{\alpha + \beta}} \sum_{k=0}^n C_{nk} \left(\frac{\alpha\beta Q^2}{\alpha + \beta} \right)^k \quad (n \geq 0), \quad (\text{D.19})$$

onde os coeficientes C_{nk} podem ser lidos diretamente de (D.15) a (D.18) para $n = 0, 1, 2, 3$.

D.3 Integrais nas variáveis gregas

Após realizadas as integrais no espaço dos momentos (usando (D.8) e (D.9)) e então as integrais no espaço de configurações (usando conforme necessário (D.11) ou (D.15) a (D.18)) restam integrais em α , β e/ou $d\gamma$. Nesta sub-seção detalharemos o cálculo destas integrais. Há dois casos: caso 1' - integrais em α , β e γ (que aparecem quando as integrais no espaço de configuração são do Caso 1, $n > 0$) e caso 2' - integrais em α , β (que aparecem quando as integrais no espaço de configuração são do Caso 2, $n \leq 0$).

Caso 1' - Integrais em α , β e γ Neste caso, as integrais típicas são da forma

$$I_{nmkl} \equiv \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{\alpha^n \beta^m \gamma^k} \frac{e^{-m_c^2(\alpha+\beta) - \frac{-\alpha\beta\gamma Q^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}}}{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^l}, \quad (\text{D.20})$$

onde n, m, k e l são números inteiros não negativos.

A substituição de variáveis $\gamma \rightarrow (\alpha\beta)/\gamma$ simplifica um pouco a integral:

$$I_{nmkl} = \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \frac{\gamma^{k+l-2}}{\alpha^{n+k+l-1} \beta^{m+k+l-1} (\alpha + \beta + \gamma)^l} e^{-m_c^2(\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta Q^2}{\alpha+\beta+\gamma}}. \quad (\text{D.21})$$

Vamos transformar a integral em γ por outra mais simples de estudar. Para tanto, notemos que

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta(\lambda - (\alpha + \beta + \gamma)). \quad (\text{D.22})$$

Realizando o *scaling* $\alpha = \lambda\alpha'$, $\beta = \lambda\beta'$ e $\gamma = \lambda\gamma'$ e usando que $\delta(\lambda x) = \delta(x)/|\lambda|$, temos que

$$1 = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta(1 - (\alpha' + \beta' + \gamma')). \quad (\text{D.23})$$

Aplicando (D.23) e o *scaling* em (D.21) (renomeando, após o uso do *scaling*, $\alpha' \rightarrow \alpha$, $\beta' \rightarrow \beta$ e $\gamma' \rightarrow \gamma$) chegamos a

$$I_{nmkl} = \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \frac{d\lambda}{\lambda^{n+m+k+2l-2}} \frac{\gamma^{l+k-2}}{\alpha^{n+k+l-1} \beta^{m+k+l-1}} \frac{e^{-\lambda m_c^2(\alpha+\beta) - \lambda \frac{\alpha\beta Q^2}{\alpha+\beta+\gamma}}}{(\alpha + \beta + \gamma)^l} \delta(1 - (\alpha + \beta + \gamma)). \quad (\text{D.24})$$

Realizando a integral em γ por meio da delta chegamos a expressão final deste parágrafo:

$$I_{nmkl} = \int_0^1 d\alpha d\beta \theta(1 - \alpha - \beta) \frac{(1 - \alpha - \beta)^{l+k-2}}{\alpha^{n+k+l-1} \beta^{m+k+l-1}} \int_0^\infty d\lambda \frac{e^{-\lambda[m_c^2(\alpha+\beta) + \alpha\beta Q^2]}}{\lambda^{n+m+k+2l-2}}. \quad (\text{D.25})$$

Caso 2' - Integrais em α, β A integral típica deste caso é da forma

$$I_{nml} \equiv \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^n} \frac{d\beta}{\beta^m} \frac{e^{-m_c^2(\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta Q^2}{\alpha+\beta}}}{(\alpha+\beta)^l}, \quad (\text{D.26})$$

onde n, m e l são inteiros não-negativos. O cálculo é semelhante ao da seção anterior. Por meio do mesmo scaling usado no parágrafo anterior,

$$1 = \int_0^\infty d\lambda \delta(\lambda - (\alpha + \beta)) = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} \delta(1 - (\alpha' + \beta')), \quad (\text{D.27})$$

temos que, após substituir (D.27) em (D.26),

$$I_{nml} = \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta d\lambda}{\alpha^n \beta^m \lambda^{n+m+l-1}} \delta(1 - \alpha - \beta) \frac{e^{-m_c^2(\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta Q^2}{\alpha+\beta}}}{(\alpha+\beta)^l}. \quad (\text{D.28})$$

Integrando em β , chegamos a

$$I_{nml} = \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^n (1-\alpha)^m} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{n+m+l-1}} e^{-\lambda[m_c^2 + \alpha(1-\alpha)Q^2]}. \quad (\text{D.29})$$

D.4 Integrais em λ

Na subseção anterior, manipulamos convenientemente as integrais I_{nmkl} (caso 1', (D.25)) e I_{nml} (caso 2', (D.29)). Em ambos casos, as expressões finais contém integrais em λ e são da forma

$$I_\lambda^n \equiv \int_0^\infty d\lambda \frac{e^{-\lambda f}}{\lambda^n}, \quad (\text{D.30})$$

onde n é um inteiro e f é uma função independente de λ .

Quando $f < 0$, a integral (D.30) converge para $n \leq 0$. No caso em que $n = 0$ é trivial. Para $n < 0$, o resultado pode ser encontrado integrando por partes o resultado de $n = 0$. Temos que, reunindo estes dois resultados,

$$I_\lambda^n = (-n)! f^{n-1} \quad (n \leq 0). \quad (\text{D.31})$$

Quando $n > 0$, a integral (D.30) diverge. Poderíamos introduzir um cutoff (por exemplo, Λ) para a que integral esteja bem definida e seja possível realizar os cálculos. Contudo, para as regras de soma estamos interessados em $\text{Im } \Pi^{OPE}$. Isto significa que, em algum momento, será calculado $\text{Im } I_\lambda^n$. Os termos divergentes (que aparecem quando o cutoff é removido) podem ser ignorados se não contribuírem para a parte imaginária.

Para exibir os termos de I_λ^n que podem possuir uma parte imaginária notemos inici-

almente que

$$I_\lambda^0 = -\frac{\partial}{\partial f} I_\lambda^1. \quad (\text{D.32})$$

Usando (D.31), temos que

$$I_\lambda^1 = -\int \frac{df}{f} = -\ln f + \text{const.}, \quad (\text{D.33})$$

onde a constante de integração (real) é infinita quando o cutoff é removido. Repetindo este procedimento mais uma vez, temos

$$I_\lambda^2 = -\int df I_\lambda^1 = f \ln f - f + \text{const.} \quad (\text{D.34})$$

Continuando este procedimento obtemos que

$$I_\lambda^n = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} f^{n-1} \ln f + O(f^n) + \text{const.} \quad (\text{D.35})$$

O único termo que pode possuir uma parte imaginária em (D.35) é o termo logarítmico. Escolhendo o ramo principal da função $\ln(f)$, temos que se $f < 0$, $\ln f = \ln |f| - i\pi \implies \text{Im} \ln f = -\pi$. Ou seja, para que I_λ^n possua uma parte imaginária, devemos ter $f < 0$.

No caso das integrais I_{nmkl} (D.25), $f = m_c^2(\alpha + \beta) - \alpha\beta q^2$. Então $f < 0$ (e $\alpha > 0$, $\beta > 0$) implica que

$$\beta > \frac{\alpha m_c^2}{\alpha q^2 - m_c^2}. \quad (\text{D.36})$$

Isto, junto com $\alpha + \beta < 1$, leva a (com $q^2 = s$)

$$s \geq s_{min} = 4m_c^2 \quad \text{e} \quad (\text{D.37})$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}}{2} < \alpha < \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}}{2}. \quad (\text{D.38})$$

Portanto, a condição $f < 0$ leva a uma restrição na região de integração em I_{nmkl} . A variável s é restringida de acordo com a equação (D.37). Temos que os limites inferior α_{min} e superior α_{max} de integração em α se tornam

$$\alpha_{min} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_{max} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{s}}}{2}. \quad (\text{D.39})$$

Os limites de integração para β são

$$\beta_{min} = \frac{\alpha m_c^2}{s\alpha - m_c^2} \quad \text{e} \quad \beta_{max} = 1 - \alpha. \quad (\text{D.40})$$

No caso das integrais I_{nml} (D.29), a mesma análise restringe os limites de integração em

s e α de acordo com (D.37) e (D.39), respectivamente.

D.5 As Integrais Gerais

Reunindo os resultados anteriores, podemos resolver as integrais do tipo (D.1) e similares de forma geral. Existem vários tipos possíveis destas integrais; nesta seção iremos descrever em detalhes o cálculo de integrais da forma (D.1). Os resultados finais para este e para os outros tipos necessários neste trabalho podem ser encontrados no final deste apêndice - o estudo necessário é idêntico ao apresentado a seguir.

Vamos estudar as integrais (que vamos chamar de tipo 1)

$$I_{abc}^{t1} \equiv \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 x \frac{e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x}}{(p_1^2 - m_c^2)^a (p_2^2 - m_c^2)^b (x^2)^c}, \quad (\text{D.41})$$

onde a e b são inteiros positivos e c é inteiro.

Integrando nos momentos, usando a equação (D.8), temos que

$$I_{abc}^{t1} = \frac{\pi^4 (-1)^{a+b+1}}{(a-1)!(b-1)!} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta}{\alpha^{3-a} \beta^{3-b}} e^{-(\alpha+\beta)m_c^2} \int \frac{d^4 x}{(x^2)^c} e^{iq\cdot x + (\frac{\alpha+\beta}{4\alpha\beta})x^2}. \quad (\text{D.42})$$

Temos dois casos:

Caso 1 - $c \geq 1$ Neste caso, podemos utilizar (D.11), obtendo

$$I_{abc}^{t1} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!4^{c-2}} \int_0^\infty \frac{d\alpha d\beta d\gamma}{\alpha^{1-a} \beta^{1-b} \gamma^{c-1}} \frac{e^{-m_c^2(\alpha+\beta) - \frac{-\alpha\beta\gamma Q^2}{\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma}}}{(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)^2}. \quad (\text{D.43})$$

Usando (D.25), tem-se

$$I_{abc}^{t1} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!4^{c-2}} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}} \frac{d\beta}{\beta^{c-b+1}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-1} \times \\ \times \int_0^\infty d\lambda \frac{e^{-\lambda f}}{\lambda^{c-a-b+3}}, \quad (\text{D.44})$$

onde $f \equiv m_c^2(\alpha + \beta) + \alpha\beta Q^2$.

Temos agora dois subcasos:

Caso 1A - $c \geq 1$ e $c - a - b \geq -2$ Neste caso, podemos usar (D.35). Já antecipando a extração da parte imaginária, é necessário somente calcular o único termo relevante

$$I_{abc}^{t1} = \frac{-i2^{4-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!(c-a-b+2)!} \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}} \frac{d\beta}{\beta^{c-b+1}} \theta(1-\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)^{c-1} f^{c-a-b+2} \ln f \quad (\text{D.45})$$

Caso 1B - $c \geq 1$ e $c - a - b \leq -3$ Para este caso, deve-se usar (D.31), obtendo-se

$$I_{abc}^{t1} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6 2^{4-2c}(a+b-c-3)!}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!} \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-1}} \frac{d\beta}{\beta^{a-1}} \frac{\theta(1-\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)^{c-1}}{\left[Q^2 + \frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{a+b-c-2}}. \quad (\text{D.46})$$

Neste caso, é possível calcular a transformada de Borel usando (C.6):

$$\hat{I}_{abc}^{t1}(M^2) = \frac{i(-1)^{a+b+c}2^{4-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!} \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-1}} \frac{d\beta}{\beta^{a-1}} \theta(1-\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)^{c-1} \frac{e^{-\frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta M^2}}}{(M^2)^{a+b-c-3}}. \quad (\text{D.47})$$

Caso 2 - $c \leq 0$ Neste caso, as integrais no espaço de configurações em (D.42) são realizadas via (D.19):

$$I_{abc}^{t1} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6 4^{-c+2}}{(a-1)!(b-1)!} \sum_{k=0}^{-c} C_{-c,k}(Q^2)^k \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a-k+1}} \frac{d\beta}{\beta^{c-b-k+1}} \frac{e^{-(\alpha+\beta) - \frac{\alpha\beta Q^2}{\alpha+\beta}}}{(\alpha+\beta)^{-c+k+2}}. \quad (\text{D.48})$$

Usando (D.29) temos então

$$I_{abc}^{t1} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6 4^{-c+2}}{(a-1)!(b-1)!} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}(1-\alpha)^{c-b+1}} \sum_{k=0}^{-c} \frac{C_{-c,k}(Q^2)^k}{\alpha^{-k}(1-\alpha)^{-k}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{c-a-b-k+3}} e^{-\lambda g}. \quad (\text{D.49})$$

Neste caso, as integrais em λ dentro do somatório ainda devem ser resolvidas usando (D.35) ou (D.31), conforme $c - a - b - k + 3 > 0$ ou $c - a - b - k + 3 \leq 0$, respectivamente.

D.6 Resumo das Integrais Gerais

A seguir reproduzimos os resultados para as integrais necessárias nesta dissertação. No que segue, a, b sempre serão inteiros positivos, c será inteiro, $f \equiv m_c^2(\alpha + \beta) + \alpha\beta Q^2$,

$g \equiv m_c^2 + \alpha(1 - \alpha)Q^2$, onde $Q^2 = -q^2$.

D.6.1 Integrais do tipo 1

São integrais da forma

$$I_{abc}^{t1} \equiv \int d^4p_1 d^4p_2 d^4x \frac{e^{i(q-p_1-p_2)\cdot x}}{(p_1^2 - m_c^2)^a (p_2^2 - m_c^2)^b (x^2)^c}, \quad (\text{D.50})$$

Caso 1 - $c \geq 1$

Caso 1A - $c \geq 1$ e $c - a - b \geq -2$

$$I_{abc}^{t1} = \frac{-i2^{4-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!(c-a-b+2)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}} \frac{d\beta}{\beta^{c-b+1}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-1} f^{c-a-b+2} \ln f \quad (\text{D.51})$$

Caso 1B - $c \geq 1$ e $c - a - b \leq -3$

$$I_{abc}^{t1} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6 2^{4-2c}(a+b-c-3)!}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-1}} \frac{d\beta}{\beta^{a-1}} \frac{\theta(1-\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)^{c-1}}{\left[Q^2 + \frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{a+b-c-2}}. \quad (\text{D.52})$$

A transformada de Borel nesse caso é

$$\hat{I}_{abc}^{t1}(M^2) = \frac{i(-1)^{a+b+c}2^{4-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-1)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-1}} \frac{d\beta}{\beta^{a-1}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-1} \frac{e^{-\frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta M^2}}}{(M^2)^{a+b-c-3}}. \quad (\text{D.53})$$

Caso 2 - $c \leq 0$

$$I_{abc}^{t1} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6 4^{-c+2}}{(a-1)!(b-1)!} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}(1-\alpha)^{c-b+1}} \sum_{k=0}^{-c} \frac{C_{-c,k}(Q^2)^k}{\alpha^{-k}(1-\alpha)^{-k}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{c-a-b-k+3}} e^{-\lambda g}. \quad (\text{D.54})$$

Neste caso, as integrais em λ dentro do somatório ainda devem ser resolvidas usando

(D.35) ou (D.31), conforme $c - a - b - k + 3 > 0$ ou $c - a - b - k + 3 \leq 0$, respectivamente.

D.6.2 Integrais do tipo 2

São integrais da forma

$$I_{abc}^{t1} \equiv \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 x (p_1 \cdot p_2) \frac{e^{i(q-p_1-p_2) \cdot x}}{(p_1^2 - m_c^2)^a (p_2^2 - m_c^2)^b (x^2)^c}. \quad (\text{D.55})$$

Caso 1 - $c \geq 2$

Caso 1A - $c \geq 2$ e $c - a - b \geq -3$

$$I_{abc}^{t2} = \frac{i2^{4-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-2)!(c-a-b+3)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}} \frac{d\beta}{\beta^{c-b+1}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-2} f^{c-a-b+3} \ln f. \quad (\text{D.56})$$

Caso 1B - $c \geq 2$ e $c - a - b \leq -4$

$$I_{abc}^{t2} = \frac{i(-1)^{a+b+c}2^{4-2c}\pi^6(a+b-4-c)!}{(a-1)!(b-1)!(c-2)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-2}} \frac{d\beta}{\beta^{a-2}} \frac{\theta(1-\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)^{c-2}}{\left[Q^2 + \frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{a+b-c-3}}. \quad (\text{D.57})$$

A transformada de Borel nesse caso é

$$\hat{I}_{abc}^{t2}(M^2) = \frac{i(-1)^{a+b+c}2^{4-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-2)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-2}} \frac{d\beta}{\beta^{a-2}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-2} \frac{e^{-\frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta M^2}}}{(M^2)^{a+b-c-4}}. \quad (\text{D.58})$$

Caso 2 - $c \leq 1$

$$I_{abc}^{t2} = \frac{i(-1)^{a+b+c}\pi^6 2^{4-2c}}{(a-1)!(b-1)!} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}(1-\alpha)^{c-b+1}} \sum_{k=0}^{1-c} \frac{C_{1-c,k}(Q^2)^k}{\alpha^{-k}(1-\alpha)^{-k}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{c-a-b-k+4}} e^{-\lambda g}. \quad (\text{D.59})$$

D.6.3 Integrais do tipo 3

São integrais da forma

$$I_{abc}^{t3} \equiv \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 x (x \cdot p_1) \frac{e^{i(q-p_1-p_2) \cdot x}}{(p_1^2 - m_c^2)^a (p_2^2 - m_c^2)^b (x^2)^c}, \quad (\text{D.60})$$

Caso 1 - $c \geq 2$

Caso 1A - $c \geq 2$ e $c - a - b \geq -2$

$$I_{abc}^{t3} = - \frac{2^{5-2c} \pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-2)!(c-a-b+2)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1}} \frac{d\beta}{\beta^{c-b}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-2} f^{c-a-b+2} \ln f \quad (\text{D.61})$$

Caso 1B - $c \geq 2$ e $c - a - b \leq -3$

$$I_{abc}^{t3} = \frac{(-1)^{a+b+c} 2^{5-2c} \pi^6 (a+b-3-c)!}{(a-1)!(b-1)!(c-2)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-1}} \frac{d\beta}{\beta^{a-2}} \frac{\theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-2}}{\left[Q^2 + \frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{a+b-c-2}}. \quad (\text{D.62})$$

A transformada de Borel nesse caso é

$$\hat{I}_{abc}^{t3}(M^2) = \frac{(-1)^{a+b+c} 2^{5-2c} \pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-2)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-1}} \frac{d\beta}{\beta^{a-2}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-2} \frac{e^{-\frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta M^2}}}{(M^2)^{a+b-c-3}}. \quad (\text{D.63})$$

Caso 2 - $c \leq 1$

$$I_{abc}^{t3} = \frac{(-1)^{a+b+c} \pi^6 2^{5-2c}}{(a-1)!(b-1)!} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a+1} (1-\alpha)^{c-b}} \sum_{k=0}^{1-c} \frac{C_{1-c,k} (Q^2)^k}{\alpha^{-k} (1-\alpha)^{-k}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{c-a-b-k+3}} e^{-\lambda g}. \quad (\text{D.64})$$

D.6.4 Integrais do tipo 4

São integrais da forma

$$I_{abc}^{t4} \equiv \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 x (x \cdot p_1) (x \cdot p_2) \frac{e^{i(q-p_1-p_2) \cdot x}}{(p_1^2 - m_c^2)^a (p_2^2 - m_c^2)^b (x^2)^c}. \quad (\text{D.65})$$

Caso 1 - $c \geq 3$

Caso 1A - $c \geq 3$ e $c - a - b \geq -2$

$$I_{abc}^{t4} = \frac{i2^{6-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-3)!(c-a-b+2)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a}} \frac{d\beta}{\beta^{c-b}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-3} f^{c-a-b+2} \ln f \quad (\text{D.66})$$

Caso 1B - $c \geq 3$ e $c - a - b \leq -3$

$$I_{abc}^{t4} = \frac{i(-1)^{a+b+c-1}2^{6-2c}\pi^6 (a+b-3-c)!}{(a-1)!(b-1)!(c-3)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-2}} \frac{d\beta}{\beta^{a-2}} \frac{\theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-3}}{\left[Q^2 + \frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}\right]^{a+b-c-2}}. \quad (\text{D.67})$$

A transformada de Borel nesse caso é

$$\hat{I}_{abc}^{t4}(M^2) = \frac{i(-1)^{a+b+c-1}2^{6-2c}\pi^6}{(a-1)!(b-1)!(c-3)!} \times \\ \times \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{b-2}} \frac{d\beta}{\beta^{a-2}} \theta(1-\alpha-\beta) (1-\alpha-\beta)^{c-3} \frac{e^{-\frac{m_c^2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta M^2}}}{(M^2)^{a+b-c-3}}. \quad (\text{D.68})$$

Caso 2 - $c \leq 2$

$$I_{abc}^{t4} = \frac{i(-1)^{a+b+c+1}\pi^6 2^{6-2c}}{(a-1)!(b-1)!} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{c-a}(1-\alpha)^{c-b}} \sum_{k=0}^{2-c} \frac{C_{2-c,k}(Q^2)^k}{\alpha^{-k}(1-\alpha)^{-k}} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^{c-a-b-k+3}} e^{-\lambda g}. \quad (\text{D.69})$$

D.7 Exemplo de Uso das Integrais

No Capítulo 3 o cálculo do diagrama (a) da Figura 3.2 resultou na equação (3.28):

$$\Pi_{\text{diag(a)}}(q) = \frac{i3^2}{2^6\pi^{12}} \int d^4 p_1 d^4 p_2 d^4 x e^{i(q-p_1-p_2) \cdot x} \frac{(x \cdot p_1)(x \cdot p_2)}{x^8 (p_1^2 - m_c^2)(p_2^2 - m_c^2)}. \quad (\text{D.70})$$

A integral em (D.70) é do tipo 4, caso 1A:

$$\Pi(q)_{\text{diag(a)}} = \frac{i 3^2}{2^6 \pi^{12}} I_{114}^4. \quad (\text{D.71})$$

Usando a equação (D.66) temos que

$$\Pi(q)_{\text{diag(a)}} = -\frac{3}{2^{11} \pi^6} \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^3} \frac{d\beta}{\beta^3} \theta(1 - \alpha - \beta)(1 - \alpha - \beta) [m_c^2(\alpha + \beta) - \alpha\beta s]^4 \ln f. \quad (\text{D.72})$$

Logo, calculando a parte imaginária, lembrando que $\text{Im} \ln f = -\pi$ se $f < 0$, temos que a contribuição deste diagrama à densidade espectral é

$$\rho(s)_{\text{diag(a)}} = \frac{\text{Im}[\Pi(q)]}{\pi} = \frac{3}{2^{11} \pi^6} \int_{\alpha_{\min}}^{\alpha_{\max}} \frac{d\alpha}{\alpha^3} \int_{\beta_{\min}}^{\beta_{\max}} \frac{d\beta}{\beta^3} (1 - \alpha - \beta) [m_c^2(\alpha + \beta) - \alpha\beta s]^4, \quad (\text{D.73})$$

onde os limites de integração são os dados pelas equações (D.39) e (D.40).

Referências

- [1] S.K. Choi et al. (Belle Collaboration), Phys Rev. Lett. 91, 262001 (2003). arXiv:hep-ex/0309032.
- [2] T. Barnes, S. Godfrey e E. S. Swanson, Phys. Rev. D 72, 054026 (2005). arXiv:hep-ph/0505002.
- [3] E. Eichten, S. Godfrey, H. Mahlke e J.L Rosner, Rev. Mod. Phys. 80 (2008) 1161. arXiv:hep-ph/0701208; S. Godfrey, S.L Olsen, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 58 (2008) 73. arXiv:0801.3867 [hep-ph]
- [4] M. Nielsen, F.S. Navarra e S-H. Lee, Phys. Rept. 497, 41 (2010). arXiv:0911.1958 [hep-ph].
- [5] M.A. Shifman, A.I Vainshtein e V.I Zakharov, Nucl. Phys. B 147, 385 (1979).
- [6] S. Godfrey, Proceedings of the DPF-2009 Conference, *Topics in Hadron Spectroscopy in 2009*, 2009. arXiv:0910.3409 [hep-ph].
- [7] K. Abe et al. (Belle Collaboration), *Evidence for $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$ and the sub-threshold decay $X(3872) \rightarrow \omega J/\psi$* . arXiv:hep-ex/0505037.
- [8] M.B. Voloshin e L.B. Okun, JETP Lett. 23, 333 (1976).
- [9] R.J. Jaffe, Phys. Rev. D 15, 267 (1977).
- [10] N.A. Törnqvist, Phys. Lett. B 590, 209 (2004). arXiv:hep-ph/0402237
- [11] L. Maiani, F. Piccinini, A.D. Polosa e V. Riquer, Phys. Rev. D 71, 014028 (2005). arXiv:hep-ph/0412098.
- [12] S. Dubynskiy, M.B. Voloshin, Phys. Lett. B 666, 344 (2008). arXiv:0803.2224 [hep-ph].
- [13] X-Q. Luo, Y. Liu, Phys. Rev. D 74, 034502 (2006).
- [14] S.K. Choi et al. (Belle Collaboration), Phys. Rev. Lett. 94, 182002 (2005). arXiv:hep-ex/0408126.
- [15] B. Aubert et al. (BaBar Collaboration), Phys. Rev. Lett. 101, 082001 (2008). arXiv:0711.2047 [hep-ex].
- [16] T. Aaltonen et al., (CDF Collaboration), Phys. Rev. Lett. 102, 242002 (2009). arXiv:0903.2229

-
- [17] K. Yi, Proceedings of the 35th International Conference of High Energy Physics - ICHEP2010, *Observation of a Narrow Near-Threshold Structure in the $J/\psi\phi$ Mass Spectrum in $B \rightarrow J/\psi\phi K^+$ Decays* (2010). arXiv:1010.3470 [hep-ex].
- [18] T. Aaltonen et al. (CDF Collaboration), (2011). arXiv:1101.6058 [hep-ex].
- [19] K. Nakamura et al. (Particle Data Group), J. Phys. G 37, 075021 (2010).
- [20] X. Liu e S-L. Zhu, Phys. Rev. D 80, 017502 (2009). arXiv:0903.2529 [hep-ph].
- [21] X. Liu, Z-G Luo e S-L Zhu, Phys.Lett. B 699, (2011) 341, arXiv:1011.1045 [hep-ph]
- [22] P. Colangelo, A. Khodjamirian, *QCD Sum Rules: A Modern Perspective*. arXiv:hep-ph/0010175 (2000).
- [23] K. G. Wilson, Phys. Rev. 179 (1969), 1499.
- [24] M.A. Shifman, *Proceedings of the QCD 10*. Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 207-208, 298 (2010). arXiv:1101.1122 [hep-ph]
- [25] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*. World Scientific Publishing Company, 2nd Edition (1998).
- [26] M. E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Books (1995).
- [27] S. Narison, *QCD spectral sum rules*. World Scientific, 1989.
- [28] L. Reinders, H. Rubinstein e S. Yazaki, Phys. Rept. 127 (1985), 1
- [29] R. D. Matheus, *Partículas exóticas em regras de soma da QCD*. Tese de Doutorado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo (2006).
- [30] W. Greiner, S. Schramm e E. Stein, *Quantum Chromodynamics*. Springer Verlag, Berlim. 2nd Edition, 2004.
- [31] S. Narison, *QCD as a theory of hadrons: from partons to confinement*. Cambridge University Press, 2004.
- [32] B. L. Ioffe, Nucl. Phys. B 188 (1981), 317.
- [33] B. L. Ioffe, Prog. Part. Nucl. Phys. 56 (2006), 232.
- [34] S. Narison, Phys. Lett. B 361 (1995), 121
- [35] S. Narison, Phys. Lett. B 466 (1999) 345.
- [36] R. M. de Albuquerque, *Estudo da estrutura dos novos mésons*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Física da Universidade de São Paulo (2008).

- [37] R.D. Matheus, S. Narison, M. Nielsen e J.M. Richard, Phys.Rev. D 75 (2007), 014005, arXiv:hep-ph/0608297; S-H. Lee, A. Mihara, F.S. Navarra, M. Nielsen, Phys. Lett. B661 (2008), 28, arXiv:0710.1029 [hep-ph]; S-H. Lee, M. Nielsen e U. Wiedner, arXiv:0803.1168 [hep-ph] (2008); R.M. Albuquerque e M. Nielsen, Nucl. Phys. A 815 (2009), 53, arXiv:0804.4817 [hep-ph]; M.E. Bracco, S.H. Lee, M. Nielsen e R. R. da Silva, Phys. Lett. B 671 (2009), 240, arXiv:0807.3275 [hep-ph]; R. D. Matheus, F. S. Navarra, M. Nielsen e C. M. Zanetti, Phys. Rev. D 80 (2009), 056002, arXiv:0907.2683; R. M. Albuquerque, J. M. Dias e M. Nielsen, arXiv:1001.3092 [hep-ph] (2010)
- [38] R. M. Albuquerque, M. E. Bracco, M. Nielsen, Phys. Lett. B 678 (2009), 186, arXiv:0903.5540 [hep-ph]
- [39] W. Chen, S-L Zhu, arXiv:1003.3721 [hep-ph] (pre-print)
- [40] S.I. Finazzo, X. Liu e M. Nielsen, Phys. Lett. B 701 (2011), 101. arXiv:1102.2347 [hep-ph]
- [41] K-C. Yang, W-Y. P. Huang, E.M. Henley e L.S. Kisslinger, Phys. Rev. D 47 (1993) 3001.
- [42] E. Post, Trans. Amer. Math. Soc. 32 (1930), 723.
- [43] K. Bryan, *Elementary Inversion of the Laplace Transform*. Disponível em: <http://www.rose-hulman.edu/~bryan/invlap.pdf>. Último acesso em: 6 de Outubro de 2011.
- [44] J.C. Collins, *Renormalization*. Cambridge University Press, Cambridge. 1984.