Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Produção de Partículas no Universo Primordial
e sua Aplicação em Problemas de
Astrofísica e Cosmologia

Ana Helena de Campos

Orientador: Rogério Rosenfeld

Banca Examinadora

Prof. Dr. Rogério Rosenfeld (IFT – UNESP)
Prof. Dr. Carlos Ourivio Escobar (UNICAMP)
Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo (IF – USP)
Prof. Dr. José Ademir Sales de Lima (IAG – USP)
Prof. Dr. Élcio Abdala (IF – USP)

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 4115 Ex.1

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Física para a obtenção do título de Doutor em
Ciências

São Paulo
2004

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP

305M810T4115

clb. 13/09/2004

539.7223
C198p
D
ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Campos, Ana Helena de

Produção de Partículas no Universo Primordial e sua
Aplicação em Problemas de Astrofísica e Cosmologia.
São Paulo - 2004.

Tese (Doutoramento) - UNESP
Instituto de Física Teórica

Orientador: Prof. Rogério Rosenfeld
Área de Concentração: Física

Unitermos

1. Raios cósmicos; 2. Universo primordial;
3. Matéria escura; 4. Partículas elementares;
5. Cosmologia.

USP/IF/SBI-056/2004

“- Tia Lelê,

quando eu estou dentro do carro as árvores correm.

Mas quando eu saio do carro, elas param.

- E você sabe o por quê, Tito?

- Sim, é porque elas ficam cansadas...”

*Aos meus pais, Carlos e Angelina,
com amor e gratidão.*

*Obrigada Rogério,
pela oportunidade que você me deu
para realizar esse doutoramento
e pelo respeito que você teve com
os caminhos que escolhi.*

Agradecimentos

Folheando as páginas da minha tese não tenho como não me emocionar. Elas estão cheias de aprendizados, de descobertas, de lembranças ..., elas estão cheias de vida. Vida que compartilhei com aqueles que estiveram presentes neste período e a quem eu gostaria de agradecer.

Obrigada Galo, por ter vindo ao meu encontro, por me ensinar a por os pés no chão e me mostrar que o momento é agora. Você e a Truppy são, hoje, a minha família e isso me faz sentir realizada e muito, mas muito feliz. Durante esse período do doutoramento vocês foram muito companheiros e souberam me dar beijinhos e lambidas sempre que precisei. Amo vocês.

Obrigada mãe, por todos os seus ensinamentos que, muito mais que palavras, são atitudes.

Obrigada pai, por todos os esforços que você fez. Sem eles eu não poderia estar tendo mais essa conquista.

Os irmãos são, em geral, as pessoas com quem convivemos mais tempo nesta vida. Mais que nossos pais, mais que nossos companheiros, mais que nossos filhos. Com eles compartilhamos a gostosa nostalgia da infância. Com eles podemos ser autênticos. Neles podemos descobrir muito sobre nós mesmos. Paula e Cacá vocês são minhas irmãs queridas. Obrigada por estarem ao meu lado, por me entenderem tão bem e pela paciência que tiveram, principalmente neste último ano, em que estive muito ausente.

Mozart e Paulo vocês são meus irmãos de coração. Obrigada pelo respeito e carinho que vocês têm por mim e por fazerem minhas irmãs felizes.

João, Tito e Dante, a tia Lelê encontra em vocês a doçura que ela gostaria de encontrar no mundo. Obrigada por terem vindo fazer parte de nossa família.

Querida Mércia, muito obrigada pelo seu incentivo diário e pela

sua amizade que abrandaram os momentos difíceis deste período.

Gracias Carlos y Maruja, por todo el cariño que ustedes envían del Perú y por me consideraren "la hija que llegó lista: crecida, bonita y en breve doctora".

Gracias Nanos y Marlene por el respecto y amistad.

Obrigada tia Ana, tia Lola, tia Mada, tia Tereza e tio Vick, por torcerem pelo meu sucesso e vibrarem com ele. Vocês são muito queridos e moram no meu coração.

Caro Jackson, considero você meu co-orientador neste trabalho, mesmo que informalmente. Mais que um grande colaborador, você é um grande amigo que soube entender os difíceis momentos de minha vida profissional. Obrigada por sempre me lembrar das minhas qualidades como pesquisadora e por ter acreditado tanto, naquela que considero a principal contribuição desta tese, a primeira aplicação.

Queridos Ariel, Amanda e Carenina, a "Nenena" agradece o carinho de vocês e a acolhida em Brasília.

Urbano, obrigada por ter me transmitido sua tranquilidade e alegria em momentos de desânimo. Sua "dança do Wimpzilla" e seu companheiro de quarto em Mangaratiba, o "Rural", serão inesquecíveis.

Obrigada Hugo pelas colaborações e por ter me incentivado a muito tempo atrás a trabalhar nesta área da física.

Caro Adriano, prezo muito a amizade que conquistamos neste último ano, em que a necessidade de fazer algo pela educação científica de nosso país nos aproximou. Sua compreensão e incentivo foram muito importantes nesta fase final do meu trabalho. Muito obrigada.

Querida Professora Reiko, que privilégio ter te encontrado e estar em contato com a sua sabedoria! Obrigada por ter me despertado para meus talentos adormecidos e por estar me ajudando a desenvolvê-los.

Obrigada Dr. Mário, por me ajudar a cultivar o trigo em minha vida, já que arrancar o joio é um trabalho vão.

Obrigada João Baiano pelos conselhos e orientações ao longo destes anos.

Querida Érica, obrigada por estar comigo aprendendo a viver nesse mundo, quase sempre, tão difícil de entender.

Querida Flor, obrigada por sua amizade que é tão cuidadosa e cheia de afeto.

Obrigada Letícia, por ser uma grande amiga e por saber compartilhar, como ninguém, os momentos de tristeza e de alegria. Sua autenticidade é sua maior virtude e meu maior exemplo.

Nara, você foi a primeira pessoa que me ajudou a exergar o mundo com os meus próprios olhos a muito tempo atrás. Obrigada por ter me ajudado a crescer. Obrigada por ser uma grande amiga.

Querida Neli, foi observando sua determinação profissional que percebi que, independente da atividade que escolhamos na vida, ela deve ser vivida intensamente. Obrigada por me ensinar tanto.

Agradeço ao IFUSP e ao IFT por terem me recebido com cordialidade.

Agradeço à Fapesp pelo apoio financeiro.

Me sinto uma pessoa abençoada porque sempre tive oportunidades ao longo de minha vida e porque sempre estive rodeada de pessoas muito especiais. Por isso meu último agradecimento é a Deus, por essa benção.

Conteúdo

Introdução	3
1 O Universo Hoje Conhecido	6
1.1 A História do Universo	11
1.2 O Modelo Cosmológico Padrão	12
1.2.1 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	13
1.2.2 Alguns Resultados Cinemáticos da Métrica de Friedmann-Robertson-Walker	15
1.2.3 O Tensor Energia-Momento de um Fluido Perfeito	17
1.2.4 As Equações de Friedmann	18
1.2.5 O Conteúdo de Matéria do Universo	20
1.2.6 A Idade do Universo	23
1.2.7 Problemas da Cosmologia Padrão	23
1.3 Inflação	25
1.3.1 O Inflaton	26
1.3.2 Potenciais Inflacionários	30
2 Produção de Partículas no Universo Pós Inflacionário	33
2.1 A Evolução do Inflaton após a Inflação	34
2.2 Produção Perturbativa de Partículas	36
2.3 Produção Não Perturbativa de Partículas por Campos Clássicos Variantes	38
2.3.1 O Pré-aquecimento: <i>Preheating</i>	47
2.3.2 O Mecanismo FKL: <i>Instant Preheating</i>	57
3 Raios Cósmicos de Altíssimas Energias	63
3.1 Mecanismo “de baixo para cima” (<i>bottom-up</i>)	68
3.2 Mecanismos “de cima para baixo” (<i>top-down</i>)	70
3.2.1 Abundância das Partículas X s hoje	73
3.2.2 Evolução da Abundância das Partículas X s de sua Pro- dução até Hoje	76

4 Aplicações de Produção de Partículas no Universo Primordial	79
4.1 O Mecanismo FKL e os Raios Cósmicos de Altíssimas Energias [1]	80
4.1.1 A Taxa de Decaimento Dependente do Tempo	81
4.1.2 A Densidade Total de Partículas Produzidas	85
4.1.3 Abundância das Partículas ψ s e os Raios Cósmicos de Altíssimas Energias	87
4.1.4 O Espaço de Parâmetros do Modelo	89
4.1.5 Conclusões	94
4.2 O Pré-Aquecimento na Inflação Quintessencial [5, 6]	96
4.2.1 O Modelo	97
4.2.2 A Produção de Partículas	99
4.2.3 Temperatura de Reaquecimento	103
4.2.4 Produção Gravitacional $\times$ Produção FKL	104
4.2.5 Limites sobre g	105
4.2.6 Conclusões	106
4.3 Produção Direta de Partículas X s para explicar Raios Cósmicos de Altíssimas Energias [16]	108
4.3.1 A Produção Perturbativa das Partículas X s	108
4.3.2 Abundância das partículas X s hoje	110
4.3.3 Vínculos sobre a Produção Direta	112
4.3.4 Conclusões	114
Discussão e conclusão	116
A Unidades e Escalas	120
B Termodinâmica de Equilíbrio	121
B.1 Partículas Não Relativísticas ($m \gg T$)	121
B.2 Partículas Relativísticas ($m \ll T$)	121
B.3 Entropia	122
C Bastidores	124
C.1 Cálculo Numérico	124
C.1.1 Objetivo	124
C.1.2 Resultado	124
C.1.3 Amostra dos Resultados Obtidos	125
C.1.4 Conclusão	136
C.2 Comparação Analítica	137
C.2.1 Objetivo	137
C.2.2 Resultado	137
C.2.3 Histórico do Problema	137
C.2.4 Passo 1: Densidade Número de Partículas	138
C.2.5 Passo 2: Abundância	140

C.2.6	Passo 3: Kofman <i>et al.</i> , um teste de Chung	142
C.2.7	Discussão	145

Referências

146

Lista de Figuras

- 2.1 Dinâmica do inflaton livre sujeito apenas a expansão do universo. $\varphi = \phi/M_{Pl}$ e N corresponde ao número de oscilações do campo ϕ . A linha sólida representa a solução numérica da equação (2.2) e a linha pontilhada uma solução analítica aproximada dada pela expressão (2.8). 35
- 2.2 A curva contínua representa a frequência ω_k^2 , a curva pontilhada representa a derivada da frequência, $d\omega_k/dt$ e a curva tracejada a função ϕ (Figura 2.1) vezes 100; em função de $N (= m_\phi t/2\pi)$, para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 0$ e $g = 5 \times 10^{-4}$. A violação da condição de adiabaticidade (2.45) corresponde às passagens de ϕ pelo fundo do poço de potencial ($\phi \approx 0$). 51
- 2.3 O lado direito representa uma seqüência cronológica da evolução do inflaton a partir do fim da inflação. O lado esquerdo mostra os efeitos destas oscilações no universo. Note que a produção de partículas χ ocorreria dentro do intervalo $-\phi^* \leq \phi \leq \phi^*$ 52
- 2.4 Densidade número de partículas n_k produzidas durante as oscilações do campo ϕ em torno do mínimo de seu potencial, em função do número de oscilações $N (= m_\phi t/2\pi)$ que varia de 0 a 4, para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 0$ e $g = 5 \times 10^{-4}$ 55
- 2.5 Densidade número de partículas n_k produzidas durante as oscilações do campo ϕ em torno do mínimo de seu potencial, em função do número de oscilações $N (= m_\phi t/2\pi)$ que varia de 0 a 60, para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 0$ e $g = 5 \times 10^{-4}$ 55
- 2.6 A curva contínua representa a frequência ω_k^2 , a curva pontilhada representa a derivada da frequência, $d\omega_k/dt$ e a curva tracejada a função ϕ (Figura 2.1) vezes 100; em função de $N (= m_\phi t/2\pi)$, para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 2m_\phi$ e $g = 5 \times 10^{-4}$ 56
- 2.7 A curva contínua representa a frequência ω_k^2 , a curva pontilhada representa a derivada da frequência, $d\omega_k/dt$ e a curva tracejada a função ϕ (Figura 2.1) vezes 100; em função de $N (= m_\phi t/2\pi)$, para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 4m_\phi$ e $g = 5 \times 10^{-4}$ 57

2.8	A primeira oscilação do campo ϕ e os efeitos no universo visível são representados neste diagrama. Note que a produção de partículas χ ocorreria dentro do intervalo $-\phi^* \leq \phi \leq \phi^*$. Essas partículas quando engordam decaem em férmions ψ	60
3.1	Espectro de raios cósmicos	64
3.2	Final do espectro de raios cósmicos observado por AGASA [11], Fly's Eye [15], Haverah Park [16], HiRes [12] e SUGAR [17]. Figura extraída da referência [18].	66
3.3	Diagrama de Hillas. Mostra a relação existente entre os campos magnéticos produzidos por objetos astrofísicos e suas dimensões. As possíveis fontes de prótons e núcleos de ferro com energias acima de 10^{20} eV estariam acima da linha contínua e pontilhada, respectivamente. Figura extraída da referência [22].	69
3.4	Comprimento de atenuação de fótons, prótons e núcleo de ferro em diferentes radiações de fundo em função da energia. As três linhas inferiores indicam a atenuação dos fótons no fundo de infra-vermelho (IR), no fundo de microondas (CMB) e no fundo de radio. As duas linhas sólidas no canto direito indicam a atenuação dos prótons devido a fotoprodução de píons (corte GZK) e a produção de pares. A linha tracejada à direita indica a atenuação do núcleo de ferro devido a fotodesintegração no fundo de microondas e infra-vermelho. Figura extraída da referência [30].	72
4.1	Solução gráfica: $\phi(N^*) = 0,052$. Do gráfico verifica-se que $N^* \approx 0,6$ e que outra solução corresponde a $N \approx 0,85$	84
4.2	$\phi(N) \times N$. A curva contínua representa a função dada pela equação (4.3). A curva pontilhada corresponde a 14 termos de expansão em série desta função. Verifica-se que a série representa bem a função até $N \approx 1$	85
4.3	A região entre as duas curvas representa os valores que os parâmetros m_χ (dada em unidades de massa de Planck, $m_{\chi Pl}$) e g podem assumir para satisfazer as condições impostas para a abundância de partículas ψ hoje (Veja expressão (4.38)). A curva pontilhada corresponde a $\Omega_\psi h^2 = 0,14$ e a curva sólida a $\Omega_\psi h^2 = 3,16 \times 10^{-12} (g\Phi/M_{Pl})^{1/2}$	90
4.4	A reta representa a relação entre as constantes de acoplamento g e g' , $g'^2 g = 3 \times 10^{-3}$	90
4.5	A região cinza corresponde aos parâmetros (m_χ, g, g') permitidos para o modelo. Trata-se das Figuras 4.3 e 4.4 combinadas. Os limites da esquerda e da direita vêm das condições de unitariedade sobre os acoplamentos g e g'	91

4.6	O espaço de parâmetros permitido (m_χ, g, g') para a produção de partículas supermassivas não é substancialmente alterado mesmo impondo um limite inferior exagerado para a abundância de ψ ($\Omega_\psi h^2 = 10^{-20}$, linha sólida). Todas as outras curvas possuem o mesmo significado que na Figura 4.5.	92
4.7	A figura é uma reprodução da Figura 4.5. A região cinza escuro corresponde aos valores permitidos ao modelo calculados integralmente em nosso trabalho. Adicionamos uma região cinza claro, um pouco maior, que corresponde a limites nas constantes de acoplamento obtidos pelos autores de [2] e dada pela relação $g'^2 g \sim 5 \times 10^{-4}$. . .	93
4.8	A linha contínua representa o potencial de Peebles-Vilenkin e o pontilhado é o primeiro termo do potencial estendido para a região $\phi > 0$ (trata-se de um potencial do tipo $\lambda\phi^4$ estudado em modelos de inflação caótica). V_ϕ é dado em unidades de GeV^4 e ϕ em GeV	97
4.9	ω_k^2 (linha sólida), ω'_k (linha pontilhada) and $10 \times \varphi$ (linha sólida-pontilhada) como função de τ para $g = 10^{-5}$ e $k = 5\sqrt{\lambda}M_{Pl}^2$. Note que a adiabaticidade é violada em torno de $\tau \simeq 7$, quando o inflaton passa por zero.	99
4.10	Evolução do fator de escala como função de τ	100
4.11	Densidade número comóvel de partículas χ produzidas como função de τ para o momento comóvel $k = 0, 100 \sqrt{\lambda}M_{Pl}$ e $200 \sqrt{\lambda}M_{Pl}$, para $g = 5 \times 10^{-5}$	101
4.12	Densidade número comóvel de partículas χ produzidas como função do momento comóvel k em unidades de $\sqrt{\lambda}M_{Pl}$. $\lambda = 1 \times 10^{-14}$ and $g = 5 \times 10^{-5}$ (curva sólida); $\lambda = 1 \times 10^{-14}$ and $g = 1 \times 10^{-4}$ (curva pontilhada); $\lambda = 4 \times 10^{-14}$ and $g = 5 \times 10^{-5}$ (curva sólida-pontilhada).	101
4.13	Potencial de Dimopoloulos-Valle V_φ é dado em unidades de M_{Pl}^4 e φ em unidades de M_{Pl}	107
4.14	ω_k^2 (linha sólida), ω'_k (linha pontilhada) and $10 \times \varphi$ (linha sólida-pontilhada) como função τ para $g = 1$ e $k = 10^5 m^2 M_{Pl}$. Note que a adiabaticidade é violada em torno de $\tau \simeq 0.69$, quando o inflaton passa por zero.	107
4.15	Evolução de X ($\equiv \rho_X m_X^{-1} a^3$) como função da variável temporal, x . Utiliza-se $m_\phi = 10^{13} \text{ GeV}$ e $m_X = 10^{12} \text{ GeV}$. Este gráfico foi extraído da referência [16].	111
4.16	Razão de Ramificação B_X do decaimento do inflaton em partículas X s como função da temperatura de reaquecimento T_{rq} para as vidas médias máxima e mínima das partículas X s. Este gráfico foi extraído da referência [16].	114

4.17	A reta pontilhada representa a relação entre m_χ (em unidade de massa de Planck, $m_{\chi_{Pl}}$) e g para a condição da matéria escura $\Omega_\psi = 0.3$. O segmento de reta cinza corresponde aos parâmetros (m_χ, g, g') permitidos para o modelo FKL aplicado ao problema da matéria escura do universo.	118
B.1	Evolução de g_* e g_{*S} em função da temperatura, de acordo com o modelo padrão da Física de Partículas Elementares [1]. Para o universo primitivo $g_* = g_{*S} \approx 200$. Para o universo atual $g_* \approx 3,36$ e $g_{*S} \approx 3,91$ [2].	123
C.1	$m_\chi = 0, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	126
C.2	$m_\chi = m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	126
C.3	$m_\chi = 2m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	126
C.4	$m_\chi = 3m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	127
C.5	$m_\chi = 4m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	127
C.6	$m_\chi = 5m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	127
C.7	$m_\chi = 6m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	127
C.8	$m_\chi = 7m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	128
C.9	$m_\chi = 8m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	128
C.10	$m_\chi = 9m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	128
C.11	$m_\chi = 10m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	128
C.12	Cada curva está relacionada aos parâmetros $m_\chi = 0, m_\chi = m_\phi, m_\chi = 2m_\phi, m_\chi = 3m_\phi, m_\chi = 4m_\phi, m_\chi = 5m_\phi, m_\chi = 6m_\phi, m_\chi = 7m_\phi, m_\chi = 8m_\phi$ de cima para baixo, respectivamente, com $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	129
C.13	$\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)	130
C.14	$\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)	130
C.15	$\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)	133
C.16	$\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)	134
C.17	$\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)	134
C.18	$\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)	135
C.19	n_k x N . $m_\chi = 10m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	136
C.20	n_k x N . $m_\chi = 100m_\phi, g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$	136
C.21	A curva sólida é o resultado numérico. As curvas pontilhadas correspondem a expressões analíticas com diferentes escolhas de um fator de correção. Essa informação não será aqui utilizada, mas para detalhes ver artigo [6] de onde o gráfico foi extraído. . .	141

Lista de Tabelas

1.1	Alguns eventos da história do universo. T representa a temperatura do universo, z o <i>red-shift</i> (veja seção 1.2.2), t o intervalo de tempo estimado desde o <i>Big Bang</i> e R o raio do universo na época. Essa tabela foi inspirada na referência [23].	13
4.1	Qual mecanismo de produção de partículas é utilizado e em qual problema, para cada uma das aplicações que serão apresentadas nesta seção.	79
4.2	Resultados numéricos para as abundâncias finais obtidas através da solução do sistema de equações de conservação da densidade de energia do universo durante a fase de reaquecimento, para $T_{rq} = 10^9$ GeV, 10^3 GeV e 10^{-2} GeV e $B_X < 10^{-3}$	113
C.1	Valores da densidade em número de partículas n_k numérico e analítico para diferentes valores de massa m_χ	130
C.2	Valores da densidade em número de partículas n_k numérico para diferentes valores de massa m_χ e para diferentes parâmetros de precisão do <i>software Mathematica</i> . Os valores de n_k numérico graficados na Figura C.13 correspondem a última linha de cada massa.	133

Resumo

Neste trabalho estudam-se três aplicações de mecanismos de produção de partículas no universo pós inflacionário. Apesar da motivação inicial para esses mecanismos ter sido o reaquecimento do universo, eles foram utilizados, posteriormente, para produzir partículas supermassivas. A produção de partículas, sejam elas supermassivas ou não, depende essencialmente do modelo inflacionário utilizado. Aqui, trabalha-se com modelos inflacionários caóticos gerados por um campo escalar, o inflaton.

A primeira aplicação estuda a produção de partículas supermassivas pelo mecanismo de pré-aquecimento instantâneo que é não perturbativo. Estabelece-se os limites dos parâmetros desse mecanismo impondo que essas partículas constituam parte da matéria escura e que seu decaimento, hoje, produzam os raios cósmicos de altíssimas energias.

A segunda aplicação é um estudo numérico de como teria sido o reaquecimento do universo, num modelo inflacionário quintessencial, com partículas tendo sido produzidas através do mecanismo de pré-aquecimento instantâneo. Esses modelos inflacionários são utilizados para explicar a origem da energia escura que parece dominar o universo hoje. Obtém-se a faixa de temperaturas de reaquecimento permitidas.

A terceira aplicação também estuda a produção de partículas supermassivas para explicar os raios cósmicos de altíssimas energias, mas por um mecanismo perturbativo. As partículas seriam o produto do decaimento direto do inflaton após a inflação. Obtém-se limites para razão de ramificação deste decaimento, impondo restrições para a vida média das partículas supermassivas e para a sua abundância hoje.

Abstract

We studied three applications of the mechanisms of particle production in the early universe. Although such mechanisms were first proposed to reheat the universe they were used lately to produce supermassive particles. The production of supermassive or massless particles depends mainly on the inflationary model that we work with. Here, we chose the chaotic inflationary models generated by one scalar field, the inflaton.

In the first application we studied the production of supermassive particles by the non-perturbative instant preheating mechanism. We used cosmic ray flux and cold dark matter observational data to constrain the parameters of the model, since we are supposing that such particles may account for a fraction of the cold dark matter as well as decay into high energy cosmic rays.

In the second application we perform a numerical study of the instant preheating mechanism of particle production in a model of quintessential inflation. Such inflationary models are used to explain the dark energy that seems to dominate the universe nowadays. We obtained the reheating temperatures allowed by this mechanism.

The third application studied the supermassive particle production by a perturbative mechanism to explain high energy cosmic rays. The inflaton would have decayed into such particles after inflation. By constraining their lifetime and present abundance we obtained the branching ratio of such decay.

Introdução

A Cosmologia está tendo um grande destaque no meio científico devido às recentes e surpreendentes descobertas realizadas nos últimos anos. As interpretações dos dados experimentais parecem indicar que estamos vivendo num universo quase plano, que entrou numa fase de expansão acelerada recentemente e que mais de 90% dele é constituído por formas de matéria-energia ainda desconhecidas: aproximadamente um terço denominada de matéria escura e aproximadamente dois terços de energia escura.

Atualmente o grande desafio na Cosmologia é (re)contar a história do universo inserindo essas novas descobertas, sem prejudicar todas as suas previsões de sucesso, e concomitantemente ser capaz de revelar a natureza tanto da matéria escura quanto da energia escura.

Essa matéria-energia que domina hoje o nosso universo deve ter existido desde a sua origem ou deve ter sido produzida em algum momento de sua história. No contexto do Modelo Cosmológico Inflacionário, um dos períodos promissores para a busca de explicações é a fase (pós)inflacionária. Segundo esse modelo, que tem como principais previsões a planura do universo, a homogeneidade da radiação cósmica de fundo e a formação das sementes das grandes estruturas hoje observadas, o universo teria passado por uma fase de rápida expansão em seus primórdios. A consequente diluição do conteúdo de matéria-energia que existia teria tornado o universo vazio e frio. Modelos de produção de partículas após a inflação preveem o reaquecimento do universo. As pistas para a construção de uma história consistente devem estar no modelo inflacionário específico que se utiliza para descrever essa fase, no mecanismo de produção das partículas após a inflação, bem como na natureza dessas partículas.

Dois panoramas ganham destaque caso a resposta a essas questões cosmológicas estejam no período (pós)inflacionário. Um deles é a quintessência que é um candidato a energia escura. Essa forma de energia teria dominado os primórdios, provocando a inflação e seu domínio hoje estaria ocasionando uma nova fase inflacionária. Outro panorama é a existência de partículas supermassivas metaestáveis que seriam candidatos à matéria escura. Elas poderiam ter sido produzidas por algum dos mecanismos de reaquecimento pós inflacionário e sobrevivido até hoje.

As partículas supermassivas metaestáveis, além de serem candidatas à matéria escura, são também candidatas a explicar uma grande problema da astrofísica que são os raios cósmicos de altas energias. Tratam-se de partículas muito energéticas que quando atingem a atmosfera terrestre produzem uma cascata de outras partículas que são medidas. A partir desses dados infere-se qual seria a energia da partícula primária. A maior energia de raio cósmico hoje registrada é da ordem de 10^{20} eV que é pelo menos cem mil vezes maior que as energias produzidas em aceleradores de partículas hoje. Entretanto, ainda não se sabe de onde elas vêm, o que elas são e nem o mecanismo de produção que as gera.

O estudo dessas duas grandes questões da cosmologia (matéria escura) e astrofísica (raios cósmicos de altas energias) de um ponto de vista unificador representa um intercâmbio valioso entre as áreas e pode ser revelador na determinação de uma solução comum ou no estabelecimento dos limites desta interface.

O trabalho que será apresentado aborda as questões acima delineadas e está estruturado em capítulos. Os três primeiros capítulos oferecem os subsídios para a compreensão do quarto que, por sua vez, contém três aplicações publicadas.

O Capítulo 1 traz uma revisão do Modelo Cosmológico Padrão e do Modelo Inflacionário.

O Capítulo 2 tem como foco o período de produção de partículas pós-inflacionário. Apresenta-se alguns mecanismos de produção de partículas que foram classificados entre perturbativos e não perturbativos. É discutido a aplicabilidade dos mecanismos para o reaquecimento do universo, razão pela qual foram originalmente propostos, bem como na produção de partículas não relativísticas. Desenvolve-se com mais detalhes um dos mecanismos não perturbativos, conhecido na literatura por pré-aquecimento instantâneo, já que as aplicações se basearão principalmente nele. Neste trabalho ele será denominado mecanismo FKL em homenagem aos autores.

O Capítulo 3 descreve o problema dos Raios Cósmicos de Altíssimas Energias e apresenta alguns mecanismos que tentam explicá-los. Eles são divididos em mecanismos “de baixo para cima” (*bottom up*) e “de cima para baixo” (*top down*). É dado mais ênfase ao último deles que prevê a existência das partículas supermassivas metaestáveis, que decairiam nas partículas de raios cósmicos. Discute-se algumas das condições que essas partículas devem satisfazer para poder explicar esses eventos.

O Capítulo 4 está dividido em três aplicações dos modelos de produção de partículas e que correspondem a trabalhos publicados:

✓ A primeira aplicação considera o mecanismo FKL como gerador de partículas supermassivas, após a inflação. Essas partículas seriam as fontes dos raios cósmicos

de altíssimas energias e poderiam fazer parte da matéria escura, prevista a existir no universo. Obtém-se o espaço de parâmetros deste modelo utilizando os dados da matéria escura e o fluxo de raios cósmicos observados.

✓ A segunda aplicação é um estudo exploratório de como seria a produção de partículas após a inflação, através do mecanismo FKL, num cenário de inflação quintessencial. Utilizando como exemplo um potencial inflacionário quintessencial específico, calculou-se numericamente qual teria sido a densidade de partículas produzida para reaquecer o universo daquela época.

✓ A terceira aplicação estuda um mecanismo de produção perturbativo de partículas supermassivas após a inflação. Essas partículas decairiam em partículas de raios cósmicos de altíssimas energias hoje. Estabelece-se limites nos parâmetros do modelo impondo restrições na vida média dessas partículas e na quantidade delas hoje.

A Discussão e Conclusão é apresentada ao final do trabalho.

Além dos Capítulos, este trabalho traz três Apêndices. O primeiro contém algumas convenções de escalas e unidades que são utilizadas e que podem ser úteis. O segundo descreve a formulação básica da termodinâmica de equilíbrio e que é utilizada ao longo do trabalho. O terceiro e último Apêndice foi chamado de "Bastidores" e pretende mostrar um estudo numérico para a criação de partículas pesadas que se mostrou inadequado e, o mais importante, registrar o caminho que deve ser tomado numa segunda tentativa. Além disso, apresenta-se uma comparação entre dois trabalhos de produção de partículas da literatura, que está ainda em andamento.

Capítulo 1

O Universo Hoje Conhecido

Entender e descrever o universo e sua evolução é o principal objetivo da cosmologia. Durante muitos anos a cosmologia foi um grande campo de idéias; porém, de pouca comprovação observacional. Hoje, com os avanços tecnológicos, o panorama parece ter invertido. Observações recentes parecem indicar que desconhecemos aproximadamente 96% do conteúdo de matéria estimado existir no universo e medidas de supernovas a grandes *red shifts*¹ estariam mostrando que o universo está expandindo aceleradamente. Esses resultados observacionais estão desafiando os cosmólogos a buscar explicações e formular modelos que esclareçam essas incógnitas. O momento é bastante desafiador e idéias inovadoras podem surgir nos próximos anos.

Talvez tenha-se vivido algo semelhante quando E. Hubble [1] descobriu, em 1929, que o universo não era estático, como se pensava antes disso, mas que estava em expansão. Essa descoberta levou ao modelo Cosmológico Padrão, também conhecido como *Big Bang*, aceito até hoje, que descreve a complexa dinâmica do universo com base na Teoria da Relatividade Geral de Einstein. Ainda não se compreende as causas do *Big Bang* e nem os instantes imediatamente posteriores a ele, mas acredita-se que o universo tenha começado numa região de densidade e temperatura extremamente altas. Assim, parece natural imaginar que a compreensão desse momento inicial esteja vinculada à reunião da Gravitação com a Mecânica Quântica. Essa é uma área de intensa pesquisa teórica e ainda uma incógnita científica.

O *Big Bang* prevê um universo primordial formado por um plasma de partículas elementares relativísticas, como quarks, fótons e neutrinos, que teria esfriado com a sua expansão. O esfriamento teria permitido a formação de hádrons², e posteriormente, de núcleos leves. A nucleossíntese, que é o nome dado a este último

¹ *Red shift* é um parâmetro cosmológico diretamente relacionado à distância e que será definido na seção 1.2.2.

² Hádrons são partículas formadas por quarks. Podem ser classificados em bárions (3 quarks), antibárions (3 antiquarks) ou mésons (1 quark e 1 antiquark).

processo, é um dos sucessos do modelo do *Big Bang*, pois prevê a abundância relativa atual desses elementos que não poderia ter sido fabricada apenas em estrelas. Átomos seriam formados depois, com o universo mais frio, quando a radiação não tivesse energia suficiente para ionizá-los. Neste momento a ela se desacoplaria das outras formas de energia e começaria sua livre jornada até hoje. Essa previsão do modelo *Big Bang* foi feita em 1948 por R. Alpher e R. Herman [2] e foi confirmada pela primeira vez por A. Penzias e R. Wilson [3], em 1964, quando descobriram uma radiação cósmica de fundo vinda de todas as direções com temperatura de aproximadamente 3K. Quase 20 anos depois, em 1993, o satélite COBE (*Cosmic Background Explorer*) mediu com grande precisão essa radiação, característica de um corpo negro com temperatura $T = 2.725 \pm 0.001\text{K}$ [4].

Como a radiação cósmica de fundo vem de todas as direções e se mostra bastante homogênea parece razoável supor que exista uma equivalência entre todas as posições existentes no universo, ou seja, que ele deva ser homogêneo e isotrópico. Entretanto, assumindo que a partir de seu início o universo simplesmente expandiu segundo as equações da Relatividade Geral, a condição de equivalência espacial só seria obtida sob condições iniciais bastante particulares e portanto, pouco desejáveis.

Em 1980, A. Guth [5] mostrou que a abundância de monopólos magnéticos que seriam gerados naturalmente com o esfriamento do universo seria grande hoje. Como monopólos não são observados, ele sugeriu que o universo deve ter passado por um breve período de expansão acelerada, logo após o *Big Bang*, que diluiria as relíquias indesejadas. Isso explicaria também a homogeneidade do espaço observada hoje no universo. Essa rápida expansão pode ser descrita através da física de partículas elementares e é conhecida como inflação. Faz-se uso de um campo escalar hipotético chamado inflaton cuja dinâmica resultaria na expansão do espaço. Utilizar uma teoria da microescala para descrever um resultado cosmológico foi um dos méritos deste modelo, pois ampliou a visão da cosmologia³.

O modelo inflacionário, apesar de ter sido construído para explicar alguns problemas do *Big Bang*, se mostrou muito mais amplo e hoje seu principal resultado é considerado a previsão da formação das estruturas em larga escala existentes no universo: as galáxias, aglomerados de galáxias e super-aglomerados. A evidência observacional das sementes da formação das estruturas estaria nas pequenas anisotropias na temperatura da radiação cósmica de fundo descobertas pelo satélite COBE, $\delta T/T \approx 10^{-5}$. Atualmente, o espectro angular dessa radiação está sendo

³Campos escalares são previstos na Física de Partículas Elementares, como por exemplo o campo escalar bosônico de Higgs que explicaria porque as partículas têm massa. Entretanto, nenhum campo escalar elementar foi descoberto até hoje e isso torna esse modelo de inflação bastante intrigante.

determinado com maior precisão pelo satélite WMAP (*Wilkinson Microwave Anisotropy Probe*) [6]. Tanto esse espectro quanto a polarização da radiação de fundo, que foi detectada em 2002 pela colaboração DASI⁴ [7], auxiliam na determinação do modelo inflacionário que gerou as estruturas do universo e também impõe vínculos em alguns dos parâmetros cosmológicos. Um deles é a abundância de matéria⁵ total do universo que, de acordo com os resultados recentes do WMAP [9], é dada por $\Omega_0 = 1,02 \pm 0,02$ indicando, segundo o modelo cosmológico padrão, que o universo é aproximadamente plano⁶.

Outro importante parâmetro que se obtém da análise da radiação cósmica de fundo é a abundância da matéria bariônica, hoje estimada como sendo $\Omega_{b0} h_0^2 = 0,0224 \pm 0,0009$ [9]. O parâmetro $h_0^2 \approx 0,5$ como será estudado mais adiante. Esse resultado é muito interessante porque coincide com uma determinação experimental independente, que confirmou os resultados da nucleossíntese. Trata-se da medição da abundância de deutério em nuvens de hidrogênio a grandes *redshifts* [10] que estabeleceu um limite superior para a densidade bariônica como sendo de $\Omega_{b0} h_0^2 = 0,020 \pm 0,001$. Essa coincidência dá a esse parâmetro uma confiabilidade muito grande e evidencia a consistência do modelo que está sendo construído.

Comparando a abundância da matéria bariônica com a abundância total estimada existir no universo vemos que ela representa aproximadamente 4%. Mas o que seriam os 96% restantes? A resposta parece estar em duas formas de matéria-energia desconhecidas: a matéria escura e a energia escura.

Matéria Escura

Os primeiros indícios da existência da matéria escura surgiram em 1933 quando o astrônomo F. Zwicky [11], observando um aglomerado de aproximadamente mil galáxias, concluiu que, a massa associada a matéria luminosa deste aglomerado era muito menor que sua massa total, inferida a partir do movimento de algumas de suas galáxias. Porém, apenas na década de 70 este conceito foi considerado mais seriamente quando V. Rubin e K. Ford publicaram, em 1978, a análise de curvas de rotação de galáxias [12]. Eles mostraram que a matéria luminosa existente nas galáxias não seria suficiente para mantê-las coesas.

Esses resultados indicam que o movimento de galáxias e aglomerados de galáxias não é explicado através da atração gravitacional da matéria luminosa aí existente. Deve existir algum tipo de matéria não luminosa que esteja presente nas estruturas do universo, que possa se distribuir em grandes halos ao redor das

⁴Essas grandezas serão melhor determinadas pelo satélite Planck da *European Space Agency* [8] planejada para iniciar sua operação em 2007.

⁵A abundância é um parâmetro cosmológico que será definido na seção 1.2.4.

⁶O subíndice 0 representará, ao longo de todo o trabalho, o valor presente da grandeza.

galáxias e que explique esse comportamento. A quantidade estimada de matéria escura hoje no universo deve ser de aproximadamente um terço da matéria total existente.

Mas o que seria essa matéria escura? Existem vários candidatos [13]. Se essa matéria fosse bariônica, poderia-se pensar em um gás de poeira que permeasse todo o universo ou em objetos astrofísicos compactos não luminosos, conhecidos por MACHOS (*Massive Compact Halo Objects*). Porém, como a nucleossíntese limita a quantidade de bárions que poderia existir no universo a 4%, a contribuição desses candidatos para a matéria escura seria pequena. Desse dado conclui-se que a matéria escura é essencialmente não bariônica.

Outro possível candidato é o neutrino. Ele poderia explicar a abundância de matéria escura se sua massa fosse da ordem de 30 eV. Porém hoje, só é possível medir a diferença de massas de neutrinos de diferentes tipos que, é da ordem $\Delta m \approx 0,05$ eV, e ainda não se sabe qual é a massa dessas partículas. Mas o que torna o neutrino um candidato pouco promissor é que, segundo o Modelo Cosmológico Padrão, eles são partículas relativísticas desde seu desacoplamento no universo primordial. Por serem relativísticas na época da formação das primeiras galáxias, essas partículas não poderiam reproduzir as estruturas hoje observadas no universo. Na verdade, a formação das estruturas depende fundamentalmente da existência de uma matéria escura fria.

Algumas partículas como os neutralinos e axions, previstas em extensões do modelo padrão de Física de Partículas, poderiam também ser candidatas. Ambas seriam estáveis e poderiam ter sido produzidas no universo primordial em abundância suficiente para compor a matéria escura fria. A primeira teria uma massa de 100 GeV enquanto que a segunda 10^{-5} eV.

Os neutralinos fazem parte de uma classe mais ampla de modelos para a matéria escura, denominados WIMPS (*Weakly Interacting Massive Particles*). Essas partículas são relíquias térmicas pois estariam em equilíbrio térmico no universo primordial e teriam se desacoplado de outras formas de energia quando se tornaram não relativísticas. A sua abundância naquela época depende fundamentalmente de sua massa e interação com a matéria usual. Dada a abundância dessas partículas hoje, é possível determinar a ordem de grandeza máxima desses parâmetros. A massa dos WIMPS deve ser da ordem da escala eletrofraca de energia (100 GeV) e sua interação com a matéria bariônica da ordem da escala da força fraca, se eles formarem o conteúdo de matéria escura.

O axion é um exemplo de uma relíquia não térmica leve e sua abundância presente seria determinada pela dinâmica da transição de fase associada com uma quebra de simetria em Física de Partículas.

Se axions ou WIMPS existirem, eles estariam também preenchendo o halo de

nossa galáxia e portanto poderiam, em princípio, ser detectadas. A dificuldade experimental está na fraca interação que essas partículas teriam com a matéria bariônica, mas ainda assim, existem experimentos que buscam detectá-las [14].

Em contraste aos WIMPS que, como estudado, são relíquias térmicas com massas limitadas a 100 GeV, foi proposto uma outra classe de partículas que também interagiriam fracamente mas que, por terem sido produzidas não termicamente no universo primordial, poderiam ser mais pesadas. Essas partículas supermassivas de matéria escura foram chamadas por E. Kolb *et al.* de WIMP-ZILLAS [15] e suas massas estariam relacionadas à escala de energia da inflação. Elas poderiam ser úteis também para explicar modelos de bariogênese, teorias de grande unificação (*GUT - Grand Unified Theories*) e modelos de raios cósmicos de altíssimas energias que é um dos objetivos deste trabalho.

Energia Escura

Os 60% da energia restante, são inferidos a partir de dados de medidas de supernovas do tipo Ia feitas por dois grupos independentes, *Supernova Cosmology Project* [16] e *High-z Supernova Team* [17]. Esses eventos parecem mostrar que o universo está expandindo aceleradamente. Esse inesperado comportamento deve estar sendo causado por uma componente dominante de energia que, diferentemente da matéria usual, não gravita, mas sim, antigravita e por isso foi chamada de energia escura.

Existem candidatos à energia escura do universo como por exemplo a constante cosmológica e os modelos de campos escalares ou de quintessência. Eles serão discutidos na seção 4.2 do trabalho pois dependem do desenvolvimento dos próximos capítulos.

Finalmente, em síntese, é possível dizer que o universo de hoje seria constituído por [18]:

- Energia escura: $67 \pm 6\%$
- Matéria escura: $29 \pm 4\%$
- Bárions: $4 \pm 1\%$
- Neutrinos: $0.1\% - 5\%$
- Radiação Cósmica de Fundo: 0.01%

Foi dada uma visão bastante geral das interessantes características do universo que os experimentos tem nos revelado. Diferentes observações fortalecem o modelo que está sendo construído para explicar a evolução do universo e contribuem para ampliá-lo.

1.1 A História do Universo

Para contar a história que hoje imagina-se do universo, ela foi dividida em quatro partes⁷: universo primordial, era da radiação, era da matéria e era da energia escura. Foi dada atenção aos eventos que teriam ocorrido ao longo de sua expansão.

Universo Primordial

Energias da ordem da escala de Planck podem ter permeado o universo inicial logo após o *Big Bang*. A física que se aplica a essa época é especulativa, mas imagina-se que a gravidade quântica é que seria capaz de descrevê-la. O universo primordial teria experimentado a unificação das interações (*GUT, Grand Unification Theory*) prevista para uma energia acima de 10^{15} GeV.

No modelo cosmológico mais aceito, o universo inicial teria passado por uma fase inflacionária rápida, provocando seu esfriamento. Partículas relativísticas seriam produzidas no fim da inflação e se termalizariam a uma temperatura chamada de temperatura de reaquecimento. Esse processo, conhecido por reaquecimento (*reheating*), teria levado o universo a uma fase de domínio da radiação⁸.

Era da Radiação

O universo pode ter iniciado essa era com uma energia bastante alta, porém o primeiro evento relevante do ponto de vista da Física de Partículas Elementares, a ser considerado, teria sido a distinção entre as interações eletromagnética e fraca (transição de fase eletrofraca) a uma energia de 100 GeV. A assimetria bariônica (bariogênese) poderia ter sido gerada nesta fase, já que bárions passariam a se distinguir dos antibárions. Hádrons seriam formados a uma temperatura de 100 MeV (0,1 GeV) a partir da condensação de quarks livres que estariam em equilíbrio com a radiação (transição de fase quark-hádron). As previsões da nucleossíntese [20] mostram que a formação de núcleos leves, deutério (2H), trítio (3H), hélio 3 (3He), hélio 4 (4He), berílio 7 (7Be), lítio 7 (7Li) ocorreria posteriormente, a uma temperatura de 0,1 MeV. Como a nucleossíntese parece ser um modelo de grande sucesso, atribui-se um limite inferior para a temperatura de reaquecimento, como sendo de aproximadamente 10 MeV, que garantiria a viabilidade desse processo.

Em torno de 10 eV (10^5 K), a densidade de matéria relativística se igualaria à de matéria não relativística e a era da radiação terminaria.

⁷Baseado na sugestão dos autores A. Liddle e D. Lyth [19].

⁸O foco deste trabalho está no intervalo entre o fim da inflação e o fim do reaquecimento. A inflação será estudada na seção 1.3 e o reaquecimento no Capítulo 2.

A termodinâmica que descreve esse período pode ser estudada na referência [21] e está parcialmente apresentada no Apêndice B.

Era da Matéria

Quando o universo atingisse uma energia de aproximadamente 0,1 eV (3000 K) os elétrons se ligariam aos nucleons formando os átomos, ou seja o processo de ionização deixaria de ocorrer. Nesta época, conhecida por recombinação, a radiação teria se desacoplado da matéria e passaria a viajar livremente pelo espaço. Como já foi visto, detecta-se hoje essa radiação cósmica de fundo e seu espectro é compatível com o de um corpo negro a uma temperatura de $T = 2.725 \pm 0.001\text{K}$ [4].

As estruturas hoje observadas como galáxias, aglomerados de galáxias e super-aglomerados teriam sido formadas a partir do agrupamento da matéria depois do desacoplamento da radiação. Antes disso a matéria era distribuída homogeneamente em todas as escalas. Esses agrupamentos seriam uma decorrência da inflação, que teria esticado as flutuações quânticas do universo primordial de escalas microscópicas para escalas astronômicas. As regiões de maior densidade promoveriam o agrupamento da matéria por atração gravitacional, mas a radiação que existia tenderia a dispersá-la. Esses dois efeitos opostos sobre a matéria teria impresso flutuações de temperatura na radiação cósmica de fundo, já que o movimento de dissipação seria cada vez menor, devido a expansão, até que cessaria completamente depois da formação dos átomos. Sinais dessas flutuações, que são pequenas anisotropias na temperatura, são encontradas na radiação de fundo ainda hoje e sua análise fornece pistas sobre modelos inflacionários que teriam gerado as estruturas que vemos [22].

Era da Energia Escura

Se a existência da energia escura for confirmada e ela realmente corresponder a mais de 60% da densidade de energia existente no universo hoje, isso significaria que houve uma época onde essa forma de energia se igualou a densidade de matéria não relativística. Assim o universo estaria atualmente sob domínio dessa forma desconhecida de energia.

A Tabela 1.1 mostra a história do universo, em síntese, explicitando os instantes e os *red shifts* em que os eventos teriam ocorrido.

1.2 O Modelo Cosmológico Padrão

Para descrever o universo, considera-se que ele seja um sistema isolado, ou seja, que não exista nada além dele. Quando ele é pensado em larga escala, a

EVENTO	T	z	t	R
Gravidade Quântica ? GUT ?	10^{18} GeV	10^{32}	10^{-43} s	10^{-6} m
Inflação ?	10^{15} GeV	10^{28}	10^{-36} s	10^{-2} m
Transição Eletrofraca ?	100 GeV	10^{15}	10^{-12} s	10^{12} m
Transição Quark-Hadron ?	100 MeV	10^{13}	$10^{-6.6}$ s	10^{15} m
Nucleossíntese	0,1 MeV	10^{10}	1 s	10^{16} m
Formação de átomos Desacop. da Radiação	0,1 eV	1100	10^5 anos	10^{23} m
Primeira Galáxia	16 K	5	10^9 anos	6×10^{25} m
Hoje	2,73 K	0	13×10^9 anos	13×10^{25} m

Tabela 1.1: Alguns eventos da história do universo. T representa a temperatura do universo, z o *red-shift* (veja seção 1.2.2), t o intervalo de tempo estimado desde o *Big Bang* e R o raio do universo na época. Essa tabela foi inspirada na referência [23].

única interação de interesse é a gravitacional, que é de longo alcance. A Relatividade Geral parece ser, então, a teoria conhecida mais adequada para descrever a evolução do universo 3-dimensional. As equações de Einstein, que descrevem a dinâmica de um espaço-tempo (4-dimensional) sujeito a um conteúdo específico de matéria e energia são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

onde $R_{\mu\nu}$ e R são o tensor e o escalar de Ricci (de curvatura) respectivamente, que podem ser obtidos a partir do tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, G é a constante gravitacional, $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento e Λ é a chamada constante cosmológica. Para resolver esse sistema de equações é preciso definir a métrica e o tensor energia momento adequados ao modelo que se quer obter para o universo.

1.2.1 A Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

Como o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ é simétrico, as equações de Einstein (1.1) se reduzem a um conjunto de 10 equações diferenciais, não lineares, acopladas e portanto de difícil solução. Porém, a grande maioria dos modelos cosmológicos fazem uso

do Princípio Cosmológico, que vem a ser a equivalência entre todos as posições do universo e que a radiação cósmica de fundo medida parece confirmar (veja discussão na introdução deste capítulo). Em termos de simetrias fala-se de um universo homogêneo e isotrópico. Homogeneidade se referindo à invariância segundo translações, enquanto que isotropia segundo rotações.

Essas condições levam a espaços 3-dimensionais com curvatura constante. Segundo a geometria não-euclideana existem apenas três destes espaços e podem ser descritos de forma genérica através das coordenadas r , θ , ϕ e expressos pelo elemento de linha espacial:

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (1.2)$$

Aqui o parâmetro k pode assumir três valores, correspondendo às três curvaturas do espaço. $k = +1$: curvatura positiva, espaço esférico. $k = -1$: curvatura negativa, espaço hiperbólico e $k = 0$: curvatura nula, espaço plano.

O tempo é sempre considerado único nesses modelos, ou seja, relógios em pontos distintos do universo marcarão sempre a mesma hora.

Finalmente obtém-se o elemento de linha que descreve um espaço-tempo homogêneo e isotrópico⁹:

$$ds^2 \equiv dt^2 - dL(t)^2 \quad (1.3)$$

$$= dt^2 - a(t)^2 \left\{ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\}, \quad (1.4)$$

ou seja, $dL(t)^2 = a(t)^2 dl^2$. Observe que o parâmetro $a(t)$, chamado fator de escala, evidencia a possível variação do tamanho do universo com o tempo. Como o universo está em expansão, $dL(t)$ é chamado de elemento de linha físico e dl de elemento de linha comóvel, ou seja, que se move junto com o universo.

Essa métrica é denominada de Friedmann-Robertson-Walker e sua seção espacial é dita ser maximalmente simétrica. As componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ são dadas, então, por:

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = \frac{a(t)^2}{1 - kr^2}, \quad g_{22} = a(t)^2 r^2, \quad g_{33} = a(t)^2 r^2 \sin^2 \theta, \quad (1.5)$$

sendo todas as outras nulas. A partir desta métrica calcula-se as conexões, $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ ¹⁰. Em seguida calcula-se o tensor de Riemann, $R_{\nu\rho\lambda}^\mu$ ¹¹ e finalmente obtém-se o

⁹É utilizado o sistema natural de unidades onde $c = 1$. Veja Apêndice A.

¹⁰ $\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (\partial_\rho g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\rho\lambda} - \partial_\lambda g_{\nu\rho})$.

¹¹ $R_{\nu\rho\lambda}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\lambda}^\mu - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\sigma\lambda}^\mu \Gamma_{\nu\rho}^\sigma$.

tensor e o escalar de Ricci, $R_{\mu\nu}$ ¹² e R ¹³, que podem ser substituídos nas equações de Einstein (1.1).

Antes de definir o tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$, apresenta-se alguns resultados cinemáticos da métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

1.2.2 Alguns Resultados Cinemáticos da Métrica de Friedmann-Robertson-Walker

O Parâmetro de Deslocamento para o Vermelho (*red-shift*)

Esse parâmetro é bastante útil em cosmologia e é definido segundo o raciocínio abaixo.

Se todos os pontos do espaço são equivalentes e o universo está expandindo espera-se que, em larga escala, todas as estruturas se afastem entre si. Considerando uma estrela que emite uma luz com comprimento de onda λ , é natural esperar que o comprimento de onda medido seja maior do que o emitido, já que a luz viaja pelo espaço que se expande. Para obter esse resultado quantitativamente, imagina-se uma luz que viaja sobre uma geodésica¹⁴ ($ds^2 = 0$), de modo que ela mantenha a direção espacial constante. Suponha que ela saia de (t, r) e chegue até nós em $(t_0, 0)$. Do elemento de linha (1.4) obtém-se:

$$dt = a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}, \quad (1.6)$$

Ou seja:

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_r^0 \frac{dr'}{\sqrt{1 - kr'^2}}. \quad (1.7)$$

Considerando que sejam emitidas cristas de ondas em intervalos de Δt e recebidas em intervalos de Δt_0 e que elas percorram a mesma distância comóvel, obtém-se a relação abaixo, com a ajuda da expressão (1.7) [25]:

$$\frac{\Delta t_0}{a(t_0)} = \frac{\Delta t}{a(t)} \Rightarrow \frac{\nu}{\nu_0} = \frac{a(t_0)}{a(t)}, \quad (1.8)$$

onde ν é a frequência da onda emitida e ν_0 da onda recebida. Define-se:

$$z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t)} - 1, \quad (1.9)$$

¹² $R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho}$

¹³ $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Esses cálculos são bastante longos e podem ser conferidos no capítulo 4.1 do livro do Narlikar [24].

¹⁴Uma partícula livre em um espaço tempo curvo sujeito portanto apenas ao campo gravitacional, se moverá sobre o caminho mais curto para ir de um ponto a outro. Esses caminhos são chamados de geodésicas e definidos segundo a condição $ds^2 = 0$.

que é chamado de parâmetro de *red-shift* e fornece uma medida da distância relativa a uma determinada fonte. Quando $a(t) = a(t_0)$, $z = 0$ que corresponde ao nosso espaço local.

Em termos do comprimento de onda o parâmetro de *red-shift* é escrito como:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \quad (1.10)$$

e mostra o quanto o comprimento de onda ($\lambda \sim \nu^{-1}$) emitido pela fonte, no caso λ , difere do medido, λ_0 . Se $z > 0$, $\lambda_0 > \lambda$ e $a(t_0) > a(t)$; fala-se de um deslocamento da frequência para o vermelho ou seja, a fonte estaria se afastando de nós. Por outro lado se $z < 0$, $\lambda_0 < \lambda$ e $a(t_0) < a(t)$; fala-se de um deslocamento da frequência para o azul ou seja, a fonte estaria se aproximando de nós.

Os astrofísicos medem linhas espectrais da luz emitida por objetos distantes e comparam com as linhas espectrais de átomos medidas em laboratório. O deslocamento sistemático dessas linhas para frequências menores evidencia o afastamento das fontes de nós. E quanto maior for esse deslocamento, mais distante a fonte estará.

Hubble foi o primeiro a medir os *red-shifts* de galáxias distantes e essa foi a primeira evidência de que o universo poderia estar se expandindo.

A Lei de Hubble

Se dois objetos distavam $L(t)$ entre si em t , hoje eles distariam $L(t_0)$ segundo a relação:

$$L(t) = L(t_0) \frac{a(t)}{a(t_0)}. \quad (1.11)$$

Derivando essa expressão com relação ao tempo, obtém-se a velocidade com que se afastavam os dois objetos:

$$v(t) = L(t_0) \frac{\dot{a}(t)}{a(t_0)} = H(t)L(t), \quad (1.12)$$

onde

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (1.13)$$

é chamado de parâmetro de Hubble e mede a taxa de expansão do universo que varia com o tempo. O ponto denota derivada com relação ao tempo.

A equação (1.12) é a chamada lei de Hubble e expressa a dependência entre a velocidade de expansão entre dois objetos e a distância entre eles. É válida apenas para objetos próximos.

O parâmetro de Hubble, como será visto, depende do conteúdo de energia do universo e pode ser expresso por:

$$H(t_0) = H_0 = 100 h_0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}, \quad (1.14)$$

onde h_0 é um parâmetro que contém a incerteza das observações hoje. Atualmente o valor de h_0 obtido através de medidas feitas pelo telescópio Hubble (*Hubble Space Telescope Key Project*) [26] é dado por

$$h_0 = 0,72 \pm 0,08. \quad (1.15)$$

1.2.3 O Tensor Energia-Momento de um Fluido Perfeito

Um universo isotrópico e homogêneo pode ser descrito por um fluido perfeito cujo tensor energia-momento simétrico é escrito como¹⁵:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

onde $u^\mu = dx^\mu/d\tau$ representa a quadrivelocidade do fluido, $\rho = \rho(x^\mu)$, sua densidade própria e $p = p(x^\mu)$ sua pressão.

Como a métrica de Friedmann-Robertson-Walker tem seção espacial maximalmente simétrica, a densidade de energia e pressão dependerão apenas do tempo, ou seja $\rho = \rho(t)$ e $p = p(t)$. Essas grandezas, ρ e p estão relacionadas, por sua vez, pela equação de estado: $p = p(\rho, T)$, onde T é a temperatura. Durante a evolução do universo sempre que se estabelece o equilíbrio térmico, $p = p(\rho)$.

Num referencial comóvel, as componentes espaciais ($\mu = i = 1, 2, 3$) e temporal ($\mu = 0$) da quadrivelocidade são dadas respectivamente¹⁶ por $u^i = 0$ e $u^0 = 1$. Assim as componentes do tensor energia-momento podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho & T^0_0 &= \rho \\ T^{i0} &= 0 & T^i_0 &= 0 \\ T^{ij} &= -g^{ij}p & T^i_j &= -\delta^i_j p. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Então, T^μ_ν é uma matriz diagonal na métrica de Friedmann-Robertson-Walker,

$$T^\mu_\nu = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p). \quad (1.18)$$

As “equações de conservação”¹⁷ são expressas por: $T^\mu_{;\nu} = 0$. Para $\mu = 0$ obtém-se a equação de continuidade:

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} = -p \frac{d(a^3)}{dt}. \quad (1.19)$$

¹⁵A simetria do tensor energia-momento mantém a coerência das equações de Einstein, já que $g_{\mu\nu}$ é simétrico.

¹⁶Considera-se aqui o fato de $u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = +1$, pois $d\tau^2 = ds^2 = dx^\mu dx_\mu$.

¹⁷Na verdade, trata-se de uma identidade, já que “conservação” está relacionado a um comportamento temporal.

Ou ainda:

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H(\rho + p). \quad (1.20)$$

Tendo definido a métrica mais adequada para a descrição do universo e o tensor energia momento, retorna-se às equações (1.1) e constrói-se as equações de Friedmann que descreverão a evolução do universo.

1.2.4 As Equações de Friedmann

As equações de Friedmann são as equações de Einstein num universo homogêneo e isotrópico.

Escrevendo o tensor e o escalar de Ricci, e o tensor métrico; $R_{\mu\nu}$, R e $g_{\mu\nu}$, respectivamente, em termos da métrica de Friedmann-Robertson-Walker (1.4), obtém-se:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad (1.21)$$

$$R_{ij} = -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right] g_{ij}, \quad (1.22)$$

$$R = -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right]. \quad (1.23)$$

Substituindo essas grandezas e o tensor $T_{\mu\nu}$, equação (1.17), na equação de Einstein (1.1), resulta:

$$-\mu = 0, \nu = 0$$

$$\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = \frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \quad (1.24)$$

$$-\mu = i, \nu = i$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = -8\pi Gp + \Lambda \quad (1.25)$$

Subtraindo as duas equações acima encontra-se uma equação para a aceleração:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p + \rho) + \frac{1}{3}\Lambda. \quad (1.26)$$

O segundo termo corresponde a uma aceleração positiva e uma vez que ele domine, o universo aceleraria positivamente. É por essa razão que a constante cosmológica é uma possível explicação da aceleração do universo atual. Atribui-se à constante cosmológica Λ uma matéria cosmológica exótica que pode corresponder a energia escura.

A constante cosmológica pode ser incorporada no tensor energia momento que descreve o universo definindo:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad p_\Lambda \equiv -\frac{\Lambda}{8\pi G}, \quad (1.27)$$

de modo que

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (1.28)$$

Esta escolha não altera a forma das equações de Einstein pois corresponde a $T^{\mu\nu} = \rho_\Lambda g^{\mu\nu}$, ou seja, trata-se de uma constante.

Reescrevendo as equações (1.24), (1.25) e (1.26) de modo a incorporar à densidade total de energia do universo a densidade de matéria cosmológica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_T - \frac{k}{a^2}, \quad (1.29)$$

$$\left(2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right) = -8\pi G p_T, \quad (1.30)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(3p_T + \rho_T), \quad (1.31)$$

onde $p_T = p_\Lambda + p$ é a pressão total e $\rho_T = \rho_\Lambda + \rho$ é a densidade de energia total. As equações (1.29) e (1.31) são as equações de Friedmann¹⁸ que fornecem a dinâmica do universo e devem ser capazes de reproduzir sua história.

A partir da equação de Friedmann (1.29) para $\dot{a}$:

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{\rho_T}{3H^2/8\pi G} - 1, \quad (1.32)$$

define-se um conceito útil em cosmologia que é o da densidade crítica:

$$\rho_c \equiv \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (1.33)$$

e que corresponde à densidade de energia no universo para $k = 0$.

Define-se um outro conceito útil em cosmologia que é o da abundância dos diferentes tipos de matéria com relação à densidade crítica:

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_i}{\rho_c}. \quad (1.34)$$

¹⁸Se $\Lambda = 0$; $p_T = p$ e $\rho_T = \rho$.

onde i denota os diferentes tipos de matéria, por exemplo, bárions, neutrinos, matéria escura, energia escura, radiação, etc. A soma das diferentes abundâncias resulta na abundância total:

$$\Omega_T \equiv \frac{\rho_T}{\rho_c} = \frac{\sum_i \rho_i}{\rho_c}. \quad (1.35)$$

Isso significa que a expressão (1.32) pode ser reescrita como:

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega_T - 1. \quad (1.36)$$

Existe, portanto, uma correspondência entre Ω_T e k , ou seja, entre a densidade de energia total e a curvatura do universo:

$$\begin{aligned} k = +1 &\Rightarrow \Omega_T > 1 \quad (\rho_T > \rho_c) \\ k = 0 &\Rightarrow \Omega_T = 1 \quad (\rho_T = \rho_c) \\ k = -1 &\Rightarrow \Omega_T < 1 \quad (\rho_T < \rho_c). \end{aligned} \quad (1.37)$$

A equação (1.35) é válida para todos os instantes de tempo porém, Ω_T e ρ_c não são constantes. O valor atual da densidade crítica, tomando como referência unidade de matéria não relativística, é dado por:

$$\rho_{c0} = 1.879 \times 10^{-26} h_0^2 \text{ kg m}^{-3}, \quad (1.38)$$

que corresponderia a aproximadamente a 10 átomos de hidrogênio por metro cúbico.

Além disso, evidências apontam para uma abundância total de [9]:

$$\Omega_{T_0} = 1,02 \pm 0,02, \quad (1.39)$$

consistente, portanto, com um universo plano ($k = 0$), segundo expressão (1.37).

1.2.5 O Conteúdo de Matéria do Universo

Foi visto no início deste capítulo que atualmente entende-se o universo como sendo composto majoritariamente por uma forma desconhecida de energia denominada escura, que é uma matéria exótica que gera repulsão gravitacional; além da matéria escura que deve interagir pouco com a matéria conhecida. Matéria bariônica, neutrinos e a radiação cósmica de fundo compõe aproximadamente 4% da composição esperada. Essas proporções podem ter mudado ao longo da história do universo desde que tenha havido a conservação da densidade de energia total. Para formalizar essa análise, essas formas de energia são separadas em 3 categorias cuja soma corresponderá a densidade total de energia ρ_T :

$$\rho_T = \sum_i \rho_i = \rho_R + \rho_M + \rho_{EE}, \quad (1.40)$$

onde ρ_R se referirá a matéria relativística ou radiação, ρ_M reúne todas outras formas de matéria não relativística e ρ_{EE} corresponderá a energia escura. Assim, segundo a definição da seção anterior $\rho = \rho_R + \rho_M$ e ρ_{EE} poderá corresponder a ρ_Λ .

A maior parte da história do universo é dominada por um dos tipos de energia e para cada um deles uma equação de estado do tipo:

$$p_i = \omega_i \rho_i \quad (1.41)$$

é considerada. O parâmetro ω_i é uma constante que independe do tempo.

As equações (1.41) em (1.19) fornecem uma relação entre a densidade de energia, ρ_i , e o raio do universo (fator de escala).

$$\rho_i \propto a^{-3(1+\omega_i)}. \quad (1.42)$$

Pela equação de Friedmann (1.29), o parâmetro de Hubble num universo plano ($k = 0$) seria dado por:

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_i}, \quad (1.43)$$

que combinando com (1.42) resulta:

$$H \propto a^{-3(1+\omega_i)/2}. \quad (1.44)$$

Assim, é possível obter a dependência do fator de escala com o tempo:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \Rightarrow \int dt = \int da \frac{H(a)}{a} \Rightarrow a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+\omega_i)}}. \quad (1.45)$$

A seguir, é estudado cada caso classificado em (1.40) separadamente.

Domínio da radiação

Imagina-se que logo após o *Big Bang*, matéria relativística tenha predominado na densidade de energia do universo.

Para um gás relativístico de fótons, $E \propto |\vec{p}|$, onde $\vec{p}$ é o momento da partícula. Como a pressão está diretamente relacionada com o momento e a densidade de energia com a energia (veja Apêndice B), temos que:

$$p_R = \frac{1}{3} \rho_R, \quad (1.46)$$

ou seja, $\omega = 1/3$, na equação (1.42) e (1.45). Então,

$$\rho_T \approx \rho_R \propto a^{-4} \quad (1.47)$$

e

$$a(t) \propto t^{1/2}. \quad (1.48)$$

Domínio da matéria

Com o universo se expandindo e consequentemente esfriando, a velocidade das partículas teriam se tornado cada vez menores, $v \ll c$, fazendo com que a pressão causada pelas colisões passasse a ser desprezível (veja Apêndice B):

$$p_M = 0, \quad (1.49)$$

ou seja, $\omega = 0$, na equação (1.42) e (1.45). Então,

$$\rho_T \approx \rho_M \propto a^{-3}. \quad (1.50)$$

e

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (1.51)$$

Isso significa que num universo não estático onde a fonte de energia é matéria não interagente, a variação da densidade de energia é consequência da variação do “volume” do universo.

Domínio da Energia Escura

Foi visto que dados de supernovas mostram que muito provavelmente o universo esteja acelerando. Isso significa que em algum momento a energia escura passou a dominar a densidade de energia total do universo causando a aceleração positiva, como mostrado na equação (1.26). Na seção 1.2.4 foi visto que a introdução de uma constante nas equações de Einstein seria equivalente a considerar uma densidade de energia que se relaciona com a pressão segundo a seguinte equação de estado:

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (1.52)$$

Se a constante cosmológica fizer o papel da energia escura prevista, ou seja se $\rho_{EE} = \rho_\Lambda$ tem-se $\omega = -1$ na equação (1.42). Então,

$$\rho_T \approx \rho_{EE} \propto \text{cte} \quad (1.53)$$

e portanto $H = \text{cte}$ segundo (1.44). Da equação (1.45)

$$a(t) \propto \exp(Ht). \quad (1.54)$$

Isso significa que o universo estaria acelerando exponencialmente.

Esse panorama poderia descrever também a inflação pela qual o universo deve ter passado logo após o *Big Bang*.

Outros comportamentos seriam esperados se a energia escura não estiver relacionada diretamente à constante cosmológica. Como será visto na seção 1.3, a aceleração do universo poderia ser causada pela dinâmica de um campo escalar e nesse caso $-1 \leq \omega \leq -1/3$. Essa faixa de valores definiria diferentes formas funcionais para essa aceleração.

1.2.6 A Idade do Universo

Na última seção foi mostrado que diferentes formas de matéria levam a leis de expansão diferentes. Sabendo a forma funcional dessas expansões é possível estimar a idade do universo a partir do parâmetro de Hubble, $H = \dot{a}/a$. Porém, é interessante trabalhar em termos do parâmetro de *red shift*¹⁹:

$$\int_0^{t_0} dt = - \int_{\infty}^0 \frac{dz}{(z+1)H(z)}. \quad (1.55)$$

Para estimar a idade do universo é fundamental saber sua composição em diferentes épocas e o parâmetro de Hubble hoje H_0 dado por (1.14). Da equação de Friedmann (1.29) para $k = 0$ e do conteúdo de matéria (1.40), obtém-se:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(z+1)[\Omega_{M_0}(1+z)^3 + \Omega_{R_0}(1+z)^4 + \Omega_{EE_0}(1+z)^{3(1+\omega_{EE})}]^{1/2}}, \quad (1.56)$$

onde $\Omega_{M_0} = \rho_{M_0}/\rho_{c_0}$, $\Omega_{R_0} = \rho_{R_0}/\rho_{c_0}$ e $\Omega_{EE_0} = \rho_{EE_0}/\rho_{c_0}$, sendo que ρ_{c_0} é a densidade crítica hoje.

Hoje o universo é formado basicamente por 1/3 de matéria não relativística e 2/3 de energia escura, que fornece uma estimativa de [9]:

$$t_0 = (13,7 \pm 0,2) \times 10^9 \text{anos}. \quad (1.57)$$

Outros testes de consistência revelam que essa estimativa é razoável. Por exemplo, se $\omega_{EE} = \omega_{\Lambda} = -1$, os dados de supernovas do tipo Ia podem limitar o produto da idade do universo e da constante de Hubble para $H_0 t_0 = 0,96 \pm 0,04$ [27] que é consistente com $[H_0 = (72 \pm 8) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}] \times [t_0 = (13 \pm 1,5) \times 10^9 \text{ anos}] = 0,96 \pm 0,16$.

1.2.7 Problemas da Cosmologia Padrão

O Modelo Cosmológico Padrão que foi apresentado nas últimas seções, fornece resultados bastante satisfatórios com relação a observações recentes²⁰. Porém, existem alguns problemas que evidenciam o fato da Cosmologia Padrão não ser um modelo completo de descrição do nosso universo. Seguem alguns deles.

¹⁹Como pela definição do parâmetro de *red shift*, $z+1 = a_0/a$, então $\dot{a}/a = -\dot{z}/(z+1)$ e portanto os limites da integral em da que vão de 0 a a_0 , passarão a ser, na integral em dz , de ∞ a 0.

²⁰Para mais detalhes sobre o Modelo Cosmológico Padrão sugere-se as referências [21, 24, 25, 28].

O problema do horizonte

Na tentativa de explicar a isotropia da radiação cosmológica de fundo surge o chamado problema do horizonte, já que regiões do céu separadas por uma distância angular maior que 1 grau já não correspondem a regiões causalmente conectadas na época da recombinação do hidrogênio e portanto do desacoplamento da radiação ($t \approx 10^{12} \text{s}$).

Para compreender esse problema considere um universo com curvatura nula, $k = 0$, e um raio de luz que viaja em nossa direção (análogo ao cálculo do *red-shift* na seção (1.2.2)). Como a trajetória da luz segue uma geodésica nula,

$$dt = -a(t)dr \implies r = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.58)$$

Calculando essa distância comóvel para dois momentos distintos, antes e depois do desacoplamento, obtém-se:

$$\int_0^{t_{des}} \frac{dt}{a(t)} \ll \int_{t_{des}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}. \quad (1.59)$$

Isso significa que uma porção muito maior do universo é vista hoje quando comparado com a época do desacoplamento da radiação. Naquela época portanto, existiam muitas regiões não conectadas causalmente. Porque então essa radiação tem as mesmas propriedades seja qual for a direção em que ela é observada hoje?

O problema da planura

Observações recentes apontam para $\Omega_T \approx 1$ indicando portanto, que $k = 0$ como estudado na seção (1.2.4). Porém, esse é um ponto de instabilidade nas equações de Friedmann. Veja, da equação (1.29),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho_T = -\frac{k}{a^2} \implies H^2(t)[1 - \Omega_T(t)] = -\frac{k}{a^2(t)}, \quad (1.60)$$

segundo definição (1.35).

Para obter $k = 0$, Ω_T deve ser exatamente 1. Observe que uma pequena variação de Ω_T em torno de 1, acarretaria uma mudança na curvatura do espaço. O problema é como manter essa precisão ao longo da história do universo já que H e a variam com o tempo e a dependência temporal dos parâmetros dependem das diferentes épocas pelas quais o universo passou? Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{domínio da radiação} &\Rightarrow |1 - \Omega_T(t)| \sim t^{2/3} \\ \text{e} & \\ \text{domínio da matéria} &\Rightarrow |1 - \Omega_T(t)| \sim t. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Ou seja, trata-se de um problema de ajuste fino. Para que Ω_T seja exatamente 1 hoje, é necessário que em $t \approx 10^{-43} \text{s}$, a precisão fosse de $|1 - \Omega_T(t)| \sim 10^{-60}$! Uma dinâmica desse tipo parece muito pouco provável.

O problema das relíquias

Logo após o *Big Bang*, a Física de Partículas Elementares prevê a criação de defeitos topológicos devido à quebra de simetrias decorrentes do esfriamento do universo. Exemplos desses defeitos são: paredes de domínio, cordas cósmicas, monopólos magnéticos e partículas super-simétricas. A abundância desses defeitos que Guth estudava em 1980.

Porém, esses defeitos seriam diluídos mais lentamente ($\rho \sim a^{-3}$) que a radiação ($\rho \sim a^{-4}$) durante a expansão do universo na fase de domínio da radiação. Como consequência, esses defeitos relíquias estariam dominando a matéria total existente no universo atualmente, o que não corresponde às observações.

Uma possível solução a esses problemas é a Inflação e será estudada a seguir.

1.3 Inflação

A maioria dos problemas da Cosmologia Padrão são solucionados supondo que o universo tenha passado por um período curto de expansão primordial acelerada:

$$\text{INFLAÇÃO} \implies \ddot{a} > 0. \quad (1.62)$$

Essa condição impõe restrições à equação de estado (1.41), pois da equação de Friedmann (1.31) tem-se:

$$\text{INFLAÇÃO} \implies \rho_T + 3p_T < 0 \implies \omega < -\frac{1}{3}. \quad (1.63)$$

Assim, uma época dominada pelo termo de constante cosmológica ($\rho_T \approx \rho_\Lambda$) poderia causar a inflação do universo, como expresso na equação (1.54). As equações de Friedmann (1.29) e (1.31) ficariam, para a equação de estado $\rho_\Lambda = -p_\Lambda$ ($\omega = -1$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda - \frac{k}{a^2}, \quad (1.64)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda. \quad (1.65)$$

Desprezando o termo de curvatura, baseado na hipótese de que $a(t)$ crescerá muito neste período, a solução de (1.64) é dada por:

$$a(t) = a_0 \exp(Ht) = a_0 \exp\left(\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda} t\right). \quad (1.66)$$

Como, pela equação (1.27), $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$, uma expansão exponencial implica em $\Lambda > 0$. Note que durante esse período H seria constante.

Com a inflação os problemas citados na seção 1.2.7 poderiam ser solucionados.

A inflação teria expandido exponencialmente cada região causalmente conectada do universo. Ela deve ter iniciado quando o universo visível hoje ($\approx 10^{29}$ cm) era muito pequeno ($\approx 10^{-33}$ cm) e estava todo ele conectado. A inflação teria expandido o universo para 10^{-3} cm.

Quanto ao problema da planura, observe que durante a inflação, H é constante e portanto,

$$|1 - \Omega_T(t)| \sim \exp(-2Ht), \quad (1.67)$$

indicando que no limite de t grande,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |1 - \Omega_T(t)| = 0 \implies \Omega_T \rightarrow 1. \quad (1.68)$$

Assim, mesmo que as condições iniciais não sejam tão precisas, o fator Ω_T vai necessariamente a 1 durante o período inflacionário.

Com relação às relíquias, elas são completamente diluídas durante a inflação, bem como toda forma de matéria existente nesse momento. Como será visto, a matéria voltaria a ser produzida depois da inflação, durante o processo de reaquecimento do universo.

1.3.1 O Inflaton

A Inflação foi proposta por A. H. Guth [5], no início da década de 80, quando ele estava estudando o excesso de monopólos magnéticos produzidos em teorias de grande unificação. Ele concluiu que, para evitar esse efeito, uma quebra de simetria associada a campos escalares causaria o início de um período de rápida expansão e provocaria, conseqüentemente, a diluição desses monopólos.

Assim, para modelar o comportamento inflacionário é preciso fazer uso da teoria de campos. Utiliza-se o campo escalar como objeto responsável por tal comportamento.

Supõe-se que durante a inflação a principal contribuição para o tensor energia-momento seja dada por um campo escalar ϕ que obedece a lagrangiana:

$$L(\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (1.69)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial efetivo do campo ϕ .

A partir da lagrangiana calcula-se o tensor energia-momento associado a esse campo e que é dado por:

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.70)$$

onde $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}L \quad (1.71)$$

e $g = \det g^{\mu\nu}$. As componentes do tensor métrico²¹ são dadas por $g^{\mu\nu}$.

Calculando as componentes T^{00} e T^{ij} , obtém-se:

$$T^{00} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad T^{ij} = -g^{ij} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \right). \quad (1.72)$$

As equações acima são obtidas supondo que o campo escalar é espacialmente homogêneo de forma a eliminar termos do tipo $\partial_i \phi$.

Por outro lado, o universo foi considerado, na seção 1.2.3, um fluido perfeito de modo que $T^{\mu\nu}$ pôde ser expresso pela equação (1.16):

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu} \quad (1.73)$$

e de onde obteve-se suas componentes em um referencial comóvel:

$$T^{00} = \rho, \quad T^{ij} = -g^{ij}p. \quad (1.74)$$

Comparando (1.72) e (1.74) conclui-se que:

$$\rho_\phi \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (1.75)$$

e

$$p_\phi \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi). \quad (1.76)$$

Portanto, da equação de estado (1.41), de (1.75) e de (1.76) tem-se:

$$p_\phi = \omega_\phi \rho_\phi \implies \omega_\phi = \frac{\frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi)}{\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi)} \implies -1 \leq \omega_\phi \leq 1. \quad (1.77)$$

A equação (1.63) mostra que a aceleração do universo pode ser causada sempre que $\omega < -1/3$. Conclui-se então, que campos escalares podem reproduzir o cenário desejado se

$$-1 \leq \omega_\phi < -1/3. \quad (1.78)$$

Essa condição se verifica quando $\dot{\phi}^2/2 < V(\phi)/2$. Considera-se como condição $\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi)$.

²¹Esse detalhe é fundamental já que o cálculo será feito na métrica de Friedmann-Robertson-Walker. Observe que no caso da métrica de Minkowski $\mathcal{L} = L$ já que $g = -1$.

Por outro lado, a equação de movimento do campo escalar ϕ é obtida substituindo as expressões (1.75) e (1.76) na equação de conservação (1.19):

$$\frac{d(\rho(t)a^3(t))}{dt} = -p \frac{d(a^3(t))}{dt}, \quad (1.79)$$

de onde obtém-se:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0. \quad (1.80)$$

O “ponto” refere-se a derivação com respeito ao tempo e a “linha” com respeito ao campo.

Quando o termo potencial domina o cinético em (1.75) e (1.76), tem-se $\ddot{\phi} \ll V'(\phi)$ na equação de movimento do campo escalar (1.80). Essas condições juntas são chamadas de aproximação de rolamento lento (*slow-roll approximation*) e garantem que se o potencial for plano o bastante o campo ϕ rolará lentamente.

O campo ϕ sob a condição de rolamento lento, ou seja:

$$\bullet \quad \dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi) \quad \text{e} \quad \bullet \quad \ddot{\phi} \ll V'(\phi) \quad (1.81)$$

produz inflação e por isso é denominado inflaton.

A equação de Friedmann (1.64) pode ser reescrita utilizando a nova expressão para ρ_T (1.75) durante esta fase de domínio deste campo:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right). \quad (1.82)$$

O termo de curvatura é desprezível nesse período.

Sob as condições de rolamento lento (1.81):

$$H^2 \approx \frac{8\pi G}{3} V(\phi) \quad (1.83)$$

e a equação de movimento (1.80) fica:

$$3H\dot{\phi} \approx -V'(\phi). \quad (1.84)$$

As equações (1.83) e (1.84) fornecem condições de rolamento lento em termos do potencial $V(\phi)$, veja²²:

→ quadrando (1.84):

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} \simeq \frac{V'(\phi)}{18H^2} \quad (\dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi)) \quad \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll \frac{48\pi}{M_{Pl}^2}, \quad (1.85)$$

²² $G \equiv M_{Pl}^{-2}$.

→ derivando (1.84) e usando (1.83)

$$\ddot{\phi} \simeq \frac{\dot{H}}{3H^2} V' - \frac{V''}{3H} \quad (\ddot{\phi} \ll V') \quad \left(\frac{V''}{V} \right) \ll \frac{24\pi}{M_{Pl}^2}, \quad (1.86)$$

onde utilizou-se na última passagem $\dot{H} = 0$, pois $V(\phi) \sim V(\phi_i)$, i denota o valor inicial.

A magnitude da expansão inflacionária pode ser estimada em termos do potencial $V(\phi)$. Do parâmetro de Hubble $H = \dot{a}/a$,

$$a(t) = a_0 \exp \left(\int_{t_i}^{t_f} H dt \right), \quad (1.87)$$

onde t_i e t_f , são os instantes inicial e final do período inflacionário. Mas, de (1.83),

$$\frac{da}{a} = \sqrt{\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2}} \sqrt{V(\phi)} dt. \quad (1.88)$$

Escrevendo dt como:

$$dt = \frac{d\phi}{\dot{\phi}} \quad (1.89)$$

e utilizando (1.84), obtém-se:

$$\frac{da}{a} = -\frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \frac{V}{V'} d\phi. \quad (1.90)$$

Finalmente,

$$a(t) = a_0 \exp \left[\overbrace{-\frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi}^N \right]. \quad (1.91)$$

N é exatamente o expoente da exponencial e é chamado de número de *e-foldings*, ou seja, ele dá a quantidade de inflação durante o intervalo $t_i \leq t \leq t_f$ que corresponde a valores do campo $\phi_i \leq \phi \leq \phi_f$. A quantidade de inflação necessária para explicar os problemas de Cosmologia Padrão é de $N > 60$.

Antes de terminar esta seção note que o comportamento do raio do universo dado por (1.87) pode ser obtido a partir da equação de Friedmann (1.29) se $\rho = 0$ e a curvatura for nula. Essa solução foi obtida por W. de Sitter em 1917 [29] e por essa razão a fase inflacionária é muitas vezes mencionada na literatura como fase de de Sitter. Ao longo do trabalho essa denominação também será utilizada.

1.3.2 Potenciais Inflacionários

Mas qual é o potencial $V(\phi)$? Na verdade, é difícil saber já que ainda não há uma teoria cosmológica fundamental que forneça esse potencial. O que se faz é escolher potenciais arbitrários segundo alguns indicativos, por exemplo da Física de Partículas, e construir modelos inflacionários distintos. A inflação caótica, desenvolvida por A. D. Linde em 1983 [30] é adotada pela maioria dos modelos pois independe de condições iniciais da inflação. Exemplos dos potenciais utilizados no modelo de inflação caótica são:

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 && \text{Campo escalar massivo} \\ V(\phi) &= \lambda\phi^4 && \text{Auto-interação do campo escalar} \end{aligned} \quad (1.92)$$

Potencial $V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2$

O potencial inflacionário caótico mais simples é o do campo escalar massivo:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2. \quad (1.93)$$

Nesse caso as condições de rolamento lento ficam:

$$\left(\frac{V''}{V}\right) = \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \frac{4}{\phi^2}. \quad (1.94)$$

De (1.85):

$$\phi^2 \gg \frac{M_{Pl}^2}{12\pi}. \quad (1.95)$$

E de (1.86):

$$\phi^2 \gg \frac{M_{Pl}^2}{6\pi}. \quad (1.96)$$

A condição mais forte é a segunda. Portanto, a inflação ocorrerá enquanto,

$$\phi > \frac{M_{Pl}}{\sqrt{6\pi}}. \quad (1.97)$$

A quantidade total de inflação corresponde a:

$$N_{tot} = -\frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi = 2\pi \frac{\phi_i^2}{M_{Pl}^2} - \frac{1}{3}, \quad (1.98)$$

segundo a condição (1.96).

Potencial $V(\phi) = \lambda\phi^4$

O potencial inflacionário caótico quártico é dado por:

$$V(\phi) = \lambda\phi^4. \quad (1.99)$$

Nesse caso as condições de rolamento ficam:

$$\left(\frac{V''}{V}\right) = \frac{12}{\phi^2}, \quad \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \frac{16}{\phi^2}. \quad (1.100)$$

De (1.85):

$$\phi^2 \gg \frac{M_{Pl}^2}{3\pi}. \quad (1.101)$$

E de (1.86):

$$\phi^2 \gg \frac{M_{Pl}^2}{2\pi}. \quad (1.102)$$

A condição mais forte é a segunda. Portanto, a inflação ocorrerá enquanto,

$$\phi > \frac{M_{Pl}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.103)$$

A quantidade total de inflação corresponde a:

$$N_{tot} = -\frac{8\pi}{M_{Pl}^2} \int_{\phi_i}^{\phi_f} \frac{V}{V'} d\phi = \pi \frac{\phi_i^2}{M_{Pl}^2} - \frac{1}{2}, \quad (1.104)$$

segundo a condição (1.102).

Através da radiação cósmica de fundo é possível inferir os valores dos acoplamentos como sendo $m_\phi \approx 10^{13}$ GeV e $\lambda \approx 10^{-14}$ GeV [31].

A quantidade de *e-foldings* (N) juntamente com as condições de rolamento lento, impõe limites sobre os potenciais inflacionários. Por outro lado, sabe-se que diferentes potenciais inflacionários levam a diferentes previsões das estruturas que seriam observadas em larga escala. Por isso é que existe atualmente, um esforço muito grande em determinar observacionalmente a distribuição de galáxias do nosso universo. O experimento 2dFGRs (*Two-degree Field Galaxy Redshift Survey*) [32], por exemplo, compilou dados que parecem confirmar a homogeneidade do universo em larga escala e determinou sua estrutura numa fatia que corresponde a 5% do céu. O experimento SDSS (*Sloan Digital Sky Survey*) [33] pretende analisar galáxias que cobrem 25% do céu. Esses dados combinados com medidas mais precisas da radiação cósmica de fundo [8] serão capazes de impor outras restrições aos potenciais inflacionários que teriam produzido o universo que se observa [22].

Nos próximos capítulos trabalha-se com o potencial inflacionário caótico quadrático e com o potencial de Peebles-Vilenkin que será definido oportunamente.

O modelo inflacionário escolhido refletirá o seguinte panorama no universo primordial: durante a inflação toda a energia do universo está concentrada num campo escalar ϕ , pois toda a matéria é diluída com a expansão. Esse campo obedece a condição $\phi \gtrsim M_{Pl}$ enquanto “rola” lentamente em direção ao mínimo de seu potencial efetivo, $V(\phi)$. Quando a inflação termina, $\phi \sim M_{Pl}$ e o universo se encontra frio. A energia continua concentrada no campo escalar, porém é redistribuída num espaço muito maior. Para que o universo volte a se expandir segundo a Cosmologia Padrão, ϕ deve ser capaz de produzir e transferir energia para matéria relativística usual. O processo no qual essa transferência ocorre é chamado de reaquecimento (*reheating*) e será explorado com mais detalhes no próximo capítulo.

Capítulo 2

Produção de Partículas no Universo Pós Inflacionário

Como foi visto no Capítulo 1, o modelo cosmológico inflacionário prevê que o universo passou, em seus primórdios, por um período de rápida expansão que teria diluído toda a matéria que existia nele. Em particular, foi estudado na seção 1.3.1 que a dinâmica de um campo escalar, chamado de inflaton, poderia reproduzir esse fenômeno.

A ponte entre esse modelo para o universo antigo e o que é observado hoje é feita sob a hipótese de que o universo tenha sido repopulado logo após o término da inflação, ou seja, que partículas relativísticas tenham sido produzidas por algum mecanismo de produção de partículas, e que a subsequente termalização delas tenha levado o universo a um equilíbrio térmico. A temperatura que caracterizaria esse período é conhecida na literatura como temperatura de reaquecimento.

Os modelos de produção de partículas considerados aqui serão classificados, neste trabalho, em modelos perturbativos e não perturbativos. Modelos perturbativos são aqueles em que o inflaton decai em partículas relativísticas que promoveriam o reaquecimento do universo. A literatura denota essa produção de partículas simplesmente de reaquecimento (*reheating*). Os modelos não perturbativos prevêem a produção de partículas sempre que um campo clássico varie temporalmente de forma a perturbar o vácuo de um campo quântico a ele acoplado. Fazem parte dessa classe de modelos a produção gravitacional, no qual o campo clássico seria a métrica gravitacional e o pré-aquecimento (*preheating*), onde o inflaton seria o campo clássico em questão, uma vez que durante a inflação os modos associados ao inflaton seriam esticados e tenderiam a zero. Existe ainda uma sub classe de modelos do tipo pré-aquecimento, que foi denominada de pré-aquecimento instantâneo (*instant preheating*), mas que neste trabalho será denominado mecanismo FKL (Felder-Kofman-Linde), utilizado em duas aplicações

que serão desenvolvidas no Capítulo 4.

Todos esses mecanismos de produção de partículas relativísticas para reaquecer o universo durante o período pós inflacionário têm sido também utilizados na literatura para produzir partículas massivas não relativísticas, que poderiam formar a matéria escura, poderiam ser partículas cujo decaimento explicaria os raios cósmicos de altíssimas energias ou poderiam ser partículas que explicariam a bariogênese. É claro que independente do mecanismo de produção dessas partículas massivas é importante que se garanta ainda o reaquecimento do universo.

Este capítulo está estruturado da seguinte maneira: na seção 2.1 discute-se a dinâmica do inflaton logo após a inflação. Em particular trabalha-se com o modelo inflacionário mais simples. Na seção 2.2 faz-se uma breve discussão sobre a produção perturbativa de partículas. Na seção 2.3 discute-se em detalhes como seria a produção de partículas não perturbativamente, com enfoque maior no mecanismo de pré-aquecimento e no mecanismo FKL.

2.1 A Evolução do Inflaton após a Inflação

A matéria que existe hoje em nosso universo pode ter sido produzida depois da inflação através das oscilações do inflaton em torno do mínimo de seu potencial efetivo. A idéia que permeia esse processo é o de produção de partículas devido a um campo oscilante.

Neste trabalho foram estudadas duas aplicações de produção de partículas utilizando o potencial caótico mais simples:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2, \quad (2.1)$$

e por isso os resultados analíticos serão obtidos utilizando esse potencial.

Na seção 1.3.1 foi visto que a equação de movimento que rege a dinâmica do inflaton para esse potencial é dada por:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + m_\phi^2\phi = 0, \quad (2.2)$$

com

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\phi, \quad (2.3)$$

onde

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{m_\phi^2\phi^2}{2}. \quad (2.4)$$

A dinâmica do campo ϕ teria reproduzido o período inflacionário se as condições de rolamento lento, caracterizadas pelas desigualdades

$$\bullet \quad \dot{\phi}^2/2 \ll V(\phi) \quad \text{e} \quad \bullet \quad \ddot{\phi} \ll V'(\phi) \quad (2.5)$$

tivessem ocorrido. Os resultados do período inflacionário para o potencial (2.1) estão descritos na seção 1.3.2. Quando essas condições deixassem de ser válidas, a inflação terminaria e o termo $\ddot{\phi}$ na equação (2.2) voltaria a ser importante.

A solução para o sistema de equações (2.2), (2.3) e (2.4) pode ser aproximada pela expressão:

$$\phi(t) \approx \frac{M_{Pl}}{3} \frac{\sin(m_\phi t)}{m_\phi t} = \Phi(t) \sin(m_\phi t), \quad (2.6)$$

onde $\Phi(t) = M_{Pl}/(3m_\phi t)$ é a amplitude do campo ϕ que diminui com o tempo uma vez que o universo está em expansão. Em termos de uma variável temporal adimensional mais conveniente:

$$N = \frac{m_\phi t}{2\pi}, \quad (2.7)$$

que corresponde ao número de oscilações do campo ϕ , a solução da equação (2.2) também pode ser reescrita como:

$$\phi(N) \approx \frac{M_{Pl}}{3} \frac{\sin(2\pi N)}{2\pi N} = \Phi(N) \sin(2\pi N), \quad (2.8)$$

onde aqui a amplitude do campo ϕ é dada por $\Phi(N) = M_{Pl}/(6\pi N)$. Esta é uma boa parametrização a partir de $N = 0,25$.

Figura 2.1: Dinâmica do inflaton livre sujeito apenas a expansão do universo. $\varphi = \phi/M_{Pl}$ e N corresponde ao número de oscilações do campo ϕ . A linha sólida representa a solução numérica da equação (2.2) e a linha pontilhada uma solução analítica aproximada dada pela expressão (2.8).

A Figura 2.1 mostra a solução numérica da equação (2.2) e a solução analítica aproximada (2.8). Parece bastante razoável trabalhar com a expressão analítica (2.8). Note que $N = 0,5$ corresponde a primeira passagem do inflaton no fundo de poço de potencial e que a cada meia oscilação o inflaton volta a passar por esse mínimo.

Para o regime de oscilações rápidas no fundo do poço a densidade de energia pode ser calculada considerando a média sobre um período de oscilação que, nesse caso, fornece¹ $\langle \dot{\phi}^2/2 \rangle = \langle V(\phi) \rangle$. Mas isso significa que a pressão deste conteúdo de energia se anula segundo (1.76).

Conclui-se então que, na fase das oscilações do campo ϕ em torno do mínimo de seu potencial, o universo expandiria seguindo o comportamento da matéria não relativística [1], ou seja:

$$a(t) \propto t^{2/3}, \quad (2.9)$$

como mostra a equação (1.51).

O comportamento estudado do campo ϕ corresponde ao inflaton livre. Se assim fosse, esse campo seguiria diluindo como matéria não relativística durante as oscilações, o universo não entraria numa era da radiação e portanto não seria observada a matéria que se encontra hoje no universo. Assim, espera-se que depois do fim da inflação a energia concentrada nesse campo escalar deva ter sido transferida para outros campos de matéria, em particular espera-se que tenha sido produzida matéria relativística e que essa matéria tenha interagido entre si e atingido assim a temperatura de reaquecimento². A maneira aparentemente mais natural de efetivar essa transferência seria acoplar o campo ϕ a esses campos de matéria. Isso não afetaria a fase inflacionária uma vez que esses campos seriam desprezíveis nessa época e poderiam ser produzidos a partir do fim da inflação.

A seguir descreve-se dois mecanismos de produção, o perturbativo e o não perturbativo.

2.2 Produção Perturbativa de Partículas

Segundo a dinâmica estudada na seção anterior, a amplitude de oscilação do inflaton é amortecida pela expansão do universo e isso faz com que a densidade ρ_ϕ diminua com a^{-3} na fase das oscilações do campo ϕ . Um campo escalar homogêneo oscilando com frequência m_ϕ pode ser interpretado como uma onda coerente de partículas ϕ com momento zero e densidade em número de partículas, $n_\phi = \rho_\phi/m_\phi$.

A interpretação acima sugere que os efeitos de produção de partículas possam ser incorporados à equação (2.2), utilizando a teoria de perturbação da física de partículas elementares. Esse tipo de formalismo foi desenvolvido inicialmente por L. F. Abbot *et al* [2] e A. D. Dolgov e A. D. Linde [3], e corresponde à introdução

¹ $\dot{\phi}(t) \approx m_\phi \Phi \cos(m_\phi t)$.

²Essa hipótese parece ser necessária, uma vez que a partir de um universo termalizado a nucleossíntese poderia ocorrer.

de um termo $\Gamma_\phi \dot{\phi}$ na equação de movimento (2.2) que representa os canais de decaimento do inflaton em campos de matéria:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \Gamma_\phi \dot{\phi} + m_\phi^2 \phi = 0. \quad (2.10)$$

Neste caso, o campo $\phi(t)$ diminuiria com o tempo não apenas devido à expansão do universo, mas também pela produção e transferência de sua energia a novas partículas, por um canal de decaimento representado pela taxa de decaimento total, Γ_ϕ , introduzido fenomenologicamente.

Logo após a produção destas partículas o universo poderia ter estabelecido seu equilíbrio termodinâmico e iniciado sua fase de domínio da radiação. A temperatura de reaquecimento é exatamente o nome que se dá a essa primeira temperatura de equilíbrio. Segundo este modelo fenomenológico, a temperatura de reaquecimento pode ser estimada pela conversão instantânea da densidade de energia do inflaton para a radiação, quando a taxa de decaimento, Γ_ϕ , for igual à taxa de expansão do universo H (veja Apêndice B), num instante t_{rq} com fator de escala a_{rq} .

Como nesta fase de oscilações no fundo de poço de potencial, a densidade do inflaton teria diluído como a matéria não relativística (veja equação (2.9)), o parâmetro de Hubble dado pela equação (2.3) pode ser escrito como:

$$H(a) = \sqrt{\frac{8\pi}{3} \frac{\rho_{\phi_{rq}}}{M_{Pl}^2} \left(\frac{a_{rq}}{a}\right)^3} \quad (2.11)$$

onde $\rho_{\phi_{rq}}$ é a densidade de energia do inflaton no instante da conversão.

Por outro lado, segundo a termodinâmica de equilíbrio (veja Apêndice B), a densidade de radiação estabelece a temperatura segundo a expressão:

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4, \quad (2.12)$$

onde g_* que representa o número de graus de liberdade.

Igualando $H(a_{rq})$ a Γ_ϕ e as densidades de energia do inflaton e da radiação, neste mesmo instante, $\rho_{\phi_{rq}} = \rho_{R_{rq}}$, obtém-se a temperatura de reaquecimento em função de Γ_ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{30} g_* T_{rq}^4 &= \rho_{\phi_{rq}} = \frac{3}{8\pi} \Gamma_\phi^2 M_{Pl}^2, \\ T_{rq} &\approx 0.2 \sqrt{\Gamma_\phi M_{Pl}}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

onde utilizou-se $g_* \sim 200$, segundo Figura B.1 (Apêndice B). Note que a temperatura não depende do valor inicial do campo ϕ e é completamente determinada por parâmetros do modelo de Física de Partículas que se utiliza para descrever

esses decaimentos. Isso significa que esse modelo de reaquecimento pode ser aplicado para modelos inflacionários com fundo de poço que possam ser aproximados por uma função quadrática do campo.

Atualmente é comum trabalhar com uma faixa de valores, dito permitidos, para a temperatura de reaquecimento. O limite inferior está relacionado com a nucleossíntese. Ela poderia ocorrer a partir de um universo termalizado a $T_{rq} \gtrsim 10$ MeV [4]. O limite superior está vinculado ao problema da superprodução de gravitinos em teorias superssimétricas, que seria evitada desde que $T_{rq} \lesssim 10^9$ GeV [5].

Produção de partículas massivas

A maneira mais natural de se produzir partículas massivas através do mecanismo de reaquecimento perturbativo seria acoplar ao inflaton a um campo de matéria com a massa desejada. Nesse caso, a massa dessa partículas não poderia exceder a massa do inflaton. Esse mecanismo é estudado na seção 4.3.

Por outro lado, sabe-se que a temperatura de reaquecimento não é a temperatura máxima que o universo experimentou durante o período de reaquecimento [6, 7]. Essa informação é de especial interesse quando trabalha-se com a produção de partículas massivas no universo primordial. Como será também discutido na seção 4.3, antes que ocorresse o pico de conversão da densidade de energia do inflaton em radiação, uma pequena quantidade de radiação mais energética poderia ter se aniquilado e formado partículas com até 10^{15} GeV, num universo que teria se termalizado a $T_{rq} \approx 10^9$ GeV.

A seguir estuda-se a produção não perturbativa de partículas.

2.3 Produção Não Perturbativa de Partículas por Campos Clássicos Variantes

A produção de partículas por campos clássicos que variam no tempo já é conhecida há bastante tempo. E. Schrödinger [8] percebeu, em 1939, que universos não estáticos poderiam causar produção ou aniquilação de matéria, o que ele descreveu como um “*alarming phenomena*”, pois já se sabia nesta época, que o universo estava expandindo. Em 1968, L. Parker [9, 10] mostrou que a criação de partículas poderia ser uma consequência da expansão do universo, uma vez que os modos dos campos quânticos não teriam suas frequências bem definidas nesta dinâmica. Ele mostrou também que a expansão atual não seria suficiente para produzir um número apreciável de partículas. Porém, no universo primordial, quando a expansão era mais rápida, a produção poderia ter sido cosmologicamente significativa.

A idéia por trás do efeito descrito acima é a de um campo clássico, no caso a métrica do espaço-tempo, variando de forma tal a extrair partículas do vácuo de um campo quântico acoplado a ele. Este processo poderia produzir efeitos observáveis dependendo de alguns parâmetros do sistema. De maneira bastante intuitiva é possível citar alguns deles:

- A intensidade da variação do campo clássico: variações suaves perturbam menos o vácuo que as abruptas.
- A massa do campo quântico: quanto maior a massa mais difícil seria produzir partículas a partir do vácuo deste campo.
- Os momentos associados aos modos normais campo quântico: o raciocínio é análogo ao da massa.
- O acoplamento entre os campos: quanto maior o acoplamento mais facilmente é transferida a perturbação do campo clássico para o quântico.

No eletromagnetismo também ocorrem efeitos semelhantes, como por exemplo a criação de pares de partícula-antipartícula por campos eletromagnéticos não estacionários, quando estes podem ser tratados como campos clássicos³.

A produção de partículas seja pelo campo gravitacional, pelo campo eletromagnético, ou por qualquer outro campo que possa ser tratado classicamente, é dita não perturbativa porque estes fenômenos não são descritos pela teoria de perturbação da física de partículas elementares, que envolveria a interação de dois campos quânticos.

A produção não perturbativa pode ter tido um papel fundamental no reaquecimento do universo, como será estudado quantitativamente a seguir. Antes, porém, apresenta-se uma série de situações análogas na Mecânica Quântica para que se ganhe familiaridade com o que será desenvolvido [12].

Potencial Degrau na Mecânica Quântica

Considere uma situação bastante familiar em Mecânica Quântica, onde partículas incidem sobre um potencial do tipo:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0 & x > 0. \end{cases}$$

A depender da energia das partículas a probabilidade de encontrá-las nas duas regiões, $x \leq 0$, pode mudar. Considere, por exemplo, que a energia seja tal

³Vários fenômenos quânticos produzidos por campos clássicos variantes estão descritos de maneira bastante detalhada na referência [11].

que $E > V_0$. A equação de Schrödinger independente do tempo que descreve a dinâmica dessas partículas é dada por:

$$\begin{cases} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + k^2\psi(x) = 0, & k = \left(\frac{2m}{\hbar^2}E\right)^{1/2}, & x < 0 \\ \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \kappa^2\psi(x) = 0, & \kappa = \left(\frac{2m}{\hbar^2}[E - V_0]\right)^{1/2} & x > 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

cujas soluções podem ser representadas por:

$$\begin{cases} \psi(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} & x < 0 \\ \psi(x) = Ce^{+i\kappa x} & x > 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde A , B e C são constantes arbitrárias que podem ser obtidas considerando a continuidade da função de onda e de sua primeira derivada. Considere $x < 0$: o primeiro termo da solução corresponde a uma onda plana com amplitude A que incide da esquerda em direção ao degrau e o segundo corresponde a uma onda plana refletida pelo degrau com amplitude B . Para $x > 0$ a solução representa uma onda plana que foi transmitida, com número de onda κ e amplitude C . Os coeficientes de reflexão, R , e de transmissão, T , fornecem as probabilidades de encontrar as partículas antes e depois da barreira e são dados por:

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}, \quad T = \frac{|C|^2}{|A|^2}, \quad R + T = 1. \quad (2.16)$$

Isso significa que as partículas com energia $E > V_0$ que incidem sobre esse potencial são parcialmente refletidas e parcialmente transmitidas. Note que a função de onda das partículas transmitidas tem seu número de onda alterado, de k para κ . Nesse caso particular, ele diminui. Como este número está relacionado ao momento dessas partículas, conclui-se que ao passar pelo degrau, as partículas perdem momento, que parece ser bastante razoável.

Potencial “suave” na Mecânica Quântica

Suponha agora, que partículas estejam sujeitas a um potencial que varie muito suavemente. Em Mecânica Quântica isso significa que o potencial $V(x)$ varia lentamente se comparado ao comprimento de onda de de Broglie, $\lambda(x) = h/p(x)$, associado à partícula neste potencial, onde h é a constante de Planck e $p(x) = 2m[E - V(x)]^{1/2}$ é o momento clássico em x .

A equação de Schrödinger independente do tempo para esta dinâmica seria dada por:

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi(x) = 0. \quad (2.17)$$

onde $\hbar = h/2\pi$.

Calcula-se uma solução aproximada para esta equação, conhecida por aproximação WKB, que garante que em primeira ordem⁴ [14]:

$$\psi(x) = \frac{A}{\sqrt{\hbar k(x)}} \exp\left(+i \int k(x') dx'\right), \quad E > V \quad (2.21)$$

onde $k(x) = \left(\frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\right)^{1/2}$, desde que⁵:

$$\left| \frac{1}{k(x)} \frac{dk(x)}{dx} \right| < k(x). \quad (2.22)$$

Se $k(x)$ obedece a relação acima, diz-se que k varia adiabaticamente. Note que foi considerada apenas uma onda se movendo no sentido positivo como condição inicial na solução (2.21) mas uma solução geral seria uma combinação de termos de frequência positiva e negativa. Para um potencial constante V_0 , $k(x) = k_0$ e a solução seria uma onda plana.

Uma combinação das duas situações

Imagine agora uma terceira situação em que o potencial $V(x)$, que vinha variando adiabaticamente, tenha uma variação abrupta, como por exemplo num potencial degrau, e volte a variar adiabaticamente e que a condição (2.22) para o número de onda das partículas não se verifique na região de variação abrupta. Nesse caso:

⁴Essa é também uma aproximação utilizada na mecânica clássica. Por exemplo, no caso de um pêndulo, quando se varia lentamente o tamanho do fio [13]. Nesse caso a frequência de oscilação varia no tempo, $\omega = \omega(t)$, e a equação do oscilador fica:

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0. \quad (2.18)$$

Em primeira aproximação, se a taxa de variação da frequência for menor que a própria frequência, ou seja,

$$\left| \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{dt} \right| < \omega, \quad (2.19)$$

uma possível solução da equação (2.18) seria:

$$x(t) = a(t) \exp\left(+i \int \omega(t') dt'\right) + b(t) \exp\left(-i \int \omega(t') dt'\right), \quad (2.20)$$

ou seja, uma combinação linear de frequências positivas e negativas bem definidas.

⁵Substituindo a solução (2.21) na equação (2.17), obtém-se a condição

$$-\frac{1}{2} \frac{\ddot{k}}{k} + \frac{3}{4} \frac{\dot{k}^2}{k^2} \approx 0,$$

que se verifica se $V(x)$, portanto $k(x)$, variar muito suavemente de forma que as derivadas se anulem. Note que a derivada da condição (2.22) pode traduzir esse resultado.

- A solução WKB não seria mais válida próxima a variação abrupta.
- Assintoticamente à variação abrupta, soluções WKB seriam válidas.
- Uma onda que incidisse sobre o degrau no sentido positivo, por exemplo, poderia ser parcialmente refletida e parcialmente transmitida por ele.
- Os coeficientes de reflexão e de transmissão forneceriam as probabilidades de encontrar as partículas antes e depois da abrupta variação do potencial.
- O número de onda, e portanto o momento associado às partículas, na região assintótica antes do degrau seria diferente do número de onda na região assintótica depois do degrau.

Com base nos resultados acima, procura-se compreender no próximo item, os resultados obtidos por L. Parker de uma maneira mais qualitativa.

Acoplamento do campo escalar com gravitação

L. Parker [9, 10] estudou o comportamento de campos num universo em expansão e o tratamento é bastante parecido aos cálculos desenvolvidos para as funções de onda na Mecânica Quântica.

Considere, por exemplo, nosso universo que é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker, dada pela equação (1.4) ⁶. Considere um campo escalar massivo χ dentro deste universo cuja dinâmica é descrita pela lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 + \frac{1}{2} \xi R \chi^2, \quad (2.23)$$

onde m_χ é a massa, chamada de nua, do campo χ , ξ é o acoplamento gravitacional⁷ e R é o escalar de Ricci definido na nota de rodapé da página 15.

A equação de onda para o campo χ pode ser obtida a partir das equações de

⁶O elemento de linha pode ser escrito em termos do tempo conforme η , tal que $dt = a d\eta$: $ds^2 = a^2(\eta)(d\eta^2 - d\vec{x}^2)$.

⁷Existem duas escolhas mais comuns para ξ : o acoplamento mínimo, $\xi = 0$ e o acoplamento conforme, $\xi = 1/6$. O primeiro leva a equação de movimento mais simples e o último a uma teoria que é conformalmente invariante em 4 dimensões no limite de massa nula.

Euler-Lagrange⁸, e é dada por:

$$\square\chi + m_\chi^2\chi + \xi R\chi = 0, \quad (2.24)$$

onde $\square = \partial_\mu\partial^\mu$ é o operador d'Alembertiano que deve ser calculado no espaço tempo em que o campo está imerso.

O campo χ em Teoria Quântica de Campos é considerado um operador e pode ser decomposto em seus modos:

$$\hat{\chi}(\eta, \vec{x}) = \int d^3k [\hat{a}_k f_k(\eta, \vec{x}) + \hat{a}_k^\dagger f_k^*(\eta, \vec{x})], \quad (2.25)$$

onde $\hat{a}_k$ e $\hat{a}_k^\dagger$ são os operadores de criação e aniquilação e

$$f_k(\vec{x}, \eta) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} h_k(\eta). \quad (2.26)$$

A Teoria Quântica de Campos permite definir, a partir da base que descreve um campo, um estado de vácuo $|0\rangle$ tal que $\hat{a}_k |0\rangle = 0$ e um operador número de partículas que conta o número das partículas χ com momento k , $\hat{N}_k = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$.

Substituindo (2.25) e (2.26) em (2.24), obtém-se uma equação para o termo $h_k(\eta)$ que fornece o comportamento temporal do campo. Em particular a função $h_k(\eta)$ satisfaz a equação de movimento:

$$h_k'' + [k^2 - V(\eta)] h_k = 0, \quad (2.27)$$

sendo que a linha significa derivadas com relação ao tempo conforme e

$$V(\eta) \equiv -a^2 \left[m_\chi^2 + (6\xi - 1) \frac{a''}{a} \right]. \quad (2.28)$$

Note que se a métrica fosse estática, por exemplo no espaço de Minkowski ($a = 1$), a equação (2.27) se tornaria uma equação de oscilador com solução de onda plana, onde $h_k(\eta) = e^{\pm i\omega_k \eta}$, com $\omega_k = (k^2 + m_\chi^2)^{1/2}$. Considere um universo

⁸A partir da variação da ação definida como:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} L = \int d^4x \mathcal{L},$$

com relação ao campo χ , obtém-se equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \chi)} \right] = 0,$$

onde $g = \det g^{\mu\nu}$ e $\mathcal{L}$ é a densidade lagrangiana.

hipotético que no passado e no futuro sejam estáticos. Nesse caso as soluções de (2.27) seriam assintoticamente dadas por ondas planas:

- modo incidente no passado ($\eta \rightarrow -\infty$):

$$h_k(\eta) \sim (h_k)^{in} = \frac{e^{-i\omega_k\eta}}{\sqrt{2\omega_k}}. \quad (2.29)$$

Este modo transcorreria no tempo sujeito a uma métrica variável e emergiria no futuro com uma outra solução assintótica de (2.27).

- modo emergente no futuro ($\eta \rightarrow +\infty$):

$$h_k(\eta) \sim (h_k)^{em} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}(\alpha_k e^{-i\omega_k\eta} + \beta_k e^{+i\omega_k\eta}) \quad (2.30)$$

onde α_k e β_k são conhecidos como coeficientes de Bogoliubov e evidenciam o fato de que os modos do campo poderiam ser “refletidos”, ou “transmitidos” temporalmente durante sua evolução do passado para o futuro, em analogia à Mecânica Quântica.

Note que a equação (2.27) é análoga a equação de Schrödinger e $V(\eta)$ pode representar um potencial que varia no tempo [12]. Se essa variação for adiabática a solução da equação (2.27) é do tipo WKB. Por outro lado, se $V(\eta)$, e portanto $a(\eta)$, variar de forma não adiabática em alguma região específica, ou seja, se a condição abaixo for violada:

$$\left| \frac{1}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{d\eta} \right| < \omega_k, \quad (2.31)$$

onde ω_k é a frequência associada a equação (2.27):

$$\omega_k(\eta) = \left[k^2 + m_\chi^2 a^2 + (6\xi - 1) \frac{a''}{a} \right]^{1/2}, \quad (2.32)$$

é possível determinar coeficientes análogos aos de reflexão e de transmissão, mas com uma interpretação um pouco diferente, já que se trata de um comportamento temporal e não espacial.

Analisando as soluções assintóticas (2.29) e (2.30) percebe-se que a frequência associada ao modo k pode mudar, desde que $\alpha_k \neq 1$ e $\beta_k \neq 0$. Os coeficientes de Bogoliubov carregarão a informação da variação da métrica. Eles são determinados a partir da solução da equação (2.27) para um dado $a(\eta)$ em regiões intermediárias, não assintóticas. Em particular, se os coeficientes β_k forem diferentes de zero, isso significará que o estado final do campo emergiu com uma mistura dos modos de frequência positiva e negativa e que poderá ser interpretada como partículas sendo criadas pelo campo gravitacional. Para chegar a essa

conclusão é preciso mostrar que quando o fator de escala varia no tempo, os operadores de criação e aniquilação que definem um estado de vácuo no passado e no futuro são diferentes. Como o operador número de partículas é construído a partir dos operadores de aniquilação e criação, $\hat{N} = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, um estado inicial de nenhuma partícula no passado pode ser um estado com partículas no futuro⁹. Ou seja:

- No passado:

$$(\hat{a}_q)^{in}|0\rangle_{in} = 0; \quad (\hat{N}_q)^{in} = (\hat{a}_q^\dagger)^{in}(\hat{a}_q)^{in}.$$

$$\text{Observadores não vêem partículas:} \quad {}_{in}\langle 0 | (\hat{N}_q)^{in} | 0 \rangle_{in} = 0.$$

- No futuro:

$$(\hat{N}_k)^{em} = (\hat{a}_k^\dagger)^{em}(\hat{a}_k)^{em}$$

Outro conjunto de observadores vêem partículas associadas ao estado $|0\rangle_{in}$:

$${}_{in}\langle 0 | (\hat{N}_k)^{em} | 0 \rangle_{in} \sim |\beta_k|^2.$$

Esse valor corresponde a densidade em número de partículas χ com momento k produzidas gravitacionalmente:

$$n_k = |\beta_k|^2. \quad (2.33)$$

Integrando em todos os modos obtém-se a densidade em número total de partículas χ produzidas:

$$n_\chi(t) = \frac{1}{(2\pi)^3 a^3(t)} \int n_k d^3k = \frac{1}{2\pi^2 a^3(t)} \int_0^\infty n_k k^2 dk. \quad (2.34)$$

A definição de operadores número de partículas apontada acima só é bem definida quando o espaço tempo é estático. No exemplo anterior as regiões assintóticas foram consideradas estáticas (veja expressões (2.29) e (2.30)) e só nesta região seria possível, em princípio, obter um estado de vácuo bem definido e consequentemente construir rigorosamente espaços de Fock que descrevem as partículas em Teoria de Campos. Na verdade, essa é uma das principais dificuldades que se enfrenta quando estuda-se a quantização de campos em espaços não estáticos, como é o caso do nosso universo, que está em expansão. Trabalha-se então com

⁹Esse formalismo não será desenvolvido aqui mas sugere-se seu estudo pelas referências [10, 15, 16].

soluções aproximadas, mas existe ainda um intenso debate na literatura sobre as diferentes abordagens¹⁰. Isso significa que no caso do nosso universo, que está expandindo, só é possível definir de forma aproximada o operador número de partículas.

Uma das aplicações mais importantes desse desenvolvimento foi o cálculo da temperatura de reaquecimento gerada por partículas que teriam sido produzidas no fim da inflação pelo mecanismo de produção gravitacional. Foi L. H. Ford [18] quem calculou a densidade de energia de partículas relativísticas, que teriam sido produzidas a partir da transição da métrica do espaço tempo de de Sitter para Friedmann-Robertson-Walker dominado pela radiação, no fim da inflação, no limite $|\xi - 1/6| \ll 1$. A termalização das partículas produzidas levaria o universo a uma temperatura de reaquecimento de $T_{rq} \sim 10^4$ GeV. Esse dado será considerado na seção 4.2 deste trabalho.

Note que segundo (2.32) se $\xi = 1/6$ (campo conformalmente invariante), partículas sem massa não teriam sido produzidas gravitacionalmente. Nesse caso, coeficientes $\beta_k = 0$, segundo equação (2.27), ou seja, a frequência inicial não se alteraria com a expansão do universo.

Produção Gravitacional de Partículas Massivas

A produção gravitacional de partículas massivas no fim da inflação foi estudada por diversos autores [19]. Concluiu-se que partículas com massas maiores que o parâmetro de Hubble daquela época não poderiam ter sido produzidas. Para entender esse resultado, considere a frequência (2.32), aplicada à condição de violação de adiabaticidade, obtida a partir de (2.31), que permite prever em que condições a produção de partículas ocorreria, para $\xi = 1/6$:

$$\left| \frac{d\omega_k}{d\eta} \right| > \omega_k^2, \quad \omega_k^2 = k^2 + m_\chi^2 a^2.$$

Então:

$$\left| \frac{m_\chi^2 a a'}{(k^2 + m_\chi^2 a^2)^{1/2}} \right| > k^2 + m_\chi^2 a^2 \implies |m_\chi^2 a a'| > (k^2 + m_\chi^2 a^2)^{3/2}$$

$$k = 0$$

$$\frac{1}{a} \left| \frac{a'}{a} \right| > m_\chi \implies \left| \frac{\dot{a}}{a} \right| > m_\chi, \quad (2.35)$$

¹⁰Veja, por exemplo, [17] ou capítulo 8 da referência [11].

onde o tempo conforme foi transformado em tempo real na última passagem. Note que a escolha do momento nulo forneceu o limite inferior para o lado direito da inequação acima. Isso significa que $m_\chi < H$, ou seja, que a massa máxima que pode ter sido produzida deve ser menor que a taxa de expansão do universo naquela época. No caso da inflação caótica, o parâmetro de Hubble não poderia exceder a massa do inflaton¹¹: $H < m_\phi$. Assim,

$$m_\chi < H < m_\phi. \quad (2.36)$$

Uma consequência desse resultado é que se no universo existir um campo com massa nua maior que $m_\phi \sim 10^{13}$ GeV, esse campo não poderia ter sido produzido no fim da inflação, porque a perturbação gerada pela variação da métrica neste período não seria capaz de extrair essa partícula de seu vácuo. Neste caso, essa partícula massiva deve ter sido gerada por algum outro mecanismo de produção de partículas. É claro que essas conclusões estão sendo tiradas considerando que o cenário inflacionário caótico massivo seja um bom modelo para descrever nosso universo.

Do desenvolvimento acima infere-se que partículas mais leves seriam mais facilmente produzidas para uma mesma variação da métrica do que as mais massivas. A mesma conclusão é obtida se for considerado o momento da partículas: momentos menores são mais facilmente produzidos que os maiores quando a massa nua da partícula e a variação da métrica são fixadas. Dessa maneira é possível entender porque a expansão atual do universo não produziria partículas de forma significativa.

2.3.1 O Pré-aquecimento: *Preheating*

Recentemente alguns físicos [20] perceberam que as oscilações do inflaton ao redor do mínimo de seu potencial no fim da inflação poderia ter dado origem a um curto estágio de produção não perturbativa de partículas. Se as partículas produzidas fossem bósons, isso teria gerado uma produção explosiva delas devido a ressonância paramétrica. E se elas ao serem produzidas, fossem relativísticas, esse mecanismo poderia ter reaquecido o universo de forma bastante eficiente sob algumas condições específicas.

L. Kofman, A. Linde e A. A. Starobinsky [21], desenvolveram esse modelo de produção ressonante de partículas no contexto da inflação caótica e ele será abordado a seguir.

¹¹No fim da inflação o parâmetro de Hubble (2.3) pode ser aproximado por:

$$H \simeq \sqrt{\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \frac{1}{2} m_\phi^2 \phi^2} \simeq \frac{2m_\phi \Phi}{M_{Pl}} \quad \Phi \sim M_{Pl}/3 \quad \Rightarrow \quad H \simeq m_\phi.$$

A dinâmica das partículas produzidas

No modelo estudado considera-se a possibilidade de produção apenas de bósons que serão denominados χ . Considere agora uma possível dinâmica do universo primordial dada pela lagrangiana abaixo:

$$L = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} m_\chi^2 \chi^2 - \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2 + \frac{1}{2} \xi R \chi^2, \quad (2.37)$$

onde ϕ é o inflaton, χ é um campo escalar quântico massivo, m_χ é a massa nua do campo χ , g é a constante de acoplamento entre os campos ϕ e χ , ξ é a constante de acoplamento gravitacional e R é o escalar de Ricci. Escolhendo como potencial o caótico massivo mais simples, $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2/2$, essa lagrangiana pode descrever a fase de rolamento lento, que produziria o período inflacionário e a posterior fase de reaquecimento onde partículas χ teriam sido produzidas.

Note que para um acoplamento entre χ e ϕ nulo ($g = 0$) a produção seria puramente gravitacional.

As equações de Euler Lagrange para o campo χ é obtida de forma análoga ao desenvolvimento da página 43 e neste caso é dada por:

$$\square \chi + m_\chi^2 \chi + g^2 \phi^2 \chi + \xi R \chi = 0. \quad (2.38)$$

Representando o campo χ quântico na notação de Heisenberg:

$$\hat{\chi}(t, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\hat{a}_k h_k(t) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} + \hat{a}_k^\dagger h_k^*(t) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}), \quad (2.39)$$

onde $\hat{a}_k$ e $\hat{a}_k^\dagger$ são os operadores de criação e aniquilação, a equação de movimento para os modos k , $h_k(t)$, ficam:

$$\ddot{h}_k(t) + 3H\dot{h}_k(t) + \left(\frac{\vec{k}^2}{a^2(t)} + m_\chi^2 + g^2 \phi^2(t) - \xi R \right) h_k(t) = 0. \quad (2.40)$$

Escreve-se a equação (2.58) em termos de uma variável mais conveniente $X_k \equiv a^{3/2} h_k$ (que torna o campo χ adimensional):

$$\ddot{X}_k + \left\{ \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2 \phi^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) - \xi R \right\} X_k = 0. \quad (2.41)$$

Note que a equação (2.41) é também a de um oscilador com frequência que varia no tempo dada por:

$$\omega_k(t) = \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2 \phi^2 - \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) - \xi R \right)^{1/2}, \quad (2.42)$$

não apenas porque $a = a(t)$, mas também porque $\phi = \phi(t)$. A variação do fator de escala seria responsável por uma possível produção gravitacional no fim da inflação. Note que como existem outros parâmetros na frequência característica deste campo quando comparada a frequência (2.32), a produção gravitacional poderia nem ter ocorrido, mesmo para massas m_χ pequenas ou nulas, diferente do caso quando considera-se $g = 0$. Na verdade, os termos responsáveis pela variação da métrica, no fim da inflação, poderiam ser desprezados, uma vez que ϕ é da ordem da massa de Planck para o potencial que está sendo estudado (veja seção 1.3.2). Essa será uma hipótese de trabalho que será verificada nas aplicações: a produção gravitacional das partículas no fim da inflação pode ser desprezada.

A partir do fim da inflação o inflaton entra na fase das oscilações em torno do mínimo de seu potencial $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2 / 2$, e o universo passa a evoluir de acordo com $a(t) \propto t^{2/3}$, como foi visto na seção 1.2.5. Isso significa:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4}{9t^2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = -\frac{2}{9t^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right) = 0. \quad (2.43)$$

Assim, a equação de movimento (2.41) para essa fase pode ser reescrita como:

$$\ddot{X}_k + \left\{ \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2 \phi^2 \right\} X_k = 0 \quad (2.44)$$

e a frequência (2.42) como:

$$\omega_k^2(t) = \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2 \phi^2 \right). \quad (2.45)$$

Novamente aqui, as conclusões serão as mesmas. Caso a frequência (2.45) deixe de satisfazer a condição de adiabaticidade

$$\left| \frac{1}{\omega_k} \frac{d\omega_k}{dt} \right| < \omega_k, \quad (2.46)$$

poderá haver produção de partículas.

Para ilustrar esse fenômeno, considere uma situação particular onde se queira saber se partículas com momento nulo, $k = 0$ e massa nula $m_\chi = 0$ são produzidas quando o inflaton oscila em torno do mínimo de seu potencial. Neste caso, substituindo ω_k na condição acima, verifica-se que a adiabaticidade é violada sempre que ϕ se encontra tipicamente dentro da região

$$-\phi^* \leq \phi \leq \phi^*, \quad \phi^* = \sqrt{\frac{m_\phi \Phi}{g}}, \quad (2.47)$$

onde a velocidade do campo no fundo do poço foi substituída na última igualdade $\dot{\phi}_0 = m_\phi \Phi$ (veja nota de rodapé da página 36). Fica claro nesta expressão que quanto maior a velocidade do campo e portanto quanto maior a amplitude do campo ϕ , mais fácil seria violar a adiabaticidade em regiões mais afastadas do fundo do poço.

Com a expressão (2.47) é possível estimar o intervalo de tempo Δt^* gasto durante a produção das partículas χ .

$$\Delta t^* \sim \frac{2\phi^*}{\dot{\phi}} \sim \frac{1}{\sqrt{gm_\phi\Phi}} \quad (2.48)$$

Note que este intervalo é sempre menor que o tempo de expansão do universo $H^{-1} \approx M_{Pl}/(2m_\phi\Phi)$ (veja nota de rodapé na página 47) sempre que $g > 10^{-6}$. Isso significa que a expansão do universo pode ser efetivamente desprezada durante a produção das partículas.

A Figura 2.2 mostra três curvas: a frequência do modo k do campo χ ao quadrado, ω_k^2 , dada pela expressão (2.45), a derivada desta frequência¹², $d\omega_k/dN$ e o campo ϕ dado pela expressão (2.8) numa escala mais conveniente. Note que a condição de adiabaticidade (2.46) deixa de ser satisfeita numa região próxima às meias oscilações do campo ϕ e que correspondem às passagens dele no fundo do poço de potencial ($\phi \approx 0$). Se a quebra de adiabaticidade e consequentemente a produção de partículas for associada a uma variação abrupta que a frequência do campo χ venha a sofrer, parece razoável que isso ocorra no mínimo do potencial $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2/2$, que é a região onde o potencial mais varia.

Uma outra análise interessante surge quando reescreve-se a frequência (2.45) como sendo:

$$\omega_k^2(t) = \frac{k^2}{a^2(t)} + m_\chi^{\text{ef}}(t)^2, \quad m_\chi^{\text{ef}}(t) = \sqrt{m_\chi^2 + g^2\phi^2(t)}, \quad (2.49)$$

onde o termo $m_\chi^{\text{ef}}(t)$ é a massa efetiva do campo χ que varia no tempo devido a variação do campo ϕ . Na verdade, ela aumenta quando ϕ se afasta do fundo do

¹²Note que a condição de adiabaticidade escrita em termos de t ou de N são equivalentes. Se a equação de movimento (2.44) fosse escrita em termos de $N = m_\phi t/2\pi$, teria-se:

$$\frac{d^2 X_k}{dN^2} + \left(\frac{2\pi}{m_\phi}\right)^2 \left\{ \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2\phi^2 \right\} X_k = 0; \quad w_k^2 = \left(\frac{2\pi}{m_\phi}\right)^2 \left\{ \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2\phi^2 \right\}$$

e a condição de adiabaticidade seria dada por:

$$\left| \frac{dw_k}{dN} \right| < w_k^2 \implies \left| \frac{d\omega_k}{dt} \right| < \omega_k^2.$$

Figura 2.2: A curva contínua representa a frequência ω_k^2 , a curva pontilhada representa a derivada da frequência, $d\omega_k/dt$ e a curva tracejada a função ϕ (Figura 2.1) vezes 100; em função de N ($= m_\phi t/2\pi$), para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 0$ e $g = 5 \times 10^{-4}$. A violação da condição de adiabaticidade (2.45) corresponde às passagens de ϕ pelo fundo do poço de potencial ($\phi \approx 0$).

poço de potencial e diminui quando ela se aproxima. Em $\phi(t) = 0$, $m_\chi^{\text{ef}} = m_\chi$. No mecanismo de pré-aquecimento esse aumento e diminuição da massa efetiva de χ ocorre sistematicamente, enquanto o campo ϕ oscilar.

A Figura 2.3 representa o fenômeno.

Como a condição de adiabaticidade só não é obedecida no fundo de poço de potencial, soluções do tipo WKB para a equação (2.44) são válidas em regiões assintoticamente afastadas do fundo do poço, ou seja próximas aos pontos de máximo¹³:

$$X_k(t) = \frac{\alpha_k(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp\left(+i \int \omega_k(\eta) d\eta\right) + \frac{\beta_k(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp\left(-i \int \omega_k(\eta) d\eta\right), \quad (2.50)$$

onde $\alpha_k(t)$ e $\beta_k(t)$ são os coeficientes de Bogoliubov e a densidade em número de partículas produzidas será dada por

$$n_k = |\beta_k|^2, \quad (2.51)$$

como estudado na seção anterior. Uma maneira de calcular analiticamente os coeficientes de Bogoliubov é a diagonalização da hamiltoniana do campo χ em cada instante t que fornece [11, 21]:

$$|\beta_k|^2 = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{|\dot{X}_k|^2}{\omega_k^2} + |X_k|^2 \right) - \frac{1}{2}. \quad (2.52)$$

¹³Note que aqui a condição assintótica não é estática, diferentemente das soluções (2.29) e (2.30), em que o campo ϕ varia de forma contínua.

Figura 2.3: O lado direito representa uma seqüência cronológica da evolução do inflaton a partir do fim da inflação. O lado esquerdo mostra os efeitos destas oscilações no universo. Note que a produção de partículas χ ocorreria dentro do intervalo $-\phi^* \leq \phi \leq \phi^*$.

Entretanto os autores de [21] propuseram um novo método analítico que fornece uma visão mais esclarecedora do fenômeno.

Quando a produção gravitacional foi estudada, foi visto que partículas poderiam ter sido produzidas apenas em um intervalo de tempo, que corresponderia a passagem da fase de de Sitter para Friedmann-Robertson-Walker. A variação na métrica neste intervalo teria perturbado suficientemente o vácuo do campo χ e produzido suas partículas.

No caso que está sendo estudado, cada vez que o campo ϕ , que é o campo clássico que tem o mesmo papel da métrica para a produção gravitacional, passa pelo fundo do poço, ele pode perturbar o campo χ e produzir partículas. Dependendo da massa do campo χ , do acoplamento g , da amplitude do campo¹⁴ ϕ e do momento k , partículas χ podem ter sido produzidas várias vezes.

Considere a seguinte descrição do fenômeno:

1. A condição inicial para o campo χ no fim da inflação:

$$X_k^0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \exp \left(+i \int \omega_k(\eta) d\eta \right), \quad (2.53)$$

ou seja $\alpha_k^0 = 1$ e $\beta_k^0 = 0$. Isso significa que no fim da inflação não existem partículas χ , segundo (2.51).

2. O campo ϕ passa pela primeira vez no fundo do poço. A condição de adiabaticidade é violada e partículas χ são produzidas. A solução adiabática volta a valer longe dessa região (primeiro máximo do campo ϕ) e é dada por:

$$X_k^1(t) = \frac{\alpha_k^1(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp \left(+i \int \omega_k(\eta) d\eta \right) + \frac{\beta_k^1(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp \left(-i \int \omega_k(\eta) d\eta \right), \quad (2.54)$$

ou seja, a densidade em número de partículas produzidas nesta primeira passagem será contabilizada como sendo $|\beta_k^1|^2$.

3. A solução (2.54) passa a ser a condição inicial da segunda passagem, ou seja, trata-se de um estado do campo χ que já possui partículas. Como tratam-se de bósons, espera-se que haja amplificação dos modos já existentes dessas partículas.

4. Depois da passagem, a solução adiabática volta a valer (no segundo máximo) e será dada por:

$$X_k^2(t) = \frac{\alpha_k^2(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp \left(+i \int \omega_k(\eta) d\eta \right) + \frac{\beta_k^2(t)}{\sqrt{2\omega_k}} \exp \left(-i \int \omega_k(\eta) d\eta \right), \quad (2.55)$$

¹⁴Lembrar que a amplitude do campo ϕ está diminuindo não apenas porque partículas estão sendo produzidas com sua densidade de energia, mas também porque essa densidade está sendo diluída com a expansão do universo.

e a densidade em número de partículas seria dada por $|\beta_k^2|^2$.

5. E assim por diante enquanto o campo ϕ tenha energia suficiente para produzir as partículas χ .

Este problema é análogo a vários espalhamentos em barreiras de potencial consecutivas na Mecânica Quântica e da mesma forma que lá é possível obter o coeficiente de transmissão total das partículas, aqui o objetivo será calcular o coeficiente β_k total que fornece a densidade em número de partículas total no fim deste processo.

No trabalho de Kofman, Linde e Starobinsky [21] é calculado a densidade em número de partículas produzidas a cada passagem do campo ϕ pelo mínimo do potencial em termos da passagem anterior. Se t_j (N_j), $j = 1, 2, 3, \dots$, denota cada instante que ϕ passa pelo mínimo de seu potencial, calcula-se a densidade em número de partículas no instante subsequente $N_{j+1}(n_k^{j+1})$, utilizando a densidade em número de partículas produzidas em $N_j(n_k^j)$:

$$n_k^{j+1} = e^{-\pi\kappa^2} + \left[1 + 2e^{-\pi\kappa^2}\right] n_k^j - 2e^{-\pi\kappa^2/2} \sqrt{1 + e^{-\pi\kappa^2}} \sqrt{n_k^j(1 + n_k^j)} \sin \theta_{tot}^j, \quad (2.56)$$

onde $\kappa^2 \equiv (k^2 + m_\chi^2)/(a^2(t)g|\dot{\phi}_0|)$ e θ_{tot}^j é a fase total acumulada até t_j . $\dot{\phi}_0 = m_\phi \Phi$ é a velocidade do campo ϕ próximo ao mínimo do potencial.

Para ilustrar a produção de partículas considere as Figuras 2.4 e 2.5 que representam a densidade número de partículas, n_k , com momento $k = 0$, com massa $m_\chi = 0$ e com $g = 5 \times 10^{-4}$, obtidas da solução numérica de (2.44) e (2.2), em função do número de oscilações $N = m_\phi t / 2\pi$, para dois intervalos diferentes, de $0 < N < 4$ oscilações e $0 < N < 60$ oscilações, respectivamente. Essas figuras foram geradas a partir da solução numérica da equação diferencial (2.44). Para mais especificações veja Apêndice C.

Note que a densidade em número de partículas, n_k , se mantém invariante entre as meias oscilações ($N = 1/2; 1; 3/2; \dots$) uma vez que esse é um invariante adiabático do movimento. Nas meias oscilações ela se desestabiliza, consequência da quebra de adiabaticidade, e aumenta exponencialmente. Por essa razão é que se diz que esse tipo de produção é bastante eficiente, uma vez que um número muito grande de partículas pode ter sido produzido.

O comportamento da curva representada na Figura 2.5 está vinculada ao comportamento da amplitude do campo ϕ . Para algum N a curva se estabiliza porque a amplitude do campo é pequena e não será mais capaz de produzir partículas. Nesse momento, a produção perturbativa de partículas pode ter ocorrido quando o campo oscilava rapidamente no fundo do poço de potencial. Na verdade, se

Figura 2.4: Densidade número de partículas n_k produzidas durante as oscilações do campo ϕ em torno do mínimo de seu potencial, em função do número de oscilações $N (= m_\phi t/2\pi)$ que varia de 0 a 4, para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 0$ e $g = 5 \times 10^{-4}$.

Figura 2.5: Densidade número de partículas n_k produzidas durante as oscilações do campo ϕ em torno do mínimo de seu potencial, em função do número de oscilações $N (= m_\phi t/2\pi)$ que varia de 0 a 60, para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 0$ e $g = 5 \times 10^{-4}$.

essa fase de reaquecimento perturbativo for muito longa a densidade de energia das partículas χ produzidas durante o pré-aquecimento pode ser completamente diluída. Lembre-se que matéria relativística dilui mais rapidamente que a não relativística com a expansão do universo e que a densidade de energia do campo ϕ se comporta como matéria não relativística ao oscilar no fundo do poço de potencial.

Neste modelo, quando as partículas χ são produzidas elas podem causar mudanças na dinâmica do inflaton, por exemplo na massa efetiva desse campo e portanto em sua frequência de oscilação. Outro efeito que pode ocorrer é a interação entre as partículas produzidas e estas com o próprio inflaton, e isso poderia

alterar o número final das partículas χ produzidas. Esses efeitos são relevantes depois de algumas oscilações do inflaton e foram chamados pelos autores de [21] de *backreaction* e *rescattering*. Nas situações estudadas neste trabalho esses efeitos poderão ser desprezados, porém para estudá-los recomenda-se o próprio artigo [21].

Produção de partículas massivas

O mecanismo de pré-aquecimento permite produzir partículas χ com massa maior que a massa do inflaton e em quantidade significativa. Porém, não é possível produzir uma massa indefinidamente grande. Foi visto, por exemplo, que para produzir uma massa nula no fundo de poço de potencial, o intervalo de quebra de adiabaticidade ao redor do mínimo de ϕ diminui com a velocidade e portanto com a amplitude (veja expressão (2.47)).

Figura 2.6: A curva contínua representa a frequência ω_k^2 , a curva pontilhada representa a derivada da frequência, $d\omega_k/dt$ e a curva tracejada a função ϕ (Figura 2.1) vezes 100; em função de N ($= m_\phi t/2\pi$), para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 2m_\phi$ e $g = 5 \times 10^{-4}$.

Parece natural supor que quando a massa do campo χ aumenta, a amplitude do campo ϕ será menor e assim a região de quebra de adiabaticidade poderá, para alguma massa, nem existir. Para ilustrar esse efeito considere as Figuras 2.2, 2.6 e 2.7. Em todas elas $k = 0$ e $g = 5 \times 10^{-4}$, porém com massas $m_\chi = 0$, $m_\chi = 2m_\phi$ e $m_\chi = 4m_\phi$, respectivamente. Note que a medida que a massa de χ aumenta a região ΔN de quebra de adiabaticidade diminui e a partir de uma determinada oscilação do campo ϕ ela deixa de ocorrer para as subseqüentes oscilações. Para $m_\chi = 4m_\phi$, por exemplo, a partir da terceira oscilação a adiabaticidade não é mais violada. Infere-se, portanto, que ela deixará de existir para uma determinada massa. A conclusão que se obtém é que a probabilidade que partículas massivas

Figura 2.7: A curva contínua representa a frequência ω_k^2 , a curva pontilhada representa a derivada da frequência, $d\omega_k/dt$ e a curva tracejada a função ϕ (Figura 2.1) vezes 100; em função de N ($= m_\phi t/2\pi$), para os parâmetros $k = 0$, $m_\chi = 4m_\phi$ e $g = 5 \times 10^{-4}$.

sejam produzidas via esse mecanismo diminui com sua massa. Segundo o artigo [21] massas de até 10^{16} GeV poderiam ter sido produzidas.

Note que a massa das partículas χ produzida por esse mecanismo é a massa nua, ou seja a massa que χ possui no fundo do poço quando $\phi = 0$.

2.3.2 O Mecanismo FKL: *Instant Preheating*

Em 1999, G. Felder, L. Kofman e A. D. Linde [23] perceberam que, para um potencial caótico, era possível se ter um reaquecimento eficiente com apenas uma oscilação do campo ϕ . Eles propuseram um novo mecanismo de reaquecimento que foi chamado de pré-aquecimento instantâneo (*instant preheating*), mas neste trabalho será designado mecanismo FKL. Esse mecanismo pode se mostrar bastante útil quando trabalha-se com potenciais que não possuem um mínimo, como é o caso dos potenciais inflacionários quintessenciais [24]. Para estes potenciais propõem-se usualmente que o reaquecimento do universo teria decorrido da produção gravitacional de partículas relativísticas como proposto, por exemplo, por L. Ford [18]. A possibilidade da produção não perturbativa pela variação do inflaton traz resultados interessantes e foi explorada com detalhes em uma das aplicações da tese (ver seção 4.2).

Como foi visto na seção anterior, no caso do potencial inflacionário caótico, quando a partícula χ é produzida no fundo do poço sua massa depende da evolução temporal do campo ϕ , em particular ela aumenta à medida que o campo ϕ se afasta de $\phi = 0$ e volta a diminuir quando ϕ se aproxima de $\phi = 0$ (equação (2.49)). Depois de subseqüentes produções no fundo do poço de potencial, que

dependerá fundamentalmente da massa do campo χ , m_χ , e do acoplamento, g , o inflaton terá transferido grande parte de sua energia para os bósons χ que poderão reaquecer o universo se forem relativísticos ou formarem uma densidade de partículas massivas.

No mecanismo FKL introduz-se um novo acoplamento entre o campo χ e um campo fermiônico ψ que, como será visto, faria com que a partícula χ produzida no fundo do poço decaísse em férmions quando sua massa efetiva fosse máxima, ou seja quando ϕ estivesse em sua máxima amplitude. O subsequente decaimento desses férmions em partículas relativísticas e a termalização delas teria feito o universo reaquecer. Dessa forma, transferiria-se a energia de oscilação do inflaton para um terceiro campo desacoplado dele, o campo χ não mais teria sua massa “engordada” e “emagrecida” sistematicamente e não haveria ressonância. O campo ϕ , ao retornar ao mínimo de seu potencial, poderia criar novas partículas χ e eventualmente o processo poderia recomeçar, se a energia fosse suficiente. Esquemáticamente:

$$\phi \xrightarrow{g} \chi \xrightarrow{g'} \psi.$$

Descreve-se quantitativamente esse processo através da lagrangiana:

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - V(\phi) + \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 - \frac{1}{2}g^2\phi^2\chi^2 + \quad (2.57)$$

$$+ \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_\psi)\psi - g'\bar{\psi}\psi\chi,$$

onde foi introduzida a interação de Yukawa $g'\bar{\psi}\psi\chi$ entre os campos χ e ψ . A massa do férmion ψ é representada por m_ψ . Desprezam-se novamente os termos gravitacionais associados aos campos χ e ψ .

Depois da inflação os campos χ e ψ estariam em seus vácuos. A evolução temporal de ϕ poderia perturbar o vácuo do campo χ , mas não o de ψ , pelo menos em primeira aproximação, já que este não estaria diretamente acoplado ao inflaton. Assim, para a primeira etapa do processo, que seria a produção das partículas χ , os termos referentes ao campo fermiônico podem ser omitidos. A equação de movimento é portanto a mesma utilizada para o estudo do pré-aquecimento:

$$\ddot{\chi}_k(t) + 3H\dot{\chi}_k(t) + \left(\frac{k^2}{a^2(t)} + m_\chi^2 + g^2\phi^2(t)\right)\chi_k(t) = 0. \quad (2.58)$$

Reescrevendo a equação acima em termos $X_k \equiv a^{3/2}\chi_k$, obtém-se a equação de um oscilador

$$\ddot{X}_k + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2\phi^2\right)X_k = 0, \quad (2.59)$$

com frequência variável

$$\omega_k(t) = \sqrt{\frac{k^2}{a^2(t)} + m_\chi^2 + g^2\phi^2(t)}. \quad (2.60)$$

A massa efetiva de χ será dada então por:

$$m_\chi^{\text{ef}}(t) = \sqrt{m_\chi^2 + g^2\phi^2(t)}. \quad (2.61)$$

Novamente aqui quando a variação temporal da frequência $\omega_k(t)$ é não adiabática partículas χ poderiam ser criadas e que isso ocorreria quando ϕ passasse no fundo de poço de potencial.

Uma vez que partículas χ são produzidas inicia-se o processo de “engorda” dessas partículas já que o campo $\phi(t)$ segue em direção à amplitude máxima de seu potencial. Do termo de interação de Yukawa, a taxa de decaimento de χ bósons, com massa m_χ^{ef} , em ψ férmions, com massa m_ψ , segundo a Física de Partículas, é dada por:

$$\Gamma(\chi \rightarrow \bar{\psi}\psi) = \frac{g'^2 m_\chi^{\text{ef}}}{16\pi} \left[1 - \left(\frac{2m_\psi}{m_\chi^{\text{ef}}} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}. \quad (2.62)$$

Note que essa taxa¹⁵ não é constante pois a massa efetiva do campo χ depende do tempo, $m_\chi^{\text{ef}}(t)$, segundo a expressão (2.61), e por essa razão as partículas χ tendem a decair para grandes valores de $\phi(t)$. Essa é a característica mais interessante deste modelo já que ele permite que uma grande quantidade de energia possa ser transferida do inflaton para férmions, uma vez que os bósons χ decaem quando suas massas variáveis são máximas, ou seja quando $m_\chi^{\text{ef}} \approx g\Phi$.

A Figura 2.8 mostra uma representação deste fenômeno que pode ser comparado com a Figura 2.3 que representa o mecanismo de pré-aquecimento.

O inverso da taxa de decaimento é definido como sendo a vida média das partículas χ . Estimando essa vida média é possível obter uma relação entre as constantes de acoplamentos. Por exemplo, no artigo [23], Felder *et al.* estimam que as partículas χ decairiam em um intervalo pequeno Δt em torno do ponto de máxima amplitude de ϕ . Substituindo $\Gamma = 1/\Delta t$, e omitindo o termo de espaço de fase que foi introduzido (veja nota de rodapé), obtém-se uma relação entre g e g' . Note que quando impõe-se um valor para o intervalo Δt , assume-se, na verdade, que Γ é uma constante e isso levaria a um decaimento exponencial. Mas

¹⁵Essa expressão não coincide com a expressão análoga da referência [23]. Na verdade, os autores parecem ter omitido o fator de espaço de fase.

Figura 2.8: A primeira oscilação do campo ϕ e os efeitos no universo visível são representados neste diagrama. Note que a produção de partículas χ ocorreria dentro do intervalo $-\phi^* \leq \phi \leq \phi^*$. Essas partículas quando engordam decaem em férmions ψ .

isso poderia significar desprezar a característica mais interessante desse modelo que é ter um $\Gamma = \Gamma(t)$. No Capítulo 4 descreve-se uma aplicação desse modelo e apresenta-se como essa questão foi considerada.

O próximo passo seria determinar quantas partículas ψ podem ser produzidas por esse mecanismo, ou seja sua densidade em número. Na seção anterior apresentou-se uma expressão recursiva da densidade em número de partículas produzidas via pré-aquecimento, expressão (2.56), que determinava o número de partículas que seriam produzidas numa passagem em função do número de produzido na passagem anterior. No caso do mecanismo FKL bastaria considerar a primeira passagem mesmo que ϕ produza seguidas vezes partículas χ em cada passagem no fundo do poço de potencial. Note que mesmo que o campo ϕ ainda tenha energia para retornar ao ponto mínimo de seu potencial e produzir novas partículas χ , estas não sofrerão amplificação paramétrica, já que a maior parte das partículas χ já teria decaído em ψ .

Considera-se com mais detalhes a solução da equação (2.59). Foi calculada na seção 2.1 a solução da equação de movimento para o campo ϕ livre dada pela equação (2.6): $\phi(t) = \Phi(t) \sin(m_\phi t)$. Aproximando a função seno no fundo do poço para a primeira passagem (t_1), o termo $g^2 \phi^2 \approx g^2 \Phi^2 m_\phi^2 (t - t_1)^2$, já que é possível desprezar a expansão do universo no fundo do poço (veja equação (2.48)), ou seja:

$$\frac{d^2 X_k}{dt^2} + \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2 \Phi^2 m_\phi^2 (t - t_1)^2 \right) X_k = 0. \quad (2.63)$$

Fazendo a seguinte substituição de variáveis:

$$\tau = \sqrt{gm\Phi}(t - t_1) \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \sqrt{gm\Phi}; \quad \kappa^2 = \left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 \right) \frac{1}{gm\Phi}, \quad (2.64)$$

na equação (2.63), obtém-se:

$$\frac{d^2 X_k}{d\tau^2} + (\kappa^2 + \tau^2) X_k = 0, \quad (2.65)$$

cuja solução é tabelada e dada por combinações de funções parabólicas cilíndricas: $W(-\kappa^2/2; \pm\sqrt{2}\tau)$ [25]. Segundo [21] essas soluções forneceriam para a primeira oscilação:

$$n_k = \exp(-\pi\kappa^2) = \exp\left(-\pi \frac{k^2 + m_\chi^2}{a^2(t)g|\dot{\phi}_0|}\right). \quad (2.66)$$

ou seja, a solução (2.56) para uma oscilação ($j = 0$).

Desprezando a expansão do universo ($a(t) = 1$) durante o intervalo de tempo que χ é produzido, a densidade em número total de partículas χ criadas na

primeira passagem do campo ϕ pelo mínimo de seu potencial é dada, segundo (2.34), por:

$$n_\chi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k n_k = \frac{(g|\dot{\phi}_0|)^{3/2}}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi m_\chi^2}{g|\dot{\phi}_0|}\right). \quad (2.67)$$

Como cada partícula χ decai em duas partículas ψ podemos estimar a densidade em número de partículas ψ como sendo:

$$n_\psi = \frac{(g|\dot{\phi}_0|)^{3/2}}{4\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi m_\chi^2}{g|\dot{\phi}_0|}\right). \quad (2.68)$$

As partículas ψ poderiam decair em outras partículas relativísticas que se termalizariam finalizando assim o processo de reaquecimento do universo.

Produção de partículas massivas

É possível produzir partículas supermassivas, ψ através deste mecanismo. A densidade de energia dessas partículas dependeria de sua massa. Na verdade, se elas tiverem uma massa grande é possível escrever $m_\psi \approx m_\chi^{\text{ef}}/2$ e a densidade de energia de ψ será aproximadamente igual a de χ , $\rho_\psi \approx m_\psi n_\psi \approx \rho_\chi = g\Phi n_\chi$.

Na seção 4.1 estuda-se com detalhes esse tipo de produção. A seguir apresenta-se um capítulo destinado à fenomenologia dos raios cósmicos de altíssimas energias que será tema de duas das aplicações deste trabalho apresentadas no Capítulo 4.

Capítulo 3

Raios Cósmicos de Altíssimas Energias

Raios cósmicos são partículas provenientes do espaço que podem, eventualmente, penetrar a atmosfera terrestre e serem medidas. Victor Hess descobriu, em 1911, em uma série de vôos em balões, que a Terra era banhada pelo que ele chamou de “radiação cósmica ionizante” [1]. No fim da década de 20, medidas indicaram que raios cósmicos eram constituídos, principalmente, de partículas carregadas. Em 1938, Pierre Auger [2] mediu uma cascata de partículas no solo, denominando-a de “chuveiros de ar extensos” (*extensive air showers*). Ele concluiu que uma partícula cósmica entrando na atmosfera interagiria com o gás atmosférico produzindo partículas secundárias que fariam parte dessa cascata. A extensão do chuveiro estaria relacionada com a energia dessa partícula primária e ele estimou que poderiam haver raios cósmicos com energia maior que 10^6 GeV. Atualmente o evento de raio cósmico mais energético registrado teve energia de $3,2 \times 10^{20}$ eV e foi medido em 1993, pelo experimento Fly’s Eye [3].

Desde sua descoberta, os raios cósmicos são estudados muito intensamente pois deseja-se saber qual a origem e composição dessas partículas que chegam a ter as maiores energias até hoje registradas no universo.

A Figura 3.1 traz uma compilação do espectro de raios cósmicos conhecido hoje. Nota-se que os eventos se estendem em uma faixa muito ampla de energia de pelo menos 11 ordens de grandeza, cujo fluxo parece obedecer uma lei de potência com índice espectral de aproximadamente -2.7 . Existem desvios deste comportamento, conhecidos por joelho e calcanhar que, apesar de pequenos, podem ter um significado físico bastante profundo.

Acredita-se que raios cósmicos com energias menores que 1 GeV tenham origem solar. Acima dessa energia e até 10^{15} eV espera-se que eles tenham sido produzidos em campos eletromagnéticos de objetos astrofísicos de dentro da nossa galáxia. O espectro se torna mais íngreme (joelho) em torno de 10^{16} eV e em

Figura 3.1: Espectro de raios cósmicos

geral associa-se esse desvio ao limite na energia das supernovas remanescentes consideradas os aceleradores galáticos mais promissores para essa faixa de energia. Acima de 10^{18} eV o espectro fica mais plano (“calcanhar”) evidenciando talvez, o início do domínio de uma componente mais plana, de origem extragaláctica, no fluxo de raios cósmicos. Como o fluxo acima de 10^{19} eV se torna muito pequeno (menor que 1 partícula por km^2 por ano), sua detecção ainda é muito difícil e por isso os dados experimentais são escassos. Isso faz com que a imagem espectral nessa região seja pouco precisa, porém, a aparente isotropia na direção de chegada dos eventos disponíveis estaria indicando que eles provavelmente vem de fora da nossa galáxia¹.

Os raios cósmicos dessa última região do espectro, que serão denominados Raios Cósmicos de Altíssimas Energias, têm demandado um esforço muito grande

¹Para uma discussão mais detalhada veja [4] e as referências aí existentes.

não apenas de pesquisadores experimentais, que se dedicam a construir equipamentos cada vez mais potentes e precisos, no intuito de aumentar a estatística desses eventos, como também de teóricos, principalmente, astrofísicos e cosmólogos que buscam modelos que expliquem os mecanismos através dos quais essas partículas possam ser produzidas.

O primeiro evento de raios cósmicos de altíssimas energias, com mais de 10^{20} eV, foi observado no experimento Volcano Ranch [5], em 1963. Depois disso, outros eventos de altíssimas energias ($> 10^{19}$ eV) foram registrados em outros observatórios como Haverah Park [6], Yakutsk [7], SUGAR (*Sidney University Giant Air Shower Record*) [8], AGASA (*Akeno Giant Air Shower Array*) [9], Fly's Eye [3] e Hires (*High Resolution Fly's Eye*) [10]. Porém, as incertezas associadas a essas medidas são ainda muito grandes. As técnicas de detecção desses observatórios operam de diferentes maneiras, mas é possível classificá-las como aquelas que medem diretamente a cascata de raios cósmicos através de detectores de partículas que ocupam grandes áreas no solo, e aqueles que fornecem medidas indiretas do chuveiro por meio de grandes telescópios que coletam os fótons provenientes das interações dos raios cósmicos com o gás atmosférico. O objetivo dessas medidas é determinar a direção de chegada, a distribuição de energia e a composição de massa das partículas primárias.

Atualmente existe uma controvérsia na literatura das medidas feitas pelos experimentos AGASA [11] e HiRes [12]. Ela tem origem no contexto de um argumento teórico de que o espectro de raios cósmicos deveria apresentar um corte, conhecido como GZK (*Greisen, Zatsepin, Kuzmin*) [13, 14], a uma energia de aproximadamente 7×10^{19} eV se as partículas primárias forem nucleons produzidos a distâncias maiores que 100 Mpc. Antes de apresentar a controvérsia discute-se esse argumento.

Como a maior parte dos raios cósmicos são considerados núcleos ionizados que foram acelerados por campos eletromagnéticos de objetos astrofísicos, acredita-se que os eventos a altíssimas energias sejam também prótons ou núcleos. Mas essa é ainda uma questão em aberto, já que os dados disponíveis a respeito da natureza da partícula primária ainda não são conclusivos.

Segundo o argumento GZK, prótons com energia maior que 7×10^{19} eV perderiam essa energia muito rapidamente ao se propagarem no meio intergalático, pois ao interagirem com a radiação cósmica de fundo, produziriam uma ressonância Δ que decairia em píons² e portanto seu livre caminho médio passaria a ser de aproximadamente no máximo 100 Mpc. Núcleos também apresentariam um corte para energias maiores que 10^{19} eV porque sofreriam fotodesintegração na radiação cósmica de fundo e no fundo de infra vermelho. Seu livre caminho médio seria da ordem de 10 Mpc. Assim, seria necessário que as fontes de raios cósmicos de

² $p + \gamma_{rcf} \rightarrow \Delta^+ \rightarrow N + \pi$, N corresponde a um nucleon.

altíssimas energias estivessem dentro de um raio de 100 Mpc (raio GZK) no caso deles serem prótons e 10 Mpc no caso deles serem núcleos mais pesados.

Figura 3.2: Final do espectro de raios cósmicos observado por AGASA [11], Fly's Eye [15], Haverah Park [16], HiRes [12] e SUGAR [17]. Figura extraída da referência [18].

A controvérsia dos dados medidos pelos experimentos acima mencionados pode ser visto na Figura 3.2 e ocorre pois AGASA, que é atualmente o maior detector de solo, mediu eventos com energia acima de 8×10^{19} eV, dos quais 11 estão acima de 10^{20} eV e 24 acima de 6.3×10^{19} eV indicando, provavelmente, a ausência do corte. Em contrapartida, HiRes [12], que é um detector de fluorescência, mediu apenas 2 eventos com energia acima de 10^{20} eV e 10 acima de 6.3×10^{19} eV, e sua análise estatística parece confirmar o corte GZK fortalecendo o modelo de que raios cósmicos de altíssimas energias sejam prótons produzidos em fontes dentro do volume GZK. Por outro lado, como esses eventos são muito energéticos parece razoável supor que a partícula primária seja pouco defletida pelos campos magnéticos galácticos ou extragalácticos durante seu trajeto da fonte até nós³. Assim, acredita-se que sua direção de chegada deva apontar na direção de sua fonte. Se as fontes forem objetos astrofísicos, elas deveriam ser detectáveis por astronomia

³Entretanto, é importante lembrar que hoje ainda sabe-se muito pouco dos campos magnéticos espaciais.

de radio ou óptica. Nenhum objeto com as características necessárias foi detectado na direção de chegada dos eventos de raios cósmicos de altíssimas energias medidos.

Esse impasse experimental, deverá ser resolvido pela nova geração de experimentos. A colaboração Pierre Auger [19], programada para operar acima de 10^{19} eV, apresenta pelo menos duas grandes inovações com relação aos experimentos existentes. Ela empregará as duas técnicas de detecção, ou seja, contará com detectores de fluorescência e com detectores de partículas no solo, operando simultaneamente, além de prever a construção de um observatório em cada hemisfério. A área destinada ao observatório será a maior construída, 3.000 km^2 , o que contribuirá para um aumento da estatística desses eventos tão raros. Atualmente, o observatório no hemisfério sul já está sendo construído em Malargue, Argentina e a previsão é que ele esteja operando regularmente em 2005⁴. Esta técnica híbrida de detecção deverá contribuir na determinação da energia atribuída à partícula primária bem como na definição da composição de massa dessa partícula, já que os dados ainda não são conclusivos sobre sua natureza. Além disso, os observatórios localizados nos dois hemisférios deverão fazer uma varredura do céu, definindo suas direções de chegada.

Outro projeto, para um futuro mais distante (2009), mas também bastante promissor, é a colaboração EUSO (*Extreme Universe Space Observatory*) [20], que deverá ser a primeira missão espacial destinada ao estudo de raios cósmicos e de neutrinos com energias maiores que 5×10^{19} eV. Esse observatório, por estar em órbita, poderá detectar, a partir de uma visão aérea, a radiação de fluorescência produzida por chuviros de partículas. Ele deverá explorar uma área da ordem de milhões de ($\text{km}^2 \text{ sr}$), aumentando consideravelmente o número de eventos observados.

Apesar da pálida abordagem que foi dada acima a algumas questões que envolvem os eventos de raios cósmicos de altíssimas energias, já é possível entender que diante de um panorama tão difuso exista uma grande expectativa com relação aos dados da colaboração Pierre Auger. Muitas idéias têm surgido e espera-se que os resultados experimentais sejam capazes de eleger algumas delas.

No que segue, utiliza-se uma classificação, comum na literatura, para os modelos existentes que procuram explicar aspectos desse fenômeno e que está associada ao mecanismo de produção dessas partículas extremamente energéticas. São os mecanismos de produção “de baixo para cima” (*bottom-up*) onde a energia é transferida aos raios cósmicos através de sua interação com campos eletromagnéticos e “de cima para baixo” (*top-down*) onde o raio cósmico seria um dos produtos do decaimento de partículas exóticas supermassivas.

⁴É interessante conhecer a contribuição do Brasil neste projeto. Veja por exemplo [<http://www.ifi.unicamp.br/AUGER/>].

Nesse trabalho abordam-se modelos de mecanismos “de cima para baixo” e por essa razão será dada mais ênfase em características desse mecanismo⁵.

3.1 Mecanismo “de baixo para cima” (*bottom-up*)

O conceito básico desse mecanismo é de que partículas ganham energia ao serem aceleradas no meio interestelar. Partículas carregadas poderiam ser aceleradas por um forte campo elétrico gerado, por exemplo, por estrelas de nêutrons em rotação (pulsares). Porém, esse modelo, conhecido como direto, não produziria naturalmente o espectro característico de lei de potência para os raios cósmicos, o que enfraquece sua validade.

Uma outra possibilidade seria a de partículas ganharem energia através de sucessivas colisões em regiões de campo magnético variável que existem em nuvens de gás ionizadas e que se movimentam regularmente ao redor de galáxias [22]. Esse processo de aceleração estatística é conhecido como mecanismo de Fermi [23] e produz naturalmente um espectro do tipo:

$$J(E) \sim E^{-\alpha} \quad (3.1)$$

com $2,3 < \alpha < 2,7$, onde $J(E)$ representa o fluxo mostrado na Figura 3.1. É por essa razão que investe-se bastante em modelos como este.

A. M. Hillas mostrou [24] que independente dos detalhes dos mecanismos de aceleração, a máxima energia de uma partícula com carga Ze dentro de um ambiente de tamanho R é:

$$E_{\text{máx}} \propto Z \left(\frac{B}{1\mu\text{G}} \right) \left(\frac{R}{1\text{kpc}} \right) 10^{18}\text{eV} \quad (3.2)$$

onde B é o campo magnético dentro do volume de aceleração. Essa condição basicamente estabelece que o raio de Larmor da partícula acelerada deve ser menor que o tamanho da região de aceleração e é representado pelo diagrama de Hillas na Figura 3.3. Apenas objetos acima das retas diagonais podem acelerar os elementos (próton ou ferro) acima de 10^{20} eV. Porém, mesmo que estes objetos acelerem partículas a energias tão altas, parece difícil que elas emergjam dos arredores da fonte sem perder muita energia, o que inviabilizaria o mecanismo.

Uma outra questão que surge é a relação entre a localização das fontes astrofísicas que acelerariam as partículas e a direção de chegada dos eventos. Acredita-se que eles devam estar numa mesma direção, uma vez que campos magnéticos galácticos e extragalácticos desviariam pouco a direção dos raios cósmicos

⁵Para uma revisão de mecanismos “de baixo para cima” sugere-se o artigo [21].

Figura 3.3: Diagrama de Hillas. Mostra a relação existente entre os campos magnéticos produzidos por objetos astrofísicos e suas dimensões. As possíveis fontes de prótons e núcleos de ferro com energias acima de 10^{20} eV estariam acima da linha contínua e pontilhada, respectivamente. Figura extraída da referência [22].

se tiverem baixa intensidade. Aparentemente não se verifica essa relação com os objetos que distam até aproximadamente 100 Mpc [22].

A falta de correlação entre os resultados produzidos por esse mecanismo e os eventos observados até hoje, fizeram surgir na literatura modelos exóticos que tentam explorar novas alternativas [4]. Por exemplo, alguns objetos astrofísicos do diagrama de Hillas poderiam ser as fontes dos eventos de raios cósmicos de altíssimas energias se os campos magnéticos intergalácticos fossem mais intensos e portanto capazes de desviar o caminho dessas partículas [21].

Outras possibilidades são exploradas, como os neutrinos poderem iniciar os chuviscos com as características esperadas se sua seção de choque com nucleons atmosféricos fosse maior, isso significaria atribuir interações mais fortes a eles [25]. Ou ainda, se a relação entre momento e energia da relatividade especial fosse modificada, o corte GZK não seria previsto uma vez que o livre caminho médio dos prótons a altas energias seria maior [26]. Uma outra proposta, que discute-se em detalhes na próxima seção é a existência de partículas supermassivas que decairiam em partículas de raios cósmicos.

Todas essas tentativas de explicar os raios cósmicos de altíssimas energias não são completamente satisfatórias mas oferecem a oportunidade de explorar novos conceitos e fazer novas previsões.

3.2 Mecanismos “de cima para baixo” (*top-down*)

Esses mecanismos pressupõem que o decaimento de partículas supermassivas, que serão chamadas de partículas X s, produza os raios cósmicos de altíssimas energias. Para que essas partículas sejam consideradas as fontes desses eventos elas devem decair a distâncias menores que 100 Mpc, segundo o argumento GZK⁶, devem ter uma massa $m_X > 10^{11}$ GeV e sua abundância deve ser suficiente para produzir o fluxo observado de raios cósmicos de altíssimas energias.

Segundo P. Bhattacharjee e G. Sigl [21] *o principal problema dos cenários top-down é que são altamente dependente de modelos e envolve uma física além do Modelo Padrão de física de partículas. Em contrapartida, esse pode ser o lado mais atraente desses modelos porque exploram não apenas os limites do modelo padrão de física de partículas como também novas idéias na cosmologia do universo primordial. As observações de raios cósmicos de altíssimas energias fornecem um grande laboratório para que essas idéias possam ser testadas.* Hoje entende-se que as partículas X s poderiam ser emitidas por defeitos topológicos como cordas cósmicas ou monopólos magnéticos na época atual [21, 25], ou poderiam ser produzidas por algum dos mecanismos de produção de partículas logo após a inflação⁷ como sugerido inicialmente por V. A. Kuzmin e V. A. Rubakov [27]. Neste último caso as partículas X s teriam que sobreviver até hoje para explicar os raios cósmicos de altíssimas energias, ou seja sua vida média deveria ser maior que a idade do universo. É difícil explicar a metaestabilidade dessa partícula com as teorias hoje aceitas, mas já existem candidatos (*cryptons*, *instantons*, *wormholes*) que tentam viabilizar a existência delas no contexto de supersimetria e gravidade quântica [25, 28].

O cenário *top down* se mostra bastante interessante quando associa-se o problema dos raios cósmicos a altíssimas energias com o problema da matéria escura estimada existir no universo. As partículas supermassivas X poderiam ser uma parte da matéria escura ou toda ela, e sua distribuição espacial estaria atrelada à distribuição da matéria escura [29].

Se esse cenário explica os raios cósmicos de altíssimas energias é preciso ob-

⁶Será visto que um corte também é esperado caso os raios cósmicos de altíssimas energias sejam fótons ou neutrinos e que as fontes devem distar da Terra a essa mesma ordem de grandeza.

⁷Este trabalho versará sobre essa possibilidade. Veja Capítulo 2 e 4.

servar alguns possíveis “rastros” deixados por essas partículas:

Alto fluxo de fótons e neutrinos

Assume-se que, independentemente de sua origem e natureza, as partículas X s decaiam em quarks e léptons muito energéticos. Segundo a Cromodinâmica Quântica, esses quarks produziram jatos de hádrons, analogamente ao que acontece em processos de colisão de partículas a energias muito menores, em aceleradores. A descrição quantitativa desse processo⁸ leva à chamada função de fragmentação dos hádrons, que dependerá da energia da partícula que decai, e com a qual se obtém o espectro de injeção de nucleons, fótons e neutrinos resultantes do decaimento. Considerando o decaimento da partículas X s em um quark e um lépton, $X \rightarrow q + l$, o jato hadrônico produziria um espectro de aproximadamente 10% de nucleons e 90% de píons distribuídos igualmente nos três estados de carga. Os píons carregados produziram basicamente elétrons e neutrinos, enquanto que os píons neutros decairiam em fótons. Elétrons não são considerados candidatos a raios cósmicos de altíssimas energias pois eles irradiariam a maior parte de sua energia quando atravessarem os campos magnéticos cósmicos. Combinados, a quantidade de fótons e neutrinos neste espectro de decaimento seria 10 vezes maior que a de prótons.

Assim, espera-se que os fluxos de neutrinos e fótons sejam maiores que o de prótons. Os neutrinos, por terem uma seção de choque muito pequena, seriam capazes de penetrar na atmosfera sem interagir e produzir chuvinhos extensos horizontais e não verticais, a não ser que se postule alguma mecanismo exótico como uma nova interação que aumente sua seção de choque com nucleons [25]. Fótons ultra-energéticos, por sua vez, ao viajarem de sua fonte até a Terra produziram pares elétron-pósitron ao colidirem com fótons da radiação cósmica de fundo, com os fótons do fundo de infra-vermelho e óptico ou com os fótons do fundo universal de rádio: $\gamma + \gamma_{fundo} \rightarrow e^+e^-$. O par elétron-pósitron produziria novamente fótons através do espalhamento Compton inverso. Esses processos gerariam cascatas eletromagnéticas com energias cada vez menores que teriam como efeito global um fundo de fótons com energias entre 100 MeV a 1 TeV [21, 22]. A Figura 3.4 mostra o comprimento de atenuação de um fóton ultraenergético como função de sua energia ao interagir com cada um dos fundos de radiação.

Assim, segundo esse modelo de decaimento das partículas X s, espera-se:

- ✓ que a razão entre fótons e prótons a altíssimas energias seja grande (> 1)
- ✓ que haja um alto fluxo de neutrinos de altíssimas energias.

⁸Essa descrição corresponde a uma grande área de pesquisa da Física de Partículas que além de envolver questões teóricas, como o próprio processo de confinamento dos quarks, envolve códigos numéricos bastante complexos. As referências [21, 22, 25] fornecem uma visão dessa complexidade.

Figura 3.4: Comprimento de atenuação de fótons, prótons e núcleo de ferro em diferentes radiações de fundo em função da energia. As três linhas inferiores indicam a atenuação dos fótons no fundo de infra-vermelho (IR), no fundo de microondas (CMB) e no fundo de radio. As duas linhas sólidas no canto direito indicam a atenuação dos prótons devido a fotoprodução de píons (corte GZK) e a produção de pares. A linha tracejada à direita indica a atenuação do núcleo de ferro devido a fotodesintegração no fundo de microondas e infra-vermelho. Figura extraída da referência [30].

✓ que exista um fundo de radiação a baixas energias (MeV-TeV)

Espectro mais plano

O espectro de energia gerado por fótons seria mais plano segundo o modelo de decaimento da cromodinâmica quântica⁹. Essa característica é uma consequência da função de fragmentação para os quarks. Segundo os dados disponíveis hoje, essa característica já poderia estar sendo observada.

⁹É preciso lembrar que esses modelos extrapolam os cálculos testados para energias várias ordens de magnitude abaixo da escala de energia dos raios cósmicos de altíssimas energias.

Anisotropia Galática

Se essas partículas tiverem origem galática e fizerem parte da matéria escura fria, elas estariam aglomeradas no centro de nossa galáxia, devido a atração gravitacional, e seria possível observar uma anisotropia na direção de chegada dos eventos, já que o Sol ocupa uma posição assimétrica na Via Láctea [31]. Os dados existentes parecem ser isotrópicos para energias maiores que 10^{19} GeV. Porém, a escassez de eventos que venham do centro da galáxia ainda não permite obter nenhuma conclusão. O detector Auger poderá fornecer essa resposta já que o hemisfério Sul, onde ele está sendo construído, vê o centro de nossa galáxia.

Existência de um corte no espectro em $m_X/2$

Considerando que as partículas X s estejam suficientemente próximas à Terra de modo a evitar os cortes previstos, caso sejam fótons ou nucleons, espera-se um corte no espectro a uma energia menor que a massa dessas partículas. Segundo o modelo de decaimento apresentado, o valor máximo para esse corte seria em $m_X/2$. Na verdade um pouco menor que essa energia devido à fragmentação da partícula X no decaimento.

3.2.1 Abundância das Partículas X s hoje

Diante do modelo proposto de que partículas supermassivas metaestáveis, X , tenham sido produzidas no universo primordial e seu decaimento produza os raios cósmicos de altíssimas energias, pretende-se determinar qual seria a abundância Ω_X dessas partículas hoje, para explicar o fluxo de raios cósmicos medido¹⁰.

No caso de uma partícula X decaindo em um quark (q) mais um lépton (l), fótons viriam do decaimento dos píons neutros segundo o processo:

$$X \longrightarrow \begin{cases} q \\ l \end{cases} \xrightarrow{jato} \begin{cases} 30\% \pi^+ \\ 30\% \pi^- \\ 30\% \pi^0 \longrightarrow \gamma's \\ 10\% n, p \end{cases}$$

Supõe-se que os raios cósmicos sejam fótons com energia E_γ , gerados por partículas X distribuídas uniformemente no meio interestelar, e que seu fluxo possa ser expresso por:

$$J_\gamma(E_\gamma) \approx \frac{1}{4\pi} l(E_\gamma) |\dot{n}_X| \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma}, \quad (3.3)$$

¹⁰Vamos seguir os cálculos da referência [21].

onde $\dot{n}_X \sim -n_X/\tau_X$ é a taxa de decaimento de X , n_X e τ_X são a densidade em número e a vida média de X , respectivamente e dN_γ/dE_γ é o espectro de injeção do fóton no decaimento da partícula X que pode ser estimado como sendo [32]:

$$\frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \simeq 0,3 \frac{1}{m_X} \left(\frac{2E_\gamma}{m_X} \right)^{-1,5}. \quad (3.4)$$

Na Figura 3.1 constata-se que o fluxo de raios cósmicos com energia, por exemplo, de 10^{20} eV é de $J \approx 10^{-27} (\text{m}^2 \text{ sr s GeV})^{-1}$. E verifica-se na Figura 3.4 que fótons com essa energia poderiam viajar uma distância máxima de $l(E_\gamma) \approx 10$ Mpc antes de nos alcançar. Portanto, com os dados:

$$\begin{aligned} E_\gamma &= 10^{20} \text{ eV} \\ J_\gamma(10^{20} \text{ eV}) &\approx 10^{-27} (\text{m}^2 \text{ sr s GeV})^{-1} \\ l(10^{20} \text{ eV}) &\approx 10 \text{ Mpc} \\ \left. \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma} \right|_{10^{20} \text{ eV}} &\simeq 0,3 \frac{1}{m_X} \left(\frac{2 \times 10^{20} \text{ eV}}{m_X} \right)^{-1,5}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

é possível estimar $|\dot{n}_X|$ substituindo os valores acima na expressão (3.3):

$$|\dot{n}_X| = \frac{n_X}{\tau_X} \simeq 1,2 \times 10^{-45} \left(\frac{10^{11} \text{ GeV}}{m_X} \right)^{1/2} (\text{cm}^3 \text{ sr s})^{-1}. \quad (3.6)$$

Note que o valor 10^{11} GeV foi escolhido como valor de referência para a massa da partícula X , por ser a massa mínima que a partícula X deve ter para ser capaz de explicar os eventos de raios cósmicos de altíssimas energias.

Com a expressão (3.6) estima-se a densidade número de partículas atual em função, não apenas de sua massa, mas também de sua vida média, τ_X :

$$n_X \simeq 3,8 \times 10^{-28} \left(\frac{\tau_X}{10^{10} \text{ anos}} \right) \left(\frac{10^{11} \text{ GeV}}{m_X} \right)^{1/2} (\text{cm}^3 \text{ sr})^{-1}. \quad (3.7)$$

Note que aqui foi escolhido como valor de referência para a vida média o intervalo de tempo mínimo que as partículas X s devam sobreviver para explicar os eventos de raios cósmicos de altíssimas energias, ou seja 10^{10} anos, que é a idade aproximada do universo (veja seção 1.2.6).

Como as partículas X s hoje são não relativísticas, a densidade de energia, ρ_X , associada à densidade em número delas, n_X , é dada simplesmente por $\rho_X = m_X n_X$. Assim, a abundância dessas partículas hoje seria dada por:

$$\Omega_{X_0} = \frac{\rho_{X_0}}{\rho_{c_0}} = \frac{m_X n_{X_0}}{\rho_{c_0}}. \quad (3.8)$$

Substituindo a expressão (3.7) e o valor da densidade crítica (1.38) em unidades convenientes¹¹, obtém-se uma relação entre a abundância, a vida média e a massa da partícula X :

$$\Omega_{X_0} h_0^2 \simeq 3,2 \times 10^{-13} \left(\frac{\tau_X}{10^{10} \text{anos}} \right) \left(\frac{m_X}{10^{11} \text{GeV}} \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

A expressão acima mostra o forte vínculo existente entre a vida média da partícula e sua abundância. É possível calcular alguns limites para essas grandezas.

- Assumindo, por exemplo, que toda a matéria estimada existir no universo fosse constituída única e exclusivamente de partículas X s teríamos:

$$\Omega_{X_0} h_0^2 \approx 1 \implies \tau_X \approx 3 \times 10^{22} \left(\frac{10^{11} \text{GeV}}{m_X} \right)^{1/2} \text{anos}. \quad (3.10)$$

- Outro limite pode ser obtido considerando a idade do universo como limite inferior para a vida média:

$$\tau_X \approx 10^{10} \text{anos} \implies \Omega_{X_0} h_0^2 \approx 3 \times 10^{-13} \left(\frac{m_X}{10^{11} \text{GeV}} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Esses limites podem mudar se a distribuição das partículas X s no meio interestelar não for uniforme. Se essas partículas corresponderem a uma fração da matéria escura fria (*mef*) poderia-se utilizar um dos modelos de distribuição dessa matéria e verificar quais as consequências sobre os limites acima calculados.

Se as partículas X s estiverem concentradas no halo galáctico, o fluxo de raios cósmicos provenientes de uma distância l igual ao raio do halo da galáxia, R^H , seria de:

$$J_\gamma^H(E_\gamma) \approx \frac{1}{4\pi} R^H |\dot{n}_X^H| \frac{dN_\gamma}{dE_\gamma}, \quad (3.12)$$

onde $|\dot{n}_X^H|$ corresponde a taxa de decaimento das partículas X s localizadas no halo. Neste caso, o fluxo que viria daí seria f vezes maior que fluxo de partículas provenientes de outras regiões da galáxia,

$$f = \frac{J_\gamma^H}{J_\gamma} = \frac{n_X^H R^H}{n_X l(E_\gamma)} = \frac{\rho_X^H R^H}{\rho_X l(E_\gamma)}. \quad (3.13)$$

Por outro lado, acredita-se que se as partículas X s fazem parte da matéria escura fria existente no universo, a razão entre suas densidades seria a mesma independente da região do espaço considerada [33], ou seja, $\epsilon \equiv \rho_X / \rho_{mef} = \rho_X^H / \rho_{mef}^H$.

¹¹ $\rho_{c_0} = 1.879 \times 10^{-26} h_0^2 \text{ kg m}^{-3} = 1,054 \times 10^{-5} h_0^2 \text{ GeV cm}^{-3}$.

Portanto, a expressão (3.13) pode ser reescrita em termos da densidade de energia da matéria escura fria:

$$f = \frac{\rho_{mef}^H R^H}{\rho_{mef} l(E_\gamma)}. \quad (3.14)$$

Considerando o valor da densidade da matéria escura na vizinhança do sistema solar, $\rho_{mef,\odot}^H \simeq 0,3 \text{ GeV cm}^{-3}$, como uma estimativa da densidade de energia média da matéria escura fria para o halo de nossa galáxia [34]; a abundância da matéria escura fria como sendo de $\Omega_{mef} h_0^2 \simeq 0,135$ [35]; e o raio do halo galático $R^H \approx 100 \text{ kpc}$ tem-se:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\rho_{mef,\odot}^H R^H}{\rho_{c0} \Omega_{mef} l(E_\gamma)} \\ &= 2,1 \times 10^3 \left(\frac{0,135}{\Omega_{mef} h_0^2} \right) \left(\frac{R^H}{100 \text{ Kpc}} \right) \left(\frac{10 \text{ Mpc}}{l(E_\gamma)} \right) \left(\frac{\rho_{mef}^H}{0,3 \text{ GeV cm}^{-3}} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Neste caso a relação (3.9) entre a abundância, a vida média e a massa da partícula X seria de:

$$\Omega_{X_0} h_0^2 \simeq \frac{3,2 \times 10^{-13}}{f} \left(\frac{\tau_X}{10^{10} \text{ anos}} \right) \left(\frac{m_X}{10^{11} \text{ GeV}} \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Os limites (3.10) e (3.11) ficam

- Abundância máxima

$$\Omega_{X_0} h_0^2 \approx 1 \implies \tau_X \approx 6.6 \times 10^{25} \left(\frac{10^{11} \text{ GeV}}{m_X} \right)^{1/2} \text{ anos}. \quad (3.17)$$

- Vida média mínima:

$$\tau_X \approx 10^{10} \text{ anos} \implies \Omega_{X_0} h_0^2 \approx 1,5 \times 10^{-16} \left(\frac{m_X}{10^{11} \text{ GeV}} \right)^{1/2}. \quad (3.18)$$

Existem outros modelos de aglomeração da matéria escura que poderia levar a outras distribuições das partículas X s [36]. Cada um deles deve fornecer uma previsão diferente das relações obtidas acima. Porém, não é objetivo deste trabalho explorar essas diferenças. Na verdade, como será visto na principal aplicação de raios cósmicos deste trabalho (seção 4.1), diferentes modelos não levariam a diferenças significativas do resultado que foi obtido.

3.2.2 Evolução da Abundância das Partículas X s de sua Produção até Hoje

Partículas X s, se existirem, poderiam ter sido produzidas na fase de reaquecimento do universo que teria ocorrido logo após a inflação, como estudado no

Capítulo 2. Existem diferentes mecanismos de produção através dos quais essas partículas poderiam ter sido geradas e eles fornecem, em geral, densidades número de partículas, n_X , ou densidades de energia, ρ_X diferentes. Nesta seção calcula-se como teria sido a diluição dessas partículas desde a sua produção no fim do reaquecimento até hoje independente do mecanismo que as tenha produzido.

Pretende-se obter uma expressão que vincule a densidade em número de partículas X s produzida na época do reaquecimento e a abundância dessas partículas hoje. Para isso considera-se três momentos na história do universo: o momento da produção das partículas (t_p), o fim do período de reaquecimento (t_{rq}) e hoje (t_0). Considere a relação entre os parâmetros densidade de energia das partículas X s, ρ_X ; densidade de energia da radiação, ρ_R e a temperatura da radiação T , hoje:

$$\frac{\rho_{X_0} T_0}{\rho_{R_0}} \quad (3.19)$$

A densidade de energia da radiação está associada com a temperatura segundo (veja Apêndice B):

$$\rho_{R_0} = \frac{\pi^2}{30} g_{*0} T_0^4 \quad (3.20)$$

e pode ser substituída em (3.19), lembrando que $g_{*0} = g_{*s_0}$ (veja Figura B.1):

$$\frac{\rho_{X_0} T_0}{\rho_{R_0}} = \frac{\rho_{X_0}}{\frac{\pi^2}{30} g_{*s_0} T_0^3} \quad (3.21)$$

Sabe-se também que $a_0^3 g_{*s_0} T_0^3 = a^3 g_{*s} T^3$ (veja Apêndice B). Considerando o instante t_{rq} , a expressão (3.21) pode ser reescrita como:

$$\frac{\rho_{X_0} T_0}{\rho_{R_0}} = \frac{\rho_{X_0} a_0^3}{\frac{\pi^2}{30} g_{*s_{rq}} T_{rq}^3 a_{rq}^3} \quad (3.22)$$

Por outro lado, a densidade de energia da matéria não relativística dilui com o aumento do volume do universo segundo relação (1.50), então $\rho_{X_0} a_0^3 = \rho_{X_{rq}} a_{rq}^3$ que substituído em (3.22) resulta:

$$\frac{\rho_X(t_0) T_0}{\rho_R(t_0)} = \frac{\rho_X(t_{rq}) T_{rq}}{\rho_R(t_{rq})}, \quad (3.23)$$

A igualdade acima mostra uma relação entre a densidades das partículas X s e da radiação em diferentes instantes: t_{rq} e t_0 . Porém, as partículas X s são criadas em t_p . Trabalha-se sob a hipótese de que apenas uma parcela muito pequena da energia do campo ϕ é transferida para as partículas X s. O grande montante teria sido transferido instantaneamente para as partículas relativísticas¹². Assim,

$$\frac{\rho_{X_{rq}}}{\rho_{R_{rq}}} \simeq \frac{\rho_{X_{rq}}}{\rho_{\phi_{rq}}} = \frac{\rho_{X_p}}{\rho_{\phi_p}} \quad (3.24)$$

¹²Será visto no próximo capítulo que essa hipótese parece ser bastante razoável.

onde na última igualdade utiliza-se o fato do campo ϕ diluir como a matéria não relativística.

A densidade de energia do campo ϕ no instante t_p pode ser escrita em termos da equação de Friedmann (1.29), $\rho_{\phi_p} = H_p^2(3M_{Pl}^2/8\pi)$, ou seja,

$$\frac{\rho_{X_{rq}}}{\rho_{R_{rq}}} \simeq \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \frac{\rho_{X_p}}{H_p^2}. \quad (3.25)$$

Finalmente, substituindo (3.25) em (3.23), multiplicando por h^2 e dividindo pela densidade crítica hoje obtém-se:

$$\Omega_X(T_0)h^2 = \Omega_R(T_0)h^2 \left(\frac{T_{rq}}{T_0} \right) \frac{8\pi}{3} \frac{m_X n_{X_p}}{M_{Pl}^2 H_p^2}, \quad (3.26)$$

onde $\rho_{X_p} = m_X n_{X_p}$. Assim, conhecendo-se a densidade de energia de partículas X s produzidas na fase de reaquecimento do universo, ρ_{X_p} , seria possível saber qual a abundância dessas partículas hoje.

No Capítulo 4 serão estudados dois mecanismos de produção de partículas supermassivas para explicar raios cósmicos de altíssimas energias e a expressão acima auxiliará na obtenção de limites para cada um dos mecanismos.

Capítulo 4

Aplicações de Produção de Partículas no Universo Primordial

Apresenta-se a seguir três aplicações de produção de partículas no universo primordial.

✓ A primeira pretende avaliar quantitativamente uma sugestão dos autores do mecanismo FKL de que este poderia ser um bom mecanismo de produção de partículas supermassivas para explicar os raios cósmicos de altíssimas energias.

✓ A segunda é um estudo numérico exploratório de produção de partículas através do mecanismo FKL para reaquecer o universo utilizando um potencial inflacionário quintessencial.

✓ A terceira consiste em avaliar a produção perturbativa de partículas supermassivas, em particular a produção direta, também para explicar raios cósmicos de altíssimas energias.

A tabela abaixo mostra o que cada aplicação aborda em termos do mecanismo de produção e do problema estudado.

Aplicação	Produção		Problema	
	Não Perturb. FKL	Perturbativa Direta	Raios Cósmicos Matéria Escura	Quintessência Energia Escura
Aplicação 1	•		•	
Aplicação 2	•			•
Aplicação 3		•	•	

Tabela 4.1: Qual mecanismo de produção de partículas é utilizado e em qual problema, para cada uma das aplicações que serão apresentadas nesta seção.

4.1 O Mecanismo FKL e os Raios Cósmicos de Altíssimas Energias [1]

Como foi visto no Capítulo 2, G. Felder, L. Kofman e A. D. Linde [2] sugeriram um mecanismo alternativo ao pré-aquecimento e que, quando aplicado a potenciais inflacionários caóticos, poderia resultar em um reaquecimento mais eficiente. Esse mecanismo foi chamado de pré-aquecimento instantâneo (*instant preheating*) mas neste trabalho será chamado de mecanismo FKL. No artigo, os autores sugeriram utilizar esse mecanismo para produzir partículas de matéria escura cujo decaimento resultaria nos raios cósmicos de altíssimas energias, mas não calcularam os detalhes dessa produção. Detalha-se essa aplicação do mecanismo FKL para o caso em que essas partículas teriam sido produzidas não relativisticamente. Esse estudo resultou em um artigo que foi publicado na revista *Physical Review D*.

Na seção 2.2.2 do Capítulo 2 foi apresentado o desenvolvimento básico do mecanismo FKL¹. Considere algumas das expressões lá estudadas:

- O potencial utilizado neste problema será o caótico mais simples

$$V(\phi) = \frac{m_\phi^2 \phi^2}{2}. \quad (4.1)$$

- Depois do fim da inflação o inflaton teria oscilado em torno do fundo de seu potencial caótico segundo a dinâmica:

$$\phi(t) \approx \frac{M_{Pl}}{3} \frac{\sin(m_\phi t)}{m_\phi t}, \quad (4.2)$$

ou em termos da variável número de oscilações $N = m_\phi t / 2\pi$:

$$\phi(N) \approx \frac{M_{Pl}}{3} \frac{\sin(2\pi N)}{2\pi N}. \quad (4.3)$$

- Como o inflaton está acoplado quadraticamente a bósons χ , estes poderiam ter sido produzidos não perturbativamente com uma massa efetiva:

$$m_\chi^{\text{ef}}(t) = \sqrt{m_\chi^2 + g^2 \phi^2(t)}. \quad (4.4)$$

- As partículas χ , por sua vez, estariam acopladas a férmions ψ supermassivos. A razão de decaimento de χ em ψ seria dada por:

$$\Gamma(\chi \rightarrow \bar{\psi}\psi) = \frac{g'^2 m_\chi^{\text{ef}}}{16\pi} \left[1 - \left(\frac{2m_\psi}{m_\chi^{\text{ef}}} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}, \quad (4.5)$$

¹Sugere-se a (re)leitura dessa seção caso você não esteja familiarizado com o mecanismo.

ou seja, o decaimento teria sido favorecido para grandes valores de m_χ^{ef} e portanto grandes valores de $\phi(t)$.

• A densidade em número de partículas χ que teria sido produzida na primeira passagem do campo ϕ no mínimo de seu potencial seria dada por:

$$n_\chi = \frac{(g|\dot{\phi}_0|)^{3/2}}{8\pi^3} \exp\left(-\frac{\pi m_\chi^2}{g|\dot{\phi}_0|}\right). \quad (4.6)$$

• A densidade de energia de ψ pode ser obtida a partir da densidade de energia de χ :

$$\rho_\psi \approx \rho_\chi \Rightarrow m_\psi n_\psi \approx \left(\frac{m_\chi^{\text{ef}}}{2}\right) (2n_\chi), \quad (4.7)$$

pois o interesse será na produção de partículas ψ supermassivas não relativísticas.

Depois de relembrar as expressões básicas do mecanismo segue-se ao desenvolvimento do trabalho. Para uma abordagem mais didática optou-se por desenvolver alguns cálculos do trabalho separadamente para que o resultado principal não se perdesse.

4.1.1 A Taxa de Decaimento Dependente do Tempo

A primeira questão a ser abordada está relacionada com a taxa de decaimento de $\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$, Γ .

Segundo a expressão (4.5), a probabilidade que um bóson decaia em férmions é tanto maior quanto maior for sua massa e quanto maior for o canal de acoplamento entre esse bóson e os férmions que se traduz na constante de acoplamento entre eles. A engenhosidade do mecanismo proposto por G. Felder *et al.* está nesta grandeza, pois sendo a massa do bóson dependente da evolução temporal do campo $\phi(t)$ e diretamente proporcional a ela (veja equação (4.4)), espera-se que a probabilidade do bóson decair seja máxima quanto maior for o valor $\phi(t)$. Sabe-se que no potencial caótico estudado isso ocorre quando o campo ϕ está no valor máximo de sua amplitude, ou seja, com uma grande quantidade de energia acumulada na forma de energia potencial do inflaton. Conclui-se então, que o decaimento de χ em $\psi\bar{\psi}$ poderia garantir a transferência máxima de energia do inflaton para os campos de matéria.

No artigo de G. Felder *et al.* eles trabalharam com uma expressão para a taxa de decaimento de $\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$ dada por:

$$\Gamma(\chi \rightarrow \bar{\psi}\psi) = \frac{g'^2 m_\chi^{\text{ef}}}{8\pi} \quad (4.8)$$

e consideraram uma estimativa para a vida média, τ , das partículas χ assumindo que $\tau \approx \Delta t \sim \pi/(4m_\phi)$, onde Δt representaria um intervalo em torno da amplitude máxima de ϕ no potencial. Em termos da variável número de oscilações, ($N = m_\phi t/2\pi$), o intervalo proposto corresponderia a $\Delta N \approx 0,125$ em torno do primeiro ponto de máximo que ocorre em aproximadamente $N \approx 0,72$ quando $\phi \approx 0,07M_{Pl}$ (veja Figura 2.1). Assim, a equação (4.8) próxima a região do decaimento pode ser escrita como:

$$\Gamma(\chi \rightarrow \bar{\psi}\psi) = \frac{g'^2 g |\phi|}{8\pi} \quad (4.9)$$

Como o primeiro máximo é em $|\phi| \approx 0,07M_{Pl}$ e $\Gamma = 1/\tau$, obtém-se a condição entre g' e g calculada em [2] e dada por:

$$g'^2 g \sim 5 \times 10^{-4}. \quad (4.10)$$

Essa é a estimativa feita pelos autores do mecanismo FKL.

Note que o fato da massa depender do tempo faz com que a taxa de decaimento dependa do tempo também: $\Gamma = \Gamma(t)$, segundo expressão (4.5). Assim, a lei de decaimento não seria mais exponencial. Neste caso:

$$n_{\chi_f} = n_{\chi_i} \exp \left[- \int_{t_i}^{t_f} \Gamma(t) dt \right]. \quad (4.11)$$

onde n_{χ_i} e n_{χ_f} são as densidades número de partículas χ inicial e final numa amostra, respectivamente e t_i e t_f são os instantes inicial e final que as densidades foram consideradas, respectivamente. Porém, quando G. Felder *et al.* fizeram a estimativa acima (escolha de um intervalo Δt) eles assumiram que Γ era constante. Um dos pontos desta aplicação foi verificar a validade dessa estimativa.

Considere uma expressão mais completa para a taxa de decaimento Γ dada pela equação (4.5), que contém um termo multiplicativo elevado a potência $3/2$ e que introduz a dependência do espaço de fase no decaimento. Basicamente ele mostra que quanto mais a massa de ψ se aproxima da massa efetiva de χ mais improvável será o decaimento, além de evidenciar que o espaço de fase é dinâmico pois a massa de χ é variável.

Para obter uma condição entre g' e g , mantendo a dependência temporal de Γ , considere a expressão (4.11) escrita na forma:

$$\ln \left(\frac{n_f}{n_i} \right) = - \int_{t_i}^{t_f} \Gamma(t) dt. \quad (4.12)$$

Essa equação pode ser reescrita em termos da variável N :

$$\ln \left(\frac{n_f}{n_i} \right) = - \int_{N_i}^{N_f} \Gamma(N) \frac{2\pi}{m_\phi} dN. \quad (4.13)$$

Substituindo a equação (4.5) acima e calculando essa integral é possível, em princípio, obter a relação desejada. Para isso é necessário definir quais valores $n_{\chi i}$, $n_{\chi f}$, N_i e N_f assumem.

No trabalho estudou-se o caso mais simples de produção onde as partículas ψ teriam sido produzidas não relativisticamente, ou seja quando o momento delas pudesse ser desprezado com relação a sua massa. Como metade da energia da partícula χ “gorda” corresponde a energia de uma das partículas ψ ,

$$E_\psi^2 = m_\psi^2 + p_\psi^2 \rightarrow \left(\frac{m_\chi^{\text{ef}}}{2} \right)^2 = m_\psi^2 + p_\psi^2. \quad (4.14)$$

Para que a partícula ψ seja considerada não relativística, segundo a relação acima ela deve ter:

$$m_\psi^2 \gtrsim p_\psi^2 = \left(\frac{m_\chi^{\text{ef}}}{2} \right)^2 - m_\psi^2, \quad (4.15)$$

ou seja,

$$2m_\psi \gtrsim 0,71 m_\chi^{\text{ef}}. \quad (4.16)$$

Então:

$$\left(\frac{2m_\psi}{m_\chi^{\text{ef}}} \right)^2 \gtrsim \left(\frac{0,71 m_\chi^{\text{ef}}}{m_\chi^{\text{ef}}} \right)^2 \quad (4.17)$$

e portanto,

$$\left[1 - \left(\frac{2m_\psi}{m_\chi^{\text{ef}}} \right)^2 \right]^{3/2} \lesssim [1 - (0,71)^2]^{3/2} = 0,35. \quad (4.18)$$

Estabelece-se assim um limite superior para um dos termos da expressão (4.5). Por outro lado, a equação (4.5) mostra que a probabilidade de decaimento seria máxima quando $m_\chi^{\text{ef}} \approx g\Phi$. Então, tomando como base o limite (4.18), considera-se que durante a engorda, a partir do momento que a partícula χ tivesse uma massa de $2m_\psi = 0,71g\Phi$ o decaimento já poderia ocorrer. A partícula ψ seria não relativística se criada em qualquer ponto do potencial depois deste instante. Isso porque foi imposto que no ponto de máxima engorda a partícula ψ seria ainda não relativística.

Basta então descobrir o $N = N^*$ para o qual χ já poderia decair, isto é, quando $2m_\psi = 0,71g\Phi$, ou seja quando:

$$\phi(N^*) = 0,71\Phi \quad (4.19)$$

Substituindo (4.3) e $\Phi \approx 0,07M_{Pl}$ para a primeira oscilação,

$$\frac{M_{Pl} \sin(2\pi N^*)}{3 \cdot 2\pi N^*} = 0,71(0,07M_{Pl})$$

$$\frac{1}{3} \frac{\sin(2\pi N^*)}{2\pi N^*} = 0,052. \quad (4.20)$$

$$(4.21)$$

A solução gráfica desta equação pode ser obtida graficando a solução (4.3) e a reta 0,052. Veja Figura 4.1.

Figura 4.1: Solução gráfica: $\phi(N^*) = 0,052$. Do gráfico verifica-se que $N^* \approx 0,6$ e que outra solução corresponde a $N \approx 0,85$.

Do gráfico obtém-se $N^* \approx 0,6$. Outra solução corresponde ao $N = 0,85$. Conclui-se assim que o intervalo em que partículas χ s produziram partículas ψ s não relativísticas seria entre $N_i = 0,60$ e $N_f = 0,85$. Supõe-se que 90% das partículas χ tenham decaído neste intervalo, ou seja que $n_f/n_i \approx 10/100$.

Com isso já é possível calcular a equação (4.13):

$$\ln\left(\frac{10}{100}\right) \lesssim -0,35 \times \frac{g'^2 g}{16\pi} \int_{0,60}^{0,85} \frac{2\pi}{m_\phi} \phi(N) dN, \quad (4.22)$$

A integral acima pode ser calculada expandindo o termo $\sin(2\pi N)$ de $\phi(N)$ (equação (4.3)) numa série polinomial que reproduza esta função no intervalo entre $N = 0$ e $N = 1$, ou seja, até o momento que corresponderia à volta do inflaton para o fundo do poço. Essa condição leva a uma série de 14 termos e está representada na Figura 4.2.

Sabendo o valor da integral é possível isolar o lado direito da equação (4.22) e obter a relação entre g' e g :

$$g'^2 g \gtrsim 3 \times 10^{-3}. \quad (4.23)$$

O valor mínimo da relação acima é uma ordem de grandeza maior que o resultado de G. Felder *et al.*, mostrado na expressão (4.10), pois eles não consideraram

Figura 4.2: $\phi(N) \times N$. A curva contínua representa a função dada pela equação (4.3). A curva pontilhada corresponde a 14 termos de expansão em série desta função. Verifica-se que a série representa bem a função até $N \approx 1$.

o fator de espaço de fase na expressão para a taxa de decaimento. Note que a única arbitrariedade do resultado obtido é a quantidade de partículas χ que decaem (90%), mas para outras escolhas de n_f/n_i (entre 1/2 and 1/100) os limites sobre g' e g não variariam muito. O resultado encontrado é basicamente uma consequência da hipótese de $p_\psi \lesssim m_\psi$, ou seja, de ψ ser não-relativístico. Portanto, os limites de $g'^2 g$ serão ainda mais restritos se forem considerados valores maiores de momento.

Foi verificado também que a dependência temporal de $\Gamma = \Gamma(t)$ não introduz uma diferença grande nos resultados quando comparado com a utilização de Γ constante. Na verdade, isso parece razoável para o intervalo ΔN considerado. Nessa região $\phi(N)$ não varia significativamente (veja Figura 4.1). Esse cuidado deve ser tomado se a produção de partículas relativísticas estivesse sendo considerada.

Conclui-se então que, quando a variação da taxa de decaimento com o tempo é considerada, o valor de $g'^2 g$ não varia consideravelmente quando comparado ao valor obtido em [2]. Note que nosso resultado é um limite inferior para essa relação enquanto que em [2] é obtida uma igualdade. Se a condição de unitariedade for imposta para cada acoplamento, $g' \lesssim 1$ ou $g \lesssim 1$, obtém-se os valores mínimos para cada um deles.

4.1.2 A Densidade Total de Partículas Produzidas

Partículas ψ s são produzidas na primeira oscilação do campo ϕ . O que dizer das partículas ψ produzidas nas subsequentes oscilações de ϕ ? Será que não seria necessário computar o número total delas enquanto existir energia disponível e o

processo se mantiver?

Um resultado muito interessante que foi obtido é que a imposição de limites na abundância atual das partículas supermassivas, através dos fluxos de raios cósmicos observado, garantiria a supressão das produções subsequentes de partículas ψ s.

Considere a densidade em número de partículas χ produzidas no fundo do poço dada por (4.6). Como as partículas produzidas teriam decaído em férmions ($\chi \rightarrow \psi\bar{\psi}$) na máxima amplitude do campo ϕ , este ao retornar ao fundo do potencial produziria novas partículas χ , como da primeira vez, caso houvesse energia disponível. A densidade em número das novas partículas χ aí produzidas poderia ser calculada pela mesma expressão (4.6), porém com uma velocidade $\dot{\phi}_0$ menor que a da passagem anterior, já que a densidade de energia do inflaton diminuiria não apenas pela produção de partículas χ s, mas também pela expansão do universo.

A fim de quantificar a razão entre a densidade em número de partículas produzidas em duas passagens consecutivas do campo ϕ pelo mínimo de seu potencial, denota-se N_j ($N_j = m_\phi t_j / 2\pi$) o instante da j -ésima passagem do campo ϕ no fundo do poço. Essa velocidade pode ser obtida a partir da derivada de $\phi(N)$ (equação (4.3)) com relação a N :

$$\phi'(N) = \frac{M_{Pl}}{3} \frac{2\pi \cos(2\pi N)}{2\pi N} - \frac{M_{Pl}}{3} \frac{\sin(2\pi N)}{2\pi N^2}. \quad (4.24)$$

A velocidade em N_j será dada por:

$$\phi'_j = \frac{M_{Pl}}{3} \frac{\cos(2\pi N_j)}{N_j}, \quad (4.25)$$

ou seja:

$$\begin{aligned} 1^a \text{ passagem :} \\ N_1 = 1/2 & \rightarrow |\phi'_1| = \frac{2}{3} M_{Pl} \\ 2^a \text{ passagem :} \\ N_2 = 2/2 & \rightarrow |\phi'_2| = \frac{1}{3} M_{Pl} \\ 3^a \text{ passagem :} \\ N_3 = 3/2 & \rightarrow |\phi'_3| = \frac{2}{9} M_{Pl} \\ \dots \\ j^{\text{ésima}} \text{ passagem :} \\ N_j = j/2 & \rightarrow |\phi'_j| = \left| \frac{M_{Pl}}{3} \frac{\cos(j\pi)}{j/2} \right| = \frac{M_{Pl}}{3} \times \frac{2}{j} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da expressão acima é possível obter a razão entre duas produções consecutivas de partículas χ em duas passagens consecutivas do campo ϕ no fundo do poço. Assim será possível estimar a supressão de cada passagem j . Escrevendo

a expressão (4.6) para a densidade em número total de partículas χ produzidas em cada passagem em termos das novas definições:

$$\begin{aligned} n_{\chi}^{(j)}(t_j) &= \frac{g^{3/2}}{8\pi^3} \left(\frac{|\phi'_j| m_{\phi}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{\pi m_{\chi}^2}{g |\phi'_j| m_{\phi} / 2\pi} \right) \\ &\approx \frac{g^{3/2}}{8\pi^3} \left(\frac{M_{Pl} 2 m_{\phi}}{3 j 2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\pi \frac{3}{M_{Pl} m_{\phi} 2} \frac{j m_{\chi}^2}{g} \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Como $a(t) \propto t^{2/3}$ ao longo da fase de oscilações coerentes do campo ϕ , deve-se comparar a densidade em número de partículas produzidas em t_j até t_{j+1} considerando a diluição de n_j na $(j+1)$ ésima passagem:

$$\begin{aligned} n_{\chi}^{(j)}(t_j) a^3(t_j) &= n_{\chi}^{(j)}(t_{j+1}) a^3(t_{j+1}) \\ \Rightarrow n_{\chi}^{(j)}(t_{j+1}) &= n_{\chi}^{(j)}(t_j) \left(\frac{t_j}{t_{j+1}} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Entretanto, como $N_j = m_{\phi} t_j / 2\pi$, $t_j / t_{j+1} = j / j + 1$, então a razão a ser considerada fica:

$$\frac{n_{\chi}^{(j+1)}(t_{j+1})}{n_{\chi}^{(j)}(t_{j+1})} = \frac{n_{\chi}^{(j+1)}(t_{j+1})}{n_{\chi}^{(j)}(t_j)} \left(\frac{j+1}{j} \right)^2. \quad (4.29)$$

Usando a expressão (4.27) na relação acima, finalmente obtém-se:

$$\frac{n_{\chi}^{(j+1)}(t_{j+1})}{n_{\chi}^{(j)}(t_{j+1})} \approx \left(\frac{j+1}{j} \right)^{1/2} \exp \left(-\frac{3\pi^2 \times 10^6}{g} \frac{m_{\chi}^2}{M_{Pl}^2} \right). \quad (4.30)$$

Como cada partícula χ decairia em duas ψ s, a razão acima é também válida para partículas ψ . Portanto, conclui-se que a supressão exponencial garantiria que apenas a produção de partículas relativa à primeira passagem deva ser considerada. Como será visto essa supressão deve ser considerada quando os limites da abundância das partículas supermassivas hoje são impostos.

Foi mostrado analiticamente que apenas a primeira produção de partículas é relevante no cálculo da densidade em número de partículas ψ total, já que as subsequentes produções são suprimidas. Esse resultado será testado na seção 4.1.4.

4.1.3 Abundância das Partículas ψ s e os Raios Cósmicos de Altíssimas Energias

Na seção 3.2.2 foi estudado que dada uma densidade de partículas supermassivas produzida na fase de reaquecimento do universo, sua abundância atual

poderia ser aproximada pela expressão (3.26):

$$\Omega_\psi(T_0)h^2 = \Omega_R(T_0)h^2 \left(\frac{T_{rq}}{T_0} \right) \frac{8\pi}{3} \frac{m_\psi n_\psi}{M_{Pl}^2 H_p^2}, \quad (4.31)$$

onde T_0 é a temperatura da radiação cósmica de fundo atual, $\Omega_R(T_0)h^2$ é a abundância da radiação hoje², H_p é o valor do parâmetro de Hubble na época da produção das partículas ψ s e T_{rq} é a temperatura de reaquecimento. Impondo os valores:

$$\begin{aligned} T_0 &\approx 2,73\text{K}; && \text{medida da radiação cósmica de fundo} \\ T_{rq} &\approx 10^9\text{GeV}; && \text{valor escolhido} \\ \Omega_R(T_0)h^2 &\approx 4,15 \times 10^{-5} && \text{valor calculado (veja nota de rodapé)} \\ H_p^2 &\approx \left(\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \right) \rho_{\phi_p} \approx \left(\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2} \right) \left(\frac{m_\phi^2 \Phi^2}{2} \right) \approx \left(\frac{4\pi}{3} \right) \times 10^{-14} M_{Pl}^2 \\ m_\psi n_\psi &\approx \left(\frac{m_\chi^{\text{ef}}}{2} \right) (2n_\chi) = \sqrt{m_\chi^2 + g^2 \Phi^2} n_\chi, \end{aligned} \quad (4.32)$$

a equação (4.31) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \Omega_\psi(T_0)h^2 &\approx 4,72 \times 10^{18} \left(\frac{T_{rq}}{10^9\text{GeV}} \right) \left(\frac{2,7\text{K}}{T_0} \right) g^{3/2} \sqrt{\frac{m_\chi^2}{M_{Pl}^2} + 10^{-2}g^2} \times \\ &\exp \left(-\frac{\pi^2 \times 10^7}{g} \frac{m_\chi^2}{M_{Pl}^2} \right). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Foi visto na seção 2.2.1 que é possível obter uma relação entre a abundância das partículas ψ s (Ω_ψ), sua massa (m_ψ) e sua vida média (τ_ψ) quando considera-se que os raios cósmicos de altíssimas energias sejam fótons extremamente energéticos originados do decaimento dessas partículas supermassivas. Essa relação pode ser escrita como:

$$\tau_\psi = 3,16 \times 10^{18} f (\Omega_\psi h^2) \left(\frac{M_{Pl}}{m_\psi} \right)^{1/2}, \quad (4.34)$$

onde f mede o acúmulo de partículas ψ dentro do halo galático. Considera-se que as partículas estejam concentradas no halo, então $f \approx 10^3$ (veja expressão (3.15)). Alguns limites da equação acima podem ser obtidos:

- se as partículas ψ constituírem a matéria escura ($\Omega_\psi \sim 0,3$, $h \sim 0,7$ [4])

$$\Omega_\psi(T_0)h^2 \sim 0,14. \quad (4.35)$$

²Como $\Omega_R(T_0)h^2 = \rho_{R0}/\rho_{c0}$, $\rho_{R0} = (\pi^2/30)g_{*0}T_0^4$ (veja Apêndice B) e $\rho_{c0} = 1,879 \times 10^{-29} h_0^2 \text{ g cm}^{-3}$ segundo expressão (1.38), calcula-se a abundância utilizando os valores de T_0 dado acima, $g_{*0} = 3,36$ da Figura B.1 (o cálculo deste parâmetro se encontra na referência [3]) e transformando as unidades corretamente com a ajuda do Apêndice A.

- se sua vida média for da ordem da idade do universo

$$\tau_\psi \approx 10^{10} \text{anos} \rightarrow \Omega_\psi(T_0)h^2 \approx 3,16 \times 10^{-12} \left(\frac{g\Phi}{M_{Pl}} \right)^{1/2}. \quad (4.36)$$

Portanto a abundância de ψ obedece os limites

$$3,16 \times 10^{-12} \left(\frac{g\Phi}{M_{Pl}} \right)^{1/2} \lesssim \Omega_\psi h^2 \lesssim 0,14, \quad (4.37)$$

e impõe limites sobre a massa nua de χ de acordo com (4.33):

$$\begin{aligned} 10^6 g \ln \left(4,72 \times 10^{19} g^{3/2} \left(\frac{m_\chi^2}{M_{Pl}^2} + 10^{-2} g^2 \right)^{1/2} \right) \\ \leq \frac{m_\chi^2}{M_{Pl}^2} \leq \\ 10^6 g \ln \left(1,49 \times 10^{30} g^{3/2} \left(\frac{m_\chi^2}{M_{Pl}^2} + 10^{-2} g^2 \right)^{1/4} \right) \end{aligned} \quad (4.38)$$

A partir desses limites calcula-se o espaço de parâmetros desse modelo e será apresentado na próxima seção.

4.1.4 O Espaço de Parâmetros do Modelo

Com as condições dadas pela equação (4.38) é possível construir um espaço de parâmetros deste modelo e analisar a viabilidade fenomenológica do mecanismo FKL como gerador de partículas supermassivas ψ s. Isso é possível pois a densidade em número de partículas χ dada pela equação (4.6) depende de g e de m_χ e está relacionado com a abundância Ω_ψ . Assim, limites sobre os valores de Ω_ψ hoje impõe limites sobre esses parâmetros. A Figura 4.3 mostra a relação (4.38).

Por outro lado, g e g' guardam uma relação entre si dada pela equação (4.23). Essa relação também é representada graficamente na Figura 4.4.

Figura 4.3: A região entre as duas curvas representa os valores que os parâmetros m_χ (dada em unidades de massa de Planck, $m_{\chi_{Pl}}$) e g podem assumir para satisfazer as condições impostas para a abundância de partículas ψ hoje (Veja expressão (4.38)). A curva pontilhada corresponde a $\Omega_\psi h^2 = 0,14$ e a curva sólida a $\Omega_\psi h^2 = 3,16 \times 10^{-12} (g\Phi/M_{Pl})^{1/2}$.

Figura 4.4: A reta representa a relação entre as constantes de acoplamento g e g' , $g'^2 g = 3 \times 10^{-3}$.

A unitariedade impõem limites sobre os acoplamentos:

- $g = 1 \implies g' \gtrsim 5,5 \times 10^{-2}$
- $g' = 1 \implies g \gtrsim 3 \times 10^{-3}$,

Consequentemente a área da Figura 4.3 poderá ser limitada por esses valores. Veja Figura 4.5.

A Figura 4.5 é o principal resultado deste estudo. Segundo esse espaço de parâmetros, a região permitida ao modelo é bastante restrita e portanto, deve existir um ajuste muito fino entre acoplamentos e massa nua de χ para torná-lo

Figura 4.5: A região cinza corresponde aos parâmetros (m_χ, g, g') permitidos para o modelo. Trata-se das Figuras 4.3 e 4.4 combinadas. Os limites da esquerda e da direita vêm das condições de unitariedade sobre os acoplamentos g e g' .

viável.

Segundo este modelo as massas encontradas para ψ s serão grandes. Por exemplo,

- uma partícula χ produzida no fundo do poço com massa $m_{\chi_{Pl}} \approx 10^{-4}$ correspondendo a $m_\chi \approx 10^{15}$ GeV e $g_{\min} \approx 3 \times 10^{-3}$, produziria partículas ψ s com massa:

$$m_\psi \approx \frac{g\Phi}{2} \approx \frac{(3 \times 10^{-3})(0,07M_{Pl})}{2} \approx 1,05 \times 10^{15} \text{ GeV} \quad (4.39)$$

ou seja, a partícula χ praticamente não engorda.

- uma partícula χ produzida no fundo do poço com massa $m_{\chi_{Pl}} \approx 10^{-3}$ correspondendo a $m_\chi \approx 10^{16}$ GeV e $g_{\max} \approx 1$, produziria partículas ψ com massa:

$$m_\psi \approx \frac{g\Phi}{2} \approx \frac{(1)(0,07M_{Pl})}{2} \approx 3,5 \times 10^{17} \text{ GeV} \quad (4.40)$$

ou seja, a partícula χ engorda 35 vezes a sua massa nua antes de decair.

Portanto, através do mecanismo FKL são produzidas partículas supermassivas com massas:

$$1,05 \times 10^{15} \text{ GeV} \leq m_\psi \leq 3,5 \times 10^{17} \text{ GeV}. \quad (4.41)$$

Para obter esse resultado foram impostas duas restrições sobre a abundância das partículas ψ . O limite superior (que corresponde à reta inferior no gráfico) trata-se de uma restrição cosmológica forte, do ponto de vista observacional; mas o inferior (que corresponde à reta superior no gráfico) é fraco, pois depende muito de modelos.

O interessante desse resultado é que, mesmo se um modelo muito diferente fosse considerado, seja para o decaimento das partículas ψ , ou para a distribuição dessas partículas no halo galático, de forma que o limite inferior para a abundância se alterasse consideravelmente, o resultado final mudaria muito pouco. Consideremos um valor ilustrativo exagerado $\Omega_\psi h^2 \sim 10^{-20}$. A Figura 4.6 mostra qual seria o novo espaço de parâmetros.

Figura 4.6: O espaço de parâmetros permitido (m_χ, g, g') para a produção de partículas supermassivas não é substancialmente alterado mesmo impondo um limite inferior exagerado para a abundância de ψ ($\Omega_\psi h^2 = 10^{-20}$, linha sólida). Todas as outras curvas possuem o mesmo significado que na Figura 4.5.

Percebe-se que o alargamento da região permitida é muito pequeno. Na verdade qualquer variação nos parâmetros da expressão (4.33) que estiverem fora da exponencial contribuirão muito pouco para a alteração desse espaço de parâmetros. É por essa razão que variações da temperatura de reaquecimento também não alterarão o resultado de forma considerável. Para uma variação de 20 ordens de magnitude na temperatura de reaquecimento haveria uma variação de apenas 1 ordem de magnitude na faixa de valores permitidos para m_χ . Isso significa que os detalhes da física de partículas tanto para os processos de reaquecimento quanto para o de decaimento das partículas ψ são pouco relevantes neste modelo.

Apenas para fazer uma comparação foi graficado qual seria o espaço de parâmetros se fosse considerada a relação entre as constantes de acoplamento obtidas pelos autores de [2] dada pela equação (4.10) para limitar a Figura 4.3. Esse resultado está mostrado na Figura 4.7.

Antes de concluir esse trabalho verifica-se o resultado obtido na seção 4.1.2 de que apenas a primeira passagem é importante para o cálculo da densidade total de partículas ψ s. Calcula-se qual seria a razão entre as duas primeiras produções consecutivas de partículas χ s (que é a mesma para as ψ s) para alguns valores do espaço de parâmetros:

Figura 4.7: A figura é uma reprodução da Figura 4.5. A região cinza escuro corresponde aos valores permitidos ao modelo calculados integralmente em nosso trabalho. Adicionamos uma região cinza claro, um pouco maior, que corresponde a limites nas constantes de acoplamento obtidos pelos autores de [2] e dada pela relação $g'^2 g \sim 5 \times 10^{-4}$.

- $g = 10^{-2,2} = 6,3 \times 10^{-3} \Rightarrow m_\chi/M_{Pl} = 10^{-4}$

$$\frac{n_\chi^{(2)}}{n_\chi^{(1)}} = \sqrt{2} \exp \left(-6 \times 10^7 \frac{(10^{-4})^2}{6,3 \times 10^{-3}} \right) \approx 6 \times 10^{-42}. \quad (4.42)$$

- $g = 10^{-2} \Rightarrow m_\chi/M_{Pl} = 10^{-4}$

$$\frac{n_\chi^{(2)}}{n_\chi^{(1)}} = \sqrt{2} \exp \left(-6 \times 10^7 \frac{(10^{-4})^2}{10^{-2}} \right) \approx 12 \times 10^{-27}. \quad (4.43)$$

- $g = 10^{-1,4} = 4 \times 10^{-2} \Rightarrow m_\chi/M_{Pl} = 10^{-3,6} \approx 3 \times 10^{-4}$

$$\frac{n_\chi^{(2)}}{n_\chi^{(1)}} = \sqrt{2} \exp \left(-6 \times 10^7 \frac{(2,5 \times 10^{-4})^2}{4 \times 10^{-2}} \right) \approx 13 \times 10^{-42}. \quad (4.44)$$

- $g = 10^{-1} \Rightarrow m_\chi/M_{Pl} = 10^{-3,4} = 4 \times 10^{-4}$

$$\frac{n_\chi^{(2)}}{n_\chi^{(1)}} = \sqrt{2} \exp \left(-6 \times 10^7 \frac{(4 \times 10^{-4})^2}{10^{-1}} \right) \approx 7 \times 10^{-42}. \quad (4.45)$$

Constata-se então que os limites sobre os raios cósmicos de altíssimas energias garantem a supressão das passagens subsequentes à primeira.

Além disso, nota-se que as partículas χ produzidas por este mecanismo têm massas maiores que as massas possíveis de serem produzidas gravitacionalmente,

como estudado na seção 2.3 (veja em particular expressão (2.35)). Ou seja, a hipótese de desprezar os termos com variação da métrica na expressão (2.41) feita no Capítulo 2, se verifica.

4.1.5 Conclusões

Neste trabalho foi estudado como gerar férmions supermassivos não relativísticos através do mecanismo FKL, conhecido na literatura como *instant pre-heating*, que pudessem explicar os raios cósmicos de altíssimas energias. Seguem os principais resultados do trabalho:

- Obteve-se um espaço de parâmetros para esse modelo e concluiu-se que sua viabilidade depende de um ajuste fino entre alguns dos parâmetros: g , g' e m_χ (Figura 4.5).
- As massas das partículas ψ s obtidas por esse modelo atendem a faixa de valores $1,05 \times 10^{15} \text{ GeV} \leq m_\psi \leq 3,5 \times 10^{17} \text{ GeV}$. As massas produzidas são relativamente grandes quando comparadas às massas produzidas por outros mecanismos de cima para baixo (*top-down*).

Sabe-se que partículas com massas de aproximadamente 10^{13} GeV explicariam os fluxos de raios cósmicos observados hoje. Desse ponto de vista parece um exagero imaginar massas tão grandes produzindo o fluxo conhecido. Porém, o modelo apenas poderia ser excluído se fosse observado um corte no espectro de raios cósmicos a energias mais baixas que as massas obtidas para as ψ s calculadas. Nesse caso, o corte evidenciaria a massa real das partículas supermassivas.

Por outro lado ainda não se sabe qual é o comportamento do espectro de raios cósmicos de altíssimas energias. Se um corte for encontrado no espectro de raios cósmicos a altíssimas energias (da ordem das massas encontradas), esse modelo se tornaria atraente pois poderia explicar as observações. Dos mecanismos “de cima para baixo” estudados esse é o que produz massas grandes mais naturalmente.

- Num primeiro momento, poderia-se pensar que o fato de se introduzir mais um parâmetro ao modelo, que neste caso foi o acoplamento g' , as possibilidades de produção se ampliariam. Entretanto, verificou-se o contrário. Esse parâmetro é que restringe os valores de g durante a produção das partículas χ e limita o espaço de parâmetros pela esquerda e pela direita (Figura 4.5).

• Este resultado se mostra bastante independente dos detalhes dos modelos de raios cósmicos. Observe que o fluxo pode ser praticamente qualquer um que os valores do espaço de parâmetros estarão sempre próximos aos obtidos, ou seja, próximos àqueles determinados pela quantidade de matéria escura estimada no universo.

- Note que as partículas χ que foram produzidas no fundo do poço, 10^{15}

$\text{GeV} \leq m_\chi \leq 10^{16} \text{ GeV}$, não poderiam ter sido produzidas gravitacionalmente. Segundo equação (2.36) a massa máxima que poderia ser gravitacionalmente produzida seria $m_\chi < m_\phi$ para o potencial inflacionário caótico massivo estudado.

4.2 O Pré-Aquecimento na Inflação Quintessencial [5, 6]

No Capítulo 1 discutiu-se as evidências de que o universo esteja expandindo aceleradamente e que esse comportamento pode ser devido a uma forma desconhecida de matéria que é chamada de energia escura. Esse comportamento poderia ser reproduzido por modelos onde a equação de estado que domina o universo seria aquela com pressão negativa.

Foi visto, por exemplo nas seções 1.2.4 e 1.2.5 que se a constante cosmológica, Λ , é introduzida nas equações de Einstein, ela reproduziria uma equação de estado do tipo $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, ou seja com pressão negativa. Isso significa que hoje o universo poderia estar sob domínio da constante cosmológica [7].

Uma outra possibilidade, seria a introdução de um campo escalar que sob algumas condições poderia levar a uma equação de estado com pressão negativa [8], análogo ao caso inflacionário estudado da seção 1.3.1. Esse campo foi chamado de quintessência por R. R. Caldwell *et al.* [9], que corresponderia ao quinto componente do fluido cósmico, com equação de estado diferente da equação de estado dos outros quatro: bárions, neutrinos, matéria escura e radiação.

Como o campo que geraria a aceleração teria hoje as mesmas propriedades do campo escalar da inflação, tem sido sugerido [10, 11, 12] que esse campo, o inflaton, poderia evoluir daquela época até hoje e ser responsável pela aceleração presente no universo. É por essa razão que os potenciais utilizados nos modelos de inflação quintessencial não possuem um mínimo local, ao contrário dos modelos de inflação caótica, estudados até agora neste trabalho. O potencial teria que ter um valor não nulo ainda hoje. Isso significa que o reaquecimento do universo não poderia ter acontecido com um mecanismo como o pré-aquecimento, que pressupõe oscilações do campo ao redor de um ponto de mínimo de seu potencial. Em geral, assume-se que toda a matéria do universo tenha sido produzida gravitacionalmente devido a variação da métrica no fim da inflação. Esse processo teria levado o universo a uma temperatura de reaquecimento da ordem de $T_{rq} \sim 10^4$ GeV [13], como discutido na seção 2.3.

Apesar de nesses modelos, o inflaton não oscilar no mínimo de um potencial, sua variação em potenciais inflacionários quintessenciais poderia perturbar o vácuo de campos quânticos a ele acoplado. Esses modelos são chamados de modelos sem oscilação (*non-oscillatory models*) que seria a aplicação do mecanismo FKL a potenciais que não tem um mínimo no qual o inflaton possa oscilar [14].

Para investigar essa possibilidade, foi feito um estudo numérico acoplando o inflaton a campos de matéria e verificando sob quais condições haveria produção eficiente de partículas [5, 6]. Esse estudo foi feito utilizando um potencial

específico, o de Peebles-Vilenkin [10] e é apresentado a seguir.

4.2.1 O Modelo

No modelo de inflação quintessencial de Peebles-Vilenkin [10], o inflaton ϕ , evolui segundo o potencial representado na Figura 4.8 e dado por:

$$V(\phi) = \begin{cases} \lambda(\phi^4 + M^4) & \text{se } \phi < 0, \\ \frac{\lambda M^8}{\phi^4 + M^4} & \text{se } \phi \geq 0, \end{cases} \quad (4.46)$$

onde $\lambda \approx 1 \times 10^{-14}$, para satisfazer dados de formação de estrutura [15] e $M = 8 \times 10^5$ GeV para produzir a densidade de energia quintessencial hoje observada [10].

Figura 4.8: A linha contínua representa o potencial de Peebles-Vilenkin e o pontilhado é o primeiro termo do potencial estendido para a região $\phi > 0$ (trata-se de um potencial do tipo $\lambda\phi^4$ estudado em modelos de inflação caótica). V_ϕ é dado em unidades de GeV^4 e ϕ em GeV.

Definindo algumas variáveis mais convenientes e adimensionais:

$$\varphi = \frac{\phi}{M_{Pl}}, \quad q = \frac{M}{M_{Pl}}, \quad \tau = \sqrt{\lambda} M_{Pl} t, \quad (4.47)$$

é possível escrever a equação de movimento (1.80) para o campo ϕ neste modelo:

$$\begin{aligned} \varphi'' + \sqrt{24\pi} \sqrt{\frac{\varphi'^2}{2} + (\varphi^4 + q^4)} \varphi' + 4\varphi^3 &= 0 & \text{se } \varphi < 0, \\ \varphi'' + \sqrt{24\pi} \sqrt{\frac{\varphi'^2}{2} + \frac{q^8}{(\varphi^4 + q^4)}} \varphi' - 4 \frac{q^8}{(\varphi^4 + q^4)^2} \varphi^3 &= 0 & \text{se } \varphi \geq 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

onde as linhas são derivadas com relação a τ e o parâmetro de Hubble utilizado foi definido como sendo,

$$\tilde{H}^2(\tau) = \left(\frac{a'(\tau)}{a(\tau)} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{\varphi'^2}{2} + V(\varphi) \right). \quad (4.49)$$

Assume-se a existência de um campo escalar quântico χ , acoplado ao inflaton. Os termos referentes a esse campo na lagrangiana são:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \frac{1}{2} \xi R \chi^2 - \frac{1}{2} g^2 \phi^2 \chi^2, \quad (4.50)$$

onde R é o escalar de Ricci, ξ é o acoplamento gravitacional e g é um acoplamento quártico entre ϕ e χ . Quando um acoplamento como este é introduzido, existe a possibilidade que correções radiativas gerem um potencial efetivo para o inflaton mudando o potencial originalmente proposto e talvez prejudicando as propriedades da quintessência observadas hoje. Existem maneiras de prevenir este problema explorando teorias de vanguarda, porém elas ainda não são totalmente satisfatórias [5]. Nesta abordagem assume-se um ponto de vista mais pragmático considerando esse um modelo exploratório e não absoluto.

O segundo termo da lagrangiana (4.50) é responsável pela produção gravitacional no fim da inflação quando a métrica, que era de de Sitter passa para a de Friedmann-Roberston-Walker. A densidade de energia extraída do inflaton durante a produção gravitacional de partículas relativísticas é da ordem $\rho_m/\rho_\phi \sim 10^{-18}$ e a temperatura de reaquecimento obtida seria de aproximadamente $T_{rq} \sim 10^4$ GeV [13].

Quando $g \neq 0$, existe a possibilidade de que partículas χ sejam produzidas não apenas gravitacionalmente mas também pelo mecanismo FKL. Trabalha-se sob a hipótese de que a densidade de energia produzida gravitacionalmente é pequena comparada à do inflaton no momento que o inflaton transfere energia para o campo χ . Na seção 4.2.4 será visto que essa hipótese é bastante razoável.

Considere a equação de movimento para os modos $X_k = a^{3/2} \chi_k$ (veja seção 2.3.1) escrita nos novos parâmetros adimensionais dados por (4.47):

$$X_k'' + \left\{ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{k^2}{M_{Pl}^2 a^2(\tau)} + g^2 \varphi^2(\tau) \right) - \Delta \right\} X_k = 0. \quad (4.51)$$

onde o momento físico é dado por k/a e o termo $\Delta = \frac{3}{4} \left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{a''}{a} \right)$, que é desprezível durante a produção de partículas³. Note que m_χ neste problema é

³Foi verificado numericamente.

zero e que a massa efetiva nas variáveis escolhidas é dada por $g\varphi/\lambda$. Essa é a equação de um oscilador com frequência variável:

$$\omega_k^2 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{k^2}{M_{Pl}^2 a^2(\tau)} + g^2 \varphi^2(\tau) \right). \quad (4.52)$$

Como estudado exhaustivamente no Capítulo 2, sempre que a condição de adiabaticidade for violada, $\omega'_k \geq \omega_k^2$, é provável que haja produção de partículas para o modo k . A Figura 4.9 mostra a região da violação da adiabaticidade que ocorre em torno de $\varphi = 0$ e corresponde a $\tau \simeq 7$ de acordo com as condições iniciais impostas. Note que diferentemente do potencial inflacionário estudado na Figura 2.2 a quebra de adiabaticidade ocorre apenas uma vez.

Figura 4.9: ω_k^2 (linha sólida), ω'_k (linha pontilhada) and $10 \times \varphi$ (linha sólida-pontilhada) como função de τ para $g = 10^{-5}$ e $k = 5\sqrt{\lambda}M_{Pl}$. Note que a adiabaticidade é violada em torno de $\tau \simeq 7$, quando o inflaton passa por zero.

4.2.2 A Produção de Partículas

Para obter a densidade em número total de partículas produzidas durante a quebra de adiabaticidade da frequência do campo χ , é preciso resolver o conjunto de equações dadas por (4.48), (4.49) e (4.51).

Utiliza-se como condições iniciais $\varphi(\tau = 0) = -1$ e $\varphi'(\tau = 0) = 0$, uma vez que no modelo $\lambda\phi^4$ a inflação termina em $\phi \simeq -M_{Pl}$ (veja equação (1.103)). A Figura 4.9 mostra o comportamento do campo φ na região de interesse.

O fator de escala $a(\tau)$ é obtido integrando (4.49):

$$a(\tau) = a_0 \exp \left[\int_0^\tau d\tau' H(\tau') \right], \quad (4.53)$$

onde $a_0 = a(\tau = 0) = 1$. A Figura 4.10 abaixo mostra a evolução do fator de escala.

Figura 4.10: Evolução do fator de escala como função de τ .

Como estudado na seção 2.3.1, a densidade em número de partículas comóvel, n_k , com momento k é dada por:

$$n_k = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{|X'_k|^2}{\omega_k^2} + |X_k|^2 \right) - \frac{1}{2}. \quad (4.54)$$

Assim, obtendo numericamente X_k é possível calcular a densidade em número de partículas no modo k . A Figura 4.11 ilustra n_k para alguns valores de k . A produção ocorre apenas uma vez em $\tau \simeq 7$, como mostrava a quebra de adiabaticidade na Figura 4.9.

O espectro de partículas é descrito numericamente como função de k , λ e g e é dado pela expressão:

$$n_k^{\text{num}} = \exp \left[-\frac{1}{52} \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \frac{k^2}{\lambda M_{Pl}^2} \right]. \quad (4.55)$$

A Figura 4.12 ilustra por exemplo, como n_k^{num} varia com k para diferentes g 's e λ 's.

A expressão analítica (2.66) do mecanismo FKL em termos dos parâmetros e variáveis deste problema é dada por:

$$n_k^{\text{anal}} = \exp \left(-\pi \frac{k^2 + m_\chi^2}{a^2(t)g|\dot{\phi}_0|} \right) \Rightarrow n_k^{\text{anal}} = \exp \left[-\pi \frac{\lambda M_{Pl}^2 k^2 / a^2(\tau_p)}{g|\dot{\phi}_p| \lambda M_{Pl}^2} \right], \quad (4.56)$$

onde $a_0 = a(\tau = 0) = 1$. A Figura 4.10 abaixo mostra a evolução do fator de escala.

Figura 4.10: Evolução do fator de escala como função de τ .

Como estudado na seção 2.3.1, a densidade em número de partículas comóvel, n_k , com momento k é dada por:

$$n_k = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{|X'_k|^2}{\omega_k^2} + |X_k|^2 \right) - \frac{1}{2}. \quad (4.54)$$

Assim, obtendo numericamente X_k é possível calcular a densidade em número de partículas no modo k . A Figura 4.11 ilustra n_k para alguns valores de k . A produção ocorre apenas uma vez em $\tau \simeq 7$, como mostrava a quebra de adiabaticidade na Figura 4.9.

O espectro de partículas é descrito numericamente como função de k , λ e g e é dado pela expressão:

$$n_k^{\text{num}} = \exp \left[-\frac{1}{52} \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \frac{k^2}{\lambda M_{Pl}^2} \right]. \quad (4.55)$$

A Figura 4.12 ilustra por exemplo, como n_k^{num} varia com k para diferentes g 's e λ 's.

A expressão analítica (2.66) do mecanismo FKL em termos dos parâmetros e variáveis deste problema é dada por:

$$n_k^{\text{anal}} = \exp \left(-\pi \frac{k^2 + m_\chi^2}{a^2(t)g|\dot{\phi}_0|} \right) \Rightarrow n_k^{\text{anal}} = \exp \left[-\pi \frac{\lambda M_{Pl}^2 k^2 / a^2(\tau_p)}{g|\dot{\phi}_p| \lambda M_{Pl}^2} \right], \quad (4.56)$$

Figura 4.11: Densidade número comóvel de partículas χ produzidas como função de τ para o momento comóvel $k = 0, 100 \sqrt{\lambda} M_{Pl}$ e $200 \sqrt{\lambda} M_{Pl}$, para $g = 5 \times 10^{-5}$.

Figura 4.12: Densidade número comóvel de partículas χ produzidas como função do momento comóvel k em unidades de $\sqrt{\lambda} M_{Pl}$. $\lambda = 1 \times 10^{-14}$ and $g = 5 \times 10^{-5}$ (curva sólida); $\lambda = 1 \times 10^{-14}$ and $g = 1 \times 10^{-4}$ (curva pontilhada); $\lambda = 4 \times 10^{-14}$ and $g = 5 \times 10^{-5}$ (curva sólida-pontilhada).

onde τ_p é o instante de produção de partículas, $|\dot{\varphi}_p|$ é a velocidade do inflaton em τ_p ⁴. Não esquecer que a massa nua de χ é zero neste problema.

Numericamente obtém-se a velocidade e o valor do fator de escala no momento

⁴Se a equação diferencial para χ (4.51), fosse resolvida muito próximo ao momento da quebra de adiabaticidade, o momento físico produzido seria $k/a = k$, ou seja, no momento da produção é possível desprezar a expansão do universo. Porém, a equação diferencial para χ está sendo resolvida com as mesmas condições iniciais aplicadas na equação de movimento de φ , (4.48), ou seja, desde o fim da inflação. Isso significa que no momento da produção, o momento físico que será produzido é $k/a(\tau_p)$.

da produção: $|\dot{\phi}_p| = 3,6 \times 10^{-2} \sqrt{\lambda} M_{Pl}^2$ e $a(\tau_p) = 68$ que resulta:

$$n_k^{\text{anal}} = \exp \left[-\frac{1}{53} \frac{\sqrt{\lambda}}{g} \frac{k^2}{\lambda M_{Pl}^2} \right]. \quad (4.57)$$

Comparando esta equação com a numérica (4.55) nota-se que ela é uma ótima aproximação. A expressão analítica (2.66) depende fundamentalmente da velocidade no fundo de poço de potencial e foi obtida fazendo uma aproximação de fundo de poço (veja seção 2.3.2). A semelhança com a expressão obtida numericamente mostra que a produção ocorre como num potencial $\lambda\phi^4$ puro, ou seja, apenas a primeira parte do potencial (4.46) interfere na produção de partículas.

A densidade de energia total do campo χ em τ_p é dada por:

$$\rho_\chi = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 a^3(\tau_p)} \frac{k}{a(\tau_p)} n_k \simeq 3 \times 10^{-6} \lambda g^2 M_{Pl}^4. \quad (4.58)$$

Observe que o integrando contém os momentos físicos no instante de produção.

Como a densidade de energia no campo ϕ no momento de produção é de

$$\rho_\phi \simeq \frac{\dot{\phi}_p^2}{2} \simeq 6 \times 10^{-4} \lambda M_{Pl}^4, \quad (4.59)$$

a densidade de energia transferida do campo de inflaton para o campo χ no momento da produção será de:

$$\frac{\rho_\chi}{\rho_\phi} \simeq 5 \times 10^{-3} g^2. \quad (4.60)$$

Isso significa que a quantidade máxima de energia que pode ser extraída do campo ϕ é de $\frac{\rho_\chi}{\rho_\phi} \simeq 5 \times 10^{-3}$ quando $g = 1$.

Depois das partículas χ serem produzidas com massa nula, elas se tornam não relativísticas rapidamente, já que sua massa efetiva é dada por $m_\chi^{\text{ef}} = g\phi$ (veja equação (4.52)), ou seja, as partículas χ “engordam” a medida que ϕ se afasta de 0. Nesse caso, a densidade de energia de χ será $m_\chi n_\chi$ e é obtida através da expressão:

$$\rho_\chi = m_\chi n_\chi = m_\chi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 a^3(\tau_p)} n_k \simeq 3 \times 10^{-5} \lambda^{3/4} g^{5/2} \Phi M_{Pl}^3, \quad (4.61)$$

onde Φ é amplitude do campo ϕ . Nesse caso, a razão entre as densidades se torna:

$$\frac{\rho_\chi}{\rho_\phi} \simeq 14 g^{5/2}, \quad (4.62)$$

para $\Phi \simeq 10^{-1} M_{Pl}$ que é uma boa aproximação para instantes logo depois da produção como mostra a Figura 4.9. Observe que rigorosamente deveria-se considerar a densidade de energia do inflaton para um valor de ϕ indefinidamente grande, entretanto considera-se a densidade de energia calculada no momento da produção. Essa estimativa nos dá um limite inferior para tal razão de onde já se vê a eficiência do processo. Por exemplo, para $g = 1$, em $\tau \sim 7,03$ a energia do inflaton destinada ao campo χ já teria sido transferida.

4.2.3 Temperatura de Reaquecimento

Para reaquecer o universo, as partículas χ “gordas” devem decair em partículas relativísticas que não estariam mais acopladas ao campo ϕ , segundo o mecanismo FKL. A temperatura de reaquecimento do universo é estimada quando a densidade de energia dessa radiação produzida ρ_R passa a dominar o universo. Antes de desenvolver essa análise considere uma representação do processo que está sendo estudado:

$$\rho_\phi \xrightarrow{\tau_p} \rho_\chi^{\text{rel.}} \xrightarrow{\tau_t} \rho_\chi^{\text{não rel.}} \xrightarrow{\tau_D} \rho_R \xrightarrow{\tau_{rq}} \rho_R^{\text{dom.}}$$

onde τ_p denota o instante da produção das partículas χ relativísticas estudada na seção anterior; τ_t é o instante em que partículas χ relativísticas se tornam não relativísticas; τ_D representa o instante em que as partículas χ decaem em radiação e finalmente τ_{rq} , o instante em que essa radiação começa a dominar o universo.

Na seção anterior foi visto que logo que as partículas são produzidas elas se tornam não relativísticas, ou seja $\tau_p \sim \tau_t$. Por outro lado, se as partículas χ decaíssem logo depois de se tornarem não relativísticas, a expressão (4.62) garantiria que o processo já seria bastante eficiente e efeitos de *backreaction* seriam evitados⁵. Portanto no esquema acima $\tau_p \sim \tau_t \sim \tau_D$. Isso significa que a radiação é produzida logo depois das partículas χ serem produzidas. Neste instante a densidade de energia do universo seria praticamente formada pela densidade do inflaton e da radiação e a temperatura de reaquecimento seria obtida quando elas fossem iguais, ou seja, em τ_{rq} : $\rho_\phi(\tau_{rq}) = \rho_R(\tau_{rq})$.

Como a densidade de energia do inflaton dilui com a^{-6} , uma vez que o termo cinético da densidade é que domina⁶, tem-se:

$$\rho_\phi(\tau)a^6(\tau) = \rho_\phi(\tau_{rq})a^6(\tau_{rq}), \quad (4.64)$$

⁵Efeitos de *backreaction* não são importantes para $g \lesssim 0,4$ [5].

⁶A densidade de energia do inflaton neste momento é praticamente o termo cinético do campo. Por essa razão, a equação de movimento do inflaton (1.80) pode ser escrita:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \frac{3}{a} \frac{da}{dt} \frac{d\phi}{dt} \approx 0 \iff \frac{d\phi}{dt} \propto a^{-3} \implies \rho_\phi \approx \frac{\dot{\phi}^2}{2} \propto a^{-6}. \quad (4.63)$$

e ρ_R dilui com a^{-4} ,

$$\rho_R(\tau)a^4(\tau) = \rho_R(\tau_{rq})a^4(\tau_{rq}). \quad (4.65)$$

Portanto, a razão das densidades podem ser escritas em termos do fator de diluição:

$$\frac{\rho_R(\tau)}{\rho_\phi(\tau)} = \frac{a^2(\tau)}{a^2(\tau_{rq})}. \quad (4.66)$$

Porém, como quase toda a densidade de energia do campo χ se transforma instantaneamente em densidade de energia da radiação, $\rho_\chi \approx \rho_R$, a relação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{\rho_\chi(\tau)}{\rho_\phi(\tau)} = \frac{a^2(\tau)}{a^2(\tau_{rq})} \Rightarrow \frac{a^2(\tau)}{a^2(\tau_{rq})} = 14 g^{5/2}, \quad (4.67)$$

segundo relação (4.62).

Voltando à expressão (4.65), calcula-se a densidade de radiação no instante em que ela começa a dominar o universo, lembrando que $\rho_\chi \approx \rho_R$ e que ρ_χ é dado nesta época por (4.61):

$$\begin{aligned} \rho_R(\tau_{rq}) &= \rho_R(\tau) \left(\frac{a^2(\tau)}{a^2(\tau_{rq})} \right)^2 \\ &= \rho_\chi(\tau) (14 g^{5/2})^2 \sim 3 \times 10^{-5} \lambda^{3/4} g^{5/2} \Phi M_{Pl}^3 (14 g^{5/2})^2. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Finalmente:

$$\rho_R(\tau_{rq}) \sim 6 \times 10^{-4} \lambda^{3/4} g^{15/2} M_{Pl}^4. \quad (4.69)$$

A temperatura de reaquecimento, que é a primeira temperatura de equilíbrio deste sistema, pode ser escrita em termos da densidade de radiação (veja Apêndice B) e será portanto:

$$T_{rq} \sim (\rho_R)^{1/4} \Rightarrow T_{rq} \simeq 10^{-1} (\lambda^{3/4} g^{15/2})^{1/4} M_{Pl}. \quad (4.70)$$

O limite superior para a temperatura de reaquecimento é calculado para $g = 1$ e corresponde ao valor $T_{rq} \approx 10^{15}$ GeV, que já é bastante superior à temperatura que a produção gravitacional é capaz de gerar. A seguir verifica-se sob que condições a hipótese inicial de que a produção gravitacional é desprezível comparada a densidade de energia do inflaton no momento da produção das partículas χ s, é válida.

4.2.4 Produção Gravitacional $\times$ Produção FKL

Para provar que a densidade de energia das partículas produzidas gravitacionalmente (ρ_m) é muito menor que a densidade de energia do inflaton quando as

partículas χ são produzidas, considere a razão entre elas quando $\varphi \sim 0$, tomando como instante de referência o fim da inflação:

$$\begin{aligned}\rho_m(\varphi = 0)a^4(\varphi = 0) &= \rho_m(\varphi = -1)a^4(\varphi = -1), \\ \rho_\phi(\varphi = 0)a^6(\varphi = 0) &= \rho_\phi(\varphi = -1)a^6(\varphi = -1), \\ \frac{\rho_m(\varphi = 0)}{\rho_\phi(\varphi = 0)} &\sim \frac{\rho_m(\varphi = -1)/a^4}{\rho_\phi(\varphi = -1)/a^6}.\end{aligned}\quad (4.71)$$

Utilizando, $(\rho_m/\rho_\phi)_{\varphi=-1} = 10^{-18}$ [13]; $a(\varphi = -1) = a(\tau = 0) = 1$ e $a(\varphi = 0) = a(\tau_p) = 68$:

$$\frac{\rho_m(\phi = 0)}{\rho_\phi(\phi = 0)} \sim 5 \times 10^{-15}. \quad (4.72)$$

Conclui-se que é possível iniciar a análise da produção de χ s supondo que neste instante o universo está dominado pela densidade de energia do inflaton. Note que apesar de ρ_ϕ não ser proporcional a a^{-6} no intervalo de tempo considerado, esse valor corresponde a uma máxima diluição, portanto o valor está sendo superestimado.

4.2.5 Limites sobre g

Comparando a densidade de partículas produzidas gravitacionalmente, ρ_m , com a produção das partículas χ dada pela equação (4.58) no momento da produção, tem-se:

$$\frac{\rho_\chi(\varphi = 0)}{\rho_m(\varphi = 0)} = \frac{\rho_\chi(\varphi = 0)/\rho_\phi(\varphi = 0)}{\rho_m(\varphi = 0)/\rho_\phi(\varphi = 0)} \sim 1 \times 10^{12} g^2, \quad (4.73)$$

onde utilizou-se as expressões (4.60) e (4.72). Conclui-se que a densidade de energia de partículas χ domina a produção gravitacional para $g \gtrsim 10^{-6}$.

Assim, os limites considerados para o acoplamento g serão,

$$10^{-6} \lesssim g \lesssim 1, \quad (4.74)$$

que correspondem a limites sobre a temperatura de reaquecimento para este modelo segundo expressão (4.70) estudada na seção 4.2.3:

$$10^4 \text{ GeV} \lesssim T_{rq} \lesssim 10^{15} \text{ GeV}. \quad (4.75)$$

4.2.6 Conclusões

Utilizando um modelo inflacionário quintessencial, onde a dinâmica de um campo escalar seria capaz de gerar a inflação no universo primordial bem como a expansão acelerada hoje observada, estudou-se um modelo de reaquecimento baseado no mecanismo FKL. O potencial utilizado foi o de Peebles-Vilenkin e as conclusões do trabalho estão listadas a seguir:

- O mecanismo FKL permite reaquecer o universo de forma mais eficiente que a usual produção gravitacional. Esse potencial leva a temperaturas de reaquecimento entre $10^4 \text{ GeV} \lesssim T_{rq} \lesssim 10^{15} \text{ GeV}$. Esses limites vem dos limites sobre o acoplamento g , que deve ser introduzido ao modelo: $10^{-6} \lesssim g \lesssim 1$.

- Quando o mecanismo FKL se inicia a densidade de energia do inflaton é muito maior que a suposta densidade de energia produzida gravitacionalmente e por essa razão ela foi desprezada. Na verdade, esta é uma análise parcial já que é preciso avaliar como a introdução do acoplamento $\chi - \phi$ afetaria quebra de adiabaticidade da frequência associada ao campo χ com a variação da métrica, no fim da inflação. Eventualmente a produção gravitacional poderia nem ter ocorrido.

- Os resultados numéricos obtidos coincidem com as estimativas analíticas das referências [14] and [2] para o potencial $\lambda\phi^4$.

- Outros potenciais podem ser utilizados. No artigo [5] apresenta-se como seria a quebra de adiabaticidade da frequência do campo χ se ele estivesse acoplado ao inflaton sujeito ao potencial inflacionário quintessencial de Dimopoulos-Valle [12], representado na Figura 4.13 e dado por:

$$V(\phi) = M^4 \left[1 - \tanh \left(\frac{\phi}{M_{Pl}} \right) \right] \left[1 - \sin \left(\frac{\pi\phi/2}{\sqrt{\phi^2 + M^2}} \right) \right]^2, \quad (4.76)$$

onde $M = 10^{15} \text{ GeV}$ para gerar a densidade de energia quintessencial hoje estimada.

A quebra de adiabaticidade pode ser avaliada construindo um gráfico análogo ao da Figura 4.9 para as variáveis redefinidas como: $m = M/M_{Pl}$ e $\tau = m^2 M_{Pl} t$

O comportamento é semelhante ao modelo de Peebles-Vilenkin e uma análise quantitativa da densidade de partículas produzidas poderia ser feita.

Figura 4.13: Potencial de Dimopoloulos-Valle V_φ é dado em unidades de M_{Pl}^4 e φ em unidades de M_{Pl} .

Figura 4.14: ω_k^2 (linha sólida), ω'_k (linha pontilhada) and $10 \times \varphi$ (linha sólida-pontilhada) como função τ para $g = 1$ e $k = 10^5 m^2 M_{Pl}$. Note que a adiabaticidade é violada em torno de $\tau \simeq 0.69$, quando o inflaton passa por zero.

• Finalmente, é preciso estar ciente de que este modelo pode produzir correções radiativas que, eventualmente, destruiriam a quintessência. Como ainda não existe uma teoria auto consistente de Física de Partículas para o inflaton e para o campo χ , os estudos em modelos de inflação quintessencial são apenas exploratórios, como este que foi realizado.

4.3 Produção Direta de Partículas X s para explicar Raios Cósmicos de Altíssimas Energias [16]

Esta aplicação faz parte da dissertação de mestrado [17] de uma das autoras do trabalho [16] e foi publicada na fase inicial deste doutoramento. Ela é uma extensão do artigo de D. Chung *et al.* [18] e versa sobre a possibilidade de produzir partículas supermassivas perturbativamente, logo após a inflação, para explicar raios cósmicos de altíssimas energias no contexto de modelos *top down*. Trabalhou-se com o potencial caótico $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2/2$.

4.3.1 A Produção Perturbativa das Partículas X s

Foi visto no Capítulo 1 que após a inflação, o universo teria passado por uma fase de reaquecimento. No modelo onde a dinâmica de um campo escalar, o inflaton, geraria o período inflacionário, o reaquecimento se daria com a oscilação do inflaton ao redor do mínimo de seu potencial, desde que ele estivesse acoplado a campos de matéria. No processo de produção perturbativa de partículas estudado na seção 2.3, o inflaton decairia em partículas relativísticas que reaqueceria o universo. Nesse contexto, partículas X s poderiam ser produzidas de duas maneiras diferentes:

✓**Produção Indireta** : O inflaton decairia em matéria relativística que poderia se aniquilar e produzir partículas supermassivas [18].

$$\phi \longrightarrow \gamma\gamma \longrightarrow X\bar{X}.$$

✓**Produção Direta** : O inflaton decairia em partículas supermassivas.

$$\phi \longrightarrow X\bar{X}.$$

Nesta aplicação explora-se a produção direta de partículas. Considera-se que na fase de reaquecimento a densidade de energia do universo teria se dividido entre a densidade de energia do inflaton, ρ_ϕ , a densidade de energia da radiação, ρ_R e uma terceira forma, a densidade de energia das partículas supermassivas metaestáveis X , ρ_X . Assim, a equação de Friedmann (1.29) referente a essa época seria:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3M_{Pl}^2}(\rho_\phi + \rho_R + \rho_X). \quad (4.77)$$

Os processos que vinculam as três densidades de energia contidas no universo seriam o decaimento do inflaton em radiação e em partículas X s, a aniquilação da radiação em partículas X s e a aniquilação das partículas X s em radiação. Para

descrever essa dinâmica trabalha-se com a equação da continuidade (1.20), que garante a conservação da densidade de energia total no universo. É indicado nos termos do sistema de equações abaixo os processos a que se referem:

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_\phi + 3H\rho_\phi + \Gamma_\phi\rho_\phi &= 0 \\ \dot{\rho}_R + 4H\rho_R - \overbrace{(1-B_X)\Gamma_\phi\rho_\phi}^{\phi \rightarrow \gamma\gamma} - \overbrace{\frac{\langle\sigma|v|\rangle}{m_X}[\rho_X^2 - (\rho_X^{eq})^2]}^{X\bar{X} \leftrightarrow \gamma\gamma} - \Gamma_X(\rho_X - \rho_X^{eq}) &= 0 \\ \dot{\rho}_X + 3H\rho_X - \underbrace{B_X\Gamma_\phi\rho_\phi}_{\phi \rightarrow X\bar{X}} + \underbrace{\frac{\langle\sigma|v|\rangle}{m_X}[\rho_X^2 - (\rho_X^{eq})^2]}_{X\bar{X} \leftrightarrow \gamma\gamma} + \Gamma_X(\rho_X - \rho_X^{eq}) &= 0,\end{aligned}$$

onde B_X é a razão de ramificação do decaimento direto $\phi \rightarrow X\bar{X}$. Γ_X é a largura de decaimento da partícula X que será considerada nula já que são metaestáveis. $\langle\sigma|v|\rangle$ quantifica o processo $\gamma\gamma \leftrightarrow X\bar{X}$ ⁷, ρ_X^{eq} é a densidade de equilíbrio das partículas X s, que é determinada pela temperatura de radiação e Γ_ϕ é a largura de decaimento total de ϕ .

O sistema acima é mais facilmente resolvido trabalhando com grandezas adimensionais. Para isso, define-se as variáveis⁸:

$$\Phi \equiv \frac{\rho_\phi a^3}{m_\phi}, \quad R \equiv \rho_R a^4, \quad X \equiv \frac{\rho_X a^3}{m_X}, \quad (4.78)$$

$$\alpha_\phi \equiv \frac{\Gamma_\phi}{m_\phi}, \quad \alpha_X \equiv \langle\sigma|v|\rangle m_X^2 \quad (4.79)$$

e também uma variável temporal adimensional escrita em termos do fator de escala $a(t)$: $x = am_\phi$.

As três primeiras equações são reescritas como:

$$\begin{aligned}\Phi' &= -c_1 \frac{x}{\sqrt{\Phi x + R + \frac{m_X}{m_\phi} X x}} \Phi \\ R' &= c_1(1-B_X) \frac{x^2}{\sqrt{\Phi x + R + \frac{m_X}{m_\phi} X x}} \Phi + c_2 \frac{x^{-1}}{\sqrt{\Phi x + R + \frac{m_X}{m_\phi} X x}} (X^2 - X_{eq}^2) \\ X' &= c_1 B_X \frac{x}{\sqrt{\Phi x + R + \frac{m_X}{m_\phi} X x}} \Phi - c_3 \frac{x^{-2}}{\sqrt{\Phi x + R + \frac{m_X}{m_\phi} X x}} (X^2 - X_{eq}^2),\end{aligned}$$

⁷Esse termo é a média térmica da seção de choque de aniquilação da partícula X multiplicado pelo fator de fluxo de Møller e pode ser estimado como sendo $\langle\sigma|v|\rangle \sim 10^{-26} \text{ GeV}^{-2}$. Para detalhes veja [17, 18].

⁸Note que aqui Φ denota apenas uma mudança de variável de ϕ e não a amplitude do campo ϕ como está sendo denotado ao longo do trabalho.

onde a linha denota a derivação com respeito a variável x e

$$c_1 = \sqrt{\frac{3M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{\alpha_\phi}{m_\phi}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{3M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{\alpha_X}{m_X}}, \quad c_3 = \sqrt{\frac{3M_{Pl}^2}{8\pi} \frac{m_\phi}{m_X^2}} \alpha_X. \quad (4.80)$$

O sistema acima pode ser resolvido numericamente considerando diferentes valores de B_X e T_{rq} e a Figura 4.15 mostra o comportamento do parâmetro X dado pela relação (4.78). As condições iniciais impostas ao sistema são $x_i = 1$ que corresponde a um instante antes do decaimento, por exemplo aquele em que $\phi_i \simeq M_{Pl}$, correspondendo ao fim da inflação, e portanto $H_i \simeq m_\phi$ para o potencial estudado (veja nota de rodapé da página 47). As curvas A , B e C mostram dois patamares associados aos dois mecanismos de produção da partícula X com massa $m_X = 10^{12}$ GeV:

- **Primeiro Patamar:** Mostra a densidade de energia das partículas X produzidas indiretamente ($\gamma\gamma \rightarrow X\bar{X}$). Para T_{rq} menor que 10^9 GeV, a produção indireta se tornaria ineficiente pois a quantidade de energia disponível seria insuficiente e portanto, o primeiro patamar tenderia a desaparecer⁹.

- **Segundo Patamar:** Mostra a densidade de energia das partículas X produzidas diretamente ($\phi \rightarrow X\bar{X}$). Note que modificando B_X e mantendo T_{rq} constante (curvas B e C) apenas o segundo patamar muda, mostrando a dependência do decaimento direto com B_X .

4.3.2 Abundância das partículas X s hoje

Na seção 3.2.2 foi calculada qual seria a abundância de partículas X s hoje, a partir de uma densidade de energia produzida na época do reaquecimento do universo dada pela expressão (3.26) e contabilizada em um instante denominado instante de produção das partículas X s e denotado pelo subíndice p . Aqui, a densidade está implícita no termo X de (4.78) e a densidade final de partículas X_F produzidas durante este processo será contabilizada em um instante t_{rq} , ou x_{rq} segundo nova parametrização temporal:

$$X \equiv \frac{\rho_X a^3}{m_X} = \frac{\rho_X}{m_X} \frac{x^3}{m_\phi^3} \Rightarrow \rho_X(x_{rq}) = \frac{X_F m_\phi^3 m_X}{x_{rq}^3}. \quad (4.81)$$

⁹D. Chung *et al.* [18] mostraram que durante o processo de reaquecimento seria possível obter temperaturas maiores que a temperatura de reaquecimento, e consequentemente produzir partículas com massas maiores, que a temperatura de reaquecimento, através do mecanismo indireto. Para $T_{rq} = 10^9$ GeV, por exemplo, a temperatura máxima seria de $T_{m\acute{a}x} \approx 10^{12}$ GeV. Como foi escolhido produzir partículas X s com massa igual a $m_X = 10^{12}$ GeV, a produção indireta não ocorreria se fosse considerada uma temperatura de reaquecimento menor que 10^9 GeV.

Figura 4.15: Evolução de X ($\equiv \rho_X m_X^{-1} a^3$) como função da variável temporal, x . Utiliza-se $m_\phi = 10^{13} \text{ GeV}$ e $m_X = 10^{12} \text{ GeV}$. Este gráfico foi extraído da referência [16].

Portanto, o instante de produção de partículas X s, $t_p(x_p)$, utilizado na dedução de (3.26) será considerado o instante $t_{rq}(x_{rq})$ aqui e H_p^2 será reescrito em termos do instante inicial:

$$H_{rq}^2 = H_i^2 \left(\frac{x_i}{x_{rq}} \right)^3, \quad (4.82)$$

uma vez que $\rho_\phi \propto H^2$ e $\rho_\phi a^3 = \text{cte}$ em qualquer instante anterior ao decaimento de ϕ , em particular de $t_i(x_i)$ a $t_{rq}(x_{rq})$. A expressão (3.26) é então reescrita

como:

$$\begin{aligned}\Omega_X h^2 &= \Omega_R(T_0) h^2 \frac{\rho_{X_{rq}}}{\rho_{R_{rq}}} \frac{T_{rq}}{T_0} \\ &= 1,5 \times 10^9 \left(\frac{T_{rq}}{\text{GeV}} \right) \frac{X_F m_X m_\phi^3}{x_i^3 H_i^2 M_{Pl}^2},\end{aligned}\quad (4.83)$$

onde $T_0 = 2,37 \times 10^{-13}$ GeV é a temperatura da radiação cósmica de fundo hoje e $\Omega_R(T_0) h^2 = 4,3 \times 10^{-5}$ é a abundância da radiação cósmica de fundo.

4.3.3 Vínculos sobre a Produção Direta

Na seção anterior vinculou-se a produção de partículas X s representada pelo parâmetro X_F à abundância delas hoje através da expressão (4.83). Numericamente, os valores de X_F correspondem ao valor do segundo patamar na Figura 4.15. A partir desses valores calcula-se as abundâncias $\Omega_X h^2$.

A Tabela 4.2 mostra alguns resultados numéricos desses dois parâmetros para diferentes temperaturas de reaquecimento T_{rq} e razões de ramificação B_X . Nota-se que para $B_X = 0$ a produção de partículas X s não ocorreria para temperaturas de reaquecimento menores que 10^9 GeV, pelas razões que já foram discutidas anteriormente (veja nota de rodapé da página 110). Dos dados numéricos obtém-se a relação:

$$X_F = 1,55 \times 10^{12} B_X. \quad (4.84)$$

Por outro lado, a relação analítica que é dada por $\rho_X = \rho_\phi B_X$, pode ser reescrita como:

$$\rho_{X_{rq}} = \rho_{\phi_{rq}} B_X. \quad (4.85)$$

Substituindo as expressões (4.81) e (4.82), na relação acima obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{X_F m_\phi^3 m_X}{x_{rq}^3} &= H_{rq}^2 \frac{3M_{Pl}^2}{8\pi} B_X \\ &= \frac{H_i^2 x_i^3}{x_{rq}^3} \frac{3M_{Pl}^2}{8\pi} B_X.\end{aligned}\quad (4.86)$$

Assim,

$$(X_F)_{\text{analítico}} = \frac{3}{8\pi} \frac{H_i^2 M_{Pl}^2}{m_\phi^3 m_X} B_X. \quad (4.87)$$

Utilizando os valores de $H_i = m_\phi$, $m_X = 10^{12}$ GeV e $m_\phi = 10^{13}$ GeV, obtém-se:

$$(X_F)_{\text{analítico}} = 1,78 \times 10^{12} B_X, \quad (4.88)$$

que concorda razoavelmente bem com o valor numérico (4.84).

B_X	$T_{rq} = 10^9 \text{ GeV}$		$T_{rq} = 10^3 \text{ GeV}$		$T_{rq} = 10^{-2} \text{ GeV}$	
	X_F	$\Omega_X h^2$	X_F	$\Omega_X h^2$	X_F	$\Omega_X h^2$
0	$3,3 \times 10^{-6}$	0,38	0	0	0	0
1×10^{-15}	$1,5 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^2$	$1,6 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-4}$	$1,6 \times 10^{-3}$	$1,8 \times 10^{-9}$
1×10^{-11}	16,0	$1,8 \times 10^6$	16,0	1,8	16,0	$1,8 \times 10^{-5}$
1×10^{-9}	$1,6 \times 10^3$	$1,8 \times 10^8$	$1,6 \times 10^3$	$1,8 \times 10^2$	$1,5 \times 10^3$	$1,8 \times 10^{-3}$
1×10^{-5}	$1,6 \times 10^7$	$1,8 \times 10^{12}$	$1,6 \times 10^7$	$1,8 \times 10^6$	$1,5 \times 10^7$	18,0
1×10^{-3}	$1,6 \times 10^9$	$1,8 \times 10^{14}$	$1,6 \times 10^9$	$1,8 \times 10^8$	$1,5 \times 10^9$	$1,8 \times 10^3$

Tabela 4.2: Resultados numéricos para as abundâncias finais obtidas através da solução do sistema de equações de conservação da densidade de energia do universo durante a fase de reaquecimento, para $T_{rq} = 10^9 \text{ GeV}$, 10^3 GeV e 10^{-2} GeV e $B_X < 10^{-3}$.

Esse resultado mostra que a produção de partículas com massa de $m_X = 10^{12} \text{ GeV}$ para temperaturas de reaquecimento menores que 10^9 GeV é majoritariamente direta ($\phi \rightarrow X\bar{X}$).

Substituindo (4.84) em (4.83) obtém-se a expressão:

$$\Omega_X h^2 \simeq 1,80 \times 10^8 \left(\frac{T_{rq}}{\text{GeV}} \right) B_X, \quad (4.89)$$

cujos valores estão na Tabela 4.2. Note que as abundâncias obtidas pelo decaimento direto são muito grandes quando comparadas às abundâncias típicas do universo que são da ordem de 1. Assim, a máxima eficiência do processo direto de decaimento ($\phi \rightarrow X\bar{X}$) é obtida quando T_{rq} é mínima. Para $T_{rq} \simeq 10^{-2} \text{ GeV}$ e o limite superior para a abundância de X ($\Omega_X h^2 \simeq 1$) leva a uma razão de ramificação de $B_X = 10^{-6}$.

Outros limites sobre B_X são encontrados quando as partículas X s são consideradas as fontes dos raios cósmicos de altíssimas energias. No Capítulo 3 foram estudados dois limites impondo que o fluxo observado de raios cósmicos de altíssimas energias pudesse ser explicado com as partículas supermassivas X . O primeiro limite, expressão (3.17), corresponderia a uma vida média máxima para essas partículas e a expressão (3.18) à vida média mínima. Esses limites para uma massa de $m_X = 10^{12} \text{ GeV}$ ficam:

- $\Omega_X h^2 \leq 1$ ($\tau_X \simeq 10^{25}$ anos).
- $\Omega_X h^2 \geq 10^{-15}$ ($\tau_X \simeq 10^{10}$ anos),

e estão ilustrados graficamente na Figura 4.16.

Figura 4.16: Razão de Ramificação B_X do decaimento do inflaton em partículas X s como função da temperatura de reaquecimento T_{rq} para as vidas médias máxima e mínima das partículas X s. Este gráfico foi extraído da referência [16].

4.3.4 Conclusões

Neste trabalho foram estudados limites sobre algumas propriedades das partículas supermassivas metaestáveis X que poderiam ser fontes de raios cósmicos de altíssimas energias. Os principais resultados e discussões estão listados a seguir:

- Foi encontrado uma faixa de valores para a razão de ramificação do decaimento do inflaton em partículas X s como função da temperatura de reaqueci-

mento. É possível visualizar essa faixa de valores na Figura 4.16.

- Para valores muito pequenos da razão de ramificação $B_X \geq 10^{-16}$ a produção direta ($\phi \rightarrow X\bar{X}$) já domina a produção térmica mesmo para $T_{rq} = 10^9$ GeV. Veja Tabela 4.2.

- Para a menor temperatura de reaquecimento possível¹⁰, $T_{rq} = 10^{-2}$ GeV, a produção térmica de partículas X s não ocorre e o mecanismo direto de produção com $B_X \leq 10^{-6}$ seria necessário.

- Esses resultados são válidos se a produção de partículas massivas durante o reaquecimento domina sobre os outros mecanismos de produção que teriam ocorrido antes da produção perturbativa (pré-aquecimento e produção gravitacional), caso contrário ele fornecerá apenas limites superiores da produção. Enquanto mecanismos de pré aquecimento dependem de modelos e portanto existem casos em que ele poderia não ser eficiente, a produção gravitacional parece ser robusta para $m_X \ll H_i$ [19, 20]. Entretanto, em contraste com a produção gravitacional a abundância final de partículas X produzidas pelo mecanismo direto apresentado neste trabalho independe de H_i . Portanto, em princípio seria possível ter situações em que $m_X > H_i$ onde a produção gravitacional seria suprimida e a produção perturbativa passaria a ser importante.

¹⁰A temperatura de reaquecimento mínima é a aquela que não prejudica o mecanismo da nucleossíntese. Veja Capítulo 1.

Discussão e conclusão

Este trabalho teve como objetivo utilizar alguns dos mecanismos de produção de partículas pós inflacionários conhecidos na literatura e aplicá-los em problemas de cosmologia, mais especificamente de matéria e energia escura; e de astrofísica, no estudo dos raios cósmicos de altíssimas energias. O Capítulo 4 mostrou as três aplicações desenvolvidas.

A seção 4.3 trouxe uma aplicação do mecanismo perturbativo de produção de partículas supermassivas X s, com massa de 10^{12} GeV, cujo decaimento hoje explicaria o fluxo de raios cósmicos de altíssimas energias observado. Considerando que essas partículas tenham sido produzidas em quantidade suficiente após a inflação ($\Omega_{X_0} \lesssim 1$) e que tenham sobrevivido até hoje ($\tau_X \gtrsim 10^{10}$ anos), foi possível encontrar possíveis valores que a razão de ramificação do decaimento direto do inflaton em partículas X s assumiria, considerando os valores usuais de temperatura de reaquecimento. O maior valor que ela poderia ter corresponde à menor temperatura de reaquecimento, de 10^{-2} GeV, e seria $B_X \approx 10^{-6}$. Para uma temperatura de reaquecimento de 10^9 GeV esse valor passaria a ser $B_X \approx 10^{-15}$. Ou seja, se uma pequena porcentagem da densidade de energia do inflaton fosse transferida para as partículas X s, via o canal de decaimento direto, já seria possível explicar os raios cósmicos de altíssimas energias. Além disso, verificou-se que, quando se trabalha com a hipótese da produção direta de partículas X s via o decaimento de ϕ , isto é, quando $B_X \neq 0$, essa produção superaria a produção térmica dessas partículas.

Na aplicação da seção 4.2 considerou-se que o universo esteja acelerando devido à existência de um campo escalar que teria sobrevivido desde a época da inflação e cuja densidade de energia estaria dominando hoje. Este é um modelo de quintessência para explicar a energia escura. A partir de um potencial inflacionário quintessencial estudou-se como teria sido o reaquecimento do universo logo após a fase inflacionária, utilizando o mecanismo de produção de partículas FKL, que é não perturbativo. O inflaton transferiria energia, no fim da inflação, a um campo de matéria χ acoplado a ele. Esse campo decairia em partículas relativísticas que reaqueceriam o universo.

Obteve-se numericamente uma expressão para a densidade em número de

partículas produzidas e a partir dela calculou-se a temperatura de reaquecimento.

Esse mecanismo se mostrou muito mais eficiente que a produção gravitacional, usualmente utilizada para reaquecer o universo em modelos inflacionários quintessenciais, fornecendo uma faixa de valores para a temperatura de reaquecimento entre 10^4 GeV e 10^{15} GeV. Porém, uma análise completa do problema deveria considerar qual seria o efeito do acoplamento entre o inflaton e o campo χ para a produção gravitacional.

A seção 4.1 trouxe o detalhamento de uma sugestão feita pelos autores do mecanismo FKL de produzir partículas supermassivas que pudessem explicar raios cósmicos de altíssimas energias hoje. Assumindo que as partículas tenham sido produzidas não-relativisticamente foi construído o espaço de parâmetros deste modelo, ou seja, uma relação entre a massa nua das partículas produzidas no fundo de poço de potencial, m_χ ; o acoplamento entre o inflaton e o campo χ , g ; e o acoplamento entre os campos χ e ψ , g' . O espaço obtido é bastante limitado e requer um ajuste muito fino entre os parâmetros. Esse é um resultado muito interessante, já que a introdução de mais um parâmetro ao modelo, que é o acoplamento g' , não flexibiliza e nem amplia as possibilidades com relação, por exemplo ao pré-aquecimento, mas as restringe ainda mais.

Na verdade, foi verificado que o espaço de parâmetros do modelo é muito pouco sensível às características fenomenológicas dos raios cósmicos como o fluxo observado dessas partículas, a distribuição das partículas supermassivas no halo da galáxia e a função de fragmentação do decaimento delas. Neste sentido, o modelo parece ser pouco atraente. Entretanto, se for possível detectar um corte no espectro de raios cósmicos com energias maiores que 10^{16} GeV, esse modelo torna-se um forte candidato dentre os modelos “de cima para baixo”, pois produz as maiores massas. A dificuldade estaria na detecção deste evento tão energético se o fluxo continuar diminuindo para altas energias como mostra a Figura 3.1. Por outro lado, se um corte for detectado abaixo desta energia esse modelo pode ser completamente descartado. Este é um resultado de muito valor, já que o modelo construído pode ser falseado.

Apesar do objetivo desta aplicação ter sido a viabilidade deste modelo para explicar raios cósmicos de altíssimas energias, verificou-se que a restrição forte do modelo é a da quantidade de matéria escura no universo. Ou seja, a condição cosmológica é robusta e suficiente neste modelo. Por essa razão, é possível estender a conclusão do trabalho para a produção de partículas de matéria escura através do mecanismo FKL. A Figura 4.17 mostra a relação, quase que unívoca, que os parâmetros devem ter para explicar as supostas partículas de matéria escura. Apenas os valores de m_χ , g e g' do segmento de reta são valores possíveis para a produção de partículas de matéria escura segundo esse modelo.

A Figura 4.6 mostra os parâmetros permitidos se a abundância dessas partículas

fosse, por exemplo, 10^{-20} , que são muito próximos dos obtidos para a abundância da ordem de 1. Isso evidencia a robustez desse resultado e a relevância dos dados observacionais sobre o modelo que foi construído. Num primeiro momento, quando o modelo é proposto, ele parece ser altamente especulativo e ajustável a qualquer resultado que se esperaria obter. Porém, como foi estudado, ele se torna extremamente restrito quando os dados observacionais são aplicados.

Figura 4.17: A reta pontilhada representa a relação entre m_{χ} (em unidade de massa de Planck, $m_{\chi_{Pl}}$) e g para a condição da matéria escura $\Omega_b = 0.3$. O segmento de reta cinza corresponde aos parâmetros (m_{χ}, g, g') permitidos para o modelo FKL aplicado ao problema da matéria escura do universo.

Outra conclusão importante desta aplicação é que, no contexto do potencial inflacionário caótico massivo, este mecanismo para produção de partículas supermassivas é o que produz as maiores massas, de aproximadamente 10^{15} GeV até quase 5×10^{17} GeV. Esse resultado pode ser interessante quando aplicados a outros problemas de cosmologia, como por exemplo a bariogênese. As interações e decaimentos de partículas supermassivas poderiam levar a assimetria bárion-antibárion em escalas de teorias de grande unificação [1].

Estas foram as três aplicações desenvolvidas na tese. Para detalhes dos resultados de cada uma das aplicações veja seções 4.3.4, 4.2.6 e 4.1.5 que contém conclusões específicas de cada um deles na ordem que foram apresentados acima.

Se as partículas X s existirem e puderem explicar a matéria escura e os raios cósmicos de altíssimas energias, os modelos estudados fornecem previsões por exemplo, da massa que elas deveriam ter, do acoplamento delas com suas fontes (inflaton ou partículas gordas), da porcentagem de energia do universo primordial que teria sido transferida para essas partículas, de sua vida média, e outras características. O intercâmbio entre a cosmologia e astrofísica pode ser muito

revelador, mas o detalhamento das propostas desta interface é essencial para estabelecer os limites dessa validade.

Apêndice A

Unidades e Escalas

Adota-se o sistema de unidades naturais $\hbar = c = k_B = 1$ de modo que as dimensões das grandezas físicas são dadas por:

$$[\text{Energia}] = [\text{Massa}] = [\text{Temperatura}] = [\text{Comprimento}]^{-1} = [\text{Tempo}]^{-1}.$$

Adota-se como unidade de energia o *elétron-volt* (eV). Mas a escala mais conveniente ao longo do trabalho é *giga elétron-volt* (GeV):

$$1\text{GeV} = 10^3\text{MeV} = 10^6\text{keV} = 10^9\text{eV}$$

Alguns fatores de conversão úteis entre as grandezas físicas são:

Temperatura:	1GeV	=	$1,1605 \times 10^{13}\text{K}$
Massa:	1GeV	=	$1,7827 \times 10^{-24}\text{g}$
Tempo:	1GeV^{-1}	=	$6,5822 \times 10^{-25}\text{s}$
Comprimento:	1GeV^{-1}	=	$1,9733 \times 10^{-14}\text{cm}$
	1Mpc	=	$3,0856 \times 10^{24}\text{cm}$
	1ano luz	=	$9,46 \times 10^{18}\text{cm}$

Apêndice B

Termodinâmica de Equilíbrio

Para definir o equilíbrio térmico de um sistema como o universo primordial, compara-se a taxa de interação entre as partículas (Γ) com a taxa de expansão do Universo (H):

$\Gamma > H$: o equilíbrio térmico é mantido pois a taxa de expansão e portanto de esfriamento do universo é menor que a taxa de interação entre as partículas.

$\Gamma < H$: não há equilíbrio térmico uma vez que a expansão do universo é maior que a taxa de interação entre as partículas.

Partículas em equilíbrio térmico seguem distribuições distintas a depender de sua energia e de sua natureza. As grandezas densidade número de partículas (n), densidade de energia (ρ) e pressão (p) são calculadas a partir dessa distribuição.

B.1 Partículas Não Relativísticas ($m \gg T$)

São aquelas cujas massas (m) são muito maiores que a energia média do universo (T) e seguem a distribuição de Maxwell-Boltzmann. As grandezas n , ρ e p são dadas respectivamente por:

$$n = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{T} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\rho = m n \quad (\text{B.2})$$

$$p = n T \ll \rho \quad (\text{B.3})$$

onde g corresponde aos número de graus de liberdade da espécie

B.2 Partículas Relativísticas ($m \ll T$)

São aquelas cujas massas (m) são muito menores que a energia média do

universo (T) e seguem a distribuição de Bose-Einstein se forem bósons e de Fermi-Dirac se forem férmions. As grandezas n , ρ e p são dadas respectivamente por:

$$n = b_n \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 \quad (\text{B.4})$$

$$\rho = b_\rho \frac{\pi^2}{30} g T^4 \quad (\text{B.5})$$

$$p = \frac{\rho}{3} \quad (\text{B.6})$$

onde g corresponde aos número de graus de liberdade da espécie, $b_n = b_\rho = 1$ para bósons e $b_n = 3/4$, $b_\rho = 7/8$ para férmions, e $\zeta(3) = 1,20206\dots$ é a função zeta de Riemann de 3.

Essas últimas grandezas assumem valores exponencialmente maiores que os valores das espécies não relativísticas. Por essa razão a densidade de energia e pressão de todas as espécies em equilíbrio térmico serão expressas em termos da temperatura da radiação:

$$\rho_R = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad (\text{B.7})$$

$$p_R = \frac{\rho_R}{3} = \frac{\pi^2}{90} g_* T^4 \quad (\text{B.8})$$

onde o termo g_* conta o número efetivo de graus de liberdade para espécies relativísticas j :

$$g_* = \sum_{j=\text{bósons}} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{férmions}} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^4 \quad (\text{B.9})$$

Note esse número total de graus de liberdade depende da temperatura.

B.3 Entropia

Para um sistema em equilíbrio térmico a entropia em um volume comóvel é conservada e a densidade de entropia quando dominada pela contribuição de partículas relativísticas pode ser aproximada por:

$$\frac{S}{V} = \frac{2\pi^2}{45} g_{*S} T^3, \quad (\text{B.10})$$

onde V é o volume comóvel e

$$g_{*S} = \sum_{j=\text{bósons}} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{j=\text{férmions}} g_j \left(\frac{T_j}{T} \right)^3 \quad (\text{B.11})$$

Figura B.1: Evolução de g_* e g_{*S} em função da temperatura, de acordo com o modelo padrão da Física de Partículas Elementares [1]. Para o universo primitivo $g_* = g_{*S} \approx 200$. Para o universo atual $g_* \approx 3,36$ e $g_{*S} \approx 3,91$ [2].

A Figura B.1 mostra a evolução de g_* e g_{*S} em função da temperatura de acordo com o modelo padrão de partículas elementares. Seus valores deixam de ser constantes quando uma espécie torna-se não relativística ou quando ocorre aniquilação de partícula-antipartícula de uma dada espécie transferindo sua entropia para outras partículas relativísticas. Note que os valores de g_* e g_{*S} coincidem na maior parte do espectro. Isso ocorre quando as espécies relativísticas tem a mesma temperatura. Para o universo primitivo $g_* = g_{*S} \approx 200$.

Como a entropia num volume comóvel é conservada,

$$S \propto g_{*S} T^3 a^3 \quad \Rightarrow \quad T \sim \frac{1}{g_{*S}^{1/3} a}, \quad (\text{B.12})$$

ou seja, a temperatura varia com o inverso do fator de escala ($T \propto a^{-1}$) para espécies em equilíbrio térmico.

Apêndice C

Bastidores

Esse Apêndice será dividido em duas partes:

Na primeira apresenta-se a tentativa de um desenvolvimento numérico realizado ao longo do doutoramento, que apesar de inconclusivo nos levou ao caminho do trabalho *Preheating in Quintessential Inflation* [3]. Como encontramos a falha do nosso estudo decidimos registrá-la para quem venha a estudar esta tese e/ou dar continuidade a este trabalho.

Na segunda parte será apresentada uma comparação, ainda inconclusa, de um dos resultados dos trabalhos de D. Chung [6] e Kofman *et al* [5]. Os autores propõe métodos diferentes para resolver um mesmo problema e ainda não sabemos se as soluções obtidas são equivalentes. Acreditamos que essa possa ser uma contribuição útil para a literatura quando finalizada.

C.1 Cálculo Numérico

C.1.1 Objetivo

Tivemos como um dos objetivos do doutoramento verificar numericamente a solução analítica para a densidade em número de partículas com momento k , obtida por Kofman, Linde e Starobinsky [5] e dada pela expressão (2.66):

$$n_k = \exp \left(-\pi \frac{k^2 + m_\chi^2}{g|\dot{\phi}_0|} \right). \quad (\text{C.1})$$

C.1.2 Resultado

Utilizamos o *NDSolve* do software *Mathematica* versão 4.1.

Conseguimos verificar numericamente a expressão acima apenas para massas e momentos pequenos, m_χ e k . Porém, descobrimos que a precisão numérica

disponível no código numérico que utilizamos no *Mathematica* era pequena para alguns dos parâmetros utilizados.

Em princípio não sabíamos se os resultados obtidos eram devido a imprecisão numérica do programa ou se eram resultados físicos que precisavam de interpretação. Depois de realizar alguns testes, enviamos alguns resultados para um especialista em cálculos numéricos nessa área, o físico S. Khlebnikov, que se mostrou descrente com relação a eles. Nos disse que, muito provavelmente, nossos dados não eram confiáveis porque a equação diferencial que calculamos é muito sensível aos parâmetros físicos e nos sugeriu refazer a contas utilizando o método Runge Kutta de sexta ordem. Seguir com os cálculos numéricos significava aprender este método e implementá-lo e não havia tempo. Dessa forma decidimos suspender o desenvolvimento numérico do trabalho e adiá-lo para uma próxima oportunidade.

A seguir apresentamos uma amostra dos resultados que obtivemos.

C.1.3 Amostra dos Resultados Obtidos

Para se ter uma idéia do tipo de resultados que se obtém utilizando o *Mathematica* para esse tipo de cálculo, apresentamos uma amostra.

É preciso resolver numericamente o sistema de três equações, para ϕ , H e X_k , que foi escrito em termos do número de oscilações do campo ϕ , $N = m_\phi t / 2\pi$ e em termos de campos adimensionais, em unidades de massa de Planck:

$$\varphi'' + \frac{\sqrt{48\pi^3}\varphi'}{M_{Pl}} \sqrt{\frac{\varphi'^2}{4\pi^2} + \varphi^2 + 4\pi^2\varphi} = 0, \quad (C.2)$$

$$X_k'' + \left(\frac{2\pi}{m_\phi}\right)^2 \left\{ \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2\phi^2 \right\} X_k = 0. \quad (C.3)$$

A linha representa a derivada com relação a N . O sistema foi resolvido numericamente com o *NDSolve* do Programa *Mathematica* versão 4.1 para diferentes valores de m_χ e k e g inicialmente com um computador com 64Mb de memória RAM.

A partir da solução numérica de X_k a densidade em número foi calculada pela expressão (2.52):

$$n_k = \frac{\omega_k}{2} \left(\frac{|\dot{X}_k|^2}{\omega_k^2} + |X_k|^2 \right) - \frac{1}{2} \quad (C.4)$$

e graficada em função do número de oscilações N .

Considere, por exemplo, o caso $g = 5 \times 10^{-4}$, $k = 0$. A sequência de gráficos que seguem, Figuras C.1 a C.11, mostram o comportamento da densidade em número de partículas, n_k com a variável número de oscilações N . Lembre-se que $N \approx 0.5$ corresponde a primeira passagem do inflaton no mínimo do poço de potencial quadrático e $N \approx 0.7$ corresponde ao ponto de retorno (amplitude máxima).

Note que o número de partículas produzidos na primeira oscilação do campo ϕ diminui a medida que o valor de m_χ aumenta.

Figura C.1: $m_\chi = 0$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.2: $m_\chi = m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.3: $m_\chi = 2m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.4: $m_\chi = 3m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.5: $m_\chi = 4m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.6: $m_\chi = 5m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.7: $m_\chi = 6m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.8: $m_\chi = 7m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.9: $m_\chi = 8m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.10: $m_\chi = 9m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.11: $m_\chi = 10m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.12: Cada curva está relacionada aos parâmetros $m_\chi = 0$, $m_\chi = m_\phi$, $m_\chi = 2m_\phi$, $m_\chi = 3m_\phi$, $m_\chi = 4m_\phi$, $m_\chi = 5m_\phi$, $m_\chi = 6m_\phi$, $m_\chi = 7m_\phi$, $m_\chi = 8m_\phi$ de cima para baixo, respectivamente, com $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

A Figura C.12 mostra as oito primeiras curvas graficadas num mesmo gráfico. É razoável escolher a estabilização do número de partículas produzidas em $N \approx 0.7$, em particular foi escolhido o ponto de máxima amplitude do campo ϕ obtido numericamente e dado por $N = 0.70288$. Assim, computa-se os valores $n_k(0.70288)$ para cada massa e obtém-se uma expressão numérica para n_k dada por:

$$n_k = \exp \left(-0.070975 \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right). \quad (\text{C.5})$$

Substituindo $k = 0$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $|\dot{\phi}_0| = 0.56084 M_{Pl}$ (obtido numericamente) na expressão analítica (C.1), obtém-se:

$$n_k = \exp \left(-0.07039 \frac{m_\chi^2}{m_\phi^2} \right). \quad (\text{C.6})$$

Comparando (C.5) e (C.6) vemos que a expressão numérica reproduz razoavelmente bem a expressão analítica. Porém, os valores de n_k numérico e analítico são compatíveis até $m_\chi \sim 12 m_\phi$ para o g adotado. Veja a Tabela C.1.

A Figura C.13 ilustra esse resultado. Ela mostra o gráfico da densidade em número em função da massa das partículas, $\ln(n_k) \times m_\chi$.

Nota-se uma variação abrupta no comportamento inicial da curva. Os valores iniciais da Figura C.13 foram graficados juntamente com a expressão analítica (C.6) para os mesmos parâmetros e é mostrado na Figura C.14 de onde conclui-se que a região inicial do gráfico C.13 está razoavelmente de acordo com o resultado analítico.

m_χ	$n_k(0.70288)$ numérico	n_k analítico
$9m_\phi$	0.003419	0.003341
$10m_\phi$	0.000906	0.000877
$11m_\phi$	0.000224	0.000200
$12m_\phi$	5.4891×10^{-5}	3.9620×10^{-5}
$13m_\phi$	1.0066×10^{-5}	0.6818×10^{-5}
$14m_\phi$	0.0742×10^{-5}	0.1019×10^{-5}
$15m_\phi$	0.0833×10^{-5}	0.0132×10^{-5}
$16m_\phi$	0.0991×10^{-5}	0.0015×10^{-5}
$17m_\phi$	0.1527×10^{-5}	0.0001×10^{-5}

Tabela C.1: Valores da densidade em número de partículas n_k numérico e analítico para diferentes valores de massa m_χ .

Figura C.13: $\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)

Figura C.14: $\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)

A medida que as massas consideradas aumentavam, a obtenção dos valores de n_k , para os mesmos parâmetros de precisão do programa, se mostrava incerta. Assim, rodávamos o programa para cada uma das massas aumentando os parâmetros de precisão do *Mathematica* e considerávamos o valor quando a precisão anterior se mantinha. Os parâmetros de precisão para resolver uma equação diferencial com o *solver default* no *Mathematica* são denotados nas tabelas por:

$AG = \text{AccuracyGoal}$ $PG = \text{PrecisionGoal}$ $WP = \text{WorkingPrecision}$

A Tabela C.2 mostra os valores obtidos em cada rodada do programa e ilustra o procedimento adotado para a escolha dos valores da Figura (C.13). Essa nos pareceu uma forma de controlar os resultados obtidos. Imaginávamos que se houvesse flutuação numérica nos resultados, os valores obtidos em diferentes rodadas seriam diferentes. Mas eles pareciam se repetir e por essa razão buscávamos uma interpretação física para eles. A pergunta que gostaríamos de responder era:

Será que a partir de um certo valor da massa de χ a produção de partículas não seria mais exponencialmente suprimida?

• $g = 5 \times 10^{-4}$

m_χ	AG	PG	WP	$n_k(0.70288)$ num
$12m_\phi$	8	8	12	5.58017×10^{-5}
	12	12	24	5.50599×10^{-5}
	15	15	24	5.50602×10^{-5}
$13m_\phi$	8	8	12	1.0378×10^{-5}
	12	12	24	1.02912×10^{-5}
	15	15	24	1.02915×10^{-5}
$14m_\phi$	8	8	12	6.98146×10^{-7}
	12	12	24	2.96186×10^{-7}
	15	15	24	2.96464×10^{-7}
$15m_\phi$	8	8	12	1.19997×10^{-6}
	12	12	24	3.6567×10^{-7}
	15	15	24	3.65896×10^{-7}
$16m_\phi$	8	8	12	1.06845×10^{-6}
	12	12	24	6.79026×10^{-7}
	15	15	24	6.79308×10^{-7}
$17m_\phi$	8	8	12	1.45941×10^{-6}
	12	12	24	5.65317×10^{-7}
	15	15	24	5.65646×10^{-7}

m_χ	AG	PG	WP	$n_k(0.70288)$ num
$18m_\phi$	8	8	12	1.43379×10^{-6}
	12	12	24	5.28612×10^{-7}
	15	15	24	5.28967×10^{-7}
$19m_\phi$	8	8	12	1.45509×10^{-6}
	12	12	24	4.20635×10^{-7}
	15	15	24	4.20989×10^{-7}
$20m_\phi$	8	8	12	1.77926×10^{-6}
	12	12	24	5.94847×10^{-7}
	15	15	24	5.95163×10^{-7}
	18	18	24	5.95163×10^{-7}
$25m_\phi$	15	15	24	4.97399×10^{-7}
	18	18	24	4.60095×10^{-7}
$30m_\phi$	12	12	24	4.59608×10^{-7}
	15	15	24	4.60095×10^{-7}
	18	18	24	4.60095×10^{-7}
$40m_\phi$	12	12	24	3.94138×10^{-7}
	15	15	24	3.94684×10^{-7}
$50m_\phi$	12	12	24	3.7874×10^{-7}
	15	15	24	3.79379×10^{-7}
	16	16	24	3.7938×10^{-7}
$60m_\phi$	12	12	24	3.21535×10^{-7}
	15	15	24	3.22079×10^{-7}
	16	16	24	3.22079×10^{-7}
$70m_\phi$	12	12	24	2.6966×10^{-7}
	15	15	24	2.70279×10^{-7}
	16	16	24	2.7028×10^{-7}

m_χ	AG	PG	WP	$n_k(0.70288)$ num
$80m_\phi$	12	12	24	2.24882×10^{-7}
	15	15	24	2.25545×10^{-7}
	16	16	24	2.25545×10^{-7}
$90m_\phi$	12	12	24	1.87583×10^{-7}
	15	15	24	1.88266×10^{-7}
	16	16	24	1.88266×10^{-7}
$100m_\phi$	12	12	24	1.54175×10^{-7}
	15	15	24	1.54817×10^{-7}
$200m_\phi$	12	12	24	1.8141×10^{-8}
	15	15	24	1.90877×10^{-8}
	16	16	24	1.90885×10^{-8}

Tabela C.2: Valores da densidade em número de partículas n_k numérico para diferentes valores de massa m_χ e para diferentes parâmetros de precisão do *software Mathematica*. Os valores de n_k numérico graficados na Figura C.13 correspondem a última linha de cada massa.

Verificou-se o comportamento numérico de n_k para outros parâmetros físicos. Por exemplo, o mesmo procedimento anterior foi realizado para diferentes valores de g . As Figuras C.15 e C.16 mostram a dependência de n_k com m_χ para $g = 10^{-4}$ e as Figuras C.17 e C.18, para $g = 10^{-3}$.

• $g = 10^{-4}$

Figura C.15: $\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)

Figura C.16: $\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)

• $g = 10^{-3}$

Figura C.17: $\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)

Os gráficos acima mostram que para diferentes g s a expressão analítica de L. Kofman *et al.* é reproduzida de forma razoável para massas pequenas e o comportamento muda completamente para massas grandes.

Interessante é que nessa mesma época nos interessamos pelo artigo de D. Chung [22] que se propõe a calcular a produção χ s massivos pelo pré-aquecimento. Nesse caso o que importa é a produção de partículas na primeira passagem de ϕ no fundo do poço de potencial. A expressão obtida por ele parecia diferente da obtida por L. Kofman *et al.* e isso nos deixava mais intrigados, porque talvez nossos resultados estivessem evidenciando essa diferença¹. Testes mais precisos

¹A comparação entre os resultados de D. Chung e L. Kofman *et al.* será vista com detalhes na próxima seção.

Figura C.18: $\ln(n_k)$ X m_χ (em unidades de m_ϕ)

pareciam inviáveis pois o tempo de máquina aumentava muito com o aumento dos parâmetros físicos e também com o aumento da precisão numérica. Na verdade, o tempo maior era gasto quando graficava-se n_k em função de N . Decidimos rodar o programa num computador de 256Mb de memória RAM para otimizar o tempo de máquina mas também não conseguimos quando os parâmetros m_χ e k eram da ordem de $10^3 m_\phi$ e $g > 10^{-3}$.

Foi então que decidimos enviar a amostra de nossos resultados para o físico Khlebnikov, que como dissemos se mostrou muito descrente com relação a eles e sugeriu refazer a contas utilizando o método Runge Kutta de sexta ordem.

Um exemplo de que os resultados obtidos não estavam correspondendo a uma resultado físico é quando grafica-se n_k para mais de uma oscilação. Vimos ao longo do trabalho que a produção, se ocorrer, será no fundo de poço de potencial, ou seja, nas meias oscilações do campo ϕ que correspondem a $N \approx 0.5, 1.0, 1.5, \text{etc.}$. A Figura C.19, que corresponde aos parâmetros $m_\chi = 10m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$ mostra esse comportamento. Note que a curva fica instável próximo às regiões que correspondem às meias oscilações e tende a se estabilizar longe daí. Já a Figura C.20, que corresponde aos parâmetros $m_\chi = 100m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$ não mostra isso. Note que parece existir nós de envoltórias a cada um quarto de oscilação.

Diante deste cenário decidimos abandonar nosso objetivo inicial pois não haveria tempo hábil para resolver esse problema até o fim do doutoramento.

Figura C.19: $n_k \times N$. $m_\chi = 10m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

Figura C.20: $n_k \times N$. $m_\chi = 100m_\phi$, $g = 5 \times 10^{-4}$ e $k = 0$.

C.1.4 Conclusão

Para resolver numericamente o problema de produção de partículas massivas lembre-se:

- O número de partículas produzidas será determinado a partir da solução da equação de oscilador associado ao campo dessas partículas:

$$X_k'' + \left(\frac{2\pi}{m_\phi} \right)^2 \left\{ \frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2 \phi^2 \right\} X_k = 0. \quad (C.7)$$

Quanto maior a frequência de oscilação deste campo menor será os intervalos de tempo que devem ser considerados na solução numérica da equação. E esta deve ser a razão da sensibilidade desta solução.

- Para frequências grandes, que segundo equação acima corresponde a parâmetros m_χ , k e g grandes, o solver *default* do *software Mathematica* versão 4.1, não parece um bom método numérico para resolver este problema. Segundo S. Khlebnikov o método mais aconselhável é o de Runge Kutta de sexta ordem, pois ele é capaz de controlar melhor a instabilidade deste tipo de sistema.

C.2 Comparação Analítica

C.2.1 Objetivo

Comparar os resultados analíticos para a densidade em número de partículas n_χ e a abundância atual das partículas χ dos trabalhos de D. Chung [6] e Felder *et al.* [4] (ou Kofman *et al.* [5]).

C.2.2 Resultado

Ainda não conseguimos obter resultados conclusivos.

C.2.3 Histórico do Problema

Quando aplicamos o mecanismo FKL ao problema de raios cósmicos concluímos que ele só seria viável se massas χ grandes fossem produzidas no fundo de poço de potencial a fim de garantir a supressão do número dessas partículas (veja seção 4.1).

D. Chung em seu artigo [6] desenvolveu uma formulação geral para a produção de partículas supermassivas através do mecanismo de pré aquecimento diferente da de Kofman, Linde e Starobinsky no artigo [5]. Quando partículas supermassivas são produzidas não ocorre ressonância paramétrica e apenas importa a primeira passagem do inflaton pelo mínimo de seu potencial para a densidade em número de partículas total.

Ou seja, os dois trabalhos estão interessados em verificar como seria a produção de partículas supermassivas no fundo de poço de potencial. A diferença é que

✓ No primeiro, a massa da partícula é inicialmente um parâmetro livre do problema e foi determinada pela fenomenologia. A produção de partículas apenas na primeira passagem do inflaton no fundo de poço é uma condição imposta a priori.

✓ No segundo, a massa é um parâmetro escolhido previamente que poderia ser produzido em qualquer oscilação do campo inflaton, desde que haja energia disponível para isso.

Apesar das motivações dos trabalhos serem diferentes como delineado acima, o resultado de partículas supermassivas produzidas apenas na primeira passagem do inflaton no fundo de poço de potencial é a mesma. Diante deste cenário surgiu a idéia de comparar os dois artigos, em particular as expressões para a densidade em número n_k , que pareciam, num primeiro momento, bastante diferentes.

Interessante é que D. Chung ao ser consultado sobre a idéia da comparação disse que nunca havia pensado sobre ela. Isso pareceu bastante motivador porque atualmente a literatura traz duas expressões que são aparentemente diferentes como solução de um mesmo problema. Esclarecer a equivalência entre elas e/ou os limites desta comparação nos pareceu um problema atraente e útil.

A seguir será apresentado três passos desta comparação e depois uma discussão.

C.2.4 Passo 1: Densidade Número de Partículas

No artigo de Chung trabalha-se com a mesma lagrangiana (??), de onde obtém-se a equação de Euler-Lagrange para o campo χ e consequentemente as equações de movimento para os modos, k , deste campo, h_k , de forma análoga à seção 2.3.1. Porém, as equações são escritas em termos do tempo conforme, η e a equação diferencial que o artigo procura resolver é:

$$h_k''(\eta) + [k^2 + m_\chi^2 c(\eta)] h_k(\eta) = 0. \quad (C.8)$$

onde

$$c(\eta) = \left[1 + \frac{g^2 \phi^2(\eta)}{m_\chi^2} \right] a^2(\eta), \quad (C.9)$$

e é análoga à equação diferencial para os modos $X_k(t)$ que temos trabalhado,

$$\ddot{X}_k(t) + \left[\frac{k^2}{a^2(t)} + m_X^2 + g^2 \phi^2(t) \right] X_k = 0. \quad (C.10)$$

O ponto significa derivada com relação a t . O termo $c(\eta)$ em (C.8) pode ser pensado como a raiz quadrada de um fator de escala efetivo, a depender do campo clássico de fundo que esteja acoplado a χ .

O método adotado por Chung para resolver a equação diferencial acima foi baseado num artigo de E. Brezin e C. Itzykson [7] de 1970 e é bastante geral. Porém, ele estudou o campo ϕ sujeito ao potencial massivo, $V(\phi) = m_\phi^2 \phi^2/2$. Seguem as expressões obtidas por ele e por Kofman *et al.* para a densidade em número de partículas:

- Kofman *et al.*

$$n_k = \exp \left(-\pi \frac{k^2/a^2 + m_\chi^2}{g|\dot{\phi}_0|} \right) \quad (C.11)$$

- Chung

$$n_k = \exp \left[-4 \left(\frac{k^2/a_{eff}^2}{m_\chi \sqrt{H_{eff}^2 + R_{eff}/6}} + \frac{m_\chi}{\sqrt{H_{eff}^2 + R_{eff}/6}} \right) \right] \quad (C.12)$$

onde

$$H_{eff}^2 + R_{eff}/6 = \frac{c(r)''}{2c(r)^2}; \quad a_{eff} = \sqrt{c}, \quad (C.13)$$

e r corresponde ao instante em que a variação não é mais adiabática. Chung estabelece um método para encontrar esse instante que segundo nossos cálculos ele é tal que $\phi(r) = 0$, ou seja, trata-se do fundo de poço de potencial de ϕ .

Derivando (C.9) com relação a η e desprezando a variação em $a(\eta)^2$ obtém-se,

$$c'(\eta) = \frac{2g^2\phi\phi'}{m_\chi^2}a^2; \quad c''(\eta) = \frac{2g^2}{m_\chi^2}a^2(\phi'^2 + \phi\phi''). \quad (C.14)$$

Substituindo em (C.13)

$$\sqrt{\frac{c''}{2c^2}} = \frac{gm_\chi}{a} \frac{\sqrt{\phi'^2 + \phi\phi''}}{(m_\chi^2 + g^2\phi^2)} = \frac{g}{m_\chi a} \frac{\sqrt{\phi'^2 + \phi\phi''}}{(1 + g^2\phi^2/m_\chi^2)}. \quad (C.15)$$

Teremos então:

$$\sqrt{\frac{c''}{2c^2}} = \frac{g}{m_\chi} \frac{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \phi\ddot{\phi}}}{(1 + g^2\phi^2/m_\chi^2)}. \quad (C.16)$$

onde usamos que $\phi' = \dot{\phi}a$.

Se lembrarmos que a solução de $\phi(t) \propto \sin(m_\phi t)$, segundo equação (2.6), concluímos $\ddot{\phi} \propto \sin^2(m_\phi t)$, já que estamos desprezando a variação do fator de escala. Isso significa que no fundo de poço de potencial o segundo termo da raiz quadrada pode ser desprezado com relação ao primeiro que será proporcional a $\cos^2(m_\phi t)$. Assim, a expressão acima pode ser aproximada por:

$$\sqrt{\frac{c''}{2c^2}} \approx \frac{g}{m_\chi} \frac{\dot{\phi}}{(1 + g^2\phi^2/m_\chi^2)}. \quad (C.17)$$

Então,

- 1º termo da exponencial da expressão (C.12):

$$\frac{k^2/a_{eff}^2}{m_\chi \sqrt{H_{eff}^2 + R_{eff}/6}} = \frac{k^2/c}{m_\chi \sqrt{\frac{c''}{2c^2}}} = \frac{k^2/a^2}{g\dot{\phi}}. \quad (C.18)$$

- 2º termo da exponencial da expressão (C.12):

$$\frac{m_\chi}{\sqrt{H_{eff}^2 + R_{eff}/6}} = \frac{m_\chi}{\sqrt{\frac{c''}{2c^2}}} = \frac{m_\chi^2 + g^2\phi^2}{g\dot{\phi}}. \quad (C.19)$$

²Acreditamos que essa seja uma boa aproximação segundo análise da expressão (2.48).

Substituindo esses valores na expressão (C.12).

$$n_k = \exp \left[-4 \left(\frac{k^2/a^2 + m_\chi^2 + g^2\phi^2(r)}{g\dot{\phi}(r)} \right) \right]. \quad (\text{C.20})$$

A expressão acima difere da de Kofman dada por (C.11) pelo último termo da exponencial que aparentemente se anula quando calculado no ponto r e pelo fator 4 no lugar de π .

Podemos fazer o mesmo raciocínio para n_χ e obteremos uma conclusão parecida, veja:

- Kofman *et al.*

$$n_\chi = \frac{(g|\dot{\phi}_0|)^{3/2}}{8\pi^3} \exp \left(-\pi \frac{m_\chi^2}{g|\dot{\phi}_0|} \right) \quad (\text{C.21})$$

- Chung

$$n_\chi = \frac{a_{eff}^3}{8\pi^{3/2}a^3} \exp \left(-4 \frac{m_\chi}{\sqrt{H_{eff}^2 + R_{eff}/6}} \right) \left(\frac{m_\chi}{4} \sqrt{H_{eff}^2 + R_{eff}/6} \right)^{3/2} \quad (\text{C.22})$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$n_\chi = \frac{(g|\dot{\phi}_0|)^{3/2}}{8(4\pi)^{3/2}} \exp \left(-4 \frac{(m_\chi^2 + g^2\phi^2(r))}{g\dot{\phi}(r)} \right). \quad (\text{C.23})$$

Em síntese este primeiro passo na comparação nos fornece as seguintes informações

✓ As expressões (C.11) e (C.12), bem como (C.21) e (C.22) parecem ser equivalentes.

✓ O ponto $\eta = r$ considerado é tal que $\phi(r) \approx 0$. Segundo o artigo de Chung esse deve ser o ponto onde a quebra de adiabaticidade é máxima.

✓ Foi desprezada a variação de $a(\eta)$ no momento da produção e o termo $\phi(r)\ddot{\phi}(r)$ comparado a $\dot{\phi}^2(r)$.

C.2.5 Passo 2: Abundância

Vamos tomar como base de comparação a Figura 6 do artigo de Chung, que foi reproduzida na Figura C.21, onde ele apresenta seus dados numéricos e analíticos para a abundância das partículas produzidas em função de suas massas para

$$\frac{g M_{Pl}}{H_i} = 1000 \Rightarrow g = \frac{1000 H_i}{M_{Pl}} \Rightarrow g = 10^{-3}. \quad (C.24)$$

O parâmetro de Hubble no fim da inflação caótica é dado por $H_i = 10^{-6} M_{Pl}$.

Figura C.21: A curva sólida é o resultado numérico. As curvas pontilhadas correspondem a expressões analíticas com diferentes escolhas de um fator de correção. Essa informação não será aqui utilizada, mas para detalhes ver artigo [6] de onde o gráfico foi extraído.

Vamos nos fixar em uma massa do gráfico:

$$\frac{m_\chi}{H_i} = 25 \Rightarrow m_\chi = 25 \times 10^{-6} M_{Pl} \quad (C.25)$$

que corresponde a $\Omega_\chi h^2 \approx 10^5$.

Por outro lado, considere a expressão para n_χ de Kofman:

$$n_\chi = \frac{(g|\dot{\phi}_0|)^{3/2}}{8\pi^3} \exp\left(-\pi \frac{m_\chi^2}{g|\dot{\phi}_0|}\right), \quad (C.26)$$

onde os seguintes valores serão substituídos:

$$\begin{aligned} \sqrt{|\dot{\phi}_0|} &= m_\phi \Phi \approx (10^{-6} M_{Pl} \times 10^{-1} M_{Pl}) = 10^{-7} M_{Pl}^2, \\ \sqrt{g} &= 10^{-3} \\ \sqrt{m_\chi} &= 25 \times 10^{-6} M_{Pl} \end{aligned}$$

Obtemos:

$$n_\chi = \frac{(10^{-3} \times 10^{-7} M_{Pl}^2)^{3/2}}{8\pi^3} \exp\left(-\pi \frac{(25 \times 10^{-6} M_{Pl})^2}{10^{-3} \times 10^{-7} M_{Pl}^2}\right) \approx 10^{31}. \quad (C.27)$$

A abundância para a temperatura de reaquecimento 10^9 GeV pode ser escrita, segundo artigo do Chung, como:

$$\Omega_\chi h^2 \sim 10^{17} \frac{\rho_\chi(t_e)}{\rho(t_e)}, \quad (\text{C.28})$$

onde t_e representa o fim da inflação. Podemos reescrever essa expressão da seguinte maneira para este caso particular (isto é, partícula supermassiva e potencial caótico massivo),

$$\Omega_\chi h^2 \sim 10^{17} \frac{m_\chi n_\chi(t_e)}{(m_\phi \Phi(t_e))^2/2} \quad (\text{C.29})$$

Substituindo a densidade em número de partículas da expressão (C.27) na expressão (C.29) de Chung e lembrando que $\Phi(t_e) \approx M_{Pl}/3$ tem-se:

$$\Omega_\chi h^2 \sim 10^{17} \frac{(25 \times 10^{-6} M_{Pl}) 10^{31}}{(10^{-6} M_{Pl}^2/3)^2/2} \approx 0,5. \quad (\text{C.30})$$

Em síntese, o resultado desta comparação indica que:

✓Resultado Gráfico: utilizando o gráfico extraído do artigo de Chung [6], verifica-se que para $g = 10^{-3}$:

$$m_\chi = 25 \times 10^{-6} M_{Pl} \Rightarrow \Omega_\chi h^2 \approx 10^5. \quad (\text{C.31})$$

✓Resultado Analítico: utilizando os mesmos dados para g e m_χ do item anterior na expressão analítica (C.26) da densidade em número de partículas obtida por Kofman *et al.*, e calculando a abundância pela expressão analítica (C.29) de Chung, obtém-se:

$$m_\chi = 25 \times 10^{-6} M_{Pl} \Rightarrow \Omega_\chi h^2 \approx 0,5. \quad (\text{C.32})$$

✓Inferindo que Chung tenha usado sua expressão analítica (C.29) para graficar a Figura C.21, concluímos que a expressão para n_χ de Chung é diferente da de Kofman. Isso contradiria o resultado do Passo 1.

C.2.6 Passo 3: Kofman *et al.*, um teste de Chung

Em seu artigo, depois de resolver analiticamente a equação geral (C.8) para um $c(\eta)$ genérico, Chung compara seu resultado a uma solução exata desta equação escolhendo um $c(\eta)$ específico. Essa é uma maneira efetiva de verificar seu resultado. Ele escolhe:

$$c(\eta) = c_1^2 + c_2^2 \eta^2, \quad (\text{C.33})$$

que leva a uma solução exata da equação (C.8) e é um resultado conhecido e registrado, por exemplo no livro de Birrel and Davies [8]. A equação diferencial (C.8) fica, com essa escolha de $c(\eta)$:

$$\frac{d^2 h_k}{d\eta^2} + (k^2 + m_X^2 c_1^2 + m_X^2 c_2^2 \eta^2) h_k = 0. \quad (C.34)$$

Considere a mudança de variáveis:

$$T = \sqrt{m_X c_2} \eta \rightarrow \frac{d}{d\eta} = \frac{d}{dT} \sqrt{m_X c_2} \quad (C.35)$$

e

$$Q^2 = (k^2 + m_X^2 c_1^2) \frac{1}{m_X c_2} \quad (C.36)$$

que substituídas na equação diferencial (C.34) resulta:

$$\frac{d^2 h_k}{dT^2} + (Q^2 + T^2) X_k = 0 \quad (C.37)$$

A solução dessa equação é dada por [8]:

$$n_k = \exp(-\pi Q^2) = \exp \left[-\pi \left(\frac{k^2 + m_X^2 c_1^2}{m_X c_2} \right) \right] \quad (C.38)$$

e corresponde à uma solução aproximadamente igual a obtida por Chung.

Por outro lado, consideremos agora a equação (C.10). Em seu artigo, Kofman *et al* trabalham com a aproximação de fundo de poço para resolver analiticamente essa equação. Essa aproximação foi estudada na seção 2.3.2. Ela basicamente aproxima $\phi(t) \approx \Phi m_\phi(t - t_j)$, onde t_j corresponde a j -ésima passagem do inflaton no fundo do poço. Como estamos interessados apenas na primeira passagem, reescreveremos a equação diferencial da seguinte maneira:

$$\frac{d^2 X_k}{dt^2} + \left[\frac{k^2}{a^2} + m_X^2 + g^2 \Phi^2 m^2 (t - t_1)^2 \right] X_k = 0 \quad (C.39)$$

Fazendo a seguinte substituição de variáveis:

$$\tau = \sqrt{gm\Phi}(t - t_1) \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau} \sqrt{gm\Phi}, \quad (C.40)$$

$$\kappa^2 = \left(\frac{k^2}{a^2} + m_X^2 \right) \frac{1}{gm\Phi}, \quad (C.41)$$

na equação (C.39), ficamos com:

$$\frac{d^2 X_k}{d\tau^2} + (\kappa^2 + \tau^2) X_k = 0, \quad (C.42)$$

que é a mesma equação que (C.37). Portanto a solução será análoga:

$$n_k = \exp(-\pi\kappa^2) = \exp\left[-\pi\left(\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2\right)\frac{1}{gm\Phi}\right]. \quad (\text{C.43})$$

Vamos nos concentrar na dependência com m_χ nas expressões (C.38) e (C.43). Se não soubermos quanto vale c_1 e c_2 , o comportamento da supressão com m_χ parece ser completamente diferente. Veja, por exemplo, fazendo $k = 0$, teremos no primeiro caso:

$$n_k = \exp\left(-\pi\frac{m_\chi c_1^2}{c_2}\right), \quad (\text{C.44})$$

ou seja a supressão vai com m_χ , enquanto que no segundo caso:

$$n_k = \exp\left(-\pi\frac{m_\chi^2}{gm\Phi}\right), \quad (\text{C.45})$$

vai com m_χ^2 .

Mas podemos tentar transformar a equação (C.39) para coordenadas conformes e descobrir qual é o c_1 e c_2 que completa a analogia. Como,

$$a\eta = t \rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a} \frac{d}{d\eta}. \quad (\text{C.46})$$

a equação diferencial (C.39) fica:

$$\frac{1}{a^2} \frac{d^2 X_k}{d\eta^2} + \left[\frac{k^2}{a^2} + m_\chi^2 + g^2 \Phi^2 m^2 a^2 (\eta - \eta_1)^2 \right] X_k = 0. \quad (\text{C.47})$$

Multiplicando todos os termos por a^2 :

$$\frac{d^2 X_k}{d\eta^2} + (k^2 + m_\chi^2 a^2 + g^2 \Phi^2 m^2 a^4 (\eta - \eta_1)^2) X_k = 0. \quad (\text{C.48})$$

Ou ainda:

$$\frac{d^2 X_k}{d\eta^2} + \left[k^2 + m_\chi^2 \left(a^2 + \frac{g^2 \Phi^2 m^2}{m_\chi^2} a^4 (\eta - \eta_1)^2 \right) \right] X_k = 0. \quad (\text{C.49})$$

Da expressão acima temos que:

$$c(\eta) = \left[1 + \frac{g^2 \Phi^2 m^2}{m_\chi^2} a^2 (\eta - \eta_1)^2 \right] a^2. \quad (\text{C.50})$$

Concluimos portanto que:

$$c_1^2 = a^2, \quad c_2^2 = \frac{g^2 \Phi^2 m^2}{m_\chi^2} a^4. \quad (\text{C.51})$$

Substituindo os parâmetros c_1 e c_2 acima na solução da densidade em número de partículas (C.44), ficamos com:

$$n_k = \exp \left[-\pi \left(\frac{m_X a^2}{a^2 g \Phi m / m_X} \right) \right] = \exp \left(-\pi \frac{m_X^2}{g m \Phi} \right), \quad (\text{C.52})$$

que é igual a solução (C.45) do Kofman *et al.*!!

Em síntese temos que:

✓ O problema original que deseja-se resolver é a equação diferencial (C.8) com $c(\eta)$ dado por (C.9).

✓ Verificamos que a solução genérica de Chung (sem especificar $c(\eta)$), quando aplicada a um caso particular, $c(\eta) = c_1^2 + c_2^2 \eta^2$, fornece a solução do problema original obtido por Kofman *et al* quando $c_1^2 = a^2$ e $c_2^2 = (g^2 \Phi^2 m^2 / m_X^2) a^4$.

✓ As soluções obtidas por Kofman *et al.* e por Chung do problema original parecem ser diferentes.

C.2.7 Discussão

Diante dos três passos apresentados, percebe-se que ainda não é possível afirmar que as soluções dos autores sejam equivalentes. O primeiro passo parece mostrar que elas são equivalentes diferentemente do segundo e do terceiro. As particularidades de cada comparação nos pareceu bastante intrigantes. Talvez a equivalência se dê para uma região específica de parâmetros. De qualquer forma uma análise mais cuidadosa será necessária.

Referências

Capítulo 1

- [1] E. A. Hubble, *Proc. Nat. Acad.* 15, 168 (1929).
- [2] R. Alpher e R. Herman, *Nature* 162, 774 (1948).
- [3] A. A. Penzias e R. W. Wilson, *Astrophys. J.* 142, 419 (1965).
- [4] J. C. Mather *et al.*, *Astrophys. J.* 512, 511 (1999).
- [5] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* 23, 347 (1981).
- [6] Veja [<http://map.gsfc.nasa.gov/>].
- [7] J. Kovac *et al.*, [[arXiv:astro-ph/0209478](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0209478)].
- [8] Veja [<http://astro.estec.esa.nl/Planck/>].
- [9] D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Supp.* 148, 175 (2003).
- [10] S. Burles *et al.*, *ApJ.* 552, L1 (2001).
- [11] F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta* 6, 510 (1933).
- [12] V. Rubin *et al.*, *Astrophys. J.* 238, 471 (1980).
- [13] S. Khalil e C. Muñoz, *Contemp. Phys.* 43, 51 (2002).
- [14] Y. Ramachers, [[arXiv:astro-ph/0211500](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0211500)].
- [15] E. W. Kolb, D. J. H. Chung e A. Riotto, [[arXiv:hep-ph/9810361](http://arxiv.org/abs/hep-ph/9810361)].
- [16] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* 517, 565 (1999).
- [17] A. Riess *et al.*, *Astrophys. J.* 116, 1009 (1998).
- [18] W. L. Freedman e M. S. Turner, *Rev. Mod. Phys.* 75, 1433 (2003).
- [19] A. R. Liddle e D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [20] S. Sakar, *Rep. Prog. Phys.* 59, 1493 (1996).
- [21] E. Kolb e M. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, 1990.
- [22] H. V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* 148, 213 (2003).
- [23] J. Peacock, "The Early Universe", curso apresentado na *Harry Messel International Science School* (Sydney, julho 2003) [www.roe.ac.uk/~jap].
- [24] J. Narlikar, *Introduction to Cosmology*, Cambridge, 1993.
- [25] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, 1972.
- [26] W. L. Freedman *et al.*, *Astrophys. J.* 553, 47 (2001).
- [27] J. L. Tonry *et al.*, [[arXiv:astro-ph/0305008](http://arxiv.org/abs/astro-ph/0305008)].

- [28] R. Aldrovandi, J. G. Pereira, *An Introduction Course on Physical Cosmology*, apostila do curso de Introdução à Cosmologia do IFT.
- [29] W. de Sitter, Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam), 19, 1217 (1917); 20, 229 (1917).
- [30] A. D. Linde, Phys. Lett. 129B, 177 (1983).
- [31] A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publishers, 1990.
- [32] Veja [<http://www.aao.gov.au/2df/>].
- [33] Veja [<http://ssds.nasa.gov/>].
- [34] P. de Bernardis *et al.*, Astrophys. J. 564, 559 (2002).
- [35] A. Dolgov, A. Sazhin, Ya. Zeldovich, *Basics of Modern Cosmology*, Frontières, 1990.
- [36] G. Watson, [arXiv:astro-ph/0005003].
- [37] E. Kolb, [arXiv:hep-ph/9910311].
- [38] I. Waga, Revista Brasileira de Física 22, 163 (2000).

Capítulo 2

- [1] M. S. Turner, Phys. Rev. D28, 1243 (1983).
- [2] L. Abbot, E. Farhi e M. Wise, Phys. Lett. 117B, 29 (1982).
- [3] A. Dolgov e A. Linde, Phys. Lett. 116B, 329 (1982).
- [4] S. Sakar, Rep. Prog. Phys. 59, 1493 (1996).
- [5] J. Ellis *et al.*, Phys. Lett. B145, 181 (1984).
- [6] D. Chung, E. Kolb e A. Riotto, Phys. Rev. D60, 63504 (1999).
- [7] E. Kolb e M. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, 1990.
- [8] E. Schrödinger, Physica VI, nº 9 (1939).
- [9] L. Parker, Phys. Rev. Lett. 21, 562 (1968).
- [10] L. Parker, Phys. Rev. 183, 1057 (1969).
- [11] A. A. Grib, S. G. Mamaev e V. M. Mostepanenko, *Vacuum Quantum Effects in Strong Fields*, Friedmann Laboratory Publishing, St. Petersburg, 1994.
- [12] V. Sahni e A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D9, 373 (2000).
- [13] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1959.
- [14] B. H. Bransden e C. J. Joachain *Introduction to Quantum Mechanics*, Longman Scientific & Technical, England, 1989.
- [15] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [16] G. E. A. Matsas, *Preliminaries to Quantum Field Theory in Curved Spacetimes* e L. H. Ford, *Quantum Field Theory in Curved Spacetimes*, Proceedings of the IXth Jorge André Swieca Summer School - Particles and

- Fields, Editors: J. C. A. Barata, A. P. C. Malbouisson e S. F. Novaes, World Scientific, 1997.
- [17] D. J. H. Chung, A. Notari e A. Riotto, [arXiv:hep-ph/0305074].
- [18] L. H. Ford, Phys. Rev. D35, 2955 (1987).
- [19] D. J. H. Chung, E. W. Kolb e A. Riotto, Phys. Rev. D59, 023501 (1999);
V. A. Kuzmin e I. I. Tkachev, Phys. Rev. D59, 123006 (1999);
V. A. Kuzmin e I. I. Tkachev, Phys. Rept. 320, 199 (1999).
- [20] A. D. Dolgov e D. P. Kirilova, Sov. J. Nucl. Phys. 51, 172 (1990);
J. Traschen e R. Brandenberger, Phys. Rev. D42, 2491 (1990);
L. A. Kofman, A. D. Linde e A. A. Starobinsky, Phys. Rev. Lett. 73, 3195 (1994).
- [21] L. A. Kofman, A. D. Linde e A. A. Starobinsky, Phys. Rev. D56, 3258 (1997).
- [22] D. J. H. Chung, Phys. Rev. D67, 083514 (2003).
- [23] G. Felder, L. Kofman e A. Linde, Phys. Rev. D59, 123523 (1999).
- [24] G. Felder, L. Kofman e A. Linde, Phys. Rev. D60, 103505 (1999).
- [25] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbok of Mathematical Functions*, Dover, NY, 1965.
- [26] M. S. Turner, Phys. Rev. D28, 1243 (1983).

Capítulo 3

- [1] V. Hess, Physik. Zeitschr. 13, 1084 (1912).
- [2] P. Auger *et al.*, Comptes Rendus 206, 1721 (1938);
P. Auger, Rev. Mod. Phys. 11, 288 (1939).
- [3] J. D. Bird *et al.*, Phys. Rev. Lett. 71, 3401 (1993).
Veja [http://www.cosmic-ray.org].
- [4] S. Sarkar, [arXiv:hep-ph/0202013].
- [5] J. Linsley, Phys. Rev. Lett. 10, 146 (1962).
- [6] M. A. Lawrence *et al.*, J. Phys. G 17, 733 (1991).
Veja também [http://ast.leeds.ac.uk/haverah/havpark.shtml].
- [7] B. N. Afanasiev *et al.*, Proceedings of the 24th International Cosmic Ray Conference, Rome, Italy, 2, 756 (1995).
Veja também [http://www-sbras.nsc.ru/sicc/cooper3.htm].
- [8] M. M. Winn *et al.*, J. Phys. G: Nucl. Phys. 12, 653 (1986).
Veja também [http://www.physics.usyd.edu.au/hienergy/sugar.html].
- [9] N. Hayashida *et al.* (Colaboração AGASA), Astrophys. J. 522, 225 (1999).
Veja também [http://www-akeno.icrr.u-tokyo.ac.jp/AGASA/].
- [10] Veja [http://www.cosmic-ray.org].
- [11] M. Takeda *et al.*, Astropart. Phys. 19, 447 (2003).
- [12] T. Abu-Zayyad *et al.*, [arXiv:astro-ph/0208243].

- [13] K. Greisen, Phys. Rev. Lett 16, 748 (1966).
- [14] G. T. Zatsepin e A. Kuzmin, JETP Lett. 4, 78 (1966).
- [15] D. J. Bird *et al.*, Astrophys. J. 424, 491 (1994).
- [16] M. Ave *et al.*, Astropart. Phys. 19, 47 (2003).
- [17] L. Anchordoqui e H. Goldberg, Phys. Lett. B 583, 213 (2004).
- [18] L. Anchordoqui, C. D. Dermer e A. Ringwald, [arXiv:hep-ph/0403001].
- [19] Veja [<http://www.auger.org>].
- [20] Veja [<http://www.euso-mission.org>].
- [21] P. Bhattacharjee e G. Sigl, Phys. Rep. 327, 109 (2000).
- [22] R. J. Protheroe e R. W. Clay, Publ. Astron. Soc. Pac. 21, 1 (2004) ou [arXiv:astro-ph/0311466].
- [23] E. Fermi, Phys. Rev. 75, 1169 (1949).
- [24] A. M. Hillas, Annual Rev. Astron. Astrophys. 22, 425 (1984).
- [25] M. Kachelrieß, [arXiv:astro-ph/0011231].
- [26] S. Coleman e S. Glashow, Phys. Rev. D59, 116008 (1999).
- [27] V. A. Kuzmin e V. A. Rubakov, Phys. Atom. Nucl. 61, 1028 (1998).
- [28] H. J. Vega e N. Sanchez, [arXiv:astro-ph/0301039].
- [29] V. Berezhinsky, M. Kachelrieß e A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. 79, 4302 (1997).
- [30] D. F. Torres e L. A. Anchordoqui, [arXiv:astro-ph/0402371].
- [31] S. L. Dubovsky e P. G. Tinyakov, JETP Lett. 68, 107 (1998).
- [32] L. L. Lengruber, *Raios Cósmicos de Altíssimas Energias e Cosmologia*, Dissertação de Mestrado do Instituto de Física Teórica (UNESP), 2001.
- [33] V. Berezhinsky, M. Kachelrieß e A. Vilenkin, Phys. Rev. Lett. 79, 4302 (1997).
- [34] E. Kolb e M. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, 1990.
- [35] D. N. Spergel *et al.*, Astrophys. J. Supp. 148, 175 (2003).
- [36] N. W. Evans, F. Ferrer e S. Sarkar, Astropart. Phys. 17, 319 (2002).

Capítulo 4

- [1] A. H. Campos, J. M. F. Maia e R. Rosenfeld, Phys. Rev. D70, 023003 (2004).
- [2] G. Felder, L. Kofman e A. Linde, Phys. Rev. D59, 123523 (1999).
- [3] A. R. Liddle e D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [4] W. L. Freedman e M. S. Turner, Rev. Mod. Phys. 75, 1433 (2003).
- [5] A. H. Campos, H. C. Reis e R. Rosenfeld, Phys. Lett. B575, 151 (2003).
- [6] A. H. Campos, H. C. Reis e R. Rosenfeld, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.), 133 (2004).
- [7] S. M. Carroll, [arXiv:astro-ph/0004075].

- [8] P. J. E. Peebles e B. Ratra, *Astrophys. J.* 325, L17 (1988).
- [9] R. R. Caldwell *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* 80, 1582 (1998).
- [10] P. J. E. Peebles e A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* 59, 063505 (1999).
- [11] B. Spokoiny, *Phys. Lett. B* 315, 40 (1993);
M. Peloso e F. Rosati, *JHEP* 9912, 026 (1999).
- [12] K. Dimopoulos e J. W. F. Valle, *Astropart. Phys.* 18, 287 (2002).
- [13] L. H. Ford, *Phys. Rev. D* 35, 2955 (1987).
- [14] G. Felder, L. Kofman e A. Linde, *Phys. Rev. D* 60, 103505 (1999).
- [15] A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publishers, 1990.
- [16] A. H. Campos, L. L. Lengruber, H. C. Reis, R. Rosenfeld e R. Sato, *Mod. Phys. Lett. A* 17, 2179 (2002).
- [17] L. L. Lengruber, *Raios Cósmicos de Altíssimas Energias e Cosmologia*, Dissertação de Mestrado do Instituto de Física Teórica (UNESP), 2001.
- [18] D. Chung, E. Kolb e A. Riotto, *Phys. Rev. D* 60, 63504 (1999).
- [19] L. H. Ford, *Phys. Rev. D* 35, 2955 (1987);
D. J. H. Chung, E. W. Kolb e A. Riotto, *Phys. Rev. D* 59, 023501 (1999);
V. A. Kuzmin e I. I. Tkachev, *Phys. Rev. D* 59, 123006 (1999),
V. A. Kuzmin e I. I. Tkachev, *Phys. Rept.* 320, 199 (1999).
- [20] D. J. H. Chung, P. Crotty, E. W. Kolb e A. Riotto, *Phys. Rev. D* 64, 043503 (2001).
- [21] E. Kolb e M. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, 1990.

Discussão e Conclusão

- [1] E. W. Kolb, A. D. Linde e A. Riotto, *Phys. Rev. Lett.* 77, 4290 (1996);
E. W. Kolb, A. Riotto e I. I. Tkachev *Phys. Rev. Lett. B* 423, 348 (1998).

Apêndices

- [1] E. Kolb e M. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, 1990.
- [2] A. R. Liddle e D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, 2000.
- [3] A. H. Campos, H. C. Reis e R. Rosenfeld, *Phys. Lett. B* 575, 151 (2003).
- [4] G. Felder, L. Kofman e A. Linde, *Phys. Rev. D* 59, 123523 (1999).
- [5] L. A. Kofman, A. D. Linde e A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. D* 56, 3258 (1997).
- [6] D. J. H. Chung, *Phys. Rev. D* 67, 083514 (2003).
- [7] E. Brezin e C. Itzykson, *Phys. Rev. D* 2, 1191 (1970).

- [8] N. D. Birrel, P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).