UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

*Inflação em Modelos de Gravidade Generalizada:
Análise Dinâmica e Singularidades*

Michele Ferraz Figueiró

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade
de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em
Ciências

Orientador: Prof. Dr. Alberto Saa

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa – UNICAMP

Prof. Dr. Adilson José da Silva – IFUSP

Prof. Dr. Elcio Abdalla – IFUSP

Prof. Dra. Carola Dobrigkeit Chinellato – UNICAMP

Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin – UFABC

São Paulo
2009

Resumo

O conceito de inflação foi introduzido inicialmente para resolver alguns problemas que a cosmologia de Big Bang original não conseguia explicar, tais como os problemas do horizonte e da planura. Na fase inflacionária, o universo sofre uma expansão acelerada ($\ddot{a} > 0$) em um curto período de tempo, durante o qual também são produzidas as perturbações de densidade que são responsáveis pela formação das estruturas de larga escala no universo. Os modelos cosmológicos mais simples descritos na literatura são governados por um campo escalar ϕ , chamado *inflaton*, minimamente acoplado à gravidade de Einstein, e sujeito a um potencial de auto-interação $V(\phi)$. O ingrediente crucial da inflação é a sua evolução temporal lenta (*slow roll*), na qual o potencial $V(\phi)$ supera o termo de energia cinética $\dot{\phi}^2/2$ ao produzir esta expansão acelerada.

Nesta tese, considera-se uma Lagrangiana generalizada para o inflaton dada por $f(R, \phi, X)$ a fim de se estudar modelos cosmológicos, principalmente em suas fases inflacionárias. Esta Lagrangiana engloba todos os tipos de teoria da gravidade descritos na literatura, tais como os modelos de gravidade de acoplamento mínimo (quintessência, energia de phantom, k -inflação ou k -essência) e os modelos de gravidade escalar-tensorial tais como os modelos de Brans-Dicke, de acoplamento não-mínimo e de gravidade modificada. Nosso principal interesse está em descrever os tipos de singularidades de modelos cosmológicos anisotrópicos e homogêneos, com ênfase especial no caso $f(R, \phi, X) = f(R, \phi) + p(\phi, X)$, onde $f(R, \phi)$ representa um termo de acoplamento não-mínimo e $p(\phi, X)$ o termo não-canônico de energia cinética. O estudo de tais singularidades põe diversos vínculos para a viabilidade de modelos cosmológicos envolvendo Lagrangianas de gravidade generalizada.

Abstract

The concept of inflation was firstly introduced in order to solve some problems that the original Big Bang cosmology could not explain such as the flatness and the horizon problems. In the inflationary phase, the Universe undergoes an accelerating expansion ($\ddot{a} > 0$) for a short time during which there is the production of the density perturbations that are responsible for the formation of the large scale structures in the Universe. The simplest cosmological models found in the literature are governed by a scalar field ϕ , called *inflaton*, minimally coupled to the Einstein gravity and subjected to a self-interaction potential $V(\phi)$. The crucial ingredient of the inflation is its slow time evolution (*slow roll*) in which the self-interaction potential $V(\phi)$ overcomes the kinetic energy term $\dot{\phi}^2/2$ and produces this accelerating expansion.

In this thesis, we consider a generalized Lagrangian given by $f(R, \phi, X)$ to study cosmological models, mainly in their inflationary phases. This Lagrangian comprehends any type of gravity theory found in the literature such as the minimal coupling gravity (i.e. quintessence, phantom energy, k -inflation or k -essence models) and the scalar-tensor gravity such as Brans-Dicke, non-minimal coupling and modified gravity models. We are specially interested in describing the types of singularities that can be found in anisotropic and homogeneous cosmological models in which the Lagrangian assumes the particular form $f(R, \phi, X) = f(R, \phi) + p(\phi, X)$, where $f(R, \phi)$ represents the non-minimal coupling term and $p(\phi, X)$ is the non-canonical kinetic term. The study of these singularities establishes many constraints for the viability of cosmological models presenting a generalized gravity Lagrangian.

Para

*os meus queridos pais, Luisabete e José
Antônio.*

Agradecimentos

Primeiramente eu gostaria de agradecer meu orientador Prof. Alberto Saa por seu suporte e assistência durante o desenvolvimento deste projeto de pesquisa. Agradeço as agências brasileira FAPESP e alemã DAAD por financiarem este projeto.

IF/FMA: Muitos são os agradecimentos aos professores do Departamento de Física-Matemática, em especial ao Prof. Elcio Abdalla por nossas longas conversas sobre o papel do cientista perante a sociedade no café da Livraria Cultura. Os funcionários Sibeles Guedes de Paulo Groff e João da Silva Borges forneceram um grande apoio técnico. As secretárias Amélia Aparecida Ferrari e Simone Toyoko Shinomiya foram também muito importantes neste período durante as minhas idas frequentes à secretaria. Os meus amigos e colegas José Cleriston Campos de Souza, Jeferson de Oliveira, Alan Pavan, Davi Giugno, prof. Carlos Molina e Carlos Eduardo Pellicer de Oliveira também os agradeço com muito carinho.

LMU/München : I really thank Professor V. Mukhanov for the opportunity of working in his research group at Ludwig-Maximilians-Universität (LMU) in Munich, Germany. The discussions with my colleagues Grigoris Panotopoulos, Vitaly Vanchurin, Alexey Golovnev, Alexander Vikman, and, specially, with Sergey Winitzki and my friend Jino U. Kang were very important for the development of this work. I thank Professor Cristian Armendáriz-Picón for several suggestions on the project.

IME: Agradeço os professores do Departamento de Estatística Anatoli Yambartsev, Airlane Pereira Alencar e Pedro Alberto Morettin pela sua ajuda na fase final de meu doutorado. E minhas colegas e amigas Patricia Nagami Murakami e Francisleine Mendes por sua paciência em responder minhas dúvidas sobre Estatística.

RS e SP: Amo muito meu estado Rio Grande do Sul e em especial minha cidade natal Cruz Alta. Era sempre lá que eu me escondia para reabastecer as energias para regressar ao trabalho aqui em São Paulo. Agradeço os meus Professores de graduação Everton Lüdke e Vilson Zanchin pelo apoio durante minha iniciação científica. Amigos gaúchos, em especial Roseline Strieder e Arlene Linke que me ajudaram muito e sempre estiveram

presentes em momentos importantes de minha vida. O meu amigo e professor de inglês Roberto Yammine, thanks teacher for your help and friendship so much!, e minha dentista e amiga Neuza Okuni.

Finalmente, agradeço meus amados pais Luisabete Ferraz Figueiró e José Antonio Figueiró por suas palavras de conforto e motivação. Dedico esta tese para vocês e também para meus cachorrinhos fofinhos Sirius, Pretinho e Branquinha. Meu grande amigo DEUS, sua ajuda foi essencial principalmente durante minha estadia na Alemanha, eu realmente acredito que TU existes e estás sempre perto de mim me guiando e me ajudando para entender os mistérios deste UNIVERSO.

Sumário

1	Introdução	8
2	Cosmologia Inflacionária	12
2.1	Motivação	12
2.2	Cosmologia do Big Bang	13
2.3	Os Problemas da Cosmologia do Big Bang	15
2.3.1	Problema de Planura	15
2.3.2	Problema do Horizonte	15
2.3.3	A Origem de Estruturas de Largas Escalas	17
2.4	Cosmologia Inflacionária: Solução aos Problemas da Cosmologia do Big Bang	18
2.4.1	Problema de Planura	19
2.4.2	Problema do Horizonte	19
2.4.3	A Origem da Estrutura de Larga Escala	20
2.5	Inflação tipo Slow Roll	21
2.5.1	Mecanismo de Produção de Inflação	22
2.5.2	Perturbações Escalares produzidas durante a Inflação	25
2.5.3	Parâmetros de Slow-roll	31
2.6	Campo Escalares Não-Minimamente Acoplados	33
2.6.1	Soluções para o Referencial de Jordan	33
2.6.2	Perturbações Escalares no Referencial de Jordan	34
2.6.3	Soluções para o Referencial de Einstein	35
2.6.4	Perturbações Escalares no Referencial de Einstein	36
2.6.5	Potenciais Exponenciais	37
3	Gravidade Generalizada	46
3.1	Energia de Phantom	48
3.2	Teoria Escalar-Tensorial	51
3.3	Modelos tipo Brans-Dicke	52

3.4	Modelos de Acoplamento Não-Mínimo	53
3.5	Gravidade Modificada	55
3.6	Análise dinâmica e singularidades	56
3.6.1	As Singularidades	57
3.6.2	Sistemas Não-Conservativos e o Teorema da Divergência	58
4	Modelo cosmológico com uma função $f(R, \phi, X)$	60
4.1	Transformação Conforme	63
4.2	Referencial de Einstein	64
4.2.1	Soluções inflacionárias tipo lei de potência tanto no referencial de Jordan e quanto no de Einstein	66
4.3	Singularidades Geométricas	68
5	Soluções de de Sitter	74
5.1	Soluções atratoras de de Sitter com acoplamento não-mínimo	75
5.1.1	Soluções estáticas de de Sitter	76
5.1.2	Soluções gerais de de Sitter	76
5.2	Soluções atratoras de de Sitter em gravidade generalizada	77
5.2.1	Equações de movimento no referencial de Jordan - Modelo I	77
5.2.2	Equações de movimento no referencial de Jordan - Modelo II	80
6	Conclusão	82
A	Anisotropic singularities in modified gravity models	88

Capítulo 1

Introdução

A ideia de *inflação* é um dos mais importantes conceitos na cosmologia moderna. Inflação é o estágio de expansão acelerada no universo primordial, que se finaliza de maneira suave dando origem às eras de radiação e matéria [1]. O período inflacionário pode resolver os problemas do horizonte e da planura da cosmologia padrão e também gerar o mecanismo necessário para a produção de perturbações de densidade necessárias para se formar as estruturas no universo. Nas classes mais simples de modelos inflacionários, a inflação é geralmente governada por um campo escalar ϕ (chamado *inflaton*) sujeito a algum potencial de auto-interação $V(\phi)$ e minimamente acoplado à gravitação de Einstein. O ingrediente crucial dos cenários inflacionários é o período de evolução do campo inflaton chamado de *slow-roll*, durante o qual o potencial $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética $\dot{\phi}^2/2$ e se produz uma expansão quase-exponencial do espaço-tempo.

Um dos mais importantes méritos da inflação é que ela é capaz de produzir uma teoria de *inhomogeneidades* no universo que poderia, em princípio, explicar a formação das estruturas de larga escala observadas. Estas inhomogeneidades surgem de flutuações quânticas do inflaton sobre seu estado de vácuo, isto é, de puras flutuações do vácuo [2]. Estas flutuações do vácuo geram perturbações de densidade adiabáticas e gaussianas, com índice espectral $n(k)$ próximo a 1. Tais perturbações foram consideradas, mesmo antes do surgimento da inflação, como possíveis candidatas para a origem das estruturas de larga escala e da anisotropia da radiação cósmica de fundo (RCF) [2].

As observações das supernovas do tipo Ia [3] mostram que o universo vive agora uma nova fase de expansão acelerada, enquanto experimentos da RCF [4] indicam um universo espacialmente plano. No contexto da gravitação canônica de Einstein, a expansão acelerada é explicada por uma forma de *energia escura* (constante cosmológica ou quintessência) que comporia 70% do conteúdo de energia cósmica e que teria equação de

estado exótica do tipo $p \approx -\rho$. Os dados observacionais também acomodariam uma forma de energia escura variando no tempo, com parâmetro de equação de estado negativo $w \equiv P/\rho < -1$ (energia de phantom [5]), onde p and ρ são a pressão e a densidade de energia da componente de energia escura, respectivamente.

A maioria dos modelos cosmológicos para esta nova fase de expansão acelerada também é governada por campos escalares, que são os candidatos naturais do ponto de vista teórico, pois é bem conhecido da teoria inflacionária do universo primordial que um campo escalar ϕ em slow-roll sobre uma seção aproximadamente plana de seu potencial de auto-interação $V(\phi)$ pode, de fato, gerar um período de expansão acelerada do universo. Os modelos mais simples e comuns de quintessência são governados por campos escalares minimamente acoplados no contexto da gravitação de Einstein.

Um desafio importante da cosmologia teórica moderna é elucidar o *problema da coincidência cósmica*, que pode ser formulado através da indagação: por que a nova fase de expansão acelerada do universo se iniciou somente agora? (problema *why now?*). Esta questão está intimamente ligada ao fato de que a componente de energia escura do universo responsável pela re-aceleração cósmica tem densidade de energia extremamente pequena. Se a energia escura corresponder de fato à constante cosmológica Λ , então seu valor deveria ser extremamente bem ajustado no universo primordial para concordar com as presentes observações. Os modelos de quintessência foram propostos basicamente para se minimizar o problema da coincidência cósmica. Contudo, eles não são essencialmente diferentes do modelo da constante cosmológica, deixando o problema da coincidência, até agora, sem nenhuma resposta satisfatória do ponto de vista teórico. De fato, vários grupos sugerem a utilização do princípio antrópico para se explicar o problema da coincidência.

Uma proposta teórica interessante para se aliviar o problema da coincidência é o conceito de *k-inflação* ou *k-essência* [6, 7]. O objetivo destes modelos é introduzir, mesmo com ausência do termo de energia potencial $V(\phi)$, uma classe geral de termos não quadráticos de energia cinética na ação para um campo escalar que poderiam governar, simultaneamente, uma expansão inflacionária primordial (*k-inflação*) e uma expansão acelerada posterior (*k-essência*) no universo, ambas de maneira semelhante à inflação usual governada pelo potencial $V(\phi)$. No caso da inflação primordial, os modelos compostos por um *k*-campo sem potencial de auto-interação satisfazem duas das mais importantes exigências do cenário inflacionário padrão: as perturbações escalares são “bem comportadas” durante o estágio inflacionário e existe um mecanismo natural de saída suave da inflação.

Os modelos de *k-essência* propõem uma explicação dinâmica para o problema da coincidência que não requer o ajuste fino das condições iniciais ou dos parâmetros de acoplamento. Neste cenário, a recente fase de expansão acelerada e a evolução humana

estão relacionados porque ambos fenômenos estão relacionados ao surgimento da era da matéria. Os campos de k -essência têm a propriedade interessante de se comportarem como uma componente de pressão negativa somente depois da igualdade entre a matéria e a radiação, induzindo uma fase de expansão acelerada após o domínio da matéria sob a radiação no universo.

As teorias do tipo k -inflação e k -essência motivaram a introdução de outros modelos cosmológicos com campos escalares de dinâmica ainda mais geral. São as chamadas teorias de gravidade generalizada, as quais compõem o foco principal desta tese. São diversas as motivações para se propor teorias envolvendo termos dinâmicos diferentes dos canônicos (ação de Einstein-Hilbert e acoplamento mínimo). Uma delas surge de questões acerca da gravitação quântica: acredita-se que as correções quânticas modificam a lagrangiana gravitacional de Einstein-Hilbert, induzindo termos proporcionais a invariantes de curvatura de ordem maior. Estas correções na lagrangiana clássica são insignificantes para pequenas curvaturas mas tornam-se dominantes à medida que a curvatura do espaço-tempo cresce. Além disso, sabe-se que um campo escalar minimamente acoplado na gravitação de Einstein é incapaz de gerar o intervalo de valores $w < -1$ do parâmetro da equação de estado. Tal regime, chamado de *superaceleração* [8], requer uma extensão da teoria. Uma possibilidade que tem recebido muita atenção na literatura é a dos *campos de phantom* [5], isto é, campos escalares ϕ com energia cinética negativa. Estes modelos, porém, sofrem de instabilidades quânticas severas [43]. Uma outra possibilidade, livre de instabilidades quânticas, é o caso dos campos escalares ϕ não-minimamente acoplados à gravidade [9]. Um aspecto muito estudado dos campos escalares não-minimamente acoplado é o balanço dinâmico entre o potencial de auto-interação $V(\phi)$ e o termo do acoplamento não-mínimo $\xi R\phi^2$, onde ξ é a constante de acoplamento. Dois valores desta constante de acoplamento ξ são frequentemente encontrados na literatura: $\xi = 0$ (acoplamento mínimo) e $\xi = 1/6$ (acoplamento conforme), enquanto a possibilidade $|\xi| \gg 1$ (acoplamento forte) tem sido considerada muitas vezes, para ambos sinais de ξ . De fato, o valor mais adequado de ξ depende fortemente da teoria de gravidade e do campo escalar estudados.

Qualquer modelo físico deve ser robusto com relação às mais diversas perturbações, sejam de parâmetros ou de condições iniciais. Robustez diante de pequenas perturbações é um critério básico para a seleção de modelos cosmológicos viáveis. O foco e os resultados principais desta tese dizem respeito à robustez de modelos de gravidade generalizada com respeito à perturbações anisotrópicas, com especial ênfase a suas fases inflacionárias, sejam primordiais ou recentes. O capítulo seguinte apresenta uma breve revisão sobre cosmologia inflacionária e sobre os principais modelos inflacionários baseados em campos escalares. Descreve-se, em particular, o regime de *slow-roll* para inflação e o mecanismo

de geração de perturbações escalares.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de modelos de gravitação generalizada do tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \omega(\phi) g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V(\phi) \right]. \quad (1.1)$$

São identificados os pontos fixos no espaço de fase cosmológicas que corresponderiam a fases inflacionárias. Uma ênfase especial é conferida à chamada gravitação generalizada pura $f(\phi, R) = f(R)$, às situações envolvendo campos do tipo *phantom* ($\omega(\phi) < 0$) e às chamadas teorias Escalar-Tensorial $f(\phi, R) = f(\phi)R$. Mostra-se, em particular, que a existência de singularidades anisotrópicas restringem muito as possíveis escolhas para a função $f(\phi, R)$.

O Capítulo 4 apresenta um estudo para modelos mais gerais do tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(R, \phi, X) \right], \quad (1.2)$$

onde $f(R, \phi, X)$ é uma função suave que depende do campo escalar ϕ , do escalar de Ricci R e da quantidade escalar quadrática

$$X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \quad (1.3)$$

As equações dinâmicas neste caso são muito mais complicadas que as consideradas no Capítulo 3. Obviamente, a obtenção de resultados físicos dependem fortemente da escolha da função $f(\phi, R, X)$. Contudo, podemos demonstrar que, novamente, a existência de singularidades anisotrópicas, restringem muito as possíveis escolhas para a função $f(\phi, R, X)$.

No Capítulo 5, discute-se uma classe fisicamente relevante de soluções de qualquer modelo cosmológico que se proponha a descrever períodos inflacionários: as soluções de de Sitter. Para que se possa aliviar o problema do ajuste fino nas condições iniciais, as soluções de de Sitter devem ter caráter de soluções atratoras no espaço de fase da teoria. Nas teorias de gravidade generalizada, ao contrário dos modelos mais simples, a existência destas soluções é difícil de ser caracterizada, e frequentemente as análises nos referenciais de Einstein e de Jordan levam a resultados conflitantes devido às sutilezas da transformação conforme que relaciona os dois referenciais.

O Capítulo 6 resume os principais resultados originais desta tese e apresenta também algumas considerações finais.

Capítulo 2

Cosmologia Inflacionária

2.1 Motivação

A Cosmologia tem fascinado a humanidade através dos tempos. Contudo, apenas a partir do século 20, a Cosmologia passou a ser reconhecida como uma Ciência respeitável, deixando de ser associada à mitologia e religião. O século 20 representou um período no qual a Cosmologia foi considerada como uma área da física, destacando-se os estudos sobre cosmologia relativística, fundamentações para a estrutura de estrelas, descoberta de outras galáxias, estrelas de nêutron, pulsares e buracos negros, de Hubble e de seu universo em expansão e da Radiação Cósmica de Fundo (RCF). Este também foi o século no qual aceitou-se a ideia de que o universo se originou do Big Bang.

O primeiro modelo relativístico do universo, devido à Albert Einstein, era estático. No entanto, logo ficou claro que modelos dinâmicos também existiam, e o primeiro deles a ser descoberto foi o modelo de de Sitter. O primeiro resultado observacional que sugeriu a existência de um universo em expansão foi obtido por Hubble: o redshift de galáxias crescia com a distância, e este fato pode ser explicado somente por um universo em expansão. Isso significava que universos dinâmicos e em expansão teriam de ser considerados como modelos reais. Em 1965, quando Penzias e Wilson detectaram a Radiação Cósmica de Fundo (uma radiação térmica com espectro térmico de corpo negro remanescente do Big Bang e que foi prevista teoricamente 20 anos antes por Gamov e colaboradores), um modelo teórico para a evolução do universo conhecido como cosmologia padrão do Big Bang surgiu com sucesso.

No entanto, a cosmologia padrão não conseguia responder algumas perguntas, como por exemplo, porque o universo era tão homogêneo e espacialmente plano ou qual era a origem das flutuações da Radiação Cósmica de Fundo que seriam responsáveis pela

formação das estruturas de larga escala no universo. A solução estava na teoria inflacionária, a ideia de que antes da era da cosmologia padrão houve satisfatoriamente um período inflacionário no universo. Proposta por Guth [1], a inflação explicou estes problemas deixados pela cosmologia padrão.

Neste capítulo, pretende-se expor a fase inflacionária do universo primordial e apresentar a motivação para estudar tal fase, os mecanismos utilizados para a produção da inflação e os diferentes modelos inflacionários utilizados na cosmologia padrão. Também há um estudo de soluções inflacionárias de um campo escalar não-minimamente acoplado.

2.2 Cosmologia do Big Bang

A teoria que prevê que o nosso universo originou-se de um estado muito quente e denso é chamado de *Cosmologia do Big Bang* [10]. Este modelo descreve um universo homogêneo e isotrópico sobre largas escalas, cuja métrica é dada pela forma de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (2.1)$$

Nesta métrica, $a(t)$ é o fator de escala, sendo t o tempo cósmico. A constante k é a curvatura espacial, onde valores positivo, zero ou negativo correspondem a um universo fechado, plano ou aberto, respectivamente.

A evolução do universo governada dada pelo tipo de matéria que o compõe. A equação de estado entre a *densidade de energia* $\rho(t)$ e a *pressão* $p(t)$ é

$$p = w\rho. \quad (2.2)$$

Para conhecer a dinâmica da evolução do universo, é necessário resolver as equação de Einstein da Relatividade Geral

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

onde $R_{\mu\nu}$, R e $T_{\mu\nu}$ são o tensor de Ricci, o escalar de Ricci e o tensor de energia-momento, respectivamente. A constante cosmológica Λ foi originalmente introduzida por Einstein e considera-se neste trabalho unidades naturais, nas quais, $G = c = 1$.

Para a métrica de fundo (2.1), as equações de Einstein, (2.3), são

$$H^2 = \frac{\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2}, \quad (2.4)$$

$$-2\dot{H} = \rho + p \quad (2.5)$$

e

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.6)$$

onde um ponto indica a derivada em t , e $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. As equações (2.4), (2.5) e (2.6) são chamadas de *equações de Friedmann* e *equação de conservação de energia*, respectivamente. Combinando estas duas equações, e admitindo-se $\Lambda = 0$, tem-se a equação da aceleração de Einstein

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p). \quad (2.7)$$

A equação de Friedmann (2.4) pode ser reescrita como

$$\Omega - 1 = \frac{k'}{a^2 H^2}, \quad (2.8)$$

onde definimos o *parâmetro de densidade* como

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}, \quad (2.9)$$

onde a *densidade crítica* vale $\rho_c = 3H^2$.

Quando a geometria espacial do universo é plana, $k = 0$, as soluções para as relações (2.4) e (2.6) são, respectivamente,

$$\rho \approx a^{-3(1+\omega)} \quad (2.10)$$

e

$$a(t) \approx t^{\frac{2}{3(1+\omega)}}. \quad (2.11)$$

Na cosmologia do Big Bang, o universo é dominado pela *era radiação* ($w = 1/3$) ou pela *era da matéria* ($w = 0$). Usando (2.2),

$$p = \rho/3, \quad \text{era da radiação}, \quad (2.12)$$

$$p = 0, \quad \text{era da matéria}. \quad (2.13)$$

e das equações (2.10) e (2.11),

$$a \propto t^{1/2}, \quad \rho \propto a^{-4}, \quad \text{era da radiação} \quad (2.14)$$

$$a \propto t^{2/3}, \quad \rho \propto a^{-3}, \quad \text{era da matéria}. \quad (2.15)$$

Estas fases correspondem à expansão desacelerada do universo. Portanto, a derivada do fator de escala, usando a equação (2.7), é negativa, $\ddot{a} < 0$. No entanto, esta expansão

desacelerada não consegue explicar alguns problemas cosmológicos, tais como *o problema de planura* e *o problema do horizonte*, existentes na cosmologia do Big Bang.

A solução para estes problemas é considerar que o nosso universo apresentou uma rápida expansão acelerada em um curto período de tempo ($10^{-38}s$) antes da era da radiação. A este período deu-se o nome de *inflação* [11].

Portanto, a cosmologia inflacionária tenta resolver os problemas da cosmologia do Big Bang.

2.3 Os Problemas da Cosmologia do Big Bang

2.3.1 Problema de Planura

Para um universo com curvatura $k = 0$ e densidade de energia $\rho = \rho_c$, considera-se que a sua geometria espacial seja plana (espaço euclidiano). Da equação (2.8), se Ω se aproxima da de 1, o termo ρ dominará a equação de Friedmann e o universo será aproximadamente plano [12]. Caso contrário, o termo de curvatura k será dominante. No entanto, $\Omega = 1$ é um ponto instável na evolução do universo .

Na era da radiação, $\rho \propto a^{-4}$, e na era da matéria, $\rho \propto a^{-3}$, deste modo o termo em ρ na equação de Friedmann, cai mais rapidamente do que o termo k/a^2 à medida que o universo se expande. Assim, na cosmologia do Big Bang, o termo de curvatura domina e o parâmetro Ω desvia-se de 1. Este comportamento é ilustrado na figura (2.1).

No entanto, os dados observacionais revelam que o valor de Ω hoje é da ordem de 1, de modo que no passado, este valor está ainda muito mais próximo da unidade [13]. Este é o *problema de planura*.

2.3.2 Problema do Horizonte

Considere algum sistema físico em um dado estado a um tempo inicial t_i . O estado deste sistema, para um tempo posterior, é afetado pelo estado em t_i (as condições iniciais) e pela sua evolução. Para algum tempo finito posterior a t_i , há limites causais nos quais uma escala pode ser afetada devido a esta evolução. No entanto, há sempre escalas que não são afetadas pela expansão, e sobre as quais o estado do sistema posterior é um reflexo das condições iniciais. Esta mesma idéia pode se aplicar a cosmologia do Big Bang, porém, com alguma diferença.

A cosmologia do Big Bang começa com uma singularidade inicial onde o fator de escala vale $a = 0$ e a densidade de energia $\rho = \infty$ para um tempo finito no passado.

Figura 2.1: Na cosmologia do Big Bang, $\Omega(a)$ evolui de 1 à medida que o universo se expande. Extraído de [12].

Utilizando esta singularidade, encontra-se vários problemas nas soluções cosmológicas das equações que regem o nosso universo. No modelo do Big Bang, o universo origina-se desta singularidade inicial porém com condições iniciais que devem ser escolhidas. Em uma situação de laboratório, o tempo inicial do estado de um dado sistema pode ser escolhido arbitrariamente. No Big Bang, o tempo inicial deve ser definido absolutamente.

O *horizonte causal* do universo cresce com o tempo. O raio causal é a região com a qual estamos em contato causal (pela observação de pontos distantes observados no universo). Objetos que vemos em direções opostas estão separados por dois raios causais, de modo que não existe nenhum contato causal entre eles. Podemos calcular o número de

regiões causais que preenchiam o nosso universo observável em outras épocas. Na época da grande unificação, havia 10^8 regiões desconectadas causalmente em um volume que envolvia a parte do universo que atualmente possamos observar. Este é o *problema do horizonte* da cosmologia do Big Bang [13], veja figura (2.2).

Figura 2.2: A região do universo que observamos hoje foi composta de muitas regiões desconectadas causalmente, no passado. Extraído de [12].

2.3.3 A Origem de Estruturas de Largas Escalas

O dados do satélite WMAP, veja figura (2.3), mostram que existiam anisotropias na superfície de ultimo espalhamento, cujas amplitudes são pequenas. Estas flutuações propagam-se de modo que é impossível gerar estruturas de largas escalas entre o Big Bang e o tempo do último espalhamento na cosmologia padrão. Este problema é quase equivalente ao problema do horizonte.

A cosmologia padrão não consegue explicar a origem de estrutura de larga escala [13].

2.4 Cosmologia Inflacionária: Solução aos Problemas da Cosmologia do Big Bang

Os problemas na cosmologia do Big Bang surgem do fato de que nosso universo apresenta uma contínua expansão desacelerada. Assumindo, porém, a existência de um estágio no universo primordial que apresente uma expansão acelerada [11]

$$\ddot{a} > 0 . \quad (2.16)$$

Usando (2.7), tem-se que

$$\rho + 3p < 0 . \quad (2.17)$$

Da condição (2.16), temos que $\dot{a}(= aH)$ cresce durante a inflação. Assim o raio de Hubble, definido como $(aH)^{-1}$, diminui na fase inflacionária. Se assumirmos tal característica, poderemos solucionar os problemas de planura e do horizonte.

Figura 2.3: Imagem das flutuações de temperatura do Universo primordial, segundo os dados de cinco anos de coleta do WMAP.

2.4.1 Problema de Planura

O problema de planura ocorre devido à tendência do termo em k em dominar o termo em ρ na equação de Friedmann (2.4). Durante a *fase inflacionária*, consideramos que a densidade de energia ρ é aproximadamente *constante*, $\rho = cte$, deste modo que o termo em k' possa ser desprezado. Assim, $\Omega = 1$. Este processo é ilustrado na figura (2.4).

Figura 2.4: Durante a fase inflacionária, Ω comporta-se como um atrator. Extraído de [12].

2.4.2 Problema do Horizonte

Um período de inflação muda a estrutura causal do universo. Durante a inflação, cada região conectada causalmente se expande exponencialmente. Uma quantidade suficiente de inflação (dada pelo número de dobras $N_e(\phi)$, que será definido posteriormente) permite que o todo o universo observado venha de uma região que estava causalmente conectada antes da inflação, como mostra a figura (2.5).

Faz-se necessário o universo se expandir por um fator de e^{70} , aproximadamente, para resolver o problema de planura e o problema do horizonte [13, 14].

2.4.3 A Origem da Estrutura de Larga Escala

O fato de que o valor do raio de Hubble H^{-1} diminua durante a inflação possibilita o surgimento das perturbações de densidade sobre largas escalas. Dado que as escalas destas perturbações são dadas pelas escalas de Hubble no período de inflação primordial, a física causal gera pequenas flutuações quânticas.

Depois que uma escala é empurrada para fora do raio de Hubble (cruza o horizonte), $k/aH < 1$, durante a inflação, as perturbações podem ser descritas classicamente. Quando a inflação termina, a evolução do universo se dá pela cosmologia do Big Bang, de modo que o valor do raio de Hubble aumenta. Assim, as escalas de perturbações são empurradas para dentro do raio de Hubble novamente (entra no horizonte, $k/aH > 1$).

As pequenas perturbações produzidas durante a inflação aparecem como estruturas de larga escala depois de reentrarem no horizonte. Deste modo, a fase inflacionária explica um mecanismo causal em gerar as perturbações de densidade observadas nas anisotropias da RCF.

Figura 2.5: Durante a inflação, o volume do horizonte se expande exponencialmente. Hoje, a região observada pode ocupar uma pequena fração de um volume causal. Extraído de [12].

2.5 Inflação tipo Slow Roll

Em 1981, a teoria inflacionária do universo foi proposta por Guth [1] para resolver os problemas que a cosmologia de grande explosão não consegue explicar. Esta teoria é conhecida como *antiga inflação* e corresponde a uma fase de Sitter do universo. Uma versão revisada foi proposta por Linde [15], e Albrecht e Steinhardt [16], conhecida como *nova inflação*, que corresponde a uma *inflação tipo slow-roll*.

Durante tal fase, o fator de escala $a(t)$ do universo expande-se aceleradamente em um curto período de tempo, portanto, condição necessária para que aconteça inflação é

$$\boxed{\text{INFLAÇÃO} \iff \ddot{a} > 0}$$

Deste modo, durante este período, o parâmetro de Hubble H é aproximadamente constante e o fator de escala $a(t)$ do universo evolui quase-exponencialmente,

$$\dot{a} = aH(t) ,$$

$$a(t) = a_0 \exp \left(\int_{t_0}^t dt' H(t') \right) ,$$

$$a(t) = a_0 \exp(H(t - t_0)) . \quad (2.18)$$

Há uma condição equivalente à inflação com base em uma interpretação mais física,

$$\boxed{\text{INFLAÇÃO} \iff \frac{d}{dt} \frac{1}{aH} < 0}$$

sendo $1/aH$ o *raio de Hubble comóvel*.

Esta condição também pode ser dada em função da densidade de energia e pressão que governam tal expansão. Da equação (2.7), temos que

$$\boxed{\text{INFLAÇÃO} \iff \ddot{a} > 0 \iff \rho + 3p < 0}$$

Supondo-se que $\rho > 0$, para que a relação acima seja satisfeita, durante a inflação, o conteúdo de matéria que preenche o universo deve ter pressão negativa, cuja equação de estado é dada por $p \simeq -\rho$. Esta pressão negativa produz *uma forma repulsiva de gravidade*.

Na física de campos escalares, podemos construir estados de pressão negativa desde que o tensor de energia momento $T^{\mu\nu}$ de um campo escalar $\phi(t, x^i)$ seja dado por [17]

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi - g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} \partial_\lambda \phi \partial^\lambda \phi + V(\phi) \right], \quad (2.19)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do campo escalar ϕ .

A densidade de energia ρ e a pressão p são dadas, respectivamente, por

$$\rho = T^{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla_i \phi)^2 + V(\phi) \quad (2.20)$$

e

$$p = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 T_{ii} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{6} (\nabla_i \phi)^2 - V(\phi). \quad (2.21)$$

A fase inflacionária se utiliza de tal mecanismo, considerando um campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$ com um potencial de auto-interação $V(\phi)$, responsável pela expansão acelerada do universo. Portanto, a dinâmica da inflação é dada por um campo escalar.

2.5.1 Mecanismo de Produção de Inflação

Os campos escalares $\phi(t, r)$ são muito importantes na teoria de física de partículas. A ação de tais campos pode governar a evolução da fase inflacionária. Há muitos graus de liberdade que determinam a razão da expansão durante este período. No entanto, com apenas um grau de liberdade, a evolução da cosmologia inflacionária pode ser modelada pela ação de um campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$, o *inflaton*. Este campo evolui sob a influência de um potencial escalar $V(\phi)$. Se a densidade de energia do universo é dominada pela energia potencial do inflaton, então $\rho + 3p$ será negativo. A energia de vácuo desaparece quando o campo escalar atinge seu valor de mínimo [18, 11, 19].

O potencial do inflaton $V(\phi)$ decresce com o tempo lentamente até atingir seu valor de mínimo. Quando ele atinge este estado, a inflação termina.

Sendo o universo homogêneo e isotrópico, a fase inflacionária congela as flutuação no inflaton, de modo que ele se torna uma quantidade clássica. Isto acontece somente se as grandezas cosmológicas saem do horizonte¹. Usando as equações (2.20) e (2.21), a densidade de energia e a pressão do inflaton $\phi(t)$, respectivamente, são

$$\rho_\phi = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (2.22)$$

---

¹Diz-se que uma escala cosmológica sai do horizonte quando $k/aH \ll 1$, onde k é o número de onda.

e

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) , \quad (2.23)$$

onde $V(\phi)$ é o potencial do inflaton.

Substituindo (2.22) e (2.23) em (2.4) e (2.6), obtem-se

$$H^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] , \quad (2.24)$$

$$-2\dot{H} = \dot{\phi}^2 \quad (2.25)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 . \quad (2.26)$$

Esta última equação é a *equação de Klein-Gordon* que governa a evolução do inflaton ϕ [11].

Durante a inflação, a relação (2.17) impõe que $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$, indicando que o potencial do inflaton $V(\phi)$ domina o termo de energia cinética. Portanto, para que a fase inflacionária aconteça, o potencial do inflaton deve ser aproximadamente plano.

As *aproximações de slow-roll* são [14]

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) \quad (2.27)$$

e

$$\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} . \quad (2.28)$$

Utilizando esta condição, podemos reescrever as equações (2.24) e (2.26), como [14]

$$H^2 \approx \frac{1}{3}V(\phi) \quad (2.29)$$

e

$$3H\dot{\phi} \approx V'(\phi) . \quad (2.30)$$

Tem-se também que [14]

$$\rho_\phi \sim V(\phi) \quad (2.31)$$

e

$$p_\phi \sim -V(\phi) , \quad (2.32)$$

Supõe-se que o campo inflaton ϕ esteja em uma região do potencial que satisfaça às *condições de slow-roll* [14]

$$\epsilon \ll 1, \quad (2.33)$$

$$|\eta| \ll 1 \quad (2.34)$$

onde ϵ e η são os *parâmetros de slow-roll* dados, respectivamente, por [14]

$$\epsilon \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{V(\phi)'}{V(\phi)} \right)^2,$$

$$\eta \equiv \frac{V(\phi)''}{V(\phi)}.$$

A dedução destes dois parâmetros será demonstrada na subsecção (2.5.3).

O *número de dobras* $N(t)$ representa a quantidade de inflação que normalmente ocorre. Ele está quantificado pela razão do fator de escala $a(t)$, de um tempo final t_f a um tempo inicial t_i ,

$$N(t) = \ln \frac{a(t_f)}{a(t)} = \int_{t_f}^t H(t') dt'. \quad (2.35)$$

Se no final do processo inflacionário, quando não pudermos considerar as aproximações de slow-roll, o valor do fator de escala for a_f , então, durante o processo podemos expressar

$$a(\phi) = a_f \exp(-N_e(\phi)), \quad (2.36)$$

onde $N_e(\phi)$ conta de *número de dobras* em termos de ϕ a partir do fim do processo.

Deste modo, durante a inflação de slow-roll

$$N_e(\phi) = \int_{t_f}^t H(t') dt' = \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{H}{\dot{\phi}} d\phi \approx \int_{\phi_f}^{\phi} \frac{3H^2}{V'(\phi)} d\phi, \quad (2.37)$$

$$N(\phi) \approx \int_{\phi}^{\phi_f} \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} d\phi, \quad (2.38)$$

onde o valor do ponto final do inflaton, ϕ_f , é definido por $\epsilon(\phi_f) = 1$. Neste instante, a inflação termina, pois as condições de slow-roll são violadas.

Para resolver os problemas de planura e o problema do horizonte, o número de dobras é de aproximadamente 70, $N_e(\phi) \approx 70$ [14].

2.5.2 Perturbações Escalares produzidas durante a Inflação

O universo no qual vivemos é aproximadamente (ou talvez exatamente) plano espacialmente e, em largas-escalas, é *homogêneo* e *isotrópico*. Estas características são atribuídas a ele devido à fase inflacionária. No entanto, a pequenas escalas, o universo é *inhomogêneo*. A inhomogeneidade na distribuição de galáxias, aglomerados e outros objetos luminosos é resultado das pequenas perturbações primordiais produzidas na densidade de campo durante a inflação. Elas também produzem a anisotropia observada na temperatura da Radiação Cósmica de Fundo. O estudo destas perturbações primordiais permite conhecer melhor a dinâmica da inflação [14].

Atualmente, o universo passa por um período de expansão acelerada. Os modelos mais aceitos admitem que esta expansão também é gerada por um campo escalar homogêneo espacialmente $\phi(t)$. Assim, a energia escura, que compõe 70% da matéria atual no universo, seria representada por um potencial deste campo.

Existem duas diferenças básicas entre a fase atual e a fase inflacionária primordial do nosso universo. Na primeira, trabalha-se com baixas energias e a ainda não sabemos se esta expansão acelerada será finita ou não. Na inflação, trabalhamos com altas energias e a expansão acelerada ocorreu em um curto período de tempo.

Muitos modelos inflacionários são propostos com a finalidade de aprendermos alguma coisa sobre a dinâmica inflacionária. Este estudo nos proporciona conhecer melhor a origem, a formação e estrutura do universo. Além do mais, estamos trabalhando com as leis da física em escalas de energia muito altas, que não podemos produzir em laboratórios terrestres para estudar as perturbações escalares geradas da inflação considere o elemento de linha dado por

$$ds^2 = {}^{(0)} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j = a(\tau)^2 (d\tau^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j), \quad (2.39)$$

onde $\tau \equiv \int a^{-1} dt$ é o tempo conforme. A métrica de fundo escolhida é a de Friedmann-Robertson-Walker.

A forma mais geral do elemento de linha que descreve perturbações escalares da métrica é dada por [18, 20]

$$ds^2 = a(\tau)^2 \{ (1 + 2A) d\tau^2 - 2B_{,i} dx^i d\tau - [(1 - 2\psi)\gamma_{ij} + 2E_{,ij}] dx^i dx^j \}, \quad (2.40)$$

onde as quantidades A , ψ , B e E são funções das coordenadas espaço-tempo. Denotamos a derivada covariante de uma função f com respeito à coordenada i por $f_{,i}$. Em um universo espacialmente plano, essas derivadas covariantes transformam-se em derivadas parciais ordinárias.

As quatro variáveis de perturbação da métrica, A , ψ , B e E , não estão inteiramente livres. Algumas delas são escolhidas a fim de fixar o sistema de coordenadas antes que analisemos as perturbações. A escolha do sistema de coordenadas é frequentemente chamada de *escolha de calibre*. É importante escolher uma condição de calibre apropriada que permita uma análise matemática simplificada e uma interpretação física mais fácil.

Partindo de combinações das quatro variáveis de perturbação, pode-se construir variáveis invariantes de calibre. As mais simples combinações lineares invariantes de calibre, construídas a partir das variáveis da métrica, são dadas pelos potenciais Φ e Ψ [18, 20]

$$\Phi = A + (1/a) [(B - E')a]', \quad \Psi = \psi(a'/a)(B - E'), \quad (2.41)$$

onde a linha é a derivada em relação ao tempo conforme τ , $a' \equiv da/d\tau$ e $E' \equiv dE/d\tau$.

A condição de calibre mais usada é a do calibre longitudinal. Este calibre é definido pelas condições $B = E = 0$. Usando este calibre na métrica (2.40), temos

$$ds^2 = a(\tau)^2 [(1 + 2\Phi)d\tau^2 - (1 - 2\Psi)\gamma_{ij}dx^i dx^j] . \quad (2.42)$$

As equações de Einstein (considerando $\Lambda = 0$) relacionam o tensor energia-momento T^μ_ν com as propriedades geométrica do espaço-tempo,

$$G^\mu_\nu = 8\pi G T^\mu_\nu, \quad G^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2}g^\mu_\nu R . \quad (2.43)$$

As componentes do tensor de Einstein para a métrica de fundo (2.39), descrevendo um universo homogêneo e isotrópico em expansão, são [18, 20]

$$^{(0)}G^0_0 = 3a^{-2}(\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}) , \quad (2.44)$$

$$^{(0)}G^0_i = 0 , \quad (2.45)$$

$$^{(0)}G^i_j = a^{-2}(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2 + \mathcal{H})\delta^i_j , \quad (2.46)$$

onde $\mathcal{H} \equiv a'/a$. A forma de $^{(0)}G^\mu_\nu$ usando o tempo físico t é obtida através da mudança de variável $t = t(\tau)$ sobre as componentes do tensor para o tempo conforme τ .

As equações de Einstein para a métrica de fundo (2.39) são

$$^{(0)}G^\mu_\nu = 8\pi G^{(0)}T^\mu_\nu , \quad (2.47)$$

onde $^{(0)}T^\mu_\nu$ é o tensor energia-momento de fundo. Para satisfazer as condições (2.44), (2.45) e (2.46), $^{(0)}T^\mu_\nu$ deve satisfazer as seguintes propriedades de simetria

$$^{(0)}T^i_0 = ^{(0)}T^0_i = 0, \quad ^{(0)}T^i_j \propto \delta^i_j . \quad (2.48)$$

Considerando pequenas perturbações sobre a métrica de fundo, temos que o tensor de Einstein pode ser dado como

$$G^\mu_\nu = {}^{(0)}G^\mu_\nu + \delta G^\mu_\nu + \dots, \quad (2.49)$$

e o tensor de energia momento pode ser escrito como

$$T^\mu_\nu = {}^{(0)}T^\mu_\nu + \delta T^\mu_\nu. \quad (2.50)$$

As equações de Einstein linearizadas, considerando pequenas perturbações sobre a métrica de fundo, são

$$\delta G^\mu_\nu = 8\pi G \delta T^\mu_\nu, \quad (2.51)$$

onde δ representa os termos lineares de flutuações na métrica e na matéria.

As componentes perturbadas do tensor de Einstein evoluem no calibre longitudinal como [18, 20]

$$\delta G^0_0 = 2a^{-2} [-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Psi') + \nabla^2\Psi], \quad (2.52)$$

$$\delta G^0_i = 2a^{-2}(\mathcal{H}\Phi + \Psi')_{,i}, \quad (2.53)$$

$$\delta G^i_j = -2a^{-2} \left\{ \left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Psi'' + 2\mathcal{H}\Psi' + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta^i_j - \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{,kj} \right\}, \quad (2.54)$$

onde $D \equiv \Phi - \Psi$.

Considerando o universo preenchido por um campo escalar minimamente acoplado, $\phi(x, t)$, o tensor energia-momento é dado por

$$T^\mu_\nu = -(\nabla\phi)^2 + \left[\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + V(\phi) \right] \delta^\mu_\nu. \quad (2.55)$$

O campo escalar $\phi(x, t)$ pode ser decomposto em duas partes. A primeira corresponde ao campo de fundo e a segunda ao campo perturbado,

$$\phi(x, \tau) = \phi_0(\tau) + \delta\phi(x, \tau). \quad (2.56)$$

Substituindo (2.56) em (2.55), usando primeiramente a métrica não-perturbada (2.39), obtemos as componentes não-perturbadas do tensor energia momento [18, 20]

$${}^{(0)}T^0_0 = \frac{1}{2a^2}\phi_0'^2 + V(\phi_0), \quad {}^{(0)}T^0_i = 0, \quad {}^{(0)}T^i_j = \left[-\frac{1}{2a^2}\phi_0'^2 + V(\phi_0) \right] \delta^i_j, \quad (2.57)$$

e usando a métrica perturbada (2.42), as componentes perturbadas do tensor energia momento são [18, 20]

$$\delta T_0^0 = a^{-2} [-\phi_0'^2 \Phi + \phi_0' \delta \phi' + V'(\phi) a^2 \delta \phi] , \quad (2.58)$$

$$\delta T_i^0 = a^{-2} \phi_0' \delta \phi_{,i} , \quad (2.59)$$

$$\delta T_j^i = a^{-2} [\phi_0'^2 \Phi - \phi_0' \delta \phi' + V'(\phi) a^2 \delta \phi] \delta_j^i . \quad (2.60)$$

A componente (2.60) obedece à relação $\delta T_j^i \sim \delta_j^i$. Portanto, se usarmos a parte $i \neq j$ da equação (2.51), teremos que $D = \Phi = \Psi$.

As equações de Einstein perturbadas pode ser escrita como

$$-3\mathcal{H}(\mathcal{H}\Phi + \Phi') + \nabla^2 \Phi = 4\pi G a^2 \delta T_0^0 , \quad (2.61)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Phi')_{,i} = 4\pi G a^2 \delta T_i^0 , \quad (2.62)$$

$$\left[(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2)\Phi + \mathcal{H}\Phi' + \Phi'' + 2\mathcal{H}\Phi' + \frac{1}{2}\nabla^2 D \right] \delta_i^j + \frac{1}{2}\gamma^{ik} D_{,kj} = -4\pi G a^2 \delta T_j^i . \quad (2.63)$$

Efetuada a derivada na equação (2.29) em relação tempo físico t . Usando a equação (2.30), obtem-se uma relação para a parte não perturbada,

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}l^2 \dot{\phi}_0^2 \quad (2.64)$$

onde $l^2 = 1/3$.

Em função do tempo conforme τ , temos que

$$\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2 = -\frac{3}{2}l^2 \phi_0'^2 . \quad (2.65)$$

Reescrevendo as equações (2.61), (2.62) e (2.63), respectivamente

$$\nabla^2 \Phi - 3\mathcal{H}\Phi' - (2\mathcal{H}^2 + \mathcal{H}')\Phi = \frac{3}{2}l^2(\phi_0' \delta \phi' + V'(\phi) a^2 \delta \phi) , \quad (2.66)$$

$$(\mathcal{H}\Phi + \Phi') = \frac{3}{2}l^2 \phi_0' \delta \phi , \quad (2.67)$$

$$\Phi'' + (\mathcal{H}' + 2\mathcal{H}^2)\Phi + 3\mathcal{H}\Phi' = \frac{3}{2}l^2(\phi_0' \delta \phi' - V'(\phi) a^2 \delta \phi) . \quad (2.68)$$

Combinando as equações (2.66) e (2.68), obtemos a equação de campo escalar invariante de calibre [18, 20]

$$\delta \phi'' + 2\mathcal{H}\delta \phi' - \nabla^2 \delta \phi + V''(\phi) a^2 \delta \phi = 4\phi_0' \Phi' - 2V'(\phi) a^2 \Phi . \quad (2.69)$$

A equação de Klein-Gordon para a parte não-perturbada ϕ_0 é

$$\phi_0'' + 2\mathcal{H}\phi_0' + V_{,\phi}(\phi_0)a^2 = 0 . \quad (2.70)$$

Subtraindo (2.66) e (2.68), usando as equações (2.65) e (2.67) para expressar $\delta\phi$ em termos de Φ' e Φ , e ainda utilizando a equação (2.70), obtemos uma equação diferencial parcial de segunda ordem para Φ [18, 20],

$$\Phi'' - \nabla^2\Phi + 2\left(\mathcal{H} - \frac{\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Phi' + 2\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}\frac{\phi_0''}{\phi_0'}\right)\Phi = 0 , \quad (2.71)$$

ou

$$\Phi'' - \nabla^2\Phi + 2\left(\frac{a}{\phi_0'}\right)' \left(\frac{a}{\phi_0'}\right)^{-1} \Phi' + 2\phi_0' \left(\frac{\mathcal{H}}{\phi_0'}\right)' \Phi = 0 , \quad (2.72)$$

onde introduzimos uma nova variável, u , dada por

$$u = \frac{a}{\phi_0} \Phi . \quad (2.73)$$

Deste modo, podemos reduzir a equação (2.72) à equação,

$$u'' - \nabla^2 u - \frac{z''}{z}u = 0 , \quad (2.74)$$

onde $z = \mathcal{H}/(a\phi_0)$.

As soluções da equação (2.74) podem ser facilmente encontradas em limites assintóticos. Fazendo transformações de Fourier, a função u_k , com um número de onda k , satisfaz [18]

$$u_k'' + (k^2 - z''/z)u_k = 0 . \quad (2.75)$$

Em um limite de grandes comprimentos de onda², $k^2 \ll z''/z$ encontra-se uma solução analítica para a equação (2.75), para Φ e $\delta\phi$ [18]

$$u = z \left(c_1 + c_2 \int \frac{d\tau}{z^2} \right) , \quad (2.76)$$

$$\Phi = 2c_2 \left(\frac{1}{a} \int a dt \right)^{\bullet} = 2c_2 \left(1 - \frac{H}{a} \int a dt \right) , \quad (2.77)$$

$$\delta\phi = 2c_2 \frac{\dot{\phi}_0}{a} \int a dt , \quad (2.78)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração e o ponto $\bullet$ indica a derivada em relação ao tempo t .

---

²O comprimento de onda comóvel λ está relacionado com o número de onda k pela relação $\lambda = 2\pi/k$.

De acordo com Bardeen [21], no limite de grandes comprimentos de onda, a solução (2.77) indica que há uma quantidade conservada invariante de calibre chamada de *perturbação da curvatura comóvel* $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{R} = \Phi - \frac{H^2}{H} \left(\Phi + \frac{\dot{\Phi}}{H} \right) = 2c_2 . \quad (2.79)$$

Durante a *fase inflacionária*, as perturbações com o número de onda k são empurradas para fora do raio de Hubble (sai do horizonte), $k < aH$, pela expansão acelerada do universo. Deste modo, estamos interessados nas regiões de grandes comprimentos de onda, k^{-1} , ou seja, para $k^2 \ll z''/z$, cujas soluções analíticas são dadas pelas equações (2.77) e (2.78). Quando a inflação termina, a escala de perturbação re-entra no raio de Hubble (entra no horizonte) induzindo a formação de galáxias e aglomerados. A inflação naturalmente explica a origem de estruturas de largas escalas.

As equações (2.77) e (2.78) podem ser escritas como

$$\begin{aligned} \Phi = \left(a^{-1} \int a dt \right)^{\bullet} &= 2c_2 \left(a^{-1} \int H^{-1} da \right)^{\bullet} = 2c_2 \left(H^{-1} - \int (H^{-1})^{\bullet} a dt \right)^{\bullet} \\ &= -2c_2 \frac{\dot{H}}{H^2} , \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\delta\phi = 2c_2 \dot{\phi}_0 a^{-1} \int a dt = 2c_2 \frac{\dot{H}}{H^2} . \quad (2.81)$$

Das equações (2.79) e (2.81), a expressão para a perturbação de curvatura comóvel $\mathcal{R}$ é [31]

$$\mathcal{R} = \frac{H\delta\phi}{\dot{\phi}_0} . \quad (2.82)$$

O espectro de perturbação de curvatura comóvel (ou amplitude de perturbação escalar) $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{4}{25} \langle |\mathcal{R}|^2 \rangle , \quad (2.83)$$

Usando (2.82),

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{4}{25} \frac{H^2 \langle (\delta\phi)^2 \rangle}{\dot{\phi}_0^2} . \quad (2.84)$$

A partir do resultado obtido por Bunch e Davies [22], que estabelece que o espectro de flutuações quânticas de um campo escalar sem massa minimamente acoplado à gravidade em um espaço de Sitter é dado por

$$\langle (\delta\phi)^2 \rangle = \frac{H^2}{4\pi^2} . \quad (2.85)$$

e substituindo este resultado em (2.84), tem-se que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{1}{25\pi^2} \frac{H^4}{\dot{\phi}^2} , \quad (2.86)$$

Usando (2.29) e (2.30) tem-se ainda

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{9}{25\pi^2} \frac{H^6}{V'(\phi)^2} \quad (2.87)$$

ou

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \left(\frac{1}{75\pi^2} \right) \frac{V^3(\phi)}{(V'(\phi))^2} . \quad (2.88)$$

A variação de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ é definida em termos do índice espectral $n(k)$ como

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \equiv n(k) - 1 . \quad (2.89)$$

Na inflação de slow-roll, este espectro varia lentamente, de modo que $n \approx 1$. Em alguns modelos de inflação, $n(k)$ é praticamente constante sobre escalas cosmológicas,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \propto k^{n-1} . \quad (2.90)$$

2.5.3 Parâmetros de Slow-roll

Existem vários tipos de modelos de inflação obtidos a partir de um dado potencial $V(\phi)$. Para uma maior aceitação deste ou daquele modelo, é necessário calcular os parâmetros de rolagem lenta que possibilitam comparar a teoria com os dados observacionais. Com os parâmetros ϵ e η , podemos obter um resultado ao índice espectral $n(k)$, grandeza, que de acordo com dados observacionais do WMAP, se aproxima de 1.

Contando a partir do fim da inflação, quando $a = a_f$, como as amplitudes são calculadas ao cruzar o horizonte, $k = aH$,

$$k(\phi) = a_f \exp(-N(\phi)) H(\phi) . \quad (2.91)$$

Usando (2.37),

$$\begin{aligned} \frac{d \ln k(\phi)}{d \phi} &= -N'(\phi) + \frac{H'(\phi)}{H(\phi)} = -\frac{V(\phi)}{V'(\phi)} + \frac{1}{2} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \\ &= \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 - 1 \right\} \\ &= \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} \{\epsilon - 1\} \end{aligned} \quad (2.92)$$

onde tem-se o primeiro parâmetro de slow-roll ϵ [11],

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 . \quad (2.93)$$

Durante a inflação, $\epsilon \ll 1$.

Considere agora,

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} = \frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \frac{d\phi}{d \ln k} \frac{d\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} ,$$

onde

$$\frac{1}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} \frac{d\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d\phi} = \frac{3V'(\phi)}{V(\phi)} - \frac{2V''(\phi)}{V'(\phi)} . \quad (2.94)$$

Deste modo tem-se que,

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} &= \left\{ \frac{3V'(\phi)}{V(\phi)} - \frac{2V''(\phi)}{V'(\phi)} \right\} \frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{1}{\epsilon - 1} \\ &= 3 \frac{V'^2(\phi)}{V^2(\phi)} \frac{1}{\{\epsilon - 1\}} - 2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} \frac{1}{\{\epsilon - 1\}} , \end{aligned} \quad (2.95)$$

onde tem-se o segundo termo de slow-roll η [11],

$$\eta = \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} . \quad (2.96)$$

Durante a inflação, $\epsilon \ll 1$ e $\eta \ll 1$.

Considerando apenas termos lineares nos parâmetros encontra-se

$$\frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \approx -6\epsilon + 2\eta . \quad (2.97)$$

Da relação (2.89)

$$n(k) - 1 \approx -6\epsilon + 2\eta . \quad (2.98)$$

Durante a inflação, as amplitudes são calculadas ao cruzar o horizonte, $k = aH$. Sendo H aproximadamente constante,

$$d \ln k = H dt .$$

Como $dt \approx -(3H/V'(\phi))d\phi$, encontra-se que

$$\frac{d}{d \ln k} = -\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d}{d\phi} . \quad (2.99)$$

A variação do índice espectral $n(k)$ é dada por

$$\begin{aligned}\frac{dn}{d \ln k} &= -6 \frac{d\epsilon}{d \ln k} + 2 \frac{d\eta}{d \ln k} \\ &= -16\epsilon\eta + 24\epsilon^2 + 2\zeta,\end{aligned}\tag{2.100}$$

onde

$$\frac{d\epsilon}{d \ln k} = -\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \frac{d\epsilon}{d\phi} = 2\epsilon\eta - 4\epsilon^2,$$

$$\frac{d\eta}{d \ln k} = -\frac{V'(\phi)}{V(\phi)}, \quad \frac{d\eta}{d\phi} = -2\epsilon\eta + \zeta$$

e

$$\zeta = \frac{V'(\phi)V'''(\phi)}{V^2(\phi)}.\tag{2.101}$$

Assim, os parâmetros de slow-roll que são úteis para o estudo dos modelos inflacionários foram apresentados.

2.6 Campo Escalares Não-Minimamente Acoplados

A ação que descreve a interação entre o campo gravitacional e um campo escalar é geralmente construída admitindo o *princípio de acoplamento mínimo* ($\xi = 0$). Porém, modelos com acoplamento não-mínimo entre a curvatura do espaço-tempo e um campo escalar ($\xi \neq 0$) têm sido propostos [23, 24, 25].

Em [23], o modelo inflacionário caótico é analisado em um espaço-tempo curvo no qual o inflaton acopla-se não-minimamente com a curvatura espaço-tempo como $\frac{1}{2}\xi R\phi^2$ e em [24], ao contrário que se previa em [23], ξ pode ter um valor grande sem prejudicar o cenário inflacionário caótico. Em teoria de campo em espaço-tempo curvo, o acoplamento não-mínimo ocorre quando a curvatura do espaço-tempo é grande [26].

2.6.1 Soluções para o Referencial de Jordan

Considere a ação dada por [27, 28]

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(1 - \xi\phi^2)R - g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - 2V(\phi)],\tag{2.102}$$

onde $8\pi G = 1$.

Admitindo um espaço-tempo homogêneo e plano dada pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.103)$$

temos que as equações de campo para a ação (2.102) são

$$H^2 = \frac{1}{3(1-\alpha)} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) + 6\xi H\phi\dot{\phi} \right], \quad (2.104)$$

$$\dot{H} = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \xi(\dot{\phi}^2 - H\phi\dot{\phi} + \phi\ddot{\phi}) \right] \quad (2.105)$$

e

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \left[\frac{(1-6\xi)\alpha}{1-(1-6\xi)\alpha} \right] \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} \\ = \frac{1}{1-(1-6\xi)\alpha} [-4\xi\phi V(\phi) + (1-\alpha)\partial V/\partial\phi] \end{aligned} \quad (2.106)$$

onde $\alpha = \xi\phi^2$.

Usando as *aproximações de slow-roll*

$$\left| \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \right| \ll H, \quad \left| \frac{\dot{\phi}}{\phi} \right| \ll H, \quad \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi), \quad (2.107)$$

as equações (2.104) e (2.106) podem ser escritas como [25]

$$\begin{aligned} H^2 \approx \frac{1}{3(1-\alpha)} \\ \left[V(\phi) - \frac{2\xi\phi}{1-(1-6\xi)\alpha} \{4\xi\phi V(\phi) - (1-\alpha)\partial V/\partial\phi\} \right] \end{aligned} \quad (2.108)$$

$$3H\dot{\phi} \approx \frac{1}{1-(1-6\xi)\alpha} \{-4\xi\phi V(\phi) + (1-\alpha)\partial V/\partial\phi\}. \quad (2.109)$$

2.6.2 Perturbações Escalares no Referencial de Jordan

Seja a métrica perturbada para perturbações escalares [27, 28]

$$ds^2 = -(1+2A)dt^2 + 2a(t)B_{,i}dx^i dt + a^2(t)[(1+2\psi)\delta_{ij} + 2E_{,ij}]dx^i dx^j, \quad (2.110)$$

de modo que a *perturbação de curvatura escalar invariante de Gauge $\mathcal{R}$* dessa métrica e do campo escalar perturbado $\delta\phi$ é

$$\mathcal{R} = \psi - \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi, \quad (2.111)$$

A equação de movimento para a lagrangiana (2.102) é dada por [27, 28]

$$\frac{1}{a^3 Q} (a^3 Q \dot{\mathcal{R}})^\cdot + \frac{\kappa^2}{a^2} \mathcal{R} = 0 \quad \text{com} \quad Q = \frac{\dot{\phi}^2 + 3\dot{G}^2/2G}{(H + \dot{G}/2G)^2}, \quad (2.112)$$

onde κ é o número de onda comóvel e $G = (1 - \xi\phi^2)$. Fazendo uma substituição de variáveis como $z = a\sqrt{Q}$ e $v = a\mathcal{R}$, a equação acima se reduz a

$$v'' + (\kappa^2 - z''/z)v = 0, \quad (2.113)$$

onde a linha indica uma derivada no tempo conforme $\eta = \int a^{-1} dt$.

O termo z''/z pode ser escrito como

$$z''/z = (aH)^2 \left[(1 + \delta)(2 + \delta + \epsilon) + \frac{\delta'}{aH} \right], \quad (2.114)$$

onde o parâmetro usual de slow-roll ϵ e um novo parâmetro δ são definidos como [27, 28]

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \delta \equiv \frac{\dot{Q}}{2HQ}. \quad (2.115)$$

Esses parâmetros ϵ e δ dão origem ao índice espectral n [27, 28]

$$n \equiv 1 + \frac{d \ln P_s}{d \ln k} = 1 - 2\epsilon - 2\delta, \quad (2.116)$$

onde P_s é a amplitude de perturbação de curvatura escalar.

2.6.3 Soluções para o Referencial de Einstein

Devido ao acoplamento não-mínimo, é conveniente reduzir a ação (2.137) a um sistema no referencial de Einstein com por meio da transformação conforme [27, 28],

$$\hat{g}_{ab} = \Omega g_{ab}, \quad \text{com} \quad \Omega = (1 - \xi\phi^2), \quad (2.117)$$

da qual, se obtém a ação equivalente

$$S_E = \int d^4 \hat{x} \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{1}{2} \hat{R} - \left\{ \frac{3}{4} \left(\frac{\Omega'}{\Omega} \right)^2 + \frac{1}{2F} \right\} \hat{g}^{ab} \hat{\nabla}_a \phi \hat{\nabla}_b \phi - \hat{V}(\phi) \right] \quad (2.118)$$

com

$$\hat{V}(\phi) = \frac{V(\phi)}{\Omega^2(\phi)}. \quad (2.119)$$

Introduzindo um novo campo escalar $\hat{\phi}$, tal que

$$d\hat{\phi} \equiv F(\phi)d\phi \text{ com } F(\phi) = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\frac{\Omega'}{\Omega} \right)^2 + \frac{1}{\Omega}} = \frac{\sqrt{1 - \xi\phi^2(1 - 6\xi)}}{(1 - \xi\phi^2)}, \quad (2.120)$$

a ação (2.118) pode ser reescrita na forma canônica como

$$S_E = \int d^4\hat{x} \sqrt{-\hat{g}} \left[\frac{1}{2} \hat{R} - \frac{1}{2} \hat{g}^{ab} \hat{\nabla}_a \hat{\phi} \hat{\nabla}_b \hat{\phi} - \hat{V}(\hat{\phi}) \right]. \quad (2.121)$$

A métrica de FRW, nesse referencial, é dada por,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)d\vec{x}^2 = \Omega^{-1}(-d\hat{t}^2 + \hat{a}^2(\hat{t})d\vec{x}^2), \quad (2.122)$$

onde $\hat{t}$ e $\hat{a}$ estão relacionados com o referencial original como, respectivamente

$$d\hat{t} = \sqrt{\Omega}dt \text{ e } \hat{a} = \sqrt{\Omega}a. \quad (2.123)$$

As evoluções do fator de escala e do campo $\hat{\phi}$ no referencial de Einstein são,

$$\hat{H}^2 \equiv \left(\frac{\hat{a}_{\hat{t}}}{\hat{a}} \right)^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \hat{\phi}_{\hat{t}}^2 + \hat{V}(\hat{\phi}) \right], \quad (2.124)$$

$$\hat{\phi}_{\hat{t}\hat{t}} + 3\hat{H}\hat{\phi}_{\hat{t}} + \hat{V}_{\hat{\phi}} = 0. \quad (2.125)$$

2.6.4 Perturbações Escalares no Referencial de Einstein

Considere a métrica perturbada no referencial de Einstein [27, 28]

$$d\hat{s}^2 = \Omega ds^2 \quad (2.126)$$

$$= -(1 + 2\hat{A})d\hat{t}^2 + 2\hat{a}(\hat{t})\hat{B}_{,i}d\hat{x}^i d\hat{t} + \hat{a}^2(\hat{t})[(1 + 2\hat{\psi})\delta_{ij} + 2\hat{E}_{,ij}]d\hat{x}^i d\hat{x}^j, \quad (2.127)$$

separando o fator conforme Ω em duas partes não-perturbada e perturbada temos,

$$\Omega(\vec{x}, t) = \Omega(t) \left(1 + \frac{\Omega(\vec{x}, t)}{\Omega(t)} \right), \quad (2.128)$$

onde

$$\hat{a} = a\sqrt{\Omega}, \quad d\hat{t} = \sqrt{\Omega}dt, \quad \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \left(H + \frac{\dot{\Omega}}{2\Omega} \right), \quad \hat{A} = A + \frac{\delta\Omega}{2\Omega}, \quad \hat{\psi} = \psi + \frac{\delta\Omega}{2\Omega}. \quad (2.129)$$

Usando essas relações, podemos mostrar que perturbações de curvatura $\mathcal{R}$ no referencial de Einstein são escritas similarmente ao de Jordan

$$\hat{\mathcal{R}} \equiv \hat{\psi} - \frac{\hat{H}}{d\hat{\phi}/d\hat{t}} \delta\hat{\phi} \quad (2.130)$$

$$\psi - \frac{H}{d\phi/dt} \delta\phi = \mathcal{R}. \quad (2.131)$$

Introduzindo as seguintes relações,

$$\hat{\gamma} = \frac{(1 + \hat{\delta})(2 + \hat{\delta} + \hat{\epsilon})}{(1 + \hat{\epsilon})^2}, \quad \hat{\epsilon} = \frac{d\hat{H}/d\hat{t}}{\hat{H}^2}, \quad \hat{\delta} = \frac{d\hat{Q}/d\hat{t}}{2\hat{H}\hat{Q}}, \quad \hat{Q} = \left(\frac{d\hat{\phi}}{\hat{H}}\right)^2 = Q/\Omega \quad (2.132)$$

e aplicando as aproximações de slow-roll (2.107) nas equações (2.124) e (2.125),

$$\hat{H}^2 \approx \hat{V}, \quad (2.133)$$

$$3\hat{H}\hat{\phi}_{\hat{t}} + \hat{V}_{\hat{\phi}} = 0, \quad (2.134)$$

os parâmetros $\hat{\epsilon}$ e $\hat{\delta}$ podem ser escritos do potencial como [27, 28]

$$\hat{\epsilon} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{V}_{\hat{\phi}}}{\hat{V}} \right)^2, \quad \hat{\delta} \equiv \left[\left(\frac{\hat{V}_{\hat{\phi}}}{\hat{V}} \right)^2 - \frac{\hat{V}_{\hat{\phi}\hat{\phi}}}{\hat{V}} \right]. \quad (2.135)$$

E o índice espectral n é dado por [27, 28]

$$\hat{n} = 1 - 2\hat{\epsilon} - 2\hat{\delta} = 1 - 2\epsilon - 2\delta = n, \quad (2.136)$$

de modo que n é invariante á transformação conforme Ω até primeira ordem das aproximações de slow-roll.

2.6.5 Potenciais Exponenciais

Considere o modelo não-minimamente acoplado descrito pela ação

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(\phi)R - g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - 2V] \quad (2.137)$$

onde $F(\phi) = (1 - \xi\phi^2)$, $S_g = 1/2 \int d^4x \sqrt{-g} R$ é a parte gravitacional da ação, $S_{int} = -\xi/2 \int d^4x \sqrt{-g} R \phi^2$ é um termo de interação explícito entre os campos gravitacional e escalar ϕ ; ξ é a constante de acoplamento não-mínimo ($\xi < 0$) e $\kappa^2/8\pi \equiv G = M_{PL}^{-2}$. O potencial de auto-interação escolhido $V(\phi)$ é [29],

$$V(\phi) = A e^{-\sigma\phi}, \quad (2.138)$$

onde A e σ são parâmetros a se definir.

Variando a ação (2.137), obtemos as equações de campo

$$FG_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \nabla_c \phi - V g_{ab} + \nabla_a \nabla_b F - g_{ab} \square F \quad (2.139)$$

e

$$\square \phi + \frac{1}{2} F' R - V'(\phi) = 0, \quad (2.140)$$

onde $\square = g^{ab} \nabla_a \nabla_b$, $F \equiv ((1 - \xi \phi^2))$ e $V' = dV/d\phi$.

O lado direito da equação (2.139) não corresponde a um tensor energia-momento covariantemente conservado devido á presença de $F(\phi)$ em seu lado esquerdo. Desse modo, a pressão e a densidade de energia para o campo ϕ devem ser definidas como

$$T_{ab}^\phi = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \nabla_c \phi - V g_{ab} + \nabla_a \nabla_b F - g_{ab} \square F + (1 - F) G_{ab}, \quad (2.141)$$

onde

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + 3H^2(1 - F) - 3H\dot{F} \quad (2.142)$$

e

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) + \ddot{F} + 2H\dot{F} - (3H^2 + 2\dot{H})(1 - F). \quad (2.143)$$

Assumindo que o espaço-tempo é descrito pela métrica de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plana

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j. \quad (2.144)$$

Reescrevendo as equações (2.141) e (2.142), temos que a densidade de energia e pressão são, respectivamente,

$$\rho_\phi = (1 - \xi \phi^2)^{-1} \left[\frac{(\dot{\phi})^2}{2} + V(\phi) + 6\xi H \phi \dot{\phi} \right], \quad (2.145)$$

$$p_\phi = (1 - \xi \phi^2)^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) \dot{\phi}^2 - V(\phi) - 2\xi \phi \ddot{\phi} - 4\xi H \phi \dot{\phi} \right], \quad (2.146)$$

Da componente temporal, obtemos a equação de Friedmann modificada,

$$3H(FH + F'\dot{\phi}) = \frac{1}{2} + V(\phi) \quad (2.147)$$

ou

$$H^2 = \frac{1}{3(1 - \alpha)} \left[\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + A e^{-\sigma \phi} + 6\xi H \phi \dot{\phi} \right], \quad (2.148)$$

onde $\alpha = \xi\phi^2$.

Das componentes espaciais, obtem-se

$$\dot{H} = \frac{1}{(1-\alpha)} \left[-\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \xi(\dot{\phi}^2 - H\phi\dot{\phi} + \phi\ddot{\phi}) \right]. \quad (2.149)$$

A equação de Klein-Gordon (2.140) pode ser escrita como,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V' + \xi R\phi = 0, \quad (2.150)$$

ou como,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \frac{(1-6\xi)\xi\dot{\phi}^2\phi}{1-(1-6\xi)\alpha} + \frac{4A\xi\phi e^{-\sigma\phi} - A\sigma e^{-\sigma\phi}(1-\alpha)}{1-(1-6\xi)\alpha} = 0, \quad (2.151)$$

onde

$$R \equiv \frac{1}{(1-\alpha)} \left[-(1-6\xi)\dot{\phi}^2 + 4Ae^{-\sigma\phi} + 6\xi\phi(\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi}) \right]. \quad (2.152)$$

De acordo com equação (2.151), tem-se um potencial efetivo dado por

$$V_{\text{eff}}(\phi) = \frac{4A\xi\phi e^{-\sigma\phi} - A\sigma e^{-\sigma\phi}(1-\alpha)}{1-(1-6\xi)\alpha}, \quad (2.153)$$

que ao contrário do potencial inicial $V(\phi)$, apresenta um ponto de mínimo, de acordo com a figura (2.6).

Impondo as aproximações de slow-roll (2.107) temos que as equações (2.148) e (2.151) são,

$$H^2 \approx \frac{1}{3(1-\alpha)} \left[Ae^{-\sigma\phi} + \frac{2\xi\phi}{1-(1-6\xi)\alpha} \{4A\xi\phi e^{-\sigma\phi} - A\sigma e^{-\sigma\phi}(1-\alpha)\} \right], \quad (2.154)$$

e

$$3H\dot{\phi} \approx \frac{-4A\xi\phi e^{-\sigma\phi} + A\sigma e^{-\sigma\phi}(1-\alpha)}{1-(1-6\xi)\alpha}. \quad (2.155)$$

Na seção 5, as equações de Einstein, para os modelos de acoplamento não-mínimo, apresentam termos adicionais dependentes do termo $(1 - \xi\phi^2)$ (Referencial de Jordan) e que pode-se recuperar as equações de campo dos modelos minimamente acoplados por meio de uma transformação conforme (Referencial de Einstein) [30].

Assim, de acordo com a equação (2.119), o potencial (2.138) no referencial de Einstein é dado por

$$\hat{V}(\phi) = \frac{Ae^{-\sigma\phi}}{(1-\xi\phi^2)^2}. \quad (2.156)$$

A figura (2.7) mostra o comportamento de (2.156) para diferentes valores de ξ . Para o caso onde $\xi = -0.05$, o potencial não apresenta nenhum ponto de mínimo enquanto que

Figura 2.6: Comportamento do potencial efetivo $V_{\text{eff}}(\phi)$ para $A = a = 1$, $\sigma = b = 1$ e $\xi = -1$. Podemos notar que na região onde $\phi < 0$, esse potencial possui um ponto de mínimo.

para os casos onde $\xi = -0.5$ e $\xi = -1$, o potencial apresenta um ponto de mínimo na região negativa de ϕ (figura (2.8)).

Nas figuras (2.9) e (2.10) tem-se o comportamento dos parâmetros de slow-roll ϵ e $|\eta|$ do potencial (2.156) para valores das constantes $a, b = 1$ e $\xi = -1$, e pequenos e grandes valores de ϕ . Na figura (2.11) tem-se o gráfico do índice espectral n do potencial (2.156) para valores das constantes $a, b = 1$ e $\xi = -1$.

Figura 2.7: Comportamento do potencial (2.156) para diferentes valores negativos de ξ .

Figura 2.8: Para o caso onde $\xi = -0.5$ e $\xi = -1$, o potencial (2.156) apresenta um ponto de mínimo na região negativa de ϕ .

Comportamento dos parâmetros de slow-roll para ϕ pequeno

Figura 2.9: Comportamento do parâmetro de slow-roll ϵ e η do potencial (2.156) para valores de $a, b = 1$ e $\xi = -1$ e pequenos valores de ϕ .

Comportamento dos parâmetros de slow-roll para ϕ grande

Figura 2.10: Comportamento do parametro de slow-roll ϵ e η do potencial (2.156) para valores de $a, b = 1$ e $\xi = -1$ e grandes valores de ϕ .

Figura 2.11: Comportamento do índice espectral n do potencial (2.156) para valores de $a, b = 1$ e $\xi = -1$.

Capítulo 3

Gravidade Generalizada

A teoria da gravidade generalizada é descrita pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \omega(\phi) g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V(\phi) \right], \quad (3.1)$$

onde as contribuições da matéria para esta ação são desprezadas, pois admite-se que somente o campo escalar ϕ domina a dinâmica do universo, tais como durante à inflação no universo primordial ou à era atual em que um campo escalar tipo quintessência governa a dinâmica do universo. A ação (6.3) contém apenas o escalar de Ricci R e nenhum outro invariante de curvatura. Esta escolha é motivada pelo fato que quando admite-se uma cosmologia homogênea e isotrópica, considera-se que todos os invariantes do tensor de Ricci podem ser escritos em termos de R . A ação (6.3) inclui todos os casos especiais tais como *teoria de Brans-Dicke*, *teorias escalares-tensoriais*, *gravidade modificada*, *lagrangianas quadráticas*, *a teoria de um campo não-minimamente acoplado ao escalar de Ricci*, *relatividade geral sem ou com um campo minimamente acoplado e uma constante cosmológica* e *teoria de campos de phantom*.

A variação desta ação conduz às equações de campo de gravidade generalizada [31],

$$G_{ab} = \frac{1}{F} \left[\omega(\phi) \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (RF - f + 2V) \right. \\ \left. \nabla_a \nabla_b F - g_{ab} \square F \right], \quad (3.2)$$

$$\square \phi + \frac{1}{2\omega} \left(\frac{d\omega}{d\phi} \nabla^c \phi \nabla_c \phi + \frac{\partial f}{\partial \phi} - 2 \frac{dV}{d\phi} \right) = 0, \quad (3.3)$$

onde

$$F \equiv \frac{\partial f}{\partial R}. \quad (3.4)$$

As unidades utilizadas são $c = 1$ e $8\pi G = 1$, onde G é a constante de Newton, a assinatura da métrica é $- , + , + , +$, e $\square \equiv g^{ab} \nabla_a \nabla_b$ é o operador d'Alambertiano.

Para uma métrica de FRW de índice de curvatura K , dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \quad (3.5)$$

em coordenadas comóveis (t, r, θ, φ) , as equações de campo assumem a forma

$$H^2 = \frac{1}{3F} \left(\frac{\omega}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{RF}{2} - \frac{f}{2} + V - 3H\dot{F} \right) - \frac{K}{a^2}, \quad (3.6)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2F}(\omega \dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F}) + \frac{K}{a^2}, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{1}{2\omega} \left(\frac{d\omega}{d\phi} \dot{\phi}^2 - \frac{\partial f}{\partial \phi} + 2\frac{dV}{d\phi} \right) = 0, \quad (3.8)$$

onde o escalar de Ricci é

$$\begin{aligned} R &= 6(\dot{H} + 2H^2 + K/a^2) \\ &= \frac{1}{F} \left(-\omega \dot{\phi}^2 + 2RF - 2f + 4V - 3(\ddot{F} + 3H\dot{F}) \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Somente as equações (3.6) e (3.8) são independentes. Os dados observacionais atuais indicam que o universo é espacialmente plano, $K = 0$. Neste caso, as variáveis dinâmicas deste sistema podem ser H e ϕ . Esta escolha não é possível se $K \neq 0$, pois neste caso o fator de escala a também é uma variável dinâmica que aparece nas equações de campo através do termos $\pm K/a^2$. No entanto, quando $K = 0$, estes termos desaparecem e a aparece somente na combinação $H = \dot{a}/a$ e em suas derivadas temporais.

Em [32], são estabelecidas as condições necessárias para a existência das soluções de Sitter para a ação (6.3).

O espaço de fase de um sistema dinâmico depende das formas específicas das funções $f(\phi, R)$, $\omega(\phi)$ e $V(\phi)$. No entanto, para alguma escolha de f , ω e $V(\phi)$, os pontos fixos do sistema (se eles existem) são dados por

$$(H, \dot{H}, \ddot{H}, \ddot{\phi}, \phi, \dot{\phi}) = (H_0, 0, 0, 0, \phi_0, 0), \quad (3.10)$$

onde H_0 e ϕ_0 são constantes, eles são os espaços de Sitter com campo escalar constante. As condições para a existência de soluções de ponto fixo de Sitter são obtidas substituindo a equação (3.10) nas equações (3.6) e (3.8), que produz as condições

$$6H_0^2 F_0 - f_0 + 2V_0 = 0 \quad (3.11)$$

e

$$f'_0 - 2V'_0 = 0, \quad (3.12)$$

onde

$$F_0 \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{(\phi_0, R_0)}, \quad (3.13)$$

$$f_0 \equiv f(\phi_0, R_0), \quad (3.14)$$

$$V_0 \equiv V(\phi_0), \quad (3.15)$$

$$V'_0 \equiv \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi_0}, \quad (3.16)$$

$$f'_0 \equiv \left. \frac{\partial f}{\partial \phi} \right|_{\phi_0, R_0} \quad (3.17)$$

e $R_0 = 12H_0^2$. Há duas condições independentes (3.11) e (3.12) para que exista as soluções de Sitter pois somente duas equações no conjunto (3.6)-(3.8) são independentes.

3.1 Energia de Phantom

Os modelos de energia de phantom são descritos por campos minimamente acoplados com energia cinética negativa. Para tais modelos, considera-se que a energia escura, representada pelo campo de phantom, é a única forma de matéria nas equações de Einstein. A densidade de energia e pressão do phantom são, respectivamente,

$$\rho = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.18)$$

e

$$p = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.19)$$

Para uma métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) espacialmente plana

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (3.20)$$

em coordenadas comóveis (t, x, y, z) , as equações de Einstein para $\phi(t)$ e para a métrica (3.20) são

$$H^2 = \frac{\kappa}{6}(-\dot{\phi}^2 + 2V), \quad (3.21)$$

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\kappa}{3}(\dot{\phi}^2 + V), \quad (3.22)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - V' = 0, \quad (3.23)$$

onde $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble, um ponto denota uma derivada com respeito ao tempo comóvel t , $V > 0$, e $\kappa \equiv 8\pi G$. O sinal do termo $dV/d\phi$ na equação de Klein-Gordon (3.23) é oposta ao da equação usual, *de modo que o campo inflaton cai à medida que o potencial $V(\phi)$ cresce e é necessariamente positivo de acordo com (3.21)*,

Somente duas equações do conjunto (3.21)-(3.23) são independentes, quando $\dot{\phi} \neq 0$, pode-se derivar a equação de Klein-Gordon (3.23) das outras duas.

As equações de campo podem ser obtidas da Lagrangiana L ou da Hamiltoniana $\mathcal{H}$ [33]

$$L = 3a\dot{a}^2 + \kappa a^3 \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right] \quad (3.24)$$

e

$$\mathcal{H} = a^3 \left[H^2 + \frac{\kappa}{6} \phi^2 - \frac{\kappa V(\phi)}{3} \right], \quad (3.25)$$

onde a equação (3.21) corresponde a $\mathcal{H} = 0$.

Em [33], tem-se que as órbitas das soluções das equações (3.21)-(3.23) pertencem a uma superfície de energia constante $\mathcal{H} = 0$ no espaço de fase $(a, \dot{a}, \phi, \dot{\phi})$. O espaço de fase acessível às órbitas das soluções é uma superfície de energia bi-dimensional $\mathcal{H} = 0$ em um espaço tri-dimensional $(H, \phi, \dot{\phi})$. Reescrevendo a equação (3.21) como uma equação algébrica para $\dot{\phi}$

$$\dot{\phi}^2 - 2V + \frac{6H^2}{\kappa} = 0, \quad (3.26)$$

com soluções

$$\dot{\phi}_{\pm}(H, \phi) = \pm \sqrt{2 \left[V(\phi) - \frac{3H^2}{\kappa} \right]} \equiv \sqrt{F(H, \phi)}. \quad (3.27)$$

Dependendo da forma de $V(\phi)$, existe uma região proibida $\mathcal{F}$ do espaço de fase correspondendo ao sinal negativo de $F \equiv 2(V - 3H^2/\kappa)$:

$$\mathcal{F} \equiv \left\{ (H, \phi, \dot{\phi}) : V(\phi) < \frac{3H^2}{\kappa} \right\}. \quad (3.28)$$

Quando $F(H, \phi) > 0$, há dois valores distintos de $\dot{\phi}$ para cada valor de H e ϕ , correspondendo ao fato que o espaço de fase bi-dimensional consiste de duas folhas unidas uma a outra somente pelos pontos do conjunto

$$\mathcal{B} \equiv \left\{ (H, \phi, \dot{\phi}) : V(\phi) = \frac{3H^2}{\kappa}, \dot{\phi} = 0 \right\}, \quad (3.29)$$

que constitui no contorno da região proibida $\mathcal{F}$ e repousa no plano (H, ϕ) . A folha correspondente ao sinal positivo de $\dot{\phi}$ é a *folha superior*, enquanto que a que corresponde

ao sinal negativo é a *folha inferior*. A cosmologia de phantom pode ser vista como um caso especial da *teoria escalar-tensorial* em que sempre há uma região proibida no espaço de fase.

Os pontos de equilíbrio do sistema (3.22)-(3.23) consiste de espaços de Sitter com campo escalar constante (H_0, ϕ_0) . Se eles existem, estes pontos fixos satisfazem

$$H_0 = \pm \sqrt{\frac{\kappa V_0}{3}}, \quad (3.30)$$

onde $V_0 \equiv V(\phi_0)$ e $V'_0 \equiv \left. \frac{dV}{d\phi} \right|_{\phi_0}$.

A equação (3.21) é satisfeita somente se $V(\phi) \geq 0$, que garante que H_0 é real. Portanto, há pontos fixos do espaço de Sitter onde $dV/d\phi = 0$. Estes pontos fixos estão sobre o contorno $\mathcal{B}$ da região proibida $\mathcal{F}$.

Em [33], propõe-se um estudo referente a uma órbita do espaço de fase com condições iniciais escolhidas exatamente sobre $\mathcal{B}$. Inicialmente, considera-se uma tangente

$$\vec{T} = (\dot{H}, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) = \left(\frac{\kappa}{2} \dot{\phi}^2, \dot{\phi}, \frac{dV}{d\phi} - 3H\dot{\phi} \right) \quad (3.31)$$

no espaço de fase $(H, \phi, \dot{\phi})$. Sobre $\mathcal{B}$, $\vec{T} = (0, 0, dV/d\phi)$. Assim, se $dV/d\phi|_{\mathcal{B}} > 0$, uma órbita que começa sobre $\mathcal{B}$ e se moverá à folha superior, enquanto se $dV/d\phi|_{\mathcal{B}} < 0$, a órbita se moverá à folha inferior. Se $dV/d\phi|_{\mathcal{B}} = 0$, tem-se um ponto fixo que satisfaz às propriedades $\dot{H} = 0$, $\dot{\phi} = 0$, $H^2 = \kappa V/3$ e $V' = 0$.

Para algumas formas do potencial V , H sempre cresce ao longo da órbita de alguma solução exceto aos pontos onde $\dot{\phi} = 0$ ou $\dot{H} = 0$, ou seja, combinando as equações (3.21) e (3.22) para obter

$$\dot{H} = \frac{\kappa}{2} \dot{\phi}^2, \quad (3.32)$$

assim $\dot{H} > 0$ exceto aos pontos onde $\dot{\phi} = 0$, em particular nos pontos (H_0, ϕ_0) .

A equação (3.32) mostra que o universo sempre *superacelera* ou que o campo phantom é uma forma de *superquintessência*. Combinando as equações (3.21) e (3.32),

$$\dot{H} + 3H^2 = \kappa V, \quad (3.33)$$

temos como resultado que as órbitas das soluções das equações (3.21) e (3.23) não são periódicas. De fato, $H(t)$ nunca decresce (uma vez que $V \geq 0$) e desde modo, não retorna periodicamente ao seu valor inicial. Porém, nos casos de um ponto fixo do espaço de Sitter ou se $V'(\phi)$ tem um sinal definido, este resultado não é mais válido.

3.2 Teoria Escalar-Tensorial

Os modelos de gravidade escalar-tensorial são descritos pela ação

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left[F(\phi)R - \omega(\phi)g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - 2V(\phi) + S^{(m)} \right]. \quad (3.34)$$

Aqui R é o escalar de Ricci, $S^{(m)}$ é a ação da matéria incluindo todas as componentes menos ϕ e as unidades são escolhidas tal que $8\pi G = 1$. As funções $\omega(\phi)$ e $V(\phi)$ especificam as energias cinéticas e potencial do campo escalar, respectivamente.

Considere uma classe particular das teorias escalar-tensorial descrita pela ação [34]

$$S = \int d^4x \left[\phi R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - V(\phi) + S^{(m)} \right]. \quad (3.35)$$

As equações de campo obtidas pela variação da ação (3.35) são

$$G_{ab} = \frac{\omega(\phi)}{\phi^2} \left[\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \frac{1}{2}g_{ab}\nabla^c\phi\nabla_c\phi \right] + \frac{1}{\phi}(\nabla_a\nabla_b\phi - g_{ab}\square\phi) - \frac{V}{2\phi}g_{ab} + \frac{1}{\phi}T_{ab}^{(m)}, \quad (3.36)$$

$$\square\phi = \frac{1}{2\omega + 3} \left(\phi \frac{dV}{d\phi} - 2V - \frac{d\omega}{d\phi} \nabla^c\phi\nabla_c\phi + T^{(m)} \right), \quad (3.37)$$

onde $\square \equiv g^{ab}\nabla_a\nabla_b$ é o operador d'Alambertiano.

Para a métrica de FRW as equações de campo assumem a forma

$$H^2 = -H \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{\omega(\phi)}{6} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{V(\phi)}{6\phi} - \frac{K}{a^2} + \frac{1}{3\phi}\rho^{(m)}, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} \dot{H} = & -\frac{\omega(\phi)}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 2H \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{1}{2(2\omega + 3)\phi} \left[\phi \frac{dV}{d\phi} - 2V + \frac{d\omega}{d\phi} (\dot{\phi})^2 \right] \\ & + \frac{K}{a^2} - \frac{1}{(2\omega + 3)} [(\omega + 2)\rho^{(m)} + \omega p^{(m)}], \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\ddot{\phi} + \left(3H + \frac{1}{2\omega + 3} \frac{d\omega}{d\phi} \right) \dot{\phi} = \frac{1}{2\omega + 3} \left[2V - \phi \frac{dV}{d\phi} + (\rho^{(m)} - 3p^{(m)}) \right]. \quad (3.40)$$

Dois tipos diferentes de teorias escalares-tensoriais são estudadas. Um é o modelo pioneiro de Brans-Dicke que pode ser obtido fazendo a escolha $w \rightarrow 2\frac{w}{\phi}$ e $F = 2\phi$ (referencial de Jordan) a ser aplicada na ação (3.34), onde ω é um parâmetro de acoplamento. O outro, genericamente chamado de teoria não-minimamente acoplada, pode ser obtido escolhendo $\omega = 1$, e F e o potencial V são funções genéricas do campo.

3.3 Modelos tipo Brans-Dicke

Estes modelos são chamados de tipo Brans-Dicke por serem inspirados no modelo desenvolvido por Carl H. Brans e Robert Dicke na década de 1960 que propuseram uma generalização da relatividade geral baseados no princípio de Mach.

Considere a ação tipo Brans-Dicke dada por [35]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V(\phi) \right] + S^{(m)} \quad (3.41)$$

onde R é o escalar de curvatura e $S^{(\text{matéria})}$ é a ação de matéria incluindo todas as componentes menos ϕ e as unidades são escolhidas tal que $8\pi = 1$.

A equação de campo covariante mais simples para tal campo escalar é dada por

$$\square \phi = 4\lambda T_{(m)a}^a \quad (3.42)$$

onde $\square \phi = \nabla_c \nabla^c \phi$ é D'Alambertiano, λ é uma constante de acoplamento, e T_m^{ab} é tensor energia-momento da matéria do Universo.

O campo ϕ tem um papel análogo à G^{-1} e possui dimensão $ML^{-3}T^2$. Assume-se que o conteúdo de matéria do Universo é composto por um ou vários fluidos não-interagente com tensor energia-momento conservado $\nabla_a T_{(m)}^{ab} = 0$ dado por $T_{ab}^{(m)} = (\rho + p)u_a u_b + pg_{ab}$, onde $u_a u^a = -1$.

Com estas considerações, Brans e Dicke sugerem que as equações de campo, neste caso, são obtidas, se além de substituírmos G por $1/\phi$, também incluirmos um tensor energia-momento T_ϕ^{ab} para o campo ϕ na fonte do campo gravitacional,

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{1}{\phi}(T_{ab}^{mat} + T_{ab}^\phi), \quad (3.43)$$

onde G_{ab} é o tensor de Einstein e

$$T_{ab}^\phi = \frac{\omega}{\phi} \left(\nabla_a \nabla_b \phi - \frac{1}{2}g_{ab} \nabla_c \phi \nabla^c \phi \right) + (\nabla_a \nabla_b \phi - g_{ab} \square \phi). \quad (3.44)$$

Aqui $\square$ é o operador D'Alambertiano. Se multiplicarmos a equação (3.43) por ϕ e tomarmos a derivada covariante, tem-se que

$$\nabla_c T_\phi^{ab} = \nabla_c (\phi G_{ab}). \quad (3.45)$$

Portanto, nos modelos tipo Brans-Dicke, a equação de continuidade não é satisfeita e o tensor energia-momento do campo escalar não é conservado tal que $\rho_{phi} + 3H(\rho_\phi + p_\phi) \neq 0$.

Uma consequência deste fato é que não podemos definir a razão p_ϕ/ρ_ϕ como uma equação de estado visto que não temos uma lei de conservação associada a ela.

Assumindo que o Universo é homogêneo, isotrópico e espacialmente plano, tem-se as seguintes equações de movimento

$$H^2 = -H \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{\omega(\phi)}{6} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + \frac{V(\phi)}{6\phi} - \frac{K}{a^2} + \frac{1}{3\phi} \rho^{(m)}, \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \dot{H} = & -\frac{\omega(\phi)}{2} \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right)^2 + 2H \left(\frac{\dot{\phi}}{\phi} \right) + \frac{1}{2(2\omega+3)\phi} \left[\phi \frac{dV}{d\phi} - 2V \right] \\ & + \frac{K}{a^2} - \frac{1}{(2\omega+3)} [(\omega+2)\rho^{(m)} + \omega p^{(m)}], \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = \frac{1}{2\omega+3} \left[2V - \phi \frac{dV}{d\phi} + (\rho^{(m)} - 3p^{(m)}) \right]. \quad (3.48)$$

3.4 Modelos de Acoplamento Não-Mínimo

Os modelos de energia escura com campo escalar não-minimamente acoplado à curvatura de Ricci são descritos pela ação [37]

$$\begin{aligned} S &= S_g[g_{cd}] + S_{int}[g_{cd}, \phi] + S_\phi[g_{cd}] + S_m[g_{cd}, \psi_{(m)}] \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(1 - \xi\phi^2)R - g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\psi - 2V] + S_m[g_{cd}, \psi_{(m)}] \end{aligned} \quad (3.49)$$

onde $S_g = 1/2 \int d^4x \sqrt{-g}R$ é a parte gravitacional da ação, $S_{int} = -\xi/2 \int d^4x \sqrt{-g}R\phi^2$ é um termo de interação explícito entre os campos gravitacional e ϕ , S_ϕ descreve a parte dos campos de matéria representado por ψ_m com exceção do ϕ e as unidades são escolhidas tal que $8\pi G = 1$.

A variação da ação (3.49) com respeito à métrica g_{ab} , e usando as fórmulas

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{ab} \delta g^{ab}, \quad (3.50)$$

$$\delta(\sqrt{-g}R) = \sqrt{-g} \left(R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R \right) \delta g^{ab} \equiv G_{ab} \delta g^{ab}, \quad (3.51)$$

onde G_{ab} é o tensor de Einstein, resulta nas equações de Einstein

$$(1 - \xi\phi^2)G_{ab} = (\tilde{T}_{ab}[\phi] + \tilde{T}_{ab}[\psi_m]) \equiv \tilde{T}_{ab}^{(\text{total})}, \quad (3.52)$$

onde

$$\tilde{T}_{ab}[\phi] = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c \phi - V g_{ab} + \xi [g_{ab} \square(\phi^2) - \nabla_\mu \nabla_\nu (\phi^2)] \quad (3.53)$$

e

$$\tilde{T}_{ab}[\psi_m] = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m[\psi_m, g_{cd}]}{\delta g^{ab}}. \quad (3.54)$$

Com a variação da ação (3.49) com respeito a ϕ , obtém-se a equação de Klein-Gordon

$$\square \phi - \xi R \phi - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (3.55)$$

Podemos reescrever a equação (3.52) como

$$G_{ab} = \tilde{T}_{ab}, \quad (3.56)$$

onde $\tilde{T}_{ab} = \tilde{T}_{ab}^{(\text{total})} + \xi \phi^2 G_{ab}$. e uma outra possibilidade é escrevê-la como,

$$G_{ab} = T_{ab}[\phi] + T_{ab}[\phi, \psi_m] \equiv T_{ab}^{\text{total}} \quad (3.57)$$

onde

$$T_{ab}[\phi] \equiv \frac{1}{1 - \xi \phi^2} \tilde{T}_{ab}[\phi], \quad (3.58)$$

$$T_{ab}[\phi, \psi_m] \equiv \frac{1}{1 - \xi \phi^2} \tilde{T}_{ab}[\psi_m]. \quad (3.59)$$

Dois valores da constante de acoplamento ξ são encontrados na literatura: $\xi = 0$ (*acoplamento mínimo*) e $\xi = 1/6$ (*acoplamento conforme*), enquanto que a possibilidade $|\xi| \gg 1$ (*acoplamento forte*) tem sido considerado.

Assumindo que o Universo é homogêneo, isotrópico e espacialmente plano, tem-se que as equações de Friedmann

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho_T + 3p_T) \quad (3.60)$$

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho_T, \quad (3.61)$$

onde a densidade de energia ρ_ϕ e a pressão p_ϕ do campo escalar ϕ são dados pelas componentes diagonais do tensor energia-momento $T_{ab}[\phi]$ da equação (3.58), e a densidade de energia ρ_{ψ_m} e a pressão p_{ψ_m} dos campos de matéria ψ_m são dados pelas componentes diagonais do tensor energia-momento $T_{ab}[\psi_m]$ das equações (3.58) e (3.59), respectivamente,

$$\rho_\phi = (1 - \xi \phi^2)^{-1} \left[\frac{(\dot{\phi})^2}{2} + V(\phi) + 6\xi H \phi \dot{\phi} \right], \quad (3.62)$$

$$p_\phi = (1 - \xi\phi^2)^{-1} \left[\left(\frac{1}{2} - 2\xi \right) - V(\phi) - 2\xi\phi\ddot{\phi} - 4\xi H\phi\dot{\phi} \right], \quad (3.63)$$

e

$$\rho_{\psi_m} \equiv \frac{1}{1 - \xi\phi^2} T_{00}[\tilde{\psi}_m], \quad (3.64)$$

$$p_{\psi_m} \equiv \frac{1}{1 - \xi\phi^2} \sum_{i=1}^3 T_{ii}[\tilde{\psi}_m], \quad (3.65)$$

e

$$\rho_T = \rho_\phi + \rho_{\psi_m}, \quad (3.66)$$

$$p_T = p_\phi + p_{\psi_m}. \quad (3.67)$$

3.5 Gravidade Modificada

Para os modelos de gravidade modificada, considera-se a ação [36]

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x f(R) \quad (3.68)$$

onde $f(R)$ é uma função linear de R . O primeiro modelo proposto tem a fórmula $f(R) = R - \mu^4/R$, em que a correção em R^{-1} torna-se importante somente a baixas curvaturas $\rightarrow 0$ e as unidades são escolhidas tal que $8\pi G = 1$.

Assumindo que o Universo é homogêneo, isotrópico e espacialmente plano, tem-se que as equações de Friedmann se reduzem a

$$H^2 = \frac{1}{3F} \left(\frac{RF - f}{2} - 3H\dot{F} \right) \quad (3.69)$$

e

$$\dot{H} = -\frac{1}{2F} (\ddot{F} - H\dot{F}), \quad (3.70)$$

onde $F \equiv \partial f / \partial R$.

3.6 Análise dinâmica e singularidades

Um modelo cosmológico é considerado robusto com relação às mais diversas perturbações, tais como perturbações nas condições iniciais e nos parâmetros do modelo, quando singularidades não são encontradas neste modelo. Os primeiros estudos de tais singularidades encontram-se em [41], foi o primeiro a identificar a singularidade correspondente à hipersuperfície $F(\phi) = 0$ para o caso de soluções anisotrópicas em acoplamente conforme, e em [42] encontrou-se também estas singularidades nos modelos inflacionários caóticos e em $F(\phi) = 1 - \xi\phi^2$.

Agora considere a ação dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ F(\phi)R - \frac{1}{2} \partial_a \phi \partial^a \phi - V(\phi) \right\}, \quad (3.71)$$

onde as equações de Klein-Gordon e de Einstein para esta ação são, respectivamente

$$\square \phi - V'(\phi) + \frac{1}{2} F'(\phi) R = 0, \quad (3.72)$$

e

$$\begin{aligned} F(\phi)G_{ab} &= (1 + F''(\phi)) \partial_a \phi \partial_b \phi \\ &- \frac{1}{2} g_{ab} [(1 + 2F''(\phi)) \partial_c \phi \partial^c \phi + 2V(\phi)] - F'(\phi) (g_{ab} \square \phi - \nabla_a \phi \nabla_b \phi). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Considerando uma métrica anisotrópica e homogênea Bianchi tipo I dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2 + b^2(t)dy^2 + c^2(t)dz^2, \quad (3.74)$$

e com parâmetros de Hubbles dados por

$$H_1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad H_2 = \frac{\dot{b}}{b}, \quad \text{and} \quad H_3 = \frac{\dot{c}}{c} \quad (3.75)$$

tem-se que para tal métrica e um campo escalar homogêneo $\phi = \phi(t)$, e usando o resultado de (3.72), as equações de Einstein (3.73) podem ser escritas como

$$F(\phi)G_{00} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) - F'(\phi) (H_1 + H_2 + H_3) \dot{\phi}, \quad (3.76)$$

$$\frac{1}{a^2} F(\phi)G_{11} = \frac{1 + 2F''(\phi)}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - F'(\phi) \left(H_1 \dot{\phi} + V'(\phi) - \frac{F'(\phi)}{2} R \right), \quad (3.77)$$

$$\frac{1}{b^2} F(\phi)G_{22} = \frac{1 + 2F''(\phi)}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - F'(\phi) \left(H_2 \dot{\phi} + V'(\phi) - \frac{F'(\phi)}{2} R \right), \quad (3.78)$$

$$\frac{1}{c^2} F(\phi)G_{33} = \frac{1 + 2F''(\phi)}{2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - F'(\phi) \left(H_3 \dot{\phi} + V'(\phi) - \frac{F'(\phi)}{2} R \right), \quad (3.79)$$

onde encontra-se a primeira singularidade correspondente à superfície $F(\phi) = 0$.

Subtraindo (3.78) e (3.79) de (3.77), para esta hipersuperfície $F(\phi) = 0$, tem-se que

$$F'(\phi)(H_1 - H_2)\dot{\phi} = 0, \text{ and } F'(\phi)(H_1 - H_3)\dot{\phi} = 0. \quad (3.80)$$

Calculando o escalar de Ricci R ,

$$R = R(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{F_1(\phi)} \left(4V(\phi) + 3V'(\phi)F'(\phi) - (1 + F''(\phi))\dot{\phi}^2 \right), \quad (3.81)$$

e substituindo este resultado em (3.72) encontra-se a segunda singularidade correspondente à superfície $F_1(\phi) = 0$, onde

$$F_1(\phi) = F(\phi) + \frac{3}{2} (F'(\phi))^2. \quad (3.82)$$

3.6.1 As Singularidades

Para checar a natureza geométrica destas hipersuperfícies dadas pelas singularidades do modelo, considere as equações de Einstein (3.76)-(3.79) mais detalhadamente como se segue

$$\begin{aligned} G_{00} &= H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3, \\ G_{11} &= a^2 \left(\dot{H}_1 + H_1(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}R \right), \\ G_{22} &= b^2 \left(\dot{H}_2 + H_2(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}R \right), \\ G_{33} &= c^2 \left(\dot{H}_3 + H_3(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2}R \right), \\ R &= 2 \left(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3 \right). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Definindo novas variáveis tipo $p = H_1 + H_2 + H_3$, $q = H_1 - H_2$, e $r = H_1 - H_3$, estas equações de Einstein podem ser reescritas como

$$E(\phi, \dot{\phi}, p, q, r) = -\frac{1}{3}F(\phi) (p^2 + qr - q^2 - r^2) + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) - pF'(\phi)\dot{\phi} = 0, \quad (3.84)$$

$$\dot{q} = - \left(p + \frac{F'(\phi)}{F(\phi)}\dot{\phi} \right) q, \quad (3.85)$$

$$\dot{r} = - \left(p + \frac{F'(\phi)}{F(\phi)}\dot{\phi} \right) r, \quad (3.86)$$

$$\begin{aligned} -2F_1(\phi)\dot{p} &= (F(\phi) + 2F'(\phi)^2)p^2 + \frac{3}{2}(1 + 2F''(\phi))\dot{\phi}^2 - 3V(\phi) - 3F'(\phi)V'(\phi) \\ &\quad - p\dot{\phi}F'(\phi) + (F(\phi) + F'(\phi)^2)(q^2 + p^2 - qr). \end{aligned} \quad (3.87)$$

Usando limitante de energia(3.84), esta última equação fica

$$\begin{aligned} \dot{p} = & - \left(p + \frac{F'(\phi)}{F(\phi)} \dot{\phi} \right) p + 3 \frac{F(\phi) + \frac{1}{2}(F'(\phi))^2}{F(\phi)F_1(\phi)} V(\phi) \\ & - \frac{3}{4} \left(\frac{2F(\phi)F''(\phi) - (F'(\phi))^2}{F(\phi)F_1(\phi)} \right) \dot{\phi}^2 + \frac{3}{2} \frac{F'(\phi)}{F_1(\phi)} V'(\phi). \end{aligned} \quad (3.88)$$

E (3.72) torna-se como

$$\ddot{\phi} + p\dot{\phi} + V'(\phi) - \frac{F'(\phi)}{2} R(\phi, \dot{\phi}) = 0, \quad (3.89)$$

onde $R(\phi, \dot{\phi})$ é dado por (3.81).

Considerando $E(\phi, \dot{\phi}, p, q, r) = 0$, tem-se uma superfície invariante desde que

$$\frac{d}{dt} E(\phi, \dot{\phi}, p, q, r) = - \left(2p + \frac{F'(\phi)}{F(\phi)} \dot{\phi} \right) E(\phi, \dot{\phi}, p, q, r) \quad (3.90)$$

ao longo das Eqs. (3.85), (3.86), (3.88), and (3.89).

3.6.2 Sistemas Não-Conservativos e o Teorema da Divergência

Em sistemas hamiltonianos, como um consequência do teorema de Liouville, os volumes do espaço dependem da evolução temporal do sistema. Sendo S_0 uma hipersuperfície fechada inicial no espaço de fase e cada ponto de S_0 comporta-se temporalmente de acordo com as equações do sistema enquanto que a hipersuperfície fechada S_0 muda para outra hipersuperfície fechada S_t a um tempo posterior t , e os volumes V da região confinada por S_0 e S_t são iguais, $V(0) = V(t)$, sendo esta uma característica de sistema conservativo. O sistema dado por (3.72) e (3.84)-(3.79) não é conservativo. Escolhendo coordenadas tipo (ϕ, ψ, p, q, r) (onde $\psi = \dot{\phi}$, $p = H_1 + H_2 + H_3$, $q = H_1 - H_2$ e $r = H_1 - H_3$) para o espaço de fase $\mathcal{P}$, tem-se as equação (3.72) e (3.84)-(3.79) são, respectivamente

$$(\dot{\phi}, \dot{\psi}, \dot{p}, \dot{q}, \dot{r}) = \vec{W}(\phi, \psi, p, q, r). \quad (3.91)$$

Em termos de (3.74), tem-se as seguintes identidades

$$\begin{aligned} G_{00} &= H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3, \\ G_{11} &= a^2 \left(\dot{H}_1 + H_1(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2} R \right), \\ G_{22} &= b^2 \left(\dot{H}_2 + H_2(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2} R \right), \\ G_{33} &= c^2 \left(\dot{H}_3 + H_3(H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2} R \right), \\ R &= 2 \left(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3 \right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Portanto, as componentes do campo vetorial $\vec{W}$ podem ser escritas em termos de (3.84)-(3.79),

$$\begin{aligned}
W_\phi &= \psi \\
W_\psi &= -p\psi - V'(\phi) + \frac{1}{2}F'(\phi)R(\phi, \psi), \\
W_p &= - \left[(F(\phi) + 2F'(\phi)^2)p^2 + \frac{3}{2}(1 + 2F''(\phi))\dot{\phi}^2 - 3V(\phi) - 3F'(\phi)V'(\phi) \right. \\
&\quad \left. - p\dot{\phi}F'(\phi) + (F(\phi) + F'(\phi)^2)(q^2 + r^2 - qr) \right] / (2F_1(\phi)) \\
W_q &= - \left(p + \frac{F'(\phi)}{F(\phi)}\psi \right) q, \\
W_r &= - \left(p + \frac{F'(\phi)}{F(\phi)}\psi \right) r.
\end{aligned} \tag{3.93}$$

De acordo com o teorema da divergência, tem-se que o volume de uma hipersuperfície fechada S_t de $\mathcal{P}$ é

$$\dot{V}(t) = \int_{S_t} (\text{div } \vec{W}) d\text{vol}, \tag{3.94}$$

onde integra-se na região confinada por S_t .

Através da divergência de $\vec{W}$, sabe-se o comportamento da expansão do volume da hipersuperfície fechada de $\mathcal{P}$, isto é, para o caso em que de expansão tem-se $\text{div } \vec{W} > 0$ ou de contração $\text{div } \vec{W} < 0$.

No caso de sistemas conservativos, tem-se que $\text{div } \vec{W} = 0$ e que o cálculo de div é dado por

$$\begin{aligned}
\text{div } \vec{W} &= -p - 2 \left(p + \frac{F'(\phi)}{F(\phi)}\psi \right) \\
&\quad - \frac{(F(\phi) + 2F'(\phi)^2)p + (F'(\phi)(1 + F''(\phi)) - \frac{1}{2}F'(\phi))\psi}{F_1(\phi)}
\end{aligned} \tag{3.95}$$

Portanto, a (3.95) mostra que o modelo dado pela ação (3.71) apresenta fase de contração e expansão nas vizinhanças das singularidades correspondente às superfícies $F(\phi) = 0$ $F_1(\phi) = 0$.

Capítulo 4

Modelo cosmológico com uma função $f(R, \phi, X)$

Considere uma classe geral da gravidade descrita pela seguinte ação no referencial de Jordan [38]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(R, \phi, X) \right], \quad (4.1)$$

onde $f(R, \phi, X)$ é uma função que somente depende do campo escalar ϕ , R é o escalar de Ricci e X é uma quantidade escalar dada por

$$X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \quad (4.2)$$

As unidades usadas correspondem a velocidade da luz $c = 1$ e $8\pi G = 1$, onde G é a constante de Newton. A assinatura da métrica é $(-, +, +, +)$ e $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ é o operador d'Alambertiano onde ∇_μ é a derivada covariante.

As equações de movimento obtida da variação da ação (6.1), com relação à métrica $g_{\mu\nu}$, são

$$F G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R F - f) + \nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \square F + \frac{1}{2} f_{,X} (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi), \quad (4.3)$$

enquanto a equação de movimento obtida da variação da ação (6.1), com relação ao campo escalar ϕ , é

$$f_{,X} \square \phi + g^{\mu\nu} f_{,\phi X} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - f_{,XX} \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) + g^{\mu\nu} f_{,RX} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu R = -f_{,\phi} \quad (4.4)$$

onde

$$F \equiv \frac{\partial f}{\partial R}, \quad f_{,\phi} = \frac{\partial f}{\partial \phi}, \quad \text{and} \quad f_{,X} = \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (4.5)$$

Escolhendo uma métrica isotrópica, homogênea e espacialmente plana dada por,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (4.6)$$

temos, da componente temporal das equações de Einstein (4.3),

$$H^2 = \frac{1}{3F} \left[\frac{1}{2} (R F - f) - 3 H \dot{F} + \frac{1}{2} f_{,X} \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.7)$$

E das componentes espaciais das equações de Einstein (4.3), obtemos a seguinte equação modificada de Friedmann

$$\dot{H} = \frac{1}{2F} \left[H \dot{F} - \ddot{F} - \frac{1}{2} f_{,X} \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.8)$$

Da equação (4.4), a equação de Klein-Gordon é dada por

$$\ddot{\phi}(f_{,X} + \dot{\phi}^2 f_{,XX}) + f_{,X} (3H\dot{\phi}) + f_{,\phi X} \dot{\phi}^2 + f_{,RX} \dot{\phi} \dot{R} = f_{,\phi}, \quad (4.9)$$

onde $H = \dot{a}/a$, $X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ e $p_{,\phi} = \dot{\phi} p_{,X}$.

Usando as equações (4.7) e (4.8), identificamos o escalar de Ricci R , a densidade de energia ρ e a pressão p_1 ,

$$F R = -9H \dot{F} - 3\ddot{F} + 2(RF - f) + \frac{1}{2} f_{,X} \dot{\phi}^2, \quad (4.10)$$

$$\rho = \frac{1}{2} (R F - f) - 3 H \dot{F} + \frac{1}{2} f_{,X} \dot{\phi}^2, \quad (4.11)$$

and

$$p_1 = 2H \dot{F} + \ddot{F} + \frac{1}{2} (f - RF). \quad (4.12)$$

Agora apresentaremos as equações de movimento para o caso especial dado por $f(R, \phi, X) = h(R, \phi) + p(\phi, X)$.

Caso especial de $f(R, \phi, X)$

Considere o caso especial da gravidade descrito pela seguinte ação no referencial de Jordan:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [h(R, \phi) + p(\phi, X)], \quad (4.13)$$

Admitindo uma métrica isotrópica, homogênea e espacialmente plana, dada por (4.6), temos que da componente temporal das equações de Einstein da ação (4.13),

$$H^2 = \frac{1}{3F} \left[\frac{1}{2} (R F - h - p) - 3 H \dot{F} + \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.14)$$

E, das componentes espaciais das equações de Einstein obtemos as seguintes equações modificadas de Friedmann,

$$\dot{H} = \frac{1}{2F} \left[H \dot{F} - \ddot{F} - \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.15)$$

A equação de movimento do campo escalar ϕ é

$$\ddot{\phi}(p_{,X} + \dot{\phi}^2 p_{,XX}) + p_{,X} (3H\dot{\phi}) + p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 = h_{,\phi} + p_{,\phi}, \quad (4.16)$$

onde

$$F \equiv \frac{\partial h}{\partial R}, \quad h_{,\phi} = \frac{\partial h}{\partial \phi}, \quad p_{,\phi} = \frac{\partial p}{\partial \phi} \quad \text{e} \quad p_{,X} = \frac{\partial p}{\partial X}. \quad (4.17)$$

Usando as equações (4.14) e (4.15), identificamos o escalar de Ricci R , a densidade de energia ρ e a pressão p_1 como,

$$F R = -9H \dot{F} - 3\ddot{F} + 2(RF - h - p) + \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2, \quad (4.18)$$

$$\rho = \frac{1}{2} (R F - h - p) - 3 H \dot{F} + \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2, \quad (4.19)$$

and

$$p_1 = 2H \dot{F} + \ddot{F} + \frac{1}{2} (h + p - RF). \quad (4.20)$$

Agora apresentaremos as equações de movimento para o caso especial dado por $h(R, \phi) = F(\phi) R$.

Caso especial de $h(R, \phi)$

Considere um caso especial da gravidade descrito pela seguinte ação no referencial de Jordan:

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [F(\phi) R + p(\phi, X)], \quad (4.21)$$

Admitindo uma métrica isotrópica, homogênea e espacialmente plana, dada por (4.6), temos que da componente temporal das equações de Einstein da ação (4.13),

$$H^2 = \frac{1}{3F} \left[-\frac{1}{2} p - 3 H \dot{F} + \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.22)$$

E, das componentes espaciais das equações de Einstein obtemos as seguintes equações modificadas de Friedmann,

$$\dot{H} = \frac{1}{2F} \left[H \dot{F} - \ddot{F} - \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2 \right]. \quad (4.23)$$

A equação de movimento do campo escalar ϕ é

$$\ddot{\phi}(p_{,X} + \dot{\phi}^2 p_{,XX}) + p_{,X} (3H\dot{\phi}) + p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 = F_{,\phi} R + p_{,\phi}, \quad (4.24)$$

onde

$$p_{,\phi} = \frac{\partial p}{\partial \phi} \text{ e } p_{,X} = \frac{\partial p}{\partial X}. \quad (4.25)$$

Usando as equações (4.22) e (4.23), identificamos o escalar de Ricci R , a densidade de energia ρ e a pressão p_1 como,

$$F R = -9H \dot{F} - 3\ddot{F} - 2p + \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2, \quad (4.26)$$

$$\rho = -\frac{1}{2} p - 3H \dot{F} + \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2, \quad (4.27)$$

e

$$p_1 = 2H \dot{F} + \ddot{F} + \frac{1}{2} p. \quad (4.28)$$

4.1 Transformação Conforme

Referencial de Jordan é o referencial original onde o escalar de curvatura R é multiplicado por uma função $F(\phi)$ com métrica $g_{\mu\nu}$. No entanto, é sempre difícil resolver as equações de movimento neste referencial. Assim, procuramos por um conjunto de equações matematicamente equivalentes que sejam facilmente resolvidas e simultaneamente possam recuperar a ação padrão de Einstein-Hilbert com métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ (*Referencial de Einstein*).

Transformação Conforme (TC) é uma ferramenta matemática muito útil para transformar as equações de movimento no referencial de Jordan para o referencial de Einstein. TC não é uma mudança de coordenadas, mas uma de variáveis, pois quando usamos TC, algo que depende da métrica $g_{\mu\nu}$ pode ser reescrita como uma função de $\tilde{g}_{\mu\nu}$ and ω como

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \omega(x)^2 g_{\mu\nu}, \quad (4.29)$$

onde $\omega(x)$ é alguma função espaço-tempo dependente (não-nula)¹.

Aplicando a CT (4.29), obtemos as quantidades transformadas conformalmente abaixo,

---

¹A TC que será usada para o nosso modelo é um caso especial desta função, pois consideramos $\omega(x) = \omega[\phi(x)]$, onde ϕ é um campo escalar.

- $\tilde{g}^{\mu\nu} = \omega^{-2} g^{\mu\nu}$ and $\tilde{g} \equiv \det(\tilde{g}_{\mu\nu}) = \omega^{2n} g$;
(32.a)
- Símbolos de Christoffel :
 $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} + \omega^{-1}(\delta_{\beta}^{\alpha} \nabla_{\gamma} \omega + \delta_{\gamma}^{\alpha} \nabla_{\beta} \omega - g_{\beta\gamma} \nabla^{\alpha} \omega)$;
(32.b)
- Tensor de Riemann:
 $\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = R_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} + 2\delta_{[\alpha}^{\delta} \nabla_{\beta]} \nabla_{\gamma}(\ln \omega) - 2g^{\delta\sigma} g_{\gamma[\alpha} \nabla_{\beta]} \nabla_{\sigma}(\ln \omega) + 2\nabla_{[\alpha}(\ln \omega) \delta_{\beta]}^{\delta} \nabla_{\gamma}(\ln \omega) - 2\nabla_{[\alpha}(\ln \omega) g_{\beta]\gamma} g^{\delta\sigma} \nabla_{\sigma}(\ln \omega) - 2g_{\gamma[\alpha} \delta_{\beta]}^{\delta} g^{\sigma\rho} \nabla_{\sigma}(\ln \omega) \nabla_{\rho}(\ln \omega)$;
(32.c)
- Tensor de Ricci:
 $\tilde{R}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - (n-2) \nabla_{\alpha} \nabla_{\beta}(\ln \omega) - g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho} \nabla_{\sigma}(\ln \omega) + (n-2) \nabla_{\alpha}(\ln \omega) \nabla_{\beta}(\ln \omega) - (n-2) g_{\alpha\beta} g^{\rho\sigma} \nabla_{\rho}(\ln \omega) \nabla_{\sigma}(\ln \omega)$;
(32.d)
- Escalar de Ricci:
 $\tilde{R} = \tilde{g}^{\alpha\beta} \tilde{R}_{\alpha\beta} = \omega^{-2} R - 2(n-1) g^{\alpha\beta} \omega^{-3} (\nabla_{\alpha} \nabla_{\beta} \omega) - (n-1)(n-4) g^{\alpha\beta} \omega^{-4} (\nabla_{\alpha} \omega) (\nabla_{\beta} \omega)$;
(32.e)
- $\tilde{\nabla}_{\mu} \phi = \nabla_{\mu} \phi = \partial_{\mu} \phi$;
(32.f)

onde n é a dimensão do espaço-tempo.

4.2 Referencial de Einstein

Dada a seguinte transformação conforme,

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = F(\phi) g_{\mu\nu} , \quad (4.30)$$

e usando a equação (32.e) para $n = 4$, a ação (4.21) no referencial de Einstein é

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} - \frac{3}{4} \left(\frac{F_{,\phi}}{F} \right)^2 \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_{\mu} \phi \tilde{\nabla}_{\nu} \phi + \frac{1}{2F^2} p(\phi, X) \right] \quad (4.31)$$

ou

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} [\tilde{R} + \tilde{p}(\phi, X)] , \quad (4.32)$$

onde

$$\tilde{p}(\phi, X) = \frac{3}{2} \left(\frac{F_{,\phi}^2}{F^3} \right) X + \frac{1}{F^2} p(\phi, X) \quad (4.33)$$

e

$$X = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi = -\frac{1}{2} F(\phi) \tilde{g}^{\mu\nu} \tilde{\nabla}_\mu \phi \tilde{\nabla}_\nu \phi . \quad (4.34)$$

Como um simples exemplo, consideramos o caso $\tilde{p}(\phi, X)$ no referencial de Einstein dado por

$$\tilde{p}(\phi, X) = -K(\phi)X + X^2, \quad (4.35)$$

e com a equação (4.33), obtemos que a função $p(\phi, X)$ no referencial de Jordan é

$$p(\phi, X) = - \left(F^2(\phi)K(\phi) + \frac{3}{2} \left(\frac{F_{,\phi}^2}{F} \right) \right) X + F^2(\phi)X^2 . \quad (4.36)$$

Para se obter uma função $\tilde{p}(\phi, X)$, equação (4.35), fatorizável em coordenadas do referencial de Einstein $\tilde{\phi}$ e $\tilde{X}$

$$\tilde{p}(\tilde{\phi}, \tilde{X}) = \tilde{P}(\tilde{\phi})\tilde{Q}(\tilde{X}) , \quad (4.37)$$

escolheremos a seguinte redefinição de campo

$$d\tilde{\phi} = \sqrt{\frac{F(\phi)}{K(\phi)}} d\phi \quad (4.38)$$

que produz

$$\tilde{p}(\tilde{\phi}, \tilde{X}) = \tilde{K}(\tilde{\phi})(-\tilde{X} + \tilde{X}^2) , \quad (4.39)$$

onde

$$\tilde{K}(\tilde{\phi}) = K^2(\phi) \quad (4.40)$$

e

$$\tilde{X} \equiv \frac{1}{K(\phi)} X . \quad (4.41)$$

Então a ação (4.32) pode ser reescrita como

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2} \tilde{R} + \tilde{p}(\tilde{\phi}, \tilde{X}) \right] . \quad (4.42)$$

Considerando um universo de Friedmann isotrópico, homogêneo e espacialmente plano dado pelo elemento de linha,

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = -d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t}) d\tilde{\mathbf{x}}^2 , \quad (4.43)$$

as equações de movimento obtidas da variação da ação (4.42), com relação à métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, são

$$3\tilde{H}^2 = \tilde{\rho} \quad (4.44)$$

e

$$-2\dot{\tilde{H}} = \tilde{p} + \tilde{\rho}, \quad (4.45)$$

onde a densidade de energia $\tilde{\rho}$ é

$$\tilde{\rho} = 2\tilde{X}\tilde{p}_{,\tilde{X}} - \tilde{p}(\tilde{\phi}, \tilde{X}), \quad (4.46)$$

e a pressão $\tilde{p}$ é dada pela função $\tilde{p}(\tilde{\phi}, \tilde{X})$ da lagrangiana (4.42).

A equação de movimento obtida da variação da ação (4.42), em relação ao campo escalar $\tilde{\phi}$, é

$$\tilde{\rho}_{,\tilde{X}}\ddot{\tilde{\phi}} + \tilde{p}_{,\tilde{X}}\sqrt{3}\dot{\tilde{\rho}}\dot{\tilde{\phi}} + \tilde{\rho}_{\tilde{\phi}} = 0. \quad (4.47)$$

Desse modo, apresentamos as equações de movimento obtidas pela variação da ação (4.21) no referencial de Jordan e da ação (4.42) no referencial de Einstein, e vimos que a conexão entre os referenciais de Jordan e Einstein é dada pela transformação conforme (4.30). Como um simples exemplo, estudaremos modelo inflacionário tipo lei de potência.

4.2.1 Soluções inflacionárias tipo lei de potência tanto no referencial de Jordan e quanto no de Einstein

Considere a seguinte lagrangiana tipo lei de potência no referencial de Einstein

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\frac{1}{2}\tilde{R} + \tilde{p}(\tilde{\phi}, \tilde{X}) \right], \quad (4.48)$$

onde

$$\tilde{p}(\tilde{\phi}, \tilde{X}) = \frac{4}{3} \frac{(4 - 3\gamma)}{\gamma^2} \frac{1}{\tilde{\phi}^2} (-\tilde{X} + \tilde{X}^2), \quad (4.49)$$

onde $0 < \gamma < 2/3$ e

$$\tilde{X} \equiv \tilde{X}_0 \equiv \frac{2 - \gamma}{4 - 3\gamma} \quad (4.50)$$

é uma solução exata de (4.47) onde $\tilde{a}(\tilde{t})$, $\tilde{H}(\tilde{t})$ e $\tilde{\phi}(\tilde{t})$ são, respectivamente

$$\tilde{a}(\tilde{t}) = \tilde{t}^\beta, \quad (4.51)$$

$$\tilde{H} = \frac{\beta}{\tilde{t}}, \quad (4.52)$$

e

$$\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_0 \tilde{t} , \quad (4.53)$$

onde

$$\beta = \frac{2}{3\gamma} , \quad (4.54)$$

e

$$\tilde{\phi}_0 = \sqrt{\frac{2(2-\gamma)}{(4-3\gamma)}} . \quad (4.55)$$

A função de acoplamento $F(\phi)$ escolhida é

$$F(\phi) = k_0 \phi^n , \quad (4.56)$$

onde k_0 é uma constante arbitrária.

Usando (4.38), a relação entre campos escalares ϕ e $\tilde{\phi}$ é

$$\tilde{\phi} = \frac{k_0 \gamma \sqrt{3}}{2\sqrt{4-3\gamma}} \phi^{(n+2)} . \quad (4.57)$$

Estamos interessados em descobrir a evolução do fator $a(t)$, do parâmetro de Hubble $H(t)$ e do campo escalar $\phi(t)$ no referencial de Jordan. E sabemos que a conexão entre os referenciais de Jordan e Einstein é dada pela transformação conforme (4.30). Assim, $\tilde{a}(\tilde{t})$ e $\tilde{t}$ no referencial de Einstein estão relacionados ao referencial de Jordan por

$$d\tilde{s}^2 = F(\phi) ds^2 , \quad (4.58)$$

$$(-d\tilde{t}^2 + \tilde{a}^2(\tilde{t}) d\tilde{x}^2) = F(\phi) (-dt^2 + a^2(t) dx^2) , \quad (4.59)$$

$$d\tilde{t} = \sqrt{F(\phi)} dt , \quad \tilde{a}(\tilde{t}) = \sqrt{F(\phi)} a(t) . \quad (4.60)$$

onde $F(\phi) = k_0 \phi^n$.

Integrando ambas as equações em (4.60), temos, respectivamente

$$\tilde{t} = D t^{\frac{2(n+2)}{n+4}} \quad (4.61)$$

e

$$a(t) = a_0 t^{\frac{4(n+2)-3\gamma n}{3\gamma(n+4)}} . \quad (4.62)$$

onde as constantes G e a_0 dependem de k_0 e γ .

Assim, a evolução de $H(t)$ e $\phi(t)$ é, respectivamente

$$H = J \frac{1}{t} \quad (4.63)$$

and

$$\phi = \phi_0 t^{\frac{2n}{n(n+4)}} , \quad (4.64)$$

onde as constantes J e ϕ_0 dependem de k_0 e γ .

4.3 Singularidades Geométricas

Considere uma classe geral da gravidade descrita pela seguinte ação no referencial de Jordan:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(R, \phi, X) \right], \quad (4.65)$$

onde $f(R, \phi, X)$ é uma função que somente depende do campo escalar ϕ , R é o escalar de Ricci e X é uma quantidade escalar dada por

$$X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \quad (4.66)$$

As unidades usadas correspondem a velocidade da luz $c = 1$ e $8\pi G = 1$, onde G é a constante de Newton. A assinatura da métrica é $(-, +, +, +)$ e $\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$ é o operador d'Alembertiano onde ∇_μ é a derivada covariante.

As equações de movimento obtida da variação da ação (4.65), com relação à métrica $g_{\mu\nu}$, são

$$FG_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu} (RF - f) + \nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \square F + \frac{1}{2} f_{,X} (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi), \quad (4.67)$$

enquanto a equação de movimento obtida da variação da ação (4.65), com relação ao campo escalar ϕ , é

$$f_{,X} \square \phi + g^{\mu\nu} f_{,\phi X} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - f_{,XX} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi (\nabla_\nu \phi \nabla^\nu \phi) + g^{\mu\nu} f_{,RX} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu R = -f_{,\phi} \quad (4.68)$$

onde

$$F \equiv \frac{\partial f}{\partial R}, \quad f_{,\phi} = \frac{\partial f}{\partial \phi}, \quad \text{and} \quad f_{,X} = \frac{\partial f}{\partial X}. \quad (4.69)$$

Com este estudo, estamos interessados em encontrar as singularidades geométricas para soluções cosmológicas homogêneas e anisotrópicas para este modelo. Admitiremos a seguinte métrica homogênea, anisotrópica e espacialmente plana, Bianchi tipo I, dada por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) dx^2 + b^2(t) dy^2 + c^2(t) dz^2, \quad (4.70)$$

onde os parâmetros de Hubble para cada uma das coordenadas espaciais são

$$H_1 = \frac{\dot{a}}{a}, \quad H_2 = \frac{\dot{b}}{b} \quad \text{and} \quad H_3 = \frac{\dot{c}}{c}. \quad (4.71)$$

Para a métrica (4.70) e um campo escalar homogêneo $\phi(t)$, a equação (4.68) é

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{(f_{,X} + f_{,XX} \dot{\phi}^2)} \left[-(H_1 + H_2 + H_3) f_{,X} \dot{\phi} - f_{,\phi X} \dot{\phi}^2 - f_{,XR} \dot{\phi} \dot{R} + f_{,\phi} \right] \quad (4.72)$$

e as componentes temporal e espaciais da equação (4.67) são

$$FG_{00} = \frac{1}{2}(FR - f) - (H_1 + H_2 + H_3)[f_{,R\phi} \dot{\phi} + f_{,RX} \dot{X} + f_{,RR} \dot{R}] + \frac{1}{2}f_{,X}\dot{\phi}^2 \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \frac{FG_{11}}{a^2} &= \frac{1}{2}(f - FR) + f_{,RR} \ddot{R} + f_{,RR}(H_2 + H_3)\dot{R} + \dot{R}^2 f_{,RRR} + 2f_{,RRX} \dot{R} \dot{X} \\ &+ 2f_{,RR\phi} \dot{R} \dot{\phi} + f_{,R\phi} \ddot{\phi} + f_{,R\phi}(H_2 + H_3)\dot{\phi} + 2f_{,R\phi X} \dot{\phi} \dot{X} + f_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2 \\ &+ f_{,RX} \ddot{X} + (H_2 + H_3)f_{,RX} \dot{X} + f_{,RXX} \dot{X}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{FG_{22}}{b^2} = \frac{1}{2}(f - FR) + f_{,RR} \ddot{R} + f_{,RR}(H_1 + H_3)\dot{R} + \dot{R}^2 f_{,RRR} + 2f_{,RRX} \dot{R} \dot{X} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} &+ 2f_{,RR\phi} \dot{R} \dot{\phi} + f_{,R\phi} \ddot{\phi} + f_{,R\phi}(H_1 + H_3)\dot{\phi} + 2f_{,R\phi X} \dot{\phi} \dot{X} + f_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2 \\ &+ f_{,RX} \ddot{X} + (H_1 + H_3)f_{,RX} \dot{X} + f_{,RXX} \dot{X}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{FG_{33}}{c^2} = \frac{1}{2}(f - FR) + f_{,RR} \ddot{R} + f_{,RR}(H_1 + H_2)\dot{R} + \dot{R}^2 f_{,RRR} + 2f_{,RRX} \dot{R} \dot{X} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} &+ 2f_{,RR\phi} \dot{R} \dot{\phi} + f_{,R\phi} \ddot{\phi} + f_{,R\phi}(H_1 + H_2)\dot{\phi} + 2f_{,R\phi X} \dot{\phi} \dot{X} + f_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2 \\ &+ f_{,RX} \ddot{X} + (H_1 + H_2)f_{,RX} \dot{X} + f_{,RXX} \dot{X}^2 . \end{aligned}$$

Caso especial de $f(R, \phi, X)$

Considere um caso especial de $f(R, \phi, X)$ dado por

$$f(R, \phi, X) = g(R, \phi) + p(\phi, X) , \quad (4.76)$$

tal que a equação (4.72) é

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{(p_{,X} + p_{,XX}\dot{\phi}^2)} \left[-(H_1 + H_2 + H_3)p_{,X} \dot{\phi} - p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right] \quad (4.77)$$

Fazendo uso da equação acima, as componentes das equações de Einstein podem ser

reescritas como

$$\begin{aligned} PG_{00} &= \frac{1}{2}(RP - g - p) - (H_1 + H_2 + H_3) g_{,R\phi} \dot{\phi} - (H_1 + H_2 + H_3) g_{,RR} \dot{R} \\ &+ \frac{1}{2} p_{,X} \dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (4.78)$$

$$\begin{aligned} \frac{PG_{11}}{a^2} &= \frac{1}{2}(g + p - RP) + \ddot{R} g_{,RR} + g_{,RR} \dot{R} (H_2 + H_3) + g_{,RRR} \dot{R}^2 + 2 g_{,RR\phi} \dot{\phi} \dot{R} \\ &+ \frac{g_{,R\phi}}{(p_{,X} + p_{,XX} \dot{\phi}^2)} \left[-(H_1 + H_2 + H_3) p_{,X} \dot{\phi} - p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right] \\ &+ (H_2 + H_3) g_{,R\phi} \dot{\phi} + g_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{PG_{22}}{b^2} &= \frac{1}{2}(g + p - RP) + \ddot{R} g_{,RR} + g_{,RR} \dot{R} (H_1 + H_3) + g_{,RRR} \dot{R}^2 + 2 g_{,RR\phi} \dot{\phi} \dot{R} \\ &+ \frac{g_{,R\phi}}{(p_{,X} + p_{,XX} \dot{\phi}^2)} \left[-(H_1 + H_2 + H_3) p_{,X} \dot{\phi} - p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right] \\ &+ (H_1 + H_3) g_{,R\phi} \dot{\phi} + g_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2, \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{PG_{33}}{c^2} &= \frac{1}{2}(g + p - RP) + \ddot{R} g_{,RR} + g_{,RR} \dot{R} (H_1 + H_2) + g_{,RRR} \dot{R}^2 + 2 g_{,RR\phi} \dot{\phi} \dot{R} \\ &+ \frac{g_{,R\phi}}{(p_{,X} + p_{,XX} \dot{\phi}^2)} \left[-(H_1 + H_2 + H_3) p_{,X} \dot{\phi} - p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right] \\ &+ (H_1 + H_2) g_{,R\phi} \dot{\phi} + g_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2. \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde $P \equiv \frac{\partial g}{\partial R}$.

As componentes do tensor de Einstein para a métrica (4.70) são

$$\begin{aligned} G_{00} &= H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3, \\ G_{11} &= a^2 \left(\dot{H}_1 + H_1 (H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2} R \right), \\ G_{22} &= b^2 \left(\dot{H}_2 + H_2 (H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2} R \right), \\ G_{33} &= c^2 \left(\dot{H}_3 + H_3 (H_1 + H_2 + H_3) - \frac{1}{2} R \right), \end{aligned} \quad (4.81)$$

e o escalar de curvatura R é

$$R = 2(\dot{H}_1 + \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_2^2 + H_3^2 + H_1 H_2 + H_2 H_3 + H_1 H_3). \quad (4.82)$$

Substituindo estes resultados na equações de Einstein (4.78), (4.79), (4.80) e (4.81),

$$\begin{aligned}
 & E(\phi, \dot{\phi}, H_1, H_2, H_3, \dot{H}_1, \dot{H}_2, \dot{H}_3, \ddot{H}_1, \ddot{H}_2, \ddot{H}_3) = \\
 & + P(\dot{H}_1 + H_1^2) + P(\dot{H}_2 + H_2^2) + P(\dot{H}_3 + H_3^2) - H_1 g_{,R\phi} \dot{\phi} - H_2 g_{,R\phi} \dot{\phi} \\
 & - H_3 g_{,R\phi} \dot{\phi} - 2(H_1 + H_2 + H_3) g_{,RR} (\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3) - \frac{1}{2} \left(g + p - p_{,X} \dot{\phi}^2 \right) \\
 & - 2(H_1 + H_2 + H_3) g_{,RR} (2 H_1 \dot{H}_1 + 2 H_2 \dot{H}_2 + 2 H_3 \dot{H}_3 + H_1 \dot{H}_2 + H_2 \dot{H}_1 \\
 & + H_2 \dot{H}_3 + H_3 \dot{H}_2 + H_1 \dot{H}_3 + H_3 \dot{H}_1) = 0, \tag{4.83}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 g_{,RR} (\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3) &= P \dot{H}_1 + P H_1 (H_1 + H_2 + H_3) + 2 \dot{H}_3^2 + 2 H_1 \ddot{H}_1 \\
 &- 2 g_{,RR} (2 \dot{H}_1^2 + 2 \dot{H}_2^2 + 2 \dot{H}_3^2 + 2 H_1 \ddot{H}_1 + 2 H_2 \ddot{H}_2 \\
 &+ 2 H_2 \ddot{H}_2 + 2 H_3 \ddot{H}_3 + 2 \dot{H}_1 \dot{H}_2 + 2 H_1 \ddot{H}_2 + H_2 \ddot{H}_1 \\
 &+ 2 \dot{H}_3 \dot{H}_2 + H_3 \ddot{H}_2 + H_2 \ddot{H}_3 + 2 \dot{H}_1 \dot{H}_3 + H_3 \ddot{H}_1 + H_1 \ddot{H}_3) \\
 &- 2 g_{,RR} (H_2 + H_3) (\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2 H_1 \dot{H}_1 + 2 H_2 \dot{H}_2 + 2 H_3 \dot{H}_3 \\
 &+ H_1 \dot{H}_2 + \dot{H}_1 H_2 + H_3 \dot{H}_2 + H_2 \dot{H}_3 + \dot{H}_1 H_3 + H_1 \dot{H}_3) \\
 &- 4 g_{,RRR} (\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2 H_1 \dot{H}_1 + 2 H_2 \dot{H}_2 + 2 H_3 \dot{H}_3 + H_1 \dot{H}_2 \\
 &+ \dot{H}_1 H_2 + H_3 \dot{H}_2 + H_2 \dot{H}_3 + \dot{H}_1 H_3 + H_1 \dot{H}_3)^2 - 4 g_{,RR\phi} \dot{\phi} (\ddot{H}_1 \\
 &+ \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2 H_1 \dot{H}_1 + 2 H_2 \dot{H}_2 + 2 H_3 \dot{H}_3 + H_1 \dot{H}_2 + \dot{H}_1 H_2 \\
 &+ H_3 \dot{H}_2 + H_2 \dot{H}_3 + \dot{H}_1 H_3 + H_1 \dot{H}_3) - (H_2 + H_3) g_{,R\phi} \dot{\phi} \\
 &- \frac{g_{,R\phi}}{(p_{,X} + p_{,XX} \dot{\phi}^2)} \left(-(H_1 + H_2 + H_3) p_{,X} \dot{\phi} - p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right) \\
 &- g_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (g + p), \tag{4.84}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2g_{,RR}(\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3) = & P\dot{H}_2 + P H_2(H_1 + H_2 + H_3) - 2g_{,RR}(2\dot{H}_1^2 + 2\dot{H}_2^2 \\
 & + 2\dot{H}_3^2 + 2H_1\ddot{H}_1 + 2H_2\ddot{H}_2 + 2H_3\ddot{H}_3 + 2\dot{H}_1\dot{H}_2 + 2H_1\ddot{H}_2 + H_2\ddot{H}_1 \\
 & + 2\dot{H}_3\dot{H}_2 + H_3\ddot{H}_2 + H_2\ddot{H}_3 + 2\dot{H}_1\dot{H}_3 + H_3\ddot{H}_1 + H_1\ddot{H}_3) \\
 & - 2g_{,RR}(H_1 + H_3)(\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2H_1\dot{H}_1 + 2H_2\dot{H}_2 + 2H_3\dot{H}_3 \\
 & + H_1\dot{H}_2 + \dot{H}_1H_2 + H_3\dot{H}_2 + H_2\dot{H}_3 + \dot{H}_1H_3 + H_1\dot{H}_3) \\
 & - 4g_{,RRR}(\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2H_1\dot{H}_1 + 2H_2\dot{H}_2 + 2H_3\dot{H}_3 + H_1\dot{H}_2 \\
 & + \dot{H}_1H_2 + H_3\dot{H}_2 + H_2\dot{H}_3 + \dot{H}_1H_3 + H_1\dot{H}_3)^2 - 4g_{,RR\phi}\dot{\phi}(\ddot{H}_1 \\
 & + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2H_1\dot{H}_1 + 2H_2\dot{H}_2 + 2H_3\dot{H}_3 + H_1\dot{H}_2 + \dot{H}_1H_2 \\
 & + H_3\dot{H}_2 + H_2\dot{H}_3 + \dot{H}_1H_3 + H_1\dot{H}_3) - (H_1 + H_3)g_{,R\phi}\dot{\phi} \\
 & - \frac{g_{,R\phi}}{(p_{,X} + p_{,XX}\dot{\phi}^2)} \left(-(H_1 + H_2 + H_3)p_{,X}\dot{\phi} - p_{,\phi X}\dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right) \\
 & - g_{,R\phi\phi}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(g + p), \tag{4.85}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2g_{,RR}(\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3) = & P\dot{H}_3 + P H_3(H_1 + H_2 + H_3) - 2g_{,RR}(2\dot{H}_1^2 + 2\dot{H}_2^2 \\
 & + 2\dot{H}_3^2 + 2H_1\ddot{H}_1 + 2H_2\ddot{H}_2 + 2H_3\ddot{H}_3 + 2\dot{H}_1\dot{H}_2 + 2H_1\ddot{H}_2 + H_2\ddot{H}_1 \\
 & + 2\dot{H}_3\dot{H}_2 + H_3\ddot{H}_2 + H_2\ddot{H}_3 + 2\dot{H}_1\dot{H}_3 + H_3\ddot{H}_1 + H_1\ddot{H}_3) \\
 & - 2g_{,RR}(H_1 + H_2)(\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2H_1\dot{H}_1 + 2H_2\dot{H}_2 + 2H_3\dot{H}_3 \\
 & + H_1\dot{H}_2 + \dot{H}_1H_2 + H_3\dot{H}_2 + H_2\dot{H}_3 + \dot{H}_1H_3 + H_1\dot{H}_3) \\
 & - 4g_{,RRR}(\ddot{H}_1 + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2H_1\dot{H}_1 + 2H_2\dot{H}_2 + 2H_3\dot{H}_3 + H_1\dot{H}_2 \\
 & + \dot{H}_1H_2 + H_3\dot{H}_2 + H_2\dot{H}_3 + \dot{H}_1H_3 + H_1\dot{H}_3)^2 - 4g_{,RR\phi}\dot{\phi}(\ddot{H}_1 \\
 & + \ddot{H}_2 + \ddot{H}_3 + 2H_1\dot{H}_1 + 2H_2\dot{H}_2 + 2H_3\dot{H}_3 + H_1\dot{H}_2 + \dot{H}_1H_2 \\
 & + H_3\dot{H}_2 + H_2\dot{H}_3 + \dot{H}_1H_3 + H_1\dot{H}_3) - (H_1 + H_2)g_{,R\phi}\dot{\phi} \\
 & - \frac{g_{,R\phi}}{(p_{,X} + p_{,XX}\dot{\phi}^2)} \left(-(H_1 + H_2 + H_3)p_{,X}\dot{\phi} - p_{,\phi X}\dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right) \\
 & - g_{,R\phi\phi}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}(g + p). \tag{4.86}
 \end{aligned}$$

Definindo novas variáveis dinâmicas como $l \equiv H_1 + H_2 + H_3$, $q \equiv H_1 - H_2$ e $r \equiv H_1 - H_3$ tal que as equações (4.77), (4.83), (4.84), (4.85) and (4.86) podem ser reescritas como

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{(p_{,X} + p_{,XX}\dot{\phi}^2)} \left[-l p_{,X}\dot{\phi} - p_{,\phi X}\dot{\phi}^2 + (g_{,\phi} + p_{,\phi}) \right], \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
 E(\phi, \dot{\phi}, l, q, r, \dot{l}, \dot{q}, \dot{r}, \ddot{l}) = \\
 + \frac{1}{3} P (3\dot{l} + l^2 - 2qr + 2q^2 + 2r^2) - \frac{1}{2} (g + p - p_{,X} \dot{\phi}^2) - l g_{,R\phi} \dot{\phi} \\
 - l g_{,RR} \left(2\ddot{l} + \frac{2}{3} (4l\dot{l} - q\dot{r} - r\dot{q} + 2q\dot{q} + 2r\dot{r}) \right) = 0,
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

$$\begin{aligned}
 6g_{,RR} \ddot{l} = & P\dot{l} + Pl^2 - 4g_{,RR} (4\dot{l}^2 + 4l\ddot{l} - \ddot{q}r - \ddot{r}q - 2\dot{q}\dot{r} + 2\dot{q}^2 + 2q\ddot{q} + 2\dot{r}^2 \\
 & + 2r\ddot{r}) - 12g_{,RR} l \left(2\ddot{l} + \frac{2}{3} [4l\dot{l} - \dot{q}r - \dot{r}q + 2q\dot{q} + 2r\dot{r}] \right) \\
 & - 12g_{,RRR} \left(2\ddot{l} + \frac{2}{3} [4l\dot{l} - \dot{q}r - \dot{r}q + 2q\dot{q} + 2r\dot{r}] \right)^2 - 3g_{,R\phi\phi} \dot{\phi}^2 \\
 & - 12g_{,RR\phi} \dot{\phi} \left(2\ddot{l} + \frac{2}{3} [4l\dot{l} - \dot{q}r - \dot{r}q + 2q\dot{q} + 2r\dot{r}] \right) - 2l g_{,R\phi} \dot{\phi} \\
 & - \frac{3g_{,R\phi}}{(p_X + p_{,XX} \phi^2)} (-l p_{,X} \dot{\phi} - p_{,\phi X} \dot{\phi}^2 + (g_\phi + p_\phi)) - \frac{3}{2} (g + p),
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

$$P\dot{q} + Plq + 2g_{,RR} q \left(2\ddot{l} + \frac{2}{3} [4l\dot{l} - q\dot{r} - r\dot{q} + 2q\dot{q} + 2r\dot{r}] \right) + q g_{,R,\phi} \dot{\phi} = 0 \tag{4.90}$$

$$P\dot{r} + Plr + 2g_{,RR} r \left(2\ddot{l} + \frac{2}{3} [4l\dot{l} - q\dot{r} - r\dot{q} + 2q\dot{q} + 2r\dot{r}] \right) + r g_{,R,\phi} \dot{\phi} = 0 \tag{4.91}$$

As equações (4.90) e (4.91) tem estrutura similar a (3.88). Em particular, na região do espaço de fase correspondente a $P = 0$ corresponderão a singularidades anisotrópicas [46], de maneira semelhante ao que o ocorre com o modelo discutido na seção 3.6.1.

Capítulo 5

Soluções de de Sitter

O modelo de de Sitter foi descoberto em 1917 como primeira solução para as equações

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = \rho \quad (5.1)$$

e

$$\frac{2a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k}{a^2} - \Lambda = -p, \quad (5.2)$$

onde um ponto indica a derivada com respeito ao tempo cósmico t , k é a constante de curvatura e Λ é a constante cosmológica. Assumindo que $p = \rho = k = 0$ e $\Lambda > 0$ tem-se um fator de escala com comportamento exponencial igual a $a = a_0 \exp((\Lambda/3)^{1/2}t)$.

Dentro da teoria inflacionária, as soluções de de Sitter são definidas por

$$\dot{H} = 0, \quad (5.3)$$

que induz ao comportamento exponencial ao fator de escala $a(t) = a_0 \exp(Ht)$, onde a_0 e H são constantes.

Considerando a definição de uma solução de de Sitter (5.3), as equações de Einstein se reduzem a

$$R = -(\rho - 3p), \quad (5.4)$$

$$3H^2 = \rho \quad (5.5)$$

e

$$3H^2 = -p, \quad (5.6)$$

onde o escalar de Ricci para uma solução de de Sitter é

$$R = -12H^2. \quad (5.7)$$

Portanto, as 3 equações de Einstein são todas equivalentes às equações de estado para o vácuo,

$$\rho + p = 0. \quad (5.8)$$

Com um acoplamento mínimo, as expressões para a pressão e a densidade de energia são dados por, respectivamente,

$$\rho_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \quad (5.9)$$

e

$$p_\phi = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) \quad (5.10)$$

que com a equação (5.8) são equivalente à $\dot{\phi} = 0$. Isso implica em um potencial $V(\phi)$ constante, como também pode ser visto pela equação de Klein-Gordon. Portanto, obtém-se as seguintes soluções de de Sitter

$$\xi = 0 \implies \phi = \text{const.}; V = \Lambda. \quad (5.11)$$

Das equações (5.5) e (5.9), temos que

$$H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (5.12)$$

5.1 Soluções atratoras de de Sitter com acoplamento não-mínimo

Para as soluções de de Sitter com acoplamento não-mínimo, as expressões para a densidade de energia e pressão são dadas por

$$\rho = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) + 3\xi H^2 \phi^2 + 6\xi H \phi \dot{\phi}, \quad (5.13)$$

$$p = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) - 4\xi H^2 \phi^2 - 3\xi H^2 \phi^2 - \xi \ddot{\phi}^2. \quad (5.14)$$

O problema de encontrar soluções de de Sitter com acoplamento de de Sitter se reduz a resolver as equações (5.8) com ρ e p dados por (5.13) e (5.14), junto com a equação de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - \xi R\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (5.15)$$

onde R é dado por (5.7). Assim, tem-se o conjunto de duas equações diferenciais acopladas

$$(1 - 2\xi)\dot{\phi}^2 + 2\xi\phi(H\dot{\phi} - \ddot{\phi}) = 0 \quad (5.16)$$

e

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + 12\xi H^2\phi + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (5.17)$$

onde a solução de (5.16) fornece a expressão de ϕ e substituindo este resultado em (5.17), tem-se a expressão para $V(\phi)$.

5.1.1 Soluções estáticas de de Sitter

Soluções estáticas de de Sitter são aquelas pelas quais

$$H = 0, \quad (5.18)$$

isto é, o caso de espaços de Minkowski. Assim, juntamente com as equações (5.16) e (5.17), tem-se o conjunto de equações diferenciais

$$(1 - 2\xi)\dot{\phi}^2 + 2\xi\phi\ddot{\phi} = 0 \quad (5.19)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (5.20)$$

Resolvendo (5.19) e (5.20), tem-se algumas soluções estáticas de de Sitter do tipo

$$\xi \neq 0 \implies \phi = \text{const.}, V(\phi) = 0, \quad (5.21)$$

$$\xi = 1/4 \implies \phi = b \exp(t/d), V(\phi) = -\phi^2/(2d^2). \quad (5.22)$$

onde b e d são constantes.

5.1.2 Soluções gerais de de Sitter

Soluções gerais de de Sitter são aquelas pelas quais

$$H \neq 0. \quad (5.23)$$

Para encontrar a expressão para uma solução geral de de Sitter, resolve-se o conjunto de equações (5.16) e (5.17) e encontra-se algumas soluções gerais de de Sitter do tipo

$$\xi \neq 1/4 \implies \phi = \text{const.}, V(\phi) = \text{const.}, \quad (5.24)$$

$$\xi = 1/4 \implies \phi = a_1 \exp[(h/H) \exp(Ht)] \quad (5.25)$$

e

$$V(\phi) = -(H^2/2)[\phi^2(\ln^2(\phi/l) + 3 \ln(\phi/l) + 3) - 3/2]. \quad (5.26)$$

onde h e l são constantes.

5.2 Soluções atratoras de de Sitter em gravidade generalizada

Nosso propósito é estabelecer condições para a existência e a estabilidade de soluções de de Sitter no espaço de fase de uma cosmologia homogênea e isotrópica em uma gravidade generalizada descrita pelas ações (5.27) e (5.49).

5.2.1 Equações de movimento no referencial de Jordan - Modelo I

Considere uma classe especial da gravidade NMC

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(1 - \xi \phi^2) R - A(\phi) X + B(\phi) X^2] \quad (5.27)$$

onde $\xi \phi^2$ é o termo de explícita interação entre o escalar de curvatura R e o campo escalar ϕ , ξ é a constante de acoplamento ($\xi > 0$), e o termo cinético não-canônico é dado pela função $-A(\phi) X + B(\phi) X^2$ onde,

$$X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \quad (5.28)$$

As equações de movimento obtidas da variação da ação (5.27), em relação à métrica $g_{\mu\nu}$, são

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} = \xi \phi^2 G_{\mu\nu} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} A(\phi) g^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \phi \nabla_\rho \phi + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} B(\phi) [g^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \phi \nabla_\rho \phi]^2 \\ &- \xi (\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) \phi^2 - \frac{1}{2} A(\phi) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) B(\phi) (g^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \phi \nabla_\rho \phi), \end{aligned} \quad (5.29)$$

enquanto que a equação de movimento obtida da variação da ação (5.27), em relação ao campo escalar ϕ , é

$$\begin{aligned} &-[A(\phi) + B(\phi)(g^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \phi \nabla_\rho \phi)] \square \phi + g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi [A_{,\phi} - B_{,\phi}(g^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \phi \nabla_\rho \phi)] \\ &\quad - 2B(\phi) \nabla^\mu \phi \nabla^\nu \phi (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) \\ &= 2\xi \phi R + \frac{1}{2} A_{,\phi} (g^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \phi \nabla_\rho \phi) - \frac{1}{4} B_{,\phi} (g^{\gamma\rho} \nabla_\gamma \phi \nabla_\rho \phi)^2. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Assumindo uma métrica isotrópica, homogênea e espacialmente plana dada por,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (5.31)$$

obtemos da equação (5.29), as seguintes equações modificadas de Friedmann

$$3H^2 = 3H^2 \xi \phi^2 - \frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{3}{8} B(\phi) \dot{\phi}^4 + 6H\xi\phi\dot{\phi}. \quad (5.32)$$

$$\dot{H} = \dot{H} \xi \phi^2 - H \xi \phi \dot{\phi} + \xi \dot{\phi}^2 + \xi \phi \ddot{\phi} + \frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^2 - \frac{1}{4} B(\phi) \dot{\phi}^4. \quad (5.33)$$

E a equação de movimento do campo escalar ϕ é

$$\ddot{\phi} (3B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) + (3H\dot{\phi}) (B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) = -2\xi \phi R - \frac{1}{2} A_{,\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{4} B_{,\phi} \dot{\phi}^4, \quad (5.34)$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$, $X = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2$ e o escalar de Ricci R é

$$R = 12H^2 + 6\dot{H}. \quad (5.35)$$

Substituindo a equação acima em (5.34), temos

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} (\phi, \dot{\phi}, H) = & \frac{1}{[(1 - \xi \phi^2) (3B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) + 12\xi^2 \phi^2]} \left[(3H \dot{\phi} A(\phi) - 3H \dot{\phi}^3 B(\phi)) (1 - \xi \phi^2) \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} A_{,\phi} \dot{\phi}^2 (1 - \xi \phi^2) + \frac{1}{4} B_{,\phi} \dot{\phi}^4 (1 - \xi \phi^2) - 36\xi^2 \phi^2 \dot{\phi} H - 12\xi^2 \phi \dot{\phi}^2 - \xi \phi A(\phi) \dot{\phi}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Usando a equação (5.36), podemos reescrever a equação (5.33) como

$$\begin{aligned} \dot{H}(\phi, \dot{\phi}, H) = & \frac{1}{(1 - \xi \phi^2) [(1 - \xi \phi^2) (3B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) + 12\xi^2 \phi^2]} \\ & [(3H A(\phi) - 3H \dot{\phi}^3 B(\phi)) (1 - \xi \phi^2) - \frac{1}{2} A_{,\phi} \dot{\phi}^2 (1 - \xi \phi^2) + \frac{1}{4} B_{,\phi} \dot{\phi}^4 (1 - \xi \phi^2) - 36\xi^2 \phi^2 \dot{\phi} H - \\ & 12\xi^2 \phi \dot{\phi}^2 - \xi \phi A(\phi) \dot{\phi}^2 + (\xi \dot{\phi}^2 - H \xi \phi \dot{\phi}) [(1 - \xi \phi^2) (3B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) + 12\xi^2 \phi^2] \\ & \left(\frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^2 - \frac{1}{4} B(\phi) \dot{\phi}^4 \right) [(1 - \xi \phi^2) (3B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) + 12\xi^2 \phi^2] \Big]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Da equação (5.29), a densidade de energia ρ e a pressão p do campo escalar ϕ são respectivamente,

$$\rho = 3H^2 \xi \phi^2 - \frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{3}{8} B(\phi) \dot{\phi}^4 + 6H\xi\phi\dot{\phi} \quad (5.38)$$

e

$$p = -4H\xi\phi\dot{\phi} - 2\xi\dot{H}\phi^2 - \frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{1}{8} B(\phi) \dot{\phi}^4 - 3H^2 \xi \phi^2 - 2\xi(\dot{\phi}^2 + \phi\ddot{\phi}). \quad (5.39)$$

Soluções de de Sitter

Na teoria inflacionária, soluções de de Sitter são

$$\dot{H} = 0, \quad (5.40)$$

que conduzem ao seguinte comportamento da fator de escala a

$$a(t) = a_0 \exp(Ht) \quad (5.41)$$

e

$$\rho + p = 0. \quad (5.42)$$

Soluções de de Sitter com NMC e k-inflação

O problema de encontrar solução de de Sitter com NMC e k-inflação se reduz a resolver a equação (5.42) com ρ and p dados por (5.38) e (5.39), juntos com a equação de Klein-Gordon equation (5.34), onde $R = 12H^2$. Isto resulta em um conjunto de equações diferenciais,

$$B(\phi) \dot{\phi}^4 - (A(\phi) + 4\xi) \dot{\phi}^2 + 4\xi \phi (H \dot{\phi} - \ddot{\phi}) = 0, \quad (5.43)$$

$$\ddot{\phi} (3B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) + (3H \dot{\phi}) (B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) = -24\xi \phi H^2 - \frac{1}{2} A_{,\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{4} B_{,\phi} \dot{\phi}^4. \quad (5.44)$$

Soluções estáticas de de Sitter

Temos soluções estáticas de de Sitter quando

$$H = 0, \quad (5.45)$$

isto é, esse é o caso dos espaços de Minkowski, que juntamente com (5.43) e (5.44), conduz ao conjunto de equações diferenciais acopladas

$$B(\phi) \dot{\phi}^4 - (A(\phi) + 4\xi) \dot{\phi}^2 - 4\xi \phi \ddot{\phi} = 0, \quad (5.46)$$

$$\ddot{\phi} (3B(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) = -\frac{1}{2} A_{,\phi} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{4} B_{,\phi} \dot{\phi}^4, \quad (5.47)$$

que devem ser resolvidas para que encontremos a solução estática de de Sitter.

Soluções gerais de de Sitter

Temos uma solução geral de de Sitter quando

$$H \neq 0. \quad (5.48)$$

Para que encontremos a expressão de uma solução geral de de Sitter, devemos resolver o conjunto de equações diferenciais acopladas (5.43) e (5.44).

5.2.2 Equações de movimento no referencial de Jordan - Modelo II

Considere uma classe especial da gravidade NMC com k-inflação descrita pela ação

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} [(1 - \xi \phi^2) R + A(\phi) (-X + X^2)] \quad (5.49)$$

onde $\xi \phi^2$ é o termo de explícita interação entre o escalar de curvatura R e o campo escalar ϕ , ξ é a constante de acoplamento ($\xi > 0$), e o termo cinético não-canônico é dado pela função $-A(\phi) (X + X^2)$ onde,

$$X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi. \quad (5.50)$$

As equações de movimento obtidas da variação da ação (5.49), em relação à métrica $g_{\mu\nu}$, são

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= T_{\mu\nu} = \xi \phi^2 G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} A(\phi) X (1 - X) - \xi (\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) \phi^2 \\ &- \frac{1}{2} A(\phi) (\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi) (1 - 2X), \end{aligned} \quad (5.51)$$

enquanto que a equação de movimento obtida da variação da ação (5.49), em relação ao campo escalar ϕ , é

$$\begin{aligned} A(\phi) (-1 + 2X) \square \phi &+ g^{\mu\nu} A_{,\phi} (-1 + 2X) \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - 2A(\phi) \nabla^\mu \phi \nabla_\nu \phi (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi) \\ &= 2\xi \phi R + A_{,\phi} (-X + X^2). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Assumindo uma métrica isotrópica, homogênea e espacialmente plana dada por,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t) d\mathbf{x}^2, \quad (5.53)$$

obtemos da equação (5.51), obtemos as seguintes equações modificadas de Friedmann

$$3H^2 = 3H^2 \xi \phi^2 - \frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^2 + \frac{3}{8} A(\phi) \dot{\phi}^4 + 6H\xi \phi \dot{\phi}. \quad (5.54)$$

$$\dot{H} = \dot{H} \xi \phi^2 - H \xi \phi \dot{\phi} + \xi \dot{\phi}^2 + \xi \phi \ddot{\phi} + \frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^2 - \frac{1}{4} A(\phi) \dot{\phi}^4. \quad (5.55)$$

E a equação de movimento do campo escalar ϕ é

$$\ddot{\phi} (3A(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) + (3H\dot{\phi}) (A(\phi) \dot{\phi}^2 - A(\phi)) = -2\xi \phi (12H^2 + 6\dot{H}) + \frac{1}{2} A_{,\phi} \dot{\phi}^2 - \frac{3}{4} A_{,\phi} \dot{\phi}^4, \quad (5.56)$$

onde $H = \frac{\dot{a}}{a}$, $X = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ e o escalar de Ricci R é

$$R = 12H^2 + 6\dot{H}. \quad (5.57)$$

Da equação (5.51), a densidade de energia ρ e a pressão p do campo escalar ϕ são, respectivamente

$$\rho = 3H^2\xi\phi^2 - \frac{1}{4}A(\phi)\dot{\phi}^2 + \frac{3}{8}A(\phi)\dot{\phi}^4 + 6H\xi\phi\dot{\phi} \quad (5.58)$$

e

$$p = -4H\xi\phi\dot{\phi} - 2\xi\dot{H}\phi^2 - \frac{1}{4}A(\phi)\dot{\phi}^2 + \frac{1}{8}A(\phi)\dot{\phi}^4 - 3H^2\xi\phi^2 - 2\xi(\dot{\phi}^2 + \phi\ddot{\phi}). \quad (5.59)$$

As equações de campo derivadas da ação (5.49) podem ser reescritas como,

$$R = 6\dot{H} + 12H^2 = \rho - 3p \quad (5.60)$$

$$3H^2 - \rho = 0. \quad (5.61)$$

É conveniente expressar as equações (5.60) e (5.61) em termos das variáveis $H(t)$ e $\phi(t)$ através do uso das equações (5.56), (5.58) and (5.59) para obter

$$\begin{aligned} 18(1 &- \xi\phi^2) A(\phi)\dot{H}\dot{\phi}^2 + (36H^2 - 36H^2\xi\phi^2 + \frac{1}{2}A(\phi)^2 + 6\xi A(\phi) - 3\xi\phi A_{,\phi}) \dot{\phi}^2 \\ &- \left(\frac{3}{2}A(\phi)^2 + 18\xi A(\phi) + \frac{9}{2}\xi\phi A_{,\phi} \right) \dot{\phi}^4 + (-6A(\phi) + 6\xi\phi^2 A(\phi) + 72\xi^2\phi^2) \dot{H} \\ &- 36H\xi\phi A(\phi)\dot{\phi}^3 - 12H^2 A(\phi) + 12H^2\xi\phi^2 A(\phi) + 144\xi^2\phi^2 H^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$3H^2 - 3H^2\xi\phi^2 + \frac{1}{4}A(\phi)\dot{\phi}^2 - \frac{3}{8}A(\phi)\dot{\phi}^4 - 6H\xi\phi\dot{\phi} = 0. \quad (5.63)$$

As equações (5.62) e (5.63) constituem um sistema de primeira ordem fechado bidimensional para as variáveis H e ϕ , uma vez que elas contêm somente H , $\dot{H}$, ϕ e $\dot{\phi}$.

Resolvendo (5.62) e (5.63) em termos de $\dot{H}$ e $\dot{\phi}$, obtemos o sistema compostos por duas equações, uma expressa em termos de $\dot{H}$ e a outra em termos de $\dot{\phi}$.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho, estudou-se, do ponto de vista dinâmico, as soluções de teorias de gravidade generalizada do tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(R, \phi, X) \right], \quad (6.1)$$

onde $f(R, \phi, X)$ é uma função que somente depende do campo escalar ϕ , R é o escalar de Ricci e X é uma quantidade escalar dada por

$$X \equiv -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi \quad (6.2)$$

com especial ênfase a sub-classe correspondente a (6.1).

O principal resultado original obtido, publicado na referência [46], foi a existência de singularidades anisotrópicas semelhantes àsquelas correspondentes a $F(\phi) = 0$ em modelos do tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{1}{2} \omega(\phi) g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - V(\phi) \right]. \quad (6.3)$$

A existência de tais singularidades restringem muito a classe de modelos viáveis do tipo (6.1), já que qualquer modelo cosmológico realista deve ser robusto frente a perturbações de parâmetros e condições iniciais.

A simples inexistência de singularidades geométricas não garante a a viabilidade das teorias de gravidade generalizada do ponto de vista inflacionário. É necessário também que as fases de expansão acelerada surjam e desapareçam de maneira adequada ao longo da história cosmológica. Do ponto de vista dinâmico, isto corresponde a existência de soluções do tipo de Sitter com carácter atrator no espaço de fase do sistema. No capítulo 5, as condições para a existência destas soluções foram estabelecidas. Porém, a obtenção de formas explícitas para estas soluções não é uma tarefa simples e certamente será necessário

alguma análise numérica mais elaborada. Este é um ponto que pode ser desenvolvido no futuro.

Do ponto de vista físico, porém, o sucesso de qualquer modelo só pode ser aferido do ponto de vista experimental ou observacional. A quantidade de dados cosmológicos disponíveis tem aumentado consideravelmente, e acredita-se que num futuro não muito distante teorias do tipo (6.1) poderão ser diferenciadas experimentalmente. Como toda questão de análise observacional cosmológica, os detalhes a respeito da análise estatística dos dados e da confiabilidade da previsão de modelos são extremamente elaboradas, requerendo certa sofisticação estatística. Estes pontos estão sendo analisados no momento e espera-se resultados em breve.

Referências Bibliográficas

- [1] A. H. Guth, Phys. Rev. D23, 347 (1981).
- [2] A. A. Starobinsky, JETP Lett. 30, 682 (1979); V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, JETP Lett. 33, 532 (1981); S. W. Hawking, Phys. Lett. B117, 175 (1982); A. H. Guth and S. Y. Pi, Phys. Rev. Lett. 49, 1110 (1982); A. D. Linde, Phys. Lett. B129, 177 (1983); J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, Phys. Rev. D28, 679 (1983); L. F. Abbott and M. B. Wise, Nucl. Phys. B244, 541 (1984).
- [3] A. G. Riess et al., Astron. J. 116, 1009 (1998); S. Perlmutter et al., Nature 391, 51 (1998); Astron. J. 118, 2668 (1999); Astrophys. J. 560, 49 (2001); Astrophys. J. 607, 665 (2004); Astrophys. J. 517, 565 (2003); J. L. Tonry et al., Astrophys. J. 594, 1 (2003); R. Knop et al., Astrophys. J. 598, 102 (2003); B. Barris et al., Astrophys. J. 602, 571 (2004);
- [4] A. D. Miller et al., Astrophys. J. Lett. 524, L1 (1999); P. de Bernardis et al., Nature 404, 955 (2000); A. Melchiorri, L. Mersini, C. J. Oldman and M. Trodden M, Astrophys. J. Lett. 536, L63 (2000); S. Hanany et al., Astrophys. J. Lett. 545, L5 (2000); A. E. Lange et al., Phys. Rev. D 63, 042001 (2001); D. N. Spergel et al., Astrophys. J. 148, 175 (2003); C. L. Bennett et al., Astrophys. J. 148, 1 (2003); T. J. Pearson et al., Astrophys. J. 591, 556 (2003); A. Benoit et al., Astron. Astrophys. 399, L25 (2003).
- [5] R.R. Caldwell, Phys. Lett. B545, 23 (2002); R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, Phys. Rev. Lett. 91, 071301 (2003); Valerio Faraoni, Class. Quant. Grav. 22, 3235 (2005).
- [6] C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 85, 4438 (2000); C. Armendariz-Picon, V. F. Mukhanov, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D63, 103510 (2001).
- [7] C. Armendariz-Picon, T. Damour e V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B458, 209 (1999).

- [8] F. Lucchin and S. Matarrese, Phys. Lett. B 164, 82 (1985), Valerio Faraoni, Int. J. Mod. Phys. D11, 471 (2002).
- [9] Valerio Faraoni, Phys. Rev. D62, 023504 (2000); E. Gunzig, V. Faraoni, A. Figueiredo, T.M. Rocha, L. Brenig, Int. J. Theor. Phys. 39, 1901 (2000); A. Saa, E. Gunzig, L. Brenig, V. Faraoni, T.M. Rocha Filho, A. Figueiredo, Int. J. Theor. Phys.40, 2295 (2001).
- [10] E. W. Kolb e M. S. Turner, *The Early Universe*, Addison-Wesley, Redwood City, California (1990); T. Padmanabhan, *Structure Formation in the Universe*, Cambridge University Press, Cambridge, UK (1993); P. J. Peebles, *Principles of Physical Cosmology*, Princeton University Press, Princeton, NJ (1993); P. Coles e F. Lucchin, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure*, Wiley , Chichester, UK (1995).
- [11] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure*, Cambridge University Press, Cambridge (2000).
- [12] Andreas Johann Albrecht, (UC, Davis) . Presented at NATO Advanced Study Institute: Structure Formation in the Universe, Cambridge, England (1999).
- [13] C. L. Bennett et al., Astrophysics J. Suppl. 148: 1 (2003); H. V. Peiris et al., Astrophysics J. Suppl. 148: 213 (2003).
- [14] A. Riotto, Published in Trieste 2002, Astroparticle physics and cosmology, 317-413.
- [15] A. Linde, Phys. Lett. 108B, 389 (1982).
- [16] A. Albrecht e P. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. 48, 1220 (1982).
- [17] A. H. Guth, Published in Pasadena 2002, Measuring and modeling the universe, 31-52.
- [18] E. W. Kolb, Lecture given at Pritzker Symposium and Workshop on the Status of Inflationary Cosmology, Chicago, IL, 29 Jan - 3 Feb 1999.
- [19] J.E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copelan, T. Barreiro, M. Abney, Reviews of Modern Physics 69 (1997).
- [20] V. Mukhanov, H. Feldman and R. Brandenberger, Physics Reports 215 (1992).
- [21] J. Bardeen, Phys. Rev. D22 (1980).

- [22] T. Bunch e P. Davies, Proc. Roy. Soc. London A360:117-134 (1978).
- [23] T. Futamase, Phys. Rev. D 39 (1989).
- [24] R. Fakir, W. Unruh, Phys. Rev. D 41 (1990).
- [25] E. Komatsu, T. Futamase, Phys. Rev. D58:023004 (1998). S. Tsujikawa, K. Maeda, T. Torii, Phys. Rev. D61:103501 (2001).
- [26] N. D. Birrell, P. C. Davies, Quantum Fields in Curved Space, (Cambridge: Cambridge University Press) (1980).
- [27] E. Komatsu, T. Futamase, Phys. Rev. D59:064029 (1999).
- [28] S. Tsujikawa, B. Gumjudpai, Phys. Rev. D69, 123523 (2004).
- [29] F. C. Carvalho e A. Saa, Phys. Rev. D70, 087302 (2004).
- [30] V. Faraoni, E. Gunzig, Int. J. Theor. Phys.38, 217 (1999).
- [31] J. C. Hwang, Class. Quant. Grav. 7, 1613 (1990).
- [32] V. Faraoni, Phys. Rev. D70, 044037 (2004).
- [33] V. Faraoni, Class.Quant.Grav. 22, 3235 (2005).
- [34] V. Faraoni, Annals Phys. 317, 366 (2005).
- [35] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972).
- [36] V. Faraoni, Phys. Rev. D **72**, 124005 (2005).
- [37] V. Faraoni, Phys. Rev. D **62**, 023504 (2000).
- [38] Jai-chan Hwang, Hyerim Noh, Phys.Rev.D66, 084009 (2002).
- [39] E. Gunzig, A. Saa, L. Brenig, V. Faraoni, T.M. Rocha Filho, and A. Figueiredo, Phys. Rev. **D63**, 067301 (2001).
- [40] A. Saa, E. Gunzig, L. Brenig, V. Faraoni, T.M. Rocha Filho, and A. Figueiredo, Int. J. Theor. Phys. **40**, 2295 (2001).
- [41] A. A. Starobinski, P. Astron. Zh. **7**, 67 (1981) [Sov. Astron. Lett. **7**, 36 (1981)].

- [42] T. Futamase and K. Maeda, Phys. Rev. **D39**, 399 (1989); T. Futamase, T. Rothman, and R. Matzner, Phys. Rev. **D39**, 405 (1981).
- [43] Sean M. Carroll, Mark Hoffman, Mark Trodden, Phys. Rev. D68, 023509 (2003).
- [44] L. Raul Abramo, Leon Brenig, Edgard Gunzig, Alberto Saa, Phys. Rev. D67, 027301 (2003).
- [45] L.R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig, Alberto Saa, Int. J. Theor. Phys.42, 1145 (2003).
- [46] M. F. Figueiró a A. Saa, arXiv:0906.2588.

Apêndice A

Anisotropic singularities in modified gravity models