Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Renormalização de teorias efetivas em sistemas hadrônicos

Luiz Paulo de Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Renato Higa

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Física para a obtenção do título de Doutor em
Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Airton Deppman (IFUSP)
Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (IFUSP)
Prof. Dr. Lauro Tomio (ITA)
Prof. Dr. Renato Higa (orientador - IFUSP)
Prof. Dr. Varese Salvador Timóteo (UNICAMP)

São Paulo
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Oliveira, Luiz Paulo de

Renormalização de teorias efetivas em sistemas hadrônicos.
São Paulo, 2017.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto.
de Física Nuclear.

Orientador: Prof. Dr. Renato Higa
Área de Concentração: Física Nuclear.

Unitermos: 1. Cromodinâmica quântica; 2. Hádrons; 3. Física de partículas.

USP/IF/SBI-088/2017

AGRADECIMENTOS

Ao meu pai pelo seu exemplo de vida, honestidade e honra.

À minha mãe, por ter me dado a vida. Obrigado por ter dormido numa fila de escola pública, a fim de garantir uma vaga no ensino fundamental. Sei que não entenderá nenhum cálculo desta tese, mas entenda que ela é resultado direto da sua entrega e amor infinito (impossível de ser renormalizado)!

Aos professores do Instituto de Física da USP, pela formação acadêmica e momentos de descontração, entre os quais destaco o Prof. Dr. Renato Higa pela paciência, formação e orientação deste trabalho.

Aos professores Ubirajara van Kolck (University of Arizona) e Rob Timmermans (University of Groningen), pelas discussões sobre o trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa.

Aos colegas do Grupo de Hádrons e Física Teórica (GRHAFITE), pelas longas discussões sobre coisas sérias e não tão sérias assim.

Ao Serviço Social do Comércio (SESC), pelo SESC Brasil Instrumental e diversas atividades culturais, mantendo a sanidade deste que vos fala.

Aos colegas da *La Pension*, pela amizade e bons momentos.

Aos amigos da "Verificada Pessoalmente", pela amizade, carinho, respeito, cervejas, trocas e convivência.

Ao amigo Daniel Molnar, pela ajuda nos códigos numéricos.

Aos professores e amigos de Guaratinguetá.

Ao cloridrato de paroxetina, por ter me mantido de pé no momento em que mais precisei.

A todos os demais colegas da USP e de São Paulo, dentre os quais destaco Otávio Nadaletto e Aline Monteiro.

A todos os meus antepassados e sim, hoje tem festa na senzala!

Muito obrigado a todos que estiveram ao meu lado nesta longa e emocionante jornada.

"Pensem que todas as maravilhas, objetos de seus estudos, são a obra de muitas gerações, uma obra coletiva que exige de todos um esforço-entusiasta e um labor difícil e impreterível. Tudo isto, nas mãos de vocês, se torna uma herança. Vocês a recebem, respeitam-na, aumentam-na e, mais tarde, irão transmiti-la fielmente à sua descendência. Deste modo somos mortais imortais, porque criamos juntos obras que nos sobrevivem."

(Einstein, A. "Como eu vejo o mundo", Nova Fronteira, Rio de Janeiro, 1981).

RESUMO

A presente tese propõe-se a investigar a discussão que ocorre na literatura hadrônica de baixas energias com relação à renormalização de teorias efetivas não-perturbativas, no caso particular do sistema nucleon-nucleon. Os detalhes que tornam o problema não-trivial são a existência do potencial tensor devido à troca de um pión e o aspecto não-relativístico tanto da equação dinâmica (Lippmann-Schwinger ou Schrödinger) quanto da derivação do potencial. A teoria de perturbação quiral (χPT), desenvolvida por Gasser e Leutwyler, tem se mostrado como a mais fiel representação da QCD em baixas energias. A extensão da χPT para o setor envolvendo poucos nucleons foi realizada por Weinberg, através de um esquema de contagem de potências quiral (*power counting*).

O *power counting* de Weinberg tem sido severamente criticado na literatura devido à sua não-renormalizabilidade, que possui estreita relação à divergência da troca de um pión.

Recentemente, Staporoli estudou a inclusão de campos auxiliares capazes de absorver as divergências provenientes da troca de um pión. A natureza desses campos são escolhidas por critérios de grande número de cores na QCD.

Neste trabalho, mostramos que a inclusão de um campo auxiliar vetorial na teoria efetiva, em ordem dominante, é um ingrediente capaz de absorver as divergências de curto alcance e fornecer resultados com muito boa concordância com as análises de ondas parciais do grupo de Nijmegen (*PWA93*). Desta maneira, este estudo instaura a renormalizabilidade do sistema de dois nucleons, ausente na proposta de Weinberg, além de ser uma alternativa de maior apelo físico e com menos procedimentos *ad hoc*, como na promoção de contra-termos sugerida por Nogga, Timmermans e van Kolck.

PALAVRAS-CHAVE: teoria efetiva quiral, renormalização, interação nucleon-nucleon, cromodinâmica quântica.

ABSTRACT

The present work aims at investigating the current discussion in the literature of low-energy hadron physics, concerning the non-perturbative renormalization of effective field theories, in particular, the case of a system with two nucleons. The details that make this issue non-trivial are the existence of a tensor potential due to the exchange of one pion, as well as the non-relativistic aspects of both the dynamical equation (Lippmann-Schwinger or Schrödinger) and the derivation of the nucleon-nucleon potential. Chiral perturbation theory (χ PT), developed by Gasser and Leutwyler, has been shown to be the most faithful representation of low energy QCD. The extension of χ PT to the sector involving few- nucleons was performed by Weinberg, through a power counting scheme.

Weinberg's power counting has been severely criticized in the literature for its non-renormalizability, which is closely related to the divergence of the one-pion exchange.

Recently, Staporoli studied the inclusion of auxiliary fields capable of absorbing divergences from the exchange of a pion. The nature of these fields are chosen by criteria of large number of colors in QCD.

In this work, we show that the inclusion of a vector auxiliary field in the effective theory, at dominant order, is an ingredient capable of absorbing the short-range divergences and provides results with very good agreement with the partial wave analysis of the Nijmegen group (PWA93). In this way, this study establishes the renormalizability of the two nucleon system, absent in the Weinberg's proposal, besides of being an alternative with larger physical appealing and with less *ad hoc* procedures, as the promotion of counter-terms suggested by Nogga, Timmermans and van Kolck.

KEY-WORDS: chiral effective theory, renormalization, nucleon-nucleon interaction, quantum chromodynamics.

Sumário

1	Introdução	4
1.1	Motivação	4
1.2	Contexto histórico	5
2	Elementos de teoria do espalhamento	11
2.1	A equação de Lippmann-Schwinger	11
2.2	Estados de dois férmions e canais acoplados	16
3	Teoria efetiva quiral (χEFT)	19
3.1	Cromodinâmica quântica e simetria quiral	19
3.2	χ PT para mésons e bárions	23
3.3	A proposta de Weinberg	28
3.4	Interação NN no limite de grande números de cores da QCD	32
4	O potencial NN no espaço de momento.	36
4.1	Cinemática	36
4.2	Decomposição em ondas parciais	38
5	Resultados	41
5.1	Canal do dêuteron	41
5.2	Canais tripletos acoplados	47
5.3	Canais tripletos desacoplados	54
5.4	Canais singletos	58
6	Conclusões	63
A	Regras de Feynman, constantes e convenções	65
A.1	Regras de Feynman utilizadas na tese.	65
A.2	Constantes e convenções	66
B	Equação de Lippmann-Schwinger no espaço dos momentos: método numérico de resolução.	67

Lista de Figuras

1.1	Esquema geral da interação nucleon-nucleon.	7
3.1	Realização de Wiger-Weyl à esquerda e Nambu-Goldstone à direita.	22
3.2	Representação diagramática da equação de Lippmann-Schwinger.	29
3.3	Diagramas de Feynman irreduzíveis com trocas de um e dois bósons.	29
3.4	Representação diagramática da amplitude de transição com trocas de um, dois e três bósons.	29
3.5	Obtenção dos diagramas redutíveis a partir da iteração dos diagramas irreduzíveis: propagadores.	30
3.6	Potencial das forças entre 2 e 3 nucleons baseadas no esquema de contagem de Weinberg até N^2LO . Vértices vermelho, azul e verde correspondem a $n_i = 0, 1, 2$	31
4.1	Esquema geral do espalhamento nucleon-nucleon.	37
5.1	Determinante da matriz D em função da massa do campo auxiliar vetorial.	42
5.2	Comportamento de M_V em função do <i>cutoff</i>	42
5.3	<i>Phase shifts</i> da onda 3S_1 em função da energia.	43
5.4	<i>Phase shifts</i> da onda 3S_1 em função da energia contendo o resultado de NTvK sem contra-termos (NTvK-SC).	44
5.5	<i>Phase shift</i> da onda 3D_1 em função da energia.	45
5.6	Ângulo de mistura da onda 3D_1 em função da energia.	45
5.7	<i>Phase shifts</i> e ângulo de mistura em função do <i>cutoff</i>	46
5.8	<i>Phase shift</i> da onda 3P_2 em função da energia.	47
5.9	<i>Phase shift</i> da onda 3F_2 em função da energia.	48
5.10	Ângulo de mistura ε_2 em função da energia.	48
5.11	<i>Phase shift</i> 3D_3 em função da energia.	49
5.12	<i>Phase shift</i> da onda 3G_3 em função da energia.	49
5.13	Ângulo de mistura ε_3 em função da energia.	50
5.14	<i>Phase shift</i> das ondas 3F_4 em função da energia.	50
5.15	<i>Phase shift</i> da 3H_4 em função da energia.	51
5.16	Ângulo de mistura ε_4 em função da energia.	51
5.17	<i>Phase shifts</i> das ondas 3P_2 , 3F_2 e ângulo de mistura ε_2 em função do <i>cutoff</i>	52
5.18	<i>Phase shifts</i> das ondas 3D_3 , 3G_3 e ângulo de mistura ε_3 em função do <i>cutoff</i>	52
5.19	<i>Phase shifts</i> das ondas 3F_4 , 3H_4 e ângulo de mistura ε_4 em função do <i>cutoff</i>	53
5.20	<i>Phase shift</i> das ondas 3P_0 em função da energia.	54
5.21	<i>Phase shift</i> da onda 3P_1 em função da energia.	55
5.22	<i>Phase shift</i> da onda 3D_2 em função da energia.	55

5.23	<i>Phase shift</i> da onda 3F_3 em função da energia.	56
5.24	<i>Phase shift</i> da onda 3G_4 em função da energia.	56
5.25	<i>Phase shifts</i> das ondas 3P_0 , 3P_1 , 3D_2 , 3F_3 e 3G_4 em função do <i>cutoff</i>	57
5.26	<i>Phase shift</i> da onda 1S_0 em função da energia.	59
5.27	<i>Phase shift</i> da onda 1P_1 em função da energia.	59
5.28	<i>Phase shift</i> das ondas 1D_2 em função da energia.	60
5.29	<i>Phase shift</i> da onda 1F_3 em função da energia.	60
5.30	<i>Phase shift</i> das onda 1G_4 em função da energia.	61
5.31	<i>Phases shifts</i> das ondas 1S_0 , 1P_1 , 1D_2 , 1F_3 e 1G_4 em função do <i>cutoff</i>	62
A.1	Regras de Feynman utilizadas.	65

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

A interação nucleon-nucleon (NN) constitui o problema básico da física nuclear e até hoje seu domínio de curto alcance não encontra-se bem entendido. Desde os primeiros experimentos envolvendo partículas alfas até a era dos modernos aceleradores de partículas, houve várias tentativas para tentar descrever a interação NN partindo-se de uma teoria física fundamental. Inspirados no sucesso da Eletrodinâmica Quântica (QED), várias gerações de cientistas tentaram formular uma teoria capaz de descrever os fenômenos nucleares. Hoje sabemos que a teoria responsável por descrever as interações nucleares é a Cromodinâmica Quântica (QCD), uma teoria de gauge não-abeliana que possui três características básicas: o confinamento dos quarks no interior dos hádrons, a simetria quiral e a liberdade assintótica. Presente na lagrangiana, a constante de acoplamento entre quarks e glúons apresenta um comportamento que depende intimamente da escala de energia envolvida no processo físico. Em altas energias, muito acima da escala de energia tipicamente hadrônica de aproximadamente 1 GeV , a constante de acoplamento quark-glúon assume valores que permitem o tratamento perturbativo da teoria. A QCD encontra-se então no regime perturbativo, onde os quarks e glúons estão livres (liberdade assintótica) e a teoria fornece excelentes resultados para os experimentos [1]. No regime de baixas energias, $E < 1\text{ GeV}$, a constante de acoplamento entre quarks e glúons assume valores que não permitem o tratamento perturbativo, chamado regime não-perturbativo, onde quarks e glúons estão confinados no interior dos hádrons (confinamento). Nesta faixa de energia a QCD não possui expressões analíticas para os observáveis físicos e portanto o tratamento via algum método aproximado é necessário. Neste contexto, a simetria quiral aproximada da QCD exerce um importante papel. A técnica de álgebra de correntes, introduzida na década de 1960, é baseada nas hipóteses de correntes vetoriais conservadas (CVC) e correntes axiais parcialmente conservadas (PCAC) na interação forte. Antes desse desenvolvimento, a invariância quiral ou conservação da simetria quiral já havia sido utilizada na descrição da interação fraca com sucesso [2, 3]. Logo, ainda na década de 1960, Glashow e Weinberg investigaram o papel da simetria quiral e sua quebra nas interações hadrônicas [4]-[6], abrindo uma nova linha de investigação nas décadas posteriores.

Embora a QCD seja a teoria fundamental da interação forte, sabemos que os graus de liberdade da teoria em baixas energias são os hádrons. Isso nos permite mapear a teoria

fundamental numa teoria efetiva de campos que nos fornece uma abordagem estruturada para processos hadrônicos. Esta abordagem é conhecida como teoria de perturbação quiral (χ PT) e será exposta como mais detalhes no capítulo 3. A χ PT segue dois princípios fundamentais: a simetria quiral da QCD e a expansão em potência de (Q/Λ) , onde Q é o momento internuclear (da ordem da massa do pión) e Λ é uma escala de massa da QCD (da ordem de 1 GeV), a qual indica uma região de transição entre os dois conjuntos de graus de liberdade alternativos, ou seja, quark-gluon ou nucleon-pión [7]. As interações são descritas por lagrangianas que apresentam simetria quiral e que possuem estrutura geral da forma $(Q/\Lambda)^N$, onde $N \geq 0$, permitindo cálculos em teoria de perturbação em potências de (Q/Λ) . A χ PT mostrou-se extremamente bem sucedida na descrição de processos envolvendo apenas mésons ou processos com mésons e apenas um bárion [8]. O desafio mais natural seria levar adiante essas ideias para a física nuclear, no setor envolvendo dois ou mais bárions.

Conforme discutido no capítulo 3, veremos que a extensão da χ PT para o setor de dois nucleons é muito mais sutil. Defrontamo-nos com o problema de somar infinitos diagramas da série quiral, imprescindível para sustentar um estado ligado à baixa energia, o dêuteron. Há com isso a necessidade de estender a simetria quiral levando em conta tais efeitos não-perturbativos, na assim chamada teoria efetiva quiral (χ EFT). No início da década de 1990, Weinberg propôs uma esquema de contagem de potências quirais para a força nuclear de poucos corpos, mostrando-nos que interações de dois nucleons são mais intensas do que três nucleons e assim em diante [9]. O esquema de contagem de potências proposto por Weinberg apresenta falhas e vem sendo criticado na literatura [10]-[12]. Nesta tese nós alteramos o esquema de contagem de potências através da inclusão de campos auxiliares na teoria, substituindo os contra-termos que apareceriam apenas em ordem sub-dominante. Nas próximas seções veremos como mais detalhes os argumentos de grande número de cores na QCD para a interação NN e como procedemos a fim de corrigir o esquema de Weinberg.

O potencial de interação entre dois nucleons é um *input* em cálculos de problemas de muitos corpos *ab-initio* como *No-core shell model* [13], *Hyperspherical harmonics* [14] e *Quantum Monte Carlo* [15]. Logo a renormalização da interação nucleon-nucleon tem papel crucial no entendimento da matéria nuclear, e esta tese tem como foco elucidar e propor corrigir a autoconsistência da teoria efetiva quiral.

1.2 Contexto histórico

O experimento de Rutherford [16], espalhamento Coulombiano de partículas alfa (núcleos de hélio) por núcleos de ouro, marca o nascimento da física nuclear em 1911. O ricocheteamento das partículas alfa sugeriram a presença de uma estrutura rígida e coesa, à qual foi batizada de núcleo atômico. Experimentos atribuídos a Geiger e Marsden [17] confirmaram a hipótese do núcleo atômico e deram origem a novos questionamentos acerca da estrutura nuclear. Inicialmente, acreditava-se que o núcleo atômico fosse constituído apenas por prótons localizados numa pequena região do átomo. Esta idéia foi abandonada após a descoberta do nêutron em 1932 por Chadwick [18]. O novo modelo atômico abandonou o modelo de “pudim de ameixas” de J. J. Thomson, o qual baseava-se na ideia de que o átomo fosse constituído por uma mistura de prótons e elétrons, distribuídos em um volume com as dimensões do próprio átomo.

A estabilidade do núcleo atômico nos remeteu a uma questão básica: o que mantém prótons e nêutrons ligados, ao ponto de superar a repulsão eletrostática entre os prótons? Essa questão deu origem à força nuclear, à qual possui como características fundamentais o curto alcance e do tipo atrativa. Hoje sabemos que a força nuclear é um efeito residual de uma interação mais fundamental, chamada força forte. Prótons e nêutrons são hádrons, partículas constituídas por quarks e glúons, os quais estão confinados sob ação da interação forte. A teoria que descreve a interação forte no interior dos hádrons chama-se QCD (em inglês, *Quantum Chromodynamics*), que foi desenvolvida nas décadas de 1960-1970 por um esforço coletivo [19]-[23].

Uma proposta para tentar compreender as interações nucleares é tratar prótons e nêutrons como partículas idênticas. Os argumentos que dão suporte a essa proposta são: ambos são férmions de spin $1/2$, possuem aproximadamente a mesma massa e possuem papel idêntico quanto à interação nuclear [24]. Logo, podemos tratar prótons e nêutrons como componentes de uma única entidade, o nucleon. Similarmente ao tratamento do spin, introduzimos uma novo número quântico chamado isospin, definindo prótons e nêutrons como projeções desse novo grau de liberdade.

Muitos avanços foram realizados nas últimas décadas acerca das interações nucleares, através de modelos fenomenológicos e mais dados experimentais disponíveis. No entanto, há algumas questões em aberto quando fazemos uso de teorias matematicamente rigorosas que utilizam simetrias da natureza como guias, chamadas teorias quânticas de campos. Inspirado na QED [25], a teoria quântica de campos que descreve a interação entre elétrons e fótons, Yukawa propôs que a interação entre dois nucleons é intermediada por um méson π ou pión [26]. Através de experimentos de raios cósmicos [27], o pión foi detectado em 1947 por uma equipe de físicos à qual pertencia o brasileiro Cesar Lattes. Em teoria quântica de campos o alcance de uma interação é inversamente proporcional à massa das partículas trocadas. Desta maneira, a grandes distâncias, ocorre apenas a troca de um pión, enquanto que em curto alcance há trocas de vários píons e/ou outras partículas.

Em 1951, Taketani, Nakamura e Sasaki [28] propuseram a divisão do alcance da interação NN em três regiões distintas: longo alcance ou clássica ($r > 2 fm$), médio alcance ou dinâmica ($1 fm < r < 2 fm$) e curto alcance ou fenomenológica ($r < 1 fm$). Essa divisão, como esquema geral apresentado na figura 1.1, permite abordar o problema de maneira gradual, pois cada região se manifesta de forma distinta.

A região de longo alcance é dominada pelo potencial de troca de um pión (em inglês, *One-Pion-Exchange Potential*, acrônimo *OPEP*). No espaço de configuração podemos escrevê-lo como

$$V_{OPEP}(r) = \frac{g_{\pi N}}{3} (\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2) \left[\frac{e^{-m_\pi r}}{r} (\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) + \left(1 + \frac{3}{m_\pi r} + \frac{3}{(m_\pi r)^2} \right) \frac{e^{-m_\pi r}}{r} S_{12} \right], \quad (1.1)$$

onde m_π é a massa do pión, S_{12} é um operador tensorial e $g_{\pi N}$ a constante de acoplamento pión-nucleon. A região de médio alcance tem a prevalência das trocas de mésons mais pesados que os píons, como mésons ρ , ω , σ e múltiplos píons (dois e três). Já a região de curto alcance é caracterizada pela troca de glúons e efeitos de QCD.

Podemos classificar os métodos para obter a interação NN nas seguintes classes: modelos fenomenológicos, modelos de troca de um bóson (em inglês, *One-Boson-Exchange*, acrônimo *OBE*) e métodos baseados na QCD.

Modelos fenomenológicos consistem na construção de um potencial que possui algumas simetrias, como de rotação, translação, spin, isospin e muitos parâmetros livres para

Figura 1.1: Esquema geral da interação nucleon-nucleon.

reproduzir dados experimentais [29]. Além da dependência do isospin ($\tau_1 \cdot \tau_2$), esses potenciais possuem as seguintes componentes: central (I), spin-órbita ($\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}$), spin-spin ($\sigma_1 \cdot \sigma_2$) e tensorial (S_{12}). Entre os modelos que obtiveram sucesso nos cálculos da estrutura nuclear encontram-se o potencial do grupo de Yale [30], potencial de Hamada-Johnston [31], potencial de Reid [32] e do grupo de Argonne [33].

Modelos OBE possuem como característica principal a substituição da múltipla troca de píons pela troca de um único bóson. A descoberta dos bósons vetoriais ρ e ω na década de 1960, incentivou a utilização de modelos OBE na descrição da interação NN. Como exemplos de trabalhos utilizando tal abordagem encontram-se os potenciais dos grupos de Bonn [34], Nijmegen [35], Paris [36], e Stony Brook [37], entre outros.

A QCD possui graus de liberdade que correspondem a quarks e glúons. A interação forte entre hádrons é intermediada pela troca desses quarks e glúons, e é dependente da escala de energia envolvida. No regime de altas energias ($E \gg 1 \text{ GeV}$), a QCD encontra-se no regime perturbativo, e por conseguinte, quarks e glúons são descritos como estados assintoticamente livres. No entanto, no regime de baixas energias ($E < 1 \text{ GeV}$), a QCD encontra-se no regime não-perturbativo, e logo devemos utilizar métodos alternativos para descrever as interações. O Modelo de Skyrme [38] e o Modelo de Nambu-Jona-Lasinio [39], são exemplos de métodos alternativos.

A χ PT é a teoria efetiva da QCD em baixas energias, visto que incorpora todas as simetrias da teoria fundamental, permitindo uma descrição fiel e rigorosa da dinâmica dos graus de liberdade hadrônicos [8]. Teorias efetivas em física constituem um tipo de aproximação para uma teoria mais fundamental, possuem uma abordagem adequada para tratar fenômenos físicos a uma dada escala de energia ou comprimento, desprezando

sub-estruturas e graus de liberdade do sistema original. Um exemplo clássico de uma teoria efetiva é a expansão multipolar na eletrodinâmica clássica (veja [40], capítulo 4). O potencial fora de uma esfera de raio R pode ser escrito como uma expansão em harmônicos esféricos

$$\Phi(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (1.2)$$

onde q_{lm} são constantes. A equação acima é chamada de expansão de multipolos, para $l = 0$ temos um monopolo, $l = 1$ temos um dipolo e etc. O problema consiste em determinar as constantes q_{lm} para uma determinada ordem de aproximação, suficiente para descrever o fenômeno elétrico na região $R/r \ll 1$, onde r é a distância relativa ao centro da esfera. Logo, a precisão do resultado desejado depende intimamente da ordem do termo truncado na expansão, uma característica geral de teorias efetivas. Outros exemplos de teorias efetivas são a teoria de Fermi para o decaimento beta [41], teoria BCS da supercondutividade [42], e teorias efetivas para gravitação [43].

Uma consequência da separação de escalas em teorias efetivas é o tratamento das divergências contidas em correções de *loops* ou intrínsecas à interação em questão. No caso da interação NN, a divergência do potencial, em curtas distâncias, traz consequências diretas no cálculo de observáveis e um procedimento de renormalização é necessário.

A renormalização da interação NN foi abordada por diversos grupos e com diferentes metodologias ao longo das últimas décadas. Após os trabalhos seminais de Weinberg, Kaplan e colaboradores elaboraram um novo esquema capaz de fornecer as propriedades da interação NN [11],[44].

O método de Kaplan-Savage-Wise (KSW) introduziu um novo esquema de contagem de potências a fim de corrigir a não-renormalizabilidade da proposta de Weinberg. No método KSW, a amplitude de espalhamento em ordem dominante contava apenas com interações de contato, enquanto que a troca de píons e outras interações eram tratadas perturbativamente em ordem subdominante. Os autores forneceram cálculos analíticos capazes de descrever com boa precisão os observáveis da interação NN para os canais 1S_0 e 3S_1 - 3D_1 . As integrais de *loops* foram resolvidas através do método de regularização dimensional, que preserva simetrias do problema e fornece resultados analíticos. O esquema de subtração adotado foi o PDS (*power-law divergence subtraction*) para exibir a dependência da escala de renormalização μ , forçando assim a soma dos diagramas de *loops*. Entretanto, no começo dos anos 2000, Fleming e co-autores [45]-[46] calcularam os observáveis da interação NN com uma teoria efetiva em ordem sud-sub-dominante (NNLO) para diversos canais ($J \leq 3$). Os cálculos baseados no esquema KSW mostraram falhas na convergência da série quiral na região $p \sim m_\pi$, principalmente em ondas com $l \geq 2$ e, exibiram a fragilidade desta metodologia.

Frederico e colaboradores trataram a renormalização da troca de um pión por meio do método de subtração aplicado na matriz T [47]. Este método consiste na subtração do kernel da equação de Lippmann-Schwinger por uma quantidade que dependa da escala de renormalização μ . Os observáveis para os canais 1S_0 e 3S_1 - 3D_1 foram obtidos com boa concordância com os dados de referência e o esquema mostrou-se invariante sob o grupo de renormalização para $\mu \rightarrow \infty$. Outros trabalhos envolvendo a mesma técnica foram realizados por Timóteo *et al.* para troca de um pión, em ordem sub-dominante [48]-[49], somada a interações de contato e suas derivadas [50]. Uma outra abordagem utilizada na literatura é a evolução do grupo de renormalização para a interação NN [51]-[52] e

aplicações em matéria nuclear [53]-[54].

Nogga e colaboradores [55] sugeriram um esquema de renormalização baseado na promoção de termos de contato em ordem sub-dominante para dominante de maneira *ad hoc*, que descreve com boa concordância os dados do *partial wave analysis* do grupo de Nijmegen [35]. Mais detalhes sobre a proposta de Nogga *et al.* serão apresentadas no final da seção 3.3. A mesma estratégia foi realizada por Valderrama em ordem sub-dominante em [56].

A proposta de Nogga e colaboradores foi duramente criticada por Epelbaum e Meissner (EM) [57], apontando que não há necessidade de se utilizar um *cutoff* maior que $\Lambda = 3 \text{ fm}^{-1}$ e que não há inconsistências do *power counting* de Weinberg se utilizado este valor de *cutoff*. Inspirados no trabalho de Lepage [58], os autores fizeram uma análise do erro teórico em ordem dominante dos *phase shifts* ($\Delta\delta = \delta_i - \delta_{PW A93}$) e elementos da matriz de espalhamento com o *cutoff*, baseando-se na proposta de Nogga *et al.*. Para a maioria dos canais, os resultados mostraram independência do *cutoff* para $\Lambda \geq 3 \text{ fm}^{-1}$. Segundo EM, qualquer valor de Λ é aceitável se o erro associado a este valor finito é da mesma ordem da incerteza teórica. Outro ponto falho apontado por EM é que cálculos em ordem dominante são extremamente insuficientes para descrever as propriedades da matéria nuclear e um número infinito de contra-termos são necessários no limite $\Lambda \rightarrow \infty$. Devemos ressaltar que o trabalho de EM não reproduz exatamente os *phase shifts* e parâmetros de mistura de Nogga *et al.* por vários motivos. Entre eles estão a adoção de outro valor para a constante axial g_A e as próprias condições de renormalização. Enquanto Nogga *et al.* fixaram os *phase shifts* para a energia $E = 10 \text{ MeV}$ na maioria das ondas, EM fixaram as condições em $E < 10 \text{ MeV}$.

Epelbaum e colaboradores têm realizado muitos trabalhos envolvendo a renormalização da interação NN, entre eles a proposta de um novo potencial em quinta ordem na expansão quiral [59] e demais trabalhos envolvendo o método da transformação unitária, teoria de perturbação com ordenamento temporal e outros [60]-[64].

Valderrama e Arriola investigaram a renormalização da troca de um pión na equação de Schrödinger, sem a necessidade de truncamento, chamado pelo autores de modelo de troca de um pión independente de predições [65]. A mesma técnica foi estendida para o potencial de troca de dois píons juntamente de outros efeitos [66]-[68].

Long e Yang discutem o papel das interações de contato no esquema de contagem de potência de Weinberg, o qual falha na descrição do canal 3P_0 [10]. Os autores tratam as interações em ordem sub-dominante como perturbações e utilizam critérios baseados na invariância do grupo de renormalização para investigar o canal 3P_0 . A mesma metodologia é utilizada para investigar os demais canais tripleto [69] e singletos [70].

A utilização de campos auxiliares para a renormalização da interação NN também foi colocada em prática, ainda que de maneira limitada e pouco criteriosa, no trabalho de Beane *et al.* [71]. Neste trabalho os autores utilizaram um campo fictício para absorver as divergências vindas da componente tensorial do OPEP. O estudo revela uma janela de possibilidades para a massa do campo fictício, que fornecem bons resultados para os canais 1S_0 e 3S_1 - 3D_1 em ordem subdominante. Entretanto, tal estudo se limita aos canais com $J \leq 1$, revisitando algumas idéias do falho esquema KSW.

Todos os trabalhos citados acima apresentam bons resultados, principalmente para o canal do dêuteron, e derivam de diferentes abordagens que falham em algum aspecto metodológico, fazendo com que ainda tenhamos questões em aberto sobre a interação NN,

principalmente sobre região de curto alcance da interação. Esta tese tem como objetivo a contribuição para este tópico de pesquisa através da proposta de uma metodologia alternativa ao esquema de Weinberg.

Esta tese está organizada em seis capítulos e dois apêndices. No capítulo 1 apresentamos um breve contexto histórico dos estudos envolvendo a interação nucleon-nucleon, desde os primeiros experimentos em física nuclear até o status atual das técnicas de renormalização. No capítulo 2 encontramos elementos de teoria do espalhamento fundamentais para o entendimento da dinâmica do sistema nucleon-nucleon. No capítulo 3 apresentamos o desenvolvimento da teoria de perturbação quirál e a sua extensão ao estudo da interação nucleon-nucleon, chamada de teoria efetiva quirál. Iniciamos pela estrutura da QCD, suas simetrias, até o esquema de contagem de potências proposto por Weinberg e o estudo da interação NN no limite de grande número de cores da QCD. O capítulo 4 é reservado para apresentamos as etapas necessárias para a obtenção do potencial devido à troca dos campos auxiliares isovetoriais e iso-escalares, e sua decomposição em ondas parciais. No capítulo 5 apresentamos os resultados e discussões, e por fim, as conclusões no capítulo 6. No apêndice A apresentamos as regras de Feynman e constantes utilizadas na tese. No apêndice B apresentamos brevemente os métodos numéricos utilizados, para a resolução da equação de Lippmann-Schwinger no espaço dos momentos.

Capítulo 2

Elementos de teoria do espalhamento

2.1 A equação de Lippmann-Schwinger

O processo de espalhamento entre dois corpos de massa m possui uma descrição muito bem estabelecida e mapeada no problema de um único corpo de massa reduzida $\mu = m/2$, momento relativo $\mathbf{p}_r$, movimentando-se na presença de um potencial de interação $V(\mathbf{r})$, onde $\mathbf{r}$ é a coordenada relativa do sistema. Na linguagem de operadores, podemos definir a seguinte equação

$$(\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (2.1)$$

onde $\hat{H}_0$ é o operador hamiltoniano livre, $\hat{V}$ é o operador potencial, E é a energia do sistema e $|\psi\rangle$ é o estado de duas partículas não-relativísticas, no referencial do centro de massa das duas partículas. Uma simples manipulação da equação acima permite-nos escrever

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\varepsilon} \hat{V}|\psi\rangle, \quad (2.2)$$

onde o estado $|\phi\rangle$ é a solução livre do problema de dois corpos, ou seja, na ausência do potencial. Ao projetarmos o estado acima numa base completa no espaço dos momentos, temos

$$\psi(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \frac{1}{E - \mathbf{p}'^2/2\mu + i\varepsilon} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}). \quad (2.3)$$

Ao realizarmos o mesmo procedimento para a quantidade $\hat{T}|\phi\rangle = \hat{V}|\psi\rangle$, obtemos a equação de Lippmann-Schwinger [72], responsável por descrever a dinâmica não-relativística de objetos quânticos, e é dada por

$$T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \frac{1}{E - q^2/2\mu + i\varepsilon} T(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (2.4)$$

onde $T(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ é a matriz de transição, às vezes chamada de amplitude de espalhamento. Os trimomentos $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p}'$ referem-se ao momento relativo inicial e final no centro de massa, respectivamente. É uma equação integral equivalente à equação de Schrödinger, mas que possui condições de contorno adequadas para problemas de espalhamento. Uma vantagem adicional deste formalismo no espaço dos momentos é a obtenção direta dos potenciais de interação a partir de diagramas de Feynman de uma dada densidade de lagrangiana. Há

vários desenvolvimentos de derivação da equação de Lippmann-Schwinger na literatura [73]-[75], bem como a conexão existente com a formulação da matriz S , introduzida por Wheeler na década de 1930 [76].

Podemos expandir a amplitude de transição na base completa dos harmônicos esféricos para um dado potencial de interação $V(\mathbf{p}', \mathbf{p})$. Na presença de interações radiais (simetria azimutal) esta expansão fica bastante simplificada em termos dos polinômios de Legendre. Nessas condições, uma dada quantidade física $W(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ tem a seguinte expansão

$$W(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_l (2l+1) w_l(p', p) P_l(\cos \theta_{p'p}), \quad (2.5)$$

onde $\theta_{p'p}$ é o ângulo formado entre $\mathbf{p}'$ e $\mathbf{p}$. A operação inversa é definida por

$$w_l(p', p) = \frac{1}{2} \int d(\cos \theta_{p'p}) W(\mathbf{p}', \mathbf{p}) P_l(\cos \theta_{p'p}). \quad (2.6)$$

Utilizando o teorema da adição para harmônicos esféricos [77], ou seja,

$$P_l(\cos \theta_{pq}) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\Omega_{p'p}) Y_{lm}^*(\Omega_{pq}), \quad (2.7)$$

onde Ω_{pq} é o ângulo sólido formado entre $\mathbf{p}$ e $\mathbf{q}$, podemos reescrever o kernel da equação integral como

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \frac{1}{E - q^2/2\mu + i\varepsilon} T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_l \sum_{l'} \sum_m \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{2\pi^2} Y_{lm}(\Omega_{p'p}) Y_{lm}^*(\Omega_{pq}) \\ &\times (2l'+1) P_{l'}(\cos \theta_{qp}) \frac{v_l(p', q) t_{l'}(q, p)}{E - q^2/2\mu + i\varepsilon} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Utilizando as relações

$$P_{l'}(\cos \theta_{qp}) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l'+1}} Y_{l'0}(\Omega_{qp}), \quad (2.9)$$

$$\int d\Omega_q Y_{l'0}(\Omega_{qp}) Y_{lm}^*(\Omega_{qp}) = \delta_{ll'} \delta_{m0}, \quad (2.10)$$

obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} V(\mathbf{p}', \mathbf{q}) \frac{1}{E - q^2/2\mu + i\varepsilon} T(\mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta_{p'p}) \\ &\times \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q) t_l(q, p)}{E - q^2/2\mu + i\varepsilon}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Ao compararmos com

$$T(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta_{p'p}) t_l(p', p) \quad (2.12)$$

e

$$V(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \sum_l (2l+1) P_l(\cos \theta_{p'p}) v_l(p', p), \quad (2.13)$$

obtemos a equação de Lippmann-Schwinger na chamada expansão em ondas parciais,

$$t_l(p', p) = v_l(p', p) + \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q) t_l(q, p)}{E - q^2/2\mu + i\varepsilon}, \quad (2.14)$$

onde $t_l(p', p)$ e $v_l(p', p)$ são as componentes da amplitude de transição e do potencial de interação, respectivamente, dessa expansão. Elas dependem apenas dos módulos dos momentos inicial e final, $p = |\mathbf{p}|$ e $p' = |\mathbf{p}'|$. Temos acima uma equação integral que, para um dado potencial, permite-nos encontrar a amplitude do processo de espalhamento. Em geral, a equação de Lippmann-Schwinger possui diferentes métodos numéricos para resolução como o método de Nystrom [78], princípio variacional de Kohn complexo [79], aproximações de Padé [80] e outros [81]. O método adotado neste trabalho consiste em discretizar os momentos envolvidos de acordo com o método de quadratura de Gauss-Legendre para efetuarmos a integração numérica. O fator ε é uma prescrição para evitarmos o encontro com pólos ao longo do eixo real, o que consequentemente força-nos a executar um desvio apropriado no plano complexo para efetuar a integração da maneira correta.

A expansão da amplitude de transição permite-nos escrever a amplitude de onda parcial $f_l(k)$ como:

$$f_l(k) \equiv -\frac{\mu}{2\pi} t_l(k) \quad (2.15)$$

a qual se relaciona com a matriz de espalhamento S_l

$$S_l(k) \equiv 1 + 2ik f_l(k). \quad (2.16)$$

onde $k = \sqrt{2\mu E}$.

Podemos escrever os estados assintóticos ($r \rightarrow \infty$) do processo de espalhamento de um estado quântico por um centro espalhador da seguinte maneira

$$\psi \approx e^{i\mathbf{kz}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(\theta), \quad (2.17)$$

o primeiro termo é interpretado como uma onda plana na direção de propagação $\mathbf{k}$ enquanto que o segundo termo representa uma onda esférica emergente. Todas as informações relativas ao efeito do potencial no espalhamento estão contidas na função

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l(k) P_l(\cos \theta). \quad (2.18)$$

Usando a expansão

$$e^{i\mathbf{kz}} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos \theta) \left(\frac{e^{ikr} - e^{-i(kr-l\pi)}}{2ikr} \right) \quad (2.19)$$

concluimos que

$$\psi \approx \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{P_l(\cos \theta)}{2ik} \left\{ S_l(k) \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right\}. \quad (2.20)$$

Assim sendo, notamos que o espalhamento elástico altera apenas a amplitude $S_l(k)$ da onda emergente. A conservação da probabilidade e momento angular implicam na unitariedade da matriz S_l

$$|S_l(k)|^2 = 1. \quad (2.21)$$

Podemos concluir que o espalhamento altera apenas a função de onda emergente por uma fase, comumente chamada de deslocamento de fase δ_l (*phase shift*), que pode ser parametrizado como

$$S_l(k) \equiv e^{2i\delta_l(k)}. \quad (2.22)$$

Relacionamos, através de (2.17 – 2.19),

$$\psi \approx \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{P_l(\cos \theta)}{2ik} \left\{ [1 + 2ikf_l(k)] \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right\}, \quad (2.23)$$

a amplitude de onda parcial em função do phase shift,

$$f_l(k) = \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2ik} = \frac{1}{k \cot \delta_l - ik}. \quad (2.24)$$

A seção de choque diferencial do processo de espalhamento elástico é dada por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2. \quad (2.25)$$

No caso em que os comprimentos de onda das partículas interagentes (λ) são maiores que o alcance da interação (R), definimos a função alcance efetivo [82]

$$K_l(k^2) \equiv k^{2l+1} \cot \delta_l(k), \quad (2.26)$$

onde, para $l = 0$, temos a expansão em k^2

$$k \cot \delta_0 = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2}r_0k^2 - \frac{1}{4}\mathcal{P}_0k^4 + \dots, \quad (2.27)$$

chamada de expansão do alcance efetivo, onde a é comprimento de espalhamento, r_0 é o alcance efetivo e $\mathcal{P}_0$ o parâmetro de forma (*shape parameter*). Nesse limite, encontramos um comportamento limítrofe $\delta_l \sim k^{2l+1}$ onde, para um potencial finito e de curto alcance, a contribuição mais relevante pertence à onda S [73]. Nessas condições a amplitude de espalhamento total $f(\theta)$ resulta em $-a$, onde finalmente obtemos a seção de choque total de uma esfera impermeável de raio a , $\sigma = 4\pi a^2$. Sabemos que as energias correspondentes aos estados ligados são polos da amplitude de espalhamento, que se encontram no semi-eixo positivo do plano k -complexo [75]. Uma simples verificação da equação (2.24) permite-nos concluir que

$$-\frac{1}{a} - ik = 0 \rightarrow k = \frac{i}{a}, \quad (2.28)$$

$$E = \frac{k^2}{2m} = -\frac{1}{2ma^2}, \quad (2.29)$$

e portanto, para $Im(k) > 0$, temos que necessariamente $a > 0$. De fato, para o caso do espalhamento nucleon-nucleon, o canal 3S_1 exibe um comprimento de espalhamento dado por $a(^3S_1) \approx 5.4 \text{ fm}$ [83], que corresponde ao dêuteron. Já o canal 1S_0 exibe um comprimento de espalhamento negativo $a(^1S_0) \approx -23.7 \text{ fm}$, que não corresponde a um estado ligado.

Vamos agora julgar a relevância de cada termo da expansão (2.27) com a chamada escala de comprimento natural $1/\Lambda$, onde Λ é o *cutoff* da teoria. Uma análise dimensional ingênua (*naive dimensional analysis, NDA*) propõe que os parâmetros da expansão (2.27) sejam escalonados da seguinte maneira:

$$a \sim \frac{1}{P_{hi}}, \quad r_0 \sim \frac{1}{P_{hi}}, \quad \mathcal{P}_0 \sim \frac{1}{P_{hi}^3}, \quad (2.30)$$

onde P_{hi} é uma escala de momento em altas energias. No entanto, a única escala de momento acessível no nosso problema é o *cutoff* da teoria Λ e, portanto, temos o escalonamento

$$a \sim \frac{1}{\Lambda}, \quad r_0 \sim \frac{1}{\Lambda}, \quad \mathcal{P}_0 \sim \frac{1}{\Lambda^3}. \quad (2.31)$$

No regime de baixas energias, o momento característico é dado por k_b e, logo, a expansão pode ser escrita como

$$k \cot \delta_0 \sim -k_b \left(\frac{k_b}{\Lambda} \right)^{-1} + \frac{1}{2} k_b \left(\frac{k_b}{\Lambda} \right) - \frac{1}{4} k_b \left(\frac{k_b}{\Lambda} \right)^3 + \dots \quad (2.32)$$

O primeiro termo da expansão contribui com a ordem $(k_b/\Lambda)^{-1}$, enquanto os demais, em ordem $(k_b/\Lambda)^1$ e $(k_b/\Lambda)^3$, são suprimidos pois possuem potências superiores da razão k_b/Λ . Neste caso, chamado natural, os polos da amplitude de espalhamento fornecem estados ligados com energias fora da região de interesse físico

$$-\Lambda - ik_b = 0 \rightarrow k_b = i\Lambda. \quad (2.33)$$

Logo, se estamos interessados em estados ligados em baixas energias, devemos alterar a maneira como escalonamos o comprimento de espalhamento.

No caso minimamente não-natural, o escalonamento é feito por $a \sim 1/k_b$ e consequentemente,

$$k \cot \delta_0 \sim -k_b + \frac{1}{2} k_b \left(\frac{k_b}{\Lambda} \right) - \frac{1}{4} k_b \left(\frac{k_b}{\Lambda} \right)^3 + \dots \quad (2.34)$$

Ao coletarmos o termo dominante da série acima, podemos obter os polos de $f_l(k)$ através de $-1/a - ik_b = 0$. Logo as energias de estados ligados são dadas por

$$E_b = \frac{k_b^2}{2m} = -\frac{1}{2ma^2}, \quad (2.35)$$

que agora encontram-se na região de baixas energias, como o desejado para uma teoria efetiva. Portanto, interações que possuem grande comprimento de espalhamento abrigam estados fracamente ligados com energias próximas de zero (ou pouco profundos).

A teoria do alcance efetivo possui uma relação estreita com a formulação de uma teoria efetiva para a interação NN . O estado fracamente ligado, correspondente ao dêuteron

($E_b = 2.224 \text{ MeV}$), exige que a teoria contenha diagramas de *loops* da mesma ordem de grandeza dos diagramas de contato. Tal fato garante que a amplitude de espalhamento exiba polos referentes a estados ligados em baixas energias. Como vimos acima, o escalonamento no caso minimamente não-natural é obrigatório para a correta descrição dos estados ligados. Essas ideias foram colocadas em prática por Kaplan e colaboradores [11], que desenvolveram uma teoria efetiva capaz de conectar as amplitudes obtidas pelas duas abordagens através da *NDA*, para os canais $^1\text{S}_0$ e $^3\text{S}_1$ - $^3\text{D}_1$.

Encerramos esta seção apresentando com certo detalhe a obtenção de estados ligados, dado um potencial. A condição de contorno de estados ligados na equação de Lippmann-Schwinger resulta na eliminação do termo não-homogêneo, primeiro termo do lado direito da equação (2.14). A equação para estados ligados fica

$$\tau_l(p', p) = \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q) \tau_l(q, p)}{-B - q^2/2\mu + i\varepsilon}, \quad (2.36)$$

onde $-B$ é a energia de ligação. A discretização das variáveis p' e q nos fornece a seguinte relação para a amplitude $\tau_l(p', p)$

$$(1 - \text{Kernel})\tau_l(p', p) = 0, \quad (2.37)$$

onde soluções não-triviais da condição $\det(1 - \text{Kernel}) = 0$ determinam os possíveis valores de B . Na equação (2.37), *Kernel* é a discretização do termo

$$\int_0^\infty \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q)}{-B - q^2/2\mu + i\varepsilon}, \quad (2.38)$$

tal como descrito no apêndice B.

2.2 Estados de dois férmions e canais acoplados

A forma geral do potencial NN para o espalhamento não-relativístico é [84]

$$\begin{aligned} V(r) = & V_C^0 + V_{SS}^0 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + V_T^0 S_{12} + V_{LS}^0 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + V_Q^0 Q_{12} \\ & + \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 (V_C^1 + V_{SS}^1 \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 + V_T^1 S_{12} + V_{LS}^1 \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} + V_Q^1 Q_{12}) \end{aligned} \quad (2.39)$$

onde $V_i^y = V_i^y(r)$ são as funções radiais do potencial, os índices i e y indicam a componente do potencial e dependência ($y = 1$) ou não ($y = 0$) do operador $\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$. Os termos

$$S_{12} = 3 \frac{\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{r} \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{r}}{r^2} - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2, \quad (2.40)$$

$$Q_{12} = \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{L}, \boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{L} \} \quad (2.41)$$

são os operadores tensor e spin-órbita quadrático, respectivamente. Discutiremos com mais detalhes a estrutura do potencial NN no capítulo 4. Queremos chamar a atenção, nesta etapa, para o operador tensor S_{12} contido no potencial acima. Este operador atua apenas em estados tripletos de spin, e sua matriz de autovalores possui termos não-diagonais, misturando assim ondas de diferentes valores de l .

A conservação do momento angular total traz implicações no estados quânticos de duas partículas na equação dinâmica. Os nucleons são férmions de spin $1/2$, logo, temos estados tripleto ($s = 1$) e singleto de spin ($s = 0$). As regras de adição do momento angular total ($\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$) fornece-nos os seguintes estados singleto

$$|jm_j\rangle = |l, m_l\rangle \otimes |0, 0\rangle \quad (2.42)$$

e tripletos de spin

$$\begin{aligned} |j = l + 1, m_j\rangle &= \alpha |l, m_l = m_j - 1\rangle \otimes |1, 1\rangle \\ +\beta |l, m_l = m_j\rangle \otimes |1, 0\rangle &+ \gamma \alpha |l, m_l = m_j + 1\rangle \otimes |1, -1\rangle, \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} |j = l - 1, m_j\rangle &= \bar{\alpha} |l, m_l = m_j - 1\rangle \otimes |1, 1\rangle \\ +\bar{\beta} |l, m_l = m_j\rangle \otimes |1, 0\rangle &+ \bar{\gamma} |l, m_l = m_j + 1\rangle \otimes |1, -1\rangle, \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} |j = l, m_j\rangle &= \tilde{\alpha} |l, m_l = m_j - 1\rangle \otimes |1, 1\rangle \\ +\tilde{\beta} |l, m_l = m_j\rangle \otimes |1, 0\rangle &+ \tilde{\gamma} |l, m_l = m_j + 1\rangle \otimes |1, -1\rangle, \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ e $\tilde{\gamma}$ são coeficientes de Clebsch-Gordan. Sabemos que a paridade de um estado é dada por $P(l) = (-1)^l$ e logo $P(l - 1) = P(l + 1)$. Desta maneira, na presença de um potencial de interação que mistura ondas, os estados com momento angular total $j = l + 1$ e $j = l - 1$ se misturam e constituem um único estado chamado acoplado. O estado com momento angular total $j = l$ possui paridade $P(l)$, contrária aos demais estados tripletos de spin. Desta maneira, esse estado não se acopla aos demais canais tripletos e comporta-se como um estado singleto de spin (*single channel*).

Devemos salientar que os estados de dois nucleons possuem números quânticos associados ao isospin, o que fornece as seguintes possíveis combinações de estados no espaço spin-isospin

$$\begin{aligned} \Pi^{00} &= |s = 0, m_s = 0\rangle \otimes |t = 0, m_t = 0\rangle && \text{singleto-singleto,} \\ \Pi^{01} &= |s = 0, m_s = 0\rangle \otimes |t = 1, m_t\rangle && \text{singleto-tripletto,} \\ \Pi^{10} &= |s = 1, m_s\rangle \otimes |t = 0, m_t = 0\rangle && \text{tripletto-singleto,} \\ \Pi^{11} &= |s = 1, m_s\rangle \otimes |t = 1, m_t\rangle && \text{tripletto-tripletto.} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Como veremos adiante, a interação estudada neste trabalho depende apenas do isospin total do sistema de dois nucleons, o que não permite-nos distinguir o estado próton-próton do nêutron-nêutron.

Para estados singletos de spin, o potencial consiste numa única função que depende dos momentos finais e iniciais das partículas, enquanto assume uma forma matricial 2×2 para estados acoplados.

Particularmente, no caso de estados acoplados, há um parâmetro chamado de ângulo de mistura ($\bar{\epsilon}$), que nos fornece o peso relativo de cada onda acoplada. Neste caso, a matriz S é dada por

$$S = \begin{pmatrix} e^{2i\bar{\delta}_-} \cos 2\bar{\epsilon} & ie^{i(\bar{\delta}_- + \bar{\delta}_+)} \sin 2\bar{\epsilon} \\ ie^{i(\bar{\delta}_- + \bar{\delta}_+)} \sin 2\bar{\epsilon} & e^{2i\bar{\delta}_+} \cos 2\bar{\epsilon} \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

onde $\bar{\delta}_{\pm}$ é o *phase shift* associado ao estado com momento angular $L = J \pm 1$. Uma vez obtida a matriz S , podemos encontrar $\bar{\delta}_{\pm}$ e $\bar{\epsilon}$ para uma dada energia no referencial do laboratório.

Capítulo 3

Teoria efetiva quiral (χ EFT)

Neste capítulo apresentaremos as bases que motivaram o desenvolvimento da teoria de perturbação quiral e a sua extensão ao estudo da interação nucleon-nucleon, chamada de teoria efetiva quiral. Iniciaremos pela estrutura da QCD, suas simetrias, até o esquema de contagem de potências proposto por Weinberg, ao qual propomos uma alternativa neste trabalho.

3.1 Cromodinâmica quântica e simetria quiral

Após o sucesso da QED na descrição da interação entre elétrons e fótons, a QCD surgiu como a teoria de gauge responsável por descrever a interação entre quarks e glúons. A lagrangiana ¹ da QCD é dada por

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s,c,b,t} \bar{q}_f (i \not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} \quad (3.1)$$

com

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_s f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad (3.2)$$

e

$$\not{D} = \gamma^\mu \left(\partial_\mu - i g_s \frac{\lambda_a}{2} A_\mu^a \right) \quad (3.3)$$

onde q_f são os campos dos quarks de sabor f e massa m_f , A_μ^a são os campos dos glúons de cor a , g_s é a constante de acoplamento forte, f^{abc} é a constante de estrutura do grupo $SU(3)$ e λ_a são as matrizes de Gell-Mann. Uma grande diferença entre a QCD e a QED é o termo cruzado entre os tensores $G_{\mu\nu}^a$, que fornece a auto-interação de três e quatro campos gluônicos, algo não observado entre os fótons. Devemos ressaltar que até hoje não observamos estados de quarks assintoticamente livres, o que restringe a massa dos quarks ao método de investigação aplicado. As evidências para existência dos quarks e glúons vieram do espalhamento inelástico profundo entre prótons e elétrons no SLAC [85] em 1969 e nos eventos de três jatos no acelerador PETRA [86] em 1979. Os trabalhos de

¹O termo correto é densidade de lagrangiana. No entanto, por costume, utilizaremos apenas o termo lagrangiana.

Politzer [22], Gross e Wilczek [21] deram origem à liberdade assintótica, o que abriu uma nova era de investigação teórica nos experimentos de altas energias [87].

O comportamento da constante de acoplamento forte, no regime de baixas energias, não permite a abordagem perturbativa da QCD. Logo necessitamos de métodos alternativos para descrever a interação entre quarks e glúons, que estão confinados no interior dos hádrons. Neste cenário, a simetria quiral da QCD aparece como guia para desenvolver uma metodologia capaz de descrever processos físicos em baixas energias. A pequena massa dos quarks up, down e strange, em relação aos demais quarks, sugere que uma teoria contendo apenas quarks leves pode se criada a partir de uma simetria, chamada quiral. Introduzindo os projetores

$$P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5), \quad (3.4)$$

onde os índices L e R referem-se aos operadores de projeção de mão esquerda (*left*) e direita (*right*), respectivamente, podemos mostrar as seguintes propriedades

$$P_{L,R}^2 = P_{L,R}, \quad P_R + P_L = I, \quad (3.5)$$

$$P_R P_L = P_L P_R = 0. \quad (3.6)$$

A atuação dos operadores de projeção nos campos dos quarks fornece as seguintes projeções

$$P_{L,R} q_f = q_{fL,R}, \quad (3.7)$$

e a parte cinética da lagrangiana livre nos fornece

$$\bar{q}_f(i\cancel{D})q_f = \bar{q}_{fL}(i\cancel{D})q_{fL} + \bar{q}_{fR}(i\cancel{D})q_{fR}. \quad (3.8)$$

Observamos um desacoplamento entre as componentes de mão esquerda e direita, cada um dos termos acima transforma-se de forma independente sob rotações $U(3)_L$ e $U(3)_R$. No entanto, o termo de massa nos fornece

$$m_f \bar{q}_f q_f = m_f (\bar{q}_{fL} q_{fL} + \bar{q}_{fR} q_{fR}) + m_f (\bar{q}_{fL} q_{fR} + \bar{q}_{fR} q_{fL}), \quad (3.9)$$

e a mistura entre os campos mão esquerda e direita quebra explicitamente a simetria $U(3)_L \times U(3)_R$ observada na parte cinética. Porém, a massa de corrente dos quarks leves ($m_u \sim m_d \sim 7 \text{ MeV}$; $m_s \sim 90 \text{ MeV}$) são escalas de energia muito menores que a escala típica de processos hadrônicos ($\sim 200 \text{ MeV}$)², o que justifica tomar o limite quiral quando $m_f \rightarrow 0$ como ponto de partida para cálculos perturbativos.

A lagrangiana quiral ($\mathcal{L}_{QCD}^0$) permite-nos obter quadricorrentes de mãos esquerda e direita conservadas, através do teorema de Noether,

$$L^{\mu,a} = \bar{q}_{fL} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_{fL}, \quad (3.10)$$

$$R^{\mu,a} = \bar{q}_{fR} \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_{fR}. \quad (3.11)$$

²A massa do quark estranho acaba não sendo muito menor que a escala hadrônica, o que pode levar a problemas de convergência da série quiral. Há algumas propostas na literatura para contornar tal problema, mas foge ao escopo desse trabalho. A versão $SU(2)$ da χPT , considerando apenas os quarks up e down, é livre desse problema.

Combinações lineares dessas quadricorrentes dão origem a uma quadricorrente vetorial conservada e uma axial não conservada (embora ela seja conservada no limite de grande número de cores) que obedecem a uma álgebra de Lie $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$

$$V^{\mu,a} = R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q}_f \gamma^\mu \frac{\lambda^a}{2} q_f, \quad (3.12)$$

$$A^{\mu,a} = R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q}_f \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} q_f. \quad (3.13)$$

No entanto, sabemos que as massas dos quarks leves, ainda que pequenas, são finitas no mundo real e portanto a simetria quiral é quebrada. Entretanto, mesmo que a simetria quiral seja quebrada, é possível que transformações vetoriais restaurem simetrias se considerarmos a massa dos quarks iguais. A simetria de isospin é um exemplo de invariância com respeito às transformações vetoriais, onde por exemplo, as massas do próton e do nêutron são iguais.

A criação dos mésons, que são responsáveis por mediar as interações entre os nucleons, se dá através do mecanismo de quebra espontânea de simetria. Sabemos que em uma teoria quântica de campos, o estado de vácuo pode ou não respeitar uma simetria presente na lagrangiana do sistema. Quando a simetria é preservada, a ação dos operadores de carga vetorial (Q_V) e axial (Q_A), sobre o vácuo da teoria, fornecem um valor identicamente nulo e dizemos que a simetria está realizada no modo de Wigner-Weyl. Neste caso, o vácuo possui um único valor mínimo para o potencial efetivo, o qual associamos ao estado fundamental (veja figura 3.1). Quando a simetria não é preservada, dizemos que houve uma quebra espontânea de simetria. Neste contexto, o teorema de Nambu-Goldstone [88] enuncia que bósons não-massivos são gerados de acordo com a quebra da simetria do grupo. Se um dado grupo de simetria G , que possui n_G geradores, tem a simetria quebrada para um subgrupo H , são gerados $n_G - n_H$ bósons de Nambu-Goldstone, onde n_H é o número de geradores de H . Neste caso, o potencial efetivo apresenta infinitos mínimos que correspondem à realização de Nambu-Goldstone da simetria contínua. Dizemos então que o vácuo da teoria é degenerado. Entretanto, com a quebra explícita da simetria quiral, os infinitos estados degenerados dão lugar a um único vácuo para a teoria, contendo $n_G - n_H$ bósons pseudo-escalares cujas massas são proporcionais ao termo de quebra explícita (da simetria quiral).

A fim de incorporar os efeitos da quebra espontânea da simetria quiral, Gasser e Leutwyler [89]-[90] introduziram campos externos (vetoriais, axiais, escalares e pseudo-escalares) neutros de cores na lagrangiana quiral para obter as funções de Green da QCD em baixas energias. Vínculos como invariância sob conjugação carga, paridade, inversão temporal e hermiticidade da lagrangiana, impõem aos campos externos e dos quarks um comportamento padrão perante essas simetrias. Essas idéias ganharam atenção ao longo da década de 1980, sendo amplamente aplicadas com sucesso em vários processos hadrônicos de baixas energias.

Os trabalhos de Gasser e Leutwyler tiveram como ideias fundamentais o artigo seminal de Weinberg sobre lagrangianas efetivas [91]. Neste trabalho, Weinberg sugere que uma lagrangiana efetiva geral, que possui todas as simetrias da teoria fundamental, é capaz de descrever processos físicos em qualquer ordem de perturbação. Os resultados obtidos, por esta construção rigorosa, seriam os mesmos fornecidos pela teoria fundamental. O caráter não-abeliano das interações fortes impede que façamos teoria de perturbação no regime

Figura 3.1: Realização de Wiger-Weyl à esquerda e Nambu-Goldstone à direita.

de baixas energias, ou seja, não conseguimos resolver a QCD com toda sua completude. Logo, se formos capazes de construir uma lagrangiana efetiva, que contenha todas as simetrias fundamentais da QCD, seremos capazes de prever resultados da teoria original. A fenomenologia dos graus de liberdade hadrônicos em baixas energias depende das chamadas constantes de baixas energias (LECs), que são obtidas a partir da correspondência com dados experimentais, sem perdas de generalidade.

O procedimento padrão, desenvolvido por Gasser e Leutwyler, consiste em introduzir nove correntes vetoriais e oito correntes axiais, bem como correntes escalares e pseudo-escalares na densidade lagrangiana livre da QCD [89],

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_{QCD}^0 + \mathcal{L}_{ext} \\ \mathcal{L}_{ext} &= \bar{q}\gamma_\mu(v^\mu + \frac{1}{3}v_s^\mu + \gamma_5 a^\mu)q - \bar{q}(s - i\gamma_5 p)q\end{aligned}\quad (3.14)$$

onde

$$v^\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} v_a^\mu, \quad a^\mu = \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} a_a^\mu, \quad s = \sum_{a=1}^8 \lambda_a s_a, \quad p = \sum_{a=1}^8 \lambda_a p_a \quad (3.15)$$

A lagrangiana original da QCD com três sabores é obtida fazendo-se $v^\mu = v_s^\mu = a^\mu = p = 0$ e $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$. Utilizando-se os projetores de mão esquerda e direita, a densidade lagrangiana com campos externos pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{ext} &= \bar{q}_L \gamma_\mu (l^\mu + \frac{1}{3}v_s^\mu) q_L + \bar{q}_R \gamma_\mu (r^\mu + \frac{1}{3}v_s^\mu) q_R - \bar{q}_R (s + ip) q_L \\ &\quad - \bar{q}_L (s - ip) q_R\end{aligned}\quad (3.16)$$

onde

$$v_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu + l_\mu), \quad a_\mu = \frac{1}{2}(r_\mu - l_\mu). \quad (3.17)$$

A lagrangiana acima é invariante sob transformações locais, e consequentemente, os campos obedecem às seguintes regras de transformação

$$r_\mu \rightarrow V_R r_\mu V_R^\dagger + i V_R \partial_\mu V_R^\dagger, \quad (3.18)$$

$$l_\mu \rightarrow V_L l_\mu V_L^\dagger + i V_L \partial_\mu V_L^\dagger, \quad (3.19)$$

$$v_\mu^{(s)} \rightarrow v_\mu^{(s)} - \partial_\mu \Theta, \quad (3.20)$$

$$s \pm ip \rightarrow V_{R,L}(s \pm ip) V_{L,R}^\dagger. \quad (3.21)$$

onde as transformações locais dos campos são dadas por

$$q_{R,L} \rightarrow \exp \left[-i \frac{\Theta(x)}{3} \right] V_{R,L}(x) q_{R,L}, \quad (3.22)$$

$V_{R,L}(x)$ são matrizes do grupo $SU(3)$, dependentes das coordenadas espaço-temporais. Devemos enfatizar que o limite quiral é obtido através de $s \rightarrow 0$, e a inserção de $s = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$ é uma forma de incorporar a quebra explícita da simetria quiral de maneira perturbativa.

A realização não-linear da simetria quiral e a criação de bósons de Goldstone pseudo-escalares é um assunto matematicamente técnico, que não abordaremos nesta tese. A proposta de Weinberg, Coleman, Wess e Zumino pode ser encontrada nos trabalhos originais [5],[92]. Nesta etapa vamos focar nos blocos fundamentais para a construção da densidade lagrangiana efetiva que descreva a interação NN , seguindo o trabalho de Scherer [8].

3.2 χ PT para mésons e bárions

Iniciaremos com a construção da lagrangiana efetiva de mais baixa ordem capaz de descrever a dinâmica dos bósons de Goldstone. Sabemos que a quebra da simetria quiral gera $n = N^2 - 1$ bósons pseudo-escalares, dos quais parametrizamos os campos através de

$$U(x) = \exp \left(\frac{i\phi(x)}{F_0} \right), \quad (3.23)$$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^3 \tau_i \phi_i(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \quad \text{para } N = 2, \quad (3.24)$$

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a(x) \equiv \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^- & \sqrt{2}\bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix} \quad \text{para } N = 3, \quad (3.25)$$

onde $F_0 = 93 \text{ MeV}$ é um parâmetro relacionado com a constante de decaimento do pión. Os ingredientes fundamentais da densidade lagrangiana, U e $\partial_\mu U$, transformam-se da seguinte maneira perante transformações quirais,

$$U \rightarrow V_R U V_L^\dagger, \quad \partial_\mu U \rightarrow V_R \partial_\mu U V_L^\dagger. \quad (3.26)$$

Logo a lagrangiana cinética, invariante quiral, e com o menor número de derivadas possível, tem a forma

$$\mathcal{L}_K = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U), \quad (3.27)$$

também invariante sob transformações de Lorentz e Poincaré. A combinação $\text{Tr}[(\partial_\mu \partial^\mu U)U^\dagger]$ é proporcional à lagrangiana acima e, portanto, é um termo redundante, visto que buscamos estruturas mínimas (fundamentais) para descrever a dinâmica dos bósons de Goldstone. O termo $\partial_\mu \text{Tr}[(\partial_\mu U)U^\dagger]$ é identicamente nulo.

O termo de massa, que quebra explicitamente a simetria quiral, é dado por

$$\mathcal{L}_M = \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\chi U^\dagger + U \chi^\dagger), \quad (3.28)$$

onde χ é dado por

$$\chi = 2B_0(s + ip), \quad (3.29)$$

e B_0 é uma constante relacionada ao condensado quiral $\langle \bar{q}q \rangle$. O termo χ transforma-se da seguinte maneira sob transformação quiral,

$$\chi \rightarrow V_R \chi V_L^\dagger, \quad (3.30)$$

e na ausência de uma fonte de natureza pseudo-escalar ($p = 0, \chi = 2B_0 s$), o termo de massa da lagrangiana completa torna-se

$$\mathcal{L}_M = \frac{F_0^2}{2} B_0 \text{Tr}(M U^\dagger + U M^\dagger), \quad (3.31)$$

onde M é a matriz de massa dos quarks $M = \text{diag}(m_u, m_d, m_s)$.

Uma expansão do termo $\text{Tr}(M U^\dagger + U M^\dagger)$ e posterior coleta dos termos envolvendo os píons, permite-nos concluir que

$$m_\pi^2 = -\frac{\hat{m}}{F_0} \langle \bar{q}q \rangle, \quad (3.32)$$

onde $\langle \bar{q}q \rangle = \partial \mathcal{L} / \partial s$ e $\hat{m} = m_u + m_d$. Podemos observar que o termo responsável pela quebra da simetria quiral permite-nos concluir que $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$, o que fornece um valor esperado de vácuo da QCD não nulo. Desta maneira, podemos também concluir que a massa dos píons é claramente devida à finitude das massas dos quarks leves.

Observamos que a construção de uma lagrangiana efetiva envolve uma análise cuidadosa de todos os termos possíveis, que respeitem todas as simetrias incorporadas na teoria. As diversas combinações dos blocos fundamentais geram infinitos termos que devem ser incluídos na lagrangiana efetiva. Portanto, devemos ser capazes de organizar tais termos de acordo com a sua relevância, seguindo um esquema de contagem de potências de momentos. Devemos ressaltar que as lagranginas efetivas que descrevem as interações méson-méson e méson-bárion são construídas através de termos derivativos ($\mathcal{L} = \mathcal{L}(\partial^\mu)$), que no limite de baixas energias, logicamente, cessam a interação.

Para organizar os possíveis termos presentes na χ PT mesônica, Gasser e Leutwyler [89]-[90] propuseram um esquema de classificação conforme o número de derivadas e termos de massas dos quarks presentes na lagrangiana efetiva

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_6 + \dots, \quad (3.33)$$

onde o sub-índice indica o número X de derivadas ou $X/2$ termos de massas dos quarks. O esquema de contagem de potências permite avaliar a contribuição de um dado diagrama ao processo de espalhamento por intermédio de uma análise dimensional. Ou seja, julgamos a contribuição de um diagrama de Feynman de acordo com a sua dependência de uma escala de momento, analisando a sua topologia (número de vértices, linhas internas e laços). Para a interação méson-méson a amplitude de espalhamento apresenta a seguinte proporcionalidade

$$T = \int (d^4p)^L \left(\frac{1}{p^2} \right)^I \prod_d (p^d)^{V_d} \quad (3.34)$$

onde L é o número de loops, I é o número de linhas internas e V_d são vértices de ordem d . Logo a dimensão quiral de um dado diagrama méson-méson é dada por

$$\nu = 2(L + 1) + \sum_d V_d(d - 2). \quad (3.35)$$

Os vértices de menor ordem na interação méson-méson possuem $d = 2$, logo, garantimos que todo o lado direito da equação acima é positivo. É interessante ressaltar que para uma dada ordem quiral fixa ν , há apenas um número finito de combinações envolvendo L e V_d , o que nos permite visualizar todos os diagramas possíveis através de uma simples construção geométrica.

Vimos, até aqui, a construção da lagrangiana efetiva de menor ordem para a interação méson-méson, e como classificamos os diagramas de Feynman de acordo com o esquema de contagem de potências de Weinberg. Vamos agora desenvolver o formalismo que nos permite construir uma lagrangiana que descreva a interação entre um único bárion e um méson. Posteriormente, discutiremos a χ PT para dois e mais bárions e a complexidade envolvida no formalismo.

Para o setor de bárions, parametrizamos seus campos através de

$$\psi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a B_a(x) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\Lambda \end{pmatrix}, \quad (3.36)$$

onde cada bárion do octeto é representado por um campo de Dirac complexo. Introduzimos um novo campo dado por $u(x) = \sqrt{U(x)}$, que se transforma sob simetria quiral da seguinte maneira

$$\begin{aligned} u(x) &\rightarrow \sqrt{V_R U V_L^\dagger} = V_L u(x) K^\dagger(V_L, V_R, U(x)) \\ &= K(V_L, V_R, U(x)) u(x) V_R^\dagger, \end{aligned} \quad (3.37)$$

onde $K(V_L, V_R, U(x))$ é chamado campo compensador. No caso de transformações vectoriais $SU(N)_V$, o campo compensador é dado por $K(V_L, V_R, U(x)) = V_L = V_R$. Como estamos interessados na interação entre bósons de Goldstone e um nucleon, definimos o dubleto dos nucleons, e sua transformação sob simetria quiral, como

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}, \quad \psi \rightarrow K(V_L, V_R, U(x))\psi. \quad (3.38)$$

Assim como na QED, a invariância de gauge local exige uma redefinição da derivada covariante do campo do nucleon, dada por

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu + \frac{1}{2}[u^\dagger, \partial_\mu u])\psi \quad (3.39)$$

que se transforma como

$$D_\mu \psi \rightarrow K(V_L, V_R, U(x))D_\mu \psi. \quad (3.40)$$

Temos em mãos todos os termos invariantes quirais, com o menor número de derivadas e termos de massa, necessários para a construção da lagrangiana méson-nucleon, dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{F_0^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{m_\pi^2}{2} \text{Tr}(U + U^\dagger) + \bar{\psi}(i\not{D} - m_N)\psi \\ & + \frac{g_A}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 u_\mu \psi \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde

$$u_\mu \equiv i [u(\partial_\mu - ir_\mu)u^\dagger - u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger] \quad (3.42)$$

é o chamado *vielbein* quiral, que transforma-se como

$$u_\mu \rightarrow K(V_L, V_R, U(x))u_\mu K^\dagger(V_L, V_R, U(x)), \quad (3.43)$$

e $g_A = 1.25$. Expandindo u_μ em função dos campos dos píons ($r_\mu = l_\mu = 0$), nós obtemos

$$u = 1 + \frac{i}{2F_0}(\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}) - \frac{1}{4F_0^2}(\vec{\tau} \cdot \vec{\phi})(\vec{\tau} \cdot \vec{\phi}) + \dots, \quad (3.44)$$

$$u_\mu = -\frac{1}{F_0}(\vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\phi}) + \dots, \quad (3.45)$$

e consequentemente

$$D_\mu \psi = \left[\partial_\mu + \frac{1}{4F_0^2} \vec{\tau} \cdot (\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}) \right] \psi. \quad (3.46)$$

Logo, a lagrangiana com o menor número de derivadas que descreve a interação pión-nucleon é dada por

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \vec{\phi} \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{m_\pi^2}{2} \vec{\phi}^2 + \bar{\psi}(i\not{D} - m_N)\psi + \frac{g_A}{2F_0} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \vec{\tau} \cdot \partial_\mu \vec{\phi} \psi - \frac{i}{4F_0^2} \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \cdot (\vec{\phi} \times \partial_\mu \vec{\phi}) \psi, \quad (3.47)$$

onde o penúltimo termo nos fornece a relação de Goldberger-Treiman [93]

$$g_{\pi N} = \frac{g_A m_N}{F_\pi}, \quad (3.48)$$

e o último termo é o chamado termo de Weinberg-Tomozawa [94].

Para a interação méson-bárion, o esquema de contagem de potências é minimamente alterado, visto que devido ao spin, são permitidas potências de momentos ímpares na densidade lagrangiana efetiva. Logo temos

$$\mathcal{L}_{eff} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 + \dots \quad (3.49)$$

Para o caso da interação pión-nucleon (méson-bárion), a relação entre a potência (D) de um diagrama e sua topologia é dada por

$$D = 4L - 2I_\pi - I_N + \sum_i V_i d_i \quad (3.50)$$

onde L é o número de laços, $I_{\pi(N)}$ é o número de linhas internas do pión (nucleon), V_i e d_i são os números de vértices e derivadas (ou termos de massas dos píons) no vértice de tipo i . Uma outra maneira de escrever a equação acima é relacionarmos cada vértice de interação com a quantidades de linhas externas dos campos dos nucleons. Desta maneira, a equação acima fica

$$D = 2(L + 1) - A + \sum_i V_i n_i \quad (3.51)$$

onde A é o número de nucleons envolvidos no processo e $n_i = d_i + z_i/2 - 2$ (z_i é o número de campos do nucleon na interação do tipo i).

A inclusão do nucleon, entretanto, tem um efeito contaminante no esquema de contagem de potências de Weinberg. A interação méson-bárion ganha uma nova escala ($m_N \sim M_{QCD}$) que não desaparece no limite quiral, o que traz consequências desfavoráveis nos cálculos envolvendo loops. Os cálculos de loops mesônicos apresentam integrações sob propagadores que apresentam polos dentro da região de interesse físico da teoria efetiva. Ou seja, as maiores contribuições para o cálculo das amplitudes vêm da vizinhança dos polos dos propagadores mesônicos. Ao incluir propagadores fermiônicos nos processos, a amplitude de espalhamento ganha contribuições relevantes de polos que se encontram fora da região de interesse físico. Há duas possíveis soluções para remediar este problema: a teoria de perturbação quiral para bárion pesado ($HB\chi PT$ - *Heavy Baryon Chiral Perturbation Theory*) e uma formulação relativística, também chamada de regularização no infravermelho.

A $HB\chi PT$ foi inspirada na teoria efetiva para quarks pesados ($HQEFT$ - *Heavy Quark Effective Field Theory*) de Georgi [95] e estendida para o setor dos bárions por Jenkins e Manohar [96]. A proposta da $HB\chi PT$ consiste em decompor o quadrimomento (p^μ) do bárion numa componente proporcional à massa ($m_N v^\mu$) e outra residual (l^μ , tal que $l \cdot v/m_N \ll 1$). Essa decomposição faz com que a estrutura de Dirac dos campos seja simplificada e o termo de massa dos bárions desapareça dinamicamente de seu propagador, fazendo com que as integrais de loop não sejam contaminadas por m_N .

Uma outra solução alternativa, porém equivalente à $HB\chi PT$, é a regularização no infravermelho de Becher e Leutwyler [97]-[98]. A regularização no infravermelho reconcilia a abordagem relativística ao esquema de contagem de potências, fornecendo correções à $HB\chi PT$. Os detalhes técnicos envolvidos no processo de regularização podem ser encontrados de maneira relativamente simplificada na referência [8]. Logo, podemos concluir que o esquema de contagem de potências é eficiente para as interações méson-méson e méson-bárion, sendo que a última apresenta problemas contornáveis.

O esquema perturbativo só pode ser realizado graças à ausência de polos na matriz S , que correspondem a estados ligados entre mésons e bárions em baixas energias. No caso da interação envolvendo dois ou mais bárions, devemos recorrer a outra metodologia devido à presença de estados ligados e virtuais em baixíssimas energias, o que torna o problema altamente não-perturbativo. As ideias fundamentais da χPT teriam que ser estendidas para sistemas com dois ou mais bárions nos estados inicial e final, para

a construção das lagrangianas efetivas. O papel da teoria efetiva quiral é muito mais amplo no sistema nucleon-nucleon devido à natureza não-perturbativa da interação. Desta maneira, o esquema de contagem de potências deve ser alterado, o que foi posto em prática pela nova proposta de Weinberg, que veremos com detalhes na próxima seção.

3.3 A proposta de Weinberg

Para entendermos a proposta de Weinberg, apresentaremos algumas sutilezas da equação dinâmica que descreve o processo de espalhamento entre dois nucleons. A equação de Lippmann-Schwinger e a sua versão relativística, chamada de equação de Bethe-Salpeter [99], são equações integrais que necessitam de uma expansão esquemática em potências de V para serem compreendidas e solucionadas. Iniciaremos uma análise diagramática da equação de Lippmann-Schwinger para esclarecer a conexão existente o método iterativo de solução a partir de diagramas redutíveis e irreduzíveis. O mesmo procedimento pode ser feito para a equação de Bethe-Salpeter, sem perda de generalidade.

Podemos escrever a equação de Lippmann-Schwinger, simbolicamente, através da relação

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} T, \quad (3.52)$$

onde T é a matriz de transição, V é o potencial de interação, E e H_0 são a energia total e o hamiltoniano livre do sistema de dois corpos, respectivamente. Iterando a equação acima, duas vezes, obtemos

$$T = V + V \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V + V \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V \frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon} V + \dots \quad (3.53)$$

O truncamento da série no primeiro termo ($T = V$) é chamado de aproximação de Born em primeira ordem. Diagramaticamente, podemos entender essa expansão através da figura 3.2.

A expansão em série de potências do potencial, ou teoria de perturbação, só é possível na presença de potenciais fracos se comparados com a energia total do sistema de dois corpos. Os diagramas de Feynman podem ser divididos em dois grupos: redutíveis e irreduzíveis. Diagramas redutíveis (de dois férmions) são diagramas os quais podemos separá-los em outros diagramas independentes através de um corte nas duas linhas fermiônicas, sem que haja cortes nas linhas de interação. Diferentemente, diagramas irreduzíveis são aqueles nos quais é impossível a separação em diagramas independentes. Nesta etapa, mostraremos como podemos obter os diagramas redutíveis a partir da iteração dos diagramas irreduzíveis na equação dinâmica. Para ilustrar tal procedimento, colecionamos apenas termos no potencial de interação que possuem troca de um e dois bósons e que correspondem apenas a diagramas irreduzíveis (figura 3.3).

Ao iterarmos os diagramas (a), (b), (c) e (d) da figura 3.3 na equação dinâmica e coletarmos apenas diagramas com trocas de um, dois e três bósons, obtemos a amplitude de transição, até uma certa aproximação, esquematizada na figura 3.4.

Observamos que, ao iterarmos os diagramas irreduzíveis, obtemos também a contribuição dos diagramas redutíveis sem a necessidade de calcular de contribuição de cada um deles explicitamente. O mesmo procedimento pode ser realizado para os propagadores

Figura 3.2: Representação diagramática da equação de Lippmann-Schwinger.

Figura 3.3: Diagramas de Feynman irreduzíveis com trocas de um e dois bósons.

Figura 3.4: Representação diagramática da amplitude de transição com trocas de um, dois e três bósons.

dos nucleons, onde as correções das núvens de píons dão origem a diagramas redutíveis e irreduzíveis, conforme ilustrado na figura abaixo.

Figura 3.5: Obtenção dos diagramas redutíveis a partir da iteração dos diagramas irreduzíveis: propagadores.

A fim de estender a χPT para a interação NN , Weinberg propôs um novo esquema para organizar as interações nucleares de acordo com uma hierarquia de diagramas. Para o sistema de dois nucleons, o esquema propõe que uma amplitude pode ser obtida pela iteração do potencial NN em todas as ordens. As técnicas de contagem de potências da χPT seria, dessa forma, aplicada à construção do potencial NN , em vez de ser aplicada diretamente à amplitude. Esta última seria obtida pela iteração do potencial quiral em todas as ordens resolvendo a equação dinâmica (Lippmann-Schwinger ou Schrödinger), dando conta da física não-perturbativa de estados ligados. Neste esquema, o potencial de mais baixa ordem na χEFT consiste no potencial OPE , para o regime de longo alcance, mais interações de contato para o regime de curto alcance. A proposta fornece uma classificação da relevância das sub-interações no problema de poucos corpos em física nuclear, isto é, para a interação entre n corpos, a interação NN tem peso dominante, NNN subdominante, e assim por diante. O esquema proposto por Weinberg é ilustrado na figura 3.6.

O trabalho de Weinberg [9]-[6]-[100] abriu um novo campo de investigação, sendo levado adiante por van Kolck [101]-[103] e outros [104]-[61]. A simetria quiral tornou-se um importante elemento na descrição da interação NN e um exemplo é a componente de troca de dois píons, que na ausência da referida simetria, produzia uma componente algumas ordens de magnitude acima do esperado [112].

Muitos trabalhos, baseados no esquema de Weinberg, foram desenvolvidos ao longo dos últimos vinte anos, por exemplo [113]-[63]. No entanto, a contagem de potências vem sendo fortemente questionada por muitos autores [11]-[12], visto que os primeiros diagramas exigem mais contratermos que os presentes à mesma ordem. Dizemos que a contagem de potências não é renormalizável ordem a ordem, pois os infinitos, gerados por diagramas a uma dada ordem quiral, não podem ser absorvidos por outros diagramas à mesma ordem (como acontece na teoria de perturbação quiral para até um bárion).

O problema do esquema de Weinberg tem relação direta com a renormalizabilidade da interação NN . O potencial tensor do $OPEP$ gera uma singularidade da forma $1/r^3$ a curtas distâncias e efeitos desta singularidade tornam-se evidentes ao tentar descrever os *phase shifts* dos estados tripleto de spin. Fato é que a singularidade do $OPEP$ não pode ser renormalizada devidamente nesse esquema de contagem de potências, o que fica mais evidente em ondas P , onde a teoria prevê a ausência de um termo de contato.

	<i>NN</i>	<i>NNN</i>
<i>LO (Q⁰)</i>
<i>NLO (Q²)</i>
<i>N²LO (Q³)</i>

Figura 3.6: Potencial das forças entre 2 e 3 nucleons baseadas no esquema de contagem de Weinberg até N^2LO . Vértices vermelho, azul e verde correspondem a $n_i = 0, 1, 2$.

Um caminho alternativo para corrigir o esquema de Weinberg é a simples promoção de um termo de contato de ordem subdominante para ordem dominante. Essa metodologia foi colocada em prática no trabalho de Nogga, Timmermans e van Kolck [55] e calculado em próxima ordem sub-dominante (NLO) por Valderrama [56]. A seguir descreveremos o método utilizado por Nogga e colaboradores.

Os autores resolvem a equação de Lippmann-Schwinger para a matriz T com o potencial de troca de um pión no espaço dos momentos, dado por

$$V_{1\pi}(\mathbf{q}) = - \left(\frac{g_A}{2f_\pi} \right)^2 \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \frac{(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \mathbf{q})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \mathbf{q})}{\mathbf{q}^2 + m_\pi^2}, \quad (3.54)$$

onde m_π é a massa do pión, $g_A = 1.26$ e $f_\pi = 92.4$ MeV. Adicionalmente à troca de píons, a teoria efetiva contém interações que representam os graus de liberdade em altas energias (integrados para fora), dadas pelas seguintes interações de contato:

$$V_C = \frac{c_s}{4\pi}, \quad \text{para o canal } ^1S_0, \quad (3.55)$$

$$V_C = \frac{c_t}{4\pi}, \quad \text{para o canal } ^3S_1\text{-}^3D_1, \quad (3.56)$$

$$V_C = \frac{c_i}{4} pp', \quad i = 1(2), \quad \text{para o canal } ^3P_0 \text{ } (^3P_2\text{-}^3F_2), \quad (3.57)$$

$$V_C = c_d (pp')^2, \text{ para o canal } {}^3D_2,$$

tal que

$$V_{\text{completo}} = V_{1\pi}(\mathbf{q}) + V_C. \quad (3.58)$$

Os demais canais não possuem interações de contato e as constantes c_s , c_t , c_i e c_d são determinadas ao fixarmos os *phase shifts* (PWA93) para as energias 10 MeV para os canais 1S_0 , 3S_1 - 3D_1 , 50 MeV para os canais 3P_0 e 3P_2 - 3F_2 , e 100 MeV para o canal 3D_2 . Para a solução numérica da equação de Lippmann-Schwinger, Nogga *et al.* utilizaram o seguinte regulador

$$F(\vec{p}', \vec{p}) = \exp \left[- (\vec{p}'^4 + \vec{p}^4) / \Lambda^4 \right], \quad (3.59)$$

onde Λ é o *cutoff* ou regulador da integral (não devemos confundí-lo com o cutoff da teoria Λ_χ).

Os autores fizeram uma análise da dependência dos *phase shifts* e ângulos de mistura em função do *cutoff*, no intervalo de $\Lambda = 2 \text{ fm}^{-1}$ a $\Lambda = 20 \text{ fm}^{-1}$, sendo que os observáveis para um dado par $(c_x, \Lambda = 20 \text{ fm}^{-1})$, onde $x = s, t, i, d$, foram obtidos em função da energia no referencial do laboratório no intervalo $E_{LAB} = 0 \text{ MeV}$ a $E_{LAB} = 200 \text{ MeV}$.

Os resultados da proposta de Nogga-Timmermans-van Kolck são apresentados em linhas pontilhadas (verde) nos gráficos $\delta \times E_{LAB}$ e $\varepsilon \times E_{LAB}$, os quais ainda contém (além dos nossos resultados) os dados por PWA93. Os autores concluem o sucesso da renormalização através de análises $\delta \times \Lambda$ e $\varepsilon \times \Lambda$, onde encontram a independência dos observáveis com o *cutoff* para grandes valores de Λ , algo essencial para qualquer teoria efetiva.

Recentemente, Staropoli [114] investigou a possibilidade de uma substituição dos contra-termos por campos auxiliares. Esta possibilidade é devida à eliminação da singularidade do *OPEP* pela troca de mésons vetoriais [115]-[118] e pseudovetoriais [119]-[121]. A troca de outros mésons, como os iso-escalares, pode compensar a dependência espúria de Λ em alguns canais. Argumentos de grande número de cores podem ser utilizados para selecionar os campos auxiliares apropriados e serão introduzidos com mais detalhes na próxima seção.

Logo, a metodologia desenvolvida nesta tese tem como base os trabalhos de Nogga *et al.* e Staropoli, e visa alterar o esquema de Weinberg a fim de eliminar os efeitos da divergência do *OPEP*. Uma vez renormalizada em ordem dominante, o potencial poderá ser utilizado de maneira mais sistemática e consistente em problemas de poucos corpos em física nuclear.

3.4 Interação NN no limite de grande números de cores da QCD

Um método alternativo para tratar a QCD no regime não-perturbativo é a expansão em $1/N_c$, no limite em que o número de cores (N_c) vai para infinito e a razão g_s^2/N_c permanece constante. Este método foi proposto por 't Hooft em 1974 [122] e permite-nos um bom entendimento das propriedades hadrônicas. A abordagem de 't Hooft consiste em analisar a topologia dos diagramas de Feynman de uma teoria de gauge não-abeliana, onde o número de cores é uma variável. O setor dos mésons possui contribuições dominantes de diagramas planares, o que permite o cálculo das funções de correlação escalonadas à

ordem N_c . O mesmo não pode ser realizado para o setor dos bárions. Diferentemente dos mésons, que possuem pares quark-anti-quark, os bárions possuem N_c quarks no limite de grande número de cores. Desta maneira, as funções de n pontos recebem contribuições de diagramas de Feynman cada vez maiores com o aumento das linhas de quarks. Seguindo esta lógica, podemos concluir que um nucleon é um estado de muitos corpos (quarks) e as contribuições da força de n -quarks são da ordem de N_c .

O trabalho seminal de Witten [123] foi o primeiro tratamento da interação NN no limite de grande número de cores da QCD. Neste trabalho, o autor discute que as interações dominantes entre dois bárions são da ordem de N_c e que o sistema de muitos corpos (quarks) é a condição de aplicabilidade da teorias de campo médio de Hartree [124]. As soluções para as equações de campo médio de Hartree foram exploradas por Cohen e colaboradores [125] para bárions compostos de quarks pesados. Witten argumenta que o escalonamento de vários observáveis permanecem os mesmos para bárions compostos de quarks leves, embora as equações explícitas ainda sejam desconhecidas. Witten observou que bárions se comportam analogamente a sólitons semi-clássicos (momento relativo muito menor que o inverso da região de interação) no regime de grande número de cores. Uma outra característica do setor dos bárions é o surgimento de uma simetria de spin-sabor $SU(2N_f)$, onde N_f é o número de sabores, no regime de grande N_c [126]. Neste mesmo contexto, as interações entre bárions e mésons respeitam uma simetria $SU(4)$ de spin-sabor, como no modelo de quark não-relativístico [127, 126]. Recentemente, Cohen e Gelman utilizam a simetria de spin-sabor para obter relações entre as seções de choque próton-próton e próton-nêutron [128].

Kaplan e Manohar [129] analisaram o potencial NN utilizando a expansão $1/N_c$ da QCD. Os autores mostraram que os termos dominantes da expansão em séries de $1/N_c$ possuem boa correspondência com modelos *OBE* fenomenológicos fortemente acoplados. O objetivo desse trabalho foi estender a ideia encontrada em [130], para o potencial NN completo. As regras de contagem em $1/N_c$ para os diferentes termos do potencial nucleon-nucleon, apresentadas por Kaplan e Manohar, podem ser encontradas na tabela (3.1).

Observamos que as componentes central ($\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}$), spin-spin e tensorial ($\tau_1 \cdot \tau_2$) são escalonadas em ordem N_c e portanto fornecem contribuições em ordem dominante neste esquema de contagem. Ou seja, ao olharmos novamente para o potencial geral NN dado por (2.36), concluímos que os termos dominantes são dados por

$$V_C^0 \sim V_{SS}^1 \sim V_T^1 \sim \mathcal{O}(N_c). \quad (3.60)$$

As regras de contagem para as constantes de acoplamento, que serão apresentadas no próximo capítulo, são $F_\pi = \mathcal{O}(\sqrt{N_c})$, g_π , f_V , g_v , f_A , $g_s = \mathcal{O}(N_c)$ e $C_0^T = \mathcal{O}(N_c^2)$. O escalonamento para as massas é dado por $m_N = \mathcal{O}(N_c)$ para a massa do nucleon e $m_i = \mathcal{O}(1)$ ($i = \pi, V, A, s, v$) para as massas dos bósons. O argumento baseado num esquema de contagem em $1/N_c$ é heurístico por duas razões. Primeiramente, assumimos que o momento é escalonado como N_c^0 , o que é consistente com a expansão não-relativística para o nucleon. No entanto, essa consideração implica que a energia cinética do nucleon é muito menor que o potencial, fazendo com que não há espalhamento em $N_c \rightarrow \infty$. Em vez disso, iremos reter o termo cinético do nucleon na lagrangiana, necessário para as integrais de loop no infravermelho. Em segundo lugar, no limite $N_c \rightarrow \infty$ há uma gama de férmions acessíveis no sistema, começando pela ressonância Δ , à qual torna-se degenerada com o nucleon, e ambos tornam-se componentes de um único estado acoplado. Em vez disso,

Isospin	V_0	V_σ	V_{LS}	V_T	V_Q
$\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}$	N_c	$1/N_c$	$1/N_c$	$1/N_c$	$1/N_c^3$
$\boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2$	$1/N_c$	N_c	$1/N_c$	N_c	$1/N_c$

Tabela 3.1: Regras de contagem de grande N_c para o potencial NN [129]

iremos renegar a propagação da ressonância Δ , deixando suas contribuições para cálculos de loops em altas ordens e integrando para fora os outros bárions, onde a separação de massas Δ –nucleon é comparável com a massa do pión. Como notado por Cohen e Gelman [128], as escalas envolvidas na interação NN apresentam complicações no tratamento do mundo físico real com a abordagem de grande número de cores. Por exemplo, a energia de ligação do dêuteron ($2,224 \text{ MeV}$) é escalonada em ordem N_c , enquanto que a separação de massas Δ –nucleon ($\sim 300 \text{ MeV}$) é um efeito em ordem $1/N_c$ na mesma análise. Logo é interessante utilizarmos a simetria $SU(2N_f)$ em grande N_c para extrairmos informações sobre o potencial NN . O trabalho de Banerjee e colaboradores [131] reuniu informações sobre a consistência dos potenciais de troca de um e dois mésons, extraídos de gráficos de Feynman, que satisfazem as regras de contagem de spin-sabor de Kaplan-Savage [130] e Kaplan-Manohar [129]. Os resultados para as constantes de acoplamento bárion-méson, bem como os escalonamentos, estão sintetizados nas tabelas abaixo (3.2 - 3.4). Os resultados apresentados servem como guia na construção do potencial NN em ordem dominante, e no escalonamento de grande número de cores na QCD.

Vetorial				
	$I = 0$		$I = 1$	
campo	ω^0	ω^j	ρ^0	ρ^j
acoplamento $N^\dagger[\dots]N$	V^0	$\varepsilon_{ijk} J^k \partial^i V^j$	$I^a V^{0a}$	$\varepsilon_{ijk} X^{ka} \partial^i V^{ja}$
escala	$\sqrt{N_c}$	$1/\sqrt{N_c}$	$1/\sqrt{N_c}$	$\sqrt{N_c}$
termo spin-sabor	V_C^0	V_T^0	V_C^1	V_T^1
escala KSM	N_c	$1/N_c$	$1/N_c$	N_c

Tabela 3.2: Constantes de acoplamento entre bárions e mésons vetoriais da ref. [131]

Pseudo-vetorial		
	$I = 0$	$I = 1$
campo	f_1^i	a_1^i
acoplamento $N^\dagger[\dots]N$	$J^i A^i$	$X^{ia} A^{ia}$
escala	$1/\sqrt{N_c}$	$\sqrt{N_c}$
termo spin-sabor	V_{SS}^0	V_{SS}^1
escala KSM	$1/N_c$	N_c

Tabela 3.3: Constantes de acoplamento entre bárions e mésons axiais da ref. [131]

	Escalar		Pseudo-escalar	
	$I = 0$	$I = 1$	$I = 0$	$I = 1$
campo	f_0	a_0	η	π
acoplamento $N^\dagger[\dots]N$	ϕ	$I^a \phi^a$	$J^i \partial^i \phi$	$X^{ia} \partial^i \phi^a$
escala	$\sqrt{N_c}$	$1/\sqrt{N_c}$	$1/\sqrt{N_c}$	$\sqrt{N_c}$
termo spin-sabor	V_C^0	V_C^1	V_T^0	V_T^1
escala KSM	N_c	$1/N_c$	$1/N_c$	N_c

Tabela 3.4: Constantes de acoplamento entre bárion e mésons escalares e pseudo-escalares da ref. [131]

Capítulo 4

O potencial NN no espaço de momento.

Neste capítulo apresentamos as etapas necessárias para a obtenção do potencial devido à troca dos campos auxiliares isovetoriais e iso-escalares. Partiremos de uma lagrangiana invariante quiral, da qual obtemos a amplitude de espalhamento e por conseguinte o potencial. Apresentamos o método da análise em ondas parciais e os potenciais totais para os canais acoplados e desacoplados.

4.1 Cinemática

A cinemática da troca dos mésons segue a seguinte notação: $p_1(p_2)$ e $p'_1(p'_2)$ são, respectivamente, os quadrimomentos inicial e final do nucleon 1(2) e $q = p_1 - p'_1$ ($q = p_2 - p'_2$). No referencial do centro de massa do sistema de dois nucleons, temos as seguintes relações

$$p_1 = (E; \mathbf{p}) \quad , \quad p'_1 = (E; \mathbf{p}') \quad , \quad (4.1)$$

$$p_2 = (E; -\mathbf{p}) \quad , \quad p'_2 = (E; -\mathbf{p}') \quad , \quad (4.2)$$

$$q = (0; \mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad (4.3)$$

e o processo de espalhamento está esquematizado na figura 4.1.

A lagrangiana relativística de interação, envolvendo píons e campos auxiliares é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{F_\pi} \left(g_\pi \bar{\psi} i \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \psi \cdot \partial^\mu \pi + g_V m_V \bar{\psi} i \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \psi \cdot V^\mu + \frac{f_V}{2} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \boldsymbol{\tau} \psi \cdot F_V^{\mu\nu} \right) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{F_\pi} \left(g_A m_A \bar{\psi} i \gamma_\mu \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi \cdot A^\mu + \frac{f_A}{2} \bar{\psi} i \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \boldsymbol{\tau} \psi \cdot F_A^{\mu\nu} \right) \\ & -\frac{1}{F_\pi} \left(g_v m_v \bar{\psi} i \gamma_\mu \psi v^\mu + \frac{f_v}{2} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F_v^{\mu\nu} + g_s m_s \bar{\psi} \psi \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde π são os campos isovetoriais do pión, $V^\mu = (V_0, \vec{V})$ e $A^\mu = (A_0, \vec{A})$ são campos isovetoriais vetoriais e pseudovetoriais, enquanto s e $v^\mu = (v_0, \vec{v})$ são campos isoescalares escalares e vetoriais. As constantes presentes na lagrangiana são a constante de decaimento do pión $F_\pi = 185 \text{ MeV}$ e a constante de acoplamento de Gamow-Teller do

Figura 4.1: Esquema geral do espalhamento nucleon-nucleon.

decaimento beta $g_\pi = 1.26$. Os tensores $F_d^{\mu\nu}$ são dados por $\partial_\mu d_\nu - \partial_\nu d_\mu$, onde $d = V, A$ e v . O procedimento padrão para extrair um potencial dos diagramas de Feynman, consiste em determinar a quantidade

$$iT_{NNm} = \bar{u}(p'_1)V_1u(p_1)S_{Fm}(p' - p)\bar{u}(p'_2)V_2u(p_2), \quad (4.6)$$

no limite não-relativístico. Na relação acima, T_{NNm} é a amplitude de transição do processo, $u(p)$ e $\bar{u}(p) = u^\dagger(p)\gamma^0$ são espinores de Dirac, $V_{1,2}$ são os vértices da interação e $S_{Fm}(p' - p)$ é o propagador do bóson trocado. O potencial total pode então ser calculado através das regras de Feynman, contidas no apêndice A e a redução espinorial encontrada em [112]. O potencial geral obtidos contém todas as componentes possíveis, como encontramos em [84]. No entanto, utilizando os resultados da seção 3.4, apenas as componentes isovetoriais tensorial e spin-spin e iso-escalar central são escalonadas em ordem dominante no esquema de contagem de grande número de cores na QCD.

O potencial NN completo, em ordem dominante, contendo as trocas de bósons é escrito como

$$V(\vec{k}) = \frac{1}{F_\pi^2} \left\{ \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k} \left[-\frac{g_\pi^2}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} + \frac{f_V^2}{\vec{k}^2 + m_V^2} + \frac{f_A^2 - g_A^2}{\vec{k}^2 + m_A^2} \right] \right. \\ \left. \boldsymbol{\tau}_1 \cdot \boldsymbol{\tau}_2 \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \left[C_0^T - \frac{f_V^2 \vec{k}^2}{\vec{k}^2 + m_V^2} - \frac{g_A^2 m_A^2}{\vec{k}^2 + m_A^2} \right] + \frac{g_v^2 m_v^2}{\vec{k}^2 + m_v^2} - \frac{g_s^2 m_s^2}{\vec{k}^2 + m_s^2} \right\} \quad (4.7)$$

onde $\vec{k} = \vec{p}' - \vec{p}$ é o momento transferido entre os nucleons. A fim de eliminarmos a singularidade $1/r^3$ contida no potencial tensor, que se traduz em $\vec{k} \rightarrow \infty$ no espaço dos momentos, impomos a seguinte condição sobre as constantes de acoplamentos

$$f_V^2 + f_A^2 - g_A^2 = g_\pi^2. \quad (4.8)$$

Partimos, neste trabalho, do potencial mínimo constituído apenas pelas trocas de um pión e um campo isovetorial V^μ . A inclusão de outros campos auxiliares poderá ser

implementada num passo posterior. Nosso objetivo inicial é o cancelamento da divergência contida na componente tensorial do OPEP. Logo, nosso potencial utilizado para os cálculos numéricos é dado por

$$V(\vec{k}) = \frac{\tau_1 \cdot \tau_2}{F_\pi^2} \left\{ \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k} \left[-\frac{g_\pi^2}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} + \frac{f_V^2}{\vec{k}^2 + m_V^2} \right] + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \left[C_0^T - \frac{f_V^2 \vec{k}^2}{\vec{k}^2 + m_V^2} \right] \right\} \quad (4.9)$$

onde, consequentemente, $f_V^2 = g_\pi^2$.

Para evitarmos o termo divergente da componente spin-spin, $\vec{k}^2/(\vec{k}^2 + m_V^2)$, fazemos a seguinte escolha $C_0^T = f_V^2$. Logo,

$$V(\vec{k}) = \left(\frac{g_\pi}{F_\pi} \right)^2 \tau_1 \cdot \tau_2 \left\{ \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k} \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k} \left[-\frac{1}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} + \frac{1}{\vec{k}^2 + m_V^2} \right] + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \left[\frac{m_V^2}{\vec{k}^2 + m_V^2} \right] \right\}. \quad (4.10)$$

4.2 Decomposição em ondas parciais

A conservação do momento angular total permite-nos decompor o potencial total em parcelas, como visto no capítulo 2. O potencial NN completo exibe apenas uma estrutura dependente do momento $\vec{k}$, dada por

$$V_{\vec{k}^2}(\vec{k}) = \frac{1}{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (4.11)$$

Logo, a próxima etapa consiste em decompor essa estrutura em ondas parciais, onde temos a dependência explícita do momento angular l [132]. Obtemos

$$v_{\vec{k}^2}^l(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{1}{\vec{p}^2 + \vec{p}'^2 - 2\vec{p}' \cdot \vec{p} + m^2} P_l(\cos \theta), \quad (4.12)$$

$$v_{\vec{k}^2}^l(x) = \frac{Q_l(x)}{2pp'}, \quad \text{onde} \quad x \equiv \frac{\vec{p}'^2 + \vec{p}^2 + m^2}{2pp'}, \quad (4.13)$$

$p = |\vec{p}|$, $p' = |\vec{p}'|$ e $Q_l(x)$ são os polinômios de Legendre de segundo tipo [77].

Nesta tese, utilizaremos o mesmo regulador adotado por Nogga *et al.* [55], para fins de comparação. Observamos que este regulador não apresenta dependência angular explícita, o que não interfere na decomposição em ondas parciais de $V_{\vec{k}^2}(\vec{k})$. A regularização com $F(\vec{p}', \vec{p})$ é um procedimento arbitrário que permite-nos separar a física de curtas distâncias na região de altos momentos de *loops* e interações de contato [55]. Obviamente, a física de baixas energias deve ser invariante sob a escolha do regulador, garantindo assim a invariância do grupo de renormalização [55].

Visto que já possuímos as funções radiais do potencial NN completo mínimo, decompostas em ondas parciais, apresentaremos abaixo as projeções dos operadores $P_1 \equiv 1$, $P_2 \equiv \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$ e $P_3 \equiv (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{k})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{k}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \vec{k}^2/3$, nos possíveis estados de dois nucleons. Lembramos que todas as parametrizações apresentadas nesta seção estão contidas nos trabalhos do grupo de Nijmegen e mais detalhes podem ser encontrados em [132].

Em todos os canais temos os mesmos valores para as projeções (λ) dos operadores P_1 e P_2 , pois ambos são diagonais, e logo

$$\lambda_{P_1} = \delta_{ll'} \delta_{ss'} v_l^{(1)}(x), \quad (4.14)$$

$$\lambda_{P_2} = \delta_{ll'} \delta_{ss'} v_l^{(2)}(x) [2S(S+1) - 3]. \quad (4.15)$$

A projeção de P_3 no canal singlete de spin é identicamente nulo, enquanto nos canais tripletos de spin temos [132]:

1. desacoplado

$$\lambda_{P_3} = \frac{2}{3}(\vec{p}^2 + \vec{p}'^2) \delta_{ll'} \delta_{ss'} v_{l=j}^{(3)}(x), \quad (4.16)$$

onde

$$v_{l=j}^{(3)}(x) = v_j^{(3)}(x) - \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega) \left[\frac{2j+3}{2j+1} v_{j-1}^{(3)}(x) + \frac{2j-1}{2j+1} v_{j+1}^{(3)}(x) \right] \quad (4.17)$$

e

$$\cos(\omega) \equiv \frac{p}{\sqrt{p'^2 + p^2}} \quad \text{e} \quad \text{sen}(\omega) \equiv \frac{p'}{\sqrt{p'^2 + p^2}}. \quad (4.18)$$

2. acoplado

$$\lambda_{P_3} = \frac{2}{3}(\vec{p}^2 + \vec{p}'^2) \delta_{ll'} \delta_{ss'} v_{l,l'}^{(3)}(x), \quad (4.19)$$

onde

$$v_{l=j-1, l'=j-1}^{(3)}(x) = \frac{j-1}{2j+1} \left\{ -v_{j-1}^{(3)}(x) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega) \left[\frac{2j-3}{2j-1} v_j^{(3)}(x) + \frac{2j+1}{2j-1} v_{j+2}^{(3)}(x) \right] \right\}, \quad (4.20)$$

$$v_{l=j-1, l'=j-1}^{(3)}(x) = -3 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \left\{ -\text{sen}(2\omega) v_j^{(3)}(x) + \left[\cos^2(\omega) v_{j-1}^{(3)}(x) + \text{sen}^2(\omega) v_{j+1}^{(3)}(x) \right] \right\}, \quad (4.21)$$

$$v_{l=j+1, l'=j+1}^{(3)}(x) = -3 \frac{\sqrt{j(j+1)}}{2j+1} \left\{ -\text{sen}(2\omega) v_j^{(3)}(x) + \left[\text{sen}^2(\omega) v_{j-1}^{(3)}(x) + \cos^2(\omega) v_{j+1}^{(3)}(x) \right] \right\}, \quad (4.22)$$

$$v_{l=j+1, l'=j+1}^{(3)}(x) = \frac{j+2}{2j+1} \left\{ -v_{j+1}^{(3)}(x) + \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega) \left[\frac{2j+5}{2j+3} v_j^{(3)}(x) + \frac{2j+1}{2j+3} v_{j+2}^{(3)}(x) \right] \right\}. \quad (4.23)$$

Temos, acima, todas as expressões matemáticas necessárias para escrevermos o potencial completo mínimo a ser utilizado na equação de Lippmann-Schwinger. Logo,

$$v_J(p, p') = -(4t - 3) \left(\frac{g_\pi}{F_\pi} \right)^2 \left[\frac{m_\pi^2}{2pp'} Q_J(x_\pi) + 2 \frac{m_V^2}{2pp'} Q_J(x_V) \right] \quad \text{p/ canais singletos}, \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned}
v_J(p, p') &= (4t - 3) \left(\frac{g_\pi}{F_\pi} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (p'^2 + p^2) \left[v_{l=J}^{(3)}(x_V) - v_{l=J}^{(3)}(x_\pi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left[\frac{m_\pi^2}{2pp'} Q_J(x_\pi) + 2 \frac{m_V^2}{2pp'} Q_J(x_V) \right] \right\} \\
&\text{p/ canais tripletos desacoplados,}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
v_{J-1, J'-1}(p, p') &= (4t - 3) \left(\frac{g_\pi}{F_\pi} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (p'^2 + p^2) \left[v_{J-1, J'-1}^{(3)}(x_V) - v_{J-1, J'-1}^{(3)}(x_\pi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left[\frac{m_\pi^2}{2pp'} Q_{J-1}(x_\pi) + 2 \frac{m_V^2}{2pp'} Q_{J-1}(x_V) \right] \right\},
\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}
v_{J-1, J'+1}(p, p') &= (4t - 3) \left(\frac{g_\pi}{F_\pi} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (p'^2 + p^2) \left[v_{J-1, J'+1}^{(3)}(x_V) - v_{J-1, J'+1}^{(3)}(x_\pi) \right] \right\}, \\
&\tag{4.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{J+1, J'-1}(p, p') &= (4t - 3) \left(\frac{g_\pi}{F_\pi} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (p'^2 + p^2) \left[v_{J+1, J'-1}^{(3)}(x_V) - v_{J+1, J'-1}^{(3)}(x_\pi) \right] \right\}, \\
&\tag{4.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_{J+1, J'+1}(p, p') &= (4t - 3) \left(\frac{g_\pi}{F_\pi} \right)^2 \left\{ \frac{2}{3} (p'^2 + p^2) \left[v_{J+1, J'+1}^{(3)}(x_V) - v_{J+1, J'+1}^{(3)}(x_\pi) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} \left[\frac{m_\pi^2}{2pp'} Q_{J+1}(x_\pi) + 2 \frac{m_V^2}{2pp'} Q_{J+1}(x_V) \right] \right\}, \\
&\text{p/ canais tripletos acoplados,}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

onde t é o isospin total do canal e

$$x_i \equiv \frac{\vec{p}^2 + \vec{p}'^2 + m_i^2}{2pp'}, \quad \text{com } i = \pi, V. \tag{4.30}$$

Neste capítulo apresentamos as etapas necessárias para a obtenção do potencial quiral, decomposto em ondas parciais, a partir da lagrangiana efetiva. Lembramos que nosso potencial é escalonado em ordem dominante na contagem de grande número de cores na QCD. Construímos um potencial mínimo contendo as trocas de um pión e um bóson vetorial, que através de um vínculo entre as constantes de acoplamento, permitem o cancelamento da divergência contida na componente tensorial. No próximo capítulo, apresentaremos o nosso procedimento necessária para a obtenção da massa do campo auxiliar vetorial (m_V) e os resultados decorrentes desta determinação.

Capítulo 5

Resultados

Neste capítulo, apresentamos os resultados referentes à renormalização da interação NN . Nós obtivemos a matriz $t_l(p', p)$ para cada canal resolvendo a equação (2.14). Com o auxílio de (2.15), (2.16) e (2.44), obtivemos as defasagens para todos os canais com $J \leq 4$. Existem técnicas um tanto sofisticadas para resolver (2.14) devido à singularidade do integrando para $E > 0$. Essa singularidade é física, pois é o que dá origem à parte imaginária de $t_l(p', p)$. Nesse trabalho usamos as técnicas de Hetherington-Schick [133] e Tomio-Adhikari [134], as quais permite-nos contornar as singularidades de maneira sistemática, buscando depender minimamente de eventuais singularidades numéricas e garantir a obtenção de propriedades físicas robustas, como a unitariedade da matriz S . A rotação no plano complexo dos momentos, introduzida por Hetherington e Schick, nos fornecia resultados muito dependentes do ângulo de rotação. Por padronização, utilizamos o mesmo regulador do trabalho de Nogga *et al.* [55], que consequentemente fornece resultados oscilantes por conta da função $\exp(-(p^4 + p'^4)/\Lambda^4)$. Um caminho encontrado para contornar esse problema foi utilizar o método de subtração proposto por Tomio-Adhikari para evitar a utilização de variáveis rodadas no plano complexo. Mais detalhes do método numérico para resolver a equação de Lippmann-Schwinger podem ser encontrados no Apêndice B.

5.1 Canal do dêuteron

A primeira etapa da renormalização da interação NN consiste em determinar a massa do campo auxiliar vetorial, necessária para cancelar a divergência na componente tensorial do potencial. Demonstramos numericamente a independência de observáveis com relação à escala de renormalização Λ para valores suficientemente altos, recobrando desse modo a renormalizabilidade e auto-consistência da teoria efetiva. Nossos resultados indicam, de acordo com a expectativa, que a dependência dos observáveis com o cutoff é suave, no máximo uma dependência com potências negativas de Λ . Discutiremos, mais adiante, a adição e escolha de outros campos auxiliares capazes de absorver as dependências residuais em Λ e melhorar a concordância dos resultados com os dados de *PWA93* [35].

O canal do dêuteron tem extrema importância no estudo da interação NN , pois como já vimos, é o único canal que apresenta um estado ligado. Logo, o canal 3S_1 - 3D_1 será protótipo para a obtenção da massa do campo auxiliar vetorial. Para realizar este estudo, fixamos o *cutoff* em $\Lambda = 20 \text{ fm}^{-1}$, $E_b = 2.224 \text{ MeV}$ e termos de contato nulo ($C_0^T = f_V^2$), visto que um dos nossos objetivos é eliminar a utilização de termos de contato no esquema

de Weinberg. As soluções para a equação (2.37), ou seja, $\det D = \det(I - \text{Kernel}) = 0$ nos fornece os valores para as massas do campo auxiliar vetorial, tais que as divergências sejam canceladas. O comportamento do determinante de D em função de M_V é apresentado na figura 5.1.

Figura 5.1: Determinante da matriz D em função da massa do campo auxiliar vetorial.

Observamos que há dois valores possíveis para M_V , $M_{V1} = 230$ MeV e $M_{V2} = 693$ MeV. Entretanto, devemos verificar a estabilidade desses valores em função de Λ , visto que a escolha para o *cutoff* $\Lambda = 20 \text{ fm}^{-1}$ é arbitrária. Devemos também salientar que a independência de M_V é crucial para obtermos observáveis que dependam minimamente de Λ , ou seja, a correta renormalização. O comportamento de M_V em função de Λ são apresentados na figura 5.2.

Figura 5.2: Comportamento de M_V em função do *cutoff* .

Observamos que a estabilização de M_{V1} (~ 230 MeV) ocorre rapidamente em $\Lambda = 10 \text{ fm}^{-1}$, enquanto que M_{V2} (~ 611 MeV) estabiliza em $\Lambda = 50 \text{ fm}^{-1}$. Os valores para a massa do campo auxiliar encontram-se dentro ao alcance desejado para um teoria efetiva, visto que localizam-se abaixo da massa da primeira excitação do vácuo da QCD, ou seja, $M_\rho = 770$ MeV. Devemos ressaltar que um estudo posterior, utilizando um campo fictício auxiliar, foi feito por Beane e colaboradores [71]. Neste trabalho, os autores utilizam tal

campo para renormalizar a interação NN nos canais 1S_0 e 3S_1 - 3D_1 , com o potencial de troca de píons. A expectativa dos autores concentrava-se na convergência da expansão KSW [44] para $M_{aux} \gtrsim 2\Lambda_{NN} = 600$ MeV, e portanto, investigaram a região $600 \text{ MeV} \leq M_{aux} \leq 1000$ MeV, obtendo boa concordância com [35] em $NNLO$. Nossos testes preliminares mostram que apenas M_{V2} apresenta *phase shifts* mais coerentes para os canais 3S_1 e 3D_1 . Adotaremos os valores $M_V = 611$ MeV e $\Lambda = 100 \text{ fm}^{-1}$ como referências neste trabalho pois como observado na figura 5.2, há boa estabilidade no valor de M_V para esse valor de Λ .

Na figura 5.3 apresentamos os resultados para o *phase shift* da onda 3S_1 em função da energia do projétil (referencial do laboratório). Apresentamos os *phase shifts* para três valores distintos de M_V , 611 MeV (traço longo ou azul), 650 MeV (traço-ponto ou preto), 700 MeV (traço curto ou rosa), os resultados de Nogga, Timmermans e van Kolck (NTvK)[55] (ponto-ponto ou verde) e o *PWA93* (linha cheia ou vermelho) do grupo de Nijmegen [35]. Observamos que o aumento da massa do campo auxiliar vetorial implica num aumento do *phase shift* nesse canal, onde obtemos o melhor resultado para $M_V = 611$ MeV. Devemos ressaltar que o aumento das curvas do *phase shift* versus E_{LAB} também ocorre para o intervalo de massa de $M_V = 400$ MeV a $M_V = 550$ MeV. Observamos assim curvas de *phase shifts* com máximos em $M_V = 550$ e 700 MeV e mínimos em $M_V = 400$ e 611 MeV (valores mais próximos de *PWA93*). Há uma excelente concordância entre os resultados de $M_V = 611$ MeV e *PWA93* até $E_{LAB} < 100$ MeV, sendo que após este valor, há uma concordância maior entre $M_V = 611$ MeV e NTvK. Assim como previsto no esquema de Weinberg, NTvK utilizam um contra-termo constante no canal 3S_1 - 3D_1 para a correta renormalização da onda 3S_1 . Na figura 5.4 temos os resultados comparados ao obtido pela troca de um pión (OPEP), sem a utilização de contra-termos (NTvK-SC). Observamos a eficácia da nossa abordagem pelo bom acordo com *PWA93*.

Figura 5.3: *Phase shifts* da onda 3S_1 em função da energia.

Na figura 5.5 apresentamos os resultados para o *phase shift* da onda 3D_1 em função da energia do projétil. Nossos resultados, para a onda 3D_1 e com $M_V = 611$ MeV,

Figura 5.4: *Phase shifts* da onda 3S_1 em função da energia contendo o resultado de NTvK sem contra-termos (NTvK-SC).

encontram-se em excelente concordância com *PWA93*, sendo ainda melhor que os resultados de NTvK, onde é necessário um contra-termo ajustável. Os resultados para o ângulo de mistura (figura 5.6) apresentam discordâncias para $E_{LAB} > 20$ MeV, porém os mesmos encontram-se na mesma ordem de grandeza dos demais resultados. O pequeno valor de ε_1 , aliado às pequenas diferenças encontradas nos canais 3S_1 e 3D_1 , mostram a sensibilidade deste parâmetro e esperamos que cálculos em ordem subdominante possam fornecer resultados mais precisos para $E_{LAB} > 20$ MeV.

O sucesso do processo de renormalização é confirmado na figura 5.7. Todos os observáveis físicos, para energias distintas, mostram independência com o *cutoff* da teoria. Entretanto, devemos ressaltar que os valores nos quais ocorre a estabilização dos observáveis físicos encontram-se acima dos valores habituais da escala hadrônica, ou seja, $\Lambda \sim 1$ GeV (5 fm^{-1}). A estabilização dos *phase shifts* da onda 3S_1 só ocorre em $\Lambda \sim 80 \text{ fm}^{-1}$, enquanto que para a onda 3D_1 , ocorre em $\Lambda \sim 60 \text{ fm}^{-1}$. O maior valor de Λ para estabilização da onda 3S_1 , com relação à onda 3D_1 , já era esperado, visto que esta última possui momento angular orbital maior, e conseqüentemente, menor influência da parte de curto alcance do potencial. Uma lenta estabilização também é observada no ângulo de mistura ε_1 ($\Lambda \sim 150 \text{ fm}^{-1}$). Associamos tais lentidões à dependência residual de cutoff das ondas 3S_1 e 3D_1 , tal como discutido acima, e seriam melhorados com a introdução dos termos sub-dominantes da teoria efetiva.

Devemos ressaltar que nossos resultados para este canal apresentam grande semelhanças aos trabalhos discutidos na introdução desta tese, onde são utilizados diferentes esquemas de renormalização.

Figura 5.5: *Phase shift* da onda 3D_1 em função da energia.

Figura 5.6: Ângulo de mistura da onda 3D_1 em função da energia.

Figura 5.7: *Phase shifts* e ângulo de mistura em função do *cutoff*.

5.2 Canais tripletos acoplados

Os demais canais tripletos acoplados estudados foram os de momento angular total $J = 2, 3$ e 4 , ou seja, ${}^3P_2-{}^3F_2, {}^3G_3-{}^3D_3, {}^3F_4-{}^3H_4$. Esses canais não apresentam estados ligados e cabe-nos utilizar os parâmetros obtidos na seção anterior, ou seja, $M_V = 611 \text{ MeV}$ e $\Lambda = 100 \text{ fm}^{-1}$.

Nas figuras 5.8-5.10 apresentamos os resultados para os phase shifts das ondas ${}^3P_2, {}^3F_2$ e o ângulo de mistura ε_2 . Claramente o phase shift da onda 3P_2 encontra-se em desacordo com os resultados de PWA93 e NTvK. O potencial de troca de um pión é muito atrativo neste canal, onde NTvK utilizaram um contra-termo de ordem sub-dominante para ajustar o phase shift em baixas energias. O resultado referente ao potencial de troca de um pión, sem contra-termo, é representado por NTvK-SC (traço-ponto ou roxo). Evidente que nosso resultado (traço longo ou azul) encontra-se abaixo de NTvK-SC. Isto sugere que a inclusão de uma componente central ao potencial é necessária, o que pode ser feito de duas maneiras: um cálculo em ordem subdominante, onde a troca de dois píons fornece uma componente central ao potencial [112], ou de maneira equivalente em ordem dominante, com a inclusão de um campo auxiliar iso-escalar. Ambas as alternativas representam um refinamento dos resultados e poderão ser realizadas futuramente.

Figura 5.8: *Phase shift* da onda 3P_2 em função da energia.

O phase shift para o canal 3F_2 mostra excelente concordância com PWA93, superior a NTvK em todo o alcance de energia estudado. O ângulo de mistura ε_2 apresenta excelente concordância com PWA93 até $E_{LAB} < 70 \text{ MeV}$. Observamos que no regime de relativamente altas energias ($E_{LAB} > 70 \text{ MeV}$) há uma discrepância crescente dos nossos resultados com relação a PWA93, que também ocorre em NTvK. Entretanto, nossos resultados ainda se apresentam superiores a NTvK na descrição de PWA93.

Nas figuras 5.11-5.16 temos os resultados para os canais com $J = 3$ e $J = 4$. Nestes canais o termo de barreira centrífuga é dominante e os resultados são poucos sensíveis à parte de curto alcance do potencial. Todos os resultados mostram-se em excelente

Figura 5.9: *Phase shift* da onda 3F_2 em função da energia.

concordância com PWA93, exceto os phase shifts para as ondas 3D_3 e 3F_4 . Essas ondas possuem as menores projeções de momento angular orbital ($l = j - 1$), portanto são mais sensíveis à parte de curto alcance do potencial. A inclusão de outros campos auxiliares, já discutida anteriormente, pode melhorar os resultados nesses canais.

As figuras 5.17, 5.18 e 5.19 mostram, novamente, a eficácia do nosso processo de renormalização. Diferentemente do canal $J = 1$, os *phase shifts* e ângulos de mistura para os canais acoplados $J > 1$ apresentam rápida estabilização frente ao *cutoff*. Devemos ressaltar que legendas que possuem linhas nomeadas por termos adicionais “ $\times 10$ ” ou “ $\times$

Figura 5.10: Ângulo de mistura ε_2 em função da energia.

Figura 5.11: *Phase shift* 3D_3 em função da energia.

100” tiveram seus dados multiplicados por um fator de 10 e 100, respectivamente.

Figura 5.12: *Phase shift* da onda 3G_3 em função da energia.

Figura 5.13: Ângulo de mistura ε_3 em função da energia.

Figura 5.14: *Phase shift* das onda 3F_4 em função da energia.

Figura 5.15: *Phase shift* da 3H_4 em função da energia.

Figura 5.16: Ângulo de mistura ε_4 em função da energia.

Figura 5.17: *Phase shifts* das ondas 3P_2 , 3F_2 e ângulo de mistura ϵ_2 em função do *cutoff*.

Figura 5.18: *Phase shifts* das ondas 3D_3 , 3G_3 e ângulo de mistura ϵ_3 em função do *cutoff*.

Figura 5.19: *Phase shifts* das ondas 3F_4 , 3H_4 e ângulo de mistura ϵ_4 em função do *cutoff*.

5.3 Canais tripletos desacoplados

Os canais tripletos desacoplados estudados foram os seguintes: $^3P_0, ^3P_1, ^3D_2, ^3F_3, ^3G_4$. Estes canais possuem uma componente tensorial e, portanto, são sensíveis às divergências de curto alcance. Observamos um desacordo entre o nosso resultado (traço longo ou azul) e PWA93 (linha cheia ou vermelho) no canal 3P_0 (figura 5.20). Entretanto, observamos uma melhora significativa frente aos resultados de NTvK sem o uso de contra-termos (NTvK-SC). A curva NTvK (ponto-ponto ou verde) foi obtida qualitativamente da referência [55], apresentando por este motivo um comportamento grosseiro no regime de altas energias. A inclusão de um campo auxiliar iso-escalar pode diminuir a intensidade do potencial, o que afetaria diretamente o *phase shift* da onda 3P_0 . Espera-se que a diminuição do potencial possa ajustar melhor o *phase shift* na região $E_{LAB} < 70$ MeV.

O *phase shift* para o canal 3P_1 (figura 5.21) mostra boa concordância com PWA93 até $E_{LAB} < 100$ MeV. Após este valor, observa-se um desdobramento de PWA93 e NTvK sendo que o último assemelha-se mais aos nossos resultados. No canal 3D_2 (figura 5.22) observamos uma excelente concordância com PWA93 até $E_{LAB} < 100$ MeV. O esquema de NTvK, ou seja, potencial de troca de um pión mais contra-termos reproduz apenas a região $E < 130$ MeV. Ao observarmos a troca de um pión na ausência de contra-termos (NTvK-SC), deparamo-nos com um resultado acima dos nossos dados. Logo podemos concluir que nosso procedimento é eficiente para descrever a região de baixas energias sem a utilização de contra-termos. O canal 3F_3 (figura 5.23) exibe boa convergência com PWA93 até $E < 70$ MeV e tende ao resultado de NTvK no regime de altas energias. O canal 3G_4 (figura 5.24) exibe excelente concordância com PWA93 em todo o alcance de energia estudado. Como já esperávamos, esses canais ($J = 3$ e 4) possuem forte dominância da barreira centrífuga e são menos sensíveis à componente de curto alcance do potencial.

Figura 5.20: *Phase shift* das onda 3P_0 em função da energia.

Assim como nos canais acoplados com $J > 1$, os observáveis dos canais tripletos

Figura 5.21: *Phase shift* da onda 3P_1 em função da energia.

desacoplados (figura 5.25) apresentam rápida estabilização exceto pela onda 3P_0 no regime de média-alta anergia, com independência apenas a partir de $\Lambda \sim 40 \text{ fm}^{-1}$.

Figura 5.22: *Phase shift* da onda 3D_2 em função da energia.

Figura 5.23: *Phase shift* da onda 3F_3 em função da energia.

Figura 5.24: *Phase shift* da onda 3G_4 em função da energia.

Figura 5.25: *Phase shifts* das ondas 3P_0 , 3P_1 , 3D_2 , 3F_3 e 3G_4 em função do *cutoff*.

5.4 Canais singletos

Os canais singletos estudados foram os seguintes: $^1S_0, ^1P_1, ^1D_2, ^1F_3, ^1G_4$. Nesses canais a componente tensorial do potencial NN tem valor nulo, com isso esperamos uma influência direta da adição do campo auxiliar vetorial na componente spin-spin. Com uma expressão mais simples para o potencial, dada por

$$V(\vec{k}) = -\frac{g_\pi^2}{3F_\pi^2}(4t - 3) \left[\frac{m_\pi^2}{\vec{k}^2 + m_\pi^2} + 2\frac{m_V^2}{\vec{k}^2 + m_V^2} \right], \quad (5.1)$$

podemos de imediato concluir que canais com isospin total $T = 1$ são atrativos (phase shift positivo), enquanto que canais com isospin total $T = 0$ são repulsivos (phase shift negativo). Os resultados para os phase shifts são apresentados nas figuras 5.26-5-30. Observamos um grande desacordo entre o nosso resultado e PWA93 no canal 1S_0 . Este canal exige contra-termos no esquema de Weinberg, visto que o potencial de troca de um pión não tem intensidade suficiente para fornecer *phase shifts* maiores. Os resultados para o potencial de troca de um pión sem contra-termos está rotulado por NTvK-SC e possui o mesmo comportamento obtido por Song *et al.* [135].

Nossos resultados mostram concordância superior a NTvK nos canais 1P_1 e 1D_2 . Nos canais 1F_3 e 1G_4 obtemos excelente concordância com PWA93 em baixas energias $E < 100$ MeV. Observamos que no regime de altas energias, esses canais exibem resultados próximos ao encontrados por NTvK. Isso se deve ao fato de que o termo de barreira centrífuga torna-se mais intenso, aproximando os resultados de ambas abordagens. A diferença de comportamento entre os canais atrativos e repulsivos pode ser explicada pela ausência de um potencial central atrativo, que já discutimos anteriormente. A presença dessa contribuição provocaria um aumento da intensidade do potencial nos canais atrativos ($^1D_2, ^1G_4$) e uma diminuição nos canais repulsivos ($^1P_1, ^1F_3$), fazendo com que os phase shifts se desloquem em direção à PWA93.

A figura 5.31 mostra, mais uma vez, a eficácia do nosso processo de renormalização. Assim como nos canais acoplados com $J > 1$, os *phase shifts* dos canais singletos apresentam rápida estabilização exceto pela onda 1S_0 , que mostra uma estabilização apenas em $\Lambda \sim 70 \text{ fm}^{-1}$.

Figura 5.26: *Phase shift* da onda 1S_0 em função da energia.

Figura 5.27: *Phase shift* da onda 1P_1 em função da energia.

Figura 5.28: *Phase shift* das ondas 1D_2 em função da energia.

Figura 5.29: *Phase shift* da onda 1F_3 em função da energia.

Figura 5.30: *Phase shift* das onda 1G_4 em função da energia.

Figura 5.31: *Phases shifts* das ondas 1S_0 , 1P_1 , 1D_2 , 1F_3 e 1G_4 em função do *cutoff*.

Capítulo 6

Conclusões

Nesta tese desenvolvemos uma metodologia alternativa ao esquema de Weinberg. A primeira etapa consiste em construir a lagrangiana invariante quiral que contenha campos auxiliares externos, além da troca de um pión. A natureza dos campos auxiliares é escolhida utilizando-se argumentos de grande número de cores da QCD. Através da lagrangiana efetiva, em ordem dominante, podemos extrair o potencial NN mais geral. Entretanto, partimos de um potencial simplificado, contendo apenas a troca de um pión e um bóson vetorial. Determinamos a massa do campo auxiliar vetorial através da equação de Lippmann-Schwinger para estados ligados. Utilizamos o canal 3S_1 - 3D_1 como protótipo, pois é o único canal que abriga um estado ligado com energia de 2.224 MeV. O método numérico para estados ligados (mais detalhes no Apêndice B) permite-nos obter a massa do campo vetorial, o qual encontramos dois valores $M_{V1} = 230$ MeV e $M_{V2} = 693$ MeV. Entretanto, uma análise da dependência de M_V com o *cutoff* nos fornece um valor estável para M_{V2} apenas em 611 MeV em $\Lambda = 70 \text{ fm}^{-1}$. Teste preliminares nos permite concluir que M_{V2} é o melhor valor, visto que nos fornece *phase shifts* com grande concordância aos resultados do grupo de Nijmegen (PWA93). Fixamos o par $M_{V2} = 611$ MeV em $\Lambda = 100 \text{ fm}^{-1}$ para investigar o cancelamento da divergência do potencial de troca de um pión nos demais canais tripletos acoplados, canais tripletos desacoplados e singletos.

Observamos boa concordância com os valores de referência em todos os canais acoplados, exceto na onda 3P_2 que sugere a inclusão de um potencial iso-escalar para melhor ajuste aos dados. No esquema de NTvK, o canal $J = 2$ exige um contra-termo dependente do momento que encontra-se apenas em ordem subdominante no esquema de Weinberg. Sem a utilização de contra-termos, encontramos resultados satisfatórios para o *phase shift* da onda 3F_2 e ângulo de mistura ε_2 . Os demais canais acoplados 3D_3 - 3G_3 e 3F_4 - 3H_4 possuem forte influência da barreira centrífuga e, portanto, são menos sensíveis à divergência de curto alcance do potencial. Esses canais também não exigem contra-termos nos esquemas de Weinberg e NTvK. Obtemos resultados com boa concordância com os dados de referência, exceto pela onda 3D_3 , que exige um potencial mais intenso na componente de momento angular orbital $l = 2$, para melhores resultados. Todos os observáveis físicos dos canais acoplados exibiram indendência do cutoff da teoria, sendo que os *phase shifts* dos canais 3S_1 , 3D_1 e ângulo de mistura ε_1 apresentaram uma estabilização de maneira mais lenta.

Assim como os canais tripletos acoplados, os canais tripletos desacoplados possuem uma componente tensorial e, portanto, sofrem influência direta da divergência $1/r^3$ da troca

de um pión. Nestes canais obtemos resultados com boa concordância com os dados de referência, sendo que nossos resultados são melhores que os obtidos por NTvK em todos os canais, exceto no canal 3P_0 . Neste canal há um contra-termo no esquema de NTvK que permite bom ajuste aos dados de referência em baixas energias. Entretanto, observamos que nosso resultado se ajusta melhor aos dados se compararmos ao esquema de NTvK sem contra-termos (NTvK-SC), mostrando assim uma vantagem da nossa metodologia envolvendo campos auxiliares. Todos os observáveis físicos dos canais tripletos acoplados exibiram indendência do cutoff da teoria com rápida estabilização.

Diferentemente dos canais tripletos de spin, os canais singletos não possuem forte influência da divergência de curto alcance do potencial, pois possuem uma projeção nula de P_3 . Logo, não há um balanceamento entre o potenciais de troca de um pión e um bóson vetorial, e sim uma soma de ambos. A simplicidade do potencial permite-nos associar o sinal do *phase shift* ao isospin total, exceto no canal 1S_0 que exibe uma alternância de sinal do phase shift, já observada no esquema de NTvK sem a utilização de contra-termo. Assim como ocorrido nas ondas de estados tripletos de spin 3P_2 , 3D_3 e 3P_0 , o phase shift obtido para a onda 1S_0 sugere a inclusão de uma componente central no potencial total para obtermos valores melhores. Tal inclusão pode ser realizada de duas maneiras: inclusão de uma componente central decorrente da troca de dois pions em ordem subdominante, ou a troca de um méson iso-escalar na mesma ordem dominante. A segunda maneira será investigada num futuro próximo, antes da submissão dos nossos resultados em periódico especializado. Assim como nos demais canais, os phase shifts obtidos também apresentaram independência do cutoff com rápida estabilização, exceto no canal 1S_0 que apresenta uma estabilização mais lenta.

Com todos os resultados apresentados, podemos concluir que nosso esquema de renormalização mostrou-se eficaz e capaz de reinstaurar a renormalizabilidade da interação NN. Nosso esquema torna-se um método alternativo ao esquema de Weinberg, com menos procedimentos *ad hoc*, como a promoção de contra-termos realizada no esquema de NTvK. Nossos resultados tem impacto direto em cálculos chamados *ab initio*, para estruturas de núcleos leves, onde os canais tripletos possuem um tratamento técnico complexo. Nossos resultados são relevantes em outros sistemas ligados por meio de trocas de pions, por exemplo, alguns mésons pesados com quarks *charm* e bottom que apresentam estrutura molecular.

A inclusão de outros campos auxiliares, bem como cálculos em ordem subdominante, são as etapas posteriores deste trabalho. As expectativas futuras se concentram em uma descrição mais precisa da interação utilizando-se toda a metodologia desenvolvida nesta tese.

Apêndice A

Regras de Feynman, constantes e convenções

A.1 Regras de Feynman utilizadas na tese.

As regras de Feynman utilizadas nesta tese encontram-se na figura abaixo.

$$\begin{aligned} \begin{array}{c} a \\ \hline \longrightarrow \\ \hline \end{array} \quad b &= A \\ \begin{array}{c} a \\ \hline \dashrightarrow \\ \hline \end{array} \quad b &= B \\ \begin{array}{c} a \\ \hline \longrightarrow \\ \hline \hline \end{array} \quad b &= C \\ \text{linha externa de f\u00e9rmion} &= u(p) \\ \text{linha externa de antif\u00e9rmion} &= \bar{u}(p') \end{aligned}$$

Figura A.1: Regras de Feynman utilizadas.

onde A é o propagador do f\u00e9rmion dado por

$$S = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \delta_{ab}, \quad (\text{A.1})$$

B é o propagador do b\u00f3son vetorial (axial) dado por

$$S = -i \frac{g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{M_\rho^2}}{q^2 - M_\rho^2 + i\varepsilon} \delta_{ab}, \quad (\text{A.2})$$

e C é o propagador do b\u00f3son escalar (pseudo-escalar), dado por

$$S = \frac{i}{p^2 - m^2} \delta_{ab}, \quad (\text{A.3})$$

A.2 Constantes e convenções

O espinor de Dirac é dado por

$$u_s(p) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} (E+m)\chi_s \\ \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} \chi_s \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ e χ_s são as matrizes de espinores de Pauli dados por

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

e

$$\chi_{+\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \chi_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

As matrizes γ^μ utilizadas são

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \gamma^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

e a métrica do espaço de Minkowski é dada por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.8})$$

Utilizamos os seguintes valores para as constante fundamentais:

$$\hbar c = 197,327053 \text{ MeV} \cdot \text{fm} \quad (\text{A.9})$$

$$m_\pi = 138,04 \text{ MeV} \text{ (massa média do pión)} \quad (\text{A.10})$$

$$m_p = 938,27203 \text{ MeV} \text{ (massa do próton)} \quad (\text{A.11})$$

$$m_n = 939,56533 \text{ MeV} \text{ (massa do nêutron)}. \quad (\text{A.12})$$

$$g_\pi = 1,26 \quad (\text{A.13})$$

$$F_\pi = 184,9 \text{ MeV} \quad (\text{A.14})$$

$$f_V = 1,26 \quad (\text{A.15})$$

$$m_V = 611 \text{ MeV} \quad (\text{A.16})$$

$$\Lambda = 100 \text{ fm}^{-1} \quad (\text{A.17})$$

$$E_b = 2,224 \text{ MeV} \quad (\text{A.18})$$

Apêndice B

Equação de Lippmann-Schwinger no espaço dos momentos: método numérico de resolução.

Nesta seção, apresentaremos elementos básicos da resolução numérica da equação de Lippmann-Schwinger já decomposta em ondas parciais e dada por

$$t_l(p', p) = v_l(p', p) + \int_0^\infty \frac{q^2 dq}{2\pi^2} \frac{v_l(p', q) t_l(q, p)}{E - q^2/2\mu + i\varepsilon}. \quad (\text{B.1})$$

Este apêndice tem como base o conteúdo contido na referência [136].

O método utilizado nesta tese consiste em discretizar os momentos externo p' e interno de integração q usando quadratura de Gauss-Legendre, para um dado valor de p no ponto *on-shell*, $p = \sqrt{2\mu E}$ para o caso de um espalhamento ($E > 0$). Utilizamos 50 pontos de quadratura para canais singletos e tripletos desacoplados e, conseqüentemente, 100 pontos para os canais tripletos acoplados. Os pontos da quadratura encontram-se no intervalo $[0, 1]$ e estão relacionados com as variáveis de momentos $\in [0, \infty]$ através da transformação

$$q = \frac{x}{1-x}, \quad (\text{B.2})$$

ou seja, $x \in [0, 1]$.

Em representação matricial, a equação de Lippmann-Schwinger assume a forma

$$\begin{pmatrix} t_l(p_1', p) \\ t_l(p_2', p) \\ \vdots \\ t_l(p_N', p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_l(p_1', p) \\ v_l(p_2', p) \\ \vdots \\ v_l(p_N', p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_l(p_1', q_1) & K_l(p_1', q_2) & \cdots & K_l(p_1', q_N) \\ K_l(p_2', q_1) & K_l(p_2', q_2) & \cdots & K_l(p_2', q_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_l(p_N', q_1) & K_l(p_N', q_2) & \cdots & K_l(p_N', q_N) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} t_l(q_1, p) \\ t_l(q_2, p) \\ \vdots \\ t_l(q_N, p) \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})$$

onde

$$K_l(p_i', q_j) = \frac{q_j^2}{2\pi^2} \frac{v_l(p_i', q_j)}{E_\pm - q_j^2/2\mu} w_j. \quad (\text{B.4})$$

As variáveis p'_i e q_i são dadas por $p'_i = q_i = x_i$, onde x_i e w_i são os pontos e funções peso da quadratura com $i = 1..N$ pontos, respectivamente. A equação matricial acima pode ser escrita numa forma conveniente e dada por

$$\begin{pmatrix} 1 - K_l(p'_1, q_1) & -K_l(p'_1, q_2) & \cdots & -K_l(p'_1, q_N) \\ -K_l(p'_2, q_1) & 1 - K_l(p'_2, q_2) & \cdots & -K_l(p'_2, q_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_l(p'_N, q_1) & -K_l(p'_N, q_2) & \cdots & 1 - K_l(p'_N, q_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_l(q_1, p) \\ t_l(q_2, p) \\ \vdots \\ t_l(q_N, p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_l(p'_1, p) \\ v_l(p'_2, p) \\ \vdots \\ v_l(p'_N, p) \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

a qual pode ser resolvida utilizando-se, por exemplo, decomposição LU (*lower and up*) [137]. O vetor $t_l(p', p)$ obtido após a inversão da matriz $I - K$ permite-nos obter a matriz S , que está relacionada ao phase shift por equações dadas no capítulo 2. Para a integração numérica também utilizamos uma rotação no plano complexo que permite um contorno eficiente ao polo contido no kernel. Este método foi desenvolvido por Hetherington e Schick e está descrito na referência [133]. As soluções para estados ligados podem ser obtidas da equação

$$\begin{pmatrix} 1 - K_l(p'_1, q_1) & -K_l(p'_1, q_2) & \cdots & -K_l(p'_1, q_N) \\ -K_l(p'_2, q_1) & 1 - K_l(p'_2, q_2) & \cdots & -K_l(p'_2, q_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -K_l(p'_N, q_1) & -K_l(p'_N, q_2) & \cdots & 1 - K_l(p'_N, q_N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_l(q_1) \\ \tau_l(q_2) \\ \vdots \\ \tau_l(q_N) \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.6})$$

onde uma solução não-trivial exige que $\det(I - K_l) = 0$ para $B_l = -E$. Observamos que o método numérico apresentado acima pode ser generalizado facilmente para canais acoplados para um dado potencial. A generalização consiste dobrar a dimensão das matrizes envolvidas visto que o potencial assume uma estrutura matricial devida ao acoplamento de diferentes ondas com mesmo momento angular total.

Um método desenvolvido por Tomio e Adhikari permite um tratamento eficaz na integração numérica que possui polos *on-shell* [134]. Lembramos que a fase complexa $i\epsilon$ contida no denominador fornece contribuições significativas à amplitude de espalhamento, gerando uma parte imaginária para $t_l(p', p)$. Essa parte imaginária garante a unitariedade da matriz S , e por esta razão é conhecido como termo unitário da amplitude de espalhamento. Entretanto, a parte complexa pode gerar instabilidades numéricas para um dado potencial, comprometendo a obtenção das defasagens e ângulos de mistura.

O método de Tomio e Adhikari consiste na resolução da equação dinâmica dada, para canais acoplados, por

$$t_{\beta\alpha}(p', p) = v_{\beta\alpha}(p', p) + \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq v_{\beta\sigma}(p', q) G(q, p) t_{\sigma\alpha}(q, p), \quad (\text{B.7})$$

onde, para o espalhamento de dois corpos, $G(q, p) = 2\mu/(p^2 - q^2 + i\epsilon)$ e $f(q) = 1/(2\pi^2)$.

A equação acima pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
t_{\beta\alpha}(p', p) &= v_{\beta\alpha}(p', p) \\
&+ \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left\{ \left[v_{\beta\sigma}(p', q) - v_{\beta\sigma}(p', k) \gamma_{\sigma}(k, q) \right] + v_{\beta\sigma}(p', k) \gamma_{\sigma}(k, q) \right\} G(q, p) t_{\sigma\alpha}(q, p) \\
&= v_{\beta\alpha}(p', p) + \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left[v_{\beta\sigma}(p', q) - v_{\beta\sigma}(p', k) \gamma_{\sigma}(k, q) \right] G(q, p) t_{\sigma\alpha}(q, p) \\
&+ \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq v_{\beta\sigma}(p', k) \gamma_{\sigma}(k, q) G(q, p) t_{\sigma\alpha}(q, p) \\
&= \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq A_{\beta\sigma}(p', q, p; k) t_{\sigma\alpha}(q, p) + v_{\beta\alpha}(p', p) \\
&+ \sum_{\sigma} v_{\beta\sigma}(p', k) \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \gamma_{\sigma}(k, q) G(q, p) t_{\sigma\alpha}(q, p). \tag{B.8}
\end{aligned}$$

onde a função $\gamma_{\sigma}(k, q)$ é arbitrária e satisfaz $\gamma_{\sigma}(k, k) = 1$. Rearranjando a equação acima, podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left[\frac{\delta(q - p')}{q^2 f(q)} \delta_{\beta\sigma} - A_{\beta\sigma}(p', q, p; k) \right] t_{\sigma\alpha}(q, p) \\
&= v_{\beta\alpha}(p', p) + \sum_{\sigma'} v_{\beta\sigma'}(p', k) \int_0^{\infty} f(q') q'^2 dq' \gamma_{\sigma'}(k, q') G(q', p) \\
&\quad \times t_{\sigma'\alpha}(q', p). \tag{B.9}
\end{aligned}$$

Definimos uma função auxiliar $\Gamma_{\beta\alpha}(p', p)$ por

$$\sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left[\frac{\delta(q - p')}{q^2 f(q)} \delta_{\beta\sigma} - A_{\beta\sigma}(p', q, p; k) \right] \Gamma_{\sigma\alpha}(q, p) = v_{\beta\alpha}(p', p). \tag{B.10}$$

A expressão para $v_{\beta\alpha}(p', p)$ pode ser utilizada na equação (B.9), levando a

$$\begin{aligned}
&\sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left[\frac{\delta(q - p')}{q^2 f(q)} \delta_{\beta\sigma} - A_{\beta\sigma}(p', q, p; p) \right] t_{\sigma\alpha}(q, p) \\
&= \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left[\frac{\delta(q - p')}{q^2 f(q)} \delta_{\beta\sigma} - A_{\beta\sigma}(p', q, p; p) \right] \Gamma_{\sigma\alpha}(q, p) \\
&+ \sum_{\sigma'} \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left[\frac{\delta(q - p')}{q^2 f(q)} \delta_{\beta\sigma} - A_{\beta\sigma}(p', q, p; p) \right] \Gamma_{\sigma\sigma'}(q, p) \\
&\quad \times \int_0^{\infty} f(q'') q''^2 dq' \gamma_{\sigma'}(p, q') G(q', p) t_{\sigma'\alpha}(q', p) \\
&= \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \left[\frac{\delta(q - p')}{q^2 f(q)} \delta_{\beta\sigma} - A_{\beta\sigma}(p', q, p; p) \right] \\
&\quad \times \left\{ \Gamma_{\sigma\alpha}(q, p) + \sum_{\sigma'} \Gamma_{\sigma\sigma'}(q, p) \int_0^{\infty} f(q') q'^2 dq' \gamma_{\sigma'}(p, q') G(q', p) t_{\sigma'\alpha}(q', p) \right\} \tag{B.11}
\end{aligned}$$

onde a arbitrariedade de k nos permite adotar o ponto *on-shell* $k = p = \sqrt{2\mu E}$.

As equações (B.10) e (B.11) fornecem

$$\Gamma_{\beta\alpha}(p', p) = v_{\beta\alpha}(p', p) + \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq A_{\beta\sigma}(p', q, p; k) \Gamma_{\sigma\alpha}(q, p), \quad (\text{B.12})$$

$$\begin{aligned} t_{\beta\alpha}(p', p) &= \Gamma_{\beta\alpha}(p', p) + \sum_{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}(p', p) \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \gamma_{\sigma}(p, q) G(q, p) t_{\sigma\alpha}(q, p) \\ &= \Gamma_{\beta\alpha}(p', p) + \sum_{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}(p', p) B_{\sigma\alpha}(p) = \sum_{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}(p', p) [\delta_{\sigma\alpha} + B_{\sigma\alpha}(p)]. \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Se o potencial $v_{\beta\alpha}$ é real, a função auxiliar $\Gamma_{\beta\alpha}$ também é real e a equação integral que a define (B.12) tem um kernel real e não-singular

$$\lim_{q \rightarrow p} 2\mu \frac{f(q) q^2 [v_{\beta\sigma}(p', q) - v_{\beta\sigma}(p', p) \gamma_{\sigma}(p, q)]}{p^2 - q^2 + i\epsilon} < \infty \quad (\text{B.14})$$

A expressão para $B_{\beta\alpha}(p)$ é obtida conforme abaixo:

$$\begin{aligned} B_{\beta\alpha}(p) &= \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \gamma_{\beta}(p, q) G(q, p) t_{\beta\alpha}(q, p) \\ &= \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \gamma_{\beta}(p, q) G(q, p) \left[\Gamma_{\beta\alpha}(q, p) + \sum_{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}(q, p) B_{\sigma\alpha}(p) \right] \\ \Rightarrow \quad \sum_{\sigma} \left[\delta_{\beta\sigma} - \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \gamma_{\beta}(p, q) G(q, p) \Gamma_{\beta\sigma}(q, p) \right] B_{\sigma\alpha}(p) &= \sum_{\sigma} D_{\beta\sigma}(p) B_{\sigma\alpha}(p) \\ &= \int_0^{\infty} f(q) q^2 dq \gamma_{\beta}(p, q) G(q, p) \Gamma_{\beta\alpha}(q, p) = C_{\beta\alpha}(p), \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

e podemos reformulá-la numa equação matricial, $D \cdot B = C$, onde $D = 1 - C$. Da equação acima, podemos encontrar formalmente a solução para $B_{\beta\alpha}(p)$, ou seja, $B = D^{-1} \cdot C$. Utilizando-se todas as funções auxiliares, calculadas anteriormente, podemos finalmente encontrar a amplitude de espalhamento, dada por

$$t_{\beta\alpha}(p', p) = \sum_{\sigma, \gamma} \Gamma_{\beta\sigma}(p'^{-1}(p))_{\sigma\gamma} [D_{\gamma\alpha}(p) + C_{\gamma\alpha}(p)] = \sum_{\sigma} \Gamma_{\beta\sigma}(p'^{-1}(p))_{\sigma\alpha} \quad (\text{B.16})$$

Referências Bibliográficas

- [1] K. Olive *et al.* (PDG), Chin. Phys. C **38**, 090001 (2014). (<http://pdg.lbl.gov>)
- [2] R. Feynman e M. Gell-Mann, Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
- [3] F. Sudarshan e R. Marshak, Phys. Rev. **109**, 1860 (1958).
- [4] S. Glashow e S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **20**, 224 (1967).
- [5] S. Weinberg, Phys. Rev. **166**, 1568 (1968).
- [6] S. Weinberg, Phys. Rev. **177**, 2604 (1969).
- [7] J. Friar, D. Madland, e B. Lynn, arXiv: nucl-th/9512011v1 (1995).
- [8] S. Scherer, arXiv:hep-ph/0210398, (2002).
- [9] S. Weinberg, Phys. Lett. **B** 251, 288 (1990).
- [10] B. Long e C. Yang, Phys. Rev. C **84**, 057001 (2011).
- [11] D. Kaplan, M. Savage, e M. Wise, Phys. Lett. B **424**, 390 (1998).
- [12] E. Epelbaum e J. Gegelia, Phys. Lett. B **716**, 338 (2012).
- [13] P. Navrátil, J. Vary, e B. Barret, Phys. Rev. Lett. **84**, 5728 (2000).
- [14] H. Kamada *et al.*, Phys. Rev. C **64**, 044001 (2001).
- [15] B. Pudliner *et al.*, Phys. Rev. C **56**, 1720 (1997).
- [16] E. Rutherford, Phil. Mag. **21**, 669 (1911).
- [17] H. Geiger e E. Marsden, Phil. Mag. **25**, 604 (1913).
- [18] J. Chadwick, Proc. Roy. Soc. A **136**, 696 (1932).
- [19] M. Gell-Mann, Phys. Rev. **125**, 1067 (1962).
- [20] G. Zweig, CERN Report **TH401**, 4R12 (1964).
- [21] D. Gross e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [22] H. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).

- [23] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, e H. Leutwyler, Phys. Lett. B **47**, 365 (1973).
- [24] K. Chung, “Introdução à Física Nuclear”, Ed. UERJ, 1^a edição, Rio de Janeiro, 2001.
- [25] P. Dirac, Proc. Roy. Soc. Lon. A **114**, 767 (1927).
- [26] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
- [27] C. Lattes, G. Occhialini, e C. Powell, Nature **160**, 486 (1947).
- [28] M. Taketani, S. Nakamura, e M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. **6**, 581 (1951).
- [29] M. Naghdi, arXiv:nucl-th/0702078v4, (2014).
- [30] K. Lassila *et. al.*, Phys. Rev. **126**, 881 (1962).
- [31] T. Hamada e I. Johnston, Nucl. Phys. **34**, 382 (1962).
- [32] R. Reid, Ann. Phys. (NY) **50**, 411 (1968).
- [33] R. Wiringa, R. Smith, e T. Ainsworth, Phys. Rev. C **29**, 1207 (1984).
- [34] R. Machleidt, K. Holinde, e Ch. Elster, Phys. Rep. **149**, 1 (1987).
- [35] V. Stoks *et al.*, Phys. Rev. C **49**, 2950 (1994).
- [36] W. Cottingham *et. al.*, Phys. Rev. D **8**, 800 (1973).
- [37] A. Jackson, D. Riska, e B. Verwest, Nucl. Phys. A **249**, 397 (1975).
- [38] J. Schechte e H. Weigel, arXiv:hep-ph/9907554, (1999).
- [39] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961).
- [40] J. Jackson, “Classical Electrodynamics”, John Wiley & Sons, 1^a edição, Nova Iorque, 1962.
- [41] E. Fermi, II Nuo. Cim. **11**, 1 (1934).
- [42] J. Bardeen, L. Cooper, e J. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957).
- [43] I. Rothstein e W. Goldberger, Phys. Rev. D **73**, 104029 (2006).
- [44] D. Kaplan, M. Savage, e M. Wise, Nucl. Phys. B **534**, 329 (1998).
- [45] S. Fleming, T. Mehen, e I. Stewart, Nucl. Phys. A **677**, 313 (2000).
- [46] S. Fleming, T. Mehen, e I. Stewart, Phys. Rev. C **61**, 044005 (2000).
- [47] T. Frederico, V. Timóteo, e L. Tomio Nucl. Phys. A **653**, 209 (1999).
- [48] V. Timóteo *et al.*, Nucl. Phys. A **790**, 406 (2007).
- [49] V. Timóteo *et al.*, Phys. Rev. C **83**, 064005 (2011).

- [50] V. Timóteo *et al.*, Phys. Lett. B **621**, 109 (2005).
- [51] E. Arriola, S. Szpigel, e V. Timóteo, Ann. Phys. **353**, 129 (2014).
- [52] E. Arriola, S. Szpigel, e V. Timóteo, Phys. Lett. B **735**, 149 (2014).
- [53] A. Schwenk, G. Brown, e B. Friman, Nucl. Phys. A **703**, 745 (2002).
- [54] S. Bogner *et al.*, Phys. Lett. B **576**, 265 (2003).
- [55] A. Nogga, R. Timmermans, e U. van Kolck, Phys. Rev. C **72**, 054006 (2005).
- [56] M. Valderrama, Phys. Rev. C **84**, 064002 (2011).
- [57] E. Epelbaum e U. Meissner, Few Body Systm. **54**, 2175 (2013).
- [58] G. Lepage, arXiv:nucl-th/030810, (1997).
- [59] E. Epelbaum, H. Krebs, e U. Meissner, Phys. Rev. Lett. **115**, 122301 (2015).
- [60] J. Behrent *et al.*, arXiv:nucl-th/1606.01489v1, (2016).
- [61] E. Epelbaum, W. Glockle, e U. Meissner, Nucl. Phys. A **747**, 362 (2005).
- [62] E. Epelbaum, Prog. Part. Nucl. Phys. **57**, 654 (2006).
- [63] E. Epelbaum, H. Hammer, e U. Meissner, Rev. Mod. Phys. **81**, 1773 (2009).
- [64] E. Epelbaum, W. Glocke, e U. Meissner, Nucl. Phys. A **671**, 295 (2000).
- [65] M. Valderrama e E. Arriola, Phys. Rev. C **72**, 054002 (2005).
- [66] M. Valderrama e E. Arriola, Phys. Rev. C **74**, 054001 (2005).
- [67] M. Valderrama e E. Arriola, Phys. Rev. C **75**, 059905 (2007).
- [68] R. Higa, M. Valderrama, e E. Arriola, Phys. Rev. C **77**, 034003 (2008).
- [69] B. Long e C. Yang, Phys. Rev. C **85**, 034002 (2012).
- [70] B. Long e C. Yang, Phys. Rev. C **86**, 024001 (2012).
- [71] S. Beane, D. Kaplan, e A. Vuorinen, Phys. Rev. C **80**, 011001(R) (2009).
- [72] B. Lippmann e J. Schwinger, Phys. Rev. **79**, 469 (1950).
- [73] J. Sakurai e J. Napolitano, “Mecânica Quântica Moderna”, 2ª edição, Bookman, Porto Alegre, 2013.
- [74] C.J. Joachain, “Quantum Collision Theory”, 1ª edição, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [75] J. Taylor, “Scattering Theory - The Quantum Theory of Nonrelativistic Collisions”, 1ª edição, Dover Books, Nova Iorque, 1972.

- [76] J. Wheeler, Phys. Rev. **52**, 1107 (1937).
- [77] G. Arfken e H. Weber, “Mathematical Methods for Physicists”, 6^a edição, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [78] Z. Kuruoglu, Phys. Rev. E **99**, 053303 (2016).
- [79] S. Adhikari, J. Comp. Phys. **103**, 415 (1992).
- [80] M. Stern, J. Phys. A: Gen. Phys. **5**, 426 (1972).
- [81] F. Lanzara, V. Maz’ya, e G. Schmidt, J. Fourier Analys. Appl. **10**, 645 (2004).
- [82] H. Bethe, Phys. Rev. **76**, 38 (1949).
- [83] G. Miller, B. Nefkens, e I. Slaus, Phys. Rep. **194**, 1 (1990).
- [84] S. Okubo e R. Marshak, Ann. Phys. **4**, 166 (1958).
- [85] J. Friedman e H. Kendall, Ann. Rev. Nucl. Sci **22**, 203 (1972).
- [86] R. Brandelik *et al.*, Phys. Lett. B **86**, 243 (1979).
- [87] T. Muta, “Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories”, 1^a edição, World Scientific, Singapura, 1998.
- [88] J. Goldstone, A. Salam, e S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [89] J. Gasser e H. Leutwyler, Annals Phys. **158**, 142 (1984).
- [90] J. Gasser e H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
- [91] S. Weinberg, Phys. **A** 96, 327 (1979).
- [92] S. Coleman, J. Wess, e B. Zumino, Phys. Rev. **177**, 2239 (1969).
- [93] M. Goldberger e S. Treiman, Phys. Rev. **111**, 354 (1958).
- [94] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966); Y. Tomozawa, Nuovo Cim. **46A**, 707 (1966).
- [95] H. Georgi, Phys. Lett. B **240**, 447 (1990).
- [96] E. Jenkins e A. Manohar, Phys. Lett. B **255**, 558 (1991).
- [97] T. Becher e H. Leutwyler, Eur. Phys. J. C **9**, 643 (1999).
- [98] T. Becher e H. Leutwyler, JHEP **106**, 17 (2001).
- [99] H. Bethe e E. Sapeter, Phys. Rev. **82**, 309 (1951).
- [100] S. Weinberg, Nucl. Phys. **B** 363, 3 (1991).
- [101] C. Ordonez, L. Ray, e U. van Kolck, Phys. Rev. Lett. **72**, 1982 (1994).

- [102] U. van Kolck, Phys. Rev. C **49**, 2932 (1994).
- [103] C. Ordonez, L. Ray, e U. van Kolck, Phys. Rev. C **53**, 2086 (1996).
- [104] C. da Rocha e M. Robilotta, Phys. Rev. C **49**, 1818 (1994).
- [105] M. Robilotta e C. da Rocha, Nucl. Phys. A **615**, 391 (1997).
- [106] N. Kaiser, R. Brockmann, e W. Weise, Nucl. Phys. A **625**, 758 (1997).
- [107] N. Kaiser, Phys.Rev. C **65**, 017001 (2002).
- [108] N. Kaiser, Phys.Rev. C **64**, 057001 (2001).
- [109] D. Entem e R. Machleidt, Phys. Rev. C **66**, 014002 (2002).
- [110] R. Higa e M. Robilotta, Phys. Rev. C **68**, 024004 (2003).
- [111] R. Higa, M. Robilotta, e C. da Rocha, Phys. Rev. C **69**, 034009 (2004).
- [112] R. Higa, “O potencial nucleon-nucleon e a troca de dois píons relativística”, Tese de doutorado, Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.
- [113] P. Bedaque e U. van Kolck, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **52**, 339 (2002).
- [114] R. Staropoli, “Applications of effective field theory at the intersection of nuclear and particle physics”, Tese de doutorado, The University of Arizona, Tucson, 2012.
- [115] J. Schwinger, Phys. Rev. **61**, 387A (1942);
- [116] W. Pauli e S. Kusaka, Phys. Rev. **63**, 400 (1943).
- [117] J. Jauch e N. Hu, Phys. Rev. **65**, 289 (1944); J. Jauch, Phys. Rev. **67**, 125 (1945).
- [118] F. Barker, Proc. Phys. Soc. A **63**, 898 (1950).
- [119] G. Araki, Phys. Rev. **74**, 985 (1948); Prog. Theor. Phys. **3**, 422 (1948); Prog. Theor. Phys. **4**, 34 (1949).
- [120] M. Sasaki, S. Nakamura, e S. Hayakawa, Prog. Theor. Phys. **3**, 454 (1948).
- [121] S. Hiroishi e H. Tanaka, Prog. Theor. Phys. **4**, 231 (1949).
- [122] G. ’t Hooft, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).
- [123] E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57 (1979).
- [124] D. Hartree, Proc. Camb. Phil. Soc. **24**, 89 (1928).
- [125] T. Cohen, N. Kumar, e K. Ndousse, Phys. Rev. C **84**, 015204 (2011).
- [126] J. Gervais e B. Sakita, Phys. Rev. Lett. **52**, 87 (1984).
- [127] R. Dashen e A. Manohar, Phys. Lett. B **315**, 425 (1993).

- [128] T. Cohen e B. Gelman, Phys. Rev. C **85**, 024001 (2012).
- [129] D. Kaplan e A. Manohar, Phys. Rev. C **56**, 76 (1997).
- [130] D. Kaplan e M. Savage, Phys. Lett. B **365**, 244 (1996).
- [131] M. Banerjee, T. Cohen, e B. Gelman, Phys. Rev. C **65**, 034011 (2002).
- [132] Th.A. Rijken, H. Polinder, e J. Nagata, Phys. Rev. C **66**, 044008 (2002).
- [133] J. Hetherington e L. Schick, Phys. Rev. **156**, 1647 (1967).
- [134] L. Tomio e S. Adhikari, Phys. Rev. C **22**, 28 (1980); Phys. Rev. C **24**, 43 (1981).
- [135] Y. Song, R. Lazauskas, e U. van Kolck, arXiv:1612.09090, (2016).
- [136] R. Higa, “Solving the Lippmann-Schwinger equation in the momentum space”, (2017).
- [137] W. Press *et al.*, “Numerical Recipes in C: The Art os Scientific Computing”, 3^a edição, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.