

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Investigação da Teoria de Acoplamentos
de Compósitos em Campos de
Ondas Térmicas

Messias de Souza Costa

Orientadora: Profa. Dra. Suhaila Maluf Shibli

Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências

Banca Examinadora

Profa. Dra. Suhaila Maluf Shibli (orientadora) - IF-USP

Profa. Dra. Carmen Silvia de Moya Partiti - IF-USP

Profa. Dra. Elisabeth Andreoli de Oliveira - IF-USP

Profa. Dra. Hatsumi Mukai - UEM

Prof. Dr. Ítalo Marcos Nunes de Oliveira - UFAL

São Paulo

2009

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Costa, Messias de Souza

Investigação da teoria de acoplamentos de compósitos
em campos de ondas térmicas - São Paulo, 2009.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Departamento de Física Experimental.

Orientador: Profa. Dra. Suhaila Maluf Shibli

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Calor; 2. Física da matéria condensada;
3. Física teórica; 4. Física experimental.

USP/IF/SBI-067/2009

Dedico este trabalho à toda minha família

Agradecimentos

- À toda minha família, em especial aos meus pais João Moreira da Costa e Benedita de Souza Costa pela força e apoio de uma vida.
- À Profa. Suhaila Shibli pela orientação, amizade e confiança depositada em mim.
- Ao Prof. Ricardo Celorrio pela dedicação ao me introduzir aos cálculos matemáticos, ao programa computacional MatLab e por me acolher em seu departamento na Universidad de Zaragoza - Espanha.
- Ao Prof. Agustín Salazar pelo trabalho experimental e pela minha boa receptividade em seu laboratório na Universidad del País Vasco - Espanha.
- À Profa. Hatsumi Mukai pela grande ajuda na correção e sugestões deste trabalho.
- À Cleidilane Sena pelo carinho, compreensão e companhia inseparável de todos os momentos.
- Aos amigos pela mão estendida e ombro oferecido.
- Ao GFCx (professores, alunos, secretária, técnicos e etc.) pelo espaço e ajuda de todas as horas.
- À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho é elaborada uma solução analítica do campo de temperatura em um material opaco, contendo dois cilindros subsuperficiais paralelos e acoplados, iluminado por um feixe de luz modulado. O método é baseado na expansão de ondas térmicas planas e cilíndricas em série de funções de Bessel e Hankel.

Primeiramente, o trabalho mostra o modelo da propagação de ondas térmicas planas em um material homogêneo, infinito, opaco e termicamente isotrópico. Então, para um melhor entendimento da abordagem matemática, iniciamos com o modelo mais simples, que é um material contendo apenas um cilindro. Após, ampliamos o modelo colocando dois cilindros separados neste material, onde aparecem os efeitos de múltiplos espalhamentos. Em seguida, tratamos os modelos descritos em meios semi-infinitos, no qual levamos em consideração a condição adiabática na fronteira da amostra com o ar, ou seja, o meio não perde calor para o ambiente. Esta condição é representada pelo método das imagens. A heterogeneidade do meio é alcançada com a generalização do modelo para um meio com N cilindros separados. Finalmente, incluímos as modificações dos modelos prévios devido ao acoplamento de dois cilindros.

Este modelo é geral, no sentido que não existem restrições com respeito aos diâmetros e posições dos cilindros dentro do material, nem com relação às propriedades térmicas dos cilindros e matriz. Além disso, serve para calcular a temperatura em qualquer ponto da amostra.

As ondas térmicas levam informações sobre a estrutura interna e propriedades térmicas do material compósito que, na prática, podem ser obtidas através das medidas da temperatura na superfície da amostra através de técnicas fototérmicas. Com isto, somos capazes de caracterizar estruturalmente um material compósito reforçado por fibras. Também podemos caracterizá-los termicamente obtendo suas propriedades térmicas efetivas. Medidas experimentais com amostras calibradas usando a técnica de termografia infravermelho lock-in (radiometria fototérmica), com frequência fixa, confirmam a validade do modelo.

Além disso, um estudo da distribuição de ondas térmicas em materiais contendo esferas também estão discutidos teoricamente aqui.

Abstract

In this work we elaborate an analytical solution of the temperature field of an opaque material containing two overlapping and parallel subsurface cylinders, illuminated by a modulated light beam. The method is based on the expansion of plane and cylindrical thermal waves, in series of Bessel and Hankel functions.

Firstly, the work shows the model of propagation of plane thermal waves in homogeneous, infinite, opaque and thermally isotropic materials. Then, for a clearer mathematical study, we initiate with a simpler method, which is a material containing only one cylinder. After that, we expanded the model by placing two separated cylinders inside of this material where the multiple scattering effects appeared. In the sequence we will treat the described model in semi-infinite materials, in which we take into consideration the adiabatic condition at the border of the sample with the air, that is, the material does not lose heat to the environment. This condition is represented through method of images. The heterogeneity of the medium is achieved with the generalization of the model for a medium with N separated cylinders. Finally, we include the modifications to the previous model due to the overlapping of these cylinders.

This model is general, in the sense that there are no restrictions when considering the diameters and positions of the cylinders inside the material nor with respect to the thermal properties of the cylinders and matrix. Besides, it can be used to calculate the temperature at any point of the sample.

The thermal waves carry informations about the composite material's internal structure and thermal properties that, in practice, can be obtained with the measurement of the temperature in the surface of the sample, through photothermal techniques. Considering this, we are able to structurally characterize a composite material of fibers. We are also capable of characterizing them thermally, obtaining their effective thermal properties. We have performed measurements on calibrated samples using lock-in infrared thermography (photothermal radiometry) with a fixed frequency which confirms the validity of the model.

Furthermore, a study of thermal waves distributions on materials containing spheres are also discussed theoretically here.

Sumário

Introdução	1
1 Técnica fototérmica	4
1.1 Radiometria fototérmica	5
1.2 Montagem experimental	6
1.3 Amostra	7
2 Ondas	10
2.1 Ondas harmônicas	10
2.2 Ondas térmicas	13
2.2.1 Meio homogêneo	13
2.2.2 Funções de ondas térmicas planas	14
2.2.3 Funções de ondas térmicas cilíndricas	21
2.2.4 Funções de ondas térmicas esféricas	25
3 Espalhamento de ondas por estrutura cilíndricas e esféricas	29
3.1 Introdução	29
3.2 Espalhamento de ondas por cilindros	30
3.2.1 Meio infinito com um cilindro	30
3.2.2 Meio infinito com dois cilindros	34
3.2.3 Meio semi-finito com um cilindro	40
3.2.4 Meio semi-finito com N cilindros	44
3.3 Espalhamento de ondas por esferas	53
3.3.1 Meio infinito com uma esfera	54

3.3.2	Meio infinito com duas esferas	56
3.3.3	Meio semi-infinito com N esferas	62
3.3.4	Meio finito com N esferas	68
3.3.5	Simulação computacional	75
4	Espalhamento térmico de dois cilindros acoplados	79
4.1	Modelo Matemático	80
4.2	Solução para cilindros circulares	82
4.2.1	Solução das equações	83
4.2.2	Condições de transmissão	85
4.2.3	Adaptação às notações anteriores	96
4.3	Meio semi-infinito	97
4.4	Resultado experimental	104
5	Conclusões e perspectivas	106
5.1	Conclusões	106
5.2	Perspectivas	107
	Apêndice	109
A		109
A.1	Funções de Bessel cilíndricas e esféricas	109
A.2	Harmônicos esféricos e polinômios associados de Legendre	111
A.3	Potencial de casca simples	113
A.4	Teorema de adição	115
A.4.1	Teorema de adição no \mathbb{R}^2	115
A.4.2	Teorema de adição no \mathbb{R}^3	116
A.5	Ondas planas em uma placa	119

Introdução

O objetivo deste trabalho é a elaboração de um modelo quantitativo para calcular a temperatura superficial de materiais compósitos reforçados com fibras cilíndricas (separadas ou acopladas), paralelas entre si e à superfície iluminada, e de materiais compósitos reforçados com partículas esféricas, quando iluminados com uma fonte de luz modulada. Podendo assim, analisar possíveis defeitos em sua estrutura interna quando comparados com dados experimentais obtidos através da técnica de radiometria fototérmica. Além disso, através da medida da temperatura na parte posterior da amostra, podem-se obter as propriedades térmicas efetivas da amostra e relacioná-las com as propriedades térmicas de seus componentes. Nosso interesse por estes materiais deve-se a sua crescente implantação na indústria contemporânea (aeronáutica, aeroespacial, automotiva, têxtil, esportiva, etc.), devido aos seus excelentes benefícios, tais como: grande leveza; elevada resistência mecânica; propriedades térmicas, elétricas e químicas eficientes; e baixo custo.

Os compósitos podem ser modelados, entre outras formas, como materiais com incrustações cilíndricas ou esféricas. Um exemplo de material com incrustação cilíndrica é compósitos reforçados por fibras, como materiais fabricados de nanotubos de carbono [1] para realçar e estabilizar suas propriedades mecânicas, elétricas e térmicas. E, dois exemplos de materiais com esferas são os cristais fotônicos de opala e o de opala inversa. Onde os cristais de opala são constituídos por um arranjo regular tridimensional de pequenas esferas de poliestireno. Por sua vez, os cristais de opala inversa são formados por um arranjo tridimensional de pequenos buracos esféricos acoplados, separados por paredes sólidas. Mais informações sobre opalas, opalas inversas e cristais fotônicos se encontram em [2]- [5].

Devido à heterogeneidade dos materiais compósitos, as ondas térmicas que se propagam

através dele são espalhadas ao se encontrarem com os diversos obstáculos em seu interior. Como ocorre em acústica ou em eletromagnetismo, a dificuldade dos modelos de espalhamento se encontra na geometria dos elementos dispersores. No caso de ondas térmicas, soluções para estruturas planas são conhecidas por completo na literatura [6]-[9]. Nos últimos anos, trabalhos sobre espalhamento de ondas térmicas por estruturas cilíndricas alinhadas [10]- [15] dando continuidade ao trabalho pioneiro de [16], e materiais compósitos reforçados com partículas esféricas [14], [17]- [19] têm sido estudados através da propagação de ondas térmicas nesses materiais. Estruturas concêntricas cilíndricas [18]- [26] e esféricas [27] também vêm sendo estudadas. No entanto, para geometrias não concêntricas, as condições de transmissão na superfície das incrustações relacionam somente a matriz e o material reforço, e os resultados teóricos obtidos com estes modelos estão de bom acordo com os obtidos experimentalmente. Porém, ao tratar materiais completamente preenchidos com uma alta fração de incrustações no volume, altos valores anômalos para a condutividade térmica efetiva são encontrados. Isto ocorre devido suas incrustações estarem tão pressionadas que chegam a deformarem-se formando uma área de contato entre elas. Com isso, há troca de fluxo térmico entre elas, o que não era considerado nos modelos existentes.

Nesta tese, superamos estas limitações e modelamos materiais compósitos com duas incrustações de geometria cilíndrica com um forte contato físico entre elas. Onde simulações numéricas feitas em MATLAB [28] e medidas experimentais com amostras calibradas realizadas com radiometria fototérmica estão apresentadas para validar nosso modelo.

A seguir, faremos uma breve descrição dos capítulos seguintes.

No primeiro capítulo estão citados diferentes técnicas fototérmicas dando ênfase a radiometria fototérmica, pois foi a técnica utilizada neste trabalho. Também está descrito a montagem experimental e a amostra utilizada, onde descrevemos conceitualmente materiais compósitos.

No segundo capítulo serão introduzidos os conceitos de difusividade, condutividade e de comprimento de difusão térmica. Mostramos os conceitos e modelos da distribuição de calor em meios homogêneos e termicamente isotrópicos, devido à incidência de luz plana na superfície; assim como, ondas térmicas planas, cilíndricas e esféricas, onde introduzimos

suas relações com as funções de Bessel cilíndricas e esféricas. Este capítulo serve como base, pois estão apresentadas as funções que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

No terceiro capítulo serão desenvolvidas soluções para o campo temperatura em material opaco de dimensões infinita, semi-infinita e finita com N incrustações separadas de geometria cilíndrica paralelas ou esférica. A introdução ao problema se dá pelo modelo mais simples, que é o caso da propagação de ondas térmicas em meios infinitos com um cilindro subsuperficial¹. Após, analisamos o mesmo meio com dois cilindros subsuperficiais. Em seguida, tratamos o caso semi-infinito, primeiramente com um cilindro e logo em seguida generalizando para N cilindros subsuperficiais. O modelo equivalente para esferas também foi abordado neste capítulo. Onde, além dos meios infinito e semi-infinito, também foi tratado o meio finito. Que por analogia, e com as devidas substituições, pode ser aplicado aos modelos com cilindros. Por fim, simulações numéricas realizadas em MATLAB reproduzem resultados conhecidos, o que valida nossos programas computacionais.

Ao quarto capítulo dedicamos ao trabalho em si, que é a aplicação e desenvolvimento para o estudo de materiais compósitos, assim, iniciamos trabalhando a propagação de ondas térmicas em meios infinitos com dois cilindros acoplados, paralelos entre si e à superfície iluminada. Onde a principal diferença com respeito aos modelos prévios é a modificação das condições de contorno na superfície de cada cilindro. Onde, no capítulo 3 as condições de continuidade de temperatura e fluxo de calor se dava apenas na superfície cilindro-material. Para cilindros acoplados também levamos em consideração as condições cilindro-cilindro na superfície acoplada.

No quinto e último capítulo, estão apresentadas as conclusões e perspectivas, onde analisa-se os objetivos conquistados desta tese e aponta as linhas de pesquisas futuras neste campo que este trabalho abre.

¹cilindro que se encontra abaixo da superfície iluminada com seu eixo paralelo à ela.

Capítulo 1

Técnica fototérmica

As técnicas fototérmicas (TF), que vêm sendo aplicadas com grande êxito a mais de duas décadas, são uma das protagonistas no campo dos Estudos Não Destrutivos (END), pois são utilizadas para resolver um número crescente de problemas de controle de qualidade na indústria e caracterização de novos materiais em laboratórios de todo o mundo, devido à sua elevada sensibilidade e capacidade de resolução. As TF se baseiam na detecção de ondas térmicas que são geradas em um material como consequência da absorção de um feixe de luz modulado ou pulsado (feixe excitador). Estas ondas levam informações sobre as propriedades térmicas do material e sobre suas estruturas internas. Além do seu controle não destrutivo na aquisição de medidas das propriedades ópticas, térmicas e eletrônicas de uma ampla variedade de materiais [8], as TF são especialmente sensíveis à presença de pequenos defeitos, devido ao caráter fortemente amortecido das ondas térmicas. Portanto, este é um campo em que se coloca um significativo avanço frente aos métodos de END convencionais [29]- [33].

A propagação do calor através do material produz uma série de efeitos, a saber: variação da reflectividade da superfície da amostra, variação da emissividade, deformação da superfície por deformação térmica, surgimento de um gradiente de índice de refração tanto na amostra quanto no gás que a rodeia, etc. Dependendo dos materiais que compõem a amostra, um efeito pode se manifestar mais que o outro. Portanto, diferentes técnicas fototérmicas foram desenvolvidas para detectar diferentes efeitos produzidos na amostra, dentre as quais citamos: (a) Técnica fotopiroelétrica, que por meio de um trans-

ductor piroelétrico se detectam as variações da temperatura da amostra; (b) Termografia infravermelho, em que um detector infravermelho mede as variações da emissividade infravermelho da superfície da amostra; (c) Fotodeformação, onde se mede o desvio periódico de um feixe de luz refletido na superfície devido a dilatação térmica do material; (d) Termorreflectância, que detecta as variações na intensidade de um feixe de laser refletido pela superfície da amostra, em consequência das flutuações do coeficiente de reflexão; (e) Técnica efeito “miragem”, onde se mede o desvio sofrido por um feixe de laser como consequência da variação do índice de refração da amostra e do gás que a rodeia. Uma revisão geral das TF e suas aplicações encontra-se em [8], [29]- [35].

A escolha de uma ou outra técnica depende da natureza do material a ser estudado, do meio que o rodeia, da fonte de excitação utilizada e dos parâmetros a determinar.

A seguir, descrevemos um pouco mais sobre a técnica de radiometria fototérmica. Pois, visto que esta mede a flutuação da temperatura na superfície da amostra, foi a técnica utilizada para validar o modelo teórico desenvolvido neste trabalho.

1.1 Radiometria fototérmica

Por ser uma técnica de termografia infravermelho, a radiometria fototérmica consiste na detecção da flutuação da temperatura na superfície da amostra, que pode ser obtida por meio de um detector de infravermelho conectado a um amplificador vetorial “lock-in” sincronizado com a fonte de excitação, devido a isto, esta técnica também é denominada termografia infravermelho lock-in (ou simplesmente termografia lock-in). Como a distância de penetração das ondas térmicas é controlada pela frequência de modulação do feixe excitador, a radiometria fototérmica permite efetuar tanto medidas médias numa região de vários milímetros cúbicos; como medidas locais, analisando volumes de apenas umas dezenas de micrômetros cúbicos. Ainda, tem-se comprovado sua validade em tomografia [36].

1.2 Montagem experimental

A fabricação da amostra e as medidas experimentais foram realizadas no laboratório do Prof. Dr. Agustin Salazar do Departamento de Física Aplicada I, da Universidad del País Vasco em Bilbao-Espanha.

Na Figura 1.1, mostramos o aparato experimental utilizado para efetuar nossas medidas, onde temos numericamente discriminado:

1. Laser multimodo Nd:YAG (1064 *nm* de comprimento de onda),
2. Amostra,
3. Modulador de frequência mecânico (*Chopper*),
4. Filtro espacial,
5. Espelho,
6. Câmera de infravermelho (JADE J550M da CEDIP),
7. Amplificador “lock-in” (EGG INSTRUMENTS, modelo 5210),
8. Microcomputador.

Para realizar as medidas, foi utilizado um laser contínuo (1), o qual é modulado mecanicamente por um “chopper” (3) que está conectado a um amplificador “lock-in” (7). Utiliza-se um espelho (5) para redirecionar o percurso do laser para a amostra (2), sendo este defocado à 5 *cm* de diâmetro por um filtro espacial (4) para “eliminar” o perfil gaussiano do feixe e garantir uma intensidade mais constante possível ao atingir e aquecer a amostra. O sinal infravermelho emitido entre 3,6 e 5,0 μm é capturado pela câmera infravermelho (6) que também está conectada ao “lock-in”. Usando lentes de 5,0 *cm* em conjunto com dois anéis extensores, obtém-se uma distância mínima de trabalho¹ de 7,5 *cm*. Sob essas condições, cada pixel mede a temperatura média de um quadrado da amostra de 40 μm de lado. O “software” do “lock-in” fornece a amplitude e fase da flutuação da temperatura, onde estes dados são coletados por um micro computador (8). Para melhorar a taxa de

¹distância entre a amostra e a câmera.

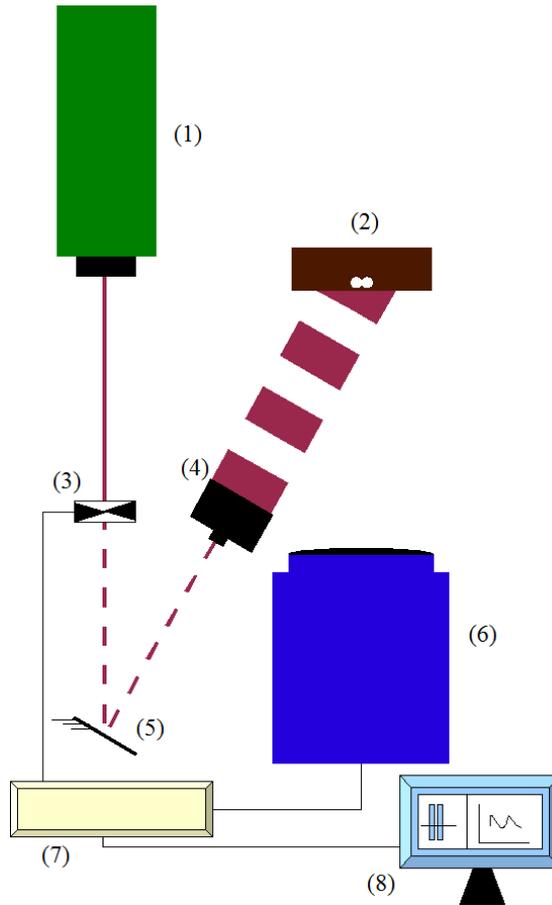


Figura 1.1: Representação esquemática do dispositivo de radiometria infravermelho.

ruído do sinal, gravamos para cada experimento 5000 imagens (170 fotogramas por segundo, durante 30s). Como o nível do ruído é inversamente proporcional à raiz quadrada do total de número de imagens [37], obtemos a temperatura com um nível de ruído tão baixo quanto 1 mK.

1.3 Amostra

As amostras analisadas com técnicas de radiometria fototérmica são comumente materiais compósitos. Um compósito é definido como um material constituído por mais de um componente, com interfaces de separação entre eles, e está subdividido em matriz e reforço. A matriz é o material onde se é embutido o material reforço, serve como estrutura

para o reforço preenchido os espaços que o rodeia. O reforço é o que realça as propriedades mecânicas, eletromagnéticas ou químicas do material compósito como um todo (propriedades efetivas). Portanto, em nosso cotidiano, nos deparamos com compósitos por toda parte. Um exemplo bem comum é o concreto, pois este é formado por cimento, areia, pedra e vergalhões como reforçador. Além dos já citados anteriormente, exemplos de compósitos de grande interesse tecnológico são Fibras de vidro, Termoplástico, Fibras de carbono, Ferrofluidos, etc.

Nesse caso, para validar nosso modelo teórico, utilizamos amostras calibradas feitas de barras ($25 \times 12 \times 2 \text{ mm}$) de grafite rígido com 99,95% de pureza de carbono, condutividade térmica $K_{\text{carbono}} = 169 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$, difusividade térmica $D_{\text{carbono}} = 75 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$ e alta emissividade infravermelho [38]. Foram perfurados dois orifícios de raios $a_1 = a_2 = 0,5 \text{ mm}$ com seus eixos paralelos entre si e à uma distância d_1 e d_2 da superfície. Devido a baixa condutividade térmica ($K_{\text{ar}} = 0,026 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}$) do ar e com uma difusividade térmica de $D_{\text{ar}} = 22 \text{ mm}^2 \text{ s}^{-1}$, estes testes se ajustam ao caso de cilindros isolantes. As frequências de modulação utilizadas variam na escala de $40 - 950 \text{ Hz}$, correspondentes aos comprimentos de difusão térmica na matriz (μ_M) de $0,77 - 0,16 \text{ mm}$. Amostras com cilindros separados e acoplados foram preparadas Figura (1.2). A superfície livre foi polida para reduzir a profundidade do furo à superfície ($\Delta = d - a$)². Um microscópio óptico foi utilizado para medir Δ e a distância h entre os eixos dos dois cilindros.

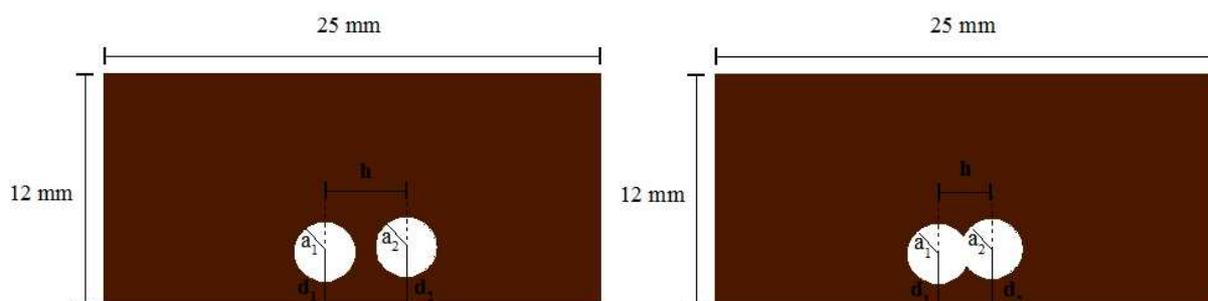


Figura 1.2: Representação esquemática de duas amostras de grafites contendo dois cilindros isolantes cada. De modo que na representação do lado esquerdo os cilindros estão separados enquanto que estão acoplados na representação do lado direito.

² Δ é menor distância entre a superfície iluminada da amostra (parte inferior da figura) e a do cilindro.

Dados das amostras

- barra (25x12x2 mm) de grafite rígido (99,95% de pureza),
- $K_{carbono} = 169 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ e $D_{carbono} = 75 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$,
- $K_{ar} = 0,026 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ e $D_{ar} = 22 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$,
- $a_1 = a_2 = 0,5 \text{ mm}$,
- Esquerdo, $\Delta_1 = d_1 - a_1 = 110\mu\text{m}$, $\Delta_2 = d_2 - a_2 = 155\mu\text{m}$ e $h = 1.30\text{mm}$.
- Direito, $\Delta_1 = 112\mu\text{m}$, $\Delta_2 = 152\mu\text{m}$ e $h = 0.79\text{mm}$.

Capítulo 2

Ondas

Num sentido bem amplo, por onda entende-se qualquer informação que se propaga de um ponto a outro, com velocidade definida e sem o transporte de matéria. As ondas tem como propriedade intrínseca o transporte de energia e momento. Quanto ao meio, a onda pode necessitar (onda mecânica) ou não (onda eletromagnética) de um meio material para sua propagação. Em relação ao seu movimento de propagação, a onda pode propagar-se na mesma direção de sua vibração (ondas longitudinais) ou transversalmente a ela (ondas transversais). Na natureza existem movimentos ondulatórios mais complexos como, por exemplo, ondas na superfície da água ou ondas sísmicas que apresentam simultaneamente os movimentos transversal e longitudinal.

Os conceitos e cálculos mostrados neste capítulo estão direcionados a um melhor entendimento dos capítulos posteriores. Portanto, o objetivo deste não é estudar o comportamento ondulatório em toda sua essência e sim dar um breve tratamento de ondas, relacionando-as com as ondas térmicas (planas, cilíndricas e esféricas.), as quais têm significativa importância no desenvolvimento deste trabalho.

2.1 Ondas harmônicas

As ondas harmônicas são ondas com perfil de uma função senoidal, pois são geradas por fontes oscilatórias que executam um movimento harmônico simples, daí o nome ondas harmônicas. A propagação de uma onda pode ser descrita por uma função que depende

da posição e do tempo. Usamos o método de separação de variáveis para decompô-la em funções harmônicas¹, uma que depende somente da parte espacial e outra somente da temporal. Assim, de uma forma geral, a função de onda harmônica pode ser representada como:

$$T(x, t) = a(x) \cos(\omega t) + b(x) \sin(\omega t), \quad (2.1)$$

onde, $a(x)$ e $b(x)$ são coeficientes reais que dependem da posição, sendo a parte temporal representada pelas funções trigonométricas.

Aplicando propriedades elementares de funções trigonométricas, podemos reescrever a equação (2.1) em função de apenas uma função seno ou uma cosseno. Ou seja, fazendo a seguinte transformação para os coeficientes $a(x)$ e $b(x)$:

$$\begin{cases} a(x) = |A(x)| \cos(\theta) \\ b(x) = |A(x)| \sin(\theta), \end{cases} \quad (2.2)$$

na qual, $A(x) = a(x) + ib(x)$ e $\theta(x) = \arg[A(x)]$, estão representados no plano complexo da figura 2.1, e são denominados respectivamente, amplitude complexa e fase de $T(x, t)$. Substituindo (2.2) em (2.1), temos:

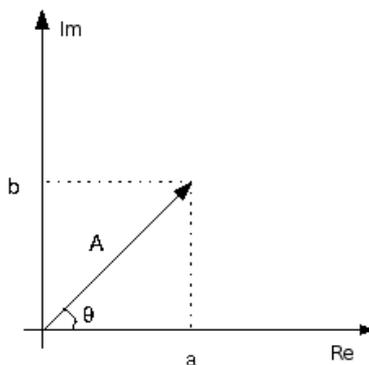


Figura 2.1: Representação gráfica da amplitude A no plano complexo.

$$T(x, t) = |A(x)| \cos(\theta - \omega t). \quad (2.3)$$

Notando que $A(x) = |A(x)| e^{i\theta(x)}$, denotando \Re como *real de* e \Im como *imaginário de*;

¹As funções harmônicas são representadas pelas funções harmônicas seno ou cosseno.

podemos representar a equação (2.1) na forma:

$$\begin{aligned}
T(x, t) &= \Re[A(x)] \cos wt + \Im[A(x)] \operatorname{sen} wt \\
&= |A(x)| \Re[e^{-i(wt-\theta)}] \\
&= \Re[A(x) e^{-iwt}],
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nota 1 A função $A(x)$ é denominada amplitude complexa da onda harmônica, $|A(x)|$ amplitude física da onda e $\theta(x)$ sua fase ou defasagem.

Denomina-se $A(x) e^{-iwt}$ de onda progressiva (ou caminhante) complexa.

A partir de agora nos concentraremos no estudo da amplitude complexa $A(x)$ das ondas harmônicas; já que a parte harmônica no tempo, e^{-iwt} , é igual em todas elas.

Observação 1 A parte imaginária de $A(x) e^{-iwt}$ é irrelevante no posterior estudo, já que não fornece informação adicional sobre a onda inicial, ou seja,

$$\begin{aligned}
\Im[A(x) e^{-iwt}] &= -a(x) \operatorname{sen}(wt) + b(x) \cos(wt) \\
&= a(x) \cos(wt + \pi/2) + b(x) \operatorname{sen}(wt + \pi/2) \\
&= a(x) \cos[(t + \pi/2w)w] + b(x) \operatorname{sen}[(t + \pi/2w)w].
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Portanto, a parte imaginária da onda complexa é a onda real defasada no tempo.

Ondas Planas

Em geral, a amplitude complexa de onda plana em um ponto $\mathbf{r} = (x, y, z)$, gerada em pontos $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ de um plano² e com direção de propagação dada pelo versor $\hat{\mathbf{k}}$, é dada por:

$$A(\mathbf{r}) = A_0 e^{iq\hat{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \tag{2.6}$$

onde $q \in \mathcal{C}$ é o módulo do vetor número de onda ou somente número de onda, dado por $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$. $A_0 \in \mathcal{C}$ é a amplitude em $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$.

No caso particular em que a onda é gerada no plano $\mathbf{r}' = (d, y', z')$ e tem direção de propagação $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{x}}$, tem-se que a equação (2.6) adquire a forma:

$$A(x) = A_0 e^{-iq(x-d)}. \tag{2.7}$$

²no espaço tridimensional.

Portanto, a equação (2.4) tem a forma:

$$T(x, t) = \Re [A_0 e^{-i(q(x-d)+wt)}], \quad (2.8)$$

que representa uma onda plana progressiva, gerada no plano (d, y, z) , que se propaga no sentido $-\hat{x}$.

2.2 Ondas térmicas

Nos apêndices A.1 a A.4 estão apresentados um maior detalhamento das funções, modelos e teoremas aqui utilizados.

2.2.1 Meio homogêneo

A equação que governa a distribuição de temperatura em um meio material homogêneo e termicamente isotrópico³ Ω é [39, 40]

$$\nabla^2 T(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{r}, t) = -\frac{Q(\mathbf{r}, t)}{K}, \quad \text{em } \Omega \times [t_0, \infty), \quad (2.9)$$

onde $Q(\mathbf{r}, t)$ é a fonte de energia térmica e corresponde a quantidade de calor fornecida ao meio Ω por unidade de volume e tempo⁴; D e K são a difusividade e condutividade térmica do meio, respectivamente⁵. A equação (2.9) corresponde a *equação de difusão do calor* com fonte.

Outra propriedade importante consiste do caso onde há diferença de temperatura num meio Ω , a energia térmica flui obedecendo a *lei de Fourier para a condução de calor* [40], dada por

$$\Phi = -K \nabla T(\mathbf{r}, t), \quad (2.10)$$

³meio termicamente isotrópico é aquele no qual as propriedades térmicas não dependem da direção.

⁴escrevendo as dimensões $[E]$, $[L]$ e $[t]$ para quantidade de calor, comprimento e tempo, respectivamente, temos então $[Q] = [E][L^{-3}][t^{-1}]$.

⁵suas unidades dimensionais são $[D] = [L^2][t^{-1}]$ e $[K] = [E][L^{-1}][t^{-1}][T^{-1}]$, onde $[T]$ é dimensão de temperatura.

onde o sinal negativo significa que o fluxo de calor é contrário ao sentido do gradiente de temperatura⁶.

Portanto, para quantidades de calor fornecida à superfície Γ que delimita o volume Ω , temos que o fluxo do calor normal à Γ é dada por:

$$K \frac{\partial T(\mathbf{r}, t)}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = -I(\mathbf{r}, t) + F(T), \quad \text{em } \Gamma \text{ x } [t_0, \infty), \quad (2.11)$$

onde $(\partial/\partial n)T$ é o gradiente de temperatura normal a Γ ; $I(\mathbf{r}, t)$ é a quantidade de calor fornecida por unidade de área e tempo⁷. Em outras palavras, é a intensidade com que a energia térmica é fornecida à superfície. Consideramos também no lado direito de (2.11), representado por $F(T)$, a quantidade de calor por unidade de área e tempo irradiada pela superfície do material, esta quantidade está relacionada com a temperatura através da lei de Stefan-Boltzmann,

$$F(T) = \varepsilon \sigma T^4, \quad (2.12)$$

sendo ε a emissividade do material⁸ e σ a contante de Stefan-Boltzmann⁹.

Nos cálculos futuros, consideramos uma fonte de calor periódica de intensidade

$$I(\mathbf{r}, t) = I_0(\mathbf{r})\Re[(1 + e^{-i\omega t})], \quad (2.13)$$

na qual, $I_0(\mathbf{r})$ descreve a distribuição espacial de calor fornecido à amostra; $\omega = 2\pi f$ é a frequência angular, dada em radianos por unidade de tempo; f a frequência linear, dada em Hertz, com a qual o calor é fornecido ao meio.

2.2.2 Funções de ondas térmicas planas

Uma forma de gerar ondas térmicas planas, consiste em incidir uniformemente sobre toda superfície plana uma iluminação plana e modulada de intensidade $I(\mathbf{r}, t)$. A Figura

⁶resulta do enunciado de Clausius da segunda lei da termodinâmica, o qual consiste em que calor é transferido da região mais quente para a mais fria.

⁷possui a unidade, $[I] = [E][L^{-2}][t^{-1}]$.

⁸ ε é um fator sem unidades que indica a capacidade de um material emitir radiação em relação ao corpo negro, assume valores entre 0 e 1 (que corresponde à de um corpo negro).

⁹ $\sigma = 5,6703 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(m^2K^4)$.

2.2 representa um material opaco e homogêneo, no qual, devido a absorção de uma intensidade modulada de luz, ondas térmicas planas são geradas na superfície em $x = 0$ e se propagam para seu interior (região $x < 0$).

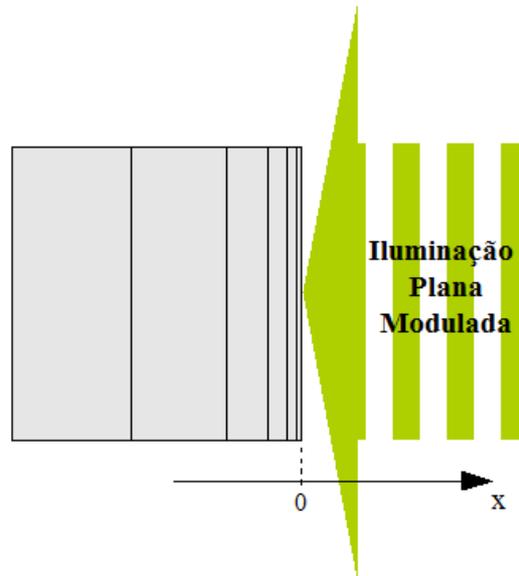


Figura 2.2: Onda térmica plana gerada na superfície devido à incidência de intensidade constante em toda superfície de um feixe de luz modulado.

Portanto, para o calor fornecido somente à superfície¹⁰, no plano $(0, y, z)$, temos

$$I_0(\mathbf{r}) = I_0(x) = \begin{cases} \frac{I_0}{2}, & \text{se } x = 0, \\ 0, & \text{se } x \neq 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

sendo I_0 a intensidade plana e uniforme da iluminação que se emprega para aquecer a amostra.

A condição inicial adotada considera que o momento que iniciou-se o fornecimento de energia à superfície da amostra foi dado no instante t_0 , a temperatura da amostra neste instante era apenas a temperatura ambiente (T_{amb}) e o regime estacionário alcançado no instante $t > t_0$ deve satisfazer a condição $t_0 \rightarrow -\infty$.

Como consequência, no regime estacionário, a temperatura em qualquer ponto do

¹⁰ $Q \equiv 0$, interno ao meio.

material é dado por [41]

$$T(\mathbf{r}, t) = T_{amb} + T_{est}(\mathbf{r}) + T_{ac}(\mathbf{r}, t). \quad (2.15)$$

Esta, deve ser a solução que satisfaça as equações (2.9) e (2.11). Onde, $T_{est}(\mathbf{r})$ corresponde a uma elevação estacionária ou não oscilatória da temperatura e

$$T_{ac}(\mathbf{r}, t) = T_{ac}(x, t) \equiv \Re[T_{ac}(x) e^{-i\omega t} + T_{ac}^2(x) e^{-i2\omega t} + \dots], \quad (2.16)$$

é a flutuação ou parte oscilatória da temperatura.

Com estas considerações, temos que as equações (2.9) e (2.11) tornam-se:

$$\begin{cases} \nabla^2 T(x, t) - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} T(x, t) = 0, & \text{para } x \neq 0, \\ K \frac{\partial}{\partial x} T(x, t)|_{x=0} = -\frac{I_0}{2} \Re[(1 + e^{-i\omega t})] + F(T), & \text{para } x = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Considerando a (2.16) e substituindo (2.15) em (2.12), para $x = 0$, temos:

$$F(T) = \varepsilon\sigma(T_{dc} + T_{ac}(0, t))^4 = \varepsilon\sigma T_{dc}^4 + \varepsilon\sigma (4T_{dc}^3 \Re[T_{ac}(0) e^{-i\omega t}] + \dots), \quad (2.18)$$

onde $T_{dc} = T_{amb} + T_{est}$ corresponde à componente estável local da temperatura.

Portanto, substituindo (2.15) em (2.17) e utilizando a equação (2.18), temos:

1- As equações correspondentes apenas a componente estável T_{dc} são:

$$\begin{cases} \nabla^2 T_{dc} = 0, \\ \frac{\partial T_{dc}}{\partial x} |_{x=0} = -\frac{I_0}{2K} + \frac{\varepsilon\sigma}{K} T_{dc}^4 |_{x=0}. \end{cases} \quad (2.19)$$

Observa-se que (2.19) não teria solução se não houvesse perdas radiativas, já que o material se aqueceria indefinidamente e nunca alcançaria o regime estacionário. As atuais condições de fluxo são denominadas, em linguagem matemática, condições de Neumann.

2- Para $T_{ac}(\mathbf{r}, t)$, temos:

$$\begin{cases} \nabla^2 [T_{ac}(\mathbf{r}, t)] - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} [T_{ac}(\mathbf{r}, t)] = 0, \\ K \frac{\partial}{\partial x} [T_{ac}(\mathbf{r}, t)]_{x=0} = -\frac{I_0}{2} \Re[e^{-i\omega t}] + \varepsilon\sigma 4T_{dc}^3 \Re[T_{ac}|_{x=0} e^{-i\omega t}] + \dots \end{cases}$$

Como a lei de radiação é não linear, têm aparecido novas frequências distintas às de excitação, conforme (2.18). Na aproximação à seguir, desprezamos frequências do tipo

$2\omega, 3\omega, \dots$, que aparecem ao explicar a lei de Boltzmann de radiação; ou seja, calculamos unicamente o primeiro harmônico, $T_{ac}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, da solução (2.16) e desprezamos os termos de ordem superiores¹¹. Conseqüentemente,

$$\begin{cases} \nabla^2 [T_{ac}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] - \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t} [T_{ac}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] = 0, \\ K \frac{\partial}{\partial x} [T_{ac}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}]_{x=0} = -\frac{I_0}{2} e^{-i\omega t} + \varepsilon\sigma 4T_{dc}^3 T_{ac}|_{x=0} e^{-i\omega t}. \end{cases} \quad (2.20)$$

Portanto, considerando as aproximações acima, daqui para frente representamos a (2.16) somente pelo primeiro termo,

$$T_{ac}(\mathbf{r}, t) = \Re[T_{ac}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}], \quad (2.21)$$

que corresponde à flutuação periódica da temperatura na mesma frequência da fonte de excitação. Obtemos para (2.20),

$$\begin{cases} \nabla^2 T_{ac}(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D} T_{ac}(\mathbf{r}) = 0, \\ \frac{\partial T_{ac}(\mathbf{r})}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{I_0}{2K} + \frac{\varepsilon\sigma}{K} 4T_{dc}^3 T_{ac}|_{x=0}. \end{cases} \quad (2.22)$$

No que segue, temos considerado que as perdas por radiações estão atribuídas somente à componente não oscilatória T_{dc} e que as perdas radiativas devido T_{ac} são desprezadas, isto é,

$$I_0 \gg \varepsilon\sigma T_{dc}^3 T_{ac}, \quad (2.23)$$

que equivale a adotarmos para (2.18) somente

$$F(T) = \varepsilon\sigma(T_{dc})^4, \quad (2.24)$$

portanto, considerando a condição (2.23) em (2.22), temos que calcular somente:

$$\begin{cases} \nabla^2 T_{ac}(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D} T_{ac}(\mathbf{r}) = 0, & \text{(a)} \\ \frac{\partial T_{ac}(\mathbf{r})}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{I_0}{2K}. & \text{(b)} \end{cases} \quad (2.25)$$

¹¹O termo de primeiro hamônico está a mesma frequência da fonte de excitação.

Usando o método de separação de variáveis representamos $T_{ac}(\mathbf{r}) = T_{ac}(x)T_{ac}(y)T_{ac}(z)$. Notando que o calor é fornecido uniformemente em toda superfície do plano (x, y) , têm-se que $T_{ac}(y)$ e $T_{ac}(z)$ são constantes neste plano, de forma que

$$\frac{\partial}{\partial y}T_{ac}(y) = \frac{\partial}{\partial z}T_{ac}(z) = \frac{\partial^2}{\partial^2 y}T_{ac}(y) = \frac{\partial^2}{\partial^2 z}T_{ac}(z) = 0. \quad (2.26)$$

Consequentemente, a solução que satisfaz a equação de Helmholtz (2.25–a) e a lei de Fourier para a condução de calor (2.25–b) é,

$$T_{ac}(\mathbf{r}) = T_{ac}(x) = T_0 e^{-iqx}, \quad (2.27)$$

sendo T_0 um parâmetro a determinar; $q = \sqrt{(i\omega)/D} = (1+i)/\mu$ é o *número de onda térmico* do meio em que a onda se propaga e $\mu = \sqrt{D/\pi f}$ é o *comprimento de difusão térmica*, que corresponde a distância que a onda deve se propagar para sua amplitude decair de um fator e , logo, μ está relacionado à profundidade que a onda penetra no meio e, para um dado material, esta pode ser controlada pela frequência de modulação f .

Ao impor as condições de contorno na lei de Fourier em $x = 0$, tem-se que:

$$-iqT_0 = -\frac{I_0}{2K}, \quad \text{consequentemente, } T_0 = \frac{I_0}{2iqK}, \quad (2.28)$$

onde desprezamos qualquer perda de energia por reflexão¹². Pela equação (2.21), tem-se:

$$T_{ac}(x, t) = \Re \left[\frac{I_0}{2iqK} e^{-i(qx+wt)} \right], \quad (2.29)$$

que é análogo à equação (2.8) para $d = 0$, ou seja, gerada no plano $(0, y, z)$. Substituindo $q = (1+i)/\mu$, escrevemos a equação (2.29) na forma:

$$T_{ac}(x, t) = \frac{I_0\mu}{2\sqrt{2}K} e^{\frac{x}{\mu}} \Re \left[e^{-i(\frac{x}{\mu}+wt-\frac{\pi}{4})} \right], \quad x \leq 0. \quad (2.30)$$

Na comprovação de experimentos numéricos e de laboratório realizam-se normalizações de dados na posição onde a onda é gerada, neste caso $x = 0$. Esta normalização costuma corresponder à

$$T_{ac}(0, t') = \Re[e^{-iwt'}], \quad (2.31)$$

¹²Para materiais que refletem alguma intensidade de radiação incidente, I_0 deve ser substituído por $I_0(1-R)$, onde R é o coeficiente de reflexão do material.

na solução da dispersão térmica em um meio semi-infinito. Por conseguinte, esta normalização corresponde à $\omega t' = \omega t - \pi/4$, onde $t' = 0$ é o instante que se inicia a medida; e $|T_0| = 1$ para $x = 0$, que equivale $I_0 = 2\sqrt{2}K/\mu$.

Visto que as técnicas fototérmicas baseiam-se somente na detecção da flutuação da temperatura, portanto, daqui para frente vamos designar T_{ac} por apenas T e desconsiderar os outros termos da equação (2.15).

A onda plana normalizada (2.30) na região $x \neq 0$ é

$$T(x, t') = \Re[e^{\frac{x}{\mu}} e^{-i\frac{x}{\mu}} e^{-i\omega t'}] = a(x) \cos \omega t' + b(x) \operatorname{sen} \omega t', \quad x \leq 0, t' \in \mathcal{R}, \quad (2.32)$$

sendo:

$$\begin{cases} a = e^{\frac{x}{\mu}} \cos(x/\mu), \\ b = -e^{\frac{x}{\mu}} \operatorname{sen}(x/\mu), \end{cases} \quad (2.33)$$

consequentemente, a onda térmica plana é

$$T(x, t') = e^{\frac{x}{\mu}} \cos(\omega t' + x/\mu). \quad (2.34)$$

Conforme (2.8), a equação (2.29) representa ondas térmicas planas geradas no plano $(0, y, z)$ do sistema de referência S , propagando-se na direção $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{x}}$. Entretanto, a forma mais geral de representar uma onda plana num ponto \mathbf{r} , se propagando na direção $\hat{\mathbf{k}}$, é dada por

$$T(\mathbf{r}, t) = \Re \left\{ T_0 e^{i[q(\mathbf{r}-\mathbf{d}) \cdot \hat{\mathbf{k}} + \omega t]} \right\}, \quad (2.35)$$

onde T_0 é a amplitude inicial ($t = 0$) complexa em $\mathbf{r} = \mathbf{d}$ e é dado por (2.28).

Particularmente, para uma onda gerada no plano (d, y, z) , a temperatura num ponto $P(x, y)$ do sistema de referência S , conforme (2.8) e (2.35), para $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{x}}$, será da forma:

$$T(x, t) = \Re [T_0 e^{-i[q(x-d) + \omega t]}]. \quad (2.36)$$

Para um novo sistema de referência S' deslocado a distância x_0 e y_0 da origem de S , (Fig. 2.3), a equação (2.36), torna-se:

$$T(x', t) = \Re [T_0 e^{-i\{q[x'-d'] + \omega t\}}], \quad (2.37)$$

na qual $d' = d - x_0$ e $x' = x - x_0$.

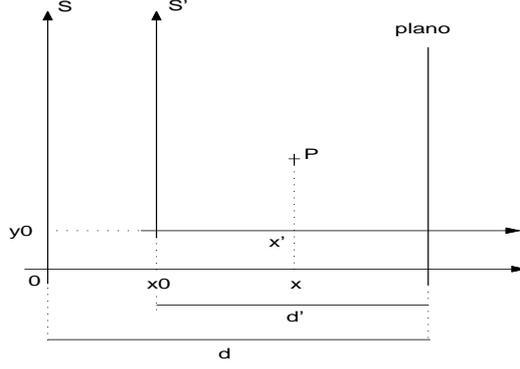


Figura 2.3: Sistema de Referência S e S' para uma onda plana.

As equações (2.36) e (2.37) são funções de ondas planas que se propagam no sentido negativo do eixo x . Existem várias outras formas de representar estas mesmas funções, uma delas é através de expansão em série de ondas cilíndricas. Para isto, no \mathbb{R}^2 , representamos a função exponencial na forma de expansão em série de ondas cilíndricas, representadas pela função ordinária de Bessel, [42, 43, 44],

$$e^{iqx} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^m J_m(qr) e^{im\theta}, \quad (2.38)$$

onde r e θ são as coordenadas polares do vetor \mathbf{r} . Portanto, a parte espacial complexa de (2.36) pode ser representada na forma,

$$\begin{aligned} T(x) &= T_0 e^{iqd} e^{-iqx} \\ &= T_0 e^{iqd} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(qr) e^{im\theta} \\ &= T(r, \theta). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Para \mathbb{R}^3 , utilizando a série de funções de Bessel esféricas de primeiro tipo j_n e harmônicos esféricos Y_n^m , a exponencial pode ser expandida na forma [44]:

$$e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}}} = 4\pi \sum_{nm} i^n j_n(qMr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}, \quad (2.40)$$

onde $\sum_{ab} = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=-a}^a$; a barra sobre os harmônicos esféricos denota o complexo conjugado dos mesmos; e, no \mathbb{R}^3 , o versor direção de propagação é

$$\hat{\mathbf{k}} = (\text{sen}\theta_K \cos\phi_K, \text{sen}\theta_K \text{sen}\phi_K, \cos\theta_K). \quad (2.41)$$

Portanto, no \mathbb{R}^3 , a parte espacial complexa de (2.35) pode ser representada na forma,

$$\begin{aligned} T(\mathbf{r}) &= T_0 e^{-iq\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{k}}} e^{iq\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}}} \\ &= T_0 e^{-iq\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{k}}} 4\pi \sum_{nm} i^n j_n(qr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

2.2.3 Funções de ondas térmicas cilíndricas

Quando um campo escalar de onda térmica qualquer T_{inc} de frequência f (que se propaga num meio material de difusividade térmica D_M e condutividade térmica K_M) incide num cilindro de raio a , difusividade térmica D_c e condutividade térmica K_c , parte deste campo incidente é refletida na superfície do cilindro e outra parte é refratada para o interior dele. Para utilizar a idéia de potencial de casca simples, consideramos apenas uma casca cilíndrica delgada de raio a . A parte de T_{inc} que é transmitida para o interior do cilindro denominaremos T_{int} (campo de temperatura interna ao cilindro) e a parte refletida, T_{ext} (campo de temperatura externa ao cilindro). Como comentado no Apêndice A.3, a idéia de potencial de casca simples consiste em atribuir à casca, e não à T_{inc} , o papel de fonte geradora de T_{int} e T_{ext} .

Conforme o método de potencial de casca simples (A.10), representamos T_{int} e T_{ext} numa só forma integral, que é

$$T(r, \theta) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (2.43)$$

onde, para duas dimensões, $d\Gamma = a d\theta$ é o diferencial de um arco de circunferência de raio a , a solução fundamental da função de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é dada por (A.12),

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{2} H_0(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (2.44)$$

onde H_0 é a função de Hankel de ordem zero de primeiro tipo, a equação (2.44) satisfaz a equação de Helmholtz (A.11) e a condição de radiação de Sommerfeld, requisitos que uma função de onda térmica deve satisfazer. Com a finalidade de obtermos uma certa simetria entre as equações de campo interno e externo, respectivamente T_{int} e T_{ext} , temos como escolha conveniente para a função densidade:

$$f(\theta) \equiv \frac{i}{\pi a} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} b_m e^{im\theta}, \quad (2.45)$$

na qual b_m são coeficientes à determinar.

Substituindo (2.44) em (2.43) temos,

$$T(r, \theta) = -\frac{i}{2} \int_{\Gamma} f(\theta') H_0(q|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\Gamma'. \quad (2.46)$$

Como o meio interior e exterior ao cilindro é o mesmo, então o vetor de onda térmico do cilindro, $q_c = (1 + i)/\mu_c$, e do material, $q_M = (1 + i)/\mu_M$, são os mesmos, ou seja, $q_c = q_M \equiv q$.

Para o cálculo do campo em regiões exteriores a Γ , utilizaremos o teorema de adição de Graf, A.20, para expandir H_0 na região onde $r > r'$, o qual é dado por [44, 45, 46]:

$$H_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n(r) J_n(r') e^{in(\theta' - \theta)}, \quad r > r'. \quad (2.47)$$

Substituindo (2.45) e (2.47) em (2.46), temos,

$$T_{ext}(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} b_m J_n(qa) H_n(qr) e^{-in\theta} \int_0^{2\pi} e^{i(m+n)\theta'} d\theta', \quad (2.48)$$

Notando que,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)\theta'} d\theta' = 2\pi \delta_{m+n,0}. \quad (2.49)$$

Consequentemente, para $n = -m$, a (2.49) será:

$$T_{ext}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m J_m(qa) H_m(qr) e^{im\theta}, \quad (2.50)$$

onde utilizamos as propriedades

$$Z_{-m} = (-1)^m Z_m, \quad \text{para } Z = H, J. \quad (2.51)$$

Para regiões interiores a Γ , o teorema de adição de Graf é da forma A.21:

$$H_0(|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(r) H_n(r') e^{in(\theta' - \theta)}, \quad r < r', \quad (2.52)$$

onde a diferença de (2.47) é a troca de $H \leftrightarrow J$. Consequentemente, temos que o campo na região interior à casca cilíndrica é

$$T_{int}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m H_m(qa) J_m(qr) e^{im\theta}. \quad (2.53)$$

Observe que ao escolher (2.45) como função densidade, obtemos uma certa simetria nos campos (2.50) e (2.53). Esta simetria é importante na estabilidade dos cálculos dos coeficientes b_m . A partir das equações (2.50) e (2.53), uma forma de se reobter (2.45) é substituí-las em (A.17), ou seja, calcular os termos:

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} T_{ext} \right|_{r=a} - \left. \frac{\partial}{\partial r} T_{int} \right|_{r=a}, \quad (2.54)$$

onde deverá ser utilizado o Wronskiano para as funções de Bessel,

$$H'_m(qa)J_m(qa) - J'_m(qa)H_m(qa) = \frac{2i}{\pi qa}. \quad (2.55)$$

Uma outra função densidade pode ser utilizada, mas isso resultará numa estrutura (com respeito a simetria) de campos diferentes dos obtidos em (2.50) e (2.53).

Apresentaremos a seguir a situação onde temos dois cilindros separados em um meio.

Dois cilindros separados

Conforme vemos no Apêndice A.3, o potencial de casca simples pode ser utilizado para calcular campos internos e externos a N incrustações de um meio. Com base nisto, vamos calcular campos que se propagam em meios com dois cilindros, Ω_1 e Ω_2 , separados, inclusos no meio, Figura (2.4).

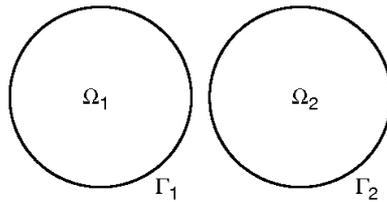


Figura 2.4: Representação esquemática de dois cilindros Ω_1 e Ω_2 com suas respectivas fronteiras Γ_1 e Γ_2 .

Considerando que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ é o volume total dos dois cilindros com fronteira limitada $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, onde Γ_1 e Γ_2 são as fronteiras limitadas de Ω_1 e Ω_2 , respectivamente.

Então, a função densidade será

$$f(\mathbf{r})|_{\Gamma} = \begin{cases} f_1(\mathbf{r}) = f(\theta_1), & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma_1, \\ f_2(\mathbf{r}) = f(\theta_2), & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma_2. \end{cases} \quad (2.56)$$

Substituindo as condições (2.56) em (2.46), para Ω_1 e Ω_2 sendo dois anéis¹³ de raios a_1 e a_2 , respectivamente, temos agora

$$T(\mathbf{r}) = -\frac{i}{2} \left(\int_{\Gamma_1} f(\theta'_1) H_0(q|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\Gamma'_1 + \int_{\Gamma_2} f(\theta'_2) H_0(q|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\Gamma'_2 \right), \quad (2.57)$$

para $\mathbf{r}' \in \Gamma$, $d\Gamma = d\Gamma_1 + d\Gamma_2$.

Como $|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = |\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}_j|$ (Figura: 2.5); com $j = 1, 2$, onde \mathbf{r}'_j e \mathbf{r}_j são vetores posição com origem no centro do cilindro Ω_j . Então, cada integral pode ser resolvida separadamente utilizando a igualdade

$$\int_{\Gamma_j} f(\theta'_j) H_0(q|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|) d\Gamma'_j = \int_{\Gamma_j} f(\theta'_j) H_0(q|\mathbf{r}'_j - \mathbf{r}_j|) d\Gamma'_j. \quad (2.58)$$

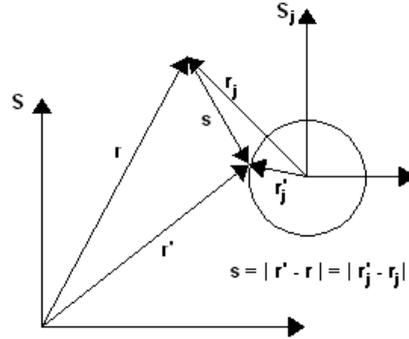


Figura 2.5: Disposição esquemática dos sistemas de referência S e S_j e dos vetores \mathbf{s} , \mathbf{r} , \mathbf{r}' , \mathbf{r}_j e \mathbf{r}'_j

Na Figura 2.5 vemos que a distância entre o ponto de medida (origem de \mathbf{s}) e a fonte (extremidade de \mathbf{s}) é o mesmo para qualquer sistema de referência.

¹³consideramos cascas cilíndricas como anéis em duas dimensões.

Para a região exterior à Ω , cada cilindro deve obedecer a condição $r_j > r'_j$. Como cada integral de (2.57) foi resolvida em (2.50), obtemos:

$$T_{ext} = \sum_{j=1}^2 T_{ext}^{(j)}(r_j, \theta_j), \quad (2.59)$$

onde

$$T_{ext}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^{(j)} J_m(qa_j) H_m(qr_j) e^{im\theta_j}. \quad (2.60)$$

Para região interior à Ω , tem-se que \mathbf{r} está interno a qualquer um dos cilindros, ou seja, $r_j < r'_j$ y $r_i > r'_i$, $i \neq j$. Temos agora que a (2.57) será

$$T_{int} = T_{int}^{(j)}(r_j, \theta_j) + T_{ext}^{(i)}(r_i, \theta_i), \quad i \neq j. \quad (2.61)$$

A solução interna a um cilindro foi calculada em (2.53), dada por

$$T_{int}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} b_m^{(j)} H_m(qa_j) J_m(qr_j) e^{im\theta_j}, \quad (2.62)$$

que é a temperatura interna ao cilindro Ω_j com o sistema de referência em seu centro.

2.2.4 Funções de ondas térmicas esféricas

Para se obter campos internos e externos de um meio com uma incrustação de geometria esférica utilizando o método de potencial de casca simples, consideramos novamente (A.10),

$$T(r, \theta) = \int_{\Gamma} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad (2.63)$$

abordamos o espaço tridimensional; no qual, para três dimensões, $d\Gamma'$ é o diferencial de área esférica que, para esfera de raio a , é $a^2 d\omega$; sendo ω o ângulo sólido. Neste espaço temos como escolha conveniente para função densidade,

$$f(\hat{\mathbf{r}}) \equiv \frac{2\pi i}{qa^2} \sum_{nm} b_n^m i^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}. \quad (2.64)$$

Conforme (A.14) a função de Green, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(R)$, no \mathbb{R}^3 , com $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, é

$$G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\frac{qi}{2\pi} h_0(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|). \quad (2.65)$$

Portanto, substituindo (2.64) e (2.65) em (2.63), temos,

$$T(r, \theta) = \frac{1}{a^2} \sum_{nm} b_n^m i^n \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})} \int_{\Gamma} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') h_0(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) d\Gamma'. \quad (2.66)$$

A função esférica $h_0(qR)$ pode ser expandida na forma, (A.34):

$$\begin{aligned} h_0(qr_2) &= 4\pi \sum_{\nu\mu} h_\nu(qr_{12}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{12})} j_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 < r_{12}, \\ h_0(qr_2) &= 4\pi \sum_{\nu\mu} j_\nu(qr_{12}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{12})} h_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 > r_{12}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_{12} estão dispostos na Figura 2.6(a), j_ν e h_ν são, respectivamente, a função ordinária de Bessel esférica de ordem ν e de Hankel esférica de primeiro tipo de ordem ν .

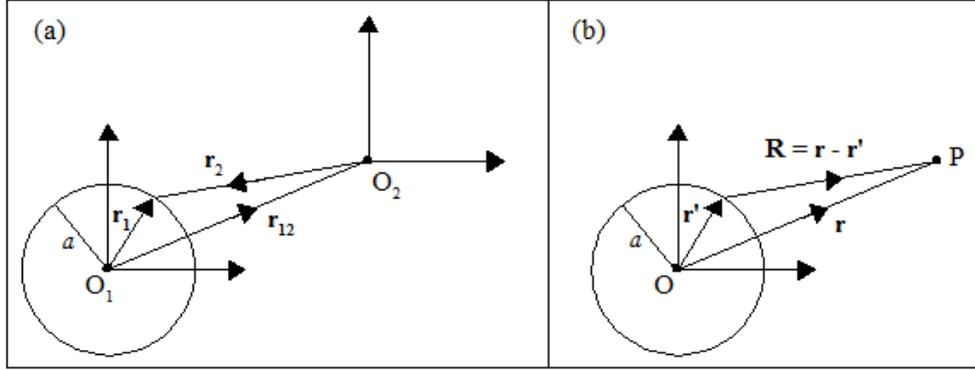


Figura 2.6: Equivalência entre as notações: Em (a) os vetores são denotados por \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 e \mathbf{r}_{12} ; em (b), estes vetores estão denotados por \mathbf{r}' , $-\mathbf{R}$ e \mathbf{r} , respectivamente.

A notação empregada em (2.66) é diferente da empregada em (2.67), para encontrar a relação entre elas, comparamos a Figura 2.6(a) com a Figura 2.6(b) e notamos que $\mathbf{r}_1 = a\hat{\mathbf{r}}'$, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}$ e $r_2 = R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, temos para (2.67) as formas:

$$h_0(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 4\pi \sum_{\nu\mu} h_\nu(qr) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}})} j_\nu(qa) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}'), \quad a < r, \quad (2.68)$$

e

$$h_0(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = 4\pi \sum_{\nu\mu} j_\nu(qr) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}})} h_\nu(qa) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}'), \quad a > r \quad (2.69)$$

Para se obter $T_{ext}(r > a)$ devemos substituir (2.68) em (2.66). Logo,

$$T_{ext}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{nm} b_n^m i^n \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})} \sum_{\nu\mu} h_\nu(qr) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}})} j_\nu(qa) \int_{\Omega'} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}') Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}') d\Omega'. \quad (2.70)$$

Utilizando as propriedades (A.5) e (A.6), temos

$$T_{ext}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{nm} b_n^m i^n j_n(qa) h_n(qr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}, \quad (2.71)$$

Para encontrar T_{int} ($r < a$), substitui-se (2.69) em (2.66) e repetimos os dois últimos cálculos acima obtendo

$$T_{int}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{nm} b_n^m i^n h_n(qa) j_n(qr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}. \quad (2.72)$$

Observe que com a escolha de (2.64) obtemos novamente certa simetria nas equações (2.71) e (2.72).

Para se obter novamente a função densidade (2.64) calculamos as derivadas normais (radial à superfície esférica, para $r = a$) de (2.71) e (2.72), temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} T_{ext} \Big|_{r=a} &= 4\pi q \sum_{lm} b_n^m i^l j_n(qa) h_n'(qa) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}, \\ \frac{\partial}{\partial r} T_{int} \Big|_{r=a} &= 4\pi q \sum_{lm} b_n^m i^l h_n(qa) j_n'(qa) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}, \end{aligned} \quad (2.73)$$

onde

$$z_n'(qa) = \frac{d}{d(qr)} z_n(qr) \Big|_{r=a} = -\frac{z_n(qa)}{2qa} + \sqrt{\frac{\pi}{2qa}} Z'_{n+1/2}(qa), \quad (2.74)$$

é a derivada de (A.2) para $u = qr$.

Subtraindo a segunda da primeira das equações (2.73) e utilizando o Wronskiano para as funções de Bessel (2.55),

$$\frac{\partial}{\partial r} T_{ext} \Big|_{r=a} - \frac{\partial}{\partial r} T_{int} \Big|_{r=a} = 2f(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.75)$$

onde reobtemos (2.64),

$$f(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{4\pi i}{2qa^2} \sum_{nm} b_n^m i^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}. \quad (2.76)$$

As equações (2.71) e (2.72) são válidas em meios que contém apenas uma esfera. Para meios com uma ou mais de uma esfera, a função densidade (2.64) na forma mais geral é

$$f(\hat{\mathbf{r}}) \equiv \frac{4\pi i}{2qa^2} \sum_{nm} b_n^m i^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.77)$$

de onde obtemos as equações:

$$T_{ext}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{nm} b_n^m i^n j_n(qa) h_n(qr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.78)$$

e

$$T_{int}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{nm} b_n^m i^n h_n(qa) j_n(qr) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (2.79)$$

que são as formas mais gerais das funções de ondas térmicas (2.71) e (2.72).

Para o caso geral, substitui-se (2.78) e (2.79) em (2.75) e obtém-se (2.77) para a função densidade $f(\hat{\mathbf{r}})$.

Capítulo 3

Espalhamento de ondas por estrutura cilíndricas e esféricas

3.1 Introdução

Na secção 2.2.2 vimos que a parte oscilatória do campo escalar de temperatura que se propaga através do material, gerada devido uma fonte de calor periódica de intensidade, (2.13),

$$I(\mathbf{r}, t) = I_0(\mathbf{r})\Re[(1 + e^{-i\omega t})], \quad (3.1)$$

é dado pela (2.21),

$$T_M(\mathbf{r}, t) = \Re[T_M(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}], \quad (3.2)$$

onde o subíndice M está designado para *matriz*.

Para um meio contendo impurezas na matriz, as ondas que se propagam neste material incidem sobre essas impurezas e são espalhadas (refletidas) por elas e transmitida para seu interior. Denotamos por T_{inc} o campo escalar de temperatura, gerada na superfície devido a absorção de luz incidente sobre ela, que se propaga na matriz. Logo, o campo escalar total de temperatura T_M será dada pela onda térmica incidente T_{inc} mais a espalhada T_{esp} , tal que temos o campo real de temperatura na matriz dado por,

$$T_M(\mathbf{r}, t) = T_{inc}(\mathbf{r}, t) + T_{esp}(\mathbf{r}, t), \quad (3.3)$$

na qual consideramos que

$$T_{inc}(\mathbf{r}, t) = \Re [T_{inc}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}] \quad \text{e} \quad T_{esp}(\mathbf{r}, t) = \Re [T_{esp}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}]. \quad (3.4)$$

Como as equações (3.4) são campos reais de temperatura que se propagam na matriz, conseqüentemente, a equação (3.3) representa a flutuação do campo real de temperatura na matriz, que utilizando (3.4) escrevemos na forma:

$$\begin{aligned} T_M(\mathbf{r}, t) &= \Re \{ [T_{inc}(\mathbf{r}) + T_{esp}(\mathbf{r})] e^{-i\omega t} \} \\ &= \Re [T_M(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}], \end{aligned} \quad (3.5)$$

onde

$$T_M(\mathbf{r}) = T_{inc}(\mathbf{r}) + T_{esp}(\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

é o campo espacial complexo de temperatura na matriz.

3.2 Espalhamento de ondas por cilindros

3.2.1 Meio infinito com um cilindro

Em nosso caso, $T_{inc}(\mathbf{r}, t)$ é uma onda plana gerada em $x = d$ que propaga na direção $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{x}}$ (Figura 3.1), representada por, (2.36),

$$T_{inc}(x, t) = \Re [T_0 e^{-i[q_M(x-d) + \omega t]}], \quad (3.7)$$

onde $q_M = (1 + i)/\mu_M$ e $\mu_M = \sqrt{D_M/\pi f}$ são respectivamente o número de onda térmica e o comprimento de difusão térmica da matriz. Utilizando (2.38), sua parte espacial complexa pode ser representada na forma, (2.39),

$$T_{inc}(r, \theta) = T_0 e^{iq_M d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r) e^{im\theta}. \quad (3.8)$$

Se as impurezas têm formas cilíndricas, (Fig. 3.2), o campo espacial complexo de temperatura espalhada (externo ao cilindro), conforme (2.50), é representada pela expansão em série de funções de Hankel de primeira espécie [44], que vamos apresentar na forma,

$$T_{esp}(r, \theta) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m(q_M r) e^{im\theta}, \quad (3.9)$$

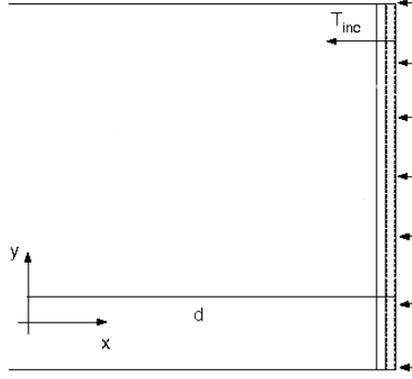


Figura 3.1: Ondas planas geradas na superfície posicionada em $x = d$ e se propagando no sentido $-\hat{x}$.

onde, daqui para frente, utilizaremos a notação T_{esp} (temperatura espalhada) em substituição a T_{ext} (temperatura externa) utilizada na secção 2.2.3 e, por conveniência, redefinimos $A_m \equiv b_m J_m(q_M a)$ como novas constantes de dispersões térmicas a serem determinadas; estas constantes dependem das características e posições dos cilindros e são determinadas utilizando as condições de contorno.

Nesta secção vamos considerar um cilindro de raio a , difusividade térmica D_c e condutividade térmica K_c , incluso em meios infinitos com ondas térmicas planas se propagando através dele.

Fisicamente, a condição de meios infinitos significa que as ondas, T_{inc} e T_{esp} , que se propagam no meio não sofrerão qualquer influência devido aos contornos deste meio com o ambiente. Portanto, T_{inc} e T_{esp} serão dados por (3.8) e (3.9), respectivamente.

Considerando o sistema de coordenadas no centro do cilindro dado por S' , então, para uma onda plana gerada em $d' = d - x_0$, figura 3.2, a equação (3.6) será,

$$T_M(r', \theta') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} J_m(q_M r') + A_m H_m(q_M r') \right) e^{im\theta'}, \quad (3.10)$$

A parte espacial complexa do campo de temperatura dentro do cilindro é dada pela onda transmitida (2.53), a qual vamos representar na forma [20, 47],

$$T_c(r', \theta') = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m J_m(q_c r') e^{im\theta'}, \quad (3.11)$$

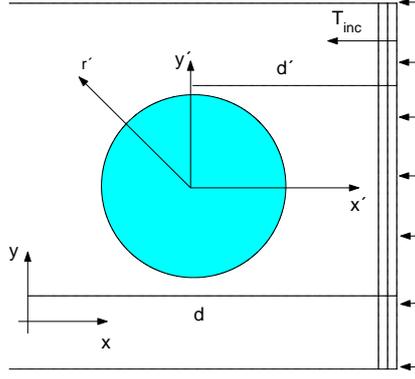


Figura 3.2: Ondas incidentes, geradas em d' do sistema S' , num cilindro com o eixo z' no seu centro e perpendicular ao plano do papel.

onde, daqui para frente, utilizaremos a notação T_c (temperatura no cilindro) em substituição a T_{int} (temperatura interna) para designar a temperatura interna ao cilindro; as constantes de dispersão térmicas foram novamente redefinidas na forma $B_m \equiv b_m H_m(q_c a)$ e o subíndice c de T_c , $q_c = (1 + i)/\mu_c$, com $\mu_c = \sqrt{D_c/\pi f}$, foi designado para *cilindro*.

Como m varia no intervalo $(-\infty, +\infty)$, tal que $|m| \geq 0$, temos então $2|m| + 1$ constantes A_m e $2|m| + 1$ constantes B_m , estas constantes são denominadas *coeficientes térmicos*. Portanto, as soluções do campo de temperatura na matriz e no cilindro requerem o conhecimento dos valores destas $2(2|m| + 1)$ incógnitas A_m e B_m , que podem ser obtidas com as condições de contorno na superfície do cilindro. As condições de contorno adotadas aqui para a interface cilindro-matriz são:

1. Continuidade da temperatura:

$$T_c(r' = a) = T_M(r' = a), \quad \forall \theta', \quad (3.12)$$

2. Continuidade do fluxo de calor:

$$K_c \nabla T_c(r' = a) = K_M \nabla T_M(r' = a), \quad \forall \theta'. \quad (3.13)$$

Substituindo as equações (3.10) e (3.11) nas condições (3.12) e (3.13), obtemos o seguinte sistema de $2(2|m| + 1)$ equações:

$$\begin{aligned} T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} J_m(q_M a) + A_m H_m(q_M a) &= B_m J_m(q_c a), \\ K_M q_M T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} J'_m(q_M a) + K_M q_M A_m H'_m(q_M a) &= K_c q_c B_m J'_m(q_c a), \end{aligned} \quad (3.14)$$

no qual, para $u = qr$,

$$J'(u) = \frac{\partial}{\partial u} J(u) \Big|_{r=a} \quad \text{e} \quad H'(u) = \frac{\partial}{\partial u} H(u) \Big|_{r=a}, \quad (3.15)$$

são as derivadas da função de Bessel e Hankel, respectivamente, com relação ao argumento u ¹.

As equações (3.14) podem ser representadas na forma:

$$A_m - B_m \frac{J_m(q_c a)}{H_m(q_M a)} = -T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} \frac{J_m(q_M a)}{H_m(q_M a)}, \quad (3.16)$$

$$A_m - \frac{K_c q_c}{K_M q_M} B_m \frac{J'_m(q_c a)}{H'_m(q_M a)} = -T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} \frac{J'_m(q_M a)}{H'_m(q_M a)}. \quad (3.17)$$

Ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{J_m(q_c a)}{H_m(q_M a)} \\ 1 & -\frac{K_c q_c}{K_M q_M} \frac{J'_m(q_c a)}{H'_m(q_M a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m \\ B_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} \frac{J_m(q_M a)}{H_m(q_M a)} \\ -T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} \frac{J'_m(q_M a)}{H'_m(q_M a)} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

na qual, \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem $2|m| + 1$;

$$\mathbf{S} = \text{diag}[-S_m] \quad \text{e} \quad \mathbf{Z} = \text{diag}[-K Z_m], \quad (3.20)$$

são matrizes diagonais (diag) de ordem $2|m| + 1$;

$$\mathbf{a} = [A_m], \quad \mathbf{b} = [B_m], \quad \mathbf{i} = -T_0 e^{iq_M d'} [i_m] \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = -T_0 e^{iq_M d'} [g_m], \quad (3.21)$$

são vetores coluna de ordem $2|m| + 1$.

Os elementos foram definidos por:

$$S_m = \frac{J_m(q_c a)}{H_m(q_M a)}, \quad Z_m = \frac{J'_m(q_c a)}{H'_m(q_M a)}, \quad i_m = i^{-m} P_m \quad \text{e} \quad g_m = i^{-m} Q_m, \quad (3.22)$$

onde

$$K = \frac{K_c}{K_M} \frac{q_c}{q_M}, \quad P_m = \frac{J_m(q_M a)}{H_m(q_M a)} \quad \text{e} \quad Q_m = \frac{J'_m(q_M a)}{H'_m(q_M a)}. \quad (3.23)$$

¹Para isto, em (3.14), foi utilizado a regra da cadeia: $\frac{\partial}{\partial r} f[u(r)] = \frac{\partial}{\partial u} f(u) \frac{\partial}{\partial r} u$.

A equação (3.19) pode ser representada por: $\mathbf{W}\mathbf{x} = \mathbf{v}$, cuja solução é,

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{v}, \quad (3.24)$$

onde

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

é uma matriz quadrada de ordem $2(2|m| + 1)$ e

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

são vetores de ordem $2(2|m| + 1)$.

Calculado o vetor de coeficientes térmicos (3.24), podemos substituir seus elementos em (3.10) e (3.11) para calcular o campo escalar espacial complexo de temperatura em qualquer ponto da amostra (matriz ou cilindro).

3.2.2 Meio infinito com dois cilindros

Nesta secção ainda vamos tratar meios infinitos, porém com dois cilindros de raio a_1 e a_2 , difusividade térmica D_{c1} e D_{c2} e condutividade térmica K_{c1} e K_{c2} ². As ondas térmicas são geradas a uma distância d do sistema S conforme Figura 3.3.

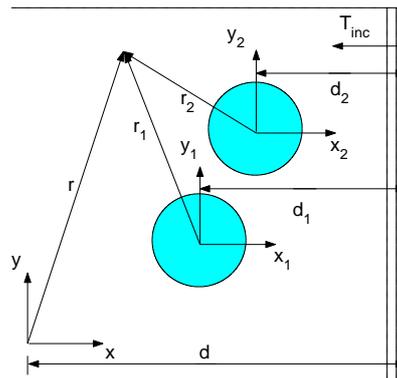


Figura 3.3: Disposição de dois cilindros em um meio infinito.

²o subíndice 1 é denotado para o cilindro Ω_1 e o subíndice 2 para o Ω_2 .

Numa posição \mathbf{r} da matriz, a parte espacial do campo escalar complexo de temperatura em um meio infinito é dado conforme (2.59),

$$T_{esp}(\mathbf{r}) = T_{esp}^{(1)}(\mathbf{r}) + T_{esp}^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (3.27)$$

na qual $T_{esp}^{(j)}(\mathbf{r})$ é a temperatura no ponto \mathbf{r} dispersada pelo cilindro Ω_j .

Portanto, com relação ao sistema de referência do cilindro Ω_1 , a (3.6) será

$$T_M(r_1, \theta_1) = T_{inc}(r_1, \theta_1) + T_{esp}^{(1)}(r_1, \theta_1) + T_{esp}^{(2)}(r_1, \theta_1), \quad (3.28)$$

para o sistema de referência do cilindro Ω_2 , temos

$$T_M(r_2, \theta_2) = T_{inc}(r_2, \theta_2) + T_{esp}^{(1)}(r_2, \theta_2) + T_{esp}^{(2)}(r_2, \theta_2), \quad (3.29)$$

nas quais

$$T_{esp}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j}, \quad \text{para } j = 1, 2, \quad (3.30)$$

é a onda numa posição \mathbf{r}_j da matriz, espalhada pelo cilindro Ω_j com o sistema de coordenadas em seu centro.

Nesta secção, vamos utilizar o índice $j = 1, 2$, que representa os cilindros um e dois, respectivamente.

Observe que na equação (3.30) as temperaturas $T_{esp}^{(j)}$ são representadas em função de suas coordenadas r_j e θ_j , enquanto que as equações (3.28) e (3.29) possuem termos em função de coordenadas distintas, $T^{(j)}(r_i, \theta_i)$, $i \neq j$. Entretanto, para se utilizar as condições (3.12) e (3.13), vamos utilizar o teorema de adição de Graf (A.20),

$$H_m(r_2) e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{n-m}(r_{12}) J_n(r_1) e^{in\theta_1} e^{-i(n-m)\theta_{12}}, \quad (3.31)$$

sendo r_{12} a distância relativa do centro do cilindro Ω_1 à do cilindro Ω_2 , veja Figura 3.4.

Com isto, podemos representar ondas que são espalhadas por um cilindro em termos das coordenadas de outro. Ou seja, podemos representar a onda espalhada pelo cilindro Ω_2 , $T_{esp}^{(2)}$, em função das coordenadas do cilindro Ω_1 , (r_1, θ_1) , ou vice-versa.

De forma geral, a equação (3.31) pode ser escrita na forma,

$$H_m(r_j) e^{im\theta_j} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{n-m}(r_{ij}) J_n(r_i) e^{in\theta_i} e^{-i(n-m)\theta_{ij}}, \quad r_{ij} > r_i \quad (3.32)$$

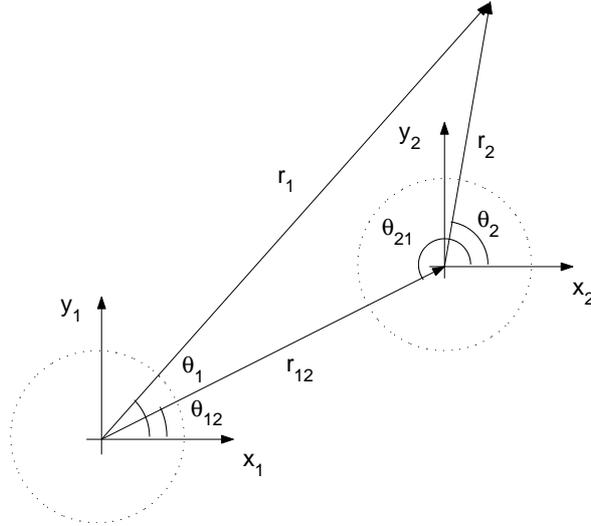


Figura 3.4: Troca de coordenadas, teorema de Graf.

para $i = 1, 2$ e $i \neq j$.

A restrição é que este teorema só é válido para situações em que $r_{ij} > r_i$, que são satisfeitas nas condições (3.12) e (3.13), onde $r_i = a_i$ e $r_{ij} \geq a_i + a_j$ (é a distância entre seus centros), as quais são utilizadas para se encontrar os coeficientes térmicos.

Assim, para $r_{12} > r_1$ as equações (3.28) e (3.29) serão:

$$\begin{aligned}
T_M(r_1, \theta_1) &= T_0 e^{iq_M d_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} + \\
&+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(1)} H_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} + \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{12}) J_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} e^{-i(m-n)\theta_{12}},
\end{aligned} \tag{3.33}$$

para $r_{21} > r_2$,

$$\begin{aligned}
T_M(r_2, \theta_2) &= T_0 e^{iq_M d_2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_2) e^{im\theta_2} + \\
&+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(2)} H_m(q_M r_2) e^{im\theta_2} + \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{21}) J_m(q_M r_2) e^{im\theta_2} e^{-i(m-n)\theta_{21}}.
\end{aligned} \tag{3.34}$$

As equações (3.33) e (3.34), podem ser representadas na forma geral:

$$\begin{aligned}
T_M(r_j, \theta_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
&+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{ji}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{ji}},
\end{aligned} \tag{3.35}$$

na qual $d_j = d - x_{0j}$, $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

A temperatura no cilindro é dada pela (3.11), para o cilindro Ω_j escreveremos,

$$T_c^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{(j)} J_m(q_{cj} r_j) e^{im\theta_j}. \tag{3.36}$$

Analogamente a discussão da secção anterior, 3.2.1, com relação às soluções do campo espacial de temperatura na matriz com dois cilindros, requer o conhecimento dos valores de $4(2|m| + 1)$ coeficientes térmicos $A_m^{(1)}$, $A_m^{(2)}$, $B_m^{(1)}$ e $B_m^{(2)}$; que novamente podem ser obtidos com as condições de contorno nas superfícies dos cilindros (3.12) e (3.13):

$$\begin{aligned}
T_c^{(j)}(r_j = a_j) &= T_M(r_j = a_j), & \forall \theta_j \\
K_{cj} \nabla T_c^{(j)}(r_j = a_j) &= K_M \nabla T_M(r_j = a_j).
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Substituindo as equações (3.35) e (3.36) nas condições (3.37), obtemos o seguinte sistema de $4(2|m| + 1)$ equações, que são:

Para $j = 1$,

$$\begin{aligned}
T_0 e^{iq_M d_1} i^{-m} J_m(q_M a_1) + A_m^{(1)} H_m(q_M a_1) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2)} H_{m-n}(q_M r_{12}) J_m(q_M a_1) e^{-i(m-n)\theta_{12}} = \\
B_m^{(1)} J_m(q_{c1} a_1), \\
K_M q_M [T_0 e^{iq_M d_1} i^{-m} J'_m(q_M a_1) + A_m^{(1)} H'_m(q_M a_1) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2)} H_{m-n}(q_M r_{12}) J'_m(q_M a_1) e^{-i(m-n)\theta_{12}}] = \\
K_{c1} q_{c1} B_m^{(1)} J'_m(q_{c1} a_1).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Para $j = 2$,

$$\begin{aligned}
T_0 e^{iq_M d_2} i^{-m} J_m(q_M a_2) + A_m^{(2)} H_m(q_M a_2) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} H_{m-n}(q_M r_{21}) J_m(q_M a_2) e^{-i(m-n)\theta_{21}} = \\
B_m^{(2)} J_m(q_{c2} a_2), \\
K_M q_M [T_0 e^{iq_M d_2} i^{-m} J'_m(q_M a_2) + A_m^{(2)} H'_m(q_M a_2) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} H_{m-n}(q_M r_{21}) J'_m(q_M a_2) e^{-i(m-n)\theta_{21}}] = \\
K_{c2} q_{c2} B_m^{(2)} J'_m(q_{c2} a_2).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Organizando as equações (3.38) e (3.39) na forma,

$$\begin{aligned}
& A_m^{(1)} + \frac{J_m(q_M a_1)}{H_m(q_M a_1)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2)} H_{m-n}(q_M r_{12}) e^{-i(m-n)\theta_{12}} - B_m^{(1)} \frac{J_m(q_{c1} a_1)}{H_m(q_M a_1)} = \\
& -T_0 i^{-m} e^{iq_M d_1} \frac{J_m(q_M a_1)}{H_m(q_M a_1)}, \\
& A_m^{(2)} + \frac{J_m(q_M a_2)}{H_m(q_M a_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} H_{m-n}(q_M r_{21}) e^{-i(m-n)\theta_{21}} - B_m^{(2)} \frac{J_m(q_{c2} a_2)}{H_m(q_M a_2)} = \\
& -T_0 i^{-m} e^{iq_M d_2} \frac{J_m(q_M a_2)}{H_m(q_M a_2)},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
& A_m^{(1)} + \frac{J'_m(q_M a_1)}{H'_m(q_M a_1)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2)} H_{m-n}(q_M r_{12}) e^{-i(m-n)\theta_{12}} - B_m^{(1)} \frac{K_{c1} q_{c1}}{K_M q_M} \frac{J'_m(q_{c1} a_1)}{H'_m(q_M a_1)} = \\
& -T_0 i^{-m} e^{iq_M d_1} \frac{J'_m(q_M a_1)}{H'_m(q_M a_1)} \\
& A_m^{(2)} + \frac{J'_m(q_M a_2)}{H'_m(q_M a_2)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} H_{m-n}(q_M r_{21}) e^{-i(m-n)\theta_{21}} - B_m^{(2)} \frac{K_{c2} q_{c2}}{K_M q_M} \frac{J'_m(q_{c2} a_2)}{H'_m(q_M a_2)} = \\
& -T_0 i^{-m} e^{iq_M d_2} \frac{J'_m(q_M a_2)}{H'_m(q_M a_2)}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Analogamente a (3.19), representamos as equações (3.40) e (3.41) na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{S}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(2)} \\ \mathbf{I} & \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{Z}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \end{pmatrix}, \tag{3.42}$$

na qual aparecem novos blocos de matrizes, dados por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}^{(1,2)} &= [M_{mn}^{(1,2)}] \quad , \quad \mathbf{M}^{(2,1)} = [M_{mn}^{(2,1)}] \\
\mathbf{N}^{(1,2)} &= [N_{mn}^{(1,2)}] \quad \text{e} \quad \mathbf{N}^{(2,1)} = [N_{mn}^{(2,1)}],
\end{aligned} \tag{3.43}$$

que são matrizes quadradas cheias de ordem $2|m| + 1$, cujos elementos são dados por:

$$\begin{aligned}
M_{mn}^{(1,2)} &= P_m^{(1)} H_{m-n}(q_M r_{12}) e^{-i(m-n)\theta_{12}} \quad , \quad M_{mn}^{(2,1)} = P_m^{(2)} H_{m-n}(q_M r_{21}) e^{-i(m-n)\theta_{21}} \\
N_{mn}^{(1,2)} &= Q_m^{(1)} H_{m-n}(q_M r_{12}) e^{-i(m-n)\theta_{12}} \quad \text{e} \quad N_{mn}^{(2,1)} = Q_m^{(2)} H_{m-n}(q_M r_{21}) e^{-i(m-n)\theta_{21}}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde, análogo a (3.23), temos

$$K_j = \frac{K_{cj} q_{cj}}{K_M q_M}, \quad P_m^{(j)} = \frac{J_m(q_M a_j)}{H_m(q_M a_j)} \quad \text{e} \quad Q_m^{(j)} = \frac{J'_m(q_M a_j)}{H'_m(q_M a_j)}. \tag{3.45}$$

Além das matrizes identidade, \mathbf{I} , e nula, $\mathbf{0}$, também temos as matrizes diagonais de ordem $2|m| + 1$

$$\mathbf{S}^{(j)} = \text{diag}[-S_m^{(j)}] \quad \text{e} \quad \mathbf{Z}^{(j)} = \text{diag}[-K_j Z_m^{(j)}], \tag{3.46}$$

as quais são análogas a (3.20), cujos elementos são,

$$S_m^{(j)} = \frac{J_m(qc_j a_j)}{H_m(qM a_j)} \quad \text{e} \quad Z_m^{(j)} = \frac{J'_m(qc_j a_j)}{H'_m(qM a_j)}; \quad (3.47)$$

e por fim, os vetores de ordem $2|m| + 1$,

$$\mathbf{a}^{(j)} = [A_m^{(j)}], \quad \mathbf{b}^{(j)} = [B_m^{(j)}], \quad \mathbf{i}^{(j)} = -T_0 e^{iqM d_j} [\mathbf{i}_m] \quad \text{e} \quad \mathbf{g}^{(j)} = -T_0 e^{iqM d_j} [\mathbf{g}_m], \quad (3.48)$$

onde temos novamente os elementos,

$$\mathbf{i}_m = i^{-m} P_m^{(j)} \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_m = i^{-m} Q_m^{(j)}. \quad (3.49)$$

Novamente, temos como solução para (3.42):

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{v}, \quad (3.50)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{v} são:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.51)$$

são vetores de ordem $4(2|m| + 1)$, com

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{i} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

são vetores de ordem $2(2|m| + 1)$. Para meios infinitos com dois cilindros, temos que

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{pmatrix}, \quad (3.53)$$

é uma matriz quadrada de ordem $4(2|m| + 1)$, e

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{M}^{(1,2)} \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{N}^{(1,2)} \\ \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(2)} \end{pmatrix},$$

são matrizes quadradas de ordem $2(2|m| + 1)$.

Calculado (3.50), podemos substituir as constantes $A_m^{(j)}$ e $B_m^{(j)}$ em (3.35) e (3.36) para calcular a distribuição da temperatura em toda a amostra com dois cilindros inclusos.

3.2.3 Meio semi-finito com um cilindro

Nas secções anteriores não foram consideradas as contribuições na temperatura devido ao efeito de fronteira da amostra. Para incluir estas contribuições, nos cálculos posteriores será considerada a condição adiabática de temperatura na superfície do material. Ou seja, não haverá fluxo de calor através dela, de forma que toda onda térmica que se propaga na matriz é refletida ao incidir na superfície. Logo, a superfície se comporta como um espelho para as ondas térmicas. Portanto, podemos utilizar o teorema das imagens para simular a contribuição desta reflexão. Este teorema consiste em considerar ondas vindas do cilindro físico, refletidas pela superfície, como ondas vindas de sua imagem que está por trás do “espelho”.

Portanto, modelamos o efeito adiabático da fronteira mediante a simetria do domínio incluindo novos cilindros em posições especulares com respeito à fronteira. O fato de que a solução seja simétrica garante que a derivada normal seja nula no eixo de simetria ($\nabla T = 0$), condição de fluxo nulo na superfície.

A situação esquemática está representada na Figura 3.5. Na qual a Figura 3.5(a) representa a geometria do domínio real, onde temos um cilindro físico Ω submerso à superfície do material e a Figura 3.5(b) apresenta a geometria equivalente após a utilização do teorema das imagens, onde denominamos o cilindro físico de Ω_1 e o cilindro imagem de Ω_2 .

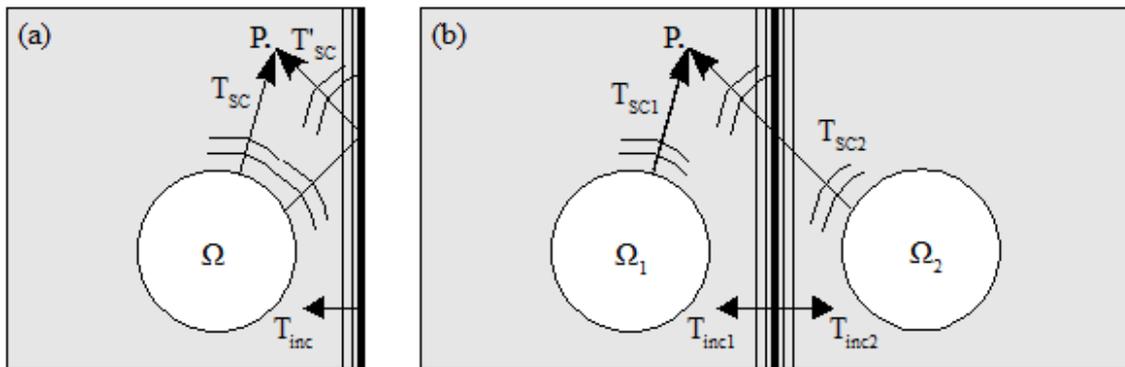


Figura 3.5: (a) geometria do caso real de um cilindro físico submerso à superfície do meio semi-infinito; (b) geometria equivalente após a utilização do teorema das imagens.

No caso real, Fig. 3.5(a), a onda térmica incidente, T_{inc} , gerada na superfície e que se propaga para a esquerda, atinge o cilindro. Uma parte desta onda é transmitida para dentro do cilindro e a outra é espalhada na superfície deste em todas as direções do material; a onda espalhada que atinge a fronteira do material é totalmente refletida e volta a se propagar na matriz. Portanto, a temperatura no ponto P do material é dado por:

$$T_M = T_{inc} + T_{esp} + T'_{esp}, \quad (3.55)$$

onde, T'_{esp} é a contribuição da temperatura que foi espalhada pelo cilindro Ω e refletida na superfície.

A geometria real do problema está esquematizada na Fig. 3.5(a) que é matematicamente equivalente ao da Fig. 3.5(b). Logo, por conveniência matemática, tratamos o problema da Fig. 3.5(a) utilizando o teorema das imagens esquematizado na Fig. 3.5(b), onde foi atrelado ao domínio real um domínio simétrico. Com isto, substituímos a onda refletida na fronteira do material por uma onda espalhada vindo diretamente do cilindro simétrico Ω_2 . Esta é resultado da incidência de T_{inc2} (que se propaga para direita) no cilindro Ω_2 .

Conseqüentemente, tratamos o problema de um cilindro em meio semi-infinito analogamente ao problema tratado na secção 3.2.2, de dois cilindros em meios infinitos. Com isto, substituímos o modelo matemático, representado pela (3.55), por:

$$T_M(r_1, \theta_1) = T_{inc}(r_1, \theta_1) + T_{esp}^{(1)}(r_1, \theta_1) + T_{esp}^{(2)}(r_1, \theta_1), \quad (3.56)$$

que é o mesmo da (3.28) com relação ao sistema de referência do cilindro Ω_1 .

Por Ω_2 ser um cilindro simétrico de Ω_1 , a (3.29) não nos fornece informações adicionais ao sistema, portanto não será exibida aqui.

Repetindo o formalismo utilizado na secção 3.2.2 a equação (3.56) é escrita na forma:

$$\begin{aligned} T_M(r_1, \theta_1) = & T_0 e^{iq_M d_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} + \\ & + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(1)} H_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} + \\ & + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{12}) J_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} e^{-i(m-n)\theta_{12}}, \end{aligned} \quad (3.57)$$

onde $r_{12} > r_1$ e d_1 é a distância do centro do cilindro físico Ω_1 à superfície do material.

Visto que a superfície é um eixo de simetria e o cilindro Ω_2 é a imagem de Ω_1 , então temos uma relação entre os coeficientes térmicos $A_m^{(1)}$ e $A_m^{(2)}$. Tendo em conta a simetria mostrada na Fig.3.6, tem-se que a temperatura no ponto \mathbf{r}_1 é igual a do ponto \mathbf{r}_2 equidistante ao eixo de simetria.

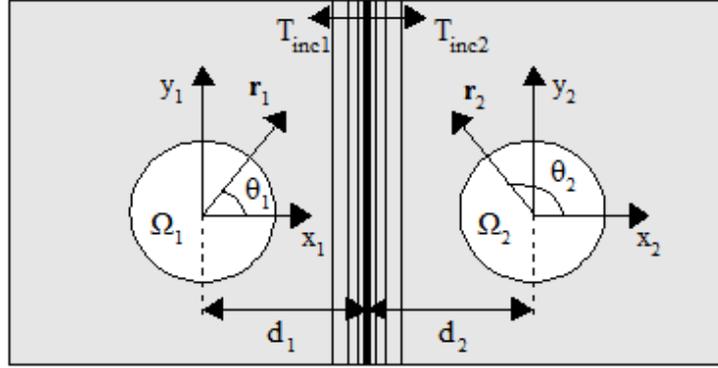


Figura 3.6: a) geometria esquemática do cilindro físico Ω_1 e seu simétrico Ω_2 .

O que nos leva a igualdade,

$$\begin{aligned} T_{esp}^{(1)}(r_1, \theta_1) &= T_{esp}^{(2)}(r_2, \theta_2) \\ &= T_{esp}(r_1, \pi - \theta_1), \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde utilizamos as igualdades $r_1 = r_2$ e $\theta_2 = \pi - \theta_1$. Tendo em conta que $H_n = (-1)^n H_{-n}$, se estabelece a seguinte relação entre coeficientes,

$$A_n^{(2)} = A_{-n}^{(1)}. \quad (3.59)$$

Aplicando esta propriedade, reduzimos o número de incógnitas na (3.57) e a escrevemos em função unicamente dos coeficientes $A_n^{(1)}$, na forma:

$$\begin{aligned} T_M(r_1, \theta_1) &= T_0 e^{iq_M d_1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(1)} H_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m+n}(q_M r_{12}) J_m(q_M r_1) e^{im\theta_1} e^{-i(m+n)\theta_{12}}. \end{aligned} \quad (3.60)$$

A temperatura dentro do cilindro Ω_1 com relação ao seu sistema de referência é dada por,

$$T_c^{(1)}(r_1, \theta_1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{(1)} J_m(q_c r_1) e^{im\theta_1}. \quad (3.61)$$

Analogamente ao meio infinito discutido na secção 3.2.1, as soluções do campo de temperatura na matriz e no cilindro requerem o conhecimento dos valores de $2(2|m| + 1)$ constantes $A_m^{(1)}$ e $B_m^{(1)}$, que são obtidas substituindo as equações (3.60) e (3.61) nas condições de contorno; continuidade de temperatura e fluxo de calor na superfície do cilindro de raio a ,

$$\begin{aligned} T_c^{(1)}(r_1 = a) &= T_M(r_1 = a), \\ K_c \nabla T_c^{(1)}(r_1 = a) &= K_M \nabla T_M(r_1 = a), \end{aligned} \quad \forall \theta_1, \quad (3.62)$$

que novamente resultam em $2(2|m| + 1)$ equações dadas por:

$$\begin{aligned} B_m^{(1)} J_m(q_c a) &= T_0 e^{iq_M d_1} i^{-m} J_m(q_M a) + A_m^{(1)} H_m(q_M a) + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} H_{m+n}(q_M r_{12}) J_m(q_M a) e^{-i(m+n)\theta_{12}}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

e

$$\begin{aligned} K_c q_c B_m^{(1)} J'_m(q_c a) &= K_M q_M T_0 e^{iq_M d_1} i^{-m} J'_m(q_M a) + K_M q_M A_m^{(1)} H'_m(q_M a) + \\ &+ K_M q_M \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(1)} H_{m+n}(q_M r_{12}) J'_m(q_M a) e^{-i(m+n)\theta_{12}}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

com m variando de $-\infty$ a $+\infty$.

As equações (3.63) e (3.64) podem ser representadas na forma:

$$\begin{aligned} -T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} \frac{J_m(q_M a)}{H_m(q_M a)} &= A_m - B_m \frac{J_m(q_c a)}{H_m(q_M a)} + \\ &+ \frac{J_m(q_M a)}{H_m(q_M a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_{m+n}(q_M r_{12}) e^{-i(m+n)\theta_{12}}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} -T_0 e^{iq_M d'} i^{-m} \frac{J'_m(q_M a)}{H'_m(q_M a)} &= A_m - \frac{K_c q_c}{K_M q_M} B_m \frac{J'_m(q_c a)}{H'_m(q_M a)} + \\ &\frac{J'_m(q_M a)}{H'_m(q_M a)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n H_{m+n}(q_M r_{12}) e^{-i(m+n)\theta_{12}}, \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde redefinimos $A_m^{(1)} \equiv A_m$ e $d_1 = d'$.

Para simplificar a notação escrevemos as equações (3.65) e (3.66) na forma vetorial, representada por matrizes e vetores,

$$\begin{aligned} \mathbf{Ia} + \mathbf{Sb} + \mathbf{Ea} &= \mathbf{i} \\ \mathbf{Ia} + \mathbf{Zb} + \mathbf{Fa} &= \mathbf{g}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade de ordem $2|m| + 1$; \mathbf{S} e \mathbf{Z} são matrizes diagonais de ordem $2|m| + 1$, definidas em (3.20); e \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{i} e \mathbf{g} são vetores coluna de ordens $2|m| + 1$, definidos em (3.21).

Os blocos de matrizes

$$\mathbf{E} = [E_{mn}] \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = [F_{mn}], \quad (3.68)$$

são matrizes quadradas cheias de ordens $2|m| + 1$ que apareceram devido ao efeito “*espelho*” que consideramos na superfície de meios semi-infinitos; seus elementos são:

$$E_{mn} = P_m H_{m+n}(q_M r_{12}) e^{-i(m+n)\theta_{12}} \quad \text{e} \quad F_{mn} = Q_m H_{m+n}(q_M r_{12}) e^{-i(m+n)\theta_{12}}, \quad (3.69)$$

onde, conforme (3.23),

$$P_m = \frac{J_m(q_M a)}{H_m(q_M a)} \quad \text{e} \quad Q_m = \frac{J'_m(q_M a)}{H'_m(q_M a)}. \quad (3.70)$$

Finalmente representamos a equação (3.67) na forma matricial,

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}. \quad (3.71)$$

que, conforme (3.24), a solução é dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{v}, \quad (3.72)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{v} são dados por (3.26) e, para meios semi-infinito com um cilindro, temos

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.73)$$

é uma matriz quadrada de ordem $2(2|m| + 1)$.

Observe que esta simetrização tem o efeito de acrescentar uma matriz de coeficientes à já existente em (3.25), devido a isto obtemos valores para os coeficientes térmicos diferentes dos obtidos em (3.24).

3.2.4 Meio semi-finito com N cilindros

A representação esquemática de N cilindros, paralelos entre si e à superfície da amostra, num meio semi-infinito está apresentada na Figura 3.7. Na qual a Figura 3.7(a)

representa a geometria do domínio real, onde temos N cilindros submersos à superfície do material. Na Figura 3.7(b) a geometria equivalente após a utilização do teorema das imagens é observada, onde temos $2N$ cilindros. Podemos ver, por exemplo, que as ondas espalhadas pelo cilindro Ω_2 , que refletem na superfície e atingem o cilindro Ω_1 , podem ser tratadas como se fossem ondas vindo diretamente do cilindro simétrico Ω_{N+2} .

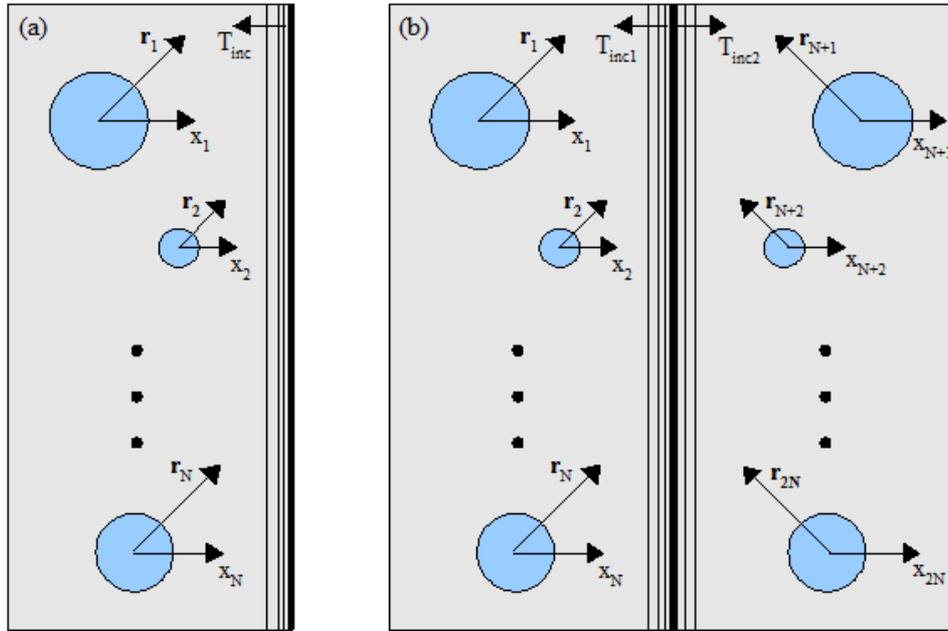


Figura 3.7: (a) geometria do caso real de N cilindros físicos submerso à superfície do meio semi-infinito; (b) geometria equivalente após a utilização do teorema das imagens.

O campo escalar de temperatura na matriz continua sendo

$$T_M = T_{inc} + T_{esp}, \quad (3.74)$$

onde T_{inc} é dada por (3.8),

$$T_{inc}(r, \theta) = T_0 e^{iq_M d} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r) e^{im\theta}, \quad (3.75)$$

porém, a temperatura espalhada é,

$$T_{esp} = \sum_{j=1}^{2N} T_{esp}^{(j)}(\mathbf{r}_j), \quad (3.76)$$

onde estão sendo somadas as ondas dos N cilindros e as de suas respectivas imagens. Conforme (3.30), temos,

$$T_{esp}^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j}. \quad (3.77)$$

Portanto, diante das equações (3.75), (3.76) e (3.77), temos que (3.74) será,

$$\begin{aligned} T_M(r_j, \theta_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,i}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,i}} \\ &\vdots \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,N}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,N}} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N+j)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,N+j}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,N+j}} \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N+i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,N+i}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,N+i}} \\ &\vdots \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2N)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,2N}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,2N}}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

onde Ω_{N+i} é o domínio simétrico de Ω_i ; $i, j = 1, 2, \dots, N$ e $i \neq j \neq N$; a expressão anterior é válida para a região

$$\left(\min_{1 \leq k \leq N, k \neq j} r_{j,k} \right) > r_j > 0, \quad (3.79)$$

que significa que a distância $r_{j,k}$, do centro do cilindro Ω_j ao centro do cilindro mais próximo Ω_k , deve ser menor do que r_j , do centro do cilindro Ω_j ao ponto na matriz.

Tendo em conta a simetria do problema, discutido na secção 3.2.3, tem-se a identidade

$$T_{esp}^{(j)}(r, \theta) = T_{esp}^{(N+j)}(r, \pi - \theta), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.80)$$

onde obtemos a forma mais geral da relação entre os coeficientes (3.59),

$$A_n^{(N+j)} = A_{-n}^{(j)}. \quad (3.81)$$

Aplicando a propriedade (3.81) à (3.78) podemos escrevê-la em função unicamente dos coeficientes $A_n^{(j)}$, $j = 1, \dots, N$.

$$\begin{aligned}
T_M(r_j, \theta_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
&+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,i}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,i}} \\
&\vdots \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,N}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,N}} \quad (3.82) \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(j)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m+n}(q_M r_{j,N+j}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m+n)\theta_{j,N+j}} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m+n}(q_M r_{j,N+i}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m+n)\theta_{j,N+i}} \\
&\vdots \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m+n}(q_M r_{j,2N}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m+n)\theta_{j,2N}}.
\end{aligned}$$

A temperatura no cilindro Ω_j é dado por (3.36),

$$T_c^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{(j)} J_m(q_{c_j} r_j) e^{im\theta_j}. \quad (3.83)$$

Substituindo a temperatura interna de cada cilindro Ω_j , (3.83), e na matriz, (3.82), na condição de contorno, a continuidade de temperatura será

$$T_c^{(j)}(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j} = T_M(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j}, \quad (3.84)$$

temos,

$$\begin{aligned}
B_m^{(j)} J_m(q_{cj} a_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} i^{-m} J_m(q_M a_j) + A_m^{(j)} H_m(q_M a_j) + \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m-n}(q_M r_{j,i}) J_m(q_M a_j) e^{-i(m-n)\theta_{j,i}} \\
&\vdots \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N)} H_{m-n}(q_M r_{j,N}) J_m(q_M a_j) e^{-i(m-n)\theta_{j,N}} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(j)} H_{m+n}(q_M r_{j,N+j}) J_m(q_M a_j) e^{-i(m+n)\theta_{j,N+j}} \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m+n}(q_M r_{j,N+i}) J_m(q_M a_j) e^{-i(m+n)\theta_{j,N+i}} \\
&\vdots \\
&+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N)} H_{m+n}(q_M r_{j,2N}) J_m(q_M a_j) e^{-i(m+n)\theta_{j,2N}},
\end{aligned} \tag{3.85}$$

que reescrevemos na forma,

$$\begin{aligned}
B_m^{(j)} \frac{J_m(q_{cj} a_j)}{H_m(q_M a_j)} &= T_0 e^{iq_M d_j} i^{-m} \frac{J_m(q_M a_j)}{H_m(q_M a_j)} + A_m^{(j)} + \\
&+ \frac{J_m(q_M a_j)}{H_m(q_M a_j)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m-n}(q_M r_{j,i}) e^{-i(m-n)\theta_{j,i}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{J_m(q_M a_j)}{H_m(q_M a_j)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N)} H_{m-n}(q_M r_{j,N}) e^{-i(m-n)\theta_{j,N}} \\
&+ \frac{J_m(q_M a_j)}{H_m(q_M a_j)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(j)} H_{m+n}(q_M r_{j,N+j}) e^{-i(m+n)\theta_{j,N+j}} \\
&+ \frac{J_m(q_M a_j)}{H_m(q_M a_j)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m+n}(q_M r_{j,N+i}) e^{-i(m+n)\theta_{j,N+i}} \\
&\vdots \\
&+ \frac{J_m(q_M a_j)}{H_m(q_M a_j)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(N)} H_{m+n}(q_M r_{j,2N}) e^{-i(m+n)\theta_{j,2N}}.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Representamos na forma vetorial, temos

$$\mathbf{I} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{M}^{(j,i)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{M}^{(j,N)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{E}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{E}^{(j,i)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{E}^{(j,N)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{S}^{(j)} \mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{i}^{(j)}, \tag{3.87}$$

para $i, j = 1, \dots, N; i \neq j$; e, conforme (3.48),

$$\mathbf{a}^{(j)} = [A_m^{(j)}], \quad \mathbf{b}^{(j)} = [B_m^{(j)}] \quad \text{e} \quad \mathbf{i}^{(j)} = -T_0 e^{iq_M d_j} [\mathbf{i}_m^{(j)}], \quad \text{com} \quad \mathbf{i}_m^{(j)} = i^{-m} P_m^{(j)}, \tag{3.88}$$

são vetores de ordem $2|m| + 1$; $P_m^{(j)}$ é dado pela (3.45). Além disso,

$$\mathbf{M}^{(j,i)} = [M_{mn}^{(j,i)}], \quad \text{com}, \quad M_{mn}^{(j,i)} = P_m^{(j)} H_{m-n}(q_M r_{j,i}) e^{-i(m-n)\theta_{j,i}}, \tag{3.89}$$

para $i \neq j = 1, \dots, N$. Esta é a forma mais geral de (3.43), além de matriz quadrada e cheia, de ordem $2|m| + 1$. Da mesma forma, podemos representar a equação (3.68) de forma mais geral:

$$\mathbf{E}^{(j,i)} = [E_{mn}^{(j,i)}], \quad \text{com,} \quad E_{mn}^{(j,i)} = P_m^{(j)} H_{m+n}(q_M r_{j,N+i}) e^{-i(m+n)\theta_{j,N+i}}; \quad (3.90)$$

para $i, j = 1, \dots, N$. Conforme já definido em (3.46), temos também

$$\mathbf{S}^{(j)} = \text{diag}[-S_m^{(j)}], \quad \text{com,} \quad S_m^{(j)} = \frac{J_m(q_{c_j} a_j)}{H_m(q_M a_j)}, \quad (3.91)$$

que é uma matriz diagonal de ordem $2|m| + 1$.

Escrevendo (3.87) na forma matricial,

$$\left[\left(\mathbf{I} \quad \mathbf{M}^{(j,i)} \quad \dots \quad \mathbf{M}^{(j,N)} \quad \mathbf{S}^{(j)} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) + \left(\mathbf{E}^{(j,j)} \quad \mathbf{E}^{(j,i)} \quad \dots \quad \mathbf{E}^{(j,N)} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right) \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{a}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \left(\mathbf{i}^{(j)} \right), \quad (3.92)$$

substituindo os valores $i, j = 1, 2, \dots, N$; temos,

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{I} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{M}^{(1,N)} & \mathbf{S}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{M}^{(2,N)} & 0 & \mathbf{S}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}^{(N,1)} & \mathbf{M}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{S}^{(N)} \end{array} \right] + \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc} \mathbf{E}^{(1,1)} & \mathbf{E}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(1,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{E}^{(2,1)} & \mathbf{E}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(2,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}^{(N,1)} & \mathbf{E}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,N)} & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{array} \right) \end{array} = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)} \end{array} \right) \end{array}. \quad (3.93)$$

De forma análoga ao cálculo realizado para a continuidade de temperatura, temos para a continuidade de fluxo de calor,

$$K_{cj} \nabla T_c^{(j)}(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j} = K_M \nabla T_M(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j}, \quad (3.94)$$

a equação,

$$\mathbf{I} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{N}^{(j,i)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{N}^{(j,N)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{F}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{F}^{(j,i)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{F}^{(j,N)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{Z}^{(j)} \mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{g}^{(j)}, \quad (3.95)$$

que é uma forma análoga a equação (3.87), onde, para $Q_m^{(j)} = J'_m(q_M a_j)/H'_m(q_M a_j)$, temos,

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(j,i)} &= [N_{mn}^{(j,i)}], \quad \text{com,} \quad N_{mn}^{(j,i)} = Q_m^{(j)} H_{m-n}(q_M r_{j,i}) e^{-i(m-n)\theta_{j,i}}; \\ \mathbf{F}^{(j,j)} &= [F_{mn}^{(j,j)}], \quad \text{com,} \quad F_{mn}^{(j,j)} = Q_m^{(j)} H_{m+n}(q_M r_{j,N+j}) e^{-i(m+n)\theta_{j,N+j}}; \\ \mathbf{F}^{(j,i)} &= [F_{mn}^{(j,i)}], \quad \text{com,} \quad F_{mn}^{(j,i)} = Q_m^{(j)} H_{m+n}(q_M r_{j,N+i}) e^{-i(m+n)\theta_{j,N+i}}; \end{aligned} \quad (3.96)$$

que são matrizes quadradas, cheias de ordem $2|m| + 1$;

$$\mathbf{Z}^{(j)} = \text{diag}[-K_j Z_m^{(j)}], \quad \text{com} \quad K_j = \frac{K_{cj} q_{cj}}{K_M q_M} \quad e \quad Z_m^{(j)} = \frac{J'_m(q_{cj} a_j)}{H'_m(q_M a_j)}, \quad (3.97)$$

é uma matriz diagonal de ordem $2|m| + 1$. Podemos definir o vetor coluna

$$\mathbf{g}^{(j)} = -T_0 e^{iq_M d_j} [\mathbf{g}_m^{(j)}], \quad \text{com,} \quad \mathbf{g}_m^{(j)} = i^{-m} P_m^{(j)}, \quad (3.98)$$

que é de ordem $2|m| + 1$.

Assim, obtemos,

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{N}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{N}^{(1,N)} & \mathbf{Z}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{N}^{(2,N)} & 0 & \mathbf{Z}^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}^{(N,1)} & \mathbf{N}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}^{(N)} \end{pmatrix} + \right. \\
 & \left. \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{(1,1)} & \mathbf{F}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(1,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{F}^{(2,1)} & \mathbf{F}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(2,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}^{(N,1)} & \mathbf{F}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,N)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(N)} \end{pmatrix}. \tag{3.99}
 \end{aligned}$$

As condições de temperatura e fluxo nos fornecem,

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{M}^{(1,N)} & \mathbf{S}^{(1,1)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{M}^{(2,N)} & 0 & \mathbf{S}^{(2,2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}^{(N,1)} & \mathbf{M}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{S}^{(N,N)} \\ \mathbf{I} & \mathbf{N}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{N}^{(1,N)} & \mathbf{Z}^{(1,1)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{I} & \dots & \mathbf{N}^{(2,N)} & 0 & \mathbf{Z}^{(2,2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}^{(N,1)} & \mathbf{N}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{I} & 0 & 0 & \dots & \mathbf{Z}^{(N,N)} \end{pmatrix} + \right. \quad (3.100)$$

$$\left. + \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(1,1)} & \mathbf{E}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(1,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{E}^{(2,1)} & \mathbf{E}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(2,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}^{(N,1)} & \mathbf{E}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{F}^{(1,1)} & \mathbf{F}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(1,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{F}^{(2,1)} & \mathbf{F}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(2,N)} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}^{(N,1)} & \mathbf{F}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,N)} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(N)} \end{pmatrix},$$

ou ainda

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.101)$$

cujas solução é dada por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{v}, \quad (3.102)$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{v} são:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.103)$$

são vetores de ordem $2N(2|m| + 1)$, onde \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{i} e \mathbf{g} são generalizações de (3.52) para vetores com $N(2|m| + 1)$. Para meios semi-infinito com N cilindros, temos

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

que é uma matriz quadrada de ordem $2N(2|m| + 1)$. Aqui, as matrizes \mathbf{M} , \mathbf{N} , \mathbf{S} e \mathbf{Z} são generalizações das obtidas na equação (3.54), sendo matrizes quadradas de ordem $N(2|m| + 1)$. Por fim,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(1,1)} & \mathbf{E}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(1,N)} \\ \mathbf{E}^{(2,1)} & \mathbf{E}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{E}^{(N,1)} & \mathbf{E}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,N)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{(1,1)} & \mathbf{F}^{(1,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(1,N)} \\ \mathbf{F}^{(2,1)} & \mathbf{F}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \mathbf{F}^{(N,1)} & \mathbf{F}^{(N,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,N)} \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

são matrizes de ordem $N(2|m| + 1)$ que aparecem devido à simetria adotada na superfície do material semi-infinito, conforme já discutido na secção 3.2.3.

Obtido os coeficientes térmicos calculados por (3.101), podemos substituí-los nas equações (3.82) e (3.83) para calcular a temperatura na matriz ou em qualquer cilindro.

3.3 Espalhamento de ondas por esferas

Vamos continuar com a situação de que $T_{inc}(\mathbf{r})$ é uma onda térmica plana no ponto \mathbf{r} , se propagando na direção $\hat{\mathbf{k}}$ de um meio homogêneo e infinito. Para esta situação, analogamente a (2.6), $T_{inc}(\mathbf{r})$ é dada por

$$T_{inc}(\mathbf{r}) = T_0 e^{iq_M(\mathbf{r}-\mathbf{d}) \cdot \hat{\mathbf{k}}}, \quad (3.106)$$

que, conforme (2.42) pode ser representada por

$$T_{inc}(\mathbf{r}) = T_0 e^{-iq_M \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{k}}} 4\pi \sum_{nm} i^n j_n(q_M r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}, \quad (3.107)$$

onde, no \mathbb{R}^3 , temos

$$\hat{\mathbf{k}} = (\text{sen}\theta_K \cos\phi_K, \text{sen}\theta_K \text{sen}\phi_K, \cos\theta_K). \quad (3.108)$$

Para o caso particular em que a onda plana se propaga na direção $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{z}}$, ou seja, $\theta_k = -\pi$, ϕ_k é qualquer. Isto significa que a mesma é simétrica em torno do eixo z , logo, a onda plana não depende dos ângulos ϕ e ϕ_k que estão no plano (x, y) . Matematicamente, isto é visto quando substituimos a condição $\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{z}}$ em (A.3) e obtemos,

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{k}}) = Y_n^m(-\pi, \phi_k) = (-1)^{m+n} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} e^{im\phi_k} \delta_{0m}, \quad (3.109)$$

onde utilizamos $P_n^m(-1) = (-1)^n \delta_{0m}$. Consequentemente a soma dos produtos dos harmônicos esféricos em (3.107) são simplificados na forma:

$$\sum_m Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})} = \frac{(2n+1)}{4\pi} (-1)^n P_n(\cos \theta), \quad (3.110)$$

onde utilizamos a notação $P_n^0(\cos \theta) = P_n(\cos \theta)$. Substituindo (3.110) em (3.107), temos [48, 49],

$$T_{inc}(\mathbf{r}) = T_0 e^{iq_M d} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{-n} j_n(q_M r) P_n(\cos \theta), \quad (3.111)$$

onde a igualdade $(-1)^n i^n = i^{-n}$ foi utilizada.

3.3.1 Meio infinito com uma esfera

Nesta secção consideraremos meios homogêneos e infinitos. Logo, utilizaremos (3.111) como sendo a onda térmica plana que se propaga na matriz. Nesse meio está inserida uma esfera de raio a , difusividade térmica D_s e condutividade térmica K_s , figura 3.8.

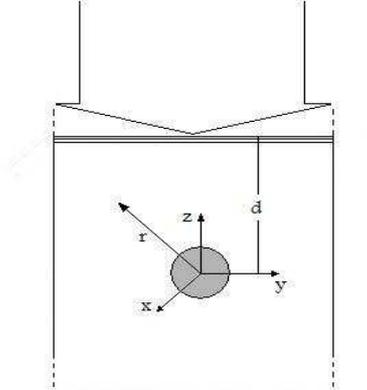


Figura 3.8: Onda térmica plana se propagando num meio infinito e homogêneo com uma esfera incluída.

Na secção (2.2.4), vimos que as ondas que se propagam na região externa e interna a uma casca esférica são dadas respectivamente por (2.71) e (2.72), onde, devido aos meios interno e externo à casca serem os mesmos, estas ondas possuem o mesmo número de onda q . Porém, para uma esfera maciça com as propriedades térmicas diferentes da matriz, chamaremos q_s o número de onda térmica da esfera e, novamente, q_M da matriz.

Os coeficientes térmicos b_n^m também devem ser diferentes nas regiões interna e externa à esfera. Chamaremos de A_n os coeficientes térmicos da onda térmica na matriz e B_n na esfera, nos quais omitimos o índice m , pois, para um meio com apenas uma esfera e o sistema de referência em seu centro, por simetria, não há dependência em ϕ . Portanto, conforme (2.71) e as considerações acima, a onda espalhada pela esfera que se propaga na matriz é da forma [44]

$$T_{esp}(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{nm} A_n j_n(q_M a) i^n h_n(q_M r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}. \quad (3.112)$$

Conforme (2.72), a onda absorvida pela esfera (T_s) se propaga em seu interior com a forma,

$$T_s(\mathbf{r}) = 4\pi \sum_{nm} B_n h_n(q_s a) i^n j_n(q_s r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{k}})}. \quad (3.113)$$

Utilizando (3.110), as equações (3.112) e (3.113) serão [49],

$$T_{esp}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2n+1) i^{-n} j_n(q_M a) h_n(q_M r) P_n(\cos \theta), \quad (3.114)$$

$$T_s(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (2n+1) i^{-n} h_n(q_s a) j_n(q_s r) P_n(\cos \theta). \quad (3.115)$$

Portanto, (3.6) será:

$$\begin{aligned} T_M(\mathbf{r}) &= T_0 e^{iq_M d} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) i^{-n} j_n(q_M r) P_n(\cos \theta) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} A_n (2n+1) i^{-n} j_n(q_M a) h_n(q_M r) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (3.116)$$

Para obtermos os coeficientes térmicos, utilizamos as condições de contorno.

Condições de contorno

As condições de contorno são:

$$\begin{aligned} T_M|_{r=a}(\mathbf{r}) &= T_s|_{r=a}(\mathbf{r}), \\ K_M \nabla T_M|_{r=a}(\mathbf{r}) &= K_s \nabla T_s|_{r=a}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.117)$$

Substituindo (3.116) e (3.115) em (3.117)

$$\begin{aligned} T_0 e^{iq_M d} j_n(q_M a) + A_n j_n(q_M a) h_n(q_M a) &= B_n h_n(q_s a) j_n(q_s a), \\ K_M q_M T_0 e^{iq_M d} j_n'(q_M a) + K_M q_M A_n j_n(q_M a) h_n'(q_M a) &= K_s q_s B_n h_n(q_s a) j_n'(q_s a), \end{aligned} \quad (3.118)$$

onde j' e h' são as derivadas das funções de Bessel esféricas dadas por (2.74).

Organizando (3.118) na forma,

$$A_n j_n(q_M a) h_n(q_M a) - B_n h_n(q_s a) j_n(q_s a) = -T_0 e^{iq_M d} j_n(q_M a), \quad (3.119)$$

$$A_n j_n(q_M a) h'_n(q_M a) - B_n \frac{K_s q_s}{K_M q_M} h_n(q_s a) j'_n(q_s a) = -T_0 e^{iq_M d} j'_n(q_M a), \quad (3.120)$$

podemos apresentá-las na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} j_n(q_M a) h_n(q_M a) & -h_n(q_s a) j_n(q_s a) \\ j_n(q_M a) h'_n(q_M a) & -\frac{K_s q_s}{K_M q_M} h_n(q_s a) j'_n(q_s a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_n \\ B_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T_0 e^{iq_M d} j_n(q_M a) \\ -T_0 e^{iq_M d} j'_n(q_M a) \end{pmatrix}, \quad (3.121)$$

que escreveremos como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.122)$$

onde $\mathbf{M} = \text{diag}[M_n]$, $\mathbf{N} = \text{diag}[N_n]$, $\mathbf{S} = \text{diag}[-S_n]$ e $\mathbf{Z} = \text{diag}[-K Z_n]$ são matrizes diagonais de ordem $n + 1$, sendo $K = \frac{K_s q_s}{K_M q_M}$ e

$$\begin{aligned} M_n &= j_n(q_M a) h_n(q_M a), & S_n &= h_n(q_s a) j_n(q_s a), \\ N_n &= j_n(q_M a) h'_n(q_M a) \quad \text{y} \quad Z_n &= h_n(q_s a) j'_n(q_s a), \end{aligned} \quad (3.123)$$

$\mathbf{i} = [-i_n]$, $\mathbf{g} = [-g_n]$, $\mathbf{a} = [A_n]$ e $\mathbf{b} = [B_n]$ são vetores coluna de ordem $n + 1$, sendo

$$i_n = T_0 e^{iq_M d} j_n(q_M a) \quad \text{y} \quad g_n = T_0 e^{iq_M d} j'_n(q_M a). \quad (3.124)$$

3.3.2 Meio infinito com duas esferas

A geometria do problema está mostrada na Figura 3.9, onde temos duas esferas em um meio infinito.

Temos portanto, analogamente à equação (3.27), que a parte espacial da temperatura espalhada é dada por:

$$T_{\text{esp}}(\mathbf{r}) = T_{\text{esp}}^{(1)}(\mathbf{r}) + T_{\text{esp}}^{(2)}(\mathbf{r}), \quad (3.125)$$

onde, $T_{\text{esp}}^{(j)}(\mathbf{r})$ é a onda no ponto \mathbf{r} espalhada pela esfera Ω_j . Para um sistema de referência no centro de uma das esferas, a presença da outra esfera provoca a perda de simetria

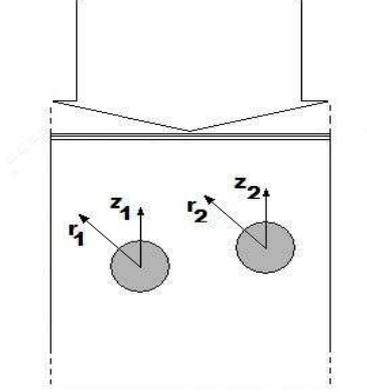


Figura 3.9: Onda térmica plana se propagando num meio infinito e homogêneo com duas esferas inclusas.

em ϕ , portanto não podemos utilizar (3.112) e sim, sua forma mais geral, (2.78), que escreveremos na forma:

$$T_{esp}^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \sum_{nm} A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j), \quad r_j > a_j, \quad (3.126)$$

onde usamos $A_n^m = 4\pi b_n^m i^n$ e o número de onda na matriz q_M .

Portanto, a temperatura na matriz, (3.6), será,

$$T_M(\mathbf{r}) = T_{inc}(\mathbf{r}) + T_{esp}^{(1)}(\mathbf{r}) + T_{esp}^{(2)}(\mathbf{r}). \quad (3.127)$$

Por conveniência escrevemos (3.111) na forma:

$$\begin{aligned} T_{inc}(\mathbf{r}) &= T_0 e^{iq_M d} \sqrt{4\pi} \sum_{nm} \sqrt{(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r) (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi} \delta_{m0}, \\ &= T_0 e^{iq_M d} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \delta_{m0}. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Representando (3.127) em função apenas das coordenadas da esfera Ω_j ,

$$\begin{aligned} T_M(\mathbf{r}_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \delta_{m0} + \\ &\quad + \sum_{nm} A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) + \\ &\quad + \sum_{nm} A_n^{m(i)} j_n(q_M a_i) \sum_{\nu\mu} R_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}_{i,j}) j_\nu(q_M r_j) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_j), \end{aligned} \quad (3.129)$$

onde utilizamos o teorema de adição (A.22) para as funções de Bessel esféricas,

$$h_n(q_M r_i) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_i) = \sum_{\nu\mu} R_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}_{i,j}) j_\nu(q_M r_j) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_j), \quad r_{i,j} > r_j \quad (3.130)$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$, sendo $\mathbf{r}_{i,j}$ o vetor distância que sai do centro de Ω_i e chega ao centro de Ω_j . A restrição indica que não podemos calcular a temperatura em pontos maiores que a distância entre seus centros r_{ij} , isto significa que o centro da esfera Ω_j não pode estar dentro da esfera Ω_i ou vice-versa.

Por conveniência, para o último termo (3.129) trocando $n \leftrightarrow \nu$ e $m \leftrightarrow \mu$, obtendo assim:

$$\begin{aligned} T_M(r_j, \theta_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \delta_{m0} + \\ &+ \sum_{nm} A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) + \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i). \end{aligned} \quad (3.131)$$

Escrevendo na forma,

$$\begin{aligned} T_M(r_j, \theta_j) &= \sum_{nm} Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \left(T_0 e^{iq_M d_j} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r_j) \delta_{m0} + \right. \\ &+ \left. A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) + j_n(q_M r_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i) \right). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Para o interior da esfera o campo de temperatura se propaga conforme (2.79), o qual escreveremos na forma

$$T_s^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \sum_{nm} B_n^{m(j)} h_n(q_s a_j) j_n(q_s r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j), \quad (3.133)$$

onde, por conveniência, redefinimos a constante $B_n^m \equiv 4\pi b_n^m i^n$.

condições de contorno

Substituindo (3.132) e (3.133) na condição de contorno

$$T_s^{(j)}(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j} = T_M(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j}, \quad (3.134)$$

temos,

$$\begin{aligned} B_n^{m(j)} h_n(q_s a_j) j_n(q_s a_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M a_j) \delta_{m0} + \\ &+ A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M a_j) + \quad i \neq j. \quad (3.135) \\ &+ j_n(q_M a_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i), \end{aligned}$$

que representamos na forma

$$M_n^{m(j,j)} A_n^{m(j)} + \sum_{\nu\mu} M_{\nu n}^{\mu m(i,j)} A_\nu^{\mu(i)} - S_n^{m(j,j)} B_n^{m(j)} = \mathbf{i}_n^{m(j)}, \quad i \neq j, \quad (3.136)$$

ou ainda,

$$\mathbf{M}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{M}^{(i,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{S}^{(j,j)} \mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{i}^{(j)}, \quad (3.137)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(i,j)} &= \begin{cases} [M_n^{m(i,j)}] & \text{para } i = j \\ [M_{\nu n}^{\mu m(i,j)}] & \text{para } i \neq j, \end{cases} \\ \mathbf{S}^{(j,j)} &= [-S_n^{m(j,j)}]. \end{aligned} \quad (3.138)$$

Diferente de (3.123), $\mathbf{M}^{(j,j)} = [M_n^{m(j,j)}]$ e $\mathbf{S}^{(j,j)} = [-S_n^{m(j,j)}]$ são matrizes diagonais de ordem $(n+1)^2$ e $\mathbf{M}^{(i,j)} = [M_{\nu n}^{\mu m(i,j)}]$, $i \neq j$, é uma matriz cheia de ordem $(n+1)^2$. $\mathbf{i}^{(j)} = [-\mathbf{i}_n^{m(j)}]$ é um vetor coluna de ordem $(n+1)^2$, sendo

$$\begin{aligned} M_n^{m(j,j)} &= j_n(q_M a_j) h_n(q_M a_j), \\ S_n^{m(j,j)} &= j_n(q_s a_j) h_n(q_s a_j), \\ M_{\nu n}^{\mu m(i,j)} &= R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) j_\nu(q_M a_i) j_n(q_M a_j), \\ \mathbf{i}_n^{m(j)} &= T_0 e^{iq_M d_j} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M a_j) \delta_{m0}. \end{aligned} \quad (3.139)$$

O primeiro termo da (3.137) pode ser representado na forma matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_0^{0(j,j)} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M_1^{-1(j,j)} & & & & & & 0 \\ 0 & & M_1^{0(j,j)} & & & & & 0 \\ 0 & & & M_1^{1(j,j)} & & & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & & M_n^{-n(j,j)} & & 0 \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & M_n^{n(j,j)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}^{(j,j)}} \underbrace{\begin{pmatrix} A_0^{0(j)} \\ A_1^{-1(j)} \\ A_1^{0(j)} \\ A_1^{1(j)} \\ \vdots \\ A_n^{-n(j)} \\ \vdots \\ A_n^{n(j)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{a}^{(j)}}. \quad (3.140)$$

O segundo termo será:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M_{00}^{00(i,j)} & M_{10}^{-10(i,j)} & M_{10}^{00(i,j)} & M_{10}^{10(i,j)} & \dots & M_{n0}^{-n0(i,j)} & \dots & M_{n0}^{n0(i,j)} \\ M_{01}^{0-1(i,j)} & M_{11}^{-1-1(i,j)} & M_{11}^{0-1(i,j)} & M_{11}^{1-1(i,j)} & \dots & M_{n1}^{-n-1(i,j)} & \dots & M_{n1}^{n-1(i,j)} \\ M_{01}^{00(i,j)} & M_{11}^{-10(i,j)} & M_{11}^{00(i,j)} & M_{11}^{10(i,j)} & \dots & M_{n1}^{-n0(i,j)} & \dots & M_{n1}^{n0(i,j)} \\ M_{01}^{01(i,j)} & M_{11}^{-11(i,j)} & M_{11}^{01(i,j)} & M_{11}^{11(i,j)} & \dots & M_{n1}^{-n1(i,j)} & \dots & M_{n1}^{n1(i,j)} \\ \vdots & \vdots \\ M_{0n}^{0-n(i,j)} & M_{1n}^{-1-n(i,j)} & M_{1n}^{0-n(i,j)} & M_{1n}^{1-n(i,j)} & \dots & M_{nn}^{-n-n(i,j)} & \dots & M_{nn}^{n-n(i,j)} \\ \vdots & \vdots \\ M_{0n}^{0n(i,j)} & M_{1n}^{-1n(i,j)} & M_{1n}^{0n(i,j)} & M_{1n}^{1n(i,j)} & \dots & M_{nn}^{-nn(i,j)} & \dots & M_{nn}^{nn(i,j)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}^{(i,j)}} \begin{pmatrix} A_0^{0(i)} \\ A_1^{-1(i)} \\ A_1^{0(i)} \\ A_1^{1(i)} \\ \vdots \\ A_n^{-n(i)} \\ \vdots \\ A_n^{n(i)} \end{pmatrix}. \quad (3.141)$$

O terceiro termo é análogo ao primeiro.

O termo da direita é:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} i_0^{0(j)} \\ i_1^{-1(j)} \\ i_1^{0(j)} \\ i_1^{1(j)} \\ \vdots \\ i_n^{-n(j)} \\ \vdots \\ i_n^{0(j)} \\ \vdots \\ i_n^{n(j)} \end{pmatrix}}_{\mathbf{i}^{(j)}} = \begin{pmatrix} -T_0 e^{iq_M d} \sqrt{4\pi} j_0(q_M a_j) \\ 0 \\ -T_0 e^{iq_M d} \sqrt{12\pi} i^{-1} j_1(q_M a_j) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ -T_0 e^{iq_M d} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M a_j) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (3.142)$$

Representando (3.137) na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(j,j)} & \mathbf{M}^{(i,j)} & \mathbf{S}^{(j,j)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (3.143)$$

Substituindo $i, j = 1, 2$ com $i \neq j$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{S}^{(1,1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(2,2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.144)$$

Analogamente à continuidade da temperatura, substituindo (3.132) e (3.133) na continuidade de fluxo de calor:

$$K_s \nabla T_s^{(j)}(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j} = K_M \nabla T_M(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j}, \quad (3.145)$$

temos,

$$\begin{aligned} \frac{K_s q_s}{K_M q_M} B_n^{m(j)} h_n(q_s a_j) j'_n(q_s a_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j'_n(q_M a_j) \delta_{m0} + \\ &+ A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h'_n(q_M a_j) + \\ &+ j'_n(q_M a_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i), \end{aligned} \quad (3.146)$$

para $i \neq j$.

É possível organizar ainda que

$$N_n^{m(j,j)} A_n^{m(j)} + \sum_{\nu\mu} N_{\nu n}^{\mu m(i,j)} A_\nu^{\mu(i)} - K Z_n^{m(j,j)} B_n^{m(j)} = g_n^{m(j)}, \quad (3.147)$$

onde

$$\begin{aligned} N_n^{m(j,j)} &= j_n(q_M a_j) h'_n(q_M a_j), \\ Z_n^{m(j,j)} &= j'_n(q_s a_j) h_n(q_s a_j), \\ N_{\nu n}^{\mu m(i,j)} &= R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) j_\nu(q_M a_i) j'_n(q_M a_j), \\ g_n^{m(j)} &= -T_0 e^{iq_M d_j} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j'_n(q_M a_j) \delta_{m0}. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Análogo a equação (3.143), representamos (3.147) na forma:

$$\mathbf{N}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{N}^{(i,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{Z}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} = \mathbf{g}^{(j)}, \quad (3.149)$$

ou ainda,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}^{(j,j)} & \mathbf{N}^{(i,j)} & \mathbf{Z}^{(j,j)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{(j)} \end{pmatrix}, \quad (3.150)$$

onde, $\mathbf{N}^{(j,j)} = [N_n^{m(j,j)}]$ e $\mathbf{Z}^{(j,j)} = [-KZ_n^{m(j,j)}]$ são matrizes diagonais de ordem $(n+1)^2$ e $\mathbf{N}^{(j,i)} = [N_{\nu n}^{\mu m(i,j)}]$ é uma matriz cheia de ordem $(n+1)^2$. $\mathbf{g}^{(j)} = [-g_n^{m(j)}]$ é um vetor coluna de ordem $(n+1)^2$.

Substituindo $i, j = 1, 2$ com $i \neq j$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{N}^{(1,1)} & \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{Z}^{(1,1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{N}^{(2,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(2,2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.151)$$

As equações (3.144) e (3.151)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{S}^{(1,1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(2,2)} \\ \mathbf{N}^{(1,1)} & \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{Z}^{(1,1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{N}^{(2,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(2,2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (3.152)$$

ou ainda

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}. \quad (3.153)$$

3.3.3 Meio semi-infinito com N esferas

Conforme discutido na secção 3.2.3, consideramos a condição adiabática na superfície da amostra. Temos portanto que não há fluxo de calor através dela, $\nabla T = 0$, e utilizamos o teorema das imagens para calcular a contribuição das ondas refletidas na superfície da amostra.

A representação esquemática de N esferas num meio semi-infinito está em Figura 3.10. Podemos ver, por exemplo, que as ondas espalhadas pela esfera Ω_2 refletem na superfície e atingem a esfera Ω_1 , podem ser tratadas como se fossem ondas espalhada diretamente de uma esfera simétrica Ω_{N+2} .

Com estas considerações, vimos portanto que a temperatura espalhada é dada por (3.76),

$$T_{esp} = \sum_{j=1}^{2N} T_{esp}^{(j)}(\mathbf{r}_j), \quad (3.154)$$

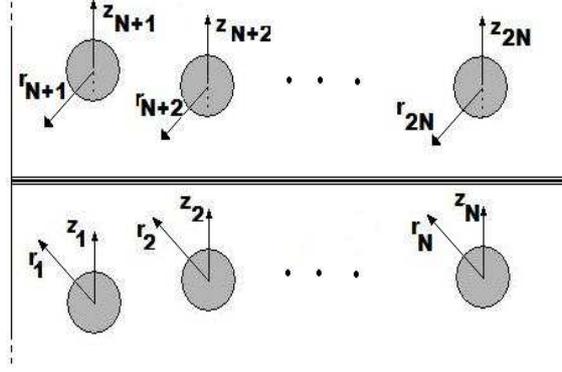


Figura 3.10: Onda térmica plana se propagando num meio semi-infinito com N esferas inclusas.

onde estão sendo somadas as ondas das N esferas e mais de suas N simetrias. Conforme (3.126), a onda espalhada pela esfera Ω_j numa posição \mathbf{r}_j é fornecida por

$$T_{esp}^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \sum_{nm} A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j). \quad (3.155)$$

Utilizando (3.6) e (3.130), escrevemos uma equação análoga a (3.78) para a temperatura na matriz, na forma:

$$\begin{aligned} T_M(r_j, \theta_j) = & T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \delta_{m0} + \\ & + \sum_{nm} A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) + \\ & + \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_{\nu}^{\mu(i)} j_{\nu}(q_M a_i) + \\ & \vdots \\ & + \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N,j}) A_{\nu}^{\mu(N)} j_{\nu}(q_M a_N) + \\ & + \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+j,j}) A_{\nu}^{\mu(N+j)} j_{\nu}(q_M a_{N+j}) + \\ & + \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j}) A_{\nu}^{\mu(N+i)} j_{\nu}(q_M a_{N+i}) + \\ & \vdots \\ & + \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{2N,j}) A_{\nu}^{\mu(2N)} j_{\nu}(q_M a_{2N}), \end{aligned} \quad (3.156)$$

onde Ω_{i+N} é o domínio simétrico de Ω_i ; $i, j = 1, 2, \dots, N$ e $i \neq j \neq N$; a expressão anterior é válida para a região

$$\left(\min_{1 \leq k \leq N, k \neq j} r_{j,k} \right) > r_j > 0.$$

Tendo em conta a simetria do problema, tem-se a identidade

$$T_{\text{esp}}^{(i)}(r, \theta) = T_{\text{esp}}^{(N+i)}(r, \pi - \theta), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Como $Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^{n+m} Y_n^m(\pi - \theta, \phi)$, é possível estabelecer a seguinte relação entre os coeficientes

$$A_\nu^{\mu(N+i)} = (-1)^{\nu+\mu} A_\nu^{\mu(i)}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Aplicando tal propriedade, podemos escrever a equação (3.156) em função unicamente dos coeficientes $A_n^{m(i)}$, $i = 1, \dots, N$. Assim temos:

$$\begin{aligned} T_M(r_j, \theta_j) &= T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \delta_{m0} + \\ &+ \sum_{nm} A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) + \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\ &\vdots \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N,j}) A_\nu^{\mu(N)} j_\nu(q_M a_N) + \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+j,j}) A_\nu^{\mu(j)} j_\nu(q_M a_j) + \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\ &\vdots \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{2N,j}) A_\nu^{\mu(N)} j_\nu(q_M a_N), \end{aligned} \quad (3.157)$$

onde utilizamos a simetria entre os raios das esferas físicas e suas simetrias, $a_i = a_{N+i}$, e definimos:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) &\equiv (-1)^{(\nu+\mu)} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) \\ &= (-1)^{(\nu+\mu)} 4\pi i^{n-\nu} \sum_{p=|\nu-n|}^{\nu+n} i^p (-1)^\mu h_p(q_M r_{ki,j}) \overline{Y_p^{m-\mu}(\hat{\mathbf{r}}_{ki,j})} \mathfrak{g}(\nu, \mu; n, -m; p) \\ &= 4\pi i^{n-\nu} \sum_{p=|\nu-n|}^{\nu+n} i^p (-1)^\nu h_p(q_M r_{ki,j}) \overline{Y_p^{m-\mu}(\hat{\mathbf{r}}_{ki,j})} \mathfrak{g}(\nu, \mu; n, -m; p). \end{aligned} \quad (3.158)$$

Substituindo a temperatura interna de cada esfera física Ω_j , (3.133), da matriz, (3.157), e na condição de contorno

$$T_s^{(j)}(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j} = T_M(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j}, \quad (3.159)$$

temos,

$$\begin{aligned}
B_n^{m(j)} h_n(q_s a_j) j_n(q_s a_j) &= T_0 e^{i q_M a_j} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r) \delta_{m0} + \\
&+ A_n^{m(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) + \\
&+ j_n(q_M r_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\
&\vdots \\
&+ j_n(q_M r_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N,j}) A_\nu^{\mu(N)} j_\nu(q_M a_N) + \\
&+ j_n(q_M r_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+j,j}) A_\nu^{\mu(j)} j_\nu(q_M a_j) + \\
&+ j_n(q_M r_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j}) A_\nu^{\mu(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\
&\vdots \\
&+ j_n(q_M r_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{2N,j}) A_\nu^{\mu(N)} j_\nu(q_M a_N).
\end{aligned} \tag{3.160}$$

$$\mathbf{M}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{M}^{(i,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{M}^{(N,j)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{E}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{E}^{(i,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{E}^{(N,j)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{S}^{(j,j)} \mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{i}^{(j)}, \tag{3.161}$$

onde $\mathbf{E}^{(i,j)} = [E_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j})]$ corresponde à contribuição, *vinda detrás do “espelho”*, da imagem da esfera Ω_i com respeito às coordenadas da esfera Ω_j , com

$$E_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j}) = \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j}) j_\nu(q_M a_i) j_n(q_M a_j). \tag{3.162}$$

Apresentando (3.160) na forma

$$\left[\left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{M}^{(j,j)} & \mathbf{M}^{(i,j)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,j)} & \mathbf{S}^{(j,j)} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccccc} \mathbf{E}^{(j,j)} & \mathbf{E}^{(i,j)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,j)} & \mathbf{0} \dots \mathbf{0} \end{array} \right) \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{a}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{i}^{(j)} \end{array} \right), \tag{3.163}$$

substituindo os valores $j, i = 1, 2, \dots, N$, temos:

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,1)} & \mathbf{S}^{(1,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}^{(1,N)} & \mathbf{M}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{S}^{(N,N)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(1,1)} & \mathbf{E}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}^{(1,2)} & \mathbf{E}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}^{(1,N)} & \mathbf{E}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (3.164)$$

Da mesma forma, para a condição de continuação de fluxo, obtemos:

$$\mathbf{N}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{N}^{(i,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{N}^{(N,j)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{F}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{F}^{(i,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{F}^{(N,j)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{Z}^{(j,j)} \mathbf{b}^{(j)} = \mathbf{g}^{(j)}, \quad (3.165)$$

onde $\mathbf{F}^{(i,j)} = [F_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j})]$, com

$$F_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j}) = \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N+i,j}) j_{\nu}(q_M a_i) j_n'(q_M a_j). \quad (3.166)$$

De onde obtemos,

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{N}^{(1,1)} & \mathbf{N}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,1)} & \mathbf{Z}^{(1,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{N}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}^{(1,N)} & \mathbf{N}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Z}^{(N,N)} \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{(1,1)} & \mathbf{F}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{(1,2)} & \mathbf{F}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}^{(1,N)} & \mathbf{F}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (3.167)$$

As condições de temperatura e fluxo nos fornecem,

$$\left[\begin{array}{cccccccc} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,1)} & \mathbf{S}^{(1,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}^{(1,N)} & \mathbf{M}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{S}^{(N,N)} \\ \mathbf{N}^{(1,1)} & \mathbf{N}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,1)} & \mathbf{Z}^{(1,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{N}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}^{(1,N)} & \mathbf{N}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Z}^{(N,N)} \end{array} \right] + \quad (3.168)$$

$$+ \left[\begin{array}{cccccc} \mathbf{E}^{(1,1)} & \mathbf{E}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}^{(1,2)} & \mathbf{E}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}^{(1,N)} & \mathbf{E}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{E}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{(1,1)} & \mathbf{F}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{(1,2)} & \mathbf{F}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}^{(1,N)} & \mathbf{F}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{F}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} \right] \begin{array}{c} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{g}^{(N)} \end{array},$$

ou ainda

$$\left[\left(\begin{array}{cc} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{array} \right) \right] \begin{array}{c} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{array} = \begin{array}{c} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{array}. \quad (3.169)$$

3.3.4 Meio finito com N esferas

As temperaturas incidente e espalhada, no interior de uma placa, se propagam sofrendo múltiplas reflexões entre as paredes, consideradas adiabáticas, Figura 3.11, até atenuarem-se a zero.

Na Figura 3.11, a geometria do lado esquerdo expõe o caso real de uma onda plana gerada na superfície de uma placa com N esferas inclusas. Como a superfície da placa é considerada adiabática, tratamo-las como um espelho para essas ondas e substituímos pela situação representada no lado direito, onde o número positivo representa as imagens

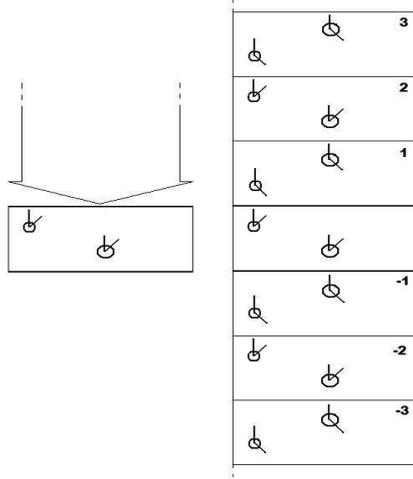


Figura 3.11: Figura esquemática de uma onda térmica plana se propagando numa placa com N esferas inclusas.

refletidas pela superfície superior da placa e os negativos pela inferior.

Conforme as equações (A.45) e (3.128), para meio finito T_{inc} é fornecido por

$$T_{inc}(\mathbf{r}) = \frac{T_0 e^{iq_M d}}{1 - e^{2iq_M l}} \left(\sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^{-n} j_n(q_M r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \delta_{m0} + e^{2iq_M(l-d)} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} i^n j_n(q_M r) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) \delta_{m0} \right), \quad (3.170)$$

onde foi somada todas suas reflexões entre as paredes da placa. Por simplificação escrevemos (3.170) na forma

$$T_{inc}(\mathbf{r}_j) = \frac{T_0 e^{iq_M d_j}}{1 - e^{2iq_M l}} \sum_{nm} \sqrt{4\pi(2n+1)} j_n(q_M r_j) (i^{-n} + e^{2iq_M(l-d_j)} i^n) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \delta_{m0}, \quad (3.171)$$

onde apresentamos em função do sistema de coordenadas j .

A temperatura espalhada é

$$T_{esp} = \sum_{j=1}^N T_{esp}^{(j)}, \quad (3.172)$$

onde

$$T_{esp}^{(j)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T_{esp}^{(kj)}(\mathbf{r}_{kj}), \quad (3.173)$$

O índice (jk) , $k \neq 0$, corresponde à imagen k da esfera física Ω_j ; se $k > 0$ correspondem às imagens acima da placa e $k < 0$ abaixo; se $k = 0$ é a esfera física Ω_j . Portanto, na

equação (3.173), estão somadas a contribuição, $T_{esp}^{(0j)}$, vinda da esfera física Ω_j com todas as contribuições, $T_{esp}^{(kj)}$ com $k \neq 0$, vindas de suas k imagens.

Cada contribuição de temperatura, $T_{esp}^{(kj)}$, com relação a seu sistema de referência kj , somada em (3.173) é fornecida por:

$$T_{esp}^{(kj)}(\mathbf{r}_{kj}) = \sum_{nm} A_{nm}^{(kj)} j_n(q_M a_{kj}) h_n(q_M r_{kj}) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_{kj}), \quad (3.174)$$

Ou seja, apresentamos a (3.173) na forma:

$$\begin{aligned} T_{esp}^{(j)} &= T_{esp}^{(0j)}(\mathbf{r}_{0j}) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} T_{esp}^{(kj)}(\mathbf{r}_{kj}) \\ &= T_{esp}^{(j)}(\mathbf{r}_j) + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} T_{esp}^{(kj)}(\mathbf{r}_{kj}), \end{aligned} \quad (3.175)$$

onde omitiu-se o índice 0 da esfera física.

Assim, a temperatura espalhada pelas N esferas e suas imagens, (3.172), com respeito ao sistema de coordenadas da esfera física Ω_j é

$$\begin{aligned} T_{esp}(\mathbf{r}_j) &= \sum_{nm} A_{nm}^{(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) + \\ &+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{kj,j}) A_{\nu\mu}^{(kj)} j_\nu(q_M a_{kj}) + \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_{\nu\mu}^{(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\ &+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) A_{\nu\mu}^{(ki)} j_\nu(q_M a_{ki}) + \\ &\vdots \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N,j}) A_{\nu\mu}^{(N)} j_\nu(q_M a_N) + \\ &+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{kN,j}) A_{\nu\mu}^{(kN)} j_\nu(q_M a_{kN}), \end{aligned} \quad (3.176)$$

onde $\mathbf{r}_{ki,j}$ é o vetor posição que sai do centro da imagem k da esfera Ω_i e chega ao centro da esfera Ω_j ; $\mathbf{r}_{i,j}$ é o vetor posição que sai do centro da esfera Ω_i e chega ao centro da Ω_j .

Lembrando que a_{ki} é o raio da imagem k da esfera Ω_i , então temos a relação entre os raios $a_{ki} = a_i$. As relações de simetria nos fornecem as seguintes relações entre os coeficientes térmicos da esfera com suas imagens,

$$A_{\nu\mu}^{(kj)} = \begin{cases} A_{\nu\mu}^{(j)}, & \text{se } k \text{ é par e} \\ (-1)^{(\nu+\mu)} A_{\nu\mu}^{(j)}, & \text{se } k \text{ é ímpar,} \end{cases} \quad j = 1, \dots, N,$$

que pode ser apresentada na forma compacta

$$A_{\nu\mu}^{(kj)} = (-1)^{(\nu+\mu)k} A_{\nu\mu}^{(j)}, \text{ para qualquer } k. \quad (3.177)$$

Substituindo as relações de simetria acima na (3.176), temos

$$\begin{aligned} T_{esp}(\mathbf{r}_j) &= \sum_{nm} A_{nm}^{(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) + \\ &+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{kj,j}) A_{\nu\mu}^{(j)} j_\nu(q_M a_j) + \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_{\nu\mu}^{(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\ &+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) A_{\nu\mu}^{(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\ &\vdots \\ &+ \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N,j}) A_{\nu\mu}^{(N)} j_\nu(q_M a_N) + \\ &+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{nm} j_n(q_M r_j) Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{kN,j}) A_{\nu\mu}^{(N)} j_\nu(q_M a_N), \end{aligned} \quad (3.178)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) &= (-1)^{(\nu+\mu)k} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}), \\ &= (-1)^{(\nu+\mu)k} 4\pi i^{n-\nu} \sum_{p=|\nu-n|}^{\nu+n} i^p (-1)^\mu h_p(q_M r_{ki,j}) \overline{Y_p^{m-\mu}(\hat{\mathbf{r}}_{ki,j})} \mathfrak{g}(\nu, \mu; n, -m; p). \end{aligned} \quad (3.179)$$

Substituindo a temperatura na esfera física Ω_j (3.133), $j = 1, \dots, N$, e na matriz (3.6) na condição de contorno

$$T_s^{(j)}(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j} = T_M(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j}, \quad (3.180)$$

temos,

$$\begin{aligned}
B_n^{m(j)} h_n(q_s a_j) j_n(q_s a_j) &= \frac{T_0 e^{i q_M d_j}}{1 - e^{2i q_M l}} \sqrt{4\pi(2n+1)} j_n(q_M a_j) (i^{-n} + e^{2i q_M (l-d_j)} i^n) \delta_{m0} + \\
&+ A_{nm}^{(j)} j_n(q_M a_j) h_n(q_M a_j) + \\
&+ j_n(q_M a_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{i,j}) A_{\nu\mu}^{(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\
&\vdots \\
&+ j_n(q_M a_j) \sum_{\nu\mu} R_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{N,j}) A_{\nu\mu}^{(N)} j_\nu(q_M a_N) + \\
&+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} j_n(q_M a_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{kj,j}) A_{\nu\mu}^{(j)} j_\nu(q_M a_j) + \\
&+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} j_n(q_M a_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) A_{\nu\mu}^{(i)} j_\nu(q_M a_i) + \\
&\vdots \\
&+ \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} j_n(q_M a_j) \sum_{\nu\mu} \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{kN,j}) A_{\nu\mu}^{(N)} j_\nu(q_M a_N),
\end{aligned} \tag{3.181}$$

ou na forma,

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}^{(j)} &= \mathbf{M}^{(j,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{M}^{(i,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{M}^{(N,j)} \mathbf{a}^{(N)} + \mathbf{S}^{(j,j)} \mathbf{b}^{(j)} + \\
&+ \mathbf{E}^{(kj,j)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{E}^{(ki,j)} \mathbf{a}^{(i)} + \dots + \mathbf{E}^{(kN,j)} \mathbf{a}^{(N)},
\end{aligned} \tag{3.182}$$

onde $\mathbf{M}^{(i,j)}$ é fornecido por (3.138), $\mathbf{i}^{(j)} = [-\mathbf{i}_{nm}^{(j)}]$ com

$$\mathbf{i}_{nm}^{(j)} = \frac{T_0 e^{i q_M d_j}}{1 - e^{2i q_M l}} \sqrt{4\pi(2n+1)} j_n(q_M a_j) (i^{-n} + e^{2i q_M (l-d_j)} i^n) \delta_{m0}. \tag{3.183}$$

$\mathbf{E}^{(ki,j)} = \left[\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} E_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) \right]$ corresponde a todas as contribuições das imagens k da esfera Ω_i com respeito às coordenadas da esfera Ω_j , com

$$E_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) = \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) j_\nu(q_M a_i) j_n(q_M a_j). \tag{3.184}$$

Apresentando (3.182) na forma

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(j,j)} & \mathbf{M}^{(i,j)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,j)} & \mathbf{S}^{(j,j)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(kj,j)} & \mathbf{E}^{(ki,j)} & \dots & \mathbf{E}^{(kN,j)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{a}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(j)} \end{pmatrix}. \quad (3.185)$$

Substituindo os valores de $i, j = 1, \dots, N$ em (3.185), temos:

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,1)} & \mathbf{S}^{(1,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}^{(1,N)} & \mathbf{M}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{M}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{S}^{(N,N)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{(k1,1)} & \mathbf{E}^{(k2,1)} & \dots & \mathbf{E}^{(kN,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}^{(k1,2)} & \mathbf{E}^{(k2,2)} & \dots & \mathbf{E}^{(kN,2)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{E}^{(k1,N)} & \mathbf{E}^{(k2,N)} & \dots & \mathbf{E}^{(kN,N)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (3.186)$$

Ou ainda,

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \end{pmatrix}. \quad (3.187)$$

Para a continuidade de fluxo de calor,

$$K_s \nabla T_s^{(j)}(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j} = K_M \nabla T_M(\mathbf{r}_j)|_{r_j=a_j}, \quad (3.188)$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} \mathbf{N}^{(1,1)} & \mathbf{N}^{(2,1)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,1)} & \mathbf{Z}^{(1,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{N}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,2)} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}^{(2,2)} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{N}^{(1,N)} & \mathbf{N}^{(2,N)} & \dots & \mathbf{N}^{(N,N)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{Z}^{(N,N)} \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. + \begin{pmatrix} \mathbf{F}^{(k1,1)} & \mathbf{F}^{(k2,1)} & \dots & \mathbf{F}^{(kN,1)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}^{(k1,2)} & \mathbf{F}^{(k2,2)} & \dots & \mathbf{F}^{(kN,2)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{F}^{(k1,N)} & \mathbf{F}^{(k2,N)} & \dots & \mathbf{F}^{(kN,N)} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{(N)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{b}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{i}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (3.189)
\end{aligned}$$

onde os elementos dos blocos de matrizes diagonais $\mathbf{N}^{(j,j)} = [N_n^{m(j,j)}]$ e $\mathbf{Z}^{(j,j)} = [-KZ_n^{m(j,j)}]$ e matriz cheia $\mathbf{N}^{(j,i)} = [N_{\nu n}^{\mu m(i,j)}]$ são fornecidos por (3.148). $\mathbf{g}^{(j)} = [g_{nm}^{(j)}]$, com

$$g_{nm}^{(j)} = \frac{T_0 e^{iq_M d_j}}{1 - e^{2iq_M l}} \sqrt{4\pi(2n+1)} j_n'(q_M a_j) (i^{-n} + e^{2iq_M(l-d_j)} i^n) \delta_{m0}, \quad (3.190)$$

$$\text{e } \mathbf{F}^{(ki,j)} = \left[\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} F_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) \right], \text{ com}$$

$$F_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) = \tilde{R}_{\nu n}^{\mu m}(\mathbf{r}_{ki,j}) j_\nu(q_M a_i) j_n'(q_M a_j). \quad (3.191)$$

Apresentando (3.189) na forma

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.192)$$

temos por fim, de (3.187) e (3.192),

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{S} \\ \mathbf{N} & \mathbf{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix}. \quad (3.193)$$

3.3.5 Simulação computacional

Nesta secção mostraremos os gráficos das simulações, baseadas nos dados obtidos nas secções anteriores, desenvolvida em um PC utilizando as bibliotecas matemáticas e graficação do pacote de cálculo numérico MatLab [28].

Dois cilindros separados

Para análise computacional, ao implementarmos o algoritmo utilizado, temos que truncar a expansão em série. O número de termos $(2|m| + 1)$ necessário vem fixado pela convergência do desenvolvimento em série da onda plana incidente (2.39), que depende da forma crescente do argumento das funções de Bessel. Este é diretamente proporcional ao raio do cilindro a e inversamente proporcional ao comprimento de difusão térmica da onda que se propaga pela matriz μ_M . Concluindo, para um maior raio do cilindro e/ou menor comprimento de difusão térmica, o número de termos necessários aumenta. Assim, para os cilindros e os comprimentos de difusão térmica empregados, o número mínimo de termos para a onda plana incidente convergir são 13 ($m = 6$). Para nossa simulação, utilizamos $m = 12$ (25 termos).

Simularemos amostras reais de dois cilindros adiabáticos (ar) subsuperficiais ($K_{ar} = 0,026 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ e $D_{ar} = 22 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$) dispostos a uma matriz de grafite rígido ($K_{carbono} = 160 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$ e $D_{carbono} = 75 \text{ mm}^2\text{s}^{-1}$). Os cilindros de $0,5 \text{ mm}$ de diâmetro (raio igual a $0,25 \text{ mm}$), estão com os seus centros localizados a uma profundidade $d_1 = 315 \text{ }\mu\text{m}$ e $d_2 = 328 \text{ }\mu\text{m}$ da superfície da amostra e separados de $0,585 \text{ mm}$, Figura 3.12.

A Figura 3.13 mostra o comportamento da temperatura e fase normalizadas, na superfície da amostra. Vemos que para frequência de 80 Hz (lado esquerdo) os picos da amplitude da temperatura assumem valores maiores que para frequência de 180 Hz (lado direito). Isto se deve a propriedade do comprimento de difusão térmica ser maior quanto menor a frequência. Quando ondas térmicas incidem no cilindro adiabático estas retornam em fase provocando interferências construtivas e quanto maior o comprimento de difusão térmica, maior é a amplitude total. Vemos também que em ambos experimentos não há simetria tanto na amplitude quanto na fase, isto se deve aos dois cilindros estarem em profundidades diferentes $\Delta_1 < \Delta_2$. Pois, quanto mais próximo da superfície maior é

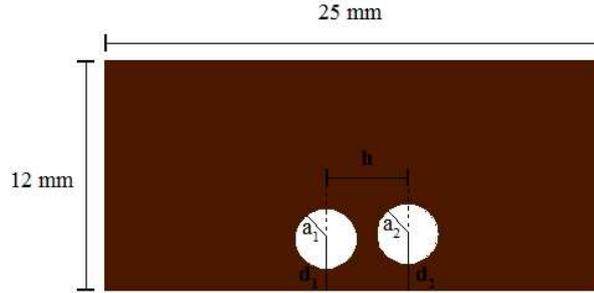


Figura 3.12: Representação esquemática de dois cilindros isolantes em uma matriz condutora. Orifícios com eixos paralelos de raios iguais a $a_1 = a_2 = 0.25\text{ mm}$, separados por uma distância de $h = 85\ \mu\text{m}$ submergido as profundidades $\Delta_1 = d_1 - a_1 = 65\ \mu\text{m}$ e $\Delta_2 = d_2 - a_2 = 78\ \mu\text{m}$ da superfície aquecida (parte inferior da figura).

a amplitude total da temperatura, no caso de cilindros adiabáticos. Neste experimento, Ω_1 se encontra na posição negativa do eixo ‘y’ e Ω_2 na positiva.

Esta simulação reproduz exatamente o resultado obtido por [50], onde se obtém uma boa concordância entre a simulação do modelo teórico e o resultado obtido experimentalmente. Com isto, validaremos nosso programa elaborado para executar os cálculos teóricos apresentados nas secções anteriores.

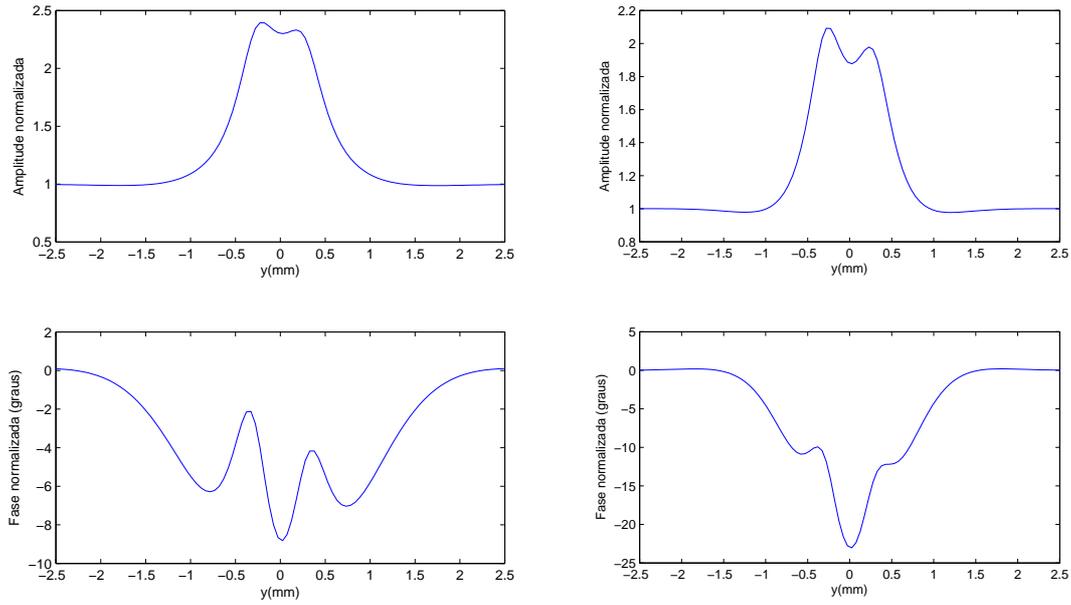


Figura 3.13: Simulação dos cálculos teóricos da amplitude e fase normalizadas da temperatura superficial produzida por dois cilindros adiabáticos subsuperficiais a uma frequência: Lado esquerdo, 80Hz; lado direito, 180Hz.

Duas esferas separadas

A Figura 3.14 mostra a distribuição do campo de temperatura na superfície da amostra, a qual contém duas esferas subsuperficiais de mesmo raio ($a_1 = a_2 = 0,45\text{ mm}$), submergida a mesma profundidade $d_1 = d_2 = 0,50\text{ mm}$ e com seus centros separados por uma distância $h = 1\text{ mm}$ (onde estão posicionadas em: $\mathbf{r}_1 = (-1, 0, -d_1)$ e $\mathbf{r}_2 = (-1, 0, -d_2)$). É analisado, para um comprimento de difusão térmica da matriz de $\mu_M = 0,50\text{ mm}$, dois casos extremos: primeiro (lado esquerdo), esferas muito más condutoras ($K_s/K_M = D_s/D_M = 10^{-3}$); segundo (lado direito), esferas muito boas condutoras ($K_s/K_M = D_s/D_M = 10^3$). Para cada caso apresenta-se um gráfico tridimensional da temperatura superficial. É observado claramente como as duas esferas influenciam na temperatura normalizada. Vemos que a temperatura decai justo em cima das esferas condutoras, isto deve-se ao fato de que, ao atingir a superfície da esfera condutora, as ondas térmicas refletidas retornam defasadas provocando interferências destrutivas. Por outro lado, conforme já discutimos,

a temperatura normalizada aumenta para as esferas isolantes. Pois, ao atingir a superfície da esfera isolante, as ondas térmicas refletidas retornam em fase, provocando interferência construtiva [51].

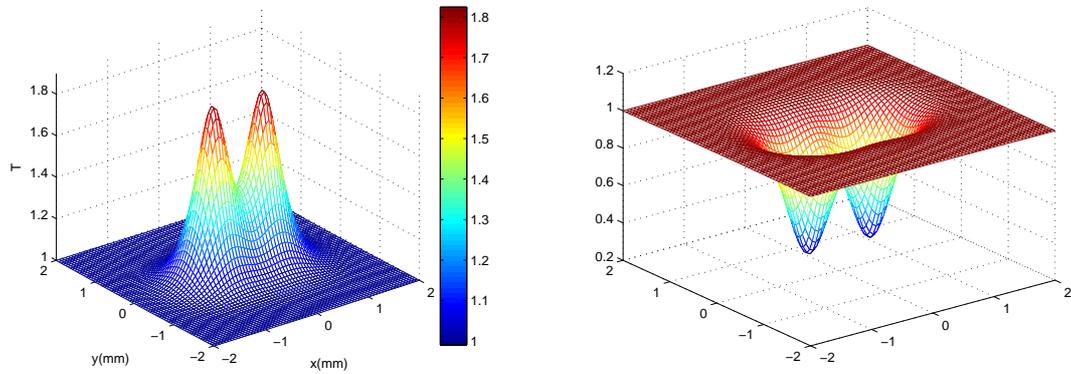


Figura 3.14: Representação tridimensional para a amplitude da temperatura superficial em um material com duas esferas de $0,45\text{ mm}$ de raio a uma profundidade $d_1 = d_2 = 0,5\text{ mm}$. Para $\mu_M = 0,5\text{ mm}$, analisam-se os casos: (lado esquerdo) duas esferas isolantes ($K_s/K_M = D_s/D_M = 10^{-3}$) e (lado direito) duas esferas condutoras ($K_s/K_M = D_s/D_M = 10^3$).

Esta simulação reproduz o resultado obtido por [51]. Com isto, consideramos válido nosso programa elaborado para executar os cálculos teóricos sobre propagação de ondas térmicas em materiais compósitos reforçados com esferas.

Capítulo 4

Espalhamento térmico de dois cilindros acoplados

Neste capítulo analisaremos propagações de ondas térmicas em um material que contém uma incrustação com forma de dois cilindros acoplados, com as mesmas propriedades térmicas e diferentes às do material. Este meio pode ser imaginado formado por um dado material (*material matriz*), dentro do qual está inserido outro material (incrustação) com propriedades térmicas diferentes a do material matriz (*material reforço*). A situação tratada aqui é análoga a que foi discutida na secção 3.2.2, na qual discutimos a propagação de ondas térmicas em meios infinitos com dois cilindros separados inclusos. Porém, neste capítulo trataremos dois cilindros acoplados (Fig. 4.1b), primeiramente em um meio infinito e depois em um meio semi-infinito.

Na figura 4.1a, Ω_1 e Ω_2 representam os cilindros 1 e 2 separados, com Γ_1 e Γ_2 sendo suas respectivas fronteiras. Neste caso, consideramos que a forma do material reforço é a de dois cilindros acoplados (Fig. 4.1b), onde, Ω_{Ext} é a região externa aos cilindros, que corresponde ao material matriz; $\Omega_c = \Omega_1 \cup \Omega_2$, com $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$, é a região interna ocupada pelos cilindros acoplados Ω_1 e Ω_2 , onde $\Gamma = \partial\Omega_c$ é sua fronteira. Na figura (4.1c) Γ_{11} e Γ_{12} são as respectivas fronteiras não acoplada e acoplada da região Ω_1 ; Γ_{22} e Γ_{21} são as respectivas fronteiras não acoplada e acoplada da região Ω_2 .

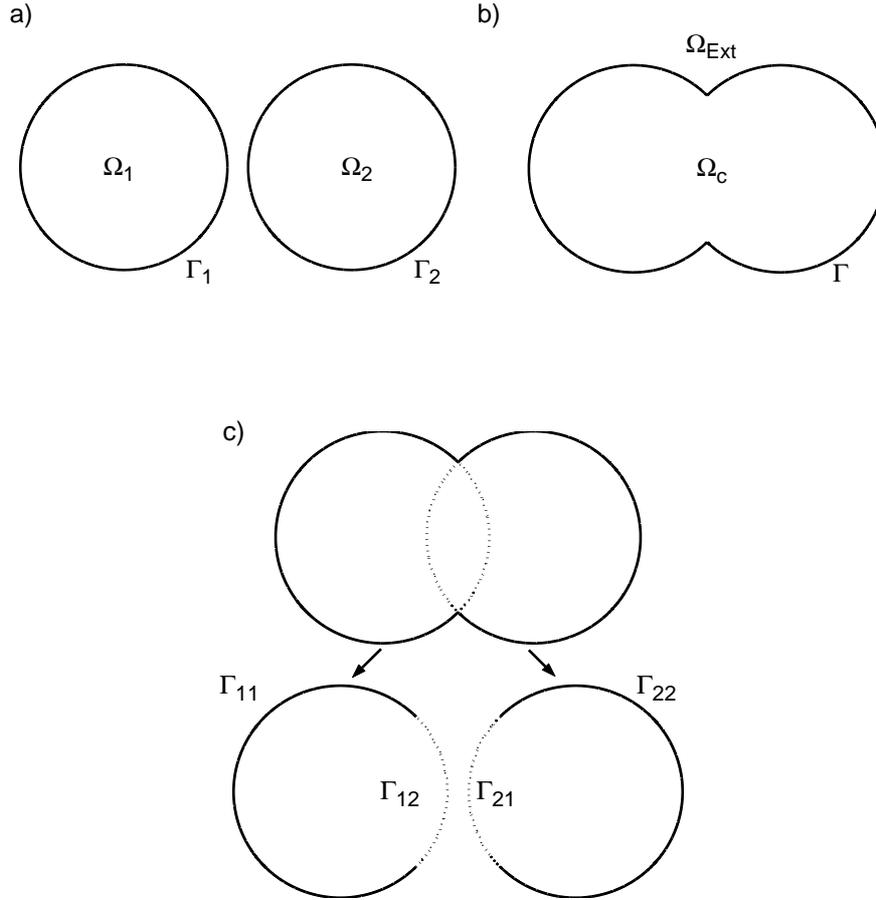


Figura 4.1: Geometria de dois cilindros (a) separados, (b) acoplados, (c) cada cilindro acoplado analisado separadamente.

4.1 Modelo Matemático

Utilizaremos as anotações anteriormente introduzidas numa forma matemática mais geral para N cilindros. Sendo agora que $\Gamma_i = \partial\Omega_i$ corresponde a fronteira de cada cilindro Ω_i , $\Gamma_{ii} = \Gamma_i \cap \Gamma$ é somente a parte não acoplada da fronteira do cilindro Ω_i e $\Gamma_{ij} = \Gamma_i \cap \Omega_j$ ($i \neq j$) é somente a parte da fronteira do cilindro Ω_i interna ao cilindro Ω_j , em outras palavras, é fronteira acoplada de Ω_i à região Ω_j .

A onda térmica que se propaga no meio será:

$$T(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} T_M(\mathbf{r}, t), & \text{se } \mathbf{r} \in \Omega_{Ext} \\ T_c(\mathbf{r}, t), & \text{se } \mathbf{r} \in \Omega_c \end{cases} \quad (4.1)$$

na qual, $T_M(\mathbf{r}, t)$, é a temperatura na matriz e, $T_c(\mathbf{r}, t)$, é a temperatura interna a Ω_c .

Conforme Figura 4.1b, a amplitude complexa da temperatura deve satisfazer as seguintes condições;

$$\begin{cases} \nabla^2 T_M(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D} T_M(\mathbf{r}) = 0, & \text{em } \Omega_{Ext} \\ \nabla^2 T_c(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D_c} T_c(\mathbf{r}) = 0, & \text{em } \Omega_c \\ T_c|_{\Gamma}(\mathbf{r}) = T_M|_{\Gamma}(\mathbf{r}), \\ K_c \frac{\partial T_c}{\partial n}|_{\Gamma}(\mathbf{r}) = K_M \frac{\partial T_M}{\partial n}|_{\Gamma}(\mathbf{r}). \end{cases} \quad (4.2)$$

Para Figura 4.1c, analogamente as notações dos capítulos anteriores, utilizaremos a notação da temperatura no cilindro Ω_i por $T_c|_{\Omega_i} \equiv T_c^{(i)}$. A temperatura na matriz e nos dois cilindros acoplados deve obedecer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \nabla^2 T_M(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D} T_M(\mathbf{r}) = 0, & \text{em } \Omega_{Ext} \\ \nabla^2 T_c^{(i)}(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D_c} T_c^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, & \text{em } \Omega_i, i = 1, 2 \\ T_c^{(i)}|_{\Gamma_{ii}}(\mathbf{r}) = T_M|_{\Gamma_{ii}}(\mathbf{r}) & i = 1, 2 \\ K_c \frac{\partial T_c^{(i)}}{\partial n}|_{\Gamma_{ii}}(\mathbf{r}) = K_M \frac{\partial T_M}{\partial n}|_{\Gamma_{ii}}(\mathbf{r}) & i = 1, 2 \\ \text{para a região acoplada:} \\ T_c^{(i)}|_{\Gamma_{ij}}(\mathbf{r}) = T_c^{(j)}|_{\Gamma_{ij}}(\mathbf{r}) & i = 1, 2 \text{ e } i \neq j \\ K_c \frac{\partial T_c^{(i)}}{\partial n}|_{\Gamma_{ij}}(\mathbf{r}) = K_c \frac{\partial T_c^{(j)}}{\partial n}|_{\Gamma_{ij}}(\mathbf{r}), & i = 1, 2 \text{ e } i \neq j \end{cases} \quad (4.3)$$

na qual temos novamente a equação de Helmholtz,

$$\begin{cases} \nabla^2 T_M(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D} T_M(\mathbf{r}) = 0, & \text{em } \Omega_{Ext} & (a) \\ \nabla^2 T_c^{(i)}(\mathbf{r}) + \frac{i\omega}{D_c} T_c^{(i)}(\mathbf{r}) = 0, & \text{em } \Omega_i, i = 1, 2, & (b) \end{cases} \quad (4.4)$$

e as condições de contorno, que diferentemente das usadas anteriormente (3.37), são:

$$T_c^{(i)}|_{\Gamma_i}(\mathbf{r}) = \begin{cases} T_M(\mathbf{r}), & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma_{ii} \\ T_c^{(j)}(\mathbf{r}), & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma_{ij}, i \neq j \end{cases} \quad i = 1, 2 \quad (4.5)$$

$$K_c \frac{\partial T_c^{(i)}}{\partial n}|_{\Gamma_i}(\mathbf{r}) = \begin{cases} K_M \frac{\partial T_M(\mathbf{r})}{\partial n}, & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma_{ii} \\ K_c \frac{\partial T_c^{(j)}(\mathbf{r})}{\partial n}, & \text{se } \mathbf{r} \in \Gamma_{ij}, i \neq j. \end{cases} \quad i = 1, 2, \quad (4.6)$$

A solução para dois cilindros acoplados é encontrada após calcularmos os coeficientes térmicos dos campos de temperatura através das igualdades (4.5) e (4.6). Na próxima seção apresentaremos o formalismo utilizado para o cálculo de tais coeficientes.

4.2 Solução para cilindros circulares

Começamos descrevendo a geometria para cilindros circulares nas figuras 4.2 e 4.3, assim como descrevendo o tipo de acoplamento a que nos restringimos em nossas simulações.

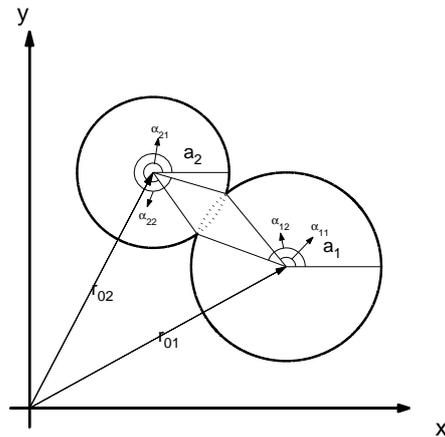


Figura 4.2: Descrição dos ângulos α_{ij} de dois cilindros acoplados

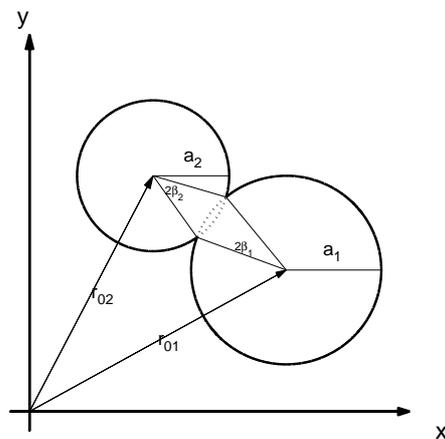


Figura 4.3: Dois cilindros acoplados com seus correspondentes ângulos β_j subentendidos.

Hipótese 1 Restrições de acoplamento. *Daqui para frente os cálculos estão condicionados a “pequenos” acoplamentos, no sentido de que $|\mathbf{r}_{ij}| \equiv |\mathbf{r}_{0j} - \mathbf{r}_{0i}| \geq a_i, \forall i, j$. Isto é, o centro do cilindro Ω_j não pode estar na região interna do cilindro $\Omega_i, i \neq j$.*

Denotaremos por β_i a metade do ângulo subentendido pela intersecção de Ω_i com Ω_j desde o centro de Ω_i . Os ângulos de corte são dados por: $\alpha_{i1} \equiv \theta_{ij} - \beta_i$ e $\alpha_{i2} \equiv \theta_{ij} + \beta_i$, onde $\theta_{ij} = \arg(\mathbf{r}_{ij})$. Com esta definição tem-se que a superfície acoplada do cilindro Ω_i , vista desde r_{0i} , se encontra no intervalo $\theta_i \in [\alpha_{i1}, \alpha_{i2}]$.

4.2.1 Solução das equações

Proposta de temperaturas na região exterior a Ω_c , solução da primeira equação de (4.4), em $\mathbf{r} = (x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$:

$$T_M(\mathbf{r}) = T_{inc}(\mathbf{r}) + T_{esp}(\mathbf{r}), \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_{Ext} \quad (4.7)$$

na qual, conforme (3.7) e (3.8),

$$\begin{aligned} T_{inc}(\mathbf{r}) = T_{inc}(x) &= T_0 e^{-i[q(x-d)]}, \\ &= T_0 e^{iqMd} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(qMr) e^{im\theta}, \end{aligned} \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_{Ext} \quad (4.8)$$

e conforme (3.27) e (3.30),

$$T_{esp}(\mathbf{r}) \equiv T_{esp} = \sum_{j=1}^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(qMr_j) e^{im\theta_j}, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_{Ext}. \quad (4.9)$$

Proposta de temperatura em $\mathbf{r} \in \Omega_j$ que também deve ser solução de (4.4–b) é análoga a (3.36),

$$T_c|_{\Omega_j}(\mathbf{r}) \equiv T_c^{(j)}(\mathbf{r}_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} B_m^{(j)} J_m(q_c r_j) e^{im\theta_j}, \quad \forall \mathbf{r} \in \Omega_j. \quad (4.10)$$

Com o acoplamento, deve-se escrever a temperatura dentro do cilindro Ω_i em função das coordenadas do cilindro Ω_j , com $i \neq j$. Para isto, utiliza-se o teorema de adição de Graf para a função de Bessel de primeira espécie J_m [45], assim como em (3.32), conforme a Figura 4.4,

$$J_m(r_j) e^{im\theta_j} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}(r_{ij}) J_n(r_i) e^{in\theta_i} e^{-i(n-m)\theta_{ij}}, \quad (4.11)$$

para $i = 1, 2$. Note que esta expressão é válida para $i = j$, já que $J_{n-m}(0) = \delta_{mn}$. Assim, a temperatura no cilindro Ω_1 em função das coordenadas do cilindro Ω_2 é;

$$T_c^1(r_2, \theta_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(1)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(q_c r_{21}) J_m(q_c r_2) e^{im\theta_2} e^{-i(m-n)\theta_{21}}, \quad (4.12)$$

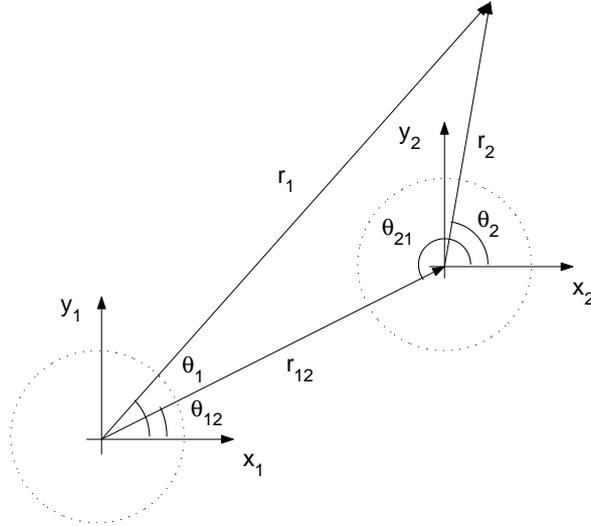


Figura 4.4: Troca de sistema de coordenadas, teorema de Graf.

para o cilindro 2,

$$T_c^2(r_1, \theta_1) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(2)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(q_c r_{12}) J_m(q_c r_1) e^{im\theta_1} e^{-i(m-n)\theta_{12}}. \quad (4.13)$$

As equações (4.12) e (4.13) podem ser generalizadas na forma:

$$T_c^{(i)}(r_j, \theta_j) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(q_c r_{ji}) J_m(q_c r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{ji}}, \quad (4.14)$$

ou ainda,

$$T_c^{(i)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m^{(ji)}(r_j) e^{im\theta_j}, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \quad (4.15)$$

onde,

$$\eta_m^{(ji)}(r_j) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n^{(i)} J_{m-n}(q_c r_{ji}) J_m(q_c r_j) e^{-i(m-n)\theta_{ji}} \quad (4.16)$$

Observe que para $i = j$, a origem e os eixos do sistema 'i' coincidem com a de 'j', ou seja, continuamos no mesmo sistema de referência 'j'. Logo, temos para (4.16),

$$\eta_m^{(jj)}(r_j) = B_m^{(j)} J_m(q_c r_j), \quad (4.17)$$

a equação (4.15) para $i = j$,

$$T_c^{(j)}(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \eta_m^{(jj)}(r_j) e^{im\theta_j}, \quad (4.18)$$

recaia em (4.10).

Conforme (3.35) e a Hipótese de acoplamento 1, podemos definir uma prolongação analítica de $T_M(r_j, \theta_j)$ ao interior do cilindro Ω_i ,

$$\begin{aligned}
T_M(r_j, \theta_j) \equiv & T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
& + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{ji}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{ji}},
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$i, j = 1, 2$
 $i \neq j$

válida para a região $r_{ji} > r_j > 0$.

Analogamente a (4.15), é possível representar (4.19) na forma,

$$T_M(r_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \lambda_m(r_j) e^{im\theta_j}, \tag{4.20}$$

onde os termos comuns $e^{im\theta_j}$ foram isolados e definimos:

$$\begin{aligned}
\lambda_m(r_j) \equiv & T_0 e^{iq_M d_j} i^{-m} J_m(q_M r_j) + A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m-n}(q_M r_{ji}) J_m(q_M r_j) e^{-i(m-n)\theta_{ji}},
\end{aligned} \tag{4.21}$$

4.2.2 Condições de transmissão

Devemos impor as condições de transmissões, que equivalem a estabelecer igualdades entre os coeficientes de Fourier das funções.

Continuidade de temperatura

A equação (4.5) considera que a temperatura na fronteira de cada cilindro deve ser contínua, sendo matematicamente escrita como:

$$\lim_{r_j \rightarrow a_j^-} T(r_j, \theta_j) = \lim_{r_j \rightarrow a_j^+} T(r_j, \theta_j). \tag{4.22}$$

Isto significa que o limite da temperatura quando se aproxima pela região interna à superfície deve ser igual ao limite da temperatura quando se aproxima pela região externa.

O lado esquerdo de (4.22) será:

$$\lim_{r_j \rightarrow a_j^-} T(r_j, \theta_j) = T_c^{(j)}(a_j, \theta_j). \tag{4.23}$$

Os coeficientes de Fourier de (4.23) estão definidos em (4.17). Prosseguindo, vamos calcular os coeficientes de Fourier do lado direito de (4.22). O que significa calcular o coeficiente de Fourier para o lado direito de (4.5).

Definição 1 *O limite exterior da temperatura na fronteira do cilindro Ω_j se denota por:*

$$T^+(a_j, \theta_j) \equiv \lim_{r_j \rightarrow a_j^+} T(r_j, \theta_j) = \begin{cases} T_M(a_j, \theta_j), & \theta_j \in [0, 2\pi] \setminus [\alpha_{j1}, \alpha_{j2}] \\ T_c^{(i)}(a_j, \theta_j), & \theta_j \in [\alpha_{j1}, \alpha_{j2}] \end{cases}, \quad (4.24)$$

onde a notação $\theta_j \in [0, 2\pi] \setminus [\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]$ significa que θ_j pertence a região $[0, 2\pi]$ excluindo a região compreendida entre $[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]$, veja figuras 4.2 e 4.3.

Teorema 1 *Tem-se que:*

$$T^+(a_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \gamma_m(a_j) e^{im\theta_j}, \quad (4.25)$$

na qual

$$\gamma_m(a_j) \equiv \lambda_m(a_j) + \frac{\beta_j}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\eta_n^{(ji)}(a_j) - \lambda_n(a_j) \right] e^{i(n-m)\theta_{ji}} \text{sinc}[(n-m)\beta_j], \quad i \neq j \quad (4.26)$$

onde

$$\text{sinc}(x) \equiv \frac{\text{sen}(x)}{x}.$$

Demonstração:

Pela expansão em série de Fourier, os coeficientes $\lambda_m(a_j)$, $\eta_m^{(ji)}(a_j)$ e $\gamma_m(a_j)$ de (4.20), (4.15) e (4.25) podem ser representados nas formas;

$$\lambda_m(a_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j, \quad (4.27)$$

$$\eta_m^{(ji)}(a_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_c^{(i)}(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j, \quad (4.28)$$

$$\gamma_m(a_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T^+(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j. \quad (4.29)$$

Considerando que a região acoplada do cilindro Ω_j corresponde ao setor angular $[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]$, então, podemos separar a equação (4.29) em:

$$2\pi\gamma_m(a_j) = \int_{[\alpha_{j2}, 2\pi+\alpha_{j1}]} T_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j + \int_{[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]} T_c^{(i)}(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j. \quad (4.30)$$

O primeiro termo da direita de (4.30), pode ser reescrito como;

$$I = \int_{[\alpha_{j2}, 2\pi+\alpha_{j1}]} T_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j = \int_0^{2\pi} T_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j + \int_{[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]} T_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j, \quad (4.31)$$

substituindo (4.27) em (4.31),

$$I = 2\pi\lambda_m(a_j) - \int_{[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]} T_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j, \quad (4.32)$$

na qual $\lambda_m(r_j = a_j)$ é definido por (4.21). Assim, para conhecermos todos os termos de $\gamma_m(a_j)$, nos resta apenas resolver os dois últimos termos da direita das equações (4.30) e (4.32). Para isto, empregamos o Lema 1 em $T_c^{(i)}(a_j, \theta_j)$ de (4.15) e $T_M(a_j, \theta_j)$ de (4.20). Portanto a equação (4.30) torna-se:

$$2\pi\gamma_m(a_j) = 2\pi\lambda_m(a_j) + \left\{ \lambda_m(a_j)(\alpha_{j2} - \alpha_{j1}) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \lambda_n(a_j) \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)\alpha_{j2}} - e^{i(n-m)\alpha_{j1}}] \right\} + \left\{ \eta_m^{(ji)}(a_j)(\alpha_{j2} - \alpha_{j1}) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \eta_n^{(ji)}(a_j) \frac{1}{i(n-m)} [e^{i(n-m)\alpha_{j2}} - e^{i(n-m)\alpha_{j1}}] \right\}, \quad (4.33)$$

das figuras 4.2 e 4.3, notamos que $\alpha_{j1} = \theta_{ji} - \beta_j$ e $\alpha_{j2} = \theta_{ji} + \beta_j$, temos que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i} [e^{i(n-m)\alpha_{j2}} - e^{i(n-m)\alpha_{j1}}] &= \frac{1}{2i} [e^{i(n-m)(\theta_{ji}+\beta_j)} - e^{i(n-m)(\theta_{ji}-\beta_j)}] \\ &= e^{i(n-m)\theta_{ji}} \left[\frac{e^{i(n-m)\beta_j} - e^{-i(n-m)\beta_j}}{2i} \right], \\ &= e^{i(n-m)\theta_{ji}} \text{sen}[(n-m)\beta_j]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Substituindo (4.34) em (4.33) e notando que $(2\beta_j = \alpha_{j2} - \alpha_{j1})$ temos,

$$\begin{aligned} \gamma_m(a_j) &= \lambda_m(a_j) + \frac{\beta_j}{\pi} \left[\eta_m^{(ji)}(a_j) - \lambda_m(a_j) \right] + \\ &+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \frac{[\eta_n^{(ji)}(a_j) - \lambda_n(a_j)]}{\pi(n-m)} e^{i(n-m)\theta_{ji}} \text{sen}[(n-m)\beta_j], \end{aligned} \quad (4.35)$$

ou também,

$$\gamma_m(a_j) = \lambda_m(a_j) + \frac{\beta_j}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\eta_n^{(ji)}(a_j) - \lambda_n(a_j) \right] e^{i(n-m)\theta_j} \text{sinc}[(n-m)\beta_j], \quad (4.36)$$

onde

$$\text{sinc}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$

■

Lema 1 Dada $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{in\theta}$, então,

$$\int_{[\alpha_1, \alpha_2]} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta = \xi_m(\alpha_2 - \alpha_1) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \xi_n \frac{1}{i(m-n)} \left[e^{i(n-m)\alpha_2} - e^{i(n-m)\alpha_1} \right].$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \int_{[\alpha_1, \alpha_2]} f(\theta) e^{-im\theta} d\theta &= \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \xi_n e^{in\theta} \right) e^{-im\theta} d\theta \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \xi_n e^{i(n-m)\theta} d\theta \\ &= \xi_m(\alpha_2 - \alpha_1) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \xi_n \frac{1}{i(n-m)} \left[e^{i(n-m)\alpha_2} - e^{i(n-m)\alpha_1} \right]. \end{aligned}$$

■

Após a demonstração do Teorema 1, continuamos nossos cálculos utilizando as equações (4.23) e (4.24) na condição (4.22), o que nos resulta:

$$T_c^{(j)}(a_j, \theta_j) = T^+(a_j, \theta_j), \quad (4.37)$$

que, colocando as exponenciais em evidência, é equivalente a igualar os coeficientes de Fourier de (4.18) e (4.25). Neste intuito, escrevemos estas equações em formas vetoriais. Para isto, primeiramente expressaremos a equação (4.21), para $r_j = a_j$, na forma

matricial:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_{-\infty}(a_j) \\ \vdots \\ \lambda_m(a_j) \\ \vdots \\ \lambda_{\infty}(a_j) \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\lambda}^{(j)}} &= \underbrace{T_0 e^{iq_M d_j} \begin{bmatrix} i^{+\infty} J_{-\infty}(q_M a_j) \\ \vdots \\ i^{-m} J_m(q_M a_j) \\ \vdots \\ i^{-\infty} J_{\infty}(q_M a_j) \end{bmatrix}}_{\mathbf{c}^{(j)}} + \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} H_{-\infty}(q_M a_j) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_m(q_M a_j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{\infty}(q_M a_j) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^{(jj)}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{-\infty}^{(j)} \\ \vdots \\ A_m^{(j)} \\ \vdots \\ A_{\infty}^{(j)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^{(j)}} + \\
&+ \underbrace{\begin{bmatrix} h_{-\infty,-\infty}^{(ji)}(a_j) & \cdots & \cdots & \cdots & h_{-\infty,\infty}^{(ji)}(a_j) \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ h_{m,-\infty}^{(ji)}(a_j) & & h_{m,n}^{(ji)}(a_j) & & h_{m,\infty}^{(ji)}(a_j) \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ h_{\infty,-\infty}^{(ji)}(a_j) & \cdots & \cdots & \cdots & h_{\infty,\infty}^{(ji)}(a_j) \end{bmatrix}}_{\mathbf{H}^{(ji)}} \underbrace{\begin{bmatrix} A_{-\infty}^{(i)} \\ \vdots \\ A_n^{(i)} \\ \vdots \\ A_{\infty}^{(i)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}^{(i)}}, \tag{4.38}
\end{aligned}$$

onde

$$h_{m,n}^{(ji)}(a_j) = H_{m-n}(q_M r_{ji}) J_m(q_M a_j) e^{-i(m-n)\theta_{ji}}.$$

Logo, a equação (4.21) pode ser expressa na forma vetorial

$$\boldsymbol{\lambda}^{(j)} = \mathbf{c}^{(j)} + \mathbf{H}^{(jj)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{H}^{(ji)} \mathbf{a}^{(i)}, \tag{4.39}$$

onde,

$$\boldsymbol{\lambda}^{(j)} = [\lambda_m(a_j)], \quad \mathbf{a}^{(j)} = [A_m^{(j)}] \quad \text{e} \quad \mathbf{c}^{(j)} = [c_m^{(j)}], \tag{4.40}$$

são vetores coluna de ordem $2(2|m| + 1)$; os quais seus elementos representam, respectivamente, os coeficientes das expansões em série de Fourier (4.20); os coeficientes térmicos das ondas espalhadas pelo cilindro Ω_j (4.9); e os coeficientes da expansão em série de

Fourier da onda térmica incidente (4.8), que são dados por

$$c_m^{(j)} = T_0 e^{iq_M d_j} i^{-m} J_m(q_M a_j). \quad (4.41)$$

Temos também a matriz diagonal, de ordem $2|m| + 1$,

$$\mathbf{H}^{(jj)} = \text{diag}[H_m(q_M a_j)], \quad (4.42)$$

e a matriz quadrada cheia, de ordem $2|m| + 1$,

$$\mathbf{H}^{(ji)} = [h_{m,n}^{(ji)}(a_j)], \quad i \neq j. \quad (4.43)$$

De maneira análoga a equação (4.39), representamos a equação (4.26) na forma vetorial

$$\boldsymbol{\gamma}^{(j)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ji)}) \boldsymbol{\lambda}^{(j)} + \mathbf{A}^{(ji)} \boldsymbol{\eta}^{(ji)}, \quad (4.44)$$

onde

$$\mathbf{A}^{(ji)} = \left[\frac{\beta_j}{\pi} e^{i(n-m)\theta^{(ji)}} \text{sinc}[(n-m)\beta_j] \right], \quad (4.45)$$

é uma matriz cheia de ordem $2|m| + 1$ e

$$\boldsymbol{\gamma}^{(j)} = [\gamma_m(a_j)] \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\eta}^{(ji)} = [\eta_m^{(ji)}(a_j)], \quad (4.46)$$

são vetores coluna de ordem $2|m| + 1$, cujos elementos são respectivamente os coeficientes das expansões em série de Fourier (4.25) e (4.15) para $r_j = a_j$. Por conveniência, vamos representar $\boldsymbol{\eta}^{(ji)}$ na forma,

$$\boldsymbol{\eta}^{(ji)} = \left[B_n^{(i)} J_{m-n}(q_c r_{ji}) J_m(q_c a_j) e^{-i(m-n)\theta^{(ji)}} \right] \equiv \mathbf{J}^{(ji)} \mathbf{b}^{(i)}, \quad (4.47)$$

onde temos o produto da matriz quadrada cheia de ordem $2|m| + 1$

$$\mathbf{J}^{(ji)} = \left[J_{m-n}(q_c r_{ji}) J_m(q_c a_j) e^{-i(m-n)\theta^{(ji)}} \right], \quad (4.48)$$

e o vetor coluna de ordem $2|m| + 1$

$$\mathbf{b}^{(i)} = [B_n^{(i)}], \quad (4.49)$$

cujos elementos representam os coeficientes da onda transmitida para dentro do cilindro Ω_i .

Por fim, substituindo (4.39) em (4.44), representamos os coeficientes do fourier (4.26) na forma vetorial,

$$\boldsymbol{\gamma}^{(j)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ji)})(\mathbf{c}^{(j)} + \mathbf{H}^{(jj)}\mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{H}^{(ji)}\mathbf{a}^{(i)}) + \mathbf{A}^{(ji)}\mathbf{J}^{(ji)}\mathbf{b}^{(i)}. \quad (4.50)$$

Inserindo as equações (4.18) e (4.25) em (4.37), as igualdades entre os coeficientes são representadas vetorialmente por:

$$\boldsymbol{\eta}^{(jj)} = \boldsymbol{\gamma}^{(j)}. \quad (4.51)$$

O que obtemos, substituindo (4.47) e (4.50) em (4.51),

$$\mathbf{J}^{(jj)}\mathbf{b}_j = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ji)})(\mathbf{c}^{(j)} + \mathbf{H}^{(jj)}\mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{H}^{(ji)}\mathbf{a}^{(i)}) + \mathbf{A}^{(ji)}\mathbf{J}^{(ji)}\mathbf{b}^{(i)}, \quad (4.52)$$

onde temos a matriz diagonal de ordem $2|m| + 1$

$$\mathbf{J}^{(jj)} = \text{diag}[J_m(q_c a_j)]. \quad (4.53)$$

Por conveniência, em (4.52), trocamos $j \leftrightarrow i$ e a representamos na forma,

$$\left[\begin{array}{cc} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)})\mathbf{H}^{(ii)} & -\mathbf{J}^{(ii)} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)})\mathbf{H}^{(ij)} & \mathbf{A}^{(ij)}\mathbf{J}^{(ij)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^{(ij)} - \mathbf{I})\mathbf{c}^{(i)}, \quad (4.54)$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

A seguir utilizaremos a condição de continuidade de fluxo de calor para obtermos a segunda equação que deverá se associar a (4.54) e finalmente resolver o sistema de equações.

Continuidade de fluxo

A equação (4.6) considera que o fluxo de calor Φ na fronteira de cada cilindro deve ser contínuo, sendo matematicamente escrito como:

$$\lim_{r_j \rightarrow a_j^-} \Phi(r_j, \theta_j) = \lim_{r_j \rightarrow a_j^+} \Phi(r_j, \theta_j). \quad (4.55)$$

O lado esquerdo de (4.55) será:

$$\lim_{r_j \rightarrow a_j^-} \Phi(r_j, \theta_j) = \lim_{r_j \rightarrow a_j^-} \left[K_c \frac{\partial}{\partial n} T(r_j, \theta_j) \right] = K_c \frac{\partial T_c^{(j)}}{\partial r_j}(a_j, \theta_j). \quad (4.56)$$

Os coeficientes de Fourier de (4.56) são obtidos substituindo (4.10) em (4.56). Prosseguindo, vamos calcular os coeficientes de Fourier do lado direito de (4.55). Isto equivale calcular o coeficiente de Fourier para o lado direito de (4.6).

Definição 2 *O limite exterior do fluxo de calor normal à fronteira do cilindro Ω_j se denota por:*

$$\lim_{r_j \rightarrow a_j^+} \Phi(r_j, \theta_j) = \lim_{r_j \rightarrow a_j^+} K(r_j, \theta_j) \frac{\partial}{\partial r_j} T(r_j, \theta_j) \equiv \Phi^+(a_j, \theta_j), \quad (4.57)$$

onde $K(r_j, \theta_j)$ é a condutividade no ponto (r_j, θ_j) , logo,

$$\Phi^+(a_j, \theta_j) = \begin{cases} K_M \frac{\partial T_M}{\partial r_j}(a_j, \theta_j), & \theta_j \in [0, 2\pi] \setminus [\alpha_{j1}, \alpha_{j2}] \\ K_c \frac{\partial T_c^{(i)}}{\partial r_j}(a_j, \theta_j), & \theta_j \in [\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]. \end{cases} \quad (4.58)$$

Teorema 2 *Tem-se que:*

$$\Phi^+(a_j, \theta_j) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \phi_m(a_j) e^{im\theta_j}, \quad (4.59)$$

onde

$$\phi_m(a_j) \equiv K_M \lambda'_m(a_j) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_j}{\pi} \left[K_c \eta_n^{(ji)}(a_j) - K_M \lambda'_n(a_j) \right] e^{i(n-m)\theta^{(ji)}} \text{sinc}[(n-m)\beta_j], \quad (4.60)$$

$i \neq j$

aqui, o apóstrofo (') nas funções $\eta(a_j)$ e $\lambda(a_j)$ indica a derivada radial no ponto $r_j = a_j$ das equações (4.16) e (4.21), respectivamente.

Demonstração:

Derivando as equações (4.15) e (4.20) com relação a r_j , temos que as derivadas dos coeficientes $\eta_m^{(ji)}(a_j)$ e $\lambda_m(a_j)$ são, analogamente as equações (4.27) e (4.28),

$$\lambda'_m(a_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T'_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j, \quad (4.61)$$

$$\eta_m^{(ji)}(a_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T_c^{(i)}(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j. \quad (4.62)$$

Os coeficientes de Fourier de (4.59) são dados por,

$$\phi_m(a_j) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi^+(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j. \quad (4.63)$$

Considerando que a região acoplada do cilindro Ω_j corresponde ao intervalo $\theta_j = [\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]$, então, podemos separar a equação (4.63) em:

$$\begin{aligned} 2\pi\phi_m(a_j) &= \int_{[\alpha_{j2}, 2\pi+\alpha_{j1}]} [K_M T'_M(a_j, \theta_j)] e^{-im\theta_j} d\theta_j + \\ &+ \int_{[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]} [K_c T_c^{(i)}(a_j, \theta_j)] e^{-im\theta_j} d\theta_j. \end{aligned} \quad (4.64)$$

O primeiro termo da direita de (4.64), pode ser reescrito como;

$$\begin{aligned} I = \int_{[\alpha_{j2}, 2\pi+\alpha_{j1}]} [K_M T'_M(a_j, \theta_j)] e^{-im\theta_j} d\theta_j &= \int_0^{2\pi} [K_M T'_M(a_j, \theta_j)] e^{-im\theta_j} d\theta_j + \\ &- \int_{[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]} [K_M T'_M(a_j, \theta_j)] e^{-im\theta_j} d\theta_j, \end{aligned} \quad (4.65)$$

substituindo (4.61) em (4.65),

$$I = 2\pi K_M \lambda'_m(a_j) - \int_{[\alpha_{j1}, \alpha_{j2}]} K_M T'_M(a_j, \theta_j) e^{-im\theta_j} d\theta_j. \quad (4.66)$$

Para conhecer todos os termos de $\Phi_m(a_j)$, nos resta apenas resolver os dois últimos termos da direita das equações (4.64) e (4.66). Para isto, empregamos novamente o Lema 1 em $T_c^{(i)}(a_j, \theta_j)$ e $T'_M(a_j, \theta_j)$, que são as derivadas de (4.15) e (4.20). Portanto, a equação (4.64) torna-se:

$$\begin{aligned} 2\pi\phi_m(a_j) &= 2\pi K_M \lambda'_m(a_j) + \\ &- K_M \left\{ \lambda'_m(a_j)(\alpha_{j2} - \alpha_{j1}) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \lambda'_n(a_j) \frac{1}{i(m-n)} [e^{i(n-m)\alpha_{j2}} - e^{i(n-m)\alpha_{j1}}] \right\} + \\ &+ K_c \left\{ \eta_m^{(ji)}(a_j)(\alpha_{j2} - \alpha_{j1}) + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \eta_n^{(ji)}(a_j) \frac{1}{i(m-n)} [e^{i(n-m)\alpha_{j2}} - e^{i(n-m)\alpha_{j1}}] \right\}, \end{aligned} \quad (4.67)$$

utilizando a equação (4.34) em (4.67) e notando que $(2\beta_j = \alpha_{j2} - \alpha_{j1})$, temos,

$$\begin{aligned} \phi_m(a_j) &= K_M \lambda'_m(a_j) + \frac{\beta_j}{\pi} [K_c \eta_m^{(ji)}(a_j) - K_M \lambda'_m(a_j)] + \\ &+ \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{+\infty} \frac{[K_c \eta_m^{(ji)}(a_j) - K_M \lambda'_m(a_j)]}{\pi(n-m)} e^{i(n-m)\theta^{(ji)}} \text{sen}[(n-m)\beta_j], \end{aligned} \quad (4.68)$$

$$\phi_m(a_j) = K_M \lambda'_m(a_j) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\beta_j}{\pi} \left[K_c \eta'_n{}^{(ji)}(a_j) - K_M \lambda'_n(a_j) \right] e^{i(n-m)\theta^{(ji)}} \text{sinc}[(n-m)\beta_j]. \quad (4.69)$$

■

Novamente com o objetivo de apresentar os coeficientes de Fourier (4.60) na forma vetorial, primeiramente escrevemos a derivada da (4.21) analogamente a equação (4.39), na forma:

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dr_j} \right|_{r=a_j} = \boldsymbol{\lambda}'^{(j)} = \mathbf{c}'^{(j)} + \mathbf{H}'^{(jj)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{H}'^{(ji)} \mathbf{a}^{(i)}, \quad (4.70)$$

onde $\mathbf{a}^{(i)}$ é dado em (4.40) e

$$\mathbf{c}'^{(j)} = e^{iq_M d_j} q_M [i^{-m} J'_m(q_M a_j)], \quad (4.71)$$

é um vetor coluna de ordem $2|m| + 1$. Aqui

$$\mathbf{H}'^{(jj)} = \text{diag}[q_M H'_m(q_M a_j)], \quad (4.72)$$

é uma matriz diagonal de ordem $2|m| + 1$, enquanto

$$\mathbf{H}'^{(ji)} = \left[q_M H_{m-n}(q_M r_{ji}) J'_m(q_M a_j) e^{-i(m-n)\theta^{(ji)}} \right], \quad (4.73)$$

é uma matriz quadrada cheia de ordem $2|m| + 1$.

Expondo a derivada da equação (4.16) da mesma forma como na equação (4.47), temos:

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\eta}^{(ji)}}{dr_j} \right|_{r_j=a_j} = \boldsymbol{\eta}'^{(ji)} = \mathbf{J}'_{ji} \mathbf{b}^{(i)}, \quad (4.74)$$

onde $\mathbf{b}^{(i)}$ é dado por (4.49) e

$$\mathbf{J}'^{(ji)} = \left[q_c J_{m-n}(q_c r_{ji}) J'_m(q_c a_j) e^{-i(m-n)\theta^{(ji)}} \right], \quad (4.75)$$

é uma matriz quadrada cheia de ordem $2|m| + 1$.

Representando a equação (4.60) em forma matricial tem-se que:

$$\boldsymbol{\phi}^{(j)} = K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ji)}) \boldsymbol{\lambda}'^{(j)} + K_c \mathbf{A}^{(ji)} \boldsymbol{\eta}'^{(ji)}, \quad (4.76)$$

onde $\boldsymbol{\phi}^{(j)} = [\phi_m(a_j)]$ é um vetor coluna de ordem $2|m| + 1$.

Logo, substituindo (4.56) e (4.57) nas condições de contorno (4.55) temos,

$$K_c \frac{\partial T_c^{(j)}}{\partial r_j}(a_j, \theta_j) = \Phi^+(a_j, \theta_j), \quad (4.77)$$

utilizando a equação (4.15), para $i = j$, e (4.59) em (4.77), é facil ver que obteremos:

$$K_c \boldsymbol{\eta}'^{(j)} = \boldsymbol{\phi}^{(j)}. \quad (4.78)$$

Substituindo (4.74) e (4.76) em (4.78), ficamos com

$$K_c \mathbf{J}'^{(jj)} \mathbf{b}_j = K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ji)}) \boldsymbol{\lambda}'^{(j)} + K_c \mathbf{A}^{(ji)} \boldsymbol{\eta}'^{(ji)}, \quad (4.79)$$

onde

$$\mathbf{J}'^{(jj)} = q_c \text{diag}[J'_m(q_c a_j)]_{m=-\infty, \infty}. \quad (4.80)$$

Trocando $i \leftrightarrow j$ e substituindo $\boldsymbol{\lambda}'^{(i)}$ e $\boldsymbol{\eta}'^{(j)}$, temos

$$K_c \mathbf{J}'^{(ii)} \mathbf{b}^{(i)} = K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) (\mathbf{c}'^{(i)} + \mathbf{H}'^{(ii)} \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{H}'^{(ij)} \mathbf{a}^{(j)}) + K_c \mathbf{A}^{(ij)} \mathbf{J}'_{ij} \mathbf{b}_j, \quad (4.81)$$

que pode ser representada na forma matricial:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}'^{(ii)} & -K_c \mathbf{J}'^{(ii)} & K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}'^{(ij)} & K_c \mathbf{A}^{(ij)} \mathbf{J}'^{(ij)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \end{bmatrix} = \\ & = K_M (\mathbf{A}^{(ij)} - \mathbf{I}) \mathbf{c}'^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

As equações (4.54) e (4.82) podem ser agrupadas como:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}^{(ii)} & -\mathbf{J}^{(ii)} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}^{(ij)} & \mathbf{A}^{(ij)} \mathbf{J}^{(ij)} \\ K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}'^{(ii)} & -K_c \mathbf{J}'^{(ii)} & K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}'^{(ij)} & K_c \mathbf{A}^{(ij)} \mathbf{J}'^{(ij)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \end{bmatrix} = \\ & = \left[\begin{array}{c} (\mathbf{A}^{(ij)} - \mathbf{I}) \mathbf{c}^{(i)} \\ K_M (\mathbf{A}^{(ij)} - \mathbf{I}) \mathbf{c}'^{(i)} \end{array} \right], \quad \begin{array}{l} i, j = 1, 2 \\ i \neq j, \end{array} \end{aligned} \quad (4.83)$$

e escrevemos as equações para dois cilindros acoplados, como:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}^{(11)} & -\mathbf{J}^{(11)} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}^{(12)} & \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{J}^{(12)} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}'^{(11)} & -K_c\mathbf{J}'^{(11)} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}'^{(12)} & K_c\mathbf{A}^{(12)}\mathbf{J}'^{(12)} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}^{(21)} & \mathbf{A}^{(21)}\mathbf{J}^{(21)} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}^{(22)} & -\mathbf{J}^{(22)} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}'^{(21)} & K_c\mathbf{A}^{(21)}\mathbf{J}'^{(21)} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}'^{(22)} & -K_c\mathbf{J}'^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^{(12)} - \mathbf{I})\mathbf{c}^{(1)} \\ K_M(\mathbf{A}^{(12)} - \mathbf{I})\mathbf{c}'^{(1)} \\ (\mathbf{A}^{(21)} - \mathbf{I})\mathbf{c}^{(2)} \\ K_M(\mathbf{A}^{(21)} - \mathbf{I})\mathbf{c}'^{(2)} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.84}$$

4.2.3 Adaptação às notações anteriores

Com a finalidade de restabelecer as mesmas notações de (3.42), multiplicamos à esquerda (escalonamento por linha) de (4.84) por:

1. a primeira linha $\mathbf{H}^{-{(11)}}$,
2. a segunda linha $\mathbf{H}'^{-{(11)}}$,
3. a terceira linha $\mathbf{H}^{-{(22)}}$,
4. a quarta linha $\mathbf{H}'^{-{(22)}}$,

Aqui $\mathbf{\Xi}^-$ é a matriz inversa de $\mathbf{\Xi}$, de forma que

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{S}^{(1)} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z}^{(1)} & \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{S}^{(2)} \\ \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{Z}^{(2)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{G}^{(11)} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(12)} & \mathbf{T}^{(12)} \\ \mathbf{L}^{(11)} & \mathbf{0} & \mathbf{L}^{(12)} & \mathbf{U}^{(12)} \\ \mathbf{G}^{(21)} & \mathbf{T}^{(21)} & \mathbf{G}^{(22)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^{(21)} & \mathbf{U}^{(21)} & \mathbf{L}^{(22)} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{pmatrix} = \\
& = \begin{pmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \mathbf{g}^{(g)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{4.85}$$

onde,

$$\left\{ \mathbf{S}^{(i)} = -\mathbf{H}^{-(ii)} \mathbf{J}^{(ii)}, \quad \mathbf{Z}^{(i)} = -\frac{K_c}{K_M} \mathbf{H}'^{-(ii)} \mathbf{J}'^{(ii)}, \quad i = 1, 2, \right. \quad (4.86)$$

são matrizes diagonais de ordem $2|m| + 1$, cujos elementos estão definidos em (3.46);

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}^{(1,2)} = \mathbf{H}^{-1(11)} \mathbf{H}^{(12)}, \quad \mathbf{N}^{(12)} = \mathbf{H}'^{-1(11)} \mathbf{H}'^{(12)}, \\ \mathbf{M}^{(2,1)} = \mathbf{H}^{-1(22)} \mathbf{H}^{(21)} \quad \text{e} \quad \mathbf{N}^{(2,1)} = \mathbf{H}'^{-1(22)} \mathbf{H}'^{(21)}, \end{array} \right. \quad (4.87)$$

são matrizes quadradas cheias de ordem $2|m| + 1$, cujos elementos estão definidos em (3.43); temos também os vetores coluna de ordem $2|m| + 1$

$$\left\{ \mathbf{i}^{(i)} = -\mathbf{H}^{-(ii)} \mathbf{c}^{(i)}, \quad \mathbf{g}^{(i)} = -\mathbf{H}'^{-(ii)} \mathbf{c}'^{(i)}, \quad i = 1, 2, \right. \quad (4.88)$$

cujos elementos estão definidos em (3.48).

Observe que o acoplamento dos dois cilindros tem o efeito de acrescentar uma matriz de coeficientes à já existente em (3.42), cujos blocos de matrizes têm dimensão $(2|m| + 1) \times (2|m| + 1)$ e são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{G}^{(11)} = -\mathbf{H}^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{H}^{(11)} \\ \mathbf{G}^{(12)} = -\mathbf{H}^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{H}^{(12)} \\ \mathbf{G}^{(21)} = -\mathbf{H}^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{H}^{(21)} \\ \mathbf{G}^{(22)} = -\mathbf{H}^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{H}^{(22)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}^{(11)} = -\mathbf{H}'^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{H}'^{(11)} \\ \mathbf{L}^{(12)} = -\mathbf{H}'^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{H}'^{(12)} \\ \mathbf{L}^{(21)} = -\mathbf{H}'^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{H}'^{(21)} \\ \mathbf{L}^{(22)} = -\mathbf{H}'^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{H}'^{(22)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}^{(12)} = \mathbf{H}^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{J}^{(12)}, \\ \mathbf{T}^{(21)} = \mathbf{H}^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{J}^{(21)}, \\ \mathbf{U}^{(12)} = \frac{K_c}{K_M} \mathbf{H}'^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{J}'^{(12)}, \\ \mathbf{U}^{(21)} = \frac{K_c}{K_M} \mathbf{H}'^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{J}'^{(21)}. \end{array} \right. \quad (4.89)$$

O acoplamento também acrescenta um vetor coluna ao já existente em (3.42), cujos blocos de vetores têm dimensão $(2|m| + 1)$ e são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_1 = \mathbf{H}^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{v}_1 = \mathbf{H}'^{-(11)} \mathbf{A}^{(12)} \mathbf{c}'_1 \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{H}^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}'^{-(22)} \mathbf{A}^{(21)} \mathbf{c}'_2. \end{array} \right. \quad (4.90)$$

4.3 Meio semi-infinito

Na secção 4.2 não estão consideradas as contribuições na temperatura devido ao efeito de fronteira da amostra. Nesta secção, novamente modelamos o efeito adiabático da fronteira mediante a simetriação do domínio incluindo novos cilindros, veja figuras

4.5 e 4.6, em posições especulares com respeito a fronteira. O fato de que a solução seja simétrica garante que a derivada normal seja nula no eixo de simetria.

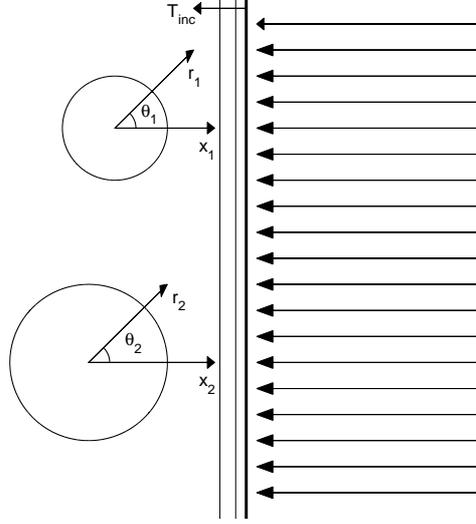


Figura 4.5: Disposição de dois cilindros físicos inserido em um meio semi-infinito.

Esta simetrização tem o efeito de acrescentar uma matriz de coeficientes à já existente em (4.85). Portanto, nos centraremos especialmente nos novos termos que não haviam aparecido anteriormente.

A equação (4.7) continua sendo

$$T_M = T_{inc} + T_{esp}, \quad (4.91)$$

onde, T_{inc} é dada por (4.8) e

$$T_{esp} = \sum_{j=1}^4 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j}, \quad (4.92)$$

na qual, foram somados dois termos em (4.9) devido Ω_3 e Ω_4 , que são os domínios simétricos de Ω_1 e Ω_2 , respectivamente.

Nota 2 Para estabelecer a relação entre cilindros físicos e seus cilindros simétricos achamos conveniente numerar com os índices 1 e 2 os cilindros físicos, e por 3 e 4 seus respectivos simétricos. Assim a simetrização de $\Omega_{(i)}$ é Ω_{2+i} , para $i = 1, 2$.

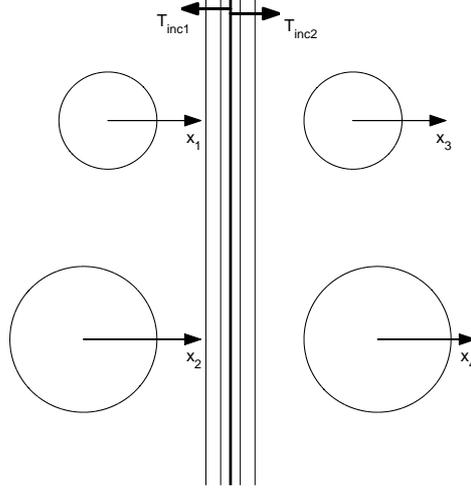


Figura 4.6: Disposição e numeração dos cilindros físicos e suas simetriações

A equação (4.19) para o sistema no centro de Ω_j será

$$\begin{aligned}
T_M(r_j, \theta_j) \equiv & T_0 e^{iq_M d_j} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} i^{-m} J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
& + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{ji}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{ji}} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2+j)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,2+j}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,2+j}} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2+i)} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(q_M r_{j,2+i}) J_m(q_M r_j) e^{im\theta_j} e^{-i(m-n)\theta_{j,2+i}},
\end{aligned} \tag{4.93}$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$; devido a utilização do teorema de Graf (A.20) a expressão anterior é válida para a região

$$\left(\min_{1 \leq k \leq 4, k \neq j} r_{jk} \right) > r_j > 0.$$

Logo a equação (4.21) será,

$$\begin{aligned}
\lambda_m(r_j) \equiv & T_0 e^{iq_M d_j} i^{-m} J_m(q_M r_j) + A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m-n}(q_M r_{ji}) J_m(q_M r_j) e^{-i(m-n)\theta_{ji}} \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2+j)} H_{m-n}(q_M r_{j,2+j}) J_m(q_M r_j) e^{-i(m-n)\theta_{j,2+j}} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(2+i)} H_{m-n}(q_M r_{j,2+i}) J_m(q_M r_j) e^{-i(m-n)\theta_{j,2+i}}.
\end{aligned} \quad i \neq j. \quad (4.94)$$

Considerando a simetria do problema, se tem a identidade

$$T_{esp}(r_i, \theta_i) = T_{esp}(r_{2+i}, \pi - \theta_{2+i}), \quad i = 1, 2,$$

que, tendo em conta que $H_n = (-1)^n H_{-n}$, estabelece a seguinte relação entre coeficientes

$$A_n^{(2+i)} = A_{-n}^{(i)}, \quad i = 1, 2.$$

Aplicando esta propriedade à equação (4.94), podemos reduzir o número de incógnitas escrevendo $\lambda_m(r_j)$ em função unicamente dos coeficientes A^1 e A^2 :

$$\begin{aligned}
\lambda_m(r_j) \equiv & T_0 e^{iq_M d_j} i^{-m} J_m(q_M r_j) + A_m^{(j)} H_m(q_M r_j) + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m-n}(q_M r_{ji}) J_m(q_M r_j) e^{-i(m-n)\theta_{ji}} \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(j)} H_{m+n}(q_M r_{j,2+j}) J_m(q_M r_j) e^{-i(m+n)\theta_{j,2+j}} + \\
& + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n^{(i)} H_{m+n}(q_M r_{j,2+i}) J_m(q_M r_j) e^{-i(m+n)\theta_{j,2+i}}.
\end{aligned} \quad i \neq j. \quad (4.95)$$

Das equações (4.93) e (4.95) temos que a temperatura na matriz é dada por:

$$T_M(r_j, \theta_j) = \lambda_m(r_j) e^{im\theta_j} \quad (4.96)$$

Representando (4.95) na forma vetorial, obtemos para meio semi-infinito a equação equivalente a (4.39):

$$\boldsymbol{\lambda}^{(j)} = \mathbf{c}^{(j)} + \mathbf{H}^{(jj)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{H}^{(ji)} \mathbf{a}^{(i)} + \widetilde{\mathbf{H}}^{(jj)} \mathbf{a}^{(j)} + \widetilde{\mathbf{H}}^{(ji)} \mathbf{a}^{(i)}, \quad i \neq j, \quad (4.97)$$

na qual apareceram as novas matrizes quadradas cheias de ordem $2|m| + 1$

$$\widetilde{\mathbf{H}}^{(ji)} = [\widetilde{h}_{m,n}^{(ji)}(a_j)], \quad \text{para } i, j = 1, 2, \quad (4.98)$$

tendo como elementos

$$\tilde{h}_{m,n}^{(ji)}(a_j) = H_{m+n}(qMr_{j,2+i})J_m(qMa_j)e^{-i(m+n)\theta_{j,2+i}}, \quad \text{para } i, j = 1, 2. \quad (4.99)$$

A equação (4.52) será,

$$\mathbf{J}^{(jj)}\mathbf{b}^{(j)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ji)})(\mathbf{c}^{(j)} + \mathbf{H}^{(jj)}\mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{H}^{(ji)}\mathbf{a}^{(i)} + \widetilde{\mathbf{H}}^{(jj)}\mathbf{a}^{(j)} + \widetilde{\mathbf{H}}^{(ji)}\mathbf{a}^{(i)}) + \mathbf{A}^{(ji)}\mathbf{J}^{(ji)}\mathbf{b}^{(i)}, \quad (4.100)$$

para $i \neq j$, trocando $j \leftrightarrow i$ a equação (4.100) podemos representá-la na forma,

$$\mathbf{J}^{(ii)}\mathbf{b}^{(i)} = (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)})(\mathbf{c}^{(i)} + \mathbf{H}^{(ii)}\mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{H}^{(ij)}\mathbf{a}^{(j)} + \widetilde{\mathbf{H}}^{(ii)}\mathbf{a}^{(i)} + \widetilde{\mathbf{H}}^{(ij)}\mathbf{a}^{(j)}) + \mathbf{A}^{(ij)}\mathbf{J}^{(ij)}\mathbf{b}^{(j)}, \quad (4.101)$$

que pode ser representada na forma,

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)})\mathbf{H}^{(ii)} & -\mathbf{J}^{(ii)} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)})\mathbf{H}^{(ij)} & \mathbf{A}^{(ij)}\mathbf{J}^{(ij)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \end{bmatrix} + \\ & + \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(ii)} & \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(ij)} & \mathbf{0} \end{array} \right]}_{\Lambda} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^{(ij)} - \mathbf{I})\mathbf{c}^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.102)$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$

Notamos que com a simetria, foi adicionada ao lado esquerdo de (4.54) a matriz

$$\Lambda = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(11)} & \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(12)} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(21)} & \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(22)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

que foi definida ao ser substituído os valores $i, j = 1, 2$, com $i \neq j$.

Para as equações da continuidade de fluxo de calor

Agora vamos em busca de uma expressão análoga a equação (4.103) para a continuidade de fluxo de calor.

Devido a consideração de meio semi-infinito a equação (4.39) tornou-se na forma (4.97). Analogamente, a equação (4.70) será representada na forma,

$$\boldsymbol{\lambda}'(a_j) = \mathbf{c}'^{(j)} + \mathbf{H}'^{(jj)} \mathbf{a}^{(j)} + \mathbf{H}'^{(ji)} \mathbf{a}^{(i)} + \widetilde{\mathbf{H}}'^{(jj)} \mathbf{a}^{(j)} + \widetilde{\mathbf{H}}'^{(ji)} \mathbf{a}^{(i)}, \quad i \neq j, \quad (4.104)$$

na qual apareceram as novas matrizes quadradas cheias de ordem $2|m| + 1$

$$\widetilde{\mathbf{H}}'^{(ji)} = [q_M \widetilde{h}'_{m,n}{}^{(ji)}(a_j)], \quad i, j = 1, 2. \quad (4.105)$$

tendo como elementos

$$\widetilde{h}'_{m,n}{}^{(ji)}(a_j) = H_{m+n}(q_M r_{j,2+i}) J'_m(q_M a_j) e^{-i(m+n)\theta_{j,2+i}}, \quad i, j = 1, 2. \quad (4.106)$$

As novas matrizes (4.98) e (4.105) correspondem a uma permutação das colunas das matrizes $\mathbf{H}^{(jk)}$ e $\mathbf{H}'^{(jk)}$.

A (4.81) ficará, para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$:

$$K_c \mathbf{J}'^{(ii)} \mathbf{b}^{(i)} = K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) (\mathbf{c}'^{(i)} + \mathbf{H}'^{(ii)} \mathbf{a}^{(i)} + \mathbf{H}'^{(ij)} \mathbf{a}^{(j)} + \widetilde{\mathbf{H}}'^{(ii)} \mathbf{a}^{(i)} + \widetilde{\mathbf{H}}'^{(ij)} \mathbf{a}^{(j)}) + K_c \mathbf{A}^{(ij)} \mathbf{J}'^{(ij)} \mathbf{b}^{(j)}, \quad (4.107)$$

que pode ser escrita na forma matricial

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc} K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}'^{(ii)} & -K_c \mathbf{J}'^{(ii)} & K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \mathbf{H}'^{(ij)} & K_c \mathbf{A}^{(ij)} \mathbf{J}'^{(ij)} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \end{bmatrix} + \\ & + \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \widetilde{\mathbf{H}}'^{(ii)} & \mathbf{0} & K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(ij)}) \widetilde{\mathbf{H}}'^{(ij)} & \mathbf{0} \end{array} \right]}_{\Lambda'} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(i)} \\ \mathbf{b}^{(i)} \\ \mathbf{a}^{(j)} \\ \mathbf{b}^{(j)} \end{bmatrix} = \\ & = K_M (\mathbf{A}^{(ij)} - \mathbf{I}) \mathbf{c}'^{(i)}, \end{aligned} \quad (4.108)$$

para $i, j = 1, 2$ e $i \neq j$.

Substituindo os valores $i = 1, 2$, definimos a matriz Λ' ,

$$\Lambda' = \begin{bmatrix} K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)}) \widetilde{\mathbf{H}}'^{(11)} & \mathbf{0} & K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)}) \widetilde{\mathbf{H}}'^{(12)} & \mathbf{0} \\ K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)}) \widetilde{\mathbf{H}}'^{(21)} & \mathbf{0} & K_M (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)}) \widetilde{\mathbf{H}}'^{(22)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.109)$$

Logo, as condições de continuidade de fluxo e temperatura, aplicadas ao problema simétrico, nos fornece a nova matriz

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(11)} & \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(12)} & \mathbf{0} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(11)} & \mathbf{0} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(12)} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(21)} & \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(22)} & \mathbf{0} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(21)} & \mathbf{0} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(22)} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.110)$$

que adicionando a equação (4.84) temos

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}^{(11)} & -\mathbf{J}^{(11)} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}^{(12)} & \mathbf{A}^{(12)}\mathbf{J}^{(12)} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}'^{(11)} & -K_c\mathbf{J}'^{(11)} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\mathbf{H}'^{(12)} & K_c\mathbf{A}^{(12)}\mathbf{J}'^{(12)} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}^{(21)} & \mathbf{A}^{(21)}\mathbf{J}^{(21)} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}^{(22)} & -\mathbf{J}^{(22)} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}'^{(21)} & K_c\mathbf{A}^{(21)}\mathbf{J}'^{(21)} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\mathbf{H}'^{(22)} & -K_c\mathbf{J}'^{(22)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(11)} & \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(12)} & \mathbf{0} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(11)} & \mathbf{0} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(12)} & \mathbf{0} \\ (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(21)} & \mathbf{0} & (\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(22)} & \mathbf{0} \\ K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(21)} & \mathbf{0} & K_M(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(22)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A}^{(12)} - \mathbf{I})\mathbf{c}^{(1)} \\ K_M(\mathbf{A}^{(12)} - \mathbf{I})\mathbf{c}'^{(1)} \\ (\mathbf{A}^{(21)} - \mathbf{I})\mathbf{c}^{(2)} \\ K_M(\mathbf{A}^{(21)} - \mathbf{I})\mathbf{c}'^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (4.111)$$

Adaptação a notações anteriores.

Sendo a equação (4.85) na forma,

$$\begin{bmatrix} \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{I} & \mathbf{S}^{(1)} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{Z}^{(1)} & \mathbf{N}^{(1,2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{S}^{(2)} \\ \mathbf{N}^{(2,1)} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{Z}^{(2)} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cccc} \mathbf{G}^{(11)} & \mathbf{0} & \mathbf{G}^{(12)} & \mathbf{T}^{(12)} \\ \mathbf{L}^{(11)} & \mathbf{0} & \mathbf{L}^{(12)} & \mathbf{U}^{(12)} \\ \mathbf{G}^{(21)} & \mathbf{T}^{(21)} & \mathbf{G}^{(22)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{L}^{(21)} & \mathbf{U}^{(21)} & \mathbf{L}^{(22)} & \mathbf{0} \end{array} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{S}^{(11)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(13)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{(21)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(23)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{(31)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(33)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}^{(41)} & \mathbf{0} & \mathbf{S}^{(43)} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(1)} \\ \mathbf{b}^{(1)} \\ \mathbf{a}^{(2)} \\ \mathbf{b}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}^{(1)} \\ \mathbf{g}^{(1)} \\ \mathbf{i}^{(2)} \\ \mathbf{g}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \quad (4.112)$$

onde,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{S}^{(11)} = \mathbf{H}^{-(11)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(11)}, \\ \mathbf{S}^{(21)} = \mathbf{H}'^{-(11)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(11)}, \\ \mathbf{S}^{(31)} = \mathbf{H}^{-(22)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(21)}, \\ \mathbf{S}^{(41)} = \mathbf{H}'^{-(22)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(21)}, \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \mathbf{S}^{(13)} = \mathbf{H}^{-(11)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(12)}, \\ \mathbf{S}^{(23)} = \mathbf{H}'^{-(11)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(12)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(12)}, \\ \mathbf{S}^{(33)} = \mathbf{H}^{-(22)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}^{(22)}, \\ \mathbf{S}^{(43)} = \mathbf{H}'^{-(22)}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^{(21)})\widetilde{\mathbf{H}}'^{(22)}. \end{array} \right. \quad (4.113)$$

A temperatura na matriz é obtida através da equação (4.96) com os coeficientes térmicos calculados por (4.112).

4.4 Resultado experimental

A Figura 4.7 apresenta os resultados numéricos (linha contínua) da amplitude e fase normalizadas na superfície, usando a equação (4.91) com os coeficientes térmicos calculados por (4.112), em comparação com os resultados experimentais (pontos e cruzeiros). Estes experimentos foram realizados em amostras calibradas descritas na secção 1.3.

Na Figura 4.7(a) temos uma amostra com dois cilindros separados, onde os dados geométricos são: $a_1 = a_2 = 0,50 \text{ mm}$, $\Delta_1 = 110 \mu\text{m}$, $\Delta_2 = 155 \mu\text{m}$ e $h = 1,30 \text{ mm}$. As mesmas medidas para uma amostra contendo dois cilindros acoplados estão mostradas em Figura 4.7(b). Nesta amostra os dados geométricos são: $a_1 = a_2 = 0,50 \text{ mm}$, $\Delta_1 = 112 \mu\text{m}$, $\Delta_2 = 152 \mu\text{m}$ e $h = 0,79 \text{ mm}$. As frequências de modulação utilizadas foram 80 Hz e 190 Hz , que correspondem aos comprimentos de difusão térmica na matriz (μ_M) de $546 \mu\text{m}$ e $355 \mu\text{m}$, respectivamente.

Observamos também na Figura 4.7(a) que para frequência de 190 Hz o efeito de interação entre as ondas espalhadas pelos dois cilindros não é bem observado. Logo, estes produzem resultados similares a dois cilindros isolados, onde suas ondas espalhadas não se interferem significativamente ao atingir a superfície. Conforme comentado na secção 3.3.5, isto se deve ao pequeno comprimento de difusão térmica da matriz, onde as ondas de interação são desprezíveis ao atingir a superfície. Para frequência de 80 Hz , portanto maior comprimento de difusão térmica, a interação entre os dois cilindros se torna relevante e é claramente observada no gráfico nos dando a impressão de que os dois cilindros estão mais próximos. Pelos mesmos motivos citados para Figura 4.7(a), na Figura 4.7(b) vemos

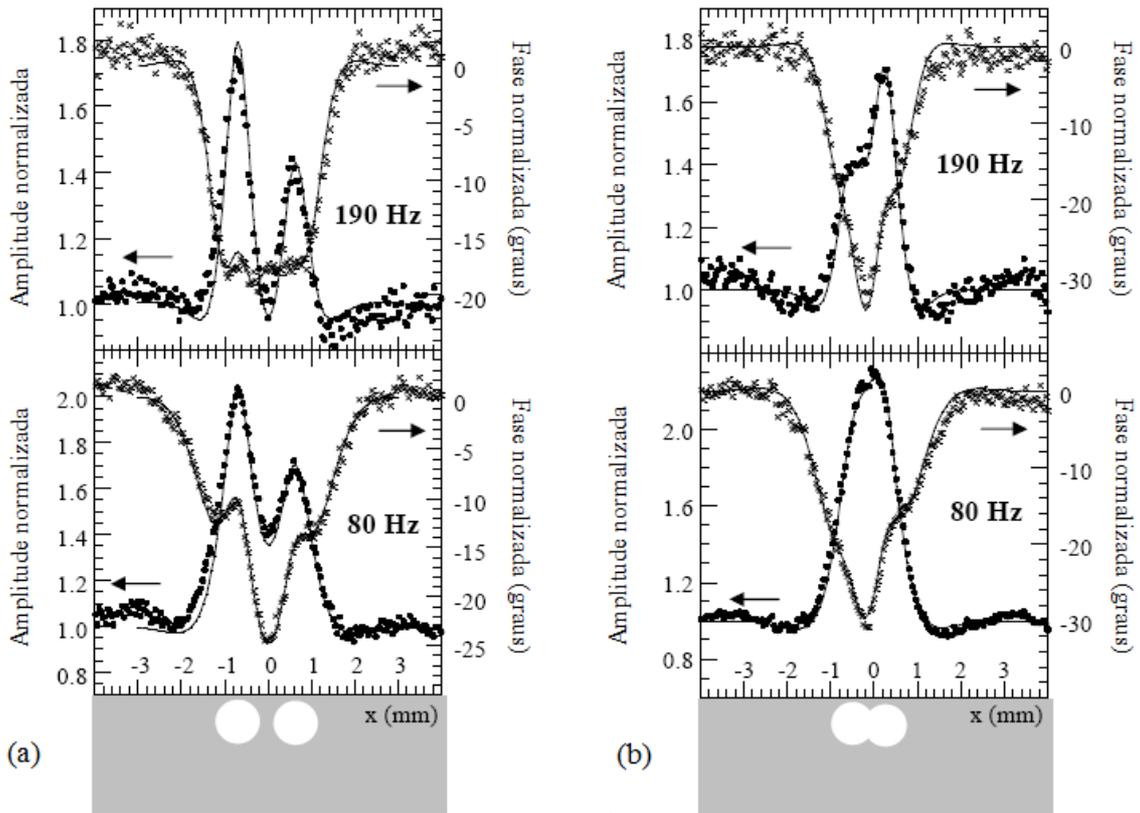


Figura 4.7: Medidas experimentais (pontos e cruces) e teóricas (linha contínua) para frequências de 80 Hz e 190 Hz da temperatura e fase normalizadas na superfície da amostra de grafite com dois cilindros: (a) separados e (b) acoplados.

que os dois cilindros são mais distiguíveis para frequências de 190 Hz que para de 80 Hz , sendo que este último se comporta quase como se fosse um cilindro só.

Temos também, como pode ser visto, que nosso modelo descreve bem os resultados experimentais devido a um excelente acordo encontrado ao compararmos as medidas experimentais e os resultados numéricos. Com isto, tomamos como válido o modelo teórico desenvolvido neste Capítulo.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

5.1 Conclusões

Como grande parte dos materiais heterogêneos que possuem comprovadas propriedades mecânicas, eletromagnéticas, térmicas, etc; e de grande implantação na indústria contemporânea, são de difícil caracterização devido às suas formas variadas (não somente cilíndrica e tampouco esférica), a principal meta deste trabalho era estabelecer as bases para o estudo da distribuição de calor em meio com inclusões de geometria de forma arbitrária.

Neste sentido, primeiramente, abordamos modelos e obtemos soluções para propagação do calor em meio opaco, termicamente isotrópico, homogêneo e com inclusões que possuam elevado grau de simetria (cilindros circulares infinitos e esferas), iluminado por uma fonte de luz modulada. Foi abordado um modelo geral, no sentido que não há restrições quanto as propriedades térmicas das inclusões e matriz, como a difusividade e a condutividade térmicas; e também quanto a estrutura do compósito, como número de incrustações, distâncias entre elas, tamanhos, arranjo, etc. Os gráficos de simulação computacional reproduziram resultados já conhecidos na literatura, validando nosso algoritmo. Com estas soluções podemos obter informações das propriedades térmicas do material, das inclusões ou efetiva do compósito. Também podemos obter informações de sua estrutura como o número de inclusões no meio, distâncias entre elas e tamanhos, e com isso, caracterizar estes materiais (neste caso, materiais compósitos com incrustações de geometria simétrica). Porém, existem materiais que possuem uma tão elevada fração de

incrustações no volume que estas chegam a se deformarem ou até mesmo a se acoplarem, formando uma outra geometria. Este pode ser o caso da opala inversa, assim como dos compósitos reforçados por fibras preenchidos com uma alta fração de fibras no volume, no qual foram encontrados grandes anomalias no valor da condutividade térmica efetiva.

Nesta tese, propomos um modelo matemático para a temperatura normalizada em um material com dois cilindros circulares, infinitos, paralelos e acoplados, o qual pode ser entendido como um novo cilindro infinito de geometria não circular. As medidas da temperatura superficial realizadas mediante radiometria fototérmica em amostras calibradas confirmaram o modelo. Os experimentos e amostras foram fabricados no laboratório do Prof. Dr. Agustin Salazar do Departamento de Física Aplicada I, da Universidad del País Vasco em Bilbao-Espanha.

Este resultado nos rendeu um artigo [52] e também uma apresentação oral na 9th *International Conference on Quantitative InfraRed Thermography*, QUIRT2008, realizada em Cracóvia, Polónia.

Verificamos em nossos resultados que uma certa instabilidade aparece nas simulações e se agrava conforme aumentamos o acoplamento entre os dois cilindros. Esta instabilidade não está relacionada à restrição imposta devido o teorema de adição de Graf, visto que trabalhamos bastante dentro dos limites de validade, e sim, aos problemas de limitação prática de ordem computacional como consequência do surgimento de matrizes mal condicionadas para grandes acoplamentos. Para minimizar estas limitações devemos formular o modelo (reescalando as matrizes) e utilizar o *Fast Multipole Methods* [48], de forma a “exigir” do computador “agilidade” com relação ao tempo necessário para efetuar as simulações e que “trabalhe” os cálculos com matrizes computacionalmente estáveis.

5.2 Perspectivas

As perspectivas são diversas, vamos citar algumas.

- Generalizar o modelo para N cilindros acoplados dois a dois.
- Construir o modelo equivalente esférico, para duas esferas acopladas. Para isto, pode ser utilizado o potencial de casca simples descrito no apêndice A.3. Acredito

que assim, se obterá matrizes bem escalonadas, o que eliminaria os problemas de instabilidade do modelo para cilindros acoplados.

- Elaboração de modelos para cilindros não infinitos e não alinhados.
- Generalização dos modelos cilíndricos e esféricos para N incrustações acopladas duas a duas, três a três, etc. E assim, obter as propriedades térmicas efetivas destes meios.
- A idéia principal de elaboração de uma solução para a distribuição de temperatura em um material com inclusões de geometria arbitrária, no momento parece utopia. Mas, considero que este trabalho deu o primeiro e grande passo neste sentido. E desde já, acredito que podemos planejar modelos para o estudo da condução de calor em materiais compósitos preenchidos com inclusões interconectadas, como por exemplo: cilindro-cilindro alinhados três a três ou mais, esferas-esferas duas a duas ou mais, bastão-esfera, etc.

Apêndice A

A.1 Funções de Bessel cilíndricas e esféricas

Neste apêndice são apresentadas as funções de Bessel, já que funções de ondas planas, cilíndricas e esféricas podem ser representadas como uma combinação linear destas funções.

As funções de Bessel são originadas quando encontramos, através do método de separação de variáveis, soluções da equação de Laplace ou Helmholtz, em coordenadas esféricas ou cilíndricas.

As funções de Bessel possuem as seguintes subdivisões:

1. Função ordinária de Bessel ou função de Bessel de primeira espécie de ordem n , representada por $J_n(u)$.
2. Função de Bessel de segunda espécie de ordem n , representada por $Y_n(u)$.
3. Função de Bessel de terceira espécie ou função de Hankel de ordem n . Estas são subdivididas em função de Hankel de primeiro tipo $H_n^{(1)}$ e de segundo tipo $H_n^{(2)}$. Sendo formada pelas combinações das funções de Bessel de primeira e segunda espécie, na forma:

$$\begin{aligned} H_n^{(1)}(u) &= J_n(u) + iY_n(u), \\ H_n^{(2)}(u) &= J_n(u) - iY_n(u). \end{aligned} \tag{A.1}$$

As funções esféricas de Bessel também possuem as mesmas subdivisões acima e são representadas pelas letras minúsculas $j_n(u)$, $y_n(u)$, $h_n^{(1)}(u)$ e $h_n^{(2)}(u)$, onde a relação com as funções de Bessel cilíndricas é [44, 45, 48]

$$z_n(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}} Z_{n+\frac{1}{2}}(u), \tag{A.2}$$

na qual $z_n(u) = j_n(u), y_n(u), h_n^{(1)}(u), h_n^{(2)}(u)$, são as funções de Bessel esféricas e $Z_n(u) = J_n(u), Y_n(u), H_n^{(1)}(u), H_n^{(2)}(u)$, são as cilíndricas.

Também existem as funções modificadas de Bessel [42, 45, 46] que não foram mencionadas aqui.

A.2 Harmônicos esféricos e polinômios associados de Legendre

Neste apêndice são apresentados os harmônicos esféricos e os polinômios associados de Legendre, visto que no \mathbb{R}^3 , tanto as ondas planas quanto as ondas esféricas podem ser representadas como combinação linear destes harmônicos.

Os harmônicos esféricos são a parte angular da solução da equação de Helmholtz (parte espacial da equação de onda ou difusão do calor) ou Laplace, resolvidas em coordenadas esféricas, e são representados por [44, 48]

$$Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}) = Y_n^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (\text{A.3})$$

onde θ e ϕ estão esquematizados na Figura A.1 com as restrições $0 \leq \theta \leq \pi$ e $-\pi \leq \phi \leq \pi$.

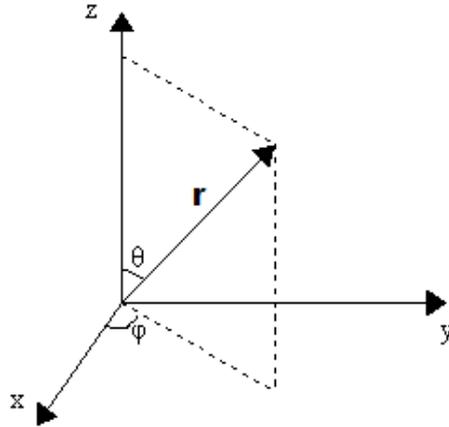


Figura A.1: Representação esquemática dos ângulos θ e ϕ e do vetor \mathbf{r} no sistema de coordenadas no espaço cartesiano.

Mais especificamente, (A.3) é a função harmônico esférico normalizada de grau n e ordem m , que possui as seguintes propriedades:

$$Y_n^m(-\hat{\mathbf{r}}) = (-1)^n Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.4})$$

$$\overline{Y_n^m(\hat{\mathbf{r}})} = (-1)^m Y_n^{-m}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (\text{A.5})$$

e

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) Y_n^m(\theta, \phi) \overline{Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi)} = \delta_{nn'} \delta_{mm'}, \quad (\text{A.6})$$

sendo (r, θ, ϕ) as coordenadas esféricas de \mathbf{r} (Figura. A.1), onde $r = |\mathbf{r}|$; δ é a delta de Kronecker, com as propriedades, $\delta_{aa} = 1$ e $\delta_{ab} = 0$ se $a \neq b$; e

$$P_n^m(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+m}}{dx^{n+m}} (x^2-1)^n, \quad (\text{A.7})$$

é o polinômio associado de Legendre de grau n e ordem m , onde $n \geq 0$ e $|m| \leq n$, e com a propriedade

$$P_n^m(1) = \delta_{0m} \quad \text{y} \quad P_n^m(-1) = (-1)^n \delta_{0m}. \quad (\text{A.8})$$

Observação 2 *Existem outras formas de representar as equações (A.3) e (A.7), uma delas é excluir o termo $(-1)^m$ da definição (A.3) e incluir na definição (A.7).*

A.3 Potencial de casca simples

Neste apêndice é apresentada uma introdução ao potencial de casca simples, pois é uma forma de se obter os campos espaciais complexos de ondas que são refletidas e absorvidas por uma incrustação (como por ex. cilindros, esferas, etc.).

Quando um campo, T_{inc} , que se propaga num meio e incide numa incrustação, parte deste campo incidente é refletido na superfície da incrustação e outra parte é transmitida através dela. A idéia de potencial de casca simples consiste em atribuir a toda superfície da incrustação uma casca, sendo esta, e não o campo T_{inc} , a fonte geradora das ondas refletidas e transmitidas. Também, deve-se considerar o meio interno e externo à casca como sendo o mesmo.

O potencial de casca simples pode ser utilizado para N incrustações Ω_i de geometria qualquer, mas assume-se que cada fronteira Γ_i seja suave, ou seja, sem picos [44].

Vamos definir

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i \quad \text{e} \quad \Gamma = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_i, \quad (\text{A.9})$$

sendo que Ω é a coleção de todos os interiores das N incrustações e Γ é sua fronteira. A região externa a Ω denominaremos de Ω_e .

Com as definições acima, o *potencial de casca simples* num ponto \mathbf{r} é definido por [44]

$$S(\mathbf{r}) \equiv \int_{\Gamma'} f(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\Gamma', \quad \mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_e, \quad (\text{A.10})$$

onde Γ' é uma superfície fechada. A função responsável por “gerar” o campo $S(\mathbf{r})$ é $f(\mathbf{r}')$, chamada *função densidade* definida para $\mathbf{r}' \in \Gamma'$ e $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ a função de Green.

Observando que $\mathbf{r} \in \Omega \cup \Omega_e$, então (A.10) é uma forma integral que serve para calcular potenciais interiores ou exteriores a Ω .

Dado que f e S satisfaça a equação de Helmholtz,

$$\nabla^2 S + k^2 S = 0, \quad k \text{ é constante}, \quad (\text{A.11})$$

e a condição de radiação de Sommerfeld; então, estas propriedades são inerentes a G .

Para duas dimensões, a solução fundamental da função de Green $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é [44]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{i}{2} H_0(q|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (\text{A.12})$$

onde, denotamos aqui, $H_0(u) \equiv H_0^{(1)}(u)$ é a função de Hankel de ordem zero de primeiro tipo. Enquanto que no \mathbb{R}^3 a função de Green é [44]

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(R) = -\frac{e^{iqR}}{2\pi R} \quad \text{com} \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \quad (\text{A.13})$$

que pode ser apresentada na forma

$$G(R) = -\frac{q^i}{2\pi} h_0(qR), \quad (\text{A.14})$$

onde, também denotamos, $h_0(u) \equiv h_0^{(1)}(u)$ é a função esférica de Hankel de ordem zero de primeiro tipo.

A outra condição é que S deve ser contínua e sua derivada descontínua quando cruza Γ . Seus valores em Γ são fornecidos por

$$\frac{\partial}{\partial n''} S = (\pm I + K)f, \quad (\text{A.15})$$

onde o sinal (+) corresponde ao fluxo quando $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'' \in \Gamma$ do exterior para o interior de Γ e (−) do interior para o exterior. n'' é o vetor normal a Γ apontando para fora no ponto \mathbf{r}'' . I é o operador identidade e K é um operador integral de fronteira definido por

$$K(r'') = \int_{\Gamma'} f(\mathbf{r}') \frac{\partial}{\partial n''} G(\mathbf{r}'', \mathbf{r}') d\Gamma'. \quad (\text{A.16})$$

Conforme (A.15), a descontinuidade de S é

$$\frac{\partial}{\partial n''} S \Big|_{r=r''(+)} - \frac{\partial}{\partial n''} S \Big|_{r=r''(-)} = 2f. \quad (\text{A.17})$$

A.4 Teorema de adição

A.4.1 Teorema de adição no \mathbb{R}^2

A configuração esquemática de troca de sistema de coordenadas para o teorema de adição está apresentada na Figura A.2.

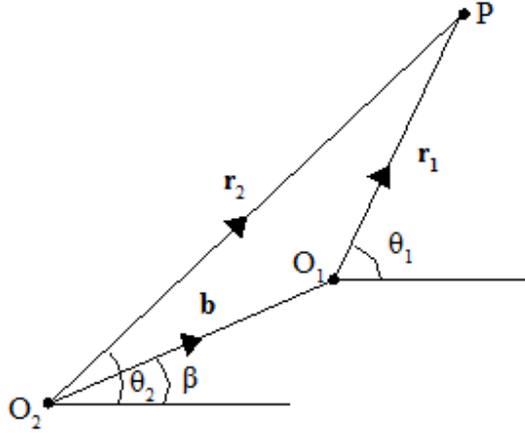


Figura A.2: Configuração de troca de sistema de coordenadas para o teorema de adição. Onde $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(O_2 \rightarrow P)$ sai de O_2 e vai até o ponto P ; $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(O_1 \rightarrow P)$ sai de O_1 e vai até P ; e $\mathbf{b} = \mathbf{b}(O_2 \rightarrow O_1)$ sai de O_2 e vai até O_1 .

O teorema de adição de Graf para a Figura A.2 é, [44, 45, 46],

$$H_m(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{m-n}(kb)e^{-i(n-m)\beta} J_n(kr_1)e^{in\theta_1}, \quad \text{para } b > r_1, \quad (\text{A.18})$$

e

$$H_m(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{m-n}(kb)e^{-i(n-m)\beta} H_n(kr_1)e^{in\theta_1}, \quad \text{para } b < r_1, \quad (\text{A.19})$$

sendo b a distância relativa do centro do cilindro Ω_2 à do cilindro Ω_1 .

Por conveniência, vamos adotar a representação esquemática da Figura A.3,

A principal diferença entre a Figura A.2 e a Figura A.3 é que consideramos \mathbf{r}_{12} o vetor de O_1 até O_2 . Com isto temos as relações $\theta_{12} = \pi + \beta$; $\mathbf{r}_{12} = -\mathbf{b}$, logo $r_{12} = b$. Substituindo estas relações em (A.18), temos que o teorema de adição de Graf para a

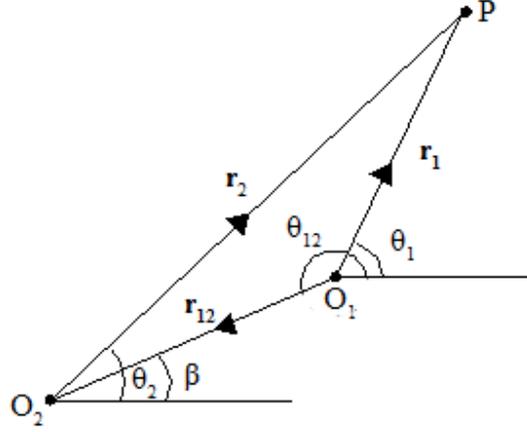


Figura A.3: Configuração adotada para o teorema de adição. Onde $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(O_2 \rightarrow P)$ sai de O_2 e vai até o ponto P ; $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(O_1 \rightarrow P)$ sai de O_1 e vai até P ; e $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{12}(O_1 \rightarrow O_2)$ sai de O_1 e vai até O_2 .

Figura A.3 é

$$H_m(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_{n-m}(kr_{12})e^{-i(n-m)\theta_{12}} J_n(kr_1)e^{in\theta_1}, \quad \text{para } r_{12} > r_1, \quad (\text{A.20})$$

e

$$H_m(kr_2)e^{im\theta_2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_{n-m}(kr_{12})e^{-i(n-m)\theta_{12}} H_n(kr_1)e^{in\theta_1}, \quad \text{para } r_{12} < r_1, \quad (\text{A.21})$$

onde utilizamos as propriedades: $\text{Exp}(\pm i \nu \pi) = (-1)^\nu$ e $H_{-\nu} = (-1)^\nu H_\nu$.

A.4.2 Teorema de adição no \mathbb{R}^3

No \mathbb{R}^3 temos os seguintes teoremas de adição para as funções esféricas [44]:

$$h_n(qr_2)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu\mu} R_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}_{21})j_\nu(qr_1)Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), \quad (\text{A.22})$$

para $r_1 < r_{21}$ (interno), e

$$h_n(qr_2)Y_n^m(\hat{\mathbf{r}}_2) = \sum_{\nu\mu} \widehat{R}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}_{21})h_\nu(qr_1)Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), \quad (\text{A.23})$$

para $r_1 > r_{21}$ (externo); onde $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_{21}$, $\mathbf{r}_{21} \equiv \mathbf{b} = -\mathbf{r}_{12}$ e $\theta_{21} \equiv \beta$ estão esquematizado em Figura A.2 e A.3; e

$$\begin{aligned} R_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}_{21}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_{k=|n-\nu|}^{n+\nu} i^k h_k(qr_{21}) \overline{Y_k^{\mu-m}(\hat{\mathbf{r}}_{21})} \mathbf{g}(n, m; k, \mu - m; \nu) \\ &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_{k=|n-\nu|}^{n+\nu} i^k (-1)^m h_k(qr_{21}) \overline{Y_k^{\mu-m}(\hat{\mathbf{r}}_{21})} \mathbf{g}(n, m; \nu, -\mu; k), \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}_{21}) &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_{k=|n-\nu|}^{n+\nu} i^k j_k(qr_{21}) \overline{Y_k^{\mu-m}(\hat{\mathbf{r}}_{21})} \mathbf{g}(n, m; k, \mu - m; \nu) \\ &= 4\pi i^{\nu-n} \sum_{k=|n-\nu|}^{n+\nu} i^k (-1)^m j_k(qr_{21}) \overline{Y_k^{\mu-m}(\hat{\mathbf{r}}_{21})} \mathbf{g}(n, m; \nu, -\mu; k), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

com as propriedades

$$\widehat{R}_{n\nu}^{m\mu}(-\mathbf{r}) = (-1)^{n+\nu} \widehat{R}_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}) \quad \text{e} \quad R_{n\nu}^{m\mu}(-\mathbf{r}) = (-1)^{n+\nu} R_{n\nu}^{m\mu}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.26})$$

onde $\mathbf{g}(n, m; \nu, \mu; q)$ é o coeficiente de Gaunt, e é dado por

$$\mathbf{g}(n, m; \nu, \mu; q) = (-1)^{m+\mu} \delta \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & \nu & q \\ m & \mu & -m - \mu \end{pmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

onde

$$\delta = \sqrt{(2n+1)(2\nu+1)(2q+1)/(4\pi)}, \quad (\text{A.28})$$

e o símbolo de Wigner $(3-j)$ dado por

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} = (-1)^{j+m+2j_1} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle, \quad (\text{A.29})$$

com $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$ é o coeficiente de Clebsch-Gordan.

Para o caso particular $n, m = 0$ a (A.22) e (A.23) será:

$$\begin{aligned} h_0(qr_2) Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}_2) &= \sum_{\nu\mu} R_{0\nu}^{0\mu}(\mathbf{r}_{21}) j_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 < r_{21}, \\ h_0(qr_2) Y_0^0(\hat{\mathbf{r}}_2) &= \sum_{\nu\mu} \widehat{R}_{0\nu}^{0\mu}(\mathbf{r}_{21}) h_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 > r_{21}, \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

utilizando (A.24) e (A.25), temos:

$$\begin{aligned} R_{0\nu}^{0\mu}(\mathbf{r}_{21}) &= \sqrt{4\pi} (-1)^\nu h_\nu(qr_{21}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{21})}, \\ \widehat{R}_{0\nu}^{0\mu}(\mathbf{r}_{21}) &= \sqrt{4\pi} (-1)^\nu j_\nu(qr_{21}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{21})}. \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

Substituindo (A.31) em (A.30),

$$\begin{aligned}
h_0(qr_2) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} &= \sqrt{4\pi} \sum_{\nu\mu} (-1)^\nu h_\nu(qr_{21}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{21})} j_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 < r_{21}, \\
h_0(qr_2) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} &= \sqrt{4\pi} \sum_{\nu\mu} (-1)^\nu \sqrt{4\pi} j_\nu(qr_{21}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{21})} h_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 > r_{21}.
\end{aligned} \tag{A.32}$$

De onde obtemos

$$\begin{aligned}
h_0(qr_2) &= 4\pi \sum_{\nu\mu} (-1)^\nu h_\nu(qr_{21}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{21})} j_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 < r_{21} \\
h_0(qr_2) &= 4\pi \sum_{\nu\mu} (-1)^\nu j_\nu(qr_{21}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{21})} h_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 > r_{21}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

que são equivalentes aos resultados (3.61) e (3.62) de [44].

Considerando a relação $\mathbf{r}_{21} = -\mathbf{r}_{12}$ e a propriedade (A.4), podemos escrever (A.33) na forma

$$\begin{aligned}
h_0(qr_2) &= 4\pi \sum_{\nu\mu} h_\nu(qr_{12}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{12})} j_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 < r_{12} \\
h_0(qr_2) &= 4\pi \sum_{\nu\mu} j_\nu(qr_{12}) \overline{Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_{12})} h_\nu(qr_1) Y_\nu^\mu(\hat{\mathbf{r}}_1), & r_1 > r_{12}.
\end{aligned} \tag{A.34}$$

A.5 Ondas planas em uma placa

Em Figura A.4 mostramos uma placa de espessura l onde se propagam ondas planas. Consideramos que a onda (denominada $T_{\text{inc}1}$) foi gerada no lado (a) da superfície e se propaga no sentido $-\hat{x}$. Ao atravessar toda a placa, incide sobre a superfície traseira (b) da placa e é refletida se propagando no sentido contrário ($+\hat{x}$) à $T_{\text{inc}1}$, a qual denominaremos $T_{\text{inc}2}$. Por sua vez, $T_{\text{inc}2}$ ao percorrer a distância l incide sobre a superfície (a), a qual é refletida e redenominada $T_{\text{inc}3}$, que após percorrer toda a placa e ser novamente refletida será $T_{\text{inc}4}$ e em seguida $T_{\text{inc}5}$, $T_{\text{inc}6}$, e assim se comportará indefinidamente.

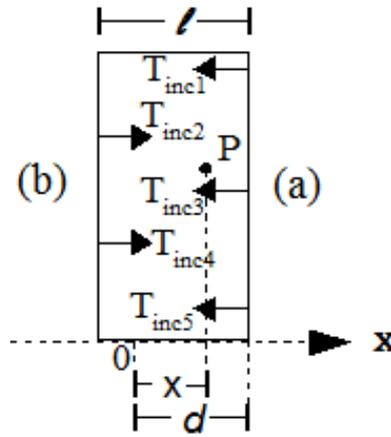


Figura A.4: Onda plana em uma placa.

A função de onda em um ponto P da placa situado em x do eixo x deverá considerar todas essas múltiplas reflexões.

Para melhor compreensão matemática do problema, substituímos Figura A.4 por Figura A.5, na qual o sistema de coordenadas está na superfície (a) da placa, de onde tiramos a relação $x' = d - x$.

Temos que a função de onda em um ponto P é

$$T_{\text{inc}} = S_n^{(e)} + S_n^{(d)}, \quad (\text{A.35})$$

onde $S_n^{(e)}$ é a soma das infinitas ondas que se propagam para *esquerda* ($-\hat{x}$), ou seja,

$$S_n^{(e)} = \sum_{j=1}^{\infty} T_{\text{inc}j}, \quad (\text{A.36})$$

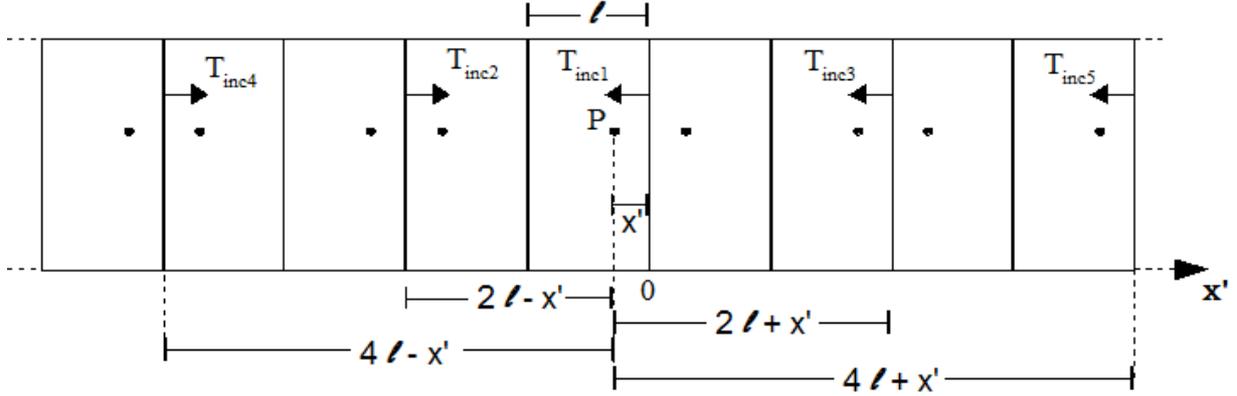


Figura A.5: Onda plana em uma placa, equivalente a Figura A.4.

onde j é ímpar e positivo, $j = 1, 3, 5, \dots$.

E $S_n^{(d)}$ é a soma das infinitas ondas que se propagam para *direita* ($+\hat{x}$), dado por

$$S_n^{(d)} = \sum_{j=2}^{\infty} T_{\text{inc}j}, \quad (\text{A.37})$$

onde j é par e positivo, $j = 2, 4, 6, \dots$.

Para ondas térmicas, conforme (2.36), a parte espacial complexa da onda plana que se propaga no sentido $-\hat{x}$ é dada por

$$T = T_0 e^{-iq(x-d)} = T_0 e^{iqx'}. \quad (\text{A.38})$$

De uma forma geral, as ondas que se propagam no sentido $-\hat{x}$ são representadas por:

$$T_{\text{inc}(2n-1)} = T_0 e^{iq[2l(n-1)+x']} \equiv a_n^{(e)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{A.39})$$

onde $a_n^{(e)}$ é o n -ésimo termo do somatório da onda que se propaga para esquerda. Da mesma forma, para onda que se propaga no sentido $+\hat{x}$, temos:

$$T_{\text{inc}(2n)} = T_0 e^{iq(2ln-x')} \equiv a_n^{(d)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (\text{A.40})$$

aqui, $a_n^{(d)}$ é o n -ésimo termo do somatório da onda que se propaga para direita. As equações (A.36) e (A.37) é o somatório dos infinitos termos de uma progressão geométrica (PG). Sendo esta soma dada por:

$$S_n^{(e)} = \frac{a_1^{(e)}}{1 - r^{(e)}} \quad \text{e} \quad S_n^{(d)} = \frac{a_1^{(d)}}{1 - r^{(d)}}, \quad (\text{A.41})$$

onde $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ é a razão da PG. Portanto, obtemos:

$$q^{(e)} = \frac{a_{n+1}^{(e)}}{a_n^{(e)}} = \frac{T_0 e^{iq[2ln+x']}}{T_0 e^{iq[2l(n-1)+x']}} = e^{i2ql}, \quad (\text{A.42})$$

$$q^{(d)} = \frac{a_{n+1}^{(d)}}{a_n^{(d)}} = \frac{T_0 e^{iq[2l(n+1)-x']}}{T_0 e^{iq(2ln-x')}} = e^{i2ql}.$$

É importante notar que ondas térmicas decaem com a distância e temos que a razão está no intervalo $0 < |r| < 1$ ¹, sendo esta, condição para que as equações (A.36) e (A.37) convirjam, o que torna (A.35) convergente.

Considerando as equações (A.41) e (A.42), temos que a equação (A.35) é dada por:

$$T_{\text{inc}} = \frac{T_0 e^{iqx'}}{1 - e^{i2ql}} + \frac{T_0 e^{iq(2l-x')}}{1 - e^{i2ql}}, \quad (\text{A.43})$$

Retornaremos ao sistema de referência da Figura A.4 substituindo $x' = d - x$ na equação (A.43), obtendo assim:

$$T_{\text{inc}} = \frac{T_0 e^{iqd}}{1 - e^{i2ql}} e^{-iqx} + \frac{T_0 e^{iq(2l-d)}}{1 - e^{i2ql}} e^{iqx}, \quad (\text{A.44})$$

para onda que se propaga na direção x_j , onde podemos ter $j = 1, 2, 3$, com $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, reescrevemos (A.44) na forma:

$$T_{\text{inc}} = \frac{T_0 e^{iqd}}{1 - e^{i2ql}} [e^{-iqx_j} + e^{i2q(l-d)} e^{iqx_j}], \quad (\text{A.45})$$

onde estão somadas todas as múltiplas reflexões da onda térmica plana interna à placa.

¹ $|r| = r \cdot r^*$.

Referências Bibliográficas

- [1] ATKINSON, K.R.; HAWKINS, S.C.; HUYNH, C.; et al (2007). *Multifunctional carbon nanotube yarns and transparent sheets: Fabrication, properties, and applications*. Physica B: Condensed Matter **394** (2), pp. 339-343.
- [2] BLANCO, A.; CHOMSKI, E.; GRABTCHAK, S.; IBISATE, M.; JOHN, S.; LEONARD, S.W.; et al. (2000). *Large-scale synthesis of a silicon photonic crystal with a complete three-dimensional bandgap near 1.5 micrometres*. Nature **405**, pp. 437-440.
- [3] ALENCAR, M. A. R. C.; Maciel, G. S.; et al. (2005). *Laserlike emission from silica inverse opals infiltrated with Rhodamine 6G*. Journal of Non-Crystalline Solids, Amsterdam, v. 351, p. 1846-1849.
- [4] ALIEV, A.E., LEE, S.B., BAUGHMAN, R.H., ZAKHIDOV, A.A.. (2007). *Thermal properties of carbon inverse opal photonic crystals* . Journal of Luminescence **125** (1-2), pp. 11-17.
- [5] LIMA, L. L. ; ALENCAR, M. A. R. C.; et al. (2008). *The effect of disorder on two-dimensional photonic crystal waveguides*. Journal of Applied Physics, v. 103, p. 123102.
- [6] FERNELIUS, N.C. (1980). J. Appl. Phys., **51**, 650.
- [7] BENNETT, C. A. ; PATTY, R. R. (1982). Appl. Opt., **21**, 49.
- [8] ALMOND and PATEL (1996). *Photothermal Science and Techniques*. London: Chapman and Hall.

- [9] MAILLET, D.; ANDRE, S.; BATSALE, J. C.; DEGIOVANNI, A.; MOYNE, C. (2000). *Thermal Quadrupole*. England: John Wiley and Sons. LTDA.
- [10] OCÁRIZ, A.; SÁNCHEZ-LAVEGA, A. and SALAZAR, A., (1997). *Photothermal study of subsurface cylindrical structures. I. Theory*. Journal of Applied Physics, **81**, 7552-7560.
- [11] SÁNCHEZ-LAVEGA, A.; SALAZAR, A.; TERRÓN, J.M. and OCÁRIZ, A., (1998). *A study of the photothermal signal produced by a series of subsurface cylinders in opaque materials*. Journal of Applied Physics, **84**, 5229-5237.
- [12] TERRÓN, J.M.; SÁNCHEZ-LAVEGA, A. and SALAZAR, A., (2000). *Multiple scattering effects of thermal waves by two subsurface cylinders*. Journal of Applied Physics, **87**, 2600-2607.
- [13] SALAZAR, A.; TERRÓN, J.M.; SÁNCHEZ-LAVEGA, A. and CELORRIO, R. (2002). Applied Physics Letters, **80**, 1903.
- [14] SALAZAR, A.; GARRIDO, F. and OLEAGA, A. (2005). *Degeneracy of the thermal properties of buried structures*, Journal of Applied Physics, **98**, 013513-1.
- [15] RAPÚN, M.L. and SAYAS, F.J., (2007). *Boundary Element Simulation of Thermal Waves*, Arch. Comput. Methods Eng., **14**, 3.
- [16] FAVRO, L.D.; KUO, P.K. and THOMAS, R.L. (1987). *Photoacoustic and Thermal Wave Phenomena in semiconductors*. New York: Elsevier.
- [17] GARRIDO, F. and SALAZAR, A., (2004). *Thermal wave scattering by sphere*, Journal of Applied Physics, **95**, 140-149.
- [18] SALAZAR, A.; GARRIDO, F. and CELORRIO, R. (2006). *Thermal diffusivity of rods, tubes and spheres by the flash method*, Journal of Applied Physics, **99**, 066116-1.
- [19] APIÑANIZ, E.; MENDIOROZ, A.; MADARIAGA, N.; OLEAGA, A.; CELORRIO, R. and SALAZAR, A. (2008). *Thermal characterization of rods , tubes and spheres using pulsed infrared thermography*. J. Phys. D: Applied Physics, **41**, 1.

- [20] TERRÓN, J.M.; SÁNCHEZ-LAVEGA, A. and SALAZAR, A., (2001). *Multiple scattering of thermal waves by a coated subsurface cylindrical inclusion*. Journal of Applied Physics, **89** (10): 5696-5702.
- [21] TERRÓN, J.M.; SALAZAR, A. and SÁNCHEZ-LAVEGA, A., (2002). *General Solution for the Thermal Wave Scattering in Fiber Composites*. Journal of Applied Physics, **91**, 1087-1098.
- [22] SALAZAR, A.; SÁNCHEZ-LAVEGA, A. and CELORRIO, R. (2003). Journal of Applied Physics, **93**, 4536.
- [23] SALAZAR, A. and CELORRIO, R. (2006). *Application of the thermal quadrupole method to the propagation of thermal waves in multilayered cylinders*, Journal of Applied Physics **100**, 113535.
- [24] SALAZAR, A.; APIÑANIZ, E.; MASSOT, M. and OLEGA, A. (2008). *Application of the flash method to rods and tubes*, Eur. Phys. J. Special Topics **153**, 83-86.
- [25] SALAZAR, A. and CELORRIO, R. (2008). *Propagation of thermal waves in multilayered cylinders using the thermal quadrupole method*, Eur. Phys. J. Special Topics **153**, 383-386.
- [26] CELORRIO, R.; MENDIOROZ, A.; APIÑANIZ, E.; SALAZAR, A.; WANG, C.; MANDELIS, A. (2009). *Reconstruction of radial thermal conductivity depth profile in case hardened steel rods*. Journal of Applied Physics **105** (8), 083517.
- [27] MADARIAGA, N. and SALAZAR, A. (2007). *Propagation of thermal waves in multilayered spheres*. Journal of Applied Physics, **101**, 103534-1
- [28] MatLab[®] (Math Works, 2008), 7.6.0.324 R2008a.
- [29] MANDELIS, A. (1987). *Photoacoustic and Thermal Wave Phenomena in Semiconductors*. USA: Prentice Hall.
- [30] SELL, J. A., (1989). *Photothermal Investigations of solids and fluids*. San Diego: Academic Press.

- [31] MANDELIS, A. (1992). *Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology: Principles and Perspectives of Photothermal and Photoacoustic Phenomena*. New York: Elsevier, vol. I.
- [32] MANDELIS, A. (1994). *Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology: Non-Destructive Evaluation*. New Jersey: Prentice Hall, vol. II.
- [33] MANDELIS, A.; HESS, P. (1997). *Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology: Life and Earth Sciences*. Washington D.C.: SPIE Optical Engineering Press, vol. III.
- [34] MANDELIS, A.; HESS, P. (2000). *Progress in Photothermal and Photoacoustic Science and Technology: Semiconductors and Electronic Materials*. Washington D.C.: SPIE Optical Engineering Press, vol. IV.
- [35] SÁNCHEZ-LAVEGA, A.; SALAZAR, A., (2000). *Recent Research Developments in Applied Physics*. Trivandrum: Transworld Research Network, Vol. III.
- [36] NICOLAIDES, L. and MANDELIS, A., (1997). *Image-enhanced thermal-waves slice diffraction tomography with numerical simulated reconstruction*. *Inverse Problems*, **13**, 1393-1412.
- [37] BREITENSTEIN, O; LANGENKAMP, M. (2003). *Lock-in Thermography*. Berlin: Springer, p. 32.
- [38] Goodfellow Cambridge Limited Catalogue, (1999/2000).
- [39] CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. New York: Oxford University Press, 2nd ed.
- [40] HABERMAN, R. (1998). *Elementary applied partial differential equations: with Fourier series and boundary value problems*. USA: Prentice-Hall, 3rd ed.
- [41] SALAZAR, A. (2006). *Energy propagation of thermal wave*. *Eur. J. Phys.* **27**, 1349-1355.

- [42] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. (2007). *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*. Rio de Janeiro: Elsevier, 6 ed.
- [43] MORSE, P.M.; INGARD, K. U. (1968). *Theoretical Acoustics*. New York: McGraw-Hill.
- [44] MARTIN, P.A. (2006). *Encyclopedia of Mathematics: Multiple Scattering*. USA: Cambridge University, volume 107.
- [45] ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Washington D. C.: National Bureau of Standards. Disponível em: <<http://www.math.ucla.edu/cbm/aands/>> Acesso em: 03/Abril/2009.
- [46] WATSON, G.N. (1966) *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. London: Cambridge University, pp. 359-361.
- [47] SINAI, J. and WAAG, R. C. (1988). *J.Acoust. Soc. Am.* **83**, 1728.
- [48] GUMEROV, N.A. and DURAI SWAMI, R. (2004). *Fast Mutipole Methods for the Helmholtz Equation in three Dimensions*. Maryland (USA): Universit of Maryland.
- [49] KAKOGGIANOS, N.B.; ROUMELIOTIS, J.A. (1995). *J. Acoust. Soc. Am.* **98**, 3508.
- [50] TERRÓN, J.M.(2001). *Aplicación de las técnicas fototérmicas al control no destructivo en materiales inhomogéneos*. Tese de doutorado. Espanha: Universidad del País Vasco.
- [51] GARRIDO, F.(2005). *Caracterización de inclusiones cilíndricas y esféricas mediante termografía infrarroja*. Tese de doutorado. Espanha: Universidad del País Vasco.
- [52] CELORRIO, R.; COSTA, M.S.; MENDIOROZ, A.; APIÑANIZ, E.; SHIBLI, S.M. and SALAZAR, A., (2008). *Thermal Wave Scattering by Two Overlapping and Parallel Cylinders*. *Applied Physics A: Materials Science and Processing* **93** (2), 429-437.