Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Sobre a evolução hidrodinâmica da matéria nuclear criada
em colisões de íons pesados relativísticos - um estudo com
condições iniciais flutuantes

Rone Peterson Galvão de Andrade

Orientador: Prof. Yojiro Hama

*Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de Doutor em Ciências.*

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Yojiro Hama (USP)

Prof. Dr. Alexandre Alarcon do Passo Suaide (USP)

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra (USP)

Prof.^a Dra. Sandra dos Santos Padula (IFT/UNESP)

Prof. Dr. Eduardo Souza Fraga (UFRJ)

São Paulo

2011

Agradecimentos

À minha esposa, Thays Correia e Silva Andrade, pelo amor dedicado a mim todos os dias; pela compreensão, paciência, companheirismo e incentivo constantes; por reconhecer o valor do meu trabalho e por não me deixar esmorecer diante das dificuldades.

Ao professor Yogihiro Hama, meu orientador, por me ensinar que devemos acreditar em nossas próprias idéias, buscando sempre a perfeição em nossos trabalhos; por me ensinar como trilhar os caminhos da Física.

Ao professor Takeshi Kodama cuja generosidade sempre iluminou o meu caminho.

À professora Sandra Padula pelo respeito e carinho com que sempre me tratou.

Aos professores João Zanetic, Luís Carlos de Menezes e Manoel Robilotta cujos ensinamentos contribuíram de maneira inestimável para minha formação.

Aos professores Otávio Socolowski Jr. e Bernardo Tavares e ao doutorando Gabriel Denicol pela inestimável ajuda com as questões técnicas do programa SPheRIO.

Ao doutor Fernando Gardim por ter me ajudado a testar o programa hidrodinâmico em duas dimensões.

Ao professor Jorge Noronha pelas valiosas sugestões e discussões que aprimoraram este trabalho.

Aos colaboradores, professores Wei-Liang Qian, Frederique Grassi e Jun Takahashi.

À equipe de suporte e manutenção da rede de computadores do departamento de Física Matemática - professor Jorge de Lyra, Sybele Guedes e João Borges – cujo trabalho foi essencial para a realização desta tese.

Aos funcionários da secretaria do departamento de Física Matemática que sempre me atenderam prontamente e com extrema gentileza.

À minha mãe, Josinauva Duarte Galvão, ao meu pai, Gumercindo Alves de Andrade, e às minhas irmãs Cleonice, Elaine e Isabel.

À minha falecida avó, Jovina Barreto, cujo amor dedicado a mim durante toda a minha infância e juventude foi essencial para minha formação.

Ao meu primo João Augusto dos Santos Andrade pela nossa amizade e pelo carinho com que sempre me tratou.

À minha sogra, Mariana de Jesus Correia e Silva, e ao meu sogro, Nilson Correia e Silva, pela nossa amizade e pelo apoio que sempre me deram.

Ao meu amigo Edvaldo Cabral pela nossa longa amizade.

À minha amiga Patrícia Rebello Teles pelo exemplo de dedicação e perseverança, que tanto me inspirou em momentos difíceis.

Aos meus amigos João de Oliveira Jr., Claudenício dos Reis Ferreira e Cesar Eugênio Miltons pelos anos extraordinários que passamos em Curitiba.

Ao meu amigo Mário Conceição de Oliveira pelos excelentes momentos que compartilhamos durante todo o período de graduação e mestrado.

Aos meus padrinhos de casamento, Edna e Mário, pela nossa amizade e pelo apoio que sempre me deram.

Ao meu amigo Edgar Zanella por ter me ajudado com o sistema operacional Linux.

Ao meu amigo Wilson Roberto que todos os dias me recebeu com alegria; pelas nossas conversas sobre Santos e Corinthians que sempre foram muito agradáveis.

Aos amigos do Instituto de Física com os quais tive o prazer de conviver durante todos estes anos: Silas Carvalho, Marcelos Peres, Pedro Tavares, Helder Casa Grande, Sandro Micheletti, Laura Paulucci, Maria Isabel Veras, Eder Annibale, José Edmar, Gabriel Weber, Fernanda Pinheiro, Danillo Liarte, Cedrick Mello, Juliano Neves, Jorgivan Dias, Matthias Moferdt, David Fogaça, Débora Andrade, Roberto Maluf, Paula Jaramillo, Marcela Gontijo, Sergio Giardino, Walney Fernandes, Masayuki Hase, Henrique Guidi, Lucas Costa, Átilla Leães, Maicon Faria, William Conti, João Eduardo Frederico, Patrícia Camargo Magalhães, Arsen Melikyan, Edson de Souza, Fleury José de Oliveira, ...

À Universidade de São Paulo e ao Instituto de Física que foram minha morada nesses últimos doze anos.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho usamos um modelo hidrodinâmico com condições iniciais flutuantes evento a evento para estudar alguns observáveis em colisões de íons pesados relativísticos. Mostramos que a introdução de flutuações, caracterizadas por tubos longitudinais de alta densidade de energia, torna o cálculo dos observáveis mais próximo dos dados, em comparação à abordagem tradicional, na qual as condições iniciais são parametrizadas através de funções suaves e simétricas. No caso da distribuição de partículas em função do momento transversal, observamos um aumento do número de partículas na região onde $p_t \gtrsim 2.0\text{GeV}$, como consequência da expansão rápida dos tubos de alta densidade de energia, principalmente os tubos próximos à superfície da matéria, que chamamos de tubos periféricos. No caso de v_2 em função do momento transversal, observamos uma redução do fluxo elíptico na mesma região, devido à expansão isotrópica dos tubos periféricos. No caso de v_2 em função da pseudo-rapidez, observamos, com o uso das condições iniciais flutuantes, uma curva com um perfil triangular muito próximo dos dados. No caso da função de correlação de duas partículas, observamos que os tubos periféricos dão origem às chamadas estruturas de *Ridge*. Estas estruturas representam correlações de longo alcance, na direção longitudinal, entre as partículas *trigger* e as partículas associadas. Obtivemos uma função de correlação com três *Ridges*, respectivamente, nas posições: $\Delta\phi = 0$, $\Delta\phi \sim 2$ e $\Delta\phi \sim -2$. Mostramos, também, que o modelo reproduz o chamado efeito *in-plane/out-of-plane*, que está relacionado com a dependência da função de correlação de duas partículas em relação ao ângulo azimutal do momento da partícula *trigger*. De modo geral, observamos que, com o ajuste correto dos parâmetros do modelo, como por exemplo, a distribuição de densidade de energia inicial média e a temperatura de desacoplamento, todos os observáveis discutidos nesta tese apresentam um razoável acordo com os dados.

Abstract

In this work we apply a hydrodynamic model with fluctuating initial conditions in a event by event basis to study some observables in relativistic heavy ion collisions. We show that the introduction of fluctuations, characterized by longitudinal high energy density tubes, turn the computation of the observables closer to data, in comparison to the traditional approach, in which the initial conditions are parametrized by using smooth and symmetrical functions. In the case of the transverse momentum distribution, we observe an enhancement of the number of particles in the region where $p_t \gtrsim 2.0\text{GeV}$, as a consequence of the fast expansion of the high energy density tubes, mainly the tubes that are close to the surface of the matter, called peripheral tubes. In the case of v_2 as a function of the transverse momentum, we observe a reduction of the elliptic flow at the same region, due to the isotropic expansion of the peripheral tubes. In the case of v_2 as a function of the pseudorapidity, we observe, by using the fluctuating initial conditions, a curve with a triangular shape very close to data. In the case of the two particle correlation function, we observed that the peripheral tubes give rise to the Ridge structures. These structures represent a long range correlation, in the longitudinal direction, between the trigger particles and the associated particles. We got a two particle correlation function with three Ridges, respectively, at the positions: $\Delta\phi = 0$, $\Delta\phi \sim 2$ e $\Delta\phi \sim -2$. In addition, we show that the model reproduces the in-plane/out-of-plane effect, which is related with the two particle correlation function dependence on the azimuthal angle of the momentum of the trigger particle. Generally, we observed that, with the proper adjustment of the parameters of the model, as, for example, the average initial energy density and the freeze-out temperature, all observables discussed in this thesis show a reasonable agreement with data.

Sumário

1	Introdução	8
2	Modelo hidrodinâmico	12
2.1	Equações de movimento	12
2.2	Equação de estado	13
2.3	Condições iniciais	19
2.4	Mecanismo de desacoplamento	22
3	Métodos numéricos	26
3.1	Método SPH	26
3.1.1	Sistema de coordenadas hiperbólico em colisões de íons pesados	32
3.2	Desacoplamento no formalismo SPH	34
3.3	Programa NexSPheRIO	35
3.4	Modelo bidimensional com fluxo de Bjorken	37
4	Alguns observáveis	43
4.1	Fluxo elíptico	43
4.2	Correlação de duas partículas	47
5	Resultados	53
5.1	Janelas de centralidade	53
5.2	Ajuste da distribuição de momento transversal e pseudo-rapidez	55
5.3	Fluxo elíptico e suas flutuações	60
5.4	Cálculos de correlação de duas partículas - efeito <i>Ridge</i>	61
5.4.1	Colisões centrais	62
5.4.1.1	Resultados do NexSPheRIO	62
5.4.1.2	Modelo de um tubo	64
5.4.1.3	Variação dos parâmetros	69
5.4.2	Colisões periféricas - efeito <i>in-plane/out-of-plane</i>	74
5.4.2.1	Resultados do NexSPheRIO	74
5.4.2.2	Modelo de um tubo	76
5.4.2.3	Comparação com os dados	80

<i>SUMÁRIO</i>	7
5.4.3 Uma proposta para próton-próton	81
5.5 Efeito das condições iniciais flutuantes evento a evento na distribuição de momento transversal e no fluxo elíptico	83
6 Conclusão	86
A Conservação da entropia	90
B Gás de bósons	92
C Limite ultra-relativístico	93
D Formulação variacional	96
E Equações de movimento no método SPH	98
Referências Bibliográficas	101

Capítulo 1

Introdução

Colisões de íons pesados relativísticos possibilitam o estudo do comportamento da matéria sob condições extremas de pressão e temperatura. Nestas colisões, uma quantidade grande de energia é depositada numa pequena região do espaço-tempo, através da transformação de energia cinética em energia interna, dando origem a formas de matéria com altíssimas densidades de energia. Por exemplo, nas colisões realizadas no RHIC¹, os núcleos podem alcançar uma energia da ordem de 100 GeV por nucleon. Assim, numa colisão de dois núcleos de ouro, a energia no centro de massa do sistema seria da ordem de $2 \times 197 \times 100 \text{ GeV} = 39.4 \text{ TeV}$. Supondo que metade desta energia seja depositada numa região com o volume da ordem do volume do átomo de ouro, teríamos uma densidade de energia de aproximadamente 11 GeV/fm^3 , ou seja, duas ordens de grandeza maior que a densidade de energia da matéria nuclear ordinária. Outro exemplo é o LHC², que iniciou suas operações no segundo semestre do ano passado. Nesta máquina, os núcleos podem alcançar uma energia de 3 TeV por nucleon, o que levaria a uma densidade de energia três ordens de grandeza maior que a densidade de energia da matéria nuclear ordinária. Naturalmente, o estudo do processo de produção de partículas nestas colisões é de grande interesse, pois pode revelar as propriedades desta matéria.

Infelizmente, ainda não existe um formalismo que reproduza integralmente o fenômeno de produção de partículas nestas colisões. Usualmente, divide-se o processo de colisão em várias etapas e se tenta entender, separadamente, cada uma delas com a teoria ou com o modelo mais adequado. Assim, podemos descrever o processo de colisão de dois íons pesados relativísticos da seguinte forma: inicialmente os núcleos incidentes se movem com velocidade próxima à velocidade da luz. Devido a esta velocidade, eles sofrem uma intensa contração de Lorentz. Em colisões como as que são feitas no RHIC a dimensão longitudinal dos núcleos é reduzida por um fator γ da ordem de 100. Portanto, cada núcleo incidente pode ser considerado como um disco com pequena espessura. Durante a colisão entre os constituintes de cada núcleo incidente, uma matéria de alta densidade de energia é criada nas vizinhanças do centro de massa do sistema. Os fragmentos que não interagiram seguem sua trajetória original, levando consigo parte da energia inicial do

---

¹*Relativistic Heavy-Ion Collider* (no *Brookhaven National Laboratory*).

²*Large Hadron Collider* (no CERN).

sistema. Devido ao processo complexo de interação entre as partículas nesta matéria recém criada, densa e quente, esperamos que um estado de equilíbrio térmico local seja alcançado rapidamente³. Então, o sistema se expande de acordo com as equações da hidrodinâmica relativística. Durante a expansão, a temperatura decresce e o livre caminho médio entre as partículas aumenta. Quando o livre caminho médio é suficientemente grande, da ordem das dimensões do sistema, as partículas escapam do fluido, mantendo seus momentos inalterados. Finalmente, as partículas de ressonância sofrem decaimentos e o conjunto composto pelas partículas diretas e pelas oriundas de decaimentos alcança os detectores guardando uma memória dos estados iniciais da matéria.

Usualmente, o cálculo das primeiras interações, que dão origem à matéria inicial, é feito através de algum gerador de eventos, associado a algum modelo microscópico da interação nestas colisões. Em nosso caso usamos o gerador de eventos Nexus [1], baseado no modelo de Gribov-Regge [2] para colisões hadrônicas. Este programa pode fornecer as condições iniciais para a hidrodinâmica numa hiper-superfície de tempo próprio do fluido, para qualquer par de núcleos incidentes. Deve-se enfatizar que o objetivo deste trabalho não é o estudo dos modelos microscópicos, mas o estudo das consequências, para os observáveis, da distribuição de matéria obtida com estes modelos.

Para a etapa de expansão hidrodinâmica usamos a aproximação de fluido ideal, a qual tem se mostrado suficiente para descrever uma série de características dos dados. Como é bem conhecido, um dos ingredientes dos modelos hidrodinâmicos é equação de estado da matéria, que relaciona as grandezas termodinâmicas localmente. Usamos uma equação de estado com uma transição de fase de primeira ordem entre a fase de plasma de quarks e glúons e a fase hadrônica. Em ambas as fases, o fluido é considerado como uma mistura de gases ideais em equilíbrio térmico e químico. Incluímos, também, uma parametrização de um ponto crítico sobre a curva de transição de fase, o que cria uma região de *crossover* na região de pequeno potencial químico bariônico.

Na etapa de desacoplamento, na qual as partículas escapam do fluido, existe uma grande dificuldade para se criar, durante a expansão do sistema, uma transição entre os estados termalizados e estados fora do equilíbrio. Esta transição é importante, pois as partículas que escapam do fluido certamente o fazem em regiões rarefeitas onde a hipótese de equilíbrio térmico não é razoável. Atualmente, existem modelos que usam uma abordagem mista na qual a hidrodinâmica usual é acoplada à equação de Boltzmann [3]. Entretanto, este tipo de abordagem está fora da proposta deste trabalho. Nesta tese usamos a prescrição de Cooper-Frye [4] para o desacoplamento. Nesta prescrição, as partículas são emitidas repentinamente quando atravessam uma hiper-superfície de temperatura constante.

A ideia de considerar a matéria criada na colisão em equilíbrio térmico e, portanto, de usar métodos estatísticos para estudar a produção de partículas em colisões hadrônicas se deve ao trabalho pioneiro de Enrico Fermi [5]. Seu modelo previa corretamente a relação entre a multiplicidade⁴ e a

---

³A hipótese de equilíbrio térmico é difícil de ser justificada *a priori*, uma vez que o número de partículas observadas nos experimentos é muito pequeno (da ordem de milhares). Nesta tese, não procuraremos justificar tal hipótese a partir de primeiros princípios. No entanto, esperamos que ela seja justificada *a posteriori*, através do estudo experimental e teórico dos observáveis.

⁴Número total de partículas produzidas em uma colisão.

energia incidente, o que significou um grande avanço para a época. No entanto, o modelo falhava na previsão da abundância relativa entre os káons e os píons. Isso ocorria porque as partículas eram emitidas de uma matéria em repouso e excessivamente quente. Devido à alta temperatura, as abundâncias relativas eram determinadas, basicamente, pelos pesos estatísticos de cada espécie. Assim, ele encontrou a fração $4/3$ para a razão entre o número de káons e o número de píons (quatro tipos de káons e três de píons). Contrariamente, os dados mostravam, e ainda mostram, que a quantidade de píons é muito superior à quantidade de káons. Além disso, seu modelo previa uma distribuição angular de partículas isotrópica, o que, também, é uma contradição, uma vez que, nos experimentos, observa-se uma distribuição alongada na direção longitudinal.

Aproveitando a ideia inovadora de Fermi a respeito do equilíbrio térmico em colisões hadrônicas, Landau propôs que o problema da abundância relativa e o problema da distribuição angular poderia ser resolvido se a matéria sofresse uma expansão hidrodinâmica antes da emissão de partículas [6, 7]. Deste modo, a temperatura mais baixa iria favorecer a produção de partículas mais leves, os píons, ao mesmo tempo que a expansão do fluido alongaria a distribuição de partículas na direção longitudinal. Apesar da sua simplicidade, o modelo de Landau ainda é a base dos modelos hidrodinâmicos atuais. Desde a sua invenção, muitos aperfeiçoamentos foram feitos, como discutimos acima, nas condições iniciais, na equação de estado e no mecanismo de desacoplamento, o que se deve ao gigantesco avanço dos computadores e das técnicas computacionais nos últimos sessenta anos.

Neste trabalho vamos nos concentrar nos efeitos, em alguns observáveis, das condições iniciais flutuantes obtidas com o gerador de eventos Nexus. Embora seja comum o uso de parametrizações suaves e simétricas para a distribuição de matéria inicial, é razoável esperar que a matéria criada numa colisão seja bastante irregular, uma vez que os núcleos são formados por um número finito de partículas. Mostraremos que as condições iniciais obtidas com o gerador de eventos Nexus, de fato, são bastante irregulares, em particular, são caracterizadas por tubos longitudinais com alta densidade de energia, também conhecidos como tubos de fluxo, os quais levam a efeitos muito interessantes na função de correlação de duas partículas. Notavelmente, eles dão origem, nesta função, a uma estrutura alongada na direção longitudinal, também conhecida como *Ridge*. O estudo da função de correlação de duas partículas, no contexto das condições iniciais flutuantes evento a evento, é o tema principal desta tese.

Para resolver as equações da hidrodinâmica relativística, com condições iniciais tão irregulares e sem simetria, um método numérico especial foi utilizado. Este método, chamado método SPH [8, 9], é a base do programa computacional SPheRIO⁵ [10, 11], desenvolvido pelo nosso grupo de pesquisa. Chamamos de NexSPheRIO a junção dos programas Nexus e SPheRIO. Com este programa híbrido é possível calcular, para qualquer par de núcleos incidentes, a distribuição de partículas produzidas, não se valendo de nenhuma simetria pré-estabelecida. Resultados anteriores obtidos com o programa NexSPheRIO podem ser vistos em [11, 12, 13, 14, 15].

A seguir, apresentamos como esta tese está dividida.

---

⁵*Smoothed Particle hydrodynamic evolution of Relativistic heavy Ion collisions.*

No capítulo 2 mostramos os aspectos básicos do modelo hidrodinâmico: as equações de movimento da hidrodinâmica relativística, a equação de estado da matéria, as condições iniciais e o mecanismo de desacoplamento. No capítulo 3 discutimos o método SPH, para modelos tridimensionais e bidimensionais. No cálculo bidimensional o fluxo longitudinal é do tipo invariante de *boost*. No capítulo 4 apresentamos os conceitos básicos do parâmetro de fluxo elíptico v_2 e da função de correlação de duas partículas, que são os objetos de estudo deste trabalho. No capítulo 5 mostramos os resultados e, finalmente, no capítulo 6, apresentamos as conclusões.

Capítulo 2

Modelo hidrodinâmico

2.1 Equações de movimento

Se considerarmos a matéria formada na colisão como um fluido ideal, as equações de movimento são dadas por [16, 17]:

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0 \quad (2.1)$$

e

$$\partial_\nu (n_i u^\nu) = 0 \quad (\text{para } i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.2)$$

em que

$$T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu} \quad (2.3)$$

é o tensor de energia-momento. Na relação 2.3 $g^{\mu\nu}$ é a métrica¹. As quantidades u^ν , ϵ , p , n_i são, respectivamente, a quadri-velocidade do fluido, a densidade de energia, a pressão e a i -ésima densidade de carga². Observe que no referencial local, onde $(u^\nu) = (1, 0, 0, 0)$, $(T^{\mu\nu}) = \text{diag}(\epsilon, p, p, p)$. A equação 2.1 representa a conservação da energia e do momento e a equação 2.2 a conservação da i -ésima carga. Por questão de simplicidade consideraremos o número bariônico como a única carga conservada, assim

$$\partial_\nu (n_B u^\nu) = 0 \quad (2.4)$$

em que n_B é a densidade bariônica.

As equações 2.1 e 2.4 formam um conjunto de 5 equações com 6 incógnitas. Para fecharmos o sistema de equações vamos acrescentar a equação de estado da matéria. Esta relaciona localmente as quantidades termodinâmicas do fluido - um exemplo seria a pressão como uma função da

---

¹Usaremos a convenção $(g^{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

²Carga elétrica, número bariônico, estranheza etc.

densidade de energia e da densidade bariônica, $p = p(\epsilon, n_B)$. Discutiremos isso na seção 2.2.

No caso de um fluido ideal, uma propriedade importante é a conservação da entropia. Portanto, devemos encontrar que

$$\partial_\nu (su^\nu) = 0 \quad (2.5)$$

em que s é a densidade de entropia (veja o apêndice A).

2.2 Equação de estado

Nesta seção descreveremos a equação de estado que usamos para a fase de plasma de quarks e gluons (PQG) e para a fase hadrônica (H). Vamos discutir, também, o procedimento para a criação de uma transição de fase. Iniciaremos com uma transição de primeira ordem e mais adiante discutiremos a parametrização de um ponto crítico sobre a linha de transição, o que dá origem a uma região de *crossover* no diagrama de fases.

Em nosso modelo supomos que cada fase é composta por uma mistura de gases ideais em equilíbrio térmico e químico³. Então, para cada uma temos que

$$p(T, \mu_B) = \sum_i p_i(T, \mu_i) \quad (2.6)$$

com

$$\mu_i = B_i \mu_B, \quad (2.7)$$

em que $p(T, \mu_B)$ e μ_B são a pressão total e o potencial químico bariônico da mistura. As quantidades $p_i(T, \mu_i)$, μ_i e B_i são, respectivamente, a pressão, o potencial químico e a carga bariônica da i -ésima componente da mistura.

No contexto do *Ensemble* Grande Canônico, sabemos que

$$p_i(T, \mu_i) = \frac{\theta_i g_i}{(2\pi)^3 \beta} \int \ln \left(1 + \theta_i e^{\beta(\mu_i - \varepsilon_i(\vec{k}))} \right) d^3 \vec{k}, \quad (2.8)$$

com

$$\varepsilon_i = \sqrt{k^2 + m_i^2}, \quad (2.9)$$

em que definimos $\hbar=c=1$, $k_B=1$, $\theta_i = \pm 1$ (+ para férmions e - para bósons), $\beta = \frac{1}{T}$ (é o inverso da temperatura), m_i a massa da i -ésima espécie e g_i o i -ésimo fator de degenerescência.

As demais quantidades termodinâmicas são dadas, naturalmente, por:

---

³É feita também uma correção devido ao efeito de volume excluído [18, 19], análoga à correção de esfera dura de Van der Waals.

$$n_i = \left(\frac{\partial p_i(T, \mu_i)}{\partial \mu_i} \right)_T, \quad (2.10)$$

$$\epsilon_i = - \left(\frac{\partial (\beta p_i(T, \mu_i))}{\partial \beta} \right)_{\lambda_i}, \quad (2.11)$$

e

$$s_i = \beta (p_i + \epsilon_i - \mu_i n_i). \quad (2.12)$$

Na relação 2.11 $\lambda_i = e^{\beta \mu_i}$ é a fugacidade.

Por meio das relações 2.6, 2.7 e 2.10 definimos a densidade bariônica da mistura como:

$$n_B(T, \mu_B) \equiv \frac{\partial p(T, \mu_B)}{\partial \mu_B} = \sum_i \frac{\partial p_i(T, \mu_i)}{\partial \mu_B} = \sum_i B_i \frac{\partial p_i(T, \mu_i)}{\partial \mu_i} = \sum_i B_i n_i. \quad (2.13)$$

Integrando 2.8 por partes encontramos que:

$$p_i(T, \mu_i) = \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i)} + \theta_i} dk. \quad (2.14)$$

Substituindo 2.14 e 2.7 na relação 2.6 encontramos que:

$$\begin{aligned} p(T, \mu_B) = & \sum_{\{\text{férmions}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{k^2 + m_i^2} - B_i \mu_B)} + 1} dk \\ & + \sum_{\{\text{bósons}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\beta\sqrt{k^2 + m_i^2}} - 1} dk. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Na relação 2.15 escrevemos separadamente a contribuição dos férmions e dos bósons (note que $B_i = 0$ para os bósons).

Para a fase hadrônica, temos que:

$$\begin{aligned} p^H(T, \mu_B) = & \sum_{\{\text{férmions}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{k^2 + m_i^2} - B_i \mu_B)} + 1} dk \\ & + \sum_{\{\text{bósons}\}} \frac{g_i}{2\pi^2} m_i^2 T^2 \sum_{j=0}^\infty \frac{K_2\left(\frac{m_i}{T}(j+1)\right)}{(j+1)^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na relação 2.16 a contribuição dos bósons pode ser integrada analiticamente (veja o apêndice B).

Para a fase de plasma de quarks e gluons, temos que:

$$p^{\text{PQG}}(T, \mu_B) = \sum_{\{u, \bar{u}, d, \bar{d}, s, \bar{s}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{k^2 + m_i^2} - B_i \mu_B)} + 1} dk$$

$$+ \frac{g_g}{6\pi^2} \int_0^\infty k^3 \frac{1}{e^{\beta k} - 1} dk - \mathcal{B}. \quad (2.17)$$

Na relação 2.17 estamos considerando apenas os quarks u , d e s e os gluons. $\mathcal{B}$ é a pressão do vácuo no modelo de sacolas (MIT *Bag Model*). Neste modelo, a pressão do gás de quarks e gluons é contrabalanceada pela pressão do vácuo⁴ [20, 21].

Considerando $m_u = m_d = 0$, o que é uma boa aproximação no chamado limite ultra-relativístico, podemos reescrever 2.17 como (veja apêndice C):

$$p^{\text{PQG}}(T, \mu_B) = \frac{\mu_B^4}{162\pi^2} + \frac{T^2 \mu_B^2}{9} + \frac{37}{90} \pi^2 T^4 + \sum_{i \in \{s, \bar{s}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{k^2 + m_i^2} - B_i \mu_B)} + 1} dk - \mathcal{B}. \quad (2.18)$$

Na região de coexistência das fases devemos ter que:

$$p^{\text{H}}(T, \mu_B) = p^{\text{PQG}}(T, \mu_B). \quad (2.19)$$

A equação 2.19 define uma curva que divide o plano (μ_B, T) em duas regiões, como é mostrado na Figura 2.1. A região do diagrama onde $p^{\text{H}}(T, \mu_B) > p^{\text{PQG}}(T, \mu_B)$ é a fase hadrônica⁵ e a região onde $p^{\text{H}}(T, \mu_B) < p^{\text{PQG}}(T, \mu_B)$ é a fase de plasma de quarks e gluons.

Figura 2.1: diagrama de fases no plano (μ_B, T) .

Na seção 2.1 mencionamos que a equação de estado deveria ser acrescentada ao conjunto de equações 2.1 e 2.4 de modo a eliminar uma incógnita excedente. De fato, para ambas as fases, as relações:

⁴Usamos $\mathcal{B} = 380 \text{ MeV/fm}^3$.

⁵Incluimos todos os mésons com massa menor que 1.5 GeV e bárions com massa menor que 2.0 GeV.

$$n_B = n_B(T, \mu_B) = \sum_i B_i n_i(T, B_i \mu_B) \quad (2.20)$$

e

$$\epsilon = \epsilon(T, \mu_B) = \sum_i \epsilon_i(T, B_i \mu_B) \quad (2.21)$$

podem ser invertidas obtendo-se:

$$T = T(\epsilon, n_B) \quad (2.22)$$

e

$$\mu_B = \mu_B(\epsilon, n_B). \quad (2.23)$$

Então, a pressão total pode ser dada como uma função da densidade de energia e da densidade bariônica, $p = p(\epsilon, n_B)$, o que fecha o sistema de equações.

Para obtermos as equações invertidas 2.22 e 2.23 sobre a curva de transição de fase, um procedimento adicional é necessário. Observe que no diagrama 2.1 ambas as fases estão em contato através da curva de transição 2.19. Entretanto, mapeando o plano (T, μ_B) no plano (ϵ, n_B) , através das relações 2.20 e 2.21, encontramos que a fase de plasma não está mais em contato com a fase hadrônica existindo entre elas uma região não mapeada. Esta é chamada de fase mista. Então, para encontrarmos o ponto (T, μ_B) , sobre a curva de transição, associando a um ponto (ϵ, n_B) na fase mista, fazemos o seguinte mapeamento:

$$s = \frac{s^{\text{PQG}}(T, \mu_B) - s^{\text{H}}(T, \mu_B)}{n_B^{\text{PQG}}(T, \mu_B) - n_B^{\text{H}}(T, \mu_B)} (n_B - n_B^{\text{H}}(T, \mu_B)) + s^{\text{H}}(T, \mu_B). \quad (2.24)$$

Na Figura 2.2 mostramos o diagrama de fases no plano (n_B, s) .

Figura 2.2: diagrama de fases no plano (n_B, s) .

Até o momento, construímos uma equação de estado para a matéria formada na colisão com uma transição de primeira ordem entre a fase de plasma de quarks e gluons e a fase hadrônica. No entanto, estudos de QCD na rede [22, 23] indicam a existência de um ponto crítico sobre a curva de transição. Assim, na região de pequeno número bariônico a transição seria do tipo *crossover* (veja Figura 2.3).

Figura 2.3: diagrama de fases no plano (μ_B, T) com ponto crítico. μ_c é o potencial químico bariônico crítico.

Com a finalidade de estudar os efeitos da presença de um ponto crítico sobre a linha de transição, introduzimos a seguinte parametrização da equação de estado [12, 13]:

$$(P - P^{\text{PQG}})(P - P^{\text{H}}) = \delta(\mu_B) \quad (2.25)$$

em que

$$\delta(\mu_B) = \delta_0 \exp[-(\mu_B/\mu_c)^2]. \quad (2.26)$$

Na relação 2.26 δ_0 é uma constante e μ_c é o potencial químico bariônico crítico. É importante enfatizar que esta é apenas uma parametrização fenomenológica que para o nosso objetivo de estudar a expansão hidrodinâmica do fluido é satisfatória.

Resolvendo a equação 2.25 e usando as relações termodinâmicas 2.11, 2.12 e 2.13, temos que:

$$P = \lambda P^{\text{H}} + (1 - \lambda) P^{\text{PQG}} + \frac{2\delta}{\sqrt{(P^{\text{PQG}} - P^{\text{H}})^2 + 4\delta}}, \quad (2.27)$$

$$n_B = \lambda n^{\text{H}} + (1 - \lambda) n^{\text{PQG}} - \frac{2(\mu_B/\mu_c^2)\delta}{\sqrt{(P^{\text{PQG}} - P^{\text{H}})^2 + 4\delta}}, \quad (2.28)$$

$$\epsilon = \lambda \epsilon^H + (1 - \lambda) \epsilon^{PQG} - \frac{2 [1 + (\mu_B/\mu_c)^2] \delta}{\sqrt{(P^{PQG} - P^H)^2 + 4\delta}} \quad (2.29)$$

e

$$s = \lambda s^H + (1 - \lambda) s^{PQG} \quad (2.30)$$

com

$$\lambda \equiv \frac{1}{2} \left[1 - (P^{PQG} - P^H) / \sqrt{(P^{PQG} - P^H)^2 + 4\delta} \right]. \quad (2.31)$$

Na Figura 2.4 mostramos a densidade de energia (relação 2.29), a densidade de entropia (relação 2.30) e a pressão (relação 2.27), dadas em função da temperatura, para três valores de potencial químico bariônico. As linhas tracejadas correspondem à equação de estado sem ponto crítico ($\delta_0 = 0$) e as linhas contínuas à equação de estado com ponto crítico ($\delta_0 \neq 0$). Como esperado, para uma equação de estado com transição de primeira ordem as quantidades extensivas apresentam uma descontinuidade na temperatura de transição. Com a introdução do ponto crítico a transição de fase se torna contínua e lisa na região de pequeno número bariônico ($\mu_B \lesssim 0.2 \text{ GeV}$). Observe que conforme o potencial químico bariônico aumenta, ou de forma equivalente conforme $\delta \rightarrow 0$, recupera-se a transição de primeira ordem.

Figura 2.4: curvas de $\epsilon(T)$, $s(T)$ e $p(T)$ obtidas por meio da equação de estado com ponto crítico (linhas contínuas) e sem ponto crítico (linhas tracejadas) [12, 13].

Na Figura 2.5 mostramos a razão s/ϵ e a pressão, dadas em função da densidade de energia, para três valores de potencial químico bariônico. Introduzindo-se o ponto crítico observamos duas mudanças - na região de pequeno potencial químico bariônico ($\mu_B \lesssim 0.2\text{GeV}$). A primeira é que a razão s/ϵ sofre um aumento, o que implica em um aumento da densidade de partículas do fluido⁶. A segunda é que o gradiente de pressão na fase mista deixa de ser nulo, indicando que a expansão do fluido ocorre sempre de forma acelerada.

Nesta tese usamos a equação de estado com ponto crítico. Um estudo dos efeitos do ponto crítico sobre os observáveis é feito em [12, 13].

Figura 2.5: curvas de $\frac{s}{\epsilon}(\epsilon)$ e $p(\epsilon)$ obtidas por meio da equação de estado com ponto crítico (linhas contínuas) e sem ponto crítico (linhas tracejadas) [12, 13].

2.3 Condições iniciais

As condições iniciais para as equações da hidrodinâmica 2.1 e 2.2 são dadas pelo tensor energia-momento no referencial local $(T^{\mu\nu}) = \text{diag}(\epsilon, p, p, p)$, pela quadri-velocidade do fluido u^μ e pelas densidades de cargas conservadas n_i (por exemplo, carga elétrica, número bariônico, estranheza etc.), todas essas grandezas calculadas no tempo inicial $\tau = \sqrt{t^2 - z^2}$, que é o tempo, supostamente, necessário para que a matéria alcance um estado de equilíbrio térmico local⁷.

Na abordagem hidrodinâmica tradicional as condições iniciais são funções simétricas e lisas, parametrizadas de forma conveniente, o que corresponderia a uma média do estado inicial das quantidades hidrodinâmicas que caracterizam a matéria térmica formada na colisão. Portanto, nesta abordagem, o cálculo de um observável deve ser entendido como um valor médio associado

⁶No caso de um fluido ideal constituído de píons, podemos considerar que $\rho \approx \alpha s$, em que ρ é densidade de píons e α é uma constante [7]. Lembre-se que, em colisões de íons pesados, os píons são a grande maioria das partículas observadas. Se a massa dos píons for desprezível, $\alpha = 45\zeta(3)/2\pi^4 \approx 0.278$ [11].

⁷Em nosso modelo usamos $\tau = 1\text{fm}$.

a uma certa classe de eventos⁸ - escolhidos, por exemplo, de acordo com o parâmetro de impacto. Assim, não se leva em conta, no cálculo hidrodinâmico, os efeitos das flutuações que possam surgir nas condições iniciais de cada evento. Este método, que chamaremos de cálculo com condições iniciais médias, pode ser representado da seguinte forma [11]:

$$\langle CI \rangle \equiv \sum_{j=1}^{N_{ev}} w_j (CI)_j \rightarrow \langle \mathcal{O} \rangle, \quad (2.32)$$

em que N_{ev} é o número de eventos, w_j é algum peso, $(CI)_j$ é a condição inicial do j-ésimo evento⁹ e $\mathcal{O}$ é alguma grandeza observável. A seta indica que partindo de $\langle CI \rangle$, resolvemos as equações hidrodinâmicas, calculamos a distribuição de partículas finais (discutiremos isso na seção 2.4) e, finalmente, obtemos os observáveis.

Uma vez que as dimensões do sistema criado na colisão são muito pequenas - ou de maneira equivalente, considerando a natureza granular dos núcleos incidentes - é razoável esperar que as condições iniciais $(CI)_j$ sofram flutuações consideráveis de evento para evento, mesmo quando fixamos os parâmetros da colisão como, por exemplo, a energia incidente e o parâmetro de impacto. É possível até que estas flutuações não sejam completamente aleatórias mas apresentem uma estrutura bem definida. Sendo assim, uma maneira alternativa e mais próxima do procedimento experimental é calcular o observável $\mathcal{O}$ a cada colisão e, posteriormente, tomar o seu valor médio. Desta maneira podemos estudar os efeitos das flutuações nos observáveis. Este método, que chamaremos de cálculo evento a evento, pode ser representado da seguinte forma [11]:

$$\sum_{j=1}^{N_{ev}} w_j (CI \rightarrow \mathcal{O})_j = \langle \mathcal{O} \rangle, \quad (2.33)$$

em que $(CI \rightarrow \mathcal{O})_j$ é o valor do observável $\mathcal{O}$ calculado no j-ésimo evento. Note que, agora, podemos calcular a dispersão do observável, ou seja,

$$\sigma_{\mathcal{O}}^2 = \sum_{j=1}^{N_{ev}} w_j \left((CI \rightarrow \mathcal{O})_j - \langle \mathcal{O} \rangle \right)^2. \quad (2.34)$$

Para obtermos as condições iniciais $(CI)_j$, evento a evento, é necessário adotar algum modelo microscópico que dê conta das interações complexas entre as partículas que constituem a matéria nuclear formada na colisão. Um destes modelos é o Nexus[1]. Este gerador de eventos pode fornecer o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$, as densidades de corrente bariônica j_B^μ , de estranheza j_S^μ e de carga j_Q^μ , em cada ponto do espaço, no “tempo próprio” $\tau = \sqrt{t^2 - z^2} \sim 1\text{fm}$, para qualquer par de núcleos incidentes¹⁰. Na Figura 2.6 mostramos a distribuição de densidade de energia inicial,

⁸Neste texto um evento significa uma colisão entre dois núcleos.

⁹A condição inicial $(CI)_j$, associada ao j-ésimo evento, representa o estado inicial das grandezas hidrodinâmicas, tais como: densidade de energia, densidade bariônica, velocidade do fluido etc.

¹⁰Em nosso modelo usamos, em cada evento, a densidade de energia ϵ , a densidade bariônica n_B e a quadri-velocidade u^ν fornecidas pelo programa Nexus. Através da equação de estado da matéria calculamos a pressão, $p = p(\epsilon, n_B)$, e, assim, construímos o tensor energia-momento térmico $T^{\mu\nu} = (\epsilon + p) u^\mu u^\nu - p g^{\mu\nu}$ e a corrente

para uma colisão central Au+Au com energia incidente de 200 AGeV, calculada com o gerador de eventos Nexus [1]. No gráfico à esquerda mostramos a distribuição no plano transversal $\eta_s = 0^{11}$ e no gráfico à direita a distribuição no plano longitudinal $y = 0$. Na Figura 2.7 mostramos a distribuição de velocidade inicial para o mesmo evento.

Figura 2.6: distribuição de densidade de energia inicial, para uma colisão central Au+Au com energia incidente de 200 AGeV, calculada com o gerador de eventos Nexus [1]. No gráfico à esquerda mostramos a distribuição no plano transversal $\eta_s = 0$ e no gráfico à direita a distribuição no plano longitudinal $y = 0$.

Figura 2.7: distribuição de densidade de energia e velocidade inicial para o mesmo evento mostrado na Figura 2.6.

Vemos nestes gráficos que a distribuição de densidade de energia inicial, calculada com o programa Nexus, é caracterizada pela presença de estruturas em forma de tubos longitudinais de alta densidade de energia, chamados de tubos de fluxo. A quantidade de tubos bem como suas propriedades - o raio, a energia e a posição no plano transversal - variam aleatoriamente de evento

bariônica $j_B^\mu = n_B u^\mu$ no instante inicial $\tau = 1\text{fm}$.

¹¹A variável $\eta_s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right)$ é denominada rapidez espacial.

para evento. Portanto, a flutuação gerada com o programa Nexus não é completamente aleatória mas surge em forma de tubos longitudinais.

Os tubos de fluxo (ou *strings*) representam uma parametrização dos chamados *soft* partons, os quais não podem ser tratados de modo perturbativo. O objetivo desta parametrização é estimar a contribuição destes partons para a distribuição de densidade de energia inicial do sistema [1].

A fim de ilustrar a discussão sobre condições iniciais médias, mostramos na Figura 2.8 a densidade de energia inicial média, no plano transversal $\eta_s = 0$ (esquerda) e no plano longitudinal $y = 0$ (direita), para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Nesta média consideramos dez mil eventos com parâmetro de impacto entre 5.9 e 7.6 fm. Observe que a estrutura tubular desaparece, ao se calcular a média.

Figura 2.8: densidade de energia inicial média, no plano transversal $\eta_s = 0$ (esquerda) e no plano longitudinal $y = 0$ (direita), para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Nesta média consideramos dez mil eventos com parâmetro de impacto entre 5.9 e 7.6 fm.

O objetivo principal desta tese é explorar as consequências, para os observáveis, das estruturas tubulares que caracterizam as condições iniciais do gerador de eventos Nexus. Mostraremos que os efeitos destas flutuações sempre vão no sentido de aproximar os resultados dos dados. Em particular, mostraremos que os tubos longitudinais estão intimamente relacionados com o efeito *Ridge* observado na correlação de duas partículas para colisões Au+Au a 200 AGeV e próton-próton a 7.0 TeV.

2.4 Mecanismo de desacoplamento

O mecanismo de desacoplamento mais comum em modelos hidrodinâmicos é dado pela prescrição de Cooper-Frye [4]. Para introduzirmos as idéias básicas desta prescrição, vamos supor uma situação idealizada em que a matéria expande num plano com gradiente de pressão isotrópico. Na

Figura 2.9 podemos ver uma ilustração desta situação. Observe que as isotermas são circunferências centradas na origem.

Figura 2.9: expansão radial de um fluido no plano (x, y) . As isotermas são circunferências centradas na origem.

Conforme o sistema expande e se torna mais frio, o livre caminho médio l , entre as partículas que formam o fluido, aumenta. Quando l se torna suficientemente grande, o sistema, que era um fluido, transforma-se em um conjunto de partículas livres. Chamamos este processo de desacoplamento. Para se obter a distribuição de momento das partículas livres (ou partículas emitidas do fluido), as seguintes aproximações são amplamente empregadas (prescrição de Cooper-Frye [4]):

1. Define-se uma temperatura de desacoplamento T_{fo} , de modo que o livre caminho médio, nesta temperatura, seja da mesma ordem de grandeza das dimensões do sistema¹².
2. Considera-se que uma partícula do fluido se torna livre quando ela atravessa a isoterma de temperatura T_{fo} em direção à região de baixa temperatura.

A isoterma de temperatura T_{fo} é obtida, para cada instante de tempo, através da condição:

$$T(t, x, y) = T_{fo}, \quad (2.35)$$

em que a função $T(t, x, y)$ é obtida por meio da solução das equações da hidrodinâmica relativística (veja seção 2.1). A relação 2.35 define uma superfície de temperatura constante Σ . Uma ilustração desta superfície, para o caso discutido acima, encontra-se na Figura 2.10. Note que dentro da superfície as partículas têm comportamento hidrodinâmico e depois de atravessá-la tornam-se, repentinamente, livres.

¹²No modelo hidrodinâmico de Landau, para colisões próton-próton, a temperatura de desacoplamento foi estimada como sendo da ordem de 140.0 MeV [7].

Nosso objetivo agora é calcular o número total de partículas emitidas. Para isso devemos contar o número de partículas que atravessa a isoterma T_{fo} , em direção à região de baixa temperatura, em todos os instantes de tempo. Esta contagem pode ser feita calculando-se o fluxo, na superfície Σ , das linhas de universo das partículas do fluido (Figura 2.10). Para isso, devemos fazer as seguintes observações:

Figura 2.10: superfície de temperatura constante Σ . A linha contínua, entre os pontos A e C, representa a linha de universo de uma partícula do fluido. Após a partícula atravessar a superfície Σ , seu momento não é mais alterado.

1. Se o vetor normal à superfície $d\sigma_\mu$ for do tipo tempo (Figura 2.10, ponto A), o fluxo de linhas de universo coincide com o número de partículas emitidas. Note que, neste ponto, as partículas estão sempre saindo do fluido, isto é, $k^\mu d\sigma_\mu > 0$.
2. Se o vetor normal à superfície $d\sigma_\mu$ for do tipo espaço (Figura 2.10, ponto B), o fluxo de linhas de universo não coincide, necessariamente, com o número de partículas emitidas. Isso ocorre porque algumas partículas podem estar retornando para o fluido¹³, ou seja, podemos ter $k^\mu d\sigma_\mu < 0$.

Para fazermos os cálculos, vamos considerar uma situação mais geral na qual a expansão ocorre em três dimensões. Assim, Σ é uma hiper-superfície no espaço-tempo, obtida pela condição:

$$T(t, x, y, z) = T_{fo}. \quad (2.36)$$

Uma vez que em cada ponto da hiper-superfície Σ existe equilíbrio térmico local, a densidade de partículas num ponto arbitrário de Σ é dada por:

¹³Em nosso modelo, com condições iniciais flutuantes, o número de partículas que retornam para o fluido é desprezível.

$$n = \int f(T(\vec{x}), \mu(\vec{x}), k^\nu u_\nu(\vec{x})) d^3\vec{k} \quad (2.37)$$

em que

$$f(T(\vec{x}), \mu(\vec{x}), k^\nu u_\nu(\vec{x})) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp[(k^\nu u_\nu(\vec{x}) - \mu(\vec{x}))/T(\vec{x})] \mp 1}. \quad (2.38)$$

Na relação 2.38 $u_\nu(\vec{x})$ é a quadri-velocidade do fluido, $\vec{x} = (t, x, y, z)$ é um ponto na hiper-superfície Σ e g é o fator de degenerescência da partícula em consideração. O sinal positivo está associado aos férmions e o negativo aos bósons.

A partir de 2.37 podemos escrever que:

$$dn = f(T(\vec{x}), \mu(\vec{x}), k^\nu u_\nu(\vec{x})) d^3\vec{k}. \quad (2.39)$$

Definimos a densidade de corrente de partículas j^μ de modo que:

$$dj^\mu = \frac{k^\mu}{E} dn. \quad (2.40)$$

Na relação 2.40 $E = k^0$ é a energia da partícula. Substituindo 2.39 em 2.40 e depois integrando, temos:

$$j^\mu = \int f(T(\vec{x}), \mu(\vec{x}), k^\nu u_\nu(\vec{x})) \frac{k^\mu}{E} d^3\vec{k}. \quad (2.41)$$

Com isso, o número de partículas emitidas é dado por

$$N = \int_\Sigma j^\mu d\sigma_\mu, \quad (2.42)$$

ou seja,

$$N = \int \int_\Sigma f(T(\vec{x}), \mu(\vec{x}), k^\nu u_\nu(\vec{x})) \frac{k^\mu}{E} d\sigma_\mu d^3\vec{k}. \quad (2.43)$$

Finalmente, através da relação 2.43, escrevemos a distribuição de momento das partículas emitidas da seguinte forma:

$$E \frac{dN}{d^3\vec{k}} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_\Sigma \frac{k^\mu d\sigma_\mu}{\exp[(k^\nu u_\nu(\vec{x}) - \mu(\vec{x}))/T(\vec{x})] \mp 1}. \quad (2.44)$$

A relação 2.44 é conhecida como fórmula de Cooper-Frye[4]. Na seção 3.3, discutiremos, no contexto do método SPH, como esta fórmula é aplicada a um sistema constituído por uma mistura de gases ideais.

Capítulo 3

Métodos numéricos

3.1 Método SPH

O Método SPH¹ é a ferramenta básica que usamos para resolver as equações de movimento do fluido. Sua formulação é feita em termos do princípio variacional. Assim, iniciamos com a formulação lagrangiana da hidrodinâmica relativística [10, 24]. Tal formulação é dada pela ação

$$I = - \int \epsilon(n_B, s) \sqrt{-g} d^4x \quad (3.1)$$

e pelas equações de vínculo:

$$(n_B u^\nu)_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} n_B u^\nu) = 0, \quad (3.2)$$

$$(s u^\nu)_{;\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\nu (\sqrt{-g} s u^\nu) = 0 \quad (3.3)$$

e

$$u^\nu u_\nu = 1. \quad (3.4)$$

Na equação 3.1, ϵ é a densidade de energia do fluido, no referencial próprio, $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ é a coordenada generalizada, g é o determinante da métrica ($g_{\mu\nu}$) e $\sqrt{-g}$ é o determinante da matriz jacobiana. As equações 3.2 e 3.3 representam, como sabemos, a conservação do número bariônico e da entropia. A equação 3.4 é a condição de normalização da quadri-velocidade do fluido.

Neste formalismo vamos considerar somente as métricas com a seguinte forma:

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & -\mathbf{g} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

em que $-\mathbf{g}$ é a parte espacial do tensor (uma matriz 3x3).

---

¹*Smoothed particle hydrodynamics.*

Naturalmente, a i -ésima componente da velocidade é dada por:

$$v^i = \frac{u^i}{u^0}, \quad (3.6)$$

em que $u^0 = \gamma$ é o fator de Lorentz generalizado.

Usando as relações 3.4, 3.5 e 3.6 encontramos que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{g_{00} - [\vec{v}]^T \mathbf{g} \vec{v}}}. \quad (3.7)$$

A notação $[\vec{v}]^T$ indica que devemos transpor o vetor $\vec{v}$.

A aplicação do princípio variacional à ação 3.1 - sob os vínculos dados pelas equações 3.2, 3.3 e 3.4 - leva às equações da hidrodinâmica relativística para um sistema de coordenadas generalizado [24]. No caso em que $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ obtemos a equação 2.1 (veja o apêndice D).

Uma vez que definimos o formalismo lagrangiano da hidrodinâmica relativística, vamos agora introduzir os conceitos do método SPH. A idéia básica deste método é parametrizar a densidade das grandezas extensivas, que estão associadas a alguma carga conservada, da seguinte forma²:

$$a^*(\vec{x}, \tau) = \sum_j \alpha_j W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) \quad (3.8)$$

em que $a^*(\vec{x}, \tau)$ é a densidade da carga $\mathcal{A}$, vista de um referencial fixo, e $\tau = x^0$ é o “tempo”. A quantidade α_j é uma constante e $W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h)$ é uma função positiva que em nossa versão do método tem as seguintes propriedades:

$$W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) = W(\vec{x}_j(\tau) - \vec{x}; h), \quad (3.9)$$

$$\int W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) d^3\vec{x} = 1 \quad (3.10)$$

e

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau)). \quad (3.11)$$

O parâmetro h é a largura da função. Na Figura 3.1 mostramos dois exemplos da função W . A coordenada neste caso particular é a rapidez espacial η_s , que está associada à direção longitudinal. As curvas são funções gaussianas.

Devemos observar que devido ao uso da propriedade 3.10, para a normalização de W , a densidade a^* não é, necessariamente, uma densidade volumétrica. Assim, vamos definir a quantidade $\tilde{a}^*$ de modo que:

---

²As quantidades indicadas com (*) são dadas em relação a um referencial fixo.

$$\tilde{a}^* = \frac{a^*}{\sqrt{-g}} = \frac{d\mathcal{A}}{\sqrt{-g}d^3\vec{x}}. \quad (3.12)$$

Na relação 3.12 estamos impondo, implicitamente, que a dimensão de α_j é a dimensão da carga em consideração. Note que o elemento de volume $d^3\vec{x}$ deve ser corrigido pelo módulo do determinante jacobiano para que $\tilde{a}^*$ seja uma densidade volumétrica³.

Figura 3.1: exemplos da função W . A coordenada neste caso particular é a rapidez espacial η_s , que está associada à direção longitudinal. As curvas são funções gaussianas. Quanto menor é o valor de h , mais detalhada é a descrição da evolução hidrodinâmica.

Naturalmente, a transformação da densidade de carga é dada por:

$$\tilde{a}^*(\vec{x}, \tau) = \gamma a, \quad (3.14)$$

em que a é a densidade da carga $\mathcal{A}$ no referencial local. Usando a relação 3.12 podemos reescrever 3.14 como:

$$a^*(\vec{x}, \tau) = \sqrt{-g}\gamma a, \quad (3.15)$$

o que conecta, diretamente, a densidade própria com a parametrização (ou interpolação) 3.8.

A fim de ganhar alguma intuição a respeito do método SPH, vamos calcular a quantidade total de $\mathcal{A}$ através da parametrização 3.8. Então,

$$\mathcal{A}^{\text{total}} = \int a^*(\vec{x}, \tau) d^3\vec{x} = \int \gamma a \sqrt{-g} d^3\vec{x} = \sum_j \alpha_j \int W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) d^3\vec{x} = \sum_i \alpha_i. \quad (3.16)$$

---

³De maneira compatível, poderíamos definir que:

$$\int W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) \sqrt{-g} d^3\vec{x} = 1, \quad (3.13)$$

o que tornaria a quantidade a^* uma densidade volumétrica. Entretanto, em cálculos usando o método SPH não é recomendável introduzir em W uma dependência espaço-temporal através da condição de normalização.

Na relação 3.16 fica claro que trocamos o fluido contínuo por um conjunto de “partículas” e cada uma delas carrega uma porção α_j da quantidade extensiva $\mathcal{A}$. Chamamos essas “partículas” de partículas SPH. Deve-se enfatizar que neste método as coordenadas não estão fixas num reticulado, mas se movem juntamente com o fluido.

A propriedade fundamental da parametrização 3.8 é assegurar a conservação local de $\mathcal{A}$, não importando como as partículas SPH se movem no espaço-tempo. Para ver isso, devemos derivar a densidade a^* em relação ao “tempo” τ . Assim,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a^*(\vec{x}, \tau) = - \sum_j \alpha_j \frac{d\vec{x}_j}{d\tau} \cdot \nabla W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) = - \nabla \cdot \sum_j \alpha_j \frac{d\vec{x}_j}{d\tau} W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h). \quad (3.17)$$

Considerando que a velocidade do fluido no ponto $(\vec{x}, \tau)$, nesta parametrização, é dada por

$$\vec{v}(\vec{x}, \tau) = \frac{1}{a^*(\vec{x}, \tau)} \sum_j \alpha_j \frac{d\vec{x}_j}{d\tau} W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) = \frac{\vec{J}_a(\vec{x}, \tau)}{a^*(\vec{x}, \tau)}, \quad (3.18)$$

em que $\vec{J}_a(\vec{x}, \tau)$ é a densidade de corrente, a equação 3.17 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} a^*(\vec{x}, \tau) = - \nabla \cdot (a^*(\vec{x}, \tau) \vec{v}(\vec{x}, \tau)). \quad (3.19)$$

Substituindo a relação 3.15 em 3.19 encontramos, finalmente, a equação de continuidade da carga⁴ $\mathcal{A}$, ou seja,

$$\partial_\nu (\sqrt{-g} a u^\nu) = 0. \quad (3.20)$$

Este resultado sugere as seguintes parametrizações:

$$n_B^*(\vec{x}, \tau) = \sum_j \beta_j W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h) \quad (3.21)$$

e

$$s^*(\vec{x}, \tau) = \sum_j \nu_j W(\vec{x} - \vec{x}_j(\tau); h), \quad (3.22)$$

em que β_j e ν_j são as porções de número bariônico e de entropia, carregadas pela j -ésima partícula SPH. Deste modo, garantimos que as equações de conservação 3.2 e 3.3 sejam satisfeitas por construção. Isso é muito conveniente pois parametrizando a ação 3.1 em termos das coordenadas das partículas SPH podemos aplicar o procedimento variacional a esta ação sem nos preocupar com as equações de vínculos.

Antes, porém, um comentário sobre a parametrização 3.22 deve ser feito. Em fluidos ideais, como mostramos no apêndice A, a entropia se conserva localmente durante a evolução hidrodinâ-

---

⁴Devemos assegurar, em nosso modelo, a condição: $\sqrt{-g} > 0$.

mica. Além disso, a equação de conservação é idêntica a uma equação de conservação de carga, ou seja, podemos definir uma densidade de corrente de entropia cuja quadri-divergência é nula (veja a relação 2.5). Neste sentido, podemos considerar que, efetivamente, cada partícula do fluido carrega uma porção da entropia total.

A fim de parametrizarmos a ação 3.1 vamos fracioná-la da seguinte forma:

$$I \rightarrow I_{\text{SPH}} = - \int \sum_i \epsilon_i (\sqrt{-g})_i V_i^* d\tau, \quad (3.23)$$

em que a soma é feita sobre as posições das partículas SPH.

Na integral 3.23 vemos a necessidade de definir o volume de um elemento do fluido, V_i^* . No caso de soluções numéricas em reticulados fixos, esta definição é trivial. Entretanto, no caso do método SPH esta tarefa é um pouco mais sutil, uma vez que as partículas SPH, como mencionado, se movem juntamente com o fluido. Definimos, então, o volume da i -ésima partícula SPH da seguinte maneira:

$$V_i^* \equiv \frac{\nu_i}{s_i^*} \quad (3.24)$$

em que

$$s_i^* = \sum_j \nu_j W(\vec{x}_i - \vec{x}_j(\tau); h) \quad (3.25)$$

é a densidade de entropia calculada na posição $\vec{x}_i$. Observe que $V_i^* = V_i^*(\vec{x}_i, \tau)$.

Usando a relação 3.15 podemos, facilmente, construir a transformação do volume da partícula SPH, ou seja,

$$V_i^* \equiv \frac{\nu_i}{s_i^*} = \frac{\nu_i}{s_i (\sqrt{-g})_i \gamma_i} = \frac{V_i}{(\sqrt{-g})_i \gamma_i}, \quad (3.26)$$

em que V_i é o volume próprio.

Substituindo a relação 3.26 em 3.23 encontramos que

$$I_{\text{SPH}} = - \int \sum_i \epsilon_i (\sqrt{-g})_i \frac{V_i}{(\sqrt{-g})_i \gamma_i} d\tau. \quad (3.27)$$

Assim,

$$I_{\text{SPH}} = - \int \sum_i \frac{E_i}{\gamma_i} d\tau. \quad (3.28)$$

A quantidade $E_i = \epsilon_i V_i$ é a energia própria (ou energia interna) da i -ésima partícula SPH.

O movimento das partículas SPH deve ser tal que a ação 3.28 seja um extremo. Portanto, as equações de movimento destas partículas são obtidas através da condição:

$$\delta I_{\text{SPH}} = 0. \quad (3.29)$$

Devemo-nos lembrar que as parametrizações 3.21 e 3.22 já satisfazem as equações de conservação. Consequentemente, não precisamos incorporar os vínculos ao procedimento variacional, como é feito no caso geral [24]. Substituindo a relação 3.28 em 3.29 e usando que $\delta E_i = -p_i \delta V_i$, encontramos a seguinte equação:

$$\delta I_{\text{SPH}} = \int \sum_i \left[\frac{p_i (\delta V_i) \gamma_i + E_i (\delta \gamma_i)}{\gamma_i^2} \right] d\tau = 0. \quad (3.30)$$

Até o momento discutimos o método SPH usando coordenadas generalizadas. A fim de obter as equações de movimento das partículas SPH numa forma otimizada, vamos usar um sistema de coordenadas particular que seja conveniente para o estudo das colisões de íons pesados relativísticos. Tal sistema é dado por:

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (3.31)$$

$$\eta_s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right) \quad (3.32)$$

e

$$\vec{r}_T = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3.33)$$

Assim, encontramos que:

$$g_{00} = 1, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tau^2 \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

e

$$\sqrt{-g} = \tau. \quad (3.36)$$

Inversamente, as coordenadas z e t são dadas por:

$$z = \tau \sinh(\eta_s) \quad (3.37)$$

e

$$t = \tau \cosh(\eta_s). \quad (3.38)$$

As coordenadas τ e η_s são chamadas de coordenadas hiperbólicas. Na seção 3.1.1 discutiremos algumas vantagens do seu uso em colisões de íons pesados relativísticos.

Com a escolha do sistema de coordenadas hiperbólico, a equação 3.30 leva ao seguinte sistema de equações de movimento para as partículas SPH (veja o apêndice E):

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \vec{\pi}_T \\ \pi_{\eta_s} \end{pmatrix}_i = -\frac{1}{\tau} \sum_j \nu_i \nu_j \left(\frac{p_i}{(\gamma_i s_i)^2} + \frac{p_j}{(\gamma_j s_j)^2} \right) \begin{pmatrix} \nabla_T \\ \partial_{\eta_s} \end{pmatrix}_i W_{ij} \quad (3.39)$$

em que

$$(\vec{\pi}_T)_i = \nu_i \gamma_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) (\vec{v}_T)_i, \quad (3.40)$$

$$(\pi_{\eta_s})_i = \tau^2 \nu_i \gamma_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) (v_{\eta_s})_i, \quad (3.41)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{v}_T)_i^2 - \tau^2 (v_{\eta_s})_i^2}}, \quad (3.42)$$

$$(\nabla_T)_i = (\partial_x, \partial_y)_i, \quad (3.43)$$

e

$$W_{ij} = W \left((\vec{r}_T)_i - (\vec{r}_T)_j, (\eta_s)_i - (\eta_s)_j; h \right). \quad (3.44)$$

Nas relações acima, $(\vec{v}_T)_i = (d\vec{r}_T/d\tau)_i$ e $(v_{\eta_s})_i = (d\eta_s/d\tau)_i$.

Resolvendo-se as equações 3.39, obtemos as posições e velocidades das partículas SPH em função do tempo. Com isso, é possível reconstruir a evolução temporal de todas as quantidades hidrodinâmicas usando as relações 3.18, 3.21, 3.22 e a equação de estado.

A vantagem do método SPH é substituir um sistema de equações diferenciais parciais, relação 2.1, por um sistema de equações diferenciais ordinárias. Deste modo, o estudo da evolução hidrodinâmica de sistemas cuja distribuição de matéria é bastante irregular, como é o caso das condições iniciais obtidas com o gerador de eventos Nexus (veja a Figura 2.6), se torna uma tarefa razoavelmente simples.

3.1.1 Sistema de coordenadas hiperbólico em colisões de íons pesados

Como mencionado no capítulo 1, a termalização da matéria formada na colisão ocorre numa hiper-superfície de tempo próprio do fluido, ou seja, esta hiper-superfície registra o ponto no espaço-tempo em que cada elemento do fluido alcança o tempo próprio t'_0 . Deste modo, devido à alta velocidade longitudinal inicial, a matéria em cada plano transversal pode ter um tempo de termalização diferente quando visto de um referencial fixo (como é o caso do referencial do laboratório). Nesta imagem inicial do processo de colisão, estamos considerando que a velocidade

transversal antes da termalização é nula ou desprezível. Assim, a relação entre o tempo próprio t'_0 e o tempo t de um referencial fixo é dada por:

$$t'_0 = \frac{t}{\gamma} = t\sqrt{1 - v_z(z, t)^2}, \quad (3.45)$$

em que $v_z(z, t)$ é a velocidade longitudinal da matéria. Observe que a equação 3.45 define uma curva no plano (z, t) cuja forma depende da função $v_z(z, t)$. Vamos chamar esta curva de curva de termalização.

Em modelos fenomenológicos aplicados às colisões de íons pesados relativísticos é comum supor que antes da termalização a distribuição de velocidade longitudinal é dada por⁵

$$v_z(z, t) = \frac{z}{t}. \quad (3.46)$$

A relação 3.46 é conhecida como fluxo longitudinal de Bjorken [25, 26].

Substituindo a relação 3.46 em 3.45, encontramos a seguinte curva de termalização:

$$t'_0 = t\sqrt{1 - \left(\frac{z}{t}\right)^2} = \sqrt{t^2 - z^2}, \quad (3.47)$$

que é a parte positiva de uma hipérbole.

Na Figura 3.2 mostramos uma ilustração que resume as ideias discutidas até o momento. As retas C1 e C2 são, respectivamente, as linhas de universo dos planos P1 e P2, ambos com velocidade $v_z = z/t$. No caso da reta C1 vemos que ela já cruzou a curva de termalização. Portanto a matéria em P1 está termalizada. Observe que no caso da reta C2 isso ainda não aconteceu. Nesta imagem, as condições iniciais para a hidrodinâmica são as quantidades termodinâmicas e a velocidade em cada plano transversal quando ele atinge a curva de termalização.

Figura 3.2: ilustração do processo de termalização no tempo próprio t'_0 . As retas C1 e C2 são, respectivamente, as linhas de universo dos planos P1 e P2. No caso da reta C1 vemos que ela já cruzou a curva de termalização. Portanto a matéria em P1 está termalizada. Observe que no caso da reta C2 isso ainda não aconteceu.

⁵Note que a rapidez $Y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v_z}{1 - v_z} \right)$. Se $v_z = \frac{z}{t}$, então $Y = \eta_s$.

Uma propriedade muito conveniente do sistema de coordenadas hiperbólico é que escolhendo $\tau = \tau_0 = t'_0$ obtemos a curva 3.47. Portanto, se o fluxo longitudinal é dado por 3.46, τ_0 é o tempo próprio e as condições iniciais para a hidrodinâmica $\epsilon_0(\tau_0, \vec{r}_T, \eta_s)$, $n_{B_0}(\tau_0, \vec{r}_T, \eta_s)$ etc., são dadas, automaticamente, sobre a curva de termalização.

Para tempos $t' > t'_0$, a relação 3.46 será válida apenas se, nas condições iniciais para a hidrodinâmica, o gradiente de pressão ao longo da direção η_s for nulo. Esta é a chamada expansão longitudinal com invariância de *boost*. Discutiremos esta solução, na seção 3.4, no contexto do método SPH.

A fim de adquirir alguma familiaridade com a coordenada η_s vamos dividir a relação 3.37 por 3.38. Assim, obtemos que:

$$\tanh(\eta_s) = \frac{z}{t}. \quad (3.48)$$

Vemos na equação 3.48 outra propriedade do sistema de coordenadas hiperbólico, ou seja, se o fluxo longitudinal é dado por 3.46, cada plano transversal que se move com velocidade $v_z = z/t$, ao longo do eixo z , está em repouso em alguma posição do eixo η_s . Nesta situação,

$$v_{\eta_s} = \frac{d\eta_s}{d\tau} = 0. \quad (3.49)$$

Nas condições iniciais do gerador de eventos Nexus podemos ver que $v_{\eta_s} \simeq 0$ na região central, onde $|\eta_s| \lesssim 3$, (veja a Figura 2.7). Nas regiões mais afastadas, τ_0 deve ser considerado como uma aproximação para o tempo próprio.

3.2 Desacoplamento no formalismo SPH

O objetivo desta seção é parametrizar a fórmula de Cooper-Frye, relação 2.44, usando as coordenadas das partículas SPH. Para isso, vamos fracioná-la da seguinte forma:

$$E \frac{dN}{d^3k} = \sum_j f(T_{fo}, \mu_j, k^\nu (u_\nu)_j) k^\mu (n_\mu)_j \Delta\sigma_j, \quad (3.50)$$

em que

$$f(T_{fo}, \mu_j, k^\nu (u_\nu)_j) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{\exp\left[\left(k^\nu (u_\nu)_j - \mu_j\right)/T_{fo}\right] \mp 1}. \quad (3.51)$$

Nas relações 3.50 e 3.51 as quantidades identificadas com o índice j devem ser calculadas na posição da j -ésima partícula SPH, precisamente, quando ela alcança a hiper-superfície de temperatura constante Σ . A quantidade $(n_\mu)_j$ é o quadri-vetor normal a esta hiper-superfície.

No método SPH podemos estimar as quantidades T_{fo} , μ_j , $(u_\nu)_j$ e $(n_\mu)_j$ de forma, razoavelmente, direta. Entretanto, para estimarmos o elemento de hiper-superfície $\Delta\sigma_j$ precisamos reescrevê-lo em termos de quantidades mais convenientes. Faremos isso através da seguinte equação:

$$(n_\mu)_j \Delta\sigma_j (u^\mu)_j = (\Delta\sigma_\mu)_j (u^\mu)_j = (\Delta\sigma_\mu)'_j (u^\mu)'_j = (\Delta\sigma_0)'_j. \quad (3.52)$$

Nesta equação, as quantidades com o símbolo “linha”, sobrescrito, devem ser calculadas no referencial próprio da j -ésima partícula SPH, precisamente, quando ela alcança a hiper-superfície Σ .

Podemos, ainda, fazer a seguinte identificação:

$$\left| (\Delta\sigma_0)'_j \right| = V_j, \quad (3.53)$$

em que V_j é o volume próprio da j -ésima partícula SPH.

Usando as relações 3.52 e 3.53, obtemos a seguinte equação:

$$\Delta\sigma_j = \frac{V_j}{\left| (n_\mu)_j (u^\mu)_j \right|}. \quad (3.54)$$

Substituindo a relação 3.54 em 3.50 e usando 3.26, encontramos, finalmente, que

$$E \frac{dN}{d^3k} = \sum_j \frac{\nu_j}{s_j} \frac{k^\mu (n_\mu)_j}{\left| (n_\mu)_j (u^\mu)_j \right|} f\left(T_{fo}, \mu_j, k^\nu (u_\nu)_j\right). \quad (3.55)$$

Esta é a fórmula de Cooper-Frye adaptada para o método SPH.

3.3 Programa NexSPheRIO

O programa NexSPheRIO é a ferramenta computacional que utilizamos para estudar a matéria formada em colisões nucleares de alta energia. Ele é a junção dos programas Nexus [1] e SPheRIO⁶ [10]. O gerador de eventos Nexus, como mencionamos, é usado para calcular as condições iniciais para a hidrodinâmica. O programa SPheRIO, com exceção das seções 2.3 e 3.4, encerra todos os aspectos discutidos nos capítulos 2 e 3. Deve-se destacar que sua principal característica é a capacidade de calcular a evolução hidrodinâmica mesmo para uma matéria extremamente irregular (Veja, por exemplo, a Figura 2.6).

Na Figura 3.3 mostramos o fluxograma do programa NexSPheRIO. Cada laço corresponde a um evento. Inicialmente, escolhemos os parâmetros gerais da colisão, como por exemplo, a energia do feixe, o tipo de núcleos incidentes, o parâmetro de impacto etc. Com essas informações o gerador de eventos Nexus calcula, em $\tau_0 = 1\text{fm}$, o tensor energia-momento $T^{\mu\nu}$ e as correntes de cargas conservadas $J_i^\nu = n_i u^\nu$ (relações 2.1 e 2.2). Essas condições iniciais - precisamente, a densidade de energia ϵ , a densidade bariônica n_B e a velocidade - são fornecidas ao programa SPheRIO, que, por sua vez, calcula a evolução hidrodinâmica da matéria e o *Ensemble* de partículas desacopladas, usando a prescrição de Cooper-Frye (relação 3.55). Finalmente, calcula-se os decaimentos das

---

⁶*Smoothed Particle hydrodynamic evolution of Relativistic heavy Ion collisions.*

partículas de ressonância obtendo-se, então, o *Ensemble* de partículas finais. Naturalmente, os observáveis, como por exemplo $dN/d\eta$, dN/dp_t , v_2 etc., são obtidos a partir deste último *Ensemble*. Para um novo laço, novos $T^{\mu\nu}$ e J_i^ν são calculados. Este, como discutimos na seção 2.3, é o chamado cálculo evento a evento⁷.

Figura 3.3: fluxograma do programa NexSPheRIO.

Na Figura 3.4 mostramos o fluxograma do programa SPheRIO. Este programa está dividido em três módulos: SPheRIO(1), SPheRIO(2) e SPheRIO(3). O módulo SPheRIO(1) calcula as condições iniciais das partículas SPH a partir das condições iniciais do gerador de eventos Nexus. Isso é feito da seguinte forma: defini-se um reticulado (usamos $25 \times 25 \times 25$), de modo que, inicialmente, cada partícula SPH é colocada em um vértice (veja a Figura 3.5). Então, os valores ν_i (entropia), β_i (número bariônico) e $\vec{v}_i$ (velocidade), associados à i -ésima partícula SPH, são os valores calculados pelo Nexus no respectivo vértice. Assim, as densidades s^* , n_B^* e $\vec{v}$ são interpoladas pelas relações 3.22, 3.21 e 3.18, respectivamente. O módulo SPheRIO(2) resolve as equações de movimento 3.39 usando a equação de estado discutida na seção 2.2. Ele também registra a velocidade e as quantidades termodinâmicas na posição do espaço-tempo em que cada partícula SPH alcança a hiper-superfície de temperatura constante Σ . Finalmente, o módulo SPheRIO(3) calcula, através do método de Monte Carlo, o *Ensemble* de partículas desacopladas. Isso é feito, basicamente, da seguinte forma: calcula-se, por meio da integração de 3.55, o número total de partículas emitidas para cada espécie, ou seja,

$$N = \int \frac{d^3\vec{k}}{E} \frac{\nu_j}{s_j} \frac{k^\mu (n_\mu)_j}{|(n_\mu)_j (u^\mu)_j|} f\left(T_{fo}, \mu_j, k^\nu (u_\nu)_j\right). \quad (3.56)$$

Então, o quadri-momento k^μ de cada partícula (píons, káons, prótons etc.) é escolhido aleatoriamente de acordo com a distribuição 3.55. É importante notar que esta distribuição depende

⁷Num cálculo com condições iniciais médias (veja a Figura 2.8), faz-se a média de $T^{\mu\nu}(\tau_0, x, y, \eta_s)$ e $J_i^\nu(\tau_0, x, y, \eta_s)$ sobre vários eventos e percorre-se o laço apenas uma vez.

da velocidade e das quantidades termodinâmicas do fluido nas posições do espaço-tempo em que as partículas SPH alcançam a hiper-superfície Σ . Assim, ela depende, implicitamente, de dois fatores: das condições iniciais e da equação de estado.

Figura 3.4: fluxograma do programa SPheRIO.

Figura 3.5: densidade de energia inicial, na região central de rapidez ($\eta_s = 0$), calculada com o gerador de eventos Nexus. Inicialmente, as partículas SPH são distribuídas de maneira uniforme (uma em cada vértice). Os valores ν_i , β_i e $\vec{v}_i$ associados à i -ésima partícula SPH, são os valores calculados pelo Nexus no respectivo vértice.

3.4 Modelo bidimensional com fluxo de Bjorken

A expansão longitudinal com invariância de *boost* [25, 26] é uma boa aproximação para evolução hidrodinâmica da matéria na região de pequena rapidez espacial⁸, onde $|\eta_s| \lesssim 1$. Neste tipo de solução, as condições iniciais têm a seguinte estrutura:

⁸Neste trabalho de doutoramento desenvolvi um programa computacional que calcula a expansão da matéria num plano transversal (um cálculo bidimensional). Para a direção longitudinal usei a expansão longitudinal com invariância de *boost*.

$$s(\tau = \tau_0, x, y, \eta_s) = f_0^s(x, y), \quad (3.57)$$

$$n_B(\tau = \tau_0, x, y, \eta_s) = f_0^{n_B}(x, y), \quad (3.58)$$

$$\vec{v}_T(\tau = \tau_0, x, y, \eta_s) = (f_0^{v_x}(x, y), f_0^{v_y}(x, y)), \quad (3.59)$$

e

$$v_{\eta_s}(\tau = \tau_0, x, y, \eta_s) = 0. \quad (3.60)$$

A quantidade τ_0 é o tempo inicial - em nosso modelo usamos $\tau_0 = 1\text{fm}$ - e as funções f_0^s , $f_0^{n_B}$, $f_0^{v_x}$ e $f_0^{v_y}$ são funções arbitrárias de x e y . A equação 3.60, como discutido na seção 3.1.1, implica na condição 3.46.

Nestas condições iniciais, o gradiente de pressão e a velocidade são nulos na direção longitudinal. Portanto, a solução das equações de movimento não pode depender da coordenada η_s , ou seja, devemos ter que:

$$s(\tau, x, y, \eta_s) = f^s(\tau, x, y), \quad (3.61)$$

$$n_B(\tau, x, y, \eta_s) = f^{n_B}(\tau, x, y), \quad (3.62)$$

$$\vec{v}_T(\tau, x, y, \eta_s) = (f^{v_x}(\tau, x, y), f^{v_y}(\tau, x, y)) \quad (3.63)$$

e

$$v_{\eta_s}(\tau, x, y, \eta_s) = 0. \quad (3.64)$$

Como consequência, basta calcular a expansão transversal do fluido em um único plano (x, y) , arbitrário, uma vez que nos demais planos a expansão é idêntica. Este tipo de abordagem é muito conveniente, pois podemos construir, em duas dimensões, programas computacionais simplificados e mais rápidos.

Nosso objetivo, agora, é obter as equações de movimento, das partículas SPH, no contexto da expansão longitudinal com invariância de *boost*. Para isso, devemos impor alguns vínculos ao movimento destas partículas, de modo que as condições 3.61, 3.62, 3.63 e 3.64 sejam satisfeitas por construção.

Iniciamos esta construção distribuindo as partículas SPH sobre um reticulado, cujos eixos ortogonais entre si são os eixos x , y e η_s . Vamos impor, então, que o movimento de cada partícula SPH está restrito ao plano transversal (x, y) ao qual ela pertence. Assim, devemos ter que

$$(v_{\eta_s})_j^m = 0, \quad (3.65)$$

com $j = 1, 2, 3, \dots, N$ e $m = 1, 2, 3, \dots, M$. Na equação 3.65 introduzimos a seguinte convenção: o índice subscrito indica o número da partícula SPH e o índice sobrescrito o plano transversal ao qual ela pertence. Por exemplo, ν_1^1 e ν_1^2 são os conteúdos de entropia de partículas SPH com mesmo número mas em planos transversais distintos. Nesta convenção, é claro que o número total de partículas SPH é dado por $N \times M$. Na Figura 3.6 mostramos uma ilustração que resume as ideias discutidas até o momento. Observe que o espaçamento Δ_L será mantido constante durante todo o tempo.

Figura 3.6: distribuição de partículas SPH num reticulado (x, y, η_s) . Impomos que o movimento de cada partícula SPH está restrito ao plano transversal (x, y) a que ela pertence. ν_j^m é o conteúdo de entropia da j -ésima partícula SPH que se move dentro do m -ésimo plano. Δ_L é o espaçamento na direção η_s .

Para que as condições 3.61, 3.62, 3.63 e 3.64 sejam satisfeitas, além da relação 3.65, devemos impor os seguintes vínculos:

$$\nu_j^m = \nu_j^{m+1}, \quad (3.66)$$

$$\beta_j^m = \beta_j^{m+1}, \quad (3.67)$$

$$x_j^m = x_j^{m+1} \quad (3.68)$$

e

$$y_j^m = y_j^{m+1}. \quad (3.69)$$

Naturalmente, os vínculos 3.68 e 3.69 implicam que

$$(\vec{v}_T)_j^m = (\vec{v}_T)_j^{m+1}. \quad (3.70)$$

Portanto, devemos ter que

$$\gamma_j^m = \frac{1}{\sqrt{1 - \left((\vec{v}_T)_j^m\right)^2}} = \gamma_j^{m+1}. \quad (3.71)$$

De posse das equações de vínculo, vamos agora às equações de movimento. Na direção longitudinal encontramos a seguinte equação (relação 3.39):

$$\frac{d}{d\tau} (\pi_{\eta_s})_i^n = -\frac{1}{\tau} \sum_j \sum_m \nu_i^n \nu_j^m \left(\frac{p_i^n}{(\gamma_i^n s_i^n)^2} + \frac{p_j^m}{(\gamma_j^m s_j^m)^2} \right) \frac{\partial W_{ij}^{nm}}{\partial (\eta_s)_i^n}, \quad (3.72)$$

com

$$(\pi_{\eta_s})_i^n = \tau^2 \nu_i^n \gamma_i^n \left(\frac{\epsilon_i^n + p_i^n}{s_i^n} \right) (v_{\eta_s})_i^n \quad (3.73)$$

e

$$W_{ij}^{nm} = W \left((\vec{r}_T)_i^n - (\vec{r}_T)_j^m, (\eta_s)_i^n - (\eta_s)_j^m; h \right). \quad (3.74)$$

Nas relações 3.72, 3.73 e 3.74 introduzimos o índice n associado à i -ésima partícula, e o índice m à j -ésima partícula.

Antes de substituímos os vínculos nas equações de movimento, podemos escrever a função W_{ij}^{nm} de uma maneira mais conveniente⁹, ou seja,

$$W_{ij}^{nm} = W_T \left((\vec{r}_T)_i^n - (\vec{r}_T)_j^m \right) W_L \left((\eta_s)_i^n - (\eta_s)_j^m \right), \quad (3.75)$$

com

$$\int W_T \left(\vec{r}_T - (\vec{r}_T)_j^m \right) d^2\vec{x} = 1 \quad (3.76)$$

e

$$\int W_L \left(\eta_s - (\eta_s)_j^m \right) d\eta_s = 1. \quad (3.77)$$

Substituindo a relação 3.75 em 3.72, encontramos a seguinte equação:

$$\frac{d}{d\tau} (\pi_{\eta_s})_i^n = -\frac{1}{\tau} \sum_j \sum_m \nu_i^n \nu_j^m \left(\frac{p_i^n}{(\gamma_i^n s_i^n)^2} + \frac{p_j^m}{(\gamma_j^m s_j^m)^2} \right) (W_T)_{ij}^{nm} \frac{\partial (W_L)_{ij}^{nm}}{\partial (\eta_s)_i^n}. \quad (3.78)$$

---

⁹Usada no programa NexSPheRIO.

Usando as equações de vínculo, relações de 3.65 a 3.71, podemos trocar, em todas as quantidades, o índice m por n , exceto, é claro, na coordenada $(\eta_s)_j^m$. Assim, a equação 3.78 pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\frac{d}{d\tau} (\pi_{\eta_s})_i^n = -\frac{1}{\tau} \sum_j \nu_i^n \nu_j^n \left(\frac{p_i^n}{(\gamma_i^n s_i^n)^2} + \frac{p_j^n}{(\gamma_j^n s_j^n)^2} \right) (W_T)_{ij}^{nn} \left\{ \sum_m \frac{\partial (W_L)_{ij}^{nm}}{\partial (\eta_s)_i^n} \right\}. \quad (3.79)$$

Considerando que $(W_L)_{ij}^{nm} = (W_L)_{ji}^{mn}$ (relação 3.9) devemos ter que

$$\sum_m \frac{\partial (W_L)_{ij}^{nm}}{\partial (\eta_s)_i^n} = 0. \quad (3.80)$$

Por outro lado, a equação de vínculo 3.65 estabelece que

$$(\pi_{\eta_s})_i^n = 0. \quad (3.81)$$

Assim, a equação de movimento das partículas SPH, na direção longitudinal, está satisfeita por construção.

Na direção transversal encontramos a seguinte equação (relação 3.39):

$$\frac{d}{d\tau} (\vec{\pi}_T)_i^n = -\frac{1}{\tau} \sum_j \sum_m \nu_i^n \nu_j^m \left(\frac{p_i^n}{(\gamma_i^n s_i^n)^2} + \frac{p_j^m}{(\gamma_j^m s_j^m)^2} \right) (W_L)_{ij}^{nm} \left(\frac{\partial}{\partial x_i^n}, \frac{\partial}{\partial y_i^n} \right) (W_T)_{ij}^{nm}. \quad (3.82)$$

De forma análoga ao que fizemos na equação 3.78, podemos reescrever 3.82 como

$$\frac{d}{d\tau} (\vec{\pi}_T)_i^n = -\frac{1}{\tau} \sum_j \nu_i^n \nu_j^n \left(\frac{p_i^n}{(\gamma_i^n s_i^n)^2} + \frac{p_j^n}{(\gamma_j^n s_j^n)^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i^n}, \frac{\partial}{\partial y_i^n} \right) (W_T)_{ij}^{nn} \left\{ \sum_m (W_L)_{ij}^{nm} \right\}. \quad (3.83)$$

Note que a quantidade

$$w_L \equiv \sum_m (W_L)_{ij}^{nm} \quad (3.84)$$

é uma constante. Usando a condição de normalização 3.77, vemos que

$$w_L \simeq \frac{1}{\Delta_L}. \quad (3.85)$$

Observe que o lado direito da equação 3.83 não depende da maneira como fracionamos a densidade de entropia, ou a densidade bariônica, ao longo do eixo longitudinal, pois o aumento do número de planos transversais, o que faz aumentar w_L , necessariamente, deve ser acompanhado por uma redução proporcional do conteúdo de entropia ν_j de cada partícula SPH, para que a densidade de entropia inicial seja preservada.

Substituindo a relação 3.84 em 3.83, encontramos, finalmente, que

$$\frac{d}{d\tau} (\vec{\pi}_T)_i = -\frac{1}{\tau} \sum_j \nu_i \nu_j w_L \left(\frac{p_i}{(\gamma_i s_i)^2} + \frac{p_j}{(\gamma_j s_j)^2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i} \right) W_T \left((\vec{r}_T)_i - (\vec{r}_T)_j \right), \quad (3.86)$$

com

$$(\vec{\pi}_T)_i = \nu_i \gamma_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) (\vec{v}_T)_i \quad (3.87)$$

e

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{v}_T)_i^2}}. \quad (3.88)$$

Estas são as equações de movimento das partículas SPH, no contexto da expansão longitudinal com invariância de *boost*. Note que omitimos o índice sobrescrito n , uma vez que na equação 3.83 está claro que devemos calcular todas as quantidades hidrodinâmicas no mesmo plano transversal.

Capítulo 4

Alguns observáveis

4.1 Fluxo elíptico

O parâmetro de fluxo elíptico v_2 é o segundo coeficiente da expansão, em série de Fourier, da distribuição azimutal de partículas. Ele está relacionado com a anisotropia azimutal existente na distribuição inicial de matéria (no tempo inicial $\tau = \tau_0$). Tal anisotropia surge, principalmente, nas colisões não centrais devido à forma da região de interpenetração dos núcleos incidentes¹. Assim, este parâmetro depende, fortemente, da geometria da colisão.

Na Figura 4.1 (esquerda) mostramos uma ilustração da colisão de dois núcleos com parâmetro de impacto $\vec{b}$. O eixo da colisão é perpendicular ao plano da figura e o parâmetro de impacto forma um ângulo Φ_b com o eixo Ox. Nesta figura, estamos supondo que a distribuição inicial de matéria é simétrica, em relação ao plano definido por $\vec{b}$ e o eixo Oz, e suave, como é o caso das condições iniciais médias (veja a Figura 2.8). Observe que a forma da região de interpenetração dos núcleos incidentes apresenta uma certa excentricidade.

Com essa imagem geométrica da colisão em mente, a discussão de v_2 , do ponto de vista do modelo hidrodinâmico, pode ser colocada da seguinte forma: se o livre caminho médio entre as partículas que formam a matéria for suficientemente pequeno, podemos admitir um estado de equilíbrio térmico local. Assim, o gradiente de pressão, como função do ângulo azimutal, será máximo na direção definida pelo segmento de reta $\overline{OA}$ e mínimo na direção do segmento $\overline{OB}$, ou seja, a força que impele a matéria a se expandir será máxima na direção do primeiro e mínima na sua direção segundo (note que o comprimento do segmento $\overline{OA}$ é menor que o comprimento de $\overline{OB}$ e a pressão em A é igual à pressão em B). Como consequência, o número de partículas produzidas, como função do ângulo azimutal, será máximo na direção do segmento $\overline{OA}$ e mínimo na direção de $\overline{OB}$.

---

¹Mesmo numa colisão central, caracterizada por um parâmetro de impacto nulo, a anisotropia pode ser considerável se levarmos em conta as flutuações que surgem das interações entre os constituintes dos núcleos incidentes (veja a Figura 2.6).

Figura 4.1: ilustração da colisão de dois núcleos com parâmetro de impacto $\vec{b}$. O eixo da colisão é perpendicular ao plano da figura e o parâmetro de impacto forma um ângulo Φ_b de 20° com o eixo Ox. As setas indicam que o número de partículas produzidas, como função do ângulo azimutal, será máximo na direção do segmento $\overline{OA}$ e mínimo na direção de $\overline{OB}$ (esquerda). Distribuição de partículas em função do ângulo azimutal ϕ , para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV (símbolos). Neste cálculo usamos condições iniciais médias. Consideramos eventos (do gerador de eventos Nexus) com $|\vec{b}|$ entre 7.1 e 10 fm. A curva contínua é a componente elíptica de $dN/d\phi$ (direita).

Para entendermos esta última afirmação devemos nos lembrar que a distribuição angular de partículas em um ponto arbitrário do fluido, vista de um referencial fixo, não é isotrópica se, neste ponto, o fluido tem velocidade. Na Figura 4.2 mostramos a distribuição angular de píons, em um ponto arbitrário x , para três valores hipotéticos do módulo da velocidade do fluido $\vec{v}(x)$. A função $f(\theta)$, dada pela distância entre a origem e a curva, é a probabilidade de se encontrar um pión, com energia $E_\pi = 0.5 \text{ GeV}$, em um ângulo θ , medido em relação à direção de $\vec{v}(x)$ - veja a relação 2.38. Este ângulo surge devido ao seguinte produto:

$$k_\pi^\nu u_\nu = E_\pi \gamma(x) \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{m_\pi}{E_\pi} \right)^2} |\vec{v}(x)| \cos(\theta) \right). \quad (4.1)$$

A quantidade m_π é a massa do pión e $T_{fo} = 140 \text{ MeV}$ é a temperatura de desacoplamento.

Vemos nesta figura que a probabilidade é máxima em $\theta = 0$ e mínima em $\theta = \pi$, nos casos em que a velocidade do fluido é não nula. No caso em que $|\vec{v}| = 0$, como esperado, a distribuição é isotrópica. Conforme o fluido é acelerado podemos observar dois efeitos. O primeiro é que a probabilidade total de se observar um pión, com energia $E_\pi = 0.5 \text{ GeV}$, se torna cada vez maior². Este é, exatamente, o mecanismo hidrodinâmico de produção de partículas com grande momento, ou seja, a velocidade da partícula em movimento térmico se soma à velocidade do fluido. O segundo é que o fluxo de partículas se torna cada vez mais colimado em torno da direção $\theta = 0$. Para ver isso note que a probabilidade de se observar um pión com $\theta = \pi/2$ é bastante reduzida

²Para cada valor de energia E_π existe uma velocidade que maximiza a produção de píons com essa energia. No caso discutido acima, no qual $E_\pi = 0.5 \text{ GeV}$, essa velocidade é da ordem de 0.91. No caso extremo em que $v \rightarrow 1$, a probabilidade de se observar uma partícula com energia finita tende a zero.

quando o fluido alcança a velocidade $v = 0.6$.

Figura 4.2: distribuição angular de píons, em um ponto arbitrário x , para três valores hipotéticos do módulo da velocidade do fluido $\vec{v}(x)$. A função $f(\theta)$, dada pela distância entre a origem e a curva, é a probabilidade de se encontrar um píon, com energia $E_\pi = 0.5\text{GeV}$, em um ângulo θ , medido em relação à direção de $\vec{v}(x)$. A quantidade m_π é a massa do píon e $T_{fo} = 140\text{MeV}$ é a temperatura de desacoplamento.

A propriedade de colimação do fluxo de partículas, discutida acima, é fundamental para entendermos como a anisotropia azimutal do gradiente de pressão é convertida numa anisotropia azimutal na distribuição de partículas. Na Figura 4.1 argumentamos que o gradiente de pressão na direção do segmento $\overline{OA}$ é maior que o gradiente de pressão na direção de $\overline{OB}$. Então, o elemento de fluido acelerado a partir do ponto A terá a maior velocidade e o acelerado a partir do ponto B a menor. Como consequência, a colimação do fluxo de partículas será máxima para o primeiro elemento e mínima para o segundo. Este mecanismo, naturalmente, faz com que o número de partículas produzidas, como função do ângulo azimutal, seja máximo na direção do segmento $\overline{OA}$ e mínimo na direção de $\overline{OB}$.

Na Figura 4.1 (direita) mostramos a distribuição de partículas em função do ângulo azimutal ϕ , para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV (símbolos). Neste cálculo usamos condições iniciais médias. Consideramos eventos (do gerador de eventos Nexus) com $|\vec{b}|$ entre 7.1 e 10 fm e $\Phi_b = 20^\circ$. Vemos neste gráfico que $dN/d\phi$ é alongada na direção do parâmetro de impacto (paralelo ao segmento $\overline{OA}$), o que exemplifica os conceitos discutidos até o momento.

Um procedimento comum em análises de colisões de íons pesados é expandir $dN/d\phi$ em série de Fourier e estudar, separadamente, o comportamento de cada harmônico. Então,

$$\frac{dN}{d\phi} = v_0 \left\{ 1 + \sum_n 2v_n \cos [n(\phi - \Psi_n)] \right\} \quad (4.2)$$

com

$$v_0 = \frac{N}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} d\phi, \quad (4.3)$$

$$v_n = \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos[n(\phi - \Psi_n)] d\phi \quad (4.4)$$

e

$$\Psi_n = \frac{1}{n} \tan^{-1} \left[\frac{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \sin(n\phi) d\phi}{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos(n\phi) d\phi} \right]. \quad (4.5)$$

O fenômeno de fluxo elíptico pode ser quantificado calculando-se o peso do segundo harmônico da expansão 4.2. Assim, usando a relação 4.4, definimos o parâmetro de fluxo elíptico v_2 da seguinte forma:

$$v_2 \equiv \frac{1}{N} \int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos[2(\phi - \Psi_2)] d\phi \quad (4.6)$$

com

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \sin(2\phi) d\phi}{\int_0^{2\pi} \frac{dN}{d\phi} \cos(2\phi) d\phi} \right]. \quad (4.7)$$

O ângulo Ψ_2 é o ângulo no qual o parâmetro de fluxo elíptico é máximo (veja a Figura 4.1). O plano definido pelo eixo Oz e o ângulo Ψ_2 é comumente chamado de plano do evento. Ao longo deste plano o número de partículas produzidas é máximo. Observe que no caso de condições iniciais médias $\Psi_2 = \Phi_b$.

Na Figura 4.1 (direita) a curva contínua é a componente elíptica de $dN/d\phi$, definida como $v_0 + 2v_0v_2 \cos(2(\phi - \Psi_2))$. Vemos que, no caso das condições iniciais médias, o fluxo global é reproduzido completamente pelas componentes radial e elíptica. Os parâmetros da curva, neste exemplo, são dados por: $v_0 \sim 196.2$, $v_2 \sim 0.059$ e $\Psi_2 \sim 0.349$. O parâmetro v_2 está relacionado com a razão entre o eixo maior da curva e o eixo menor. Para este valor de v_2 a razão é da ordem de 1.27.

Embora tenhamos usado um modelo com uma distribuição inicial de matéria bastante simples para discutir o parâmetro de fluxo elíptico, o conceito básico deste observável é mais geral e pode ser aplicado a qualquer distribuição de matéria em expansão hidrodinâmica. Assim, em um cálculo com condições iniciais flutuantes (veja, por exemplo, a Figura 2.6), podemos definir, para a j -ésima colisão, as quantidades $(v_2)_j$ e $(\Psi_2)_j$, calculadas, respectivamente, através das relações 4.6 e 4.7.

Com isso, a média deste observável, em um cálculo evento a evento, pode ser definida da seguinte forma:

$$\langle v_2 \rangle \equiv \left(\sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j (v_2)_j = \left(\sum_{j=1}^{N_{ev}} N_j \right)^{-1} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{dN}{d\phi} \right)_j \cos[2(\phi - (\Psi_2)_j)] d\phi, \quad (4.8)$$

em que N_{ev} é o número total de eventos. A fórmula 4.8 é uma média ponderada de v_2 na qual o número de partículas N_j é usado como peso.

Na Figura 4.3 mostramos a distribuição de partículas em função do ângulo azimutal ϕ , para uma colisão Au+Au aleatória com energia incidente de 200AGeV (símbolos). Neste evento usamos $|\vec{b}| = 8.84\text{fm}$ e $\Phi_b = 0^\circ$. Vemos neste gráfico que a distribuição $dN/d\phi$ é alongada na direção do plano do evento, indicando que, mesmo no caso em que as condições iniciais são bastante irregulares, o fluxo elíptico juntamente com o fluxo radial são as componentes que dominam a expansão. Outro fato interessante é que as flutuações adicionam à distribuição $dN/d\phi$ componentes de Fourier de ordens superiores, o que, em princípio, nos habilita ao estudo da função de correlação de duas partículas, uma vez que os dados indicam que esse observável depende, além de v_0 e v_2 , das componentes v_3 e v_4 , principalmente [27]. Observe, também, que, devido à flutuação, a direção do parâmetro de impacto não coincide com a direção de Ψ_2 .

Figura 4.3: distribuição de partículas em função do ângulo azimutal ϕ , para uma colisão Au+Au aleatória com energia incidente de 200AGeV (símbolos). Neste evento usamos $|\vec{b}| = 8.84\text{fm}$ e $\Phi_b = 0^\circ$. A curva contínua é a componente elíptica de $dN/d\phi$. Os parâmetros desta curva são dados por: $v_0 \sim 230.8$, $v_2 \sim 0.097$ e $\Psi_2 \sim 2.853$.

Na seção 5.3 mostraremos os cálculos de v_2 e de suas flutuações relativas σ_{v_2}/v_2 , em função da chamada centralidade da colisão. Na seção 5.5 mostraremos os cálculos de v_2 em função da pseudo-rapidez η e em função do momento transversal p_t . Faremos, também, uma comparação entre o cálculo evento a evento e o cálculo com condições iniciais médias.

4.2 Correlação de duas partículas

O cálculo da função de correlação de duas partículas é um método amplamente usado para se entender os mecanismos de produção de partículas em colisões de íons pesados relativísticos. Usualmente, neste tipo de análise, as partículas são divididas em dois grupos: as partículas *trigger* e as partículas associadas³. Ambos os grupos podem pertencer a regiões cinemáticas distintas. As partículas *trigger*, usualmente, têm momento transversal maior que as partículas associadas.

³Aqui não estamos nos referindo à correlação de partículas idênticas, relacionadas ao efeito HBT.

Historicamente, esta classificação se deve ao interesse no estudo de jatos, em particular, no estudo da dinâmica dos jatos que são criados dentro de um meio espesso formado por matéria nuclear, como é o caso das colisões de íons pesados relativísticos.

Em nosso modelo hidrodinâmico não incluímos os efeitos dos jatos. Entretanto, mostraremos que a evolução hidrodinâmica de uma matéria com flutuações, caracterizadas por tubos longitudinais de alta densidade de energia, cria, nas partículas finais, correlações que são compatíveis com os dados.

Definimos, então, a função G , que estima a correlação entre as partículas *trigger* e as partículas associadas, da seguinte forma:

$$G(\Delta\phi, \Delta\eta) \equiv \frac{1}{N_{tr}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int \delta^2(\vec{\rho}_a - \vec{\rho}_t - (\Delta\phi, \Delta\eta)) f^j(\vec{\rho}_a) g^j(\vec{\rho}_t) d^2\vec{\rho}_a d^2\vec{\rho}_t \quad (4.9)$$

com

$$\vec{\rho}_a = (\phi_a, \eta_a), \quad (4.10)$$

$$\vec{\rho}_t = (\phi_t, \eta_t), \quad (4.11)$$

$$N_{tr} = \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int g^j(\vec{\rho}_t) d^2\vec{\rho}_t, \quad (4.12)$$

$$f^j(\vec{\rho}_a) = \frac{d^2 N_a^j}{d\phi_a d\eta_a}(\phi_a, \eta_a) \quad (4.13)$$

e

$$g^j(\vec{\rho}_t) = \frac{d^2 N_t^j}{d\phi_t d\eta_t}(\phi_t, \eta_t). \quad (4.14)$$

O índice subscrito a se refere às partículas associadas e o índice t às partículas *trigger*. As coordenadas ϕ e η são, respectivamente, o ângulo azimutal do momento da partícula e a sua pseudo-rapidez. A função $G(\Delta\phi, \Delta\eta)$ é a probabilidade de se observar, simultaneamente, uma partícula *trigger* e uma partícula associada cujos respectivos momentos têm diferenças angulares $\Delta\phi$ e $\Delta\eta$ entre si. Note que a direção $(\Delta\phi, \Delta\eta) = (0, 0)$ é a direção do momento da partícula *trigger*.

A fim de adquirirmos alguma intuição a respeito da função de correlação G , vamos aplicá-la ao caso mais simples no qual as condições iniciais são simétricas e suaves. Por questão de simplicidade, faremos isso em uma dimensão. Inicialmente, para a direção transversal e depois para a direção longitudinal. Então, integrando a fórmula 4.9 em $\Delta\eta$, obtemos a seguinte função de correlação⁴:

---

⁴Usada no chamado modelo de um tubo que discutiremos na seção 5.4.1.2.

$$G(\Delta\phi) = \frac{1}{N_{tr}} \frac{dN}{d\Delta\phi} = \frac{1}{N_{tr}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int \delta(\phi_a - \phi_t - \Delta\phi) \frac{dN_a^j}{d\phi_a}(\phi_a) \frac{dN_t^j}{d\phi_t}(\phi_t) d\phi_a d\phi_t \quad (4.15)$$

com

$$N_{tr} = \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int \frac{dN_t^j}{d\phi_t}(\phi_t) d\phi_t. \quad (4.16)$$

Analogamente, integrando a fórmula 4.9 em $\Delta\phi$, obtemos a seguinte função de correlação:

$$G(\Delta\eta) = \frac{1}{N_{tr}} \frac{dN}{d\Delta\eta} = \frac{1}{N_{tr}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int \delta(\eta_a - \eta_t - \Delta\eta) \frac{dN_a^j}{d\eta_a}(\eta_a) \frac{dN_t^j}{d\eta_t}(\eta_t) d\eta_a d\eta_t \quad (4.17)$$

com

$$N_{tr} = \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int \frac{dN_t^j}{d\eta_t}(\eta_t) d\eta_t. \quad (4.18)$$

Na Figura 4.4 mostramos as distribuições $dN/d\phi$ (esquerda) e $dN/d\eta$ (direita) para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Neste cálculo usamos condições iniciais médias. Consideramos eventos (do gerador de eventos Nexus) com $|\vec{b}|$ entre 7.1 e 10 fm e $\Phi_b = 0^\circ$. As curvas com círculos (multiplicadas por um fator 20) correspondem às partículas *trigger*, com $p_t > 1.5$ GeV, e as curvas com asteriscos às partículas associadas, com $p_t > 0.5$ GeV.

Figura 4.4: distribuições $dN/d\phi$ (esquerda) e $dN/d\eta$ (direita) para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Neste cálculo usamos condições iniciais médias. Consideramos eventos (do gerador de eventos Nexus) com $|\vec{b}|$ entre 7.1 e 10 fm e $\Phi_b = 0^\circ$. As curvas com círculos (multiplicadas por um fator 20) correspondem às partículas *trigger*, com $p_t > 1.5$ GeV, e as curvas com asteriscos às partículas associadas, com $p_t > 0.5$ GeV.

Como podemos ver, claramente, estas curvas estão relacionadas diretamente com a forma da distribuição média da matéria, tanto na direção transversal quanto na direção longitudinal. Na

direção transversal, devido à forma elíptica da região de interpenetração dos núcleos incidentes, a distribuição de partículas é caracterizada, basicamente, pelas componentes radial e elíptica da expansão em série de Fourier, como discutimos na seção 4.1. Na direção longitudinal a forma da distribuição de matéria - com um platô central, na região onde $|\eta_s| \lesssim 2$, e com um decréscimo rápido, na região onde $|\eta_s| \gtrsim 2$ (veja a Figura 2.6) - se reflete diretamente na distribuição de partículas em função da pseudo-rapidez η .

Na Figura 4.5 mostramos as funções de correlação de duas partículas $G(\Delta\phi)$, relação 4.15, e $G(\Delta\eta)$, relação 4.17, obtidas, respectivamente, através das distribuições $dN/d\phi$ e $dN/d\eta$ mostradas na Figura 4.4. Na direção transversal, vemos que existe uma grande probabilidade de se observar uma partícula associada com $\Delta\phi = 0$ ou $\Delta\phi = \pi$. Isso se deve ao fluxo elíptico que cria mais partículas *trigger* e associadas nas posições angulares Ψ_2 e $\Psi_2 + \pi$ (veja a Figura 4.4). Na direção longitudinal a probabilidade é máxima em $\Delta\eta = 0$, o que é uma consequência do grande número de partículas *trigger* e associadas produzidas com $\eta \sim 0$.

Figura 4.5: funções de correlação de duas partículas $G(\Delta\phi)$, relação 4.15, e $G(\Delta\eta)$, relação 4.17, obtidas, respectivamente, através das distribuições $dN/d\phi$ e $dN/d\eta$ mostradas na Figura 4.4.

A contribuição, para a função de correlação, que se origina do fluxo elíptico médio e da distribuição média de partículas em função da pseudo-rapidez é comumente chamada de correlação de fundo. Usualmente, esta contribuição é subtraída da função de correlação total a fim de se evidenciar outras fontes de correlação.

Com essa motivação, definimos a função de correlação resultante C da seguinte forma:

$$C(\Delta\phi, \Delta\eta) \equiv G(\Delta\phi, \Delta\eta) - F(\Delta\phi, \Delta\eta) + \xi, \quad (4.19)$$

em que $F(\Delta\phi, \Delta\eta)$ é a correlação de fundo e ξ é uma constante que deve ser ajustada de modo a fazer o mínimo da função de correlação resultante coincidir com zero⁵. Evidentemente, com essa

⁵De modo análogo ao método ZYAM [28] (*zero yield at minimum*).

definição, a correlação resultante é nula no caso das condições iniciais médias.

Em um cálculo evento a evento, a correlação de fundo pode ser estimada através da técnica dos eventos mistos⁶. Para se formar um evento misto escolhemos as partículas *trigger* e as partículas associadas em eventos distintos. O objetivo desta mistura de partículas entre eventos é separar a correlação de fundo da correlação que se origina das flutuações. Isso é possível através da superposição de uma quantidade suficientemente grande de eventos mistos, uma vez que as contribuições que se originam das flutuações se somam de forma incoerente, por serem estatisticamente independentes de evento para evento, e as contribuições para a correlação de fundo se somam de forma coerente, por estarem relacionadas à forma da distribuição média de matéria.

Assim, a correlação de fundo F pode ser definida da seguinte forma:

$$F(\Delta\phi, \Delta\eta) \equiv \frac{1}{N_{tr}} \sum_{j=1}^{N_{ev}} \int \delta^2(\vec{\rho}_a - \vec{\rho}_t' - (\Delta\phi, \Delta\eta)) f^j(\vec{\rho}_a) g^{(j-1)}(\vec{\rho}_t') d^2\vec{\rho}_a d^2\vec{\rho}_t', \quad (4.20)$$

em que

$$\vec{\rho}_t' = (\eta_t', \phi_t'), \quad (4.21)$$

$$\eta_t' = \eta_t \quad (4.22)$$

e

$$\phi_t' = \phi_t - (\Psi_2^{(j-1)} - \Psi_2^j). \quad (4.23)$$

Em nossa abordagem escolhemos as partículas *trigger* no evento j-1 e as partículas associadas no evento j. Observe que o evento j-1 é girado de modo a fazer com que o ângulo $\Psi_2^{(j-1)}$ coincida com o ângulo Ψ_2^j , o que é fundamental para se somar coerentemente a contribuição do fluxo elíptico durante o processo de superposição dos eventos mistos. Evidentemente, esta rotação não afeta a função de correlação G , pois, neste caso, as partículas *trigger* e as partículas associadas são escolhidas no mesmo evento. Na Figura 4.6 mostramos uma ilustração do processo de cálculo da função de correlação F .

Em colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV a função de correlação resultante apresenta uma forma bastante inesperada se considerarmos uma explicação dentro do contexto de jatos. Na direção azimutal observa-se uma estrutura com três máximos, respectivamente, em $\Delta\phi = 0$, $\Delta\phi \sim 2$ e $\Delta\phi \sim -2$. O máximo posicionado na origem é mais alto e os demais têm a mesma altura [27]. Na direção longitudinal o máximo em $\Delta\phi = 0$ se estende por várias unidades de pseudo-rapidez, dando origem a uma estrutura com a forma de um cume alongado, chamada comumente de *Ridge* [29, 30]. O estudo destas estruturas na função de correlação de duas partículas é o tema principal deste trabalho.

---

⁶De modo análogo ao procedimento experimental.

Figura 4.6: ilustração do processo de cálculo da função de correlação F . Em nossa abordagem escolhemos as partículas *trigger* no evento $j-1$ e as partículas associadas no evento j . Observe que o evento $j-1$ é girado de modo a fazer com que o ângulo $\Psi_2^{(j-1)}$ coincida com o ângulo Ψ_2^j .

De modo geral, mostraremos que a função de correlação obtida pelo modelo com condições iniciais flutuantes, caracterizadas por tubos longitudinais de alta densidade de energia, apresenta todas essas estruturas. Na seção 5.4.1.1 mostraremos a função de correlação resultante para colisões centrais. Nas seções 5.4.1.2 e 5.4.1.3 mostraremos como os tubos longitudinais de alta densidade de energia produzem as estruturas observadas na função de correlação. Na seção 5.4.2 estenderemos o estudo às colisões periféricas, em particular ao efeito *in-plane/out-of-plane*⁷. Na seção 5.4.2.3 mostraremos uma comparação com os dados. Finalmente, na seção 5.4.3 daremos uma explicação para a estrutura de *Ridge* observada recentemente em colisões próton-próton.

⁷Efeito observado na função de correlação quando as partículas *trigger* são escolhidas com momento paralelo ou perpendicular ao plano do evento.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Janelas de centralidade

A centralidade de uma colisão é um parâmetro de grande relevância em colisões de íons pesados, pois, em geral, os observáveis - como por exemplo, a multiplicidade¹, a distribuição de partículas como função da pseudo-rapidez (e do momento transversal), o fluxo elíptico, a função de correlação de duas partículas etc. - dependem deste parâmetro geométrico. A razão para isso é simples uma vez que a distribuição da matéria criada na colisão - que se caracteriza pela distribuição de energia, número bariônico, velocidade etc. - depende da forma da região de interpenetração dos núcleos incidentes.

A centralidade pode ser definida em termos do parâmetro de impacto $\vec{b}$, do número de nucleons participantes N_p , do número de colisões binárias N_{col} , entre outras possibilidades. Em nosso modelo, o número de nucleons participantes é o parâmetro mais adequado, pois está fortemente correlacionado com a multiplicidade que é o observável usado pelos físicos experimentais para se definir as chamadas janelas de centralidade [31].

Assim como o parâmetro de impacto, o número de nucleons participantes está relacionado com a geometria da colisão. Na Figura 5.1, mostramos uma representação geométrica de uma colisão de dois núcleos de raio R , com parâmetro de impacto $\vec{b}$. Na região de interpenetração dos núcleos (região sombreada), os nucleons têm grande probabilidade de interagir (sofrer espalhamento), o que implicará na criação de, praticamente, toda a matéria da colisão. Estes nucleons interagentes são comumente chamados de nucleons participantes. Por outro lado, na região externa, os nucleons têm grande probabilidade de seguir sua trajetória original, portanto, não interagindo. Estes são chamados de nucleons espectadores. Assim, em colisões centrais ($|\vec{b}| \sim 0$), o número de nucleons participantes deve ser grande e o número de espectadores pequeno, e, inversamente, em colisões periféricas ($|\vec{b}| \sim 2R$).

Na Figura 5.2 (esquerda) mostramos a função de correlação entre $|\vec{b}|$ e N_p , calculada com o gerador de eventos Nexus, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Um aspecto

---

¹Número total de partículas produzidas em um evento.

notável neste gráfico é a flutuação de N_p para um valor fixo de $|\vec{b}|$, que surge como consequência do número finito de nucleons tanto no alvo quanto no projétil. Por exemplo, para $|\vec{b}| = 6\text{fm}$, $\delta N_p \sim 40$, o que corresponde à variação de aproximadamente 20% do valor médio ($N_p \sim 198$).

Figura 5.1: representação geométrica de uma colisão de dois núcleos de raio R , com parâmetro de impacto $\vec{b}$. A direção do feixe é a direção do eixo z .

Figura 5.2: correlação entre $|\vec{b}|$ e N_p (esquerda). Distribuição do número de nucleons participantes (direita). Ambos os gráficos calculados com o gerador de eventos Nexus, para colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV.

Como mencionado anteriormente, os físicos experimentais classificam os eventos de acordo com a multiplicidade [31], criando as chamadas janelas de centralidade. Por exemplo, 6% das colisões com maior multiplicidade corresponde à primeira janela (de 0% a 6%), enquanto que 15% das colisões com maior multiplicidade - excluindo-se os eventos da janela anterior - corresponde à segunda janela (de 6% a 15%), e analogamente para as demais frações². Teoricamente, um procedimento similar deve ser feito, usando-se um parâmetro conveniente, que em nosso modelo é o número de nucleons participantes. Então, definimos que 6% das colisões com maior N_p corresponde à primeira janela, sendo o limite inferior N_p (6%) dado, implicitamente, pela equação:

$$C = - \int_{2A}^{N_p(C)} \frac{dN}{dN_p'} dN_p', \quad (5.1)$$

²Esta divisão é meramente convencional. As frações mostradas aqui são as mesmas usadas nos experimentos.

em que $A=197$ é o número de massa do átomo de ouro. A distribuição do número de nucleons participantes dN/dN_p , calculada com o gerador de eventos Nexus, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV, é mostrada na Figura 5.2 (direita). Integrando-se a equação 5.1, encontramos que $N_p(6\%) \sim 300$. Portanto, a primeira janela de centralidade (de 0% a 6%) corresponde ao intervalo em número de nucleons participantes de 300 a 394. Para a janela seguinte (de 6% a 15%), encontramos que $N_p(15\%) \sim 225$, e assim por diante³. Na Tabela 5.1 são mostradas as janelas de centralidade que usaremos para calcular os observáveis nas seções 5.2, 5.3 e 5.5. Na Figura 5.2, as janelas de centralidade estão representadas por linhas pontilhadas horizontais (gráfico da correlação entre $|\vec{b}|$ e N_p) e verticais (distribuição de N_p).

janela	centralidade (%)	centralidade (N_p)
1	0 - 6	300 - 394
2	6 - 15	225 - 300
3	15 - 25	165 - 225
4	25 - 35	115 - 165
5	35 - 45	80 - 115
6	45 - 55	50 - 80

Tabela 5.1: janelas de centralidade que usaremos para calcular os observáveis nas seções 5.2, 5.3 e 5.5.

5.2 Ajuste da distribuição de momento transversal e pseudo-rapidez

No capítulo 2 discutimos os ingredientes básicos do modelo hidrodinâmico: as condições iniciais, calculadas por meio do gerador de eventos Nexus [1]; a equação de movimento, para o caso de um fluido ideal; a equação de estado da matéria [11, 12, 13], composta por uma fase de plasma de quarks e glúons e uma fase hadrônica⁴; o mecanismo de desacoplamento, caracterizado pela prescrição de Cooper-Frye [4]; e o cálculo de decaimento das ressonâncias. Finalmente, na seção 5.1, definimos as janelas de centralidade de forma análoga ao procedimento experimental. Todos estes ingredientes compõem o modelo do programa NexSPheRIO, que usaremos, nesta seção e nas próximas, para calcular os observáveis.

Na Figura 5.3 (gráfico a) mostramos a distribuição de partículas em função da pseudo-rapidez η , na janela de centralidade de (15-25)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [32] e as curvas são os resultados do programa NexSPheRIO [33]. Usamos o método evento a evento com $T_{fo} = 133.0$ MeV. A curva tracejada corresponde ao cálculo no qual as condições iniciais

³Estamos considerando que a relação entre N_p e a multiplicidade é aproximadamente biunívoca. De fato, para um valor fixo de N_p , a flutuação da multiplicidade, em nosso modelo, é da ordem de 5%.

⁴Incluindo a parametrização de um ponto crítico sobre a linha de transição de fase, de modo a criar uma região de *crossover* para pequenos valores de potencial químico bariônico.

do programa Nexus são fornecidas, diretamente, ao programa SPheRIO, sem nenhum tipo de correção ou normalização (C.I. originais). Como podemos ver, claramente, a forma da curva segue a tendência dos dados, ou seja, apresenta um platô central, na região onde $|\eta| \lesssim 2$, e um decréscimo rápido na região onde $|\eta| \gtrsim 2$. Entretanto, na região do platô central, os cálculos estão abaixo dos dados, o que implica numa discrepância na multiplicidade média. Tal discordância acarretará dificuldades quando estudarmos os demais observáveis que dependem, implícita ou explicitamente, do número médio de partículas produzidas. Discutiremos, a seguir, uma maneira de contornar este problema.

Figura 5.3: distribuição de partículas em função da pseudo-rapidez η , na janela de centralidade de (15-25)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV (gráfico a). Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [32] e as curvas são os resultados do programa NexSPheRIO [33]. Usamos o método evento a evento com $T_{fo} = 133.0\text{MeV}$. A curva tracejada corresponde ao cálculo no qual as condições iniciais do programa Nexus são fornecidas, diretamente, ao programa SPheRIO, sem nenhum tipo de correção ou normalização (C.I. originais). A curva contínua corresponde ao cálculo no qual o fator $f(\eta)$ - veja fórmula 5.2 (gráfico b) - foi aplicado, evento a evento, para corrigir a distribuição de densidade de energia inicial (C.I. normalizadas).

Apesar do resultado do programa NexSPheRIO ser, qualitativamente, razoável, a diferença de altura entre ambos os platôs, experimental e teórico, sugere que a densidade de energia inicial, calculada com o gerador de eventos Nexus, é insuficiente para produzir o número de partículas observadas naquela região. Para contornar este problema vamos introduzir um fator dependente de η cuja função é corrigir a distribuição de densidade de energia inicial ao longo do eixo longitudinal⁵, evento a evento. Esta correção deve aumentar a densidade de energia na região central, preservando, no entanto, a estrutura tubular que caracteriza estas condições iniciais (veja a Figura

⁵A fim de correlacionar a pseudo-rapidez das partículas com a distribuição de densidade de energia inicial usamos a aproximação: $\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|\vec{p}| + p_z}{|\vec{p}| - p_z} \right) \simeq \eta_s = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t+z}{t-z} \right)$.

2.6). Isso pode ser feito com uma função constante na região central que decresce, convenientemente, para valores grandes de η (em módulo). Tal função pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$f(\eta) = \frac{B}{\exp(10^3(|\eta| - A)) + 1} + \frac{B \exp(-C(|\eta| - A)^2)}{\exp(-10^3(|\eta| - A)) + 1}, \quad (5.2)$$

em que A,B e C são parâmetros a serem determinados de acordo com a diferença entre os dados e os cálculos. Na Figura 5.3 (gráfico b) mostramos o fator usado para corrigir a discrepância nesta janela de centralidade. Neste gráfico, $A=1.50$, $B=1.105$ e $C=0.055$. Então, partindo da distribuição de densidade de energia inicial corrigida (C.I. normalizadas), podemos recalculer a distribuição de partículas em função da pseudo-rapidez. O resultado se encontra na mesma Figura (gráfico a), linha contínua⁶.

Na Figura 5.4 mostramos os resultados do programa NexSPheRIO para as demais janelas de centralidade. Usamos o método evento a evento com condições iniciais normalizadas. Na Tabela 5.2 estão listados os parâmetros A, B e C.

Figura 5.4: distribuição de partículas em função da pseudo-rapidez, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV, em seis janelas de centralidade. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [32] e as linhas contínuas os resultados do programa NexSPheRIO. Usamos o método evento a evento com condições iniciais normalizadas.

De agora em diante, deve ficar entendido que os resultados do programa NexSPheRIO foram obtidos através de condições iniciais normalizadas, tanto no método evento a evento quanto no método com condições iniciais médias⁷.

Na Figura 5.5 mostramos a distribuição de partículas em função do momento transversal p_t , na janela de centralidade de (15-25)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [34].

⁶Deve-se mencionar que o fator de correção $f(\eta)$ se mostrou, razoavelmente, independente da temperatura de desacoplamento, o que é um resultado conveniente, pois permite o uso desta temperatura como um parâmetro livre.

⁷No método com condições iniciais médias os parâmetros A e C são idênticos aos obtidos com condições iniciais flutuantes (veja a tabela 5.2). No entanto, o parâmetro B é 5% menor, aproximadamente (veja em [11] a discussão da seção II).

As curvas são os resultados do programa NexSPHeRIO para três valores de temperatura de desacoplamento.

janela	centr. (%)	centr. (N_p)	A	B	C	temp. desacopl. (MeV)
1	0 - 6	300 - 394	1.35	1.161	0.047	128.1
2	6 - 15	225 - 300	1.40	1.174	0.050	130.1
3	15 - 25	165 - 225	1.50	1.105	0.055	133.0
4	25 - 35	115 - 165	1.75	1.055	0.065	136.3
5	35 - 45	80 - 115	2.00	0.970	0.071	140.0
6	45 - 55	50 - 80	2.20	0.905	0.076	144.4

Tabela 5.2: temperatura de desacoplamento e valor dos parâmetros A, B e C (veja fórmula 5.2) para todas as janelas de centralidade.

O gráfico mostra que o número de partículas com grande momento transversal ($p_t \gtrsim 2.0\text{GeV}$) aumenta, consideravelmente, conforme se diminui a temperatura de desacoplamento. Tal comportamento indica que, em nosso modelo, a aceleração transversal do fluido é um fator relevante para se reproduzir este tipo de observável. Para entendermos isso vamos analisar, inicialmente, o caso no qual a temperatura de desacoplamento é a mais alta, ou seja, $T_{fo} = 153\text{MeV}$. Vemos que a curva se ajusta bem aos dados na região onde $p_t \lesssim 1.0\text{GeV}$. Entretanto, na região onde $p_t \gtrsim 1.0\text{GeV}$, o resultado apresenta um deficit de partículas que é acentuado conforme se aumenta o momento transversal. Por outro lado, no caso em que usamos o menor valor de T_{fo} , o resultado mostra que, apesar das partículas serem emitidas de regiões mais frias do fluido, o que desfavorece a emissão térmica de partículas rápidas, estas regiões, devido à expansão hidrodinâmica - mais longa que no caso anterior -, têm velocidade transversal suficiente para produzir um número razoável de partículas com momento transversal $p_t \gtrsim 1.0\text{GeV}$, aproximando a curva dos dados.

Figura 5.5: distribuição de partículas em função do momento transversal p_t , na janela de centralidade de (15-25)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [34]. As curvas são os resultados do programa NexSPHeRIO para três valores de temperatura de desacoplamento. Usamos o método evento a evento.

Embora possamos usar a temperatura de desacoplamento para ajustar melhor a distribuição de momento transversal aos dados, este procedimento não se mostrou completamente eficaz para produzir o número de partículas observadas na região de grande p_t ⁸ (veja a Figura 5.5) - em janelas mais centrais é possível obter um ajuste melhor, entretanto, em janelas periféricas a discrepância é grande. Isso se deve, pelo menos em parte, ao fato que em nosso modelo não está incluída a contribuição dos jatos que, certamente, são ingredientes essenciais para se estudar a distribuição de partículas nesta região de p_t . A implementação de modelos que incorporem os ingredientes da física de jatos e os ingredientes do modelo hidrodinâmico é um assunto de grande interesse atual, mas que foge da proposta inicial deste trabalho. De qualquer modo, é importante enfatizar que as partículas produzidas pelo nosso modelo na região de grande p_t ⁹, mesmo sendo uma fração das partículas observadas, desempenham um papel importante no chamado efeito *Ridge*, que é o tema principal da seção 5.4.

Na Figura 5.6 mostramos a distribuição de partículas em função do momento transversal, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV, em seis janelas de centralidade. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [34]. As curvas são os resultados do programa NexSPHeRIO [33, 35]. A temperatura de desacoplamento, em cada janela de centralidade (veja a Tabela 5.2), foi fixada de modo a reproduzir os dados na região onde $p_t \lesssim 2.0$ GeV.

Figura 5.6: distribuição de partículas em função do momento transversal, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV, em seis janelas de centralidade. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [34]. As curvas são os resultados do programa NexSPHeRIO [33, 35]. Usamos o método evento a evento. As temperaturas de desacoplamento estão listadas na Tabela 5.2.

Nesta seção usamos o programa NexSPHeRIO para calcular as distribuições de partículas em função do momento transversal e da pseudo-rapidez. Com isso, “calibramos” o nosso modelo,

⁸De modo geral, o uso de temperaturas mais baixas ($T_{fo} < 133.0$ MeV, no caso desta janela de centralidade), apesar de produzir mais partículas na região onde $p_t \gtrsim 2.0$ GeV, torna a concordância da curva com os dados insatisfatória na região onde $p_t \lesssim 2.0$ GeV.

⁹Chamadas de partículas *trigger*, no estudo da função de correlação de duas partículas.

fixando, para cada janela de centralidade, a distribuição de densidade de energia inicial e a temperatura de desacoplamento. Um resumo se encontra na Tabela 5.2. De agora em diante, usaremos estes parâmetros calibrados para calcular os demais observáveis.

5.3 Fluxo elíptico e suas flutuações

Na seção 4.1 vimos que o parâmetro de fluxo elíptico v_2 é uma medida da anisotropia na distribuição azimutal de partículas. Tal anisotropia se deve, basicamente, à excentricidade inicial da matéria e à expansão hidrodinâmica - ou, pelo menos, a uma expansão com grande movimento coletivo. Nesta seção apresentamos os cálculos de v_2 e de seu desvio padrão relativo, σ_{v_2}/v_2 , ambos em função da centralidade da colisão.

Na Figura 5.7 mostramos o parâmetro de fluxo elíptico v_2 , fórmula 4.8, em função do número de nucleons participantes (centralidade), para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Os quadrados com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [36, 37]. Os símbolos com as respectivas temperaturas de desacoplamento são os resultados do programa NexSPheRIO. Cada símbolo corresponde a uma janela de centralidade¹⁰, definida de acordo com a tabela 5.2. A linha tracejada é um polinômio ajustado aos resultados a fim de melhorar sua visualização. Vemos neste gráfico que $v_2(N_p)$, calculado com o programa NexSPheRIO, apresenta um razoável acordo com os dados.

Figura 5.7: parâmetro de fluxo elíptico v_2 , fórmula 4.8, em função do número de nucleons participantes, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Os quadrados com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [36, 37]. Os símbolos com as respectivas temperaturas de desacoplamento são os resultados do programa NexSPheRIO. Usamos o método evento a evento.

Na Figura 5.8 mostramos o desvio padrão relativo do parâmetro de fluxo elíptico v_2 em função do parâmetro de impacto (esquerda) e em função do número de nucleons participantes (direita),

¹⁰ $v_2^i = v_2^i(\overline{N_p^i})$ para $i = 1, 2, \dots, 6$ e $\overline{N_p^i}$ é o valor médio do número de nucleons participantes na i -ésima janela de centralidade.

para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Os círculos fechados com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração STAR [38] (esquerda) e os círculos abertos os dados da colaboração PHOBOS [36, 37] (direita). Os símbolos com as respectivas temperaturas de desacoplamento são os resultados do programa NexSPheRIO [33]. As linhas tracejadas são polinômios ajustados aos resultados a fim de melhorar sua visualização.

Vemos nestes gráficos que a flutuação do parâmetro de fluxo elíptico em nosso modelo é compatível com os dados¹¹ ($\langle \sigma_{v_2}/v_2 \rangle \sim 40\%$). Deve-se enfatizar que, no programa NexSPheRIO, a flutuação dos observáveis é, principalmente, uma consequência da flutuação das condições iniciais. O efeito adicional devido ao decaimento das partículas é negligenciável uma vez que usamos um número grande de eventos de Monte Carlo no procedimento de desacoplamento (veja a discussão da seção 3.3).

Figura 5.8: desvio padrão relativo do parâmetro de fluxo elíptico v_2 em função do parâmetro de impacto (esquerda) e em função do número de nucleons participantes (direita), para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Os círculos fechados com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração STAR [38] (esquerda) e os círculos abertos os dados da colaboração PHOBOS [36, 37] (direita). Os símbolos com as respectivas temperaturas de desacoplamento são os resultados do programa NexSPheRIO [33].

5.4 Cálculos de correlação de duas partículas - efeito *Ridge*

Na seção 5.3 vimos que observáveis v_2 e σ_{v_2}/v_2 calculados com o programa NexSPheRIO são compatíveis com os dados, o que nos deixa mais seguros acerca da viabilidade das condições iniciais do gerador de eventos Nexus. É importante destacar que a natureza da flutuação em nosso modelo é bastante específica, ou seja, manifesta-se, basicamente, em forma de tubos longitudinais de alta densidade de energia (veja a Figura 2.6). A quantidade bem como as propriedades de cada tubo - energia, raio, posição no plano transversal etc. - são as variáveis que flutuam de evento para evento. Neste contexto, poderíamos nos perguntar se é possível que, depois da superposição de um número

¹¹Em trabalhos anteriores [39, 40] um resultado similar foi mostrado para colisões Au+Au com energia incidente de 130 AGeV.

grande de eventos, algum efeito destas estruturas tubulares sobreviva e se manifeste em algum observável. Nesta seção iniciaremos uma discussão mais detalhada sobre este tema. Mostraremos que, de fato, a evolução hidrodinâmica destes tubos leva a efeitos mensuráveis na função de correlação de duas partículas, em particular, ao chamado efeito *Ridge*, observado recentemente em colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV [27, 29, 30, 41, 42, 43, 44] e em colisões próton-próton com energia incidente de 7 TeV [45].

Dividiremos esta seção em três partes principais: colisões centrais, colisões periféricas e colisões próton-próton. Na primeira parte discutiremos os aspectos mais gerais da função de correlação de duas partículas, para colisões Au+Au, calculada com o programa NexSPheRIO. Introduziremos, também, o chamado modelo de um tubo com o qual mostraremos a conexão entre a estrutura tubular presente nas condições iniciais do gerador de eventos Nexus e a chamada estrutura de *Ridge*. Na segunda parte vamos nos concentrar, principalmente, no chamado efeito *in-plane/out-of-plane*, para colisões Au+Au [44]. Este efeito surge na função de correlação como consequência da excentricidade inicial da matéria e, portanto, manifesta-se apenas nas colisões periféricas. Finalmente, na terceira parte, apresentaremos a nossa interpretação para a estrutura de *Ridge* em colisões próton-próton.

5.4.1 Colisões centrais

5.4.1.1 Resultados do NexSPheRIO

Na Figura 5.9 mostramos a função de correlação total (esquerda), fórmula 4.9, e a função de correlação de fundo (direita), fórmula 4.20, ambas as funções calculadas com o programa NexSPheRIO, na janela de centralidade de (0-6)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. As quantidades $\Delta\phi = \phi_a - \phi_t$ e $\Delta\eta = \eta_a - \eta_t$ são, respectivamente, a diferença de ângulo azimutal e a diferença de pseudo-rapidez, entre o momento da partícula associada e o momento da partícula *trigger*.

Como vimos na seção 4.2, a função de correlação total encerra todos os mecanismos que correlacionam as partículas *trigger* com as partículas associadas. Por outro lado, a função de correlação de fundo contém apenas as contribuições que se originam do fluxo elíptico médio e da distribuição média de partículas em função da pseudo-rapidez (veja a discussão da seção 4.2).

Na Figura 5.10 mostramos a função de correlação resultante [46], que é a diferença entre a função de correlação total e a função de correlação de fundo, fórmula 4.19. Note que esta diferença representa uma pequena fração da correlação total. Vemos, claramente, neste gráfico a estrutura de *Ridge*, ou seja, uma correlação alongada em $\Delta\eta$, na posição azimutal $\Delta\phi = 0$. Outro fato interessante é o surgimento, no lado oposto, de duas estruturas em forma de *Ridge*: uma em $\Delta\phi \sim 2.0$ e outra em $\Delta\phi \sim -2.0$. Infelizmente, ainda não existem dados que mostrem de maneira satisfatória a existência destes *Ridges* opostos. Entretanto, os dados para a correlação integrada em $\Delta\eta$ [27], na região central de rapidez, mostram a existência de dois máximos no lado oposto, aproximadamente, nas mesmas posições em $\Delta\phi$ citadas acima.

Figura 5.9: função de correlação total (esquerda), fórmula 4.9, e função de correlação de fundo (direita), fórmula 4.20, ambas as funções calculadas com o programa NexSPheRIO, na janela de centralidade de (0-6)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. As quantidades $\Delta\phi = \phi_a - \phi_t$ e $\Delta\eta = \eta_a - \eta_t$ são, respectivamente, a diferença de ângulo azimutal e a diferença de pseudo-rapidez, entre o momento da partícula associada e o momento da partícula *trigger*.

Figura 5.10: função de correlação resultante, que é a diferença entre a função de correlação total e a função de correlação de fundo, fórmula 4.19, calculada com o programa NexSPheRIO [46], na janela de centralidade de (0-6)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Em nosso modelo, obtemos três estruturas em forma de *Ridge*, respectivamente, nas posições azimutais: $\Delta\phi = 0$, $\Delta\phi \sim 2.0$ e $\Delta\phi \sim 4.3$ (ou $\Delta\phi \sim -2.0$).

A fim de ilustrar o processo de cálculo da função de correlação resultante mostramos na Figura 5.11 a função de correlação total e a função de correlação de fundo, ambas integradas no intervalo onde $|\Delta\eta| < 2$ com $|\eta| < 1$ (esquerda). Como esperado, a correlação de fundo apresenta a forma característica do fluxo elíptico, ou seja, com um máximo em $\Delta\phi = 0$ e outro em $\Delta\phi \sim \pi$ (veja a Figura 4.5, esquerda). Por outro lado, a função de correlação total engloba a correlação de fundo e a correlação que se origina das flutuações. A função de correlação resultante é mostrada na mesma Figura (direita). O comportamento qualitativo desta curva é exatamente o comportamento

observado nos dados [27].

Figura 5.11: função de correlação total e função de correlação de fundo, ambas integradas no intervalo onde $|\Delta\eta| < 2$ com $|\eta| < 1$ (esquerda). Função de correlação resultante (direita).

5.4.1.2 Modelo de um tubo

O objetivo desta seção é discutir, dentro do contexto do programa NexSPheRIO, o mecanismo que dá origem à estrutura de *Ridge* e à estrutura azimutal da função de correlação. Em princípio, isso parece ser uma tarefa bastante complicada se levarmos em conta a evolução hidrodinâmica complexa das condições iniciais do gerador de eventos Nexus. No entanto, como veremos adiante no texto, o problema é bastante simplificado se nos concentrarmos no comportamento hidrodinâmico dos tubos longitudinais de alta densidade de energia, particularmente, no comportamento dos tubos próximos à superfície da matéria, os quais são componentes essenciais do mecanismo que, ao mesmo tempo, correlaciona as partículas longitudinalmente e produz a estrutura azimutal da função de correlação. Chamaremos os tubos próximos à superfície da matéria de tubos periféricos.

Nosso primeiro passo é entender, em detalhes, como um tubo periférico se expande transversalmente e quais as consequências desta expansão para a matéria que o circunda. Na Figura 5.12 (esquerda) mostramos a distribuição de densidade de energia inicial no plano transversal $\eta_s = 0$, para uma colisão aleatória Au+Au com energia incidente de 200 AGeV (o mesmo evento da Figura 2.6). O tubo localizado em $(x, y) \sim (-4.1, 3.2)$ fm é um exemplo de um tubo periférico.

A fim de estudar a sua expansão transversal faremos duas simplificações. A primeira é considerar que a expansão longitudinal é do tipo invariante de *boost*, o que significa que a densidade de energia inicial em função da rapidez Y é uma constante o que cria a imagem de tubos com comprimento infinito na direção longitudinal (veja a discussão da seção 3.4). A segunda é substituir a matéria na região interna por uma distribuição média cujo perfil é regular e suave, assim, não nos preocuparemos, por enquanto, com os detalhes da expansão dos tubos internos. Devemos enfatizar que o nosso objetivo neste momento não é estudar a evolução hidrodinâmica de um

evento específico, mas estudar o comportamento médio da matéria nas vizinhanças de um tubo periférico. Com isso em mente, podemos parametrizar as condições iniciais da seguinte forma:

$$\epsilon(\vec{r}, Y) = 12 \exp(-0.0004r^5) + \frac{34}{0.845\pi} \exp\left(-\frac{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2}{0.845}\right), \quad (5.3)$$

em que $\vec{r}$ é o raio transversal, Y é a rapidez e $\vec{r}_0 = (5.4, 0)\text{fm}$. O primeiro termo é uma parametrização da matéria na região interna, que chamaremos de matéria de fundo ou, simplesmente, fundo. Este termo está baseado no valor médio da densidade de energia inicial na janela central. O segundo é uma parametrização gaussiana do tubo citado acima. Note que o evento foi girado de modo que a posição deste tubo, no plano transversal, agora recai sobre o eixo Ox. Chamamos esta forma de parametrizar as condições iniciais de modelo de um tubo [47, 48, 49, 50]. Neste modelo a densidade bariônica e a distribuição de velocidade transversal inicial são consideradas nulas.

Figura 5.12: distribuição de densidade de energia inicial no plano transversal $\eta_s = 0$, para uma colisão aleatória Au+Au com energia incidente de 200 AGeV (esquerda). Perfis da distribuição de densidade de energia inicial, ao longo das direções radiais de **a** até **e**. As linhas tracejadas correspondem ao evento aleatório mostrado no gráfico à esquerda. As linhas contínuas foram calculadas através da parametrização 5.3 (direita).

Na Figura 5.12 (direita) apresentamos alguns perfis da distribuição de densidade de energia inicial, ao longo das direções radiais de **a** até **e**. As linhas tracejadas correspondem ao evento aleatório mostrado no gráfico à esquerda. As linhas contínuas foram calculadas através da parametrização 5.3. Observe que a parametrização reproduz de maneira razoável o tubo periférico e suas vizinhanças. Para o fundo, como mencionado, consideramos uma distribuição média de matéria.

Nas Figuras 5.13 e 5.14 mostramos a expansão transversal da matéria no modelo de um tubo [49, 50]. As curvas brancas representam as superfícies de nível, vistas num corte transversal, da

distribuição de densidade de energia. Os vetores indicam a velocidade do fluido¹² em alguns pontos da superfície de desacoplamento. Esta representada pela curva preta (usamos $T_{fo} = 0.14\text{GeV}$).

Figura 5.13: expansão transversal da matéria no modelo de um tubo [49, 50] (continua na Figura 5.14). As curvas brancas representam as superfícies de nível, vistas num corte transversal, da distribuição de densidade de energia. Os vetores indicam a velocidade do fluido em alguns pontos da superfície de desacoplamento. Esta representada pela curva preta (usamos $T_{fo} = 0.14\text{GeV}$).

¹²Nestes gráficos, um vetor com comprimento 2.0fm corresponde à velocidade da luz.

Figura 5.14: expansão transversal da matéria no modelo de um tubo (continuação).

No gráfico para o tempo $\tau = 1.0 \text{ fm}$ vemos a distribuição de densidade de energia dada pela parametrização 5.3. Observe que a velocidade transversal inicial é nula. No início o tubo periférico se expande isotropicamente, assim como a matéria de fundo centrada na origem. A parte do tubo que se propaga em direção à superfície produz, como esperado, partículas com grande momento transversal distribuídas isotropicamente. Por outro lado, a parte que se propaga para dentro colide com o fluxo da matéria interna - veja os gráficos para $\tau = 2.9 \text{ fm}$ e $\tau = 3.5 \text{ fm}$. Devido a esta colisão, uma certa quantidade de matéria começa a se acumular entre a posição original do tubo e a origem, formando uma estrutura com dois braços simétricos. Observe que algumas partículas com grande momento transversal (e com velocidade não radial) são emitidas das extremidades destes braços - veja os gráficos para $\tau = 5.5 \text{ fm}$, $\tau = 6.6 \text{ fm}$ e $\tau = 8.5 \text{ fm}$. Nos instantes seguintes a velocidade da matéria na superfície de desacoplamento começa a diminuir indicando que muitas partículas com pequeno momento transversal são produzidas no fim do processo de expansão.

Na Figura 5.15 (esquerda) mostramos a distribuição azimutal de partículas no modelo de um tubo [47, 49, 50]. Vemos neste gráfico um perfil com dois picos simétricos em relação à origem: um em $\phi \sim 1$ e o outro em $\phi \sim -1$. Vemos, também, que na origem ($\phi \sim 0$) existe uma depressão e que no lado oposto ($\phi \sim \pi$), como esperado, a distribuição é constante. O mesmo comportamento

é observado tanto para as partículas associadas, com $p_t > 1.0\text{GeV}$, quanto para as partículas *trigger*, com $p_t > 2.5\text{GeV}$.

Figura 5.15: distribuição azimutal de partículas no modelo de um tubo [47, 49, 50]. A curva contínua corresponde às partículas associadas, com $p_t > 1.0\text{GeV}$, e a curva tracejada às partículas *trigger*, com $p_t > 2.5\text{GeV}$ (esquerda). Função de correlação de duas partículas, fórmula 4.15, no modelo de um tubo (direita).

Como mostrado na Figura 5.13, algumas partículas rápidas são emitidas das extremidades dos braços simétricos de matéria. Medindo-se o ângulo azimutal formado pela componente transversal do momento destas partículas¹³, encontramos $\phi \sim 1$ para um braço e $\phi \sim -1$ para o simétrico (veja os gráficos para $\tau = 6.6\text{fm}$ e $\tau = 8.5\text{fm}$, principalmente). Evidentemente, essas partículas são as responsáveis pelos dois picos observados na distribuição azimutal.

Para entendermos a depressão em $\phi \sim 0$ dois fatores são importantes. O primeiro é que o fluxo da matéria interna é bloqueado, ou desviado, pela parte do tubo que se propaga para dentro. O segundo é que a parte do tubo que se propaga em direção à superfície não produz partículas num feixe colimado em $\phi \sim 0$, mas distribuídas isotropicamente (veja os gráficos para $\tau = 2.9\text{fm}$ e $\tau = 3.5\text{fm}$). Ambos os fatores contribuem para a falta de partículas na origem da distribuição azimutal. Numa imagem simplificada, a função do tubo periférico é, efetivamente, produzir uma sombra para o fluxo da matéria interna.

Baseando-nos na distribuição azimutal de partículas, podemos antever as características gerais da função de correlação no modelo de um tubo. A fim de simplificar a análise vamos nos concentrar apenas nos picos da distribuição. Então, como é mostrado na Figura 5.15 (esquerda), existe uma grande probabilidade de que uma partícula, tanto *trigger* quanto associada, seja emitida com $\phi \sim 1$ ou $\phi \sim -1$. Consequentemente, no cálculo da função de correlação as combinações mais prováveis são $(1, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. Nestes pares a primeira componente é o ângulo azimutal do momento da partícula *trigger* e a segunda o ângulo azimutal do momento da partícula associada.

¹³Note que a distribuição azimutal é construída no espaço de momentos, ou seja, $\phi = \arctan(p_y/p_x)$.

Observe que todas as combinações têm a mesma probabilidade e que cada uma, em princípio, dá origem a um ponto de máximo (ou pico) na função de correlação. Portanto, observaremos três máximos (ou picos): um em $\Delta\phi = -2$, devido à primeira combinação; um em $\Delta\phi = 2$, devido à segunda combinação; e um, mais alto, em $\Delta\phi = 0$, devido às duas últimas combinações (devemos lembrar que $\Delta\phi = \phi_a - \phi_t$).

Na Figura 5.15 (direita) mostramos a função de correlação integrada. Como vemos o modelo de um tubo reproduz o perfil azimutal da função de correlação¹⁴ (veja a Figura 5.11). Observe, também, que devido à invariância de *boost* do modelo, as estruturas em forma de *Ridge* são obtidas por construção¹⁵.

5.4.1.3 Variação dos parâmetros

Na seção anterior discutimos o modelo de um tubo que consiste numa parametrização das condições iniciais médias e numa parametrização de um tubo típico das condições iniciais do gerador de eventos Nexus. Com esse modelo obtivemos a estrutura azimutal da função de correlação de duas partículas. Nesta seção vamos variar alguns parâmetros do modelo a fim de verificar sua robustez. Mostraremos, também, que a estrutura com dois picos na distribuição azimutal de partículas, de fato, surge no modelo mais geral das condições iniciais do gerador de eventos Nexus.

Um parâmetro conveniente para caracterizar um tubo periférico é o seu conteúdo de energia por unidade de comprimento, que denotaremos por $E = \varepsilon r^2$. As quantidades ε e r , são, respectivamente, a densidade de energia no centro do tubo e o raio do tubo. A motivação para esta definição é que tubos periféricos com o mesmo conteúdo de energia devem produzir efeitos similares na função de correlação.

Na Figura 5.16 (esquerda) mostramos a função de correlação no modelo de um tubo para vários valores de r (de 0.4 a 0.9fm) [50]. Neste gráfico, o conteúdo de energia foi fixado em $E = 8.1\text{GeV/fm}$. Observe que a variação do raio do tubo de 0.9 para 0.7fm, a qual implica em um aumento na densidade de energia ε de 70%, não muda a forma global da função de correlação - o ângulo entre os picos é ligeiramente deslocado e a altura do pico central sofre uma redução de apenas 20%. No caso do tubo com o menor raio, $r = 0.4\text{fm}$, ainda é possível ver a estrutura azimutal da função de correlação.

Na mesma Figura (direita) mostramos uma comparação análoga à discutida acima. Neste gráfico, a densidade de energia no centro do tubo foi fixada em $\varepsilon = 10\text{GeV/fm}^3$. Note que, agora, a variação do raio do tubo de 0.9 para 0.7fm implica numa redução da altura dos picos de quase 80% e o espaçamento entre eles é reduzido substancialmente. No caso do tubo com o menor raio, $r = 0.4\text{fm}$, não se observa mais a estrutura de *Ridge* do lado oposto (todos os picos aparecem na região onde $\Delta\phi \lesssim \pi/2$).

¹⁴No modelo de um tubo as partículas são produzidas no intervalo finito onde $\eta_s < 0.25$.

¹⁵No modelo de um tubo, a noção de evento pode ser criada variando-se a posição do tubo sobre uma mesma circunferência. A correlação de fundo, calculada através da técnica dos eventos mistos, é uma constante neste caso devido à simetria das condições iniciais na janela central.

Figura 5.16: função de correlação no modelo de um tubo para vários valores de r (de 0.4 a 0.9 fm) [50]. No gráfico à esquerda o conteúdo de energia foi fixado em $E = 8.1 \text{ GeV/fm}$. No gráfico à direita a densidade de energia no centro do tubo foi fixada em $\varepsilon = 10 \text{ GeV/fm}^3$.

Na Figura 5.17 mostramos a função de correlação no modelo de um tubo para vários valores de temperatura de desacoplamento (de 130 a 150 MeV). Usamos um tubo com raio $r = 0.9 \text{ fm}$ e com conteúdo de energia $E = 8.1 \text{ GeV/fm}$. Como esperado, a altura da função de correlação é reduzida quando se aumenta a temperatura de desacoplamento (ou, de forma equivalente, quando se diminui o tempo de expansão da matéria). No entanto, a estrutura azimutal com três *Ridges* é preservada para uma larga variação deste parâmetro.

Figura 5.17: função de correlação no modelo de um tubo para vários valores de temperatura de desacoplamento (de 130 a 150 MeV). Usamos um tubo com raio $r = 0.9 \text{ fm}$ e com conteúdo de energia $E = 8.1 \text{ GeV/fm}$.

Na Figura 5.18 mostramos a altura do pico da função de correlação, em $\Delta\phi = 0$, como função da posição do tubo no plano transversal [50]. Observe que a altura do pico satura entre 6 e 8fm; e decresce rapidamente para pequenas distâncias do centro. Com isso, concluímos que apenas os tubos periféricos são relevantes para criar as estruturas na função de correlação, o que confirma a nossa hipótese inicial.

Figura 5.18: altura do pico da função de correlação, em $\Delta\phi = 0$, como função da posição do tubo no plano transversal [50].

Na Figura 5.15 (esquerda) mostramos que no modelo de um tubo a distribuição azimutal de partículas nas vizinhanças de um tubo periférico é caracterizada por um vale ladeado por dois picos. Em um modelo mais complexo com muitos tubos, como é o caso das condições iniciais do gerador de eventos Nexus, é importante mostrar que o mesmo mecanismo está presente. Isso pode ser feito calculando-se a correlação entre os tubos periféricos e as partículas associadas, ou seja, calculando-se a probabilidade de se observar uma partícula associada na posição angular $\Delta\Phi = \phi_a - \phi_{\text{tubo}}$, analogamente ao procedimento que usamos para estimar a correlação entre as partículas *trigger* e as partículas associadas¹⁶. Observe que $\Delta\Phi = 0$ é a posição angular do tubo periférico.

Na Figura 5.19 mostramos a distribuição de densidade de energia inicial no plano transversal $\eta_s = 0$, para uma colisão Au+Au aleatória com energia incidente de 200 AGeV, na janela de centralidade de (0-6)%. Escolhemos seis tubos periféricos neste evento (tubos afastados do centro com conteúdo de energia maior que 10 GeV/fm). A função que estima a correlação, neste evento, entre os tubos periféricos e as partículas associadas encontra-se na Figura 5.20 (esquerda). Para analisarmos este gráfico é conveniente dividi-lo em duas regiões: a região onde $|\Delta\Phi| \lesssim \pi/2$, na qual a superposição dos efeitos dos tubos periféricos sobre a distribuição azimutal de partículas

¹⁶Neste tipo de cálculo substituímos a distribuição azimutal de partículas *trigger*, $dN_t/d\phi_t$, pela distribuição azimutal de tubos periféricos, $dN_{\text{tubo}}/d\phi_{\text{tubo}}$ (veja a fórmula 4.15).

é feita de forma coerente, e a região onde $|\Delta\Phi| \gtrsim \pi/2$, na qual a superposição é incoerente. Na primeira região podemos ver, claramente, que existe um vale em $\Delta\Phi = 0$ ladeado por dois picos, respectivamente, em $\Delta\Phi \sim 1$ e $\Delta\Phi \sim -1$, o que é um resultado compatível com o modelo de um tubo. Na segunda região vemos algumas oscilações espúrias que surgem da superposição incoerente citada acima. Tal incoerência ocorre porque tanto a quantidade de tubos periféricos como a distância angular relativa entre eles são variáveis aleatórias, independentes de evento para evento. Nesta região esperamos que depois da superposição de um número suficientemente grande de eventos a curva convirja para uma constante. Na mesma Figura (direita) mostramos a função de correlação de duas partículas para o evento com seis tubos periféricos. Observe que a estrutura azimutal com três picos já pode ser observada, com a exceção de algumas oscilações espúrias. Estas oscilações surgem da correlação cruzada entre as partículas *trigger* e as partículas associadas produzidas por tubos distintos. Este tipo de correlação se superpõe de forma incoerente e deve se anular para um número suficientemente grande de eventos.

Figura 5.19: distribuição de densidade de energia inicial no plano transversal $\eta_s = 0$, para uma colisão Au+Au aleatória com energia incidente de 200 AGeV, na janela de centralidade de (0-6)%. Escolhemos seis tubos periféricos neste evento (tubos afastados do centro com conteúdo de energia maior que 10 GeV/fm).

Na Figura 5.21 (esquerda) mostramos a função que estima a correlação, em média, entre os tubos periféricos e as partículas associadas, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV e parâmetro de impacto $b = 0$ fm. Fizemos a superposição de 700 eventos nos quais foram contabilizados 2500 tubos periféricos. Claramente, vemos que as oscilações espúrias foram anuladas e apenas a estrutura com um vale e dois picos sobreviveu. Esse resultado mostra que, independentemente da complexidade da distribuição de matéria na região interna, nas vizinhanças de um tubo periférico o comportamento hidrodinâmico do fluido é muito bem aproximado pelo

modelo de um tubo. A função de correlação de duas partículas média é mostrada na mesma Figura (direita). Naturalmente, a estrutura azimuthal com três picos também é recuperada.

Figura 5.20: função que estima a correlação, para o evento mostrado na Figura 5.19, entre os tubos periféricos e as partículas associadas (esquerda). Função de correlação de duas partículas para o mesmo evento (direita). Nestes cálculos supomos que a expansão longitudinal é do tipo invariante de *boost*.

Figura 5.21: função que estima a correlação, em média, entre os tubos periféricos e as partículas associadas, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV e parâmetro de impacto $b = 0$ fm. Fizemos a superposição de 700 eventos nos quais contabilizamos 2500 tubos periféricos (esquerda). Função de correlação de duas partículas média (direita). Nestes cálculos supomos que a expansão longitudinal é do tipo invariante de *boost*.

5.4.2 Colisões periféricas - efeito *in-plane/out-of-plane*

5.4.2.1 Resultados do NexSPheRIO

Nesta seção vamos estender os estudos da função de correlação de duas partículas às colisões periféricas. Na Figura 5.22 mostramos a função de correlação resultante, fórmula 4.19, calculada com o programa NexSPheRIO [48], na janela de centralidade de (20-30)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV. Novamente, obtemos três estruturas em forma de *Ridge*, respectivamente, nas posições azimutais: $\Delta\phi = 0$, $\Delta\phi \sim 2.0$ e $\Delta\phi \sim 4.3$. Observe que existe uma redução da altura destas estruturas em relação aos resultados na janela central (veja a Figura 5.10), o que é esperado, pois o número de partículas associadas é menor nas janelas periféricas (veja a Figura 5.6).

Figura 5.22: função de correlação resultante, fórmula 4.19, calculada com o programa NexSPheRIO [48], na janela de centralidade de (20-30)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV.

Um efeito interessante que tem sido observado em colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV é a dependência da função de correlação de duas partículas em relação ao ângulo ϕ_s , que é definido como o ângulo azimutal do momento da partícula *trigger* em relação ao plano do evento, ou seja, $\phi_s = \phi_t - \Psi_2$ (uma discussão sobre o conceito de plano do evento é feita na seção 4.1). Os dados¹⁷ mostram que, se o ângulo ϕ_s está próximo de 0° , a estrutura do lado oposto da função de correlação apresenta apenas um ponto de máximo em $\Delta\phi = \pi$. Conforme ϕ_s varia de 0° a 90° , este ponto de máximo se torna um ponto de mínimo ladeado por dois pontos de máximo simetricamente posicionados [44]. Esse é o chamado efeito *in-plane/out-of-plane*.

Na Figura 5.23 mostramos a função de correlação resultante para vários intervalos de ϕ_s , calculada com o programa NexSPheRIO [48], na janela de centralidade de (20-30)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV. Observe que a estrutura do lado oposto evolui de um *Ridge* para dois, conforme o ângulo ϕ_s varia de 0° a 90° , o que é um resultado compatível com

¹⁷Medidos na região central de rapidez (região onde $|\eta| < 1$) [44].

a observação experimental na região central de rapidez [44]. Na seção 5.4.2.3 faremos uma comparação sistemática dos nossos resultados, para correlação *in-plane/out-of-plane*, com os dados. Na seção 5.4.2.2 vamos dar uma interpretação para este efeito através do modelo de um tubo, adaptado às colisões periféricas.

Figura 5.23: função de correlação resultante para vários intervalos de ϕ_s ($\phi_s = \phi_t - \Psi_2$), calculada com o programa NexSPheRIO [48], na janela de centralidade de (20-30)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. De cima para baixo e da esquerda para direita: C1 ($0^\circ < \phi_s < 15^\circ$), C2 ($15^\circ < \phi_s < 30^\circ$), C3 ($30^\circ < \phi_s < 45^\circ$), C4 ($45^\circ < \phi_s < 60^\circ$), C5 ($60^\circ < \phi_s < 75^\circ$) e C6 ($75^\circ < \phi_s < 90^\circ$). Evidentemente, integrando-se a função de correlação em ϕ_s obtemos o resultado mostrado na Figura 5.22.

5.4.2.2 Modelo de um tubo

Na seção 5.4.1.2 introduzimos o modelo de um tubo, que é uma ferramenta importante para se entender a expansão hidrodinâmica da matéria nas vizinhanças de um tubo de alta densidade de energia periférico. Neste modelo, a distribuição de matéria criada pelo gerador de eventos Nexus é substituída por uma distribuição suave e o tubo periférico é colocado em alguma posição ao longo de uma curva de densidade de energia constante próxima à superfície. Para a expansão longitudinal supomos um fluxo do tipo invariante de *boost*. O objetivo desta seção é dar uma interpretação, através do modelo de um tubo, para correlação *in-plane/out-of-plane* obtida com o programa NexSPheRIO (veja a seção 5.4.2.1).

Na Figura 5.24 (esquerda) mostramos a distribuição de densidade de energia no modelo de um tubo para uma colisão não central [51]. A matéria de fundo é uma média da distribuição de densidade de energia na janela de centralidade de (20-30)%, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV. O tubo periférico é colocado em algum ponto sobre a curva de nível $\epsilon_{\text{fundo}} \sim 1 \text{ GeV/fm}^3$ (neste gráfico $\phi_{\text{tubo}} = 60^\circ$). Usamos um tubo com conteúdo de energia $E \sim 7 \text{ GeV/fm}$, que é um valor compatível com o conteúdo de energia típico dos tubos produzidos pelo gerador de eventos Nexus, na mesma janela de centralidade (veja a Figura à direita).

Figura 5.24: distribuição de densidade de energia no modelo de um tubo para uma colisão não central. O tubo foi colocado sobre a curva de nível $\epsilon_{\text{fundo}} \sim 1 \text{ GeV/fm}^3$, na posição angular $\phi_{\text{tubo}} = 60^\circ$ (esquerda). Distribuição de conteúdo de energia para tubos periféricos característicos das condições iniciais do gerador de eventos Nexus, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV, na janela de centralidade de (20-30)%. Os tubos usados para a construção deste histograma foram selecionados, em cada evento, da região transversal limitada pelas elipses $r_1 = 5.18/R_n$ e $r_2 = 5.81/R_n$, em que $R_n = \sqrt{1.74 \cos(\phi - (\Psi_2)_n)^2 + \sin(\phi - (\Psi_2)_n)^2}$ e $(\Psi_2)_n$ é o ângulo do plano do evento associado ao n -ésimo evento (veja a relação 4.7).

Neste modelo, cada evento é construído escolhendo-se aleatoriamente a posição do tubo sobre a

mesma curva de nível (neste caso, dada por $\epsilon_{\text{tubo}} \sim 1\text{GeV}/\text{fm}^3$). O cálculo da correlação de fundo segue o procedimento discutido na seção 4.2, com exceção do alinhamento dos eventos mistos que aqui não é necessário.

A parametrização da distribuição de densidade de energia inicial para o evento com $\phi_{\text{tubo}} = 60^\circ$ é dada por:

$$\epsilon(\vec{r}) = 10.8 \exp \left[- \left(\frac{1.74x^2 + y^2}{(4.35)^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right] + 6.2 \exp \left[\frac{-(x - 2.7)^2 - (y - 4.6)^2}{(1.0)^2} \right]. \quad (5.4)$$

Analogamente ao caso central, a densidade bariônica e a distribuição de velocidade transversal inicial são consideradas nulas.

Na Figura 5.25 mostramos a distribuição azimutal de partículas associadas, $p_t > 1.0\text{GeV}$, e de partículas *trigger*, $p_t > 2.5\text{GeV}$, no modelo de um tubo [51]. As curvas contínuas correspondem a sete eventos distintos. Em cada evento o ângulo ϕ_{tubo} é um múltiplo de 15° . As curvas tracejadas correspondem à distribuição média, obtida sobre um conjunto suficientemente grande de eventos. Observe que o comportamento da curva contínua é idêntico tanto para as partículas *trigger* quanto para as partículas associadas, ou seja, existe, em relação à distribuição média, um deficit de partículas na posição angular do tubo e um excesso que ladeia esta posição. Isso mostra que o efeito do tubo em janelas periféricas é similar ao que encontramos na janela central, ou seja, o tubo produz uma sombra para o fluxo da matéria interna (veja a Figura 5.15, esquerda).

Devido à forma não circular da matéria de fundo, o efeito da expansão do tubo sobre a distribuição azimutal de partículas depende da sua posição angular, como é mostrado na Figura 5.25. Portanto, é conveniente estudar separadamente a contribuição de cada um destes eventos para a função de correlação de duas partículas. Começaremos a nossa análise com a correlação *in-plane*, na qual as partículas *trigger* são escolhidas nos intervalos: $0^\circ < \phi_s < 15^\circ$, $165^\circ < \phi_s < 195^\circ$ e $345^\circ < \phi_s < 360^\circ$ (de maneira compacta representamos esta região angular como $0^\circ < \phi_s < 15^\circ$). Por questão de simplicidade, vamos separar os eventos em dois conjuntos: os eventos que dão origem a um máximo na posição $\Delta\phi = 0$ e os eventos que dão origem a um mínimo nesta posição. Para o primeiro conjunto, devemos escolher os eventos nos quais a curva contínua está acima da curva tracejada na região de ângulo azimutal definida por: $-15^\circ < \phi < 15^\circ$. Para o segundo conjunto, devemos escolher os eventos nos quais a curva contínua está abaixo da curva tracejada na mesma região angular.

Na Figura 5.26 mostramos a função de correlação de duas partículas que engloba os eventos do primeiro conjunto, com $\phi_{\text{tubo}} = 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ e 90° (esquerda)¹⁸, e que engloba os eventos do segundo conjunto, com $\phi_{\text{tubo}} = 0^\circ, 15^\circ$ e 30° (centro). No caso do primeiro conjunto, a estrutura da função de correlação pode ser entendida da seguinte forma: quando as partículas *trigger* são escolhidas na região onde $\phi \sim 0$, o excesso de partículas nesta região, em relação ao valor médio, se manifesta em $\Delta\phi = 0$ como um ponto de máximo. Por outro lado, quando as partículas *trigger*

¹⁸Deve ficar entendido que os eventos simétricos já estão incluídos na função de correlação. Por exemplo, os eventos simétricos ao evento com $\phi_{\text{tubo}} = 60^\circ$ são os eventos com $\phi_{\text{tubo}} = 120^\circ, 240^\circ$ e 300° .

são escolhidas na região onde $\phi \sim \pi$, o excesso de partículas em $\phi \sim 0$ se manifesta em $\Delta\phi = \pi$ como um segundo ponto de máximo. Observe que o papel principal do tubo nestes eventos é criar partículas extras ao longo do plano de evento. No caso do segundo conjunto, a análise é similar se considerarmos que agora existe, em relação à média, um deficit de partículas em $\phi \sim 0$, o que dá origem a uma curva com a forma invertida. Na mesma Figura (direita) mostramos a função de correlação integrada (soma de todos os eventos). Como se pode ver, claramente, a estrutura é exatamente a observada no cálculo com programa NexSheRIO (veja a Figura 5.23, C1). Note que o primeiro grupo tem um peso maior uma vez que engloba mais eventos.

Figura 5.25: distribuição azimutal de partículas associadas, $p_t > 1.0\text{GeV}$, e de partículas *trigger*, $p_t > 2.5\text{GeV}$, no modelo de um tubo [51]. As curvas contínuas correspondem a sete eventos distintos. Em cada evento o ângulo ϕ_{tubo} é um múltiplo de 15° . As curvas tracejadas correspondem à distribuição média, obtida sobre um conjunto suficientemente grande de eventos.

Para a correlação *out-of-plane*, na qual as partículas *trigger* são escolhidas nos intervalos: $75^\circ < \phi_s < 105^\circ$ e $255^\circ < \phi_s < 285^\circ$, os eventos que dão origem a um ponto de máximo na posição $\Delta\phi = 0$, que formam o primeiro conjunto, são os eventos com $\phi_{\text{tubo}} = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ e 60° e os eventos que dão origem a um ponto de mínimo nesta posição, que formam o segundo conjunto, são os eventos com $\phi_{\text{tubo}} = 75^\circ$ e 90° .

Na Figura 5.27 mostramos a função de correlação de duas partículas que engloba os eventos do primeiro conjunto (esquerda) e que engloba os eventos do segundo conjunto (centro). No caso do primeiro conjunto, vemos que a forma da curva é próxima do comportamento esperado, ou seja, apresenta pontos de máximo em $\Delta\phi \sim -2$ e $\Delta\phi \sim 2$. Basicamente, a diferença em relação à correlação *in-plane* é que, neste caso, o excesso, em relação ao valor médio, de partículas produzidas ao longo do plano do evento (veja, principalmente, os eventos com $\phi_{\text{tubo}} = 30^\circ, 45^\circ$ e 60°) se manifesta na posição $\Delta\phi \sim \pi/2$ (ou $\Delta\phi \sim -\pi/2$), uma vez que as partículas *trigger* são escolhidas na região onde $\phi \sim \pi/2$ (ou $\phi \sim -\pi/2$). No caso do segundo conjunto, a análise é similar à que fizemos para a correlação *in-plane*. Na mesma Figura (direita) mostramos a função de correlação integrada. Novamente, a estrutura é exatamente a observada no cálculo com programa NexSheRIO (veja a Figura 5.23, C6).

Figura 5.26: função de correlação *in-plane*, para o primeiro conjunto de eventos, com $\phi_{\text{tubo}} = 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$ e 90° (esquerda) e para o segundo conjunto de eventos, com $\phi_{\text{tubo}} = 0^\circ, 15^\circ$ e 30° (centro). Função de correlação integrada - soma de todos os eventos (direita).

Figura 5.27: função de correlação *out-of-plane*, para o primeiro conjunto de eventos, com $\phi_{\text{tubo}} = 0^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ e 60° (esquerda) e para o segundo conjunto de eventos, com $\phi_{\text{tubo}} = 75^\circ$ e 90° (centro). Função de correlação integrada (direita).

5.4.2.3 Comparação com os dados

Até o momento a discussão a respeito do efeito *Ridge* e do efeito *in-plane/out-of-plane* foi feita qualitativamente. Nesta seção vamos usar os parâmetros fixados na Tabela 5.2, basicamente, a densidade de energia inicial e a temperatura de desacoplamento, para fazer uma comparação quantitativa da estrutura azimutal da função de correlação obtida pelo nosso modelo com os dados.

Na Figura 5.28 mostramos a função de correlação de duas partículas na direção azimutal, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV, na janela de centralidade de (20-60)%. Os pontos com as respectivas incertezas são os dados da colaboração STAR [44] e as curvas são os resultados do programa NexSPheRIO [52]. Os gráficos estão dispostos numa matriz com quatro linhas e seis colunas. Cada linha corresponde a um intervalo de momento transversal das partículas associadas e cada coluna a um intervalo do ângulo azimutal $\phi_s = \phi_t - \Psi_2$, que, como vimos, é o ângulo azimutal do momento da partícula *trigger* em relação ao plano do evento.

Figura 5.28: função de correlação de duas partículas na direção azimutal, para colisões Au+Au com energia incidente de 200A GeV, na janela de centralidade de (20-60)%. Os pontos com as respectivas incertezas são os dados da colaboração STAR [44] e as curvas são os resultados do programa NexSPheRIO [52]. Os gráficos estão dispostos numa matriz com quatro linhas e seis colunas. Cada linha corresponde a um intervalo de momento transversal das partículas associadas e cada coluna a um intervalo do ângulo azimutal $\phi_s = \phi_t - \Psi_2$, que, como vimos, é o ângulo azimutal do momento da partícula *trigger* em relação ao plano do evento.

Vemos nestes gráficos que os resultados do programa NexSPheRIO estão em razoável acordo com os dados. A estrutura do lado oposto da função de correlação sofre uma transição de um máximo para dois quando o ângulo ϕ_s é deslocado do intervalo $0^\circ < \phi_s < 15^\circ$, *in-plane*, para o intervalo $75^\circ < \phi_s < 90^\circ$, *out-of-plane*. Além disso, conforme o momento das partículas

associadas diminui, a diferença de alturas entre o máximo em $\Delta\phi = 0$ e a correlação do lado oposto, em $\Delta\phi \sim \pi$, também diminui, seguindo a tendência dos dados. Isso indica que o número de partículas associadas produzidas nas vizinhanças da partícula *trigger* diminui quando o momento da partícula associada é muito pequeno. Isso é natural em nosso modelo, pois as regiões do fluido com grande velocidade transversal, e que, portanto, produzem as partículas *trigger*, têm uma pequena probabilidade de produzir partículas com pequeno p_t . Na região onde $0.5 < p_t < 1.5\text{GeV}$ e $45^\circ < \phi_s < 90^\circ$ o nosso modelo apresenta um excesso de partículas associadas em $\Delta\phi = 0$.

5.4.3 Uma proposta para próton-próton

Recentemente, foi observada a estrutura de *Ridge* em colisões próton-próton com energia incidente de 7TeV. De acordo com os dados da colaboração CMS [45], colisões com multiplicidade alta apresentam uma estrutura de *Ridge* na posição azimutal $\Delta\phi = 0$, que surge mais claramente na região de momento transversal onde $1.0 < p_t < 3.0\text{GeV}$. O objetivo desta seção é mostrar como esta estrutura pode ser reproduzida através do nosso modelo de tubos longitudinais. Vamos considerar condições iniciais, para colisões próton-próton, formadas apenas por dois tubos, o que pode acontecer em alguma fração dos eventos observados. Provavelmente, as configurações com um tubo sejam as mais comuns e as configurações com três tubos as mais raras.

Na Figura 5.29 mostramos uma configuração com dois tubos parametrizados de acordo com as condições iniciais do gerador de eventos EPOS [53], cujas condições iniciais mostram tipicamente um tubo com uma seção transversal elíptica ou dois tubos com uma distância de aproximadamente 0.6fm entre si¹⁹. As curvas brancas representam as superfícies de nível, vistas num corte transversal, da distribuição de densidade de energia. Os vetores indicam a velocidade do fluido²⁰ em alguns pontos da superfície de desacoplamento. Esta representada pela curva preta (usamos $T_{fo} = 0.14\text{GeV}$). Na direção longitudinal supomos um fluxo com invariância de *boost* [54].

Figura 5.29: expansão transversal da matéria no modelo de dois tubos para colisões próton-próton [54] (continua na figura 5.30).

¹⁹Como pode ser visto em [1], o gerador de eventos Nexus não produz flutuações nas condições iniciais para colisões próton-próton. Com este gerador, obtém-se apenas um tubo de fluxo com seção transversal circular, o que, claramente, não produz a estrutura de *Ridge*.

²⁰Nestes gráficos, um vetor com comprimento 1.0fm corresponde à velocidade da luz.

Figura 5.30: expansão transversal da matéria no modelo de dois tubos para colisões próton-próton [54] (continuação). As curvas brancas representam as superfícies de nível, vistas num corte transversal, da distribuição de densidade de energia. Os vetores indicam a velocidade do fluido em alguns pontos da superfície de desacoplamento. Esta representada pela curva preta (usamos $T_{fo} = 0.14\text{GeV}$). Os tubos foram parametrizados de acordo com as condições iniciais do gerador de eventos EPOS [53].

Inicialmente os dois tubos começam a se expandir de forma radial. Após algum tempo, colidem entre si, fazendo com que a matéria na região interna se expanda em dois sentidos opostos. Esse processo produz uma distribuição azimutal de partículas com dois máximos separados pela distância de π (veja a Figura 5.31, esquerda). Note que este tipo de fluxo é similar ao fluxo elíptico, mas com picos mais estreitos. Nesta situação, a função de correlação de duas partículas, naturalmente, apresenta uma estrutura com dois *Ridges*: um em $\Delta\phi = 0$ e outro em $\Delta\phi = \pi$ (veja a Figura 5.31, direita).

Figura 5.31: distribuição azimutal de partículas associadas no modelo de dois tubos para colisões próton-próton (esquerda). Função de correlação de duas partículas (direita) [54].

Nos dados da colaboração CMS [45], a estrutura de *Ridge* do lado oposto não é mencionada. Em nossa interpretação, isso ocorre porque é difícil ver a contribuição do *Ridge*, uma vez que as contribuições dos jatos dominam as correlações.

5.5 Efeito das condições iniciais flutuantes evento a evento na distribuição de momento transversal e no fluxo elíptico

Na seção 5.4.1.2 discutimos alguns efeitos dos tubos periféricos de alta densidade de energia. Em particular, vimos que durante a sua expansão transversal metade de sua matéria se propaga em direção à superfície emitindo partículas com grande momento transversal distribuídas isotropicamente (veja a Figura 5.13). Nesta seção mostraremos que os tubos periféricos são importantes, também, para a distribuição de partículas em função do momento transversal e para o fluxo elíptico. Faremos isso comparando os resultados obtidos através do método evento a evento com os obtidos através do método com condições iniciais médias (veja a discussão da seção 2.3). Em princípio, esperamos que no método evento a evento a distribuição de partículas em função do momento transversal seja mais côncava apresentando mais partículas na região em que $p_t \gtrsim 2.0\text{GeV}$, principalmente. Outro efeito interessante deve se manifestar no parâmetro de fluxo elíptico v_2 . Neste, esperamos uma redução, na mesma região de momento transversal, devido à isotropia das partículas emitidas pelos tubos periféricos.

Figura 5.32: distribuição de partículas em função do momento transversal, na janela de centralidade de (6-15)% (esquerda) e (35-45)% (direita), para colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [34]. As curvas são os resultados do programa NexSPHeRIO [35]. As curvas contínuas correspondem ao cálculo evento a evento e a curvas tracejadas ao cálculo com condições iniciais médias.

Na Figura 5.32 mostramos a distribuição de partículas em função do momento transversal, na janela de centralidade de (6-15)% (esquerda) e (35-45)% (direita), para colisões Au+Au com energia incidente de 200AGeV. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [34]. As curvas são os resultados do programa NexSPHeRIO [35]. As curvas contínuas correspondem ao cálculo evento a evento e as curvas tracejadas ao cálculo com condições iniciais médias. Vemos claramente nestes gráficos que, como esperado, o número de

partículas com grande momento transversal aumenta quando usamos o método evento a evento - a curva é mais côncava e mais próxima dos dados²¹.

Na Figura 5.33 mostramos o parâmetro de fluxo elíptico v_2 em função do momento transversal²² (esquerda) e em função da pseudo-rapidez (direita), para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [55]. As curvas são os resultados do programa NexSPheRIO [35]. A curva contínua corresponde ao cálculo evento a evento e a curva tracejada ao cálculo com condições iniciais médias.

Figura 5.33: parâmetro de fluxo elíptico v_2 em função do momento transversal (esquerda) e em função da pseudo-rapidez (direita), para colisões Au+Au com energia incidente de 200 AGeV. Os símbolos com as respectivas barras de incerteza são os dados da colaboração PHOBOS [55]. As curvas são os resultados do programa NexSPheRIO [35]. A curva contínua corresponde ao cálculo evento a evento e a curva tracejada ao cálculo com condições iniciais médias.

No caso de v_2 em função do momento transversal, vemos que ambos os resultados apresentam uma discrepância na região onde $p_t \gtrsim 2.0$ GeV. Entretanto, o resultado evento a evento está mais próximo dos dados. Claramente, isso é um efeito da expansão dos tubos periféricos que, como mencionado acima, reduz o fluxo elíptico nesta região. Outro efeito importante é o da emissão contínua [56, 57, 3], mas isso está fora do objetivo deste trabalho.

No caso de v_2 em função da pseudo-rapidez - para três janelas de centralidade (indicadas no gráfico) - o cálculo com condições iniciais médias, em acordo com os cálculos hidrodinâmicos usuais [58, 59, 60], apresenta um perfil com dois “ombros” na região onde $|\eta| \sim 3$. Com a introdução das estruturas tubulares nas condições iniciais, esses “ombros” são atenuados consideravelmente. Isso é uma consequência de dois fatores. O primeiro é que a expansão isotrópica dos tubos reduz

²¹Resultados similares também foram mostrados em [11].

²²Uma vez que a janela de centralidade de (0-50)% é consideravelmente grande, algumas observações devem ser feitas. No caso do cálculo evento a evento, a temperatura de desacoplamento de cada evento foi determinada de acordo com o respectivo número de nucleons participantes (veja a Tabela 5.2). No caso do cálculo com condições iniciais médias, construímos seis eventos, com seis condições iniciais médias, uma para cada janela de centralidade. Calculamos, então, a evolução hidrodinâmica de cada evento médio, com a respectiva temperatura de desacoplamento. O resultado final corresponde à média destes seis eventos.

o fluxo elíptico principalmente na região de grande η (em módulo), uma vez que, nesta região, a matéria que circunda os tubos é rarefeita não sendo, portanto, capaz de absorver a expansão destes objetos. O segundo é que a determinação do plano do evento maximiza o fluxo elíptico na região de pequeno η (em módulo). Isso ocorre devido ao peso maior desta região no cálculo do ângulo Ψ_2 (veja a fórmula 4.7). Ambos os fatores tornam as curvas mais triangulares e, portanto, mais próximas dos dados.

Capítulo 6

Conclusão

Neste trabalho fizemos um estudo detalhado dos efeitos das condições iniciais flutuantes, para a hidrodinâmica, sobre a distribuição de partículas em função do momento transversal, sobre o fluxo elíptico e sobre a função de correlação de duas partículas. As condições iniciais em nosso modelo são obtidas através do gerador de eventos Nexus, o qual é capaz de fornecer, numa hiper-superfície de tempo próprio, as distribuições de densidade de energia, número bariônico e velocidade. A característica principal destas condições iniciais é a presença de tubos longitudinais de alta densidade de energia. O número total de tubos em uma colisão, suas posições no plano transversal e seus conteúdos de energia são, basicamente, as variáveis que flutuam de evento para evento. A partir destas condições iniciais calculamos a evolução hidrodinâmica da matéria, usando o método SPH, e o desacoplamento, através da prescrição de Cooper-Frye. Abaixo segue um resumo das discussões do capítulo 5.

Na seção 5.2 discutimos como ajustamos os parâmetros do nosso modelo. Basicamente, introduzimos um fator dependente da rapidez espacial η_s que corrige a multiplicidade média em cada janela de centralidade, conservando, porém, a excentricidade e a estrutura tubular dos eventos. Para ajustarmos a temperatura de desacoplamento usamos a distribuição de partículas em função do momento transversal. No caso da distribuição de partículas em função da pseudo-rapidez, os resultados reproduzem satisfatoriamente os dados em cada janela de centralidade. No caso da distribuição de partículas em função do momento transversal, os resultados apresentam um déficit de partículas na região onde $p_t \gtrsim 2.0\text{GeV}$, que é acentuado nas janelas periféricas. Esta discrepância se deve ao fato que não estamos incluindo os efeitos dos jatos em nosso modelo. De posse dos parâmetros ajustados, relacionados com a distribuição de densidade de energia inicial e temperatura de desacoplamento, calculamos os demais observáveis.

Na seção 5.3 calculamos o parâmetro de fluxo elíptico v_2 e suas flutuações relativas σ_{v_2}/v_2 . Ambos os observáveis, em função da centralidade da colisão, apresentam um acordo razoável com os dados. Vimos que v_2 decresce de forma aproximadamente linear com o número de nucleons participantes e a razão σ_{v_2}/v_2 apresenta um mínimo para colisões com centralidade intermediária. Em média, $\sigma_{v_2}/v_2 \sim 40\%$, o que mostra que as flutuações são consideráveis em colisões de íons pesados relativísticos.

Na seção 5.4.1.1 calculamos a função de correlação de duas partículas em função das diferenças $\Delta\phi$ e $\Delta\eta$. Vimos que o nosso modelo reproduz a chamada estrutura de *Ridge*, que é uma correlação de longo alcance em $\Delta\eta$, na posição azimutal $\Delta\phi = 0$. Além disso, os resultados mostram a existência de dois *Ridges* no lado oposto da função de correlação, respectivamente, nas posições $\Delta\phi \sim 2$ e $\Delta\phi \sim -2$. Tal estrutura é compatível com o perfil azimutal da função de correlação, na região central de rapidez, observada nos dados, ou seja, com um máximo em $\Delta\phi = 0$ e dois máximos no lado oposto nas mesmas posições citadas acima. Estes resultados colocaram os modelos hidrodinâmicos com flutuações em grande destaque, pois a dinâmica coletiva da matéria poderia ter consequências mais sutis do que as usualmente esperadas. Em particular, poderia reproduzir, pelo menos em parte, efeitos na função de correlação atribuídos inteiramente à dinâmica dos jatos. Mediante a necessidade de uma explicação razoavelmente simples para a estrutura de *Ridge* em um modelo hidrodinâmico com distribuições de matéria tão complicadas, iniciamos uma busca, neste modelo, por estruturas alongadas em η_s que poderiam criar tal correlação. Observando cuidadosamente a distribuição de densidade de energia inicial do gerador de eventos Nexus, percebemos que os tubos longitudinais de alta densidade de energia poderiam ser as responsáveis pela estrutura de *Ridge*, principalmente os tubos próximos à superfície da matéria que denominamos tubos periféricos.

Na seção 5.4.1.2 iniciamos um estudo detalhado dos efeitos dos tubos periféricos sobre a matéria que o circunda. Para isso construímos um modelo bidimensional simplificado com a finalidade de calcular a expansão transversal do fluido, supondo, para a direção longitudinal, um fluxo do tipo invariante de *boost*. Nesta simplificação, a distribuição complexa de matéria obtida com o gerador de eventos Nexus é substituída por uma distribuição média e a flutuação é considerada apenas nas regiões próximas à superfície da matéria. Tal flutuação se manifesta através dos tubos periféricos. Por questão de simplicidade, consideramos apenas um tubo periférico, o que dá origem ao termo modelo de um tubo. Este modelo apresentou um resultado surpreendente: na posição angular do tubo não se observa um ponto de máximo na distribuição azimutal de partículas, como poderia ser esperado numa primeira análise. Mas ao contrário, observa-se, nesta posição angular, um ponto de mínimo ladeado por dois pontos de máximo. Estudos destas soluções hidrodinâmicas mostraram que a explicação para este comportamento é razoavelmente simples, ou seja, os tubos periféricos efetivamente criam uma sombra para a matéria interna que se expande. A parte do tubo que se propaga para dentro colide com o fluxo interno, dividindo-o em duas componentes, e parte do tubo que se propaga em direção à superfície não emite partículas num feixe colimado mas isotropicamente distribuídas, o que, naturalmente, reduz o número de partículas na posição angular do tubo. No cálculo da função de correlação de duas partículas vimos que a estrutura com um ponto de mínimo ladeado por dois pontos de máximo na distribuição azimutal é muito conveniente, pois dá origem a três pontos de máximo no perfil azimutal da função de correlação, exatamente como se observa nos dados. O mecanismo de sombra dos tubos periféricos consiste numa grande simplificação da análise dinâmica do problema, pois independentemente da complexidade da matéria na região interna, a expansão nas vizinhanças de um tubo periférico, em

média, é similar ao que se observa no modelo de um tubo.

Na seção 5.4.1.3, com a finalidade de estudar a robustez do modelo de um tubo, variamos alguns dos seus parâmetros, como por exemplo, o raio do tubo, o seu conteúdo de energia, a sua distância ao centro etc. Verificamos que a estrutura, da distribuição azimutal de partículas, com um ponto de mínimo, na posição angular do tubo, ladeado por dois pontos de máximo, sobrevive a uma ampla variação destes parâmetros. Outro fato notável é que esta estrutura é observada, em média, no modelo mais complexo das condições iniciais do gerador de eventos Nexus. Em apenas um evento é possível ver claramente o efeito de sombra do tubo. Superpondo, adequadamente, a distribuição azimutal de partículas para muitos eventos, do gerador de eventos Nexus, observa-se exatamente a mesma distribuição azimutal característica do modelo de um tubo, o que mostra que este modelo simplificado, de fato, é uma boa aproximação para a expansão do fluido nas vizinhanças de um tubo periférico.

Nas seções 5.4.2.1 e 5.4.2.2 estendemos o estudo da função de correlação de duas partículas às colisões periféricas. Mostramos que em nosso modelo a estrutura de *Ridge* também surge nestas colisões, tanto o *Ridge* em $\Delta\phi = 0$ quanto os *Ridges* do lado oposto, em $\Delta\phi \sim 2$ e $\Delta\phi \sim -2$. Mostramos, também, que o modelo reproduz o chamado efeito *in-plane/out-of-plane*. Este efeito é a observação experimental que a estrutura do lado oposto da função de correlação sofre uma transição de um máximo na posição $\Delta\phi \sim \pi$ para dois máximos simétricos em relação a esta posição, quando o ângulo azimutal das partículas *trigger*, em relação ao plano do evento, varia de 0° a 90° . Verificamos que existe uma interpretação para este fenômeno em termos do modelo de um tubo. Neste modelo simplificado, o tubo periférico cria flutuações do numero de partículas produzidas ao longo do plano do evento, o que dá origem, no caso *in-plane*, a uma estrutura com dois máximos, com diferença angular entre si de π , na função de correlação de duas partículas. No caso *out-of-plane* a estrutura com três máximos surge devido à correlação entre as partículas *trigger* - produzidas, neste caso, perpendicularmente ao plano do evento - e as partículas associadas que são produzidas ao longo do plano do evento.

Na seção 5.4.2.3 fazemos uma comparação da estrutura azimutal da função de correlação de duas partículas com os dados, na janela de centralidade de (20-60)%. Mostramos que, com o devido ajuste dos parâmetros do modelo (discutidos na seção 5.2), a função de correlação apresenta as características observadas nos dados para várias regiões de momento das partículas associadas e para várias regiões do ângulo ϕ_s (ângulo azimutal do momento das partículas *trigger*, em relação ao plano do evento).

Na seção 5.4.3 mostramos que o modelo de tubos também pode dar conta da estrutura de *Ridge* observada recentemente em colisões próton-próton. Para este caso, propomos uma estrutura com dois picos na função de correlação, respectivamente, nas posições $\Delta\phi = 0$ e $\Delta\phi \sim \pi$. Esta estrutura pode ser obtida através da expansão de um tubo com seção transversal elíptica ou através da expansão de dois tubos paralelos e próximos (com distância entre os centros da ordem de 0.5fm). Nos dados da colaboração CMS [45], o *Ridge* em $\Delta\phi = 0$ pode ser visto claramente, entretanto, a existência do *Ridge* em $\Delta\phi = \pi$ ainda não está confirmada. Acreditamos que, nestes

dados, o efeito dos jatos sobre a função de correlação dificulta a visualização do *Ridge* no lado oposto.

Na seção 5.5 mostramos uma comparação entre o cálculo com condições iniciais médias e o cálculo evento a evento, para alguns observáveis. No caso da função de correlação de duas partículas essa comparação não é possível, pois como vimos na seção 4.2, por definição, a correlação resultante é nula no caso das condições iniciais médias. De modo geral, observamos que os resultados se aproximam dos dados quando usamos o método evento a evento. No caso da distribuição de partículas em função do momento transversal, devido à expansão transversal rápida dos tubos periféricos, observamos um aumento da produção de partículas na região onde $p_t \gtrsim 2.0\text{GeV}$. No caso de v_2 em função do momento transversal, devido à expansão isotrópica destes tubos, observamos uma redução do fluxo elíptico na mesma região. Finalmente, no caso de v_2 em função da pseudo-rapidez, a combinação dos efeitos da expansão isotrópica dos tubos e da flutuação do plano do evento torna a forma da curva mais triangular seguindo a tendência dos dados.

Concluimos que as flutuações em modelos hidrodinâmicos, em forma de tubos longitudinais de alta densidade de energia, são ingredientes importantes para se reproduzir muitas características dos dados, em particular, as características que, antes deste trabalho, não estavam associadas ao movimento coletivo da matéria criada na colisão. Acreditamos que o nosso estudo será uma influência para aqueles que desejam desenvolver novos modelos microscópicos das interações nestas colisões, modelos que serão a base de novos geradores de eventos.

Apêndice A

Conservação da entropia

Considerando $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z)$ e $c=1$, o tensor de energia-momento de um fluido ideal é dado por

$$T^{\mu\nu} = \omega u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p, \quad (\text{A.1})$$

onde $\omega = \epsilon + p$. Tomando a divergência da definição A.1 e multiplicando ambos os lados por u_μ temos,

$$\omega u^\nu u_\mu \partial_\nu u^\mu + u_\mu u^\mu \partial_\nu (\omega u^\nu) - u_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu p = 0. \quad (\text{A.2})$$

Na equação A.2 usamos o fato que $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$. Uma vez que $u_\mu u^\mu = 1$, $u^\nu = u_\mu g^{\mu\nu}$ e $u_\mu \partial_\nu u^\mu = 0$ esta equação se torna

$$\partial_\nu (\omega u^\nu) - u^\nu \partial_\nu p = 0. \quad (\text{A.3})$$

A equação A.3 pode ser escrita ainda da seguinte forma

$$\partial_\nu \left(\frac{\omega}{n_B} n_B u^\nu \right) - \frac{1}{n_B} n_B u^\nu \partial_\nu p = 0 \quad (\text{A.4})$$

ou

$$n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{\omega}{n_B} \right) + \frac{\omega}{n_B} \partial_\nu (n_B u^\nu) - \frac{1}{n_B} n_B u^\nu \partial_\nu p = 0. \quad (\text{A.5})$$

Se o número bariônico é uma grandeza conservada, então $\partial_\nu (n_B u^\nu) = 0$ e a equação A.5 fica

$$n_B u^\nu \left[\partial_\nu \left(\frac{\omega}{n_B} \right) - \frac{1}{n_B} \partial_\nu p \right] = 0. \quad (\text{A.6})$$

Usando a relação termodinâmica $d \left(\frac{\omega}{n_B} \right) - \frac{1}{n_B} dp = T d \left(\frac{s}{n_B} \right)$, onde T é a temperatura, encontramos que

$$T n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B} \right) = 0. \quad (\text{A.7})$$

Notando que

$$\partial_\nu (s u^\nu) = \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B} n_B u^\nu \right) = n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B} \right) + \frac{s}{n_B} \partial_\nu (n_B u^\nu) = n_B u^\nu \partial_\nu \left(\frac{s}{n_B} \right), \quad (\text{A.8})$$

chegamos, finalmente, à conservação da entropia, ou seja,

$$\partial_\nu (s u^\nu) = 0. \quad (\text{A.9})$$

Apêndice B

Gás de bósons

A pressão da i -ésima componente da mistura, para um gás de bósons, é dada por (omitindo o índice i):

$$p(T) = \frac{g}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} \frac{1}{e^{\beta\sqrt{k^2 + m^2}} - 1} dk. \quad (\text{B.1})$$

Fazendo a substituição $k/m = x$ encontramos que:

$$p(T) = \frac{gm^4}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} \frac{1}{e^{\beta m\sqrt{x^2 + 1}} - 1} dx. \quad (\text{B.2})$$

Podemos fazer a seguinte expansão:

$$\frac{1}{e^{\beta m\sqrt{x^2 + 1}} - 1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-l\beta m\sqrt{x^2 + 1}}, \quad (\text{B.3})$$

uma vez que $\beta m\sqrt{x^2 + 1} > 0$.

Substituindo B.3 em B.2 encontramos que:

$$p(T) = \frac{gm^4}{6\pi^2} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + 1}} e^{-l\beta m\sqrt{x^2 + 1}} dx. \quad (\text{B.4})$$

Usando a representação integral da função de Bessel modificada [61],

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty e^{-z\sqrt{x^2 + 1}} \frac{x^{2\nu}}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, \quad (\text{B.5})$$

válida para $z > 0$ e $\text{Re}(\nu) > 1/2$, podemos reescrever a relação B.4 como (usando $\nu = 2$):

$$p(T) = \frac{g}{2\pi^2} m^2 T^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{K_2\left(\frac{m}{T}(j+1)\right)}{(j+1)^2}. \quad (\text{B.6})$$

Na relação B.6 fizemos as substituições $l = j + 1$ e $\beta = \frac{1}{T}$.

Apêndice C

Limite ultra-relativístico

A pressão de um gás de quarks u e d e gluons é dada por:

$$p^{\text{u,d,g}}(T, \mu_B) = \sum_{\{i, \text{u}, \overline{\text{u}}, \text{d}, \overline{\text{d}}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} \frac{1}{e^{\beta(\sqrt{k^2 + m_i^2} - B_i \mu_B)} + 1} dk + \frac{g_g}{6\pi^2} \int_0^\infty k^3 \frac{1}{e^{\beta k} - 1} dk. \quad (\text{C.1})$$

No limite ultra-relativístico podemos considerar que $m_u = m_d = 0$. Então, C.1 pode ser reescrita como:

$$p^{\text{u,d,g}}(T, \mu_B) = \sum_{\{i, \text{u}, \overline{\text{u}}, \text{d}, \overline{\text{d}}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \int_0^\infty k^3 \frac{1}{e^{\beta(k - B_i \mu_B)} + 1} dk + \frac{g_g}{6\pi^2} \int_0^\infty k^3 \frac{1}{e^{\beta k} - 1} dk. \quad (\text{C.2})$$

Escrevendo, explicitamente, a contribuição das anti-partículas temos que:

$$p^{\text{u,d,g}}(T, \mu_B) = \sum_{\{i, \text{u}, \text{d}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \left\{ \int_0^\infty k^3 \frac{1}{e^{\beta(k - B_i \mu_B)} + 1} dk + \int_0^\infty k^3 \frac{1}{e^{\beta(k + B_i \mu_B)} + 1} dk \right\} + \frac{g_g}{6\pi^2} \int_0^\infty k^3 \frac{1}{e^{\beta k} - 1} dk, \quad (\text{C.3})$$

em que $\overline{g}_i = g_i$ e $\overline{B}_i = -B_i$.

Expandindo em série de potências a função de distribuição de Fermi-Dirac e Bose-Einstein, temos:

$$\frac{1}{e^{\beta(k - B_i \mu_B)} + 1} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j e^{j\beta(k - B_i \mu_B)} \quad (\text{C.4})$$

se $\beta(k - B_i \mu_B) < 0$,

$$\frac{1}{e^{\beta(k-B_i\mu_B)} + 1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} e^{j\beta(B_i\mu_B-k)} \quad (\text{C.5})$$

se $\beta(B_i\mu_B - k) < 0$,

$$\frac{1}{e^{\beta(k+B_i\mu_B)} + 1} = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} e^{-j\beta(k+B_i\mu_B)} \quad (\text{C.6})$$

se $\beta(k + B_i\mu_B) > 0$ e

$$\frac{1}{e^{\beta k} - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-j\beta k} \quad (\text{C.7})$$

se $\beta k > 0$.

Substituindo as séries C.4, C.5, C.6 e C.7 em C.3 e integrando termo a termo, encontramos que:

$$\begin{aligned} p^{\text{u,d,g}}(T, \mu_B) = \sum_{i \in \{\text{u,d}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \left\{ \frac{(B_i\mu_B)^4}{4} + 6T^2 (B_i\mu_B)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} + 12T^4 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^4} \right\} \\ + \frac{g_g T^4}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4}. \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Os valores das séries numéricas são dados por[61]:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^2} = \frac{\pi^2}{12}, \quad (\text{C.9})$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j+1}}{j^4} = \frac{7\pi^4}{720}, \quad (\text{C.10})$$

e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (\text{C.11})$$

Substituindo o valor das séries numéricas C.9, C.10 e C.11 na relação C.8, encontramos que:

$$p^{\text{u,d,g}}(T, \mu_B) = \sum_{i \in \{\text{u,d}\}} \frac{g_i}{6\pi^2} \left\{ \frac{(B_i\mu_B)^4}{4} + \frac{T^2 (B_i\mu_B)^2 \pi^2}{2} + \frac{7T^4 \pi^4}{60} \right\} + \frac{g_g T^4 \pi^2}{90}. \quad (\text{C.12})$$

Considerando que:

$$B_u = B_d = \frac{1}{3}, \quad (\text{C.13})$$

$$g_u = g_d = 2 \text{ (spin)} \times 3 \text{ (cores)} \quad (\text{C.14})$$

e

$$g_g = 2 \text{ (spin)} \times 8 \text{ (cores)} \quad (\text{C.15})$$

a pressão de um gás de quarks u e d e gluons, no regime ultra-relativístico, é dada por:

$$p^{\text{u,d,g}}(T, \mu_B) = \frac{\mu_B^4}{162\pi^2} + \frac{T^2 \mu_B^2}{9} + \frac{37}{90} \pi^2 T^4. \quad (\text{C.16})$$

Apêndice D

Formulação variacional

Aplicando o princípio variacional à ação 3.1, sob vínculos dados pelas equações 3.2, 3.3 e 3.4, temos:

$$\delta A = \delta \int \left[-\epsilon(n_B, s) + \lambda \partial_\nu (n_B u^\nu) + \zeta \partial_\nu (s u^\nu) - \frac{1}{2} \omega (u^\nu u_\nu - 1) \right] d^4 x = 0, \quad (\text{D.1})$$

em que usamos $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. As quantidades λ , ζ e ω são multiplicadores de Lagrange e funções arbitrárias de x .

A partir da equação D.1 obtemos as equações de Lagrange:

$$\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{ef}}{\partial (\partial_\nu \eta_j)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}_{ef}}{\partial \eta_j} = 0 \quad (\text{D.2})$$

em que

$$\mathcal{L}_{ef}(\vec{\eta}) = -\epsilon(n_B, s) + \lambda \partial_\nu (n_B u^\nu) + \zeta \partial_\nu (s u^\nu) - \frac{1}{2} \omega (u^\nu u_\nu - 1) \quad (\text{D.3})$$

e

$$\vec{\eta} = (n_B, s, u^\nu, \lambda, \zeta, \omega). \quad (\text{D.4})$$

Na relação D.3, $\mathcal{L}_{ef}$ é denominada densidade de lagrangiana efetiva e as variáveis $n_B, s, u^\nu, \lambda, \zeta$ e ω são consideradas independentes¹. As equações de Lagrange associadas às coordenadas λ, ζ e ω são as equações de vínculo 3.2, 3.3 e 3.4. No caso das variáveis n_B, s e u^ν temos, respectivamente, as seguintes equações:

$$\mu + u^\nu \partial_\nu \lambda = 0, \quad (\text{D.5})$$

$$T + u^\nu \partial_\nu \zeta = 0 \quad (\text{D.6})$$

e

---

¹Devemos considerar também que $\delta \vec{\eta} = 0$ na região de contorno.

$$n_B \partial_\nu \lambda + s \partial_\nu \zeta + \omega u_\nu = 0. \quad (\text{D.7})$$

Nas equações D.5 e D.6 utilizamos as relações termodinâmicas $\mu = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial n_B} \right)_s$ e $T = \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial s} \right)_{n_B}$.

Multiplicando ambos os lados de D.7 por u^ν e usando as relações 3.4, D.5 e D.6 encontramos que

$$\omega = n_B \mu + sT = \epsilon + p, \quad (\text{D.8})$$

em que p é a pressão. Vemos em D.8 que ω é a densidade de entalpia.

Multiplicando D.7 por u_σ , temos:

$$\omega u_\sigma u_\nu = -n_B u_\sigma (\partial_\nu \lambda) - s u_\sigma (\partial_\nu \zeta). \quad (\text{D.9})$$

Tomando a divergência em D.9 e usando as relações 3.2 e 3.3, com $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, chegamos à seguinte equação:

$$\partial^\sigma (\omega u_\sigma u_\nu) = -n_B u_\sigma (\partial^\sigma \partial_\nu \lambda) - s u_\sigma (\partial^\sigma \partial_\nu \zeta). \quad (\text{D.10})$$

Vemos, ainda, que:

$$n_B u_\sigma (\partial^\sigma \partial_\nu \lambda) = n_B \partial_\nu (u_\sigma \partial^\sigma \lambda) - n_B (\partial^\sigma \lambda) (\partial_\nu u_\sigma) = -n_B \partial_\nu \mu - n_B (\partial^\sigma \lambda) (\partial_\nu u_\sigma) \quad (\text{D.11})$$

e

$$s u_\sigma (\partial^\sigma \partial_\nu \zeta) = -s \partial_\nu T - s (\partial^\sigma \zeta) (\partial_\nu u_\sigma). \quad (\text{D.12})$$

Portanto, podemos escrever D.10 da seguinte forma:

$$\partial^\sigma (\omega u_\sigma u_\nu) = n_B \partial_\nu \mu + s \partial_\nu T - (\partial_\nu u_\sigma) u^\sigma \omega. \quad (\text{D.13})$$

Usando a relação de Gibbs-Duhem, $dp = s dT + n_B d\mu$, e notando que $(\partial_\nu u_\sigma) u^\sigma = 0$, encontramos, finalmente, que

$$\partial^\sigma (\omega u_\sigma u_\nu) = \partial_\nu p, \quad (\text{D.14})$$

ou seja,

$$\partial^\sigma T_{\sigma\nu} = 0 \quad (\text{D.15})$$

com

$$T_{\sigma\nu} = \omega u_\sigma u_\nu - g_{\sigma\nu} p. \quad (\text{D.16})$$

Apêndice E

Equações de movimento no método SPH

De acordo com a equação 3.30, a ação I_{SPH} será um extremo se

$$\int \sum_i \left[\frac{p_i (\delta V_i) \gamma_i + E_i (\delta \gamma_i)}{\gamma_i^2} \right] d\tau = 0. \quad (\text{E.1})$$

Usando as relações 3.34, 3.35 e 3.36 encontramos que

$$\delta \gamma_i = \gamma_i^3 [\vec{v}_i]^{\text{T}} \mathbf{g} \delta \vec{v}_i \quad (\text{E.2})$$

e

$$\delta V_i = V_i \left(\frac{\delta \gamma_i}{\gamma_i} - \frac{\delta s_i^*}{s_i^*} \right) = \frac{\nu_i}{s_i} \left\{ \gamma_i^2 [\vec{v}_i]^{\text{T}} \mathbf{g} \delta \vec{v}_i - \frac{1}{s_i^*} \left[\sum_j \nu_j (\delta \vec{x}_i - \delta \vec{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] \right\}, \quad (\text{E.3})$$

com

$$\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 - (\vec{v}_T)_i^2 - \tau^2 (v_{\eta_s})_i^2}} \quad (\text{E.4})$$

e

$$W_{ij} \equiv W(\vec{x}_i - \vec{x}_j; h) = W\left((\vec{r}_T)_i - (\vec{r}_T)_j, (\eta_s)_i - (\eta_s)_j; h\right). \quad (\text{E.5})$$

Substituindo as relações E.2 e E.3 em E.1, encontramos a seguinte equação:

$$\int \sum_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) \nu_i \gamma_i [\vec{v}_i]^{\text{T}} \mathbf{g} \delta \vec{v}_i d\tau - \int \sum_i \frac{\tau \nu_i p_i}{(s_i^*)^2} \left[\sum_j \nu_j (\delta \vec{x}_i - \delta \vec{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] d\tau = 0. \quad (\text{E.6})$$

A integral à esquerda pode ser feita por partes, assim

$$\int \sum_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) \nu_i \gamma_i [\vec{v}_i]^{\mathbf{T}} \mathbf{g} \delta \vec{v}_i d\tau = - \int \sum_i \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) \nu_i \gamma_i [\vec{v}_i]^{\mathbf{T}} \mathbf{g} \right] \delta \vec{x}_i d\tau. \quad (\text{E.7})$$

Para a integral à direita, em E.6, procedemos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int \sum_i \frac{\tau \nu_i p_i}{(s_i^*)^2} \left[\sum_j \nu_j (\delta \vec{x}_i - \delta \vec{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] d\tau \\ &= \int \sum_i \left[\sum_j \frac{\tau \nu_i \nu_j p_i}{(s_i^*)^2} \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta \vec{x}_i d\tau - \int \sum_i \sum_j \frac{\tau \nu_i \nu_j p_i}{(s_i^*)^2} (\nabla_i W_{ij}) \cdot \delta \vec{x}_j d\tau. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Usando o fato que $\nabla_i W_{ij} = -\nabla_j W_{ij}$, temos:

$$\begin{aligned} & \int \sum_i \sum_j \frac{\tau \nu_i \nu_j p_i}{(s_i^*)^2} (\nabla_i W_{ij}) \cdot \delta \vec{x}_j d\tau = - \int \sum_j \left[\sum_i \frac{\tau \nu_i \nu_j p_i}{(s_i^*)^2} \nabla_j W_{ij} \right] \cdot \delta \vec{x}_j d\tau \\ &= - \int \sum_i \left[\sum_j \frac{\tau \nu_j \nu_i p_j}{(s_j^*)^2} \nabla_i W_{ji} \right] \cdot \delta \vec{x}_i d\tau. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

Substituindo E.9 em E.8 e usando a propriedade $W_{ij} = W_{ji}$ (relação 3.9), encontramos que

$$\begin{aligned} & \int \sum_i \frac{\tau \nu_i p_i}{(s_i^*)^2} \left[\sum_j \nu_j (\delta \vec{x}_i - \delta \vec{x}_j) \cdot \nabla_i W_{ij} \right] d\tau \\ &= \int \sum_i \left[\sum_j \frac{\tau \nu_i \nu_j p_i}{(s_i^*)^2} \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta \vec{x}_i d\tau + \int \sum_i \left[\sum_j \frac{\tau \nu_j \nu_i p_j}{(s_j^*)^2} \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta \vec{x}_i d\tau \\ &= \int \sum_i \left[\sum_j \tau \nu_i \nu_j \left(\frac{p_i}{(s_i^*)^2} + \frac{p_j}{(s_j^*)^2} \right) \nabla_i W_{ij} \right] \cdot \delta \vec{x}_i d\tau. \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

Substituindo E.7 e E.10 em E.6 encontramos a seguinte equação:

$$\int \sum_i \left\{ \frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) \nu_i \gamma_i [\vec{v}_i]^{\mathbf{T}} \mathbf{g} \right] + \sum_j \tau \nu_i \nu_j \left(\frac{p_i}{(s_i^*)^2} + \frac{p_j}{(s_j^*)^2} \right) [\nabla_i W_{ij}]^{\mathbf{T}} \right\} \delta \vec{x}_i d\tau = 0. \quad (\text{E.11})$$

Uma vez que as variações $\delta \vec{x}_i$ são arbitrárias, devemos ter que:

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) \nu_i \gamma_i [\vec{v}_i]^{\mathbf{T}} \mathbf{g} \right] + \sum_j \tau \nu_i \nu_j \left(\frac{p_i}{(s_i^*)^2} + \frac{p_j}{(s_j^*)^2} \right) [\nabla_i W_{ij}]^{\mathbf{T}} = 0. \quad (\text{E.12})$$

Finalmente, usando a relação 3.35 podemos escrever as equações de movimento das partículas SPH como:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \vec{\pi}_T \\ \pi_{\eta_s} \end{pmatrix}_i = -\frac{1}{\tau} \sum_j \nu_i \nu_j \left(\frac{p_i}{(\gamma_i s_i)^2} + \frac{p_j}{(\gamma_j s_j)^2} \right) \begin{pmatrix} \nabla_T \\ \partial_{\eta_s} \end{pmatrix}_i W_{ij} \quad (\text{E.13})$$

em que

$$(\vec{\pi}_T)_i = \nu_i \gamma_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) (\vec{v}_T)_i, \quad (\text{E.14})$$

$$(\pi_{\eta_s})_i = \tau^2 \nu_i \gamma_i \left(\frac{\epsilon_i + p_i}{s_i} \right) (v_{\eta_s})_i \quad (\text{E.15})$$

e

$$(\nabla_T)_i = (\partial_x, \partial_y)_i. \quad (\text{E.16})$$

Nas relações E.14 e E.15, $(\vec{v}_T)_i = (d\vec{r}_T/d\tau)_i$ e $(v_{\eta_s})_i = (d\eta_s/d\tau)_i$.

Referências Bibliográficas

- [1] H. J. Drescher, S. Ostapchenko, T. Pierog, and K. Werner, Phys. Rev. **C65**, 054902 (2002), hep-ph/0011219.
- [2] V. N. Gribov, Sov. Phys. JETP **26**, 414 (1968).
- [3] S. V. Akkelin, Y. Hama, I. A. Karpenko, and Y. M. Sinyukov, Phys. Rev. **C78**, 034906 (2008), 0804.4104.
- [4] F. Cooper and G. Frye, Phys. Rev. **D10**, 186 (1974).
- [5] E. Fermi, Prog. Theor. Phys. **5**, 570 (1950).
- [6] L. D. Landau, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Fiz. **17**, 51 (1953).
- [7] S. Z. Belenkij and L. D. Landau, Usp. Fiz. Nauk **56**, 309 (1955), veja em 'Collected papers of L. D. Landau' (ed. D. Ter-Haar, Pergamon, Oxford, 1965) pag. 665.
- [8] L. B. Lucy, Astron. J. **82**, 1013 (1977).
- [9] R. A. Gingold and J. J. Monaghan, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **181**, 375 (1977).
- [10] C. E. Aguiar, T. Kodama, T. Osada, and Y. Hama, J. Phys. **G27**, 75 (2001).
- [11] Y. Hama, T. Kodama, and O. Socolowski, Jr., Braz. J. Phys. **35**, 24 (2005), hep-ph/0407264.
- [12] Y. Hama, R.P.G. Andrade, F. Grassi, O. Socolowski Jr., T. Kodama, B. Tavares, S.S. Padula, Nucl. Phys. **A774**, 169 (2006), hep-ph/0510096.
- [13] Y. Hama, R.P.G. Andrade, F. Grassi, O. Socolowski Jr., T. Kodama, B. Tavares, S.S. Padula, AIP Conf. Proc. **828**, 485 (2006), hep-ph/0510101.
- [14] J. Socolowski, O., F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Phys. Rev. Lett. **93**, 182301 (2004).
- [15] R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, and O. Socolowski, Jr., Phys. Rev. Lett. **97**, 202302 (2006), nucl-th/0608067.
- [16] L. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press Ltd., 1959), first ed.

- [17] W. Rindler, *Introduction to Special Relativity* (Oxford University Press Inc., 1991), second ed.
- [18] D. H. Rischke, M. I. Gorenstein, H. Stoecker, and W. Greiner, Z. Phys. **C51**, 485 (1991).
- [19] G. D. Yen, M. I. Gorenstein, W. Greiner, and S.-N. Yang, Phys. Rev. **C56**, 2210 (1997).
- [20] A. Chodos, R. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. Weisskopf, Phys.Rev. **D9**, 3471 (1974).
- [21] A. Chodos, R. Jaffe, K. Johnson, and C. B. Thorn, Phys.Rev. **D10**, 2599 (1974).
- [22] Z. Fodor and S. D. Katz, JHEP **03**, 014 (2002).
- [23] F. Karsch, Nucl.Phys. **A698**, 199 (2002), hep-ph/0103314.
- [24] H.-T. Elze, Y. Hama, T. Kodama, M. Makler, and J. Rafelski, J. Phys. **G25**, 1935 (1999).
- [25] R. C. Hwa, Phys. Rev. **D10**, 2260 (1974).
- [26] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **D27**, 140 (1983).
- [27] PHENIX, A. Adare *et al.*, Phys. Rev. **C78**, 014901 (2008), 0801.4545.
- [28] N. N. Ajitanand *et al.*, Phys. Rev. **C72**, 011902 (2005), nucl-ex/0501025.
- [29] STAR, J. Putschke, Nucl. Phys. **A783**, 507 (2007).
- [30] M. P. McCumber and f. t. P. Collaboration, J. Phys. **G35**, 104081 (2008), 0804.4319.
- [31] PHOBOS, R. S. Hollis *et al.*, J. Phys. Conf. Ser. **5**, 46 (2005).
- [32] B. B. Back *et al.*, Braz. J. Phys. **34**, 829 (2004).
- [33] Y. Hama, R.P.G. Andrade, F. Grassi, W.L. Qian, T. Osada, C.E. Aguiar, T. Kodama, Phys. Atom. Nucl. **71**, 1558 (2008), 0711.4544.
- [34] PHOBOS, B. B. Back *et al.*, Phys. Lett. **B578**, 297 (2004), nucl-ex/0302015.
- [35] R. P. G. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, and W. L. Qian, Phys. Rev. Lett. **101**, 112301 (2008), 0805.0018.
- [36] PHOBOS, B. Alver *et al.*, Phys. Rev. Lett. **104**, 142301 (2010), nucl-ex/0702036.
- [37] PHOBOS, B. Alver *et al.*, J. Phys. **G34**, S907 (2007), nucl-ex/0701049.
- [38] STAR, P. Sorensen, J. Phys. **G34**, S897 (2007), nucl-ex/0612021.
- [39] T. Osada, C. E. Aguiar, Y. Hama, and T. Kodama, in proceedings of the 6th International Workshop on Relativistic Aspects of Nuclear Physics , Ed. by T. Kodama et al., World Sci., Singapore, p. 174 (2001), nucl-th/0102011.

- [40] C. E. Aguiar, Y. Hama, T. Kodama, and T. Osada, Nucl. Phys. **A698**, 639 (2002), hep-ph/0106266.
- [41] J. Putschke, J. Phys. **G34**, S679 (2007), nucl-ex/0701074.
- [42] STAR, M. J. Horner, J. Phys. **G34**, S995 (2007), nucl-ex/0701069.
- [43] PHOBOS, B. Alver *et al.*, J. Phys. **G35**, 104080 (2008), 0804.3038.
- [44] STAR, A. Feng, J. Phys. **G35**, 104082 (2008), 0807.4606.
- [45] CMS, V. Khachatryan *et al.*, JHEP **09**, 091 (2010), 1009.4122.
- [46] J. Takahashi, B.M. Tavares, W.L. Qian, R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, T. Kodama, N. Xu, Phys. Rev. Lett. **103**, 242301 (2009), 0902.4870.
- [47] Y. Hama, R. P. G. Andrade, F. Grassi, and W.-L. Qian, Nonlin. Phenom. Complex Syst. **12**, 466 (2009), 0911.0811.
- [48] R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, and W.-L. Qian, J.Phys.G **G37**, 094043 (2010), 0912.0703.
- [49] R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, and W.-L. Qian, Nucl.Phys. **A854**, 81 (2011), 1008.0139.
- [50] R. P. G. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, and W.-L. Qian, (2010), 1008.4612.
- [51] R. Andrade, F. Grassi, Y. Hama, and W.-L. Qian, in proceedings of the XL International Symposium on Multiparticle Dynamics , Ed. by P. Van Mechelen and N. van Remortel, University Press Antwerp, Antwerp, Belgium, p. 283 (2010), 1012.5275.
- [52] Y. Hama, R. P. G. Andrade, F. Grassi, and W.-L. Qian, in proceedings of the International Workshop on Initial State Fluctuations and Final-State Particle Correlations , de 2 a 4 de fevereiro, Brookhaven National Laboratory (RIKEN), USA (2011).
- [53] K. Werner *et al.*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **196**, 36 (2009).
- [54] Y. Hama, R. P. G. Andrade, F. Grassi, and W.-L. Qian, in proceedings of the XL International Symposium on Multiparticle Dynamics , Ed. by P. Van Mechelen and N. van Remortel, University Press Antwerp, Antwerp, Belgium, p. 143 (2010), 1012.1342.
- [55] PHOBOS, B. B. Back *et al.*, Phys. Rev. **C72**, 051901 (2005), nucl-ex/0407012.
- [56] F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Phys. Lett. **B355**, 9 (1995).
- [57] F. Grassi, Y. Hama, and T. Kodama, Z. Phys. **C73**, 153 (1996).
- [58] T. Hirano, Phys. Rev. **C65**, 011901 (2002), nucl-th/0108004.

- [59] T. Hirano, U. W. Heinz, D. Kharzeev, R. Lacey, and Y. Nara, Phys. Lett. **B636**, 299 (2006), nucl-th/0511046.
- [60] C. Nonaka and S. A. Bass, Phys. Rev. **C75**, 014902 (2007), nucl-th/0607018.
- [61] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products* (ed. Alan Jeffrey, 1994).