

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Teorias Escalares-Tensoriais e o Regime Superacelerado do Universo: Aspectos Dinâmicos

Fábio Cabral Carvalho

ORIENTADOR: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa

SBI-IFUSP



305M810T4396

*Tese submetida ao Instituto de
Física da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Doutor em Ciências.*

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (Orientador)

Prof. Dr. Élcio Abdalla (IFUSP)

Prof. Dr. Jailson de Souza Alcaniz (ON)

Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (IFUSP)

Prof. Dr. Valdir Barbosa Bezerra (UFPB)

SÃO PAULO

2005



Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

Defesa 03/10/2005

523.1

C331t

D

2x.1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Carvalho, Fábio Cabral

Teorias Escalares – Tensorias e o Regime
Superacelerado do Universo: Aspectos Dinâmicos.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa (Unicamp)
Área de Concentração: Física

Unitermos:

- 1
 - 2
 - 3
 - 4
1. Cosmologia;
 2. Relatividade (Física);
 3. Física de Partículas;
 4. Teoria de Campos.

USP/IF/SBI-071/2005

Resumo

Nesta tese, estudamos os modelos de quintessência com acoplamentos não-mínimos do tipo

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{\omega(\phi)}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) + L_{mat} \right].$$

Analisamos, em particular, a estabilidade das soluções tipo *tracker*. Nossa análise é global, baseando-se na existência de funções de Lyapunov para pontos críticos previamente identificados na literatura e já estudados no regime linear local. Aplicamos a metodologia desenvolvida no contexto cosmológico para encontrar soluções superaceleradas, definidas quando a equação de estado é muito negativa ($\omega = p/\rho < -1$), e estimar a bacia de atração em torno dos pontos fixos estáveis. Baseado nestes resultados, propomos um modelo livre de instabilidades clássicas e/ou quânticas capaz de descrever a recentemente descoberta fase de expansão acelerada do Universo, incluindo os eventuais regimes superacelerados levemente favorecidos pelos dados observacionais disponíveis atualmente.

Abstract

In this thesis, we study quintessence models with nonminimal coupling of form

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{\omega(\phi)}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) + L_{mat} \right].$$

We analyze, in particular, the stability of tracker solutions. Our analysis is global, based in the existence of Lyapunov functions for fixed points previously identified in the literature and studied in the local linear regime. The methodology developed in the cosmological context is applied to find superaccelerated solutions, defined when the equation of state is very negative ($\omega = p/\rho < -1$), and to obtain the attraction basin around the stable fixed point. Based in these results, we propose a model free of classical and/or quantum instabilities, capable of describing the recently discovered phase of accelerated expansion of the Universe, including the possible superaccelerated regime slightly favored by the available observational data.

Para Fátima, Adriana e Karina

Agradecimentos

- Ao Prof. Alberto Saa pela orientação;
- À minha mãe Fátima e à minha irmã Adriana por todo apoio e incentivo;
- À minha esposa Karina pela paciência;
- Aos amigos Karlúcio e José Cleriston, colegas de sala;
- Aos amigos do IFUSP que tive a oportunidade de conhecer;
- À CAPES pelo apoio financeiro.

Conteúdo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 1 |
| 2 | Modelo Cosmológico Padrão | 6 |
| 2.1 | Princípio Cosmológico e a Métrica de Robertson-Walker . . . | 7 |
| 2.2 | Aspectos Cinemáticos | 10 |
| 2.3 | Aspectos dinâmicos | 15 |
| 2.3.1 | Modelo de Einstein-de Sitter-Friedmann-Lemaître . . . | 18 |
| 2.3.2 | Escalas Características | 23 |
| 2.4 | Teoria da Inflação | 26 |
| 2.5 | Radiação Cósmica de Fundo | 28 |
| 2.5.1 | Desacoplamento e Recombinação | 32 |
| 2.5.2 | Flutuações na Radiação de Fundo | 33 |
| 3 | O Universo Acelerado | 37 |
| 3.1 | A Constante Cosmológica | 39 |
| 3.2 | Regime Superacelerado | 42 |
| 3.3 | Modelos de Quintessência | 44 |
| 4 | Modelos de Quintessência com Acoplamento Não-Mínimo | 53 |
| 4.1 | Teoria Escalar-Tensorial da Gravidade | 54 |
| 4.2 | Modelos tipo Brans-Dicke | 55 |
| 4.3 | O Significado Físico da Razão p_ϕ/ρ_ϕ | 57 |
| 4.4 | Modelos Não-Minimamente Acoplados | 59 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 5 | Energia Escura no Regime Superacelerado | 65 |
| 5.1 | Equações Dinâmicas do Modelo | 66 |
| 5.2 | O espaço de fase | 69 |
| 6 | Conclusões | 74 |
| | Bibliografia | 76 |

Capítulo 1

Introdução

A Cosmologia é das áreas da Física que mais evoluíram nos últimos cem anos, saindo da condição de “ramo meramente especulativo” para adquirir o *status* de teoria científica. Pode-se dizer que a Cosmologia moderna, baseada na teoria do Big Bang, surgiu após Albert Einstein apresentar sua Teoria da Relatividade Geral em 1915, quando ele calculou o efeito da deflexão da luz de uma estrela distante por um corpo massivo e previu uma amplitude de $1,7''$ no caso do Sol (essa previsão foi confirmada exatamente pela primeira vez em 1919, na já famosa expedição de Sobral, CE). Em seguida, no ano de 1917, Einstein incluiu a famosa *constante cosmológica* nas suas equações de campo e obteve uma “esperada” solução estática para a estrutura do Universo. Na época todos acreditavam que o Universo deveria ser estático. Mas foi apenas no início dos anos de 1920 que Alexander Friedmann, George Lemaître e Willem de Sitter mostraram, independentemente, que é possível encontrar soluções não-estáticas para as equações de campo da Relatividade Geral. Ainda neste período, Edwin Hubble descobriu que galáxias próximas estavam se afastando de nós, descartando de uma vez o modelo estático de Einstein.

O passo definitivo que tornou a Cosmologia moderna uma teoria de grande sucesso foi dado no final dos anos de 1940, quando George Gamov e

colaboradores previram, enquanto buscavam entender a formação primordial do Hélio, a existência de uma radiação de fundo que permearia o Universo. Não só a existência desta radiação de fundo foi confirmada em 1964 por Arno Penzias e Robert Wilson, como conseguiram uma teoria bem sucedida que explicou a abundância de elementos leves no Universo, chamada nucleossíntese primordial. Tal teoria acabou ligando a Cosmologia com o campo, na época já bem sucedido, da Física de Partículas.

Atualmente um dos problemas que mais preocupam a Cosmologia é a questão da aceleração do Universo. Em 1998, a equipe do *Supernova Cosmology Project* liderada por Saul Perlmutter [1] descobriu, medindo o *redshift* de supernovas, que o Universo está em expansão acelerada. Tal observação foi confirmada independentemente pelo equipe do *High-Z Supernova Search Team* liderados por Adam Riess, Peter Garnavich e Brian P. Schmidt [2]. Os dois grupos adotaram uma nova metodologia na caça de supernovas. No lugar de observarem uma única galáxia com um grande telescópio, como era feito até então, eles registram duas imagens consecutivas da mesma região do céu separadas por um intervalo de três semanas, envolvendo cerca de 1000 galáxias em diferentes distâncias. O intervalo de três semanas é devido ao fato de a explosão de supernova tipo Ia chegar ao seu brilho máximo exatamente neste período, após o qual a intensidade decresce rapidamente e supernovas distantes se tornam invisíveis. Repetindo-se a mesma estratégia para 100 regiões distintas teremos no total cerca de 100.000 galáxias observadas. Após o registro das duas imagens por região, estas são superpostas e qualquer ponto luminoso adicional é um bom candidato a supernova, um evento que deve ser altamente provável de acontecer devido ao grande número de galáxias observadas. Uma vez identificado o ponto adicional, aponta-se imediatamente o telescópio para o candidato a supernova e determina-se a sua luminosidade absoluta, o que permite calcular a sua distância até nós, como veremos no capítulo 2 desta tese.

Desta grande massa de dados infere-se que as supernovas mais distantes

apresentam uma luminosidade aparente inferior à esperada se o Universo estivesse expandindo a uma taxa constante, sugerindo que o Universo entrou recentemente numa fase de expansão acelerado, como também será discutido no capítulo 2 desta tese.

Após a descoberta de que o Universo atualmente passa por uma fase de expansão acelerada, passou a ser importante descobrir o quanto acelerado estava o Universo, pois, se a aceleração fosse muito grande, os modelos cosmológicos apresentariam soluções fisicamente inaceitáveis que violariam várias condições de energia, apresentando instabilidades em perturbações clássicas [3] e decaimentos de vácuo potencialmente catastróficos do ponto de vista quântico [4]. Utilizando-se apenas dados de supernovas, verificou-se na época que os dados se ajustavam razoavelmente ao regime para o qual tínhamos até $w = p/\rho < -10$ [5] no pior dos casos ¹, extrapolando totalmente a condição sobre a equação de estado $w > -1$ que garante a consistência dos modelos cosmológicos com base no respeito às várias condições de energia da relatividade geral. Na literatura convencionou-se chamar este estado de forte aceleração de regime superacelerado.

Como um pesadelo para os mais conservadores, verificou-se que mesmo combinando dados de supernova com os dados da radiação cósmica de fundo (CMB, *Cosmic Background Radiation*) fornecidos pelo WMAP [6], o regime superacelerado $w = p/\rho < -1$ ainda era o que melhor se ajustava aos dados [7]. Embora os resultados obtidos em [7], $w = -1.02 \left(\begin{smallmatrix} +0.13 \\ -0.19 \end{smallmatrix} \right)$, favoreçam bastante a constante cosmológica ($w = -1$), os modelos com campo escalar, também conhecidos como modelos de quintessência [8, 9], levam vantagem sobre a constante cosmológica, pois além de também se ajustarem aos dados observacionais, eles não têm o problema da incompatibilidade entre o valor medido da densidade de energia de vácuo e o valor calculado da constante cosmológica. Estes fatos citados e outras questões observacionais como as levantadas em [10] parecem favorecer a existência de formas mais exóticas de

¹ p e ρ são, respectivamente, a pressão e a energia do fluido cosmológico, como será discutido no capítulo 1.

energia no Universo que respondam pela aceleração atualmente observada.

Apesar da maioria das medidas não descartar a possibilidade de o Universo estar passando por um regime superacelerado, está cada vez mais claro que a constante cosmológica é fortemente favorecida. Na verdade, o máximo que se pode afirmar, baseado nos dados do WMAP, é que a constante cosmológica é necessária para a descrição da evolução do Universo desde o instante em que ocorreu a superfície de último espalhamento, que é o momento em que os fótons que formam a radiação cósmica do fundo de microondas foram liberados, ainda que, efetivamente, a constante cosmológica passe a ter papel dominante, induzindo a expansão acelerada, somente em tempos muito mais recentes. O período anterior à superfície de último espalhamento ainda é uma grande incógnita. No entanto, também parece evidente que a existência da constante cosmológica no universo primordial é problemática devido, principalmente, ao grave problema de ajuste-fino que ela possui. Neste cenário, os modelos de quintessência não-minimamente acoplados com soluções tipo *tracker* são uma alternativa promissora à constante cosmológica, visto que, no mínimo, amenizam alguns de seus problemas, conforme será visto no capítulo 2. O quadro qualitativo da evolução do Universo que as observações atualmente parecem indicar é o seguinte: a componente responsável pela aceleração da expansão do Universo (a chamada energia escura), que pode ser descrita por um campo escalar, seria subdominante no universo primordial e apresentaria um comportamento dinâmico tendendo à constante cosmológica em algum instante após o desacoplamento dos fótons na superfície de último espalhamento.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 1, fazemos uma introdução geral à Cosmologia e apresentamos alguns aspectos cinemáticos e dinâmicos do Modelo Cosmológico Padrão. No capítulo 2, tratamos da expansão acelerada do Universo atribuída a uma nova componente dinâmica genericamente denominada de *energia escura*. Tratamos também de dois candidatos à energia escura propostos na literatura, a constante cosmológica e os modelos de quintessência. Em particular, consideramos modelos

do tipo *tracking* por amenizarem bastante o problema do ajuste-fino e o problema da coincidência. No capítulo 3, estudamos os modelos de quintessência acoplados à gravidade como fortes candidatos a explicar os dados observacionais que sugerem que o Universo passa na verdade por um regime levemente superacelerado tal que $w = p/\rho < -1$. Estes modelos são uma alternativa aos modelos do tipo *phantom*, visto que o regime superacelerado é obtido naturalmente devido à simples presença do termo de acoplamento não-mínimo. Os resultados são obtidos apenas para o caso particular do modelo conformalmente acoplado. No capítulo 4 apresentamos uma contribuição original nossa em que verificamos a possibilidade de se construir modelos baseados em acoplamentos não-mínimos mais gerais com soluções no regime superacelerado sem instabilidades clássicas nem quânticas.

Nesta tese adotamos a assinatura $(-, +, +, +)$ e utilizamos sempre o sistema natural ($c = \hbar = 1$) de unidades a menos que um outro sistema seja especificado.

Capítulo 2

Modelo Cosmológico Padrão

Apesar de ainda não termos um modelo cosmológico definitivo, convecionou-se chamar de Modelo Cosmológico Padrão a teoria do cosmos baseada na Teoria do Big Bang (TBB). Os motivos para a denominação “Padrão” são os extraordinários sucessos que a TBB obteve desde o seu surgimento. O primeiro grande sucesso da TBB foi explicar os dados observacionais que Edwin Hubble obteve em 1929 no recém construído observatório do Monte Wilson que mostraram uma característica contrária à idéia mais aceita na época de que o Universo era estático. Hubble mostrou que as galáxias próximas se afastavam de nós com velocidades que cresciam linearmente com a distância que nos separavam delas [11]. Obviamente, esse resultado mostrava que o Universo sofria uma expansão progressiva. Outro grande sucesso da TBB foi a previsão, feita por George Gamov e colaboradores no final dos anos 40, da existência de uma radiação de fundo em microondas que permearia todo o Universo [12, 13] e que foi confirmada em 1964 por Arno Penzias e Robert Wilson enquanto trabalhavam com antenas de comunicação para monitorar satélites artificiais. Eles notaram que as antenas captavam um certo ruído em microondas com uma intensidade que não mudava mesmo quando variavam a posição em que apontavam a antena. Era a radiação cósmica de fundo prevista por Gamov. Outro grande marco

da TBB foi a explicação para a abundância de elementos muito leves, que ficou conhecida como Nucleossíntese Primordial.

Na TBB, o Universo consiste, inicialmente, em um gás quente concentrado numa região diminuta e com densidade de energia arbitrariamente alta que começa a se resfriar quando inicia-se um processo de expansão que, ao contrário do que somos levados a pensar pelo próprio nome do modelo, não está associado a nenhum mecanismo de explosão onde, de fato, a expansão inicial ocorreria subitamente. Na verdade, como a expansão inicial do Universo afeta tanto a matéria como a própria estrutura do espaço-tempo, ela deve ocorrer de uma maneira homogênea e de uma forma bem mais suave que uma explosão.

Além disso, o Universo é composto por várias componentes, correspondendo às várias espécies de partículas presentes. No início, a densidade de energia é dominada por partículas relativísticas, numa época conhecida como era da radiação ou era do Big Bang Quente (BBQ). Este período dura até que, posteriormente, a densidade de energia do Universo passa a ser dominada por partículas não-relativísticas, numa época conhecida com era da matéria ou era do Big Bang Frio (BBF). Este período vai até o momento, muito recente numa escala cosmológica, em que o Universo começa a acelerar devido a uma nova componente dinâmica de pressão negativa cuja natureza ainda é desconhecida.

2.1 Princípio Cosmológico e a Métrica de Robertson-Walker

Princípio Cosmológico

No início da construção da cosmologia moderna os físicos se depararam com o seguinte problema: como definir um conjunto de observadores que, ao

acompanharem a evolução do cosmos, tivessem a mesma interpretação das propriedades observadas do Universo? A solução encontrada foi a adoção do *princípio cosmológico*, inicialmente formulado por Edward A. Milne (1896-1950) em meados da década de 1930. Na formulação atual, o princípio cosmológico estabelece que, em grandes escalas, o *Universo é homogêneo e isotrópico*. Isto define imediatamente um conjunto de observadores para o qual o Universo apresenta as mesmas características quando observado de qualquer ponto do espaço e em qualquer direção. Tais observadores são conhecidos como observadores *comóveis*, pois são definidos por um sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) tal que, para um dado tempo cósmico t_1 , suas coordenadas espaciais (r_1, θ_1, ϕ_1) permanecem constantes ao longo de sua geodésica, se nenhuma força externa atuar sobre eles.

Métrica de Robertson-Walker

Como vimos, a suposição de homogeneidade e isotropia do 3-espaço define uma classe preferencial de observadores, i.e., aqueles observadores para os quais o Universo parece homogêneo e isotrópico. Qualquer outro observador que, eventualmente, esteja se movendo em relação a essa classe fundamental de observadores, afirmaria que o Universo é anisotrópico. Seja (t, x^α) o sistema de coordenadas apropriado para essa classe de observadores fundamentais. O elemento de linha mais geral pode ser expresso por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{00} dt^2 + 2g_{0\mu} dt dx^\mu - \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.1)$$

onde γ_{ij} é a métrica positiva definida do 3-espaço. A isotropia implica que os $g_{0\mu}$'s devem se anular; caso contrário, eles fixariam uma direção particular no espaço relacionada a um 3-vetor a_μ com componentes $g_{0\mu}$. Além disso, no sistema de coordenadas determinado por estes observadores fundamentais, podemos usar o tempo próprio dos relógios transportados por estes observadores para rotular as superfícies tipo-espaço. Essa escolha da coordenada de tempo implica que $g_{00} = 1$. Implementando tais

considerações, o elemento de linha acima pode ser reescrito como

$$ds^2 = dt^2 - \gamma_{ij} dx^i dx^j \equiv dt^2 - dl^2, \quad (2.2)$$

onde dl^2 é o elemento de linha do 3-espaço. A hipótese de isotropia, que implica simetria esférica, permite-nos escrever o elemento de linha dl^2 como sendo

$$dl^2 = R^2(t) [\lambda^2(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (2.3)$$

onde $R(t)$ é o fator de escala e $\lambda(r)$ uma função arbitrária a ser determinada.

Pode-se mostrar que em um espaço-tempo maximalmente simétrico o tensor de Ricci é dado por [14]

$$R_{\mu\nu} = \frac{6K}{R^2(t)} g_{\mu\nu}, \quad (2.4)$$

onde K é uma constante que representa a curvatura do espaço. Por outro lado, as componentes não-nulas do tensor de Ricci para a 3-métrica (2.3) são

$$R_{11} = \frac{2}{r\lambda} \frac{d\lambda}{dr}, \quad R_{22} = \csc^2 \theta R_{33} = 1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{r}{\lambda^3} \frac{d\lambda}{dr}. \quad (2.5)$$

Combinando as Eqs.(2.4) e (2.5) vemos que $\lambda(r) = 1/(1 - Kr^2)$, onde K pode ser positivo, negativo ou nulo, possuindo, no entanto, um valor arbitrário. Para nos livrarmos desta arbitrariedade vamos redefinir a coordenada radial tal que ela absorva a magnitude de K . Assim, seja $r^* = |K|^{1/2} r$ e $k \equiv K/|K|$ com $K \neq 0$. Reescalando o fator de escala $R(t)$ por

$$a(t) = \begin{cases} R(t)/|K|^{1/2} & \text{se } K \neq 0 \\ R(t) & \text{se } K = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

obtemos o elemento de linha na forma de Robertson-Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right], \quad (2.7)$$

onde podemos ter $k = -1, 0, +1$ correspondendo, respectivamente, a espaços com topologia aberta e geometria hiperbólica, topologia aberta e geometria plana, e topologia fechada e geometria esférica.

Uma consequência deste sistema é que a medida da distância entre dois pontos é proporcional ao fator de escala universal $a(t)$. Portanto, a distância de um dado ponto comóvel, em um instante t qualquer, medida a partir de nossa localização, pode ser escrita como

$$r(t) = r(t_0)a(t), \quad (2.8)$$

onde $r(t_0)$ são as distâncias comóveis observadas hoje.

2.2 Aspectos Cinemáticos

A primeira coisa que faremos nesta seção é definir uma medida do tamanho do Universo que está em contato causal. Seja um observador com coordenadas comóveis (r_0, θ_0, ϕ_0) , para quais valores de (r, θ, ϕ) um sinal de luz emitido em t alcançaria o observador em t_0 ? Devido a homogeneidade do espaço podemos escolher, sem perda de generalidade, $r_0 = 0$. Como um sinal de luz satisfaz a equação geodésica $ds^2 = 0$, as geodésicas passando por $r_0 = 0$ são linhas com θ e ϕ constantes tal que $d\theta = d\phi = 0$. Portanto, visto que a isotropia do espaço torna irrelevante a escolha de uma direção (θ_0, ϕ_0) , um sinal de luz emitido da posição coordenada (r_H, θ_0, ϕ_0) em $t = 0$ alcançaria $r_0 = 0$ em um instante t é determinado por

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_H} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2.9)$$

A distância própria para o horizonte medida hoje é

$$d_{hor}(t) = \int_0^t \sqrt{g_{rr}} dr = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (2.10)$$

Se $d_{hor}(t_0)$ é finito, então nosso cone de luz passado é limitado por um *horizonte de partículas* representando a fronteira entre o Universo visível e a parte do Universo cujos sinais de luz emitidos não nos alcançam, i.e., com a parte do Universo que não temos contato causal.

Fator de escala e redshift

Considere o movimento geodésico de uma partícula. A equação do movimento geodésico é [15]

$$\frac{du^\rho}{d\lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho u^\mu \frac{dx^\nu}{dx^\lambda} = 0, \quad (2.11)$$

onde $u^\rho \equiv dx^\rho/d\lambda$ é a 4-velocidade da partícula com respeito ao sistema de referência comóvel e λ é um parâmetro afim. A 4-velocidade pode ser expressa em termos da 3-velocidade ordinária $v^i \equiv dx^i/dt$ pela relação familiar $u^\rho = (u^0, u^i) = (\gamma, \gamma v^i)$ onde $v^2 = \gamma_{i,j} v^i v^j$ e $\gamma \equiv (1 - v^2)^{-1/2}$. Se escolhermos o parâmetro afim como sendo o comprimento próprio, $d\lambda = ds$, a componente $\rho = 0$ da equação geodésica (2.11) para a métrica de Robertson-Walker fornecerá a seguinte relação entre velocidade e fator de escala

$$\frac{\dot{u}}{u} = -\frac{\dot{a}}{a}. \quad (2.12)$$

Lembrando que o 4-momento é $p^\rho = mu^\rho$, vemos que a magnitude do 3-momento de uma partícula se propagando livremente sofre um redshift proporcional a a^{-1} . A ausência do parâmetro afim na Eq.(2.12) significa que este resultado é válido também para partículas sem massa onde $ds = 0$

A 3-velocidade v de um observador físico que está inicialmente em um instante t e move-se não-relativisticamente em relação ao sistema comóvel até um momento posterior t_0 pode ser obtida diretamente integrando-se a Eq.(2.12). Fazendo isso obtemos,

$$v_0 = v \frac{a(t)}{a(t_0)}. \quad (2.13)$$

Este resultado nos diz que um observador em queda livre vai para o repouso num sistema comóvel mesmo se ele tiver velocidade inicial não-nula com respeito ao próprio sistema comóvel.

A luz emitida por um objeto distante pode ser vista como fótons propagando-se livremente. Como o comprimento de onda de um fóton é inversamente proporcional ao seu momento ($\lambda = h/p$), que é proporcional à

a^{-1} , o comprimento de onda num instante t_0 , denotado por λ_0 , mudará em um instante posterior t pela razão

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{a(t)}{a(t_0)}. \quad (2.14)$$

Como o Universo expande, o comprimento de onda de um fóton propagando-se livremente aumenta, da mesma maneira que todas as distâncias físicas aumentam com a expansão.

Por fim, introduziremos uma nova variável relacionada ao fator de escala $a(t)$ que é mais diretamente observável: o *redshift* de um objeto, z , definido em termos da relação entre o comprimento de onda detectado λ_0 e o comprimento de onda emitido λ

$$z \equiv \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda} \quad \longrightarrow \quad 1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (2.15)$$

Qualquer aumento (diminuição) em $a(t)$ conduz a uma desvio para o vermelho (para o azul) da luz de fontes distantes. Por isso, visto que atualmente as observações mostram que o espectro de galáxias distantes é visto deslocado para o vermelho, podemos concluir que o Universo está expandindo e a Eq.(2.15) nos diz que o desvio para o vermelho, que observamos em escalas cosmológicas, é uma consequência direta apenas da expansão do Universo. Além disso, podemos concluir também, de acordo com a Eq.(2.8), que todas as distâncias comóveis são igualmente “esticadas” pelas expansão do Universo por um fator proporcional a $1 + z$.

Lei de Hubble

Para a luz emitida por galáxias próximas, temos $t_0 - t \approx d$, onde d é a distância própria atual para a galáxia. Portanto, para galáxias próximas, temos

$$a(t_0) \simeq a(t) + (t_0 - t)\dot{a}. \quad (2.16)$$

Assim, usando (2.15) obtemos a relação entre a distância até um objeto e seu *redshift*

$$z \simeq Hd \simeq 10^{-28} \text{cm}^{-1} \times d, \quad (2.17)$$

que é exatamente a relação linear *redshift* -distância descoberta por Hubble. O *redshift* de galáxias distantes desvia da lei linear acima, dependendo de como $a(t)$ varia com t . A quantidade H é o *parâmetro de Hubble* ou, como é mais conhecido, *constante de Hubble*, apesar de não ser constante no tempo, e é definido por

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}. \quad (2.18)$$

Expandindo $a(t)$ em série de Taylor para t próximo de t_0 , obtemos

$$a(t) = a(t_0) \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t - t_0)^2 + \dots \right], \quad (2.19)$$

onde

$$H_0 = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}, \quad q_0 = \frac{-\ddot{a}(t_0)}{\dot{a}^2(t_0)} a(t_0) = \frac{-\ddot{a}(t_0)}{a_0 H_0^2} \quad (2.20)$$

são o valor atual do *parâmetro de Hubble* e da *desaceleração*, respectivamente.

A incerteza no parâmetro de Hubble medido hoje, H_0 , é parametrizada por uma quantidade h definida por $H_0 = 100 h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \simeq 3000/h \text{ Mpc}$. As últimas medidas da radiação cósmica de fundo feitas pelo satélite WMAP indicam que $h = 0.71 \pm 0.04$ [16]. Apresentamos, na Fig.(2.1), vários resultados destas observações.

O tempo de Hubble representa a escala de tempo característica do fator de escala e é um observável fundamental na medida da idade do Universo. O valor atual do tempo de Hubble é, $H_0^{-1} \simeq 9.778 \times h^{-1} \text{ Ganos}$. Por outro lado, o raio de Hubble dá uma estimativa do tamanho do Universo observável que é dado pela distância que a luz viajou desde o Big Bang até hoje e que define o que chamamos de horizonte de partículas. Seu valor atual é $cH_0^{-1} \simeq 2.998 \times h^{-1} \text{ Mpc}$.

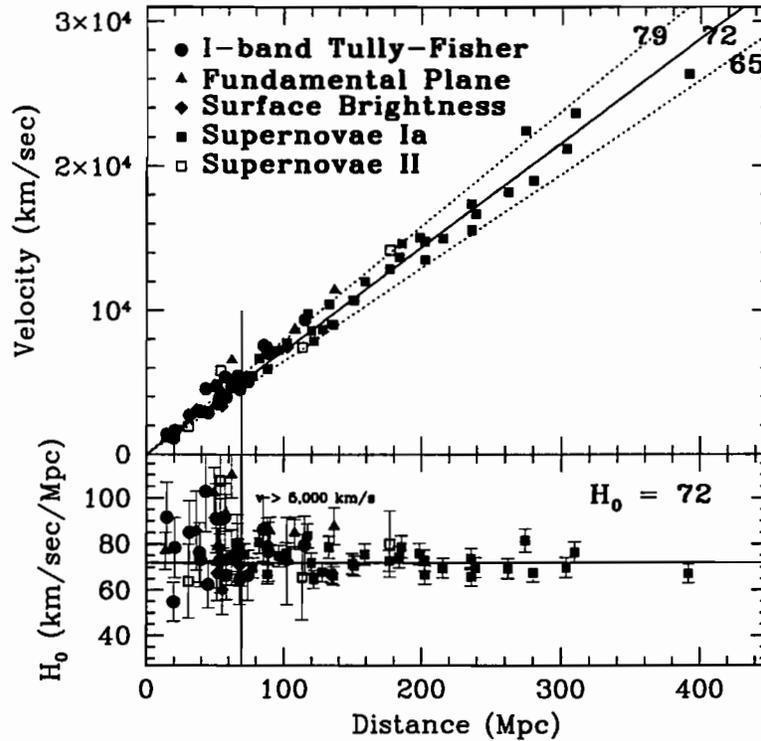


Figura 2.1: Apresentamos aqui cinco medidas independentes do parâmetro de Hubble em baixos *redshifts*. Na parte inferior apresentamos a convergência das medidas para um valor típico, $H_0 \simeq 72 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$. (Reproduzido de [17])

Distância de luminosidade

Suponha que uma fonte produz uma luminosidade absoluta \mathcal{L} ¹, sua *distância de luminosidade* é definida em termos do fluxo \mathcal{F} (energia por tempo por área) medido por um detector

$$d_L^2 \equiv \frac{\mathcal{L}}{4\pi\mathcal{F}}, \quad (2.21)$$

Se a fonte localizada na coordenada comóvel r emite luz no instante t e um detector na coordenada comóvel $r = 0$ detecta a luz em $t = t_0$, já levando

¹A luminosidade absoluta é definida como a energia por unidade de tempo produzida por uma fonte no seu referencial de repouso

em conta o efeito da expansão em todo o processo, a conservação de energia ($\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$) implica que

$$\mathcal{F} = \frac{\mathcal{L}}{4\pi a_0^2 r^2} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right) = \frac{\mathcal{L}}{4\pi a_0^2 r^2} (1+z)^2 \quad \therefore \quad d_L = r^*(1+z), \quad (2.22)$$

onde o termo $r^* = a_0 r$ é a distância própria comóvel do observador até a fonte. Podemos notar que na ausência de expansão ($z = 0$) a distância de luminosidade é simplesmente a distância até a fonte.

A distância de luminosidade d_L será um observável se a luminosidade absoluta \mathcal{L} for conhecida e é de extrema importância na determinação dos parâmetros cosmológicos. Determinar luminosidades absolutas envolve o uso de “velas padrões”, i.e., classes de objetos brilhantes o suficiente para serem vistos em distâncias cosmológicas e cujas luminosidades absolutas podem ser determinadas.

2.3 Aspectos dinâmicos

Até agora tratamos de questões essencialmente cinemáticas. No entanto, para calcular $a(t)$ precisamos fazer alguma suposição sobre o conteúdo de matéria do Universo e então derivar a métrica de Robertson-Walker como uma solução das equações de campo da Relatividade Geral. Nas próximas seções vamos estudar os modelos desenvolvidos por Alexander Friedmann (1888-1925), George Lemaître (1894-1966) e Willem de Sitter (1872-1934) o primeiro a obter soluções não-estáticas para as equações de campo da Relatividade Geral.

Tensor Energia-Momento

Inicialmente vamos supor que estamos em um sistema de referência no qual o fluido está em repouso, i.e., estamos nos movimentando junto com fluido. A hipótese de fluido perfeito ² nos diz que o tensor energia-momento tem a

²O fluido é chamado perfeito devido a ausência de processos dissipativos.

forma característica da simetria esférica

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

onde os coeficientes p e ρ são a pressão e a densidade própria de energia, respectivamente. Agora vamos para um sistema em repouso no laboratório e consideremos que um ponto qualquer do fluido neste sistema se move com velocidade \vec{v} . A conexão entre as coordenadas comóveis \tilde{x}^μ e as coordenadas do laboratório x^ν é tal que $x_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu(\vec{v}) \tilde{x}_\nu$, onde $\Lambda_\mu{}^\nu(\vec{v})$ são os "boosts" de Lorentz. Por outro lado, o tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ no sistema de laboratório é $T_{\mu\nu} = \Lambda_\mu{}^\alpha(\vec{v}) \Lambda_\nu{}^\beta(\vec{v}) T_{\alpha\beta}$, ou explicitamente

$$T_{00} = (\rho + p\vec{v}^2) \frac{1}{1 - \vec{v}^2}, \quad (2.24)$$

$$T_{i0} = (\rho + p) \frac{v_i}{1 - \vec{v}^2}, \quad (2.25)$$

$$T_{ij} = p\delta_{ij} + (\rho + p) \frac{v_i v_j}{1 - \vec{v}^2}. \quad (2.26)$$

Podemos reescrever as Eqs.(2.24)-(2.26) numa única equação como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

onde u^μ é a 4-velocidade de um ponto do fluido medida no sistema do laboratório.

Usando as identidades de Bianchi, conforme [18], podemos mostrar que o divergente do tensor energia-momento (2.27) se anula. Isto nos leva a seguinte equação de continuidade

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.28)$$

Note que a componente (0 - 0) da Eq.(2.28) fornece a seguinte relação entre a densidade energia do Universo e o parâmetro de Hubble H

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (2.29)$$

que corresponde à primeira lei da termodinâmica e, portanto, representa uma lei de conservação do conteúdo de energia do Universo. O 2º termo está ligado a diluição da densidade de energia ρ devido à expansão, enquanto o 3º termo representa o trabalho feito pela pressão do fluido.

Equação de Estado

Naturalmente, visto que modelamos o Universo como um sistema termodinâmico, devemos definir uma relação entre os parâmetros que caracterizam o sistema quando em equilíbrio para podermos derivar a evolução dinâmica do fator de escala $a(t)$. Isto define o que chamamos de *equação de estado* para o fluido, $p = p(\rho)$. Tal equação de estado tem a forma padrão

$$p = w\rho, \quad (2.30)$$

onde w define a natureza do fluido.

Se o Universo está preenchido com um fluido sem pressão de matéria não-relativística (*dust*), então $p \ll \rho$ e portanto $w = 0$. No caso de radiação, a equação de estado para um gás relativístico ideal é $p = 1/3\rho$, e temos que $w = 1/3$. Outra equação de estado interessante é $p = -\rho$, correspondendo a $w = -1$. Este caso está associada à constante cosmológica, a qual, numa interpretação moderna, está do lado direito das equações de Einstein e representa a *energia de vácuo* contribuindo para a densidade de energia total com:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.31)$$

Integrando a Eq.(2.29) podemos vemos que

$$\rho a^{3(1+w)} = const. \quad (2.32)$$

Em particular temos, para *dust*

$$w = 0 \longrightarrow \rho_{mat} a^3 = const \longrightarrow \rho_{mat} = \rho_{mat,0} (1+z)^3; \quad (2.33)$$

para um Universo dominado por radiação

$$w = 1/3 \longrightarrow \rho_{rad} a^4 = const \longrightarrow \rho_{rad} = \rho_{rad,0} (1+z)^4; \quad (2.34)$$

e para energia de vácuo

$$w = -1 \longrightarrow \rho_\lambda = \rho_{\lambda,0} = \text{const} . \quad (2.35)$$

A Eq.(2.33) expressa a conservação da massa de repouso e a Eq.(2.34) nos mostra que a densidade de energia da radiação decai mais rapidamente do que a^{-3} , sendo portanto dominante no universo primordial. O fator a^{-4} pode ser pensado como uma combinação do fator a^{-3} que expressa a diminuição do número de fótons (densidade de fótons), enquanto o fator a^{-1} ocorre devido ao fato do Universo está em expansão, o que foi comprovado pela observação do fenômeno do desvio para o vermelho dos fótons (*redshift*). A Eq.(2.35) expressa claramente o fato que, no passado, a energia de vácuo era subdominante.

2.3.1 Modelo de Einstein-de Sitter-Friedmann-Lemaître

A expansão do Universo é determinada pelas equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} , \quad (2.36)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} \quad e \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

são, respectivamente, o *tensor de Ricci* e o *escalar de Ricci*, e Λ é a *constante cosmológica*. Para a métrica de RW (2.7) as componentes não-nulas do *tensor* e do *escalar de Ricci* são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} , & R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right]g_{ij} , \\ R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right] . \end{aligned} \quad (2.38)$$

A componente (0-0) das equações de Einstein (2.36), dá a chamada *equação de Friedmann*

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.39)$$

e a componente ($i - i$) dá

$$2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -8\pi G p - \frac{k}{a^2} + \Lambda. \quad (2.40)$$

Combinando (2.39) e (2.40), obtemos:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \quad (2.41)$$

As equações acima são bastante gerais e permitem-nos obter não apenas as soluções que caracterizam o modelo estático de Einstein como também as soluções dinâmicas obtidas por *Friedmann*, *Lemaître* e *de Sitter*. Nesta capítulo, estudaremos com detalhes apenas o modelo de *Friedmann*. Porém, devido a relevância histórica, resumimos no quadro abaixo os principais aspectos dos modelos cosmológicos desenvolvidos por *Einstein*, *de Sitter* e *Lemaître* para o caso de um Universo dominado por matéria tipo *dust*. Note que o modelo de *Einstein* é finito e não-limitado, com curvatura e densidade de energia positivas. O modelo de *de Sitter* é essencialmente vazio e plano e embora não sirva como modelo cosmológico realista devido a ausência de matéria, é sempre lembrado por ser a solução assintótica de qualquer modelo com $\Lambda > 0$ quando $a \rightarrow \infty$. No modelo de *Lemaître* o espaço é positivamente curvado e o Universo possui mais energia que no modelo estático de Einstein. Lembrando que para todos eles a constante cosmológica é positiva, temos

$$\begin{aligned} k = +1, \rho_{tot} > 0, & \implies a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}, H = 0 & \rightarrow \text{Einstein}, \\ k = 0, \rho_{tot} = 0, & \implies a \propto e^{Ht}, H = \left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{1/2} & \rightarrow \text{de Sitter}, \\ k = +1, \rho_{tot} > \rho_c, & \implies a \propto \sinh(\sqrt{\Lambda}t), H \propto \coth(\sqrt{\Lambda}t) & \rightarrow \text{Lemaître}. \end{aligned}$$

Vejamos algumas conseqüências imediatas das Eqs.(2.39)-(2.41) para o caso $\Lambda = 0$. No próximo capítulo analisaremos com mais detalhes o caso $\Lambda \neq 0$. Hoje temos $\dot{a} \geq 0$; se no passado $\rho + 3p$ era sempre positivo, então \ddot{a} era sempre negativo, e portanto em algum tempo finito no passado $a(t)$ era nulo e a densidade de energia era infinita; nesse instante define-se o que

conhecemos como *singularidade do Big Bang*. Da equação de Friedmann (2.39), vemos que, para um dado valor do parâmetro de Hubble, existe uma densidade particular, conhecida como *densidade crítica* ρ_c , para a qual o Universo é espacialmente plano. Isto é dado por

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (2.42)$$

sendo, portanto, uma função do tempo. Seu valor atual é $\rho_{c,0} = 1.88 \times 10^{-29} \text{ h}^2 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. É usualmente mais simples medir a densidade de energia como uma fração da densidade crítica, definindo o parâmetro de densidade

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.43)$$

Isso pode ser aplicado separadamente para vários tipos diferentes de matéria, tais como matérias relativística (radiação) e não-relativística, matéria escura e energia escura. Com isso, o parâmetro de densidade total é, então, expresso como $\Omega_{tot} = \sum_i (\rho_i/\rho_c)$.

Usando a Eq.(2.43), a equação de Friedmann (2.39) pode ser reescrita como se segue

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3H^2} - 1 \equiv \Omega_{tot} - 1, \quad (2.44)$$

onde $\Omega_{tot} = \Omega_{mat} + \Omega_{rad}$ para um Universo constituído por matéria, radiação e energia vácuo. Visto que $H^2 a^2 \geq 0$, existe uma correspondência entre o sinal de k , que define a geometria do 3-espaco, e o sinal de $(\Omega_{tot} - 1)$

| | | | |
|----------|------------|--------------------|-----------------------|
| $k = -1$ | \implies | $\Omega_{tot} < 1$ | geometria hiperbólica |
| $k = 0$ | \implies | $\Omega_{tot} = 1$ | geometria plana |
| $k = +1$ | \implies | $\Omega_{tot} > 1$ | geometria esférica |

O valor atual de Ω_{tot} será denotado por Ω_0 e, segundo sugerem observações de supernovas em altos *redshifts*, tem um valor entre 0.2 e 0.5.

Reescalando a definição do parâmetro de desaceleração q da Eq.(2.20) e usando as Eqs.(2.39) e (2.41), podemos reescrevê-lo como

$$q = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} + w \right) \Omega. \quad (2.45)$$

Isso mostra que $w = -1/3$ é um valor crítico, separando modelos qualitativamente diferentes. Um período da evolução tal que $w < -1/3$ ($q < 0$) é chamado *inflacionário*. Para o valor atual do parâmetro de desaceleração q_0 , vemos que para um modelo dominado por matéria temos $q_0 = \Omega_0/2$, para um modelo dominado por radiação temos $q_0 = \Omega_0$, e para um modelo dominado pelo vácuo temos $q_0 = -\Omega_0$, sendo que neste caso a expansão é acelerada. $\ddot{a} > 0$.

Para calcular o parâmetro de densidade Ω em um *redshift* arbitrário z como uma função do parâmetro de densidade atual Ω_0 , podemos combinar a expressão (2.43) com as Eqs.(2.39) e (2.41), para obter a relação

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_0(1+z)^{1+3w}}{(1-\Omega_0) + \Omega_0(1+z)^{1+3w}}. \quad (2.46)$$

Note que se $\Omega_0 > 1$, então $\Omega(z) > 1$ para qualquer z ; caso contrário, se $\Omega_0 < 1$, então $\Omega(z) < 1$ para qualquer z ; por outro lado, se $\Omega_0 = 1$, então $\Omega(z) = 1$ para qualquer z . A razão para isso é que a expansão não pode mudar o sinal do parâmetro de curvatura k . Pode-se notar também que, quando $z \rightarrow \infty$, i.e., quando nos aproximamos do Big Bang, vemos que $\Omega(z) \rightarrow 1$ para $\Omega(z) > -1/3$.

Soluções para a Equação de Friedmann

A título de ilustração vamos agora resolver exatamente as equações de Friedmann para o caso de um Universo dominado por matéria sem pressão, *dust*. Não iremos obter as soluções das equações de Friedmann explicitamente para o caso de um Universo dominado por radiação para não nos tornarmos repetitivos, visto que podemos obter as soluções aplicando exatamente o mesmo procedimento que aplicaremos no caso de um Universo dominado por matéria tipo *dust*. Lembramos ainda que a era da radiação é relativamente curta quando comparada com a era da matéria, o que torna esta última mais importante no cálculo dos parâmetros cosmológicos. Consideremos, então, que a densidade de matéria, medida no instante atual pelo parâmetro Ω_0 é, em última análise, a grandeza responsável pelo comportamento dinâmico do

Universo. Assim, vamos reescrever a Eq.(2.39) com a ajuda das Eqs.(2.44) e (2.33) em função dos parâmetros observáveis H_0 e Ω_0 . Obtemos, então

$$\dot{a}^2 - H_0^2 \Omega_0 \frac{1}{a} + H_0^2(\Omega_0 - 1) = 0, \quad (2.47)$$

onde fizemos $a_0 = 1$.

Seja a transformação paramétrica

$$\begin{aligned} a &= c_1 \tilde{a} \\ t &= c_2 \tilde{t} \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Aplicando estas transformações na Eq.(2.48) e definindo as constantes da transformação convenientemente como sendo $c_1 = \Omega_0/(1 - \Omega_0)$ e $c_2 = H_0^{-1} \Omega_0/(1 - \Omega_0)^{3/2}$, podemos então escrever a equação de Friedmann na forma

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 - \frac{1}{\tilde{a}} = \pm 1, \quad (2.49)$$

sendo o sinal positivo adotado quando $\Omega_0 < 1$ e o sinal negativo adotado quando $\Omega_0 > 1$. A integração formal da Eq.(2.49) pode ser expressa na forma

$$\tilde{t} = \int_0^{\tilde{a}} \sqrt{\frac{\tilde{a}}{1 \pm \tilde{a}}} d\tilde{a} \quad (2.50)$$

e dependendo do sinal no denominador temos as soluções parametrizadas

$$a_{mat} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)} (1 - \cos \eta), \quad (2.51)$$

$$t_{mat} = \frac{H_0^{-1} \Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\eta - \sin \eta), \quad (2.52)$$

para $\Omega_0 > 1$ e

$$a_{mat} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)} (\cosh \eta - 1), \quad (2.53)$$

$$t_{mat} = \frac{H_0^{-1} \Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh \eta - \eta), \quad (2.54)$$

para $\Omega_0 < 1$. O parâmetro η é tal que seu valor atual dá o valor correto de $a(t_0)$.

O caso crítico ($\Omega_0 = 1$) pode ser resolvido de forma direta voltando para a Eq.(2.47) e tem como solução

$$a_{mat}(t) = \left(\frac{9H_0^2}{4}\right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (2.55)$$

Na Fig.(2.2) ilustramos essas três possíveis evoluções do Universo correspondendo aos diferentes sinais de k .

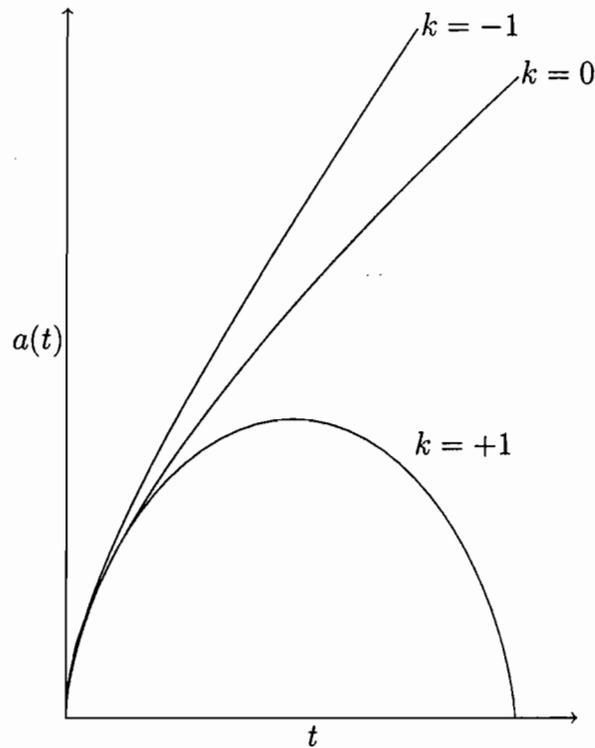


Figura 2.2: Soluções para matéria tipo *dust*

2.3.2 Escalas Características

Idade do Universo

Vamos fazer uma estimativa da idade do Universo considerando que o modelo apresentado nas seções anteriores é dominante até hoje. Com a ajuda das

que corresponde à primeira lei da termodinâmica e, portanto, representa uma lei de conservação do conteúdo de energia do Universo. O 2º termo está ligado a diluição da densidade de energia ρ devido à expansão, enquanto o 3º termo representa o trabalho feito pela pressão do fluido.

Equação de Estado

Naturalmente, visto que modelamos o Universo como um sistema termodinâmico, devemos definir uma relação entre os parâmetros que caracterizam o sistema quando em equilíbrio para podermos derivar a evolução dinâmica do fator de escala $a(t)$. Isto define o que chamamos de *equação de estado* para o fluido, $p = p(\rho)$. Tal equação de estado tem a forma padrão

$$p = w\rho, \quad (2.30)$$

onde w define a natureza do fluido.

Se o Universo está preenchido com um fluido sem pressão de matéria não-relativística (*dust*), então $p \ll \rho$ e portanto $w = 0$. No caso de radiação, a equação de estado para um gás relativístico ideal é $p = 1/3\rho$, e temos que $w = 1/3$. Outra equação de estado interessante é $p = -\rho$, correspondendo a $w = -1$. Este caso está associada à constante cosmológica, a qual, numa interpretação moderna, está do lado direito das equações de Einstein e representa a *energia de vácuo* contribuindo para a densidade de energia total com:

$$\rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi G}. \quad (2.31)$$

Integrando a Eq.(2.29) podemos vemos que

$$\rho a^{3(1+w)} = const. \quad (2.32)$$

Em particular temos, para *dust*

$$w = 0 \longrightarrow \rho_{mat} a^3 = const \longrightarrow \rho_{mat} = \rho_{mat,0} (1+z)^3; \quad (2.33)$$

para um Universo dominado por radiação

$$w = 1/3 \longrightarrow \rho_{rad} a^4 = const \longrightarrow \rho_{rad} = \rho_{rad,0} (1+z)^4; \quad (2.34)$$

e para energia de vácuo

$$w = -1 \quad \longrightarrow \quad \rho_\lambda = \rho_{\lambda,0} = \text{const} . \quad (2.35)$$

A Eq.(2.33) expressa a conservação da massa de repouso e a Eq.(2.34) nos mostra que a densidade de energia da radiação decai mais rapidamente do que a^{-3} , sendo portanto dominante no universo primordial. O fator a^{-4} pode ser pensado como uma combinação do fator a^{-3} que expressa a diminuição do número de fótons (densidade de fótons), enquanto o fator a^{-1} ocorre devido ao fato do Universo está em expansão, o que foi comprovado pela observação do fenômeno do desvio para o vermelho dos fótons (*redshift*). A Eq.(2.35) expressa claramente o fato que, no passado, a energia de vácuo era subdominante.

2.3.1 Modelo de Einstein-de Sitter-Friedmann-Lemaître

A expansão do Universo é determinada pelas equações de Einstein,

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} , \quad (2.36)$$

onde

$$R_{\mu\nu} = R^\sigma{}_{\mu\sigma\nu} \quad e \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.37)$$

são, respectivamente, o *tensor de Ricci* e o *escalar de Ricci*, e Λ é a *constante cosmológica*. Para a métrica de RW (2.7) as componentes não-nulas do *tensor* e do *escalar de Ricci* são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} , & R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}\right] g_{ij} , \\ R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right] . \end{aligned} \quad (2.38)$$

A componente (0-0) das equações de Einstein (2.36), dá a chamada *equação de Friedmann*

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.39)$$

e a componente $(i - i)$ dá

$$2 \left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = -8\pi G p - \frac{k}{a^2} + \Lambda . \quad (2.40)$$

Combinando (2.39) e (2.40), obtemos:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} . \quad (2.41)$$

As equações acima são bastante gerais e permitem-nos obter não apenas as soluções que caracterizam o modelo estático de Einstein como também as soluções dinâmicas obtidas por *Friedmann*, *Lemaître* e *de Sitter*. Nesta capítulo, estudaremos com detalhes apenas o modelo de *Friedmann*. Porém, devido a relevância histórica, resumimos no quadro abaixo os principais aspectos dos modelos cosmológicos desenvolvidos por *Einstein*, *de Sitter* e *Lemaître* para o caso de um Universo dominado por matéria tipo *dust*. Note que o modelo de *Einstein* é finito e não-limitado, com curvatura e densidade de energia positivas. O modelo de *de Sitter* é essencialmente vazio e plano e embora não sirva como modelo cosmológico realista devido a ausência de matéria, é sempre lembrado por ser a solução assintótica de qualquer modelo com $\Lambda > 0$ quando $a \rightarrow \infty$. No modelo de *Lemaître* o espaço é positivamente curvado e o Universo possui mais energia que no modelo estático de Einstein. Lembrando que para todos eles a constante cosmológica é positiva, temos

$$\begin{aligned} k = +1, \rho_{tot} > 0, & \implies a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}, H = 0 & \rightarrow \text{Einstein} , \\ k = 0, \rho_{tot} = 0, & \implies a \propto e^{Ht}, H = \left(\frac{\Lambda}{3} \right)^{1/2} & \rightarrow \text{de Sitter} , \\ k = +1, \rho_{tot} > \rho_c, & \implies a \propto \sinh(\sqrt{\Lambda}t), H \propto \coth(\sqrt{\Lambda}t) & \rightarrow \text{Lemaître} . \end{aligned}$$

Vejamos algumas conseqüências imediatas das Eqs.(2.39)-(2.41) para o caso $\Lambda = 0$. No próximo capítulo analisaremos com mais detalhes o caso $\Lambda \neq 0$. Hoje temos $\dot{a} \geq 0$; se no passado $\rho + 3p$ era sempre positivo, então \ddot{a} era sempre negativo, e portanto em algum tempo finito no passado $a(t)$ era nulo e a densidade de energia era infinita; nesse instante define-se o que

conhecemos como *singularidade do Big Bang*. Da equação de Friedmann (2.39), vemos que, para um dado valor do parâmetro de Hubble, existe uma densidade particular, conhecida como *densidade crítica* ρ_c , para a qual o Universo é espacialmente plano. Isto é dado por

$$\rho_c(t) \equiv \frac{3H^2(t)}{8\pi G}, \quad (2.42)$$

sendo, portanto, uma função do tempo. Seu valor atual é $\rho_{c,0} = 1.88 \times 10^{-29} \cdot h^2 g \cdot cm^{-3}$. É usualmente mais simples medir a densidade de energia como uma fração da densidade crítica, definindo o parâmetro de densidade

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (2.43)$$

Isso pode ser aplicado separadamente para vários tipos diferentes de matéria, tais como matérias relativística (radiação) e não-relativística, matéria escura e energia escura. Com isso, o parâmetro de densidade total é, então, expresso como $\Omega_{tot} = \sum_i (\rho_i/\rho_c)$.

Usando a Eq.(2.43), a equação de Friedmann (2.39) pode ser reescrita como se segue

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi G \rho}{3H^2} - 1 \equiv \Omega_{tot} - 1, \quad (2.44)$$

onde $\Omega_{tot} = \Omega_{mat} + \Omega_{rad}$ para um Universo constituído por matéria, radiação e energia vácuo. Visto que $H^2 a^2 \geq 0$, existe uma correspondência entre o sinal de k , que define a geometria do 3-espaço, e o sinal de $(\Omega_{tot} - 1)$

$$\begin{array}{lll} k = -1 & \implies & \Omega_{tot} < 1 \quad \text{geometria hiperbólica} \\ k = 0 & \implies & \Omega_{tot} = 1 \quad \text{geometria plana} \\ k = +1 & \implies & \Omega_{tot} > 1 \quad \text{geometria esférica} \end{array}$$

O valor atual de Ω_{tot} será denotado por Ω_0 e, segundo sugerem observações de supernovas em altos *redshifts*, tem um valor entre 0.2 e 0.5.

Reescalando a definição do parâmetro de desaceleração q da Eq.(2.20) e usando as Eqs.(2.39) e (2.41), podemos reescrevê-lo como

$$q = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} + w \right) \Omega. \quad (2.45)$$

Isso mostra que $w = -1/3$ é um valor crítico, separando modelos qualitativamente diferentes. Um período da evolução tal que $w < -1/3$ ($q < 0$) é chamado *inflacionário*. Para o valor atual do parâmetro de desaceleração q_0 , vemos que para um modelo dominado por matéria temos $q_0 = \Omega_0/2$, para um modelo dominado por radiação temos $q_0 = \Omega_0$, e para um modelo dominado pelo vácuo temos $q_0 = -\Omega_0$, sendo que neste caso a expansão é acelerada, $\ddot{a} > 0$.

Para calcular o parâmetro de densidade Ω em um *redshift* arbitrário z como uma função do parâmetro de densidade atual Ω_0 , podemos combinar a expressão (2.43) com as Eqs.(2.39) e (2.41), para obter a relação

$$\Omega(z) = \frac{\Omega_0(1+z)^{1+3w}}{(1-\Omega_0) + \Omega_0(1+z)^{1+3w}}. \quad (2.46)$$

Note que se $\Omega_0 > 1$, então $\Omega(z) > 1$ para qualquer z ; caso contrário, se $\Omega_0 < 1$, então $\Omega(z) < 1$ para qualquer z ; por outro lado, se $\Omega_0 = 1$, então $\Omega(z) = 1$ para qualquer z . A razão para isso é que a expansão não pode mudar o sinal do parâmetro de curvatura k . Pode-se notar também que, quando $z \rightarrow \infty$, i.e., quando nos aproximamos do Big Bang, vemos que $\Omega(z) \rightarrow 1$ para $\Omega_0 > -1/3$.

Soluções para a Equação de Friedmann

A título de ilustração vamos agora resolver exatamente as equações de Friedmann para o caso de um Universo dominado por matéria sem pressão, *dust*. Não iremos obter as soluções das equações de Friedmann explicitamente para o caso de um Universo dominado por radiação para não nos tornarmos repetitivos, visto que podemos obter as soluções aplicando exatamente o mesmo procedimento que aplicaremos no caso de um Universo dominado por matéria tipo *dust*. Lembramos ainda que a era da radiação é relativamente curta quando comparada com a era da matéria, o que torna esta última mais importante no cálculo dos parâmetros cosmológicos. Consideremos, então, que a densidade de matéria, medida no instante atual pelo parâmetro Ω_0 é, em última análise, a grandeza responsável pelo comportamento dinâmico do

Universo. Assim, vamos reescrever a Eq.(2.39) com a ajuda das Eqs.(2.44) e (2.33) em função dos parâmetros observáveis H_0 e Ω_0 . Obtemos, então

$$\dot{a}^2 - H_0^2 \Omega_0 \frac{1}{a} + H_0^2(\Omega_0 - 1) = 0, \quad (2.47)$$

onde fizemos $a_0 = 1$.

Seja a transformação paramétrica

$$\begin{aligned} a &= c_1 \tilde{a} \\ t &= c_2 \tilde{t} \end{aligned} \quad (2.48)$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias. Aplicando estas transformações na Eq.(2.48) e definindo as constantes da transformação convenientemente como sendo $c_1 = \Omega_0/(1 - \Omega_0)$ e $c_2 = H_0^{-1} \Omega_0/(1 - \Omega_0)^{3/2}$, podemos então escrever a equação de Friedmann na forma

$$\left(\frac{d\tilde{a}}{d\tilde{t}} \right)^2 - \frac{1}{\tilde{a}} = \pm 1, \quad (2.49)$$

sendo o sinal positivo adotado quando $\Omega_0 < 1$ e o sinal negativo adotado quando $\Omega_0 > 1$. A integração formal da Eq.(2.49) pode ser expressa na forma

$$\tilde{t} = \int_0^{\tilde{a}} \sqrt{\frac{\tilde{a}}{1 \pm \tilde{a}}} d\tilde{a} \quad (2.50)$$

e dependendo do sinal no denominador temos as soluções parametrizadas

$$a_{mat} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)} (1 - \cos \eta), \quad (2.51)$$

$$t_{mat} = \frac{H_0^{-1} \Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\eta - \sin \eta), \quad (2.52)$$

para $\Omega_0 > 1$ e

$$a_{mat} = \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)} (\cosh \eta - 1), \quad (2.53)$$

$$t_{mat} = \frac{H_0^{-1} \Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} (\sinh \eta - \eta), \quad (2.54)$$

para $\Omega_0 < 1$. O parâmetro η é tal que seu valor atual dá o valor correto de $a(t_0)$.

O caso crítico ($\Omega_0 = 1$) pode ser resolvido de forma direta voltando para a Eq.(2.47) e tem como solução

$$a_{mat}(t) = \left(\frac{9H_0^2}{4}\right)^{1/3} t^{2/3}. \quad (2.55)$$

Na Fig.(2.2) ilustramos essas três possíveis evoluções do Universo correspondendo aos diferentes sinais de k .

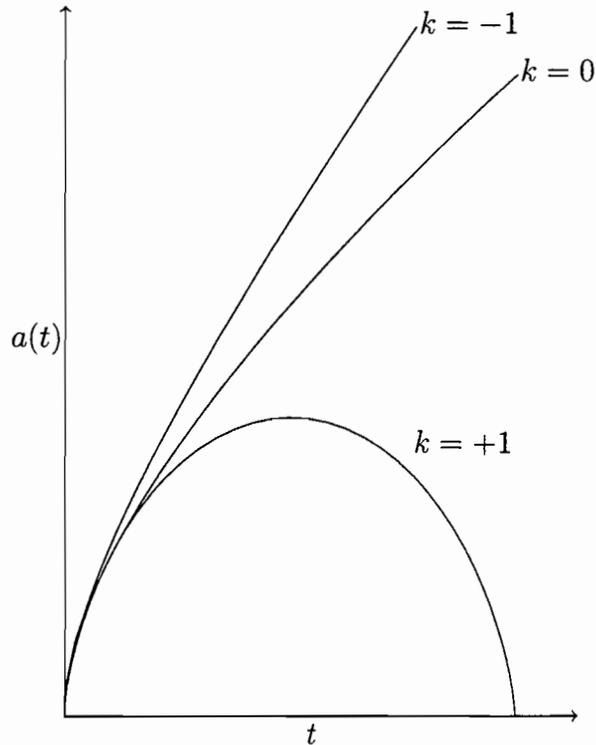


Figura 2.2: Soluções para matéria tipo *dust*

2.3.2 Escalas Características

Idade do Universo

Vamos fazer uma estimativa da idade do Universo considerando que o modelo apresentado nas seções anteriores é dominante até hoje. Com a ajuda das

equações de movimento, vemos que a idade do Universo como uma função do *redshift* é dada por

$$t \equiv \int_0^{a(t)} \frac{da'}{\dot{a}'} = H_0^{-1} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{\sqrt{1 - \Omega_0 + \Omega_0 x^{-1}}} \quad (2.56)$$

Resolvendo a integral acima obtemos

$$t = H_0^{-1} \frac{\Omega_0}{2(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left\{ \cos^{-1} \left[\frac{2 - \Omega_0(1 - z)}{\Omega_0(1 + z)} \right] - \frac{2(\Omega_0 - 1)^{1/2}(\Omega_0 z + 1)^{1/2}}{(\Omega_0(1 + z))} \right\}, \quad (2.57)$$

para o caso $\Omega_0 > 1$ e

$$t = H_0^{-1} \frac{\Omega_0}{2(1 - \Omega_0)^{3/2}} \left\{ -\cosh^{-1} \left[\frac{2 - \Omega_0(1 - z)}{\Omega_0(1 + z)} \right] + \frac{2(1 - \Omega_0)^{1/2}(\Omega_0 z + 1)^{1/2}}{(\Omega_0(1 + z))} \right\}, \quad (2.58)$$

para o caso $\Omega_0 < 1$. Podemos verificar que ambas as soluções se aproximam assintoticamente de $t = 2/3H_0^{-1}(1 + z)$ quando $\Omega_0 \simeq 1$, como esperado. A idade atual do Universo é dada pelas expressões acima quando $z = 0$. Se lembrarmos algumas estimativas recentes que apontam $\Omega_0 \simeq 0.3 - 0.4$, a idade do Universo é de aproximadamente $11.8Ganos$. Por outro lado, a idade do Universo pode ser estimada através de métodos astrofísicos utilizando os objetos mais velhos conhecidos na Galáxia. Vários métodos diferentes de medida têm indicado uma idade de aproximadamente $14Ganos$. A discrepância vem do fato que o Universo não é dominado nos dias atuais por matéria face as evidências de que estamos passando por uma fase de aceleração recente. Assim, essas inconsistências podem ser resolvidas no contexto dos modelos cosmológicos de energia escura.

Raio de Curvatura

Podemos definir uma escala de curvatura pois, como já vimos, a constante de curvatura k na equação de Friedmann está relacionada à geometria espacial do Universo. Lembrando que o escalar de curvatura 3-dimensional para a

métrica de RW (2.7) é ${}^{(3)}R = ka^{-2}$, o raio de curvatura r_{cur} , definido como $r_{cur}^2 \equiv 1/{}^{(3)}R$, pode ser escrito da seguinte forma

$$r_{cur} = a|k|^{-1/2} \quad (2.59)$$

Portanto, percebemos de imediato que o raio de curvatura para um Universo hiperbólico ($k = -1$) é imaginário, para um Universo plano ($k = 0$) é infinito e para um Universo esférico ($k = +1$) é o próprio fator global de escala $a(t)$.

Utilizando as Eqs.(2.44) e (2.59), o raio de curvatura pode ser escrito em termos de parâmetros dinâmicos como se segue

$$r_{cur} = \frac{H^{-1}}{\sqrt{|\Omega_0 - 1|}} \quad (2.60)$$

Quando $|\Omega_0 - 1|$ se aproxima da unidade, o raio de curvatura e o raio de Hubble são comparáveis; quando $|\Omega_0 - 1|$ é muito pequeno, $r_{cur} \gg H^{-1}$. O Universo próximo da densidade crítica é muito plano. Assim, visto que $|\Omega_0 - 1|$ deve ter sido muito pequeno em épocas primordiais é seguro desprezar a curvatura espacial no Universo primordial.

Horizonte de partículas

Como já vimos, o horizonte de partículas define o tamanho do Universo observável. Portanto, é importante expressá-lo em função de parâmetros observáveis tais como H_0 e Ω_0 . Usando as equações de movimento, a integral (2.10) para d_{hor} pode ser reescrita em função do *redshift* como

$$d_{hor}(t) = \int_0^{a(t)} \frac{da(t')}{\dot{a}(t')a(t')} = \frac{H_0^{-1}}{(1+z)} \int_0^{(1+z)^{-1}} \frac{dx}{\sqrt{x^2(1-\Omega_0) + \Omega_0 x^{(1-3\omega)}}} \quad (2.61)$$

Para um Universo dominado por matéria ($\omega = 0$), realizando a integração, obtemos

$$d_{hor}(t) = \frac{H_0^{-1}}{(1+z)\sqrt{\Omega_0 - 1}} \cos^{-1} \left[1 - \frac{2(\Omega_0 - 1)}{\Omega_0(1+z)} \right] \quad (2.62)$$

para $\Omega_0 > 1$,

$$d_{hor}(t) = 2H_0^{-1}(1+z)^{-3/2} \quad (2.63)$$

para $\Omega_0 = 1$ e

$$d_{hor}(t) = \frac{H_0^{-1}}{(1+z)\sqrt{1-\Omega_0}} \cosh^{-1} \left[1 + \frac{2(1-\Omega_0)}{\Omega_0(1+z)} \right] \quad (2.64)$$

para $\Omega_0 < 1$. Como podemos notar para $1+z \gg \Omega_0^{-1}$, $d_{hor}(t) \rightarrow 2H_0^{-1}\sqrt{\Omega_0}(1+z)^{3/2} = 3t$.

2.4 Teoria da Inflação

A *inflação* é um mecanismo microfísico que opera em um instante muito primordial da expansão do Universo ($t \sim 10^{-34}s$), bem acima do tempo de Planck de acordo com o qual o Universo, em um estágio dominado pela energia de vácuo e preenchendo com a energia potencial de um campo escalar ϕ (chamado *inflaton*), sofre uma breve época de expansão acelerada.

Em um Universo dominado por um campo escalar homogêneo ϕ com potencial $V(\phi)$, minimamente acoplado à gravidade, a equação de movimento é dada por

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (2.65)$$

O critério para o qual o potencial deve ser suficientemente plano é quantificado pela condição *slow-rolling*:

$$\epsilon(\phi) = \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \ll 1, \quad (2.66)$$

$$|\eta(\phi)| = \left| \frac{1}{8\pi G} \frac{V''}{V} \right| \ll 1, \quad (2.67)$$

onde $V' \equiv dV(\phi)/d\phi$.

Devido ao período de expansão acelerada do Universo, todas as perturbações presentes antes da inflação ficaram irrelevantes para a formação de galáxias, visto que a inflação anulou todas as inhomogeneidades iniciais; por outro lado, o mesmo mecanismo amplificou as flutuações quânticas o suficiente para produzir perturbações *escalares* (densidade) e *tensoriais* (ondas gravitacionais) em escalas cosmológicas relevantes.

O grande sucesso da inflação é sem dúvida dá uma explicação causal para o processo de formação de estrutura. Além disso, o mecanismo inflacionário fornece uma possível solução para alguns dos principais problemas existentes na Teoria do Big Bang, tais como o problema do horizonte, a questão da planaridade, e o problema das relíquias não-observadas.

O Problema do horizonte

A radiação CMB caracteriza-se por ser fortemente isotrópica. De fato, duas antenas de microondas apontadas para o céu em direções opostas fornecem uma radiação térmica com variação de $\Delta T/T \leq 10^{-5}$, onde T é a temperatura do corpo negro. O problema é que essas duas regiões que emitem uma radiação com uma distribuição de temperatura estritamente uniforme não poderiam está em contato causal no momento do último espalhamento, pois o horizonte causal naquele momento subtendia um ângulo aparente de somente 2 graus hoje. Como então duas regiões causalmente desconectadas do céu poderiam produzir as mesmas anisotropias na temperatura?

A inflação pode resolver esse problema: de fato, duas regiões que num momento inicial causalmente conectadas são separadas uma da outra pela expansão inflacionária exponencial do próprio Universo e sai de seus horizontes, tal que agora nós vemos regiões do céu desconectadas no desacoplamento, mas que estiveram conectadas antes da inflação.

O problema da planaridade

Da (2.46) aprendemos que o parâmetro de densidade Ω evolui rapidamente para 1 a medida que o Universo expande. Dado que as observações indicam que Ω está muito próximo de 1 hoje, concluímos que ele deveria ter sido muito menor que 1 no passado. Indo para o tempo de Planck obtemos $|\Omega(10^{-43}\text{s}) - 1| \sim \mathcal{O}(10^{-57})$, e mesmo no momento da nucleossíntese obtemos $|\Omega(1\text{s}) - 1| \sim \mathcal{O}(10^{-16})$. Isso significa, por exemplo, que Ω no tempo de Planck fosse levemente maior que 1, digamos $\Omega(10^{-43}\text{s}) = 1 + 10^{-55}$, o

Universo teria colapsado milhões de anos atrás. Pelas estimativas atuais, a densidade de massa do Universo local está certamente restrita ao intervalo $0,2 < \Omega_0 \leq 1$ e portanto o Universo primordial deve ter sido criado com um ajuste extraordinariamente fino sobre o parâmetro de densidade. Em outras palavras. O valor de Ω no tempo de Planck era praticamente indistinguível da unidade por menos de uma pequena diferença a partir da quadragésima casa decimal.

A inflação pode contornar esse ajuste-fino (*fine-tuned*) das condições iniciais, pois, qualquer que fosse a curvatura do espaço-tempo local, a forte expansão inflacionária estica ao máximo todos os comprimentos, incluindo o raio de curvatura, tal que ele fica grande o suficiente para que no final da inflação o Universo seja tão plano quanto nós desejamos.

O problema das relíquias não-observadas

Existe uma superprodução de relíquias cosmológicas devido às transições de fase no Universo primitivo que, no entanto, não são observadas hoje em dia. Como exemplo, podemos citar os defeitos topológicos (e.g., monopolos magnéticos), que são produzidos em grande abundância pelo mecanismo de Kibble e fornecem hoje um Ω_{monop} longe de ultrapassar 1, claramente intolerável cosmológicamente.

Como nos casos anteriores, a chave é a forte expansão produzida por uma era primordial inflacionária, que dilue a abundância dos monopolos magnéticos ou de qualquer outra relíquia cosmológica “poluente”.

2.5 Radiação Cósmica de Fundo

No estágio primordial de evolução do Universo o fator de escala era bem menor e a densidade de energia era muito maior. Em decorrência disso, o livre caminho médio de partículas relativísticas e não-relativísticas deve ter sido também muito menor do que é hoje. Naquela época, graças à abundante

interação entre mat3ria e radiaç3o, todo o meio devia certamente se encontrar em um estado muito pr3ximo do equil3brio termodin3mico com os f3tons. Portanto a temperatura do g3s de f3tons devia ser exatamente a mesma da mat3ria. Com a expans3o violenta a que este meio estava sendo submetido, o g3s de f3tons se resfriou, a densidade de energia diminuiu e possibilitou que pr3tons e el3trons se recombinassem. Com isso, o g3s de f3tons desacoplou-se da mat3ria, escoou livremente, e originou o fundo de f3tons de baixa energia que permeia o Universo local com um espectro de corpo negro. Por outro lado, sabemos que um espectro de corpo negro obedece a lei de Wien

$$\lambda_{max}T = 0.2898Kcm , \quad (2.68)$$

que relaciona o comprimento de onda em que ocorre o m3ximo da emiss3o do corpo negro com a temperatura. Vimos anteriormente que num Universo em expans3o o comprimento de onda evolui proporcionalmente ao fator de escala, $\lambda \propto a$, indicando que no passado os f3tons desse fundo de radiaç3o eram mais energ3ticos. Portanto, a temperatura do fundo de microondas deve ter sido necessariamente maior no passado [15]

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{a} = 1 + z , \quad (2.69)$$

onde T_0 3 a temperatura atual do fundo de microondas.

Em 1989, o sat3lite COBE (*Cosmic Background Explorer*) conseguiu demonstrar com alto grau de precis3o que este fundo de microondas segue com absoluta precis3o uma distribuiç3o de corpo negro e que a temperatura atual 3 de aproximadamente $2.76 \pm 0.001K$. O espectro obtido pelo COBE 3 mostrado na Fig.(2.2) [19]). Os resultados obtidos pelo COBE foram confirmados com uma precis3o ainda maior pelo sat3lite WMAP (*Wilkinson Microwave Anitropy Porbe*) em 2003, o qual tamb3m foi capaz de medir as amplitudes das flutuaç3es na radiaç3o c3smica de fundo como podemos ver na Fig.(2.3)

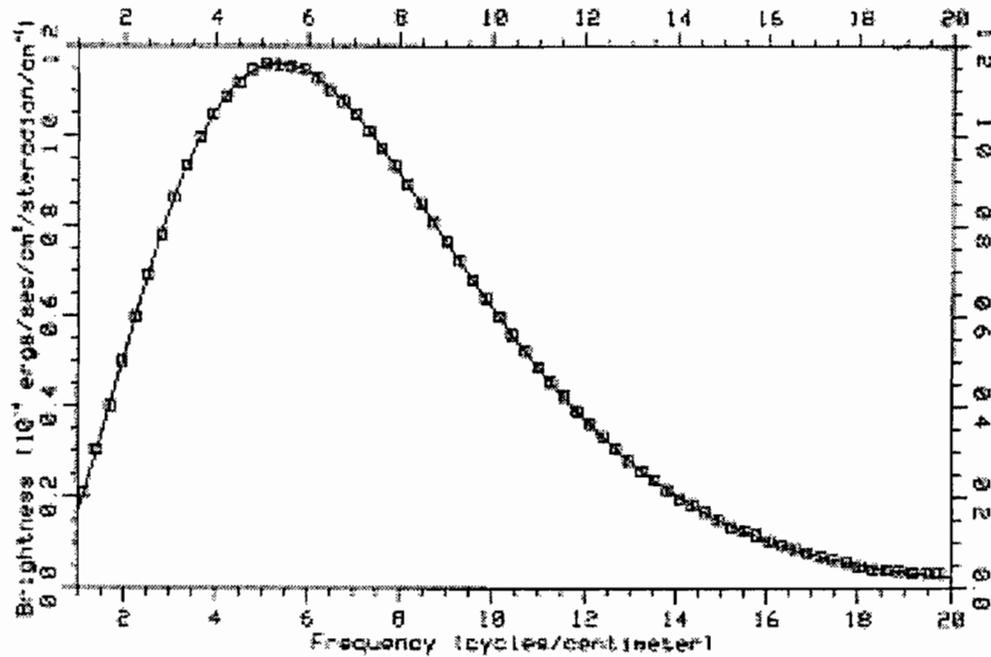


Figura 2.2: Resultado obtido pelo sat3elite COBE mostrando que o espectro do fundo de microondas segue perfeitamente uma distribui33o de corpo negro.

Igualdade Mat3eria-Radia33o

Combinando as Eqs.(2.33) e (2.34) podemos tamb3em obter, com o aux3ilio das Eqs.(2.15) e (2.43), a seguinte rela33o entre as densidades de mat3eria e de radia33o

$$\frac{\rho_{rad}}{\rho_{mat}} = \frac{\rho_{rad,0}}{\rho_{mat,0}} \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{\Omega_{rad,0}}{\Omega_{mat,0}} (1+z), \quad (2.70)$$

a qual indica uma maior contribui33o da densidade de energia da radia33o no passado quando temos grandes *redshifts*. Como conseq3u3ncia pr3tica imediata, podemos lembrar que atualmente $\rho_{rad,0}/\rho_{mat,0} \simeq 0.001$,

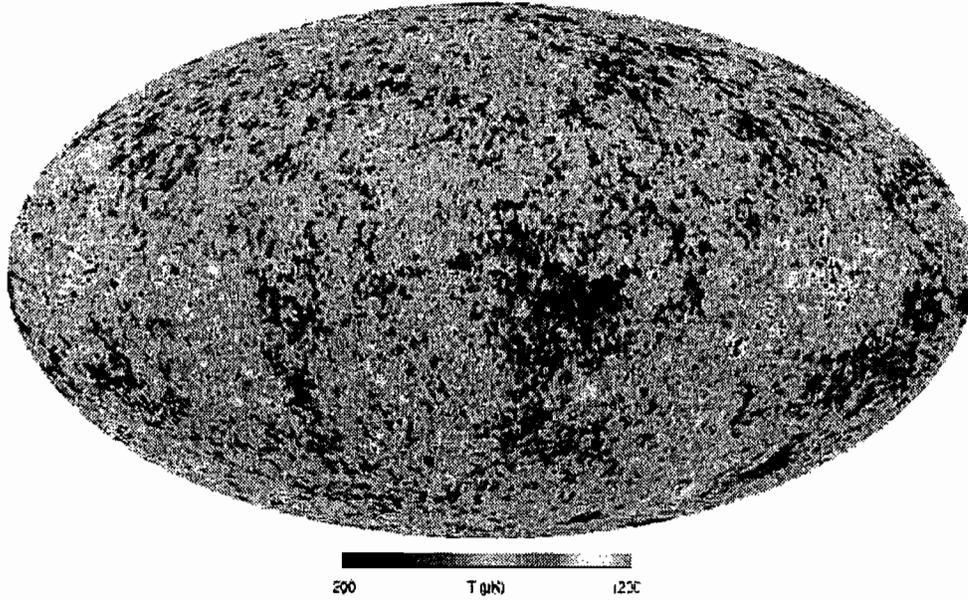


Figura 2.3: Imagem das inhomogeneidades presentes no espectro da radiação cósmica de fundo em microondas observadas pelo satélite WMAP após retirar todas as contaminações devido a fontes galáticas.

considerando-se apenas matéria bariônica na forma de galáxias, resultando portanto que a densidade de energia do campo de radiação deve ter dominado o Universo a partir de $1 + z \simeq 3500 - 4000$.

Portanto, no momento da história térmica do Universo em que as densidades de matéria e energia se equivalem vemos, seguindo a Eq.(2.70) que o *redshift*, a temperatura e o tempo são dados por [15]

$$(1 + z_{eq}) = 24.000 h^2 \Omega_{mat,0} . \quad (2.71)$$

$$T_{eq} = T_0 (1 + z_{eq}) = 65500 h^2 \Omega_{mat,0} K \quad (2.72)$$

$$t_{eq} \simeq \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_0^{-1/2} (1 + z_{eq})^{-3/2} = 1.4 \times 10^3 (\Omega_{mat,0} h^2)^{-3/2} \text{ anos} . \quad (2.73)$$

2.5.1 Desacoplamento e Recombina33o

No Universo primordial, mat3ria e radia33o estavam em contato t3rmico devido 3s r3pidas intera333es entre f3tons e el3trons. Como resultado, ap3s tais intera333es estes f3tons primordiais n3o se propagavam em trajet3rias retil3neas para dist3ncias longas; em outras palavras, o Universo era opaco para a radia33o eletromagn3tica. Entretanto, quando os el3trons ficaram lentos o suficiente, eles foram capturados pelos pr3tons, formando 3tomos de hidrog3neo est3veis. Ap3s esse processo, chamado *recombina33o*, os f3tons n3o encontram mais el3trons livres para interagir novamente, e com isso a mat3ria fica transparente para a radia33o, e os f3tons desacoplados continuam a se mover em geod3sicas a partir da *3ltima superf3cie de espalhamento*.

Um c3lculo apropriado da 3poca da recombina33o usa a equa33o de Saha, que calcula a fra33o de ioniza33o de um g3s em equil3brio t3rmico. A equa33o de Saha 3 derivada assumindo que somente hidrog3nio est3 presente, e considera a fun33o de distribui33o para o hidrog3nio, pr3tons livres e el3trons, que est3o em equil3brio t3rmico e qu3mico. Definindo a fra33o de ioniza33o como $X = n_p/n_B$, onde n_p e n_B s3o as densidades de n3mero de pr3tons livres e de b3rions, a ioniza33o fracional no equil3brio 3

$$\frac{1 - X}{X^2} \simeq 3.8 \frac{n_H}{n_e} \left(\frac{k_B T}{m_\gamma} \right)^{3/2} \exp(13.6/k_B T), \quad (2.74)$$

onde a raz3o b3rions/f3tons 3 dada por $n_B/n_\gamma \simeq 6 \times 10^{-10}$.

Uma defini33o padr3o do momento da recombina33o 3 $X_{rec} = 0.1$, quando 90% do processo estava completo. Uma vez que o valor de n_B/n_γ seja conhecido, a equa33o de Saha pode ser resolvida interativa ou numericamente para obtermos $k_B T_{rec} \simeq 0.31 eV$, que implica numa temperatura de recombina33o $T_{rec} \simeq 3600 K$. Somente a partir deste ponto 3 que o n3mero de f3tons ionizantes diminuiu o suficiente para permitir que os el3trons pudessem ser capturados pelos pr3tons, sem o risco de serem novamente arrancados pelos f3tons mais energ3ticos presentes no meio. Utilizando a Eq.(2.69), podemos estimar que nesse ponto o *redshift* era da ordem de $(1 + z_{rec}) \simeq 1089$

2.5.2 Flutuações na Radiação de Fundo

As flutuações de temperatura, estando acopladas às de densidade, certamente contêm alguma informação sobre o Universo primordial. É fato que a radiação de fundo é extremamente uniforme com variações de uma parte em 10^5 . Mas apesar de serem tão pequenas, estas flutuações são relevantes pois o Universo certamente se formou num estado, no mínimo, levemente inhomogêneo. Portanto, ainda que estas flutuações possuam uma amplitude tão pequena, essas variações na temperatura contêm de fato uma impressão digital do processo de formação de estrutura no Universo primordial.

Podemos estudar as flutuações na radiação de fundo perturbando a métrica e o tensor de matéria nas soluções de FRW. As equações de movimento dessas perturbações podem ser determinadas, numa aproximação linear, por $\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}$. No entanto, devido a dificuldade de estudar individualmente cada perturbação, a estratégia usual para estudar essas flutuações consiste em expandir a temperatura observada em função das coordenadas angulares de cada ponto e descrever as observações em função dos momentos estatísticos da sua distribuição projetada na esfera celeste. Como o fundo de microondas tem simetria esférica, a forma mais natural de fazer isto consiste na adoção de uma expansão em série de harmônicos esféricos

$$\frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) = \sum_{\ell, m} a_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad (2.75)$$

onde $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ são os harmônicos esféricos usuais que satisfazem à condição de ortogonalidade

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi Y_{\ell' m'}^*(\theta, \phi) Y_{\ell m}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta = \delta_{\ell' \ell} \delta_{m' m}. \quad (2.76)$$

Usando a ortogonalidade de $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ e invertendo (2.75), obtemos

$$a_{\ell m} = \int Y_{\ell m}^*(\theta, \phi) \frac{\delta T}{T}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi. \quad (2.77)$$

Visto que as direções angulares em um Universo homogêneo são igualmente equivalentes, devemos estimar o espectro de autocorrelação no

qual se comparam os valores m3dios das flutua33es de temperatura de duas dire33es arbitr33rias quaisquer $\hat{n}_1(\theta_1, \phi_1)$ e $\hat{n}_2(\theta_2, \phi_2)$ na esfera celeste

$$C(\Theta) = \left\langle \frac{\delta T}{T}(\hat{n}_1) \frac{\delta T}{T}(\hat{n}_2) \right\rangle, \quad (2.78)$$

em que a m3dia amostral 3 obtida comparando-se as medidas em um conjunto de dire33es arbitr33rias e o Θ representa a separa33o angular entre essas dire33es determinada pelos vetores unit33rios, $\cos \Theta = \hat{n}_1 \cdot \hat{n}_2$.

Combinando as Eqs.(2.75) e (2.78), obtemos

$$C(\Theta) = \sum_{\ell, \ell', m, m'} \langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle Y_{\ell m}(\hat{n}_1) Y_{\ell' m'}^*(\hat{n}_2), \quad (2.79)$$

a qual podemos integrar sobre a esfera para obter os coeficientes da matriz de correla33o

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \int \int Y_{\ell m}^*(\hat{n}_1) Y_{\ell' m'}(\hat{n}_2) C(\Theta) \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\theta_2 d\phi_1 d\phi_2. \quad (2.80)$$

Podemos verificar agora que nem todas as combina33es desta matriz de correla33o s3o independentes. Como esta express33o 3 v3lida para qualquer abertura angular, podemos, sem perda de generalidade, considerar o caso $\Theta = 0$ que corresponde a $\theta_1 = \theta_2$ e $\phi_1 = \phi_2$. Sendo assim, a integra33o sobre um dos 3ngulos s3lidos, utilizando a condi33o de ortogonalidade, nos permite dizer que todos os coeficientes com $\ell \neq \ell'$ e $m \neq m'$ devem ser igualmente nulos. Al3m disso, os harm3nicos esf3ricos satisfazem ao teorema de adi33o

$$\sum_m Y_{\ell m}^*(\hat{n}_1) Y_{\ell m}(\hat{n}_2) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_\ell(\cos \Theta), \quad (2.81)$$

onde P_ℓ s3o os polin3mios de Legendre. Levando em conta todas essas simplifica33es podemos concluir a partir da Eq.(2.79) que

$$C(\Theta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell=2}^{\infty} (2\ell + 1) c_\ell^2 P_\ell(\cos \Theta), \quad (2.82)$$

sendo portanto independente dos coeficientes azimutais m .

A determinação dos coeficientes da função de correlação é dada pela expressão

$$c_\ell^2 = 2\pi \int P_\ell(\cos \Theta) C(\Theta) d(\cos \Theta), \quad (2.83)$$

em que $C(\Theta)$ é determinado operacionalmente aplicando-se a Eq.(2.78) nos dados observacionais.

De fato, os coeficientes c_ℓ 's nos fornecem, com precisão, o comportamento dos picos do espectro de potência da radiação cósmica de fundo. Os modos da flutuação são determinados pelo parâmetro ℓ e um cálculo mais apurado mostra que a posição prevista do máximo deve ser [20]

$$\ell_{max} = \frac{200}{\sqrt{\Omega}}. \quad (2.84)$$

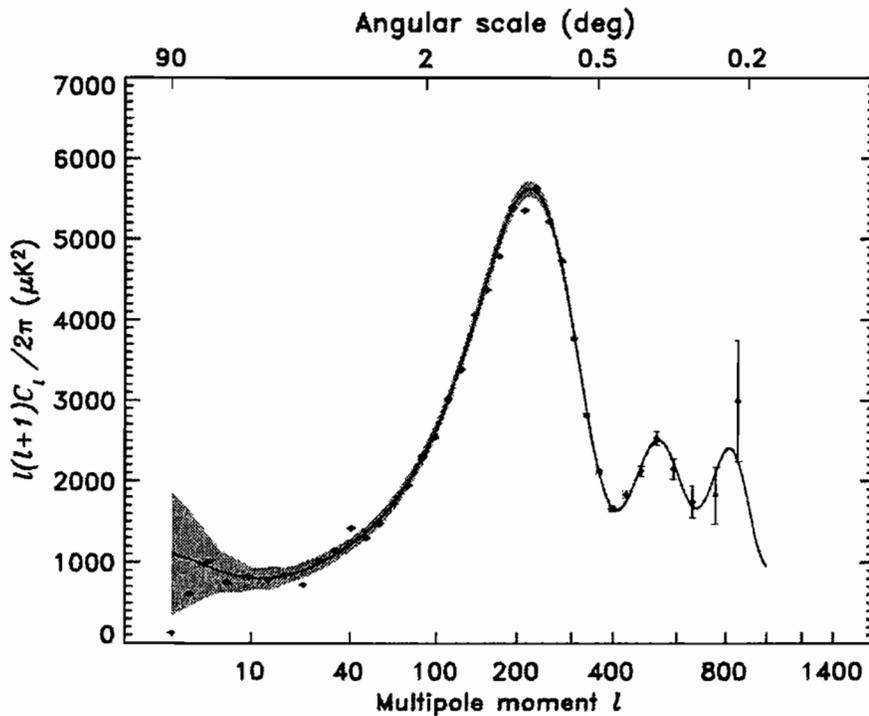


Figura 2.4: Espectro de potência da radiação de fundo, obtido pelo satélite WMAP em função do número de multipolo. A posição do primeiro pico é consistente com $\Omega \simeq 1$ favorecendo os modelos inflacionários.

Resultados observacionais como os da Fig.(2.4) obtidos pelo WMAP nos mostram que a posi33o do primeiro pico favorece fortemente o modelo plano $\Omega_0 = 1$, concordando portanto com as do modelos inflacion3rios.

Capítulo 3

O Universo Acelerado

Atualmente existe uma forte evidência de que o Universo está sofrendo uma fase de expansão acelerada. Tal evidência se manifesta através de uma combinação de resultados observacionais, entre os quais, medidas da relação distância-*redshift* obtida a partir de dados recentes de supernovas do tipo Ia. Os resultados obtidos pelos grupos independentes *Supernova Cosmology Project*[1] (SCP) e *High-Z Supernova Search Team*[2] (HZSNS) começaram a ser divulgados em 1998 e deram início a uma nova fase da Cosmologia pois os resultados mostraram que a densidade de energia total do Universo deve ser dominada atualmente por uma componente que tem pressão negativa.

Inicialmente examinemos a questão do uso de supernovas como *velas padrão* para realizar medidas em Cosmologia. Uma Supernova é um fenômeno explosivo que ocorre quando uma estrela perde seu equilíbrio gravitacional e colapsa formando uma estrela de nêutrons ou um buraco negro. Este evento se inicia com o colapso do núcleo da estrela que provoca um violento processo de fusão nuclear capaz de liberar uma enorme quantidade de energia. O gás exterior é então ejetado dando origem à supernova. As supernovas do tipo Ia ocorrem quando uma estrela anã branca ¹ explode. As supernovas do tipo I são caracterizadas por não

¹Uma anã branca é o estágio final de uma estrela de pequena massa quando ocorre

apresentarem linhas de hidrogênio em seu espectro. Elas são ditas do tipo Ia quando apresentam fortes linhas de silício. Para que ocorra a produção de uma supernova tipo Ia, a anã branca deve fazer parte de um sistema binário. Nesses sistemas, parte da massa ejetada a partir da componente visível é capturada pela anã branca que gradativamente vai aumentando a sua massa. Quando o limite de massa de $1,44M_{\odot}$ é rompido a estrela perde o equilíbrio gravitacional e explode em um evento de supernova. Como a explosão só ocorre quando este limite de massa é atingido, a luminosidade das supernovas do tipo Ia é razoavelmente constante, o que garante a sua utilidade como indicador de distâncias cosmológicas e o título de “vela padrão” da Cosmologia.

A luminosidades absoluta \mathcal{L} e aparente \mathcal{F} de uma estrela estão relacionadas com suas respectivas magnitudes pelas seguintes expressões [14]:

$$\begin{aligned} M &\equiv -2.5 \log \mathcal{L} + cte , \\ m &\equiv -2.5 \log \mathcal{F} + cte . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Combinando esta definição com a Eq.(2.22) podemos relacionar a distância de luminosidade d_L com o modulo da distância de uma estrela $m - M$. Fazendo isso, obtemos

$$m - M = -5 + 5 \log d_L(pc) \quad (3.2)$$

Lembrando que $d_L = r^*(1+z)$ e visto que a distância própria comóvel do observador até uma fonte qualquer r^* é obtida integrando $\int_0^{r^*} dr/\sqrt{1-kr^2} = \int_t^{t_0} dt'/a(t')$, tal que, obtemos, em função do *redshift* ²

$$r^* = 2H_0^{-1} \frac{1}{\Omega_0^2(1+z)} \left[\Omega_0 z + (\Omega_0 - 2) \left(-1 + \sqrt{1 + \Omega_0 z} \right) \right] , \quad (3.3)$$

o colapso do núcleo central diminuindo as dimensões da estrela e aumentando muito sua densidade. Logo após a sua formação estes objetos têm uma elevada temperatura de cerca de ($10^4 K$) e posteriormente se resfriam gradualmente devido à emissão de fótons e à ausência de uma fonte nuclear ativa. A maior massa possível para uma anã branca é cerca de $1.44M_{\odot}$, onde M_{\odot} é a massa do Sol.

²Esta expressão é conhecida como fórmula de Mattig [21].

podemos relacionar o módulo da distância $m - M$ de uma estrela com o *redshift* para um dado modelo do Universo determinado pelo parâmetro Ω_0 . Observe que, para pequenos valores do *redshift* podemos expandir a Eq.(3.2) e obter, para um Universo constituído apenas por matéria,

$$m - M = 42.38 - 5 \log h + 5 \log z - 1.086 \left(\frac{\Omega_0}{2} \right) z + \dots, \quad (3.4)$$

Os resultados obtidos pelos grupos *Supernova Cosmology Project* [1] e *Supernova Search Team* [2] são mostrados na Fig.(3.1). Se aplicarmos a Eq.(3.4) aos dados obtidos, por exemplo, por Permultter *et al* [22] veremos que $\Omega_0 \simeq -0.4$, o que corresponderia a um Universo com uma quantidade de massa negativa. Este é o problema mais importante da Cosmologia atualmente, visto que, em um Universo constituído apenas por matéria, deveríamos observar hoje uma desaceleração, i.e., $\Omega_0 > 0$. A seguir, estudaremos a primeira solução proposta para resolver essa discrepância, considerar uma constante cosmológica não nula.

3.1 A Constante Cosmológica

A partir da divulgação dos dados de supernovas do tipo Ia os cosmólogos ficaram com um sério problema para resolver. Como sabemos, para um Universo constituído apenas por matéria, diferentes tipos de medidas garantem que $\Omega_{mat,0} \simeq 0.3$. Por outro lado, medidas em radiação cósmica de fundo (CMB) favorecem os modelos cosmológicos inflacionários e sugerem que o parâmetro de densidade total é $\Omega_0 \simeq 1$. Visto que para um Universo constituído por matéria e por uma componente desconhecida x temos $\Omega_0 = \Omega_{mat,0} + \Omega_x$, então $\Omega_x \simeq 0.7$. Ou seja, esta componente desconhecida responde por cerca 70% da densidade de energia do Universo observado hoje.

Considerando a equação de conservação associada a este novo termo, $\dot{\rho}_x + 3H(\rho_x + p_x) = 0$, se ρ_x é constante, então, temos que $p_x = -\rho_x$ e de forma natural podemos identificar esta nova componente como uma energia

de vácuo que, por sua vez, está associada à constante cosmológica, Λ , com um parâmetro de densidade

$$\Omega_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{3H^2}. \quad (3.5)$$

No capítulo 1 derivamos as equações de movimento para o caso geral de um Universo com uma densidade de energia de vácuo não-nula. Para um Universo constituído apenas por matéria tipo *dust* e energia de vácuo, reescrevendo a Eq.(2.41), obtemos

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho a + \frac{\Lambda}{3} a, \quad (3.6)$$

a qual nos diz que quando $\Lambda = 0$, a aceleração do parâmetro de escala é necessariamente negativa e resulta do poder de aglutinação da matéria. Mesmo quando $\Lambda \neq 0$, esta situação poderia se manter inalterada desde que $-\frac{4\pi G}{3}\rho a + \frac{\Lambda}{3} a < 0$. No entanto, se $\Lambda > 4\pi G\rho$, então, o parâmetro de escala sofre uma aceleração. Este comportamento dinâmico é útil para explicar os resultados obtidos da observação de supernovas.

Para um Universo plano a Eq.(2.39) impõe que a seguinte condição seja satisfeita no instante atual

$$\rho_0 + \frac{\Lambda}{8\pi G} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = \rho_{c,0}, \quad (3.7)$$

podendo ser expressa em termos do parâmetro de densidade como

$$\Omega_{mat,0} + \Omega_\Lambda = 1, \quad (3.8)$$

onde Ω_Λ representa a contribuição do vácuo para o parâmetro de densidade e $\Omega_{mat,0}$ corresponde à definição usual do parâmetro de densidade da matéria. Na Fig.(3.2)vemos os resultados das observações de supernovas indicando que os modelos cosmológicos compatíveis com estes dados estão contidos dentro da área da elipse com uma margem de erro de menos de 10%. Considerando que vivemos em um Universo plano, cenário favorecido pelo modelo inflacionário e pelas observações da radiação de fundo, verifica-se que $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ e $\Omega_{mat,0} \simeq 0.3$. Em última análise isto significa que vivemos em um Universo com apenas 1/3 de energia proveniente da matéria e 2/3 da energia vêm do vácuo.

Idade do Universo e Parâmetro de Aceleração

Como vimos no capítulo 1, em um modelo cosmológico onde o Universo é constituído apenas por matéria o valor da idade do Universo calculado de cerca de 9.93×10^9 anos é incompatível com os dados observacionais que estima um valor da ordem 14×10^9 anos. Nos modelos com constante cosmológica esta discrepância pode ser bastante melhorada. Combinando as Eqs.(2.39) e (3.8) temos no caso plano,

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{mat,0} \frac{1}{a} + H_0^2 (1 - \Omega_{mat,0}) a^2, \quad (3.9)$$

a qual, após integrar, fornece a seguinte estimativa de idade

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{a^2 da}{\sqrt{\Omega_{mat,0} + (1 - \Omega_{mat,0}) a^3}} \simeq \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{mat,0}^{-0.3}, \quad (3.10)$$

Portanto, se considerarmos $\Omega_{mat,0} \simeq 0.3$ obtemos um valor de 14.2×10^9 anos, bastante compatível com as estimativas de idade dos aglomerados globulares.

A inclusão da constante cosmológica afeta basicamente a taxa de expansão recente, ou seja, o parâmetro de desaceleração

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} = \frac{1}{2} \Omega_{mat,0} - \Omega_\Lambda, \quad (3.11)$$

que para um Universo plano fica

$$q_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \Omega_\Lambda, \quad (3.12)$$

e portanto para que tenhamos um Universo plano acelerado devemos ter $\Omega_\Lambda > 1/3$.

Problemas com a Constante Cosmológica

Visto que no sistema de unidades que adotamos nesta tese a constante cosmológica tem dimensão de $[\text{distância}]^{-2}$, definindo uma certa escala, numa interpretação quântica é natural relacionar esta escala com o comprimento de Planck $L_{Pl} = (8\pi G)^{1/2} \approx 10^{-32} \text{cm}$, i. e.,

$$\Lambda \approx L_{Pl}^{-2} \approx 10^{64} \text{cm}^{-2}. \quad (3.13)$$

Idade do Universo e Parâmetro de Aceleração

Como vimos no capítulo 1, em um modelo cosmológico onde o Universo é constituído apenas por matéria o valor da idade do Universo calculado de cerca de 9.93×10^9 anos é incompatível com os dados observacionais que estima um valor da ordem 14×10^9 anos. Nos modelos com constante cosmológica esta discrepância pode ser bastante melhorada. Combinando as Eqs.(2.39) e (3.8) temos no caso plano,

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{mat,0} \frac{1}{a} + H_0^2 (1 - \Omega_{mat,0}) a^2, \quad (3.9)$$

a qual, após integrar, fornece a seguinte estimativa de idade

$$t_0 = H_0^{-1} \int_0^1 \frac{a^2 da}{\sqrt{\Omega_{mat,0} + (1 - \Omega_{mat,0}) a^3}} \simeq \frac{2}{3} H_0^{-1} \Omega_{mat,0}^{-0.3}, \quad (3.10)$$

Portanto, se considerarmos $\Omega_{mat,0} \simeq 0.3$ obtemos um valor de 14.2×10^9 anos, bastante compatível com as estimativas de idade dos aglomerados globulares.

A inclusão da constante cosmológica afeta basicamente a taxa de expansão recente, ou seja, o parâmetro de desaceleração

$$q_0 = -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} = \frac{1}{2} \Omega_{mat,0} - \Omega_\Lambda, \quad (3.11)$$

que para um Universo plano fica

$$q_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \Omega_\Lambda, \quad (3.12)$$

e portanto para que tenhamos um Universo plano acelerado devemos ter $\Omega_\Lambda > 1/3$.

Problemas com a Constante Cosmológica

Visto que no sistema de unidades que adotamos nesta tese a constante cosmológica tem dimensão de $[\text{distância}]^{-2}$, definindo uma certa escala, numa interpretação quântica é natural relacionar esta escala com o comprimento de Planck $L_{Pl} = (8\pi G)^{1/2} \approx 10^{-32} \text{cm}$, i. e.,

$$\Lambda \approx L_{Pl}^{-2} \approx 10^{64} \text{cm}^{-2}. \quad (3.13)$$

Utilizando a massa de Planck, $M_{Pl} = (8\pi G)^{1/2} \approx 10^{-18} GeV$, podemos estimar a densidade da energia do vácuo

$$\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \simeq \frac{L_{Pl}^{-2}}{M_{Pl}^{-2}} \simeq 10^{72} (GeV)^4 . \quad (3.14)$$

Por outro lado, como vimos anteriormente, o parâmetro de densidade de energia $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$, portanto, a densidade de energia da constante cosmológica ρ_Λ é dado por

$$\rho_\Lambda = \Omega_\Lambda \rho_c \simeq 10^{-48} (GeV)^4 , \quad (3.15)$$

onde ρ_c é a densidade de energia crítica. Finalmente, comparando as Eqs.(3.14) e (3.15) vemos que

$$\rho_{vac} \simeq 10^{120} \rho_\Lambda , \quad (3.16)$$

o que compromete totalmente a interpretação da energia do vácuo como responsável pela aceleração do Universo. Este problema é conhecido como problema do *ajuste-fino*, pois uma forma de contorná-lo seria fixar arbitrariamente Λ tal que obtivéssemos a densidade de energia do vácuo prevista.

Outro problema de utilizar modelos com a constante cosmológica está relacionado com a dinâmica da energia escura e é conhecido como *problema da coincidência*. O período de transição da fase de domínio da matéria para a fase de domínio da energia escura ocorreu, segundo cenário favorecido pelos dados observacionais, em um momento muito específico, logo após o período de formação de galáxias. Sendo Λ por definição constante, é uma coincidência que no processo de evolução dinâmica o Universo entre na fase acelerada em um regime descrito exatamente pela energia de vácuo.

3.2 Regime Superacelerado

As mesmas medidas das distâncias de supernovas divulgadas em 1998 pelos grupos *Supernova Cosmology Project*[1] e *Supernova Search Team*[2]

que demonstraram que o Universo está passando por uma fase de expansão acelerada, estabeleceram um quadro ainda mais preocupante para muitos cosmólogos, pois os resultados mostraram-se compatíveis também com modelos que até então acreditava-se estarem definitivamente descartados como, por exemplo, modelos que não satisfaziam condições de energia clássicas tais como Condição Fraca de Energia e a Condição Dominante de Energia. No início, usando-se apenas os dados de supernovas, tais modelos eram fortemente favorecidos. Com o tempo, os grupos observacionais passaram a combinar os dados de supernovas com observações completamente distintas tais como radiação de fundo (CMB) e medidas na superfície de último espalhamento (LSS). Com essa análise mais completa, ω se aproximou bastante da constante cosmológica, sem no entanto descartar soluções no regime $\omega < -1$. Vemos na Fig.(2.3) resultados recentes[7] que restringem o valor de ω para o intervalo $\omega = -1.02 \left(\begin{smallmatrix} +0.13 \\ -0.19 \end{smallmatrix} \right)$ compatível com modelos para $\omega < -1$.

As condições de energia mencionadas vêm da relatividade geral e nós costumamos usá-las quando não sabemos a natureza de uma determinada componente dinâmica, para garantir que ela seja fisicamente aceitável. Cada condição de energia pode ser definida em termos do tensor $T_{\mu\nu}$ e de algum campo vetorial específico tipo-tempo ($t_\mu t^\mu < 0$), nulo ($\ell_\mu \ell^\mu = 0$) ou tipo-espaço ($s_\mu s^\mu > 0$).

As principais condições de energia são as seguintes:

- Condição Nula de Energia ou NEC: estabelece que $T_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu \geq 0$ para todo vetor nulo ℓ^μ , ou equivalentemente impõe que $\rho + p \geq 0$.
- Condição Fraca de Energia ou WEC: estabelece que $T_{\mu\nu} t^\mu t^\nu \geq 0$ para todo vetor tipo-tempo t^μ , ou equivalentemente que $\rho \geq 0$ e $\rho + p \geq 0$.
- Condição Dominante de Energia ou DEC: inclui a WEC e impõe que $T^{\mu\nu} t_\mu$ satisfaça a condição $T_{\mu\nu} T^\nu{}_\lambda t^\mu t^\lambda \leq 0$ (*i.e.*, não é um vetor tipo-espaço). Essas condições juntas são equivalentes às restrições $\rho \geq 0$ e $\rho \pm p \geq 0$.

- Condição Forte de Energia ou SEC: estabelece que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T^\lambda{}_\lambda t^\sigma t_\sigma$ para todo vetor tipo-tempo t^μ , ou equivalentemente que $\rho + p \geq 0$ e $\rho + 3p \geq 0$.

Seja a Eq.(2.41) reescrita na forma

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) = -\frac{4\pi G}{3} \rho (1 + 3w), \quad (3.17)$$

onde $\omega = p/\rho$. Vemos claramente que só ocorre aceleração para $\omega < -1/3$, ou seja $\rho + 3p < 0$. Portanto, para um Universo acelerado, a SEC é necessariamente violada. Os teoremas clássicos de singularidade da relatividade geral mostram que a SEC é uma condição suficiente (mas não necessária) para a existência da singularidade do *Big Bang* [25]. Ou seja, como estes teoremas não têm inverso, a existência da singularidade do *Big Bang* não implica na condição $w \geq -1$. Se chamarmos de matéria “normal” aquela que satisfaz todas as condições de energia, então, concluímos que a “matéria” desconhecida responsável pela aceleração do Universo é “não-normal” por violar a SEC.

Da Eq.(2.29) vemos que

$$\frac{d\rho}{dt} = -3H (\rho + p) = -3H \rho (1 + w). \quad (3.18)$$

Portanto, a NEC garante que a densidade de energia do Universo diminua quando, devido à expansão, ele aumenta o seu tamanho. Assim, os valores $\omega < -1$, que violam a NEC, podem ser um problema muito sério se for muito negativo ω , pois a densidade poderia ser infinita. Na literatura toda matéria que viola a NEC é chamada de matéria “exótica”. Na verdade, a condição $\omega < -1$ viola todas as condições clássicas de energia, por isso chamamos esse regime de *superacelerado*.

3.3 Modelos de Quintessência

Modelos de Quintessência são modelos que incluem como nova componente um campo escalar ϕ . O termo “quintessência” é uma alusão ao Quinto Elemento evocado pelos gregos para explicar a ordem do mundo. Segundo eles existiriam quatro elementos relacionados com a terra, o ar, o fogo e a água. E, para evitar que os planetas caíssem na Terra, existiria um quinto elemento que manteria estes astros ligados à esfera celeste. Estes modelos constituem uma alternativa viável aos modelos de constante cosmológica que parecem indicar uma solução para alguns dos problemas dos modelos cosmológicos cuja atual dinâmica seria dominada pela energia de vácuo.

Nos modelos usuais de quintessência o Universo é composto por um fundo de matéria mais um campo escalar ϕ interagindo com o campo gravitacional. O fundo de matéria pode ser composto por matéria relativística ($\omega_f = 1/3$), não-relativística ($\omega_f = 0$) ou por ambas as componentes. Este modelo pode ser descrito pela ação

$$S = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} (\mathcal{L}_\phi + \mathcal{L}_f), \quad (3.19)$$

onde R é o escalar de Ricci, \mathcal{L}_f é a densidade de Lagrangiana do fundo de matéria e \mathcal{L}_ϕ a densidade de Lagrangiana do campo de quintessência que é dada por

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi). \quad (3.20)$$

O tensor energia-momento para o campo escalar fica, então,

$$\begin{aligned} T_\phi^{\mu\nu} &\equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_\phi)}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &= \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi - V(\phi) \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Aplicando o princípio da mínima ação, $\delta S = 0$, à Eq.(3.19), vemos que $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu, f} + T_{\mu\nu, \phi}$, onde $T_{\mu\nu, f}$ é o tensor energia-momento para o fundo de matéria modelado por um fluido perfeito. Usando a identidade de Bianchi e lembrando que o tensor energia-momento do fundo de matéria é conservado, obtemos a equação de conservação $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0$ a qual, após

integrada, implica uma evolução da densidade de energia de quintessência

$$\rho_\phi = \rho_{\phi,0} \exp \left\{ \int -3[1 + \omega_\phi(t)] dt \right\}. \quad (3.22)$$

Observe que $\omega_\phi = -1$ corresponde ao modelo de constante cosmológica, a densidade de energia se mantém constante ao longo da evolução cosmológica.

A evolução do campo escalar é descrita pela equação de Klein-Gordon,

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0, \quad (3.23)$$

com

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left[\rho_f + \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) \right], \quad (3.24)$$

onde ρ_f é a densidade de energia do fundo de matéria.

Em um Universo de FRW plano para um campo escalar homogêneo, a densidade de energia e a pressão do campo de quintessência para um observador comóvel são, respectivamente,

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad (3.25)$$

e

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.26)$$

Como parte da densidade total de energia do Universo, a quintessência também comporta-se como um fluido perfeito com uma equação de estado dependente do tempo dada por

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2/2 - V(\phi)}{\dot{\phi}^2/2 + V(\phi)} = \frac{x - 1}{x + 1} \quad (3.27)$$

onde

$$x \equiv \frac{\dot{\phi}^2}{2V} = \frac{(1 + w_\phi)}{(1 - w_\phi)}. \quad (3.28)$$

Podemos reescrever a equação de Friedmann (2.41) em termos de ρ_ϕ e p_ϕ e usar a Eq.(3.27) para obter

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a} \right) = -\frac{4\pi G}{3} (\dot{\phi}^2 - V) = -\frac{4\pi G}{3} \frac{\dot{\phi}^2}{2} \left(\frac{1 + 3w_\phi}{1 + w_\phi} \right). \quad (3.29)$$

Portanto, segundo a Eq.(3.29), a condição necessária para a aceleração no modelo de quintessência é dada por $V > 0$, implicando numa restrição ao parâmetro da equação de estado $-1 < \omega_\phi \leq -1/3$. Se lembrarmos que a aproximação *slow-roll* corresponde ao domínio da densidade de energia potencial $V(\phi)$ sobre a densidade de energia cinética, $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$, vemos que neste regime $\rho \simeq V$ a condição necessária para a aceleração $V > 0$ se reduz à condição de positividade da densidade de energia.

Podemos ver agora como a quintessência ameniza o problema do ajuste-fino que afeta fortemente os modelos de constante cosmológica. Seja a densidade de matéria usual tipo *dust* presente no Universo, $\rho_m \propto a^3$, vemos que a contribuição relativa das componentes de quintessência e matéria varia de acordo com a relação

$$\frac{\rho_\phi}{\rho_m} = \frac{\rho_{\phi,0}}{\rho_{m,0}} (1+z)^{3\omega_\phi}, \quad (3.30)$$

e uma vez que $\omega_\phi \leq -1/3$ resulta que a contribuição de energia escura era subdominante no passado evolutivo do Universo. No caso da constante cosmológica vimos que seu valor no universo primordial é muito alto, violando os vínculos de formação de estrutura. No contexto dos modelos de quintessência que acabamos de apresentar, isto não acontece mais. No entanto, o problema do ajuste-fino ainda não está satisfatoriamente resolvido, pois ainda precisamos realizar um ajuste no valor inicial do campo para obter a densidade de energia medida hoje. No entanto o mecanismo dinâmico parece fornecer uma explicação mais “natural” ou, digamos “confortável”, para o valor da densidade de energia de vácuo hoje.

Soluções *tracking*

Existe uma classe de soluções em modelos de quintessência para as quais as equações de movimento possuem soluções tipo-atrator no sentido que um amplo conjunto de condições iniciais converge para uma mesma solução dinâmica. Essa classe de soluções foi originalmente desenvolvida por [26, 27] ao estudar consequências cosmológicas de um campo escalar homogêneo.

Para ilustra essa propriedade do modelo, consideremos a Eq.(3.28). Tomando a derivada do logaritmo de x dado pela Eq.(3.28) e usando as Eqs.(3.23) e (3.25), obtemos [28, 29].

$$\frac{1}{6} \frac{d(\ln x)}{d(\ln a)} = -1 - \frac{1}{3} \frac{V'}{V} \sqrt{\frac{3}{8\pi G} \frac{\Omega_\phi}{1 + \omega_\phi}}, \quad (3.31)$$

onde utilizamos ainda a definição $\Omega_\phi \equiv \rho_\phi/\rho_{tot}$. Visto que as soluções *tracking* ocorrem sempre num regime onde o potencial domina o termo cinético, $x < 1$ e da Eq.(3.27) vemos que ω_ϕ é aproximadamente constante com um valor restrito ao intervalo $-1 < \omega_\phi < \omega_B$. Para $1 + \omega_\phi = \mathcal{O}(1)$, $\dot{\phi}^2 \simeq \Omega_\phi H^2$ e obtemos da Eq.(3.31) a seguinte condição *tracker*

$$\frac{V'}{V} \simeq \frac{1}{\sqrt{\Omega_\phi}} \simeq \frac{H}{\dot{\phi}}, \quad (3.32)$$

a qual assegura basicamente que quando o campo ϕ cai fortemente ambos os lados da relação decrescem.

O possível comportamento *tracking* das soluções do campo escalar pode ser determinado de forma geral pela função $\Gamma \equiv V''V/(V')^2$ que reduz o teste para verificar a existência de soluções *tracking* a uma simples condição sobre o potencial $V(\phi)$ sem ter que resolver a Eq.(3.31) diretamente [29]. Tomando a derivada da Eq.(3.31) com respeito a ϕ e combinando com ela própria, obtemos

$$\Gamma = 1 + \frac{\omega_f - \omega_\phi}{2(1 + \omega_\phi)} - \frac{1 + \omega_f - 2\omega_\phi}{2(1 + \omega_\phi)} \frac{\dot{x}}{6 + \dot{x}} - \frac{2}{(1 + \omega_\phi)} \frac{\ddot{x}}{(6 + \dot{x})^2}, \quad (3.33)$$

onde x é dado por (3.28), $\dot{x} \equiv d(\ln x)/d(\ln a)$ e $\ddot{x} \equiv d^2(\ln x)/d(\ln a)^2$.

Para garantir a condição *tracker* e o conseqüente comportamento convergente das soluções, a função Γ deve ser aproximadamente constante. Expandindo a Eq.(3.33) e desprezando termos em x e em derivadas de x , as quais estão associadas à derivadas de ω_ϕ , a equação de estado para o campo ϕ fica

$$\omega_\phi \simeq \frac{\omega_f - 2(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)}. \quad (3.34)$$

Se $\Gamma > 1$, devemos ter $\omega_\phi < \omega_f$ para satisfazer a condição *tracker*. A condição $\Gamma < 1$, implica $\omega_\phi > \omega_f$ é descartada pois implicaria $\Omega_\phi > \Omega_f$ no passado e não existira um período dominado por matéria nem formação de estrutura.

Vejamos agora como os modelos de quintessência atenuam o problema da coincidência. Em geral, Ω_ϕ é proporcional a $a^{3(\omega_f - \omega_\phi)} \propto t^{2(\omega_f - \omega_\phi)/(1 + \omega_f)}$, onde já mostramos na Eq.(3.34)

$$\omega_f - \omega_\phi = \frac{2(\Gamma - 1)(\omega_f + 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)}. \quad (3.35)$$

Portanto, verificamos que $\Omega_\phi \propto t^P$ onde

$$P = \frac{4(\Gamma - 1)}{1 + 2(\Gamma - 1)}. \quad (3.36)$$

Para

potenciais gerais, P aumenta com a idade do Universo. Conseqüentemente, Ω_ϕ cresce como uma função do tempo até alcançar as densidades de energia de radiação e de matéria, levando o Universo em seguida a uma fase de aceleração cósmica. Ou seja, neste cenário dinâmico, o momento em que o Universo entra no regime acelerado é simplesmente uma conseqüência natural da própria evolução dinâmica do modelo. No entanto, esta não é uma solução completamente satisfatória do problema da coincidência. Existe uma certa artificialidade no fato de que o valor inicial do campo ϕ deve ser tal que o potencial $V(\phi)$ descreva a densidade de energia atual do Universo e isto não é explicado pelo modelo.

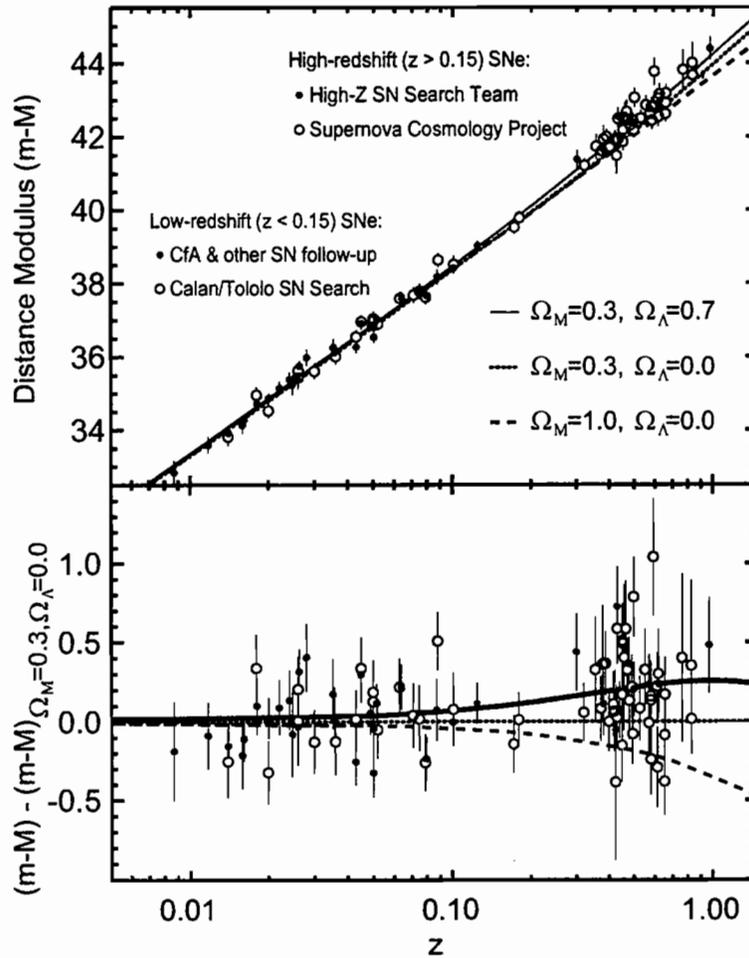


Figura 3.1: Dados de distâncias de supernovas indicam que o Universo está passando por um regime acelerado. Na parte inferior apresentamos as distâncias residuais relativas para um Universo com $\Omega_{mat} = 0.3$ e $\Omega_{mat} = 0.7$. Os objetos para $z < 0.15$ de ambos os grupos concordam com os resultados obtidos anteriormente pelo Calan/Tololo Supernova Search [23]. (Reproduzido de [24])



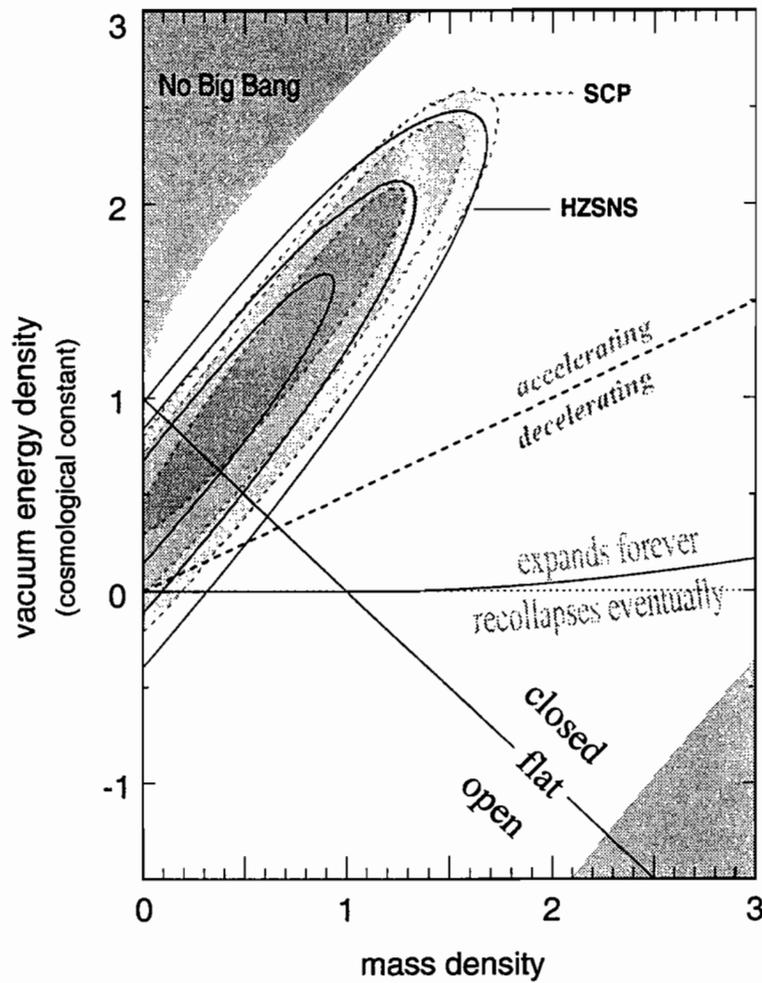


Figura 3.2: Regiões de confiança para ambos os grupos SCP [1] e HZSNS [2] para Ω_Λ e Ω_{mat} . Os dois experimentos mostraram, com notável concordância, que a condição $\Omega_\Lambda > 0$ é necessária para reconciliar teoria e observações. Os resultados do SCP são baseados em medidas de distância de 42 supernovas. Os resultados do HZSNS são baseados em medidas de 16 supernovas. (Reproduzido de [24])

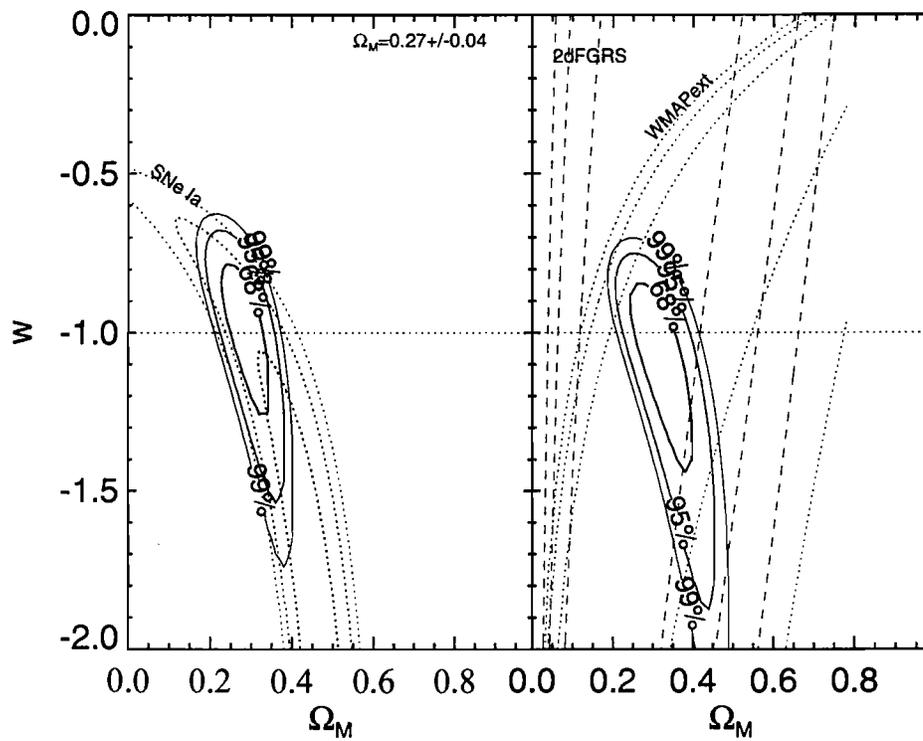


Figura 3.3: As observações de supernovas favorecem um parâmetro de densidade do vácuo $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$, compatível com um Universo plano e $\Omega_{mat} \simeq 0.3$. (Reproduzido de [7])

Capítulo 4

Modelos de Quintessência com Acoplamento Não-Mínimo

É fato que em teorias construídas com base em campos escalares precisamos obrigatoriamente de um termo de acoplamento entre o campo escalar e a curvatura do espaço-tempo. Segundo Callan, Coleman e Jackiw [30] argumentam, mesmo em um espaço-tempo plano e sem considerar *a priori* qualquer acoplamento, ele aparece quando renormalizamos o tensor energia-momento do campo escalar clássico [31, 32] ou é simplesmente gerado por correções quânticas [33]. A generalização para um espaço-tempo curvo de uma equação de movimento para o campo escalar no espaço-tempo plano (equação de Klein-Gordon) inclui a possibilidade de um termo de acoplamento explícito $\xi R\phi$ entre o campo escalar e a curvatura de Ricci R do espaço-tempo.

O comportamento dos modelos cosmológicos é profundamente afetado pela introdução de um termo de acoplamento não-mínimo. Os modelos resultantes são particularmente úteis para procurar modelos cosmológicos compatíveis com as atuais observações astrofísicas [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40], as quais indicam que o Universo passa por uma fase de aceleração na expansão cósmica. A vantagem dos modelos generalizados é a possibilidade de obter

soluções no regime superacelerado sem precisar recorrer aos famosos modelos *phantom*[41], onde a única forma de conseguir tais soluções é trocando o sinal da energia cinética.

4.1 Teoria Escalar-Tensorial da Gravidade

Nesta seção apresentaremos a densidade de lagrangiana geral para as teorias escalares-tensoriais da gravidade dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} f(\phi, R) - \frac{\omega(\phi)}{2} \nabla^\mu \phi \nabla_\mu \phi - V(\phi) + L_{mat} \right]. \quad (4.1)$$

Aqui, R é o escalar de Ricci e as unidades são escolhidas tal que $8\pi G = 1$. As funções $\omega(\phi)$ e $V(\phi)$ especificam as energias cinética e potencial do campo escalar, respectivamente. A lagrangiana L_{mat} inclui todas as componentes menos ϕ . Assumiremos que a função f tem a forma $f(\phi, R) = F(\phi) R$.

As equações de movimento podem ser obtidas variando-se a ação (4.1) com respeito a ϕ e ao tensor métrico $g_{\mu\nu}$ e usando o princípio da mínima ação, $\delta S = 0$. A variação com respeito ao campo fornece a equação de Klein-Gordon generalizada

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{1}{2\omega} \left(\omega' \dot{\phi}^2 - F' R + 2V' \right), \quad (4.2)$$

onde $'$ denota a derivada com relação ao campo escalar. A variação da Eq.(4.1) com respeito a $g_{\mu\nu}$ é bem mais complicada e devemos usar as relações

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (4.3)$$

e

$$\delta(\sqrt{-g} R) = \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \delta g^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (4.4)$$

Após uma série de manipulações algébricas obtemos

$$H^2 = \frac{1}{3F} \left(\rho_{mat} + \frac{\omega}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) - 3H\dot{F} \right), \quad (4.5)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2F} \left[(\rho_{mat} + p_{mat}) + \omega \dot{\phi}^2 + \ddot{F} - H\dot{F} \right], \quad (4.6)$$

A equação de Klein-Gordon fica realmente muito complicada neste caso mais geral. Usando que

$$\begin{aligned} R &= 6(\dot{H} + 2H^2) \\ &= \frac{1}{F} \left[\rho_{mat} - 3p_{mat} - \omega \dot{\phi}^2 + 4V - 3(\ddot{F} + 3H\dot{F}) \right], \end{aligned} \quad (4.7)$$

podemos reescrever a equação de Klein-Gordon generalizada na forma

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} \left(1 + \frac{3F^2_{,\phi}}{2\omega F} \right) &= -3H\dot{\phi} - \frac{1}{2\omega} \omega' \dot{\phi}^2 - \frac{1}{\omega} V' - \frac{F'}{2F\omega} (-\rho_{mat} + 3p_{mat}) \\ &\quad - \frac{F'}{2F} \dot{\phi}^2 + \frac{F'}{\omega F} 2V \frac{3F'}{2\omega F} F'' \dot{\phi}^2 - 9 \frac{F'^2}{2\omega F} H \dot{\phi}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dois tipos diferentes de teorias são usualmente estudadas. Uma é o pioneiro modelo de gravidade de Brans-Dicke [42], que pode ser obtido fazendo a escolha $\omega = \omega_{BD}/\phi$ e $F = \phi$, onde ω_{BD} é conhecido como parâmetro de acoplamento. A outra, genericamente chamada teoria não-minimamente acoplada (embora o campo da gravidade de Brans-Dicke também seja um campo escalar não-minimamente acoplado), pode ser obtida escolhendo $\omega = 1$, e mantendo F e o potencial V como funções genéricas do campo.

4.2 Modelos tipo Brans-Dicke

Nesta seção vamos estudar modelos chamados tipo Brans-Dicke por serem inspirados no modelo desenvolvido por Carl H. Brans e Robert Dicke na década de 1960 quando propuseram uma generalização da relatividade geral baseados no princípio de Mach. Não vamos estudar com detalhes este modelo, veremos apenas algumas características fundamentais decorrentes da sua construção que podem torná-los fisicamente inconsistentes. Em seguida veremos como contornar os problemas que porventura sejam identificados.

Considere a ação tipo Brans-Dicke [42] dada por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[F(\phi)R - \frac{\omega(\phi)}{\phi} \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi \right] + \int d^4x \sqrt{-g} L_{mat}, \quad (4.9)$$

onde $F(\phi) = \phi$, R é o escalar de curvatura e L_{mat} é a densidade de langrangiana de matéria incluindo todas as componentes menos ϕ . O campo ϕ tem um papel análogo à G^{-1} e possui dimensão $ML^{-3}T^2$. Assumiremos que o conteúdo de matéria do Universo é composto por um ou vários fluídos não-interagentes com tensor energia-momento conservado $\nabla_\mu T_{mat}^{\mu\nu} = 0$ dado por $T_{\mu\nu}^{mat} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$, onde $u_\mu u^\mu = -1$. Variando as componentes do tensor métrico e suas primeiras derivadas na Eq.(4.9), obtemos as equações de movimento para o campo métrico

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{\phi} (T_{\mu\nu}^{mat} + T_{\mu\nu}^\phi) \quad (4.10)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein e

$$T_{\mu\nu}^\phi = \frac{\omega}{\phi} \left(\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \phi \nabla^\sigma \phi \right) + (\nabla_\mu \nabla_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi). \quad (4.11)$$

Aqui \square é o operador D'Alembertiano. Agora, se multiplicarmos a Eq.(4.10) por ϕ e tomarmos a derivada covariante, vemos que

$$\nabla_\nu T_\phi^{\mu\nu} = \nabla_\nu (\phi G^{\mu\nu}). \quad (4.12)$$

Portanto, nos modelos tipo Brans-Dicke a equação de continuidade não é satisfeita e o tensor energia-momento do campo escalar não é conservado tal que $\dot{\rho}_\phi + 3\dot{a}/a(\rho_\phi + p_\phi) \neq 0$. Uma conseqüência deste fato é que não podemos definir a razão p_ϕ/ρ_ϕ como uma equação de estado visto que não temos uma lei de conservação associada a ela.

Assumindo ainda que o Universo é homogêneo, isotrópico e espacialmente plano, temos a seguinte equação de movimento

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} - \frac{\omega\dot{\phi}^2}{6\phi^2} - \frac{V}{3\phi} = \frac{\rho}{3\phi}, \quad (4.13)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} + 2\frac{\dot{a}\dot{\phi}}{a\phi} + \frac{\omega\dot{\phi}^2}{2\phi^2} - \frac{V}{\phi} = -\frac{p}{\phi}, \quad (4.14)$$

$$\ddot{\phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} = \frac{(\rho - 3p)}{2\omega + 3} + \frac{2}{2\omega + 3} \left[2V - \phi \frac{dV}{d\phi} \right]. \quad (4.15)$$

Usando as equações de movimento (4.13) a (4.15) podemos escrever a densidade de energia e pressão para esse modelo

$$\rho_\phi = 3 \left[\frac{\omega}{6} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} + \frac{V}{3} - \frac{\dot{a}}{a} \dot{\phi} \right], \quad (4.16)$$

e

$$p_\phi = \left[\frac{\omega}{2} \frac{\dot{\phi}^2}{\phi} - V + \ddot{\phi} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\phi} \right]. \quad (4.17)$$

É importante notar que dados recentes precisos obtidos no sistema solar implicam $\omega \gg 1$ [43] para as teorias puramente Brans-Dicke ($\omega(\phi) = \omega_{BD}$ constante).

4.3 O Significado Físico da Razão p_ϕ/ρ_ϕ

Nesta seção vamos construir um formalismo onde a razão p_ϕ/ρ_ϕ representa uma equação de estado no sentido usual da termodinâmica. Faremos isso no contexto das teorias escalares-tensoriais. Inicialmente vamos reescrever as equações de campo para uma teoria não-minimamente acoplada [?] tal que

$$G_{\mu\nu} = \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (4.18)$$

onde definimos um novo tensor energia-momento dado por

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{mat} + \tilde{T}_{\mu\nu}[\phi]. \quad (4.19)$$

Como consequência verificamos que as identidades de Bianchi garantem que $\tilde{T}_{\mu\nu}$ é conservado. E visto que não existe acoplamento explícito entre o campo escalar e a matéria, seus tensores energia-momento são conservados separadamente

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{mat} = \nabla^\mu \tilde{T}_{\mu\nu}[\phi] = 0. \quad (4.20)$$

Neste formalismo, a forma explícita para $\tilde{T}_{\mu\nu}[\phi]$ é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mu\nu}[\phi] = & \omega \left[\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right] - V g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \nabla^2 F \\ & + (1 - F) G_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (4.21)$$

Para obter a Eq.(4.18) apenas adicionamos e subtraímos $G_{\mu\nu}$ no lado esquerdo das equações de Einstein generalizadas, i.e,

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{mat} + T_{\mu\nu}^\phi \quad (4.22)$$

com

$$T_{\mu\nu}^\phi = \omega \left[\nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla^\lambda \phi \nabla_\lambda \phi \right] - V g_{\mu\nu} + \nabla_\mu \nabla_\nu F - g_{\mu\nu} \nabla^2 F . \quad (4.23)$$

Isso fixa imediatamente a expressão $\tilde{T}_{\mu\nu}[\phi]$ acima. A novas densidade de energia e pressão efetivas que esse tensor energia-momento produz são

$$\tilde{\rho}_\phi = \omega \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi) - 3H\dot{F} + 3H^2(1 - F) , \quad (4.24)$$

$$\tilde{p}_\phi = \omega \frac{\dot{\phi}^2}{2} - V(\phi) + 2H\dot{F} + \ddot{F} - (3H^2 + 2\dot{H})(1 - F) . \quad (4.25)$$

No caso da teoria de Brans-Dicke, lembramos que $\omega = \omega_{BD}/\phi$ e $F = \phi$. Note então que $\tilde{\rho}_\phi = \rho_\phi + 3H^2(1 - F)$, ρ_ϕ era dado pela Eq.(4.16). A equação de estado definida, w_ϕ , portanto, é exatamente dada por $\tilde{p}_\phi/\tilde{\rho}_\phi$, visto que ela foi definida usando a equação de Friedmann $H^2 = 1/3(\rho_{mat} + \tilde{\rho}_\phi)$. De fato,

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\phi &= -\rho_{mat} + \frac{1}{F}(\rho_{mat} + \rho_\phi) \\ &= -\rho_{mat} + 3H^2 \\ &= -(3H^2 F - \rho_\phi) + 3H^2 \\ &= \rho_\phi + 3H^2(1 - F) . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ao mesmo tempo, vemos que

$$\tilde{p}_\phi = p_\phi - (3H^2 + 2\dot{H})(1 - F) . \quad (4.27)$$

Concluimos, então, que nesta abordagem a definição para p_ϕ/ρ_ϕ representa uma equação de estado real, visto que ela está relacionada à uma lei de conservação e está diretamente relacionada ao observável H , devendo portanto ser considerada em futuras comparações com as previsões da relatividade geral.

4.4 Modelos Não-Minimamente Acoplados

Consideremos o modelo não-minimamente acoplado descrito pela ação [?]

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (-R + \xi \phi^2 R + g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - 2V) , \quad (4.28)$$

onde R é o escalar de curvatura, ϕ é o campo escalar, e ξ é a constante de acoplamento não-mínimo. Uma constante cosmológica Λ , se presente, fica incorporada no potencial do campo escalar $V(\phi)$, que escolheremos

$$V(\phi) = 3\alpha\phi^2 - \frac{\Omega}{4}\phi^4 - 9\omega , \quad (4.29)$$

consistindo de um termo de massa, um termo de auto-acoplamento quártico e um termo de constante cosmológica. Aqui $\alpha \equiv m^2/6$, onde m é a massa campo escalar, e $\omega \equiv -\Lambda/9$.

O tensor energia-momento conservado do campo escalar é

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \xi (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) (\phi^2) + \xi G_{\mu\nu} \phi^2 - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - 2V(\phi)) . \quad (4.30)$$

Consideramos aqui a dinâmica de um universo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano com elemento de linha $ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$. Com isso obtemos a equação do traço $R = -(\rho - 3p)$, que fornece a equação

$$6 [1 - \xi (1 - 6\xi) \phi^2] \left(\dot{H} + 2H^2 \right) - (6\xi - 1) \dot{\phi}^2 - 4V(\phi) + 6\xi \phi \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0 , \quad (4.31)$$

o vínculo de energia $3H^2 = \rho$ que pode ser escrito

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + 6\xi H \phi \dot{\phi} - 3H^2 (1 - \xi \phi^2) + V(\phi) = 0, \quad (4.32)$$

e a equação de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H \dot{\phi} + \xi R \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (4.33)$$

Aqui usamos o fato que a densidade de energia ρ e a pressão p são dados respectivamente por (4.24) e (4.25) com $\omega = 1$.

No sistema de Eqs.(4.31)-(4.33), o subsistema [(4.31) e (4.32)] é um sistema bidimensional fechado para ϕ e H . Após resolver estas equações implícitas para $\dot{\phi}$ e \dot{H} , obtemos

$$\dot{\phi} = -6\xi H \phi \pm \frac{1}{2} \sqrt{\mathcal{G}(H, \phi)} \quad (4.34)$$

e

$$\dot{H} = \frac{1}{1 + \xi(6\xi - 1)\phi^2} \left[3(2\xi - 1)H^2 + 3\xi(6\xi - 1)(4\xi - 1)H^2\phi^2 \mp \xi(6\xi - 1)H\phi\sqrt{\mathcal{G}} + (1 - 2\xi)V(\phi) - \xi\phi\frac{dV}{d\phi} \right], \quad (4.35)$$

onde

$$\mathcal{G}(H, \phi) = 8^2 [3H^2 - V(\phi) + 3\xi(6\xi - 1)H^2\phi^2]. \quad (4.36)$$

Devido ao vínculo de energia (4.32), as trajetórias estão restritas a uma variedade bidimensional no espaço de fase tridimensional $(H, \phi, \dot{\phi})$ original, com regiões dinamicamente proibidas correspondendo à condição $\mathcal{G}(H, \psi) < 0$ (cf. Eq.(4.34)). A variedade Σ é composta de duas folhas correspondendo aos sinais positivo ou negativo na Eq.(4.34) [Ver Fig.(4.1)]. As duas folhas são suavemente ligadas pela condição de fronteira $\mathcal{G} = 0$ da região dinamicamente proibida.

Espaço de Fase

Agora vamos analisar o espaço de fase do modelo acima projetado sobre o plano (H, ψ) . Os pontos fixos do sistema (4.31)-(4.33) admitem soluções de

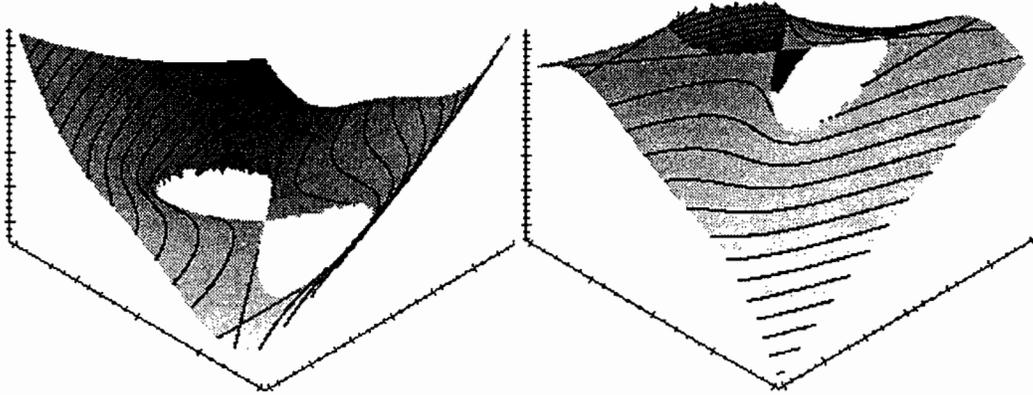


Figura 4.1: Aspecto da variedade bidimensional Σ , imersa no espaço de fase tridimensional $(\psi, H, \dot{\phi})$, para o potencial (4.29). O gráfico à esquerda representa a folha “+”, enquanto gráfico à direita representa a folha “-”. De fato, eles não estão desconectados, as duas folhas estão suavemente ligadas pela condição de fronteira $\mathcal{G} = 0$ da região dinamicamente proibida, correspondendo aos buracos mostrados. As linha de \mathcal{G} são desenhadas sobre as folhas.

Sitter do tipo $a \simeq e^{Ht}$ com campo escalar constante

$$H_0^2 = \frac{3(\alpha^2 - \Omega\omega)}{(\Omega - 6\xi\alpha)}, \quad \phi_0^2 = \frac{6(\alpha - 6\xi\omega)}{(\Omega - 6\xi\alpha)} \quad (4.37)$$

($\Omega \neq 6\alpha\xi$), e as soluções $(H, \phi) = (\pm\sqrt{-3\omega}, 0)$. Os pontos fixos (4.37) existem também para $\omega = 0$, devido a presença do campo de matéria ϕ . A partir deste ponto, nos restringiremos ao caso do acoplamento conforme, $\xi = 1/6$.

A função

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{\alpha}{4}\phi^4 - 3\omega\phi^2 + V(\phi) \quad (4.38)$$

é tal que $dL/dt = -3H\dot{\phi}^2$ ao longo das trajetórias. Para $H > 0$, L é uma função de Lyapunov em uma região contendo a origem; as soluções são então confinadas por linhas fechadas de L constante, implicando numa convergência assintótica para os pontos fixos sobre o eixo H [Ver Apêndice A]. Um visão qualitativa é apresentada na Fig.(4.2).

No caso $\Omega = 2\alpha$ o espaço de Minkowski $(H, \phi, \dot{\phi}) = (0, 0, 0)$ é um ponto fixo, atrativo para $H > 0$ e repulsivo para $H < 0$; as projeções dos espaços de Sitter $(\pm H_0, \pm \phi_0, 0)$ são pontos de sela, i.e. eles possuem auto-direções atrativas e repulsivas no espaço de fase (Fig.(4.2a)). Elas são de dois tipos: $H\phi > 0$ (expansão) ou $H\phi < 0$ (contração). Para o caso particular que estamos analisando temos ainda as seguintes soluções

$$H(\tau) = \sqrt{\frac{C}{2}} \tanh(\sqrt{2C}\tau), \quad \phi = \pm\phi_0 \equiv \pm\sqrt{6} \quad (4.39)$$

onde $C = \dot{H} + 2H^2 = -R/6$ e constante), correspondendo a linhas heteroclínicas ligando pontos fixos de Sitter, partindo de uma auto-direção repulsiva para uma atrativa (Fig.(4.2a)). Elas são tangentes à regiões de fronteira proibida em $(H, \phi) = (0, \pm\phi_0)$. Para $|H| > \sqrt{C/2}$, outras soluções em forma de linhas é da forma geral

$$H(\tau) = \sqrt{\frac{C}{2}} \frac{w_1 e^{\sqrt{C/2}\tau} - w_2 e^{-\sqrt{C/2}\tau}}{w_1 e^{\sqrt{C/2}\tau} + w_2 e^{-\sqrt{C/2}\tau}}, \quad \psi = \psi_0, \quad (4.40)$$

onde w_1 e w_2 são constantes de integração. As soluções não-singulares (4.39) conectam um regime de Sitter contraindo ($\tau \rightarrow -\infty$) a um valor mínimo não-nulo do fator de escala ($\tau = 0$), e então a um regime de Sitter expandindo ($\tau \rightarrow +\infty$).

Próximo do ponto fixo $(0, 0, 0)$, a análise numérica confirma o comportamento peculiar sugerido pela função de Lyapunov: as órbitas que se aproximam deste ponto com H positivo são atraídas para ele Fig.(4.2a).

No semi-plano $H < 0$ a situação é invertida: as órbitas que começam com $H < 0$ são repelidas pela origem e partem da fronteira $\mathcal{G} = 0$.

O caso $\Omega > 2\alpha$ [Fig.(4.2b)] é análogo ao anterior, mas agora as soluções heteroclínicas não são linhas heteroclínicas, as soluções partem de um ponto fixo de Sitter que se contrai e escapam para o infinito ou vêm do infinito e alcançam um ponto fixo de Sitter que expande.

No caso $\alpha < \Omega < 2\alpha$ [Fig.(4.2c)] não existem linhas retas heteroclínicas. Temos uma nova solução heteroclínica que parate da origem e acaba em

um ponto fixo de Sitter que expande. A característica mais importante deste caso é que temos um denso conjunto de soluções homoclínicas [Fig.(4.2d)] partindo da origem com H negativo e retornando com H positivo, contornando a região dinamicamente proibida.

No caso $0 < \Omega < \alpha$ [Fig.(4.2e)] os pontos fixos desaparecem e somente soluções limitadas são homoclínicas associadas com a origem. Essa situação é, portanto, a mais favorável para a saída clássica espontânea do espaço vazio de Minkowski.

No caso $\omega < 0$ [Fig.(4.2f)] vemos que resultados análogos valem mesmo se a constante cosmológica estiver presente, sendo que o espaço de fase é classificado de acordo com $\Omega/(\alpha - \omega)$.

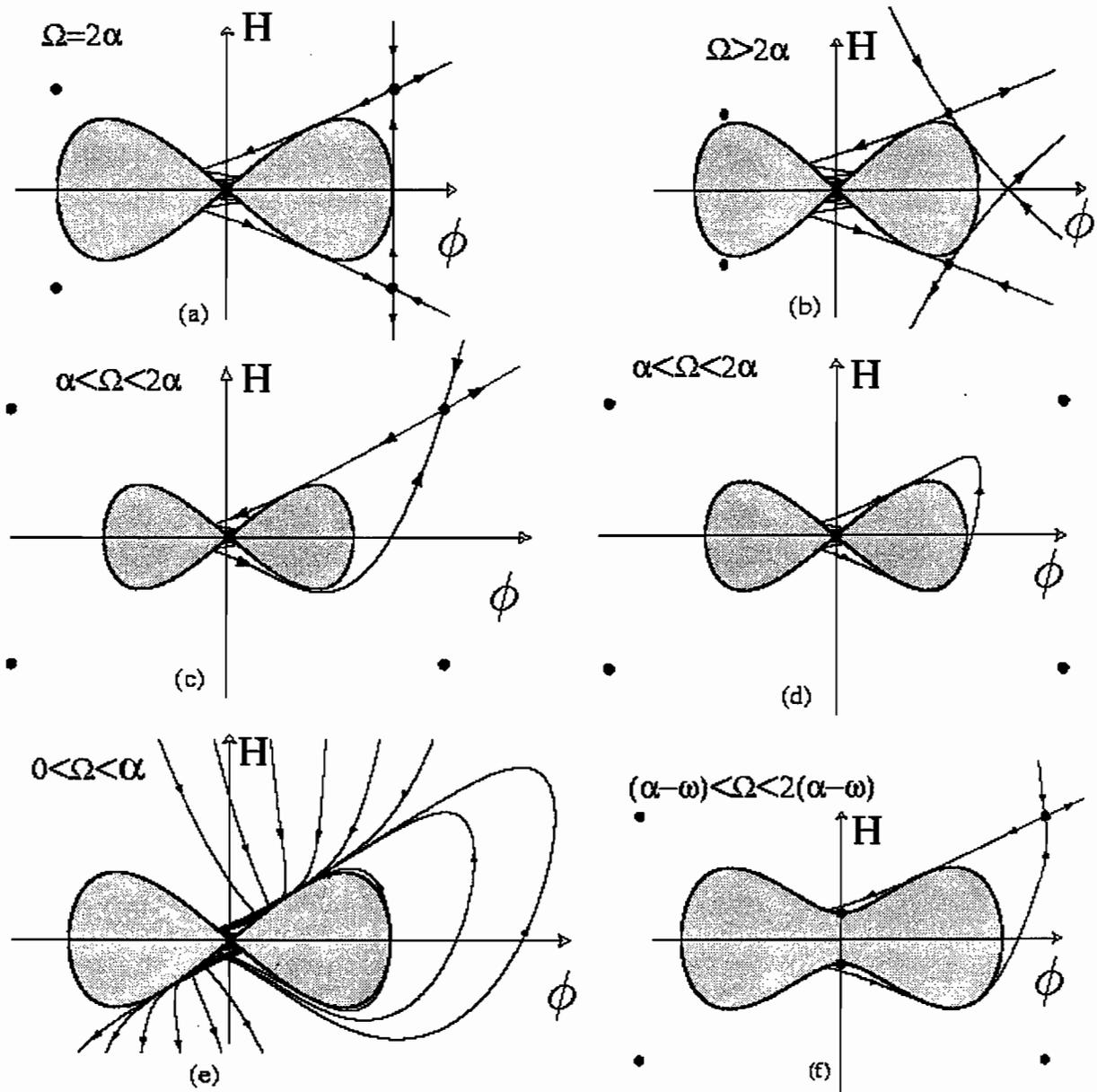


Figura 4.2: Comportamento qualitativo do espaço de fase para o sistema [(4.31)-(4.33)]. A região hachurada corresponde às regiões dinamicamente proibidas ($\mathcal{G}(H, \phi) < 0$, cf. Eq.(4.34)). Os gráficos (a)-(e) foram obtidos usando $\Omega/\alpha = 2, 5, 3/2$ e $1/2$, respectivamente, $\omega = 0$; O gráfico (f) corresponde ao caso $\omega = 1/10$ e $\Omega/(\alpha - \omega) = 3/2$.

Capítulo 5

Energia Escura no Regime Superacelerado

A natureza da componente de energia escura responsável pela expansão acelerada do universo [7, 22] é um dos problemas mais importantes da Física atualmente [44]. Como já vimos, o modo mais simples de descrever a energia escura é através da constante cosmológica Λ , que age nas equações de Einstein como uma fonte homogênea e isotrópica com equação de estado $-p_\Lambda = \rho_\Lambda = \Lambda$. Questões diretas sobre possíveis flutuações da energia escura levam naturalmente à introdução de um campo escalar $\phi(x)$, mais conhecido na literatura como campo quintessencial [8, 9]. Além da questão das flutuações, a descrição por um campo é preferível pois para os modelos com soluções tipo-*tracker*, o surgimento de uma fase de expansão acelerada (de Sitter) é um comportamento dinâmico genérico, permitindo avaliar, conseqüentemente, problemas com o ajuste-fino de condições iniciais no universo primordial.

Questões observacionais recentes [10] e especulações teóricas [45, 46] motivaram a análise da possibilidade de modelos realistas para os quais, pelo menos temporariamente, possamos ter $w < -1$. De fato, dados recentes do telescópio espacial Hubble de supernovas Tipo Ia em altos *redshifts* ($z > 1$)

[7] favorecem cenários com w evoluindo lentamente e restringem seu valor para o intervalo $w = -1.02 \left(\begin{smallmatrix} +0.13 \\ -0.19 \end{smallmatrix} \right)$. Eles são compatíveis, portanto, com modelos que apresentam regimes com $w < -1$.

Em [4], Carroll, Hoffman e Trodden avaliaram a viabilidade de se construir modelos com $w < -1$. Os chamados campos *phantom*, i.e., campos escalares minimamente acoplados com energia cinética “negativa”, são geralmente usados para construir tais modelos. Apesar de a condição de energia dominante (na verdade, *todas* as condições usuais de energia) ser violada em modelos com $w < -1$, os autores foram capazes de construir um modelo classicamente estável envolvendo campos *phantom*. Entretanto, devido à energia cinética peculiar do *phantom*, o modelo é instável quando qualquer processo quântico é considerado. Em particular, como o potencial *phantom* não é limitado por baixo, existem decaimentos catastróficos do vácuo [4]. Portanto, os resultados gerais [47] sugerem que qualquer teoria minimamente acoplada com $w < -1$ têm gradientes de instabilidades espaciais que são descartadas por observações CMB. Esses resultados colocam serias dúvidas sobre a viabilidade de modelos de energia escura baseados em campos *phantom*.

Neste capítulo apresentamos um modelo de quintessência estudado por nós que pode exibir uma fase assintótica genérica de Sitter com muitas soluções para as quais w evolui lentamente e é menor que -1 , sem a introdução de quaisquer instabilidades clássica e/ou quântica [48].

5.1 Equações Dinâmicas do Modelo

Consideramos um campo quintessencial não-minimamente acoplado à gravidade descrito pela ação

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \{ F(\phi) R - \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - 2V(\phi) \}, \quad (5.1)$$

onde $F(\phi) = 1 - \xi \phi^2$, $\xi < 0$, e temos um potencial de auto-interação

exponencial do tipo

$$V(\phi) = Ae^{-\sigma\phi}, \quad (5.2)$$

onde A e σ são constantes. Potenciais exponenciais têm sido usados recentemente em Cosmologia, principalmente no estudo de campos *tracker* [49, 50]. Eles aparecem naturalmente em modelos inspirados em cordas e teorias de dimensões de ordem superior [51, 52, 53].

As equações de Einstein, obtidas variando a ação (5.1), podem ser escritas na forma

$$FG_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi + 2V - 2\Box F) + \nabla_\mu\nabla_\nu F, \quad (5.3)$$

enquanto a equação de Klein-Gordon generalizada é

$$\Box\phi - V' + \frac{1}{2}F'R = 0. \quad (5.4)$$

Uma questão relevante neste momento é como definir uma equação de estado para o campo ϕ das equações (5.3) e (5.4). O lado direito de (5.3) não corresponde a um tensor energia-momento covariantemente conservado devido à presença de $F(\phi)$ em seu lado esquerdo. Para definir a pressão e a energia para o campo ϕ de uma maneira consistente com a equação de continuidade, precisamos de um tensor energia-momento covariantemente conservado, e de (5.3) obtemos $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ com [54]

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu\phi\nabla_\nu\phi - \frac{g_{\mu\nu}}{2} (\nabla_\sigma\phi\nabla^\sigma\phi + 2V - 2\Box F) + \nabla_\mu\nabla_\nu F + (1 - F)G_{\mu\nu} \quad (5.5)$$

Assumindo um universo espacialmente plano e isotrópico,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (5.6)$$

obtemos, da componente temporal das equações de Einstein (5.3), o vínculo de energia

$$3H (FH + F'\dot{\phi}) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V(\phi), \quad (5.7)$$

onde $H = \dot{a}/a$. Das componentes espaciais, obtemos a equação de Friedmann modificada

$$-2F_1\dot{H} = 3(F + 2(F')^2)H^2 + \frac{1 + 2F''}{2}\dot{\phi}^2 - V - (H\dot{\phi} + V')F', \quad (5.8)$$

onde $F_1(\phi) = F(\phi) + \frac{3}{2}(F'(\phi))^2$. Para a métrica (5.6), a equação de Klein Gordon fica

$$\ddot{\phi} + \frac{G(\phi, \dot{\phi}, H)}{F_1}\dot{\phi} + V'_{\text{eff}}(\phi) = 0, \quad (5.9)$$

onde

$$G(\phi, \dot{\phi}, H) = 3F_1H + \frac{1}{2}(1 + 3F'')F'\dot{\phi} \quad (5.10)$$

e

$$V'_{\text{eff}}(\phi) = \frac{1}{F_1}(FV' - 2F'V). \quad (5.11)$$

Os pontos fixos das equações (5.7)-(5.9) são as soluções constantes $\phi(t) = \bar{\phi}$ e $H(t) = \bar{H}$, correspondendo às soluções $a(t) \propto e^{\bar{H}t}$ para as quais $w = -1$. Apesar do potencial (5.2) não ter pontos de equilíbrio, por causa do acoplamento não-mínimo, o modelo tem de fato os pontos fixos $(\bar{\phi}_-, \pm\bar{H}_-)$ e $(\bar{\phi}_+, \pm\bar{H}_+)$, onde

$$\bar{\phi}_{\pm} = -\frac{2}{\sigma} \left(1 \mp \sqrt{1 + \sigma^2/4\xi} \right) \quad (5.12)$$

e

$$\bar{H}_{\pm}^2 = \frac{V(\bar{\phi}_{\pm})}{3F(\bar{\phi}_{\pm})}. \quad (5.13)$$

Os pontos fixos existem, naturalmente, somente para $\xi \leq -\sigma^2/4$. Na próxima seção estudaremos o espaço de fase deste modelo. Como veremos, se o ponto fixo $(\bar{\phi}_-, \bar{H}_-)$ é um atrator, grandes conjuntos de soluções tendem espontaneamente à essa fase de Sitter, independente de suas condições iniciais. Quando nos aproximamos do ponto de Sitter, as soluções podem ter $w < -1$, sem qualquer instabilidade induzida.

Finalizamos esta seção com a definição de p_ϕ e energia ρ_ϕ . Essas quantidades são definidas do tensor energia-momento $T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$, onde u_μ é um vetor globalmente tipo-tempo. Com a hipótese de isotropia e homogeneidade, apresentamos, no referencial comóvel, $\rho_\phi = 3H^2$ e $p_\phi = -\left(2\dot{H} + 3H^2\right)$, levando a

$$w = -\left(1 + \frac{2}{3}\frac{\dot{H}}{H^2}\right). \quad (5.14)$$

Como podemos ver, a razão w definida em (5.14) não está sujeita a restrição $w \geq -1$. Note que a equação de continuidade $\dot{\rho}_\phi + 3H(\rho_\phi + p_\phi) = 0$, que é uma consequência direta das identidades de Bianchi para as equações de Einstein, vale aqui.

5.2 O espaço de fase

Estudamos o espaço de fase do modelo usando o abordagem adotada em [3, 55]. O espaço de fase é 3-dimensional $(\phi, \dot{\phi}, H)$, mas devido ao vínculo de energia (5.7) a dinâmica fica restrita a uma sub-variedade 2-dimensional. Nenhuma restrição é imposta sobre o espaço de fase $(\phi, \dot{\phi})$, mas para o espaço de fase (ϕ, H) , somente a região $H^2 \geq V/3F_1$ é dinamicamente permitida [Ver Fig. (5.1)]. Visto que $H = 0$ não é permitida pela dinâmica, as trajetórias são confinadas aos semi-espaços $H > 0$ e $H < 0$. Estamos interessados aqui apenas no caso $H > 0$. Lembremos que as trajetórias reais movem-se sobre uma variedade 2-dimensional definida pelo vínculo de energia (5.7). Portanto, na projeção sobre o plano (ϕ, H) , cada ponto sobre a região permitida corresponde, de fato, a dois valores possíveis para $\dot{\phi}$ (duas folhas), com exceção das linhas $H^2 = V/3F_1$, onde somente um valor para $\dot{\phi}$ é permitido. Soluções que vêm de fora vão de uma folha a outra tangenciando as linhas $H^2 = V/3F_1$.

O aspecto de $V_{\text{eff}}(\phi)$ obtido de (5.11) é crucial para a identificação dos

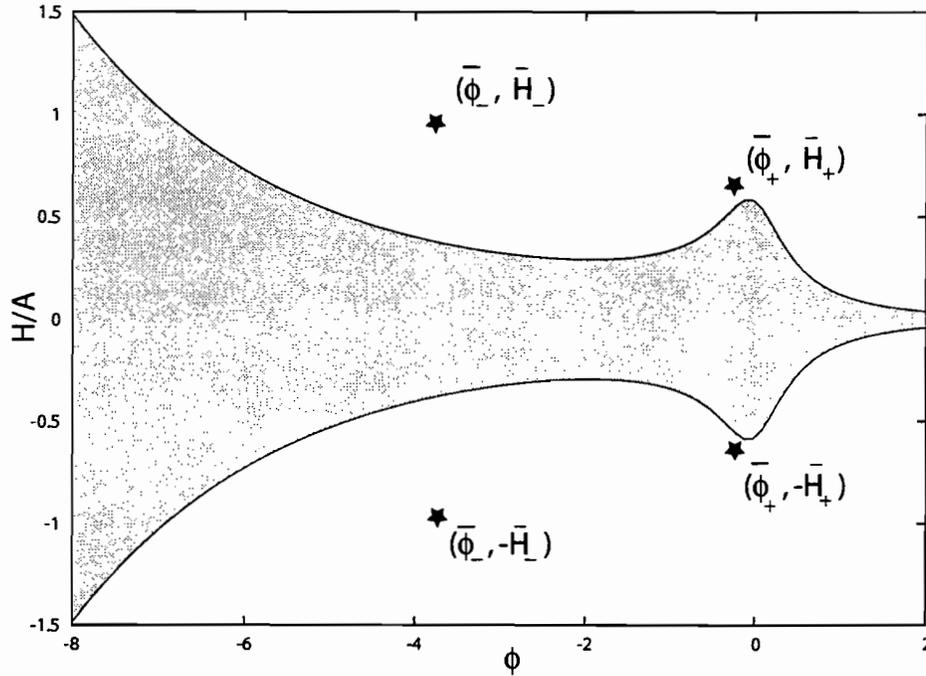


Figura 5.1: Pontos fixos para as equações (5.7)-(5.9) sobre o palno (ϕ, H) . A região hachurada ($H^2 < V/3F_1$) é dinamicamente inacessível. Para esse gráfico, $-\xi = \sigma = 1$.

pontos atratores no espaço de fase. De (5.11), temos

$$V'_{\text{eff}}(\phi) = A\sigma\xi e^{-\sigma\phi} \frac{(\phi - \bar{\phi}_+)(\phi - \bar{\phi}_-)}{1 - \xi(1 - 6\xi)\phi^2}, \quad (5.15)$$

que pode ser integrado por partes em termos da função Integral Exponencial $Ei(x)$ [56]. Da Fig.(5.2), está claro que o ponto fixo correspondendo a $\bar{\phi}_+$ é instável, enquanto $\bar{\phi}_-$ corresponderá a um ponto estável. Entretanto, apesar do claro fato de que $\bar{\phi}_-$ ser um mínimo de V_{eff} , não se pode concluir seguramente que ele de fato corresponde a um atrator devido à função $G(\phi, \dot{\phi}, H)$ dada por (5.10). Se $G(\phi, \dot{\phi}, H) \geq 0$, as soluções da equação de Klein-Gordon em torno do ponto $\bar{\phi}_-$ seriam oscilações simplesmente amortecidas. Isso pode ser checado pela introdução da função

$$L(\phi, \dot{\phi}) = \frac{\dot{\phi}^2}{2} + V_{\text{eff}}(\phi), \quad (5.16)$$

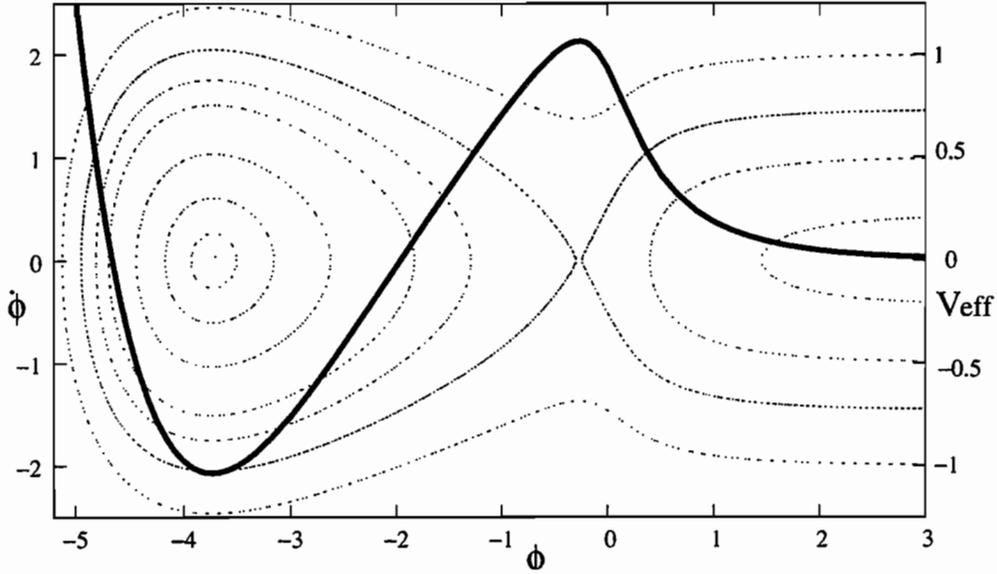


Figura 5.2: Aspecto do potencial (a linha sólida) $V_{\text{eff}}(\phi)$ para $-\xi = \sigma = 1$. Os contornos correspondem a linhas constantes de $L(\phi, \dot{\phi})$ (5.16). Visto que elas são fechadas em torno do ponto fixo $\bar{\phi}_-$, a condição $\dot{L} < 0$ nas soluções implica que eles tendem assintoticamente para $\bar{\phi}_-$.

e notando que $\dot{L} = -G\dot{\phi}^2$ nas soluções da equação de Klein-Gordon. Contanto que $G(\phi, \dot{\phi}, H) \geq 0$, a função $L(\phi, \dot{\phi})$ é uma função de Lyapunov [55, 3] para o ponto fixo $\bar{\phi}_-$, assegurando sua estabilidade. Da Eq. (5.8), vemos que quando $\phi(t)$ se aproxima $\bar{\phi}_-$, $\dot{H} \rightarrow 0$ and $H(t)$ se aproxima \bar{H}_- , estabelecendo o caráter atrator do ponto fixo $(\bar{\phi}_-, \bar{H}_-)$. De (5.10), temos

$$G(\phi, \dot{\phi}, H) = 3 \left(F(\phi)H + \frac{1-6\xi}{6} F'(\phi)\dot{\phi} \right) + \frac{9}{2} (F'(\phi))^2 H, \quad (5.17)$$

e do vínculo de energia (5.7), temos que $F(\phi)H + F'(\phi)\dot{\phi} > 0$ sobre o semi-espaço $H > 0$, implicando na positividade de G e, portanto, estabelecendo o caráter atrator do ponto fixo $(\bar{\phi}_-, \bar{H}_-)$, para $\xi > -5/6$. Entretanto, essa é uma estimativa muito conservadora para o limite inferior de ξ .

Nossas simulações numéricas sugerem que ele pode ser consideravelmente menor. Poderemos verificar o caráter do ponto fixo $(\bar{\phi}_-, \bar{H}_-)$ mesmo para $\xi < -100$, sugerindo que eventuais ampliações futuras das regiões

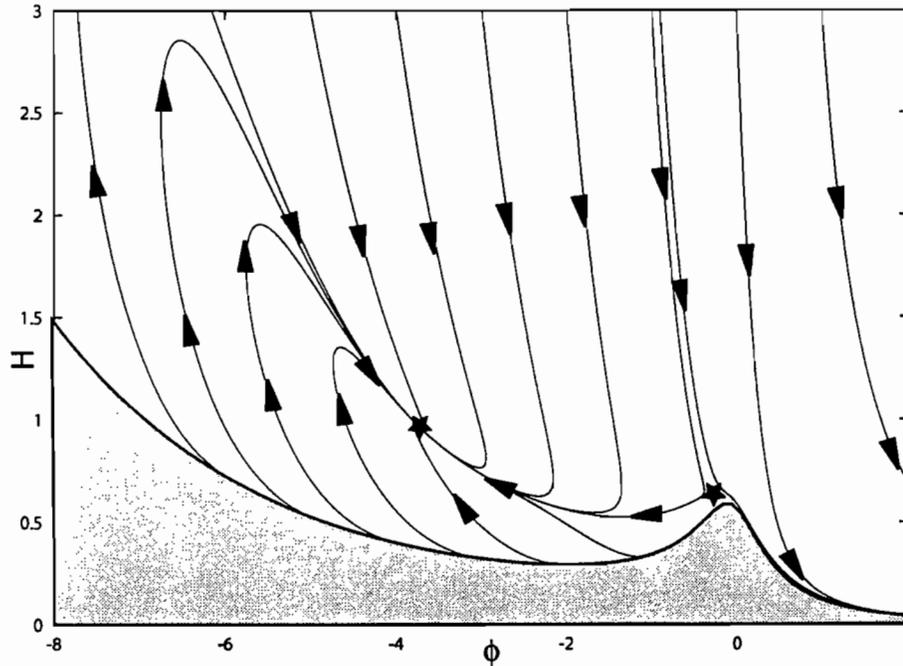


Figura 5.3: Espaço de fase típico (ϕ, H) , correspondendo ao caso $-\xi = A = \sigma = 1$. Devido as simetrias da Eq. (5.7)-(5.9), as trajetórias $H < 0$ são obtidas de $H > 0$ por uma reflexão sobre $H = 0$ e reversão das setas (operação de reversão temporal).

$G(\phi, \dot{\phi}, H) < 0$ não são suficientes para vencer o potencial V_{eff} em torno de $\bar{\phi}_-$.

Um espaço de fase típico é mostrado na Fig.(5.3), correspondendo ao caso $-\xi = A = \sigma = 1$. A bacia de atração é consideravelmente maior que a estimativa conservadora baseada nas linhas fechadas de L constante em torno dos pontos fixos. Note que todas as soluções começando com $\phi > \bar{\phi}_+$ são soluções que se afastam.

A Fig.(5.4) mostra que as curvas $w(t)$ para algumas soluções na Fig.(5.3). De acordo com (5.14), as soluções se aproximam do ponto fixo por baixo têm $w < -1$, enquanto que as soluções que se aproximam por cima têm $w > -1$.

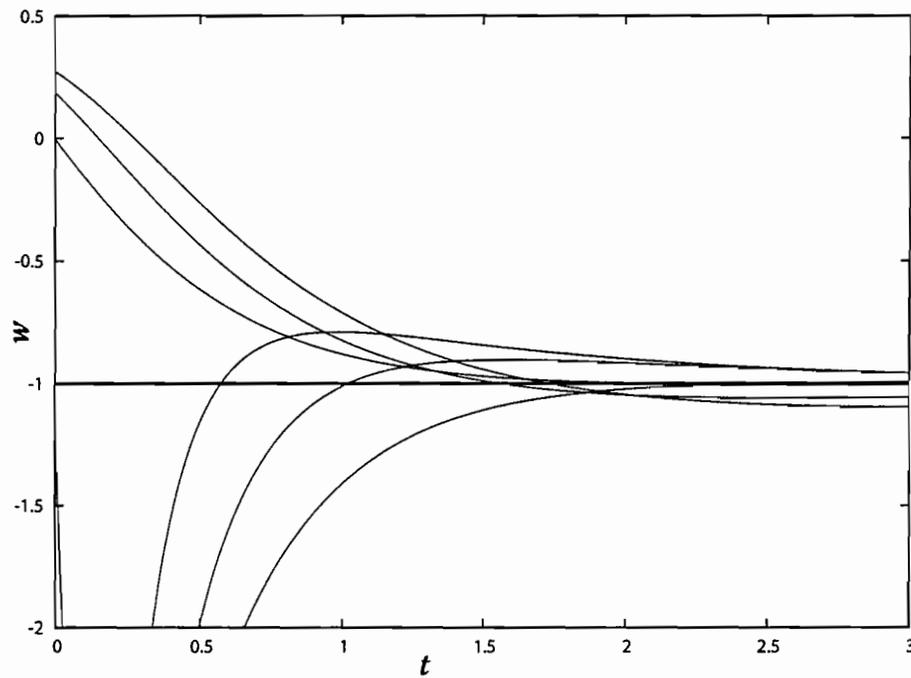


Figura 5.4: O parâmetro w de algumas soluções apresentadas no espaço de fase Fig.(5.3). de acordo com (5.14), as soluções têm $w < -1$ quando $\dot{H} > 0$, e $w > -1$ quando $\dot{H} < 0$.

Capítulo 6

Conclusões

Mostramos aqui que modelos quintessenciais não-minimamente acoplados com potenciais exponenciais podem exibir fases assintóticas de Sitter para grandes conjuntos de condições iniciais. Algumas dessas fases são caracterizadas por um parâmetro $w = p_\phi/\rho_\phi < -1$, compatível, em princípio, com os recentes dados observacionais. Nossa análise está baseada na existência de uma função de Lyapunov para a equação de Klein-Gordon que pode ser usada para estimar a bacia de atração dos pontos fixo relevantes. Como já foi mencionado, as bacias de atração reais são tipicamente maiores que essas estimativas. Nossos resultados estão de acordo com a análise linearizada recentemente proposta em [57].

Frisamos que o modelo apresentado aqui está livre das instabilidades que são usualmente associadas a modelos *phantom*. Classicamente, visto que $F(\phi) \neq 0$, o modelo não apresenta as singularidades anisotrópicas descritas em [58, 59]. Além disso, visto que $F(\phi)$ é sempre positiva e $V(\phi)$ é limitada por baixo, o modelo está também livre das instabilidades quânticas descritas em [4] para campos *phantom*.

Para os próximos anos espera-se que diversos experimentos forneçam mais informações sobre o Universo primordial. Um destes experimentos é o SNAP [60] (*Supernova/Acceleration Probe*), satélite que será lançado em 2007.

Segundo seus defensores, ele será capaz de medir cerca de 2000 supernovas em altos *redshifts* cobrindo um extenso ângulo sólido. Os resultados incluirão a história detalhada da expansão do Universo cobrindo os últimos 10 bilhões de anos, determinarão a sua curvatura espacial fornecendo um teste fundamental para a inflação e o comportamento da energia escura e sua evolução no tempo. Se for bem sucedido, o SNAP pode revelar novos dados sobre o universo primordial, confirmando ou descartando modelos. É neste momento que esperamos que os modelos de quintessência estendidos sejam testados. Para serem válidos, tais modelos precisam ser consistentes e robustos. Entendemos que modelos como o que estudamos nesta tese são ainda muito artificiais para a Cosmologia, sendo, portanto, importante para uma possível continuação desta linha de pesquisa implementar vínculos observacionais neste modelo.

Bibliografia

- [1] Supernova Cosmology Project (SCP). *Sítio:*
<http://www-supernova.lbl.gov/>.
- [2] High-Z Supernova Search Team (HZSNST). *Sítio:* <http://cfa-www.harvard.edu/cfa/oir/research/supernova/highz.html>.
- [3] A. Saa et al. *Superinflation, quintessence, and the avoidance of the initial singularity.* Int. J. Theor. Phys., **40:2295–2307**, 2001, gr-qc/0012105.
- [4] S. M. Carroll, M. Hoffman, and M. Trodden. *Can the dark energy equation-of-state parameter w be less than -1 ?* Phys. Rev., **D68:023509**, 2003, astro-ph/0301273.
- [5] R. A. Knop et al. *New constraints on ω_m , ω_λ , and w from an independent set of eleven high-redshift supernovae observed with hst.* Astrophys. J., **598:102**, 2003, astro-ph/0309368.
- [6] Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP). *Sítio:*
<http://map.gsfc.nasa.gov/>.
- [7] A. G. Riess et al. *Type ia supernova discoveries at $z > 1$ from the hubble space telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution.* Astrophys. J., **607:665–687**, 2004, astro-ph/0402512.

- [8] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt. *Cosmological imprint of an energy component with general equation-of-state*. Phys. Rev. Lett., **80:1582–1585**, 1998, astro-ph/9708069.
- [9] L. Wang and others. *Cosmic concordance and quintessence*. Astrophys. J., **530:17–35**, 2000, astro-ph/9901388.
- [10] J. S. Alcaniz. *Testing dark energy beyond the cosmological constant barrier*. Phys. Rev., **D69:083521**, 2004, astro-ph/0312424.
- [11] E. Hubble. Proceedings of the National Academy of Science, **15**, 1929.
- [12] Gamov. G. *Expanding universe and the origin of elements*. Phys. Rev., **70:572**, 1946.
- [13] Bethe H.A. Alpher, R.A. and G. Gamov. *The origin of chemical elementes*. Phys. Rev., **70:803**, 1948.
- [14] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Jonh Wiley and Sons, 1972.
- [15] E.W. Kolb and M.S. Turner. *The Early Universe*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1990.
- [16] D. N. Spergel et al. *First year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations: Determination of cosmological parameters*. Astrophys. J. Suppl., **148:175**, 2003, astro-ph/0302209.
- [17] W. L. Freedman et al. *Final results from the hubble space telescope key project to measure the hubble constant*. Astrophys. J., **553:47–72**, 2001, astro-ph/0012376.
- [18] Robert Wald. *General Relativity*. University of Chicago Press, Chicago, 1984.
- [19] J. C. Mather et al. *A preliminary measurement of the cosmic microwave background spectrum by the cosmic background explorer (cobe) satellite*. Astrophys. J., **354:L37–L40**, 1990.

- [20] R. E. de Souza. *Introdução à Cosmologia*. Edusp, Coleção Acadêmica, 2004.
- [21] J. A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge Astrophysics S., 2003.
- [22] S. Perlmutter et al. *Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae*. *Astrophys. J.*, **517:565–586**, 1999, astro-ph/9812133.
- [23] M. Hamuy et al. *A hubble diagram of distant type ia supernovae*. *Astron. J.*, **109:1–13**, 1995.
- [24] S. Perlmutter and B. P. Schmidt. *Measuring cosmology with supernovae*. 2003, astro-ph/0303428.
- [25] S. Hawking and G.F.R Ellis. *The Large Scale of Structure Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [26] P. J. E. Peebles and B. Ratra. *Cosmology with a time variable cosmological 'constant'*. *Astrophys. J.*, **325:L17**, 1988.
- [27] Bharat Ratra and P. J. E. Peebles. *Cosmological consequences of a rolling homogeneous scalar field*. *Phys. Rev.*, **D37:3406**, 1988.
- [28] I. Zlatev, L. Wang, and P. J. Steinhardt. *Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant*. *Phys. Rev. Lett.*, **82:896–899**, 1999, astro-ph/9807002.
- [29] P. J. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev. *Cosmological tracking solutions*. *Phys. Rev.*, **D59:123504**, 1999, astro-ph/9812313.
- [30] Jr. Callan C. G., S. R. Coleman, and R. Jackiw. *A new improved energy - momentum tensor*. *AnnPhys*, **59:42–73**, 1970.
- [31] D. Z. Freedman, I. J. Muzinich, and E. J. Weinberg. *On the energy-momentum tensor in gauge field theories*. *Ann. Phys.*, **87:95**, 1974.

- [32] D. Z. Freedman and E. J. Weinberg. *The energy-momentum tensor in scalar and gauge field theories*. Ann. Phys., **87:354**, 1974.
- [33] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Field Theory in Curved Space*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
- [34] S. Perlmutter et al. *Cosmology from type Ia supernovae*. Bull. Am. Astron. Soc., **29:1351**, 1997, astro-ph/9812473.
- [35] S. Perlmutter et al. *Discovery of a supernova explosion at half the age of the universe and its cosmological implications*. Nature, **391:51–54**, 1998, astro-ph/9712212.
- [36] S. Perlmutter et al. *Measurements of the cosmological parameters ω and λ from the first 7 supernovae at $z \geq 0.35$* . Astrophys. J., **483:565–581**, 1997, astro-ph/9608192.
- [37] Adam G. Riess et al. *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*. Astron. J., **116:1009–1038**, 1998, astro-ph/9805201.
- [38] Peter M. Garnavich et al. *Supernova limits on the cosmic equation of state*. Astrophys. J., **509:74–79**, 1998, astro-ph/9806396.
- [39] Peter M. Garnavich et al. *Constraints on cosmological models from hubble space telescope observations of high- z supernovae*. Astrophys. J., **493:L53–L57**, 1998, astro-ph/9710123.
- [40] B. P. Schmidt et al. *The high- z supernova search: Measuring cosmic deceleration and global curvature of the universe using type Ia supernovae*. Astrophys. J., **507:46–63**, 1998, astro-ph/9805200.
- [41] R. R. Caldwell. *A phantom menace?* Phys. Lett., **B545:23–29**, 2002, astro-ph/9908168.
- [42] C. Brans and R. H. Dicke. *Mach's principle and a relativistic theory of gravitation*. Phys. Rev., **124:925–935**, 1961.

- [43] C. M. Will. *Experiments Tests of Gravity*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1993.
- [44] P. J. E. Peebles and B. Ratra. *The cosmological constant and dark energy*. Rev. Mod. Phys., **75:559–606**, 2003, astro-ph/0207347.
- [45] V. Faraoni. *Superquintessence*. Int. J. Mod. Phys., **D11:471–482**, 2002, astro-ph/0110067.
- [46] V. Faraoni. *Possible end of the universe in a finite future from dark energy with $w < -1$* . Phys. Rev., **D68:063508**, 2003, gr-qc/0307086.
- [47] S. D. H. Hsu, A. Jenkins, and M. B. Wise. *Gradient instability for $w < -1$* . Phys. Lett., **B597:270–274**, 2004, astro-ph/0406043.
- [48] F. C. Carvalho and A. Saa. *Non-minimal coupling, exponential potentials and the $w < -1$ regime of dark energy*. Phys. Rev., **D70:087302**, 2004, astro-ph/0408013.
- [49] C. Rubano and P. Scudellaro. *On some exponential potentials for a cosmological scalar field as quintessence*. Gen. Rel. Grav., **34:307–328**, 2002, astro-ph/0103335.
- [50] C. Rubano et al. *Exponential potentials for tracker fields*. Phys. Rev., **D69:103510**, 2004, astro-ph/0311537.
- [51] J. J. Halliwell. *Scalar fields in cosmology with an exponential potential*. Phys. Lett., **B185:341–344**, 1987.
- [52] Q. Shafi and C. Wetterich. *Inflation from higher dimensions*. Nucl. Phys., **B289:787–809**, 1987.
- [53] Ishwaree P. Neupane. *Accelerating cosmologies from exponential potentials*. Class. Quant. Grav., **21:4383–4397**, 2004, hep-th/0311071.
- [54] D. F. Torres. *Quintessence, super-quintessence and observable quantities in brans-dicke and non-minimally coupled theories*. Phys. Rev., **D66:043522**, 2002, astro-ph/0204504.

-
- [55] E. Gunzig et al. *Superinflation, quintessence, and nonsingular cosmologies*. Phys. Rev., **D63:067301**, 2001, gr-qc/0012085.
- [56] M. Abramowitz and I. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1965.
- [57] V. Faraoni. *de sitter attractors in generalized gravity*. Phys. Rev., **D70:044037**, 2004, gr-qc/0407021.
- [58] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig, and A. Saa. *On the singularities of gravity in the presence of non-minimally coupled scalar fields*. Phys. Rev., **D67:027301**, 2003, gr-qc/0210069.
- [59] L. R. Abramo, L. Brenig, E. Gunzig, and A. Saa. *Dynamical study of the singularities of gravity in the presence of non-minimally coupled scalar fields*. Int. J. Theor. Phys., **42:1145–1152**, 2003, gr-qc/0305008.
- [60] Supernova/Acceleration Probe (SNAP). *Sítio: <http://snap.lbl.gov/>*.