UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

*Teorias de gauge e modelos topológicos
(anyons e ordem topológica)*

Miguel Jorge Bernabé Ferreira

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho

Tese de doutorado apresentada ao Instituto
de Física para a obtenção do título de doutor
em ciências.

Comissão examinadora:

Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho (IFUSP).

Prof. Dr. Luís Gregório Godoy de Vasconcellos Dias da Silva (IFUSP).

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IFUSP).

Prof. Dr. Valdecir Marvulle (UFABC).

Prof. Dr. Roldão da Rocha Junior (UFABC).

São Paulo - SP
2016

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Ferreira, Miguel Jorge Bernabé

Teorias de gauge e modelos topológicos (anyons e ordem topológica).
São Paulo, 2016.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.
Depto. de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho

Área de Concentração: Física Matemática

Unitermos: 1. Partículas elementares; 2. Teoria de gauge; 3. Mecânica
estatística quântica; 4. Álgebras de Hopf.

USP/IF/SBI-064/2016

(...)

- *Would you tell me, please, which way I ought to go from here?*

- *That depends a good deal on where you want to get to, - said the Cat.*

- *I don't much care where - said Alice.*

- *Then it doesn't matter which way you go, - said the Cat"*

(...)

Alice's Adventures in Worderland - Lewis Carroll (1865)

Resumo

Uma das propriedades mais marcantes de partículas que obedecem a dinâmica quântica é o fato de partículas do mesmo tipo (como dois elétrons, por exemplo) serem indistinguíveis. Em três dimensões, essas partículas podem ser separadas em dois grupos distintos - férmions ou bósons - não havendo uma terceira opção. A razão para isso é topológica, ou seja, depende exclusivamente da topologia do espaço. Em duas dimensões, entretanto, existem partículas que obedecem a regras estatísticas fracionárias, ou estatísticas ainda mais bizarras ditas não-abelianas, em que uma simples troca de dois anyons idênticos representa uma transformação unitária na função de onda do sistema ao invés de uma simples fase. Partículas que obedecem essas regras estatísticas não-usuais recebem o nome de *anyons*. Da mesma forma como a topologia do espaço em três dimensões dita as possíveis regras estatísticas que as partículas podem obedecer, a estatística aniônica está fortemente relacionando à topologia do espaço e, portanto, sistemas aniônicos são muitas vezes usados para descrever fases topológicas presentes em alguns sistemas bidimensionais. Neste trabalho apresentaremos alguns aspectos gerais de sistemas aniônicos - livres de modelo - e analisaremos alguns modelos de muitos corpos na rede que permitem descrever anyons como excitação de quasi-partícula. A principal classe de modelo que iremos analisar é a classe do modelo duplo quântico (MDQ) - que é um modelo quântico em $(2+1)D$ cujos graus de liberdade são elementos de um grupo G (finito) vivendo nas arestas de uma rede e cuja dinâmica é descrita por uma hamiltoniana de muitos corpos. O MDQ é um modelo já bem estudado e conhecido na literatura; neste trabalho, porém, será apresentada uma formulação alternativa para o mesmo, a qual desempenha dois papéis importantes nesta tese. O primeiro deles é de mostrar que o MDQ pode ser obtido a partir da deformação de um invariante topológico; o que, por sua vez, ajuda a reconhecer a ordem topológica presente no modelo. O segundo papel importante é mostrar que essa formulação leva também a uma hamiltoniana de muitos corpos que representa uma generalização da hamiltoniana do MDQ. Alguns desses novos modelos permitem descrever sistemas aniônicos que não podem ser descritos pelo modelo duplo quântico usual. Em outras palavras, o modelo generalizado que será apresentado neste trabalho permite descrever diferentes fases topológicas partindo da deformação de um mesmo invariante topológico.

Palavras chave: ordem topológica, anyons, teorias de gauge, álgebras de Hopf.

Abstract

One of the most interesting properties of quantum particles is the indistinguishability of particles of the same kind (as for example two electrons). On three dimensions these particles are known to be either fermions or bosons depending on their statistical behaviour. The reason for that is topology, in other words these two possible statistics are due to the space topology. However, on two dimensions there are particles called anyons which are neither fermion nor boson; they may obey a fractional statistic or a even more weird non-abelian statistic - where a single exchange of two identical anyons a unitary transformation on the wave function instead of just acquiring a phase factor. As well as the usual fermionic and bosonic statistic, the anyonic statistic depends strongly on the space topology and thus anyonic systems are often used to describe topological phases of matter of two dimensional systems. In this work we are going to show some general (model free) aspects of anyonic systems and also analyse some many body systems that describe anyons as quasi-particle excitations. We will mostly study a class of model called quantum double models (QDMs). Quantum double models are $(2+1)$ D models where the degrees of freedom are elements of a group G living on the edges of lattice and the dynamic is given by a many body hamiltonian. The QDM is a well known and studied model on the literature, however in this work we are going to show an alternative construction for QDMs which will play two very important roles in this thesis. First, it will allows us to obtain the QDMs from deforming a topological invariant, and that helps to easily identify the topological order on this model. Besides, one can also obtain a many body hamiltonian that represents a generalization of the the QDM hamiltonian. Some of these new models describe anyonic systems other than the ones that can be described by usual QDM. In other words, this new construction leads to a many body hamiltonian that can describe both quantum double models and generalizations of it as particular cases.

Key words: topological order, anyons, gauge theories, Hopf algebras.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que me ajudaram para que este trabalho fosse concluído. Agradeço a toda a ajuda que recebi e que contribuíram direta e indiretamente para a concretização desta tese com igual importância. Em especial, gostaria de manifestar minha gratidão às pessoas abaixo.

- Aos meus pais, pelo exemplo, pelo incentivo e por sempre estarem prontos para me ajudar.
- À Jéssica, que me ajudou a superar um dos momentos mais difíceis que passei durante a conclusão deste trabalho e pela companhia.
- Ao meu orientador, Paulo, pela motivação e pelo incentivo.
- Aos meus colegas de grupo, Anderson, Javier, Kazuo, Maria Fernanda, Marzia, Pablo, Pramod e Ricardo, pelas centenas de horas de discussões e pelos desafios que enfrentamos e superamos juntos.
- Aos meus amigos Alysson, André, Javier, Pablo, Rafael, Riis, Yuber e Wallace, pelos momentos de descontração que foram essenciais para não perder a cabeça.
- Aos funcionários do Departamento de Física-Matemática pela simpatia e boa vontade. Em particular, às meninas da secretaria, Amélia, Cecília e Simone; e também à Nice e à dona Lourdes, pelos mais de quatro mil litros de café feitos durante esses quatro anos de doutorado.
- Aos professores integrantes da banca examinadora desta tese, prof. Dr. Luís Gregório Godoy de Vasconcellos Dias da Silva, prof. Dr. João Carlos Alves Barata, prof. Dr. Valdecir Marvulle e ao prof. Dr. Roldão da Rocha Junior pelas críticas, sugestões e elogios.
- Ao Rafael Antônio Bernabé Zengo pela ajuda na correção ortográfica desta tese.
- À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), referente ao processo número 2012/21355-9, e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro.

Conteúdo

1. Introdução	1
2. Propriedades gerais dos anyons e dos sistemas aniônicos	15
2.1. Regras de fusão	15
2.1.1. Anyons não-abelianos	20
2.1.2. Espaço de fusão	21
2.1.3. Regra do pentágono	27
2.2. Troca de anyons	32
2.2.1. Regra do hexágono	32
2.3. Matriz de braid	36
3. Toric Code	39
3.1. Toric code	39
3.1.1. Álgebra dos operadores de vértice e de plaqueta	40
3.1.2. Nível e estado fundamental de H^{TC}	42
3.1.3. Álgebra dos operadores de string	42
3.1.4. Estados excitados da hamiltoniana	46
3.1.5. Estatística das quasi-partículas	50
4. Álgebras de Hopf e exemplos	53
4.1. Diagramas de Kuperberg	53
4.2. Álgebras e coálgebras	55
4.2.1. Álgebras associativas	55
4.2.2. Centro da álgebra	57
4.2.3. Coálgebras coassociativas	57
4.2.4. Biálgebras	58
4.3. Álgebras de Hopf	59
4.3.1. Integral e cointegral na álgebra	60
4.4. Exemplos de álgebras de Hopf	60
4.4.1. Álgebra de grupo $\mathbb{C}G$	61
4.4.2. Álgebra do duplo quântico $D(G)$	62
5. Modelo duplo quântico	69
5.1. Modelo duplo quântico	69
5.1.1. Nível e estado fundamental de H^{DQ}	72
5.1.2. Estados excitados e quasi-partículas	73
5.1.3. Algumas propriedades das excitações de baixa energia	77

6. Exemplos de modelos duplo quânticos	79
6.1. Modelo duplo quântico abeliano - $G = \mathbb{Z}_n$	79
6.1.1. Operadores de string	79
6.1.2. Álgebra dos operadores Z_γ^p e $X_{\gamma^*}^q$	81
6.2. Modelo duplo quântico não-abeliano - $G = S_3$	89
7. Teorias de gauge na rede e o modelo duplo quântico	93
7.1. Teorias de gauge clássicas na rede	93
7.1.1. Transformação de gauge e invariância de gauge	94
7.1.2. Teorias de gauge em variedades com fronteira	95
7.2. Modelo duplo quântico e teorias de gauge na rede	96
7.3. Construção da TCK	99
7.3.1. Definindo pesos locais	99
7.3.2. Atribuindo pesos aos constituintes de $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$	101
7.3.3. Modelo clássico em três dimensões	103
7.4. Modelo quântico em $(2+1)\text{D}$	105
7.4.1. Matriz $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ como um produto de operadores locais	106
8. Hamiltonianas de muitos corpos a partir da TCK	109
8.1. Duplo quântico a partir da teoria de Kuperberg	109
8.1.1. Degenerescência do duplo quântico como um invariante topológico	110
8.2. Deformações e perturbações do DQ	111
8.2.1. Deformações do modelo duplo quântico	114
8.2.2. Perturbações do modelo duplo quântico	115
8.3. Anyons não abelianos a partir de modelos abelianos	115
8.3.1. Condensação no TC e regra de fusão não-abeliana	116
8.4. Superposição de modelos duplo quânticos a partir da TCK	122
9. Considerações finais	127
Considerações finais	127
9.1. Conclusões	127
9.2. Comentários finais e perspectivas futuras	129
Apêndices	131
A. Propriedades e identidades de álgebras de Hopf	133
A.1. Identidades e propriedades de álgebras associativas	133
A.1.1. Traço e cotraço da representação regular	133
A.2. Propriedades gerais das álgebras de Hopf	136
A.2.1. Propriedades da antípoda em álgebras de Hopf involutivas	138
B. Representações de álgebras semi-simples	141
B.1. Módulos, submódulos e irreducibilidade	141
B.1.1. Centro das álgebras semi-simples	143
B.1.2. Representações irreduzíveis das álgebras semi-simples	144

B.2. Caracteres das representações irreduzíveis	146
C. Representações irreduzíveis das álgebras de grupo e do duplo quântico	151
C.1. Álgebra de grupo	151
C.1.1. Representações irreduzíveis da álgebra de grupo	151
C.1.2. Centro da álgebra de grupo	152
C.2. Álgebra do duplo quântico	152
C.2.1. Representações irreduzíveis da álgebra do duplo quântico	153
C.2.2. Caracteres irreduzíveis da álgebra do duplo quântico	157
C.2.3. Centro da álgebra do duplo quântico $D(G)$	158
D. Álgebra dos operadores	161
D.1. Álgebra dos operadores auxiliares	161
D.2. Álgebra dos operadores de vértice e plaqueta	162
D.3. Projetores ortogonais	166
E. Matriz de transferência como um produto de operadores locais	169
E.1. Convencionando uma orientação em $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$	169
E.2. Decompondo a parte temporal de $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$	170
E.3. Decompondo a parte espacial de $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$	172
E.4. Álgebra dos operadores locais	175
Bibliografia	179

1. Introdução

A idéia de que a matéria é constituída de partículas minúsculas e indivisíveis data da antiguidade. A abordagem reducionista na física, entretanto, intensificou-se em meados do século XIX e a partir daí foi tornando-se cada vez mais reducionista. Neste período, alguns físicos acreditavam que os fenômenos macroscópicos emergentes de sistemas termodinâmicos poderiam ser reduzidos ao entendimento das leis microscópicas que regem os mesmos. O nascimento da teoria quântica de campos permitiu descrever não somente as partículas elementares que constituem a matéria mas também todas as interações fundamentais (não-gravitacionais) conhecidas em termo de partículas. Com isso, partículas tidas antes como indivisíveis puderam ser interpretadas como sendo, na verdade, compostas por outras partículas ainda menores e, portanto, mais elementares. Mas, embora o conjunto de todas as partículas elementares conhecidas seja bastante diversificado e cada partícula seja descrita por uma simetria própria, essas partículas possuem uma propriedade em comum - exclusiva de partículas quânticas - a indistinguibilidade.

A indistinguibilidade é um fenômeno que não está presente em sistemas clássicos, mas está presente em todos os sistemas quânticos descritos por partículas - sendo elas elementares ou não. Isso significa que num sistema quântico ocupado por dois elétrons, por exemplo, não há como rotular essas duas partículas de forma a ser possível diferenciá-las. Essa característica independe da fenomenologia das partículas e permite que elas possam ser divididas em dois grupos distintos: *férmions* e *bósons*.

Partículas idênticas

As partículas governadas pelas leis da dinâmica quântica possuem uma propriedade bastante contrastante com as propriedades clássicas - o fato de serem indistinguíveis. Isso é verdade para todas as partículas elementares conhecidas, independentemente de serem férmions ou bósons. Mas o que aconteceria com a função de onda de duas partículas idênticas se essas fossem trocadas de lugar? Uma vez que as partículas são idênticas, poderia-se pensar que a função de onda permaneceria inalterada e é aí que um fato curioso acontece. De fato a função de onda continua a mesma a menos de uma fase adquirida nesse processo de troca de partículas. Essa fase, por sua vez, é diferente para partículas fermiônicas e bosônicas. Mais curioso ainda é que as diferenças entre esses dois tipos de partículas é bastante grande e levam a conseqüências bastante distintas. A seguir algumas das propriedades mais marcantes de cada uma delas serão discutidas.

Bósons

Diz-se que partículas bosônicas são aquelas que obedecem à estatística de Bose-Einstein - são partículas que possuem função de onda simétrica, isto é, a função de onda adquire uma fase

trivial $e^{i2\pi}$ quando duas partículas bosônicas são trocadas de lugar. Considere, por exemplo, as funções de onda $\psi_1(\mathbf{r}_1)$ e $\psi_2(\mathbf{r}_2)$ que descrevem os estados quânticos de dois bósons, um localizado em $\mathbf{r}_1$ e outro em $\mathbf{r}_2$. A função de onda do sistema composto pelas duas partículas deve ser da forma

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) + \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_1)) ,$$

pois se nota que

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

se trocarmos $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$.

Tomemos como exemplo um gás composto por N partículas bosônicas livres. Se $E_i(\nu_i)$ é a energia de cada bóson individualmente, sendo ν_i um número quântico da i -ésima partícula, a energia total do sistema será

$$E = \sum_{i=1}^N E_i(\nu_i) .$$

Para temperaturas muito baixas, próximas do zero absoluto, o sistema deve estar no estado de menor energia e isso por sua vez acontece quando todos, ou quase todos, os bósons estiverem em seus estados de menor energia individualmente. Esse fenômeno é chamado de *condensação de Bose-Einstein* e ocorre abaixo de uma certa temperatura crítica T_c .

Férmions

Diz-se que partículas fermiônicas são aquelas que obedecem à estatística de Fermi-Dirac - são partículas que possuem função de onda anti-simétrica, isto é, a função de onda adquire uma fase $e^{i\pi}$ quando duas partículas são trocadas de lugar. Considere, por exemplo, as funções de onda $\psi_1(\mathbf{r}_1)$ e $\psi_2(\mathbf{r}_2)$ que descrevem os estados quânticos de dois férmions, um localizado em $\mathbf{r}_1$ e outro em $\mathbf{r}_2$. A função de onda do sistema composto pelas duas partículas deve ser da forma

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2) - \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_1)) ,$$

pois se nota que

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \rightarrow \psi(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1) = -\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$$

se trocarmos $\mathbf{r}_1 \leftrightarrow \mathbf{r}_2$. Se ambas as partículas estiverem no mesmo estado quântico, então $\psi_1(\mathbf{r}) = \psi_2(\mathbf{r})$, para todo $\mathbf{r}$, mas isso implica que $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 0$, ou ainda, a densidade de probabilidade disso acontecer é dada por:

$$|\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = 0 ,$$

o que significa que a probabilidade de existir dois férmions no mesmo estado quântico é nula. Esse princípio é conhecido como *princípio da exclusão de Pauli* e só acontece com sistemas fermiônicos.

Considere, por exemplo, um gás formado por N elétrons livres. Cada um dos elétrons possui uma função de onda e um espectro de energia. Seja $E_i(k_i)$ o espectro de energia de

cada elétron individualmente com k_i o número de onda do i -ésimo elétron. A energia total do sistema será dada por:

$$E = \sum_{i=1}^N E_i(k_i) .$$

Próximo da temperatura zero o sistema tenderá para o estado de menor energia, mas qual será o menor valor de energia do sistema? Note que nesse caso, diferentemente do caso bosônico, não podemos dizer que isso acontece quando cada elétron estiver no estado de menor energia individualmente, pois nesse caso todos os elétrons ocupariam o mesmo estado quântico, o que é proibido pelo princípio da exclusão de Pauli. Sendo assim, não resta escolha se não preencher os níveis de energia lentamente até acomodar todos os elétrons com o mínimo de energia possível. Ao fim, a energia do sistema será o menor valor de energia possível para acomodar todos os elétrons nos estados de mais baixa energia mas sem que haja a repetição de estados. Esse nível de energia, que é o menor nível possível para acomodar todos os elétrons, é chamado de nível de Fermi E_f .

Figura 1.1.: esses dois gráficos ilustram a diferença entre dois gases, um formado por férmions livres e outro formado por bósons livres.

A figura 1.1(a) ilustra o caso de um gás de elétrons livres à temperatura zero, com todo o nível de Fermi preenchido, enquanto que a figura 1.1(b) ilustra o caso de um gás de bósons livres também à temperatura zero. Observe que toda a distinção entre sistemas fermiônicos e bosônicos que mostramos foi baseada única e exclusivamente no tipo de estatística que essas partículas podem obedecer. Não foi preciso levar em consideração interações entre partículas para concluir esse resultado, o que indica que um estudo livre de modelo de partículas elementares pode sim trazer bastante informação de interesse físico.

Uma pergunta natural a se fazer neste ponto é: existe uma terceira opção? Existe alguma partícula que seja regida pela dinâmica quântica e que não obedeça a estatística de Fermi-Dirac nem de Bose-Einstein? A resposta para essa pergunta é não - pelo menos para partículas que vivem em três dimensões espaciais, e o motivo para isso é a topologia do espaço das configurações do sistema. Para checar a estatística de partículas indistinguíveis é necessário monitorar a fase adquirida pela função de onda do sistema quando as partículas

são trocadas de lugar. Considere para isso a seguinte situação: um estado quântico inicial $|\psi^0\rangle$ representa um sistema ocupado por duas partículas indistinguíveis nas posições $\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$, conforme representado na figura 1.2(a). O operador R é o operador de translação que troca as duas partículas de lugar. Uma dupla troca de partículas é então representada pelo estado $R^2|\psi^0\rangle$ - ilustrado na figura 1.2(b). Para efeitos de troca de partículas, o caminho tomado

Figura 1.2.: troca de partículas indistinguíveis em três dimensões.

pelas partícula não é totalmente relevante e sim somente os estados iniciais e finais desse processo. A ação de R^2 , portanto, é a mesma se o caminho γ é ligeiramente deformado - conforme mostrado na figura 1.3. Como fica claro na figura, uma vez que todo caminho γ pode ser continuamente deformado no caminho trivial (formado somente por um ponto), a ação de R^2 em $|\psi^0\rangle$ é trivial e, portanto, escrevemos

$$R^2|\psi^0\rangle = |\psi^0\rangle, \quad (1.1)$$

ou seja, os autovalores do operador R só podem ser ± 1 , para qualquer que seja o caminho γ .

$$R|\psi^0\rangle = \pm|\psi^0\rangle.$$

Isso equivale a dizer que numa simples troca de partículas indistinguíveis em três dimensões a função de onda pode adquirir duas possíveis fases distintas, ± 1 , que correspondem aos férmions e bósons; não havendo uma terceira opção.

Figura 1.3.: em três dimensões todos os caminhos podem ser continuamente deformados no caminho trivial. A cúpula em amarelo representa uma superfície arbitrária em três dimensões.

Anyons

Em duas dimensões, entretanto, o argumento anterior não é válido. A razão para isso é que o caminho γ representado na figura 1.2(b) não pode ser continuamente deformado no caminho

trivial e isso traz conseqüências radicais quanto à estatística que as partículas obedecem. Nesse caso não se pode mais dizer que o operador R^2 age como identidade numa dupla troca de partículas e, conseqüentemente, a função de onda do sistema pode adquirir qualquer fase $0 \leq \theta < 2\pi$. Partículas que obedecem a esse tipo de estatística exótica são chamadas de *anyons abelianos* [1]. Há também anyons ditos *não-abelianos* [2], que dão origem a regras estatísticas ainda mais exóticas. Isso ocorre quando a matriz R é uma matriz unitária arbitrária - não necessariamente uma fase - e, dado que matrizes unitárias nem sempre comutam umas com as outras, dizemos que os anyons nesse caso são não-abelianos.

Poderíamos pensar que partículas que obedecem a estatística aniônica não aparecem espontaneamente na natureza, uma vez que, sem considerar a dimensão temporal, o mundo em que vivemos é tridimensional. Mas, não há nada que impeça a existência de sistemas físicos que se comportem como sistemas bidimensionais - como por exemplo, elétrons livres na interface entre dois semi-condutores, ou ainda um sistema estritamente tridimensional que possua alguma simetria em alguma das direções espaciais. Esse é o caso, por exemplo, de um sistema composto por um solenóide infinito na direção do eixo $\hat{z}$ - ilustrado na figura 1.4(a). Para todos os efeitos esse sistema comporta-se como um sistema bidimen-

Figura 1.4.: solenóide infinito e partícula eletricamente carregada.

sional e isso, conforme veremos, leva a conseqüências que não seriam possíveis em sistemas tridimensionais. O motivo para isso é que, como o solenóide é infinito, uma partícula eletricamente carregada com carga elétrica q pode mover-se livremente na direção $\hat{z}$ por uma simples questão de simetria, dando origem a um efeito chamado *efeito Aharonov-Bohm* [3] que, conforme veremos a seguir, é um exemplo de uma realização física de anyons.

Efeito Aharonov-Bohm

O efeito Aharonov-Bohm [3] é um efeito em que a função de onda de uma partícula carregada eletricamente ganha uma fase não-trivial do acoplamento da carga com os potenciais eletromagnéticos. O mais interessante é que esse efeito ocorre mesmo com a partícula estando confinada numa região do espaço onde os campos elétricos e magnéticos são nulos.

Considere que o solenóide da figura 1.4(a) seja ligado aos terminais de uma bateria - como ilustrado na figura 1.4(b). Isso dará origem a um campo magnético $\mathbf{B}$ que é nulo fora do solenóide mas não-nulo dentro dele - também representado na figura. Esse arranjo pode então ser representado bidimensionalmente num plano, como sendo um sistema físico composto por uma partícula eletricamente carregada, com carga q , e um tubo de fluxo de campo magnético furando o plano. A figura 1.5 ilustra uma seção transversal desse sistema.

Figura 1.5.: o sistema pode ser representado num plano, sendo m uma partícula de fluxo magnético, representando o fluxo do campo magnético através do solenóide, e q uma partícula eletricamente carregada.

À luz da mecânica quântica, os estados de uma partícula são descritos por uma função onda $\psi(\mathbf{r}, t)$ que é solução da equação de Schrodinger

$$H\psi(\mathbf{r}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t)$$

para uma dada condição de contorno. Para uma partícula livre a hamiltoniana é dada por:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 .$$

Já para um sistema composto por uma partícula livre, eletricamente carregada e na presença de um potencial vetor¹ $\mathbf{A}$, a hamiltoniana assume a forma:

$$H^q = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\nabla - i\frac{q}{c\hbar} \mathbf{A} \right)^2 ,$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo. Se $\Psi(\mathbf{r})$ é a solução da equação de Schrodinger independente do tempo para $q = 0$, então a evolução da partícula com carga $q \neq 0$, movendo-se ao longo de um caminho γ , será dada por:

$$\Psi^q(\mathbf{r}) = \exp \left(i\frac{q}{c\hbar} \int_{\gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \Psi(\mathbf{r}) . \quad (1.2)$$

Em particular, quando a partícula dá uma volta completa em torno do tubo de fluxo a função adquire uma fase θ dada por:

$$\theta = \frac{q}{c\hbar} \oint_{\gamma} \mathbf{A}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

¹O potencial vetor relaciona-se ao campo magnético por $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

e essa, pelo teorema de Stokes, pode também ser escrita como

$$\theta = \frac{q}{c\hbar} \iint_{S(\gamma)} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{c\hbar} \iint_{S(\gamma)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{c\hbar} \Phi_B , \quad (1.3)$$

sendo $S(\gamma)$ qualquer superfície aberta que tenha γ como fronteira e Φ_B como fluxo de campo magnético que passa por dentro do solenóide. Esse efeito é conhecido como *efeito Aharonov-Bohm* e essa diferença de fase pode ser detectada por experimentos de interferência [4].

Mas o que o efeito Aharonov-Bohm tem a ver com anyons? Para responder a esta questão considere que o tubo de fluxo seja na verdade uma partícula de fluxo - conforme ilustrado na figura 1.5. De acordo com os cálculos realizados anteriormente sabemos que a estatística mútua² entre as partículas q e m é dada pela fase θ na equação (1.3). A

Figura 1.6.: um par composto por uma partícula eletricamente carregada q e uma partícula de fluxo m pode ser encarado como sendo uma única partícula $\epsilon = q \times m$.

partícula obtida da fusão de q com m , que denotaremos por $q \times m = \epsilon$, entretanto, obedece uma estatística aniônica, como veremos a seguir. A estatística de uma partícula composta - como é o caso de $\epsilon = q \times m$ - é determinada pela estatística mútua entre as partículas de carga e de fluxo, isto é, a fase adquirida numa simples troca de dyons é a mesma que a obtida pela carga q quando essa dá uma volta em torno da partícula de fluxo. Para entender melhor essa afirmação, considere a evolução de uma simples troca de dyons - representada na figura 1.7(a). O resultado que mostraremos a seguir é que esse estado pode ser continuamente deformado no estado desenhado na figura 1.7(b) e isso prova a afirmação acima. Primeiramente, devemos lembrar que as linhas de mundo representadas na figura 1.7 podem ser continuamente deformadas sem afetar o resultado final da evolução. A evolução representada na figura 1.7(a) pode, então, ser continuamente deformada nas evoluções mostradas na figura 1.8. Na evolução final, representada na figura 1.8, podemos ainda deformar as linhas de mundo em verde e obtemos as evoluções mostradas na figura 1.9.

Resumindo, as partículas compostas por uma carga e um fluxo são indistinguíveis e a regra estatística que essas obedecem é dada pela fase:

$$\theta = \frac{q}{\hbar c} \Phi_B . \quad (1.4)$$

Uma vez que o fluxo magnético Φ_B pode assumir qualquer valor, pois não há restrições quanto à corrente aplicada no solenóide nem quanto à área do mesmo. Essa regra de estatística é fracionária em geral e trata-se, portanto, de uma estatística aniônica.

²A estatística mútua entre duas partículas não-idênticas não é, a rigor, uma estatística no sentido usual e sim somente uma fase adquirida numa troca de partículas não-idênticas. Convencionou-se, no entanto, tal nomenclatura para referir-se a esse tipo de fase.

Figura 1.7.: uma simples troca de dyons é equivalente a uma dupla troca de uma partícula de carga com um partícula de fluxo.

Figura 1.8.: deformações contínuas das linhas de mundo não alteram o resultado final da evolução. A região em destaque serve para facilitar a identificação da região que está sendo deformada.

Figura 1.9.: essa sequência de deformações mostra que os estados representados na figura 1.8 podem ser continuamente deformados um no outro.

Existem três partículas não-triviais envolvidas nesse efeito. Uma carga elétrica, que pode ser pensada como sendo um elétron e , portanto, um férmion; uma partícula de fluxo, que pensaremos como sendo um bóson e a partícula composta $\epsilon = q \times m$, que é um anyon legítimo. Nada impede, no entanto, que falemos que todas as partículas envolvidas no efeito Aharonov-Bohm sejam aniônicas, uma vez que férmions e bósons são exemplos triviais de anyons. O ponto principal é que, além das regras estatísticas, os sistemas aniônicos possuem também uma regra de fusão, o que significa que num sistema onde existam as partículas aniônicas a e b , existirá também uma partícula c que representa a fusão dessas duas, denotada por $a \times b = c$. Resumindo, sistemas aniônicos são determinados por suas

estatísticas (abelianas ou não-abelianas) e suas regras de fusão.

Neste ponto cabe um pequeno resumo das propriedades de sistemas aniônicos. Conforme vimos na figura 1.3, a razão para só haver férmions e bósons em três dimensões é uma razão topológica. Isso ocorre porque o grupo fundamental do espaço de configurações de um sistema tridimensional é trivial e, portanto, qualquer caminho fechado pode ser continuamente deformado no caminho trivial - formado por somente um ponto. Além disso, sabemos do teorema de Stokes que a forma precisa do caminho γ na equação (1.3) não é muito relevante, contanto que o caminho contenha o tubo de fluxo em seu interior. Fisicamente, isso significa que a estatística que as partículas obedecem no efeito Aharonov-Bohm não depende de detalhes geométricos do caminho mas sim somente de sua classe de homotopia. Esse é um resultado bastante forte e garante a existência de um tipo de ordem chamada de *ordem topológica* em sistemas aniônicos. Ordens topológicas, no entanto, são propriedades mais gerais e não são exclusivas de sistemas bidimensionais. A seguir daremos uma breve noção sobre o assunto.

Ordem topológica

É um fato já bastante conhecido que as fases em que a matéria pode ser encontrada apresentam, em geral, algum tipo de simetria - podendo essa ser uma simetria espacial (rotação e translação em um cristal, por exemplo) ou alguma simetria da hamiltoniana que descreve a dinâmica do modelo. Um cristal de NaCl, o famoso sal de cozinha, possui uma estrutura cristalina cúbica, que apresenta simetria translacional discreta, da ordem do espaçamento da rede. Já num gás, as moléculas que o constituem estão desordenadas em um movimento aleatório e o sistema possui simetria translacional contínua. O ponto aqui é que diferentes fases da matéria possuem, em geral, diferentes tipos de simetria. Num cristal, as moléculas estão mais fortemente ligadas que num gás, o que significa que o gás representa um sistema com “maior grau” de simetria que um cristal. Esse é o ponto principal da teoria de transição de fase de Landau [5], que trata de transições de fase contínuas de segunda ordem como uma quebra de simetria; melhor dizendo, trata da transição de fase de um sistema desordenado para um sistema ordenado. Tendo em vista que o sistema desordenado apresenta “maior grau” de simetria que o ordenado, pode-se dizer que houve então uma redução do grau de simetria e, portanto, uma quebra de simetria.

Uma vez que os termos “menor grau” e “maior grau” de simetria são bastante subjetivos, a fim de um entendimento mais quantitativo da teoria de transição de fase, é necessário que haja um *parâmetro de ordem* que seja capaz de diferenciar entre as fases ordenada e desordenada do modelo. Esse parâmetro de ordem deve ser um observável do sistema e deve ser tal que assuma valores diferentes de zero na fase ordenada e seja igual a zero na fase desordenada, além de, em geral, depender de variáveis termodinâmicas como pressão e temperatura. Um exemplo bastante interessante e didático para compreender melhor esse esquema é o caso do modelo de Ising em duas dimensões.

O modelo de Ising é um modelo de spins na rede desenvolvido em 1920 pelo físico alemão Wilhelm Lenz. O modelo recebeu esse nome após ter sido resolvido pela primeira vez em 1925 por Ernst Ising, aluno de Lenz - Ising resolveu a versão unidimensional do modelo. A

solução analítica para o caso bidimensional só veio a aparecer mais tarde, em 1944, quando Lars Onsager usou a técnica da matriz de transferência para resolver o problema. Desde então esse modelo tem sido bastante estudado e já se mostrou bastante versátil, no sentido de que pode ser aplicado para descrever vários tipos de problemas de física estatística, envolvendo desde sistemas magnéticos (como foi pensado inicialmente) até problemas de neurociência [6]. Trata-se de uma rede bidimensional infinita, com spins localizados nos vértices e interação de primeiros vizinhos. A hamiltoniana do modelo é

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - h \sum_i S_i .$$

em que a soma $\langle i, j \rangle$ representa a soma entre primeiros vizinhos e h representa um campo magnético externo (na direção $\hat{z}$). Por simplicidade vamos considerar o caso $h = 0$. Intuitivamente esse modelo possui duas fases magnéticas distintas. Para temperatura extremamente baixa praticamente não há flutuação térmica nos estados do sistema, o que faz o sistema ir para o estado de menor energia - alcançado quando todos os spins apontam na mesma direção e, portanto, a magnetização média do sistema pode assumir dois possíveis valores simétricos: $\bar{m} = \pm \sum_i S_i$. Já para temperaturas muito altas as flutuações térmicas são muito grandes, de modo que a interação entre os spins passa a ser desprezível e todos os spins podem estar apontando para cima ou para baixo com igual probabilidade. Isso por sua vez leva a uma magnetização média que é nula, isto é, $\bar{m} = 0$. O significado disso tudo é que os limites de temperaturas muito baixas e muito altas são bastante distintos, configurando duas fases distintas do modelo. Além disso, se partirmos da temperatura zero, onde a magnetização do modelo é máxima, a medida que a temperatura vai aumentando um ou mais spins da rede pode(m) ter sua(s) orientação(ões) invertida(s) - discordando da orientação predominante do sistema - o que faz a magnetização total diminuir continuamente até desaparecer à medida que a temperatura aumenta até atingir uma certa temperatura crítica T_c . Com isso vemos claramente que a magnetização média é um parâmetro de ordem do modelo e descreve as fases magnéticas do mesmo. Na figura 1.10 podemos ver um esboço do gráfico do parâmetro de ordem $\bar{m}(T)$ em função da temperatura T .

Figura 1.10.: parâmetro de ordem no modelo de Ising.

As flutuações térmicas nos sistemas termodinâmicos praticamente desaparecem para temperaturas muito próximas do zero absoluto. Nesse limite outros tipos de flutuações, de origem quântica, começam a aparecer. Além disso, o sistema tenderá sempre para o estado de menor energia e, por esse motivo, diz-se que a função de onda do nível fundamental de uma certa hamiltoniana descreve a fase quântica em que o sistema encontra-se. Hamiltonianas

que possuem diferentes estados de vácuo - estados esses que definem o espaço de vácuo³ - descrevem fases quânticas distintas. As fases da matéria de um sistema clássico formado por N partículas podem ser caracterizadas por uma função de distribuição de probabilidade $G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$. Já para um sistema quântico composto de N partículas podemos definir G da seguinte maneira:

$$G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)|^2,$$

em que $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ é a função de onda do nível fundamental do modelo. Uma fase quântica, entretanto, é caracterizada pela função de onda Ψ em si, e não somente por seu módulo ao quadrado $|\Psi|^2$. Isso significa que se pode descrever fases quânticas que não fazem sentido classicamente e, portanto, fases quânticas são mais ricas que fases clássicas. Em outras palavras, existem *ordens quânticas* que não podem ser descritas classicamente - ordens essas que podem não estar relacionadas com nenhum tipo de simetria, inclusive. É claro que o esquema de quebra de simetria de Landau ainda pode ser empregado para descrever uma porção de fases quânticas e, devido ao grande sucesso dessa teoria, por muito tempo acreditou-se que essa era capaz de descrever qualquer tipo de fase da matéria - quântica ou clássica. Mas, no final dos anos 80 os físicos acabaram descobrindo que nem todo tipo de fase quântica estava associada a algum tipo de simetria e, portanto, sistemas com essas propriedades não se encaixavam no esquema da teoria de Landau.

Na intenção de descrever o fenômeno de super-condutividade em altas temperaturas, a comunidade científica começou a estudar um tipo específico de estados quânticos chamados de *chiral spin states* (CSS) [7]. Mas existem vários tipos distintos desses estados que possuem exatamente a mesma simetria e, portanto, a teoria da quebra de simetria não é capaz de diferenciá-los. Foi aí que surgiu a idéia de que deveria existir algum outro tipo de ordem, ou parâmetro de ordem, que fosse não local e que não estivesse associado a nenhum tipo de simetria. Esse tipo de ordem não-local foi então chamado de *ordem topológica* [8] - a motivação para esse nome é que os CSS são estados oriundos de uma teoria de Chern-Simons e essa por sua vez é uma teoria de campo topológica.

Por fim, experimentalmente constatou-se que os CSS não descreviam o fenômeno da super-condutividade em altas temperaturas conforme acreditava-se e modelos quânticos com ordem topológica ficaram sem realização experimental por algum tempo. Em 1987 uma proposta baseada no modelo *quantum spin liquids* (QSL) - que havia sido definido 15 anos antes [9] - foi empregado para descrever o fenômeno da super-condutividade em altas temperaturas [10]. O modelo QSL, por sua vez, é um outro exemplo de modelo topologicamente ordenado [11]. Também verificou-se que o efeito Hall quântico [12] podia ser descrito por modelos que apresentavam ordem topológica [13]. Em particular, o efeito Hall fracionário [14] ganhou bastante atenção da comunidade acadêmica por sua riqueza fenomenológica, e vários modelos foram propostos para descrever tal fenômeno [15–17], - todos topologicamente ordenados. Isso tudo ajudou a consolidar a idéia de que ordens topológica são, de fato, um novo tipo de ordem não-local da matéria e que sistemas topologicamente ordenados possuem bastante interesse do ponto de vista de matéria condensada.

Vale observar também que não existe uma definição precisa e unânime quanto à definição de sistemas topologicamente ordenados, mas sabe-se que algumas propriedades estão

³Espaço de vácuo é o subespaço de Hilbert formado pelos estados de vácuo de um modelo.

em geral sempre presentes nesse tipo de sistema [18, 19], dentre as quais vale destacar: a existência de um nível fundamental degenerado, um *gap* de energia entre os primeiros estados excitados que seja robusto a deformações locais do modelo e estados de vácuo emaranhados de longo alcance (*long range entangled states*). Para este trabalho diremos que sistemas topologicamente ordenados são aqueles cujas fases quânticas possam ser descritas/classificadas por invariantes topológicos da superfície onde o sistema físico vive.

Os sistemas aniônicos, entretanto, possuem propriedades que são compatíveis com as exigências escritas acima para sistema topologicamente ordenado, como por exemplo, a existência de um nível fundamental degenerado, um *gap* de energia entre os primeiros estados excitados que seja robusto a deformações locais do modelo e *long range entangled states* (LRES). Sendo assim, todos os sistemas aniônicos são exemplo de modelos topologicamente ordenados em duas dimensões. Mais ainda, a recíproca desta afirmação também é verdadeira. Em duas dimensões, sistemas topologicamente ordenados são sistemas que descrevem anyons como excitação de quasi-partícula e isso, por sua vez, reforça a importância de se estudarem sistemas aniônicos para se classificarem todas as possíveis ordens topológicas existentes na matéria - pelo menos em duas dimensões. Sistemas aniônicos têm também recebido cada vez mais atenção no contexto de computação quântica [20, 21] por serem sistemas que apresentam características que permitem desde armazenar informação quântica [22] até simular portas lógicas necessárias para um processo de computação [23]. Porém, sistemas aniônicos não são, em geral, tão simples e os poucos exemplos realistas conhecidos permitem olhar apenas para pequenos aspectos de modelos que descrevem anyons. Nesse sentido, um conjunto de modelos menos realistas, muitas vezes até chamados de *toy models*, é bastante útil por descrever sistemas aniônicos de maneira menos fenomenológica, permitindo explorar mais aspectos das propriedades dos anyons.

Uma classe de modelos bastante geral e que permite descrever várias fases topológicas distintas, abelianas e não-abelianas, é a classe de modelos chamada de *Modelo Duplo Quântico* (“Quantum Double Model”) [24]. O modelo duplo quântico (DQ) é um modelo na rede em $(2+1)D$ que possui invariância local de gauge dada por um grupo finito G . Trata-se de um modelo já bastante estudado na literatura, no qual as excitações de quasi-partícula obedecem à estatística aniônica e, por tratar-se de uma realização de um modelo microscópico, exatamente solúvel e com ordem topológica não-trivial, fornece um conjunto muito importante de exemplos de sistemas aniônicos. Dentre eles o modelo mais simples conhecido que apresenta ordem topológica não-trivial - o *toric code* - que é o caso particular em que G é o grupo cíclico de dois elementos. O modelo DQ é parametrizado por um grupo finito G e as excitações de quasi-partículas que podem aparecer são diferentes para cada grupo. Pode-se dizer então que o modelo DQ parametrizado por um grupo G_1 e o modelo DQ parametrizado por um grupo G_2 descrevem fases topológicas (ou sistemas aniônicos) diferentes, sempre que G_1 e G_2 não forem o mesmo grupo.

Embora o modelo DQ forneça uma grande variedade de sistemas aniônicos, existem, entretanto, sistemas aniônicos de bastante interesse em computação quântica que não podem ser obtidos do modelo duplo quântico (para nenhum grupo). Nesse trabalho apresentaremos uma maneira alternativa de se obter o modelo do duplo quântico e apresentaremos algumas possíveis deformações do mesmo que permitem descrever uma classe maior de sistemas aniônicos. O modelo DQ é um exemplo de modelo muito importante tanto do ponto de vista de exemplo de sistemas topologicamente ordenados em duas dimensões quanto do ponto de

vista matemático, pois as estruturas algébricas envolvidas são bastante ricas. As propriedades que o modelo DQ possui são bastante interessantes e não-usuais, como por exemplo o nível fundamental degenerado e estados de vácuo emaranhados - que são assinaturas de modelos com ordem topológica.

Sobre esta tese

O modelo DQ é parametrizado por um grupo finito G , mas as excitações de quasi-partícula, entretanto, são parametrizadas pelas representações irredutíveis da álgebra do duplo quântico $D(G)$ [25]. Essa álgebra é uma álgebra de Hopf involutiva, e conhecer as representações irredutíveis da mesma é essencial para entender o modelo. Um conhecimento, pelo menos básico, de álgebras de Hopf é então requerido, e por esse motivo um dos primeiros capítulos desta tese é destinado às álgebras de Hopf. Neste trabalho não estamos olhando para propriedades fenomenológicas desses modelos, e sim para propriedades algébricas e topológicas dos mesmos; em outras palavras, esse é um trabalho de física-matemática onde estamos interessados em descrever, de maneira precisa, as propriedades topológicas do modelo duplo quântico e também gerar novos modelos cujas excitações de quasi-partículas possuam características aniônicas e, portanto, topológicas.

Durante um doutorado, aprendemos muito mais do que produzimos (por “produzimos”, me refiro às pesquisas que realizamos e que levaram a resultados novos). Sendo assim, acredito que uma tese de doutoramento deva conter essas duas coisas - um resumo didático, que sirva de material de consulta futura, de tudo (ou quase tudo) que estudamos e aprendemos e também os resultados novos obtidos do projeto de doutorado. Por este motivo, esta tese possui dois objetivos. O primeiro deles é o objetivo pedagógico de servir como material de consulta para um estudo detalhado do modelo duplo quântico, que envolve um estudo detalhado das álgebras de Hopf, álgebra de grupo $\mathbb{C}G$, álgebra do duplo quântico $D(G)$ e suas representações irredutíveis, além do estudo da álgebra dos operadores que constituem o modelo duplo quântico. A motivação para isso é que, embora o modelo duplo quântico seja um modelo já bem estudado e entendido na literatura, as referências literais sobre o assunto são, em geral, ou muito superficiais, contendo informações sem prova ou motivação convincente, ou muito complicadas, envolvendo o estudo e conhecimento de estruturas algébricas muito gerais o que, muitas vezes, acaba desmotivando alguém que não esteja interessado nesses aspectos de caráter mais técnico. Nesta tese apresentarei de maneira bastante sucinta as estruturas algébricas necessárias para compreender o modelo DQ. O segundo objetivo é o de reportar os resultados frutíferos por nós obtidos, juntamente com os outros integrantes do grupo de pesquisa, durante o período de doutorado. Esses resultados foram também publicados na forma de artigos [26–32]. O objetivo principal nesta parte é mostrar que o modelo duplo quântico pode ser obtido a partir da deformação de uma teoria de campo topológica na rede que, por sua vez, ajuda a reconhecer a ordem topológica do modelo de maneira mais natural. Além disso, mostraremos que a deformação do invariante topológico que dá origem ao modelo duplo quântico gera também outros exemplos de modelos quânticos de muitos corpos que descrevem anyons como excitações de quasi-partícula. Esses outros modelos descrevem anyons que não são aqueles possíveis de se obter do modelo duplo quântico.

Esta tese está dividida em três partes: a primeira parte compreende-se entre os capítulos

2 e 6 - antes de começarmos a olhar para modelos microscópicos cujas excitações de quasi-partículas são anyons, no capítulo 2, vamos estudar os aspectos gerais, livres de modelo, de sistemas aniônicos. No próximo capítulo apresentaremos o modelo do Toric Code, que será o primeiro exemplo de um modelo microscópico com ordem topológica e que suporta anyons. Como pré-requisito para a construção do modelo duplo quântico, o capítulo 4 é dedicado a uma introdução às álgebras de Hopf, onde os dois dos principais exemplos de álgebras de Hopf serão também apresentados. No capítulo 5, o modelo duplo quântico será apresentado, seguido de dois exemplos de duplo quântico no próximo capítulo - um para grupo abeliano e outro para grupo não-abeliano. Nessa primeira parte, nenhum resultado original é apresentado. A segunda parte deste trabalho compreende-se entre os capítulos 7 e 9. Nesses capítulos apresentamos os resultados originais desta tese - baseados nos artigos publicados (ou submetidos para publicação) [27, 28, 31, 32]. No capítulo 7, apresentaremos uma construção de uma teoria de campo bastante geral que descreve uma teoria de campo topológica na rede como caso particular. Ainda neste mesmo capítulo, mostraremos que deformações deste invariante topológico levam a um modelo quântico de muitos corpos, do qual o modelo DQ representa um caso particular. No capítulo seguinte exploraremos melhor os modelos possíveis de se obter da deformação do invariante topológico apresentado no capítulo anterior, além disso, mostramos que a degenerescência do nível fundamental do modelo DQ é um invariante topológico para qualquer que seja o grupo G . Para finalizar, fecharemos essa segunda parte com alguns comentários finais e conclusões dos resultados obtidos nesta tese. A terceira parte é composta por uma série de apêndices, os quais servem como material de consulta. No intuito de deixar a leitura desta tese fluir de forma mais eficiente, todos os resultados que envolvem cálculos ou construções muito longas encontram-se na forma de apêndices. Esses apêndices podem ser consultados individualmente. Em particular, no apêndice B, a teoria de representação de álgebras semi-simples de dimensão finita é apresentada. No apêndice seguinte o leitor pode encontrar o cálculo das representações irredutíveis das álgebras de grupo e do duplo quântico, que são os principais exemplos de álgebra semi-simples relevantes para este trabalho. Os demais apêndices são um pouco mais técnicos que esses dois. Por fim gostaria de dizer que esta tese foi escrita de maneira a ficar o mais auto-contida quanto possível.

2. Propriedades gerais dos anyons e dos sistemas aniônicos

Em três dimensões (espaciais), podem existir apenas dois tipos de partículas idênticas: os férmions, que constituem a matéria, e os bósons, que mediam as interações. Mas, conforme vimos na introdução deste trabalho, em duas dimensões, entretanto, existem outras possibilidades de partículas com regras estatísticas não-usuais, chamadas de anyons. Esses anyons podem obedecer a uma estatística fracionária, ou ainda, possuir um comportamento mais exótico - que é o caso dos anyons ditos não-abelianos. De forma geral, sistemas que suportam anyons como excitações de quasi-partícula são descritos por uma regra de fusão e uma regra estatística, que algumas vezes chamaremos também de regra de troca, ou ainda, *braiding rule*. Essas duas estruturas, de fusão e de braiding, determinam totalmente as propriedades - independentes de modelo - das partículas que compõem o sistema e devem satisfazer a certas condições de consistência, que veremos neste capítulo. Usaremos as terminologias anyons, partículas e quasi-partículas como sinônimos sempre que isso não causar ambiguidade. Esse capítulo é baseado, principalmente, nas referências [20, 23, 33, 34].

2.1. Regras de fusão

Considere $|a, \mu_a\rangle$ um estado ocupado por uma única partícula a e $\mathcal{V}_a$ o espaço de Hilbert associado a esta partícula. O estado $|a, \mu_a\rangle$ não representa um estado quântico do sistema e sim todos os estados quânticos ocupados por uma única partícula a - o parâmetro $\mu_a = 1, 2, \dots, \dim(\mathcal{V}_a)$ representa algum número quântico da partícula. Já um estado ocupado por duas partículas, a e b , por exemplo, é representado por $|ab; \mu_a, \mu_b\rangle$ - definido em termos dos estados de partícula única por:

$$|ab; \mu_a, \mu_b\rangle = |a, \mu_a\rangle \otimes |b, \mu_b\rangle, \quad (2.1)$$

isto é, o espaço de Hilbert de duas partículas é dado por $\mathcal{V}_{ab} = \mathcal{V}_a \otimes \mathcal{V}_b$. Em geral, para n partículas, digamos $a_1, a_2, \dots, a_n$, têm-se:

$$\mathcal{V}_{a_1 a_2 \dots a_n} = \mathcal{V}_{a_1} \otimes \mathcal{V}_{a_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{V}_{a_n}. \quad (2.2)$$

A fusão de duas partículas ocorre quando essas são movidas para o mesmo lugar ou tão próximas uma da outra que o comportamento do par passa a ser ditado pelo comportamento coletivo das partículas e não mais pelo comportamento individual de cada uma delas. A figura 2.1 representa a evolução temporal de um estado ocupado por um par de partículas, a e b , sendo fundidas uma com a outra. O sistema encontra-se inicialmente ($t = t_0$) no estado $|ab, \mu_a, \mu_b\rangle$ - representado na figura. As partículas são então movidas pelo plano até

Figura 2.1.: fusão de duas partículas, a e b , numa nova partícula $a \times b$. Na figura as linhas representam as linhas de mundo das partículas e $t_2 > t_1 > t_0$ representam alguns instantes específicos na evolução do sistema.

atingirem a mesma posição em $t = t_1$ - representado pelo estado $|a \times b, \mu_{a \times b}\rangle$. O restante da evolução ($t_1 < t < t_2$) é trivial. Dizemos então que a fusão de a e b resulta em uma nova partícula c - representada por:

$$c = a \times b .$$

Se, no processo descrito na figura 2.1, a direção temporal é invertida, as regras de fusão dão origem às regras de separação de partículas, também chamadas de *splitting rules*. Esse mesmo processo descreve o decaimento da partícula c em duas outras partículas, a e b . Essas duas coisas, fusão e splitting, são equivalentes e isso é o que chamamos de simetria de inversão temporal em sistemas aniônicos. A fusão de a com b , mostrada na figura 2.1, pode também ser representada diagramaticamente pela figura 2.2(a). A orientação temporal no diagrama da figura 2.2(a) pode ser tanto de cima para baixo quanto de baixo para cima, isto é, pode ser pensado como uma regra de fusão ou de splinting.

Figura 2.2.: representação diagramática das regras de fusão/splitting. A linha tracejada representa a partícula de vácuo.

É natural também exigir que a fusão de a com b seja a mesma coisa que a fusão de b com a , dessa forma dizemos que as regras de fusão devem satisfazer

$$a \times b = b \times a , \tag{2.3}$$

para quaisquer que sejam as partículas a e b . Além disso, queremos que a fusão seja associativa, isto é, a ordem em que as partículas são fundidas não deve influenciar no resultado final e escrevemos

$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c . \quad (2.4)$$

Num sistema aniônico deve sempre existir uma partícula especial chamada de *partícula de vácuo*, ou simplesmente, vácuo; representada por 1. A partícula de vácuo representa, na verdade, a ausência de partículas e obedece à seguinte regra de fusão

$$1 \times a = a , \quad (2.5)$$

para qualquer que seja a partícula a . Da regra de fusão acima concluímos que $\mathcal{V}_a \otimes \mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_a$, para qualquer que seja a partícula a , sendo assim, concluímos que $\mathcal{V}_1 \sim \mathbb{C}$, ou simplesmente, $\mathcal{V}_1 = \mathbb{C}$. A fusão de partículas com o vácuo é representado diagramaticamente na figura 2.2(b). Por fim, toda partícula a possui sua anti-partícula, representada por $\bar{a}$, tal que a fusão dessas duas resulte no vácuo, isto é,

$$a \times \bar{a} = 1 . \quad (2.6)$$

esse processo é representado diagramaticamente na figura 2.2(c). O processo de fusão mostrado na figura acima é um processo abeliano. Isso ocorre quando a fusão de duas partículas resulta numa única terceira partícula.

Os diagramas que representam as regras de fusão/splitting são bastante úteis e facilitam as manipulações algébricas. Considere, por exemplo, que um par partícula/anti-partícula seja criado a partir do vácuo e aniquilado logo em seguida. A figura 2.3 ilustra esse processo. Da figura fica claro que o resultado final deste processo é um número d_a que depende exclu-

Figura 2.3.: um par partícula/anti-partícula é criado a partir do vácuo e aniquilado logo em seguida. O resultado deste processo é um escalar d_a chamado dimensão quântica da partícula a .

sivamente da partícula a . Esse número é chamado de dimensão quântica da partícula a e $d_a = d_{\bar{a}}$. Voltaremos a falar sobre dimensão quântica das partículas mais adiante. Uma coisa que devemos notar nos diagramas de fusão/splitting é que as linhas de mundo das partículas podem ser continuamente deformadas sem alterar o resultado final das fusões/splittings. Sendo assim, a evolução de um estado ocupado por uma única partícula pode também ser

Figura 2.4.: a evolução temporal de uma única partícula pode possuir criação e aniquilação de partículas em instantes intermediários da evolução.

encarado como mostrado na figura 2.4. Note que, no meio do processo pode haver criação e aniquilação de partículas, o que significa que para um instante intermediário na evolução pode aparecer estados ocupados por mais de uma partícula por exemplo.

Vamos analisar um pouco melhor o significado da figura (2.3). Se pensarmos no processo de criação de pares, isso significa que as partículas a e $\bar{a}$ podem ser criadas a partir do vácuo do modelo e isso ocorre para qualquer partícula a que componha o sistema. Pode-se dizer então que, devido às flutuações quânticas, qualquer par partícula/anti-partícula pode ser criado a partir do vácuo. Cada par de partícula a e $\bar{a}$, no entanto, tem uma certa probabilidade $P(a)$ de ser criada a partir do vácuo, isto é, $P(a)$ é a probabilidade do processo $1 \rightarrow a \times \bar{a}$ acontecer. Uma vez que somente é possível a criação de pares partícula/anti-partícula, é natural dizer que $P(a) = P(\bar{a})$. Essa probabilidade está associada à dimensão quântica da partícula a - definida na figura 2.3. Podemos escrever $P(a) \propto |d_a|^2$, para qualquer que seja a . Uma vez que $P(a) = P(\bar{a})$, têm-se naturalmente que $d_a = d_{\bar{a}}$. Por uma questão de conservação de probabilidade, a seguinte relação deve valer para qualquer sistema aniônico:

$$\sum_a P(a) = 1 \Rightarrow \sum_a \left(\frac{d_a}{\mathfrak{D}} \right)^2 = 1 \Rightarrow \mathfrak{D} = \sqrt{\sum_a (d_a)^2}, \quad (2.7)$$

sendo $\mathfrak{D}$ um fator de normalização chamado de dimensão quântica do sistema. Na expressão acima, a soma sobre a representa a soma sobre todas as partículas existentes no modelo. Uma vez que d_a está associado a uma probabilidade, não há nada que garanta que esse número seja um número inteiro e, de fato, conforme veremos adiante esse número é em geral não inteiro para anyons não-abelianos.

Exemplo 2.1 Para consolidar as idéias de fusão introduzidas acima, vamos ver nosso primeiro exemplo de sistema aniônico, os anyons do toric code. Esse sistema é composto apenas pelos seguintes anyons abelianos:

$$\{1, e, m, \epsilon\}, \quad (2.8)$$

onde 1 representa a quasi-partícula de vácuo. A interpretação dessas quasi-partículas é parecida com a interpretação das partículas que compõem o efeito Aharonov-Bohm. A quasi-partícula e representa uma partícula de carga elétrica, algumas vezes chamadas simplesmente de partícula de carga. A quasi-partícula m representa uma partícula de carga magnética,

algumas vezes também chamada de partícula de fluxo. Por fim, a partícula ϵ é chamada de dyon e representa a fusão de uma carga elétrica com uma carga magnética, ou seja,

$$\epsilon = e \times m . \quad (2.9)$$

Neste sistema, as partículas e e m são anti-partículas delas próprias e, portanto, são válidas as seguintes regras de fusão:

$$e \times e = m \times m = 1 . \quad (2.10)$$

Com isso obtemos os diagramas mostrados na figura 2.5.

Figura 2.5.: canais de fusão dos anyons do toric code - calculados nas equação (2.9) e (2.10).

Todas as regras de fusão são abelianas nesse caso, o que significa que a fusão de três partículas é sempre associativa¹, no sentido que: $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$, para quaisquer partículas a , b e c . Com isso, podemos calcular por exemplo, $e \times \epsilon$, pois, pela equação (2.9), isso é o mesmo que $e \times (e \times m)$ e usando regra de associatividade para sistemas abelianos e a equação (2.10), obtemos:

$$e \times \epsilon = e \times (e \times m) = (e \times e) \times m = 1 \times m = m . \quad (2.11)$$

Usando o mesmo princípio, pode-se calcular todas as possíveis regras de fusão e obtém-se:

$$e \times \epsilon = m , \quad m \times \epsilon = e , \quad \epsilon \times \epsilon = 1 . \quad (2.12)$$

Com isso, concluímos todos os possíveis canais de fusão dos anyons do toric code - conforme mostrado na figura 2.6.

Nesse exemplo foi apresentado uma construção livre de modelo para as regras de fusão dos anyons do toric code. No próximo capítulo iremos estudar o modelo do toric code detalhadamente e veremos uma definição em termos de estados quânticos para todos os resultados apresentados no exemplo 2.1. Note que, por enquanto, nada foi dito sobre a estatística dessas partículas.

¹A associatividade das regras de fusão é válida para qualquer sistema aniônico, abeliano e não-abeliano, mas para sistemas não-abelianos é necessário introduzir um operador que desempenha esse papel. Isso será visto com detalhes adiante.

Figura 2.6.: canais de fusão dos anyons do toric code - calculados nas equações (2.11) e (2.12).

2.1.1. Anyons não-abelianos

Na discussão acima, o processo de fusão descrito na figura 2.1 é um processo abeliano. Isso acontece quando a fusão de duas partículas resulta num único canal de fusão. Uma das propriedades mais exóticas de sistemas aniônicos, entretanto, são as partículas que obedecem à regras de fusão não-abelianas. Considere, por exemplo, a fusão mostrada na figura 2.1. Neste processo o estado quântico $|ab; \mu_a, \mu_b\rangle$ é igual ao estado ocupado por uma única partícula $|c, \mu_c\rangle$, e escrevemos $\mathcal{V}_{a \times b} = \mathcal{V}_c$. Mas, em geral, o espaço $\mathcal{V}_{a \times b}$ pode ser decomposto numa soma direta de dois ou mais espaços de partícula única, como por exemplo:

$$\mathcal{V}_{a \times b} = \mathcal{V}_c \oplus \mathcal{V}_d .$$

Nesse caso a partícula c é apenas um dos canais de fusão de a com b , sendo a partícula d um outro possível canal de fusão. Representamos essa regra de fusão não-abeliana por

$$a \times b = c + d$$

e, nesse caso, os anyons a e b são ditos não-abelianos.

Afim de entender melhor o esquema geral no qual esse tipo de sistema se encaixa, considere um sistema físico isolado onde todas as partículas elementares pertencem ao conjunto

$$A = \{a_i : i \in I\} , \quad (2.13)$$

sendo I algum conjunto de índices. As partículas a_i que compõem o sistema são também chamadas de *cargas aniônicas*. De forma geral a fusão de duas partículas, a_i e a_j , dá como resultado, não uma, mas uma combinação de partículas elementares e escrevemos:

$$\mathcal{V}_{a_i \times a_j} = \underbrace{(\mathcal{V}_{a_1} \oplus \mathcal{V}_{a_1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_{a_1})}_{N_{ij}^1} \oplus \underbrace{(\mathcal{V}_{a_2} \oplus \mathcal{V}_{a_2} \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_{a_2})}_{N_{ij}^2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{(\mathcal{V}_{a_n} \oplus \mathcal{V}_{a_n} \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_{a_n})}_{N_{ij}^n} , \quad (2.14)$$

o que dá origem à regra de fusão abaixo.

$$a_i \times a_j = \sum_{k \in I} N_{ij}^k a_k . \quad (2.15)$$

Os coeficientes N_{ij}^k são números inteiros positivos que representam a multiplicidade da partícula a_k na fusão $a_i \times a_j$, ou seja, representa o número de maneiras distintas que o

sistema pode ser preparado de tal forma que a fusão $a_i \times a_j$ dê como resultado a partícula a_k . Esses coeficientes podem ser pensados como sendo matrizes com entradas inteiras, isto é, N_{a_l} é uma matriz cujos coeficientes são $[N_{a_l}]_{a_i}^{a_k} = N_{l_j}^k$. Dessa forma, as condições, mostradas nas equações exigidas para as regras de fusão - (2.3), (2.4), (2.5) e (2.6) - podem ser traduzidas em função das matrizes de fusão como mostrado abaixo.

$$\begin{aligned} [N_a, N_b] &= 0, & (\text{comutatividade}) \\ \sum_k N_{ij}^k N_{kl}^t &= \sum_u N_{il}^u N_{iu}^t, & (\text{associatividade}) \\ N_1 &= \mathbb{1}, & (\text{existência da partícula de vácuo}) \\ N_{\bar{a}} &= (N_a)^{-1} & (\text{existência de anti-partícula}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na evolução mostrada na figura 2.1, se considerarmos um instante intermediário, por exemplo $t_0 < t' < t_1$, o resultado será um novo estado ainda ocupado pelo mesmo par de partículas, a e b . Este estado intermediário é diferente do estado inicial $|ab; \mu_a, \mu_b\rangle$, mas o processo de fusão de a e b será o mesmo, independentemente do estado inicial. O ponto é que, para o mesmo conjunto de partículas, existem vários estados físicos que representam um sistema ocupado por essas partículas e as regras de fusão independem dessa arbitrariedade. Sendo assim, iremos definir a seguir um espaço que representa a fusão de partículas, chamado de espaço de fusão.

2.1.2. Espaço de fusão

Na equação (2.15) a fusão de a com b pode resultar em qualquer uma das partículas de A , mas se por acaso $N_{ab}^l = 0$, isso significa que a fusão $a \times b$ não pode dar a_l como resultado. Dizemos nesse caso que a_l não é um canal de fusão de $a \times b$. Já se $N_{ab}^l \neq 0$, dizemos que a partícula a_l é um canal de fusão de $a \times b$. Dessa maneira representamos um determinado canal de fusão, digamos $a \times b \rightarrow c$ pelo vetor representado diagramaticamente na figura 2.7. Esses vetores geram o espaço de fusão $\mathcal{V}_{ab}^c$, que representa a fusão das partículas a

Figura 2.7.: este é um vetor pertencente ao espaço de fusão que simboliza a fusão de duas partículas, a e b , num canal c .

e b no canal c . A partícula final, resultado da fusão de a com b , é também chamada de carga aniônica total da fusão. Note que há tantos vetores ortogonais em $\mathcal{V}_{ab}^c$ quanto for a multiplicidade da partícula c na fusão $a \times b$, ou seja,

$$\dim(\mathcal{V}_{ab}^c) = N_{ab}^c.$$

Denotamos os vetores ortogonais da base de $\mathcal{V}_{ab}^c$ por $|(a, b) \rightarrow c, \mu\rangle$, sendo $\mu = 1, 2, \dots, N_{ab}^c$, ou ainda, de maneira mais econômica, simplesmente por: $|\mu\rangle$. Mas, podemos, sem perda de generalidade, considerar o caso em que N_{ab}^c é ou zero ou um - para quais que sejam as partículas a , b e c - então, sempre que isso não causar confusão, omitiremos o índice μ . É importante notar que $|(a, b) \rightarrow c\rangle$ não representa um estado quântico do sistema, mas sim o conjunto de todos os estados microscópicos que levam à regra de fusão $a \times b = c$ - isso também significa que deformações contínuas das linhas de mundo nos diagramas de fusão não são relevantes. Para partículas com regra de fusão abeliana têm-se, necessariamente, $\dim(\mathcal{V}_{ab}^c) = 1$, pois as regras de fusão, nesse caso, possuem um único canal de fusão.

Considere agora o espaço de fusão de três partículas, a , b e c com carga aniônica total d . Há agora um detalhe que não existia no caso anterior - há duas maneiras de fundir essas três partículas - representadas na figuras 2.8. O vetor da figura 2.8(a), que também pode

Figura 2.8.: essas são as duas maneiras distintas de fundir três partículas.

ser expressado por $|(a, b) \rightarrow c\rangle|(u, c) \rightarrow d\rangle$, ou simplesmente $|u\rangle$, pertence ao espaço de fusão de três partículas denotado por: $\mathcal{V}_{(ab)c}^d$. A base de vetores ortogonais de $\mathcal{V}_{(ab)c}^d$ fica então:

$$\mathcal{V}_{(ab)c}^d = \{ |(a, b) \rightarrow c\rangle|(u, c) \rightarrow d\rangle := |u\rangle \},$$

sendo a partícula u qualquer partícula que seja canal de fusão de a com b e sendo d a carga aniônica total. Não é difícil perceber que a dimensão de $\mathcal{V}_{abc}^d$ é dada por:

$$\dim(\mathcal{V}_{(ab)c}^d) = \sum_{u \in A} N_{ab}^u N_{uc}^d. \quad (2.17)$$

Pode-se também, analogamente, definir o espaço $\mathcal{V}_{a(bc)}^d$, que representa o mesmo processo de fusão, mas numa ordem diferente. Os estados definidos na figura 2.8(b) formam uma base ortogonal para esse espaço e a dimensão do mesmo é dada por

$$\dim(\mathcal{V}_{a(bc)}^d) = \sum_v N_{av}^d N_{bc}^v.$$

Sabemos, mesmo que intuitivamente, que esses dois espaços de fusão não podem ser diferentes e, da equação (2.16), têm-se que

$$\sum_u N_{ab}^u N_{uc}^d = \sum_v N_{av}^d N_{bc}^v,$$

o que implica em

$$\dim(\mathcal{V}_{a(bc)}^d) = \dim(\mathcal{V}_{(ab)c}^d) .$$

Uma vez que esses dois espaços possuem a mesma dimensão, esses são isomorfos como espaços vetoriais e escrevemos

$$\mathcal{V}_{(ab)c}^d \sim \mathcal{V}_{a(bc)}^d := \mathcal{V}_{abc}^d .$$

Chamamos o isomorfismo entre esses dois espaços de matriz- F . A matriz- F é uma matriz de mudança de base unitária, em outras palavras

$$|u\rangle = \sum_v [F_{abc}^d]_u^v |v\rangle ,$$

ou ainda, conforme ilustrado na figura 2.9. É importante notar que $[F_{abc}^d]_u^v \neq 0$ somente

Figura 2.9.: a matriz F_{abc}^d é o isomorfismo entre os espaços vetoriais $\mathcal{V}_{(ab)c}^d$ e $\mathcal{V}_{a(bc)}^d$.

para as fusões que são permitidas. Para entendermos melhor essa afirmação considere a figura 2.10. Na figura, suponha, por exemplo, que a_3 não é um canal de fusão de $b \times c$, nesse caso têm-se, necessariamente, $[F_{abc}^d]_u^{a_3} = 0$.

Figura 2.10.: elementos de matriz da matriz F_{abc}^d .

A matriz F_{abc}^d é conhecida na literatura por *matriz- F* (*F-matrix*) e está relacionada com as regras de fusão das partículas - ela permite mapear os de $\mathcal{V}_{(ab)c}$ nos estados de $\mathcal{V}_{a(bc)}$ e com isso a fusão de 3 partículas pode ser feita em qualquer ordem. Conforme veremos mais adiante, existe ainda uma outra matriz importante chamada de *matriz- R* , a qual está relacionada com a estatística dessas partículas. Para um sistema aniônico ser compatível é

necessário que as matrizes F e R satisfaçam à certas equações, chamadas *equação do pentágono* e *equação do hexágono*.

A matriz F permite que a fusão de um número arbitrário de partículas seja definida em qualquer ordem. Em geral, o espaço $\mathcal{V}_{x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^{x_p}$, que representa o espaço de fusão das $p-1$ partículas $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ no canal x_p , pode ser definido, sem perda de generalidade, pelo ordenamento específico mostrado na figura 2.11, pois qualquer outro ordenamento está relacionado com o ordenamento da figura 2.11 por alguma sequência finita de transformações- F .

Figura 2.11.: esse é um ordenamento, dentre muitos possíveis, da fusão das partículas $x_1, x_2, \dots, x_{p-1}$ no canal x_p , a figura representa um estado $|e_1, e_2, \dots, e_{p-3}\rangle$ do espaço $\mathcal{V}_{x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^{x_p}$.

Por analogia à equação (2.17), a dimensão do espaço de fusão $\mathcal{V}_{x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^{x_p}$ pode ser escrita em função dos coeficientes de fusão e fica:

$$\dim(\mathcal{V}_{x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^{x_p}) = \sum_{\{e_i\}} N_{x_1 x_2}^{e_1} N_{e_1 x_3}^{e_2} \dots N_{e_{p-3} x_{p-1}}^{x_p} . \quad (2.18)$$

Porém, note que na equação acima a dimensão é dada por todos os possíveis valores $\{e_i\}$ e, portanto, depende exclusivamente das partículas x_i iniciais. Podemos ainda escrever

$$\dim(\mathcal{V}_{x_1 x_2 \dots x_{p-1}}^{x_p}) = \langle x_1 | N_{x_2} N_{x_3} N_{x_4} \dots N_{x_{p-1}} | x_p \rangle , \quad (2.19)$$

sendo $|a_i\rangle$ o vetor coluna com todas as entradas nulas, exceto a i -ésima entrada, que é igual a 1 e $\langle a_i|$ o vetor dual de $|a_i\rangle$ tal que $\langle a_i | a_j \rangle = \delta(i, j)$.

A equação (2.19) também sugere que a dimensão do espaço de fusão é maior quanto maior for o número de partículas envolvidas. Para entender melhor essa dependência, considere o caso $x_1 = x_2 = \dots = x_{p-1} = a$ e $x_p = b$ - com a e b arbitrários. Nesse caso a equação (2.19) resume-se a

$$\dim(\mathcal{V}_{aaa\dots a}^b) = \langle a | (N_a)^{p-2} | b \rangle ,$$

. No limite de muitas partículas, a equação pode ser escrita como

$$\dim(\mathcal{V}_{aaa\dots a}^b) = \langle a | (N_a)^{p-2} | b \rangle \approx (d_a)^{p-2} , \quad (2.20)$$

sendo d_a o maior autovalor da matriz N_a . Esse resultado é conhecido na literatura como autovalor de Perron-Frobenius. O número d_a é também a dimensão quântica da partícula a - definido na figura 2.3 - e a equação acima justifica seu nome.

A equação (2.20), no entanto, não fornece uma maneira viável de calcular a dimensão quântica das partículas. Por isso, vamos mostrar que as dimensões quânticas das partículas que compõem um sistema aniônico satisfazem uma relação dada pelos coeficientes de fusão, a saber

$$d_{a_i} d_{a_j} = \sum_k N_{ij}^k d_{a_k} . \quad (2.21)$$

Exemplo 2.2 (Fibonacci-anyons - parte I)

Vamos olhar agora para um exemplo de sistema composto por anyons não-abelianos, os Fibonacci-anyons. Esse é um exemplo de sistema aniônico de bastante interesse em física teórica por descrever ordens topológicas presentes no efeito Hall quântico fracionário [35] e, também, pelo interesse em anyons não-abelianos para simular as portas lógicas necessárias para computação quântica [23]. Ao leitor em busca por mais detalhes sobre os Fibonacci-anyons sugiro a referência [34].

Talvez este seja o exemplo não-abeliano mais simples conhecido, pois possui apenas uma partícula não trivial, τ . A regra de fusão não-abeliana é dada por:

$$\tau \times \tau = 1 + \tau , \quad (2.22)$$

além da regra de fusão trivial $1 \times \tau = \tau$. Isso significa que os coeficientes de fusão são dados por: $N_{11}^1 = N_{1\tau}^\tau = N_{\tau\tau}^1 = N_{\tau\tau}^\tau = 1$ e $N_{1\tau}^1 = N_{11}^\tau = 0$.

O motivo para o nome “Fibonacci” é que a sequência de Fibonacci aparece naturalmente neste sistema. Considere, para isso, a fusão de três partículas τ . Todos os possíveis canais de fusão de três partículas estão representados na figura 2.12. Da figura conclui-se que a

Figura 2.12.: a fusão $\tau \times (\tau \times \tau)$ tem um canal de fusão 1 e dois canais de fusão τ .

fusão $\tau \times (\tau \times \tau)$ tem um único canal de fusão 1 e dois canais de fusão τ . Já para uma fusão de quatro partículas, todos os canais de fusão estão representados na figura 2.13, donde conclui-se que a fusão $\tau \times (\tau \times (\tau \times \tau))$ tem dois canais de fusão 1 e três canais de fusão τ . Se continuarmos esse processo e olharmos para a fusão de n partículas τ , o número de canais 1 e τ seguem a sequência de Fibonacci. Em geral escrevemos que a fusão de n partículas

Figura 2.13.: essa fusão possui dois canais 1 e três canais τ .

τ tem a_{n-1} canais 1 e a_n canais τ , sendo $\{a_n\} = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots\}$ a famosa sequência de Fibonacci. Nas figuras 2.12 e 2.13 podemos ver que esse resultado é válido pelo menos para os três primeiros termos dessa sequência, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$. A fórmula geral, entretanto, pode ser checada por um processo de indução, isto é, basta mostrar que a fórmula geral para n partículas, dada por:

$$\underbrace{\tau \times (\tau \times (\tau \times (\dots (\tau \times \tau)) \dots))}_{n \text{ partículas}} \rightarrow a_{n-1} \, 1 + a_n \tau, \quad (2.23)$$

implica na fórmula geral para $n + 1$ partículas. Para $n + 1$ partículas têm-se:

$$\underbrace{\tau \times (\tau \times (\tau \times (\dots (\tau \times \tau)) \dots))}_{n+1 \text{ partículas}} = \tau \times \underbrace{(\tau \times (\tau \times (\tau \times (\dots (\tau \times \tau)) \dots))}_{n \text{ partículas}}).$$

Cada um dos a_{n-1} canais 1 provenientes da fusão de n partículas leva a um canal τ da fusão de $n + 1$ partículas. Já cada um dos a_n canais τ da fusão n partículas leva a um canal 1 e um canal τ da fusão de $n + 1$ partículas. Com isso, a fusão de $n + 1$ possui ao todo a_n canais 1 e $a_{n-1} + a_n = a_{n+1}$ canais τ . Isso significa que a fórmula geral vale também para $n + 1$ partículas. Os seis primeiros termos da sequência de fusão de n partículas são representados

a seguir como exemplo.

$$\begin{aligned}
\tau \times \tau &\rightarrow 1 \cdot 1 + 1\tau, \\
\tau \times (\tau \times \tau) &\rightarrow 1 \cdot 1 + 2\tau, \\
\tau \times (\tau \times (\tau \times \tau)) &\rightarrow 2 \cdot 1 + 3\tau, \\
\tau \times (\tau \times (\tau \times (\tau \times \tau))) &\rightarrow 3 \cdot 1 + 5\tau, \\
\tau \times (\tau \times (\tau \times (\tau \times (\tau \times \tau)))) &\rightarrow 5 \cdot 1 + 8\tau, \\
\tau \times (\tau \times (\tau \times (\tau \times (\tau \times (\tau \times \tau))))) &\rightarrow 8 \cdot 1 + 13\tau.
\end{aligned}$$

A dimensão quântica da partícula τ pode ser calculada simplesmente usando a equação (2.21) e o fato que $d_1 = 1$, ou seja, além de ser um número positivo, deve satisfazer a equação abaixo:

$$d_\tau d_\tau = d_1 + d_\tau = 1 + d_\tau \Rightarrow (d_\tau)^2 - d_\tau - 1 = 0 \Rightarrow d_\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}. \quad (2.24)$$

O número $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180$ recebe o nome de razão áurea e aparece em vários contextos diferentes em matemática, dentre eles aparece como limite da seqüência $\{a_{n+1}/a_n : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$

2.1.3. Regra do pentágono

Se pensarmos numa regra de fusão de quatro partículas, digamos a , b , c e d , num canal e , existem cinco possíveis ordens distintas nas quais essas partículas podem ser fundidas. Entretanto, devido à associatividade das regras de fusão todas essas possibilidades devem ser equivalentes. Sendo assim, as matrizes- F devem ser tais que todas essas possibilidades sejam mapeadas uma na outra de forma consistente. A figura 2.14 fornece uma ilustração de como essa regra de consistência deve ser. Em termos de diagramas e matrizes- F , o esquema

Figura 2.14.: regra de consistência para as matrizes- F . Essa é a motivação para a regra do pentágono.

ilustrado na figura 2.14 resume-se na regra do pentágono, representada na figura 2.15. Em

Figura 2.15.: regra do pentágono.

outras palavras, a regra do pentágono impõe uma condição sobre as matrizes- F de forma a mapear todas os possíveis ordenamentos possíveis na fusão de quatro partículas de forma consistente. É importante notar que as composições de matrizes- F indicadas na figura não representam um produto de matriz, uma vez que cada uma dessas matrizes age em espaços diferentes. Algebricamente, essa regra pode ser escrita como:

$$\sum_{u,v} [F^e_{aby}]_x^v [F^e_{xcd}]_u^y = \sum_{u,v} \sum_w [F^v_{bcd}]_w^y [F^e_{awd}]_u^v [F^u_{abc}]_x^w, \quad (2.25)$$

ou ainda, de forma simplificada, como:

$$[F^e_{aby}]_x^v [F^e_{xcd}]_u^y = \sum_w [F^v_{bcd}]_w^y [F^e_{awd}]_u^v [F^u_{abc}]_x^w. \quad (2.26)$$

Para entendermos o significado e a utilidade da regra do pentágono, apresentaremos a seguir dois exemplos de aplicação da regra do pentágono.

Exemplo 2.3 (Fibonacci-anyons - parte II)

Considere, novamente, os Fibonacci-anyons. Vamos calcular as matrizes- F para esse sistema de anyons usando para isso a regra do pentágono. Primeiramente precisamos notar que a regra do pentágono deve ser satisfeita para todas as partículas a, b, c, d e e mostradas na figura 2.15, - o que nesse caso leva a $2^5 = 32$ regras do pentágono distintas. Mas, felizmente, não precisamos olhar para todas elas, pois a maioria é trivialmente satisfeita. O

ponto chave é que as transformações- F dizem respeito à fusão de três partículas somente. Por exemplo, considere a fusão de três partículas, sendo uma trivial e dois Fibonacci-anyons. Nesse caso, se fizermos a árvore de fusão para todas as possibilidades, concluiremos que existe um único canal 1 e um único canal τ . Com isso pode-se dizer que $\dim(\mathcal{V}_{1\tau\tau}^1) = \dim(\mathcal{V}_{1\tau\tau}^\tau) = 1$ e, portanto, as matrizes- F nesse processo são triviais, isto é, $F_{1\tau\tau}^1 = F_{1\tau\tau}^\tau = 1$. Esse resultado independe da ordem na qual as partículas são fundidas, e também é válido para o caso em que duas das partículas são triviais e uma é um Fibonacci-anyon. Com isso podemos escrever:

$$\begin{aligned} F_{1\tau\tau}^1 &= F_{1\tau\tau}^\tau = F_{\tau 1\tau}^1 = F_{\tau 1\tau}^\tau = F_{\tau\tau 1}^1 = F_{\tau\tau 1}^\tau = 1, \\ F_{\tau 11}^\tau &= F_{\tau 11}^1 = F_{1\tau 1}^1 = F_{1\tau 1}^\tau = F_{11\tau}^\tau = F_{11\tau}^1 = 1. \end{aligned}$$

Além disso, $F_{111}^1 = 1$ (trivialmente) e, dado que existe um único canal 1 na fusão de três Fibonacci-anyons, tem-se também $F_{\tau\tau\tau}^1 = 1$. Resta então calcular a única matriz- F não trivial que é $F_{\tau\tau\tau}^\tau$. Sabemos que $\dim(\mathcal{V}_{\tau\tau\tau}^\tau) = 2$ e a matriz F mais geral possível é então:

$$F = F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \eta \end{pmatrix}.$$

Fazendo a substituição $a = b = c = d = e = \tau$ na equação (2.26) obtemos:

$$[F_{\tau\tau y}^\tau]_x^v [F_{x\tau\tau}^\tau]_u^y = \sum_{w=1,\tau} [F_{\tau\tau\tau}^v]_w^y [F_{\tau w\tau}^\tau]_u^v [F_{\tau\tau\tau}^u]_x^w. \quad (2.28)$$

Na equação acima, fazendo $u = y = 1$ e $v = x = \tau$, chegamos à seguinte expressão:

$$[F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 = [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^1 + [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 [F_{\tau 1\tau}^\tau]_1^1 [F_{\tau\tau\tau}^1]_\tau^1,$$

mas note que $[F_{\tau 1\tau}^\tau]_1^1 = 0$ e a equação acima resume-se a:

$$[F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 = [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^1 \Rightarrow \alpha = \beta\gamma.$$

Com isso, a matriz- F fica então:

$$F = F_{\tau\tau\tau}^\tau = \begin{pmatrix} \beta\gamma & \beta \\ \gamma & \eta \end{pmatrix}.$$

A simplificação acima e o fato de F ser uma matriz unitária permitem obter a matriz- F . A condição de unitariedade $FF^\dagger = \mathbb{1}$, impõe as seguintes condições sobre os coeficientes da matriz- F :

$$\alpha\gamma + \beta\eta = 0, \quad (2.29a)$$

$$|\gamma|^2 + |\eta|^2 = 1, \quad (2.29b)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (2.29c)$$

Da equação (2.29a) obtém-se que $\eta = -\gamma^2$ e, assim, a equação (2.29b) fica:

$$|\gamma|^2 + |\eta|^2 = 1 \Rightarrow \eta^4 + \eta^2 - 1 = 0.$$

É fácil verificar que $\gamma = 1/\sqrt{\phi}$ é solução da equação acima - lembrando que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea. Substituindo os valores encontrados na equação (2.29c) obtemos, finalmente, a matriz- F dos Fibonacci-anyons.

$$F = F_{\tau\tau\tau}^{\tau} = \begin{pmatrix} \varphi^{-1} & \varphi^{-1/2} \\ \varphi^{-1/2} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Exemplo 2.4 (*Ising-Anyons - parte I*)

Para fechar esta seção, antes de falarmos sobre as regras estatística dos anyons, vamos mostrar mais um sistema aniônico de interesse, que são os chamados Ising-anyons. Para mais detalhes sobre os Ising-anyons o leitor pode consultar a referência [36]. Trata-se de um modelo não-abeliano onde os anyons pertencem ao conjunto $\{1, \epsilon, \sigma\}$. Como usual, a partícula 1 representa o vácuo. A partícula ϵ , no entanto, é uma partícula fermiônica e σ é chamada de Ising-anyon. As regras de fusão não-triviais são definidas por:

$$\epsilon \times \epsilon = 1, \quad (2.31a)$$

$$\epsilon \times \sigma = \sigma, \quad (2.31b)$$

$$\sigma \times \sigma = 1 + \epsilon. \quad (2.31c)$$

O que leva aos seguintes coeficientes de fusão:

$$N_{\epsilon\epsilon}^1 = N_{\sigma\epsilon}^{\sigma} = N_{\sigma\sigma}^1 = N_{\sigma\sigma}^{\epsilon} = 1, \quad N_{\epsilon\epsilon}^{\epsilon} = N_{\epsilon\epsilon}^{\sigma} = N_{\sigma\sigma}^{\sigma} = N_{\sigma\epsilon}^1 = N_{\sigma\epsilon}^{\epsilon} = 0. \quad (2.32)$$

As partículas 1 e ϵ são abelianas e, portanto, têm dimensão quântica igual um, ou seja, $d_1 = d_{\epsilon} = 1$. Já a dimensão quântica de σ pode ser obtida da regra de fusão (2.31c) (e usando a equação (2.21)). Assim obtém-se

$$\sigma \times \sigma = 1 + \epsilon \Rightarrow d_{\sigma}d_{\sigma} = d_1 + d_{\epsilon} \Rightarrow (d_{\sigma})^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow d_{\sigma} = \sqrt{2}. \quad (2.33)$$

Vamos então calcular as matrizes- F para este modelo e mostrar que estas satisfazem a regra do pentágono. Para isso é suficiente considerar a regra do pentágono para as duas configurações mostradas na figura 2.16.

Figura 2.16.: dois processos distintos de fusão de partículas.

No caso da figura 2.16(a), têm-se $a = b = c = d = \sigma$ e $e = 1$ e, portanto, a regra do pentágono (2.26) resume-se a

$$[F_{\sigma\sigma y}^1]_x^v [F_{x\sigma\sigma}^1]_u^y = \sum_{w=1,\epsilon} [F_{\sigma\sigma\sigma}^v]_w^y [F_{\sigma w\sigma}^1]_u^v [F_{\sigma\sigma\sigma}^u]_x^w. \quad (2.34)$$

Além disso, para a configuração mostrada na figura 2.16(a) e com base na figura 2.15, pode-se concluir que as partículas internas só podem assumir os seguintes valores:

$$u = v = \sigma \quad e \quad x, y, z \in \{1, \epsilon\} .$$

- para $x = y = 1$ a regra do pentágono (2.26) fica:

$$\begin{aligned} [F_{\sigma\sigma 1}^1]_1^\sigma [F_{1\sigma\sigma}^1]_\sigma^1 &= \sum_{w=1, \epsilon} [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_w^1 [F_{\sigma w\sigma}^1]_\sigma^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^w , \\ 1 &= [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 [F_{\sigma 1\sigma}^1]_\sigma^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 [F_{\sigma\epsilon\sigma}^1]_\sigma^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon , \\ 1 &= \alpha^2 + \beta\gamma . \end{aligned} \quad (2.35)$$

- considerarmos $x = 1$ e $y = \epsilon$ na equação (2.34), obtém-se:

$$[F_{\sigma\sigma\epsilon}^1]_1^\sigma [F_{1\sigma\sigma}^1]_\sigma^\epsilon = [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon [F_{\sigma 1\sigma}^1]_\sigma^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^\epsilon [F_{\sigma\epsilon\sigma}^1]_\sigma^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon ,$$

o que, considerando que $[F_{\sigma\sigma\epsilon}^1]_1^\sigma = 0$, também implica em:

$$[F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 = -[F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^\epsilon \Rightarrow \alpha = -\eta . \quad (2.36)$$

- para o caso em que $x = \epsilon$ e $y = 1$ a equação (2.34) dá o mesmo resultado obtido na equação (2.35), isto é

$$1 = ([F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1)^2 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon \Rightarrow \alpha^2 + \beta\gamma = 1 .$$

A figura 2.16(b) representa a configuração em que $a = \epsilon$ e $b = c = d = e = \sigma$, nesse caso a regra do pentágono resume-se a

$$[F_{\epsilon\sigma y}^\sigma]_x^v [F_{x\sigma\sigma}^\sigma]_u^y = \sum_{w=1, \epsilon} [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_w^y [F_{\epsilon w\sigma}^\sigma]_u^v [F_{\epsilon\sigma\sigma}^\sigma]_x^w . \quad (2.37)$$

Além disso, da figura 2.16(b) e com base na figura 2.15, conclui-se que as partículas internas podem assumir somente os seguintes valores:

$$x = v = \sigma \quad e \quad u, y, w \in \{1, \epsilon\} .$$

Se considerarmos o caso $u = y = 1$, a regra do pentágono fica:

$$[F_{\epsilon\sigma 1}^\sigma]_\sigma^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 = [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 [F_{\epsilon 1\sigma}^\sigma]_1^\sigma [F_{\epsilon\sigma\sigma}^\sigma]_\sigma^1 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 [F_{\epsilon\sigma\sigma}^\sigma]_1^\sigma [F_{\epsilon\sigma\sigma}^\sigma]_\sigma^\epsilon ,$$

sendo $[F_{\epsilon\sigma 1}^\sigma]_\sigma^\sigma = 1$ e $[F_{\epsilon 1\sigma}^\sigma]_1^\sigma = 0$, ou seja

$$[F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 = [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 \Rightarrow \alpha = \beta . \quad (2.38)$$

Usando as equação (2.35), (2.36) e (2.38) a matriz $F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma$ pode ser simplificada a

$$F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} .$$

Por fim, usamos o fato de $F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma$ ser uma matriz unitária (ver equações (2.29)) para obter $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ e, portanto

$$F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \quad (2.39)$$

2.2. Troca de anyons

Até agora, tudo que foi dito e toda construção apresentada diz respeito única e exclusivamente às regras de fusão de sistemas aniônicos. Mas, como já sabemos, em sistemas aniônicos a propriedade de troca de partículas é uma das propriedades mais relevantes e não-usuais. A matriz- F é responsável pelo mapeamento entre os espaços de fusão de três partículas, isto é, $F_{abc}^d : \mathcal{V}_{(ab)c} \rightarrow \mathcal{V}_{a(bc)}$. Esse mapeamento, que deve ser um isomorfismo de espaços vetoriais, garante a associatividade das regras de fusão. Uma outra propriedade que as regras de fusão devem obedecer é a comutatividade, ou seja, $a \times b = b \times a$. No entanto, como vetores do espaço de fusão, os vetores mostrados nas figuras 2.17(a) e 2.17(b) são diferentes, mas a comutatividade da fusão impõe que esses dois vetores devem ser iguais a menos de um fator de fase e, em outras palavras a deve existir uma fase R_{ab}^c para cada processo de fusão $a \times b \rightarrow c$, tal que a condição desenhada na figura 2.17(c) seja satisfeita. Essas fase dão

Figura 2.17.: a fase R_{ab}^c relaciona os dois estados de fusão de a com b , antes e depois da troca de partículas.

origem a uma matriz, chamada de matriz- R , definida para duas partículas por:

$$R_{ab} = \begin{pmatrix} R_{ab}^{c_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{ab}^{c_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & R_{ab}^{c_3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & R_{ab}^{c_q} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

sendo $\{c_1, c_2, \dots, c_q\}$ todos os possíveis canais de fusão de $a \times b$ e

$$p = \sum_c N_{ab}^c = \dim \left(\bigoplus_p \mathcal{V}_{ab}^{c_p} \right).$$

Note que, se c não é um canal de fusão de $a \times b$, então, necessariamente, $R_{ab}^c = 0$.

2.2.1. Regra do hexágono

Assim como as matrizes- F , as matrizes- R também devem obedecer uma regra de consistência - chamada de *regra do hexágono*. Observe que quando apresentamos a regra do pentágono

e todas as cinco possíveis maneira de fundir quatro partículas não levamos em consideração que as partículas poderiam ser trocadas de lugar antes da fusão acontecer. Se queremos levar isso em consideração a matriz- R deve ser levada em conta. Considere um sistema ocupado por três partículas a , b e c com carga aniônica total d . Num sistema ocupado por apenas três partículas, sem considerar troca de partículas, existem somente duas ordenações de fusão possíveis - que são os mostrados na figura 2.8. Mas, se considerarmos também que as partículas podem ser trocadas de lugar, então pode haver três trocas distintas para cada tipo de ordenação, que são: $a \leftrightarrow b$, $a \leftrightarrow c$ e $b \leftrightarrow c$; o que contabiliza um total de seis estados distintos. A regra do hexágono impõe uma condição parecida com a da regra do pentágono, mas com a diferença de que agora trocas de partículas são também levadas em consideração. As matrizes- F e R devem agora ser tais que todos esses estados possam ser mapeados um no outro de forma consistente. Essa regra de consistência é chamada de regra do hexágono - mostrado na figura 2.18. Novamente devemos lembrar que a composição ilustrada na regra

Figura 2.18.: regra do hexágono. A linha traceja é para ajudar na identificação de transformações- F e R .

do hexágono não representa um produto usual de matrizes, uma vez que as matrizes- R não agem no mesmo espaço. Algebricamente, a regra do hexágono pode ser escrita como:

$$\sum_v [F_{bca}^d]_v^w R_{av}^d [F_{abc}^d]_u^v = R_{ac}^w [F_{bac}^d]_u^w R_{ab}^u. \quad (2.41)$$

Essa regra pode parecer sem sentido a princípio, portanto, na figura 2.19, podemos ver uma motivação para a regra do hexágono.

Figura 2.19.: motivação para a regra do hexágono.

Como exemplo de como utilizar a regra do hexágono consideremos novamente os Fibonacci-anyons e os Ising-anyons.

Exemplo 2.5 (*Fibonacci-anyon III*) - nesse exemplo existe somente uma partícula não-trivial. Sendo assim, precisamos calcular somente $R_{\tau\tau}^1$ e $R_{\tau\tau}^\tau$. Considere então, na figura 2.18, o caso $a = b = c = d = \tau$, assim, a equação (2.41) fica:

$$[F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^w R_{\tau 1}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_u^1 + [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^w R_{\tau\tau}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_u^\tau = R_{\tau\tau}^w [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_u^w R_{\tau\tau}^u.$$

Note que há somente dois parâmetros livres na equação acima e, com isso, obtemos as quatro equações listadas abaixo:

$$[F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 R_{\tau 1}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 + [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^1 R_{\tau\tau}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^\tau = R_{\tau\tau}^1 [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 R_{\tau\tau}^1, \quad (2.42a)$$

$$[F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^\tau R_{\tau 1}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 + [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^\tau R_{\tau\tau}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^\tau = R_{\tau\tau}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^\tau R_{\tau\tau}^1, \quad (2.42b)$$

$$[F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^1 R_{\tau 1}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^1 + [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^1 R_{\tau\tau}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^\tau = R_{\tau\tau}^1 [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^1 R_{\tau\tau}^\tau, \quad (2.42c)$$

$$[F_{\tau\tau\tau}^\tau]_1^\tau R_{\tau 1}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^1 + [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^\tau R_{\tau\tau}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^\tau = R_{\tau\tau}^\tau [F_{\tau\tau\tau}^\tau]_\tau^\tau R_{\tau\tau}^\tau. \quad (2.42d)$$

onde, usando a matriz- F obtida na equação (2.30), substituindo $R_{1\tau}^1 = R_{\tau 1}^1 = 0$ e $R_{1\tau}^\tau = R_{\tau 1}^\tau = 1$, obtemos:

$$\varphi^{-1} + R_{\tau\tau}^\tau = (R_{\tau\tau}^1)^2, \quad (2.43a)$$

$$\varphi^{-1} - \varphi^{-1} R_{\tau\tau}^\tau = R_{\tau\tau}^1 R_{\tau\tau}^\tau, \quad (2.43b)$$

$$\varphi^{-1} - \varphi^{-1} R_{\tau\tau}^\tau = R_{\tau\tau}^1 R_{\tau\tau}^\tau, \quad (2.43c)$$

$$1 + \varphi^{-1} R_{\tau\tau}^\tau = -(R_{\tau\tau}^\tau)^2. \quad (2.43d)$$

Não é difícil verificar que uma solução para as equações acima é

$$R_{\tau\tau}^1 = e^{i4\pi/5} \quad e \quad R_{\tau\tau}^\tau = e^{-i3\pi/5},$$

e com isso, a matriz- R dos Fibonacci-anyons fica:

$$R = R_{\tau\tau} = \begin{pmatrix} e^{i4\pi/5} & 0 \\ 0 & e^{-i3\pi/5} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Exemplo 2.6 (*Ising-anyon II*) - neste exemplo além da partícula de vácuo, existem duas partículas a serem consideradas: ϵ e σ . A partícula ϵ é sabidamente um férmion, conforme definida no exemplo 2.4. Sendo assim, podemos dizer que $R_{\epsilon\epsilon}^1 = -1$. Faltam então calcular somente $R_{\sigma\epsilon}^\sigma$, $R_{\sigma\sigma}^1$ e $R_{\sigma\sigma}^\epsilon$. Fazendo $a = b = c = d = \sigma$ na figura 2.18, a equação (2.41) fica:

$$\sum_{v=1,\epsilon} [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_v^w R_{\sigma v}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_u^v = R_{\sigma\sigma}^w [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_u^w R_{\sigma\sigma}^u, \quad (2.45)$$

sendo $u, v, w \in \{1, \epsilon\}$. Com os coeficientes de matriz dados pela equação (2.39) e escolhendo u e w em $\{1, \epsilon\}$, obtemos as seguintes equações listadas abaixo:

- $u = w = 1$, - a equação (2.45) resume-se a:

$$[F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 R_{\sigma 1}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 R_{\sigma\epsilon}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon = R_{\sigma\sigma}^1 [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 R_{\sigma\sigma}^1,$$

ou ainda,

$$1 + R_{\sigma\epsilon}^\sigma = \sqrt{2}(R_{\sigma\sigma}^1)^2. \quad (2.46)$$

- $u = 1$ e $w = \epsilon$, - a equação (2.45) resume-se a:

$$[F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon R_{\sigma 1}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^\epsilon R_{\sigma\epsilon}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon = R_{\sigma\sigma}^\epsilon [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon R_{\sigma\sigma}^1,$$

ou ainda,

$$1 - R_{\sigma\epsilon}^\sigma = \sqrt{2}R_{\sigma\sigma}^1 R_{\sigma\sigma}^\epsilon. \quad (2.47)$$

- $u = \epsilon$ e $w = 1$, - a equação (2.45) resume-se a:

$$[F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^1 R_{\sigma 1}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 R_{\sigma\epsilon}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^\epsilon = R_{\sigma\sigma}^1 [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 R_{\sigma\sigma}^\epsilon,$$

ou ainda,

$$1 - R_{\sigma\epsilon}^\sigma = \sqrt{2}R_{\sigma\sigma}^1 R_{\sigma\sigma}^\epsilon. \quad (2.48)$$

- $u = \epsilon = w$, - a equação (2.45) resume-se a:

$$[F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_1^\epsilon R_{\sigma 1}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^1 + [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^\epsilon R_{\sigma\epsilon}^\sigma [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^\epsilon = R_{\sigma\sigma}^\epsilon [F_{\sigma\sigma\sigma}^\sigma]_\epsilon^\epsilon R_{\sigma\sigma}^\epsilon,$$

ou ainda,

$$1 + R_{\sigma\epsilon}^\sigma = -\sqrt{2}(R_{\sigma\sigma}^\epsilon)^2. \quad (2.49)$$

Subtraindo a equações (2.46) da equação (2.49), obtemos:

$$(R_{\sigma\sigma}^1)^2 = -(R_{\sigma\sigma}^\epsilon)^2 \Rightarrow R_{\sigma\sigma}^1 = \pm i R_{\sigma\sigma}^\epsilon.$$

Finalmente, somando as equações (2.48) e (2.49) e usando o resultado anterior, obtemos:

$$2 = \sqrt{2}(-1 \pm i)(R_{\sigma\sigma}^\epsilon)^2 \Rightarrow (R_{\sigma\sigma}^\epsilon)^2 = e^{\pm i3\pi/4} \Rightarrow R_{\sigma\sigma}^\epsilon = e^{\pm i3\pi/8}.$$

Com isso, uma possível matriz- R para os Ising-anyons é dada por:

$$R = R_{\sigma\sigma} = \begin{pmatrix} -ie^{i3\pi/8} & 0 \\ 0 & e^{i3\pi/8} \end{pmatrix} = e^{-i\pi/8} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Além disso, do resultado obtido e da equação (2.47), podemos calcular também

$$R_{\sigma\epsilon}^\sigma = i.$$

2.3. Matriz de braid

A matriz- R , no entanto, **não** representa a fase obtida pela função de onda numa troca de partícula, e sim a diferença de fase adquirida quando a ordem de fusão é invertida. A matriz que fornece a fase obtida numa simples troca de partícula é a matriz- B , chamada de *braiding matrix*. Para definir tal matriz considere a operação mostrada na figura 2.20. O processo

Figura 2.20.: note que as partículas a e d não desempenham nenhum papel relevante nesta operação.

descrito na figura 2.20 representa, na verdade, uma maneira de relacionar o estado ocupado pelas partículas b e c quando essas são trocadas de lugar. De maneira simplificada, esse mesmo processo pode ser representado como mostrado na figura 2.21, sendo

$$B_{ab} = (F_{abc}^d)^{-1} R_{ab} F_{acb}^d, \quad (2.51)$$

ou ainda, em geral, escrevemos:

$$B = F^{-1} R F. \quad (2.52)$$

Note que, uma vez que a matriz- F não é diagonal em geral, a matriz- B também não será,

Figura 2.21.: A matrix B_{ab} é definida pela composição mostrada na figura 2.20.

o que dá origem a regras estatísticas não-abelianas em sistemas aniônicos.

Para finalizar este capítulo, vamos calcular a matriz- B para os dois exemplos que estamos estudando como exemplo neste capítulo.

Exemplo 2.7 (*matriz de Braid*) - a primeira coisa que devemos notar é que as matrizes F e R devem ter a mesma ordem, caso contrário a equação anterior não estaria definida. A ordem da matriz R_{ab} é dada por pelo número total de canais de fusão distintos de $a \times b$

- conforme definido na equação (2.40). Já a ordem da matriz F_{abc} ^d, é dada por todos os valores que v pode assumir (veja a figura 2.21), o qual, por sua vez, depende somente de a e b e é dado pela mesma ordem p da matriz R_{ab} . Sendo assim, o cálculo da matriz- B é trivial uma vez conhecidas as matrizes F e R .

- para os Fibonacci-anyons as matrizes F e R , não triviais, são dadas pelas equações (2.30) e (2.44), respectivamente - o que significa que a matriz $B_{\tau\tau}$ é dada pela equação abaixo.

$$B_{\tau\tau} = \begin{pmatrix} e^{-i4\pi/5}\varphi^{-1} & -\varphi^{-1/2}e^{-i2\pi/5} \\ -\varphi^{-1/2}e^{-i2\pi/5} & -\varphi^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.53)$$

Essa matriz carrega um significado bastante não usual, ao contrário do que era de esperar de partículas idênticas usuais, uma troca de Fibonacci-anyons não representa somente uma fase, e sim uma operação unitária não-abeliana, o que significa que uma troca dessas duas partículas resulta num novo estado que é uma superposição de partículas - nesse caso, uma partícula de vácuo e um Fibonacci-anyon.

- para os Ising-anyons as matrizes F e R , não triviais, são dadas pelas equações (2.39) e (2.50), respectivamente - o que significa que a matriz $B_{\sigma\sigma}$ é dada pela equação abaixo.

$$B_{\sigma\sigma} = e^{i\pi/8} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.54)$$

O significado da matriz- B nesse caso é o mesmo que no caso anterior - uma troca de dois Ising-anyons resulta num novo estado que é uma superposição de duas outras partículas, a saber, uma partícula de vácuo e um férmion.

Sabemos que a matriz- F para anyons abelianos é trivial e, portanto, a equação (2.52) resume-se a

$$B_{ab} = R_{ab},$$

isto é, não há distinção entre as matrizes R e B para anyons abelianos. As matrizes B , em geral, representam a ação do grupo de tranças (*braid group*) - mais especificamente, são representações irredutíveis unitárias do grupo de tranças. Num estado ocupado por n partículas aniônicas, por exemplo, a troca de quaisquer duas partículas pode ser obtida por uma sucessão de troca de de partículas que são vizinhas e, portanto, conhecer somente a matriz- B é suficiente para estudar a troca de partículas num estados ocupado por mais que duas partículas.

De um ponto de vista mais fenomenológico, sistemas aniônicos aparecem na descrição de fases topológicas da matéria, como é o caso, por exemplo, o fenômeno da supercondutividade em altas temperaturas e o efeito Hall quântico fracionário, onde as excitações são quasi-partículas com regras estatística fracionárias ou, até mesmo, não-abelianas [15, 37]. Anyons são também bastante importante por simularem processos de computação quântica topologicamente protegidos contra erros [23, 24]. Mas, seja qual for o sistema aniônico, independentemente de fenomenologia, as excitações presentes devem encaixar-se neste esquema geral, descrito neste capítulo. Isso significa que, em qualquer sistema aniônico, as regras de fusão devem estar definidas, o que exige a existência de matrizes- F que satisfaçam à regra do pentágono e, também, as regras de braid devem estar definidas, o que significa que devem

existir matrizes- R que satisfaçam à regra do hexágono. Apesar de o esquema geral em termo das matrizes- F e R seja uma descrição bastante completa, essa descrição não representa um modelo físico microscópico e sim somente uma maneira de classificar os diferentes sistemas aniônicos existentes.

A seguir, vamos apresentar o primeiro modelo microscópico capaz de descrever anyons como excitação de quasi-partícula - o modelo do toric code. O modelo do toric code é, talvez, o modelo mais simples que existe que apresenta ordem topológica não-trivial e anyons como excitação de quasi-partícula.

3. Toric Code

Neste capítulo iremos estudar o modelo do toric code. Conforme dito anteriormente, este modelo é o modelo mais simples conhecido na literatura que apresenta ordem topológica não-trivial. Este modelo foi originalmente obtido num contexto de teorias de gauge na rede e, posteriormente proposto por Kitaev [24] como um modelo de correção de erros em computação quântica.

3.1. Toric code

O modelo TC é um modelo definido sobre uma rede bidimensional com condição periódica de contorno, ou seja, sobre um toro. Generalizações para superfícies compacta mais genéricas são imediatas. Na literatura, esses modelos de toric code definidos sobre superfícies mais gerais são, algumas vezes, chamados de *surface codes*.

Considere uma rede quadrada sobre um toro - ilustrada na figura 3.1. Considere ainda, uma variável de spin vivendo em cada aresta desta rede, cujos dois possíveis estados ortonormais formam uma base do espaço de Hilbert local $\mathcal{H}_i$, associado a i -ésima aresta da rede. Escrevemos:

$$\mathcal{H}_i = \{|+1\rangle, |-1\rangle\} .$$

Algumas vezes, principalmente no contexto de computação quântica, esses graus de liberdade vivendo nas arestas da rede são referidos como *qubits*. O estado $|\phi_i\rangle_i$ ($\phi_i = \pm 1$) é um vetor de $\mathcal{H}_i$ e, uma vez que existe um estado desses para cada aresta, o estado total do sistema $|\Psi\rangle$ é uma combinação linear de vetores do tipo:

$$|\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l, \dots, \phi_N\rangle := |\phi_1\rangle_1 \otimes |\phi_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\phi_l\rangle_l \otimes \dots \otimes |\phi_N\rangle_N , \quad (3.1)$$

com $|\Psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ e N o número total de arestas da rede. O espaço $\mathcal{H}_i$, possui dimensão igual a dois ($\dim(\mathcal{H}_i) = 2$). Portanto, $\dim(\mathcal{H}) = 2^N$.

A dinâmica do TC é regida por dois operadores, A_v e B_p , chamados de *operador de vértice* e *operador de plaqueta*, respectivamente. Esses operadores agem em $\mathcal{H}$, porém, o operador de vértice, por exemplo, age não trivialmente somente nas arestas que chegam/saem no/do vértice v e age como identidade no restante das arestas. Analogamente, o operador de plaqueta age não trivialmente somente nas arestas que são fronteira da plaqueta p e age como identidade no restante das arestas. Existe um operador de vértice associado a cada vértice e um operador de plaqueta associado a cada plaqueta da rede. Para definir a ação desses operadores considere a enumeração de arestas apresentada na figura 3.1. O operador de plaqueta B_p é definido por:

$$B_p := \bigotimes_{i \in \partial p} \sigma_i^z , \quad (3.2)$$

Figura 3.1.: rede quadrada num toro, em destaque uma plaqueta p e um vértice v da rede.

em que a notação acima refere-se a um produto tensorial de operadores σ_i^z (matriz de Pauli σ^z), que agem na i -ésima aresta da fronteira de p (escrevemos $i \in \partial p$). Já o operador A_v é definido por:

$$A_v := \bigotimes_{i \in \text{star}(v)} \sigma_i^x, \quad (3.3)$$

em que σ_i^x (matriz de Pauli σ^x) é o operador que age na i -ésima aresta da rede, as quais compartilham o vértice v (escrevemos $i \in \text{star}(v)$). É importante lembrar que esses operadores agem como identidade no restante do espaço $\mathcal{H}$ e, a rigor, deveríamos escrever A_v e B_p da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A_v &= \mathbb{1}_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_5^x \otimes \sigma_6^x \otimes \sigma_7^x \otimes \sigma_8^x \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_N, \\ B_p &= \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \otimes \sigma_3^z \otimes \sigma_4^z \otimes \mathbb{1}_5 \otimes \mathbb{1}_6 \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_N, \end{aligned}$$

em que $\mathbb{1}_i$ é o mapa identidade do espaço $\mathcal{H}_i$, mas, por simplicidade, representaremos esses operadores algebricamente simplesmente por:

$$\begin{aligned} A_v &= \sigma_5^x \otimes \sigma_6^x \otimes \sigma_7^x \otimes \sigma_8^x, \\ B_p &= \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \otimes \sigma_3^z \otimes \sigma_4^z. \end{aligned}$$

Finalmente a hamiltoniana H^{TC} do modelo é definida por:

$$H^{TC} := - \sum_p B_p - \sum_v A_v. \quad (3.4)$$

3.1.1. Álgebra dos operadores de vértice e de plaqueta

Os operadores que constituem a hamiltoniana são formados por matrizes de Pauli, as quais agem na base de $\mathcal{H}_i$ da seguinte forma:

$$\sigma_i^x |\phi_i\rangle = |-\phi_i\rangle, \quad (3.5a)$$

$$\sigma_i^z |\phi_i\rangle = \phi_i |\phi_i\rangle, \quad (3.5b)$$

e também satisfazem à seguinte álgebra de operadores para toda aresta i e j da rede:

$$(\sigma_i^x)^2 = (\sigma_i^z)^2 = \mathbb{1}_i = 0, \quad (3.6a)$$

$$[\sigma_i^x, \sigma_j^x] = [\sigma_i^z, \sigma_j^z] = 0, \quad (3.6b)$$

$$[\sigma_i^x, \sigma_j^z] = 0, \quad (i \neq j), \quad (3.6c)$$

$$\sigma_i^x \sigma_i^z = -\sigma_i^z \sigma_i^x. \quad (3.6d)$$

Das equações acima fica fácil ver que os operadores de vértice e plaqueta satisfazem às seguintes propriedades:

$$(A_v)^2 = \mathbb{1}, \quad \forall v, \quad (3.7a)$$

$$(B_p)^2 = \mathbb{1}, \quad \forall p, \quad (3.7b)$$

$$[A_v, A_{v'}] = [B_p, B_{p'}] = 0, \quad \forall v, v' \text{ e } \forall p, p', \quad (3.7c)$$

$$[A_v, B_p] = 0, \quad \forall v, p, \quad (3.7d)$$

sendo $\mathbb{1} = \mathbb{1}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbb{1}_N$ a identidade de $\mathcal{H}$. As três primeiras propriedades listadas são triviais de serem verificadas - são consequência direta da equação (3.6b). A última equação, entretanto, não é tão trivial assim. Para mostrar essa relação precisamos analisar dois casos distintos: o primeiro deles é quando o operador de vértice e plaqueta não agem (pelo menos não agem de forma não trivial) em nenhuma aresta em comum, como por exemplo, no caso mostrado na figura 3.2(a). Nesse caso, usando a equação (3.6c), a comutação dos operadores A_v e B_p pode ser calculada trivialmente; o segundo caso é quando os operadores de vértice e plaqueta agem de forma não trivial em arestas em comum - como mostrado na figura 3.2(b). Nesse caso os operadores de vértice e plaqueta agem em duas arestas comum e a comutação

(a) Nesse caso A_v e B_p não agem de forma não trivial em nenhuma aresta em comum.

(b) Nesse caso A_v e B_p agem de forma não trivial nas arestas de número 1 e 4.

Figura 3.2.: os operadores A_v e B_p agem de forma não trivial em apenas um pedaço da rede.

pode ser mostrada fazendo uso da equação (3.6c) e (3.6d). Sendo assim, obtemos:

$$\begin{aligned} A_v B_p &= (\sigma_1^x \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \sigma_4^x \otimes \sigma_5^x \otimes \sigma_6^x) (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \otimes \sigma_3^z \otimes \sigma_4^z \otimes \mathbb{1}_5 \otimes \mathbb{1}_6) \\ &= \sigma_1^x \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \otimes \sigma_3^z \otimes \sigma_4^x \sigma_4^z \otimes \sigma_5^x \otimes \sigma_6^x \\ &= (-\sigma_1^z \sigma_1^x) \otimes \sigma_2^z \otimes \sigma_3^z \otimes (-\sigma_4^z \sigma_4^x) \otimes \sigma_5^x \otimes \sigma_6^x \\ &= (-1)(-1) (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \otimes \sigma_3^z \otimes \sigma_4^z \otimes \mathbb{1}_5 \otimes \mathbb{1}_6) (\sigma_1^x \otimes \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_3 \otimes \sigma_4^x \otimes \sigma_5^x \otimes \sigma_6^x) \\ A_v B_p &= B_p A_v. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Com isso podemos perceber que a hamiltoniana H_{TC} é composta por uma soma de operadores que comutam entre si e, portanto, esta pode ser facilmente diagonalizada. A seguir, iremos estudar o espectro desta hamiltoniana, começando pelo nível fundamental. Os estados excitados de baixa energia, conforme veremos, podem ser interpretados como criação de quasi-partículas.

3.1.2. Nível e estado fundamental de H^{TC}

Nesta seção vamos estudar o nível fundamental do TC. Conforme veremos o nível fundamental deste modelo é degenerado e essa degenerescência será calculada. Além disso, fazendo uso dos operadores chamados operadores de *string*, vamos construir todos os possíveis estados fundamentais (também conhecidos por estados de vácuo). Os operadores chamados de operadores de *string* são operadores que agem em arestas da rede ao longo de um caminho γ da rede direta ou um caminho γ^* da rede dual. O operador de string que age nas arestas ao longo de um caminho γ^* é o operador X_{γ^*} , definido por:

$$X_{\gamma^*} = \bigotimes_{i \in \gamma^*} \sigma_i^x. \quad (3.9)$$

Já o operador de *string* que age nas arestas ao longo de um caminho γ é o operador Z_γ , definido por:

$$Z_\gamma = \bigotimes_{i \in \gamma} \sigma_i^z. \quad (3.10)$$

Uma maneira de representar esses operadores diagramaticamente é mostrada na figura 3.3(a). O operador X_{γ^*} é construído de operadores locais σ_i^x e age nas arestas ao longo do caminho γ^* invertendo a orientação dos spins de cada aresta. Já o operador Z_γ é construído a partir de operadores locais σ_i^z e age nas arestas ao longo do caminho γ medindo suas orientações. Os operadores de plaqueta e de vértice são casos especiais desses operadores. O operador de plaqueta (representado em vermelho na figura 3.3(b)) pode ser escrito como:

$$B_p = Z_{\partial p}, \quad (3.11)$$

enquanto o operador de vértice (representado em verde na figura 3.3(b)) pode ser escrito como:

$$A_v = X_{\text{star}(v)}. \quad (3.12)$$

É importante notar que os caminhos γ e γ^* podem ser caminhos abertos ou fechados. Na representação mostrada na figura 3.3(a) todos os caminhos são fechados (escrevemos $\partial\gamma = \emptyset$ e $\partial\gamma^* = \emptyset$, sendo $\emptyset$ o conjunto vazio). Conforme veremos mais adiante os operadores de string para caminhos abertos desempenham um papel muito importante na criação de quasi-partículas localizadas.

3.1.3. Álgebra dos operadores de string

Os operadores de *string* podem comutar ou anti-comutar um com o outro, dependendo dos caminhos γ e γ^* . Se o número de intersecções entre os caminhos γ e γ^* for par os dois

(a) Ação dos operadores de *string*. Em verde o operador X_{γ^*} e em vermelho o operador Z_{γ} .

(b) Os operadores de vértice e de plaqueta são casos particulares dos operadores de *string*.

Figura 3.3.: representação diagramática dos operadores de *string*.

operadores comutam, já se esse número for ímpar eles anti-comutam, então escrevemos

$$Z_{\gamma} X_{\gamma^*} = (-1)^q X_{\gamma^*} Z_{\gamma} , \quad (3.13)$$

sendo q o número de intersecções entre os caminhos γ e γ^* . Não é difícil perceber que se esses dois caminhos forem fechados os operadores X_{γ^*} e Z_{γ} sempre comutam, ou seja,

$$[X_{\gamma^*}, Z_{\gamma}] = 0 \text{ se } \partial\gamma = \partial\gamma^* = \emptyset . \quad (3.14)$$

Além disso, é evidente que:

$$[X_{\gamma_1^*}, X_{\gamma_2^*}] = [Z_{\gamma_1}, Z_{\gamma_2}] = 0 , \quad \forall \gamma_1, \gamma_2, \gamma_1^*, \gamma_2^* . \quad (3.15)$$

Com esses operadores é possível construir todos os estados de vácuo do TC. Se considerarmos $\{|\chi\rangle\}$ uma base de auto-estados simultâneos dos operadores A_v e B_p , esta será também uma base de auto-estados da hamiltoniana. Nessa base, devido as equações (3.7a) e (3.7b), a ação de A_v e B_p fica: $B_p|\chi\rangle = \pm|\chi\rangle$ e $A_v|\chi\rangle = \pm|\chi\rangle$. Com isso é possível calcular o espectro de H^{TC} . Seja N_v e N_p o número total de vértice e plaqueta, respectivamente. No toro a relação de Euler assume a forma $N_p + N_v - N = 0$. Se m é o número de operadores de vértices com autovalor -1 , então o número de operadores de vértice com autovalor $+1$ será $N_v - m$. O mesmo vale para os operadores de plaqueta, n é o número de operadores de plaqueta com autovalor -1 e $N_p - n$ o número de operadores de plaqueta com autovalor $+1$, com isso o espectro da hamiltoniana fica:

$$H^{TC}|\chi\rangle = E(m, n)|\chi\rangle , \text{ com } E(m, n) = (2m + 2n - N) . \quad (3.16)$$

Da equação (3.16) é fácil ver que o menor nível de energia possível ocorre quando $m = n = 0$, ou seja, todos os operadores tem autovalor igual a $+1$. A energia do nível fundamental é então:

$$E_0 = E(0, 0) = -N .$$

O subespaço de vácuo, $\mathcal{H}^0$, é então definido por:

$$\mathcal{H}^0 = \{|\chi\rangle \in \mathcal{H} : B_p|\chi\rangle = A_v|\chi\rangle = |\chi\rangle, \forall p, v\}. \quad (3.17)$$

O próximo passo agora é encontrar a degenerescência do nível fundamental e todos os estados de vácuo da hamiltoniana. Para construir os estados de vácuo do TC considere o estado $|\chi\rangle^0$, definido por:

$$|\chi\rangle^0 = \prod_v (\mathbb{1} + A_v) |1, 1, \dots, 1\rangle.$$

O estado $|1, 1, \dots, 1\rangle$ é o estado da base de $\mathcal{H}$ com $\phi_i = +1$ para toda aresta i . Primeiramente, vamos mostrar que este estado é auto-estado de B_p com autovalor $+1$, para toda plaqueta p .

$$B_p|\chi\rangle^0 = B_p \prod_v (\mathbb{1} + A_v) |1, 1, \dots, 1\rangle = \prod_v (\mathbb{1} + A_v) B_p |1, 1, \dots, 1\rangle,$$

mas, uma vez que $|1, 1, \dots, 1\rangle$ é um produto tensorial de auto-estados de σ^z , a equação anterior fica:

$$B_p|\chi\rangle^0 = \prod_v (\mathbb{1} + A_v) B_p |1, 1, \dots, 1\rangle = \prod_v (\mathbb{1} + A_v) |1, 1, \dots, 1\rangle = |\chi\rangle^0, \quad \forall p.$$

Falta ainda mostrar que $|\chi\rangle^0$ é também auto-estado do operador de vértice com autovalor $+1$ (para todo vértice v').

$$A_{v'}|\chi\rangle^0 = A_{v'} \prod_v (\mathbb{1} + A_v) |1, 1, \dots, 1\rangle = A_{v'} (\mathbb{1} + A_{v'}) \prod_{v \neq v'} (\mathbb{1} + A_v) |1, 1, \dots, 1\rangle,$$

usando o fato que $(A_{v'})^2 = \mathbb{1}$, a equação acima fica:

$$A_{v'}|\chi\rangle^0 = (A_{v'} + \mathbb{1}) \prod_{v \neq v'} (\mathbb{1} + A_v) |1, 1, \dots, 1\rangle = \prod_v (\mathbb{1} + A_v) |1, 1, \dots, 1\rangle = |\chi\rangle^0, \quad \forall v'.$$

Logo $|\chi\rangle^0$ é um estado fundamental do TC, mas não é o único. A maneira de se obter os outros estados de vácuo é aplicando os operadores de *string*, definidos anteriormente.

Considere γ^* um caminho fechado na rede dual. A primeira coisa que precisamos mostrar é que o estado $|\chi\rangle' = X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0$ é também um estado de vácuo. Para isso é suficiente mostrar que $B_p|\chi\rangle' = A_v|\chi\rangle' = |\chi\rangle'$, para toda plaqueta e vértice. Mas antes precisaremos dos seguintes resultados, que seguem diretamente das equações (3.11), (3.12) e (3.14).

$$[X_{\gamma^*}, A_v] = 0, \quad \forall \gamma^*, \quad (3.18a)$$

$$[X_{\gamma^*}, B_p] = 0 \text{ se } \partial\gamma^* = \emptyset. \quad (3.18b)$$

Com isso podemos mostrar que as condições de nível fundamental permanecem satisfeitas

$$B_p|\chi\rangle' = B_p X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0 = X_{\gamma^*} B_p|\chi\rangle^0 = X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0 = |\chi\rangle',$$

e também

$$A_v|\chi\rangle' = A_v X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0 = X_{\gamma^*} A_v|\chi\rangle^0 = X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0 = |\chi\rangle'.$$

Logo, $|\chi\rangle' = X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0$ é também um estado fundamental. Resta agora saber quando é que $|\chi\rangle'$ e $|\chi\rangle^0$ são estados distintos. Para isso consideremos as propriedades listadas a seguir para o operador de *string* X_{γ^*}

- i) Se γ_2^* puder ser deformado continuamente em γ_1^* , os estados $X_{\gamma_1^*}|\chi\rangle^0$ e $X_{\gamma_2^*}|\chi\rangle^0$ são, na verdade, o mesmo estado. Na figura 3.4 podemos ver que γ_2^* é uma pequena deformação

Figura 3.4.: as curvas γ_1^* e γ_2^* são pequenas deformações uma da outra.

de γ_1^* , e além disso o operador $X_{\gamma_2^*}$ pode ser escrito como $X_{\gamma_2^*} = X_{\gamma_1^*} A_{v_3}$. Isso ocorre pois existem dois operadores σ_l^x agindo na aresta l , e uma vez que $(\sigma_l^x)^2 = \mathbb{1}$ é válido a igualdade $X_{\gamma_2^*} = X_{\gamma_1^*} A_{v_3}$. Daí tiramos que:

$$X_{\gamma_2^*}|\chi\rangle^0 = X_{\gamma_1^*} A_{v_3}|\chi\rangle^0 = X_{\gamma_1^*}|\chi\rangle^0 ,$$

ou seja, são o mesmo estado. Isso significa que **caminhos homotopicamente equivalentes levam ao mesmo estado fundamental**.

- ii) Se γ^* for um caminho contrátil, então $X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0 = |\chi\rangle^0$.

Esse resultado é fácil de mostrar, pois sempre que γ^* for um caminho contrátil o operador X_{γ^*} pode ser escrito como um produto de operadores de vértice. Pegue como exemplo o operador $X_{\gamma_2^*}$, representado na figura 3.4, esse pode ser escrito como $X_{\gamma_2^*} = A_{v_1} A_{v_2} A_{v_3}$ e, em geral, escrevemos $X_{\gamma^*} = \prod_{\{v_i\}} A_{v_i}$. Dessa forma obtemos:

$$X_{\gamma^*}|\chi\rangle^0 = \prod_{\{v_i\}} A_{v_i}|\chi\rangle^0 = |\chi\rangle^0 .$$

Isso significa que **caminhos contráteis levam ao mesmo estados fundamental**.

No toro, existem somente dois caminhos não contráteis (a menos deformações homotópicas), que são os caminhos γ_x^* e γ_y^* - desenhados na figura 3.5. Assim, podemos concluir que existem somente 4 estados fundamentais linearmente independentes, que são: $|\chi\rangle^0$, $|\chi\rangle^1 = X_{\gamma_x^*}|\chi\rangle^0$, $|\chi\rangle^2 = X_{\gamma_y^*}|\chi\rangle^0$ e $|\chi\rangle^3 = X_{\gamma_x^*} X_{\gamma_y^*}|\chi\rangle^0$. O espaço $\mathcal{H}^0$ é então o espaço gerado pelos estados $|\chi\rangle^i$, ou seja

$$\mathcal{H}^0 = \{|\chi\rangle^i, \ i = 0, 1, 2, 3\} .$$

Esse resultado evidencia o caráter topológico da degenerescência do nível fundamental do TC. Se considerarmos TC definido sobre uma superfície bidimensional Σ de gênero g , a degenerescência do nível fundamental será dada por:

$$\dim(H_0) = 2^{2g} , \quad (3.19)$$

Figura 3.5.: caminhos não contráteis no toro.

Figura 3.6.: esses são todos os loops não triviais numa superfície de gênero g .

pois nesse caso existem $2g$ curvas não contráteis - como ilustrado na figura 3.6.

Não é só o nível fundamental do TC que possui propriedades interessantes. Os estados excitados, conforme veremos a seguir, podem ser interpretados como criação de quasi-partículas localizadas e essas, por sua vez, obedecem a uma estatística aniônica.

3.1.4. Estados excitados da hamiltoniana

Na seção anterior vimos que um estado de vácuo, digamos $|\chi\rangle^0$, é tal que as condições $B_p|\chi\rangle^0 = |\chi\rangle^0$ e $A_v|\chi\rangle^0 = |\chi\rangle^0$ sejam satisfeitas para toda plaqueta p e todo vértice v . Sendo assim um estado excitado é obtido quando uma ou mais condições são violadas. Considere, por exemplo, que esta condição seja violada para alguma plaqueta p' , ou seja,

$$B_{p'}|\chi\rangle = -|\chi\rangle ,$$

enquanto as outras condições permanecem inalteradas. Isso significa que o estado $|\chi\rangle$ é um estado excitado da hamiltoniana - com uma excitação localizada na plaqueta p' . As excitações de plaquetas são quasi-partículas denominadas de *fluxo* e representadas por m . Analogamente, se para um determinado estado têm-se que $A_{v'}|\chi\rangle = -|\chi\rangle$, dizemos que $|\chi\rangle$ é um estado excitado com uma quasi-partícula de carga localizada no vértice v' e representada por e .

Porém, tanto as quasi-partículas de carga quanto as de fluxo só podem ser criadas em pares, o que significa que não existe um estado com uma única quasi-partícula de fluxo, por exemplo. A razão para isso decorre da relação

$$\prod_p B_p = \mathbb{1} . \quad (3.20)$$

A relação acima impõe uma restrição nos operadores de plaqueta de tal forma que não pode haver um único operador de plaqueta com autovalor -1 , caso contrário a relação acima não seria satisfeita. O mesmo ocorre para quasi-partículas de carga, uma vez que os operadores de vértice também satisfazem à relação

$$\prod_v A_v = \mathbb{1} . \quad (3.21)$$

Uma vez definidas as excitações elementares do TC, vamos agora olhar para as maneiras de se obter tais estados excitados. A maneira como isso é feito é pela aplicação de operadores de string nos estados de vácuo. Para obter um estado excitado com um par de quasi-partícula de fluxo, $|\chi^f\rangle$, basta aplicar o operador

$$X_l = \sigma_l^x$$

num estado de vácuo do modelo. Para entender melhor essa afirmação, precisamos levar alguns pontos em consideração: primeiramente, o operador σ_l^x comuta com todos os operadores de vértice, portanto, se $|\Psi^0\rangle$ é um estado de vácuo, então

$$A_v \sigma_l^x |\Psi^0\rangle = \sigma_l^x A_v |\Psi^0\rangle = \sigma_l^x |\Psi^0\rangle ,$$

ou seja, o novo estado $\sigma_l^x |\Psi^0\rangle$ satisfaz as condições de vácuo para todos os vértices e, portanto, **não** representa um estado com excitação de carga. Os operadores de plaqueta, entretanto, comutam com o operador σ_l^x somente para as plaquetas que não compartilham a aresta l e, pelo mesmo motivo, não representa um estado com excitação de fluxo nas plaquetas que não compartilham a aresta l . Finalmente, sejam p' e p'' as duas plaquetas que compartilham a aresta l . Nesse caso temos que

$$B_{p'} \sigma_l^x = -\sigma_l^x B_{p'} \quad \text{e} \quad B_{p''} \sigma_l^x = -\sigma_l^x B_{p''} , \quad (3.22)$$

o que implica em

$$B_{p'} \sigma_l^x |\Psi^0\rangle = -\sigma_l^x B_{p'} |\Psi^0\rangle = -\sigma_l^x |\Psi^0\rangle ,$$

ou seja, $\sigma_l^x |\Psi^0\rangle$ é um estado excitado com uma quasi-partícula de fluxo localizada na plaqueta p' e, dado que o mesmo argumento é válido para a plaqueta p'' , esse mesmo estado carrega também uma quasi-partícula de fluxo localizada na plaqueta p'' . A figura 3.7(a) representa o estado excitado $\sigma_l^x |\Psi^0\rangle$, a linha verde representa a ação do operador $X_l = \sigma_l^x$, invertendo o spin localizado na aresta l . Analogamente, o estado $\sigma_l^z |\Psi^0\rangle$ representa um estado com um par de excitação de carga, localizadas nos vértices que são extremidade da aresta l - conforme ilustrado na figura 3.7(b), onde a linha vermelha representa a ação do operador $Z_l = \sigma_l^z$. Algebricamente falando, o motivo é o mesmo que no caso das quasi-partículas de fluxo - os operadores de vértice $A_{v'}$ e $A_{v''}$ anti-comutam com Z_l e, portanto, têm-se que o estado $Z_l |\chi\rangle^0$ é um estado excitado com um par de quasi-partículas de carga.

Observe que o operador de string X_{γ^*} comuta com todos os operadores de plaqueta que não estão nas extremidades do caminho γ^* - além de comutar com todos os operadores de vértice trivialmente. Resumindo, os operadores de string X_{γ^*} satisfazem às seguintes relações:

$$[X_{\gamma^*}, A_v] = 0 \quad \forall v \quad (3.23a)$$

$$[X_{\gamma^*}, B_p] = 0 \quad \text{se } p \notin \partial\gamma^* \quad (3.23b)$$

$$X_{\gamma^*} B_p = -B_p X_{\gamma^*} \quad \text{se } p \in \partial\gamma^* . \quad (3.23c)$$

Figura 3.7.: operadores de *string*.

Com isso concluímos que o estado

$$|m, m\rangle_{\gamma^*} = X_{\gamma^*} |\chi\rangle^0 \quad (3.24)$$

é um estado excitado da hamiltoniana do TC; com um par de quasi-partículas de fluxo localizados nas extremidades do caminho γ^* - conforme ilustrado na figura 3.8(a). Analogamente, o operador Z_γ cria quasi-partícula de carga somente nas extremidades do caminho γ , e obedece à seguinte álgebra:

$$[Z_\gamma, B_p] = 0 \quad \forall p \quad (3.25a)$$

$$[Z_\gamma, A_v] = 0 \quad \text{se } v \notin \partial\gamma \quad (3.25b)$$

$$Z_\gamma A_v = -A_v Z_\gamma \quad \text{se } v \in \partial\gamma. \quad (3.25c)$$

Com isso concluímos que o estado

$$|e, e\rangle_\gamma = Z_\gamma |\chi\rangle^0 \quad (3.26)$$

é um estado excitado da hamiltoniana do TC; com um par de quasi-partículas de carga localizadas nas extremidades do caminho γ - conforme mostrado na figura 3.8(b).

As quasi-partículas de carga e de fluxo podem ser movidas sem nenhum custo energético. Os operadores que desempenham esta tarefa são os próprios operadores que criam essas excitações, isto é, X_{γ^*} e Z_γ . O estado $|m, m\rangle_{\gamma^* \circ \tilde{\gamma}^*}$ - representado na figura 3.9(b) - pode ser obtido do estado $|m, m\rangle_{\gamma^*}$ - representado na figura 3.9(a) - pela simples aplicação do operador de string $X_{\tilde{\gamma}^*}$, ou seja,

$$|m, m\rangle_{\gamma^* \circ \tilde{\gamma}^*} = X_{\tilde{\gamma}^*} |m, m\rangle_{\gamma^*}.$$

Mover uma quasi-partícula não custa energia, pois isso somente altera sua localização e o número total de quasi-partícula é conservado. A bolinha branca na figura 3.9(b) representa a fusão de duas quasi-partículas de fluxo. Note que o auto-valor do operador de plaqueta (para a plaqueta em destaque na figura) é +1, indicando que não há excitação naquela plaqueta. Com isso concluímos que a fusão de duas quasi-partículas de fluxo é uma quasi-partícula de vácuo, representada por 1. O mesmo argumento é válido para quasi-partículas de carga. Podemos então escrever as seguintes regras de fusão para o TC:

$$m \times m = e \times e = 1. \quad (3.27)$$

(a) Ação dos operadores de *string* X_{γ^*} criando um par de fluxos.

(b) Ação do operador de *string* Z_{γ} criando um par de cargas.

Figura 3.8.: par de fluxos e par de cargas criados nas extremidades dos caminhos.

(a) Estado de duas quasi-partículas de fluxo. As setas representam o caminho ao longo do qual a quasi-partícula será movida.

(b) A bolinha branca representa a fusão de duas excitações de fluxo.

Figura 3.9.: movendo quasi-partículas.

A fusão de uma quasi-partícula de carga com uma quasi-partícula de fluxo resulta numa terceira quasi-partícula, chamada de dyon e representada por ϵ .

$$e \times m = \epsilon . \quad (3.28)$$

Um estado quântico que contempla a existência de tal quasi-partícula vem da aplicação simultânea dos operadores de *string* X_{γ} e Z_{γ^*} . As quasi-partículas de dyon, entretanto, estão localizadas nos sites da rede, sendo um site s definido por um par $s = (v, p)$, com v sendo um vértice e p uma plaqueta adjacente a este vértice. Se as extremidades dos caminhos γ e γ^* coincidem, isto é, estão no mesmo site, então um estado quântico com um par de dyons é obtido por:

$$|\epsilon, \epsilon\rangle_{\gamma} = X_{\gamma} Z_{\gamma^*} |\Psi^0\rangle . \quad (3.29)$$

A figura 3.10 ilustra a criação de um par de dyon a partir do vácuo.

Figura 3.10.: criação de uma quasi-partícula de dyon a partir da fusão de uma quasi-partícula de carga com uma de fluxo.

Por fim, dizemos que as excitações do TC são dadas por quatro quasi-partículas $\{1, e, m, \epsilon\}$ e essas, por sua vez, obedecem às regras de fusão apresentadas no exemplo 2.1 - no capítulo 2. Os diagramas de fusão dessas partículas são representados nas figuras 2.5 e 2.6. Uma vez que todas as regras de fusão são abelianas neste modelo, não precisamos nos preocupar com as matrizes- F , pois essas são todas triviais e a regra do pentágono é trivialmente satisfeita. Porém, ainda precisamos garantir que a regra do hexágono seja satisfeita e, para isso, precisamos calcular as matrizes- R que, aliás, são iguais às matrizes de braid, pois os anyons são abelianos.

3.1.5. Estatística das quasi-partículas

Na figura 3.11, podemos ver que um estado excitado, com duas quasi-partículas de carga, não adquire nenhuma fase não trivial quando as duas cargas são trocadas de lugar. Uma vez que os caminhos γ podem ser continuamente deformados sem alterar o estado quântico, o caminho fechado mostrado na figura 3.11 pode ser deformado no caminho trivial - resultando no mesmo estado inicial. Esse resultado significa que as quasi-partículas de carga são bósons e, portanto, têm-se

$$R_{e,e}^1 = 1 \quad \text{e} \quad R_{ee}^e = R_{ee}^m = R_{ee}^\epsilon = 0 .$$

O mesmo argumento pode ser usado para mostrar que as quasi-partículas de fluxo também

Figura 3.11.: as quasi-partículas de carga do TC obedecem à estatística bosônica. As setas indicam o caminho que as quasi-partículas percorreram ao serem trocadas de lugar.

são bósons e, com isso

$$R_{mm}^1 = 1 \quad \text{e} \quad R_{mm}^e = R_{mm}^m = R_{mm}^\epsilon = 0 .$$

Já um estado excitado com duas quasi-partículas de dyon adquire uma fase não trivial quando essas são trocadas de lugar. Assim como fizemos na introdução deste trabalho, na discussão sobre o efeito Aharonov-Bohm, uma vez que as partículas de dyon são formadas pela fusão de uma carga com um fluxo, a estatística dessas partículas fica determinada pela fase adquirida numa dupla troca de uma carga com um fluxo - veja a figura 1.7. Considere, portanto, o estado representado na figura 3.12(b). Além disso, sabemos que $|\chi\rangle' = X_{\gamma^*} Z_{\gamma} |\chi\rangle^0$,

Figura 3.12.: dupla troca de quasi-partículas.

portanto:

$$|\chi\rangle'' = X_{\tilde{\gamma}^*} X_{\gamma^*} Z_{\gamma} |\chi\rangle^0 = X_{\gamma^*} X_{\tilde{\gamma}^*} Z_{\gamma} |\chi\rangle^0 = -X_{\gamma^*} Z_{\gamma} X_{\tilde{\gamma}^*} |\chi\rangle^0 ,$$

mas como $\tilde{\gamma}^*$ é um caminho fechado, sabemos que $X_{\tilde{\gamma}^*} |\chi\rangle^0 = |\chi\rangle^0$, logo

$$|\chi\rangle'' = -X_{\gamma^*} Z_{\gamma} |\chi\rangle^0 = -|\chi\rangle' .$$

Figura 3.13.: estatística das quasi-partículas do toric code.

O resultado obtido da figura 3.1.5 é que a função de onda adquire uma fase de $e^{i\pi}$ quando duas quasi-partículas de de dyon são trocadas de lugar e, portanto, ϵ é um férmion. As matrizes- R para os dyons ficam:

$$R_{\epsilon\epsilon}^1 = \quad \text{e} \quad R_{\epsilon\epsilon}^e = R_{\epsilon\epsilon}^m = R_{\epsilon\epsilon}^\epsilon = 0 .$$

A figura 3.13 mostra as regras estatísticas das partículas que compõem o modelo do toric code. Note que todas as excitações neste modelo são anyons triviais (bósons e férmions) e com isso as regras do pentágono e do hexágono são automaticamente satisfeitas.

O próximo modelo que iremos estudar é o modelo de duplo quântico. O modelo duplo representa uma generalização do toric code e fornece uma classe de sistemas aniônicos bastante vasta. Em particular, o MDQ é exemplo de modelo exatamente solúvel que possui ordem topológica e que também suporta anyons - inclusive anyons não-abelianos - como excitação de quasi-partícula. Porém, algumas ferramentas matemáticas são imprescindíveis para a definir e entender esse modelo. Em particular, um conhecimento básico de álgebras de Hopf e da álgebra do duplo quântico é requerido. Por esse motivo, antes de apresentarmos o MDQ, o próximo capítulo é destinado às álgebras de Hopf.

4. Álgebras de Hopf e exemplos

Antes de mergulharmos nos modelos hamiltonianos que iremos discutir neste trabalho, é necessário introduzir as estruturas matemáticas que estão por trás desses modelos. A estrutura matemática mais fundamental que utilizaremos é uma álgebra de Hopf. Este capítulo é dedicado ao estudo de tais álgebras. Aqui será apresentado uma definição de álgebra de Hopf e também os dois dos nossos principais exemplos: a álgebra de grupo e a álgebra do duplo quântico.

Os axiomas e propriedades envolvendo álgebras de Hopf são, em geral, formulados em termos de tensores, o que torna as manipulações algébricas um pouco exaustivas, por isso, alternativamente, introduziremos uma notação diagramática para trabalhar com esses tensores. Essa notação recebe o nome de *diagramas de Kuperberg*, conforme definidos em [39]. Os diagramas de Kuperberg são bastante utilizados em vários outros trabalhos, como por exemplo em [40] para a prova da existência da integral em álgebras de Hopf de dimensão finita.

4.1. Diagramas de Kuperberg

Considere V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$. Considere $\{\hat{v}_i\}$ uma base de V , com $i = 1, 2, \dots, \dim V$, e considere $\{\hat{v}^i\}$ uma base de V^* , o espaço vetorial dual de V . Um vetor w de $V \otimes V \otimes \dots \otimes V \otimes V^* \otimes V^* \otimes \dots \otimes V^*$ é representado por:

$$w = T_{a_1 a_2 \dots a_n}{}^{b_1 b_2 \dots b_m} \hat{v}_{a_1} \otimes \hat{v}_{a_2} \otimes \dots \otimes \hat{v}_{a_n} \otimes \hat{v}^{b_1} \otimes \hat{v}^{b_2} \otimes \dots \otimes \hat{v}^{b_m},$$

onde estamos usando a notação de índices repetidos de Einstein para a soma. O tensor $T_{a_1 a_2 \dots a_n}{}^{b_1 b_2 \dots b_m} \in \mathbb{C}$ define o vetor w , em outras palavras, são os coeficientes de w na base do espaço vetorial.

Associamos a tal tensor um diagrama, T , de Kuperberg da seguinte forma: para cada índice inferior do tensor adicionamos uma seta entrando em T e para cada índice superior adicionamos uma seta saindo, de tal forma que as setas que entram são ordenadas no sentido anti-horário e as que saem no sentido horário, como mostrado na figura 4.1(a). Contrações de tensores são feitas bastando ligar as setas correspondentes aos índices repetidos¹, por exemplo, à quantidade $A_{ij}^k B_k^{ai}$, que possui duas contrações (os índices i e k), associamos o diagrama de Kuperberg da figura 4.1(b).

Se T é uma transformação linear de um espaço vetorial V nele mesmo, então $T : V \rightarrow V$ é da forma $T(\hat{v}_a) = T_a^b \hat{v}_b$, portanto, o tensor T_a^b pode ser representado por um diagrama de Kuperberg com uma seta entrando e uma seta saindo, como mostrado na figura 4.2(a). O diagrama de Kuperberg do mapa identidade do espaço vetorial é representado por uma única seta como mostrado na figura 4.2(b).

¹Estamos usando a convenção de Einstein para índices repetidos, isto é, $a^i b_i := \sum_i a^i b_i$.

(a) Diagrama de Kuperberg de um tensor arbitrário $T_{a_1 a_2 \dots a_n}^{b_1 b_2 \dots b_m}$.

(b) Contração entre dois tensores.

Figura 4.1.: diagramas de Kuperberg.

(a) Diagrama de Kuperberg de um mapa linear.

(b) Diagrama de Kuperberg do mapa identidade.

Figura 4.2.: diagramas de mapas lineares.

O produto tensorial de mapas lineares é representado pelo diagrama de Kuperberg de cada tensor desenhado de forma disjuntas. Por exemplo, o diagrama de Kuperberg de um endomorfismo $f \equiv f_1 \otimes f_2 \otimes \dots \otimes f_k$ de $V \otimes V \otimes \dots \otimes V$, sendo f_i um endomorfismo de V , é o mostrado na figura 4.3.

Figura 4.3.: diagrama de Kuperberg do produto tensorial de mapas lineares.

Diagramas de Kuperberg em que não há setas livres, isto é, em que todas as setas de todos os tensores estão contraídos, representam números pertencentes ao corpo $\mathbb{C}$, sobre o qual o espaço vetorial está definido. Por exemplo, os diagramas da figura 4.4 representam números, pois todos os seus índices estão contraídos.

(a)

(b)

Figura 4.4.: diagramas de Kuperberg que representam escalares.

O traço de operadores, em termos de diagramas de Kuperberg, é representado por uma seta que sai e entra no mesmo diagrama. Numa transformação linear, A , representada por uma matriz A_i^j , o traço é definido por:

$$\text{tr}(A) = \sum_i A_i^i.$$

Isso significa que o tensor A_i^j está contraído com ele mesmo, portando, o traço de um mapa linear é o representado na figura 4.5(a). O traço do mapa identidade é o representado na figura 4.5(b) e é igual a dimensão da álgebra.

$$\begin{array}{ll} \text{tr}(A) = \text{---} \curvearrowright \text{---} & \text{tr}(\mathbb{1}) = \text{---} \bigcirc \text{---} = \dim(V) \\ \text{(a) Traço de um mapa linear.} & \text{(b) Traço do mapa identidade.} \end{array}$$

Figura 4.5.: traço de mapas lineares.

4.2. Álgebras e coálgebras

Introduzida a notação de diagramas de Kuperberg, a qual passaremos a chamar simplesmente por *diagrama*, definiremos agora as álgebras de Hopf e usaremos esses diagramas para provar algumas identidades de álgebras de Hopf. Esse capítulo tem como base os livros texto [41,42], ao leitor interessado em um estudo mais aprofundado sobre o assunto, sugiro essas leituras.

4.2.1. Álgebras associativas

Considere $\mathcal{A}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ cuja base é $\{\hat{\phi}_i : i = 1, 2, \dots, \dim \mathcal{A}\}$. Considere ainda $\mathcal{A}^*$ seu espaço vetorial dual, cuja base é $\{\hat{\psi}^i\}$ tal que $\hat{\psi}^i(\hat{\phi}_j) = \delta(i, j)$. Neste capítulo e no restante deste trabalho, para facilitar a identificação, denotaremos elementos do espaço vetorial $\mathcal{A}$ por letras latinas, enquanto denotaremos os elementos do espaço dual $\mathcal{A}^*$ por letras gregas, com exceção dos vetores $\hat{\phi}_i$ da base de $\mathcal{A}$.

Dizemos que o espaço vetorial $\mathcal{A}$ é uma álgebra se existem dois mapas lineares:

$$m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad \text{e} \quad \eta : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A} ,$$

tais que m é uma mapa associativo e $\eta(1)$ é a unidade de m . Os mapas m e η são chamados de mapa multiplicação e mapa unidade, respectivamente, e são definidos em termos das constantes de estrutura, m_{ij}^k e η^l , por:

$$m(\hat{\phi}_i \otimes \hat{\phi}_j) = m_{ij}^k \hat{\phi}_k := \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j , \quad (4.1a)$$

$$\eta(1) = \eta^l \hat{\phi}_l := \eta. \quad (4.1b)$$

As constantes de estrutura definem os mapas multiplicação e unidade, mas não podem ser quaisquer, pois as constantes de estrutura da multiplicação são tais que esta seja associativa enquanto que as da unidade são tais que esta seja, de fato, a unidade da multiplicação. Dizer que a multiplicação é associativa equivale a dizer que:

$$(m \otimes \mathbb{1}) \circ m \equiv (\mathbb{1} \otimes m) \circ m , \quad (4.2)$$

ou ainda, a seguinte relação deve ser válida para os elementos da base:

$$(\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) \hat{\phi}_c = \hat{\phi}_a (\hat{\phi}_b \hat{\phi}_c) . \quad (4.3)$$

Em termos das constantes de estrutura a relação acima fica:

$$m_{ab}^i m_{ic}^l = m_{bc}^i m_{ai}^l. \quad (4.4)$$

O fato de $\eta(1)$ ser a unidade da multiplicação significa que:

$$m \circ (\mathbb{1} \otimes \eta) \equiv m \circ (\eta \otimes \mathbb{1}) \equiv \mathbb{1}, \quad (4.5)$$

o que em termos dos elementos da base fica:

$$\eta(1)\hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i\eta(1) = \hat{\phi}_i, \quad (\forall i). \quad (4.6)$$

Já em termos das constantes de estruturas fica:

$$\begin{aligned} \eta(1)\hat{\phi}_i &= \hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i\eta(1) \\ \eta^l\hat{\phi}_l\hat{\phi}_i &= \hat{\phi}_i = \hat{\phi}_i\eta^l\hat{\phi}_l, \\ \eta^l m_{li}^k \hat{\phi}_k &= \hat{\phi}_i = \eta^l m_{il}^k \hat{\phi}_k, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\eta^l m_{li}^k = \delta(i, k) = \eta^l m_{il}^k. \quad (4.7)$$

Como alternativa a trabalhar com os tensores das equações (4.4) e (4.7) podemos trabalhar com seus respectivos diagramas, conforme discutido na seção anterior. Em termos de diagramas, a condição 4.4 é a desenhada na figura 4.6(a). A condição 4.7, em termos de diagramas, é a desenhada na figura 4.6(b). Se os diagramas desenhados na figura 4.6

Figura 4.6.: axiomas da álgebra.

são satisfeitos, dizemos que o trio $\langle \mathcal{A}, m, \eta \rangle$ define uma álgebra associativa e com unidade, a qual chamaremos simplesmente de álgebra.

Definição 4.1 *Uma álgebra pode possuir subálgebras, a álgebra $\langle V, m, \eta \rangle$ é uma subálgebra de $\langle \mathcal{A}, m, \eta \rangle$ se V é um subespaço vetorial de $\mathcal{A}$ e $ab \in V$ sempre que $a, b \in V$.*

Definição 4.2 *Sejam $\langle \mathcal{A}_1, m_1, \eta_1 \rangle$ e $\langle \mathcal{A}_2, m_2, \eta_2 \rangle$ duas álgebras. Um homeomorfismo de álgebras é um mapa linear $\theta : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ que preserva o produto nas duas álgebras, isto é, para todo $a, b \in \mathcal{A}_1$ vale:*

$$\theta(ab) = \theta(a)\theta(b) \quad \text{e} \quad \theta(\eta_1) = \eta_2.$$

Se θ é também um isomorfismo de espaços vetoriais, então θ é dito ser um isomorfismo de álgebra e as álgebras $\langle \mathcal{A}_1, m_1, \eta_1 \rangle$ e $\langle \mathcal{A}_2, m_2, \eta_2 \rangle$ são ditas isomorfas (representamos por $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{A}_2$).

4.2.2. Centro da álgebra

Um conceito que será bastante relevante nos modelos físicos que iremos estudar e também na teoria de representações das álgebras semisimples, no apêndice B, é o conceito de centro da álgebra. O centro de uma álgebra, denotado por $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, é definido como sendo uma subálgebra (ver definição 4.1) $\mathcal{Z}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$ dos elementos de $\mathcal{A}$ que comutam com todos os elementos de $\mathcal{A}$.

Definição 4.3 Considere $\langle \mathcal{A}, m, \eta \rangle$ uma álgebra. O centro de $\mathcal{A}$, denotado por $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$, é uma subálgebra de $\mathcal{A}$, definido por:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}) = \{z \in \mathcal{A} : za = az, \forall a \in \mathcal{A}\} . \quad (4.8)$$

É fácil verificar que $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ é de fato uma subálgebra de $\mathcal{A}$. Considere $z_1, z_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$, ou seja, $(\forall a \in \mathcal{A}) z_1 a = a z_1$ e $z_2 a = a z_2$. No entanto também é válido que:

$$z_1 z_2 a = z_1 a z_2 = a z_1 z_2, \quad \forall a \in \mathcal{A},$$

ou seja, $z_1 z_2 \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ e logo $\mathcal{Z}(\mathcal{A})$ é uma subálgebra de $\mathcal{A}$. No decorrer deste texto denotaremos os elementos da base do centro da álgebra por $\mathfrak{z}_\mu$, com $\mu \in J$ e sendo J algum conjunto de índices. Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra semisimples de dimensão finita, então J é o mesmo conjunto usado para indexar as representações irredutíveis desta álgebra. Em outras palavras, existe uma correspondência um-para-um entre elementos do centro da álgebra e representações irredutíveis da álgebra. No apêndice B iremos apresentar a teoria de representação das álgebras semisimples e também uma maneira de encontrar os geradores do centro da álgebra.

4.2.3. Coálgebras coassociativas

Consideremos o caso em que há uma estrutura de álgebra definida em $\mathcal{A}^*$, isto é, no espaço vetorial dual de $\mathcal{A}$. Isso significa que existe um mapa multiplicação e um mapa unidade, definidos por:

$$\Delta : \mathcal{A}^* \otimes \mathcal{A}^* \rightarrow \mathcal{A}^* \text{ tal que } \Delta(\hat{\psi}^i \otimes \hat{\psi}^j) = \hat{\psi}^i \hat{\psi}^j = \Delta_k^{ij} \hat{\psi}^k, \quad (4.9)$$

e

$$\epsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{A}^* \text{ tal que } \epsilon(1) \text{ seja a unidade de } \Delta, \quad (4.10)$$

e tais que os axiomas da figura 4.6 são satisfeitos, ou seja, satisfazem às seguintes relações:

$$(\mathbb{1} \otimes \Delta) \circ \Delta \equiv (\Delta \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta, \quad (4.11a)$$

$$(\mathbb{1} \otimes \epsilon) \circ \Delta \equiv (\epsilon \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta \equiv \mathbb{1}, \quad (4.11b)$$

as quais, em termos de diagramas, assumem a forma mostrada na figura 4.7.

Alternativamente, pode-se definir uma estrutura de coálgebra em $\mathcal{A}$ ao invés de uma estrutura de álgebra em $\mathcal{A}^*$. Para isso basta considerar as constantes de estrutura, Δ_i^{jk} e ϵ^i , e definir os seguintes mapas em $\mathcal{A}$: o mapa $\Delta : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ o qual é definido por:

$$\Delta(\hat{\phi}_i) = \Delta_i^{jk} (\hat{\phi}_j \otimes \hat{\phi}_k), \quad (4.12)$$

Figura 4.7.: axiomas da coálgebra.

e o mapa $\epsilon : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ definido por:

$$\epsilon(\hat{\phi}_i) = \epsilon^i. \quad (4.13)$$

Dizemos que o trio $\langle \mathcal{A}, \Delta, \epsilon \rangle$ é uma coálgebra em $\mathcal{A}$ se o trio $\langle \mathcal{A}^*, \Delta, \epsilon \rangle$ é uma álgebra em $\mathcal{A}^*$. No caso em que existem as duas estruturas em $\mathcal{A}$, a estrutura de álgebra e de coálgebra, dizemos o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ define um par álgebra coálgebra.

A seguir, conforme veremos, quando há uma certa compatibilidade entre a estrutura de álgebra e de coálgebra, dizemos que o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ define uma biálgebra.

4.2.4. Biálgebras

O quinteto $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ define uma álgebra e coálgebra em $\mathcal{A}$ se as condições listadas nas figuras 4.6 e 4.7 são satisfeitas, mas no caso especial em que há uma certa compatibilidade entre os mapas dizemos simplesmente que o quinteto define uma biálgebra. Isto ocorre quando o mapa de comultiplicação e counidade são homeomorfismos da estrutura da álgebra (ver definição 4.2), isto é, quando as seguintes condições são satisfeitas:

$$\Delta \circ m \equiv (m \otimes m) \circ (\mathbb{1} \otimes \tau \otimes \mathbb{1}) \circ (\Delta \otimes \Delta), \quad (4.14a)$$

$$\epsilon \circ m \equiv \epsilon \otimes \epsilon, \quad (4.14b)$$

sendo $\tau : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, definido por $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$. Alternativamente, e de forma mais ilustrativa, isso equivale a dizer que a relação abaixo deve ser válida para os elementos da base de $\mathcal{A}$.

$$\Delta(\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) = \Delta(\hat{\phi}_a) \Delta(\hat{\phi}_b), \quad (4.15)$$

$$\epsilon(\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) = \epsilon(\hat{\phi}_a) \epsilon(\hat{\phi}_b), \quad (4.16)$$

sendo que o produto em $\Delta(\hat{\phi}_a) \Delta(\hat{\phi}_b)$ representa a multiplicação estendida ao produto tensorial. Em termos de diagramas dizer que os mapas Δ e ϵ satisfazem às equações (4.15) e (4.16) equivale a dizer que os axiomas listados na figura 4.8 são satisfeitas. Sendo assim, quando os mapas de (co)multiplicação e (co)unidade satisfazem às relações desenhada na figura 4.8 o quinteto definido acima é uma biálgebra.

Embora tenhamos dito que a condição para que o quinteto seja uma biálgebra é que os mapas Δ e ϵ sejam homeomorfismos da álgebra, pode-se mostrar [43] que se os mapas m e η forem cohomeomorfismo de coálgebra então o quinteto também será uma biálgebra, sendo assim, também são válidas as condições mostrada na figura 4.9. Observe que a condição da figura 4.8(b) é exatamente igual à condição da figura 4.9(b). Resumidamente dizemos que o

(a) Condição para que a comultiplicação seja um homeomorfismo da álgebra.

(b) Condição para que a counidade seja um homeomorfismo da álgebra.

Figura 4.8.: mapas Δ e ϵ como homeomorfismos da álgebra.

(a) Condição para que a multiplicação seja um cohomeomorfismo da coálgebra.

(b) Condição para que a unidade seja um cohomeomorfismo da coálgebra.

Figura 4.9.: mapas m e η como cohomeomorfismos da álgebra.

(a)

(b)

(c)

Figura 4.10.: axiomas da biálgebra.

quinteto $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ é uma biálgebra quando os mapas de (co)multiplicação e (co)unidade satisfazem às condições desenhadas na figura 4.10.

Os axiomas na figura 4.10 garantem uma propriedade muito importante sobre álgebras de Hopf, que é o fato de existir uma dualidade entre a estrutura de álgebra e coálgebra. Note, na figura acima, que se invertermos a orientação de todas as setas e trocarmos $m \leftrightarrow \Delta$ e $\eta \leftrightarrow \epsilon$, os axiomas permanecem os mesmos.

Uma vez definida a estrutura de biálgebra, ainda falta mais um ingrediente para que esta seja uma álgebra de Hopf. Esse ingrediente é uma mapa linear chamado de antípoda, a qual será discutida a seguir.

4.3. Álgebras de Hopf

Considere uma biálgebra $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$. Considere também um endomorfismo de $\mathcal{A}$ o qual chamaremos de S . Se S é um mapa tal que:

$$m \circ (S \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta \equiv m \circ (\mathbb{1} \otimes S) \circ \Delta \equiv \eta \otimes \epsilon, \quad (4.17)$$

S é dito ser uma antípoda. A relação acima é chamada de axioma da antípoda. Em termos de diagramas essa relação assume a forma apresentada na figura 4.11.

Definição 4.4 Uma álgebra de Hopf é um sexteto $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon, S \rangle$, sendo $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ uma biálgebra e S uma antípoda, isto é, S satisfaz o axioma da antípoda (equação (4.17) ou figura 4.11).

$$\rightarrow \Delta \xrightarrow{S} m \rightarrow \equiv \rightarrow \Delta \xrightarrow{S} m \rightarrow \equiv \rightarrow \epsilon \quad \eta \rightarrow$$

Figura 4.11.: axioma da antípoda.

4.3.1. Integral e cointegral na álgebra

Um conceito bastante importante em álgebras de Hopf é o conceito de integral e cointegral. Essas nada mais são que elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^*$, os quais satisfazem certas propriedades.

Definição 4.5 Chamamos de *cointegral* (à esquerda) o elemento $\mathcal{I} \in \mathcal{A}$ tal que

$$\mathcal{I}a = \epsilon(a)\mathcal{I}, \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (4.18)$$

Equivalentemente, uma *cointegral* à esquerda é um elemento da álgebra que satisfaz a condição desenhada na figura 4.12(a). Analogamente, uma *integral* é um elemento $\Lambda \in \mathcal{A}^*$ que satisfaz a condição desenhada na figura 4.12(b).

$\begin{array}{c} \lambda \rightarrow m \rightarrow \equiv \lambda \rightarrow \\ \nearrow \quad \quad \quad \searrow \quad \quad \quad \rightarrow \epsilon \end{array}$	$\begin{array}{c} \rightarrow \Delta \rightarrow \\ \searrow \quad \quad \quad \rightarrow \Lambda \\ \quad \quad \quad \eta \rightarrow \end{array}$
<p>(a) Cointegral à esquerda numa álgebra de Hopf.</p>	<p>(b) Integral à direita numa álgebra de Hopf.</p>

Figura 4.12.: definição de integral e cointegral em álgebra de Hopf.

A existência de integral em álgebra de Hopf está diretamente ligada ao fato de a mesma ser semi-simples ², isto é, uma álgebra de Hopf é semi-simples se, e somente se, existir uma integral não nula à esquerda [42].

Existem álgebras de Hopf que cumprem a propriedade $S^2 \equiv 1$. Nesse a álgebra é dita ser involutiva. Do ponto de vista matemático, álgebras de Hopf involutivas são exemplos bastante especiais que possuem certas propriedades garantidas, como por exemplo a existência de uma integral não nula, o que implica [42] em semi-simplicidade da álgebra. Do ponto de vista da física, as álgebras involutivas permitem a construção de teorias de campos discretas as quais são invariantes por: transformações de gauge, fato que estudaremos com mais detalhes no capítulo 7. Todas as álgebras de Hopf que estudaremos neste trabalho são involutivas.

A seguir, nossos dois principais exemplos de álgebra de Hopf serão definidos: a álgebra de grupo, $\mathbb{C}G$, e a álgebra do duplo quântico, $D(G)$. Ambas tem como ingrediente principal um grupo finito G .

4.4. Exemplos de álgebras de Hopf

Os dois exemplos de álgebras de Hopf a seguir são de fundamental importância para a construção dos modelos físicos que discutiremos nos próximos capítulos. Tanto a álgebra de grupo quanto a álgebra do duplo quântico são definidas a partir de um grupo finito G .

²Ver definição de semi-simplicidade na definição B.5 do apêndice B.

4.4.1. Álgebra de grupo $\mathbb{C}G$

A álgebra de grupo é uma álgebra que carrega a estrutura de um grupo G . Considere então, G um grupo finito, cujo elemento identidade é $e \in G$. Seja $\{\hat{\phi}_g : g \in G\}$ uma base do espaço vetorial $\mathbb{C}G$ sobre $\mathbb{C}$. Daí tiramos que:

$$\dim(\mathbb{C}G) = |G| .$$

A multiplicação neste espaço vetorial é definida para todos elementos da base de forma a imitar o produto do grupo, então para todo $g, h \in G$, definimos:

$$\hat{\phi}_g \hat{\phi}_h = \hat{\phi}_{gh},$$

sendo gh o produto do grupo. A multiplicação para elementos arbitrários do espaço é a simples extensão por linearidade da multiplicação dos elementos da base, sendo assim o mapa de multiplicação é tal que as constantes de estruturas são:

$$m_{ab}^c = \delta(c, ab) . \quad (4.19)$$

A recém definida multiplicação é trivialmente associativa, uma vez que o produto do grupo é associativo,

$$\hat{\phi}_a (\hat{\phi}_b \hat{\phi}_c) = \hat{\phi}_a (\hat{\phi}_{bc}) = \hat{\phi}_{a(bc)} = \hat{\phi}_{(ab)c} = (\hat{\phi}_{ab}) \hat{\phi}_c = (\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) \hat{\phi}_c.$$

Também não é difícil ver que a unidade desta multiplicação é o elemento $\hat{\phi}_e$, como mostrado abaixo.

$$\hat{\phi}_e \hat{\phi}_a = \hat{\phi}_{ea} = \hat{\phi}_a = \hat{\phi}_{ae} = \hat{\phi}_a \hat{\phi}_e .$$

O mapa unidade fica então determinado por: $\eta(1) = \hat{\phi}_e$. Concluimos que o trio $\langle \mathcal{A}, m, \eta \rangle$ determina uma álgebra. A fim de mostrarmos que a álgebra de grupo é uma álgebra de

$$\Delta(\phi_a) = \phi_a \otimes \phi_a \quad \text{ou} \quad \phi_a \rightarrow \Delta \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \equiv \begin{matrix} \phi_a \rightarrow \\ \phi_a \rightarrow \end{matrix}$$

Figura 4.13.: definição do mapa de comultiplicação de $\mathbb{C}G$.

Hopf precisamos definir a estrutura de coálgebra. Definimos o mapa de comultiplicação, para todo $a \in G$, como mostrado na figura 4.13. Da própria definição é fácil ver que a constante de estrutura da comultiplicação é dado por:

$$\Delta_a^{bc} = \delta(a, b)\delta(b, c) . \quad (4.20)$$

O mapa counidade da álgebra é definido por:

$$\epsilon(\hat{\phi}_g) = 1, \quad \forall g \in G ,$$

Observe que, além de satisfazerem automaticamente as relações necessárias para que Δ e ϵ definam uma coálgebra, esses mapas satisfazem também às relações necessárias para

que o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ seja uma biálgebra, pois o mapa de comultiplicação é um homeomorfismo da álgebra, ou seja, para todo $a, b \in G$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\Delta(\hat{\phi}_a) \Delta(\hat{\phi}_b) &= (\hat{\phi}_a \otimes \hat{\phi}_a) (\hat{\phi}_b \otimes \hat{\phi}_b) \\
&= (\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) \otimes (\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) \\
&= (\hat{\phi}_{ab}) \otimes (\hat{\phi}_{ab}) \\
&= \Delta(\hat{\phi}_{ab}) \\
&= \Delta(\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) .
\end{aligned}$$

O mapa counidade é também um homeomorfismo da álgebra:

$$\epsilon(\hat{\phi}_a) \epsilon(\hat{\phi}_b) = (1)(1) = 1 = \epsilon(\hat{\phi}_{ab}) = \epsilon(\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b) , \quad \forall a, b \in G .$$

Portanto o quinteto $\langle \mathcal{A}, m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ define uma biálgebra.

Ainda precisamos definir um mapa linear S que satisfaça o axioma da antípoda para garantir que $\mathbb{C}G$ seja uma álgebra de Hopf. A escolha da antípoda não é arbitrária, pois se ela existe então ela é única [40]. Nesse basta considerar o mapa linear S , definido por:

$$S(\hat{\phi}_a) = \hat{\phi}_{a^{-1}} \quad \text{ou seja} \quad S_a^b = \delta(a, b^{-1}) . \quad (4.21)$$

Vê-se facilmente que este satisfaz o axioma da antípoda (veja a figura 4.14). Além disso,

$$\begin{aligned}
\phi_a \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} &\equiv \begin{array}{c} \phi_a \rightarrow \\ \phi_a \rightarrow \end{array} \Rightarrow \phi_a \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \phi_a \xrightarrow{S} \\ \phi_a \xrightarrow{\quad} \end{array} \equiv \begin{array}{c} \phi_{a^{-1}} \xrightarrow{\quad} \\ \phi_a \xrightarrow{\quad} \end{array} \Rightarrow \\
\Rightarrow \phi_a \rightarrow \Delta \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} m \rightarrow &\equiv \begin{array}{c} \phi_{a^{-1}} \xrightarrow{\quad} \\ \phi_a \xrightarrow{\quad} \end{array} m \rightarrow \equiv \eta \rightarrow \equiv \phi_a \rightarrow \epsilon \quad \eta \rightarrow \\
\rightarrow \Delta \begin{array}{c} \xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} m \rightarrow &\equiv \rightarrow \epsilon \quad \eta \rightarrow
\end{aligned}$$

Figura 4.14.: a álgebra de grupo satisfaz o axioma da antípoda.

segue da própria definição (4.21) que a antípoda satisfaz a propriedade $S^2 \equiv 1$. Finalmente concluímos que $\mathbb{C}G$ é uma álgebra de Hopf involutiva, conforme queríamos mostrar.

4.4.2. Álgebra do duplo quântico $D(G)$

A álgebra que apresentaremos agora é a álgebra do duplo quântico $D(G)$. Esta álgebra é construída a partir da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ e representa uma extensão desta álgebra. Sendo assim, indiretamente, a álgebra do duplo quântico é definida a partir de um grupo finito.

Considere então G um grupo finito e $D(G)$ um espaço vetorial cuja base é $\{\hat{\varphi}_{g,h} : g, h \in G\}$, indexada pelos elementos de G . Note que:

$$\dim(D(G)) = |G|^2 .$$

O mapa linear $m : D(G) \otimes D(G) \rightarrow D(G)$, definido por:

$$m(\hat{\varphi}_{g_1,h_1} \otimes \hat{\varphi}_{g_2,h_2}) := \hat{\varphi}_{g_1,h_1} \hat{\varphi}_{g_2,h_2} = \delta(h_2, g_2^{-1} h_1 g_2) \hat{\varphi}_{g_1 g_2, h_2} , \quad (4.22)$$

define a estrutura de álgebra em $D(G)$.

Os elementos, $\hat{\varphi}_{g,h}$, da base de $D(G)$, podem também ser escritos como:

$$\hat{\varphi}_{g,h} = \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h , \quad \text{com} \quad \hat{\phi}_g = \sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \quad \text{e} \quad \hat{\psi}^h = \hat{\varphi}_{e,h} . \quad (4.23)$$

Isso pode ser visto bastando fazer o seguinte cálculo:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h &= \left(\sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \right) (\hat{\varphi}_{e,h}) = \sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \hat{\varphi}_{e,h} \\ &= \sum_{x \in G} \delta(h, x) \hat{\varphi}_{g,x} = \hat{\varphi}_{g,h} . \end{aligned}$$

A motivação para considerar $\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h$ ao invés de $\hat{\varphi}_{g,h}$, é que as manipulações algébricas ficam mais simples, pois $\hat{\phi}_g$ e $\hat{\psi}^h$ obedecem a álgebra e coálgebra da álgebra de grupo, $\mathbb{C}G$, conforme veremos a seguir.

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_g \hat{\phi}_h &= \left(\sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \right) \left(\sum_{y \in G} \hat{\varphi}_{h,y} \right) = \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \hat{\varphi}_{h,y} \\ &= \sum_{x \in G} \sum_{y \in G} \delta(hy h^{-1}, x) \hat{\varphi}_{gh,y} = \sum_{y \in G} \hat{\varphi}_{gh,y} = \hat{\phi}_{gh} , \\ \hat{\psi}^g \hat{\psi}^h &= \hat{\varphi}_{e,g} \hat{\varphi}_{e,h} = \delta(h, g) \hat{\varphi}_{e,g} = \delta(g, h) \hat{\psi}^g . \end{aligned}$$

Por último, precisamos notar que:

$$\hat{\varphi}_{g,x} \hat{\varphi}_{e,h} = \delta(h, x) \hat{\varphi}_{g,h} = \delta(h, x) \hat{\varphi}_{g,x} = \delta(g^{-1} g h g^{-1} g, x) \hat{\varphi}_{g,x} = \hat{\varphi}_{e,ghg^{-1}} \hat{\varphi}_{g,x} ,$$

e então podemos escrever:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h &= \left(\sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \right) \hat{\varphi}_{e,h} = \sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \hat{\varphi}_{e,h} = \sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{e,ghg^{-1}} \hat{\varphi}_{g,x} = \\ &= \hat{\varphi}_{e,ghg^{-1}} \sum_{x \in G} \hat{\varphi}_{g,x} \\ \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h &= \hat{\psi}^{ghg^{-1}} \hat{\phi}_g . \end{aligned}$$

Resumindo, os elementos $\hat{\phi}_g$ e $\hat{\psi}^h$, definidos acima, relacionam-se por:

$$\hat{\phi}_g \hat{\phi}_h = \hat{\phi}_{gh} , \quad (4.24a)$$

$$\hat{\psi}^g \hat{\psi}^h = \delta(g, h) \hat{\psi}^g , \quad (4.24b)$$

$$\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h = \hat{\psi}^{ghg^{-1}} \hat{\phi}_g . \quad (4.24c)$$

Com isso, alternativamente, podemos fixar $\{\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h : g, h \in G\}$ como base de $D(G)$, e o produto é definido pelas equações acima. Essa maneira de escrever os elementos da base de $D(G)$ é mais conveniente pois facilita várias manipulações algébricas. Note que os elementos $\hat{\phi}_g$ satisfazem a álgebra de grupo $\mathbb{C}G$, dessa forma podemos dizer que $\mathbb{C}G$ é uma subálgebra de $D(G)$. Da mesma forma os elementos $\hat{\psi}^h$ satisfazem a álgebra de grupo dual $\mathbb{C}G^*$, e portanto $\mathbb{C}G^*$ é também uma subálgebra de $D(G)$. Nessa nova base é fácil ver que a álgebra do duplo quântico representa uma extensão da álgebra de grupo, onde a estrutura de álgebra e coálgebra de $\mathbb{C}G$ passam a ser uma única estrutura de álgebra em $D(G)$. Além disso, para que isso seja possível, é necessário que exista também uma estrutura de álgebra entre os elementos $\hat{\phi}_g$ e $\hat{\psi}^h$, como é o caso da equação (4.24c). A construção do duplo quântico é na verdade uma construção mais geral, que não precisa necessariamente vir de uma álgebra de grupo, mas sim de qualquer álgebra de Hopf $\mathcal{A}$.

A multiplicação m definida em $D(G)$ é associativa, e isso pode ser facilmente verificada, uma vez que essa é proveniente da multiplicação da álgebra de grupo e da álgebra de grupo dual, as quais são associativas. A unidade na álgebra do duplo quântico é dada pelo mapa $\eta : \mathbb{C} \rightarrow D(G)$, com

$$\eta(1) := \eta = \hat{\phi}_e \sum_{x \in G} \hat{\psi}^x . \quad (4.25)$$

Podemos verificar que η é de fato a unidade da álgebra para um elemento genérico da base $(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h)$, como feito abaixo.

$$\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h \eta = \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h \left(\hat{\phi}_e \sum_{x \in G} \hat{\psi}^x \right) = \hat{\phi}_g \hat{\phi}_e \sum_{h \in G} \hat{\psi}^h \hat{\psi}^x = \hat{\phi}_g \sum_{x \in G} \delta(x, h) \hat{\psi}^x = \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h .$$

A prova de que $\eta \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h = \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h$ é análoga.

Existe também uma estrutura de coálgebra definida em $D(G)$. O mapa linear $\Delta : D(G) \rightarrow D(G) \otimes D(G)$, definido por:

$$\Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) := \sum_{x \in G} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^x \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hx^{-1}} , \quad (4.26)$$

define a estrutura de coálgebra em $D(G)$. O mapa Δ é coassociativo, pois satisfaz o axioma

na equação (4.11a), como pode ser visto a seguir para um elemento genérico da base $(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h)$.

$$\begin{aligned}
(1 \otimes \Delta) \circ \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) &= (1 \otimes \Delta) \sum_{y \in G} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^y \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hy^{-1}} \\
&= \sum_{y \in G} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^y \otimes \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hy^{-1}}) = \sum_{y, u \in G} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^y \otimes (\hat{\phi}_g \hat{\psi}^u \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hy^{-1}u^{-1}}) . \\
(\Delta \otimes 1) \circ \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) &= (\Delta \otimes 1) \sum_{x \in G} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^x \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hx^{-1}} \\
&= \sum_{x \in G} \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^x) \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hx^{-1}} = \sum_{x, y \in G} \left((\hat{\phi}_g \hat{\psi}^y \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{xy^{-1}}) \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hx^{-1}} \right) .
\end{aligned}$$

Na última linha das equações acima, podemos trocar a soma em x por uma soma em u , sendo $x = uy$, dessa forma obtemos:

$$(\Delta \otimes 1) \circ \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) = \sum_{u, y \in G} \left((\hat{\phi}_g \hat{\psi}^y \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^u) \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hy^{-1}u^{-1}} \right) ,$$

ou seja,

$$(\Delta \otimes 1) \circ \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) = (1 \otimes \Delta) \circ \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) , \quad \forall g, h \in G .$$

O que garante a coassociatividade de Δ . A counidade de $D(G)$ é dada pelo mapa linear $\epsilon : D(G) \rightarrow \mathbb{C}$, sendo

$$\epsilon(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) := \delta(e, h) , \quad \forall g, h \in G . \quad (4.27)$$

Podemos facilmente verificar que ϵ é de fato a counidade de $D(G)$, isto é, satisfaz ao axioma da equação (4.11b). Para um elemento genérico da base $(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h)$ tem-se:

$$\begin{aligned}
(\epsilon \otimes 1) \circ \Delta(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) &= (\epsilon \otimes 1) \sum_{x \in G} \hat{\phi}_g \hat{\psi}^x \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hx^{-1}} \\
&= \sum_{x \in G} \epsilon(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^x) \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hx^{-1}} = \sum_{x \in G} \delta(e, x) \otimes \hat{\phi}_g \hat{\psi}^{hx^{-1}} = \hat{\phi}_g \hat{\psi}^h .
\end{aligned}$$

Isso mostra que ϵ é a counidade à esquerda. A prova de que ϵ é também a counidade à direita segue da mesma maneira.

Existe portanto uma estrutura de álgebra $\langle D(G), m, \eta \rangle$ em $D(G)$ e também uma estrutura de coálgebra $\langle D(G), \Delta, \epsilon \rangle$ também em $D(G)$. Agora vamos mostrar que essas duas estruturas juntas definem uma biálgebra, ou seja, o quinteto $\langle D(G), m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ define uma biálgebra. Para isso é preciso mostrar que os mapas Δ e ϵ são homeomorfismos da álgebra. Começamos com o mapa ϵ . Vamos mostrar que ϵ satisfaz o axioma da equação (4.14b) para elementos genéricos $(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h)$ da base de $D(G)$.

$$\begin{aligned}
\epsilon(\hat{\phi}_{g_1} \hat{\psi}^{h_1}) \epsilon(\hat{\phi}_{g_2} \hat{\psi}^{h_2}) &= \delta(h_1, e) \delta(h_2, e) . \\
\epsilon(\hat{\phi}_{g_1} \hat{\psi}^{h_1} \hat{\phi}_{g_2} \hat{\psi}^{h_2}) &= \epsilon(\delta(h_2, g_2^{-1} h_1 g_2) \hat{\phi}_{g_1 g_2} \hat{\psi}^{h_2}) = \delta(h_2, g_2^{-1} h_1 g_2) \epsilon(\hat{\phi}_{g_1 g_2} \hat{\psi}^{h_2}) \\
&= \delta(h_2, g_2^{-1} h_1 g_2) \delta(h_2, e) = \delta(e, g_2^{-1} h_1 g_2) \delta(h_2, e) = \delta(h_1, e) \delta(h_2, e) .
\end{aligned}$$

Ou seja, $\epsilon(\hat{\phi}_{g_1} \hat{\psi}^{h_1}) \epsilon(\hat{\phi}_{g_2} \hat{\psi}^{h_2}) = \epsilon(\hat{\phi}_{g_1} \hat{\psi}^{h_1} \hat{\phi}_{g_2} \hat{\psi}^{h_2})$.

Agora precisamos mostrar que Δ satisfaz a equação (4.14a), ou seja,

$$\Delta(\hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^{h_1})\Delta(\hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^{h_2}) = \Delta(\hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^{h_1}\hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^{h_2}) .$$

Para isso considere:

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^{h_1})\Delta(\hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^{h_2}) &= \left(\sum_{x \in G} \hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^x \otimes \hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^{h_1x^{-1}} \right) \left(\sum_{y \in G} \hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^y \otimes \hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^{h_2y^{-1}} \right) \\ &= \sum_{x,y \in G} (\hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^x \hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^y) \otimes (\hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^{h_1x^{-1}} \hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^{h_2y^{-1}}) \\ &= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2) \sum_{x \in G} (\hat{\phi}_{g_1g_2}\hat{\psi}^{g_2^{-1}xg_2}) \otimes (\hat{\phi}_{g_1g_2}\hat{\psi}^{h_2g_2^{-1}x^{-1}g_2}) \\ &= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2) \sum_{x \in G} (\hat{\phi}_{g_1g_2}\hat{\psi}^{g_2^{-1}xg_2}) \otimes (\hat{\phi}_{g_1g_2}\hat{\psi}^{h_2g_2^{-1}x^{-1}g_2}) \\ &= \Delta(\hat{\phi}_{g_1}\hat{\psi}^{h_1}\hat{\phi}_{g_2}\hat{\psi}^{h_2}) . \end{aligned}$$

Finalmente definimos a estrutura de álgebra de Hopf em $D(G)$, definindo $S : D(G) \rightarrow D(G)$ como sendo a antípoda da álgebra de Hopf, dada, para todo $g, h \in G$, por:

$$S(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h) = \hat{\phi}_{g^{-1}}\hat{\psi}^{gh^{-1}g^{-1}} = \hat{\psi}^h\hat{\phi}_{g^{-1}} . \quad (4.28)$$

O mapa linear S , definido na equação (4.28), satisfaz o axioma da antípoda (equação (4.17)). Para isso basta mostrar que $m \circ (S \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h) = \epsilon(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h)\eta$ para todo $g, h \in G$.

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h) &= \sum_{x \in G} \hat{\phi}_g\hat{\psi}^x \otimes \hat{\phi}_g\hat{\psi}^{hx^{-1}} . \\ (S \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h) &= \sum_{x \in G} S(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^x) \otimes \hat{\phi}_g\hat{\psi}^{hx^{-1}} = \sum_{x \in G} \hat{\phi}_{g^{-1}}\hat{\psi}^{gx^{-1}g^{-1}} \otimes \hat{\phi}_g\hat{\psi}^{hx^{-1}} . \\ m \circ (S \otimes \mathbb{1}) \circ \Delta(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h) &= \sum_{x \in G} (\hat{\phi}_{g^{-1}}\hat{\psi}^{gx^{-1}g^{-1}})(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^{hx^{-1}}) = \sum_{x \in G} \delta(h, e)\hat{\phi}_{g^{-1}g}\hat{\psi}^{hx^{-1}} . \\ &= \sum_{x \in G} \delta(h, e)\hat{\phi}_e\hat{\psi}^{hx^{-1}} = \delta(h, e) \sum_{u \in G} \hat{\phi}_e\hat{\psi}^u = \epsilon(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h)\eta . \end{aligned}$$

Também é válido que $m \circ (\mathbb{1} \otimes S) \circ \Delta(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h) = \epsilon(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h)\eta$, e a prova é análoga à apresentada acima. Com isso o sexteto $\langle D(G), m, \eta, \Delta, \epsilon, S \rangle$, sendo $\langle D(G), m, \eta, \Delta, \epsilon \rangle$ uma biálgebra, define uma álgebra de Hopf.

A álgebra de Hopf $D(G)$, assim como a álgebra de grupo, é uma álgebra involutiva, isto é, $S^2 \equiv \mathbb{1}$. Essa prova é bem simples, basta calcular S^2 aplicado a um elemento da base $(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h)$ de $D(G)$.

$$S^2(\hat{\phi}_g\hat{\psi}^h) = S(\hat{\phi}_{g^{-1}}\hat{\psi}^{gh^{-1}g^{-1}}) = \hat{\phi}_g\hat{\psi}^{g^{-1}(gh^{-1}g^{-1})^{-1}g} = \hat{\phi}_g\hat{\psi}^h .$$

As álgebras $\mathbb{C}G$ e $D(G)$ são os nossos dois exemplos principais de álgebra de Hopf. Essas fornecem um conjunto de estruturas algébricas bastante rico, com o qual vários modelos físicos interessantes podem ser construídos. A seguir apresentaremos o modelo duplo

quântico, o qual é um exemplo bastante importante de sistema quântico que apresenta ordem topológica. Além de ser bastante rico do ponto de visto matemático, esse modelo fornece um exemplo de modelo hamiltoniano bidimensional que suporta anyons como excitação de quasi-partícula. Já a álgebra de grupo será o ponto de partida para generalizarmos o modelo duplo quântico, no capítulo 7.

5. Modelo duplo quântico

O modelo duplo quântico (DQ) de um grupo finito G é um modelo em $(2 + 1)\text{D}$ onde os graus de liberdades são estados quânticos indexados pelos elementos do grupo G . Os graus de liberdade vivem nas arestas de uma rede quadrada, $\mathcal{L}(\Sigma)$, sobre uma variedade bidimensional, compacta e orientada, Σ . A dinâmica deste modelo é regida por uma hamiltoniana bi-paramétrica, $H^{DQ}(J_f, J_c)$, e um espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, também definido sobre a rede $\mathcal{L}(\Sigma)$. Os dois parâmetros livres do modelo são os reais positivos J_f e J_c e a hamiltoniana $H^{DQ}(J_f, J_c)$ é dada pela equação (5.6). O motivo principal de estudarmos este modelo é que este apresenta propriedades bastante interessantes, tanto do ponto de vista físico quanto do ponto de vista matemático, como por exemplo nível fundamental degenerado, estados de vácuo emaranhados e excitações de quasi-partícula com estatística fracionária.

5.1. Modelo duplo quântico

O modelo do duplo quântico (DQ), assim como o toric code (TC), é definido sobre uma rede bidimensional $\mathcal{L}(\Sigma)$ sobre uma superfície bidimensional compacta Σ , porém, diferentemente do TC, a rede deve, necessariamente, ser orientada. Os graus de liberdade locais deste modelo são vetores pertencente ao espaço de Hilbert $\mathcal{H}_l$, associado à aresta l , e cujos elementos da base são indexados pelos elementos de um grupo finito G . Escrevemos:

$$\mathcal{H}_l = \{|g\rangle : g \in G\} .$$

Note que $\dim \mathcal{H}_l = |G|$, sendo $|G|$ a ordem do grupo G . O espaço de Hilbert, $\mathcal{H}$, do sistema é o produto tensorial de todos os espaços vetoriais locais $\mathcal{H}_l$, isto é,

$$\mathcal{H} = \bigotimes_l \mathcal{H}_l . \quad (5.1)$$

A base ortonormal, canonicamente associada à $\mathcal{H}$, é

$$\{|g_1, g_2, \dots, g_N\rangle := |g_1\rangle_1 \otimes |g_2\rangle_2 \otimes \dots \otimes |g_N\rangle_N : g_i \in G\} , \quad (5.2)$$

sendo N o número total de arestas da rede.

Neste modelo a rede é orientada, o que significa que as arestas e faces são orientadas. No entanto o modelo é independente de orientação se convencionarmos que uma inversão na orientação de uma determinada aresta venha sempre acompanhada de uma inversão no grau de liberdade ($g \mapsto g^{-1}$) que vive em tal aresta, conforme ilustrado na figura 5.1. Embora o modelo não dependa de orientação, alguma orientação deve ser fixada para fins de definições. Além disso estamos considerando, sem perda de generalidade, a rede quadrada. Considere então a orientação em que todas as arestas horizontais e verticais são orientadas paralelas

Figura 5.1.: inversão de orientação de aresta.

(a) convenção de orientação.

(b) representação gráfica de um estado.

Figura 5.2.: convenção de orientação da rede e de representação gráfico de um estado quântico.

aos eixos coordenados $0x$ e $0y$, respectivamente e as faces são todas orientadas no sentido horário. De agora em diante usaremos essa convenção de orientação salvo menção contrária. A figura 5.2(a) mostra tal convenção.

Por simplicidade, algumas vezes é bastante conveniente representar um determinado estado $|a_1, a_2, \dots, a_N\rangle$ graficamente, colocando-se os graus de liberdade a_i sobre as respectivas arestas onde estes encontram-se. Na figura 5.2(b) podemos ver um exemplo em que os graus de liberdade ao redor de um determinado vértice estão evidenciados.

A dinâmica do modelo DQ é descrita por uma hamiltoniana H^{QD} a qual, assim como no modelo TC, é formada por uma soma de operadores de vértice e de plaqueta, com a diferença que esses operadores agora representam generalizações dos que constituem H^{TC} . No caso do modelo TC os operadores de vértice e de plaqueta são formados por operadores auxiliares que são σ^x e σ^z . Esses operadores auxiliares tem a finalidade de permutar os estados da base ($\sigma^x|\pm 1\rangle = |\mp 1\rangle$) e de medir o autovalor de cada estado ($\sigma^z|\pm 1\rangle = \pm|\pm 1\rangle$) no caso em que os graus de liberdade são elementos do grupo $\mathbb{Z}_2$. Porém se o grupo envolvido não é $\mathbb{Z}_2$ e sim algum outro grupo arbitrário G , os operadores auxiliares que desempenham os papeis de σ^x e σ^z são: L_l^g , R_l^g e T_l^g , com $g \in G$. Esses são operadores linear $\mathcal{H}_l \rightarrow \mathcal{H}_l$ definidos por:

$$L_l^g|h\rangle_l = |gh\rangle_l, \quad (5.3a)$$

$$R_l^g|h\rangle_l = |hg\rangle_l, \quad (5.3b)$$

$$T_l^g|h\rangle_l = \delta(g, h)|h\rangle_l. \quad (5.3c)$$

Resumindo, os operadores L^g e R^g são operadores que permutam os estados multiplicando

seus rótulos por $g \in G$ pela esquerda e pela direita, respectivamente, enquanto que T^g é um operador diagonal que mede o autovalor desses operadores. Esses operadores não comutam entre si em geral, e obedecem a álgebra do duplo quântico $D(G)$ (ver apêndice D), definida na seção 4.4.2. Na sequência vamos definir os operadores de vértice e de plaqueta a partir dos operadores auxiliares definidos acima.

Consideremos primeiramente o operador de vértice $\mathbf{a}_v^g$, parametrizado por $g \in G$. Este operador age de forma não trivial somente nos estados que estão nas arestas ao redor do vértice v e é definido por:

$$\mathbf{a}_v^g = L_1^g \otimes L_2^g \otimes R_3^{g^{-1}} \otimes R_4^{g^{-1}}, \quad (5.4)$$

sendo a definição acima com referência à orientação mostrada na figura 5.3. Note que $\mathbf{a}_v^g$ age multiplicando os estados que estão ao redor do vértice v pela esquerda por g ou pela direita por g^{-1} , dependendo da orientação das arestas. A ação deste operador sobre os elementos da base de $\mathcal{H}$ é representada na figura 5.3. Note que o operador de vértice $\mathbf{a}_v^g$ age como uma

Figura 5.3.: ação do operador de vértice $\mathbf{a}_v^g$, sendo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G$.

transformação de gauge local no vértice nos estados que estão ao redor do vértice v . O operador de plaqueta, $\mathbf{b}_{(v,p)}^g$, também parametrizado por um elemento $g \in G$, em função dos operadores auxiliares, é definido por:

$$\mathbf{b}_s^g = \sum_{\{b_i\}_{i=1}^4} \delta(b_1 b_2 b_3^{-1} b_4^{-1}, g) T_1^{b_1} \otimes T_2^{b_2} \otimes T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4}, \quad (5.5)$$

sendo a definição referente à orientação mostrada na figura 5.4. Um detalhe importante é que o operador de plaqueta é definido para um par (v, p) e não somente uma plaqueta. A razão para isso fica mais evidente na figura 5.4, mas o ponto é que, na definição acima, a holonomia da plaqueta deve ser contada a partir de algum dos vértices adjacentes à plaqueta p . Um pouco mais adiantes veremos que em alguns casos podemos escrever simplesmente $\mathbf{b}_p^g$ ao invés de $\mathbf{b}_{(v,p)}^g$. A ação de $\mathbf{b}_{(v,p)}^g$ sobre um elemento da base de $\mathcal{H}$ é representada na figura 5.4, nesta base $\mathbf{b}_s^g$ é um operador diagonal.

Resumindo, o operador de vértice, $\mathbf{a}_v^g$, age como uma transformação de gauge local no vértice v , enquanto que o operador de plaqueta, $\mathbf{b}_s^g$, mede a holonomia ao redor da plaqueta p , contada a partir do vértice v . A hamiltoniana do modelo DQ é finalmente definida por:

$$H^{DQ} = -J_f \sum_p B_p - J_c \sum_v A_v, \quad (5.6)$$

$$B_{(v,p)}^g \left| \begin{array}{c} \text{plaquette with edges } a_1, a_2, a_3, a_4 \end{array} \right\rangle = \delta(a_1 a_2 a_3^{-1} a_4^{-1}, g) \left| \begin{array}{c} \text{plaquette with edges } a_1, a_2, a_3, a_4 \end{array} \right\rangle$$

Figura 5.4.: ação do operador de plaqueta $\mathbf{b}_{(v,p)}^g$, sendo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in G$.

sendo

$$B_p := \mathbf{b}_{(v,p)}^e, \quad (5.7a)$$

$$A_v := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathbf{a}_v^g, \quad (5.7b)$$

em que e é a unidade do grupo. Na equação acima, J_f e J_c são números reais positivos. Observe que e comuta com todos os elementos do grupo e, portanto, o operador $\mathbf{b}_{(v,p)}^e = B_p$ não depende do vértice que marca o início da contagem da holonomia.

Os estados de vácuo do modelo DQ, bem como seus estados excitados e quasi-partículas, estão diretamente relacionados com a álgebra dos operadores definidos nas figuras 5.3 e 5.4, a saber a álgebra do duplo quântico $D(G)$, definida da seção 4.4.2. No caso em que G é um grupo abeliano essa álgebra é comutativa e relativamente simples, o que facilita o estudo desses modelos. Porém no caso de G não ser um grupo abeliano a álgebra do duplo quântico e a teoria de representação da mesma fica um pouco mais complicada. Neste ponto, conhecer a álgebra a qual os operadores de vértice e plaqueta obedecem é essencial e, para não tornar a leitura deste capítulo muito carregada e cansativa, a álgebra dos operadores encontra-se definida no apêndice D. Sendo assim, o leitor mais interessado na dinâmica do modelo DQ não precisa se preocupar muito com os detalhes desta álgebra e pode usar o apêndice D para consulta. Já o leitor interessado em mergulhar nos detalhes da álgebra do duplo quântico $D(G)$, recomendo fortemente a leitura deste apêndice.

5.1.1. Nível e estado fundamental de H^{DQ}

Uma das propriedades mais importantes dos operadores que constituem a hamiltoniana H^{DQ} é o fato desses serem projetores e comutarem uns com os outros, ou seja,

$$(A_v)^2 = A_v, \quad (5.8a)$$

$$(B_p)^2 = B_p, \quad (5.8b)$$

$$[A_v, B_p] = 0, \quad \forall v, p. \quad (5.8c)$$

Isso significa que existe uma base de auto-estados simultâneo de A_v e B_p , chamemos um vetor desta base de $|\chi\rangle$, o qual será também um auto-estado de H^{DQ} com:

$$H^{DQ}|\chi\rangle = E(n, m)|\chi\rangle, \quad \text{com } E(n, m) = -J_f(N_p - n) - J_c(N_v - m),$$

em que n é o número de operadores de plaqueta com autovalor zero e m o número de operadores de vértice com autovalor zero, Com isso fica claro que o menor autovalor da hamiltoniana é alcançado quando $n = m = 0$, ou seja, quando os autovalores de todos os operadores de vértice e de plaqueta são iguais a um. A energia do vácuo é então:

$$E_0 = E(0, 0) = -(J_f N_p + J_c N_v) .$$

Daí podemos concluir que o subespaço de vácuo, $\mathcal{H}_0$, é definido por:

$$\mathcal{H}_0 = \{|\varphi^0\rangle \in \mathcal{H} : A_v|\varphi^0\rangle = B_p|\varphi^0\rangle = |\varphi^0\rangle , \quad \forall v, p\} . \quad (5.9)$$

Visto que os operadores de vértice e plaqueta são todos projetores, uma maneira de construir um autoestado de vácuo é aplicando o produto de todos esses projetores em algum estado de $\mathcal{H}$. Em outras palavras, o estado

$$|\Psi^0\rangle = \prod_p B_p \prod_v A_v |s\rangle , \quad (5.10)$$

é um autoestado de vácuo da hamiltoniana para qualquer vetor $|s\rangle$ da base de $\mathcal{H}$ (desde que $|\Psi^0\rangle \neq 0$). Para verificar essa afirmação basta notar, usando as equações (5.8a) e (5.8b), que:

$$\begin{aligned} B_{p'} \prod_p B_p &= B_{p'} B_{p'} \prod_{p \neq p'} B_p = B_{p'} \prod_{p \neq p'} B_p = \prod_p B_p , \\ A_{v'} \prod_v A_v &= A_{v'} A_{v'} \prod_{v \neq v'} A_v = A_{v'} \prod_{v \neq v'} A_v = \prod_v A_v . \end{aligned}$$

Isso é suficiente para mostrar que $B_{p'}|\Psi^0\rangle = A_{v'}|\Psi^0\rangle = |\Psi^0\rangle$ para todo vértice v' e plaqueta p' .

Assim como no toric code o nível fundamental deste modelo é também degenerado, o que garante a existência de ordem topológica neste modelo. A maneira de se obter os outros estados de vácuo, e também a degenerescência do nível fundamental, é aplicando operadores de string para o caso em que G é abeliano. Para grupos não abelianos, entretanto, essa tarefa fica um pouco mais complicada, pois os operadores que desempenham essa função não são operadores de string, e sim operadores de *ribbon*. Os operadores de ribbon agem ao longo de uma faixa ao longo da rede, formada por dois caminhos paralelos: um na rede direta e outro na rede dual. Mais adiante estudaremos a ação desses operadores para o exemplo específico onde $G = S_3$, o grupo de permutação de três elementos. Por hora utilizaremos o estado de vácuo $|\Psi^0\rangle$ definido acima para estudar e classificar as quasi-partícula que aparecem neste modelo. A seguir veremos como classificar essas excitações usando a álgebra gerada pelos operadores $\{\mathbf{a}_v^g, \mathbf{b}_p^h\}$, mais precisamente, usando as representações irredutíveis da álgebra do duplo quântico.

5.1.2. Estados excitados e quasi-partículas

O enfoque que daremos nesta seção, para analisar e classificar as quasi-partículas do DQ, é diferente da apresentada na seção sobre o TC. Aqui iremos usar artifícios puramente

algébricos, bem como a álgebra dos operadores de vértice e plaqueta e suas representações. Vamos olhar para os primeiros estados excitados deste modelo, mais precisamente, estados excitados para os quais apenas um de quasi-partículas é criado. Em outras palavras vamos olhar para as excitações de vértice, de plaqueta e site que podem aparecer aqui. Vamos analisar cada um desses casos separadamente a seguir.

Se $|\Psi^0\rangle$ é um estado de vácuo da hamiltoniana, então $B_p|\Psi^0\rangle = A_v|\Psi^0\rangle = |\Psi^0\rangle$ para todos os vértices e plaquetas da rede. No entanto, se alguma dessas condições é “violada”, isto é, se para alguma plaqueta $B_{p'}|\Psi^f\rangle = 0$, então esse estado não é um estado fundamental. Dizemos nesse caso que $|\Psi^f\rangle$ é um estado excitado de H^{DQ} com uma quasi-partícula de fluxo localizada na plaqueta p' . O mesmo vale para quasi-partículas de carga, se para algum vértice $A_{v'}|\Psi^c\rangle = 0$, dizemos que $|\Psi^c\rangle$ é um estado excitado de H^{DQ} com uma quasi-partícula de carga localizada no vértice v' . Esses estados excitados podem ser construídos de maneira similar ao estado de vácuo (5.10).

Excitações de plaqueta e quasi-partículas de fluxo

O estado $|\Psi^0\rangle$, definido na equação (5.10), é um estado de vácuo, pois o operador

$$U_0 = \prod_p B_p \prod_v A_v \quad (5.11)$$

projeta um estado qualquer da base de $\mathcal{H}$ no subespaço $\mathcal{H}_0$. Como seria então um estado excitado com um par de quasi-partículas de fluxo, localizadas nas plaquetas p_1 e p_2 ? Vimos que um estado $|\Psi^f\rangle$, com uma quasi-partícula de fluxo na plaqueta p_i , possui a propriedade $B_{p_i}|\Psi^f\rangle = 0$. Um estado com tais propriedade é:

$$|\Psi^f\rangle = B_{p_1}^\perp B_{p_2}^\perp \prod_{p \neq p_1, p_2} B_p \prod_v A_v |s\rangle ,$$

em que $B_{p_i}^\perp$ é um projetor ortogonal a B_{p_i} , isto é,

$$(B_{p_i}^\perp)^2 = B_{p_i}^\perp \quad \text{e} \quad B_{p_i}^\perp B_{p_i} = B_{p_i} B_{p_i}^\perp = 0 .$$

Sendo assim, uma maneira de encontrar todas as possíveis excitações de fluxo é encontrando um conjunto completo de projetores ortogonais de operadores de plaquetas. Além disso, se queremos usar esses operadores para classificar as excitações de fluxo esses devem comutar com a hamiltoniana H^{DQ} . Em outras palavras, estamos procurando um conjunto $\{\mathbf{B}_p^R : R \in I\}$, sendo I algum conjunto de índices, com as seguintes propriedades:

$$\sum_R \mathbf{B}_p^R = \mathbb{1} , \quad (5.12a)$$

$$\mathbf{B}_p^R \mathbf{B}_p^{R'} = \delta(R, R') \mathbf{B}_p^R , \quad (5.12b)$$

$$[H^{DQ}, \mathbf{B}_p^R] = 0 . \quad (5.12c)$$

Da equação (5.12a) tiramos que, para algum $R' \in I$, têm-se que:

$$\mathbf{B}_{p_i}^{R'} |\Psi^f\rangle = |\Psi^f\rangle ,$$

e da equação (5.12b) tiramos que, se a equação acima é satisfeita para R' , então:

$$\mathbf{B}_{p_i}^{R''} |\Psi^f\rangle = 0, \text{ se } R' \neq R''.$$

Nesse caso dizemos que existe uma quasi-partícula de fluxo $m_{R'}$ localizada na plaqueta p_i . Esse resultado mostra que o conjunto de índices que parametriza os projetores ortogonais de plaqueta parametrizam também as quasi-partículas de fluxo. Resta agora saber o que é este conjunto de índices.

Da equação (D.18), no apêndice D, sabe-se que este conjunto completo de projetores ortogonais de plaqueta é parametrizado pelas classes de conjugação do grupo G , ou seja, considere $\{C_R : R = 0, 1, \dots, l-1\}$ o conjunto de todas as classes de conjugação¹ de G e considere $g_R \in G$ um representante da classe de conjugação C_R , sendo $C_0 = \{e\}$ a classe de conjugação da unidade do grupo e l o número total de classes de conjugação distintas. Esses projetores ortogonais são definidos por:

$$\mathbf{B}_p^R = \sum_{g \in C_R} \mathbf{b}_s^g. \quad (5.13)$$

Note que

$$\mathbf{B}_p^0 = \sum_{g \in \{e\}} \mathbf{b}_s^g = \mathbf{b}_p^e = B_p,$$

em que e é a unidade do grupo. Isso significa que a quasi-partícula correspondente ao vácuo, localizada na plaqueta p , é uma “excitação” de fluxo parametrizada pela classe de conjugação da unidade do grupo. Resumindo,

$$\mathbf{B}_p^{R'} |\psi^f\rangle = |\psi^f\rangle \Rightarrow \text{quasi-partícula de fluxo } m_{R'}.$$

Com isso mostramos que as excitações de fluxo são parametrizadas pelas classes de conjugação do grupo G , sendo a quasi-partícula associada ao vácuo parametrizada pela classe de conjugação da identidade do grupo, $1 := m_0$.

Excitações de vértices e quasi-partículas de carga

Analogamente, as excitações de carga são também classificadas por um conjunto completo de projetores ortogonais de operadores de vértice. Ou seja, por um conjunto de projetores $\{\mathbf{A}_v^\rho : \rho \in J\}$, J sendo algum conjunto de índices, satisfazendo:

$$\sum_{\rho} \mathbf{A}_v^\rho = \mathbb{1}, \quad (5.14a)$$

$$\mathbf{A}_v^\rho \mathbf{A}_v^{\rho'} = \delta(\rho, \rho') \mathbf{A}_v^\rho, \quad (5.14b)$$

$$[H^{DQ}, \mathbf{A}_v^\rho] = 0. \quad (5.14c)$$

Da equação (5.14a) tiramos que para qualquer estado, $|\Psi^c\rangle$, sempre existe $\rho' \in J$ tal que

$$\mathbf{A}_{v_i}^{\rho'} |\Psi^c\rangle = |\Psi^c\rangle,$$

¹ $C_R := \{ug_Ru^{-1} : u \in G\}.$

e da equação (5.14b) tiramos que, se a equação acima é satisfeita, então

$$\mathbf{A}_{v_i}^{\rho''} |\Psi^c\rangle = 0, \text{ se } \rho' \neq \rho''.$$

Nesse caso dizemos que existe uma quasi-partícula de carga, $e_{\rho'}$, localizada no vértice v_i . Assim como no caso anterior, para encontrar esse conjunto de índices precisamos olhar para a álgebra dos operadores de vértice.

Da equação (D.17), no apêndice D, sabe-se que esse conjunto de projetores de vértice é parametrizado pelas representações irredutíveis de G . Considere então

$$\{\pi_\rho : \rho = 0, 1, \dots, l-1\}$$

o conjunto das representações irredutíveis de G , parametrizadas por $\rho \in \{0, 1, \dots, l-1\}$, com $\rho = 0$ para a representação trivial $\pi_0(g) = 1$ ($\forall g$) e l o número total de representações irredutíveis. Os projetores de vértice são dados então por:

$$\mathbf{A}_v^\rho = \frac{d_\rho}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g^{-1}) \mathbf{a}_v^g,$$

sendo d_ρ a dimensão da representação π_ρ e $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\pi_\rho(g))$ o caracter desta representação (ver definição B.7 no apêndice B). É um resultado conhecido de teoria de grupos que o número de representações irredutíveis de um grupo finito é igual ao número de classes de conjugação distintas do mesmo, sendo assim, existem tantos projetores ortogonais de vértice quanto de plaqueta. Note que

$$\mathbf{A}_v^0 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathbf{a}_v^g = A_v,$$

ou seja, a quasi-partícula do vácuo, localizada no vértice v , é uma “excitação” de carga parametrizada pela representação trivial do grupo G . Resumindo,

$$\mathbf{A}_v^{\rho'} |\psi^c\rangle = |\psi^c\rangle \Rightarrow \text{quasi-partícula de carga } e_{\rho'}.$$

Com isso mostramos que as excitações de carga são parametrizadas pelas representações irredutíveis ρ do grupo G , sendo a quasi-partícula associada ao vácuo parametrizado pela representação trivial do grupo, $1 := e_0$.

Excitações de site e quasi-partículas de dyon

Finalmente olhemos para as quasi-partículas de site. A idéia é a mesma da dos casos anteriores, porém com algumas complicações de ordem algébrica a mais. Um estado excitado $|\Psi^d\rangle$ com uma quasi-partícula de dyon, localizada no site $s_i = (v_i, p_i)$, é tal que $A_{v_i} B_{p_i} |\Psi^d\rangle = 0$, ou simplesmente, $O_{s_i} |\Psi^d\rangle = 0$, sendo $O_{s_i} = A_{v_i} B_{p_i}$. Sendo assim, precisamos encontrar um conjunto completo de projetores ortogonais de site $\{\mathbf{O}_s^\mu : \mu \in K\}$, sendo K algum conjunto de índices, tais que

$$\sum_{\mu} \mathbf{O}_s^\mu = \mathbb{1}, \quad (5.15a)$$

$$\mathbf{O}_s^\mu \mathbf{O}_s^{\mu'} = \delta(\mu, \mu') \mathbf{O}_s^\mu, \quad (5.15b)$$

$$[H^{DQ}, \mathbf{O}_s^\mu] = 0. \quad (5.15c)$$

A equação (5.15a) tiramos que para um determinado estado, $|\psi^d\rangle$, sempre existirá algum μ' tal que

$$\mathbf{O}_s^{\mu'} |\Psi^d\rangle = |\Psi^d\rangle ,$$

e da equação (5.15b) tiramos que, se a equação acima é satisfeita, então

$$\mathbf{O}_s^{\mu''} |\Psi^d\rangle = 0 .$$

Dizemos neste caso que existe uma quasi-partícula de dyon $\epsilon_{\mu'}$ localizada no site s . Se queremos classificar essas quasi-partículas de dyon, precisamos olhar para a álgebra desses operadores, a qual é isomorfa a álgebra do duplo quântico (ver apêndice D). Da equação (D.19) sabe-se que o conjunto de índices que parametriza os projetores de sites é o mesmo que parametriza as representações irredutíveis da álgebra do duplo quântico. Esta por sua vez é parametrizada por uma par $\mu = (R, \alpha)$, em que $R \in I$ é parametriza as classes de conjugação do grupo G , ou seja, C_R , com representante $g_R \in G$, e α parametriza as representações irredutíveis do grupo de estabilidade $E_R = E(g_R)$, definido por:

$$E_R = E(g_R) = \{g \in G : gg_R = g_Rg\} .$$

Os respectivos projetores ortogonais de site são:

$$\mathbf{O}_s^\mu = \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{a \in G} \sum_{b \in E(u)} \chi_\alpha(a^{-1}) O_s^{u,b} ,$$

sendo $\mu = (R, \alpha)$, $n_\mu = |C_R|d_\alpha$ e d_α a dimensão da representação π_α .

Resumindo,

$$\mathbf{O}_s^\mu |\psi^d\rangle = |\psi^d\rangle \Rightarrow \text{quasi-partícula de dyon } \epsilon_\mu .$$

As quasi-partículas de dyon reduzem-se às quasi-partículas de carga e fluxo como casos particulares, conforme veremos na próxima seção.

5.1.3. Algumas propriedades das excitações de baixa energia

Notemos primeiramente que as quasi-partículas de dyon é o tipo mais geral de quasi-partículas de baixa energia que se pode ter. As quasi-partículas de fluxo, mostradas na seção 5.1.2, e as de carga, mostradas na seção 5.1.2, são casos especiais das quasi-partículas de dyon. Para ver isso considere $C_0 = \{e\}$, a classe de conjugação formada somente pela identidade do grupo, ou seja, considere $R = 0$. O grupo de estabilidade $E_0 = E(e)$ é o próprio grupo G (pois todos os elementos de G comutam com e). Assim as representações irredutíveis de E_0 são as representações irredutíveis, π_ρ , de G . As quasi-partículas de dyon parametrizadas pela classe de conjugação da identidade são, a final, parametrizadas pelas representações irredutíveis de G , ou seja, são as quasi-partículas de carga e escrevemos:

$$\epsilon_{0,R} = e_R .$$

Por outro lado, se considerarmos R como sendo uma classe de conjugação qualquer, mas tomarmos a representação do grupo de estabilidade, E_R , como sendo a representação trivial,

$\alpha = 0$, as quasi-partículas representadas por esse caso particular serão as quasi-partículas de fluxo e escrevemos:

$$\epsilon_{R,0} = m_R .$$

O fato de as excitações de dyon englobarem as excitações de carga e fluxo como casos particulares não garante que essas sejam todas as excitações que se pode obter deste modelo. No entanto, esse o conjunto de projetores $\{\mathbf{O}_s^\mu\}$, além de completo, é também irredutível, isto é, cada um dos projetores, $\mathbf{O}_s^\mu$, não pode ser escrito como a soma de outros dois projetores e isso sim, garante a não existência de nenhum outro tipo de excitações de dyon (além de combinações lineares de excitações). Isso acontece porque esses projetores são parametrizados pelas representações irredutíveis da álgebra $D(G)$, e essas, por sua vez, são parametrizadas pelo par (R, α) . A prova de irreducibilidade desses projetores e da parametrização das representações irredutíveis de $D(G)$ encontram-se na seção C.2.1 do apêndice C.

Anyons abelianos

Vamos analisar as excitações de dyon para o caso particular em que G é um grupo abeliano. Primeiramente devemos notar que a classe de conjugação de um elemento $g \in G$ possui um único elemento que é o próprio g , isto é, $C_R = \{g_R\}$. Isso também garante que existe tantas classes de conjugação quanto elementos em G . Além disso, para uma dada classe C_R , o grupo de estabilidade E_R é o próprio grupo G , uma vez que G é abeliano todos os elementos comutam com g_R , assim escrevemos $E_R = G$, $(\forall R)$. É um resultado bastante conhecido em teoria de representação de grupos que o número de representações irredutíveis de G é igual ao número de classes de conjugação distintas do mesmo, e visto que G é abeliano, existem $|G|$ classes de conjugação e $|G|$ representações irredutíveis. Isso significa que, tanto as quasi-partículas de carga quanto as de fluxo, podem ser parametrizadas por $p \in \{0, 1, 2, \dots, |G| - 1\}$. Sendo assim, as quasi-partículas de carga e de fluxo são: $\{e_p, m_q : p, q = 0, 1, \dots, |G| - 1\}$. Já as quasi-partículas de dyon, no caso abeliano, são claramente compostas por quasi-partículas de carga e de fluxo e escrevemos:

$$\epsilon_{p,q} = e_p \times m_q ,$$

também com $p, q \in \{0, 1, 2, \dots, |G| - 1\}$. Se convencionarmos $p = 0$ para a classe de conjugação da identidade e/ou para a representação trivial, as quasi-partícula de dyon reduzem-se à excitações de carga e fluxo como casos particulares.

$$\epsilon_{p,0} = e_p \text{ e } \epsilon_{0,q} = m_q .$$

Isso significa que a regra de fusão dessas quasi-partículas são bastante simples, e todas as excitações são abelianas. Note também que existem $|G|^2$ excitações de quasi-partícula distintas. Já no caso em que G é não-abeliano, existem excitações de dyon $\epsilon_{(R,\alpha)}$ que não resultam da fusão de uma partícula de carga com uma partícula de fluxo, e sim combinações destas, o que dá origem a partículas com regras de fusão não abelianas. Trataremos do caso não-abeliano como exemplo na seção 6.2 do próximo capítulo.

6. Exemplos de modelos duplo quânticos

Como exemplo de modelo duplo quântico, vamos estudar dois exemplos. O primeiro deles é o MDQ abeliano, onde o grupo G é escolhido como sendo o grupo de permutações cíclicas de n elementos $\mathbb{Z}_n$. Em seguida, estudaremos um exemplo não-abeliano, em que G é escolhido como sendo o grupo de permutações de três elementos S_3 . Ao leitor interessado em mais detalhes sobre o exemplo com $G = \mathbb{Z}_n$, sugiro a referência [38].

6.1. Modelo duplo quântico abeliano - $G = \mathbb{Z}_n$

Considere G o grupo de permutações cíclicas de n elementos. Este exemplo já foi parcialmente analisado no capítulo 3 - o modelo do toric code é um caso particular onde $n = 2$. O grupo $\mathbb{Z}_n$ é definido por $\mathbb{Z}_n = \{\omega^k : k \in I\}$, sendo $\omega = e^{i2\pi/n}$ e $I = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Nesse caso, os projetores ortogonais de vértice e de plaqueta, de acordo com as equações (D.17) e (D.17), assumem a forma¹

$$\mathbf{A}_v^p = \frac{1}{n} \sum_{g \in \mathbb{Z}_n} g^p \mathbf{a}_v^g, \quad (6.1a)$$

$$\mathbf{B}_p^q = \mathbf{b}_p^{\omega^q}, \quad (6.1b)$$

para $p, q \in I$.

Com base na equação acima e na discussão apresentada na seção 5.1.3, sabemos que as excitações de carga e de fluxo deste modelo são dadas por:

$$e_p \text{ e } m_q,$$

sendo $p, q \in I$. As excitações de dyon, por sua vez, são todas da forma

$$\epsilon_{p,q} = e_p \times m_q.$$

No entanto, queremos construir os estados quânticos que representam a existência dessas quasi-partícula a partir dos estados de vácuo deste modelo. A maneira como isso é feito é análogo ao caso do toric code, com o uso dos operadores de string X_{γ^*} e Z_{γ} .

6.1.1. Operadores de string

Assim como no modelo toric code os operadores que desempenham a tarefa de criar e mover as excitações são operadores de string, que agem nas arestas da rede ao longo de um caminho

¹Isso ocorre pois os caracteres irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ são: $\chi_p(g) = g^p$. Para mais detalhes sobre as representações irredutíveis de $\mathbb{Z}_n$ veja [44].

na rede direta ou na rede dual. O operador Z_l^p age somente na aresta l , é parametrizado por um elemento $p \in I$ e é definido por:

$$Z_l^p = \sum_{g \in G} \chi_p(g) T_l^g, \quad (6.2)$$

sendo $\chi_p(g) = g^p$ o caracter da representação π_p e T_l^g o operador auxiliar definido na equação (5.3c). A figura 6.1 ilustra a ação deste operador num estado da base. Note que Z_l^p é diagonal e a ação do mesmo para um caminho arbitrário γ é dada por:

$$Z_\gamma^p = \bigotimes_{l \in \gamma} Z_l^p. \quad (6.3)$$

Um ponto importante é que os operadores de string agora possuem orientação. Na figura 6.1 a orientação do caminho γ coincide com a orientação da aresta e o estado final ganha um fator a - caso contrário, esse fator seria a^{-1} . Por simplicidade de notação, chamaremos Z_γ^1 simplesmente por Z_γ .

Figura 6.1.: ação do operador de string Z_l^p em uma única aresta l da rede.

O outro operador de string, usado para criar e mover quasi-partículas de fluxo, é o operador $X_{\gamma^*}^q$, com $q \in I$, definido por:

$$X_l^q = L_l^{\omega^q}, \quad (6.4)$$

sendo L_l^g o operador auxiliar definido na equação (5.3a). A ação desse operador numa única aresta da rede está ilustrado na figura 6.2. A ação de $X_{\gamma^*}^q$ para um caminho arbitrário γ^* é dada por:

$$X_{\gamma^*}^q = \bigotimes_{l \in \gamma^*} X_l^q. \quad (6.5)$$

Esse operador age multiplicando os estados locais por ω^p - quando a orientação relativa entre a aresta e o caminho γ^* é conforme mostrado na figura 6.2. Caso contrário, X_l^q age multiplicando o estado por ω^{-p} . Note também que o operador de vértice $\mathbf{a}_v^{\omega^k}$ pode ser escrito como:

$$\mathbf{a}_v^{\omega^k} = X_{\gamma^*}^k, \quad (6.6)$$

para $\gamma^* = \text{star}(v)$, analogamente como mostrado na figura 3.3(b) no caso do toric code. Para simplificar a notação chamaremos $X_{\gamma^*}^1$ simplesmente por X_{γ^*} .

Figura 6.2.: ação do operador de string X_l^q em uma única aresta l da rede.

6.1.2. Álgebra dos operadores Z_γ^p e $X_{\gamma^*}^q$

As propriedades mais fundamentais desses operadores diz respeito a potências do mesmos. Segue diretamente da definição dos operadores que:

$$\begin{aligned} X_{\gamma^*}^n &:= (X_{\gamma^*})^n = \mathbb{1} , \\ Z_\gamma^n &:= (Z_\gamma)^n = \mathbb{1} . \end{aligned}$$

Isso significa que existem $n - 1$ operadores de string não-triviais de cada tipo. Além disso, também da própria definição, podemos ver que esses operadores satisfazem à seguinte álgebra:

$$Z_l X_l = \omega^s X_l Z_l , \quad (6.7)$$

sendo $s = \pm 1$ de acordo com a convenção de orientação relativa mostrada na figura 6.3. Em geral, escrevemos

$$Z_l^p X_l^q = (\omega^{pq})^s X_l^q Z_l^p . \quad (6.8)$$

Para dois caminhos arbitrário, γ e γ^* , s representa o número de cruzamentos positivos

Figura 6.3.: convenção de orientação relativa entre os caminhos.

menos o número de cruzamentos negativos. Mas, da mesma forma como acontecia com os operadores de string do toric code, o número de cruzamentos positivos e negativos são iguais no caso de os caminhos serem fechados e, portanto, vale que

$$[X_{\gamma^*}, Z_\gamma] = 0 , \text{ se } \gamma \text{ e } \gamma^* \text{ forem caminhos fechados.} \quad (6.9)$$

Além disso, é evidente que

$$[X_{\gamma_1^*}, X_{\gamma_2^*}] = [Z_{\gamma_1}, Z_{\gamma_2}] = 0 . \quad (6.10)$$

Agora precisamos entender o efeito dos operadores de string nos operadores de vértice e plaqueta. O operador X_{γ^*} comuta com todos os operadores de vértice, mas não comuta

(a) Operador de string X_{γ^*} agindo nas arestas ao longo do caminho γ^* .

(b) Operador de string Z_γ agindo nas arestas ao longo do caminho γ .

Figura 6.4.: ação dos operador de string X_{γ^*} e Z_γ .

em geral com os operadores de plaqueta. A relação de comutação entre $\mathbf{B}_p^k$ e $X_{\gamma^*}^q$ depende se a plaqueta está ou não na extremidade de γ^* e, de acordo com a figura 6.4(a), assume à seguinte forma:

$$[X_{\gamma^*}, A_v] = 0, \quad \forall v \text{ e } \forall \gamma^*, \quad (6.11a)$$

$$[X_{\gamma^*}^q, \mathbf{B}_{p_2}^k] = 0 \quad \forall \gamma^*, \quad (6.11b)$$

$$X_{\gamma^*}^q \mathbf{B}_{p_1}^k = \mathbf{B}_{p_1}^{q+k} X_{\gamma^*}^q, \quad (6.11c)$$

$$X_{\gamma^*}^q \mathbf{B}_{p_3}^k = \mathbf{B}_{p_3}^{k-q} X_{\gamma^*}^q. \quad (6.11d)$$

Já o operador de string Z_γ comuta com todos os operadores de plaqueta, mas não comuta com os operadores de vértice em geral. A relação de comutação entre $\mathbf{A}_v^q$ e Z_γ^p depende se v está ou não na extremidade de γ e, de acordo com a figura 6.4(b), assume a seguinte forma:

$$[Z_\gamma, \mathbf{B}_p^k] = 0, \quad \forall p \text{ e } \forall \gamma, \quad (6.12a)$$

$$[Z_\gamma^p, \mathbf{A}_{v_2}^q] = 0 \quad \forall \gamma,$$

$$Z_\gamma^p \mathbf{A}_{v_1}^q = \mathbf{A}_{v_1}^{q+p} Z_\gamma^p,$$

$$Z_\gamma^p \mathbf{A}_{v_3}^q = \mathbf{A}_{v_3}^{q-p} Z_\gamma^p.$$

Com esses operadores de string podemos construir todos os estados de vácuo de H^{DQ} .

Estados fundamentais

Já sabemos que $|\Psi^0\rangle$, definido em (5.10), é um estado de vácuo. Se escolhermos $|s\rangle$ como sendo o estado puro com identidade do grupo em todas as arestas, isto é, $|s\rangle = |\mathbf{1}\rangle := |1, 1, 1, \dots, 1\rangle$, este estado será autoestado de todos os operadores de plaqueta que constituem H^{DQ} , e assim $|\Psi^0\rangle$ reduz-se a

$$|\Psi^0\rangle = \prod_v A_v |\mathbf{1}\rangle.$$

Para estudar os estados de vácuo usando os operadores de string precisamos considerar somente caminhos fechados, uma vez que para caminhos abertos desses operadores criam excitações de quasi-partículas conforme estudaremos a seguir.

A primeira coisa que devemos notar é que $X_{\gamma^*}|\Psi^0\rangle$ é também um estado de vácuo, sempre que γ^* é um caminho fechado. Isso é verdade pois, uma vez que γ^* é fechado, o operador X_{γ^*} comuta com todos os operadores de vértice e de plaqueta, portanto, $X_{\gamma^*}|\Psi^0\rangle$ é também um estado de vácuo deste modelo. Resta agora saber quando é que $X_{\gamma^*}|\Psi^0\rangle \neq |\Psi^0\rangle$. As propriedades importantes que devem ser levadas em consideração para fazermos distinção entre os novos estados de vácuo gerados estão enumerados a seguir.

- i)– Se dois caminhos γ_1^* e γ_2^* são homotopicamente equivalentes, isto é, se um puder ser deformado no outro por pequenas deformações, então $X_{\gamma_1^*}|\Psi^0\rangle = X_{\gamma_2^*}|\Psi^0\rangle$.

Para isso considere a figura 6.5. Podemos ver que γ_2^* é uma pequena deformação de γ_1^* e operador de string $X_{\gamma_2^*}$, se considerarmos a equação (6.6), pode ser escrito como $X_{\gamma_2^*} = X_{\gamma_1^*} \mathbf{a}_{v'}^\omega$. Assim

Figura 6.5.: caminhos homotopicamente equivalentes.

$$\begin{aligned}
 X_{\gamma_2^*}|\Psi^0\rangle &= X_{\gamma_2^*} \prod_v A_v |1\rangle = X_{\gamma_1^*} \mathbf{a}_{v'}^\omega \prod_v A_v |1\rangle \\
 &= X_{\gamma_1^*} \mathbf{a}_{v'}^\omega A_{v'} \prod_{v \neq v'} A_v |1\rangle = X_{\gamma_1^*} A_{v'} \prod_{v \neq v'} A_v |1\rangle \\
 X_{\gamma_2^*}|\Psi^0\rangle &= X_{\gamma_1^*}|\Psi^0\rangle.
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Onde usamos que: $\mathbf{a}_v^g A_v = A_v$ (ver apêndice D).

- ii)– Se γ^* é um loop contrátil, então $X_{\gamma^*}|\Psi^0\rangle = |\Psi^0\rangle$.

Se γ^* é contrátil, então significa que este pode ser continuamente transformado em um caminho trivial, como por exemplo $\text{star}(v)$, para algum vértice v . Mas, conforme vimos no item anterior, para provar esse item é suficiente mostrar que $X_{\text{star}(v)}|\Psi^0\rangle = |\Psi^0\rangle$, o que é verdade pois $X_{\text{star}(v)} = \mathbf{a}_v^\omega$.

Com os resultados listados acima podemos concluir que existe um estado de vácuo para cada caminho não-contrátil na variedade onde o sistema físico vive. Além disso, $|\Psi^0\rangle =$

$X_{\gamma^*}|\Psi^0\rangle$ é um novo estado de vácuo e, pelo mesmo motivo, $|\Psi^{0''}\rangle = X_{\gamma^*}|\Psi^{0'}\rangle$ é outro estado de vácuo, e assim sucessivamente. Podemos então concluir que existem n estados de vácuo para cada caminho (não-contrátil) γ^* - que são os estados $X_{\gamma^*}^p|\Psi^0\rangle$, com $p \in I$. Resumindo, existem no total n^4 estados de vácuo, que são:

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ X_{\gamma_x^*}^p X_{\gamma_y^*}^q |\Psi^0\rangle : p, q \in I \right\} ,$$

sendo γ_x^*, γ_y^* os caminhos não-contrateis no toro - mostrados na figura 3.5. Já para uma superfície de gênero g , o número de caminhos não-contrateis é $2g$. Considere então $\{\gamma_1^*, \gamma_2^*, \dots, \gamma_{2g}^*\}$ o conjunto de todos os caminhos não-contrateis na superfície em questão. Nesse caso o subespaço do vácuo fica:

$$\mathcal{H}_0 = \left\{ X_{\gamma_1^*}^{p_1} X_{\gamma_2^*}^{p_2} \dots X_{\gamma_{2g}^*}^{p_{2g}} |\Psi^0\rangle : i = 1, 2, 3, \dots, 2g, \quad p_i \in I \right\} .$$

É claro da expressão acima que a degenerescência do nível fundamental é

$$\dim(\mathcal{H}_0) = |G|^{2g} , \quad (6.14)$$

com $|G| = n$. Esse resultado está de acordo com o encontrado para o toric code e também evidencia o caracter topológico desse modelo. A degenerescência do vácuo depende explicitamente de um invariante topológico que é o gênero g da superfície.

Estados excitados e quasi-partículas

Considere o estado $X_{\gamma^*}^q|\Psi^0\rangle$, sendo γ^* um caminho aberto - conforme ilustrado na figura 6.4(a). A ação do operador de plaqueta $\mathbf{B}_{p_1}^q$ e $\mathbf{B}_{p_3}^{n-q}$ em $X_{\gamma^*}^q|\Psi^0\rangle$ pode ser calculada se considerarmos $k = 0$ nas equações (6.11). Com isso, obtemos

$$\mathbf{B}_{p_1}^q (X_{\gamma^*}^q|\Psi^0\rangle) = X_{\gamma^*}^q \mathbf{B}_{p_1}^0 |\Psi^0\rangle = X_{\gamma^*}^q |\Psi^0\rangle , \quad (6.15a)$$

$$\mathbf{B}_{p_3}^{n-q} (X_{\gamma^*}^q|\Psi^0\rangle) = X_{\gamma^*}^q \mathbf{B}_{p_3}^0 |\Psi^0\rangle = X_{\gamma^*}^q |\Psi^0\rangle . \quad (6.15b)$$

Isso significa que o estado $|m_q, \bar{m}_p\rangle_{\gamma^*} = X_{\gamma^*}^q|\Psi^0\rangle$ representa um estado com um par de quasi-partículas de fluxo localizadas nas extremidades do caminho γ^* - veja a ilustração na figura 6.6(a) - sendo $\bar{m}_p = m_{n-p}$ a anti-quasi-partícula de m_p .

Analogamente, o estado $|e_p, \bar{e}_p\rangle_{\gamma} = Z_{\gamma}^p|\Psi^0\rangle$ representa um estado com um par de quasi-partículas de carga e_p e $\bar{e}_p$ criadas nas extremidades do caminho γ . A razão é a mesma que no caso anterior, fazendo $k = 0$ nas equações (6.12), podemos calcular a ação dos operadores de vértice $\mathbf{A}_{v_1}^p$ e $\mathbf{A}_{v_3}^{n-p}$ no estado $|e_p, \bar{e}_p\rangle_{\gamma}$, ou seja,

$$\mathbf{A}_{v_1}^p (Z_{\gamma}^p|\Psi^0\rangle) = Z_{\gamma}^p \mathbf{A}_{v_1}^0 |\Psi^0\rangle = Z_{\gamma}^p |\Psi^0\rangle , \quad (6.16a)$$

$$\mathbf{A}_{v_3}^{n-p} (Z_{\gamma}^p|\Psi^0\rangle) = Z_{\gamma}^p \mathbf{A}_{v_3}^0 |\Psi^0\rangle = Z_{\gamma}^p |\Psi^0\rangle . \quad (6.16b)$$

A figura 6.6(b) ilustra a ação do operador de string Z_{γ}^p na criação de uma par de quasi-partículas de carga a partir do vácuo.

No caso em que o grupo é abeliano, conforme já discutimos na seção anterior, todas as excitações de dyon são compostas por um par de quasi-partículas carga-fluxo. Por fim, um

(a) O operador de string $X_{\gamma^*}^q$ cria um par de quasi-partículas de fluxo nas extremidades de γ^* .

(b) O operador de string Z_{γ}^p cria um par de quasi-partículas de carga nas extremidades de γ .

Figura 6.6.: criação de quasi-partículas com os operadores de string.

estado excitado com um par de quasi-partículas de dyon, é criado pela aplicação simultânea dos dois operadores de string, desde que as extremidades dos dois caminhos estejam localizadas nos mesmos sites da rede. Com isso, escrevemos

$$|\epsilon_{p,q}, \bar{\epsilon}_{p,q}\rangle = X_{\gamma^*}^q Z_{\gamma}^p |\Psi^0\rangle. \quad (6.17)$$

A figura 6.7 representa um estado ocupado por um par de dyons.

Figura 6.7.: criação de uma quasi-partícula de dyon como uma fusão de uma quasi-partícula de carga com uma quasi-partícula de fluxo.

Regras de fusão das quasi-partículas

Os operadores de string fornecem também as regras de fusão das quasi-partículas. Como identidade de operadores e da própria definição de desses operadores segue que se γ_1 e γ_2 (ou γ_1^* e γ_2^*) são dois caminhos disjuntos, o operador de string da composição desses caminhos é a simples superposição do operador de string de cada caminho separadamente, isto é, de

acordo com a figura 6.8 e com as equações (6.3) e (6.5) a regra de composição fica:

$$Z_{\gamma_1 \circ \gamma_2}^p = Z_{\gamma_1}^p Z_{\gamma_2}^p, \quad (6.18a)$$

$$Z_{\gamma}^p Z_{\gamma}^q = Z_{\gamma}^{p+q}, \quad (6.18b)$$

$$X_{\gamma_1^* \circ \gamma_2^*}^q = X_{\gamma_1^*}^q X_{\gamma_2^*}^q, \quad (6.18c)$$

$$X_{\gamma^*}^p X_{\gamma^*}^q = X_{\gamma^*}^{p+q}. \quad (6.18d)$$

$$(6.18e)$$

A equação (6.18a) significa que as excitações de carga podem ser movidas simplesmente

Figura 6.8.: composição de operadores de string pela composição de caminhos.

estendendo-se os caminhos, como ilustrado na figura 6.9(a). Além disso, esse resultado afirma que e_p e $\bar{e}_p = e_{n-p}$ formam um par quasi-partícula/anti-quasi-partícula uma da outra. Já a equação (6.18b) fornece a regra de fusão de duas quasi-partículas de carga e_p e e_q . Para isso basta aplicar Z_{γ}^p e Z_{γ}^q em algum estado de vácuo. O estado excitado $Z_{\gamma}^p Z_{\gamma}^q |\Psi^0\rangle$ será um estado excitado com uma quasi-partícula de carga $e_p \times e_q$ no ponto inicial de γ , mas a equação (6.18b) garante que $Z_{\gamma}^p Z_{\gamma}^q |\Psi^0\rangle = Z_{\gamma}^{p+q} |\Psi^0\rangle$, o que resulta na seguinte regra de fusão

$$e_p \times e_q = e_{p+q}. \quad (6.19)$$

Analogamente, a equação (6.18c) garante que para mover uma quasi-partícula de fluxo de lugar basta estender a string que as criaram, conforme ilustrado na figura 6.9(b). Já a equação (6.18d) fornece a regra de fusão dos fluxos, que é

$$m_p \times m_q = m_{p+q}. \quad (6.20)$$

Uma vez que os dyon desse modelo são todos da forma

$$\epsilon_{p,q} = e_p \times m_q,$$

e, dado as regras de fusão das excitações de carga e de fluxo, a regra de fusão das quasi-partículas de dyon ficam

$$\epsilon_{p,q} \times \epsilon_{p',q'} = \epsilon_{p+p',q+q'}. \quad (6.21)$$

Por fim, concluímos que todas as excitações deste modelo são abelianas e, portanto, não precisamos nos preocupar com as matrizes- F , pois essas são todas triviais e a regra do pentágono é automaticamente satisfeita. Precisamos, no entanto, verificar que essas excitações satisfaçam a regra do hexágono, mas para isso, precisamos calcular as matrizes- R deste modelo, ou seja, a regra estatística das excitações. A figura 6.10 mostra os diagramas de todas as regras de fusão do modelo duplo quântico para $G = \mathbb{Z}_n$.

Figura 6.9.: mover quasi-partículas de carga é o mesmo que estender o caminho na string que as criaram.

Figura 6.10.: regras de fusão do modelo duplo quântico para $G = \mathbb{Z}_n$.

Estatística das excitações

Para completar a descrição dos anyons que constituem o DQ de $\mathbb{Z}_n$, resta ainda saber a estatística que essas quasi-partículas possuem. Para isso é suficiente estudar a fase adquirida pela função de onda quando dois dyons são trocados de lugar, uma vez que as quasi-partículas de dyons são as excitações mais gerais que existem; sendo as quasi-partículas de carga e fluxo casos particulares de dyons, ou seja,

$$e_p = \epsilon_{p,0} \quad \text{e} \quad m_q = \epsilon_{0,q} .$$

A fase adquirida numa simples troca de dyons, entretanto, é igual a fase adquirida numa dupla troca de carga e fluxo - conforme esquematizado nas figuras 1.8 e 1.9 na introdução

desta tese. Sendo assim, precisamos somente calcular a estatística mútua entre as partículas de carga e fluxo.

Primeiramente notemos que dois operadores de string do tipo Z_γ^p e $Z_{\gamma'}^q$ sempre comutam, para quaisquer que sejam $p, q \in I$ e para quaisquer que sejam os caminhos γ e γ' . Por isso, nada acontece com a função de onda quando duas quasi-partículas de fluxo são trocadas de lugar. Pelo mesmo motivo, a função de onda não adquire nenhuma fase não trivial quando duas quasi-partículas de carga são trocadas de lugar. Isso leva às seguintes matrizes- R :

$$R_{e_p, e_q} = R_{m_p, m_q} = 1. \quad (6.22)$$

Quando uma quasi-partícula de fluxo dá uma volta em torno de uma quasi-partícula de carga, no entanto, a fase adquirida é não-trivial. A relação de comutação entre $X_{\gamma^*}^q$ e Z_γ^p é mostrada na equação (6.8). Sendo assim, se fizermos uma quasi-partícula de fluxo m_q dar uma volta em torno de uma quasi-partícula de carga e_p - como mostrado na figura 6.11 - a fase obtida na função ao fim deste processo será

$$\omega^{pq} = e^{-i\frac{2\pi}{n}pq}.$$

O estado inicial - representado na figura 6.11(a) - é o estado $|\chi\rangle' = X_{\gamma^*}^q Z_\gamma^p |\Psi^0\rangle$. A dupla

Figura 6.11.: mover quasi-partículas de carga é o mesmo que estender o caminho na string que as criaram.

troca acontece após a aplicação do operador $X_{\tilde{\gamma}^*}^q$, ou seja,

$$|\chi\rangle'' = X_{\tilde{\gamma}^*}^q X_{\gamma^*}^q Z_\gamma^p |\Psi^0\rangle.$$

Mas, da relação de comutação entre os operadores de string mostrado na equação (6.8), obtemos que

$$|\chi\rangle'' = \omega^{pq} |\chi\rangle' = e^{-i\frac{2\pi}{n}pq} |\chi\rangle'. \quad (6.23)$$

Como consequência do resultado acima, concluímos que duas quasi-partículas de dyon, idênticas, $\epsilon_{p,q}$ obedece uma regra de estatística fracionária cuja fase é $e^{-i\frac{2\pi}{n}pq} |\chi\rangle'$. As matrizes- R referentes a este processo são dadas por:

$$(R_{e_p, m_q})^2 = R_{\epsilon_{p,q}, \epsilon_{p,q}} = e^{-i\frac{2\pi}{n}pq} |\chi\rangle'. \quad (6.24)$$

Figura 6.12.: regras de braid dos dyons que compõem o modelo duplo quântico de $G = \mathbb{Z}_n$.

A figura 6.12 representa a fase adquirida numa troca de quasi-partícula neste modelo.

Uma vez que todas as matrizes- F são triviais e todas as matrizes R representam uma fase, as regras do pentágono e do hexágono são automaticamente satisfeitas. O que significa que as excitações provenientes deste modelo formam, de fato, um sistema aniônico.

O modelo duplo quântico para o grupo $\mathbb{Z}_n$ é um exemplo bastante interessante do ponto de vista pedagógico de sistemas que apresentam ordem topológica e suportam anyons como excitação de quasi-partículas. No entanto, por tratar-se de um grupo abeliano, todas as regras de fusão e a estatística de quasi-partículas são abelianas. Para finalizar nossa discussão sobre o modelo duplo quântico, a seguir iremos considerar um exemplo de modelo DQ não-abeliano.

6.2. Modelo duplo quântico não-abeliano - $G = S_3$

Considere S_3 o grupo de permutações de três elementos. Esse grupo pode ser visualizado geometricamente com auxílio da figura 6.13, onde os vértices do triângulo equilátero representam os três elementos a serem permutados e a ação do grupo representa transformações de rotação e reflexão na figura. Não é difícil perceber que esse grupo possui somente dois geradores: reflexões da figura com relação à linha tracejada e rotações anti-horárias da figura. Seja $x \in S_3$ a operação de reflexão tal que $x^2 = e$, sendo e a identidade do grupo que corresponde a não fazer nada com a mesma. Seja $y \in S_3$ a operação de rotação anti-horária tal que $y^3 = e$. Não é difícil perceber que os geradores x e y não são livres e estão relacionados por: $xy = y^2x$. Sendo assim, escrevemos

$$S_3 = \{x^2 = e = y^3 : xy = y^2x\} , \quad (6.25)$$

o que, explicitamente, fica

$$S_3 = \{e, x, xy, xy^2, y, y^2\} . \quad (6.26)$$

Concluimos da equação acima que $|S_3| = 6$.

Os operadores de vértice e plaqueta do modelo DQ de S_3 são, então, dados por:

$$A_v = \frac{1}{6} \left(\mathbf{a}_v^e + \mathbf{a}_v^x + \mathbf{a}_v^{xy} + \mathbf{a}_v^{xy^2} + \mathbf{a}_v^y + \mathbf{a}_v^{y^2} \right) , \quad (6.27a)$$

$$B_p = \mathbf{b}_p^e . \quad (6.27b)$$

Figura 6.13.: ação do grupo de permutação de três elementos.

Um estado de vácuo de modelo é o estado escrito na equação (5.10). Porém, para encontrarmos todos os possíveis estados de vácuo, é necessário usar um procedimento parecido com os utilizados anteriormente. No exemplo anterior, onde consideramos o grupo $\mathbb{Z}_n$, vimos que existe um operador de string para cada quasi-partícula de carga e fluxo. A maneira como obtemos os outros estados de vácuo nesse exemplo foi considerar a aplicação de um operador de string fechado aplicado sobre um estado de vácuo para qualquer caminho não contrátil γ . Porém, um caminho fechado pode ser visto como uma criação seguida de uma aniquilação de quasi-partículas e, sendo assim, para se obter outros estados de vácuo basta criar um par de quasi-partículas e então fundi-las novamente depois de percorrermos um caminho não-contrátil na variedade. Esse resultado sugere que o número de estados de vácuo distintos é igual ao número de cargas aniônicas presentes no modelo multiplicado pelo número de caminhos não-contráteis na superfície. Conforme vimos no capítulo 5, as quasi-partículas do modelo DQ são classificadas pelas representações irredutíveis da álgebra do duplo quântico, sendo assim, o número de quasi-partículas aniônicas é igual ao número de representações irredutíveis de $D(G)$. Vamos olhar para as representações do grupo S_3 e, posteriormente, para as representações de $D(S_3)$.

Primeiramente note que existem somente três classes de conjugação em S_3 que são:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{e\}, \\ C_x &= \{x, xy, xy^2\}, \\ C_y &= \{y, y^2\}, \end{aligned}$$

e, portanto, existe três representações irredutíveis em S_3 ,² que chamaremos de ρ_0 , ρ_1 e ρ_2 .

²Para mais detalhes sobre as representações irredutíveis de S_3 veja [52].

As representações ρ_0 e ρ_1 são de dimensão um e dadas por:

$$\begin{aligned}\rho_0(x) &= \rho_0(y) = 1 , \\ \rho_1(e) &= \rho_1(y) = \rho_1(y^2) = 1 = -\rho_1(x) = -\rho_1(xy) = -\rho_1(xy^2) , .\end{aligned}$$

Já a representação ρ_2 é de dimensão dois e é dada por:

$$\rho_2(x) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \omega^{-1} \end{pmatrix} , \quad \text{e} \quad \rho_2(y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad (6.30)$$

sendo $\omega = e^{i2\pi/3}$. Os caracteres irredutíveis não-triviais de S_3 são então dados por:

$$\chi_2(e) = 2 , \quad \chi_2(x) = \chi_2(xy) = \chi_2(xy^2) = 0 \quad \text{e} \quad \chi_2(y) = \chi_2(y^2) = -1 . \quad (6.31)$$

Esses resultados são suficientes para estudar as excitações de carga presentes neste modelo e, dado que uma das representações acima é de dimensão dois, isso sugere a existência de cargas não-abelianas. No entanto, se queremos classificar também os outros tipos excitações precisamos encontrar os grupos de estabilidade associados a cada uma das classes de conjugação. Essa tarefa é simples de ser feita, e os grupos de estabilidade são dados por:

$$\begin{aligned}E_1 &= S_3 , \\ E_x &= \{e, x\} \sim \mathbb{Z}_2 , \\ E_y &= \{e, y, y^2\} \sim \mathbb{Z}_3 .\end{aligned}$$

Com isso, concluímos excitações de dyon $\epsilon_{(R,\alpha)}$ presentes nesse modelo - parametrizada por uma classe de conjugação e uma representação irredutível do grupo de estabilidade, são as seguintes:

$$Q_\Lambda := \epsilon_{(1,\rho_\Lambda)} , \quad \text{com} \quad \Lambda = 0, 1, 2 , \quad (6.33a)$$

$$\Phi_C := \epsilon_{(C,0)} , \quad \text{com} \quad C = 1, x, y , \quad (6.33b)$$

$$q_{\pm 1} := \epsilon_{(x,\pm 1)} , \quad (6.33c)$$

$$e_p := \epsilon_{(y,\omega^p)} , \quad \text{com} \quad p = 0, 1, 2 , \quad (6.33d)$$

Com isso concluímos que existem 8 quasi-partículas distintas neste modelo e a degenerescência do nível fundamental é então dada por

$$\dim(\mathcal{H}_0) = 8^{2g} ,$$

sendo g o gênero da superfície. As excitações escritas acima, não são todas abelianas, pois as representações irredutíveis dos grupos de estabilidade são quase todas de dimensão um, com exceção do caso em que $C = 1$. Vamos então analisar essas excitações. Primeiramente, devemos lembrar que como a classe de conjugação é trivial, essas quasi-partículas são quasi-partículas de carga.

Considere então as quasi-partículas de carga Q_Λ , com $\Lambda = 0, 1, 2$. Os projetores de vértices que medem essas cargas são dados por:

$$\mathbf{A}_v^\Lambda = \frac{d_\Lambda}{6} \sum_{g \in S_3} (\chi_\Lambda(g) \mathbf{a}_v^g) . \quad (6.34)$$

Explicitamente, esses projetores ficam

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_v^0 &= A_v , \\ \mathbf{A}_v^1 &= \frac{1}{6} \left(\mathbf{a}_v^e - \mathbf{a}_v^x - \mathbf{a}_v^{xy} - \mathbf{a}_v^{xy^2} + \mathbf{a}_v^y + \mathbf{a}_v^{y^2} \right) , \end{aligned} \quad (6.35a)$$

$$\mathbf{A}_v^2 = \frac{1}{3} \left(2\mathbf{a}_v^e + \mathbf{a}_v^y + \mathbf{a}_v^{y^2} \right) . \quad (6.35b)$$

Por fim, precisamos saber quem são os operadores capazes de criar essas quasi-partículas a partir do vácuo, em outras palavras, queremos encontrar operadores de string que satisfaçam à seguintes relação

$$\mathbf{A}_v^\Lambda Z_\gamma^\Lambda = Z_\gamma^\Lambda A_v .$$

No entanto, a forma desses operadores é a mesma dos operadores de string que criam cargas no modelo com $G = \mathbb{Z}n$ - conforme vimos na seção anterior deste capítulo. Quando aplicados a uma única aresta da rede (que compartilha o vértice v) são então dados por:

$$Z_l^\Lambda = \sum_{g \in S_3} \chi_\Lambda(g) T_l^g ,$$

que explicitamente, fica

$$Z_l^1 = T_l^e - T_l^x - T_l^{xy} - T_l^{xy^2} + T_l^e + T_l^e , \quad (6.36a)$$

$$Z_l^2 = 2T_l^e - T_l^e - T_l^e . \quad (6.36b)$$

Por fim, as regras de fusão dessas quasi-partículas são dadas pela álgebra destes operadores. Não é difícil mostrar que as seguintes relações são válidas.

$$Z_l^0 Z_l^\Lambda = Z_l^\Lambda Z_l^0 = Z_l^\Lambda , \quad (6.37a)$$

$$Z_l^1 Z_l^1 = Z_l^0 , \quad (6.37b)$$

$$Z_l^1 Z_l^2 = Z_l^2 Z_l^1 = Z_l^2 , \quad (6.37c)$$

$$Z_l^2 Z_l^2 = Z_l^0 + Z_l^1 + Z_l^2 . \quad (6.37d)$$

A primeira coisa que podemos notar é que esses operadores todos comutam uns com os outros e, portanto, a estatística entre essas quasi-partículas é trivial. Por fim, tiramos que as regras de fusão destas quasi-partículas de carga são dadas por:

$$Q_1 Q_1 = 1 , \quad Q_1 Q_2 = Q_2 \quad \text{e} \quad Q_2 Q_2 = 1 + Q_1 + Q_2 , \quad (6.38)$$

sendo $Q_0 = 1$.

7. Teorias de gauge na rede e o modelo duplo quântico

No capítulo anterior vimos que o modelo duplo quântico é definido por uma hamiltoniana de muitos corpos que descreve a dinâmica de um sistema bidimensional na rede. Esse modelo possui propriedades bastante interessantes e não usuais, como por exemplo, a estatística fracionária de quasi-partícula. Nada foi dito, entretanto, sobre a origem de tal modelo; que foi definido de maneira totalmente abstrata.

Existem várias maneiras de se obter a hamiltoniana do DQ. A mais tradicional, talvez, seja pensá-la como uma hamiltoniana de muitos corpos proveniente de uma teoria de gauge na rede. Visto que os graus de liberdade do modelo são rotulados por elementos de um grupo G , esses podem ser pensados como sendo campos de gauge. Além disso, tanto o operador de vértice como de plaqueta são invariantes por ação de gauge local e trata-se, portanto, de um modelo de gauge puro na rede - cuja invariância de gauge local é dada pelo grupo G .

Neste capítulo apresentaremos uma maneira de se obter hamiltonianas de muitos corpos a partir de modelos clássicos na rede que são invariantes de gauge. Essa construção, no entanto, não é direta. Apresentaremos uma construção de uma teoria de campo na rede bastante geral; capaz de acomodar o modelo do duplo quântico e outros modelos provenientes de teorias de gauge na rede em três dimensões como casos particulares. Esta teoria de campo, que chamaremos de *teoria de Kuperberg*, é na verdade um modelo de *state sum model* usado para descrever um invariante topológico [39]. Conforme veremos, deformações deste invariante topológico permitem que este descreva vários modelos de interesse físico como casos particulares - dentre eles o modelo do duplo quântico. Mas, antes de prosseguir com a construção da teoria de Kuperberg, nas duas próximas seções deste capítulo iremos ressaltar alguns pontos relevantes sobre o modelo duplo quântico e também faremos uma breve revisão de modelos clássicos na rede que são invariantes de gauge.

7.1. Teorias de gauge clássicas na rede

Os modelos de gauge clássicos na rede são definidos sobre uma rede. Os graus de liberdades são elementos de um grupo G , chamado grupo de gauge, e a dinâmica é descrita por uma ação global - com a qual define-se uma função de partição. A definição de uma modelo na rede invariante de gauge é dada a seguir

Considere M uma variedade compacta (de dimensão dois ou três) sem fronteira. Considere ainda $\mathcal{L}(M)$ uma rede quadrada/cúbica, orientada, sobre M . Os graus de liberdade do modelo são elementos do grupo G (que consideraremos finito) vivendo nas arestas desta rede. Uma configuração, c , do sistema é caracterizada pelo conjunto $c = \{g_1, \dots, g_l, \dots, g_N\}$, sendo $g_l \in G$ o elemento do grupo que vive na l -ésima aresta da rede e N o número total de

arestas em $\mathcal{L}(M)$. Sendo β um número real positivo, que é o parâmetro livre do modelo, a função de partição é então definida por:

$$Z^G(\mathcal{L}(M), \beta) = \sum_c \exp \left(-\beta \sum_p f(U_p(c)) \right), \quad (7.1)$$

sendo $U_p(c)$ a holonomia da plaqueta p na configuração c e f uma função de classe, isto é, $f(U_p) = f(hU_ph^{-1})$ para todo $h \in G$. A função de partição (7.1) é um escalar no caso em que M é uma variedade sem fronteiras. Note que $Z^G(\mathcal{L}(M), \beta)$ pode também ser escrita da seguinte forma:

$$Z^G(\mathcal{L}(M), \beta) = \sum_c \prod_p M_p(c), \quad (7.2)$$

sendo $M_p(c) = e^{-\beta f(U_p(c))}$ o peso local atribuído a uma plaqueta p da rede.

7.1.1. Transformação de gauge e invariância de gauge

O ponto principal numa teoria de gauge é a invariância local de gauge, que é a invariância pela ação local do grupo de gauge G . Uma transformação de gauge local é definida pela ação de um elemento do grupo de gauge num vértice da rede. Esse elemento age multiplicando as configurações nas arestas que chegam/saem do vértice em questão por g ou por g^{-1} , de acordo com a convenção mostrada na figura 7.1. Com base na figura 7.1, a holonomia da

Figura 7.1.: transformação de gauge local, agindo nas arestas que chegam/saem do vértice v .

plaqueta p , antes da transformação de gauge e contada a partir do vértice v , é:

$$U_p = bc^{-1}d^{-1}a.$$

Após a transformação de gauge, têm-se:

$$U'_p = gbc^{-1}d^{-1}ag^{-1} = gU_pg^{-1}.$$

Como fica evidente, a holonomia não é invariante por transformação de gauge. No entanto a dinâmica do modelo não é alterada, uma vez que a função $f : G \rightarrow \mathbb{C}$, que aparece na equação (7.1), é uma função de classe, ou seja,

$$f(U'_p) = f(gU_pg^{-1}) = f(U_p). \quad (7.3)$$

Isso faz da função de partição (7.1) invariante por transformação de gauge local.

7.1.2. Teorias de gauge em variedades com fronteira

Considere agora o caso em que M é da forma $M = \Sigma \times I$, sendo I o intervalo unitário. Nesse caso M possui fronteira e, sendo assim, a função de partição dependerá das configurações fixadas nessas. Sejam então $c_0 = \{g_1^0, \dots, g_N^0\}$ e $c_f = \{g_1^f, \dots, g_N^f\}$ as configurações fixadas na fronteiras, isto é, fixadas sobre a rede bidimensional $\mathcal{L}(\Sigma)$ - conforme ilustrado em cor laranja na figura 7.2. Como fica claro na figura, uma configuração na rede $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$ é dada por um trio, $c = (c_0, c_f, c_t)$, sendo $c_t = \{a_1, \dots, a_n\}$ a configuração nas arestas paralelas à direção de I , ilustradas em azul na figura. Note que existe uma distinção explícita entre a direção que é paralela à superfície Σ e ao intervalo I , sendo assim, de agora em diante, iremos chamar essas duas direções de direção espacial (alaranjada) e temporal (azul).

Figura 7.2.: uma configuração c sobre a rede tridimensional $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$ é dada pelo trio $c = (c_0, c_f, c_t)$. Na figura omitimos a orientação da rede para não poluir visualmente o desenho.

Para definir uma função de partição $U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)_{c_0}^{c_f}$ sobre $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$, precisamos fixar as configurações c_0 e c_f em suas fronteiras e somar sobre todas as configurações que representam os graus de liberdade internos, c_t . Assim definimos:

$$U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)_{c_0}^{c_f} = \sum_{c_t} \exp \left(-\beta \sum_p f(U_p(c_0, c_f, c_t)) \right). \quad (7.4)$$

Em particular, impondo condição periódica de contorno, isto é, identificando a parte de baixo com a parte de cima na figura 7.2 tal que $c_0 = c_f$, obtemos a função de partição (7.1) para $M = \Sigma \times S^1$, ou seja,

$$Z^G(\mathcal{L}(\Sigma \times S^1), \beta) = \sum_{\{c_0, c_f\}} U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)_{c_0}^{c_f} \delta(c_0, c_f) = \sum_{c_0} U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)_{c_0}^{c_0}. \quad (7.5)$$

Existe uma maneira canônica de representar uma configuração na rede $\mathcal{L}(\Sigma)$ por um vetor do espaço vetorial $\mathcal{H}$. Para isso basta considerar, para cada aresta l da rede, um espaço $\mathcal{H}_l$ cuja a base é dada pelas possíveis configurações de gauge na dada aresta, ou seja, $\mathcal{H}_l = \{|g\rangle : g \in G\}$. O vetor associado a uma configuração $c = \{g_1, g_2, \dots, g_N\}$ é

$$|c\rangle = |g_1\rangle \otimes |g_2\rangle \otimes \dots \otimes |g_N\rangle,$$

e $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \cdots \mathcal{H}_N$. Note que $\mathcal{H}$ é o mesmo espaço de Hilbert sobre o qual o modelo duplo quântico é definido. Nesta notação, $U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)_{c_0}^{c_f}$ é, na verdade, um elemento de matriz da matriz $U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)$, que age em $\mathcal{H}$ levando uma configuração inicial c_0 numa configuração final c_f . Dessa forma, a equação anterior fica:

$$Z^G(\mathcal{L}(\Sigma \times S^1), \beta) = \sum_{c_0} U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)_{c_0}^{c_0} = \text{tr} (U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)) , \quad (7.6)$$

isto é, $U^G(\mathcal{L}(\Sigma \times I), \beta)$ é a matriz de transferência da função de partição (7.1). De agora em diante, para simplificar a notação, iremos omitir a dependência da rede na função de partição e na matriz de transferência sempre que isso não causar nenhuma ambiguidade.

Embora tenhamos partido de um modelo clássico na rede, descrito pela função de partição (7.1), podemos, mesmo que artificialmente, construir um modelo quântico sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Se pensarmos a matriz de transferência, $U^G(\beta)$, como sendo um operador de evolução temporal (para tempo imaginário) agindo sobre $\mathcal{H}$, a hamiltoniana $H(\beta)$ obtida a partir desta descreve, portanto, a dinâmica de um modelo quântico. Fisicamente falando, esses dois modelos são totalmente distintos - um descreve a dinâmica de um modelo clássico na rede, em três dimensões, enquanto o outro descreve a dinâmica de um modelo quântico, também na rede, em $(2 + 1)D$. Porém, do ponto de vista matemático, ambos os modelos são invariantes por transformações locais de gauge, possuem o mesmo espaço de parâmetros e não há nada que impeça que um modelo carregue algum tipo de informação sobre o outro. De fato isso acontece. Em [27] mostramos que a degenerescência do nível fundamental do modelo duplo quântico (em $(2 + 1)D$) é igual a função de partição clássica (em $3D$) associada a esse modelo e isso ajuda a reconhecer ordem topológica no modelo quântico a partir de comportamentos topológicos do modelo clássico.

A construção que apresentaremos nas seguintes seções deste capítulo tem como ponto principal a seguinte questão: é possível obter a hamiltoniana do modelo duplo quântico a partir da função de partição, clássica, de algum modelo invariante de gauge na rede? Ou ainda, é possível obter hamiltonianas de muitos corpos a partir desses modelos clássicos invariantes de gauge? A resposta para tais questões é sim, conforme veremos no próximo capítulo. Por hora, nas seções seguintes deste capítulo, descreveremos a teoria de campo de Kuperberg que permite responder essas entre outras questões.

7.2. Modelo duplo quântico e teorias de gauge na rede

O modelo duplo quântico, assim como qualquer outro modelo quântico, possui uma função de partição dada por:

$$Z^{DQ}(J_f, J_c) = \text{tr}(U^{DQ}(J_f, J_c)) , \quad (7.7)$$

sendo $U^{DQ}(J_f, J_c)$ a matriz de transferência do modelo dada por: $U^{DQ}(J_f, J_c) = e^{-H^{DQ}(J_f, J_c)}$. No restante desta seção mostraremos a inspiração para a construção da teoria de Kuperberg. Notemos dois pontos importantes a cerca do modelo duplo quântico:

Primeiro - lembrando o capítulo anterior, o operador

$$U^0 = \prod_p B_p \prod_v A_v ,$$

definido em (5.11), age como identidade em $\mathcal{H}_0$ e como operador nulo em $\mathcal{H}/\mathcal{H}_0$. Sabemos que se $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_0$, então $A_v|\psi\rangle = B_p|\psi\rangle = |\psi\rangle$ para todo vértice e plaqueta da rede e, portanto, $U^0|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Já se $|\psi\rangle \notin \mathcal{H}_0$, então $U^0|\psi\rangle = 0$. Resumindo, se escrevermos o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}/\mathcal{H}_0$, o operador U^0 será da seguinte forma:

$$U^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $d = \dim(\mathcal{H}_0)$. Da equação acima fica evidente que

$$\dim(\mathcal{H}_0) = \text{tr}(U^0), \quad (7.8)$$

ou seja, U^0 fornece a degenerescência do nível fundamental do modelo duplo quântico.

Segundo - a adição de identidades na hamiltoniana do duplo quântico não altera a dinâmica do modelo. Considere então, por conveniência:

$$H^{DQ}(J_f, J_c) = -J_f \sum_p B_p - J_c \sum_v A_v - \gamma \mathbb{1}, \quad (7.9)$$

sendo γ um parâmetro real dependente de J_f e J_c . Com isso, $U^{DQ}(J_f, J_c)$ assume a forma:

$$U^{DQ}(J_f, J_c) = e^\gamma \prod_p e^{J_f B_p} \prod_v e^{J_c A_v}. \quad (7.10)$$

Se P é um projetor, como é o caso de A_v e B_p , então é válido a seguinte relação¹ para todo $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$e^{\alpha P} = (e^\alpha - 1)P + \mathbb{1},$$

e, sendo assim, a matriz de transferência fica:

$$\begin{aligned} U^{DQ}(J_f, J_c) &= e^\gamma \prod_p ((e^{J_f} - 1)B_p + \mathbb{1}) \prod_v ((e^{J_c} - 1)A_v + \mathbb{1}) \\ &= e^\gamma (N_p(e^{J_f} - 1)N_v(e^{J_c} - 1)) \prod_p \left(B_p + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \mathbb{1} \right) \prod_v \left(A_v + \frac{1}{e^{J_c} - 1} \mathbb{1} \right) \\ &= \prod_p \left(B_p + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \mathbb{1} \right) \prod_v \left(A_v + \frac{1}{e^{J_c} - 1} \mathbb{1} \right), \end{aligned} \quad (7.11)$$

onde, na última linha, escolhemos γ tal que $e^\gamma (N_p(e^{J_f} - 1)N_v(e^{J_c} - 1)) = 1$, isto é

$$\gamma = -N_p \ln(e^{J_f} - 1) - N_v \ln(e^{J_c} - 1).$$

Por fim, obtemos:

$$Z^{DQ}(J_f, J_c) = \text{tr} \left[\prod_p \left(B_p + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \mathbb{1} \right) \prod_v \left(A_v + \frac{1}{e^{J_c} - 1} \mathbb{1} \right) \right]. \quad (7.12)$$

¹Esta relação pode ser facilmente verificada. Basta expandir $e^{\alpha P}$ em série de potências e usar a relação $P^k = P$ se $k \neq 0$ e $P^0 = \mathbb{1}$.

Da equação acima fica claro que, no limite $J_* \rightarrow \infty$, têm-se:

$$U^{DQ}(J_f, J_c) \rightarrow U^0 ,$$

ou seja, a função de partição (7.12) reproduz o escalar $tr(U^0)$ e esse, por sua vez, fornece a degenerescência do nível fundamental do modelo duplo quântico, como vimos na equação (7.8). Podemos então escrever:

$$\dim(\mathcal{H}_0) = \lim_{J_* \rightarrow \infty} Z^{DQ}(J_f, J_c) . \quad (7.13)$$

Mais ainda, conforme veremos no próximo capítulo, a função de partição $Z^{DQ}(J_f, J_c)$, assim como $Z^G(\beta)$, no limite $J_* \rightarrow \infty$ (ou $\beta \rightarrow \infty$) é proporcional a um invariante topológico, $\mathcal{F}^{\text{top}}(\Sigma \times S^1)$, o qual chamaremos de invariante de Kuperberg por ter sido definido em [39]. Isso sugere que a função de partição do modelo duplo quântico é igual a função de partição de um modelo de gauge na rede, pelo menos, no limite referido anteriormente. Em outras palavras, ambas as funções de partição convergem para o mesmo ponto, o qual é proporcional ao invariante topológico de Kuperberg. Esse resultado indica que o espaço de parâmetros do

Figura 7.3.: espaço dos parâmetros das teorias de gauge na rede em três dimensões e do modelo duplo quântico.

modelo duplo quântico, definido sobre a rede bidimensional $\mathcal{L}(\Sigma)$, e o espaço de parâmetros de uma teoria de gauge clássica usual, definida sobre a rede tridimensional $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$, possui pelo menos um ponto de intersecção - que representa os limites topológicos destes dois modelos. A figura 7.3 ilustra onde esses dois espaços de parâmetros se interceptam, representado pelo ponto verde na figura. Os parâmetros δ_f e δ_c pertencem ao intervalo $[0, 1]$ e são os parâmetros originais definidos em [27], relacionados com J_f e J_c por²:

$$J_* = -\ln(1 - \delta_*) .$$

²Note que:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\delta \rightarrow 1} J = +\infty .$$

Como fica evidente na figura 7.3, a única evidência que temos é que o espaço de parâmetros de um modelo invariante de gauge possui um ponto em comum com o espaço de parâmetros do modelo duplo quântico. Se de alguma maneira pudéssemos construir uma teoria de campo na rede que pudesse acomodar ambos o modelo duplo quântico e as teorias de gauge, como casos particulares, isso ajudaria a reconhecer eventuais pontos de intersecção que não aqueles que aparecem na figura. A motivação para isso é que um dos modelos pode carregar informação sobre o outro, mas somente nos pontos do espaço de parâmetros que for comum aos dois modelos. A seguir apresentaremos uma construção de uma teoria de campo na rede que é bastante geral e que chamaremos de *teoria de campo de Kuperberg* (TCK). Conforme mostramos em [26], a teoria de campo de Kuperberg é capaz de reproduzir modelos clássicos provenientes de teorias de gauge na rede em três dimensões como caso particular, além de possibilitar o reconhecimento de limites topológicos em tais modelos de maneira mais intuitiva. Já em [27], mostramos que a TCK pode também reproduzir modelos quânticos de muitos corpos em $(2 + 1)D$, em particular o modelo duplo quântico e deformações do mesmo. Este formalismo alternativo para obter a hamiltoniana do modelo duplo quântico possibilita reconhecer ordem topológica no modelo de forma mais simples - além de permitir a construção de outras hamiltonianas de muitos corpos.

A construção apresentada em [39] é, na verdade, a construção de um invariante topológico $\mathcal{F}^{\text{top}}(M, \mathcal{A})$, que chamaremos de invariante de Kuperberg e que, por sua vez, descreve uma teoria de campo topológica clássica na rede em três dimensões. No entanto, em [44] foi mostrado que deformações deste invariante topológico podem reproduzir a função de partição das teorias de gauge na rede. A construção da TCK tem como ponto de partida a construção do escalar $Z(z, \xi)$, obtido da deformação do invariante $\mathcal{F}^{\text{top}}(M, \mathbb{C}G)$ pela introdução de novos parâmetros, z e ξ . Os ingredientes básicos para a construção desta teoria são: uma rede³ tridimensional orientada, sobre uma variedade tridimensional compacta da forma $\Sigma \times S^1$, e uma álgebra de Hopf involutiva $\mathcal{A}$, que nesse trabalho vamos considerar como sendo a álgebra de grupo $\mathcal{A} = \mathbb{C}G$. Os parâmetros livres do modelo são z e ξ , que são elementos da álgebra e da álgebra dual, respectivamente.

7.3. Construção da TCK

Todo o procedimento que iremos descrever neste capítulo, desde a construção do escalar $Z(z, \xi)$ até a obtenção da matriz $U(z, \xi)$ em termo de operadores locais, é formulado em termos de diagramas de Kuperberg, definidos no capítulo 4. Afim de construir o escalar $Z(z, \xi)$, precisamos atribuir pesos locais às faces e às arestas da rede $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$. Isso é feito por dois tensores: $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ e $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$, definidos a partir das constantes de estrutura da álgebra de grupo.

7.3.1. Definindo pesos locais

Em termo de diagramas, as constantes de estrutura da álgebra de grupo são aquelas exibidas na figura 7.4. De posse das constantes de estrutura da álgebra $\mathbb{C}G$, vamos agora definir os dois

³Na verdade o invariante de Kuperberg é originalmente definido sobre um diagrama de Heegaard da variedade M , mas pode-se, ao invés, defini-lo sobre uma rede como caso particular.

$$\begin{array}{ccc}
\begin{array}{c} \xrightarrow{a} \\ \searrow \\ m \xrightarrow{c} \\ \nearrow \\ \xrightarrow{b} \end{array} = m_{ab}^c = \delta(ab, c) & \begin{array}{c} \xrightarrow{c} \Delta \xrightarrow{a} \\ \searrow \quad \nearrow \\ \quad \quad b \end{array} = \Delta_c^{ab} = \delta(a, b)\delta(a, c) & \xrightarrow{a} S \xrightarrow{b} = S_a^b = \delta(ab, e) \\
\\
\eta \xrightarrow{a} = \eta_a = \delta(a, e) & \xrightarrow{a} \epsilon = \epsilon^a = 1 &
\end{array}$$

Figura 7.4.: diagramas de Kuperberg das constantes de estrutura da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$.

tensores que serão as peças mais elementares na construção do escalar $Z(z, \xi)$. A definição do tensor $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$, com $a_i \in G$, é a seguinte:

$$M_{a_1 a_2 a_3 a_4} = \chi_{\mathbb{C}G} \left(\hat{\phi}_{a_1} \hat{\phi}_{a_2} \hat{\phi}_{a_3} \hat{\phi}_{a_4} z \right), \quad (7.14)$$

sendo a função $\chi_{\mathbb{C}G} : \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}$ (ver exemplo A.1 no apêndice A) uma função linear, definida para os elementos da base por: $\chi_{\mathbb{C}G}(\hat{\phi}_g) = |G|\delta(g, e)$. Essa função representa o traço de um elemento da álgebra na representação regular, sendo a representação regular definida na definição B.5. Na proposição A.1, podemos ver que essa função pode ser expressada em termos das constantes de estrutura do produto - como mostrado na figura 7.5(a) e, portanto, $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ assume a forma mostrada na figura 7.5(b). Há ainda uma outra maneira, mais

Figura 7.5.: definição do tensor $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$.

simétrica, de representar este tensor. Usando a proposição A.2, o tensor $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ assume a forma representada na figura 7.6(a). Note que $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ é parametrizado por um elemento

Figura 7.6.: simetria dos tensores $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ e $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$.

z do centro da álgebra e a posição deste na definição do tensor é irrelevante, uma vez que z comuta com todos os outros elementos da álgebra.

De forma análoga, definimos o tensor $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$, com $b_i \in G$, por:

$$\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4} = \chi_{\mathbb{C}G^*} \left(\xi \hat{\psi}^{b_1} \hat{\psi}^{b_2} \hat{\psi}^{b_3} \hat{\psi}^{b_4} \right), \quad (7.15)$$

sendo a função $\chi_{\mathbb{C}G^*} : \mathbb{C}G^* \rightarrow \mathbb{C}$ (ver exemplo A.1) uma função linear definida para os elementos da base por $\chi_{\mathbb{C}G^*}(\hat{\psi}^a) = 1$ ($\forall a \in G$). A proposição A.1 garante que essa função pode ser escrita em função das constantes de estrutura da comultiplicação - como mostrado na figura 7.7(a). Sendo assim, o tensor $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$ assume a forma mostrada na figura 7.7(b). Usando a proposição A.2 podemos também escrever $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$ de forma mais simétrica, como apresentado na figura 7.6(b). Note que $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$ é parametrizado por um elemento ξ do

Figura 7.7.: definição do tensor $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$.

centro da coálgebra $\mathbb{C}G^*$ e sua posição na definição do tensor é irrelevante uma vez que ξ comuta com todos os outros elementos da coálgebra.

7.3.2. Atribuindo pesos aos constituintes de $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$

Considere a rede cúbica $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ - ilustrada na figura 7.8(a) - cujos números de faces, arestas e vértices são n_f , n_a e n_v , respectivamente. Na figura, a parte em azul representa a direção temporal, enquanto que a parte alaranjada representa a direção espacial, ou ainda, representa a rede $\mathcal{L}(\Sigma)$. É possível escrever n_f , n_a e n_v em função dos números N_p , N_a e N_v , que são os números de plaqueta, aresta e vértice de $\mathcal{L}(\Sigma)$, isto é,

$$n_f = N_p + N_a, \quad (7.16a)$$

$$n_v = N_v, \quad (7.16b)$$

$$n_a = N_a + N_v. \quad (7.16c)$$

Isso pode ser visto apelando para a rede $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$, ao invés de $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ (veja uma ilustração na figura 7.12(b) a seguir). Além disso, os números de constituintes de $\mathcal{L}(\Sigma)$, por tratar-se de uma rede bidimensional, obedecem à relação de Euler:

$$N_p + N_v - N_a = 2 - 2g, \quad (7.17)$$

sendo g o gênero da superfície Σ .

A rede $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ pode ser visualizada como sendo a colagem de faces em arestas, como mostrado na figura 7.8(b). Esta forma decomposta de visualizar a rede facilita na hora de definir uma teoria de campo sobre a mesma. Isso é feito atribuindo-se a cada face de $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ um tensor $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$. Os índices $a_i \in G$ deste tensor são elementos do grupo e

(a) Um pedaço da rede cúbica $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$.

(b) Decomposição da rede $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ em arestas e faces.

Figura 7.8.: rede tridimensional sobre a variedade $\Sigma \times S^1$, a parte em azul representa a direção temporal e a parte alaranjada representa a direção espacial.

representam os lados da face em questão - como ilustrado na figura 7.9(a). Devemos notar que as faces são orientadas e a ordem dos índices no tensor é ditada por essa orientação. Outro detalhe importante é que, devido ao fato de o tensor $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ ser invariante por permutações cíclica de seus índices (proposição A.2), esse não depende de qual é a primeira aresta considerada na contagem dos índices em $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$. Da mesma forma atribui-se a cada

(a) Peso atribuído às faces da rede.

(b) Peso atribuído às arestas da rede.

Figura 7.9.: pesos atribuídos aos constituintes da rede.

aresta de $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ um tensor $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$, em que $b_i \in G$ são elementos do grupo e representam as faces que serão coladas na aresta em questão - como ilustrado na figura 7.9(b). As arestas da rede também são orientadas, e a ordem dos índices no tensor é ditada por essa orientação, respeitando-se a regra da mão direita com o polegar apontando na direção da aresta.

Uma vez definido os pesos atribuídos a cada constituinte da rede, precisamos agora definir a regra de contração entre esses tensores. Essa contração é feita sempre que uma aresta e uma face são coladas juntas, mas há uma questão de orientação que deve ser levada em consideração. A figura 7.10 ilustra a forma como esses tensores devem ser contraídos, de acordo com a orientação relativa entre a face e aresta. A regra é a seguinte: se a orientação da aresta e da face coincidem, então os correspondentes índices de cada tensor é contraído diretamente. Mas, se elas não coincidirem, essa contração é feita de maneira indireta pela antípoda S_a^b - como ilustrado na figura 7.10.

O escalar que estamos definindo é o resultado da contração de vários tensores. Uma vez que existe um tensor para cada constituinte de $\mathcal{L}(M)$, essa rede pode ser pensada como

Figura 7.10.: regra de contração de índices dos tensores.

sendo uma colagem não mais de plaquetas e arestas, mas sim de tensores do tipo Δ e do tipo M . Chamamos essa rede constituída de tensores de *rede tensorial*. A rede $\mathcal{L}(M)$ não possui fronteiras e, sendo assim, não restará nenhum índice de nenhuma face e de nenhuma aresta que não esteja contraído. O resultado final após todas as contrações é o escalar $Z(\mathcal{L}(M), z, \xi)$, que definimos por:

$$Z(\mathcal{L}(M), z, \xi) = \prod_{\text{faces}} M_{a_1 a_2 a_3 a_4} \prod_{\text{arestas}} \Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4} \prod_{\text{orient.}} S_x^y, \quad (7.18)$$

sendo o último produtório sobre todas as orientações entre faces e arestas que não concordam.

Neste ponto podemos começar a dar uma interpretação de teoria de campo ao escalar $Z(z, \xi)$. O espaço de parâmetros deste escalar é $\Gamma = \{(z, \xi)\}$ e cada ponto $(z, \xi) \in \Gamma$ define dois modelos físicos distintos: um modelo clássico tridimensional, definido sobre a rede $\mathcal{L}(M)$ e cuja dinâmica é ditada por uma função de partição; e um modelo quântico de muitos corpos em $(2+1)\text{D}$, definido sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e cuja dinâmica é ditada por uma hamiltoniana. A seguir mostraremos como construir cada um desses modelos a partir do escalar $Z(z, \xi)$.

7.3.3. Modelo clássico em três dimensões

Uma configuração sobre a rede $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ é definida pelos elementos do grupo G que vivem em cada uma das arestas da rede, as quais são também as arestas que formam as plaquetas da rede. Contudo, segue da própria definição do tensor Δ^{abcd} que há mais de um elemento de G associado a cada aresta, mas isso não é um problema, uma vez que o tensor Δ^{abcd} possui a seguinte propriedade:

$$\Delta^{abcd} \neq 0 \Leftrightarrow b = c = d = a.$$

Sendo assim, a configuração mostrada na figura 7.11(a) não contribui para o escalar $Z(z, \xi)$, a menos que $b = c = d = a$ e nesse caso a configuração resultante é a mostrada na figura 7.11(b). O elemento $\xi \in \mathbb{C}G^*$ mais geral que se pode ter é da forma $\xi = \sum_{g \in G} \xi_g \hat{\psi}^g$ e, portanto, o tensor Δ^{abcd} fica:

$$\begin{aligned} \Delta^{abcd} &= \chi_{\mathbb{C}G^*} \left(\xi \hat{\psi}^a \hat{\psi}^b \hat{\psi}^c \hat{\psi}^d \right) \\ &= \sum_{g \in G} \xi_g \chi_{\mathbb{C}G^*} \left(\hat{\psi}^g \hat{\psi}^a \hat{\psi}^b \hat{\psi}^c \hat{\psi}^d \right) \\ &= \sum_{g \in G} \xi_g \delta(a, g) \delta(a, b) \delta(a, c) \delta(a, d) \\ &= \xi_a \delta(a, b) \delta(a, c) \delta(a, d). \end{aligned} \quad (7.19)$$

(a) Essa configuração contribui com peso zero para o escalar $Z(z, \xi)$, a menos que $b = c = d = a$.

(b) Configuração resultante na aresta em questão no caso em que $b = c = d = a$.

Figura 7.11.: definindo uma configuração na rede tensorial.

Isso significa que Δ^{abcd} possui também a propriedade $\Delta^{abcd} \neq 0$ se, e somente se, $b = c = d = a$. Com isso podemos ver que mesmo quando ξ é arbitrário a configuração c está bem definida. Sendo assim, não é difícil mostrar que o escalar (7.18) resume-se a:

$$Z(z, \xi) = \sum_c \left(\prod_l \xi(g_l) \prod_p M(U_p(c)) \right), \quad (7.20)$$

sendo $\xi(g_l) = \xi_{g_l}$. Na equação acima, U_p representa a holonomia da plaqueta p e $M(U_p) = M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ tal que $U_p = a_1 a_2 a_3 a_4$. Note que o escalar $Z(z, \xi)$, da forma como escrito acima, assemelha-se bastante da função de partição das teorias de gauge na rede (7.2), com a diferença de que agora existe um peso extra associado às arestas da rede. Esse peso associado às arestas da rede representa a adição de um campo externo ao sistema. Se $\xi = \epsilon$, então $\xi_g = 1$ para todo $g \in G$ e o escalar acima resume-se a

$$Z(z, \epsilon) = \sum_c \left(\prod_p M(U_p(c)) \right), \quad (7.21)$$

que é similar à função de partição obtida na equação (7.2).

Para podermos garantir que o escalar $Z(z, \xi)$ é capaz de reproduzir a função de partição das teorias de gauge na rede precisamos mostrar que este é invariante pela ação local do grupo de gauge. Isso, conforme veremos, impõe condições sobre z e ξ . Primeiramente considere a transformação de gauge definida na figura 7.1. O tensor associado à plaqueta p , antes da transformação de gauge, é:

$$M(U_p) = \chi_{\mathbb{C}G}(z \hat{\phi}_{U_p}).$$

Após a transformação de gauge a holonomia é alterada e fica $U'_p = g U_p g^{-1}$, assim ficamos com o novo peso associado à plaqueta p :

$$M(U'_p) = \chi_{\mathbb{C}G}(z \hat{\phi}_{U'_p}) = \chi_{\mathbb{C}G}(z \hat{\phi}_g \hat{\phi}_{U_p} \hat{\phi}_{g^{-1}}).$$

Sabemos pela proposição A.2 que o tensor M é invariante por permutação cíclica de seus índices se, e somente se, z for um elemento do centro da álgebra. Com isso, para garantir a invariância de gauge dos pesos associados às plaquetas basta exigir que z seja um elemento do centro da álgebra de grupo.

Quanto aos pesos associados às arestas não há como garantir invariância por transformação de gauge local a não ser $\xi = \epsilon$, pois, tomando a figura D.13 como referência, o elemento de grupo a na aresta na parte de baixo é modificado para ag^{-1} após a transformação de gauge. Sendo assim, para que o peso das arestas fossem invariantes de gauge seria necessário que $\xi(a) = \xi(ag^{-1})$ para todo $g \in G$ e não a única maneira de isso acontecer é se $\xi(h) = 1$ para todo $h \in G$, ou seja, se $\xi = \epsilon$.

Por esse motivo podemos chamar $Z(z, \xi)$ de função de partição generalizada, por representar uma função de partição invariante por transformação de gauge local como caso particular ($\xi = \epsilon$).

A rede $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$, na qual o sistema físico vive, desempenha um papel não trivial, no sentido de que $Z(\mathcal{L}(\Sigma \times S^1), z, \xi)$ depende fortemente de detalhes combinatórios de $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$. No entanto, conforme discutido anteriormente, para uma escolha de parâmetros bastante particular, $z = \eta$ e $\xi = \epsilon$, a invariância topológica de $Z(\eta, \epsilon)$ é recuperada - esse escalar torna-se quasi-topológico e passa a não depender mais dos detalhes da rede. Aqui, por “quasi-topológico” queremos dizer que $Z(\eta, \epsilon)$ é na verdade um invariante topológico multiplicado por uma constante que depende do tamanho da rede.

O escalar $Z(z, \xi)$ também pode ser interpretado como sendo o traço de uma matriz $U(z, \xi)$ a qual chamaremos de matriz de transferência por analogia. A seguir mostraremos como obter uma rede tensorial para essa matriz de transferência a partir da rede tensorial que define $Z(z, \xi)$.

7.4. Modelo quântico em $(2 + 1)\text{D}$

Agora que existe um tensor atribuído a cada componente da rede $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$, podemos começar a pensá-la como uma rede tensorial, formada por tensores e cujas as regras de contração de índices é dada pela constituição da rede. Usando o mesmo procedimento descrito anteriormente, podemos definir uma rede tensorial que representa a matriz de transferência $U(z, \xi)$. O primeiro passo é considerar a rede $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$ ao invés de $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ e então fixar uma configuração nas fronteiras desta rede, similarmente como feito na figura 7.2. Devido à condição periódica de contorno a seguinte relação deve ser obedecida: $c_0 = c_f$. Isso significa que a rede tensorial que representa a matriz de transferência $U(z, \xi)$ é aquela representada na figura 7.12(a), isto é, se tomarmos N cópias dessa rede, sobrepostas uma sobre a outra, identificando o topo de uma com a base da outra, o resultado será uma rede cúbica de $\Sigma \times S^1$. Do ponto de vista algébrico, essa identificação é o mesmo que exigir $c_0 = c_f$ e somar sobre todas as possíveis configurações c_0 de tal forma que a seguinte equação seja satisfeita:

$$Z(\mathcal{L}(\Sigma \times S^1), z, \xi) = \sum_{c_0} U(\mathcal{L}(\Sigma \times I), z, \xi)_{c_0}^{c_f} \delta(c_0, c_f) = \text{tr}(U(\mathcal{L}(\Sigma \times I), z, \xi)) . \quad (7.22)$$

Para escrever explicitamente a rede tensorial que representa a matriz $U(z, \xi)$ basta usar a regra de atribuição de pesos estabelecida na seção anterior na rede da figura 7.12(b). O resultado obtido será um tensor da forma $U_{c_0}^{c_f}$, tal que a equação (7.22) seja satisfeita.

Figura 7.12.: rede tensorial e operador de evolução temporal.

Como existe distinção entre faces/arestas espaciais e temporais, consideraremos os parâmetros espaciais e temporais não necessariamente iguais. Considere então $z_t, z_s \in \mathcal{Z}(\mathbb{C}G)$ os parâmetros das faces temporais e espaciais, respectivamente, e considere $\xi_t, \xi_s \in \mathcal{Z}(\mathbb{C}G^*)$ os parâmetros das arestas temporais e espaciais, respectivamente. Olhando a rede tensorial desenhada na figura 7.12(b), podemos notar que a parte de baixo é formado por faces, as quais estão associadas a tensores com setas entrando, enquanto que a parte de cima é formada por arestas, as quais estão associadas a tensores com setas saindo, e, portanto, a rede tensorial associada à figura 7.12(b) é um tensor com setas entrando (na parte de cima) e setas saindo (na parte de baixo), conforme ilustrado na figura 7.12(a). Das figuras, pode-se notar também que existe uma seta entrando para cada aresta da rede bidimensional $\mathcal{L}(\Sigma)$, o que evidencia o fato de $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ ser um operador linear $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$.

7.4.1. Matriz $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ como um produto de operadores locais

Antes de prosseguirmos, por uma questão de conveniência que ficará clara mais adiante, chamaremos os parâmetros z_t e ξ_s simplesmente por z e ξ . Já o parâmetro z_s pode ser mapeado na álgebra dual usando a relação $g^{ax} M_{xb} = \delta(a, b)$ (figura (A.13) no apêndice A), conforme mostrada a figura 7.13(a). Dessa forma, existe uma relação um-para-um entre o novo parâmetro, $\beta \in \mathbb{C}G^*$, e o antigo, $z_s \in \mathbb{C}G$. Analogamente definimos $a \in \mathbb{C}G$ como mostrado na figura 7.13(b), o qual possui uma relação um-para-um com ξ_t , conforme mostrado na figura. Por fim, os parâmetros z_s, z_t, ξ_s, ξ_t são substituídos pelos parâmetros β, z, ξ, a e a matriz de transferência pode ser representada também por: $U(\beta, z, \xi, a)$.

O operador $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ passa agora ser da forma $U(\beta, z, \xi, a)$ e age em todo o espaço

$$\begin{array}{ccc}
z_s \longrightarrow = \beta \longleftarrow g \longrightarrow & & \xi_t \longleftarrow = a \longrightarrow M \longleftarrow \\
\text{ou} & & \text{ou} \\
\beta \longleftarrow = z_s \longrightarrow M \longleftarrow & & a \longrightarrow = \xi_t \longleftarrow g \longrightarrow \\
\text{(a)} & & \text{(b)}
\end{array}$$

Figura 7.13.: nova parametrização.

de Hilbert $\mathcal{H}$, porém, conforme provado no apêndice E, esse operador pode ser decomposto como um produto de operadores que agem localmente na rede. Esses operadores que agem localmente na rede são operadores de vértice, plaqueta e aresta. Em outras palavras:

$$U(\beta, z, \xi, a) = \prod_p B_p(\beta) \prod_l C_l(z, \xi) \prod_v A_v(a) . \quad (7.23)$$

Vamos olhar com mais atenção aos novos parâmetros de $U(\beta, z, \xi, a)$. Sabemos que z_s e z são elementos do centro da álgebra, ou seja, podem ser escritos tanto na base $\{\mathbf{z}_R\}$ quanto na base $\{\mathbf{z}_R\}$ (definidas no apêndice C), então:

$$\begin{aligned}
z_s &= \sum_C (z_s)^R \mathbf{z}_R , \\
z &= \sum_R z^R \mathbf{z}_R , .
\end{aligned} \quad (7.24)$$

Sabemos que $\beta \in \mathbb{C}G^*$, ou seja, é da forma $\beta = \sum_{b \in G} \beta_b \hat{\psi}^b$. Com isso, da figura 7.13(a), tiramos que os coeficientes β_b estão relacionados com os coeficientes $(z_s)^b$ por:

$$\beta_b = (z_s)^a M_{ab} = \sum_{a \in G} |G| \delta(ab, e) (z_s)^a = |G| (z_s)^{b^{-1}} ,$$

e, uma vez que $(z_s)^g = (z_s)^R$ sempre que $g \in C_R$, obtemos que:

$$\beta = \sum_R \beta_R \Psi^R , \quad (7.25)$$

com $\Psi^R = \sum_{s \in C_R} \hat{\psi}^s$. Isso significa que $\beta_C = (z_s)^C$.

Já os elementos ξ e ξ_t são, pelo menos a princípio, genéricos, ou seja:

$$\xi = \sum_{g \in G} \xi_g \hat{\psi}^g , \quad (7.26a)$$

$$\xi_t = \sum_{g \in G} (\xi_t)_g \hat{\psi}^g . \quad (7.26b)$$

Com isso, pela figura 7.13(b), a é da forma:

$$a = \sum_{g \in G} a^g \hat{\phi}_g ,$$

Portanto os operadores que constituem a matriz de transferência, (7.23), são dados por:

$$B_p(\beta) = \sum_C \beta_R \mathbf{B}_p^R, \quad (7.27a)$$

$$A_v(a) = \sum_{g \in G} a^g \mathbf{a}_v^g, \quad (7.27b)$$

$$C_l(z, \xi) = \sum_R \sum_{g \in G} z^R \xi_g \mathbf{L}_l^R T_l^g. \quad (7.27c)$$

A prova de que a matriz de transferência $U(\beta, z, \xi, a)$ pode ser escrita como um produto de operadores locais, como mostrado na equação (7.23), é bastante trabalhosa e cansativa. Para facilitar a leitura deste trabalho, esta prova foi omitida neste capítulo e colocada na forma de apêndice no apêndice E. A matriz de transferência $U(\beta, z, \xi, a)$ é um operador que age sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e é proveniente da função da TCK. Esta está associada a uma hamiltoniana $H(\beta, z, \xi, a)$ por:

$$U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t) = e^{-H(\beta, z, \xi, a)}.$$

Por fim, uma vez que conhecemos $U(\beta, z, \xi, a)$ como um produto de operadores locais, podemos obter $H(\beta, z, \xi, a)$ por:

$$H(\beta, z, \xi, a) = -\ln(U(\beta, z, \xi, a)),$$

ou ainda,

$$H(\beta, z, \xi, a) = -\ln \left\{ \prod_p B_p(\beta) \prod_l C_l(z, \xi) \prod_v A_v(a) \right\}. \quad (7.28)$$

Resumindo, cada ponto do espaço de parâmetros da TCK fornece um modelo hamiltoniano quântico em $(2+1)\text{D}$, definido sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e cuja dinâmica é ditada pela hamiltoniana escrita na equação anterior.

8. Hamiltonianas de muitos corpos a partir da TCK

No capítulo anterior vimos que a TCK é uma teoria de campo definida sobre uma rede $\mathcal{L}(M)$ e que possui um espaço de parâmetros, Γ , definido por quatro parâmetros: z_s, z_t, ξ_s e ξ_t . Esses por sua vez são elementos de uma álgebra de Hopf (e sua álgebra dual), que neste trabalho estamos considerando como sendo a álgebra de grupo $\mathbb{C}G$. Cada ponto $(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t) \in \Gamma$ dá origem a duas teorias de campos distintas: uma teoria de campo clássica sobre a rede tridimensional $\mathcal{L}(M)$, cuja dinâmica é descrita pela função de partição $Z(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$, definida na equação (7.18), e, no caso em que $M = \Sigma \times S^1$, uma teoria de campo quântica em $(2+1)\text{D}$, definida sobre a rede $\mathcal{L}(\Sigma \times S^1)$ e cuja dinâmica é descrita pela hamiltoniana $H(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$, definida na equação (7.28).

Neste capítulo apresentaremos algumas hamiltonianas de muitos corpos que podem ser obtidas a partir da TCK e que também suportam anyons como excitações de quasi-partícula. Começaremos mostrando que a hamiltoniana do DQ, que serviu de inspiração para o formalismo apresentado anteriormente, pode de fato ser obtida da TCK. Adiante mostraremos que a TCK fornece também hamiltonianas de muitos corpos que descrevem modelos que suportam anyons não-abelianos que não podem ser descritos pelo MDQ.

8.1. Duplo quântico a partir da teoria de Kuperberg

A hamiltoniana (7.28) pode reproduzir a hamiltoniana do modelo DQ como caso particular. O espaço de parâmetros do modelo DQ possui somente dois parâmetros livres, J_f e J_c , definidos na equação (7.9). Para reproduzir esta hamiltoniana a partir da matriz de transferência definida na equação (7.23) é suficiente escolher os parâmetros z_s, z_t, ξ_s, ξ_t de forma que

$$U(\beta, z, \xi, a) = U^{DQ}(J_f, J_c) .$$

Considere portanto a seguinte escolha de parâmetros:

$$z_s = \frac{1}{|G|} \left(\eta + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \mathcal{I} \right) \Leftrightarrow \beta = \Lambda + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \epsilon , \quad (8.1a)$$

$$z_t = \eta \Leftrightarrow z = \eta , \quad (8.1b)$$

$$\xi_s = \frac{1}{|G|} \epsilon \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{|G|} \epsilon , \quad (8.1c)$$

$$\xi_t = \epsilon + \frac{|G|}{e^{J_c} - 1} \Lambda \Leftrightarrow a = \frac{1}{|G|} \mathcal{I} + \frac{1}{e^{J_c} - 1} \eta , \quad (8.1d)$$

sendo $\mathcal{I}$ a cointegral e Λ a integral da álgebra de grupo (ver exemplo A.2 no apêndice A). Com essa escolha de parâmetros a matriz de transferência $U(\beta, z, \xi, a) := U(J_f, J_c)$, assume

a seguinte forma:

$$U(J_f, J_c) = \left(\frac{1}{|G|} \right)^{N_a} \prod_p \left[B_p(\Lambda) + \frac{1}{e^{J_f} - 1} B_p(\epsilon) \right] \prod_l [C_l(\eta, \epsilon)] \prod_v \left[\frac{1}{|G|} A_v(\mathcal{I}) + \frac{1}{e^{J_c} - 1} A_v(\eta) \right].$$

Com base no exemplo A.2 (apêndice A), na equação (D.12) no apêndice D e na definição dos operadores, podemos calcular cada um dos operadores que aparece na equação acima.

$$B_p(\epsilon) = \sum_C \mathbf{B}_p^C = \mathbb{1}, \quad (8.2a)$$

$$B_p(\Lambda) = B_p, \quad (8.2b)$$

$$A_v(\eta) = \mathbf{a}_v^e = \mathbb{1}, \quad (8.2c)$$

$$A_v(\mathcal{I}) = |G| A_v, \quad (8.2d)$$

$$C_l(\eta, \epsilon) = |G| L_l(\eta) T_l(\epsilon) = |G| \mathbb{1}, \quad (8.2e)$$

e, portanto, a matriz $U(J_f, J_c)$ resume-se a:

$$U(J_f, J_c) = \prod_p \left[B_p + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \mathbb{1} \right] \prod_v \left[A_v + \frac{1}{e^{J_c} - 1} \mathbb{1} \right] = U^{DQ}(J_f, J_c), \quad (8.3)$$

que é a matriz de transferência do DQ (equação (7.11)). Sendo assim, a hamiltoniana associada a esta matriz de transferência é a hamiltoniana do DQ, ou seja,

$$H(\beta, z, \xi, a) = H^{DQ}(J_f, J_c) = -J_f \sum_p B_p - J_c \sum_v A_v - \gamma \mathbb{1},$$

com $\gamma = -N_p \ln(e^{J_f} - 1) - N_v \ln(e^{J_c} - 1)$.

Com isso mostramos que, de fato, o modelo DQ pode ser obtido da TCK e, mais ainda, usando esse formalismo podemos mostrar que a degenerescência do nível fundamental do DQ é um invariante topológico.

8.1.1. Degenerescência do duplo quântico como um invariante topológico

Vimos no capítulo (5) que, no caso em que G é um grupo abeliano, a degenerescência do nível fundamental é dada pela equação (6.14). Mas qual o significado por trás desta equação? Se Σ não é a esfera ($g \neq 0$) o nível fundamental é degenerado e dado por $|G|^{2g}$. Esse resultado mostra que não somente o nível fundamental é degenerado como é um invariante topológico, pois $\dim(\mathcal{H}_0)$ independe dos parâmetros livres do modelo e sim somente de g , que é um invariante topológico da superfície Σ . Vale observar que a degenerescência do nível fundamental é um invariante topológico mesmo quando G não é abeliano, conforme será mostrado a seguir.

No capítulo anterior vimos que a degenerescência do nível fundamental do DQ pode ser calculada com a matriz de transferência do modelo, ou seja, de acordo com a equação (7.13), temos:

$$\dim(\mathcal{H}_0) = \lim_{J_* \rightarrow \infty} Z^{DQ}(J_f, J_c) = \lim_{J_* \rightarrow \infty} \text{tr}(U^{DQ}(J_f, J_c)) .$$

No limite $J_* \rightarrow \infty$, entretanto, os parâmetros ficam:

$$z_s \rightarrow \frac{1}{|G|} \eta , \quad z_t \rightarrow \eta , \quad \xi_s \rightarrow \epsilon \quad \text{e} \quad \xi_t \rightarrow \frac{1}{|G|} \epsilon .$$

e, portanto, a degenerescência fica:

$$\dim(\mathcal{H}_0) = \left(\frac{1}{|G|} \right)^{n_a + n_f} Z(\eta, \eta, \epsilon, \epsilon) .$$

Porém, $Z(\eta, \eta, \epsilon, \epsilon)$ representa o caso não deformado do invariante de Kuperberg [39], o qual está associado ao invariante topológico $\mathcal{F}^{\text{top}}(\Sigma \times S^1)$ por:

$$Z(\mathcal{L}(\Sigma \times S^1), \eta, \eta, \epsilon, \epsilon) = |G|^{n_a + n_f - 1} \mathcal{F}^{\text{top}}(\Sigma \times S^1) .$$

No trabalho original [39], é apresentado uma construção do escalar $Z(\eta, \eta, \epsilon, \epsilon)$ somente. A deformação deste escalar pela adição de elementos do centro da álgebra de Hopf foi apresentada em [26, 44]. Finalmente, concluímos:

$$\dim(\mathcal{H}_0) = \frac{1}{|G|} \mathcal{F}^{\text{top}}(\Sigma \times S^1) , \tag{8.4}$$

ou seja, a degenerescência do nível fundamental do modelo DQ é um invariante topológico para qualquer que seja o grupo G , abeliano ou não, e não depende dos parâmetros livres do modelo. Este é o resultado principal apresentado em [27]. Como caso particular, quando G é um grupo abeliano, pode-se mostrar que a degenerescência obtida acima resume-se a:

$$\dim \mathcal{H}_0 = |G|^{2g} , \tag{8.5}$$

o que condiz com a equação (6.14).

Um ponto interessante a ser destacado aqui é: o escalar $Z(J_f, J_c)$ proveniente da TCK e que dá origem ao modelo do DQ, não é um invariante topológico em geral, o que significa que o modelo DQ por sua vez também não possui características topológicas em geral. No entanto, quando olhamos para o nível fundamental deste modelo vemos que a degenerescência é dada justamente pelo limite topológico da TCK, o que evidencia o fato de que o nível fundamental e os estados de vácuo deste modelo possuem comportamentos que dependem única e exclusivamente da topologia da variedade $\Sigma \times S^1$.

8.2. Deformações e perturbações do DQ

A TCK dá origem também à hamiltonianas de muitos corpos que representam deformações e/ou perturbações da/na hamiltoniana do DQ, conforme veremos agora. A hamiltoniana

obtida em (7.28) não é uma hamiltoniana de muitos corpos em geral, pois o cálculo do logaritmo da matriz de transferência pode ser uma tarefa bastante complicada e não há garantia de que essa possa ser escrita como uma soma de operadores locais. No entanto, se considerarmos o caso em que todos os operadores em (7.28) comutam uns com os outros, pode-se garantir que a hamiltoniana obtida será uma hamiltoniana de muitos corpos, ou seja,

$$H(\beta, z, \xi, a) = - \sum_v \ln(A_v(a)) - \sum_p \ln(B_p(\beta)) - \sum_l \ln(C_l(z, \xi)) .$$

De agora em diante consideraremos somente escolhas de parâmetros para as quais sejam válidas as seguintes relações para todo vértice, plaqueta e aresta da rede:

$$\begin{aligned} [A_v(a), A_{v'}(a)] &= [B_p(\beta), B_{p'}(\beta)] = [C_l(z, \xi), C_{l'}] = \dots \\ \dots &= [A_v(a), B_p(\beta)] = [A_v(a), C_l(z, \xi)] = [B_p(\beta), C_l(z, \xi)] = 0 . \end{aligned} \quad (8.6)$$

Mas, ainda precisamos calcular $\ln(A_v(a))$, $\ln(B_p(\beta))$ e $\ln(C_l(z, \xi))$, e somente a relação de comutação desses operadores não é suficiente para executar esse cálculo e obter um resultado analítico. Sendo assim, precisamos impor mais restrições no espaço de parâmetros. Se cada um dos operadores $A_v(a)$, $B_p(\beta)$ e $C_l(z, \xi)$ for um projetor ou uma combinação linear de projetores ortogonais, o logaritmo dos mesmos pode ser facilmente calculado - com o auxílio da identidade a seguir.

Identidade 8.1 *Seja $\{P_i : i = 1, 2, \dots, p\}$ um conjunto completo de projetores ortogonais, então vale que:*

- para todo $a_i \in \mathbb{C}$ e $0 \neq k \in \mathbb{N}$ têm-se que:

$$\left(\sum_i a_i P_i \right)^k = \sum_i (a_i)^k P_i . \quad (8.7)$$

- se $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ pode ser expandida em série de potências em torno de x_0 e a_i está dentro do intervalo de convergência da série ($\forall i$), então:

$$f \left(\sum_i a_i P_i \right) = \sum_i f(a_i) P_i . \quad (8.8)$$

Prova: o primeiro resultado é mais fácil de ser verificado. Basta lembrar que $P_i P_j = \delta(i, j) P_i$, pois esses são projetores ortogonais, e então não haverá termos cruzados na expansão $(\sum_i a_i P_i)^k$, ou seja

$$\left(\sum_i a_i P_i \right)^k = \sum_i (a_i)^k (P_i)^k = \sum_i (a_i)^k P_i .$$

O segundo resultado é consequência do primeiro. Se f pode ser expandida em série de potências em torno de x_0 , então:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k (x - x_0)^k .$$

Portanto

$$f\left(\sum_i a_i P_i\right) = f(x_0)\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left(\sum_i a_i P_i - x_0\mathbb{1}\right)^k.$$

Usando o resultado anterior e o fato de que $\mathbb{1} = \sum_i P_i$, obtemos:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_i a_i P_i\right) &= f(x_0)\mathbb{1} + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sum_i (a_i - x_0)^k P_i \\ &= f(x_0)\mathbb{1} + \sum_i P_i \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k (a_i - x_0)^k\right) \\ &= f(x_0)\mathbb{1} + \sum_i P_i \left(-f(x_0) + f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k (a_i - x_0)^k\right) \end{aligned}$$

Com algumas manipulações algébricas simples, obtemos:

$$\begin{aligned} f\left(\sum_i a_i P_i\right) &= f(x_0)\mathbb{1} + \sum_i (f(a_i) - f(x_0)) P_i \\ &= f(x_0) \left(\mathbb{1} - \sum_i P_i\right) + \sum_i f(a_i) P_i \\ &= \sum_i f(a_i) P_i. \end{aligned} \tag{8.9}$$

□

Resumindo, o espaço de parâmetros Γ é bastante grande e não podemos obter hamiltonianas de muitos corpos que sejam exatamente solúveis em geral. Mas, se nos restringirmos aos parâmetros z_s, z_t, ξ_s, ξ_t tais que a identidade 8.1 possa ser utilizada, além de podermos calcular exatamente o logaritmo dos operadores locais, as relações (8.6) serão automaticamente satisfeitas. Em outras palavras, queremos que os operadores de vértice, plaqueta e aresta sejam todos uma combinação linear de projetores ortogonais de vértice, plaqueta e aresta, respectivamente. Felizmente conhecemos todos esses projetores ortogonais, conforme mostrado no apêndice D. Considere, portanto:

$$B_p(\beta) = \sum_C x_C \mathbf{B}_p^C, \tag{8.10a}$$

$$A_v(a) = \sum_{\rho} y^{\rho} \mathbf{A}_v^{\rho}, \tag{8.10b}$$

$$C_l(z, \xi) = \sum_{(K, \alpha)} w^{(K, \alpha)} \mathbf{C}_l^{(K, \alpha)}. \tag{8.10c}$$

sendo C e K classes de conjugação de G , ρ uma representação irredutível de G , α uma representação irredutível do grupo de estabilidade E_K e $x_C, y^{\rho}, w^{(K, \alpha)} \in \mathbb{R}$. Isto é o mesmo

que escolher os seguintes parâmetros:

$$\beta = \sum_C x_C \Psi^C, \quad (8.11a)$$

$$a = \sum_\rho y^\rho \mathfrak{z}_\rho, \quad (8.11b)$$

$$\xi = \sum_K w^{(K,\alpha)} \Psi^K, \quad (8.11c)$$

$$z = \sum_\alpha w^{(K,\alpha)} \mathfrak{z}_\alpha. \quad (8.11d)$$

Com a escolha de parâmetros acima a hamiltoniana $H(\beta, z, \xi, a)$ passa a depender somente dos coeficientes $(\{x_C\}, \{y^\rho\}, \{w^{(K,\alpha)}\})$ e assume a forma:

$$\begin{aligned} H(\{y^\rho\}, \{x_C\}, \{w^{(K,\alpha)}\}) = & - \sum_v \left[\sum_\rho \ln(y^\rho) \mathbf{A}_v^\rho \right] - \sum_p \left[\sum_C \ln(x_C) \mathbf{B}_p^C \right] \\ & - \sum_l \left[\sum_{(K,\alpha)} \ln(w^{(K,\alpha)}) \mathbf{C}_l^{(K,\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (8.12)$$

A hamiltoniana obtida acima é uma hamiltoniana de muitos corpos e pode ser interpretada como uma deformação do DQ se desconsiderarmos os operadores de aresta. Nesse caso a hamiltoniana será feita de uma soma de operadores de vértice e plaqueta. No entanto, esses operadores não são exatamente os mesmo do DQ mas sim generalizações do mesmo. É claro que se escolhermos os parâmetros de tal forma que $A_v(a) = A_v$ e $B_p(\beta) = B_p$ recuperamos a hamiltoniana H^{DQ} . Por outro lado, se os parâmetros são tais que $A_v(a) = A_v$ e $B_p(\beta) = B_p$ e os operadores de aresta não são triviais, esses representam campos externos agindo em arestas individuais da rede e a hamiltoniana obtida representa perturbações da hamiltoniana do DQ. Para facilitar a análise deste modelo dividiremos o problema em dois casos: no primeiro analisaremos o caso que representa deformações do DQ e no segundo analisaremos o caso que representa perturbações dos mesmo.

8.2.1. Deformações do modelo duplo quântico

Considere $w^{(K,\alpha)} = 1$ para todo K e α , assim a hamiltoniana $H(\{x_C\}, \{y^\rho\}, \{1\})$ fica:

$$H(\{y^\rho\}, \{x_C\}) := H(\{x_C\}, \{y^\rho\}, \{1\}) = - \sum_v \left(\sum_\rho \ln(y^\rho) \mathbf{A}_v^\rho \right) - \sum_p \left(\sum_C \ln(x_C) \mathbf{B}_p^C \right), \quad (8.13)$$

com $\ln(x_C), \ln(y^\rho) \in \mathbb{R}^+$. Esta hamiltoniana representa uma deformação da hamiltoniana usual do DQ. Podemos reescrever a hamiltoniana acima da seguinte forma:

$$H(\{y^\rho\}, \{x_C\}) = \sum_{\rho, C} H(J_\rho, J_C), \quad (8.14)$$

sendo

$$H(J_\rho, J_C) = -J_\rho \sum_v \mathbf{A}_v^\rho - J_C \sum_p \mathbf{B}_p^C. \quad (8.15)$$

$J_\rho = \ln(y^\rho)$ e $J_C = \ln(x_C)$. Além disso, tem-se que:

$$[H(\rho, C), H(\rho', C')] = 0 \quad (8.16)$$

Vamos olhar para a hamiltoniana $H(J_\rho, J_C)$ separadamente. O subespaço do vácuo de $H(J_\rho, J_C)$ é dado por:

$$\mathcal{H}_0^{\rho, C} = \{|\Psi\rangle \in \mathcal{H} : \mathbf{A}_v^\rho |\Psi\rangle = \mathbf{B}_p^C |\Psi\rangle = |\Psi\rangle, \forall p, v\}. \quad (8.17)$$

Note que, se $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_0^{\rho, C}$, então necessariamente $|\Psi\rangle \notin \mathcal{H}_0^{\rho', C'}$ (exceto se $\rho = \rho'$ e $C = C'$). A hamiltoniana $H(J_\rho, J_C)$ possui as mesmas propriedades e excitações que a hamiltoniana do DQ. Com a diferença de que as quasi-partículas de vácuo tem carga aniônica trocada com as excitações de carga e_ρ e fluxo m_C . A interpretação que tira-se daqui é que todos os estados de excitados da hamiltoniana do DQ são estados de vácuo de alguma hamiltoniana deformada $H(J_\rho, J_C)$. Sendo assim a hamiltoniana $H(J_\rho, J_C)$ descreve nada mais que a dinâmica do modelo DQ com um troca de rótulo das excitações aniônicas.

8.2.2. Perturbações do modelo duplo quântico

Considere agora o caso em que os operadores de vértice e plaqueta são os operadores usuais do modelo DQ e os operadores de aresta não são triviais, ou seja, $x_C = e^{\delta(C,0)}$ e $y^\rho = e^{\delta(\rho,0)}$. Nesse caso a hamiltoniana (8.12) assume a forma:

$$H(J_f, J_c, w^{(R,\alpha)}) = H^{DQ}(J_f, J_c) - \sum_l \left[\sum_{(R,\alpha)} \ln(w^{(R,\alpha)}) \mathbf{C}_l^{(R,\alpha)} \right] \quad (8.18)$$

Por simplicidade considere o operador de aresta como sendo formado por um único projetor de aresta, $\mathbf{C}_l^{(R,\alpha)}$, e considere $J_a = \ln(w^{(R,\alpha)})$.

$$H(J_f, J_c, J_a) = H^{DQ}(J_f, J_c) - J_a \sum_l \mathbf{C}_l^{(R,\alpha)}. \quad (8.19)$$

Esta hamiltoniana representa uma perturbação na hamiltoniana do modelo duplo quântico. Esse tipo de perturbação é utilizado para estudar a estabilidade das fases topológicas neste modelos.

8.3. Anyons não abelianos a partir de modelos abelianos

Um dos modelos hamiltonianos de muitos corpos mais interessantes que pode ser obtido da TCK é o modelo que descreve condensação de quasi-partícula. Conforme veremos a seguir, existe um tipo específico de deformação do modelo duplo quântico de grupo abeliano, por exemplo, que descreve condensações de quasi-partículas que só acontecem em sites específicos

da rede. Isso, por sua vez, dá origem a criação de quasi-partículas com regra de fusão não-abeliana. Esse exemplo de deformação é bastante interessante, pois permite descrever fases topológicas não-abelianas a partir de modelos que descrevem (originalmente) fases topológicas abelianas.

Considere que na matriz de transferência $U(\beta, z, \xi, a)$, os parâmetros são tais que os operadores de vértice e plaqueta sejam combinações lineares de projetores ortogonais e os operadores de aresta sejam triviais. Podemos escolher um site $s_1 = (v_1, p_1)$ arbitrário da rede e reorganizar os termos na matriz de transferência da seguinte maneira:

$$U(\{x_C\}, \{y^\rho\}) = O_{s_1} \prod_{p \neq p_1} B_p(\beta) \prod_{v \neq v_1} A_v(a) \quad (8.20)$$

sendo $O_{s_1} = \sum_{u,v} z^{u,v} A_{v_1}^u B_{p_1}^v$ o operador de site. Consideraremos o caso onde o operador de site é também uma combinação linear de projetores ortogonais, então, de acordo com a equação (D.13) temos que:

$$O_{s_1} = \sum_{K,\alpha} z^{(K,\alpha)} \mathbf{O}_{s_1}^{(K,\alpha)},$$

e a matriz de transferência fica:

$$U(\{x_C\}, \{y^\rho\}, \{z^{(K,\alpha)}\}) = \left(\sum_{K,\alpha} z^{(K,\alpha)} \mathbf{O}_{s_1}^{(K,\alpha)} \right) \prod_{p \neq p_1} B_p(\beta) \prod_{v \neq v_1} A_v(a) \quad (8.21)$$

Dado que todos os operadores na equação acima são projetores e comutam uns com os outros, a hamiltoniana associada a esta matriz de transferência é dada por:

$$H(\{x_C\}, \{y^\rho\}, \{z^{(K,\alpha)}\}) = - \sum_{p \neq p_1} \ln(x_C) \mathbf{B}_p^C - \sum_{v \neq v_1} \ln(y^\rho) \mathbf{A}_v^\rho - \left(\sum_{K,\alpha} \ln(z^{(K,\alpha)}) \mathbf{O}_{s_1}^{(K,\alpha)} \right). \quad (8.22)$$

Esse mesmo procedimento pode ser feito para um número arbitrário de sites. Seja então $S = \{s_i : i = 1, 2, \dots, p\}$ um conjunto formado por p sites arbitrários da rede. A hamiltoniana nesse caso fica:

$$H(\{x_C\}, \{y^\rho\}, \{z^{(K,\alpha)}\}) = - \sum_{p \notin S} \ln(x_C) \mathbf{B}_p^C - \sum_{v \notin S} \ln(y^\rho) \mathbf{A}_v^\rho - \sum_{s_i \in S} \left[\left(\sum_{K,\alpha} \ln(z^{(K,\alpha)}) \mathbf{O}_{s_i}^{(K,\alpha)} \right) \right]. \quad (8.23)$$

Essa hamiltoniana descreve uma dinâmica bastante similar à do DQ, porém com a diferença que nesse caso há condensação de algumas quasi-partículas. Esse modelo é complicado de analisar em todo o espaço de parâmetros, porém, veremos como caso particular do TC que esse modelo, diferentemente do TC, permite descrever excitações de quasi-partículas com regras de fusão não-abeliana.

8.3.1. Condensação no TC e regra de fusão não-abeliana

Considere $S = \{s_i : i = 1, 2, \dots, p\}$, sendo s_i sites arbitrários da rede os quais chamaremos de *sites especiais*. A hamiltoniana deste modelo é definida por:

$$H = - \sum_{p \notin S} B_p - \sum_{v \notin S} A_v - \sum_{s_i \in S} O_{s_i} \quad (8.24)$$

sendo O_{s_i} o operador de site definido por: $O_{s_i} = A_{v_i} B_{p_i}$, para $s_i = (v_i, p_i)$. Note que essa hamiltoniana é um caso particular da hamiltoniana escrita em (8.23), a saber

$$H = H(\{e^{\delta(C,0)}\}, \{e^{\delta(\rho,0)}\}, \{e^{\delta(K,0)\delta(\alpha,0)}\}) .$$

Os operadores que constituem a hamiltoniana (8.23) são todos projetores, mas podemos, sem alterar a dinâmica do modelo, considerá-los como operadores feitos somente de σ^x e σ^z , como é o caso do TC usual definido no capítulo 5. Sendo assim, os operadores de site comutam com todos os outros operadores que constituem a hamiltoniana, uma vez que todos os operadores de vértice e plaqueta comutam. Com isso, pode-se considerar uma base, $\{|\xi\rangle\}$, de $\mathcal{H}$ formada por autovetores simultâneos de A_v , B_p e O_{s_i} . Além disso, uma vez que $(A_v)^2 = \mathbb{1} = (B_p)^2$, têm-se que $(O_s)^2 = \mathbb{1}$ e, portanto, os autovalores desses operadores são ± 1 .

O subespaço do vácuo deste modelo é dado por:

$$\mathcal{H}_0 = \{|\psi\rangle \in \mathcal{H} : A_v|\psi\rangle = B_p|\psi\rangle = O_{s_i}|\psi\rangle = |\psi\rangle, \forall v \notin S, \forall p \notin S, \forall s_i \in S\} .$$

Vamos olhar mais atentamente à condição $O_{s_i}|\psi\rangle = |\psi\rangle$. Isso é o mesmo que exigir que:

$$A_{v_i}|\psi\rangle = B_{p_i}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle . \quad (8.25)$$

Isso significa que as cargas aniônicas usuais do TC 1 e ϵ , se localizadas num dos sites defeituosos, possuem ambas a mesma energia que o vácuo neste modelo. A figura 8.1 mostra dois estados excitados do TC, com duas excitações de dyon em cada um deles. O estado mostrado na figura 8.1(a) é também um estado excitado da hamiltoniana (8.24), no entanto, o estado mostrado na figura 8.1(b) é um estado de vácuo da hamiltoniana (8.24), uma vez que as excitações de dyon estão localizadas no sites especiais.

Figura 8.1.: nas figuras os sites especiais são indicados pelos triângulos hachurados.

A pergunta natural a se fazer agora é: qual é a degenerescência do nível fundamental deste modelo? Podemos usar um argumento lógico para mostrar que a degenerescência não

é alterada se existir um único site especial. Todos os estados de vácuo do TC são também estados de vácuo neste modelo, portanto podemos dizer que

$$\dim(\mathcal{H}_0) \geq 2^{2g} .$$

Se $p = 1$ então existe um único site especial. Nesse caso, um estado excitado com uma única excitação de dyon do TC, com o dyon localizado no site especial da rede, é também um estado de vácuo deste modelo. Porém, conforme vimos no capítulo 3, não é possível que exista somente uma excitação de dyon isolada - essas devem acontecer em pares - e, portanto, este modelo não possui mais estados de vácuo que o TC. Se $p \geq 2$, entretanto, a degenerescência deste modelo será maior que a do TC, conforme veremos a seguir.

O argumento que utilizaremos é puramente combinatório. Considere p sites especiais arbitrários espalhados pela rede. Um estado excitado do TC com um par de dyons é um estado de vácuo deste modelo se, e somente se, esses dyons estiverem localizados nos sites especiais da rede. Mas existem $\binom{p}{2}$ maneiras de distribuir esses dois dyons entre os p sites especiais e, portanto, $\binom{p}{2}$ novos estados de vácuo. Da mesma forma, um estado excitado com dois pares de dyons pode também ser um estado de vácuo neste modelo, basta que haja sites especiais suficientes para acomodar esses 4 dyons (ou seja, $p \geq 4$). Nesse caso teremos $\binom{p}{4}$ novos estados de vácuo e assim sucessivamente. Em geral, se existem p sites especiais na rede, pode-se distribuir até $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ pares de dyons entre os sites especiais, sendo $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ a parte inteira da divisão $p/2$. A degenerescência do nível fundamental fica então dada por:

$$\dim(\mathcal{H}_0) = 2^{2g} \left[\binom{p}{0} + \binom{p}{2} + \binom{p}{4} + \cdots + \binom{p}{2\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} \right] . \quad (8.26)$$

A soma acima, para $p \neq 0$, pode ser calculada usando a simples expansão binomial, conforme feito abaixo.

$$\begin{aligned} (1+x)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} x^k = \sum_{k=\text{par}}^p \binom{p}{k} x^k + \sum_{k=\text{ímpar}}^p \binom{p}{k} x^k \\ (1-x)^p &= \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=\text{par}}^p \binom{p}{k} x^k - \sum_{k=\text{ímpar}}^p \binom{p}{k} x^k \\ \sum_{k=\text{par}}^p \binom{p}{k} x^k &= \frac{1}{2} [(1+x)^p + (1-x)^p] \\ \sum_{k=\text{par}}^p \binom{p}{k} &= \frac{1}{2} [(1+1)^p + (1-1)^p] \\ \sum_{k=\text{par}}^p \binom{p}{k} &= 2^{p-1} . \end{aligned}$$

Com isso obtemos:

$$\dim(\mathcal{H}_0) = 2^{2g} 2^{p-1} = 2^{2g+p-1} . \quad (8.27)$$

Esse resultado evidencia o caráter topológico do vácuo do modelo, mas, nesse caso, além da topologia, a degenerescência do nível fundamental depende também do número de sites especiais - que estão fixos.

Anyons não-abelianos

A propriedade mais interessante deste modelo é o fato de que as cargas aniônicas envolvidas são as mesmas da do TC e, mesmo assim, excitações com regras de fusão não abelianas podem ser criadas com os operadores de string usuais. Para ver isso, considere o caso em que os sites especiais formam uma região como a mostrada na figura 8.2.

Figura 8.2.: região formada de sites especiais.

As excitações usuais do TC, 1 , e , m e ϵ , são também excitações deste modelo e são criadas pelos operadores de string usuais X_{γ^*} e Z_{γ} . No entanto, diferentemente do TC, este modelo permite a criação de superposição de partículas pelos operadores de string usuais. Considere, por exemplo, os dois estados mostrados na figura 8.3. O primeiro deles é um estado de vácuo e o segundo um estado excitado do TC, mas ambos são estados de vácuo da hamiltoniana (8.24). Em particular, uma superposição dos dois estados é ainda um estado de vácuo. Considere então o seguinte estado de vácuo de (8.24):

$$|\psi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, 1\rangle_{\gamma} \pm |\epsilon, \epsilon\rangle_{\gamma}) .$$

O operador Z_{γ} , se aplicado no estado de vácuo $|\psi^0\rangle$, irá criar uma superposição de estados, um com um par de excitação de carga e outro com um par de excitação de fluxo - como ilustrado na figura 8.4. Em outras palavras, escrevemos:

$$Z_{\gamma}|\psi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, e\rangle_{\gamma} \pm |m, m\rangle_{\gamma}) .$$

Note que, embora o estado $Z_{\gamma}|\psi_0\rangle$ seja uma superposição de estados excitados, todas as excitações estão localizadas no mesmo site, sendo assim podemos renomear essa superposição de excitações por:

$$|\sigma, \sigma\rangle_{\gamma} := \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, e\rangle_{\gamma} \pm |m, m\rangle_{\gamma}) ,$$

sendo σ a carga aniônica criada nas extremidades do caminho γ . Conforme veremos a seguir as excitações σ possuem a mesma regra de fusão que os Ising-anyons.

(a) Estado de vácuo da hamiltoniana (8.24) e do TC. Na figura a linha tracejada representa um caminho na rede.

(b) Estado excitado do TC com duas excitações ϵ localizada dentro da região formada de sites especiais.

Figura 8.3.: dois estados de vácuos distintos da hamiltoniana (8.24).

(a) Criação de um par de cargas nas extremidades do caminho γ .

(b) Criação de um par de fluxos nas extremidades do caminho γ^* .

Figura 8.4.: excitações elementares do TC.

Regra de fusão das excitações σ

A primeira coisa que precisamos observar aqui é que as excitações σ podem ser movidas sem custo de energia, bastando-se estender o caminho γ no operador Z_γ . No entanto devemos lembrar que o operador Z_γ é capaz de criar excitações σ somente se as extremidades do caminho estiverem ambas em sites especiais. Caso contrário, Z_γ irá criar excitações de carga somente, assim como no caso do TC usual. Para estudar a regra de fusão $\sigma \times \sigma$ devemos mover duas excitações σ para o mesmo site especial. Veja a ilustração de como isso é feito na figura 8.5. Na figura 8.5(a) têm-se um estado com dois pares de excitações σ , na figura 8.5(b) duas excitações foram movidas para o mesmo site. A figura 8.5 fornece somente uma ilustração diagramática da fusão de duas quasi-partículas. Se queremos de fato encontrar o resultado da fusão dessas duas partículas precisamos olhar para os estados do TC que dão origem às mesmas. Na figura 8.6, podemos ver como escrever o estado com dois pares de quasi-partículas σ em termos das excitações usuais do TC. Mover as quasi-partículas σ é o mesmo que mover, simultaneamente, as quasi-partículas de carga e de fluxo que dão origem à mesma. Sendo assim a fusão $\sigma \times \sigma$, mostrada na figura 8.5(b), em termo das excitações do TC fica conforme mostrado na figura 8.7. Esse resultado mostra claramente que a regra

(a) Criação de dois pares de quasi-partículas σ .

(b) As duas quasi-partículas σ foram movidas para o mesmo site.

Figura 8.5.: fusão de duas quasi-partículas σ .

$$\begin{aligned}
 & \left(\text{Diagram with two } \sigma \text{ quasi-particles} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \left(\text{Diagram with four } e \text{ excitations} \right) \pm \left(\text{Diagram with two } e \text{ and two } m \text{ excitations} \right) \\ \pm \frac{1}{2} \left(\text{Diagram with two } m \text{ and two } e \text{ excitations} \right) \pm \left(\text{Diagram with four } m \text{ excitations} \right) \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Figura 8.6.: quasi-partículas σ em termo das excitações elementares usuais do TC.

de fusão desses duas quasi-partículas não é abeliana e dada por:

$$\sigma \times \sigma = 1 + \epsilon . \quad (8.28)$$

Esta é exatamente a regra de fusão dos Ising-anyons (equação (2.31c)), dado que ϵ é um férmion.

No trabalho [45] os autores demonstraram que uma superposição de estados excitados de carga e fluxo podem ser interpretadas como Ising-anyons. No entanto, a construção apresentada em [45] é uma construção livre de modelo, no sentido de que não foi apresentada nenhum modelo microscópico do qual tal superposição de estados pudesse ser criada a partir do vácuo e dos operadores de string usuais do TC. O modelo descrito nesta seção, apresentado em [31], contempla uma realização microscópica de um modelo que suporta os

Figura 8.7.: a regra de fusão de quasi-partículas σ dá como resultado uma superposição de 1 e ϵ .

estados descritos em [45]. Porém, neste modelo as quasi-partículas σ só podem acontecer nos sites especiais. Existe um outro modelo, também proveniente da TCK, no qual superposição de estados de carga e fluxo aparecem de maneira natural a partir dos estados de vácuo e, diferentemente deste modelo com sites especiais, as excitações do tipo σ podem acontecer em qualquer site da rede.

8.4. Superposição de modelos duplo quânticos a partir da TCK

Este modelo é também bastante parecido com o TC. O espaço de Hilbert local, entretanto, não é mais o mesmo. Associamos a cada aresta da rede um vetor $|s, g\rangle$, sendo $s \in I = \{1, 2\}$ e $g \in \mathbb{Z}_2$. Em outras palavras, existe um novo grau de liberdade s associado a cada aresta da rede. O espaço de Hilbert local é dado por: $\mathcal{H}_l = \{|s, g\rangle : s \in I, g \in \mathbb{Z}_2\}$ e, portanto, $\dim(\mathcal{H}_l) = 4$. A maneira mais conveniente de trabalhar com o modelo que iremos definir é escrevendo o espaço de Hilbert como:

$$\mathcal{H}_l = \mathcal{H}_l^1 \oplus \mathcal{H}_l^2, \quad (8.29)$$

com $\mathcal{H}_l^s = \{|s, g\rangle : g \in \mathbb{Z}_2\}$. Os projetores P_l^r , definidos por:

$$P_l^r |s, g\rangle = \delta(r, s) |s, g\rangle$$

projetam vetores de $\mathcal{H}_l$ em $\mathcal{H}_l^r$. A hamiltoniana do modelo que iremos analisar é uma soma de duas outras hamiltonianas H^1 e H^2 .

A primeira delas, H^1 , é a hamiltoniana do TC definida sobre o espaço de Hilbert $\mathcal{H}^1 = \otimes_l \mathcal{H}_l^1$. Isto é,

$$H^1 = - \sum_p B_p^1 - \sum_v A_v^1,$$

sendo

$$B_p^1 = \bigotimes_{l \in \partial p} \sigma_l^z \text{ e } A_v^1 = \bigotimes_{l \in \text{star}(v)} \sigma_l^x. \quad (8.30)$$

Já a segunda hamiltoniana, H^2 , representa a hamiltoniana do modelo dual ao TC, e é definida sobre $\mathcal{H}^2 = \otimes_l \mathcal{H}_l^2$.

$$H^2 = - \sum_p B_p^2 - \sum_v A_v^2 ,$$

sendo os operadores definidos por:

$$B_p^2 = \bigotimes_{l \in \partial p} \sigma_l^x \text{ e } A_v^2 = \bigotimes_{l \in \text{star}(v)} \sigma_l^z . \quad (8.31)$$

A hamiltoniana H é a soma das duas hamiltonianas, no entanto, cada uma delas age em um espaço diferente e, por isso, precisamos fazer uso dos projetores P_l^s para que H possa ser definido, ou seja,

$$H = - \underbrace{\sum_p B_p^1 P_p^1 - \sum_v A_v^1 P_v^1}_{H^1} - \underbrace{\sum_p B_p^2 P_p^2 - \sum_v A_v^2 P_v^2}_{H^2} , \quad (8.32)$$

sendo $P_p^s = \bigotimes_{l \in \partial p} P_l^s$ e $P_v^s = \bigotimes_{l \in \text{star}(v)} P_l^s$. Esses projetores desempenham o papel de garantir que H^1 aja somente em $\mathcal{H}^1$ e H^2 aja somente em $\mathcal{H}^2$.

Vamos olhar para subespaço de vácuo deste modelo. Primeiramente precisamos notar que:

$$H^1 H^2 = H^2 H^1 = 0 .$$

Daí tiramos que:

$$\mathcal{H}_0 = \{ |\psi\rangle \in \mathcal{H} : (A_v^1 P_v^1 + A_v^2 P_v^2) |\psi\rangle = (B_p^1 P_p^1 + B_p^2 P_p^2) |\psi\rangle = |\psi\rangle , \forall p, v \} . \quad (8.33)$$

O que também pode ser escrito como:

$$\mathcal{H}_0 = \underbrace{\{ |\psi\rangle \in \mathcal{H} : A_v^1 P_v^1 |\psi\rangle = B_p^1 P_p^1 |\psi\rangle = |\psi\rangle \}}_{\mathcal{H}_0^1} \oplus \underbrace{\{ |\psi\rangle \in \mathcal{H} : A_v^2 P_v^2 |\psi\rangle = B_p^2 P_p^2 |\psi\rangle = |\psi\rangle \}}_{\mathcal{H}_0^2} . \quad (8.34)$$

No entanto ambos, $\mathcal{H}_0^1$ e $\mathcal{H}_0^2$ possuem a mesma dimensão que o subespaço de vácuo do TC (pois o TC é um modelo auto-dual [46]), e escrevemos:

$$\dim(\mathcal{H}_0) = 2^{2g} + 2^{2g} = 2^{2g+1} . \quad (8.35)$$

Estados excitados

Já sabemos que o subespaço de vácuo deste modelo é pode ser escrito como uma soma direta $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_0^1 \oplus \mathcal{H}_0^2$, sendo $\mathcal{H}_0^s$ o subespaço de vácuo do TC. Sendo assim, um estado de vácuo da hamiltoniana (8.32) é uma superposição de vácuos do TC. Considere então $|\psi_0^s\rangle$ um estado de vácuo de H^s e

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_0^1\rangle \pm |\psi_0^2\rangle)$$

um estado de vácuo de (8.32).

Os operadores que criam as excitações são X_{γ^*} e Z_{γ} , porém devemos notar que: X_{γ^*} é o operador que cria excitações de fluxo no TC usual, mas cria excitações de carga no TC dual; da mesma maneira, Z_{γ} é o operador que cria excitações de carga no TC usual e excitações de fluxo no TC dual. Sendo assim, podemos escrever:

$$\begin{aligned} Z_{\gamma}|\psi_0^1\rangle &= |e, e\rangle_{\gamma}, \\ Z_{\gamma}|\psi_0^2\rangle &= |m, m\rangle_{\gamma}. \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$Z_{\gamma}|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e, e\rangle_{\gamma} \pm |m, m\rangle_{\gamma}) := |\sigma, \sigma\rangle_{\gamma}. \quad (8.36)$$

O estado acima é exatamente obtido no modelo anterior. Essa superposição, uma vez que as excitações estão localizadas no mesmo lugar, pode ser interpretada como sendo uma nova excitação σ , a qual já sabemos, pelas figura 8.6 e 8.7, satisfazer a mesma regra de fusão dos Ising-anyons.

Este é mais um exemplo de modelo abeliano que descreve excitações não-abelianas. Mas o que este modelo tem a ver com a TCK? Na construção da TCK que apresentamos no capítulo 7, fixamos a álgebra como sendo a álgebra de grupo de um grupo finito. Existem outras maneiras de se obter teorias de campos a partir do formalismo apresentado escolhendo-se álgebras diferentes. Um exemplo de álgebra que pode ser considerada é *álgebra de grupóide* $\mathbb{C}\mathcal{G}$ de um grupóide $\mathcal{G}$. Um grupóide é uma estrutura algébrica bastante similar à estrutura de grupo - é um conjunto de elementos munido de uma operação binária associativa, com a diferença de que, dados dois elementos arbitrários de $\mathcal{G}$ o produto entre eles nem sempre está definido. Mas, ainda assim, no grupóide existe unidade (o que não necessariamente é única) e todo elemento possui um elemento inverso à esquerda e à direita (não necessariamente iguais).

O modelo apresentado nesta seção é um caso onde consideramos a álgebra de grupóide ao invés da álgebra de grupo usual. O grupóide considerado é $\mathcal{G} = \{1_1, -1_1, 1_2, -1_2\}$ e cujo produto é dado pela tabela a abaixo: O grupóide definido na figura 8.8 é formado por

	1_1	-1_1	1_2	-1_2
1_1	1_1	-1_1	$\nexists$	$\nexists$
-1_1	-1_1	1_1	$\nexists$	$\nexists$
1_2	$\nexists$	$\nexists$	1_2	-1_2
-1_2	$\nexists$	$\nexists$	-1_2	1_2

Figura 8.8.: note que esse grupóide pode ser pensado como combinação de dois grupos $\mathbb{Z}_2$ desconexos (nas regiões em destaque na tabela).

uma composição de dois grupos $\mathbb{Z}_2$ desconexos. Note que a tabela de multiplicação dentro das regiões em destaque são as tabelas de multiplicação de $\mathbb{Z}_2$. A álgebra de grupóide $\mathbb{C}\mathcal{G}$ é definida de maneira similar à álgebra de grupo. Considere $\{\hat{\phi}_g : g \in \mathcal{G}\}$ uma base de $\mathbb{C}\mathcal{G}$ indexada pelos elementos do grupóide. O produto $\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b$ é definido pelo produto ab se esse

existir, caso contrário o produto é zero, ou seja, para todo $a, b \in \mathcal{G}$ têm-se que:

$$\hat{\phi}_a \hat{\phi}_b = \begin{cases} \hat{\phi}_{ab} & \text{se } \exists ab, \\ 0 & \text{se } \nexists ab. \end{cases} \quad (8.37)$$

O modelo hamiltoniana oriundo desta álgebra é portanto uma superposição de QD, que nesse caso são simplesmente TC.

Este não é o tipo de grupóide mais geral que existe. Em geral, podemos pensar um grupóide como sendo uma categoria onde todos os morfismos são inversíveis. Existem alguns modelos que analisamos considerando grupóides mais complicados e que serão publicados em breve. O modelo apresentado nesta seção encontra-se disponível em [32].

9. Considerações finais

9.1. Conclusões

Em [39] foi apresentada uma construção de uma teoria de campo topológica na rede. Como qualquer teoria de campo topológica, essa possui evolução trivial e, portanto, não representa nenhum modelo físico não-trivial. Porém, representa o primeiro termo em uma expansão de baixas temperaturas de teorias de gauge usuais na rede, isto é, pode-se mostrar [26, 44] que nesse limite a função de partição das teorias de gauge na rede é igual à função de partição da teoria de campo topológica definida em [39]. Ainda em [26, 44], mostramos que deformações desta teoria de campo topológica, embora possam quebrar a invariância topológica da mesma, permitem que essa descreva modelos físicos de interesse, como por exemplo, os modelos invariantes de gauge na rede em três dimensões. Essa deformação dá origem a uma nova teoria de campo na rede, que chamamos de teoria de campo de Kuperberg (TCK). A deformação é feita pela introdução de elementos do centro da álgebra de grupo e da álgebra dual na teoria de campo topológica [39] e o espaço de parâmetros é $\Gamma = \{z, \xi\}$. A TCK, para cada ponto de Γ , dá origem a uma teoria de campo na rede em três dimensões onde as configurações são definidas por elementos do grupo g associados às aresta desta rede. Essa teoria é descrita pela função de partição $Z(\mathcal{L}(M), z, \xi)$ - definida na equação

$$Z(z, \xi) = \sum_c \left(\prod_l \xi(g_l) \prod_p M(U_p(c)) \right). \quad (9.1)$$

Uma escolha particular de (z, ξ) reproduz a teoria de gauge de Wilson.

Baseado nos artigos [27, 28], no capítulo 7 deste trabalho, mostramos que quando M é uma variedade da forma $M = \Sigma \times S^1$, sendo Σ uma variedade bidimensional compacta e S^1 a esfera unidimensional, a TCK pode também reproduzir modelos quânticos em $(2+1)\text{D}$ para tempo imaginário. Como consequência, os pontos de Γ para as quais a matriz de transferência é positiva representam um modelo hamiltoniano de muitos corpos cujos graus de liberdade são estados quânticos rotulados pelos elementos do grupo G e vivem nas arestas da rede bidimensional $\mathcal{L}(\Sigma)$. O espaço de Hilbert deste modelo é o mesmo do modelo duplo quântico e a dinâmica é descrita por uma matriz de transferência $U(z_s, z_t, \xi_t, \xi_s)$ - associada à função de partição $Z(\mathcal{L}(M), z_s, z_t, \xi_t, \xi_s)$ pela equação

$$Z(\mathcal{L}(\Sigma \times S^1), z, \xi) = \sum_{c_0} U(\mathcal{L}(\Sigma \times I), z, \xi)_{c_0}^{c_f} \delta(c_0, c_f) = \text{tr}(U(\mathcal{L}(\Sigma \times I), z, \xi)). \quad (9.2)$$

Porém, conforme mostramos no apêndice E, essa matriz de transferência pode sempre ser escrita como um produto de operadores que agem localmente nas plaquetas, vértices e arestas da rede.

Do logaritmo da matriz de transferência $U(z_s, z_t, \xi_t, \xi_s)$, pode-se definir uma hamiltoniana $H(z_s, z_t, \xi_t, \xi_s)$. Porém, encontrar uma expressão analítica para essa hamiltoniana não é uma tarefa trivial em geral, o que significa que não sabemos definir um modelo quântico cuja matriz de transferência seja dada por $U(z_s, z_t, \xi_t, \xi_s)$ para todo ponto do espaço de parâmetros. Em alguns casos, entretanto, essa tarefa pode ser executada sem muitas complicações. Como caso particular, quando os parâmetros são aqueles dados por

$$\begin{aligned} z_s &= \frac{1}{|G|} \left(\eta + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \mathcal{I} \right) \Leftrightarrow \beta = \Lambda + \frac{1}{e^{J_f} - 1} \epsilon, \\ z_t &= \eta \Leftrightarrow z = \eta, \\ \xi_s &= \frac{1}{|G|} \epsilon \Leftrightarrow \xi = \frac{1}{|G|} \epsilon, \\ \xi_t &= \epsilon + \frac{|G|}{e^{J_c} - 1} \Lambda \Leftrightarrow a = \frac{1}{|G|} \mathcal{I} + \frac{1}{e^{J_c} - 1} \eta, \end{aligned}$$

a hamiltoniana $H(z_s, z_t, \xi_t, \xi_s)$ reproduz a hamiltoniana do modelo duplo quântico. Além disso, os mesmos parâmetros que parametrizam o modelo duplo quântico parametrizam também um modelo clássico em três dimensões, dado pela função de partição escrita acima. Essa função de partição, no limite topológico, é igual à degenerescência do nível fundamental do modelo duplo quântico [27] - equação (8.4). Esse resultado é uma prova formal de que a degenerescência do modelo duplo quântico é um invariante topológico e não depende dos parâmetros livres do modelo. Isso, por sua vez, evidencia a ordem topológica presente no limite de baixa energia do modelo duplo quântico.

Há ainda outras escolhas de parâmetros com os quais pode-se obter uma expressão analítica para a hamiltoniana $H(z_s, z_t, \xi_t, \xi_s)$. Um outro modelo interessante que pode ser obtido desta hamiltoniana é o modelo apresentado na seção 8.3.1. Este modelo representa um caso onde as quasi-partículas de dyon do modelo DQ são condensadas e isso leva a grandes consequências. Essa condensação de dyon é obtida deformando-se localmente a hamiltoniana do DQ e consiste em substituir o termo $A_{v_i} + B_{p_i}$ na hamiltoniana usual por $A_{v_i} B_{p_i}$ - um conjunto de sites $s_i = (v_i, p_i)$, ditos especiais. A primeira propriedade contrastante com as propriedades do DQ que aparece nesse modelo é que a degenerescência do vácuo, embora continue dependendo da topologia do espaço, depende também do número de sites especiais presentes na rede. Analisamos com mais detalhes os efeitos destas deformações locais no modelo toric code. Conforme vimos na equação (8.27), a degenerescência do vácuo neste modelo é igual a degenerescência do vácuo do toric code multiplicada por um termo que cresce exponencialmente com o número de sites especiais presentes. Mas, não é só a degenerescência do nível fundamental que é afetada. Conforme sabemos, o toric code descreve anyons abelianos; essas deformações locais, no entanto, permitem que esse modelo descreva, além das excitações usuais do toric code, anyons não-abelianos - que nesse caso são os Ising-anyons [31]. Isso significa que esse modelo, que é um modelo duplo quântico deformado localmente, fornece uma realização microscópica de anyons não-abelianos a partir de modelos DQs abelianos e, mais ainda, permite descrever anyons não-abelianos que não podem ser descritos pelo modelo DQ usual.

Com a formulação desenvolvida neste trabalho - a partir da deformação de uma teoria de campo topológica na rede - pudemos obter modelos que descrevem anyons como excitação de quasi-partículas que não podem ser descritos pelo modelo duplo quântico. Devemos ob-

servar que a estrutura algébrica por trás do formalismo apresentado é a mesma estrutura algébrica que está por trás do modelo duplo quântico - a álgebra de grupo de um grupo G que depende exclusivamente do grupo G . Porém, diferentemente do modelo duplo quântico, as excitações aniônicas provenientes de modelos originados deste formalismo, em casos particulares, dão origem a categorias de fusão que são mais gerais que a categoria de fusão do DQ.

9.2. Comentários finais e perspectivas futuras

O esquema geral no qual os sistemas aniônicos encaixam-se - apresentado no capítulo 2 - é na verdade uma descrição das regras de fusão e das regras de braid que os anyons de um determinado sistema obedecem. Esse esquema pode ser formulado matematicamente de maneira mais rigorosa usando-se uma estrutura matemática bastante abstrata, e ao mesmo tempo muito poderosa - a estrutura de categorias. Mais precisamente, as regras de fusão, de braid, bem como as regras do pentágono e do hexágono, são codificadas por uma categoria específica chamada categoria de fusão ("fusion category"). Uma breve noção sobre categorias de fusão é dada a seguir.

Uma categoria $\mathcal{C}$ é formada por objetos e morfismos entre esses objetos. O conjunto de todos os objetos de $\mathcal{C}$ é denotado por $Obj(\mathcal{C})$ enquanto que os morfismos entre dois objetos, por exemplo $A, B \in Obj(\mathcal{C})$, é denotado por $Hom(A, B)$. Numa categoria existe a noção de composição de morfismos, isso é, dados dois morfismos $f \in Hom(A, B)$ e $g \in Hom(B, C)$, definimos $g \circ f \in Hom(A, C)$ como a composição deste de g com f . Além disso, a regra de composição deve ser associativa. Existe também, para cada objeto $A \in Obj(\mathcal{C})$, um morfismo identidade, denotado por $1_A \in Hom(A, A)$, tal que $f \circ 1_A = f$. Note que nem sempre é possível compor dois morfismos quaisquer, se $f \in Hom(A, B)$ e $g \in Hom(U, V)$ a composição $g \circ f$ só está definida se $B = U$; analogamente, a composição $f \circ g$ só está definida se $V = A$. Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita ser uma categoria monoidal (ou tensorial) se existir um mapa $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ que seja associativo e existir um objeto identidade, denotado por 1 , (à esquerda e à direita) para tal operação. Por fim, uma categoria de fusão é uma categoria monoidal para qual o objeto identidade seja simples - isto é, que não possua subobjetos não triviais.

Resumindo, dado um sistema aniônico - com regras de fusão e de braid satisfazendo às regras do pentágono e do hexágono - o esquema apresentado no capítulo 2 representa, na verdade, uma categoria de fusão onde os objetos são as cargas aniônicas. Esse esquema geral, porém, bem como a categoria de fusão, não representa um modelo físico microscópico. Em geral, existe uma categoria de fusão para cada modelo microscópico que suporta anyons como excitação de quasi-partículas. O modelo DQ, por exemplo, descreve excitações aniônicas que encaixam-se nesse esquema geral e, cada grupo G (a menos de isomorfismos) leva a uma categoria de fusão diferente. Sendo assim, existe uma importante classe de categoria de fusão que é parametrizada pelo grupo G . Nesta categoria, os objetos, que são as cargas aniônicas do modelo DQ, são parametrizados pelas representações irredutíveis da álgebra do duplo quântico $D(G)$. Apesar disso, existem modelos aniônicos que levam a categorias de fusão que não são parametrizadas por nenhum grupo, isto é, que não pertencem à classe das categorias de fusão de grupo. Esse é o caso, por exemplo, dos Ising-anyons e dos Fibonacci-

anyons, que não podem ser descritos pelo modelo duplo quântico (para nenhum grupo G). Sendo assim, uma pergunta natural a se fazer neste ponto seria: dada uma categoria de fusão arbitrária, existe sempre um modelo microscópico que descreva tais excitações? A resposta para essa pergunta é sim - conforme explicada a seguir.

Em 2004 um modelo (2D) com variáveis de spin localizados nas arestas de uma rede hexagonal foi proposto por M. Levin e X. Wen [47]. Esse modelo, chamado de *string-net model* foi proposto para descrever sistemas aniônicos e, assim como o ponto de partida do modelo duplo quântico é grupo finito G , o ponto de partida do modelo string-net é uma categoria de fusão $\mathcal{C}$ que descreve as regras de fusão e braid das excitações provenientes deste modelo.

A álgebra de grupo usada para construir a TCK é um exemplo de uma álgebra de Hopf involutiva, e, a mesma construção pode ser feita para álgebras de Hopf em geral. Recentemente, descobriu-se que o espaço de vácuo do modelo DQ baseado na álgebra de grupóide (que é uma exemplo de uma álgebra de Hopf fraca [48]) é isomorfo ao espaço de vácuo do modelo string-net [49]; ou seja, pelo menos a princípio, pode-se obter os espaços de vácuo do modelo string-net a partir do modelo DQ. A álgebra chamada de álgebra de grupóide é bastante similar à álgebra de grupo, porém com a diferença de que essa é definida a partir de um grupóide $\mathcal{G}$ ao invés de um grupo. Sendo assim, é esperado que se possa definir um modelo análogo à TCK considerando-se a álgebra de grupóide de um grupóide $\mathcal{G}$ ao invés da álgebra de grupo. Na seção 8.4 do capítulo anterior, apresentamos um exemplo onde consideramos um grupóide ao invés de um grupo. No caso apresentado, consideramos um grupóide formado por dois grupos desconexos G_1 e G_2 . Conforme vimos, esse modelo leva a um superposição de dois modelos duplo quânticos, cada um parametrizado por um grupo. Mesmo no caso em que os grupos são todos iguais e abelianos, isto é, $G_1 = G_2 = \mathbb{Z}_2$, por exemplo, o modelo permite descrever excitações aniônicas com regras de fusão não-abelianas. Isso mostra que estudar o modelo duplo quântico baseado em grupóides pode trazer resultados novos e, possivelmente, a realização de novas fases topológicas. Resultados preliminares indicam que esses modelos são capazes de descrever excitações aniônicas confinadas e não-confinadas. Porém, esses aspectos ainda precisam ser investigados com mais cuidado.

Por fim, embora esse não seja o assunto desta tese, gostaríamos de mencionar que o formalismo utilizado para obter um modelo quântico de muitos corpos a partir de uma função de partição invariante de gauge clássica na rede é baseado no uso de tensor networks. Isso por sua vez torna as manipulações algébricas mais simples e permite, por exemplo, a inclusão de campos de matéria nos modelos quânticos de muitos corpos. A forma como obtemos um modelo quântico foi partindo-se de uma função de partição clássica na rede que pode ser pensada como uma generalização da função de partição das teorias de gauge puras na rede, isto é, teorias de gauge onde só existem campos de gauge - representados pelos elementos do grupo G vivendo nas arestas da rede. Há, entretanto, modelos de gauge na rede onde existem também graus de liberdade de matéria vivendo nos vértices da rede. A interação dos campos de gauge com os campos de matéria se dão pelo transporte paralelo realizado pelos elementos do grupo de gauge sobre os vetores que representam os graus de liberdade de matéria. Em [30], mostramos que, tal como a função de partição das teorias de gauge puras, a função de partição de modelos com matéria em três dimensões pode também ser representada por uma tensor network. Com isso, conseguimos obter uma representação em termos de tensor network para a matriz de transferência. Essa por sua vez pode ser

pensada como um operador de evolução temporal para tempo imaginário donde se obtém uma hamiltoniana de muitos corpos - semelhante às hamiltonianas obtidos nos modelos analisados neste trabalho - com a diferença, porém, de que esses modelos quânticos possuem graus de liberdade de matéria além dos graus de liberdade usuais. Em particular, analisamos alguns exemplos que representam a inclusão de campos de matéria no modelo duplo quântico; apresentamos uma formulação do toric code com campos de matéria que, diferentemente do caso usual, não possui nível fundamental degenerado, mas, mesmo assim, descreve excitações de quasi-partículas localizadas nos vértices, plaquetas e arestas da rede.

A. Propriedades e identidades de álgebras de Hopf

A.1. Identidades e propriedades de álgebras associativas

Baseado em [40], nessa e nas seções seguintes deste apêndice discutiremos algumas identidades e propriedades das álgebras associativas, as quais foram bastante usadas no texto. Começamos por mostrar alguns resultados auxiliares enunciados na forma de proposições. Este apêndice foi quase que integralmente retirado da dissertação de mestrado [44], a prova de algumas proposições foram supridas no intuito de deixar o texto mais prático, mas todas elas podem ser encontradas nesta referência. Neste e nos demais apêndices usaremos a notação da soma de Einstein para índices repetidos dos tensores.

A.1.1. Traço e cotraço da representação regular

Proposição A.1 *O traço de um elemento da álgebra na representação regular ¹ pode ser escrito em função da constante de estrutura da multiplicação, como mostrado na figura A.1(a). Da mesma forma, o traço na álgebra dual é dado pela constante de estrutura da comultiplicação, como mostrado na figura A.1(b)*

$\chi_A = \sum_k m_{ak}^k \equiv \rightarrow m$	$\chi_{A^*} = \sum_k \Delta_k^{ka} \equiv \rightarrow \Delta$
<p>(a) Traço da representação regular da álgebra.</p>	<p>(b) Traço da representação regular da coálgebra.</p>

Figura A.1.: traço das representações regulares.

Prova: uma representação ρ de $\mathcal{A}$ é um homeomorfismo $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}(n, \mathbb{C})$, sendo $\mathcal{M}(n, \mathbb{C})$ a álgebra das matrizes quadrada de ordem n sobre os complexos, e o produto sendo definido como o produto usual de matrizes. O traço de $a \in \mathcal{A}$ nesta representação é dado por:

$$\text{tr} \left(\rho \left(\hat{\phi}_a \right) \right) = \sum_i \left[\rho \left(\hat{\phi}_a \right) \right]_i^i.$$

Considere o módulo regular, gerado pela ação de um elemento da álgebra sobre ela mesma, ou seja, definimos a ação de um elemento $\hat{\phi}_g$ da base da álgebra como sendo:

$$\hat{\phi}_g \triangleright \hat{\phi}_a = \hat{\phi}_g \hat{\phi}_a = \left[\rho \left(\hat{\phi}_g \right) \right]_a^j \hat{\phi}_j,$$

¹Veja a definição de representação regular da álgebra na definição B.5 no apêndice B.

mas da equação (4.1a), sabemos que $\hat{\phi}_g \hat{\phi}_a = m_{ga}^j \hat{\phi}_j$, e portanto $\left[\rho(\hat{\phi}_g) \right]_a^j = m_{ga}^j$. Desta forma o traço fica:

$$\chi_{\mathcal{A}}(\hat{\phi}_g) = \text{tr}(\rho(\hat{\phi}_g)) = \sum_a \left[\rho(\hat{\phi}_g) \right]_a^a = \sum_a m_{ga}^a.$$

A prova de que o cotraço é dado pelo tensor Δ_k^{ka} é análoga, com a diferença que fazemos tudo no espaço dual.

□

Exemplo A.1 Como exemplo vamos calcular o traço na representação regular da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$. Pela proposição acima, sabemos que:

$$\chi_{\mathbb{C}G}(\hat{\phi}_g) = \sum_a m_{ag}^a,$$

e da equação (4.19), sabemos que $m_{ab}^c = \delta(ab, c)$ para a álgebra de grupo. Sendo assim obtemos:

$$\chi_{\mathbb{C}G}(\hat{\phi}_g) = \sum_a \delta(ag, a) = \sum_a \delta(g, e) = \delta(g, e) \sum_a 1 = |G| \delta(g, e). \quad (\text{A.1})$$

Analogamente, da equação (4.20), sabemos que $\Delta_a^{bc} = \delta(a, b)\delta(a, c)$ para a álgebra de grupo e , sendo assim, obtemos:

$$\chi_{\mathbb{C}G^*}(\hat{\psi}^g) = \sum_a \Delta_a^{ag} = \sum_a \delta(a, a)\delta(a, g) = 1. \quad (\text{A.2})$$

Proposição A.2 Os tensores $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ e $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$, definidos na seção 7.3.1 do capítulo 7, são invariantes por permutações cíclicas de seus índices sempre que z e ξ são elementos do centro da álgebra e do centro da álgebra dual, respectivamente. Na figura A.2 esses tensores encontram-se desenhados de forma a evidenciar a simetria por permutação de seus índices. Além disso eles também podem ser escritos da forma como mostrado na figura A.3.

Figura A.2.: Evidenciando a ciclicidade dos tensores $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ e $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$.

Figura A.3.:

Figura A.4.: prova da proposição A.2, parte 1.

Figura A.5.: prova da proposição A.2, parte 2.

Prova: vamos primeiramente mostrar que o tensor $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ é invariante por permutações cíclicas de seus índices. Para isso considere a definição deste tensor na primeira linha da figura A.4, onde usando a associatividade da multiplicação (figura 4.6(a)), nas regiões em destaques, e obtemos o diagrama desenhado na última linha da mesma figura. Se continuarmos a repetir esse procedimento mais algumas vezes acabaremos por obter o diagrama mostrado na figura A.5. O que resulta na identidade mostrada na figura A.2(a), e portanto prova a primeira parte dessa proposição.

Para a segunda parte considere novamente a figura A.4 (última linha). Note que esse diagrama pode ser reagrupado no diagrama mostrado na figura A.6, usando para isso somente a definição do tensor $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ e o fato de z ser um elemento do centro da álgebra

(ver definição 4.3). Por fim podemos notar que a identidade mostrada na figura A.3(a) se verifica.

Figura A.6.: prova da proposição A.2, parte 3.

A prova para o tensor $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$ é análoga, e necessita somente da propriedade da coassociatividade (figura 4.7(b)), da definição do tensor $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$ e do fato de ξ ser um elemento do centro da coálgebra.

□

A.2. Propriedades gerais das álgebras de Hopf

Proposição A.3 *Numa álgebra de Hopf a antípoda é um anti-homeomorfismo de álgebra e um coanti-homeomorfismo de coálgebra, ou seja,*

prova: ver apêndice da dissertação de mestrado [44].

A próxima proposição diz respeito à unidade e counidade da álgebra.

Proposição A.4 *Numa álgebra de Hopf a unidade e a counidade são invariantes pela ação da antípoda, ou seja,*

$$\eta \rightarrow S \rightarrow \equiv \eta \rightarrow \quad \rightarrow S \rightarrow \epsilon \equiv \rightarrow \epsilon$$

Prova: a prova desta proposição é muito simples, basta considerarmos a proposição A.3. Na figura A.7 encontra-se feita com todos os detalhes a prova de que a primeira relação é verdadeira. A prova para a segunda relação é idêntica, basta inverter todas as setas da demonstração feita na figura A.7 e trocar a multiplicação e a unidade pela comultiplicação e a counidade, respectivamente.

□

$$\begin{aligned}
\eta \rightarrow S \rightarrow &\equiv \eta \rightarrow S \rightarrow m \rightarrow \equiv \eta \rightarrow S \rightarrow m \rightarrow \equiv \eta \rightarrow S^{-1} \rightarrow S \rightarrow m \rightarrow \equiv \eta \rightarrow S^{-1} \rightarrow m \rightarrow S \rightarrow \equiv \\
&\equiv \eta \rightarrow S^{-1} \rightarrow S \rightarrow \equiv \eta \rightarrow
\end{aligned}$$

Figura A.7.: prova da proposição A.4.

As próximas proposições que iremos mostrar estão diretamente ligadas à condição de semi-simplicidade das álgebras de Hopf. Conforme teorema em [42] atesta, uma álgebra de Hopf é semi-simples se, e somente se, existir uma integral e uma cointegral (ver definição 4.5), não nulas, na álgebra. Sendo assim, a existência de integral é um tópico bastante relevante em álgebras de Hopf. A proposição a seguir mostra explicitamente uma cointegral e uma integral da álgebra, as quais podem inclusive ser nulas. Além disso essas integrais e cointegrais são únicas a menos de multiplicação por constantes [40].

Proposição A.5 *Em uma álgebra de Hopf o tensor desenhado na figura A.8(b) é sempre uma integral à direita, enquanto que o desenhado na figura A.8(a) é sempre uma cointegral à esquerda.*

Figura A.8.: integral e cointegral em álgebras de Hopf.

prova: ver apêndice da dissertação de mestrado [44].

Estamos considerando neste trabalho somente álgebras de Hopf cuja antípoda possui a propriedade $S^2 \equiv 1$. Álgebras de Hopf que atendem a essa exigência são chamadas de *involutivas*. Segue da proposição A.5 que se a álgebra de Hopf é involutiva a integral e cointegral são respectivamente os desenhados na figura A.9, os quais, pela proposição A.1, são iguais ao traço e ao cotraço na representação regular da álgebra. O traço e cotraço da representação regular são sempre não nulos, portanto, podemos dizer que álgebras de Hopf involutiva são sempre semi-simples.

Figura A.9.: integral e cointegral em álgebras de Hopf involutivas.

Exemplo A.2 Vamos calcular como exemplo a integral e a cointegral da álgebra de grupo. Da proposição A.1 sabemos que os coeficientes da integral e da cointegral são numericamente iguais ao traço e ao cotraço na representação regular da álgebra, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^g &= \sum_{a \in G} \Delta_a^{ag} , \\ \Lambda_g &= \sum_{a \in G} m_{ga}^a .\end{aligned}$$

Usando os resultados obtidos no exemplo A.1 obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}^g &= 1 , \\ \Lambda_g &= |G| \delta(g, e) ,\end{aligned}$$

o que é o mesmo que escrever

$$\mathcal{I} = \sum_{a \in G} \hat{\phi}_a , \quad (\text{A.3a})$$

$$\Lambda = |G| \hat{\psi}^e . \quad (\text{A.3b})$$

Proposição A.6 Em uma álgebra de Hopf Involutiva o tensor desenhado na figura A.10 é numericamente igual à dimensão da álgebra.

Figura A.10.: contração da integral com a cointegral numa álgebra de Hopf involutiva.

Prova: essa prova é trivial e é consequência direta do fato de que o traço da multiplicação é uma integral da álgebra, veja a figura A.11. Portanto a contração do traço com o cotraço

$$\rightarrow \Delta \rightarrow m \equiv \rightarrow m \xrightarrow{\eta} \Rightarrow \Delta \rightarrow m \equiv \eta \rightarrow m \equiv \bigcirc \equiv \text{tr}(\mathbb{1})$$

Figura A.11.: prova da proposição A.6.

é igual ao traço do mapa identidade e que por sua vez é igual à dimensão da álgebra.

□

A.2.1. Propriedades da antípoda em álgebras de Hopf involutivas

Por fim, essa última proposição mostra uma maneira de se escrever a antípoda de álgebras de Hopf involutivas em função das constantes de estrutura da multiplicação e comultiplicação.

$$\bigcirc \rightarrow S \rightarrow \equiv \rightarrow m \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} m \leftarrow \Delta \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \Delta \rightarrow$$

Figura A.12.: antípoda numa álgebra de Hopf involutiva.

Proposição A.7 *Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Hopf involutiva, então a antípoda é dada pelo diagrama da figura A.12.*

prova: *ver apêndice da dissertação de mestrado [44].*

Alternativamente, visto que $S^2 = \mathbb{1}$, a relação escrita na proposição acima pode também ser escrita como mostrado na figura A.13. Em que, g^{ab} , definido na figura, é a forma bilinear inversa de M_{xy} .

Em geral, pode-se enunciar como condição de semi-simplicidade de uma álgebra, que esta é semi-simples se a forma bilinear M_{xy} , construído a partir das constantes de estrutura da multiplicação, for inversível, ou seja, se existir g^{ab} tal que $M_{a,x}g^{xb} = \delta(a,b)$. A figura A.13 garante esse critério de semi-simplicidade para álgebras de Hopf involutivas. Escrito na

$$\underbrace{\rightarrow m \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} m \leftarrow \Delta \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \Delta \rightarrow S \rightarrow}_{M_{xy}} \underbrace{\equiv \bigcirc \rightarrow}_{(\dim \mathcal{A}) g^{ab}}$$

Figura A.13.: definição do tensor g^{ab} .

forma algébrica usual, o tensor g^{ab} , em termo das constantes de estrutura da álgebra, fica:

$$g^{ab} = \frac{1}{\dim \mathcal{A}} \sum_x \Delta^{ax} S_x^b. \quad (\text{A.4})$$

No caso específico da álgebra de grupo, onde $\Delta_a^{bc} = \delta(a,b)\delta(b,c)$ e $S_a^b = \delta(a,b^{-1})$, obtemos:

$$g^{ab} = \frac{1}{|G|} \delta(a, b^{-1}), \quad (\text{álgebra de grupo}). \quad (\text{A.5})$$

Já no caso da álgebra do duplo quântico, onde $\Delta_{(a,b)}^{(p,q)(u,v)} = \delta(a,p)\delta(a,u)\delta(v,bq^{-1})$ e $S_{(a,b)}^{(u,v)} = \delta(a,u^{-1})\delta(v,aba^{-1})$, obtemos:

$$g^{(a,b)(u,v)} = \frac{1}{|G|} \delta(a, u^{-1})\delta(v, ubu^{-1}), \quad (\text{álgebra do duplo quântico}). \quad (\text{A.6})$$

No apêndice C iremos estudar as representações irredutíveis dessas álgebras e seus caracteres irredutíveis, e, conforme veremos, o tensor g^{ab} será muito importante para definir essas quantidades.

B. Representações de álgebras semi-simples

Todos os exemplos de álgebra de Hopf que utilizamos neste trabalho são álgebras semi-simples. Afim de estudar as representações irredutíveis destas álgebras neste apêndice apresentarei um pouquinho da teoria de representação das álgebras semi-simples. Considere então uma álgebra associativa e com unidade, definida pelo trio $\langle \mathcal{A}, m, \eta \rangle$, conforme definido no capítulo 4, nas equações (4.2) e (4.5). Antes de iniciar nosso estudo precisaremos definir alguns conceitos básicos, como o de módulo e submódulo, por exemplo.

B.1. Módulos, submódulos e irreducibilidade

O primeiro conceito que iremos definir é a noção de módulo da álgebra, que representa a ação de uma álgebra sobre um espaço vetorial V .

Definição B.1 *Um $\mathcal{A}$ -módulo é um espaço vetorial V de dimensão finita, com uma estrutura extra que é a ação da álgebra sobre V . Para $a \in \mathcal{A}$ e $v \in V$ essa ação é simbolizada por:*

$$a \triangleright v, \text{ ou } v \triangleleft a,$$

dependendo de a ação ser uma ação à esquerda ou à direita, respectivamente. O espaço vetorial V é dito ser um $\mathcal{A}$ -módulo (à esquerda) se as seguintes relações são satisfeitas para todo $a, b \in \mathcal{A}$, $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

- i) $a \triangleright v \in V$,*
- ii) $\eta \triangleright v = v$,*
- iii) $a \triangleright (b \triangleright v) = ab \triangleright v$,*
- iv) $a \triangleright (\lambda v) = \lambda (a \triangleright v)$,*
- v) $a \triangleright (u + v) = a \triangleright u + a \triangleright v$.*

De agora em diante, sempre que nos referirmos a um $\mathcal{A}$ -módulo deverá ficar subentendido que este é um módulo à esquerda, salvo menção contrária. As condições *iv)* e *v)* garantem que a ação da álgebra é uma transformação linear, e portanto, dado um $\mathcal{A}$ -módulo V , existe um mapa $\pi_V : \mathcal{A} \rightarrow M(\dim V, \mathbb{C})$, onde $M(n, \mathbb{C})$ é a álgebra das matrizes quadradas de ordem $n \times n$ com o produto usual de matriz, tal que:

$$a \triangleright v = \pi_V(a)v,$$

para todo $a \in \mathcal{A}$ e $v \in V$. Chamamos o mapa π_V de representação da álgebra associada ao módulo V . A matriz $\pi_V(a)$ é uma representação do elemento $a \in \mathcal{A}$. Note que definir a ação do módulo é o mesmo que fornecer a representação $\pi_V(a)$ para todo $a \in \mathcal{A}$ e, sendo assim, usamos as palavras “módulo” e “representação” como sinônimos. Note também que, devido à condição *iii*), as representações devem obedecer à seguinte relação:

$$\pi_V(ab) = \pi_V(a)\pi_V(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Um $\mathcal{A}$ -módulo pode conter submódulos, cuja definição é dada a seguir.

Definição B.2 *Seja V um $\mathcal{A}$ -módulo, dizemos que U é um $\mathcal{A}$ -submódulo de V se U é um subespaço vetorial de V e, para todo $u \in U$ e $a \in \mathcal{A}$, valer que $a \triangleright u \in U$.*

Note que para qualquer $\mathcal{A}$ -módulo V , os subespaços vetoriais $\{0\}$ e V são sempre $\mathcal{A}$ -submódulos de V , chamados de $\mathcal{A}$ -submódulos triviais. A noção de submódulos é essencial para definir a noção de irreducibilidade dos módulos. Dizemos que um $\mathcal{A}$ -módulo V é irreduzível se este não possuir $\mathcal{A}$ -submódulos além dos triviais. Caso contrário V é dito ser redutível.

Definição B.3 *Sejam V e W dois $\mathcal{A}$ -módulos e seja $\vartheta : V \rightarrow W$ um mapa linear. Dizemos que ϑ é um $\mathcal{A}$ -homeomorfismo se ϑ preservar a ação do módulo nos dois $\mathcal{A}$ -módulos, ou seja, se para todo $a \in \mathcal{A}$ e $v \in V$ valer a seguinte propriedade:*

$$\vartheta(a \triangleright v) = a \triangleright \vartheta(v).$$

Em outras palavras, se v é mapeado em $w \in W$, então $a \triangleright v$ será mapeado em $a \triangleright w$. Se um $\mathcal{A}$ -homeomorfismo ϑ é inversível, então este é dito ser um $\mathcal{A}$ -isomorfismo, e nesse caso V e W são dois $\mathcal{A}$ -módulos isomorfos (nesse caso escrevemos $V \sim W$).

Definição B.4 *Seja V um $\mathcal{A}$ -módulo e seja $a \in \mathcal{A}$, definimos o espaço $a \triangleright V$ por:*

$$a \triangleright V = \{a \triangleright v : v \in V\}. \quad (\text{B.1})$$

Não é difícil ver que $a \triangleright V$ é um espaço vetorial, uma vez que a estrutura de módulo preserva a estrutura linear de V .

Definição B.5 *Um módulo V é dito ser semi-simples se este é isomorfo a uma soma direta de módulos irreduzíveis. A álgebra $\mathcal{A}$ pode ser vista como sendo um $\mathcal{A}$ -módulo, cuja ação é definida por $a \triangleright b := ab$, para todo $a, b \in \mathcal{A}$, esse módulo é chamado de módulo regular. Uma álgebra é dita ser semi-simples se esta, vista como um $\mathcal{A}$ -módulo, é semi-simples.*

O teorema a seguir é o *teorema de Wedderburn* que diz respeito a álgebras semi-simples. Este teorema será o ponto de partida para estudarmos os módulos irreduzíveis das álgebras semi-simples. Por uma questão de simplicidade, para não fugir muito do propósito desse apêndice, não iremos provar a validade deste teorema, porém àquele que deseja ver a demonstração de tal teorema sugiro a referência [50].

Teorema B.1 (Wedderburn) *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra semi-simples e seja $M(n, \mathbb{C})$ a álgebra das matrizes de ordem $n \times n$, com $n \in \mathbb{N}$. Então existem $n_\mu \in \mathbb{N}$, com $\mu \in J = \{1, 2, \dots, l\}$, tais que a álgebra $\mathcal{A}$ é isomorfa à soma direta de todos os $M(n_\mu, \mathbb{C})$, isto é,*

$$\mathcal{A} \sim \bigoplus_{\mu \in J} M(n_\mu, \mathbb{C}) . \quad (\text{B.2})$$

O teorema B.1 garante que existe um mapa linear inversível $T : \mathcal{A} \rightarrow \bigoplus_{\mu \in J} M(n_\mu, \mathbb{C})$ o qual é também um isomorfismo de álgebras. Por esta razão é suficiente considerarmos a álgebra $\mathcal{A} = \bigoplus_{\mu \in J} M(n_\mu, \mathbb{C})$, sem perda de generalidade. Com isso todo $a \in \mathcal{A}$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$a = \{a_1, a_2, \dots, a_l\} , \quad (\text{B.3})$$

sendo $a_\mu \in M(n_\mu, \mathbb{C})$. Dados $a, b \in \mathcal{A}$, então $a = b$ se, e somente se, $a_\mu = b_\mu$, para todo $\mu \in J$. O produto $ab = c$ fica determinado por $c_\mu = a_\mu b_\mu$, para todo $\mu \in J$.

Como consequência imediata do teorema B.1, os naturais n_μ devem satisfazer à seguinte igualdade envolvendo a dimensão da álgebra:

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_{\mu \in J} (n_\mu)^2 . \quad (\text{B.4})$$

B.1.1. Centro das álgebras semi-simples

Se $b \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ (ver definição 4.3), então $ba = ab$, para todo $a \in \mathcal{A}$ e isto implica que $b_\mu a_\mu = a_\mu b_\mu$, para todo $a_\mu \in M(n_\mu, \mathbb{C})$. Essa condição só pode ser satisfeita para todo $a_\mu \in M(n_\mu, \mathbb{C})$ se $b_\mu = 0$ ou se $b_\mu \in \mathcal{Z}(M(n_\mu, \mathbb{C}))$. O centro da álgebra das matrizes é gerado pela matriz identidade somente, portanto tem-se somente essas duas possibilidades para todo $\mu \in J$: $b_\mu = 0$ ou $b_\mu = \mathbb{1}_\mu$. Sendo assim, qualquer elemento do centro de $\mathcal{A}$ será uma combinação linear dos elementos $\mathfrak{z}_\mu$, definidos por:

$$\mathfrak{z}_\mu = (0, 0, \dots, \mathbb{1}_\mu, \dots, 0, 0) . \quad (\text{B.5})$$

Esses elementos são tais que:

$$\mathfrak{z}_\mu a = (0, 0, \dots, a_\mu, \dots, 0, 0) . \quad (\text{B.6})$$

Em outras palavras $\{\mathfrak{z}_\mu : \mu \in J\}$ é uma base de geradores idepotentes do centro da álgebra, pois esses satisfazem, para todo $\mu, \mu' \in J$, às seguintes relações:

$$\mathfrak{z}_\mu \mathfrak{z}_{\mu'} = \delta(\mu, \mu') \mathfrak{z}_\mu , \quad (\text{B.7a})$$

$$\sum_{\mu \in J} \mathfrak{z}_\mu = \eta , \quad (\text{B.7b})$$

sendo η a unidade de $\mathcal{A}$.

B.1.2. Representações irreduzíveis das álgebras semi-simples

Cada subálgebra $M(n_\mu, \mathbb{C})$ dá origem a um $\mathcal{A}$ -módulo irreduzível $S_\mu = \mathbb{C}^{n_\mu}$, no qual a estrutura de $\mathcal{A}$ -módulo é definida por:

$$a \triangleright v = a_\mu v, \quad \forall a \in \mathcal{A} \text{ e } \forall v \in S_\mu. \quad (\text{B.8})$$

Proposição B.1 *O $\mathcal{A}$ -módulo S_μ , definido acima, é irreduzível.*

Prova: suponha que exista um $\mathcal{A}$ -submódulo $U \subseteq S_\mu$ não nulo. Seja $u \in U$, um elemento não nulo qualquer. Então para todo $v \in S_\mu$ existe alguma matriz $a_\mu \in M(n_\mu, \mathbb{C})$ tal que $a_\mu u = v$, mas, uma vez que U é um submódulo de S_μ , $a_\mu u \in U$, enquanto que v não necessariamente pertence a U . Logo todo elemento de S_μ pertence a U e com isso não resta opção se não $U = S_\mu$. Assim S_μ não possui submódulos não triviais e é portanto irreduzível. $\square$

A proposição B.1 garante que todos os $\mathcal{A}$ -módulos S_μ são irreduzíveis, no entanto, ainda não há garantia de que esses sejam todos os módulos irreduzíveis de $\mathcal{A}$. Para começar precisamos mostrar que esses módulos não são isomorfos, a proposição a seguir mostra exatamente isso.

Proposição B.2 *Os módulos S_μ e $S_{\mu'}$, são isomorfos se, e somente se, $\mu = \mu'$.*

Prova: é trivial que esses dois módulos sejam isomorfos se $\mu = \mu'$, resta então considerar o caso $\mu \neq \mu'$. Considere então $\mu \neq \mu'$ e considere os espaços $\mathfrak{z}_\mu \triangleright S_\mu$ e $\mathfrak{z}_\mu \triangleright S_{\mu'}$, cuja definição é dada pela definição B.4. Note, com auxílio da equação (B.6), que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\mu \triangleright S_\mu &= \{\mathfrak{z}_\mu \triangleright v : v \in S_\mu\} = \{\mathbb{1}_\mu v : v \in S_\mu\} = S_\mu, \\ \mathfrak{z}_\mu \triangleright S_{\mu'} &= \{\mathfrak{z}_\mu \triangleright w : w \in S_{\mu'}\} = \{0 w : w \in S_{\mu'}\} = 0. \end{aligned}$$

Suponha que exista um isomorfismo $\theta : S_\mu \rightarrow S_{\mu'}$. Seja $w \in S_{\mu'}$ um elemento não nulo. Sabe-se que $\mathfrak{z}_\mu \triangleright w \in \mathfrak{z}_\mu \triangleright S_{\mu'}$. Mas o isomorfismo θ garante que existe $v \in S_\mu$ tal que $\theta(v) = w$, então

$$\mathfrak{z}_\mu \triangleright w = \mathfrak{z}_\mu \triangleright \theta(v) = \theta(\mathfrak{z}_\mu \triangleright v) = \theta(v) = w \in \mathfrak{z}_\mu \triangleright S_{\mu'}.$$

Ou seja, todo elemento de $S_{\mu'}$ pertence também a $\mathfrak{z}_\mu \triangleright S_{\mu'}$. Esse resultado contradiz a condição $\mathfrak{z}_\mu \triangleright S_{\mu'} = 0$. Logo não pode existir um isomorfismo entre S_μ e $S_{\mu'}$ se $\mu \neq \mu'$. $\square$

Resta ainda mostrar que o conjunto $\{S_\mu : \mu \in J\}$ é um conjunto completo, no sentido de que contém todas os módulos irreduzíveis da álgebra. A próxima proposição é suficiente para provar essa completude.

Proposição B.3 *A álgebra das matrizes $M(n_\mu, \mathbb{C})$ é isomorfa à soma direta de n_μ cópias idênticas de S_μ , ou seja,*

$$M(n_\mu, \mathbb{C}) \sim \underbrace{S_\mu \oplus S_\mu \oplus \cdots \oplus S_\mu}_{n_\mu}. \quad (\text{B.9})$$

Prova: essa prova é bastante simples, uma vez que $\dim S_\mu = n_\mu$ e que existem n_μ cópias deste espaço, por análise de dimensão pode-se ver que $\dim(S_\mu \oplus \cdots \oplus S_\mu) = (n_\mu)^2 = \dim(M(n_\mu, \mathbb{C}))$. Logo esses dois espaços são isomorfos. Para que exista um isomorfismo de álgebras entre esses dois espaços basta considerar qualquer isomorfismo de espaços vetoriais entre eles e usá-lo para induzir um produto em $S_\mu \oplus \cdots \oplus S_\mu$ a partir do produto em $M(n_\mu, \mathbb{C})$.

□

Segue imediatamente da proposição B.3 e do teorema de Wedderburn (teorema B.1), que a álgebra $\mathcal{A}$ é isomorfa à soma de módulos irredutíveis, escrito abaixo.

$$\mathcal{A} \sim \bigoplus_{\mu \in J} \underbrace{(S_\mu \oplus \cdots \oplus S_\mu)}_{n_\mu} . \quad (\text{B.10})$$

Isso garante a completude dos $\mathcal{A}$ -módulos irredutíveis S_μ . Para álgebras semi-simples, todo módulo irredutível é isomorfo a algum $\mathcal{A}$ -submódulo, mas da decomposição escrita acima, se existir algum módulo irredutível S , então esse deverá ser isomorfo à uma soma direta de S_μ 's, no entanto, essa soma não pode conter mais do que um termo, caso contrário S seria redutível, portanto existe $\mu \in J$ tal que $S \sim S_\mu$.

Resumindo o que fizemos até agora foi: mostrar que uma vez conhecida a decomposição da álgebra como uma soma direta de álgebras de matrizes, podemos facilmente encontrar todas as representações irredutíveis da álgebra e também uma base de idepotentes do centro da álgebra. Equivalentemente, se todas as representações irredutíveis são conhecidas, pela proposição B.3, podemos encontrar uma decomposição da álgebra como uma soma de álgebras de matrizes, além dos elementos idepotentes que geram o centro da álgebra. Por fim, conforme a proposição B.4 mostra, se a base de elementos idepotentes do centro é conhecida, podemos encontrar todos os módulos irredutíveis S_μ , bem como a decomposição da álgebra como uma soma direta de álgebra de matrizes. Mas antes precisaremos definir a noção de ideal da álgebra.

Definição B.6 *Seja $I \subseteq \mathcal{A}$ uma subálgebra de $\mathcal{A}$. I é dito ser um ideal à esquerda da álgebra se para todo $x \in I$ e para todo $a \in \mathcal{A}$ valer $xa \in I$. Analogamente, I é dito ser um ideal à direita se $ax \in I$. Se I é um ideal à esquerda e à direita chamamos I simplesmente de ideal da álgebra.*

Agora estamos pronto para enunciar a última proposição desta seção.

Proposição B.4 *Todo elemento idepotente $\mathfrak{z}_\mu \in \mathcal{Z}(\mathcal{A})$ do centro da álgebra define um ideal $\mathfrak{z}_\mu \mathcal{A}$ o qual é isomorfo a $M(n_\mu, \mathbb{C})$.*

Prova: primeiramente vamos mostrar que $\mathfrak{z}_\mu \mathcal{A}$ é um ideal da álgebra. Para isso considere $a, b \in \mathcal{A}$ e $\mathfrak{z}_\mu a \in \mathfrak{z}_\mu \mathcal{A}$. Usando a equação (B.6) obtemos:

$$(\mathfrak{z}_\mu a)b = (0, \dots, a_\mu, \dots, 0)(b_1, \dots, b_\mu, \dots, b_l) = (0, \dots, a_\mu b_\mu, \dots, 0) = \mathfrak{z}_\mu(ab) \in \mathfrak{z}_\mu \mathcal{A} .$$

Da mesma forma mostra-se que $b(\mathfrak{z}_\mu a) \in \mathfrak{z}_\mu \mathcal{A}$, logo $\mathfrak{z}_\mu \mathcal{A}$ é um ideal (à esquerda e à direita) de $\mathcal{A}$. Ainda pela equação (B.6) tem-se que:

$$\mathfrak{z}_\mu \mathcal{A} = \{\mathfrak{z}_\mu a : a \in \mathcal{A}\} = \{(0, \dots, a_\mu, \dots, 0) : a_\mu \in M(n_\mu, \mathbb{C})\} . \quad (\text{B.11})$$

Mas $\{(0, \dots, a_\mu, \dots, 0) : a_\mu \in M(n_\mu, \mathbb{C})\}$ é claramente isomorfo a $M(n_\mu, \mathbb{C})$ e o isomorfismo é trivial nesse caso, dado por $T(0, \dots, a_\mu, \dots, 0) = a_\mu$.

□

Finalmente, conclui-se que se $\mathcal{A}$ é uma álgebra semi-simples, então esta é isomorfa a uma soma de ideais da álgebra, os quais também determinam os elementos idepotentes do centro da mesma, em outras palavras,

$$\mathcal{A} \sim \bigoplus_{\mu \in J} \mathfrak{z}_\mu \mathcal{A} . \quad (\text{B.12})$$

B.2. Caracteres das representações irredutíveis

Na seção anterior apresentei a teoria de representação das álgebras semi-simples. Vimos que existe uma relação um-para-um entre os elementos idepotentes que determinam o centro da álgebra e os módulos irredutíveis da mesma. No entanto, em todas as provas apresentadas na seção anterior consideramos $\mathcal{A}$ igual a uma soma de álgebras de matrizes, e não isomorfa a soma dessas álgebras. Isso não tira a generalidade das demonstrações nem dos resultados obtidos, porém representa um inconveniente de ordem prática quando estamos querendo calcular os elementos do centro de uma dada álgebra, por exemplo. Por esse motivo, nesta seção vamos apresentar de forma breve e objetiva uma maneira de se determinar os elementos idepotentes do centro de uma álgebra semi-simples sem precisar mapeá-la numa soma direta de álgebra de matrizes. Faremos isso baseado na referência [51]; desenvolvendo a teoria de caracteres irredutíveis da álgebra.

Definição B.7 *Seja V um $\mathcal{A}$ -módulo e seja $\pi_V : \mathcal{A} \rightarrow M(\dim V, \mathbb{C})$ a representação associada ao módulo V . Definimos o caracter $\chi_V : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, associado à representação π_V , por:*

$$\chi_V(a) := \text{tr}(\pi_V(a)) . \quad (\text{B.13})$$

O caracter de uma representação é dito ser irredutível se tal representação for irredutível. Note que, uma vez que $\pi_V(ab) = \pi_V(a)\pi_V(b)$ e $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, concluímos

$$\chi_V(ab) = \chi_V(ba) , \quad \forall a, b \in \mathcal{A} . \quad (\text{B.14})$$

Ou seja, os caracteres são funções invariantes por permutações cíclicas do produto.

A proposição a seguir mostra como o caracter de um $\mathcal{A}$ -módulo V está relacionado com os caracteres dos submódulos de V .

Proposição B.5 *Seja V um $\mathcal{A}$ -módulo da forma $V = W_1 \oplus W_2$, sendo W_1 e W_2 dois submódulos de V . Assim, todo $v \in V$ é da forma $v = v_1 + v_2$, com $v_k \in W_k$. Então,*

$$\chi_V(a) = \chi_{W_1}(a) + \chi_{W_2}(a) .$$

Prova: considere π_{W_k} as representações associadas aos submódulos W_k . Então, da definição B.7, sabemos que:

$$\chi_{W_k}(a) = \text{tr}(\pi_{W_k}(a)) .$$

A ação de um elemento de $\mathcal{A}$ em um vetor de V , é definida por:

$$\pi_V(a)v = a \triangleright v = a \triangleright v_1 + a \triangleright v_2 = \pi_{W_1}(a)v_1 + \pi_{W_2}(a)v_2 ,$$

logo $\pi_V(a)$ é uma matriz bloco da forma:

$$\pi_V(a) = \begin{pmatrix} \pi_{W_1}(a) & 0 \\ 0 & \pi_{W_2}(a) \end{pmatrix} ,$$

donde tira-se que:

$$\text{tr}(\pi_V(a)) = \text{tr}(\pi_{W_1}(a)) + \text{tr}(\pi_{W_2}(a)) \Rightarrow \chi_V(a) = \chi_{W_1}(a) + \chi_{W_2}(a). \quad (\text{B.15})$$

□

Como consequência da proposição B.5 e do teorema de Wedderburn, podemos escrever o caracter do módulo regular $(\chi_{\mathcal{A}})$ em função dos caracteres dos submódulos $M(n_\mu, \mathbb{C})$, que aparecem na decomposição da equação (B.2), da seguinte maneira:

$$\chi_{\mathcal{A}}(a) = \sum_{\mu \in J} \chi_{M(n_\mu, \mathbb{C})}(a) , \quad (\text{B.16})$$

mas, pela proposição B.3, cada um dos submódulos $M(n_\mu, \mathbb{C})$ pode ainda ser decomposto numa soma direta de sumódulos S_μ . Se considerarmos π_μ a representação associada ao módulo (irredutível) S_μ , concluímos facilmente que $\pi_\mu(a) = a_\mu$ e $\chi_\mu(a) = \text{tr}(a_\mu)$, logo

$$\chi_{\mathcal{A}}(a) = \sum_{\mu \in J} n_\mu \chi_\mu(a) . \quad (\text{B.17})$$

Com o auxílio da proposição seguinte, seremos capazes de escrever cada um dos caracteres irredutíveis em função do caracter regular $\chi_{\mathcal{A}}$. Para isso considere que $\mathcal{A}$ possa ser escrito da seguinte maneira:

$$\mathcal{A} = W_1 \oplus W_2 ,$$

sendo W_1 e W_2 dois $\mathcal{A}$ -submódulos, tais que W_1 e W_2 não possuam nenhum submódulo em comum. Assim, todo $a \in \mathcal{A}$ é da forma $a = a_1 + a_2$, com $a_k \in W_k$. Em particular a identidade da álgebra pode ser escrita como: $\eta = e_1 + e_2$.

Proposição B.6 *Para todo $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$, tem-se que:*

$$\begin{aligned} e_1 w_1 &= w_1 , & e_1 w_2 &= 0 , \\ e_2 w_1 &= 0 , & e_2 w_2 &= w_2 . \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Prova: primeiramente notemos que o mapa $\theta : W_2 \rightarrow W_1$, definido por $\theta(w_2) = w_2 w_1$, é um $\mathcal{A}$ -homeomorfismo. No entanto, como W_1 e W_2 não possuem submódulos em comum, não resta outra possibilidade se não $\theta \equiv 0$, ou seja, $w_1 w_2 = 0$, para todo $w_k \in W_k$. Em particular, $e_1 w_2 = e_2 w_1 = 0$. Note que, para todo $a \in \mathcal{A}$, tem-se que $\eta a = a$, portanto, podemos escrever:

$$(e_1 + e_2)(a_1 + a_2) = a_1 + a_2 \Rightarrow e_1 a_1 + e_1 a_2 + e_2 a_1 + e_2 a_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow e_1 a_1 + e_2 a_2 = a_1 + a_2 ,$$

de onde tiramos as relações:

$$e_1 a_1 = a_1 \text{ e } e_2 a_2 = a_2 .$$

□

Segue da equação (B.17) que:

$$\chi_{\mathcal{A}}(e_{\nu}a) = \sum_{\mu \in J} n_{\mu} \chi_{\mu}(e_{\nu}a) ,$$

mas da proposição B.6 tem-se que $e_{\nu}a = a_{\nu}$, e $\chi_{\mu}(a_{\nu}) = \delta(\mu, \nu) \text{tr}(a_{\mu})$, ou seja,

$$\chi_{\mu}(a) = \frac{1}{n_{\mu}} \chi_{\mathcal{A}}(e_{\mu}a) . \quad (\text{B.19})$$

O tensor M_{ab} , da definição 7.14, com $z = \eta$, é uma forma bilinear inversível sempre que a álgebra em questão é semi-simples. Chamamos de g^{ab} a forma bilinear inversa de M_{ab} , isto é, $M_{ax}g^{xb} = \delta(a, b)$. Com o tensor g^{ab} e os caracteres irredutíveis da álgebra é possível escrever os geradores idepotentes do centro da álgebra.

Proposição B.7 *Considere novamente a decomposição da álgebra em termos de W_1 e W_2 , conforme definido na proposição anterior e considere $\{\hat{\phi}_i : i = 1, \dots, \dim \mathcal{A}\}$ uma base de $\mathcal{A}$. Então os elementos e_k , nesta base, são dados por:*

$$e_k = \sum_{i,j=1}^{\dim \mathcal{A}} g^{ij} \chi_{W_k}(\hat{\phi}_i) \hat{\phi}_j . \quad (\text{B.20})$$

Prova: vamos mostrar a validade desta proposição para e_1 , a prova para e_2 é análoga. Lembrando que $e_1 \in \mathcal{A}$, e então $e_1 = \lambda^l \hat{\phi}_l$. Considere o mapa linear $\theta^u : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, definido por:

$$\theta^u(a) = g^{ij} \hat{\psi}^u(\hat{\phi}_i) \hat{\phi}_j e_1 a$$

com $u \in \{1, 2, \dots, \dim \mathcal{A}\}$ e $\{\hat{\psi}^i : i = 1, \dots, \dim \mathcal{A}\}$ a base do espaço vetorial dual tal que $\hat{\psi}^i(\hat{\phi}_j) = \delta(i, j)$. Note que θ^u também pode ser escrito como:

$$\theta^u(a) = (g^{ij} \hat{\psi}^u(\hat{\phi}_i) \hat{\phi}_j e_1) \triangleright a ,$$

em que a ação nesse caso é a do módulo regular, sendo assim o traço desse mapa fica:

$$\text{tr}(\theta^u) = \chi_{\mathcal{A}}(g^{ij} \hat{\psi}^u(\hat{\phi}_i) \hat{\phi}_j e_1) = g^{ij} \hat{\psi}^u(\hat{\phi}_i) \chi_{\mathcal{A}}(\hat{\phi}_j e_1) ,$$

onde usando a proposição B.5 e o fato de que $\hat{\psi}^u(\hat{\phi}_i) = \delta(i, u)$, obtemos:

$$\text{tr}(\theta^u) = g^{iu} \chi_{W_1}(\hat{\phi}_i) .$$

Por outro lado, o mapa θ^u também pode ser escrito em função das constantes de estrutura da álgebra, na notação de diagramas de Kuperberg esse assume a forma exibida na figura B.1(a). Onde se calcularmos o traço, conforme pode ser visto na figura B.1(b), obtemos:

$$\text{tr}(\theta^u) = \hat{\psi}^u(e_1) = \lambda^u .$$

Segue então que $\text{tr}(\theta^u) = g^{iu} \chi_{W_1}(\hat{\phi}_i) = \lambda^u$ e, portanto:

$$e_1 = \sum_{i,j=1}^{\dim \mathcal{A}} g^{ij} \chi_{W_1}(\hat{\phi}_i) \hat{\phi}_j . \quad (\text{B.21})$$

(a) Diagrama de Kuperberg do mapa θ^u .

(b) Diagrama de Kuperberg de $\text{tr}(\theta^u)$.

Figura B.1.: mapa θ^u em função das constantes de estrutura da álgebra.

□

Embora as proposições B.6 e B.7 digam respeito à decomposição da álgebra em dois submódulos, essas são válidas também para um número arbitrário de submódulos. Pelo teorema de Wedderburn sabemos que se a álgebra é semi-simples esta admite a decomposição da equação (B.2), e então o caracter regular assume a forma mostrada na equação (B.17). Sabemos também que os elementos e_μ , referentes a cada um desses módulos, são na verdade os geradores idepotentes $\mathfrak{z}_\mu$ do centro da álgebra. Portanto, pela proposição B.7, esses elementos são determinados por:

$$\mathfrak{z}_\mu = \sum_{i,j=1}^{\dim \mathcal{A}} g^{ij} \chi_{M(n_\mu, \mathbb{C})}(\hat{\phi}_i) \hat{\phi}_j .$$

Das das proposições B.3 e B.5 podemos ainda escrever $\chi_{M(n_\mu, \mathbb{C})}(\hat{\phi}_i) = n_\mu \chi_\mu(\hat{\phi}_i)$ e com isso concluimos que:

$$\mathfrak{z}_\mu = n_\mu \sum_{i,j=1}^{\dim \mathcal{A}} g^{ij} \chi_\mu(\hat{\phi}_i) \hat{\phi}_j . \quad (\text{B.22})$$

Esses são os geradores idepotentes do centro da álgebra. A equação acima diz que esses podem ser facilmente determinados uma vez conhecidos todos os módulos irredutíveis da álgebra.

Figura B.2.: relações entre as propriedades e quantidades das álgebras semi-simples.

Como vimos existem algumas propriedades e quantidades bastantes relevantes para a teoria de representação de uma álgebra semi-simples, como por exemplo: os geradores idepotentes do centro, as representações irredutíveis da álgebra e a decomposição de Wedderburn. Para finalizar este apêndice o diagrama na figura B.2 ilustra as maneiras de se obter as outras propriedades/quantidades das álgebras semi-simples conhecendo-se uma delas.

C. Representações irredutíveis das álgebras de grupo e do duplo quântico

No apêndice anterior vimos que tantos as representações irredutíveis quando os elementos idepotentes do centro de uma álgebra semi-simples podem ser parametrizados pelo mesmo conjunto de índices $J = \{1, 2, \dots, l\}$, sendo $l = \dim(\mathcal{Z}(\mathcal{A}))$ o número de representações irredutíveis. No entanto, este conjunto de índices varia de álgebra para álgebra e não existe uma maneira sistemática de obtê-lo em geral. Neste apêndice mostraremos como determinar J para os casos especiais $\mathcal{A} = \mathbb{C}G$ e $\mathcal{A} = D(G)$. Uma álgebra de Hopf é semi-simples se, e somente se, existir uma integral à esquerda não nula na álgebra. Tanto a álgebra de grupo quanto a álgebra do duplo quântico possuem integrais não nulas à esquerda, portanto ambas são semi-simples [42]. Sendo assim podemos usar toda a teoria desenvolvida no apêndice anterior para estudar essas álgebras.

C.1. Álgebra de grupo

Vamos definir os módulos irredutíveis da álgebra de grupo. Conforme veremos, esses módulos são parametrizados por representações irredutíveis do grupo G . Lembrando que a álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ foi definida na seção 4.4.1 do capítulo 4.

C.1.1. Representações irredutíveis da álgebra de grupo

Considere G um grupo finito. Uma representação de G é um mapa ρ que mapeia elementos de G no grupo $GL(n, \mathbb{C})$ de tal forma que o produto seja preservado. O grupo de $GL(n, \mathbb{C})$ é o grupo das matrizes $M_{n \times n}$ inversíveis e cujas entradas pertencem ao corpo $\mathbb{C}$. Formalmente definimos uma representação do grupo como segue.

Definição C.1 *Seja G um grupo finito. Chamamos de representação de G um mapa $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ o qual seja um homeomorfismo, isto é, um mapa que satisfaça a seguinte propriedade para todo $a, b \in G$:*

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) . \quad (\text{C.1})$$

A correspondência entre representações do grupo e representações da álgebra de grupo é bastante simples. Se $\rho : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ é uma representação de G , definimos o $\mathbb{C}G$ -módulo $V_\rho = \mathbb{C}^n$, cuja ação, para todo $g \in G$ e $v \in V_\rho$, é dada por: $\hat{\phi}_g \triangleright v = \rho(g)v$. Além disso, a representação ρ é irredutível se, e somente se, o $\mathbb{C}G$ -módulo é irredutível.

No caso da álgebra de grupo um conjunto J que parametriza as representações e o centro da álgebra é dado pelas classes de conjugação do grupo. É um resultado bastante conhecido de teoria de grupo [52] que o número de classes de conjugação é igual ao número de representações irredutíveis do grupo, sendo assim, considere $\{C_R : R \in J\}$, com $J = \{1, 2, \dots, l\}$ as l classes de conjugação distintas de G , com representantes g_R , e considere $\{\pi_\rho : \rho \in J\}$ as l representações irredutíveis de G , sendo $n_\rho \times n_\rho$ a ordem da matriz $\pi_\rho(g)$. Os módulos irredutíveis da álgebra de grupo são V_ρ , definidos como descrito anteriormente e com $\dim V_\rho = n_\rho$.

Os caracteres da álgebra são iguais aos das representações do grupo, abusando um pouco da notação, escreveremos $\chi_\rho(g) = \chi_\rho(\hat{\phi}_g)$, e $\chi_\rho(z) = \sum_{g \in G} z^g \chi_\rho(\hat{\phi}_g)$, para todo $z \in \mathbb{C}G$.

C.1.2. Centro da álgebra de grupo

Da equação (B.22), uma vez conhecidos os caracteres irredutíveis da álgebra, os elementos idepotentes que geram o centro da mesma podem ser determinados. Da equação (A.5) sabemos que o tensor g^{ab} , no caso da álgebra de grupo, é dado por:

$$g^{ab} = \frac{1}{|G|} \delta(a, b^{-1}) .$$

Com isso os elementos idepotentes que geram o centro da álgebra de grupo são $\{\mathfrak{z}_\rho : \rho \in J\}$, com

$$\mathfrak{z}_\rho = \frac{n_\rho}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g^{-1}) \hat{\phi}_g . \quad (\text{C.2})$$

Esses geradores do centro são tais que obedecem às equações (B.7a) e (B.7b), ou seja,

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\rho \mathfrak{z}_{\rho'} &= \delta(\rho, \rho') \mathfrak{z}_\rho , \\ \sum_{\rho \in J} \mathfrak{z}_\rho &= \eta = \hat{\phi}_e . \end{aligned}$$

Alternativamente, existe uma outra base, mais intuitiva, $\{\mathbf{z}_R\}$, do centro da álgebra de grupo. Os elementos desta base são classificados pelas classes de conjugação, R , do grupo, ou seja, são dados por:

$$\mathbf{z}_R = \sum_{g \in C_R} \hat{\phi}_g . \quad (\text{C.3})$$

Embora os elementos $\mathbf{z}_R$ não possuam as mesmas propriedades que os elementos $\mathfrak{z}_R$, essa base é bastante útil para definir alguns operadores no modelo do duplo quântico.

C.2. Álgebra do duplo quântico

Vamos agora classificar as representações irredutíveis da álgebra do duplo quântico. Essas representações irredutíveis podem ser parametrizadas por uma classe de conjugação C_R de G e uma representação irredutível do grupo de estabilidade $E(g_R)$ em G . A construção que iremos apresentar nesta seção é baseada na referência [25]. Lembrando que a álgebra do duplo quântico $D(G)$ foi definida na seção 4.4.2 do capítulo 4. A construção apresentada neste seção é baseada, principalmente, nas referências [25, 53].

C.2.1. Representações irredutíveis da álgebra do duplo quântico

Sejam C_R , com $R \in \{1, 2, \dots, l\}$, as classes de conjugação de G , com representantes g_R . Considere também $E(g_R)$ o grupo de estabilidade de g_R em G , definido por:

$$E(g_R) = \{h \in G : hg_R = g_Rh\} .$$

O grupo de estabilidade $E(g_R)$ é um subgrupo de G , e suas representações irredutíveis são usadas para construir as representações irredutíveis do duplo quântico. Por este motivo precisamos ter certeza que $E(g_R)$ não depende do representante da classe de conjugação escolhido. A proposição a seguir garante essa independência de representante de $E(g_R)$.

Proposição C.1 *Seja C_R uma classe de conjugação de G , e sejam g_R e h_R dois representantes distintos dessa classe de conjugação. Então, $E(g_R) \sim E(h_R)$.*

Prova: se $g_R, h_R \in C_R$ então existe $u \in G$ tal que $g_R = uh_Ru^{-1}$. Considere $x \in E(g_R)$, então $xg_R = g_Rx$, mas também podemos escrever

$$x(uh_Ru^{-1}) = (uh_Ru^{-1})x \Rightarrow (u^{-1}xu)h_R = h_R(u^{-1}xu) ,$$

ou seja, $u^{-1}xu \in E(h_R)$ sempre que $x \in E(g_R)$. Isso significa que existe um elemento em $E(g_R)$ para cada elemento de $E(h_R)$. Para comprovar essa afirmação basta considerar o mapa $\theta : E(g_R) \rightarrow E(h_R)$, definido por $\theta(x) = u^{-1}xu$. Esse mapa é claramente um isomorfismo de grupo, logo esses dois grupos são isomorfos.

□

A proposição C.1 assegura que representantes diferentes da mesma classe de conjugação levam a grupos de estabilidades isomorfos e, portanto, suas representações irredutíveis são as mesmas. Por esse motivo, fixaremos a notação $E_R = E(g_R)$. Fixaremos também a seguinte notação: para todo $s \in C_R$, existe $\tau_s \in G$ tal que $s = \tau_s g_R (\tau_s)^{-1}$, em particular $\tau_{g_R} = e$. A seguir um lema estabelece algumas relações importantes entre o grupo de estabilidade E_R e o grupo G .

Lema C.1 *O grupo G pode ser escrito como uma união disjunta de cosets $\tau_s E_R = \{\tau_s h : h \in E_R\}$ como:*

$$G = \bigcup_{s \in C_R} \tau_s E_R .$$

Além disso, dado $g \in G$ e $s \in C_R$, existe um único $t \in C_R$ tal que

$$(\tau_t)^{-1} g \tau_s \in E_R ,$$

a saber, $t = gsg^{-1}$.

Prova: primeiramente precisamos mostrar que a união é de fato disjunta. Para isso é suficiente mostrar que $\tau_s E_R \cap \tau_{s'} E_R = \emptyset$, sempre que $s, s' \in C_R$ e $s \neq s'$. Considere então que existe $g \in \tau_s E_R \cap \tau_{s'} E_R$, e portanto existem $h, h' \in E_R$ tais que

$$g = \tau_s h = \tau_{s'} h' \Rightarrow \tau_s (\tau_{s'})^{-1} = h' h^{-1} \in E_R .$$

Sabe-se que $s = \tau_s g_R(\tau_s)^{-1}$, mas acrescentando um identidade $\tau_{s'}(\tau_{s'})^{-1} = e$, obtemos

$$s = \tau_{s'}(\tau_{s'})^{-1} \tau_s g_R(\tau_s)^{-1} = \tau_{s'}((\tau_{s'})^{-1} \tau_s) g_R(\tau_s)^{-1} ,$$

e uma vez que $(\tau_{s'})^{-1} \tau_s \in E_R$, ficamos com:

$$s = \tau_{s'} g_R(\tau_{s'})^{-1} \tau_s(\tau_s)^{-1} = \tau_{s'} g_R(\tau_{s'})^{-1} = s' .$$

Logo $g \in \tau_s E_R \cap \tau_{s'} E_R$ se, e somente se, $s = s'$. Por fim, dado que $|\tau_s E_R| = |E_R|$, tiramos que

$$|\bigcup_{s \in C_R} \tau_s E_R| = \sum_{s \in C_R} |E_R| = |C_R| |E_R| = |G| .$$

E dado que, certamente,

$$\bigcup_{s \in C_R} \tau_s E_R \subseteq G ,$$

concluimos que

$$\bigcup_{s \in C_R} \tau_s E_R = G .$$

Falta ainda mostrar a segunda parte do lema. Da primeira parte deste lema sabe-se que, dado $g \in G$ e dado $s \in C_R$, existe um único $t \in C_R$ tal que $g\tau_s \in \tau_t E_R$, ou seja, existe $h \in E_R$ tal que $g\tau_s = \tau_t h$, o que implica em $(\tau_t)^{-1} g\tau_s = h \in E_R$. Só falta agora mostrar que $t = gsg^{-1}$. Para isso considere $t = \tau_t g_R(\tau_t)^{-1}$, e com isso

$$\begin{aligned} t &= \tau_t h h^{-1} g_R(\tau_t)^{-1} = \tau_t h g_R h^{-1} (\tau_t)^{-1} \\ &= \tau_t (\tau_t)^{-1} g \tau_s g_R(\tau_s)^{-1} g^{-1} \tau_t (\tau_t)^{-1} = g(\tau_s g_R(\tau_s)^{-1}) g^{-1} = gsg^{-1} . \end{aligned}$$

□

Sabemos que E_R é um subgrupo de G , então sejam $V_{(R,\alpha)}$ os módulos irredutíveis (não isomorfos) de $\mathbb{C}E_R$, com $d_\alpha = \dim V_{(R,\alpha)}$, em que o índice α parametriza essas representações. Isso significa que existe uma ação ($\triangleright^E$) de $\mathbb{C}E_R$ definida sobre o espaço $V_{(R,\alpha)}$, representada por $\hat{\phi}_z \triangleright^E v$, para todo $z \in E_R$ e $v \in V_{(R,\alpha)}$. Abusando um pouco da notação, representaremos a ação de um elemento de $\mathbb{C}E_R$ simplesmente por $z \triangleright^E v$, ao invés de $\hat{\phi}_z \triangleright^E v$. Isso ajudará a não fazer confusão com a ação de $D(G)$ que será definida posteriormente. Considere o seguinte $D(G)$ -módulo, definido por:

$$U_{(R,\alpha)} = \{(\tau_s, v) : s \in C_R \text{ e } v \in V_{(R,\alpha)}\} . \quad (\text{C.4})$$

Note que:

$$\dim(U_{(R,\alpha)}) = |C_R| \dim(V_{(R,\alpha)}) = |C_R| d_\alpha . \quad (\text{C.5})$$

A ação de $D(G)$ sobre $U_{(R,\alpha)}$ é definida, para todo $g, h \in G$ e $(\tau_s, v) \in U_{(R,\alpha)}$, por:

$$\hat{\phi}_g \triangleright (\tau_s, v) = (\tau_{gsg^{-1}}, (\tau_{gsg^{-1}})^{-1} g \tau_s \triangleright^E v) , \quad (\text{C.6a})$$

$$\hat{\psi}^h \triangleright (\tau_s, v) = \delta(h, s)(\tau_s, v) . \quad (\text{C.6b})$$

Não é evidente que $\hat{\phi}_g \triangleright (\tau_s, v) \in U_{(R, \alpha)}$, porém o lema C.1 garante a validade desta relação, pois $(\tau_{gsg^{-1}})^{-1} g \tau_s \in E_R$. É possível também mostrar, sem muitas complicações, que:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{g'} \triangleright (\hat{\phi}_g \triangleright (\tau_s, v)) &= \hat{\phi}_{g'} \hat{\phi}_g \triangleright (\tau_s, v) , \\ \hat{\psi}^{h'} \triangleright (\hat{\psi}^h \triangleright (\tau_s, v)) &= \hat{\psi}^{h'} \hat{\psi}^h \triangleright (\tau_s, v) , \\ \hat{\phi}_{g'} \triangleright (\hat{\psi}^h \triangleright (\tau_s, v)) &= \hat{\phi}_{g'} \hat{\psi}^h \triangleright (\tau_s, v) .\end{aligned}$$

O módulo $U_{(R, \alpha)}$ pode ser decomposto na seguinte soma direta:

$$U_{(R, \alpha)} = \bigoplus_{s \in C_R} U_{(R, \alpha)}^s , \quad (\text{C.8})$$

sendo

$$U_{(R, \alpha)}^s = \{(\tau_s, v) : v \in V_{(R, \alpha)}\} .$$

Esses subespaços $U_{(R, \alpha)}^s$ possuem duas propriedades que são bastante relevantes para mostrar a irreducibilidade de $U_{(R, \alpha)}$, essas propriedades são enunciadas na proposição a seguir.

Proposição C.2 *O subespaço $U_{(R, \alpha)}^s$ é um módulo irredutível de $\mathbb{C}E(s)$. Além disso, para todo $g \in G$, vale que:*

$$\hat{\phi}_g \triangleright U_{(R, \alpha)}^s = U_{(R, \alpha)}^{gsg^{-1}} .$$

Prova: sabemos que $\hat{\phi}_g \triangleright (\tau_s, v) = (\tau_{gsg^{-1}}, u)$, em que $u = (\tau_{gsg^{-1}})^{-1} g \tau_s \triangleright^E v$, ou seja, $\hat{\phi}_g \triangleright (\tau_s, v) \in U_{(R, \alpha)}^s$ se, e somente se, $gsg^{-1} = s$, o que implica em $g \in E(s)$. Assim, se $g \in E(s)$, o subespaço $U_{(R, \alpha)}^s$ define um módulo de $\mathbb{C}E(s)$, o qual é irredutível, uma vez que $U_{(R, \alpha)}$ o é. Da definição do espaço $U_{(R, \alpha)}^s$ tiramos que, para todo $g \in G$, é válido que:

$$\hat{\phi}_g \triangleright U_{(R, \alpha)}^s = \{\hat{\phi}_g \triangleright (\tau_s, v) : v \in V_{(R, \alpha)}\} = \{(\tau_{gsg^{-1}}, u) : u \in V_{(R, \alpha)}\} = U_{(R, \alpha)}^{gsg^{-1}} .$$

□

Com isso estamos prontos para provar o teorema central desta seção.

Teorema C.1 *Os $D(G)$ -módulos $U_{(R, \alpha)}$ são irredutíveis.*

Prova: seja $w \in U_{(R, \alpha)}$ um elemento não nulo arbitrário. Defina o seguinte $D(G)$ -submódulo de $U_{(R, \alpha)}$:

$$D(G) \triangleright w = \{a \triangleright w : a \in D(G)\} .$$

Da equação (C.6b), observamos que:

$$\left(\sum_{s \in C_R} \hat{\psi}^s \right) \triangleright w = w ,$$

então deve existir $s_0 \in C_R$ tal que $\hat{\psi}^{s_0} \triangleright w \neq 0$, ou seja,

$$0 \neq \hat{\psi}^{s_0} \triangleright w = (\tau_{s_0}, v) \in U_{(R, \alpha)}^{s_0} .$$

Resumindo, um elemento não nulo $(\tau_{s_0}, v) \in U_{(R, \alpha)}^{s_0}$ pode ser escrito como $(\tau_{s_0}, v) = \hat{\psi}^{s_0} \triangleright w \in D(G) \triangleright w$, logo concluímos que:

$$U_{(R, \alpha)}^{s_0} \subseteq D(G) \triangleright w .$$

Da proposição C.2 sabemos que $\hat{\phi}_g \triangleright U_{(R, \alpha)}^s = U_{(R, \alpha)}^{gsg^{-1}}$, e com isso tiramos, para todo $g \in G$, que:

$$U_{(R, \alpha)}^{s_0} \subseteq D(G) \triangleright w \Rightarrow \hat{\phi}_g \triangleright U_{(R, \alpha)}^{s_0} \subseteq D(G) \triangleright w .$$

Portanto para todo $s \in C_R$, $U_{(R, \alpha)}^s \subseteq D(G) \triangleright w$. A equação (C.8) garante então que:

$$U_{(R, \alpha)} = \bigoplus_{s \in C_R} U_{(R, \alpha)}^s \subseteq D(G) \triangleright w .$$

Dado que $D(G) \triangleright w$ é um submódulo de $U_{(R, \alpha)}$, não resta outra opção se não

$$D(G) \triangleright w = U_{(R, \alpha)} , \quad \forall w \neq 0 .$$

É a arbitrariedade de w que garante a irreducibilidade de $U_{(R, \alpha)}$. Se considerarmos W um submódulo de $U_{(R, \alpha)}$, então, pelo que foi mostrado acima, para qualquer $w' \in W$ (não nulo), pode-se escrever

$$W = D(G) \triangleright w' .$$

No entanto, se $W \subseteq U_{(R, \alpha)}$, então $w' \in U_{(R, \alpha)}$, e pelo mesmo argumento tem-se que

$$U_{(R, \alpha)} = D(G) \triangleright w' .$$

Portanto, $W = U_{(R, \alpha)}$, ou seja, não há submódulos não triviais de $U_{(R, \alpha)}$.

□

Proposição C.3 $U_{(R, \alpha)}$ é isomorfo a $U_{(R', \alpha')}$ se, e somente se, $R = R'$ e $\alpha = \alpha'$.

Prova: suponha que exista um isomorfismo $\theta : U_{(R', \alpha')} \rightarrow U_{(R, \alpha)}$. Então, para todo $(\tau_s, v) \in U_{(R, \alpha)}^s$ (não nulo), temos que:

$$0 \neq \theta(\tau_s, v) = \theta(\hat{\psi}^s \triangleright (\tau_s, v)) = \hat{\psi}^s \triangleright \theta(\tau_s, v) \in U_{(R', \alpha')} .$$

Mas isso só pode ser verdade em geral se $s \in C_{R'}$. Daí tiramos que: $R = R'$. Caso contrário não existe tal isomorfismo. Nesse caso

$$0 \neq \theta(\tau_s, v) = \theta(\hat{\psi}^s \triangleright (\tau_s, v)) \in U_{(R, \alpha')}^s .$$

Em particular, para $s = g_R$, temos

$$0 \neq \theta(e, v) = \tilde{\theta}(v) ,$$

o que dá origem a um isomorfismo $\tilde{\theta} : V_{(R, \alpha)} \rightarrow V_{(R, \alpha')}$, que só existe se $\alpha = \alpha'$.

□

Por uma questão de consistência de notação, agora que sabemos que os módulos irredutíveis do duplo quântico são parametrizados por um par, (R, α) , representaremos esses módulos por U_μ , com $\mu \in J = \{(R, \alpha)\}$, sendo que R parametriza as classes de conjugação de G e α as representações irredutíveis de E_R . A seguir vamos determinar os caracteres irredutíveis da álgebra do duplo quântico. Por fim, só resta agora mostrar que os $U_{(R, \alpha)}$ formam um conjunto completo de $D(G)$ -módulos irredutíveis.

Proposição C.4 *Se um $D(G)$ -módulo U é irredutível, então existe R e α tais que $U \sim U_{(R, \alpha)}$.*

Prova: uma simples análise de dimensão é suficiente para provar esse resultado. Se $\mu \in J$ parametrizam todas os módulos irredutíveis de $D(G)$, então, pela equação (B.4), devemos verificar que:

$$\dim D(G) = |G|^2 = \sum_{\mu \in J} (n_\mu)^2 .$$

Usando a equação (C.5) podemos escrever:

$$\sum_{\mu \in J} (n_\mu)^2 = \sum_{\mu \in J} |C_R|^2 |d_\alpha|^2 = \sum_R \left(|C_R|^2 \sum_\alpha |d_\alpha|^2 \right) ,$$

em que $d_\alpha = \dim V_{(R, \alpha)}$. Novamente da equação (B.4) e da relação (veja [52]) $|G| = |E_R| |C_R|$, tiramos que:

$$\sum_\alpha (d_\alpha)^2 = |E_R| = |G| / |C_R| .$$

Com isso, obtém-se

$$\sum_{\mu \in J} (n_\mu)^2 = \sum_R (|C_R|^2 |G| / |C_R|) = |G| \sum_R |C_R| = |G|^2 .$$

Isso garante a completude dos módulos $U_{(R, \alpha)}$.

□

C.2.2. Caracteres irredutíveis da álgebra do duplo quântico

Uma vez conhecidas todas as representações irredutíveis, vamos agora determinar seus caracteres irredutíveis. Considere a base $\{v_i : i = 1, 2, \dots, d_\alpha\}$ para $V_{(R, \alpha)}$ e $\{(\tau_s, v_i) : s \in C_R \text{ e } v_i \in V_{(R, \alpha)}\}$ para $U_{(R, \alpha)}$. Queremos encontrar uma representação matricial π_μ associada ao módulo U_μ . Para isso considere

$$\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h \triangleright (\tau_{s_0}, v_{i_0}) = \pi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h)(\tau_{s_0}, v_{i_0}) = \delta(h, s_0)(\tau_{gs_0g^{-1}}, w) ,$$

com $w = ((\tau_{gs_0g^{-1}})^{-1} g \tau_{s_0}) \triangleright^E v_{i_0}$. Se considerarmos π_α a representação associada à representação ρ_{α} de E_R , podemos escrever também $w = \pi_\alpha((\tau_{gs_0g^{-1}})^{-1} g \tau_{s_0}) v_{i_0}$ e, portanto, não é difícil ver que a representação matricial para π_μ , nesta base, é dada por:

$$\begin{aligned} \left[\pi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) \right]_{(s_0, i_0)}^{(s, i)} &= \delta(h, s_0) \delta(s, gs_0g^{-1}) \left[\pi_\alpha((\tau_{gs_0g^{-1}})^{-1} g \tau_s) \right]_{i_0}^i \\ &= \delta(h, s_0) \delta(s, ghg^{-1}) \left[\pi_\alpha((\tau_s)^{-1} g \tau_s) \right]_{i_0}^i , \end{aligned}$$

com $i, i_0 = 1, 2, \dots, d_\alpha$ e $s, s_0 \in C_R$. Da equação acima podemos ver que os elementos de matriz $\left[\pi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) \right]_{(s_0, i_0)}^{(s, i)}$ é não nulo somente se $h \in C_R$

Podemos agora calcular os caracteres irredutíveis, χ_μ , da álgebra do duplo quântico.

$$\begin{aligned} \text{tr} \left(\pi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) \right) &= \sum_{s \in C_R} \sum_{i=1}^{d_\alpha} \left[\pi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) \right]_{(s, i)}^{(s, i)} = \sum_{s \in C_R} \sum_{i=1}^{d_\alpha} \delta(h, s) \delta(s, ghg^{-1}) \left[\pi_\alpha((\tau_s)^{-1} g \tau_s) \right]_i^i \\ &= \delta(h, C_R) \delta(hg, gh) \sum_i \left[\pi_\alpha((\tau_s)^{-1} g \tau_s) \right]_i^i = \delta(h, C_R) \delta(hg, gh) \chi_\alpha((\tau_s)^{-1} g \tau_s) \\ &= \delta(h, C_R) \delta(hg, gh) \chi_\alpha(g) , \end{aligned}$$

em que $\delta(h, C_R) = 1$ se $h \in C_R$ e $\delta(h, C_R) = 0$ caso contrário. Resumindo, para $\mu = (R, \alpha)$, temos que:

$$\chi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) = \text{tr} \left(\pi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) \right) = \delta(h, C_R) \delta(hg, gh) \chi_\alpha(g) . \quad (\text{C.9})$$

Note que $\chi_\mu(\hat{\phi}_g \hat{\psi}^h) \neq 0$ se, e somente se, $h \in C_R$ e $g \in E_R$.

C.2.3. Centro da álgebra do duplo quântico $D(G)$

Já sabemos da equação (B.22) que os geradores idepotentes do centro das álgebras semi-simples são determinados pelos caracteres irredutíveis da mesma. Sabemos também, da equação (A.6), que o tensor $g^{(a,b)(u,v)}$, para o caso da álgebra do duplo quântico, é dado por:

$$g^{(a,b)(u,v)} = \frac{1}{|G|} \delta(a, u^{-1}) \delta(v, ubu^{-1}) .$$

Podemos então, usando a equação (B.22), calcular os geradores idepotentes do centro da álgebra de grupo. Para $\mu = (R, \alpha)$ temos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_\mu &= n_\mu \sum_{\{a,b,u,v\} \in G} g^{(a,b)(u,v)} \chi_\mu(\hat{\phi}_a \hat{\psi}^b) \hat{\phi}_u \hat{\psi}^v \\ &= \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{a,b,u,v} \delta(a, u^{-1}) \delta(v, ubu^{-1}) \delta(b, C_R) \delta(ab, ba) \chi_\alpha(a) \hat{\phi}_u \hat{\psi}^v \\ &= \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{b,u,v} \delta(v, ubu^{-1}) \delta(b, C_R) \delta(bu, ub) \chi_\alpha(u^{-1}) \hat{\phi}_u \hat{\psi}^v \\ &= \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{b,u} \delta(b, C_R) \delta(bu, ub) \chi_\alpha(u^{-1}) \hat{\phi}_u \hat{\psi}^{ubu^{-1}} \\ &= \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{b \in C_R} \sum_{u \in G} \delta(bu, ub) \chi_\alpha(u^{-1}) \hat{\phi}_u \hat{\psi}^{ubu^{-1}} \\ &= \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{b \in C_R} \sum_{u \in E_R} \chi_\alpha(u^{-1}) \hat{\phi}_u \hat{\psi}^{ubu^{-1}} \\ &= \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{b \in C_R} \sum_{u \in E_R} \chi_\alpha(u^{-1}) \hat{\phi}_u \hat{\psi}^b \end{aligned}$$

Agora usando os resultados: $n_\mu = |C_R|d_\alpha$, da equação (C.5), e $|G| = |C_R||E_R|$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_\mu &= \frac{|C_R|d_\alpha}{|C_R||E_R|} \sum_{u \in E_R} \chi_\alpha(u^{-1}) \hat{\phi}_u \left(\sum_{b \in C_R} \|\hat{\psi}^b\| \right) \\
&= \left(\frac{d_\alpha}{|E_R|} \sum_{u \in E_R} \chi_\alpha(u^{-1}) \hat{\phi}_u \right) \left(\sum_{b \in C_R} \hat{\psi}^b \right) \\
&= \mathfrak{z}_\alpha \Psi^R .
\end{aligned} \tag{C.10}$$

Esses são os geradores idepotentes do centro da álgebra do duplo quântico, os quais satisfazem às equações (B.7a) e (B.7b), isto é,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{z}_\mu \mathfrak{z}_{\mu'} &= \delta(\mu, \mu') \mathfrak{z}_\mu , \\
\sum_{\mu \in J} \mathfrak{z}_\mu &= \eta = \hat{\phi}_e \left(\sum_{g \in G} \hat{\psi}^g \right) ,
\end{aligned}$$

sendo $\mathfrak{z}_\alpha$ os geradores idepotentes do centro da álgebra de grupo $\mathbb{C}E_R$ e $\Psi^R = \sum_{s \in C_R} \hat{\psi}^s$.

D. Álgebra dos operadores

Neste apêndice mostraremos que a álgebra que os operadores de vértice e plaqueta obedecem é a álgebra do duplo quântico, o que justifica todo o trabalho que tivemos nos apêndices anteriores para defini-la e classificar suas representações irredutíveis. O ponto central aqui é mostrar que os operadores auxiliares, definidos nas equações (5.3), obedecem a álgebra do duplo quântico e, conseqüentemente, os operadores de vértice e plaqueta também.

D.1. Álgebra dos operadores auxiliares

Considere os operadores $L_l^g, R_l^g, T_l^g : \mathcal{H}_l \rightarrow \mathcal{H}_l$, os quais agem a l -ésima aresta da rede conforme definido nas equações (5.3) no capítulo 5. Para encontrar a álgebra a qual esses operadores obedecem basta aplicá-los em um estado genérico da base $|u\rangle \in \mathcal{H}_l$. Com isso obtemos, para todo $g, h \in G$, as seguintes identidades:

$$T_l^g T_l^g \equiv T_l^h T_l^g \equiv \delta(g, h) T_l^g, \quad (\text{D.1a})$$

$$L_l^g L_l^h \equiv L_l^{gh}, \quad (\text{D.1b})$$

$$R_l^g R_l^h \equiv R_l^{hg}. \quad (\text{D.1c})$$

A álgebra de operadores diferentes é um pouco mais complicada, mas ainda sim simples, e também pode ser facilmente obtida aplicando-se esses operadores em um estado genérico da base $|u\rangle \in \mathcal{H}_l$. Com isso obtemos, para todo $g, h \in G$, as seguintes identidades:

$$L_l^g T_l^h \equiv T_l^{gh} L_l^g, \quad (\text{D.2a})$$

$$R_l^g T_l^h \equiv T_l^{hg} R_l^g, \quad (\text{D.2b})$$

$$L_l^g R_l^h \equiv R_l^h L_l^g. \quad (\text{D.2c})$$

Além disso, segue das próprias definições desses operadores que:

$$L_l^e = R_l^e = \sum_{g \in G} T_l^g = \mathbb{1}_l. \quad (\text{D.3})$$

De forma mais geral, para $a = a^g \hat{\phi}_g \in \mathbb{C}G$ e para $\xi = \xi_g \hat{\psi}^g \in \mathbb{C}G^*$, definimos, por simples extensão por linearidade, os operadores

$$L_l(a) = \sum_{g \in G} a^g L_l(\hat{\phi}_g) = \sum_{g \in G} a^g L_l^g, \quad (\text{D.4a})$$

$$R_l(a) = \sum_{g \in G} a^g R_l(\hat{\phi}_g) = \sum_{g \in G} a^g R_l^g, \quad (\text{D.4b})$$

$$T_l(\xi) = \sum_{g \in G} \xi_g T_l(\hat{\psi}^g) = \sum_{g \in G} \xi_g T_l^g. \quad (\text{D.4c})$$

Das equações (D.1) e (D.2) tiramos que os operadores acima satisfazem, para todo $a, b \in \mathbb{C}G$ e $\xi, \xi' \in \mathbb{C}G^*$, à seguinte álgebra:

$$L_l(a)L_l(b) = L_l(ab) , \quad (D.5a)$$

$$R_l(a)R_l(b) = L_l(ba) , \quad (D.5b)$$

$$T_l(\xi)T_l(\xi') = T_l(\xi\xi') . \quad (D.5c)$$

Se compararmos as equações (D.1) com as equações (4.24), concluímos rapidamente que a álgebra dos operadores auxiliares (chamemos de $\mathcal{V}_{\text{aux}}$) é isomorfa a álgebra do duplo quântico, basta considerar o seguinte isomorfismo de álgebras: $\theta : \mathcal{V}_{\text{aux}} \rightarrow D(G)$, definido por:

$$\theta(L_l^g) = \hat{\phi}_g , \quad \theta(R_l^g) = \hat{\phi}_{g^{-1}} , \quad \theta(T_l^g) = \hat{\psi}^g .$$

D.2. Álgebra dos operadores de vértice e plaqueta

Quando nos referimos à álgebra dos operadores de vértice e plaqueta estamos nos referindo à álgebra local que esses operadores obedecem, isto é, quando os vértice e/ou as plaquetas agem de forma não trivial em arestas em comum. O motivo para considerarmos somente essa álgebra local é simples, é porque operadores que não agem (de forma não trivial) em arestas em comum comutam sempre e não precisamos nos preocupar com eles. Há porém o caso em que dois operadores de plaquetas vizinhos agem em arestas em comum e, mesmo assim, comutam entre si, pois os operadores de plaqueta são feitos de operadores auxiliares T , os quais, pela equação (D.1a), sempre comutam entre si. Dois operadores de vértice que agem em vértices adjacentes também sempre comutam entre si, pois se um deles age na aresta comum com L_l , o outro, necessariamente, agirá na mesma aresta com R_l , os quais, pela equação (D.2c), comutam sempre. Resumindo, temos:

$$[A_v, A_{v'}] = 0 , \forall v, v' , \quad (D.6a)$$

$$[B_s, B_{s'}] = 0 , \forall s, s' , \quad (D.6b)$$

$$[A_v, B_s] = 0 , \text{ se } v \text{ e } s \text{ não são adjacentes} . \quad (D.6c)$$

Resta portanto analisar o caso em que o site $s = (v, p)$ e o vértice u são adjacentes. Para isso, considere a figura D.1 como referência de enumeração das arestas. De acordo a figura e com as equações (5.4) e (5.5), os respectivos operadores são:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_v^g &= L_5^g \otimes L_6^g \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} , \\ \mathbf{a}_u^g &= L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes L_3^g \otimes R_5^{g^{-1}} , \\ \mathbf{b}_s^g &= \sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, g) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} . \end{aligned}$$

A seguir calcularemos uma série de produto dos operadores definidos acima.

Figura D.1.: esta figura serve de referência de enumeração das arestas.

produto 1: produto de $\mathbf{a}_v^g$ com $\mathbf{a}_v^h$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_v^g \mathbf{a}_v^h &= \left(L_5^g \otimes L_6^g \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} \right) \left(L_5^h \otimes L_6^h \otimes R_7^{h^{-1}} \otimes R_8^{h^{-1}} \right) \\
&= L_5^g L_5^h \otimes L_6^g L_6^h \otimes R_7^{g^{-1}} R_7^{h^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} R_8^{h^{-1}} \\
&= L_5^{gh} \otimes L_6^{gh} \otimes R_7^{h^{-1}g^{-1}} \otimes R_8^{h^{-1}g^{-1}} \\
&= L_5^{gh} \otimes L_6^{gh} \otimes R_7^{(gh)^{-1}} \otimes R_8^{(gh)^{-1}} \\
&= \mathbf{a}_v^{gh} .
\end{aligned} \tag{D.7}$$

produto 2: produto de $\mathbf{b}_s^g$ com $\mathbf{b}_s^h$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_s^g \mathbf{b}_s^h &= \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, g) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} \right) \times \\
&\quad \left(\sum_{\{c_i\}} \delta(c_5 c_3 c_4^{-1} c_6^{-1}, h) T_3^{c_3} \otimes T_4^{c_4} \otimes T_5^{c_5} \otimes T_6^{c_6} \right) \\
&= \sum_{\{b_i, c_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, g) \delta(c_5 c_3 c_4^{-1} c_6^{-1}, h) T_3^{b_3} T_3^{c_3} \otimes T_4^{b_4} T_4^{c_4} \otimes T_5^{b_5} T_5^{c_5} \otimes T_6^{b_6} T_6^{c_6} \\
&= \sum_{\{b_i, c_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, g) \delta(c_5 c_3 c_4^{-1} c_6^{-1}, h) \times \\
&\quad \delta(b_3, c_3) \delta(b_4, c_4) \delta(b_5, c_5) \delta(b_6, c_6) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} \\
&= \sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, g) \delta(g, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} \\
&= \delta(g, h) \mathbf{b}_s^g .
\end{aligned} \tag{D.8}$$

produto 3: produto de $\mathbf{b}_s^h$ com $\mathbf{a}_u^g$ quando $u \notin s$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_u^g \mathbf{b}_s^h &= \left(L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes L_3^g \otimes R_5^{g^{-1}} \right) \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} \right) \\
&= \left(L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes L_3^g \otimes R_5^{g^{-1}} \right) \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} \right) \\
&= \sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes L_3^g T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes R_5^{g^{-1}} T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} \\
&= \sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes T_3^{g b_3} L_3^g \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5 g^{-1}} R_5^{g^{-1}} \otimes T_6^{b_6} \\
&= \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{g b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5 g^{-1}} \otimes T_6^{b_6} \right) \left(L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes L_3^g \otimes R_5^{g^{-1}} \right),
\end{aligned}$$

se trocarmos $g b_3 \mapsto b_3$ e $b_5 g^{-1} \mapsto b_5$ na soma acima nada muda, uma vez que a soma é sobre todos os possíveis valores de b_3 e b_5 , fazendo isso obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_u^g \mathbf{b}_s^h &= \left(\sum_{\{b_i\}} \delta((b_5 g)(g^{-1} b_3) b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{g b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5 g^{-1}} \otimes T_6^{b_6} \right) \left(L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes L_3^g \otimes R_5^{g^{-1}} \right) \\
&= \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{g b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5 g^{-1}} \otimes T_6^{b_6} \right) \left(L_1^g \otimes R_2^{g^{-1}} \otimes L_3^g \otimes R_5^{g^{-1}} \right) \\
&= \mathbf{b}_s^h \mathbf{a}_u^g.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

produto 4: produto de $\mathbf{b}_s^h$ com $\mathbf{a}_v^g$ quando $v \in s$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_v^g \mathbf{b}_s^h &= \left(L_5^g \otimes L_6^g \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} \right) \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{b_5} \otimes T_6^{b_6} \right) \\
&= \sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes L_5^g T_5^{b_5} \otimes L_6^g T_6^{b_6} \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} \\
&= \sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{g b_5} L_5^g \otimes T_6^{g b_6} L_6^g \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} \\
&= \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{g b_5} \otimes T_6^{g b_6} \right) \left(L_5^g \otimes L_6^g \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} \right),
\end{aligned}$$

se trocarmos $g b_5 \mapsto b_5$ e $g b_6 \mapsto b_6$ na soma acima nada muda, uma vez que a soma é sobre

todos os possíveis valores de b_5 e b_6 , fazendo isso obtemos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_v^g \mathbf{b}_s^h &= \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(g^{-1} b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1} g, h) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{g b_5} \otimes T_6^{g b_6} \right) \left(L_5^g \otimes L_6^g \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} \right) \\
&= \left(\sum_{\{b_i\}} \delta(b_5 b_3 b_4^{-1} b_6^{-1}, g h g^{-1}) T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} \otimes T_5^{g b_5} \otimes T_6^{g b_6} \right) \left(L_5^g \otimes L_6^g \otimes R_7^{g^{-1}} \otimes R_8^{g^{-1}} \right) \\
&= \mathbf{b}_s^{g h g^{-1}} \mathbf{a}_v^g .
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Das equações (D.9) e (D.10), vimos que os operadores de vértice, $\mathbf{a}_v^g$, e de plaqueta, $\mathbf{b}_s^h$, só não comutam em geral quando $v \in s$, ou seja, quando o vértice v faz parte do site $s = (v, p)$. Resumindo os cálculos acima, temos a seguinte álgebra de operadores para todo site $s = (v, p)$ da rede.

$$\mathbf{a}_v^g \mathbf{a}_v^h = \mathbf{a}_v^{g h} , \tag{D.11a}$$

$$\mathbf{b}_s^g \mathbf{b}_s^h = \delta(g, h) \mathbf{b}_s^g , \tag{D.11b}$$

$$\mathbf{a}_v^g \mathbf{b}_s^h = \mathbf{b}_s^{g h g^{-1}} \mathbf{a}_v^g . \tag{D.11c}$$

Se compararmos as equações acima com as equações (4.24), fica evidente que álgebra desses operadores (chamemos de $\mathcal{V}_{AB}$) é isomorfa a álgebra do duplo quântico, basta definir o seguinte isomorfismo de álgebras: $\theta : \mathcal{V}_{AB} \rightarrow D(G)$, definido por:

$$\theta(\mathbf{a}_v^g) = \hat{\phi}_g , \quad \theta(\mathbf{b}_s^g) = \hat{\psi}^g .$$

Para $a = a^g \hat{\phi}_g \in \mathbb{C}G$ e $\xi = \xi_g \hat{\psi}^g \in \mathbb{C}G^*$ definimos os seguintes operadores, por simples extensão por linearidade:

$$A_v(a) = \sum_{g \in G} a^g A_v(\hat{\phi}_g) = \sum_{g \in G} a^g \mathbf{a}_v^g , \tag{D.12a}$$

$$B_p(\xi) = \sum_{g \in G} \xi_g B_p(\hat{\psi}^g) = \sum_{g \in G} \xi_g \mathbf{b}_p^g , \tag{D.12b}$$

os quais, pelas equações (D.11), obedecem às seguintes relações, para todo $a, b \in \mathbb{C}G$ e $\xi, \xi' \in \mathbb{C}G^*$:

$$A_v(a) A_v(b) = A_v(ab) , \tag{D.13a}$$

$$B_p(\xi) B_p(\xi') = B_p(\xi \xi') . \tag{D.13b}$$

Lembrando que os operadores que constituem as hamiltoniana H^{DQ} são:

$$A_v = \frac{1}{|G|} A_v(\mathcal{I}) = 1/|G| \sum_{g \in G} \mathbf{a}_v^g \quad \text{e} \quad B_p = \frac{1}{|G|} B_p(\Lambda) = \mathbf{b}_{(v,p)}^e ,$$

sendo $\mathcal{I}$ e Λ a cointegral e integral da álgebra de grupo, calculadas no exemplo A.2 no apêndice A. Segue das equações (D.13) que os operadores A_v e B_p são projetores, ou seja,

$$\begin{aligned}
(A_v)^2 &= \frac{1}{|G|^2} A_v(\mathcal{I}) A_v(\mathcal{I}) \\
&= \frac{1}{|G|^2} A_v(\mathcal{I}\mathcal{I}) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \epsilon(\mathcal{I}) A_v(\mathcal{I}) \\
&= \frac{1}{|G|} A_v(\mathcal{I}) = A_v .
\end{aligned} \tag{D.14a}$$

Da mesma maneira podemos calcular $(B_p)^2$.

$$\begin{aligned}
(B_p)^2 &= \frac{1}{|G|^2} B_p(\Lambda) B_p(\Lambda) \\
&= \frac{1}{|G|^2} B_p(\Lambda\Lambda) \\
&= \frac{1}{|G|^2} \Lambda(\eta) B_p(\Lambda) \\
&= \frac{1}{|G|} B_p(\Lambda) = B_p .
\end{aligned} \tag{D.15a}$$

Além disso, das equações (D.11), concluímos que:

$$[B_p, B_{p'}] = [A_v, A_{v'}] = [A_v, B_p] = 0 . \tag{D.16}$$

D.3. Projetores ortogonais

Os elementos idepotentes do centro da álgebra, definidos no apêndice B, se encarados como operadores, formam um conjunto completo de projetores ortogonais. Esses geradores idepotentes são aqueles dados pela equação (C.2) no apêndice C. Os operadores de vértice, por sua vez, satisfazem à álgebra de grupo, e sendo assim $\{\mathbf{A}_v^\rho : \rho \in J\}$ é um conjunto completo de projetores de vértices, dados por:

$$\mathbf{A}_v^\rho = A_v(\mathfrak{z}^\rho) = \frac{n_\rho}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g^{-1}) \mathbf{a}_v^g . \tag{D.17}$$

Da mesma forma, os operadores de plaqueta obedecem a álgebra dual $\mathbb{C}G^*$, e sendo assim a própria base $\{\mathbf{b}_s^g\}$ é um conjunto de projetores ortogonais de plaqueta. No entanto, $\mathbf{b}_s^g$ não é invariante por transformação de gauge local, ou seja, não comuta com $\mathbf{a}_v^h$ se $v \in s$. Um conjunto de projetores de plaqueta que seja também invariante por transformação de gauge local é $\{\mathbf{B}_p^R\}$, com $\mathbf{B}_p^R$ dado por:

$$\mathbf{B}_p^R = \sum_{u \in C_R} \mathbf{b}_s^u . \tag{D.18}$$

Por fim, podemos encontrar os projetores ortogonais de operadores de site. O operador de site $O_s^{g,h} := \mathbf{a}_v^g \mathbf{b}_s^h$ obedece a álgebra do duplo quântico, como pode ser visto nas equações (D.11a), (D.11b) e (D.11c), sendo assim, da equação (C.10), sabemos que $\{\mathbf{O}_s^\mu\}$ forma um conjunto completa de projetores ortogonais, dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{O}_s^\mu &= \frac{n_\mu}{|G|} \sum_{b \in C_R} \sum_{a \in E_R} \chi_\alpha(a^{-1}) O_s^{a,b} \\ &= A_v(\mathfrak{z}_\alpha) B_p(\hat{\psi}^R) = \mathbf{A}_v^\alpha \mathbf{B}_p^R, \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

sendo $\mu = (R, \alpha)$, R o parâmetro que indexa as classes de conjugação de G e α o parâmetro de que indexa as representações irredutíveis do grupo de estabilidade $E_R = E(g_R)$.

Os operadores auxiliares também obedecem a álgebra do duplo quântico, portanto, pelo mesmo argumento dado acima, um conjunto completo de projetores ortogonais de operadores auxiliares é:

$$\mathbf{L}_l^\rho = L_l(\mathfrak{z}_\rho), \quad (\text{D.20a})$$

$$\mathbf{R}_l^\rho = R_l(\mathfrak{z}_\rho), \quad (\text{D.20b})$$

$$\mathbf{T}_l^R = T_l(\hat{\psi}^R). \quad (\text{D.20c})$$

Todos eles obedecem às relações

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_l^\rho \mathbf{X}_l^{\rho'} &= \mathbf{X}_l^\rho \\ \sum_\rho \mathbf{X}_l^\rho &= \mathbb{1}, \end{aligned}$$

com $X = L, R$ ou T . Como consequência, os projetores ortogonais de aresta são dados por:

$$\mathbf{C}_l^\mu = L_l(\mathfrak{z}_\alpha) T_l(\hat{\psi}^R),$$

ou ainda

$$\mathbf{C}_l^{(R,\alpha)} = \mathbf{L}_l^\alpha \mathbf{T}_l^R. \quad (\text{D.21})$$

E. Matriz de transferência como um produto de operadores locais

Neste apêndice iremos mostrar que a matriz de transferência $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ admite a decomposição em termo de operadores locais, mostrada na equação (7.23).

E.1. Convencionando uma orientação em $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$

Faz parte da definição de $Z(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ e, portanto de $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$, convencionar uma orientação na rede da figura 7.12(a). Para isso considere a rede bidimensional $\mathcal{L}(\Sigma)$, orientada da mesma forma como a rede bidimensional no modelo duplo quântico (ver figura 5.2(a)). A partir dessa convenção pode-se induzir uma orientação na rede $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$, simplesmente orientando-se todas as arestas temporais apontando para baixo e todas as plaquetas temporais como mostrado na figura E.1. O próximo passo é considerar a rede tensorial que

Figura E.1.: convenção de orientação da rede $\mathcal{L}(\Sigma \times I)$, induzida pela orientação de $\mathcal{L}(\Sigma)$.

constitui $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ como sendo formada por duas partes distintas: uma parte espacial e uma parte temporal, como representado na figura E.2(a). As partes espacial e temporal são conectadas por meio de contração de índices, no entanto devemos observar que a orientação das plaquetas temporais não concordam com a orientação das arestas espaciais, portanto a regra de contração dos índices desses tensores dá-se indiretamente, por meio de antípodas, como mostrado na figura E.2(b). Cada uma das partes que constitui $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$ pode ser decomposta como um produto de operadores de plaqueta, vértice ou aresta.

Iniciaremos mostrando que a parte temporal pode ser decomposta como um produto de operadores de vértice.

Figura E.2.: decomposição da matriz de transferência.

E.2. Decompondo a parte temporal de $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$

Considere a rede tensorial desenhada na figura E.3. Na figura “(in)” representam os índices livres de entrada do operador $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$, ou seja, onde as setas que representam os estados entram, e “(A.E.)” representa o índice que será contraído com a parte espacial da rede tensorial. Usando a proposição A.2, obtemos a rede desenhada na figura E.4. Agora

Figura E.3.: rede tensorial associada à parte temporal da matriz de transferência.

usando a propriedade da associatividade de álgebras de Hopf (ver figura 4.6(a)) obtemos a rede desenhada na figura E.5. Finalmente a rede tensorial E.5 pode ser posta na forma apresentada na figura E.6, em que podemos notar que, se repetirmos esse procedimento em toda a rede, todos os tensores $\Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4}$ temporais ficarão como representado na figura E.7, o qual é um operador que age nas arestas ao redor de um vértice v de $\mathcal{L}(\Sigma)$, e por esse motivo chamaremos de $A_v(a)$. O parâmetro $a \in \mathbb{C}G$ em $A_v(a)$ está relacionado com ξ_t conforme mostrado na figura E.7. Note que existe um operador $A_v(a)$ para cada aresta temporal, e uma aresta temporal para cada vértice de $\mathcal{L}(\Sigma)$, portanto, existe um operador $A_v(a)$ para

Figura E.4.: usando a proposição A.2 obtemos a igualdade mostrada na figura.

Figura E.5.: usando a propriedade da associatividade das álgebras de Hopf obtemos a igualdade mostrada na figura.

Figura E.6.: a rede tensorial pode ser redesenhada de forma a obter a igualdade mostrada na figura.

cada vértice v de $\mathcal{L}(\Sigma)$. Não podemos esquecer que existe ainda uma parte da rede, dentro da área em destaque na figura E.6, que deverá ser contraída com a parte espacial.

Figura E.7.: rede tensorial que representa um operador de vértice, os números na figura são para saber qual seta está agindo em qual aresta da rede.

E.3. Decompondo a parte espacial de $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$

O próximo passo é mostrar que a parte espacial da rede pode ser escrita como um produto de operadores de plaqueta. Para isso, considere a rede tensorial desenhada na figura E.8. Na figura “(out)” representa o índice livre de saída do operador $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$, ou seja, as setas que representam os estados após aplicação do operador $U(z_s, z_t, \xi_s, \xi_t)$, e “(P.T.)” representa o índice que será contraído com a parte temporal da rede. Na figura E.8, usando a proposição

Figura E.8.: rede tensorial associada à parte espacial da matriz de transferência.

A.2, obtém-se a rede desenhada na figura E.9. Agora usando a propriedade da coasso-

Figura E.9.: usando a proposição A.2 obtemos a igualdade mostrada na figura.

ciatividade de álgebras de Hopf (ver figura 4.7(b)) obtemos a rede desenhada na figura E.10. Finalmente a rede tensorial E.10 pode ser posta na forma apresentada na figura E.11, em

Figura E.10.: usando a propriedade da coassociatividade das álgebras de Hopf obtemos a igualdade mostrada na figura.

que podemos notar que, se repetirmos esse procedimento em toda a rede, todos os tensores $M_{a_1 a_2 a_3 a_4}$ espaciais ficarão como representado na figura E.12, o qual é um operador que age nas arestas ao redor de uma plaqueta p de $\mathcal{L}(\Sigma)$, e por esse motivo chamaremos de $B_p(\beta)$. O parâmetro β em $B_p(\beta)$ está relacionado com z_s conforme mostrado na figura E.12. Note

Figura E.11.: a rede tensorial pode ser redesenhada de forma a obter a igualdade mostrada na figura.

que existe um operador $B_p(\beta)$ para cada plaqueta espacial e, portanto, existe um operador $B_p(\beta)$ para cada plaqueta p de $\mathcal{L}(\Sigma)$.

Não podemos nos esquecer que existe ainda, dentro da área em destaque na figura E.11, uma parte da rede que deverá ser contraída com a parte espacial.

Resumindo, a parte temporal da rede tensorial pode ser escrita como sendo o produto de operadores de vértice, enquanto que a parte espacial pode ser escrita como um produto de operadores de plaqueta. No entanto, ainda existe alguns operadores de aresta $C_l(z, \xi)$ intermediando esses dois produtos, operadores esses que são provenientes dos tensores dentro da região em destaque nas figuras E.6 e E.11. A figura E.13(a) ilustra o resultado final dessa decomposição. A figura E.13(b) mostra a rede tensorial que define o operador de aresta.

Figura E.12.: rede tensorial que representa um operador de plaqueta, os números na figura são para saber qual seta está agindo em qual aresta da rede.

Figura E.13.: decomposição da rede tensorial em um produto de operadores locais.

Por fim podemos escrever que matriz de transferência $U(\beta, z, \xi, a)$ pode ser decomposto como um produto de operadores locais, da seguinte maneira:

$$U(\beta, z, \xi, a) = \prod_p B_p(\beta) \prod_l C_l(z, \xi) \prod_v A_v(a) . \quad (\text{E.1})$$

É importante notar que a ordem na qual os operadores aparecem na equação acima é bastante relevante, uma vez que esses operadores não comutam entre si em geral. A seguir mostraremos que os operadores locais que aparecem na decomposição acima são, de fato, os operadores de vértice e plaqueta usuais.

E.4. Álgebra dos operadores locais

Falta mostrar que os operadores locais obtidos de $U(\beta, z, \xi, a)$ são, de fato, os operadores de vértice e de plaqueta usuais, que compõem o modelo duplo quântico. Para isso precisamos notar que a rede tensorial associada a cada um deles pode ainda ser decomposta em termo dos operadores auxiliares L_l^g , R_l^g e T_l^g , definidos nas equações (5.3). O primeiro passo é notar que esses operadores podem ser escritos em função das constantes de estrutura da álgebra de grupo, conforme pode ser visto na figura E.14. Agora note que a rede tensorial associada à

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow L_l^g \longrightarrow & = & \begin{array}{c} \phi_g \\ \downarrow \\ \longrightarrow m \longrightarrow \end{array} \\ \longrightarrow R_l^g \longrightarrow & = & \begin{array}{c} \longrightarrow m \longrightarrow \\ \uparrow \\ \phi_g \end{array} \\ \longrightarrow T_l^g \longrightarrow & = & \begin{array}{c} \longrightarrow \Delta \longrightarrow \\ \downarrow \\ \Psi^g \end{array} \end{array}$$

Figura E.14.: operadores auxiliares em função das constantes de estrutura da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$.

$A_v(a)$ (figura E.7), pode ser escrita da forma como mostrado na figura E.15. Se traduzirmos

Figura E.15.: os operadores nas áreas em destaques são operadores do tipo L_l^g e R_l^g .

novamente a rede tensorial da figura E.15 para a notação usual de tensores, obtemos:

$$A_v(\hat{\psi}^h) = \sum_{\{b_i, a_j\}} \Delta^{b_1 b_2 b_3 b_4 h} S_{b_1}^{a_1} S_{b_2}^{a_2} R_1^{a_1} \otimes R_2^{a_2} \otimes L_3^{b_3} \otimes L_4^{b_4}, \quad (\text{E.2})$$

onde, usando a definição das constantes de estrutura da álgebra de grupo, obtemos:

$$\begin{aligned} A_v(\hat{\phi}_h) &= \sum_{\{b_i, a_j\}} \delta(b_1, b_2) \delta(b_1, b_3) \delta(b_1, b_4) \delta(b_1, h) \delta(b_1, a_1^{-1}) \delta(b_2, a_2^{-1}) R_1^{a_1} \otimes R_2^{a_2} \otimes L_3^{b_3} \otimes L_4^{b_4}, \\ &= \sum_{\{a_j\}} \delta(h a_1, e) \delta(h a_2, e) R_1^{a_1} \otimes R_2^{a_2} \otimes L_3^h \otimes L_4^h, \\ &= R_1^{h^{-1}} \otimes R_2^{h^{-1}} \otimes L_3^h \otimes L_4^h = \mathbf{a}_v^h. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

A equação (E.3) garante, portanto, que o operador de vértice, $A_v(\hat{\psi}^h)$, obtido da rede tensorial da matriz de transferência, é na verdade o mesmo operador de vértice $\mathbf{a}_v^h$ do modelo duplo quântico, e uma vez que a função $\chi_{\mathbb{C}G^*}$ é uma função linear, para uma escolha arbitrária do parâmetro $a = \sum_h a^h \hat{\phi}_h$, obtemos:

$$A_v(a) = \sum_{h \in G} a^h A_v(\hat{\phi}_h) = \sum_{h \in G} a^h \mathbf{a}_v^h . \quad (\text{E.4})$$

Analogamente podemos notar que o operador dado pela rede tensorial da figura E.12 é formado por vários operadores auxiliares do tipo T_l^g , como podemos ver na figura E.16. Se traduzirmos novamente a rede tensorial da figura E.16 para a notação usual de tensores,

Figura E.16.: os operadores nas áreas em destaques são operadores do tipo T_l^g .

obtemos:

$$B_p(\hat{\psi}^h) = \sum_{\{a_i\}} \sum_{\{b_j\}} M_{a_1 a_2 a_3 a_4 h} S_{b_3}^{a_3} S_{b_4}^{a_4} T_1^{a_1} \otimes T_2^{a_2} \otimes T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} . \quad (\text{E.5})$$

Onde finalmente, usando a definição das constantes de estrutura da álgebra de grupo, obtemos:

$$\begin{aligned} B_p(\hat{\psi}^h) &= \sum_{\{a_i\}} \sum_{\{b_j\}} \chi_{\mathbb{C}G}(\hat{\phi}_{a_1 a_2 a_3 a_4 h}) \delta(b_3 a_3, e) \delta(b_4 a_4, e) T_1^{a_1} \otimes T_2^{a_2} \otimes T_3^{b_3} \otimes T_4^{b_4} , \\ &= \sum_{\{a_i\}} \chi_{\mathbb{C}G}(\hat{\phi}_{a_1 a_2 a_3^{-1} a_4^{-1} h}) T_1^{a_1} \otimes T_2^{a_2} \otimes T_3^{a_3} \otimes T_4^{a_4} , \\ &= |G| \sum_{\{a_i\}} \delta(a_1 a_2 a_3^{-1} a_4^{-1} h, e) T_1^{a_1} \otimes T_2^{a_2} \otimes T_3^{a_3} \otimes T_4^{a_4} = |G| \mathbf{b}_p^h . \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

A equação (E.6) garante, portanto, que o operador de plaqueta, $1/|G| B_p(\hat{\phi}_h)$, é na verdade o mesmo operador de plaqueta $\mathbf{b}_p^h$ do modelo duplo quântico e, uma vez que a função $\chi_{\mathbb{C}G}$ é uma função linear, para uma escolha arbitrária do parâmetro $\beta = \sum_h \beta_h \hat{\psi}^h$, obtemos:

$$B_p(\beta) = |G| \sum_h \beta_h \mathbf{b}_p^h . \quad (\text{E.7})$$

Finalmente, o operador de aresta, $C_l(z, \xi)$, pode ser reescrito da forma apresentada na figura E.17. Os operadores dentro da região em destaque são os operadores auxiliares $L_l(z)$ e $T_l(\xi)$, e o operador conectando-os é proporcional à identidade, como pode ser visto na proposição A.7, no apêndice A. Portanto $C_l(z, \xi)$ pode ser escrito como:

Figura E.17.: rede tensorial que representa o operador de aresta $C_l(z, \xi)$.

$$C_l(z, \xi) = |G| L_l(z) T_l(\xi) . \quad (\text{E.8})$$

Bibliografia

- [1] Leinaas, J.M.; Mirheim, J. (1977). “On the theory of identical particles”. *Nuovo cimento B* **37** (1): 1-23.
- [2] Stern, A. (2010). “Review Article Non-Abelian states of matter”. *Nature* **464** (7286): 187-193.
- [3] Aharonov, Y.; Bohm, D. (1959). “Significance of electromagnetic potentials in quantum theory”. *Physical Review* **115** (3): 485–491.
- [4] Kim, E. A. (2006). “Aharonov–Bohm interference and fractional statistics in a quantum Hall interferometer”. *Physical Review Letters* **97** (216404).
- [5] Landau, L. D. (1937). “Theory of phase transformations”. *Phys. Z. Sowjetunion* **10** (26): 19-32.
- [6] Hopfield, J. J. (1982). “Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities”. *Proceedings of the national academy of sciences* **79** (8): 2554–2558.
- [7] Wen, X. G. ; Wilczek, F.; Zee, A. (1989). “Chiral spin states and superconductivity”. *Physical Review B* **39** (16): 11413.
- [8] Wen, X. G. (1990). “Topological Orders in Rigid States”. *International Journal of Modern Physics B* **4** (2): 239.
- [9] Anderson, P. W. (1973). “Resonating valence bonds: A new kind of insulator?”. *Mater. Res. Bull.* **8** (2): 153-160.
- [10] Anderson, P. W. (1987). “The resonating valence bond state in La_2CuO_4 and superconductivity”. *Science* **235** (4793): 1196–1198.
- [11] Wen, X. G. (1991). “Mean Field Theory of spin liquid states with finite energy gap and topological orders”. *Physical Review B* **44** (6): 2664–2672.
- [12] Tsuneya, A.; Yukio, M.; Yasutada, U. (1975). “Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system”. *Journal of Physics Society of Japan* **39** (2): 279.
- [13] Laughlin, R. B. (1981). “Quantized Hall conductivity in two dimensions”. *Physical Review B* **23** (10): 5632–5633.
- [14] Laughlin, R. B. (1983). “Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations”. *Physical Review Letters* **50** (18): 1395–1398.

- [15] Arovas, D., Schrieffer, J. R. ; Wilczek, F. (1984). “Fractional statistics and the quantum Hall effect”. *Physical Review Letters* **53**: 722–723.
- [16] Kalmeyer, V.; Laughlin, R. B. (1987). “Equivalence of the resonating-valence-bond and fractional quantum Hall states”. *Physical Review Letters* **59** (18): 2095–2098.
- [17] Hsieh, D.; Qian, D.; Wray, L.; Xia, Y.; Hor, Y. S.; Cava, R. J.; Hasan, M. Z. (2008). “A topological Dirac insulator in a quantum spin Hall phase”. *Nature* **452** (7190): 970–974.
- [18] Wen, X. G.; Qian, N. (1990). “Ground state degeneracy of the FQH states in presence of random potential and on high genus Riemann surfaces”. *Physical Review B* **41** (13): 9377–9396.
- [19] Wen, X. G. (2016). “An Introduction of topological orders”. (disponível online em: <http://dao.mit.edu/~wen/topartS3.pdf> - acessado em 05 de maio de 2016).
- [20] Preskill, J. (2014). “Notes on quantum computation- a course on quantum computation at Caltech, disponível online em: <http://www.theory.caltech.edu/~preskill/> (acessado em 09 de maio de 2016).
- [21] Brennen, G. Pachos, J. (2008). “Why should anyone care about computing with anyons?”. *Proceedings of the Royal Society of London A* **464** (2089): 1-24.
- [22] Jiang, L.; Brennen, G. K.; Gorshkov, A. V.; Hammerer, K.; Hafezi, M.; Demler, E.; Lukin, M. D.; Zoller, P. (2008). “Anyonic interferometry and protected memories in atomic spin lattices”. *Nature Physics* **4** (6): 482-488.
- [23] Nayak, C.; Simon, S. H.; Stern, A.; Freedman, M.; Sarma, S. Das. (2008). “Non-abelian anyons and topological quantum computation”. *Reviews of Modern Physics* **80** (3): 1083–1159.
- [24] Kitaev A. (2003). “Fault-tolerant quantum computation by anyons”. *Annals of Physics* **303** (1): 2-30.
- [25] Gould, M. D. (1993). “Quantum Double of finite group algebras and their representations”. *Bull Austral Math Soc* **48** (2): 275-301.
- [26] Ferreira, M. J. B.; Pereira, V. A.; Teotonio-Sobrinho, P. (2012). “Quasi-topological quantum field theories and $\mathbb{Z}_2$ lattice gauge theories”. *International Journal of Physics A* **27** (23): 1476-1485.
- [27] Ferreira, M. J. B.; Pramod, P.; Teotonio-Sobrinho, P. (2014). “2D quantum double models from a 3D perspective”. *Journal of Physics A* **47** (37): 375204.
- [28] Ferreira, M. J. B.; Pramod, P.; Teotonio-Sobrinho, P. (2015). “Toric code-like models from the parameter space of 3D lattice gauge theories”. *arXiv:1504.05922 [hep-th]*.

- [29] Pramod, P.; Jimenez, J. P. I; Ferreira, M. J. B.; Teotonio-Sobrinho, P. (2014). “Deformed quantum double realization of the toric code and beyond”. *Annals of Physics A* (372):238-259.
- [30] Ferreira, M. J. B.; Jimenez, J. P. I; Pramod, P.; Teotonio-Sobrinho, P. (2015). “A Recipe for constructing frustration-free hamiltonians with gauge and matter fields in one and two dimensions”. *Journal of Physics A* **48** (48): 485206.
- [31] Ferreira, M. J. B.; Pramod, P.; Teotonio-Sobrinho, P. (2015). “Local realizations of anyon exchange symmetries without lattice dislocations”. arXiv:1508.01399 [cond-mat.str-el].
- [32] Ferreira, M. J. B.; Pramod, P.; Teotonio-Sobrinho, P. (2015). “Generating domain walls between topologically ordered phases using quantum double models”. arXiv:1510.06627 [cond-mat.str-el].
- [33] Pachos, J. K. (2012). “Introduction to topological quantum computation”. New York, NY:Cambridge University Press.
- [34] Trebst, S.; Troyer, M.; Wang, Z.; Ludwig, A. W. W. (2008). “A short introduction to Fibonacci anyon models”. *Progress of Theoretical Physics Supplement* **176**: 284-407.
- [35] Vaezi, A; Barkeshli, M. (2014). “Fibonacci Anyons From Abelian Bilayer Quantum Hall States”. *Physical Review Letters* **113** (23): 236804.
- [36] Fan, Z; Garis, de H. (2010). “Braid Matrices and Quantum Gates for Ising Anyons Topological Quantum Computation”. *The European Physics Journal B* **74** (3): 419-427.
- [37] Wilczek, F. (1991). “Fractional statistics and anyon superconductivity:Series on Directions in Condensed Matter Physics **10**”. Singapore: World Scientific.
- [38] Bullock, S.; Brennen, G. K. (2007). “Qudit surface codes and gauge theory with finite cyclic groups”. *Journal of Physics A* **40**: 3481–3505.
- [39] Kuperberg, G. (1991). “Involutory Hopf Algebras and 3-Manifold invariants”. *International Journal of Mathematics* **2** (1): 41-66.
- [40] Kauffman, L.; Radford, D. E. (1999). “On two proofs for existence and uniqueness of integrals for finite dimensional Hopf Algebras”. arXiv:math/9911081 [math.QA].
- [41] Dascalescu, S.; Nastasescu, C.; Raianu, S. (2001). “Hopf algebras: an introduction.”. New York: Marcel Dekker.
- [42] Sweedler, M. E. (1969). “Hopf Algebras”. New York: Addison-Wesley.
- [43] Schtzer, W. (1996). “Álgebras de Lie, Álgebras de Hopf e grupos quânticos”. *Dissertação de mestrado em ciências-matemática - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.*

- [44] Ferreira, M. J. B. (2012). “Teorias de campos discretas e modelos topológicos”. Dissertação de mestrado em ciências-física - Instituto de Física, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- [45] Wootton, J. R.; Lahtinen, V. Wang, Z.; Pachos, J. K. (2008). “Non-abelian statistics from an abelian model”. *Physical Review B* **78** (16): 161102.
- [46] Vidal, J.; Thomale, R.; Schmidt, K. P.; Dusuel, S. (2009). “Self-duality and bound states of the toric code model in a transverse field”. *Physical Review B* **80** (8): 081104.
- [47] Levin, M. A.; Wen, X.-G.(2005). “String-net condensation: a physical mechanism for topological phases”. *Physical Review B* **71** (045110).
- [48] Nikshych, D. Vainerman, L. (2002). “Finite Quantum Groupoids and Their Applications”. *New directions on Hopf Algebras*, MSRI publications **43**: 211-262.
- [49] Chang, L. (2014). “Kitaev models based on unitary quantum groupoids”. Disponível em [arXiv:1309.4181 \[math.QA\]](https://arxiv.org/abs/1309.4181).
- [50] Evseev, A. (2008). “Semisimple algebras and Wedderburn’s theorem”. Notes on character theory of finite group - course at the University of Cambridge: <http://web.mat.bham.ac.uk/A.Evseev/pdf/wedderburn.pdf> (acessado em 06 de maio de 2016).
- [51] Larson, R. G. (1969). “Characters of Hopf algebras”. *Journal of algebra* **17**: 352-368.
- [52] James, G. Liebeck, M (1995). “Representations and characters of groups”. London: Cambridge.
- [53] Whitterspoon, S. J. (1998). “The representation ring and the centre of a Hopf algebra”.