Universidade de São Paulo
Instituto de Física

NÃO-LINEARIDADE $\chi^{(2)}$ E $\chi^{(3)}$ EM
MICRO-RESSOADORES FOTÔNICOS BASEADOS
EM SILÍCIO COM OSCILAÇÃO PARAMÉTRICA DO
VISÍVEL AO INFRAVERMELHO

Renato Ribeiro Domenegueti

Orientador: Prof. Dr. Paulo A. Nussenzveig

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física para
a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Paulo A. Nussenzveig (IFUSP)

Prof. Dr. Arnaldo Gammal (IFUSP)

Prof. Dr. Alexandre Levine (IFUSP)

Prof. Dr. Thiago Pedro Mayer Alegre (UNICAMP)

Prof. Dr. Lucas Heitzmann Gabrielli (UNICAMP)

Dezembro 2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Domeneguetti, Renato Ribeiro

Não-linearidade $\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$ em micro-ressonadores fotônicos baseados em silício com oscilação paramétrica do visível ao infravermelho. São Paulo, 2018.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Depto. de Física Experimental.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alberto Nussenzveig
Área de Concentração: Física.

Unitermos: 1. Óptica não linear; 2. Óptica; 3. Luz; 4. Física moderna; 5. Física.

USP/IF/SBI-108/2018

NÃO-LINEARIDADE $\chi^{(2)}$ E $\chi^{(3)}$ EM MICRO-RESSOADORES FOTÔNICOS
BASEADOS EM SILÍCIO COM OSCILAÇÃO PARAMÉTRICA DO VISÍVEL AO
INFRAVERMELHO

Renato Ribeiro Domenegueti, Ph.D.

Universidade de São Paulo 2018

Apresentamos neste trabalho o procedimento de engenharia de dispersão em chips fotônicos compatíveis com tecnologia CMOS para conversão de frequências na escala de centenas de Terahertz em micro-ressoadores. Esses sistemas apresentam grande potencial para geração integrada de luz com propriedades não-clássicas para uso em ciência de informação quântica. Este é o primeiro trabalho que utiliza a dispersão dos modos transversos elétrico ou magnético de ordem-superiores para obter o comprimento de onda do zero de dispersão da velocidade de grupo em 795 nm. Demonstramos que, com um delicado balanço entre os termos de dispersão de segunda- e quarta-ordem, geramos dois feixes intensos que podem compartilhar informação quântica entre linhas atômicas e a banda de telecomunicação.

$\chi^{(2)}$ and $\chi^{(3)}$ NONLINEARITIES IN SILICON-BASED PHOTONIC
MICRORESONATORS WITH PARAMETRIC OSCILLATION FROM VISIBLE TO
INFRARED

Renato Ribeiro Domeneguetti, Ph.D.

Universidade de São Paulo 2018

We present in this work the proceedings of dispersion engineering in CMOS compatible photonic chips for frequency conversion in the scale of hundreds of Terahertz in microresonators. These systems present great potential for integrated light generation with non-classical properties for use in quantum information science. This is the first work to use higher-order modes to obtain the zero dispersion wavelength close to 795 nm. We show that with a delicate balance between second- and fourth-order dispersion terms, two intense beams are generated that can possibly share quantum information between atomic lines and telecommunication band.

Em memória de minha mãe,

Safira Miranda Ribeiro

AGRADECIMENTOS

Como parte importante desta tese, chega o momento de lembrar da grande quantidade de pessoas as quais estive em contato ao longo do doutorado. Todas foram muito importantes e tentarei incluí-las neste texto. Caso venha esquecer de alguma, peço desculpas adiantadas. Espero poder reencontra-las no futuro, em alguma conferência, ou simplesmente por acaso, para poder conversar sobre física ou outros assuntos diversos.

A primeira, e mais importante, é o meu orientador, o Prof. Paulo Nussenzveig. Agradeço-o primeiramente por ter me aceitado em seu grupo, lá pelo fim de 2010, quando comecei minhas aventuras na carreira científica. Desde o início, até o presente momento, sempre pude contar com ele em alguma questão acadêmica ou pessoal. Também sou grato por ter confiado em mim assumir o novo projeto de pesquisa iniciado por ele em 2012, quando passou seu ano sabático na Universidade de Cornell, no grupo da Profa. Michal Lipson. Coube a mim continuar o trabalho na área de chips fotônicos, levando à minha viagem de aprendizado, no mesmo grupo, em Setembro de 2014. Ao meu retorno, em meados de 2015, nosso contato aumentou, com reuniões e discussões interessantes sobre física, até mesmo aquelas no domingo às 22:00 hs por skype, devido a atarefada agenda dele com a FAPESP, e por seus compromissos com CPG. As reuniões com o Paulo me inspiravam a continuar a pesquisa mesmo quando os resultados insistiam em não aparecer.

A segunda, mas não menos importante, é o meu co-orientador não formalmente registrado, o Prof. Marcelo Martinelli. Muito pude contar com ele, desde o mestrado, quando assumiu minha orientação na viagem do Paulo aos Estados Unidos. O aprendizado com ele foi memorável. Aprendi muito sobre física teórica, mas principalmente em como lidar com a parte experimental do projeto. Ele

foi o maior responsável pelo meu amadurecimento profissional.

Os professores Paulo e Marcelo são complementares no aspecto acadêmico, e talvez seja isso que torne o grupo um dos mais importantes do mundo na linha de pesquisa em ótica quântica e ótica não-linear.

Agradeço sinceramente à Proff. Michal Lipson pelo acolhimento durante minha estadia em seu grupo. Ela assumiu com bastante dedicação minha orientação, mesmo não sendo diretamente responsável por mim. As reuniões individuais que tive com a Michal eram motivadoras. Ela tornava os meus mais básicos aprendizados em grandes conquistas. Mesmo após o meu retorno ao Brasil, ainda tivemos algumas reuniões em grupo, juntamente com o Prof. Alexander Gaeta e Yun Zhao. Em poucas reuniões que tivemos, o Prof. Gaeta teve uma contribuição imensa sobre o meu entendimento de dispersão. Apesar de não ter tido a oportunidade de conhecer o Yun pessoalmente, achei prazerosa nossas discussões sobre os processos que estávamos observando em chip. Ainda mantemos contato esporadicamente, e espero continuar contribuindo com o trabalho envolvendo a geração de pente de frequências no visível.

Não poderia deixar de agradecer ao Prof. Renné Medeiros de Araújo, da Universidade Federal de Santa Catarina, com quem, no início do doutorado, aprendi sobre detecção com cavidades e sistema de demodulação. Na época, o Renné era um pós-doutorando no grupo, que juntamente com Igor Konieczniak, trabalhávamos na caracterização quântica de um OPO $\chi^{(2)}$, que futuramente seria empregado no projeto de teletransporte. Apreciei os almoços que tivemos juntos, sempre havia discussões calorosas sobre diversos temas.

Também quero agradecer profundamente ao Prof. Breno Marques Gonçalves Teixeira, recentemente contratado pela Universidade Federal do ABC, com quem trabalhei na mesma mesa ótica um longo período do doutorado. O Breno, além

de ser um grande companheiro profissional, o considero um amigo pessoal. Sinto falta dos cafés que tomávamos à tarde no grêmio do IPEN. Estou muito feliz por ele ter sido contratado para trabalhar em algo que ele domina bastante, que é informação quântica, aplicado em algo que eu entendo um pouco, chips fotônicos. Gostaria muito de poder contribuir com ele no futuro.

Não poderia agradecer ao Breno e não me lembrar da Rayssa Bruzaca de Andrade, com quem também dividia a mesa ótica. Agradeço à Rayssa, principalmente pela paciência que ela teve comigo ao longo do doutorado, que iniciamos praticamente juntos. A Rayssa e eu, herdamos dois lasers similares, os quais, podemos dizer, deixamos com a mesma eficiência de um laser comercial. Foram muitas dificuldades e felicidades que passamos juntos, e sinto falta dos cafés, e chás, que tomávamos no grêmio do IPEN. Fico feliz pela Rayssa estar trabalhando atualmente no grupo do Prof. Ulrik Lund Andersen na Universidade Técnica da Dinamarca. Desejo sucessos à Rayssa, que ela consiga muitos resultados no grupo.

Também foi muito agradável trabalhar com o Pablo Palacios. O projeto do Pablo envolvia a construção de uma cavidade ótica de filtro para limpar o excesso de ruído de um laser de diodo em 1560 nm. Em seguida, com uma fonte de luz coerente, a ideia era estudar as correlações não-clássicas de fase e amplitude dos feixes gerados em chip. O Pablo desenvolveu o trabalho muito bem, conseguindo criar uma fonte coerente de luz a partir de 12 MHz. Após a defesa de mestrado, o Pablo decidiu seguir sua carreira em outro grupo. Desejo sucessos ao Pablo. Logo em seguida, o grupo admitiu mais um estudante para seguir o trabalho de caracterização das propriedades quânticas dos feixes gerados. O Roger Alfredo Kögler está avançando muito bem em sua pesquisa, e creio que logo ele conseguirá excelentes resultados.

Além do Pablo e do Roger, o Carlos González-Arciniegas também estava envol-

vido na pesquisa em chips fotônicos, mas no tratamento teórico das propriedades quânticas dos feixes. O trabalho do Carlos mostrou que os feixes intensos emitidos por um OPO integrado, baseado em mistura de quatro-ondas, possui emaranhamento tripartite. As discussões que tivemos, sobre o tratamento utilizado por ele, em muito contribuiu para o meu entendimento teórico sobre a dinâmica do sistema.

Em geral, agradeço a todos os estudantes do Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz, em especial, ao Hans Marin Florez, o pós-doutorando do grupo, à Bárbara Ribeiro, ao Alvaro Montaña e ao Harold Rojas, pelo entendimento de um OPO com átomos de Rubídio. Foi espantoso ver a eficiência de geração de feixes gêmeos a partir do ganho atômico. Agradeço ao Luiz Couto e ao Túlio Brasil, pelos momentos que trabalhamos juntos. Agradeço ao Raúl Celis por ter me ajudado a compreender o funcionamento de um laser com cavidade estendida, e sobre o processo de filtragem no interior de uma cavidade longa. Agradeço também ao Lucas Nunes Faria pela contribuição dada ao meu entendimento sobre teletransporte.

Em especial, também quero agradecer ao Prof. Felipe Barbosa da Universidade de Campinas. O Felipe defendeu a tese de doutorado dele alguns meses antes de minha viagem aos Estados Unidos. Viajamos praticamente juntos à Universidade de Cornell. Minha estadia em Ithaca foi mais agradável por causa de sua companhia. Trabalhamos, viajamos, e fizemos muitas coisas juntos. As discussões que tivemos sobre física, programação, e simulações, foram todas muito proveitosas. Além do Felipe, também gostaria de agradecer ao Prof. Gustavo Wiederhecker da UNICAMP. Nas poucas conversas que tivemos, sempre consegui absorver conhecimento sobre chips fotônicos.

Também quero agradecer, em geral, ao grupo da Profa. Michal Lipson. Todos

os estudantes e pós-doutorandos contribuíram em minha formação. As reuniões de grupo sempre resultavam em grandes discussões construtivas. Em especial, agradeço ao Avik Dutt. Ele foi o principal responsável pelo meu desenvolvimento em Cornell. O meu aprendizado sobre a montagem do setup, a utilização dos equipamentos e o conhecimento sobre o manuseio do experimento em chip, ficou a cargo dele, e ele atuou de forma impecável. Fico feliz pelos resultados conseguidos pelo Avik, em particular, a medida de correlação quântica em intensidade dos feixes intensos gerados em chip. Também agradeço ao Avik pelas reuniões por skype que tivemos após o meu retorno ao país, foram todas muito proveitosas.

Agradeço ao Steven Miller pelas discussões sobre geração de segundo-harmônico em chips. Meus primeiros experimentos e medidas foram realizados com os dispositivos fabricados por ele. O Steven me ajudou bastante no primeiro contato que tive com o software COMSOL, minhas primeiras simulações foram rodadas com programas criados por ele. Também tive grande ajuda com respeito ao desenhos dos cads, e com os exigidos procedimentos de conversão de formatos para a leitura das máquinas. Grande parte do meu conhecimento sobre simulações, e sobre as etapas anteriores à própria fabricação, adquiri através do Steven.

O Steven foi meu vizinho de mesa no escritório, do outro lado, ficava a Aseema Mohanty. Com a Aseema, aprendi sobre fabricação, e acima de tudo, sobre o experimento de Hong-Ou-Mandel em chip. Também foi com a Aseema que aprendi sobre conversão de modos transversos, a teoria, e as simulações para a determinação das geometrias. Foi muito prazeroso trabalhar com ela. Sobre a fabricação, também aprendi muito com o Kevin Luke. Acompanhei o processo de fabricação dos meus chips com ele. Ele tornava o longo e cansativo processo em algo descontraído e interessante. O Kevin contribuiu muito no aprimoramento das técnicas de fabricação, produzindo chips com alto fator de qualidade. Também sinto falta de

nosso hábito de procurar almoços gratuitos (“free lunch”) em Cornell. Na verdade, não eram realmente gratuitos, precisávamos participar de reuniões em grupo para tê-las.

Acompanhei o processo de mudança da pessoa responsável pela fabricação dos chips, do Kevin para o William (Xingchen Ji). Cheguei a fazer alguns cursos de fabricação com o William, que estava assumindo a posição que seria deixada pelo Kevin, após sua defesa de tese. Foi muito prazeroso trabalhar tanto com o Kevin quanto com o William. Após a minha volta para o Brasil, todo o contato com grupo da Profa. Lipson, com relação à fabricação de chips, foi feito através do William. Ele sempre foi muito dedicado em sanar as minhas dúvidas. O feito do William, reduzindo as perdas por espalhamento, devido às rugosidades do guia de onda, foi extremamente admirável. O William, trabalhando junto com a Samantha P. Roberts, conseguiram aumentar o fator de qualidade intrínseco dos anéis em cerca dez vezes.

Agradeço sinceramente ao Prof. Jaime Cardenas da Universidade de Rochester. No período em que estive no grupo de nanofotônica da Profa. Lipson, o Jaime era pós-doutorando, e muito pude contar com ele em questões acadêmicas e burocráticas. Conversamos, entre outros assuntos, sobre fabricação e acordo de fase em ressoadores para processos envolvendo a geração de harmônicos. Ele me passou artigos bem interessantes, que me ajudaram a amadurecer a ideia do projeto de conversão paramétrica descendente de segunda-ordem. Agradeço também aos jantares oferecidos por ele e sua esposa. Eles sempre foram muito acolhedores.

Meu primeiro contato com os softwares de simulação utilizados neste trabalho foi feito através do Austin Griffith. Agradeço a ele pelo bom encaminhamento. Os modelos criados por ele para o cálculo da velocidade de grupo em guias de onda em muito aceleraram o meu aprendizado. Em poucos dias já estava escrevendo

meus próprios códigos. Fico muito feliz pelos excelentes resultados conseguidos por ele, em particular, a observação da geração de um pente de frequências com influência do espalhamento Raman estimulado.

Em geral, agradeço ao Yoon Ho Daniel Lee, pelo auxílio com simulações, ao Shreyas Shah, por grandes discussões sobre a aplicação de chips fotônicos em astronomia, ao Mian Zhang, pela introdução à sincronização de cavidades optomecânicas, ao Raphael St-Gelais, pela introdução à conversão de energia a partir do calor gerado em chip, ao Lawrence Tzuang, à Romy Fain, ao Brian Stern, pelas conversas sobre conversão de modos, ao Moshe Zadka, por ter me apresentado às micro-esferas de sílica, ao Christopher Thomas Phare, à Ipshita Datta, ao Gaurang Ravindra Bhatt e ao Mohammad Amin Tadayon, muito aprendi sobre biofotônica com ele.

Não poderia terminar esta seção de agradecimentos sem me lembrar da equipe da oficina mecânica central do Instituto de Física da USP. Em especial, agradeço ao Marcos Santos de Souza. O Marcos muito contribuiu para a construção do setup experimental em São Paulo. Em todos os momentos que precisei dele, para alguma confecção de peça ou adaptação, ele sempre foi muito prestativo. Agradeço pelas excelentes sugestões oferecidas por ele sempre que eu apresentava algum novo projeto.

Continuando, também sou grato ao pessoal da eletrônica do Departamento de Física Experimental, especialmente ao Edu e ao Adriano. Agradeço, principalmente, aos serviços emergenciais prestados por eles sempre que ocorria algum defeito eletrônico no experimento. Em algumas vezes, eles ficaram até tarde da noite tentando corrigir o problema apresentado.

Agradeço, também, à Edi Rezende, secretária da FEP. A Edi sempre foi uma pessoa incrível, executando as suas tarefas eficientemente. Ela estava sempre à

disposição para resolver qualquer dificuldade minha sobre diversos assuntos burocráticos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001. Os primeiros meses de pesquisa foram financiados pelo CNPq . Em especial, agradeço à FAPESP, pelo financiamento da maior parte de minha bolsa de estudos na Universidade de São Paulo, sob número de processo 2013/26757-0.

SUMÁRIO

Dedication	v
Agradecimentos	vii
Sumário	xv
Lista de Tabelas	xviii
Introdução	1
1 Eletromagnetismo em meio dielétrico	6
1.1 Ondas eletromagnéticas na matéria	6
1.1.1 Ondas planas monocromáticas	8
1.1.2 Energia e momento da onda eletromagnética	10
1.1.3 Reflexão e transmissão na interface dielétrica	11
1.1.4 Reflexão total frustrada	19
1.2 Constante dielétrica	23
1.2.1 Modelo Lorentziano	24
1.2.2 Equação de Sellmeier	27
1.3 Guias de onda	30
1.3.1 Guia de onda planar	31
1.3.2 Modo transversal elétrico	33
1.3.3 Modo transversal magnético	39
1.3.4 Guia de onda retangular	41
1.4 Relações de dispersão	48
1.4.1 Domínio espectral vs temporal	50
1.4.2 Velocidade de grupo	53
1.4.3 Dispersão da velocidade de grupo (GVD)	55
1.4.4 Dispersões de ordens superiores	57
1.5 Conclusões e perspectivas	59
2 Micro-ressoador fotônico e ótica não-linear	61
2.1 Micro-ressoador fotônico	62
2.1.1 Ressorador com uma porta	62
2.1.2 Ressorador com duas portas	66
2.1.3 Parâmetros do ressoador	68
2.1.4 Perdas	71
2.1.5 Micro-aquecedores integrados	74
2.2 Suscetibilidade não-linear	77
2.2.1 Dinâmica eletrônica não-linear	79
2.3 Geração de segundo-harmônico	80
2.3.1 Acordo de fase	82
2.3.2 Projeto do chip	85
2.3.3 Resultado experimental	89
2.4 Conversão paramétrica descendente	93

2.4.1	Oscilador paramétrico ótico (OPO)	93
2.4.2	Limiar de oscilação	96
2.5	Mistura de quatro-ondas	101
2.5.1	Dinâmica da oscilação paramétrica	103
2.5.2	Largura espectral do ganho paramétrico	110
2.6	Conclusões e perspectivas	112
3	Oscilação paramétrica em bandas laterais com grande separação espectral	113
3.1	Modos transversos superiores	114
3.1.1	Dispersões de segunda- e quarta-ordem	115
3.1.2	Perfil espacial dos modos transversos	117
3.1.3	Conversão de modos	120
3.1.4	Cruzamento de modos	123
3.2	Setup experimental	124
3.3	Ressorador 730 x 2000 nm	132
3.3.1	Modos acoplados	132
3.3.2	Fator de qualidade	133
3.3.3	Frequências ressonantes	137
3.3.4	Casamento de fase não-linear	141
3.3.5	Oscilação paramétrica	144
3.3.6	Dispersão total	147
3.3.7	Geração sintonizável	151
3.3.8	Simulação da LLE	153
3.4	Ressorador 730 x 1200 nm	155
3.4.1	Acordo de fase não-linear	156
3.4.2	Oscilação em 613 e 1128 nm	157
3.4.3	Identificação do modo transversal	159
3.4.4	Limiar de oscilação	162
	Conclusões e perspectivas	166
A	Simulação MEEP	170
A.1	Guia de onda planar	170
A.2	Dispersão total	172
B	Simulação MPB	175
B.1	Guia de onda curvo	175
B.2	Dispersão de ordens superiores	177
B.3	Cálculo da energia sobre a parede lateral do guia de onda	179
C	Método de split-step	182
C.1	Desenvolvimento matemático	182
C.2	Estimativa de erro	185
C.3	FFT	186

D Estabilização térmica	188
Referências Bibliográficas	190

LISTA DE TABELAS

1.1	Ressonâncias e constantes empíricas da equação de Sellmeier. Os parâmetros do nitreto de silício foram obtidos em [1], enquanto que os parâmetros do óxido de silício foram obtidos em [2].	29
3.1	Energia propagada pelas paredes laterais de um guia de onda reto, normalizada pela energia do modo fundamental.	120
3.2	Cálculo do FSR dos quatro primeiros modos transversos na polarização TM, baseado na simulação da velocidade de grupo, em uma geometria de 730×1200 nm e raio de curvatura de $132 \mu\text{m}$	159

INTRODUÇÃO

O micro-ressoador fotônico é um dispositivo compacto, na micro-escala de chips, cuja principal importância é aprimorar a interação entre a luz e a matéria em um espectro discreto de frequências. O pente de frequências, gerado em chip, permite o desenvolvimento de instrumentos de medição extremamente precisos e ultra-compactos, revolucionando a tecnologia de contagem de tempo [3], espectroscopia [4] e metrologia [5].

Microcavidade em guia de onda, formada por nitreto de silício envolto em dióxido de silício, confina fortemente o campo eletromagnético devido ao alto contraste nos índices de refração dos materiais. Além disso, o nitreto de silício é reconhecido por possuir uma ampla janela espectral de transparência, desde o visível até o infravermelho médio. O alto confinamento do campo e o longo tempo de vida do fóton no interior da cavidade são apropriados para a conversão não-linear de frequências, reduzindo o limiar de oscilação para o início do processo.

O nitreto de silício, em sua forma amorfa, tem as moléculas naturalmente organizadas de forma a apresentarem centro de simetria. Por causa da organização centro-simétrica das moléculas, apenas o efeito não-linear de terceira-ordem $\chi^{(3)}$ é importante. O principal processo paramétrico é a mistura de quatro-ondas (FWM) - do inglês - *four-wave mixing*, no qual, a interação de dois fótons do bombeio com o meio não-linear, resulta no surgimento de um novo par de fótons em bandas laterais, sinal e complementar. Para a ocorrência do processo, duas condições de conservação devem ser satisfeitas: momento e energia. A conservação de momento é garantida pelo casamento de fase. Nas proximidades do campo de bombeio, todos os modos populados da cavidade propagam com a mesma velocidade de grupo e sentem a mesma relação de dispersão. A conservação de energia ao longo de um

amplo espectro de frequências impõe restrições na dispersão, porque a diferença de frequência entre modos vizinhos da cavidade pode variar de acordo com a dispersão do material, da geometria, e do modo do campo, resultando em modos de cavidade não equidistantes. No entanto, para modos próximos ao bombeio, o acúmulo na diferença em frequência entre modos vizinhos pode ser pequena a ponto da conservação de energia e momento ainda serem obedecidas.

O mecanismo responsável pela geração de um pente de frequências largo requer que a variação em frequência dos modos vizinhos da cavidade seja pequena. Dessa forma, as primeiras bandas laterais geradas podem interagir entre si gerando novos feixes pela mistura de quatro-ondas não degenerada. O processo em cascata é observado notando, por exemplo, que o sinal gerado pode interagir com o bombeio, resultando em um novo sinal de segunda-ordem, com respectiva conservação de energia. Após uma certa potência intracavidade, a interação se dá exclusivamente entre campos gerados, expandindo a largura espectral do pente até o ponto onde a variação dos modos cavitantes passa a ser considerável. Portanto, se a dispersão da cavidade é pequena, processos sucessivos de FWM podem ocorrer, gerando múltiplos feixes com frequências distintas igualmente espaçadas e com coerência de fase [6, 7].

Sendo assim, a dinâmica de formação do pente com coerência de fase, também conhecido como pente de frequências de modo travado, *mode-locking*, é fortemente dependente da dispersão. Há uma variedade de micro-ressoadores que levam à geração de pentes, indo desde materiais cristalinos [8, 9], em microdiscos de sílica [10], e microesferas [11], além dos chips fotônicos planares em sílica [12] e nitreto de silício [13]. Os diferentes dispositivos podem ser vistos na Figura 1.

Em nitreto de silício, já foi estudado o procedimento de geração de pentes de

Figura 1: Diferentes micro-ressoadores integrados que levam à geração de pente de frequências, incluindo diamante, nitreto de alumínio AlN, arseneto de gálio AlGaAs, sílica sobre silício e nitreto de silício. Figura retirada de [14].

frequências com um feixe de bombeio em infravermelho médio $\sim 2,6 \mu\text{m}$ [1], na banda de telecomunicações [7], e em $1 \mu\text{m}$ [15]. No entanto, o processo de mistura de quatro-ondas puro, com um feixe de bombeio inferior a $1 \mu\text{m}$, nunca foi observado. A geração de luz no visível é possível através do processo em cascata de geração de terceiro-harmônico [16], ou através da não-linearidade de segunda-ordem em cascata. O processo de geração de segundo-harmônico pode levar à geração de luz em comprimentos de onda curtos a partir de um pente de frequências em telecom [17].

O processo de mistura de quatro-ondas originado por um feixe de bombeio em 795 nm , por exemplo, é muito desejável. A região espectral cobrindo do infravermelho-próximo ao visível é interessante para aplicações biológicas [18]. A geração de um pente de frequências nessa região espectral seria muito importante para espectroscopia de tecidos animais [19, 20, 21]. Neste caso, o pente de frequências completamente caracterizado atuaria como uma régua, onde a medida de frequência pode ser realizada comparando-a com as frequências que compõem o pente.

Além de aplicações biológicas, a região espectral de interesse também cobre as diversas linhas de absorção dos átomos alcalinos, importante para aplicações em memória quântica [22, 23]. A produção de fótons em sintonia com linhas atômi-

cas interconectadas com a banda de telecomunicação através de um dispositivo integrado, compatível com tecnologia CMOS, é de grande interesse [24].

Neste trabalho, iremos nos concentrar no procedimento de engenharia de dispersão focado no estudo de geração das primeiras bandas laterais. Para potências de bombeio baixas, são gerados apenas dois feixes espectralmente simétricos com relação à frequência de bombeio. Estamos interessados em estudar o efeito da dispersão total efetiva, caracterizada pela dispersão dos materiais e o efeito da geometria sobre o modo do campo transversal, de forma a projetar chips que gerem luz em linhas atômicas específicas.

A principal dificuldade está em projetar uma geometria que leve o zero de dispersão da velocidade de grupo para comprimentos de onda inferiores a $1\ \mu\text{m}$ [18]. A forte dispersão normal do nitreto de silício em comprimentos de onda mais curtos impede o efeito da geometria sobre a dispersão efetiva do modo fundamental. Contudo, o efeito da geometria sobre a dispersão dos modos transversos de ordem-superiores pode deslocar o zero de dispersão para comprimentos de onda menores.

Em cavidades de fibras óticas, foi mostrado que para uma dispersão da velocidade de grupo normal, que não satisfaz o casamento de fase, um termo negativo de quarta-ordem de dispersão permite a observação de conversão de frequências em bandas laterais com ampla separação espectral do bombeio [25]. Além desse trabalho, recentemente foi demonstrado um processo semelhante em microesferas de sílica em telecom [26]. Mas neste último trabalho, o processo era sintonizável. Variando levemente a frequência de bombeio, as frequências em bandas laterais variavam grandemente.

Esta tese tratará sobre esse efeito. Como este é o primeiro trabalho do grupo em

São Paulo com guias de onda integrados, decidimos começar a descrição do projeto pelos conceitos básicos de ondas guiadas em um meio dielétrico. A tese será dividida em três capítulos. No primeiro, iremos tratar da dinâmica dos campos eletromagnéticos guiados através da reflexão interna total em um meio dielétrico. Descreveremos também o processo de acoplamento entre dois guias de onda através da reflexão interna total frustada. Falaremos sobre as definições das propriedades dos modos transversos. E por fim, faremos uma breve introdução sobre as relações de dispersão.

No segundo capítulo, irei tratar sobre a dinâmica linear dos micro-ressoadores. Será desenvolvido o formalismo de entrada e saída de cavidades, em conjunto com as definições dos principais parâmetros do ressonador. Em seguida, farei a descrição sobre ótica não-linear em um material que apresenta uma quebra indeterminada do centro de simetria do material amorfo. Em particular, descreverei sobre o projeto de uma microcavidade integrada para geração de segundo-harmônico, e a tentativa de observação do processo inverso, a conversão paramétrica descendente de segunda-ordem. Por fim, exponho as dificuldades em produzir este último processo, e como isto levou à observação da conversão paramétrica de frequências a partir do processo de mistura de quatro-ondas.

No último capítulo exponho os resultados obtidos com a engenharia de dispersão para a geração de bandas laterais espectralmente separadas do feixe de bombeio com base no termo de quarta-ordem da dispersão.

CAPÍTULO 1

ELETROMAGNETISMO EM MEIO DIELÉTRICO

1.1 Ondas eletromagnéticas na matéria

O eletromagnetismo clássico, incluindo a propagação da luz na matéria, é governado pelas equações de Maxwell. No sistema internacional de unidades (SI), elas são

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \mathbf{J},\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são os campos elétrico e magnético, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ são as densidades de fluxo elétrico e magnético, ρ e $\mathbf{J}$ são as cargas e densidade de corrente livres, respectivamente. A derivação destas equações e a maioria das expressões definidas nesta seção podem ser encontradas em [27].

Iremos nos restringir à propagação dos campos dentro de um meio dielétrico misto, formado por uma composição de regiões com materiais dielétricos homogêneos em função da posição $\mathbf{r}$, no qual a estrutura não varia com o tempo, e não há cargas e densidade de corrente livres. Com esse meio material em mente, no qual pode haver propagação da luz, podemos assumir $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$ ¹.

As equações de Maxwell constituem um conjunto de equações diferenciais parciais de primeira ordem acopladas em $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$. O desacoplamento é feito aplicando o rotacional nas duas equações à direita de (1.1), e manipulando adequadamente suas expressões. Obtemos ao final deste procedimento, equações diferenciais parciais de segunda ordem desacopladas para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$, que as identificamos como equa-

¹Essas condições são válidas para cargas e densidade de corrente livres, apesar de haver acúmulo de densidade de cargas nas interfaces dos meios dielétricos.

ções de ondas tri-dimensionais. Para o campo elétrico temos, por exemplo,

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

onde observamos que a velocidade da luz no meio é dada por $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$. Uma equação idêntica é obtida para o campo magnético $\mathbf{H}$. Os parâmetros ϵ e μ são chamados de **constante dielétrica** e **permeabilidade magnética**, respectivamente. Para uma onda eletromagnética propagando no vácuo, o valor da velocidade da luz foi definida em $c = 299\,792\,458$ m/s [28].

Procurarei utilizar neste capítulo o sistema natural de unidades, no qual grandezas fundamentais, como por exemplo a velocidade da luz no vácuo c , são consideradas como grandezas definidoras de escala, cujos valores são unitários. Isso implica em normalizar a constante dielétrica e a permeabilidade magnética por seus valores de vácuo, isto é, $\epsilon_0 = \mu_0 = 1$. Nesse sistema de unidades as equações de Maxwell (1.1) são adimensionais. Na prática, quase todos os cálculos que serão feitos neste capítulo, e nos posteriores, serão sempre razões entre duas quantidades compatíveis, como por exemplo a reflexão de um campo normalizado pelo campo incidente, cancelando, de qualquer forma, unidades representativas de grandezas mensuráveis. Portanto, caso seja dito o contrário, as expressões matemáticas serão dadas no sistema natural de unidades, mas os gráficos, quando julgar necessário a comparação com valores familiares de laboratório, irei mostrar no sistema internacional de unidades. Por exemplo, vimos que a velocidade da luz em um meio material descrito por ϵ e μ é dada por $1/\sqrt{\epsilon\mu}$. A normalização da constante dielétrica e da permeabilidade magnética por seus valores de vácuo, levam à definir a velocidade da luz no meio por

$$v = \frac{1}{n}, \quad (1.3)$$

onde $n \equiv \sqrt{\epsilon\mu}$ é o índice de refração do material, e v é dado em unidades de c no

sistema internacional.

Em praticamente todos os meios materiais, o índice de refração do meio é maior do que o índice de refração do vácuo, logo a luz viaja mais lenta no meio material ². Além disso, para frequências óticas, a magnitude da permeabilidade magnética μ dos materiais é próxima de seu valor de vácuo. Portanto, aproximando $\mu \approx \mu_0$, vemos que o índice de refração do material e a constante dielétrica obedecem a relação

$$n \cong \sqrt{\epsilon}. \quad (1.4)$$

De forma geral, pode haver uma dependência complicada do índice de refração no material, variando localmente de ponto a ponto, ou com relação à direção de propagação do campo. Além disso, seu valor pode variar para campos com frequências distintas. Para o propósito do meu trabalho, irei descartar as primeiras dependências, considerando materiais homogêneos e isotrópicos. No entanto, a dependência do índice de refração com a frequência é de crucial importância, pois como veremos, é justamente essa qualidade que permite conseguirmos um comportamento adequado no guiamento do campo eletromagnético. Assim sendo, apesar de não haver uma dependência explícita da frequência na representação de ϵ ou n , nunca iremos tratá-las como constantes.

1.1.1 Ondas planas monocromáticas

A descrição da onda eletromagnética monocromática é feita através da oscilação temporal dos campos com frequência ω , e a cada valor de frequência está associada

²O índice de refração do plasma pode ser inferior ao do vácuo, e a velocidade de fase de uma onda plana infinita será conseqüentemente superior ao limite máximo da velocidade da luz em vácuo. Contudo, não há transmissão de informação em uma frente de onda plana.

uma energia. Uma onda deste tipo propagando na direção $\hat{\mathbf{k}}$, sem dependência dos campos nas direções ortogonais, é chamada de onda plana, porque os campos são uniformes nas direções transversas à propagação. Esses campos são representados por vetores complexos

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.5)$$

onde $\mathbf{E}_0$ e $\mathbf{H}_0$ são as amplitudes complexas dos campos. Os campos elétrico e magnético físicos são obtidos extraindo a parte real de (1.5).

O vetor que acompanha o termo de propagação no argumento da exponencial é conhecido como **vetor de onda** ou **constante de propagação $\mathbf{k}$** . A direção do vetor de onda, representada pelo vetor unitário $\hat{\mathbf{k}}$, indica a direção de propagação da onda. Enquanto que sua magnitude associa a distância de propagação em unidades de comprimento de onda no vácuo, ou seja, $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$. No entanto, para uma onda monocromática de frequência ω propagando em um meio material, o comprimento de onda associado a ela difere de seu comprimento no vácuo, justamente porque suas velocidades são diferentes. Dessa forma, é importante ter em mente que, na ausência de efeitos não-lineares, a frequência do campo é mantida constante, mas a velocidade e o vetor de onda obedecem a relação

$$v = \frac{\omega}{|\mathbf{k}(\omega)|}, \quad (1.6)$$

onde $\mathbf{k}(\omega)$ é o vetor de onda no meio material, que está associado ao seu valor em vácuo $\mathbf{k}_0$ através do índice de refração do meio material, $|\mathbf{k}(\omega)| = n(\omega)|\mathbf{k}_0|$. A velocidade definida pela equação (1.6) é conhecida como **velocidade de fase** da onda.

Na ausência de cargas elétricas livres, lemos nas equações de Maxwell (1.1) que $\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Isso implica que os campos oscilantes da onda plana são

transversos à direção de propagação

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_0 = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{H}_0 = 0. \quad (1.7)$$

Além disso, pela lei de Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$, vemos que os campos elétrico e magnético precisam ser mutualmente transversos, ou compactamente

$$\mathbf{H}_0 = \frac{1}{v}(\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}_0). \quad (1.8)$$

Portanto, a propagação da onda eletromagnética plana monocromática em um meio dielétrico consiste na oscilação mutualmente transversa e em fase dos campos eletromagnéticos.

1.1.2 Energia e momento da onda eletromagnética

A energia por unidade de volume armazenada nos campos eletromagnéticos é

$$u = \frac{1}{2}(D^2 + H^2), \quad (1.9)$$

e é carregada pela onda plana na mesma direção de propagação. O fluxo da densidade de energia, energia por unidade de área e por unidade de tempo, transportada pelos campos é dado pelo vetor de Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (1.10)$$

A média temporal do fluxo de energia é dado pela parte real do vetor de Poynting complexo

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*. \quad (1.11)$$

O campo eletromagnético, além de carregar energia, também carrega momento. O momento armazenado pelos campos é

$$\mathcal{P} = \frac{1}{v^2}\mathbf{S}. \quad (1.12)$$

O período da luz eletromagnética, na escala de terahertz, é da ordem de $\sim \times 10^{-15}$ s, rápido o suficiente para que seja impossível sua detecção temporal. Portanto, qualquer tentativa de medir a frequência ótica do campo englobará muitos ciclos. Dessa forma, é conveniente definir a **intensidade do campo**, dado pela média temporal por unidade de área da potência do campo

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2, \quad (1.13)$$

válido para uma onda plana monocromática.

1.1.3 Reflexão e transmissão na interface dielétrica

Em geral, os campos eletromagnéticos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ podem ser descontínuos na interface entre dois meios materiais, ou na superfície que possui densidade de cargas ou correntes livres. A forma explícita destas discontinuidades podem ser deduzidas das equações de Maxwell [27]

$$\begin{aligned} (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} &= \rho, & (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\ (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} &= 0, & (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} &= \mathbf{J} \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde $\mathbf{n}$ é um vetor unitário normal à superfície. Para nossa estrutura, vamos assumir a ausência de cargas e correntes livres.

A onda eletromagnética ao atingir uma superfície dielétrica, formada por dois materiais descritos pelos índices de refração n_1 e n_2 , dá origem a uma onda refletida, que propaga no mesmo material da onda incidente, e a uma onda transmitida propagante no meio material descrito por n_2 , também chamada de **onda refratada**. Esses campos são descritos pelos vetores complexos

$$\mathbf{E}_j(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_{0j} e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega_j t)}, \quad \mathbf{H}_j(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_j} (\hat{\mathbf{k}}_j \times \mathbf{E}_j), \quad (1.15)$$

onde o índice $j= I, T$ ou R , associa o vetor complexo ao campo incidente, transmitido ou refletido, respectivamente. A frequência dos três campos é a mesma, e é definida pelo laser que gerou a onda incidente. Tendo em vista a expressão (1.6), temos

$$k_I = k_R = \frac{n_1}{n_2} k_T. \quad (1.16)$$

A existência das condições de contorno (1.14) na interface dielétrica, que escolheremos como o plano definido por $z = 0$, precisa ser satisfeita em todos os pontos e em qualquer tempo, isso implica em fazer os argumentos das exponenciais dos campos iguais

$$(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r})_{z=0} = (\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r})_{z=0}, \quad (1.17)$$

independente da natureza das condições de contorno. Vemos imediatamente pela (1.17) que os três vetores de ondas devem estar sobre o mesmo plano. Além disso, escolhendo o plano $y = 0$, vemos que

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T. \quad (1.18)$$

Como $k_I = k_R$, temos que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. E a **lei de Snell** é

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (1.19)$$

ver Figura 1.1.

Para materiais dielétricos, as condições de contorno (1.14) exigem que as componentes normais à superfície dos campos $\mathbf{D}$ e $\mathbf{H}$ sejam contínuas, e as componentes tangenciais dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ sejam contínuas. Em termos dos campos (1.15),

Figura 1.1: Onda incidente descrita por $\mathbf{k}_I$ numa interface dielétrica, dá origem a uma onda refletida $\mathbf{k}_R$ e outra transmitida $\mathbf{k}_T$.

temos

$$\begin{aligned}
 [\epsilon_1(\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R) - \epsilon_2\mathbf{E}_T] \cdot \mathbf{n} &= 0, \\
 (\mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_I + \mathbf{k}_R \times \mathbf{E}_R - \mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T) \cdot \mathbf{n} &= 0, \\
 (\mathbf{E}_I + \mathbf{E}_R - \mathbf{E}_T) \times \mathbf{n} &= 0, \\
 (\mathbf{k}_I \times \mathbf{E}_I + \mathbf{k}_R \times \mathbf{E}_R - \mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T) \times \mathbf{n} &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Para a aplicação das condições de contorno (1.20), é conveniente analisar dois casos separados. O primeiro caso, quando a polarização do campo (direção do campo elétrico) é normal ao plano de incidência, formado pelos vetores $\mathbf{n}$ e $\hat{\mathbf{k}}$. E o segundo caso, quando a polarização é paralela ao plano de incidência, ver Figura 1.2.

Figura 1.2: Reflexão e refração da onda eletromagnética em termos da polarização (a) normal e (b) paralela do campo elétrico.

Polarização normal ao plano de incidência

A terceira e a quarta equações de (1.20) levam a

$$\begin{aligned} E_I + E_R - E_T &= 0, \\ n_1(E_I - E_R) \cos \theta_I - n_2 E_T \cos \theta_T &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

As amplitudes dos campos elétricos refletido e transmitido normalizados pelo campo incidente são

$$\begin{aligned} \frac{E_R}{E_I} &= \frac{n_1 \cos \theta_I - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}{n_1 \cos \theta_I + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}, \\ \frac{E_T}{E_I} &= \frac{2n_1 \cos \theta_I}{n_1 \cos \theta_I + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}, \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde usamos a lei de Snell (1.19) para eliminar a dependência do ângulo transmitido.

Polarização paralela ao plano de incidência

A terceira e a quarta equação da (1.20) levam a

$$\begin{aligned}(E_I - E_R) \cos \theta_I - E_T \cos \theta_T &= 0, \\ n_1(E_I + E_R) - n_2 E_T &= 0.\end{aligned}\tag{1.23}$$

Novamente podemos escrever as amplitudes refletida e transmitida dos campos elétricos normalizados pela amplitude do campo incidente,

$$\begin{aligned}\frac{E_R}{E_I} &= \frac{n_2^2 \cos \theta_I - n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}{n_2^2 \cos \theta_I + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}, \\ \frac{E_T}{E_I} &= \frac{2n_1 n_2 \cos \theta_I}{n_2^2 \cos \theta_I + n_1 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_I}}.\end{aligned}\tag{1.24}$$

Essas equações são conhecidas como **equações de Fresnel**. Para uma incidência normal à superfície dielétrica ($\theta_I = 0$), a polarização do campo não está bem definida com relação a um plano de incidência, logo, ambas as equações (1.22) e (1.24) resultam em

$$\begin{aligned}\frac{E_R}{E_I} &= \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}, \\ \frac{E_T}{E_I} &= \frac{2n_1}{n_1 + n_2}.\end{aligned}\tag{1.25}$$

Para a onda refletida, quando $n_2 > n_1$, o campo refletido recebe uma fase adicional negativa. O campo transmitido está sempre em fase com o campo incidente.

É mais interessante a razão entre as intensidades do que a razão entre as amplitudes, porque essa fornece diretamente a fração da energia do campo incidente que será dividido entre os campos refletido e o transmitido. Pela (1.13) temos

$$\begin{aligned}R &= \left(\frac{E_R}{E_I}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2, \\ T &= \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{E_T}{E_I}\right)^2 = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2},\end{aligned}\tag{1.26}$$

onde R e T são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente. Por exemplo, para um feixe de luz com incidência normal à interface dielétrica formada por nitreto de silício (Si_3N_4) ($n_1 = 2$) e ar ($n_2 = 1$), a reflexão de Fresnell corresponde a aproximadamente 11% da potência do campo incidente, sendo um total de 89% transmitido.

Ângulo de Brewster

No caso da incidência com polarização paralela ao plano de incidência, existe um ângulo de incidência, chamado de ângulo de Brewster, no qual não há onda refletida. Encontramos pela (1.24) que o campo refletido é zero para o ângulo de Brewster

$$\theta_B = \tan^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right). \quad (1.27)$$

Se a onda plana incidente tiver uma mistura de polarizações e ângulo de incidência igual ao ângulo de Brewster, a onda refletida será completamente polarizada na direção ortogonal ao plano de incidência. Esse comportamento pode ser utilizado para maximizar a transmissão de um feixe de luz propagante através de um meio material.

Reflexão total

Quando a onda incidente está em um meio dielétrico descrito por um índice de refração maior do que o meio descrito da onda refratada ($n_1 > n_2$), a lei de Snell (1.19) mostra que, se $n_1 > n_2$, então $\theta_T > \theta_I$. Consequentemente, $\theta_T = \pi/2$ quando $\theta_I = \theta_0$, onde

$$\theta_0 = \sin^{-1} \left(\frac{n_2}{n_1} \right). \quad (1.28)$$

Para ondas incidentes com $\theta_I = \theta_0$, a onda refratada propaga-se paralelamente à superfície, e não há fluxo de energia através da superfície. Portanto, para ondas com este ângulo de incidência, acontece a **reflexão total**.

Para ângulos de incidência maiores do que θ_0 , notemos primeiramente que $\sin \theta_T > 1$. Isso significa que θ_T é um ângulo complexo com um cosseno puramente imaginário

$$\cos \theta_T = i \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_I}{\sin \theta_0}\right)^2 - 1}, \quad (1.29)$$

com $\theta_I > \theta_0$. O significado destas grandezas complexas tornam-se claras quando consideramos o vetor de onda do campo transmitido

$$e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}} = e^{ik_2(x \sin \theta_T + z \cos \theta_T)} = e^{-\alpha z} e^{ik'_2 x}, \quad (1.30)$$

onde

$$\alpha \equiv \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_I - n_2^2} \quad (1.31)$$

é o fator de decaimento e $k'_2 \equiv (\sin \theta_I / \sin \theta_0) k_2$. Isso mostra que para $\theta_I > \theta_0$, a onda refratada propaga-se paralelamente ao eixo x , definido na Figura 1.1, e decai exponencialmente na direção z além da interface dielétrica.

Para uma onda propagante do nitreto de silício ($n_1 = 2$) para o dióxido de silício (SiO_2) ($n_2 = 1,45$), o ângulo da onda incidente para ocorrer reflexão total é de aproximadamente 46° . Para ângulos maiores do que este, ainda ocorre reflexão interna total, mas parte do onda propaga-se além da interface dielétrica com decaimento exponencial, como pode ser visto na Figura 1.3. A parte do campo que propaga-se por fora da região interna, descrita pelo maior índice de refração dos dois meios dielétricos, é chamado de **onda evanescente**.

Ainda que exista parte do campo pelo outro lado da superfície dielétrica, não há fluxo de energia através da superfície. A falta do fluxo de energia pode ser ve-

Figura 1.3: Onda evanescente originada por um campo ótico em dois comprimentos de onda, 1560 nm e 780 nm, propagante do nitreto de silício para o óxido de silício com ângulo de incidência de 50° .

rificada calculando-se a média temporal da componente normal do vetor de Poynting (1.11) na superfície

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \text{Re}[\mathbf{n} \cdot (\mathbf{E}_T \times \mathbf{H}_T^*)]. \quad (1.32)$$

Usando $\mathbf{H}_T^* = \mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T^*$, encontramos que

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{n} \cdot [\mathbf{E}_T \times (\mathbf{k}_T \times \mathbf{E}_T^*)]\} = \frac{1}{2} \text{Re}[(\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_T)|\mathbf{E}_{0T}|^2], \quad (1.33)$$

onde usamos a transversalidade do campo elétrico. Como $\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}_T = k_T \cos \theta_T$ é um imaginário puro, temos que $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = 0$. Portanto, não há fluxo de energia na direção normal à superfície dielétrica quando o ângulo de incidência da onda é maior que o ângulo da reflexão total. No entanto, com a aproximação de um terceiro meio dielétrico do meio com maior índice de refração, deixando o meio da onda evanescente como uma fenda, haverá fluxo de energia caso o índice de refração do meio dielétrico aproximado seja maior que o do meio da onda evanescente, processo conhecido como **reflexão total frustrada**, ver Figura 1.4. Veremos a seguir como esse processo é importante para o acoplamento entre dois guias de onda.

1.1.4 Reflexão total frustrada

Quando a luz incide na interface entre dois meios dielétricos, descritos por n_1 e n_2 , parte dela é transmitida para meio (2) e a outra parte é refletida e permanece no meio (1). Se, por outro lado, o índice de refração do meio (1) é superior ao índice de refração do meio (2), pode acontecer reflexão total caso o ângulo de incidência do feixe seja maior do que o ângulo crítico (1.28). Neste caso, o campo incidente é refletido completamente, mas parte dele é estendido pela onda evanescente. As relações de Fresnell (1.22) e (1.24) caracterizam a dinâmica dos campos em termos da polarização, amplitude e fase.

Um efeito interessante acontece quando um terceiro meio, descrito por n_3 , é aproximado do primeiro meio, deixando apenas uma camada de espessura fina do segundo meio. Neste caso, pode haver uma penetração da onda evanescente ao meio aproximado, com fluxo de energia. Como a onda evanescente propaga-se em uma direção paralela à interface dielétrica, não há deslocamento de fase entre a onda refletida e a transmitida. Dizemos que a reflexão total é “frustrada”, e para que o processo ocorra eficientemente, a espessura da camada do segundo meio precisa ser da ordem do comprimento de onda do campo. A Figura 1.4 mostra a geometria da propagação da onda através de um filme fino de espessura d .

Para uma onda propagante no meio (1), incidindo na interface dielétrica com ângulo θ_1 , o campo elétrico refletido total E_R pode ser escrito em termos do campo incidente E_I , com contribuição da parte refletida, representado pelo coeficiente de amplitude de reflexão r_{12} , mais as componentes transmitidas do meio (2) para o meio (1), descrito pelos coeficientes de amplitude de transmissão t_{12} e t_{21} , juntamente com as reflexões r_{21} e r_{23} , onde os índices ab informam o sentido de transmissão ou reflexão da onda, do meio a para o meio b . As relações entre os diferentes

Figura 1.4: Reflexão e transmissão através de um filme homogêneo.

sentidos podem ser obtidas assumindo um meio sem perdas, ou mais especificamente, assumindo simetria de reversão temporal. Elas são dadas pelas relações de Stokes [29]

$$\begin{aligned} r_{12} &= -r_{21}, \\ t_{12}t_{21} + r_{12}^2 &= 1. \end{aligned} \tag{1.34}$$

A soma sobre todas as contribuições refletidas e transmitidas pode ser escrita na forma de uma série geométrica, como comumente é feito para a obtenção dos campos refletido e transmitido de uma cavidade Fabry-Perot [30]. Levando em consideração as relações de Stokes, temos

$$re^{i\phi} \equiv \frac{E_R}{E_I} = \frac{r_{12} + r_{23}e^{i\delta}}{1 + r_{12}r_{23}e^{i\delta}}. \tag{1.35}$$

onde δ é o termo de defasagem devido à propagação d no meio (2). No entanto, vimos que para uma onda evanescente, a constante de propagação na direção ortogonal à interface é dada por um termo puramente imaginário $i\alpha$, quando $(\theta > \theta_0)$, ver equação (1.31). Dessa forma, a defasagem da onda é dada por

$$\delta = i\alpha 2d. \tag{1.36}$$

É interessante notar que a única diferença dessa descrição com relação à descrição de uma cavidade, é que o termo de fase é puramente imaginário, indicando a não existência de onda no meio intermediário, mas simplesmente um decaimento exponencial.

Quando $n_3 > n_2$, uma pequena parte do decaimento do campo pode alcançar o meio dielétrico (3), e sofrer refração. Assim sendo, parte da energia da onda evanescente é transferida para aquele meio, havendo um acoplamento do campo propagante no meio (1) para o meio (3). Dessa forma, os coeficiente de amplitude de reflexão podem ser representados apenas por uma fase, ou seja

$$\begin{aligned} r_{12} &\equiv e^{i\delta_{12}}, \\ r_{32} &\equiv e^{i\delta_{32}} = -r_{23}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Pelas relações de Fresnell (1.22) e (1.24), podemos escrever os coeficientes de amplitude de reflexão r_{ab} para as polarizações paralela e perpendicular ao plano de incidência. Separando os termos de fase, e substituindo na (1.35), obtemos a transmissão da onda evanescente $T = 1 - |r|^2$ pela relação [31]

$$\frac{1}{T} = a \sinh^2(y) + b, \quad (1.38)$$

onde

$$y = \frac{2\pi d}{\lambda} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta_1 - n_2^2}, \quad (1.39)$$

e a e b assumem as componentes perpendiculares e paralelas dadas por

$$\begin{aligned} a_{\perp} &= \frac{(N^2 - 1)(n^2 N^2 - 1)}{4N^2 \cos \theta_1 (N^2 \sin^2 \theta_1 - 1)(n^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}}, \\ a_{\parallel} &= (a_{\perp}/n^2)[(N^2 + 1) \sin^2 \theta_1 - 1][(n^2 N^2 + 1) \sin^2 \theta_1 - n^2], \end{aligned} \quad (1.40)$$

e

$$\begin{aligned} b_{\perp} &= \frac{[(n^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2} + \cos \theta_1]^2}{4 \cos \theta_1 (n^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}}, \\ b_{\parallel} &= \frac{[(n^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2} + n^2 \cos \theta_1]^2}{4n^2 \cos \theta_1 (n^2 - \sin^2 \theta_1)^{1/2}}, \end{aligned} \quad (1.41)$$

onde $n \equiv n_3/n_1$ e $N \equiv n_1/n_2$. Vamos considerar a transmissão para a estrutura formada por nitreto de silício, óxido de silício e nitreto de silício, isto é, $n_1 = n_3 = 2$, e $n_2 = 1,45$. A Figura 1.5 mostra as transmissões para os campos perpendicular e paralelo ao plano de incidência com diversos ângulos de incidência maiores do que o ângulo crítico de 46° .

Figura 1.5: (a) $T_\perp$ vs (d/λ) para diferentes ângulos de incidência; (b) $T_\parallel$ vs (d/λ) .

Observando a Figura 1.5, percebemos que para ângulos de incidência próximos do ângulo crítico, a força de acoplamento entre o meio (1) e (3) é maior. Evidentemente, para fótons incidentes com ângulos pequenos, ou seja, mais normais à superfície, apesar de ainda sofrerem reflexão total, eles se propagam mais pelo interior do meio (2), possuindo uma probabilidade maior de serem acoplados ao meio (3).

A comparação entre as duas polarizações sugere que a força de acoplamento é maior para a polarização paralela que para a polarização perpendicular. Isso é bastante claro para um ângulo de 50° , por exemplo, para $(d/\lambda = 0,6)$, a transmissão do campo para o meio (3) é de aproximadamente 10% para a polarização paralela,

e de 5% para a polarização perpendicular. No entanto, para ângulos maiores, isso não é evidente, pelo contrário, há uma inversão na força de acoplamento.

Para guias de onda, como veremos, o modo propagante é confinado, e a propagação é dada paralelamente à interface dos meios. A força de acoplamento entre dois guias de onda paralelos deve levar em conta o comprimento de interação ao longo da propagação do campo, podendo alterar, de forma senoidal, a quantidade acoplada entre os dois guias.

A descrição do acoplamento entre dois meios dielétricos tem um paralelo interessante na mecânica quântica, no qual a mesma dinâmica é obtida no estudo do tunelamento de partículas aprisionada em uma caixa com potencial limitado. A magnitude e a espessura da barreira de potencial permitem que uma pequena parte das partículas aprisionadas na caixa possam ser transferidas para fora do potencial. O paralelo entre as duas descrições é feita em [32].

1.2 Constante dielétrica

Vimos na seção anterior que o meio dielétrico pode ser descrito pela constante dielétrica ϵ e a permeabilidade magnética μ , onde aproximamos o valor desta última por uma constante, para os materiais considerados neste trabalho. Os valores de ϵ e μ foram normalizados por seus valores de vácuo, isto é, $\epsilon_0 = 1$ e $\mu_0 = 1$.

A constante dielétrica tem a intenção de descrever classicamente a dinâmica eletrônica presente no material ao nível atômico e molecular. Naturalmente, para uma onda eletromagnética propagante em um meio dielétrico, a presença do campo elétrico influenciará a dinâmica eletrônica, e a resposta do material é des-

crita pelo valor dependente da frequência $\epsilon(\omega)$, onde ω é a frequência do campo. Para um grupo de ondas propagantes em fase com frequências descritas por um envelope espectral, por causa da resposta diferente do material a cada valor de frequência, o formato do envelope mudará conforme a propagação. Um pulso temporal estreito ficará mais largo após uma certa distância propagada. O efeito resultante da resposta dependente da frequência no material é denominada de dispersão, e o material conhecido como **meio dispersivo**. A distorção do pulso temporal pode ser reduzida projetando o guia de onda para que o zero de dispersão seja próximo da frequência central do pulso.

1.2.1 Modelo Lorentziano

O modelo mais simples a ser considerado é o de um oscilador harmônico forçado e amortecido. A energia de ligação eletrônica com o núcleo atômico é descrito por um potencial harmônico. O amortecimento surge da absorção do material, e a frequência de oscilação eletrônica é estabelecida pelo campo elétrico. A propriedade que determina o material consiste nas frequências características de ressonância eletrônica, nas quais a absorção ocorre predominantemente. Portanto, o deslocamento eletrônico paralelo à direção de oscilação do campo elétrico pode ser escrito como

$$\ddot{\mathbf{r}} + \gamma \dot{\mathbf{r}} + \omega_0^2 \mathbf{r} = \frac{-e}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (1.42)$$

onde γ mede fenomenologicamente a absorção, ω_0 é a frequência de ressonância eletrônica característica na ausência do campo elétrico, e e m são a carga elementar e a massa eletrônica, respectivamente. Estamos assumindo que a oscilação eletrônica é pequena e que o campo elétrico é medido na posição do elétron. Se o campo elétrico varia harmonicamente no tempo com frequência ω , o momento de dipolo

contribuído por um elétron é

$$\mathbf{p} = -e\mathbf{r} = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}\mathbf{E}. \quad (1.43)$$

Note que, por causa da parte imaginária no denominador de (1.43), a oscilação eletrônica ocorre defasada do campo elétrico. Para ver o efeito desta defasagem, vamos escrever o momento de dipolo como $\mathbf{p} = A \exp(i\Theta)(e^2/m\mathbf{E})$, onde a amplitude e a fase são dadas por

$$A = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}}, \quad (1.44)$$

$$\Theta = \tan^{-1} \frac{\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Vemos que a máxima amplitude ocorre na frequência $\omega = \omega_0$, seu máximo valor é inversamente proporcional a γ , e a largura à meia altura é proporcional a γ . Para frequências muito baixas ($\omega \ll \omega_0$), o modelo de oscilador da matéria responde em fase com campo elétrico, e para altas frequências ($\omega \gg \omega_0$), o oscilador e o campo estão defasados em π . A defasagem de π acontece ao redor da frequência de ressonância.

Se o número de dipolos por unidade de volume é N , então a polarização induzida no meio dielétrico é $N\mathbf{p}$, e obtemos

$$\mathbf{P} = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}\mathbf{E}, \quad (1.45)$$

onde $\omega_p^2 \equiv Ne^2/m$ é definido como a *frequência de plasma* [33]. A **susceptibilidade elétrica** é definida como o termo de proporcionalidade entre a polarização do meio e o campo elétrico, $\mathbf{P} \equiv \chi_e \mathbf{E}$. Identificando a constante dielétrica como $\epsilon \equiv 1 + \chi_e$, obtemos explicitamente

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad (1.46)$$

onde $\epsilon = 1$ é o valor de vácuo. As partes real e imaginária de (1.46) são

$$\begin{aligned} \text{Re}(\epsilon) &= 1 + \frac{\omega_p^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}, \\ \text{Im}(\epsilon) &= \frac{\omega_p^2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

A dependência na frequência das partes real e imaginária da constante dielétrica podem ser observadas representativamente na Figura 1.6.

Figura 1.6: Característica de uma ressonância no modelo lorentziano. Na região de ressonância, dentro da largura de banda de absorção, a parte real da constante dielétrica decresce com a frequência. Esse comportamento é denominado de anômalo. Fora da região de ressonância, a dispersão é usualmente normal, descrita por um aumento na parte real da constante dielétrica com a frequência.

Para uma onda plana propagante com frequência próxima à frequência ω_0 , seu vetor de onda é dado por $k' \equiv \sqrt{\epsilon}\omega_0$. Como ϵ é composto de uma parte real e outra imaginária, o vetor de onda pode ser escrito como $k' = k + i\alpha/2$ e o campo elétrico é representado por

$$E(z, t) = E_0 e^{-(\alpha/2)z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.48)$$

onde z é a coordenada representativa da propagação da onda. Como a atenuação da onda é representada através da atenuação de sua intensidade, a parte imagi-

nária $\text{Im}(\epsilon)$ está associada à atenuação da intensidade da onda por α . A região ao redor da frequência de ressonância apresenta grande absorção, qualquer onda propagante com frequência próxima da frequência de plasma será rapidamente atenuada. A razão disto vem do fato da interação entre o campo elétrico oscilante na frequência $\omega \approx \omega_0$, e o elétron também oscilante em ω_0 , aumentar. Esse aumento faz com que a amplitude de oscilação eletrônica cresça, e ocorra a atenuação do campo elétrico.

Fora da largura de linha de plasma, nos dois lados da região de ressonância, n cresce com a frequência, comportamento denominado de **dispersão normal**. Apenas nas proximidades da ressonância o índice de refração decresce, efeito conhecido como **dispersão anômala**, ver Figura 1.6. O comportamento da dispersão anômala é de extrema importância neste trabalho, pois como veremos, ela é crucial para iniciar o processo de conversão paramétrica em um meio material não-linear. Vimos que ela ocorre naturalmente nas proximidades da região de ressonância. E veremos como podemos obtê-la na região de transparência do material. Neste caso, a influência da dispersão do guia de onda contribuirá significativamente sobre a dispersão total do sistema, técnica conhecida como **engenharia de dispersão**.

1.2.2 Equação de Sellmeier

Vimos na subseção 1.2.1 que a dispersão é causada pela presença de ressonância na oscilação eletrônica, e que as perdas são provocadas pela taxa de amortecimento γ . Em geral, mais de uma ressonância pode afetar as propriedades de dispersão. Pode haver ressonâncias em baixas energias, como é o caso dos metais, ou em níveis de energia mais elevados em materiais dielétricos, como no ultravioleta, por exemplo. Desconsiderando a absorção do material ($\gamma = 0$), e isto somente pode ser

feito em regiões distantes das ressonâncias, podemos escrever o índice de refração do material como

$$n^2 - 1 = \frac{e^2}{m} \sum_j \frac{N_j}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (1.49)$$

onde N_j é o número de elétrons com ressonância ω_j por unidade de volume. A equação (1.49) é conhecida como **equação de Sellmeier**. É mais comum escrever a (1.49) em uma forma diferente, substituindo as frequências pelos comprimentos de onda. Usando a relação $\omega = 2\pi c/\lambda$, obtemos

$$n^2 - 1 = \sum_j \frac{\lambda^2 B_j}{\lambda^2 - \lambda_j^2}. \quad (1.50)$$

O λ_j indica os comprimentos de onda nos quais as ressonâncias ocorrem, e B_j são constantes que podem ser obtidas experimentalmente a partir de curvas de dispersão. Os valores de ressonância e as constantes empíricas para o nitreto e óxido de silício podem ser encontradas em [1] e [2], respectivamente. As curvas para ambos os materiais são observadas na Figura 1.7.

Figura 1.7: Equação de Sellmeier para o nitreto e óxido de silício.

As equações de Sellmeier para o nitreto e óxido de silício mostradas em [2] são equações com apenas uma ressonância, que indicam o comprimento de onda de

Material	B_1	λ_1	B_2	λ_2
Si_3N_4	3,0249	0,1353406	40314	1239,842
SiO_2	1,09877	0,0924317	-	-

Tabela 1.1: Ressonâncias e constantes empíricas da equação de Sellmeier. Os parâmetros do nitreto de silício foram obtidos em [1], enquanto que os parâmetros do óxido de silício foram obtidos em [2].

absorção em aproximadamente 139 nm [34] e 92 nm [35], respectivamente. No entanto, é bem conhecido que o nitreto de silício tem um forte pico de absorção em 10 μm , que pode fortemente influenciar as propriedades óticas em comprimentos de onda mais curtos. Portanto, a equação de Sellmeier para o nitreto de silício deve conter uma segunda ressonância em comprimento de onda longo, para que possa adequadamente descrever as propriedades óticas. Os valores das ressonâncias e constantes empíricas estão representados na Tabela 1.1, e os comprimentos de onda das equações devem estar em unidades de μm . É importante notar que apesar do pico de absorção ser em 10 μm , a descrição adequada da resposta do material é feita por um ajuste dos pontos experimentais com um pico lorentziano em 1239,842 μm . Acreditamos que essa discrepância decorre da grande largura do pico de absorção.

A equação de Sellmeier para o nitreto de silício é válida de 310 até 5504 nm, região sem influência da absorção. A equação para o óxido de silício é garantida de 207 até 1240 nm. No entanto, ela costuma ser utilizada para comprimentos de onda maiores. No nosso caso, verificamos a validade dela a partir da comparação entre os resultados obtidos experimentalmente com as previsões teóricas, que será mostrada no Capítulo 3.

Uma descrição acurada das propriedades óticas do meio dielétrico depende fortemente da equação de Sellmeier na região de transparência ótica do material. Portanto, as equações para o nitreto e óxido de silício devem descrever precisamente a dependência do índice de refração com a frequência. No entanto, a maior parte do campo é propagada pelo núcleo do guia de onda, logo, a precisão na descrição do material que irá confinar a luz deve ser maior, ou seja, o nitreto de silício.

1.3 Guias de onda

Por guia de onda irei me referir a uma estrutura geométrica capaz de confinar a luz através do princípio da reflexão interna total. Para tanto, a estrutura é formada por dois materiais dielétricos com contraste nos índices de refração. Os materiais, em particular, são o nitreto de silício, com $n_1 \approx 2$, e o óxido de silício, com $n_2 \approx 1,45$, ambos os valores próximo de 1560 nm.

Vimos que a reflexão total de uma interface dielétrica pode refletir a luz sem transmitir fluxo de energia para o meio com menor índice de refração. Portanto, o nitreto de silício atuará como núcleo do guia de onda, e o óxido de silício será o meio exterior, que irei denominá-lo de substrato.

Para introduzir os conceitos gerais da física do guia de onda, iremos estudar inicialmente um volume de confinamento em fatia, com dimensões infinitas em duas direções, denominado em inglês de *slab waveguide*. Esse tipo de guia de onda, apesar de não ser realístico, pode ser resolvido analiticamente por causa de suas simetrias. Durante a resolução serão definidos os conceitos que utilizaremos com bastante frequência ao longo do trabalho. Irei seguir a descrição feita em [36], onde

também pode ser encontrado um tratamento sobre fibras óticas e outros guias. Guias de onda mais gerais e realísticos serão resolvidos numericamente através de simulações computacionais.

1.3.1 Guia de onda planar

O guia de onda planar dielétrico é formado por um plano infinito de espessura $2d$ e índice de refração n_1 , cercado por baixo e por cima por dois volumes com espessura infinita e índice de refração n_2 , tal que $n_1 > n_2$. Ver a representação na Figura 1.8.

Figura 1.8: (a) Geometria do guia de onda dielétrico planar em 3D, (b) e com corte transversal ao plano.

Uma fonte de luz pontual posicionada dentro de alguma região do meio dielétrico n_1 irá produzir uma frente de onda esférica, onde a cada ponto da frente de onda está associado um vetor de onda $\mathbf{k}$ normal à superfície. Ao atingir a interface dielétrica, todos os vetores de onda que fazem um ângulo com a normal da interface igual ou superior ao ângulo para a ocorrência da reflexão interna total θ_0 , serão refletidos sem perda de energia. Após uma longa distância propagada, teremos uma frente de onda plana infinita da direção y , mas limitada na direção x por causa do confinamento. A consequência do tamanho finito da onda é que os

campos elétrico e magnético deixam de ser simultaneamente transversos à direção de propagação $\hat{\mathbf{k}}$. No entanto, a análise do problema ainda pode ser dividida em duas condições: a) Quando o campo elétrico é transverso à direção de propagação. b) Quando o campo magnético é transverso à direção de propagação.

A geometria possui um plano de simetria formado pelo plano $x = 0$. A simetria simplifica o problema no sentido em que podemos escolher soluções baseadas na simetria e aplicar as condições de contorno (1.20) em apenas um lado do plano. A saber, quando a solução é simétrica (par), ou então quando a solução é anti-simétrica (ímpar), com relação ao plano.

A solução para o campo elétrico deve satisfazer a equação de onda (1.2) junto com a condição $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Como iremos assumir que ou o campo elétrico, ou o campo magnético são transversos, vamos escrever a forma do campo elétrico como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{e}}u(x, y)e^{i(\beta z - \omega t)}, \quad (1.51)$$

onde $\hat{\mathbf{e}}$ é um vetor unitário que indica a direção do campo elétrico, e $u(x, y)$ é um escalar que descreve o perfil transversal do campo. A constante de propagação agora está representada por β e descreve a propagação do modo confinado. Inserindo a (1.51) na equação de onda (1.2) temos

$$\nabla_T^2 u + (\omega^2 \epsilon - \beta^2)u = 0, \quad (1.52)$$

onde ∇_T^2 é o laplaciano transversal. É possível mostrar que para haver propagação do modo confinado a condição

$$\beta^2 - \omega^2 \epsilon < 0, \quad (1.53)$$

deve ser satisfeita [36].

1.3.2 Modo transversal elétrico

Vamos começar a análise com o modo transversal elétrico (TE), com o vetor de polarização na direção y , transversal ao vetor unitário de propagação na direção z . A geometria é composta por duas regiões com diferentes constantes dielétricas, mas dentro de cada região seu valor é constante e uniforme. Dessa forma, podemos resolver a (1.52) para cada região independentemente. Por separação de variáveis, ou seja, $u(x, y) = X(x)Y(y)$, as soluções simétricas são

$$\begin{aligned} E_y &= A \cos(k_x x) e^{i\beta z}, \quad \text{se } |x| < d, \\ E_y &= B e^{-\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x > d, \\ E_y &= B e^{\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x < -d, \end{aligned} \quad (1.54)$$

onde o termo α descreve o decaimento exponencial da onda evanescente (1.31). Para campos monocromáticos com dependência temporal do tipo $e^{-i\omega t}$, a lei de Faraday torna-se $\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}$, e obtemos a componente z do campo magnético,

$$\begin{aligned} H_z &= \frac{ik_x}{\omega} A \sin(k_x x) e^{i\beta z}, \quad \text{se } |x| < d, \\ H_z &= \frac{i\alpha}{\omega} B e^{-\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x > d, \\ H_z &= -\frac{i\alpha}{\omega} B e^{\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x < -d. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Usando a simetria da geometria, é suficiente impor a condição de contorno apenas em $x = d$. As duas últimas expressões da (1.20) exigem a continuidade dos campos E_y e H_z na interface, ou seja,

$$\tan(k_x d) = \frac{\alpha}{k_x}. \quad (1.56)$$

E pela equação de onda (1.2) também temos

$$\beta^2 + k_x^2 = \omega^2 \epsilon_1, \quad (1.57)$$

$$\beta^2 - \alpha^2 = \omega^2 \epsilon_2. \quad (1.58)$$

Combinando as três últimas equações, encontramos a equação transcendental

$$\tan(k_x d) = \sqrt{\frac{\omega^2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{k_x^2}} - 1. \quad (1.59)$$

A solução desta equação fornece a relação de dispersão, isto é, o valor da constante de propagação em função da frequência, $\beta(\omega)$. A Figura 1.9 mostra a solução da equação transcendental até a terceira banda.

Figura 1.9: Solução gráfica para a equação transcendental. As linhas escuras e contínuas são as soluções simétricas $\tan(k_x d)$, e a linha tracejada é a solução anti-simétrica $\cot(k_x d)$. Os modos TE e TM estão em azul e vermelho, respectivamente, e representam a solução α/k_x , onde α pode ser expresso em termos das constantes dielétricas e da frequência. Para o gráfico foram usados os valores $\epsilon_1 = 2^2$ e $\epsilon_2 = 1,45^2$. Os valores de frequência escolhidos foram $\omega = \pi$ e $\omega = 2\pi$, e para o guia de onda com $d = 0,5 \mu\text{m}$ (largura de $1 \mu\text{m}$).

A interseção das curvas azuis e vermelhas com as curvas escuras fornecem as soluções da equação (1.59) para os modos TE e TM, respectivamente. Variando a frequência ω , de 2π para π ³, ver figura, a interseção ocorre em pontos distintos, e o valor de $k_x d$ pode ser estimado em conjunto com as equações (1.57) e (1.58) para

³Note que uma frequência de $\omega = 2\pi$ equivale a um comprimento de onda no vácuo de $\lambda = 2\pi/\omega = 1 \mu\text{m}$. Consequentemente, uma frequência de π equivale a um comprimento de onda no vácuo de $2 \mu\text{m}$.

obter a relação de dispersão. Note que para cada modo há mais do que uma possibilidade de interseção, que no gráfico estão representados pelas curvas marcadas como $(b = 0, 1, 2 \dots)$, onde b representa o perfil transversal do modo com solução simétrica (par) ou anti-simétrica (ímpar). As diferentes curvas representam diferentes bandas de solução para uma mesma frequência. A banda $b = 0$ representa o modo fundamental, a banda $b = 1$, por sua vez, representa o primeiro modo de ordem superior TE_1 ou TM_1 , e assim consecutivamente.

Se ao invés de escolhermos a solução simétrica (1.54), optarmos pela anti-simétrica, a solução é do tipo $\sin(k_x x)$, e a equação transcendental envolve a cotangente negativa ao aplicar as condições de contorno. A solução anti-simétrica pode ser vista na mesma Figura 1.9 em linha tracejada escura, e indexada com o número ímpar $b = 1$. Este é o modo fundamental para a solução anti-simétrica sendo representado por TE_1 . Portanto, os modos simétricos são identificados por números pares no índice de banda, e os modos anti-simétricos por números ímpares. O próximo modo simétrico é o TE_2 , e também está representado na Figura 1.9.

Podemos ver pelo gráfico que todos os modos de ordem superior ($b > 0$) possuem uma **frequência de corte**, ou seja, com a redução da frequência abaixo de um valor crítico, estes modos deixam de propagar, com exceção do modo fundamental. Mesmo para frequências bastante baixas ainda há propagação. Nesta condição, podemos utilizar a aproximação $\tan(k_x d) \approx k_x d$, e resolver a equação transcendental (1.59) aproximadamente

$$\omega^2 d^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2) - (k_x d)^2 \approx (k_x d)^4. \quad (1.60)$$

Podemos desprezar o termo ao lado direito da equação, e obter $k_x^2 \approx \omega^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)$. Inserindo na equação (1.57), encontramos que $\beta \approx \omega/v_2$, ou seja, o modo fundamental se propaga com a velocidade de fase do meio exterior. Contudo, quando a frequên-

cia é suficientemente alta, podemos fazer $\omega \rightarrow \infty$, e o valor do argumento da tangente tende a $\pi/2$. Usando a equação (1.57), encontramos que $\beta \approx \omega/v_1$, e o modo se propaga com a velocidade de fase do meio interior. Portanto, para frequências muito baixas, o modo fundamental propaga-se com a velocidade de fase do óxido de silício, enquanto que para frequências muito altas, o modo propaga-se com a velocidade de fase do nitreto de silício.

Este fato pode ser explicado entendendo o perfil transversal do modo. O tamanho do perfil transversal é escalado pelo seu comprimento de onda, logo, para frequências baixas o modo é maior e está menos confinado. Uma maior parte do seu perfil propaga-se pelo óxido de silício, adquirindo a velocidade de fase daquele meio. Por outro lado, para frequências altas, o modo é menor, e propaga-se mais pelo interior do núcleo. O modo está mais confinado, e adquire a velocidade de fase do nitreto de silício.

Ainda pela lei de Faraday, podemos calcular a componente x do campo magnético,

$$\begin{aligned} H_x &= -\frac{\beta}{\omega} A \cos(k_x x) e^{i\beta z}, \quad \text{se } |x| < d, \\ H_x &= -\frac{\beta}{\omega} B e^{-\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x > d, \\ H_x &= -\frac{\beta}{\omega} B e^{\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x < -d. \end{aligned} \tag{1.61}$$

Analisando as expressões para os campos E_y , H_z e H_x , vemos que os campos transversos E_y e H_x propagam-se em fase, ou seja, o máximo valor dos campos acontece no mesmo instante de tempo e na mesma posição, um atingindo seu máximo valor positivo e o outro seu máximo valor negativo. Porém, a componente z do campo magnético, na mesma direção de propagação da onda, está defasada em $\pi/2$ com relação os campos transversos. A máxima amplitude do campo acontece na posição em que os campos transversos são nulos.

A Figura 1.10 mostra a simulação das componentes dos campos (a) E_y , (b) H_x e (c) H_z , para a polarização TE do modo fundamental utilizando o método de diferenças finitas no domínio temporal (FDTD - *finite-difference time-domain*) [37]. Podemos observar a imagem estática do campo após sua propagação ao longo de um certo tempo. A figura mostra os perfis dos campos em tons de azul e vermelho. O azul equivale a um valor positivo do campo, enquanto que vermelho indica um valor negativo.

Figura 1.10: FDTD simulação do modo fundamental TE_0 em um guia de onda planar dielétrico. A espessura do nitreto de silício é $2d = 1 \mu\text{m}$. A frequência dos modos simulados foi $\omega = \pi$, que equivale a um comprimento de onda no vácuo de $\lambda = 2\pi/\omega = 2 \mu\text{m}$. (a) Campo E_y , (b) campo H_x , e (c) H_z .

No lado esquerdo das figuras vemos a definição de uma fonte de luz planar emitindo uma onda monocromática na frequência $\omega = \pi$. No sistema natural de unidades, e porque as equações de Maxwell são escalar invariantes, temos um

parâmetro livre para definir a escala de comprimento nas equações de Maxwell. Definindo a escala de comprimento em μm , o comprimento de onda da luz no vácuo é dado por $\lambda = 2\pi/\omega = 2 \mu\text{m}$. Da mesma forma, a dimensão da espessura do nitreto de silício é dado na mesma unidade, e escolhemos o mesmo valor definido no cálculo analítico, $d = 0,5 \mu\text{m}$. O volume do óxido de silício não se estende infinitamente na direção x , mas é rodeado por uma camada absorvedora denominada de **PML** - do inglês - *Perfectly Matched Layer* [38]. A camada de PML é um recurso computacional que absorve a parte do campo propagada até o fim da célula computacional, evitando a reflexão nas extremidades.

Observamos que após certa propagação, a onda deixa de ser aproximadamente cilíndrica, e o modo passa a ser descrito como uma frente de onda plana confinada ao guia de onda. O guia de onda é largo o suficiente para acomodar o modo fundamental bem confinado, e ainda suportar o modo superior TE_1 próximo de sua frequência de corte. Percebemos que para ambas as componentes E_y e H_x , há um decaimento exponencial da onda evanescente, que se estende até o início da camada PML.

Vemos também que as componentes transversas dos campos, E_y e H_x , estão defasadas de π . Quando a componente y do campo elétrico é positivo, mostrado em azul na parte (a), a componente transversa do campo magnético é negativa, representada em vermelho na parte (b). A componente do campo magnético na mesma direção de propagação do modo existe, e está representado na parte (c). Ela propaga-se mais pelas bordas do guia de onda, e ainda que difícil de notar, está defasada de π com relação aos campos transversos.

O roteiro de simulação para FDTD, escrito em Scheme, pode ser verificado no Apêndice A.1. O roteiro é rodado em MEEP.

1.3.3 Modo transverso magnético

O modo transverso magnético (TM) tem apenas a componente y do campo magnético, que é acoplado através das equação de Maxwell às componentes x e z do campo elétrico, no plano $y = 0$. Com o mesmo procedimento utilizado anteriormente, obtemos as soluções simétricas para a componente H_y do campo magnético em ambos os meios

$$\begin{aligned} H_y &= A \cos(k_x x) e^{i\beta z}, \quad \text{se } |x| < d, \\ H_y &= B e^{-\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x > d, \\ H_y &= B e^{\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x < -d. \end{aligned} \quad (1.62)$$

E o campo elétrico segue da lei de Ampère $\nabla \times \mathbf{H} = -i\omega\epsilon\mathbf{E}$,

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{ik_x}{\omega\epsilon_1} A \sin(k_x x) e^{i\beta z}, \quad \text{se } |x| < d, \\ E_z &= -\frac{i\alpha}{\omega\epsilon_2} B e^{-\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x > d, \\ E_z &= \frac{i\alpha}{\omega\epsilon_2} B e^{\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x < -d. \end{aligned} \quad (1.63)$$

A condições de contorno (1.20) requerem que as componentes paralelas dos campos eletromagnéticos sejam contínuas na interface, assim

$$\tan(k_x d) = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\alpha}{k_x} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{\frac{\omega^2 d^2 (\epsilon_1 - \epsilon_2)}{(k_x d)^2} - 1}, \quad (1.64)$$

onde usamos novamente a (1.57) e a (1.58). A equação transcendental do modo TM é quase idêntica à do modo TE (1.59), exceto pelo termo multiplicativo ϵ_1/ϵ_2 . Isso indica que para uma mesma frequência ω , k_x é maior e β é menor para o modo TM do que para o modo TE. A solução da equação transcendental para o modo TM está mostrada na Figura 1.9, indicado pelas curvas em vermelho, junto com a solução para o modo TE, indicado por curvas em azul. Porque a diferença entre as duas soluções é só um termo multiplicativo, as curvas são semelhantes, onde para

os modos TM estão acima dos dos modos TE, mas as frequências de corte são as mesmas.

Ainda com a lei de Ampère, podemos escrever a componente x do campo elétrico como

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\beta}{\omega\epsilon_1} A \cos(k_x x) e^{i\beta z}, \quad \text{se } |x| < d, \\ E_x &= \frac{\beta}{\omega\epsilon_2} B e^{-\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x > d, \\ E_x &= \frac{\beta}{\omega\epsilon_2} B e^{\alpha x} e^{i\beta z}, \quad \text{se } x < -d. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Comparando com a solução simétrica na polarização TM (1.62), vemos que são da mesma forma, com exceção do termo multiplicativo $\beta/\omega\epsilon$. Portanto, na polarização TM, as componentes transversas dos campos elétrico e magnético propagam-se em fase. Os máximos de cada campo coincidem na mesma posição espacial z . A componente z do campo elétrico também está defasada de $\pi/2$ com relação aos campos transversos, assim como também a componente H_z na polarização TE.

As imagens da componente x do campo elétrico dos modos de ordem superior na polarização TM estão mostradas na Figura 1.11. Todos os modos possuem a mesma frequência $\omega = 2\pi$, e portanto, podemos comparar qualitativamente a dinâmica dos modos na geometria. A parte (a) da figura representa a propagação do modo TM_1 . O modo é bem confinado para a espessura de $1 \mu\text{m}$ do nitreto de silício, e a atenuação da onda evanescente é bastante rápida. Mesmo assim, ainda pode ser observada uma pequena parte do campo se propagando pelo óxido de silício. O modo é anti-simétrico com relação ao plano de simetria $x = 0$. A parte (c) é a imagem do modo TM_2 . O comprimento de onda para este modo ainda é menor do que o comprimento de onda máximo que o guia de onda consegue suportar. Portanto, o campo se propaga confinadamente no guia de onda. A onda evanescente se estende por uma distância maior do que a do modo TM_1 , justamente pelo

fato do modo TM_2 ter um perfil transversal maior. O desaparecimento da onda evanescente ocorre somente ao final da célula computacional por causa da camada PML. A partir dessa análise, concluímos que cada modo transversal é propagado no guia de onda planar com um vetor $\mathbf{k}$ efetivo. Isso é fundamental para o acordo de fase que discutiremos mais adiante.

Figura 1.11: FDTD simulação dos modos de ordem superior TM_1 e TM_2 . A espessura do nitreto de silício continua sendo de $d = 0,5 \mu\text{m}$, mas frequência dos modos simulados foi $\omega = 2\pi$, que equivale a um comprimento de onda no vácuo de $\lambda = 2\pi/\omega = 1 \mu\text{m}$. (a) Componente E_x do modo TM_1 , (b) e componente E_x do modo TM_2 .

1.3.4 Guia de onda retangular

Resolvemos analiticamente na subseção anterior o guia de onda planar feito de materiais dielétricos. O fato do guia de onda ser um plano infinito permitiu a escolha do campo elétrico TE, ou magnético TM, paralelo ao plano do guia, e as aplicações das condições de contorno foram necessárias apenas na interface do plano com o meio exterior. Por questões de simetria, os campos paralelos ao plano

e transversos à direção de propagação em z , variavam apenas na direção ortogonal ao plano, cujas soluções eram analíticas e escolhidas de acordo com a simetria.

Em razão da onda propagante ser limitada pela interface dielétrica, ocorre o acoplamento entre a componente do campo normal ao plano com a sua componente na direção de propagação da onda $\hat{\mathbf{k}}$. Este acoplamento faz com que a descrição da onda deixe de ser feita por campos transversos, e surge uma componente na mesma direção de propagação, ver Figura 1.10 (c). No caso do guia de onda planar, porque a interface existe apenas em uma direção, o acoplamento entre os campos surge apenas com a componente ortogonal à interface. Se houvesse duas interfaces, o acoplamento seria em ambos os campos ortogonais às interfaces, como é o caso do guia de onda retangular, ver Figura (1.12) (a). O guia de onda retangular é descrito por dois comprimentos: sua largura w e altura h . O material do núcleo do guia é o nitreto de silício, e ele é enterrado no substrato de óxido de silício.

Figura 1.12: (a) Representação em 3D do guia de onda retangular. (b) Corte transversal ao guia mostrando os materiais da estrutura.

A geometria do guia de onda apresenta simetrias se o substrato é expandido indefinidamente. Estruturalmente isso não é verdade, o tamanho do substrato deve ser grande o suficiente para que o modo confinado pelo guia esteja totalmente contido no óxido de silício. Essa condição é satisfeita com uma espessura de alguns micrômetros, tipicamente $4\ \mu\text{m}$. Contudo, em termos de cálculos, é o suficiente

modelar o substrato como sendo infinito, uma vez que a atenuação exponencial da onda evanescente faz com que o campo aproxime-se a zero para todos os propósitos práticos.

Vamos definir o centro do sistema de coordenadas no centro do núcleo do guia, escolhendo a direção z como sendo a direção de propagação da onda, ver Figura 1.13. A geometria possui a simetria trivial na direção z , para qualquer ponto z , o plano (x,y) é idêntico. Também possui a simetria de cortes transversos pelo centro, ou seja, os planos $x = 0$ ou $y = 0$.

Figura 1.13: Célula computacional com simetria infinita na direção z . O tamanho do gride nas direções X e Y dependem do tamanho da célula nas respectivas direções dividido pela resolução da simulação.

A geometria pode ser pensada como a interseção de dois guias de onda planares ortogonais, de espessuras w e h . A frente de onda confinada, o modo transversal, agora é limitada pela interface em ambas as direções x e y . Novamente, cada interface irá acoplar o campo normal com sua componente na direção z . Dessa forma, o modo deixa de ter um campo completamente transversal, e passa a ter componentes elétrica e magnética na mesma direção de propagação da onda. Apesar da existência das componentes z dos campos, a nomenclatura transversos elétrico e

magnético é mantida, ou mais precisamente, quase transversos elétrico TE, e magnético TM.

A convenção seguida é a seguinte. A polarização TE é aquela na qual o campo elétrico é paralelo ao eixo que descreve a maior dimensão do guia de onda, que em geral, é identificado como sendo a largura w . Por outro lado, a polarização TM é aquela na qual o campo magnético é paralelo ao eixo que descreve a maior dimensão do guia, ou, aquela na qual o campo elétrico é paralelo à menor dimensão do guia, que em geral é identificado como sendo a altura. É importante perceber que para um guia de onda quadrado, não há mais quebra de simetria e ambas as polarizações se misturam.

A solução do problema de dispersão poderia ser seguida pela solução do guia de onda planar, com aplicações das condições de contorno nas componentes paralela e normal dos campos. No entanto, os pontos de junção entre os dois planos, as quinas do guia de onda, são um problema. A relação de dispersão, $\beta(\omega)$, será obtida baseada na simulação utilizando auto-solução de bloco-iterativo pré-condicionado em uma base de onda plana [39]. O método consiste em escrever as equações de Maxwell (1.1) no espaço de Fourier, na forma de equações de auto-vetores, e utilizar ferramentas computacionais de álgebra linear para encontrar os auto-valores, que podem ser tanto a frequência como o vetor de onda dos modos transversos. O software utilizado foi o MPB (do inglês *MIT-Photonic-Bandgap*) [40].

O software calcula a relação de dispersão do guia de onda representado na Figura 1.13. A figura mostra a estrutura do guia de onda em nitreto de silício rodeado pelo substrato de óxido de silício. O guia de onda em nitreto tem uma seção transversa retangular de largura w e altura h . O substrato em óxido possui dimensões grandes o suficiente para que o decaimento da onda evanescente do

modo transverso faça com que o campo seja praticamente nulo no fim da célula computacional. Para isso, é suficiente escolher o tamanho da célula na direção x com $7\text{ }\mu\text{m}$, e na direção y com $4\text{ }\mu\text{m}$. O software divide a célula computacional em grids, que representam a resolução máxima da estrutura. Quanto maior a resolução mais acurado será o cálculo do campo nas interfaces dielétricas. Escolhemos uma simetria infinita na direção z , caracterizada por um tamanho nulo da célula nesta direção. A consequência da escolha dessa simetria é que a estrutura passa a representar um guia de onda reto, sem influência do raio de curvatura do anel, que pode ser representado por uma dependência do índice de refração $n(x)$ do nitreto com a coordenada x [41].

Frequência de corte

A geometria do guia de onda é definida pela sua seção transversa, descrita pela largura e altura. Ao me referir a uma geometria, irei apresentá-la na forma $h \times w$, em unidade de nanômetros. A espessura do nitreto de silício é predeterminada e fixada pelo grupo de nanofotônica da Universidade de Columbia, e em geral, é por volta de 730 nm . Essa espessura é escolhida por conveniência, por ser adequada a diversos experimentos em 1560 nm . No entanto, para outros comprimentos de onda ou experimentos específicos, é possível escolher diferentes espessuras, mas essa escolha exige um processo de deposição do nitreto independentemente. Por exemplo, trabalhando em 780 nm , o modo transverso do campo fica mais confinado na direção y quando comparado com o modo em 1560 nm , reduzindo o efeito do óxido sobre a dispersão efetiva. No nosso caso, optamos por trabalhar com 730 nm de espessura por conveniência e por ser possível a obtenção dos resultados desejados, que serão descritos mais adiante. Dessa forma, conseguimos

mudar a geometria do guia de onda variando apenas a largura pré-fabricação.

Neste trabalho escolhemos duas geometrias. Na primeira, o guia de onda tem largura de aproximadamente $1\text{ }\mu\text{m}$. Por vezes, irei denominá-la da maneira convencional, ou seja, 730×1000 , ou simplesmente me referir a um guia de onda de $1\text{ }\mu\text{m}$. A segunda geometria, tem largura de aproximadamente $2\text{ }\mu\text{m}$. Mas também poderei chamá-la de 730×2000 . Os valores das larguras são os valores projetados. Contudo, os valores reais podem variar em 50 nm devido à precisão no processo de fabricação.

A dispersão, os valores de k na direção de propagação da onda z , em termos da frequência ω , pode ser observada na Figura 1.14 para as duas geometrias. Para o guia de onda de $1\text{ }\mu\text{m}$, Figura 1.14 (a), calculamos os 9 primeiros modos sem paridade, suportados pelo guia em ordem crescente de frequências. O intervalo de frequências considerado foi de aproximadamente $0,7$ a $1,35$, que corresponde a comprimentos de onda no vácuo de $2\text{ }\mu\text{m}$ e $0,74\text{ }\mu\text{m}$, respectivamente. Porque não foi escolhida uma polarização definida, os modos calculados estão em ordem crescente de frequências, começando pelo modo de menor frequência para certo k , que em geral é o modo fundamental TE_{00} , seguido pela componente TM_{00} . O guia de $2\text{ }\mu\text{m}$, mostrado na parte (b) da figura, suporta mais modos para o intervalo de frequências considerado, e calculamos os 12 primeiros modos em ordem crescente de frequências.

Os modos encontrados podem ser representados por TE_{mn} (TM_{mn}) para a polarização transversal elétrica (transversal magnética). Os índices m e n indicam a paridade do modo com relação aos planos $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente. Por exemplo, o modo de ordem superior TE_{11} é ímpar com relação aos planos de corte $x = 0$ e $y = 0$. Por sua vez, modo TM_{10} é ímpar com relação a $x = 0$, e par com

Figura 1.14: Simulação da dispersão usando o MPB. (a) Para um guia de onda com largura de $1\ \mu\text{m}$, e (b) para largura de $2\ \mu\text{m}$. As curvas rosas representam os modos TM_{10} e TE_{11} nas geometrias de $1\ \mu\text{m}$ e $2\ \mu\text{m}$, respectivamente.

relação a $y = 0$. As imagens desses modos podem ser observadas na Figura 1.15. A parte (a) mostra a componente do campo elétrico E_x para o modo TE_{11} em uma geometria de 730×2000 . A parte (b) mostra a componente do campo elétrico E_y para o modo TM_{10} na geometria 730×1000 . O perfil avermelhado indica um campo negativo, enquanto que a parte azulada indica um campo positivo, normalizado. Esses modos estão indicados com a curva rosa na Figura 1.14.

Figura 1.15: Figura mostrando o campo elétrico do perfil transversal dos modos simulados com o MPB, (a) TE_{11} no guia de onda de $2\ \mu\text{m}$, e (b) TM_{10} no guia de onda de $1\ \mu\text{m}$, no comprimento de onda de $0,8\ \mu\text{m}$.

Notamos que o modo TM_{10} tem uma frequência de corte próxima de um comprimento de onda de 1600 nm, representado pela curva rosa na Figura 1.14 (a). Nessa frequência, ele ainda é propagado, mas com uma velocidade de fase próxima da velocidade de fase do óxido de silício, mostrado como cone de luz na mesma figura. O modo TE_{11} é espacialmente maior do que o modo TM_{10} , e requer um volume de guia de onda maior para ser suportado. A dispersão desse modo está representado pela curva rosa na parte (b) da Figura 1.14, para um guia de onda de 2 μm . A frequência de corte para esse modo é por volta de 0,7. Mas mesmo para um comprimento de onda longo, como 1600 nm, o guia de onda de 2 μm ainda é multimodo.

1.4 Relações de dispersão

Quando a onda eletromagnética interage com os elétrons ligados do meio dielétrico, a resposta do meio material depende da frequência ótica ω . Essa propriedade é conhecida como **dispersão cromática**, sendo manifestada através da dependência na frequência do índice de refração $n(\omega)$. Vimos na Seção 1.2, que fundamentalmente a dispersão cromática está associada às frequências de ressonância do meio dielétrico, nas quais o campo eletromagnético é absorvido pela oscilação dos elétrons ligados. Longe das frequências de ressonância, a absorção dielétrica pode ser desprezada, e a dispersão cromática é descrita pela equação de Sellmeier (1.49).

A dispersão cromática determina a resposta do material frente à propagação da onda em uma geometria em *bulk*. Definimos a equação de Sellmeier para o nitreto e dióxido de silício, cujos parâmetros estão mostrados na Tabela 1.1. No entanto, a geometria do guia de onda pode mudar profundamente a dispersão efetiva do

campo. O estudo da resposta da dispersão efetiva baseado na mudança da geometria do guia de onda é denominado de **engenharia de dispersão**, que é usado regularmente para controlar as propriedades dos processos não-lineares [42].

O guia de onda pode influenciar a dispersão a partir de diversos fatores, e de uma forma complexa e delicada. O primeiro deles, consiste nas contribuições do nitreto e dióxido de silício sobre o modo guiado. Essas contribuições são controladas pelas dimensões transversas do guia de onda, altura e largura. Basicamente, a distribuição espacial transversa do modo ótico sobre as interfaces dos meios materiais, e o quanto ele se estende pela onda evanescente, tem um papel crucial sobre a dispersão.

O segundo fator está relacionado com o fato do guia de onda formar um ressonador em anel. A curvatura do guia de onda pode influenciar a dispersão, e maior será a influência quanto menor for o raio de curvatura. A mudança na dispersão está relacionada a um efeito “centrífugo” do modo guiado devido à curvatura do guia de onda. Há uma quebra de simetria ao longo do eixo longitudinal do guia, no sentido de que o modo transverso é deslocado radialmente para fora do guia de onda, aumentando, de forma assimétrica, a fração do campo que se propaga pelo substrato de dióxido.

A terceira forma, mas a mais importante neste trabalho, vem do fato de que os dois efeitos supracitados dependem do modo transverso de interesse. Isto é, obtemos relações de dispersão drasticamente diferentes, quando consideramos modos transversos de ordem superiores.

A obtenção das relações de dispersão consiste no cálculo da estrutura de bandas do guia de onda, que matematicamente significa encontrar $\mathbf{k}(\omega)$, ou $\omega(\mathbf{k})$. Há duas formas distintas de se fazer isso, envolvendo o domínio espectral, ou o domínio

temporal.

1.4.1 Domínio espectral vs temporal

Não iremos descrever matematicamente a forma como os softwares de simulação calculam as estruturas de banda. Para uma boa introdução dos métodos empregados, veja o livro do próprio desenvolvedor do código [40].

- **MPB:** (MIT Photonic-Bands) é um software que resolve, no domínio espectral, as equações de Maxwell (1.1) em estruturas dielétricas e periódicas. Ele é especialmente útil para aplicações envolvendo cristais fotônicos, devido à periodicidade. No entanto, também pode ser utilizado para encontrar relações de dispersão óticas em fibras ou guias de onda integrados [39].
- **MEEP:** (MIT Electromagnetic Equation Propagation) é um software para simulação de sistemas eletromagnéticos via método de diferença finita no domínio temporal (FDTD) [37].

Cada um dos métodos possui suas vantagens e desvantagens. O MPB encontra diretamente os auto-estados e auto-valores das equações de Maxwell, usando uma base de ondas planas. Cada campo computado tem uma frequência definida. Em contraste, o MEEP itera as equações de Maxwell no tempo. O campo computado tem um tempo definido, a cada passo temporal, mas não possui uma frequência definida.

O FDTD é recomendado para cálculos que envolvem a evolução dos campos, como transmissão, conversão de modos e o estudo de ressonâncias. Ele também pode ser utilizado para encontrar estruturas de bandas, olhando para os picos da

transformada de Fourier como resposta da geometria à uma fonte de luz gaussiana. A principal vantagem é que ele fornece de uma só vez a relação $\mathbf{k}(\omega)$, com ω dentro da largura espectral da fonte, envolvendo a propagação de um único campo. Há muitas desvantagens neste método. A principal, é a dificuldade de correlacionar frequências com modos transversos. A simulação por um intervalo de tempo curto, pode levar a modos espúrios, não ressonantes, que podem ser confundidos como modos ressonantes. Isso é particularmente inconveniente para guias de onda multimodos, no qual vários modos são suportados, e a identificação destes se torna difícil. A segunda desvantagem, na transformada de Fourier, a resolução na frequência é inversamente relacionada com o tempo de simulação. Para aumentar a resolução em 10 vezes, o tempo de simulação precisa ser aumentado em 10 vezes. A terceira, o tamanho do passo temporal precisa ser proporcional ao tamanho da malha espacial para estabilidade computacional. Particularmente neste trabalho, encontramos que a resolução espacial e temporal precisavam ser relativamente altas para garantir a estabilidade, principalmente por causa da forma lorentziana do meio dielétrico. E quarta, o software fornece apenas a frequência dos estados, não os auto-estados. Para obter os auto-estados, a simulação precisa ser rodada novamente para cada auto-estado, por um intervalo de tempo que é proporcional ao inverso da distância em frequência entre os diferentes modos. Isso significa, um longo tempo para modos espectralmente próximos, como é o caso de nossos ressoadores.

Em contraste, o método no domínio da frequência apresenta diversas vantagens. A primeira, é que os modos não são perdidos, e são encontrados de forma organizada, mesmo sendo espectralmente próximos. Segunda, as bandas ou frequências são obtidas de forma iterativa, e os erros das auto-soluções tipicamente decaem exponencialmente com o número de iterações, dessa forma, o nú-

mero de iterações é logarítmico para determinada tolerância. Terceira, o número de iterações permanece praticamente constante mesmo que a resolução seja aumentada, naturalmente o tempo de cada iteração aumentará, mas não o número. E quarta, as frequências dos auto-estados são obtidas em conjunto com os estados, assim sendo, identificamos os auto-estados juntamente com as frequências.

Podemos citar duas desvantagens com relação ao MPB. A primeira, é que as bandas são sempre encontradas a partir daquela de menor frequência, até a banda de interesse. Por exemplo, se estamos interessados no modo transversal TM_2 , antes de calcular algo para esse modo, precisamos calcular primeiramente para os modos TM_0 e TM_1 . Isso acaba se tornando temporalmente dispendioso. A segunda, que não é necessariamente uma desvantagem, mas sim uma limitação, é que a estrutura geométrica disponível é extremamente limitada. Por exemplo, não é possível desenhar guias de onda curvos. Para levar em conta o efeito do raio de curvatura, é necessário utilizar métodos paralelos de simulação para o efeito do raio de curvatura sobre o índice de refração [41].

O método FDTD resolve as equações de Maxwell diretamente com um número mínimo de aproximações. Contudo, para alcançar uma boa acurácia, é necessário um grande tempo de simulação e esforço computacional. Por exemplo, a simulação da dispersão total, que será tratada mais adiante, em um computador i7 (3,4 GHz) com 32 GB de memória RAM levou cerca de uma semana para terminar, com resolução aceitável para um anel de 100 μm de raio. Esse método, por resolver as equações de Maxwell no domínio temporal, aceita o termo de polarização não-linear para simular efeitos de segunda e terceira ordem, como por exemplo, a propagação de pulsos ultracurtos, e a geração de sólitons [43], que normalmente é feito a partir da dinâmica da equação de Schrödinger não-linear (NLSE), a partir do método de passos divididos - do inglês **split-step-method** [44].

1.4.2 Velocidade de grupo

Matematicamente, os efeitos da dispersão são considerados na expansão na constante de propagação do modo em uma série de Taylor ao redor da frequência de bombeio ω_0

$$\beta(\omega) = n(\omega)\frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (1.66)$$

onde os parâmetros

$$\beta_m = \left(\frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right)_{\omega=\omega_0}, \quad (1.67)$$

com $(m = 0, 1, 2, \dots)$, estão relacionados com a ordem m -ésima da dispersão.

O termo de primeira ordem β_1 fornece diretamente a velocidade de grupo através da relação

$$\beta_1 = \frac{1}{v_g} = \frac{n_g}{c}, \quad (1.68)$$

onde v_g e n_g são velocidade e índice de grupo, respectivamente. Fisicamente, um envelope de pulso ótico viaja na velocidade de grupo do meio. Ela pode ser significativamente diferente da velocidade de fase da onda, dada por ω/β_0 , principalmente em meios dielétricos. A Figura 1.16 mostra a velocidade de grupo para um amplo espectro de comprimentos de onda dos três primeiros modos TM em dois guias de onda distintos, 730×1200 nm e 730×2000 nm.

Observando a figura, vemos que em ambas as geometrias, a velocidade de grupo dos modos é reduzida a uma taxa bastante rápida para comprimentos de onda curtos. Nessa situação, os modos transversos estão quase inteiramente confinados no núcleo, e a velocidade de grupo se aproxima da velocidade em bulk para o nitreto de silício. A taxa de redução da velocidade deve corresponder à taxa de crescimento do índice de refração na aproximação com a região de absorção no ultravioleta.

Figura 1.16: Velocidade de grupo para duas geometrias, (a) de 1,2 μm e (b) 2 μm .

No outro extremo do espectro, para comprimentos de onda longos, os dois modos de ordem superior, TM_{10} e TM_{20} na geometria de 1,2 μm , apresentam uma alta taxa de crescimento na velocidade de grupo, a partir de 1500 nm e 1200 nm, respectivamente. Esses comprimentos de onda correspondem às frequências de corte para os respectivos modos. Isso significa que o modo não mais propaga-se confinadamente, e suas velocidades acompanham os valores no óxido de silício. O mesmo acontece com o modo TM_{20} na geometria de 2 μm , e deve acontecer também com o modo TM_{10} para comprimentos de onda maiores. O fato do guia de onda ser largo permite suportar o primeiro modo de ordem superior até comprimentos de onda mais longos.

O modo fundamental TM_{00} não apresenta divergência para comprimentos de onda longos. Isso é devido à ausência de frequência de corte para esse modo.

Notamos que a dinâmica da velocidade de grupo é bastante diferente quando analisamos com respeito à frequência, e ao modo. Concluimos a partir disso que, na existência de vários modos de frequência no guia de onda, modos spectral-

mente distanciados propagam-se com velocidades diferentes. Portanto, caso o modo propagante seja um pulso espectral, a dispersão causará uma deformação temporal na forma do pulso, e isso pode ser uma adversidade para sistemas óticos de comunicação. No regime não-linear, a combinação da dispersão com a não-linearidade pode resultar em um comportamento qualitativamente diferente. O balanceio entre esses dois efeitos pode levar ao surgimento de sólitons, soluções que mantêm sua forma temporal e espectral ao longo da propagação [43].

Para micro-ressoadores com essas dimensões de guia de onda, o intervalo espectral livre (FSR) pode ser calculado por v_g/L . Vemos então que, para os modos guiados, o modo fundamental tem o maior FSR. Os FSR's decrescem sequencialmente com o crescimento da ordem dos modos transversos. A diferença na velocidade de grupo é significativa, da ordem de 0,01 c, que corresponde a diferenças no FSR da ordem de ~ 4 GHz, as quais são facilmente distinguíveis a partir de espectrômetros comerciais.

1.4.3 Dispersão da velocidade de grupo (GVD)

O segundo termo de dispersão da constante de propagação é o β_2 (1.66). Ele está diretamente associado à dispersão da velocidade de grupo (GVD) - do inglês *Group Velocity Dispersion*. O GVD é comumente usado na literatura de fibras óticas ao invés de β_2 . Ele está relacionado com β_2 pela relação [43]

$$GVD \equiv \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \approx \frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2}. \quad (1.69)$$

O sinal de β_2 define duas importantes condições de dispersão, denominadas comumente de **normal** e **anômala**, associadas a valores positivos e negativos de β_2 , respectivamente. É importante notar o sinal negativo na expressão (1.69), no qual

indica um valor positivo de GVD para dispersão anômala. A dispersão do material é regularmente normal para regiões espectrais longe da absorção. Próximo à absorção, a dispersão é anômala dentro de uma região espectral estreita, ver Figura 1.6. O principal objetivo da engenharia de dispersão é encontrar um balanço delicado entre a dispersão do material e a dispersão geométrica, fazendo com que o zero de dispersão efetiva (ZGVD) esteja nas proximidades do comprimento de onda do modo de bombeio. A Figura 1.17 mostra a simulação do parâmetro GVD do modo fundamental em ambas as polarizações para diferentes larguras do guia de onda w . O cálculo do β_2 foi feito através de derivação numérica, ver equação (1.69). Para tanto, é preciso um cuidado especial com a resolução da simulação e o número de pontos calculados. É importante que em cada ponto o cálculo consiga fornecer resultados que variem mais significativamente do que o erro cometido na derivação.

Figura 1.17: Cálculo do parâmetro GVD do modo fundamental para três larguras do guia de onda $w = 600, 800$ e 1000 nm. As linhas contínua e tracejada referem-se a polarizações TE e TM, respectivamente.

Está bastante claro pela figura que todos os ZGVD's encontram-se entre comprimentos de onda de 900 a 1000 nm, para as geometrias consideradas. Para uma largura de 600 nm, ambas as polarizações mostram um ZGVD próximo de 950 nm,

mas em nenhum comprimento de onda a dispersão fica negativa. Assim, para essa geometria, a dispersão é sempre normal para comprimentos de onda inferiores a ~ 950 nm. Por exemplo, para geometrias de 800 e 1000 nm, o ZGVD é próximo de 950 nm, mas neste caso, ele separa duas regiões distintas. Para comprimentos de onda inferiores a 950 nm a dispersão é normal, e para comprimentos de onda superiores a 950 nm a dispersão é anômala, até aproximadamente a região de telecom.

Para as geometrias investigadas, incluindo diferentes alturas para o guia de onda, não identificamos estruturas capazes de deslocar o ZGVD para comprimentos de onda inferiores a 900 nm, por exemplo. Acreditamos que a região do infravermelho próximo, de 750 nm até 900 nm, e do visível, com ($\lambda < 750$ nm), é fortemente influenciada pela dispersão normal do material [15, 18]. No entanto, para modos transversos de ordem superior, a estrutura do modo é significativamente diferente do modo fundamental, e a dispersão efetiva é completamente distinta. Portanto, trabalhando com modos de bombeio de ordem superior, iremos mostrar que é possível deslocar o ZGVD para comprimentos de onda mais curtos.

1.4.4 Dispersões de ordens superiores

Os coeficientes de dispersão de ordens superiores são todos os termos β_m , com ($m > 2$). O termo β_3 é o coeficiente de dispersão de terceira ordem (TOD) - do inglês *third-order-dispersion*. E o termo β_4 é o coeficiente de quarta ordem (FOD) - do inglês *fourth-order-dispersion*. Em particular, esses termos podem exercer influência tanto na parte linear quanto em regimes não-lineares. A influência deles será importante quando o sistema for projetado para operar próximo do ZGVD, onde a influência do β_2 é pequena.

TOD

O termo de terceira-ordem de dispersão não está associado ao ganho do processo paramétrico, mas sim à quebra da simetria de reflexão levando a instabilidades convectivas [45], e ao formato da região de ganho. Portanto, ele é utilizado no controle do formato do pulso e com respeito a tópicos associados com o travamento de modos, *modelocking* [42]. Matematicamente, ele está associado à inclinação da curva de dispersão de segunda ordem, como pode ser observado na Figura 1.18.

Figura 1.18: Definição matemática de β_3 .

Desprezando a influência do FOD, o sinal do TOD está relacionado com o lado espectral que apresenta dispersão anômala. Em nosso caso, o valor de β_3 obtido foi sempre positivo, indicando que a região de dispersão anômala ocorre sempre em comprimentos de onda maiores do que o ZGVD, que é de 795 nm.

A magnitude de β_3 indica o quão sensível a dispersão efetiva é com relação ao comprimento de onda do bombeio. Para valores pequenos de β_3 , a curva de β_2 cruza o ZGVD suavemente, e não devemos observar dinâmicas muito diferentes quando variamos a frequência do bombeio. No entanto, para valores grandes de

β_3 , a diferença entre a frequência do bombeio e o ZGVD deve ser precisamente ajustada para obter o valor desejado de β_2 . Veremos mais adiante, a importância da frequência do feixe de bombeio com relação ao ZGVD.

FOD

Veremos mais adiante que o termo de quarta-ordem da dispersão está associado ao ganho do processo paramétrico, assim como o termo de segunda ordem β_2 . Em geral, o ganho do processo de mistura de quatro-ondas depende dos termos de ordem par da dispersão.

1.5 Conclusões e perspectivas

Em resumo, introduzimos neste capítulo os conceitos básicos do guia de onda e do campo eletromagnético propagado. Definimos os modos transversos do campo através dos índices transversos mn , onde o modo fundamental é descrito por $m = n = 0$, e o surgimento dos primeiros modos transversos superiores são representados por $m > 0$, para uma dada polarização TE ou TM. Mostramos as relações de dispersão para diversos modos, deixando claro que a constante de propagação efetiva depende, além dos materiais e da geometria, do respectivo perfil transversal modal.

Iniciaremos o próximo capítulo introduzindo a dinâmica de cavidades dos micro-ressonadores. Em seguida, utilizaremos os conceitos apresentados neste capítulo para o acordo de fase do processo de geração de segundo-harmônico e conversão paramétrica descendente, processos associados ao segundo termo de não-

linearidade. No final, falaremos sobre a engenharia de dispersão para trazer o ponto do zero de dispersão da velocidade de grupo para ~ 795 nm. Isso é de extrema importância para o início do processo de mistura de quatro-ondas em comprimentos de onda inferiores a $1\text{ }\mu\text{m}$.

CAPÍTULO 2

MICRO-RESSOADOR FOTÔNICO E ÓTICA NÃO-LINEAR

O micro-ressoador em anel é um dispositivo capaz de acumular energia na forma de luz, aumentando a interação entre a luz e a matéria com consequente aprimoramento dos efeitos não-lineares. Ele é formado por um guia de onda curvado sobre si mesmo na forma de um anel. Caso o anel seja constituído por um material com índice de refração superior ao substrato exterior, fótons acoplados ao anel poderão sofrer reflexão interna total e continuar sua propagação por um longo período de tempo ¹. Logicamente, esse seria o caso de um anel perfeito, na ausência de qualquer tipo de perda.

O acoplamento dos fótons ao interior do anel é estabelecido pelo processo de reflexão interna total frustrada (ver subseção 1.1.4), que é sofrido pelos fótons propagantes na onda evanescente de um modo do guia de onda reto próximo ao anel. Para um acoplamento adequado às perdas de propagação, a distância entre o guia de onda reto e o anel deve ser ao menos da ordem do comprimento de onda da luz, como pode ser observado na Figura 1.5. Além disso, por se tratar de um ressonador, após uma volta completa os fótons aprisionados são aproximados novamente do guia de onda reto, que desta vez atua como um acoplamento de saída. Portanto, o guia de onda reto (que denominarei apenas de guia de onda), é descrito como uma porta de entrada e saída do micro-ressoador.

¹É importante ter mente que esta não é a única forma de guiar a luz. Ela também pode ser guiada por bandgap fotônico, sem a necessidade de haver diferentes índices de refração. O estabelecimento de estruturas periódicas no material é capaz de definir bandas espectrais de propagação [46].

2.1 Micro-ressoador fotônico

Nesta seção introduziremos brevemente a dinâmica linear do micro-ressoador fotônico.

2.1.1 Ressorador com uma porta

O acoplamento do campo elétrico entre o guia de onda e o anel depende da distância entre os guias de onda (*gap*), e do comprimento de interação do guia com um elemento de arco do ressonador. Para descrever a dinâmica da troca de energia entre os campos, vamos considerar a geometria mostrada na Figura 2.1 . O campo eletromagnético do guia de onda na proximidade da região de acoplamento, cuja amplitude é representada por a_1 , é acoplado ao interior do anel, com amplitude descrita por b_2 , e também transmitido através do guia de onda com amplitude designada por b_1 .

Figura 2.1: Micro-ressoador em anel com uma porta.

O fator de acoplamento é quantificado pelo número complexo κ , e a taxa de

permanência do campo no anel é caracterizado por t^* . Vamos considerar a situação ideal onde existe uma direção preferencial para a propagação da luz, isto é, vamos desprezar as reflexões propagantes na direção oposta à do feixe de bombeio inicial. Nesse caso, a dinâmica dos campos na região de acoplamento do anel pode ser escrita em termos da matriz de acoplamento da seguinte forma [47]

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & \kappa \\ -\kappa^* & t^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

com a condição de unitariedade relacionada à conservação de energia

$$|t|^2 + |\kappa|^2 = 1. \quad (2.2)$$

Para micro-cavidade com fator de qualidade bastante alto, podemos aproximar a dinâmica do sistema por uma propagação com poucas perdas ($\alpha \ll 1$), onde α contabiliza as perdas espúrias sobre a intensidade ótica do modo ressoante em uma volta completa. Além das perdas, a circulação do campo no ressoador recebe uma fase de propagação θ . Dessa forma, relacionamos os campos a_2 e b_2 por

$$a_2 = \sqrt{1 - \alpha} e^{i\theta} b_2. \quad (2.3)$$

A fase recebida pelo campo após uma volta completa no anel é dada por $\theta = \omega n_0 L / c$, onde ω é a frequência ótica do modo, n_0 é o índice de refração efetivo da geometria, L é o comprimento do micro-ressoador, que é dado por $L = 2\pi R$, onde R é o raio do anel, e c é a velocidade da luz no vácuo. Logo, a fase recebida em uma volta completa é dada por

$$\theta = 4\pi^2 n_0 \frac{R}{\lambda}, \quad (2.4)$$

onde λ é o comprimento de onda no vácuo.

Estamos interessados nas amplitudes dos campos existentes no dispositivo.

Das equações (2.1) e (2.3), e com a condição de conservação de energia (2.2), obtemos

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{-\sqrt{1-\alpha} + te^{-i\theta}}{-t^* \sqrt{1-\alpha} + e^{-i\theta}}, \quad (2.5)$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{-\kappa^* \sqrt{1-\alpha}}{-t^* \sqrt{1-\alpha} + e^{-i\theta}}, \quad (2.6)$$

$$\frac{b_2}{a_1} = \frac{-\kappa^*}{1 - t^* e^{i\theta} \sqrt{1-\alpha}}. \quad (2.7)$$

As equações acima podem ser resolvidas levando à transmissão do ressoador em termos da potência do campo de entrada

$$T \equiv \left| \frac{b_1}{a_1} \right|^2 = \frac{(1-\alpha) + (1-|\kappa|^2) - 2\sqrt{(1-\alpha)(1-|\kappa|^2)} \cos(\theta-\phi)}{1 + (1-\alpha)(1-|\kappa|^2) - 2\sqrt{(1-\alpha)(1-|\kappa|^2)} \cos(\theta-\phi)}, \quad (2.8)$$

onde fizemos $t = \sqrt{1-|\kappa|^2}e^{i\phi}$, com $|\kappa|$ representando a força de acoplamento, e ϕ uma fase arbitrária de acoplamento. A fase $(\theta-\phi)$ representa a dessintonia da cavidade com a frequência do feixe de bombeio ω_0 . Em ressonância, quando há exatamente um número inteiro de comprimentos de onda do laser dentro do ressoador de comprimento n_0L , a fase $(\theta-\phi)$ é um múltiplo inteiro de 2π , e a transmissão do ressoador é dada por

$$T = \left(\frac{\sqrt{1-\alpha} - \sqrt{1-|\kappa|^2}}{1 - \sqrt{(1-\alpha)(1-|\kappa|^2)}} \right)^2, \quad (2.9)$$

e segundo a definição padrão dada em [36], identificamos três tipos de acoplamento:

- **Acoplamento crítico**, quando a força de acoplamento é igual às perdas espúrias ($|\kappa|^2 = \alpha$). Nesse caso, a transmissão do ressoador é nula, indicando um perfeito casamento de impedância entre a taxa de acoplamento e as perdas espúrias.
- **Acoplamento super-crítico**, quando a força de acoplamento é superior às perdas espúrias ($|\kappa|^2 > \alpha$). Nessa situação, o tempo de vida dos fótons intra-

cavidade é curto e há uma maior probabilidade deles serem extraídos pelo acoplamento do que serem perdidos de outra maneira.

- **Acoplamento sub-crítico**, quando a força de acoplamento é inferior às perdas espúrias ($|k|^2 < \alpha$). Nesse caso, o tempo de vida dos fótons intracavidade tende a ser longo, e a probabilidade de serem perdidos por absorção ou espalhamento é maior.

Figura 2.2: Tipos de acoplamentos entre o guia de onda e o anel para um α fixo. Os parâmetros utilizados foram $\alpha = 0,06$ e $|k|^2 = 0,01(0,2)$ para acoplamento sub- (super-crítico).

A Figura 2.2 mostra o perfil da ressonância para os diferentes tipos de acoplamento. A força de acoplamento é determinada preferencialmente pelo gap entre o guia de onda e o anel. Portanto, uma vez encontrado algum ressoador com gap caracterizado por acoplamento crítico, acoplamentos com gaps maiores ou menores levam a acoplamentos sub-críticos ou super-críticos, respectivamente.

A maior intensidade do feixe de luz dentro do anel acontece no acoplamento crítico. Essa é a situação mais apropriada para a observação de processos não-lineares que exigem campos intensos, em que perdas não sejam importantes.

2.1.2 Ressonador com duas portas

Nesta configuração, mais um guia de onda reto é aproximado do micro-ressoador. A geometria do dispositivo pode ser observada na Figura 2.3. O sistema agora possui duas portas, a original, por onde o feixe de bombeio é inserido e coletado, e uma segunda porta, que pode ser utilizada para adicionar um outro feixe de bombeio (adicional), para coletar parte do campo propagante no anel (vazamento), ou para ambas as possibilidades. Como veremos adiante, a porta adicional do ressonador pode ser utilizada para extrair um modo que seja incompatível com o guia de onda de entrada, com é o caso da geração de harmônicos, ou para controlar a força de acoplamento de um modo específico.

Figura 2.3: Micro-ressoador em anel com duas portas.

Para a simplificação da análise, vamos considerar a amplitude do campo de entrada igual a ($a_1 = 1$), e sem campo de bombeio adicional ($a_2 = 0$). Repetindo o procedimento da subseção anterior, encontramos as amplitudes dos campos de

saída através das portas de **saída** e **vazamento**, respectivamente

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{t_1 - t_2^* \sqrt{1 - \alpha} e^{i\theta}}{1 - t_1^* t_2^* \sqrt{1 - \alpha} e^{i\theta}}, \\ b_2 &= \frac{-\kappa_1^* \kappa_2 \sqrt{1 - \alpha/2} e^{i\theta/2}}{1 - t_1^* t_2^* \sqrt{1 - \alpha} e^{i\theta}}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Os termos $\alpha/2$ e $\theta/2$ são usados para contabilizar as perdas e a defasagem em meia volta, porque parte do campo deixa o anel pela segunda porta antes de completar uma volta inteira. Calculando o módulo ao quadrado das expressões em (2.10), obtemos os coeficientes de transmissão pelas portas (saída) e (vazamento). O gráfico dessas expressões pode ser observado na Figura 2.4 para dois modos ressonantes.

Figura 2.4: Dinâmica do micro-ressonador em anel de duas portas para duas ressonâncias separadas por um intervalo espectral livre com acoplamento perfeitamente casado. O valor utilizado para o parâmetro de permanência do campo foi $t_1 = t_2 = 0,9$.

A amplitude do campo na porta de saída b_1 será nula em ressonância para acoplamentos simétricos $\kappa_1 = \kappa_2$, somente se $\alpha = 0$, que representa um meio sem perdas ou com um ganho aditivo para compensar as perdas. Nesse caso, todo o campo de entrada é extraído pela porta de vazamento. Para um ressonador passivo, a taxa de atenuação do campo por perdas espúrias α , é constante e depende

da absorção do material, do raio de curvatura do anel e do processo de fabricação. Para um anel com perdas, a única forma de conseguir um mínimo de potência na porta de saída ($|b_1|^2 = 0$) em ressonância é ajustar as taxas de acoplamento de forma a satisfazer a relação

$$\alpha = \frac{|\kappa_1|^2 - |\kappa_2|^2}{1 - |\kappa_2|^2}. \quad (2.11)$$

2.1.3 Parâmetros do ressoador

O ressoador em anel comporta-se de forma bastante parecida com as cavidades óticas lineares do tipo Fabry-Perot [30]. Dessa forma, podemos emprestar alguns parâmetros utilizados para descrever as propriedades desses sistemas.

Intervalo espectral livre

O intervalo espectral livre (FSR) - do inglês - *Free-Spectral-Range*, quantifica a separação espectral entre dois picos de ressonâncias. Vimos nas subseções anteriores, que o campo dentro do ressoador em anel recebe uma fase de $\theta = \beta L$ ao completar uma volta completa. Além disso, o micro-ressoador entra em ressonância quando a fase é um múltiplo inteiro de 2π . Portanto, a separação em comprimento de onda entre duas ressonâncias pode ser escrita como

$$\Delta\lambda = -\frac{2\pi}{L} \left(\frac{\partial\beta}{\partial\lambda} \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Escrevemos a derivada parcial da constante de propagação com relação ao comprimento de onda como

$$\frac{\partial\beta}{\partial\lambda} = -\frac{\beta}{\lambda} + k \frac{\partial n_0}{\partial\lambda} \approx -\frac{\beta}{\lambda}, \quad (2.13)$$

onde, para materiais sem uma forte dependência do índice de refração com o comprimento de onda, podemos negligenciar o segundo termo do lado direito da expressão (2.13), e escrever o FSR associado à variação do comprimento de onda da luz como

$$FSR_\lambda \equiv \Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{n_0 L}. \quad (2.14)$$

Porém, notamos que essa aproximação não é válida para o nitreto de silício, e a expressão completa em (2.13) precisa ser levada em conta. Sendo assim, definimos o **índice de refração de grupo** de forma a satisfazer

$$\frac{\partial\beta}{\partial\lambda} = -\frac{k}{\lambda}n_g, \quad (2.15)$$

onde n_g é o índice de refração de grupo, que é definido como

$$n_g \equiv n_0 - \lambda \frac{\partial n_0}{\partial \lambda}. \quad (2.16)$$

Portanto, a versão modificada do FSR é dada por

$$FSR_\lambda = \frac{\lambda^2}{n_g L}, \quad (2.17)$$

que concorda bem com os valores experimentais para o ressonador em nitreto de silício. A versão do FSR associado à frequência pode ser facilmente convertido da expressão acima

$$FSR_f = \frac{c}{n_g L}. \quad (2.18)$$

Largura de banda

A largura total à meia altura Γ , quantifica a largura de linha da ressonância. A definição aqui será um pouco diferente daquela associada à largura de linha da transmissão de uma cavidade em espaço livre. Como a transmissão de um ressonador em anel tem a forma de um vale, ao invés de um pico, iremos definir a

largura à meia altura como a largura no qual a variação da transmissão é reduzida à metade do valor máximo da depleção, associada ao mínimo de intensidade, que equivale matematicamente a $(1 - T)/2$.

Utilizando as expressões em (2.8) e (2.9), e assumindo uma variação angular pequena, $\cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, obtemos o θ da largura à meia altura para o acoplamento crítico

$$\theta = \frac{\kappa^2}{\sqrt{1 - \kappa^2}}, \quad (2.19)$$

onde desconsideramos o termo de fase do acoplamento complexo κ . Na aproximação de acoplamento fraco ($\kappa \ll 1$), e utilizando a aproximação na expressão (2.13), encontramos

$$\Gamma = \frac{2\theta \left(\frac{\partial \beta}{\partial \lambda} \right)^{-1}}{L} = \frac{\kappa^2 \lambda^2}{\pi L n_0}, \quad (2.20)$$

onde o fator 2 define Γ como a largura total da ressonância. A largura de banda definida dessa forma tem unidade dimensional de metros.

Finesse & Fator de qualidade

Um parâmetro que pode ser calculado diretamente dos parâmetros já encontrados é a **finesse**. Ela é definida como a razão entre o FSR e a largura da ressonância Γ . Embora seja fácil a sua obtenção para o acoplamento crítico, a expressão válida para todos os acoplamentos é aproximada por

$$F \approx \frac{2\pi}{\kappa^2 + \alpha}, \quad (2.21)$$

onde κ^2 e α contabilizam as perdas na intensidade do campo intracavidade por acoplamento e espúrias, respectivamente. A aproximação é válida para altas finesses, que no caso de nossos anéis integrados é sempre satisfeita.

O parâmetro mais importante na descrição das perdas dos ressoadores em guias de onda é o **fator de qualidade**, que mede o quão estreito é a largura de linha da ressonância, e associa o valor à “qualidade de fabricação” do ressoador. Ele é definido como a razão entre o comprimento de onda do modo ótico e a largura de linha da ressonância, ou como é mais comumente definido, a razão entre a frequência de operação e a largura de linha em unidade de frequência ($\Gamma_f = FSR_f/F$), com F sendo a finesse, ver Equação 2.21.

$$Q_L = \frac{\omega_0}{2\pi\Gamma_f} \approx \frac{\omega_0}{2\kappa FSR}. \quad (2.22)$$

O subíndice L indica a definição do fator de qualidade carregado - do inglês - *Loaded*. A expressão (2.22) relaciona o fator de qualidade carregado no acoplamento crítico com a força de acoplamento, ou com as perdas espúrias da intensidade da luz em uma volta completa no ressoador, α . No acoplamento crítico, as perdas totais são divididas em duas partes iguais, uma pelo acoplamento κ , e outra por α , que contabiliza todas as outras perdas com exceção do acoplamento.

No acoplamento bastante sub-crítico, quando ($\alpha \gg \kappa$), as perdas espúrias dominam as perdas totais do ressoador, e o fator de qualidade é denominado de **fator de qualidade intrínseco** Q_I , que associa em seu valor apenas as perdas espúrias, referente à qualidade de fabricação. Seu valor é aproximado por

$$Q_I \approx 2Q_L, \quad (2.23)$$

no acoplamento crítico.

2.1.4 Perdas

As perdas de propagação no ressoador em anel é crítico para diversas aplicações envolvendo processos não-lineares, como a geração de pentes de frequência com

baixo limiar de oscilação [48, 7, 49], processos envolvendo alta sensibilidade de medida [50] ou a observação de efeitos quânticos [51].

O micro-ressoador baseado em silício, com núcleo formado por nitreto de silício e substrato por dióxido de silício, apresenta alto contraste nos índices de refração dos materiais, e conseqüentemente, o modo ótico é guiado com alto confinamento, que pode ser da ordem do comprimento de onda da luz. Com isso, temos a liberdade na escolha das dimensões transversas do guia de onda para obter dispersões apropriadas para o casamento de fase de processos não-lineares, assim como a fabricação de micro-ressoadores com diâmetros na escala de micrômetros, ainda com baixas perdas de propagação. Anéis com raios de curvatura da ordem de 20 μm ainda possuem alto fator de qualidade [52].

O fator de qualidade é extremamente sensível a perdas. Atualmente, fatores de qualidade da ordem de 80 milhões foram alcançados em ressoadores de nitreto de silício, mas com geometrias apropriadas para tal propósito, com espessura do guia de onda bastante fino e raio de curvatura da ordem de milímetros [53], que é útil para aplicações envolvendo filtros óticos de banda-estreita e cavidades óticas para estabilização de lasers. No entanto, com o propósito de geração de processos não-lineares, as dimensões transversas do guia de onda são determinadas pelas dispersões que levam ao casamento de fase. Sendo assim, a identificação das origens das perdas é importante para a fabricação de dispositivos com Q maiores.

Tipicamente, as perdas são atribuídas a duas fontes principais. A primeira são as perdas por absorção, causadas por contaminações de hidrogênio, ligações H-O no SiO_2 e H-N, Si-H no Si_3N_4 . Um “cozimento” adicional a temperaturas de 1050-1200° pode eliminar as impurezas H-O e reduzir H-N e Si-H, levando a uma redução nas perdas por absorção [54].

A segunda, é devido ao espalhamento da luz em todas as interfaces do guia de onda entre o nitreto e o óxido. Por causa do alto confinamento da luz, uma significativa parte do campo pode propagar pela superfície. Recentemente, foi mostrado que as rugosidades nas paredes do guia de onda atuam como fonte predominante de perdas nos ressoadores. A descoberta direcionou um caminho para a obtenção de fatores de qualidade intrínseco tão alto quanto 37 milhões [55].

O tamanho das rugosidades nas interfaces dos materiais variam de acordo com o processo de deposição e corrosão, e normalmente é da ordem de nanômetros. Ela é causada principalmente pela formação de polímeros durante o processo de corrosão por plasma [56]. Afim de reduzir o resíduo de polímeros, um alto fluxo de oxigênio é utilizado para a remoção dos polímeros através de reações químicas, produzindo monóxido de carbono (CO) e dióxido de carbono (CO₂) [55].

O processo de fabricação convencional de guias de onda baseado em silício apresenta perdas da ordem de 1 dB/cm [57], onde a rugosidade das paredes laterais é a principal causa do espalhamento. Tipicamente, as rugosidades nas paredes inferior e superior são menores, e possuem menos influência sobre as perdas por espalhamento.

Apesar disso, com o objetivo de conseguir fatores de qualidade extremamente altos, a redução nas rugosidades das paredes laterais e das paredes inferior e superior é necessária. Para o fator de qualidade de 37 milhões, as perdas estimadas por espalhamento em um guia de onda reto é de aproximadamente 0,8 dB/m. Por outro lado, as perdas por absorção são estimadas em 0,13 dB/m, o que determina um limite máximo para o Q de ao menos 170 milhões. A Figura 2.5 (a) mostra uma foto do anel tirada com um microscópio de alta resolução, e a parte (b) mostra uma ampliação do guia de onda com o detalhe do perfil da parede lateral.

Figura 2.5: Imagem microscópica do dispositivo. (a) Visão superior da imagem microscópica de um anel com $115\text{ }\mu\text{m}$ de raio. (b) Imagem de microscopia eletrônica mostrando a suavidade da parede lateral do guia de onda. Imagens retiradas no CNF (Cornell NanoScale Science & Technology Facility) e mostradas na Referência [55].

Tipicamente, os fatores de qualidade carregado no acoplamento crítico apresentados neste trabalho são da ordem de 3 milhões, que representa perdas de aproximadamente 0,3% em uma volta completa, de acordo com a expressão (2.22).

2.1.5 Micro-aquecedores integrados

Geralmente, as cavidades em espaço livre contam com um PZT - do inglês - *piezoelectric transducer*, para permitir um grau de liberdade extra na sintonia de fase, através do ajuste da posição de um dos espelhos. O PZT responde a uma tensão elétrica aplicada, com um deslocamento em um dos espelhos, permitindo um controle sobre o parâmetro que descreve o comprimento da cavidade. Dependendo do tamanho da cavidade, esse controle pode varrer diversos FSR's, permitindo sua caracterização.

De forma semelhante, podemos anexar ao chip, paralelamente ao dispositivo, sobre a camada de óxido de silício, um anel em metal, a saber, Platina. A platina

foi escolhida como material porque ela pode aguentar temperaturas elevadas sem derreter. Ao conduzir uma corrente elétrica a platina é aquecida, e este aquecimento contribui para dois efeitos que permitem sintonizar o micro-ressoador. O primeiro é devido à expansão térmica da estrutura, relacionada com a energia eletrônica dos átomos que compõem o volume. A segunda contribuição é uma direta renormalização das energias de bandgap pela interação elétron-fônon [58].

De forma geral, o controle sobre a ressonância do anel é feito através da variação de dois parâmetros, o comprimento L e o índice de refração efetivo n_0 . A mudança sobre o tamanho da cavidade pode ser realizada através de um *peltier*, posicionado sob o chip. Devido à aplicação de uma corrente elétrica, da ordem de amperes, ocorre um gradiente de temperatura, com respectivo aquecimento do chip como um todo, expandindo a geometria anelar. No entanto, durante o processo de expansão, o acoplamento do chip com a fibra é perdido, sendo necessário o realinhamento após a estabilização da temperatura. Portanto, a sintonia do ressoador com o peltier não é muito recomendada.

A principal contribuição na sintonia do micro-aquecedor é sobre o índice de refração do meio. Uma mudança no índice de refração Δn_0 , causa uma mudança no comprimento de onda ressonante da cavidade $\Delta\lambda = \lambda_0 \Delta n_0 / n_0$ [59].

Há duas formas de mudar o índice de refração. A primeira é através do efeito termo-ótico. Esse efeito permite sintonizar amplamente o comprimento de onda, em alguns nanômetros [60], mas o tempo de resposta de operação não é muito rápido, da ordem de μs [61]. Uma outra forma de alterar o índice de refração é através do efeito eletro-ótico [62]. Neste caso, o campo intenso no interior do ressoador altera o estado dos portadores de carga livres, alterando a propriedade ótica do material. Ele possui um tempo de resposta mais rápido, da ordem de centenas

de ps, mas a sintonização é reduzida. No caso de micro-ressoadores feitos de nitreto de silício, o processo responsável é o efeito termo-ótico, no qual obtemos pela Figura 2.6 a dessintonia em frequência em função da potência no micro-aquecedor.

Figura 2.6: Calibração do micro-aquecedor para um comprimento de onda de ~ 800 nm.

A construção do gráfico mostrado na Figura 2.6 foi feita por meio da comparação dos valores medidos, em frequência, das larguras de banda dos anéis com os valores medidos, em potência, na varredura do micro-aquecedor. A relação descrevendo o efeito termo-ótico está representada por:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{SiN@0.8\mu m} \approx 0.35 \frac{\text{GHz}}{\text{mW}}. \quad (2.24)$$

A resistência do micro-aquecedor de platina é de aproximadamente $300 \, \Omega$. O tempo de resposta é da ordem de sub milissegundos, correspondendo a uma frequência de modulação superior a 1 kHz. Aplicando uma amplitude de modulação de 10 Vpp é possível sintonizar o anel em um pouco mais do que um FSR, o que corresponde a aproximadamente 200 GHz.

A figura 2.7 mostra uma representação em 3D da estrutura do ressonador integrado juntamente com o micro-aquecedor. A estrutura dos guias de onda, representado em vermelho, mostra o ressonador juntamente com os guias de onda reto, de acoplamento. Em amarelo está representado o micro-aquecedor em platina, o trecho linear leva até as bases para o contato com as pontas de prova.

Figura 2.7: Representação em 3D do ressonador integrado de nitreto de silício com o micro-aquecedor sobre ele.

2.2 Suscetibilidade não-linear

Os efeitos não-lineares existentes em um meio material podem ser descritos a partir da resposta da polarização não-linear. A suscetibilidade não-linear é definida como uma grandeza complexa que relaciona as amplitudes complexas do campo e da polarização.

Definimos o campo elétrico total em um meio material como a soma de todos campos propagantes e interagentes, em diferentes frequências [63]

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{E}(\omega_n) e^{-i\omega_n t} = \sum_n \mathbf{A}(\omega_n) e^{i(\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r} - \omega_n t)}, \quad (2.25)$$

onde assumimos uma dependência espacial do tipo $\mathbf{E}(\omega_n) \sim \mathbf{A}(\omega_n)e^{i\mathbf{k}_n \cdot \mathbf{r}}$, e a soma inclui frequências positivas e negativas. A condição a ser satisfeita $\mathbf{E}(-\omega_n) = \mathbf{E}(\omega_n)^*$, assim como $\mathbf{A}(-\omega_n) = \mathbf{A}(\omega_n)^*$, garantem um campo $\tilde{\mathbf{E}}$ real.

Usando uma notação similar à equação 2.25, podemos expressar a polarização não-linear como

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{r}, t) = \sum_n \mathbf{P}(\omega_n)e^{-i\omega_n t}, \quad (2.26)$$

onde, assim como antes, a soma deve ser feita em frequências positivas e negativas.

O termo de suscetibilidade de segunda ordem é um tensor que relaciona a amplitude do campo com a polarização não-linear

$$P_i(\omega_n + \omega_m) = \sum_{jk} \sum_{nm} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m). \quad (2.27)$$

Os índices i, j, k referem-se às componentes cartesianas do campo, enquanto que n, m indica que, a somatória se estende a todos n, m que satisfazem $\omega_n + \omega_m$. A não-linearidade de terceira ordem pode ser definida da mesma forma

$$P_i(\omega_0 + \omega_n + \omega_m) = D \sum_{jkl} \chi_{ijkl}^{(3)}(\omega_0 + \omega_n + \omega_m, \omega_0, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_0) E_k(\omega_n) E_l(\omega_m), \quad (2.28)$$

onde D é o número de permutações distintas das frequências ω_0, ω_n e ω_m .

Levando em consideração a não-linearidade do material através dos termos de polarização não-linear, podemos escrever a propagação do campo eletromagnético como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.29)$$

onde incluímos os termos lineares e não-lineares em $\mathbf{P}$.

2.2.1 Dinâmica eletrônica não-linear

Assim como estudamos a resposta linear do meio dielétrico na presença de um campo elétrico oscilante a partir da física do oscilador harmônico, levando ao modelo lorentziano 1.2.1, podemos introduzir o efeito da não-linearidade como termos anarmônicos na dinâmica eletrônica. O modelo descreve o pequeno deslocamento do elétron com relação ao seu mínimo de potencial atômico por um termo de suscetibilidade linear $\chi^{(1)}(\omega)$, proporcional ao campo elétrico aplicado. A interação do elétron com um campo elétrico intenso é estendida através de termos anarmônicos na expansão da série de Taylor da força de restauração eletrônica,

$$\tilde{F} = -m\omega_0^2\tilde{x} - ma\tilde{x}^2 + mb\tilde{x}^3 + \dots, \quad (2.30)$$

onde $\tilde{x}$ é o deslocamento eletrônico na direção do campo elétrico, e ω_0 e m são a frequência de oscilação do elétron e sua massa, respectivamente. As constantes a e b são relacionadas com as forças de interação não-linear de segunda- e terceira-ordem, respectivamente. Os termos a serem considerados dependem da simetria interna ao nível atômico ou molecular. Para materiais que não apresentam centro de simetria, o primeiro termo não-linear significativo da equação (2.30) dá origem à suscetibilidade de segunda-ordem $\chi^{(2)}$. Para materiais que são centro-simétricos, o termo envolvendo $\tilde{x}^3$ dá origem à suscetibilidade de terceira-ordem $\chi^{(3)}$, onde a simetria do potencial atômico $U(-\mathbf{x}) = U(\mathbf{x})$ anula o termo relacionado a $\tilde{x}^2$.

A não-linearidade $\chi^{(3)}$ é responsável por fenômenos como: geração de terceiro-harmônico, mistura de quatro-ondas e auto-modulação [46]. Para observar a geração de harmônicos, como segundo- ou terceiro-harmônico, o acordo de fase específico entre os diferentes campos é necessário, por exemplo, veremos que para o segundo-harmônico, o acordo de fase requer ($n_\omega = n_{2\omega}$). O processo de mistura de quatro-ondas envolve a interação de quatro campos, com pelo menos três frequên-

cias distintas, caso conhecido como degenerado, onde duas das frequências são atribuídas ao feixe laser. O processo de mistura de quatro-ondas será tratado mais adiante.

A auto-modulação de fase descreve o processo de alteração da evolução natural da fase do campo. Isso pode ser feito intencionalmente para comunicação usando um modulador, ou a onda pode ser modulada involuntariamente devido à interação não-linear. A origem da modulação de fase está relacionada à dependência do índice de refração com a intensidade, e seu efeito é distorcer a forma do pacote temporal de um envelope de campo elétrico. A largura de banda espectral do pacote é aumentada, e o pulso tem sua frequência aumentada monotonicamente, efeito conhecido como *chirp*. O aumento na largura de banda tem um detrimento na propagação do pulso, porque leva a um aumento no efeito de dispersão. A modulação de fase pode ser reduzida para um pulso temporal propagante próximo ao ZGVD [64].

2.3 Geração de segundo-harmônico

O nitreto de silício em sua forma amorfa, apresenta centro de simetria, e portanto, é incompatível com qualquer efeito não-linear relacionado a $\chi^{(2)}$. No entanto, foi observada a geração de segundo-harmônico (SHG), do inglês - *second-harmonic-generation*, em micro-ressonadores fabricados em nitreto de silício [65]. Inicialmente, a explicação para a origem do processo estava relacionada à quebra de simetria, ao nível molecular, na interface dielétrica entre o nitreto e o dióxido de silício [66]. Utilizando um guia de onda com múltiplas camadas intercaladas de nitreto e dióxido de silício, Miller et al. caracterizou o efeito eletro-ótico no Si_3N_4 , aumentando

a magnitude da susceptibilidade $\chi^{(2)}$ em uma ordem de grandeza [67].

Além disso, a simetria do material também pode ser perturbada aplicando uma pressão mecânica (gradiente de pressão) sobre o meio. O efeito foi observado em um guia de onda de silício, devido à tensão causada pela deposição de nitreto de silício sobre o guia de onda [68]. A deposição do nitreto de silício sobre o silício causa uma compressão inhomogênea na distância entre dois átomos de silício, produzindo um campo elétrico efetivo regido pela lei de Coulomb. A quebra de simetria na estrutura cristalina induz um $\chi^{(2)}$ efetivo da ordem de 10 pm/V [69].

O processo paramétrico da geração de segundo-harmônico (SH) é descrito pela conversão de dois fótons do feixe de bombeio em um fóton com o dobro da frequência ($2\omega_1 = \omega_2$). A dinâmica do processo é descrita matematicamente pelas seguintes equações acopladas [63]

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dz} &= i\kappa_1 a_2 a_1^* e^{-i\Delta k z}, \\ \frac{da_2}{dz} &= i\kappa_2 a_1^2 e^{i\Delta k z},\end{aligned}\tag{2.31}$$

onde z é a direção de propagação do campo eletromagnético no anel, e as constantes de acoplamento são dadas por $\kappa_j = \omega_j^2 \chi^{(2)} / k_j c^2$. Os modos a_1 e a_2 descrevem as amplitudes dos campos de bombeio e do segundo harmônico, respectivamente. Para que o processo ocorra eficientemente, o acordo de fase precisa ser obedecido

$$\Delta k = 2k_1 - k_2 = 0.\tag{2.32}$$

Devido à dispersão normal e à pequena birrefringência do ressoador, o acordo de fase entre dois modos distanciados espectralmente por uma oitava somente pode ser alcançado com a utilização de modos de ordens superiores.

2.3.1 Acordo de fase

A condição de acordo de fase requer o anulamento da expressão (2.32), que escrito em termos dos índices de refração traduz-se em

$$n_1 = n_2. \quad (2.33)$$

A dispersão normal do nitreto de silício implica que o índice de refração efetivo para o comprimento de onda de 780 nm é maior do que o índice de refração efetivo para 1560 nm, para modos transversos de mesma ordem. No entanto, modos transversos de ordem superior apresentam uma redução no valor do índice de refração, justamente porque a propagação do modo se dá mais pelo substrato. Dessa forma, o processo de acordo de fase do SH é baseado na procura de modos transversos de ordem superior, que satisfaçam a relação (2.33) com o modo fundamental de bombeio em TE ou TM. A Figura 2.8 (b) mostra as simulações dos índices de refração para os dois modos fundamentais em 1560 nm, representados em vermelho, e para os oito primeiros modos em 780 nm, mostrados em azul. As simulações foram rodadas em MPB, e o roteiro escrito em Scheme, pode ser observado no Apêndice B.1.

A primeira curva em vermelho, seguindo de cima para baixo, reproduz a dispersão do modo fundamental TE em 1560 nm como função da largura do guia de onda. A segunda curva descreve o modo fundamental TM. É evidente que para um guia de onda quadrado, com largura de 730 nm, há um cruzamento entre os dois modos fundamentais de polarizações ortogonais, causada pela degenerescência da geometria. Os modos transversos de ordens superiores teriam os índices de refração reduzidos para uma dada largura do guia de onda, ou seja, as curvas representativas estariam abaixo das curvas dos modos fundamentais. Para estes modos, o acordo de fase somente seria possível com modos transversos de ordem

Figura 2.8: Simulação para a obtenção do acordo de fase do SHG. (a) Modos com maior eficiência na geração, (b) índice de refração para os modos fundamentais em 1560 nm (curvas vermelhas), e para os modos em 780 nm (curvas azuis).

ainda mais alta do que o modo TM_{20} .

Em geral, para uma dada geometria, comprimento de onda e modo transversal, o índice de refração da polarização TE é maior. Logo, as duas primeiras curvas em azul, seguindo de cima para baixo, representam os modos fundamentais TE e TM, respectivamente, para o comprimento de onda em 780 nm. Seguindo, a terceira e quarta curva representam os modos TE_{10} e TM_{10} , respectivamente. Seguindo o raciocínio, a quinta e sexta curva descrevem as dispersões dos modos TE_{20} e TM_{20} , respectivamente.

Como podemos observar na parte (b) da figura, há muitas interseções que levam à condição de acordo de fase (2.33). O parâmetro chave para a escolha dos modos é a integral de recobrimento σ entre o modo fundamental na frequência ω_1

e o modo de ordem superior em ω_2 , que é calculado pela integral [70]

$$\sigma = \frac{1}{4} \frac{\int d\mathbf{x} \epsilon_0 \sum_{ijk} \chi_{ijk}^{(2)} \left[E_{1i}^* (E_{2j} E_{1k}^* + E_{1j}^* E_{2k}) \right]}{\left(\int d\mathbf{x} \epsilon |\mathbf{E}_1|^2 \right) \left(\int d\mathbf{x} \epsilon |\mathbf{E}_2|^2 \right)^{1/2}}, \quad (2.34)$$

onde as variáveis E_{ij} são as amplitudes complexas transversas do modo de frequência i , com $i = 1, 2$ para o bombeio e SH, respectivamente. Os subíndices j e k representam as coordenadas cartesianas. Dentro da teoria de equações acopladas para modos, σ é relacionado à taxa de conversão de energia do processo paramétrico descendente. Da mesma maneira, há um coeficiente σ' representando a taxa de conversão do processo ascendente [70]. Estes dois coeficientes estão relacionados por $\omega_1 \sigma = \omega_2 \sigma'^*$.

A magnitude da integral de recobrimento (2.34) representa a eficiência de conversão no processo de geração de segundo-harmônico. A círculo em linha escura na Figura 2.8 (b) exibe o modo transversal de ordem superior que possui a maior taxa de conversão segundo a integral de recobrimento, que satisfaz o acordo de fase. A magnitude da integral é estimada em 1%. Portanto, acoplando o modo fundamental em 1560 nm dentro do micro-ressoador em anel, devemos observar a geração do modo TM_{20} com o dobro da frequência.

Na integral de recobrimento, o modo de baixa frequência é elevado ao quadrado, mas como ele é fundamental, isto não muda o seu perfil. Com isso, a integral não é otimizada. Se o modo de baixa frequência fosse o TM_{20} , e o de alta frequência o fundamental, o recobrimento seria maior. Mas não conseguimos satisfazer a relação de acordo de fase nesta situação.

2.3.2 Projeto do chip

O projeto do chip para geração de segundo-harmônico deve levar em consideração os diferentes fatores [71]:

- Primeiro, a cavidade deve ser compacta e suportar ambos os modos interagentes em suas respectivas frequências. Isto é, a largura do guia de onda do anel deve ser grande o suficiente para suportar o modo de ordem superior específico. Além disso, a geometria do ressonador deve garantir o acordo de fase ($n_1 = n_2$).
- Segundo, o fator de qualidade Q é um parâmetro importante no controle de algumas propriedades: a largura de banda de conversão de modos é proporcional à $1/\max(Q_1, Q_2)$, onde Q_1 e Q_2 são os fatores de qualidade do anel para o modo de bombeio e do segundo-harmônico, respectivamente; a taxa de conversão é proporcional à $1/(Q_1^2 Q_2)$; a sensibilidade à perturbações na estrutura é determinada por $\min(Q_1, Q_2)$. Portanto, é importante ter um controle sobre Q_1 e Q_2 no desenho da cavidade independentemente, e o caso ideal seria obter $Q_1 = Q_2$, para aumentar a eficiência para uma dada largura de banda. O fator de qualidade de ambos os modos pode ser mais facilmente controlado adicionando uma segunda porta de saída ao anel, a porta de vazamento [70].
- Terceiro, o adequado projeto das portas de entrada e saída nos guias de onda garantem o controle da força de acoplamento sobre ambos os modos. Dessa forma, podemos projetar um sistema com acoplamento crítico para o feixe de bombeio, máxima potência dentro da cavidade para ω_1 , e um acoplamento mais forte para o modo gerado ω_2 , minimizando o efeito das perdas sobre o campo gerado, importante para a medida de ruído quântico.

A Figura 2.9 mostra a representação esquemática do projeto e a foto do dispositivo fabricado. A altura do guia de onda é de 730 nm. Para maximizar o acordo de fase de entrada, entre o guia de onda e o anel, fizemos com que a largura do guia de onda e do anel fossem a mesma. Dessa forma, o modo fundamental em 1560 nm injetado pelo laser no guia de onda é acoplado ao interior do ressonador.

Figura 2.9: Projeto do chip para a geração de SH. (a) Representação esquemática, (b) foto do chip fabricado. Os pads observado são as bases de contato das pontas de prova para o controle dos aquecedores integrados.

A força de acoplamento κ_j depende da geometria do guia de onda, e do gap. O raio do anel de 114 μm é grande o suficiente para reduzir as perdas de propagação devido à curvatura. Para a banda de telecom, o acoplamento crítico é estabelecido com um gap da ordem de 600 nm. Podemos modificar a largura de banda de acoplamento alterando a geometria do guia de onda [1]. A largura do guia de onda do ressonador para gerar o SH no modo TM_{20} é de aproximadamente $w_1 \approx 1,2 \mu\text{m}$, com o feixe de bombeio no modo fundamental, e polarização TE.

Nosso principal propósito na geração de segundo-harmônico é o estudo das propriedades do ruído do campo gerado. Mais especificamente, estamos interes-

sados em medir uma redução no ruído da quadratura de amplitude do campo inferior ao limite quântico padrão. Sendo assim, queremos minimizar a influência do ruído de vácuo sobre o ruído do campo gerado, e para isso, devemos estabelecer um acoplamento forte de saída para o segundo-harmônico. Portanto, a distância da porta de vazamento ao anel deve ser inferior a 600 nm. O problema em diminuir o segundo gap é que podemos forçar a saída do campo de bombeio do interior do anel, reduzindo o fator de qualidade para o feixe de bombeio. Uma boa estratégia é forçar o desacordo de fase entre o modo de bombeio no anel para o modo de mesmo comprimento de onda na porta de vazamento, reduzindo o acoplamento entre os dois guias. Isso pode ser feito estreitando a largura do guia de vazamento w_2 .

Em princípio, é sempre possível utilizar o mesmo guia de onda de entrada para extrair o campo de segundo-harmônico. Nessa situação, teríamos um dispositivo com apenas um acoplamento, sem o guia de onda extra do outro lado do anel. Porém, para comprimentos de onda menores, a taxa de decaimento da onda evanescente é mais rápida do que para comprimentos de onda maiores, e teríamos um fator de qualidade carregado maior para o modo ω_2 , aumentando a influência do vácuo sobre o modo gerado. Portanto, é interessante haver uma segunda porta de extração, pois assim podemos controlar a força de acoplamento para o modo gerado.

O acoplamento de saída do modo ω_2 acontece preferencialmente com a porta de vazamento, que pode ser otimizada para o comprimento de onda do segundo-harmônico. Porém, isso introduz um problema, porque agora devemos evitar o vazamento do modo de bombeio. Por ser o modo fundamental, independentemente da geometria do guia de onda, sempre haverá um vazamento. No entanto, podemos estabelecer um desacordo de fase entre os dois guias de onda, reduzindo

Figura 2.10: Acordo de fase do acoplamento de saída pela porta de vazamento. (a) Conversão do modo TM_{20} para o fundamental TM_{00} . A largura da porta de vazamento deve ser de 300 nm. (b) Ressonâncias em 1560 nm para dois gaps da porta de vazamento, de 150 nm e 200 nm.

o acoplamento.

A largura do guia de onda da porta de vazamento foi de 300 nm. Para este tamanho, o modo de segundo-harmônico em TM_{20} é convertido no modo fundamental na mesma polarização, como pode ser visto na Figura 2.10 (a). O processo de conversão de modos é baseado na escolha da geometria dos guias de onda, de forma a casar os índices de refração, ou vetor de onda, dos dois modos [72, 73, 74, 75, 76]. Os pontos em rosa representam a dispersão do modo TM_{20} em 780 nm. Para a geometria do ressoador ($w = 1,2 \mu\text{m}$), o vetor de onda do modo é $k = 2,32 [2\pi\mu\text{m}^{-1}]$. No mesmo comprimento de onda e polarização, o modo fundamental irá reproduzir o mesmo valor no guia de onda com largura de 300 nm.

Por sua vez, a diferença no vetor de onda do modo de bombeio no ressoador para a porta de vazamento é de $|\Delta k|/k \approx 14\%$. Portanto, esperamos que haja um acoplamento bem fraco do modo fundamental no anel em 1560 nm para o segundo

guia de onda extra, permitindo uma proximidade do guia de vazamento inferior à 600 nm. A Figura 2.10 (b) mostra as ressonâncias do anel para dois diferentes gaps da porta de vazamento, de 150 e 200 nm, cujos fatores de qualidade são de 1×10^6 e $1,6 \times 10^6$, respectivamente.

2.3.3 Resultado experimental

O feixe do campo de bombeio é gerado por um laser de diodo no comprimento de onda de ~ 1560 nm. Logo em seguida, ele é amplificado por um amplificador em erbium de fibras óticas EDFA, gerando na saída um feixe de luz com intensidade variável, de 22 dBm até 32 dBm. O campo então passa através de um controlador de polarização também em fibras, possibilitando o ajuste da polarização em TE ou TM. O campo acoplado ao ressonador gera um feixe de luz no comprimento de onda de aproximadamente $\lambda_2 \approx \lambda_1/2$, ~ 780 nm. Na saída, os dois feixes são separados por um espelho dicróico, e o campo gerado é detectado por um analisador de espectro ótico (OSA). A Figura 2.11 (a) mostra o espectro medido na saída da porta de vazamento do chip, na banda do infravermelho próximo.

$\chi^{(2)}$ efetivo

O estudo da eficiência de geração de segundo-harmônico permite estimar a ordem de magnitude do coeficiente de susceptibilidade não-linear $\chi^{(2)}$. Para a geração de segundo-harmônico, sem depleção do campo de bombeio, a potência gerada de SH pode ser calculada a partir das equações de modos acopladas (2.31), ver por exemplo [63]. O principal objetivo do ressonador na geração é intensificar os efeitos não-lineares, usando potências modestas de bombeio. Portanto, devemos levar em

Figura 2.11: Observação da geração de segund-harmônico. (a) Espectro adquirido utilizando o analisador de espectro ótico, e (b) foto do ressoador durante a geração. É possível visualizar a luz vermelha gerada em 780 nm, como visto pela câmera. Neste chip, em particular, não havia Pt sobre o guia do anel. A sintonização foi feita por um outro laser, sintonizável.

consideração o formalismo de entrada e saída de cavidades. O fator de qualidade, o overlap dos modos, e a eficiência do acordo de fase dos campos (2.33), são os parâmetros considerados no cálculo da potência de SH [65], que é dada por

$$P_{SH} = \frac{C_2 C_1^2 (\omega_1 \chi^{(2)} L P_1)^2}{8 n_1^2 n_2 c^3 \epsilon_0 A_1^2} A_2 \text{sinc}^2(\Delta k L / 2) \sigma(A_1, A_2), \quad (2.35)$$

com

$$C_j = \frac{P_{circ}}{P_{in}} = \left| \frac{-\kappa_j^*}{1 - t_j^* e^{i\theta_j} \sqrt{1 - \alpha_j}} \right|^2, \quad (2.36)$$

onde A_j é a área modal e P_1 a potência do feixe de bombeio. A integral de recobrimento é explicitada pela função σ . O aprimoramento do campo pela cavidade C_j , leva em consideração a potência do campo circulante no anel [77]. Nota-se que no acoplamento crítico, e baixas perdas de propagação, o fator de aprimoramento da potência do campo dentro do ressoador pode ser aproximado por $C_j \approx 1/\alpha_j$.

A Figura 2.12 mostra a eficiência de geração do SH em função da potencia do feixe de bombeio. Podemos observar pela figura, que a partir de 24 dBm ocorre a

Figura 2.12: Eficiência de geração do SH em função da potência do feixe de bombeio. As perdas de acoplamento de entrada e saída nos guias de onda foram consideradas.

saturação na potência de segundo-harmônico. O fit linear até a potência de saturação, na escala logarítmica, leva a um coeficiente angular de $1,97 \pm 0,17$, representando uma dependência quadrática da potência de SH com o feixe de bombeio, em bom acordo com a teoria. O coeficiente linear do fit está associado ao valor de $\chi^{(2)}$.

Para uma estimativa da ordem de grandeza da susceptibilidade não-linear de segunda ordem, iremos assumir como válidas as seguintes suposições. Primeiramente, que o acordo de fase é perfeito, anulando a dependência da potência do SH com a função $\text{sinc}(\phi) \equiv \sin(\phi)/\phi$, e levando à igualdade $n_1 = n_2$. Além disso, que o ressonador está na condição de acoplamento crítico para ambos os modos. Nessa situação, o aprimoramento da cavidade é dado pelo inverso das perdas totais em uma volta completa, as quais consideraremos as mesmas para ambos os modos. As áreas efetivas para o feixe de bombeio e SH foram calculadas usando o MPB, cujos valores são $0,82 \mu\text{m}^2$ e $0,62 \mu\text{m}^2$, respectivamente. Com esses cálculos e suposições, o valor estimado é $\chi^{(2)} \approx 1 \text{ fm/V}$.

O maior valor estimado de $\chi^{(2)}$ por Levy et al. [65], foi da ordem de 40 fm/V. Naquele experimento, o chip era composto apenas uma porta de saída, levando a um acoplamento bastante sub-crítico para o feixe de SH. Naquele contexto, o fator de aprimoramento da cavidade para o feixe gerado foi considerado igual à unidade, o que justificaria um maior valor de susceptibilidade no cálculo da eficiência de geração. No nosso experimento, devido à segunda porta de saída do dispositivo, podemos assumir com mais propriedade que os fatores de qualidade dos feixes de bombeio e SH são da mesma ordem de grandeza, levando a uma redução na magnitude de $\chi^{(2)}$.

Acreditamos que a saturação na geração da potência de SH, observado na Figura 2.12, pode ser explicada por uma dependência do acordo de fase com a temperatura [78, 79]. O aumento da potência de bombeio dentro do ressonador causa um aumento da temperatura do chip, mudando o ponto de perfeito casamento de fase para a geração.

A potência de saturação permite a estimativa da eficiência máxima de geração de segundo-harmônico, a qual é da ordem de 0,24%. A baixa eficiência de geração é explicada pelo pequeno valor de não-linearidade de segunda ordem. Como foi mencionado anteriormente, uma possível causa da origem desse termo não-linear é a quebra de simetria da estrutura devido à tensão do material no processo de fabricação [68]. No entanto, o procedimento para aumentar o fator de qualidade dos anéis é baseado em um cozimento adicional da estrutura para reduzir a tensão sofrida na deposição dos materiais [55], o qual reduz justamente o efeito que leva à origem de $\chi^{(2)}$.

2.4 Conversão paramétrica descendente

O processo inverso à geração de segundo-harmônico é o processo de conversão paramétrica descendente - do inglês - *parametric-down-conversion* (PDC). Nesse processo, um fóton do bombeio é aniquilado, e surgem dois fótons não necessariamente degenerados. Assim como no processo de SHG, as frequências dos fótons envolvidos devem obedecer a conservação de energia e momento. Mas diferentemente daquele processo, o papel da cavidade é imprescindível para a geração. O funcionamento do dispositivo é similar ao de um laser em que, para amplificação e geração de feixes intensos, há um limiar de oscilação.

2.4.1 Oscilador paramétrico ótico (OPO)

O principal objetivo do micro-ressoador no processo de PDC é fazer a realimentação dos fótons, de bombeio e/ou gêmeos gerados espontaneamente. A partir de uma dada potência do feixe de bombeio dentro do ressoador, o ganho ótico torna-se igual às perdas espúrias, e o OPO começa a oscilar. Para que o processo ocorra eficientemente, há vários tipos de acordo de fase, os quais dependem dos estados de polarização de todos os campos envolvidos. Por ligação direta com o processo de SHG observado, vamos considerar exatamente o processo inverso, isto é, um acordo de fase do **Tipo I**, no qual os feixe gêmeos possuem mesma polarização, mas o feixe de bombeio está em uma polarização ortogonal [80].

Um material bastante propício para a observação do PDC, usando o processo $\chi^{(2)}$, é o niobato de lítio (LiNbO_3). Ele é um cristal que não apresenta simetria de inversão, e possui forte não-linearidade quadrática. Por causa disso, ele é bastante utilizado como fonte de feixes de luz não-clássica com baixo limiar de os-

cilação [81]. Recentemente, micro-ressoadores de modos de galeria de sussurro (WGM) - do inglês - *whispering-gallery-modes*, foram fabricados no contexto de ótica quântica e não-linear. A caracterização clássica de ressoadores para SHG obteve fatores de qualidade da ordem de 1×10^7 , e eficiência de conversão de 9% [79]. Com o mesmo objetivo de observar o processo inverso ao SHG, OPO's com acordo de fase semelhante ao desenvolvido na seção anterior, baseados em WGM foram produzidos com limiar tão baixo quanto $6,7 \mu\text{W}$ [82].

Devido a baixa não-linearidade de segunda-ordem do nitreto de silício, iremos estimar, na melhor das hipóteses, o limiar de oscilação de um ressoador projetado para PDC, com acordo de fase semelhante ao desenvolvido para SH, e em [82]. Para tanto, vamos assumir que o guia de onda feito de SiN apresenta somente não-linearidade quadrática, isto é, vamos desprezar qualquer efeito não-linear relacionado a $\chi^{(3)}$, e conseqüentemente, qualquer observação de feixe gerado é devido ao processo de PDC.

A conversão paramétrica descendente pode ser descrita da seguinte forma: um fóton do feixe de bombeio na frequência ω_0 ($\lambda_0 = 780 \text{ nm}$), ao interagir com o meio não-linear, dá origem a dois outros fótons, que iremos denominar simplesmente de gêmeos, nas frequências ω_1 e ω_2 , com ($\lambda_1 \approx \lambda_2 = 1560 \text{ nm}$). Para satisfazer o acordo de fase, dentro do ressoador, o modo transversal do feixe de bombeio em 780 nm deve ser o TM_{20} . Para tanto, precisamos garantir a conversão do modo fundamental no guia de onda para o modo de ordem superior no anel. Isso pode ser facilmente alcançado bombeando justamente a porta de vazamento dos chips para SHG ², ver Figura 2.9. Assim sendo, ambos os modos transversos dos feixes gêmeos serão TE_{00} , onde esperamos uma pequena não degenerescência na frequência

²Note que a porta de vazamento para o chip de SH foi projetada para ter um acoplamento super-crítico para o campo em 780 nm . Portanto, novas fabricações são necessárias para obter, dessa vez, um acoplamento crítico com o campo de bombeio, e super-crítico com os feixes gêmeos.

dos campos.

Adaptando a guias de onda a teoria desenvolvida por C. Fabre em [83], obtemos as equações da dinâmica dos campos intracavidade

$$a_0 \kappa'_0 (1 - i\Delta_0) = -2\chi a_1 a_2 + \kappa_0 a_0^{in}, \quad (2.37)$$

$$a_1 \kappa'_1 (1 - i\Delta_1) = 2\chi^* a_0 a_2^*, \quad (2.38)$$

$$a_2 \kappa'_2 (1 - i\Delta_2) = 2\chi^* a_0 a_1^*, \quad (2.39)$$

onde $|a_i|^2$ representa o fluxo de fótons do campo i [84], com $i = 0$ para o modo de bombeio, e $i = 1$ ou 2 para os respectivos feixes gêmeos. As perdas totais em uma volta completa estão representadas por κ'_i , que estão relacionadas às perdas espúrias por

$$\kappa'_i = \kappa_i + \mu_i, \quad (2.40)$$

onde κ_i são as forças de acoplamento e μ_i as perdas espúrias. Os termos de dessintonia são normalizados pelas perdas totais, isto é, $\Delta_i \equiv \phi_i / \kappa'_i$, onde ϕ_i é a defasagem sofrida pelo campo em uma volta completa no anel, dada por

$$\phi_i = \beta_i L \equiv 2p_i \pi + \delta\phi_i, \quad (2.41)$$

onde p_i é um número inteiro associado ao modo i , e assumimos $|\delta\phi| \ll 2\pi$. O coeficiente não-linear efetivo determina a eficiência de geração do processo, e é dado por

$$\chi = -iL \sqrt{\frac{\hbar c \mu_0 \omega_0 \omega_1 \omega_2}{8n_0 n_1 n_2}} \sigma(\psi_0, \psi_1, \psi_2) \text{sinc}\left(\frac{\Delta\beta L}{2}\right) e^{i\Delta\beta L/2}, \quad (2.42)$$

onde $\hbar$ é a constante de Planck reduzida, n_i são os índices de refração linear dos respectivos campos, e $\sigma(\psi_0, \psi_1, \psi_2)$ é a integral de overlap,

$$\sigma(\psi_0, \psi_1, \psi_2) = \frac{\int \chi^{(2)}(\omega_1 + \omega_2, \omega_1, \omega_2) \psi_0^* \psi_1 \psi_2 dA}{\left(\int |\psi_0|^2 dA \int |\psi_1|^2 dA \int |\psi_2|^2 dA\right)^{1/2}}, \quad (2.43)$$

onde ψ_i descreve os perfis transversos dos campos elétricos. Note que esta integral de recobrimento difere da previamente utilizada no cálculo da interação modal do processo de geração de segundo-harmônico (2.34). Contudo, todos os cálculos envolvendo a integral de recobrimento realizados neste trabalho foram feitos baseados na expressão (2.34)³. O termo de desacordo de fase é definido como

$$\Delta\beta = \beta_0 - \beta_1 - \beta_2. \quad (2.44)$$

2.4.2 Limiar de oscilação

Multiplicando a equação (2.38) pelo complexo conjugado da equação (2.39), obtemos

$$\kappa'_1 \kappa'_2 (1 - i\Delta_1)(1 + i\Delta_2) = 4|\chi|^2 |a_0|^2. \quad (2.45)$$

O lado direito da expressão acima é real e positivo, implicando que a parte imaginária ao lado esquerdo da equação deve ser zero, isto é,

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta. \quad (2.46)$$

Portanto, para haver oscilação, a razão entre as dessintonias e as perdas totais de ambos os modos gerados devem ser iguais. Essa condição garante a solução estável do OPO [85]. Porém, devido a um possível desbalanceio no acoplamento dos modos, a extração dos feixes pode ser feita de forma desequilibrada, segundo a expressão

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\kappa_1 \kappa'_2}{\kappa_2 \kappa'_1}, \quad (2.47)$$

onde I_i é o fluxo de fótons do modo i , os quais deixam o anel pela porta de saída.

Note que para feixes quase gêmeos ($\omega_1 \approx \omega_2$), o fluxo de fótons é o mesmo.

³No processo de conversão paramétrica descendente, a interação dos campos envolvidos é exatamente a mesma do processo de geração de segundo-harmônico. Portanto, é justificável o uso da expressão (2.34) para o cálculo da integral de recobrimento.

A parte real da equação (2.45) fornece

$$|a_0|^2 = \frac{\kappa'_1 \kappa'_2 (1 + \Delta^2)}{4|\chi|^2}. \quad (2.48)$$

A relação (2.48) mostra que a potência do feixe de bombeio no interior do ressonador é constante, uma vez atingida a oscilação. O limiar de oscilação, com respeito ao fluxo de fótons no guia de onda reto, pode ser obtido levando em consideração a expressão (2.37)

$$|a_0^{in}|^2 = \frac{\kappa_0'^2 \kappa'_1 \kappa'_2}{4|\chi|^2 \kappa_0^2} (1 + \Delta^2)(1 + \Delta_0^2). \quad (2.49)$$

Considerando dessintonias nulas para os três campos, e um acoplamento crítico para o modo de bombeio ($\kappa_0 = \mu_0$), o limiar de oscilação pode ser escrito como $\kappa'_1 \kappa'_2 / |\chi|^2$, onde os termos κ'_i , com $i = 1, 2$, podem ser estimados a partir do fator de qualidade. Em princípio, podemos reduzir o limiar de oscilação diminuindo a força de acoplamento, ou simplesmente afastando o guia de onda do anel. No entanto, por questões de simplificação, vamos considerar também um acoplamento crítico para os feixes gêmeos, e que o fator de qualidade seja o mesmo para ambos os modos. Nesse caso, a potência do limiar de oscilação é dada por

$$P_{th} = \frac{\omega_1 \omega_2}{Q^2 FSR^2 |\chi|^2} \hbar \omega_0, \quad (2.50)$$

onde Q e FSR referem-se aos fatores de qualidade e aos intervalos espectrais livres dos feixes gêmeos.

Na melhor das hipóteses, a potência do limiar de oscilação obtida para o PDC foi estimada em 1 W no guia de onda reto, um pouco antes do acoplamento com o anel. Para a estimativa, assumimos que os fatores de qualidade dos feixes gêmeos são da ordem de 1×10^7 , os FSR's são de 200 GHz, os feixes são quase gêmeos e com comprimento de onda de 1560 nm, para um comprimento de onda do feixe de bombeio de 780 nm. Além disso, assumimos também um perfeito casamento de fase entre os modos, eliminando a dependência da função *sinc*, e do

termo de fase no parâmetro χ . O parâmetro não-linear, por sua vez, depende de alguns parâmetros do modo ótico e da geometria, assim como da não-linearidade de segunda-ordem, estimada a partir do experimento de SH. A integral de overlap foi calculada usando o MPB, e foi da ordem de 1%.

Mesmo para uma potência de limiar que é próxima da potência máxima fornecida pelo nosso laser, decidimos prosseguir com o trabalho, e tentar observar alguma geração de conversão descendente. Com esse propósito, projetamos novos dispositivos, semelhantes aos chips para SHG, mas que estivessem com um acoplamento aproximadamente crítico para o feixe de bombeio, e levemente super-crítico para os feixes gêmeos, de forma a não aumentar muito o limiar de oscilação.

Não observamos geração relacionada ao processo de conversão paramétrica descendente. Mesmo utilizando o chip em uma configuração de amplificador paramétrico ótico (OPA) - do inglês - *optical-parametric-amplifier*, onde uma semente em 1560 nm foi injetada pela porta de vazamento, não observamos amplificação do modo em telecom. A conclusão que tiramos do trabalho nesta etapa, é que o limiar de oscilação para o PDC está no limite da nossa capacidade de bombeio ou além. Portanto, foi inviável a continuação da pesquisa nesta linha.

Acreditamos que o alto limiar de oscilação para o processo é atribuído a dois fatores. O primeiro, está relacionado à baixa não-linearidade de segunda-ordem do nitreto de silício. O segundo fator, é referente à integral de recobrimento entre os modos. O fato do processo não-linear envolver a interação entre modos de diferentes ordens, reduz significativamente a eficiência de conversão.

Além dos dois fatores supracitados, durante o período no qual estávamos buscando algum sinal de geração próximo à banda de telecom, em alguns dos anéis havíamos notado o crescimento de um sinal bastante fraco na parte do setup pró-

pria para a detecção de 1560 nm. O esquema do setup pode ser observado na Figura 2.13 (a). O setup foi montado de tal forma que na saída do chip era possível separar, com boa taxa de extinção, a luz do infravermelho-próximo da luz em telecom. Devido à proximidade da porta de vazamento com o anel, havia uma maior probabilidade do feixe em 1560 nm sair por aquele caminho, juntamente com a parte vazada do campo em 780 nm. Para separar esses dois feixes, usamos inicialmente um espelho dicróico, com corte em aproximadamente 900 nm. Após a transmissão do dicróico, havia predominantemente luz em 1560 nm, onde o resquício de luz em 780 nm era eliminada utilizando alguns espelhos com coating para 1560 nm. O detector também era específico para o infravermelho.

Portanto, o pequeno crescimento do sinal observado, poderia ser uma geração bastante fraca de luz em 1560 nm. Entretanto, quando utilizamos o analisador de espectro ótico para verificar o espectro de luz que estava saindo do chip, observamos o primeiro pente de frequências do laboratório, ver a parte (b) da Figura 2.13.

A geometria projetada para geração do processo de PDC acabou tornando-se uma geometria que leva à geração de pentes de frequências com um bombeio próximo de 780 nm. O sinal observado, na parte do setup para telecom, era a detecção dos modos gerados em comprimentos de onda longos, ao redor de 840 nm.

O pente de frequências, é um fenômeno no qual há um número apreciável de fótons em cada modo do ressoador, limitado pela largura de banda do ganho não-linear. Pela parte (b) da Figura 2.13, é possível observar feixes intensos de luz de aproximadamente 730 nm até 860 nm, resultando em uma largura espectral de 130 nm. Cada modo do ressoador é distanciado em aproximadamente 0.4 nm, totalizando cerca de 300 novos modos ocupados, a partir de um único modo de bombeio.

Figura 2.13: (a) Setup para procura do processo de PDC. QWP e HWP referem-se a lâminas de $1/4$ e $1/2$ onda, respectivamente. (b) Observação de um dos primeiros pentes de frequências do laboratório.

Vimos na seção 1.4, que para feixes de bombeio com ($\lambda < 1 \mu\text{m}$), a dispersão do material é dominante sobre a dispersão geométrica, impossibilitando a existência de dispersão anômala em comprimentos de onda mais curtos. No entanto, o projeto para PDC exigia a existência de um feixe de bombeio de modo transversal superior no anel. Portanto, descobrimos que modos transversais de ordem superior podem levar a uma região de dispersão anômala em comprimentos de onda ao redor de 780 nm.

2.5 Mistura de quatro-ondas

O processo paramétrico não-linear que envolve a interação de quatro campos é conhecido como **mistura de quatro-ondas** (FWM) - do inglês - *four-wave mixing*. No caso dos ressoadores feitos de nitreto de silício, que exibe simetria de inversão, a interação fundamental no processo paramétrico tem origem na não-linearidade de terceira-ordem da polarização (2.28). O processo de conversão de frequências ocorre em virtude da resposta não-linear do meio, e depende da intensidade do campo de bombeio. O efeito resultante pode ser modelado como uma dependência do índice de refração com a intensidade, $n_0 + In_2$, onde n_0 é o índice de refração linear, I é a intensidade do laser, e n_2 é o coeficiente **Kerr**.

Quando o micro-ressoador é bombeado por um laser contínuo (cw) - do inglês - *continuous-wave*, o processo de conversão paramétrica irá aniquilar dois fótons do bombeio, na frequência ω_p , e criar um par de fótons em bandas laterais, nas frequências ω_s e ω_i , denominados de sinal e complementar, respectivamente. A conservação de energia

$$2\hbar\omega_p = \hbar\omega_s + \hbar\omega_i, \quad (2.51)$$

implica que as componentes de frequências geradas são igualmente espaçadas com relação à frequência do fóton de bombeio

$$\Omega = \omega_s - \omega_p = \omega_p - \omega_i, \quad (2.52)$$

onde Ω é a frequência de dessintonia. Se as frequências do sinal e complementar coincidem com as frequências ressonantes do anel, o processo paramétrico é aprimorado, resultando em uma eficiente geração em bandas laterais.

A conservação de momento

$$2\beta_p = \beta_s + \beta_i, \quad (2.53)$$

precisa ser satisfeita no processo de conversão paramétrica, e define uma relação de fase fixa entre o sinal e complementar relativo à fase do bombeio. Diante disso, os feixes gerados estarão submetidos a uma amplificação coerente, e a oscilação paramétrica irá ocorrer, caso o ganho não-linear exceda a taxa de decaimento da cavidade, levando a um crescimento simétrico das bandas laterais com o aumento da intensidade de bombeio. Diferentemente processo de PDC baseado em $\chi^{(2)}$, a não-linearidade cúbica do nitreto de silício é alta o suficiente para que, em conjunto com o alto confinamento do modo guiado, possa levar à observação de oscilação paramétrica com potências de bombeio modestamente baixas [55, 6, 49].

A oscilação paramétrica pode levar à geração de um espectro que contem múltiplas bandas laterais. A largura de banda de geração depende de dois processos não-lineares similares. O primeiro, é o processo de FWM degenerado, no qual bandas laterais são geradas unicamente pelo laser de bombeio. Nesse caso, os distanciamentos das bandas laterais podem ser distintos, e portanto, não podem formar um pente de frequências devido à não conservação de energia.

O segundo, é o processo de FWM não-degenerado. Nesse caso, os feixes gerados de sinal e complementar servem como sementes para processos em cascata de mistura de quatro-ondas, gerando novas bandas laterais, que também sofrerão amplificação coerente se os modos envolvidos satisfizerem leis de conservação semelhantes às (2.51) e (2.53) [86]. Dependendo da potência das bandas laterais dentro do ressonador, o processo de FWM em cascata pode ser dominante. Esse processo leva à geração de múltiplas bandas laterais igualmente espaçadas, cujo espaçamento é determinado pelo FSR do micro-ressonador. Esse fenômeno é conhecido como geração de **pente de frequências** [5].

2.5.1 Dinâmica da oscilação paramétrica

A oscilação paramétrica pode ser intuitivamente compreendida através do processo de FWM. Partindo das equações de onda (1.2), com as leis de conservação de energia e momento, podemos construir um conjunto de equação diferenciais acopladas, que descrevem a evolução dos quatro campos envolvidos na interação [87]. Porém, essa construção é completamente arbitrária e não traz nenhuma dependência com a dispersão do modo em particular.

Sobretudo, é sabido que há uma grande variedade de fenômenos instáveis, os quais levam ao surgimento de comportamentos organizados no tempo e na frequência. Por exemplo, sabe-se que certos sistema óticos dispersivos, quando sujeitos a parâmetros estacionários e controláveis, podem exibir um caráter oscilatório na frequência [88], e geração de sólitons [89]. Esses efeitos são conhecidos como **instabilidade de modulação** (MI) - do inglês - *modulation-instability*.

A teoria da instabilidade de modulação é normalmente utilizada para descrever a propagação de ondas em um meio não-linear dispersivo, através da dinâmica de fluidos e ótica não-linear. Ela refere-se ao processo no qual pequenas perturbações causadas na solução estacionária crescem exponencialmente como resultado da ação recíproca entre a não-linearidade e a dispersão da velocidade de grupo [90, 91]. No contexto de ressoadores, a instabilidade de modulação é manifestada através da quebra da radiação eletromagnética contínua em um trem de pulsos [92].

Interpreto a instabilidade de modulação em termos da mecânica quântica da seguinte forma: um laser ressonante com o anel feito de um material não-linear, irá espontaneamente gerar fótons através de toda a largura de banda do ganho

paramétrico, obedecendo as leis de conservação da mistura de quatro-ondas. Os poucos fótons gerados podem ser interpretados como pequenas modulações em bandas laterais, que em ressonância com a cavidade, são retroalimentados eficientemente, causando um crescimento exponencial em todos os modos espectrais do ressoador.

Para que a MI ocorresse, pensava-se ser essencial a dessintonia do anel, ou dispersão anômala [93, 94]. Iremos mostrar, a partir deste ponto em diante, que mesmo para dessintonia nula, e dispersão normal, a dispersão do termo de quarta-ordem do coeficiente da constante de propagação pode levar à instabilidade de modulação, ou mistura de quatro-ondas, como já foi observado em cavidades de fibras óticas [25].

Equação de Lugiato-Lefever modificada

O modelo teórico da instabilidade de modulação pode ser desenvolvido através da equação de Schrödinger não-linear (NLSE) [43]. Ele descreve a evolução temporal do envelope de campo elétrico em um guia de onda, em conjunto com condições de contorno apropriadas que relacionam a dinâmica de entrada e saída de cavidades [95]

$$E(t, \tau + t_R) = E(t, \tau), \quad (2.54)$$

onde t é a variável que descreve o tempo em longa escala, após muitas voltas completas no ressoador, τ é a variável temporal rápida, contida em apenas uma volta, e t_R é o tempo de uma volta completa.

Se a potência intracavidade das bandas laterais geradas são relativamente baixas com relação à potência de bombeio, aplicando a condição de contorno de cavi-

dade (2.54), a dinâmica pode ser adequadamente modelada utilizando a equação modificada de Lugiato-Lefever (LLE) [96]. O modelo descreve a propagação do campo intracavidade $E(t, \tau)$ no micro-ressoador, dado o campo de entrada antes do acoplamento E_{in} [93, 97, 42]

$$t_R \frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} = \left[-\alpha - i\delta_0 + iL \sum_{n \geq 2} \frac{\beta_n}{n!} \left(i \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^n + i\gamma L \left(1 + \frac{i}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) |E(t, \tau)|^2 \right] E(t, \tau) + \sqrt{\theta} E_{in}, \quad (2.55)$$

onde α é a perda total em uma volta completa, δ_0 é a dessintonia de fase entre a ressonância da cavidade e a frequência de bombeio, L é o comprimento do ressoador, γ é o parâmetro não-linear, ω_0 é a frequência de bombeio, θ é o coeficiente de transmissão entre o ressoador e o guia de onda reto, e β_n corresponde ao n -ésimo coeficiente de dispersão da expansão em serie de Taylor da constante de propagação (1.66).

A versão modificada da LLE inclui termos de dispersão de ordem superior à segunda, e auto-incremento - do inglês - *self-steepening*. Matematicamente, o auto-incremento é explicado pela derivada parcial de primeira ordem ao lado direito da equação (2.55), e tem origem na dependência da velocidade de grupo com a intensidade de luz. Ele produz uma distorção no pulso temporal e uma assimetria no pulso espectral [98].

A equação de LLE é uma aproximação da NLSE, válida quando a intensidade das bandas laterais é bem inferior à intensidade de bombeio. Ela é usada para simular temporalmente a dinâmica de geração do pente de frequências em micro-ressoadores. Ela reduz significativamente o tempo e a capacidade computacional necessários. A versão modificada foi utilizada para simular estados de modo travado - do inglês - *mode-locking*, solitons, geração de onda dispersiva e o efeito dos termos de ordem superior de dispersão [97]. A simulação pode ser realizada uti-

lizando o método de passos-divididos - do inglês - *split-step method*. A ideia geral do método é simples, e consiste em separar a evolução não-linear da evolução linear dispersiva na equação de LLE. O método é válido caso o tamanho do passo na evolução temporal seja inferior ao tempo de uma volta completa no ressonador [44]. Uma breve discussão matemática sobre a aplicação do método na NLSE pode ser verificada no Anexo C. Iremos usar a LLE modificada para encontrar os termos de acordo de fase e ganho não-linear da oscilação paramétrica, levando em consideração a dispersão total da geometria.

Para estudar o efeito do modelo sobre as bandas laterais, escrevemos o campo elétrico como [99, 88, 91]

$$E(t, \tau) = A_0(t) + A_+(t)e^{i\Omega\tau} + A_-(t)e^{-i\Omega\tau}, \quad (2.56)$$

onde A_0 é o campo de bombeio, e A_+ e A_- representam as bandas laterais simetricamente dessintonizadas. Substituindo o campo elétrico na equação (2.55), obtemos

$$t_R \frac{\partial A_0}{\partial t} = -(\alpha + i\delta_0)A_0 + i\gamma L|A_0|^2 A_0 + 2i\gamma L A_0^* A_+ A_- + \sqrt{\theta} E_{in}, \quad (2.57)$$

$$t_R \frac{\partial A_+}{\partial t} = -\left[\alpha + i\Delta\kappa + iL \sum_{n=3,5,\dots} \frac{\beta_n}{n!} \Omega^n + 2iL \frac{\Omega}{\omega_0} \gamma |A_0|^2 \right] A_+ + i\gamma L \left(1 - \frac{\Omega}{\omega_0} \right) A_0^2 A_-^*, \quad (2.58)$$

$$t_R \frac{\partial A_-}{\partial t} = -\left[\alpha + i\Delta\kappa - iL \sum_{n=3,5,\dots} \frac{\beta_n}{n!} \Omega^n - 2iL \frac{\Omega}{\omega_0} \gamma |A_0|^2 \right] A_- + i\gamma L \left(1 + \frac{\Omega}{\omega_0} \right) A_0^2 A_+^*, \quad (2.59)$$

onde Ω é a dessintonia das bandas laterais (2.52), e o desacordo de fase não-linear encontrado é dado por

$$\Delta\kappa = \delta_0 - L \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\beta_n}{n!} \Omega^n - 2\gamma L |A_0|^2. \quad (2.60)$$

A solução estacionária para o campo de bombeio é bem conhecida por ter biestabilidade [96, 100], e é dada por

$$\left[\alpha^2 + \left(\delta_0 - \gamma L |A_0|^2 \right)^2 \right] |A_0|^2 = \theta |E_{in}|^2. \quad (2.61)$$

A biestabilidade é caracterizada por um ramo com coeficiente angular negativo na curva expressando as relações de potência entre $|A_0|^2$ e $|E_{in}|^2$. A solução estacionária possui único valor para $\delta_0 \leq \sqrt{3}\alpha$, enquanto que para $\delta_0 > \sqrt{3}\alpha$, ela assume o formato de S e leva a um ciclo histerético. A derivada $d|A_0|^2/d|E_{in}|^2$ é negativa no ramo biestável [101]

$$\frac{2\delta_0 - \sqrt{\delta_0^2 - 3\alpha^2}}{3\gamma L} < P_0 < \frac{2\delta_0 + \sqrt{\delta_0^2 - 3\alpha^2}}{3\gamma L}, \quad (2.62)$$

e a solução é instável com relação a perturbações na frequência do bombeio. A biestabilidade implica em um comportamento exótico, para uma redução na potência de entrada $|E_{in}|^2$, a potência intracavidade aumenta comparativamente ao seu valor antes do ramo biestável [91].

As soluções para A_+ e A_- são

$$A_+(t) = A_+(0) \exp \left[\Lambda(\Omega) \frac{t}{t_R} - i \left(L \sum_{n=3,5,\dots} \frac{\beta_n}{n!} \Omega^n + 2\gamma L \frac{\Omega}{\omega_0} |A_0|^2 \right) \frac{t}{t_R} \right], \quad (2.63)$$

$$A_-(t) = A_-(0) \exp \left[\Lambda(\Omega) \frac{t}{t_R} + i \left(L \sum_{n=3,5,\dots} \frac{\beta_n}{n!} \Omega^n + 2\gamma L \frac{\Omega}{\omega_0} |A_0|^2 \right) \frac{t}{t_R} \right], \quad (2.64)$$

onde

$$\Lambda(\Omega) = -\alpha + \sqrt{\left[\gamma L \left(1 - \Omega^2 / \omega_0^2 \right) |A_0|^2 \right]^2 - (\Delta\kappa)^2}, \quad (2.65)$$

é o coeficiente de ganho. O coeficiente de ganho Λ e o desacordo de fase não-linear $\Delta\kappa$ (2.60) dependem somente dos termos pares da dispersão, enquanto que os termos ímpares da dispersão adicionam uma contribuição na fase das bandas laterais, as quais são opostas em sinais com relação a cada termo.

As soluções em bandas laterais (2.63) e (2.64) são amplificadas exponencialmente quando o ganho paramétrico é superior às perdas, $\Lambda > 0$. O sistema evolui até uma condição onde a potência gerada é forte o suficiente para servir como semente no processo de mistura de quatro-ondas não degenerado. A partir de então,

ocorre a estabilização em potência da primeira banda lateral como consequência da geração de novos modos. O aumento da potência de bombeio leva ao processo não-linear em cascata, podendo alcançar a condição de geração de um pente de frequências, onde todos os modos da cavidade, dentro da largura espectral do ganho paramétrico, são preenchidos por feixes intensos.

Na geração de um pente, a largura de banda do processo é altamente dependente da posição espectral das primeiras bandas laterais geradas. Conforme a dessintonia aumenta, contribuições dos termos de dispersão de ordem superior à segunda-ordem são mais importantes e devem ser levados em conta na análise. Enquanto termos de dispersão de ordem ímpares não contribuem diretamente com o ganho das bandas laterais, eles são relevantes para o formato do pente de frequências, e travamento de modos, *mode-locking*. A inclusão do auto-incremento não afeta diretamente o desacordo de fase, mas modifica a o termo não-linear do ganho, e contribui com um termo adicional na fase [42]. A curva de ganho de uma geometria que apresenta dispersão anômala pode ser observada na Figura 2.14.

Observando a expressão do desacordo de fase não-linear (2.60), vemos que para dessintonia nula $\delta_0 = 0$, a expressão consiste na soma de um termo não-linear sempre negativo, com um termo também negativo caso a dispersão de segunda-ordem seja normal ($\beta_2 > 0$). Portanto, na ausência de cavidades, o acordo de fase somente pode ser satisfeito caso a dispersão seja anômala. A Figura 2.14 mostra a curva de ganho para dois valores de dispersão e potência. O aumento da potência faz com que o ganho seja maior e mais largo espectralmente [102]. Os valores de potências utilizados foram de 12 e 24 W, dentro do micro-ressoador.

Considerando apenas o GVD na dispersão, dispersões normais não satisfazem o acordo de fase, e portanto, o ganho paramétrico é sempre inferior às perdas espú-

Figura 2.14: Curva de ganho para o processo de FWM. Os parâmetros utilizados para o plot, que não estão expostos na legenda, são: $\delta_0 = 0$, $R = 100 \mu\text{m}$, $\alpha = 0,002$, $\gamma = 1 \text{ W}^{-1}\text{m}^{-1}$ e $\omega_0/2\pi = 190 \text{ THz}$. A potência do campo é dada dentro do anel.

rias, para potências modestas de bombeio. No entanto, para dispersões anômalas, o acordo de fase é facilitado, e o ganho não-linear torna-se mais largo para magnitudes pequenas de dispersão. Podemos notar pela figura que não apenas a largura do ganho é menor para $\beta_2 = -80 \text{ ps}^2/\text{km}$, mas o distanciamento do ganho primário também é maior para $\beta_2 = -40 \text{ ps}^2/\text{km}$. Portanto, GVD negativo e commagnitude eq uena levam à oscilação paramétrica, na qual os primeiros modos gerados aparecem mais distanciados do bombeio, $\sim 10^1 \text{ THz}$. A aproximação da frequência do feixe de bombeio com o zero de dispersão do ressoador (ZGVD) é crítico para a geração de um pente de frequências espectralmente largo.

Para a fácil geração do pente de frequências no micro-ressoador é essencial dispersão anômala. Contudo, quando a dispersão do anel é normal, um valor negativo no termo de quarta-ordem de dispersão, pode satisfazer o acordo de fase, provocando oscilação paramétrica. Neste caso, a dinâmica da oscilação é diferente, no sentido em que os primeiros modos gerados aparecem bastante distanciados do

feixe de bombeio, da ordem de centenas de terahertz. A separação entre o sinal e o complementar representa mais do que uma oitava, ou seja, a frequência do modo sinal é mais do que o dobro da frequência do modo complementar.

2.5.2 Largura espectral do ganho paramétrico

A dispersão representa a variação do intervalo espectral livre da cavidade com o comprimento de onda. Ela limita o processo de conversão, restringindo a largura de banda do pente de frequências. O processo de FWM em cascata torna-se menos eficiente quando a variação dos modos ressonantes do anel é grande em frequência, pois a conservação de energia no processo não comensura exatamente com a ressonância, ver Figura (2.15). Como resultado, o ganho paramétrico é uma função da dessintonia $\Delta\omega = 2\omega_p - \omega_s - \omega_i$, que efetivamente quantifica o grau em que os modos da cavidade violam a conservação de energia. Foi mostrado que para haver ganho, é necessário que a dessintonia seja inferior à largura de banda paramétrica $\Gamma = 4c\gamma P/n$, onde $\gamma = \omega n_2/(cA_{eff})$, e P é a potência circulante no interior da cavidade [103]. A largura de banda paramétrica pode ser entendida através da auto- e modulação de fase cruzada, que efetivamente traz os modos da cavidade em ressonância [6].

O processo de FWM degenerado, aniquila dois fótons do bombeio, e gera dois fótons em bandas laterais distanciadas por um múltiplo inteiro do FSR. A conservação de energia é satisfeita com o auxílio da pequena dispersão do anel, que faz com que o FSR da cavidade varie pouco para modos vizinhos ao redor do bombeio. Conforme a potência intracavidade aumenta, novos modos são gerados, e a mistura de quatro-ondas não-degenerada começa a acontecer [104]. O FWM em cascata faz com que todos os modos do ressonador sejam preenchidos por uma

Figura 2.15: Representação esquemática de um pente de frequências. A figura mostra o processo de FWM degenerado e não-degenerado. A dispersão do ressonador faz com que o FSR da cavidade mude com a frequência, delimitando a largura espectral do pente.

quantidade apreciável de fótons.

Entretanto, o FWM em cascata exige a conservação de energia e momento localmente. Isto quer dizer que a interação que ocorre distanciada do feixe de bombeio será influenciada pela dispersão naquele ponto. Ou seja, a separação em frequência entre os modos gerados longe do bombeio é diferente da separação dos modos próximo ao bombeio. Portanto, o processo de FWM tende a acompanhar a dispersão do ressonador, até certo ponto. Conforme a mudança no FSR torna-se muito grande, a ressonância da cavidade deixa de casar com a banda lateral gerada, e o aprimoramento do ressonador é reduzido até o ponto onde as perdas espúrias superam o ganho paramétrico, e a geração de modos intensos cessa. Quanto menor for o GVD, maior é a variação do FSR, e mais estreito, espectralmente, será o pente de frequências. Contrariamente, para um feixe de bombeio próximo ao ZGVD, a variação do FSR é menor, e consequentemente, mais largo será o pente.

2.6 Conclusões e perspectivas

Em resumo, introduzimos neste capítulo as dinâmicas linear e não-linear dos micro-ressoadores. Sobre a dinâmica linear, definimos os principais conceitos comumente utilizados no tratamento de cavidades vazias, e discutimos sobre a origem das perdas nos ressoadores. Também discorremos brevemente sobre o trabalho que tem sido desenvolvido pelo grupo de Nanofotônica da Universidade de Columbia no sentido de reduzir as perdas.

A dinâmica não-linear dos anéis é bastante rica, possibilitando a observação de diversos fenômenos paramétricos, de segunda- e terceira-ordem. O termo de suscetibilidade efetivo $\chi^{(2)}$ permite a observação da geração de segundo-harmônico causada em decorrência da deposição dos materiais no processo de fabricação [68, 69], ou através da quebra de simetria na interface dielétrica [66]. Contudo, devido à fraca não-linearidade e o pequeno recobrimento entre os modos interagentes, o limiar de oscilação do processo de conversão paramétrica descendente foi estimado na ordem de watts, que é a mesma ordem de grandeza da potência máxima fornecida pelo nosso laser, impossibilitando a observação da oscilação.

Também introduzimos a dinâmica do processo de mistura de quatro-ondas. Obtivemos as expressões do acordo de fase não-linear e do ganho do processo paramétrico, a partir das quais pudemos estimar a posição espectral de geração das primeiras bandas laterais. No próximo capítulo, utilizaremos o modelo não-linear discutido para a previsão da geração de modos laterais em frequências específicas, espectralmente separadas do feixe de bombeio, através do termo de dispersão de quarta-ordem.

CAPÍTULO 3

OSCILAÇÃO PARAMÉTRICA EM BANDAS LATERAIS COM GRANDE SEPARAÇÃO ESPECTRAL

A ocorrência e a dinâmica do processo de mistura de quatro-ondas estão intrinsecamente relacionadas à dispersão em frequência da família de modos interagentes. O processo é normalmente iniciado com potências de bombeio modestas, quando a dispersão da velocidade de grupo é anômala ($\beta_2 < 0$), e um largo pente de frequências é gerado quando o comprimento de onda do laser é centrado próximo do ponto de zero de dispersão do GVD (ZGVD), possibilitando o acordo de fase dentro de um largo intervalo de comprimentos de onda [48, 7, 49]. No entanto, dispersão anômala não é uma condição crucial para o começo da oscilação paramétrica em um ressoador. A potência do feixe de bombeio em conjunto com a dessintonia do laser permitem satisfazer o acordo de fase não-linear com ganho positivo mesmo para regimes de dispersão normal [93, 94]. Uma outra forma de observar oscilação em micro-ressoadores com dispersão normal é usar a dispersão efetiva induzida por acoplamento de modo [105]. O acoplamento entre diferentes modos pode alterar a separação das frequências ressonantes e levar a uma região de dispersão anômala localmente [106].

Neste trabalho, iremos mostrar que o balanço entre os primeiros termos de ordem par da dispersão em frequência (i.e., β_2 e β_4), podem originar a oscilação paramétrica em regime normal de GVD, levando a uma dinâmica diferente, onde as primeiras bandas laterais geradas aparecem amplamente separadas do feixe de bombeio. A contribuição do termo de β_4 sobre o princípio do processo paramétrico já foi investigada em cavidade de fibra ótica [25], e recentemente em micro-esfera de sílica [26]. Aqui, nós usamos modos transversos de ordens superiores para ob-

ter dispersão anômala em micro-anéis de nitreto de silício em 795 nm, levando ao acordo de fase no visível e infravermelho. Em geral, observamos que estas bandas laterais ultra-distanciadas são geradas quando o sinal de β_2 é positivo, mas próximo do ZGVD, e o termo de quarta-ordem da dispersão FOD é negativo ($\beta_4 < 0$) e suficientemente forte para ter uma contribuição significativa.

3.1 Modos transversos superiores

O cálculo do GVD efetivo é baseado na dispersão do material e na geometria do guia de onda para um específico modo ótico, que por sua vez envolve a frequência, a polarização e seu perfil espacial transversal. Vimos na Seção 1.2 que a dispersão material do GVD é usualmente caracterizada como sendo normal para frequências distantes da absorção. Portanto, a geometria do guia de onda do ressonador deve ser projetada para adicionar uma contribuição relevante, a fim de compensar o valor positivo de β_2 .

No caso do micro-ressonador de nitreto de silício (Si_3N_4), o comprimento de onda para o ZGVD pode ser deslocado para o limite mínimo de 1 μm [15, 18]. Para comprimentos de onda menores, em particular na banda do visível, a contribuição da dispersão do material é dominante, e é especialmente desafiador alcançar GVD anômalo no modo fundamental. No entanto, a influência do material depende de como o modo ótico está distribuído transversalmente no guia de onda, e como modos de ordem superiores têm diferentes perfis espaciais, podemos procurar geometrias com dispersão anômala em comprimentos de onda menores.

3.1.1 Dispersões de segunda- e quarta-ordem

A Figura 3.1 exibe os valores calculados de β_2 e β_4 para duas geometrias em termos do comprimento de onda no vácuo. A geometria é descrita pela seção transversa do guia de onda do ressoador (altura $\times$ largura) e seu raio de curvatura R . Este último foi predefinido em 132 μm , por ser grande o suficiente para minimizar as perdas por curvatura, e pequeno o bastante para garantir a micro-escala do ressoador. Para as dimensões transversas, variamos a largura do guia de onda enquanto mantínhamos a altura fixada em 730 nm. A geometria foi escolhida baseado em simulações utilizando o pacote de auto-soluções pré-condicionado de bloco interativo em uma base de ondas planas (MPB) [39], incluindo os primeiros três modos TM. Os pontos de ZGVD para os modos TM_{10} e TM_{20} podem ser trazidos para próximo de 795 nm com larguras do guia de onda do ressoador ao entorno de 2 e 1,2 μm , respectivamente.

Podemos observar pela Figura 3.1, que para ambos os modos transversos de ordem-superior, TM_{10} e TM_{20} , encontramos uma região espectral com dispersão anômala para comprimentos de onda inferiores a 1 μm [15, 18]. Para a geometria de 2 μm , o ponto de ZGVD encontra-se um pouco à direita de 795 nm, ou seja, para um laser sintonizado neste comprimento de onda, a geometria é dita possuir dispersão normal, mas próxima do zero de dispersão. Além disso, o sinal da quarta-ordem de dispersão é significativamente negativo, o que permitiria satisfazer a condição de acordo de fase não-linear (2.60).

Para a geometria de 1,2 μm , a dispersão é anômala para um feixe de bombeio próximo de 795 nm. Por outro lado, o valor de β_4 é positivo, e de grande magnitude. Como veremos, a dispersão de quarta-ordem pode levar a um casamento de fase bastante separado do comprimento de onda do bombeio. Contudo, por causa

Figura 3.1: Simulação dos coeficientes de dispersão de segunda- (curva preta) e quarta-ordem (curva azul) da expansão em série de Taylor da constante de propagação para os modos TM₁₀ e TM₂₀ em micro-ressonadores com seção transversal de 730 × 2000 e 730 × 1200, respectivamente.

da dispersão anômala, o micro-anel deve satisfazer dois acordos de fase, um próximo do bombeio, e outro mais afastado devido ao β_4 . Portanto, esse dispositivo deve produzir um pente de frequências. É importante notar que a largura espectral da região com dispersão anômala é bem menor para a geometria de 1,2 μ m. Essa observação não permite entender profundamente a dinâmica do pente, a qual está mais relacionada com o valor de β_2 na frequência do bombeio [42].

O roteiro de simulação apropriado para o cálculo de β_2 e β_4 pode ser verificado no Apêndice B.2.

3.1.2 Perfil espacial dos modos transversos

A Figura 3.2 mostra a simulação FDTD dos primeiros três modos TM ressonantes no anel com raio de curvatura de $20\text{ }\mu\text{m}$, seção transversa de $730 \times 1200\text{ nm}$ e comprimento de onda de 800 nm . Por causa da simetria azimutal do anel, a figura é a representação de um corte radial transverso para algum ângulo azimutal ϕ , em coordenadas cilíndricas. Podemos observar pela figura que o efeito do raio de curvatura é quebrar a simetria do modo transverso com relação ao corte azimutal no plano cilíndrico $r = R$, onde R é o raio de curvatura do micro-anel.

Figura 3.2: Simulação utilizando FDTD dos primeiros três modos TM para a geometria de $730 \times 1200\text{ nm}$, e raio de curvatura de $20\text{ }\mu\text{m}$. O comprimento de onda do modo é de 800 nm . (a) TM_{00} , (b) TM_{10} e (c) TM_{20} .

Sobre o modo fundamental, o efeito do raio de curvatura é deslocar o campo elétrico para o lado externo do ressonador (o centro do anel aponta para o lado esquerdo na Figura 3.2). O deslocamento será maior quanto menor for o raio de curvatura, e há duas decorrências diretas nessa observação. A primeira, é que o índice de refração efetivo, e por consequência, a constante de propagação β e todos os termos de dispersão dependem do raio de curvatura. Isso é facilmente entendido percebendo que a distribuição espacial de um mesmo modo transverso é alterado em função do raio de curvatura, e portanto, todos os termos de dispersão

devem depender de R .

A segunda consequência resulta na dependência do fator de qualidade do micro-ressoador com o raio de curvatura. A curvatura do anel faz com que a intensidade do feixe de luz seja maior na parede lateral externa, quando comparado com um guia de onda reto. Um feixe de luz mais intenso propagando-se pela interface do guia de onda possui uma maior probabilidade de que os fótons sofram espalhamento devido à rugosidade, e por isso, o fator de qualidade é reduzido.

O efeito do raio de curvatura sobre modos de ordem-superior é contra intuitivo. Podemos observar pela Figura 3.2 (b), que qualitativamente a intensidade do modo TM_{10} no lado interno do guia de onda deve ser maior do que a intensidade no lado externo, o oposto do que acontece com o modo fundamental. A Figura 3.3 mostra mais quantitativamente essa inversão de simetria na intensidade dos modos de ordem-superior para uma geometria com corte de seção transversa de 730×2000 nm.

Apesar de ser evidente a quebra de simetria da intensidade do campo nas paredes laterais do guia de onda, o efeito é menos significativo para modos de ordem-superior. A Figura 3.2 (c) explicita bem essa ideia. Mesmo para um raio de curvatura bem curto, o perfil transversal do modo TM_{20} ainda é bastante homogêneo, significando uma menor influência do raio de curvatura, como também pode ser visto pela Figura 3.3 (b).

Uma pergunta interessante é saber como o raio de curvatura afeta o fator de qualidade dos anéis. A Figura 3.4 mostra o cálculo da energia nas paredes laterais do guia de onda do ressoador em função do raio de curvatura. O cálculo da energia leva em conta as duas paredes laterais, interna e externa, e é normalizado pela energia nas paredes laterais de um guia de onda reto para o particular modo

Figura 3.3: Corte transversal do perfil do campo elétrico $\mathbf{E}_z$ no eixo $y = 0$, $z = 0$. A simulação é referente a um ressonador com raio de curvatura de $60 \mu\text{m}$, corte de seção transversa $730 \times 2000 \text{ nm}$, onde a linha tracejada mostra as posições das paredes laterais. O valor do comprimento de onda é 800 nm para os modos (a) TM_{10} e (b) TM_{20} .

transverso. A figura mostra que a influência do raio de curvatura é bem maior sobre o modo fundamental do que sobre os modos de ordem-superior. Na verdade, parece que mesmo para micro-ressonadores bem menores, a energia nas paredes laterais não aumenta para os modos de ordem-superior, mas é mantida constante.

A Figura 3.4 sugere que para raios de curvatura pequenos, o fator de qualidade do modo fundamental pode ser inferior ao dos modos de ordem-superior. De fato, o raio de curvatura tem forte influência sobre o modo fundamental, mas para raios de curvatura grandes, o fator de qualidade do modo fundamental é bem superior aos fatores de qualidade dos modos transversos superiores. Para um guia de onda reto, a energia propagada pelas paredes laterais cresce conforme é aumentado o índice transverso dos modos, segundo a Tabela 3.1. Portanto, mesmo para raios de curvatura bem menores, esperamos que o fator de qualidade do modo fundamental ainda seja maior que o dos modos superiores.

Figura 3.4: Simulação da energia propagada através das paredes laterais do ressoador em função do raio de curvatura. A normalização é feita pela energia propagada em um guia de onda reto para o mesmo modo.

Modo	Energia
TM_{00}	1
TM_{10}	3.9
TM_{20}	8.4

Tabela 3.1: Energia propagada pelas paredes laterais de um guia de onda reto, normalizada pela energia do modo fundamental.

O roteiro para acompanhar o cálculo da energia nas paredes laterais do guia de onda pode ser observado no Apêndice [B.3](#).

3.1.3 Conversão de modos

Micro-ressoadores com dimensões de seção transversa de 730×2000 e 730×1200 nm são multimodo para um comprimento de onda ao redor de 800 nm, e suportam, pelo menos, os três primeiros modos espaciais. Para excitar preferencialmente um

particular modo de ordem-superior dentro do ressoador, o casamento de fase entre o guia de onda reto e o guia de onda do ressoador é necessário [72, 73, 74, 75, 76]. A Figura 3.5, mostra a simulação do módulo dos vetores de onda $\mathbf{k}$ para os três primeiros modos TM em função da largura de um guia de onda retilíneo.

Figura 3.5: Simulação do vetor de onda em um guia de onda para diferentes larguras em $\lambda = 800$ nm. A altura está fixada em 730 nm e o raio de curvatura é infinito ($R \rightarrow \infty$).

Iremos excitar o modo TM_{10} no ressoador de $2\ \mu\text{m}$ a partir do modo fundamental no guia de onda reto. Para tal fim, a largura do guia de onda deve ser de 900 nm para um casamento de fase quase perfeito, ver Figura 3.5. De forma similar, para excitar o modo TM_{20} no micro-ressoador de $1,2\ \mu\text{m}$, a largura do guia de onda deve ser de ~ 330 nm. Em ambos os casos, preferimos sempre bombear o guia de onda no modo fundamental, e na mesma polarização requerida pelo processo. É importante notar que a conversão de modos deve ocorrer em ambos acoplamentos, do guia de onda para o ressoador e vice-versa, como podemos observar pela Figura 3.6.

A Figura 3.6 demonstra visualmente a simulação FDTD de conversão de modos no acoplamento. Definimos uma fonte de luz pontual no guia de onda reto,

Figura 3.6: Simulação mostrando a conversão de modos no acoplamento para ressoadores com larguras de (a) 2 e (b) 1,2 μm , com uma fonte pontual TM, e $\lambda = 800\text{ nm}$, nos guias de onda retos. Para facilitação visual, escolhemos um raio de curvatura de 12 μm .

com polarização TM e comprimento de onda de 800 nm com uma largura de linha pequena o suficiente para excitar apenas um modo do anel. A figura mostra qualitativamente o perfil do campo elétrico E_z , após um intervalo de tempo necessário para a estabilização da dinâmica, o que se faz em aproximadamente 4000 unidades de período ótico para o λ e R utilizados. Podemos observar que no acoplamento, o casamento de fase entre ambas as geometrias pode excitar preferencialmente um modo transversal específico. Escolhemos um raio de curvatura de 12 μm para facilitar a visualização. Para uma largura de 2 μm , o pequeno raio de curvatura deforma drasticamente o perfil transversal do modo TM_{10} , mas ainda podemos identificá-lo visualmente. Nessa situação, largura do guia de onda deve ser inferior a 900 nm para compensar o efeito da curvatura e obter a adequada conversão.

Para o ressonador de 1,2 μm , por causa da largura reduzida, e o modo desejado

ser o TM_{20} , há uma melhor simetria de ocupação do guia de onda pelo modo, e o efeito do raio de curvatura é atenuado. Em vista disso, a largura do guia de onda reto condiz exatamente com o valor simulado quantitativamente na Figura 3.5, para um guia de onda retilíneo ($R \rightarrow \infty$), ~ 330 nm. Portanto, para excitar preferencialmente um modo transversal específico no micro-ressoador, o casamento de fase entre o guia de onda reto e o ressoador é necessário. Naturalmente, devido às imprecisões durante o processo de fabricação do chip, obter um casamento de fase perfeito é bastante difícil, e devemos esperar que outros modos surjam com acoplamento fraco. Isso pode ser facilmente observado no anel de $1,2 \mu\text{m}$. Como podemos ver na Figura 3.5, o casamento de fase exige que a largura do guia de onda seja de aproximadamente 300 nm. No entanto, para esta largura de guia, a variação na constante de propagação é bastante abrupta para pequenas alterações na largura do guia. Essa característica pode mudar drasticamente o acordo de fase, permitindo a excitação de outros modos transversos.

3.1.4 Cruzamento de modos

O modo ótico do ressoador é caracterizado pelo índice de refração efetivo n_0 , o qual indica a distribuição espacial transversa e o quanto ela se estende pelo substrato de óxido, e pelo número azimutal inteiro m , correspondendo ao número de comprimentos de onda λ ao longo da circunferência do anel. Para um número fixo m , a frequência ressonante do modo fundamental é a menor, seguida pelas frequências de modos superiores na ordem crescente do índice transversal (i.e., TM_{10} , TM_{20} , ...)¹. Portanto, se o modo fundamental é excitado no ressoador com um laser contínuo monomodo em frequência, todos os outros modos ressonantes superio-

¹Em minhas simulações isso sempre acontece até o TM_{20} , a partir desse modo, outros modos com índices transversos na segunda casa podem começar a surgir, isto é, TM_{11} , por exemplo.

res terão necessariamente um diferente índice azimutal, e conseqüentemente não deveríamos observar anti-cruzamentos [106, 107]. Contudo, porque cada modo do ressoador tem um FSR distinto, se no comprimento de onda do bombeio as ressonâncias estão claramente separadas, em alguma outra frequência, a distância entre dois ou mais modos podem ser menores do que a soma de suas larguras de banda, causando um deslocamento nas ressonâncias com diferentes m 's, mas essas degenerescências são acidentais [108].

3.2 Setup experimental

Nesta seção irei descrever a configuração básica do setup experimental utilizado no trabalho descrito neste capítulo. Iremos discutir as informações gerais sobre o laser, assim como o procedimento de geração e detecção com os instrumentos utilizados. A Figura 3.7 representa esquematicamente o setup experimental.

Laser

A fonte de luz utilizada é um laser de Titânio Safira. O cristal do laser é bombeado externamente por um laser de alta potência em 532 nm. Observamos fluorescência espontânea quando o feixe intenso propaga-se através do cristal. Com o alinhamento dos espelhos que compõem a cavidade laser, podemos observar a transição entre a emissão espontânea para a estimulada. No processo de transição, obtemos na saída da cavidade um feixe laser em aproximadamente 800 nm. Os elementos óticos que constituem o laser, além do cristal, são:

- **Diodo ótico:** O diodo é responsável por permitir a propagação de luz estimu-

Figura 3.7: Setup experimental básico utilizado no experimento de FWM. O feixe de luz na saída do laser é inicialmente dividido por um *wedge prism*, onde 8% é enviado em partes iguais para a cavidade de referência e para o detector que atua no travamento do Ti:Safira. 20% do laser é inicialmente perdido no primeiro isolador óptico, portanto, apenas 72% da luz laser está disponível para o bombeio do chip. O controle da potência de bombeio é feito por um conjunto (HWP + PBS), e a polarização é ajustada por um conjunto QHQ, onde HWP e QWP referem-se a lâminas de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ de onda, respectivamente. O acoplamento do feixe em espaço livre com o chip é feito por lentes asféricas, onde o taper invertido facilita o acordo de modo. A luz de saída do chip é analisada espectralmente por um analisador de espectro óptico (OSA) da Yokogawa, modelo AQ6370D, e a ressonância do anel é monitorada por um osciloscópio da Tektronix com largura de banda de 200 MHz.

lada em apenas um sentido na cavidade. A eliminação do sentido contrário de propagação faz com que a saída de luz laser seja em apenas uma direção, com respectivo aumento na potência de luz na direção desejada.

- **Filtro birrefringente:** o filtro é o elemento óptico encarregado da sintonia grossa do laser, ou seja, ele altera a frequência de luz na saída da cavidade em

passos de ~ 200 GHz. O processo de sintonia do laser através do filtro altera levemente a potência de saída e a estabilidade do laser. Portanto, após cada procedimento de sintonização, pode ser necessário um leve realinhamento e reajuste no travamento do laser.

- **Etalon:** o etalon tem dois papéis importantes na dinâmica do laser. Ele é o elemento ótico de sintonização fina do laser, atuando entre as janelas espectrais limitadas pelo filtro. Além disso, ele também atua sobre o travamento do laser. Uma vez ajustada a frequência do laser, o sistema de **lock-in** eletrônico atua retroalimentando a posição angular do etalon, de forma a manter o laser estabilizado em frequência.

Além dos elementos óticos, o laser também conta com um PZT. O PZT atua na sintonização mais fina do laser. Com o laser travado, aplicando um sinal de varredura de baixa frequência (< 2 Hz) no pzt, podemos varrer a frequência do laser em aproximadamente 8 GHz. Essa varredura mais fina é importante no processo de caracterização dos chips. A amplitude de sintonia do laser nessa etapa, é suficiente para medir os fatores de qualidade dos modos transversos, e inclusive verificar qualquer anti-cruzamento entre dois ou mais modos.

A amplitude máxima de sintonização do laser é limitada fisicamente pelo filtro birrefringente, e pelo coating dos espelhos da cavidade. A máxima eficiência de geração ocorre para um comprimento de onda de 795 nm, e é cerca de 22%. No limite superior da região espectral do laser, que é em aproximadamente 803 nm, a eficiência ainda é alta, indicando que os espelhos ainda são adequados para este comprimento de onda. Nesse caso, o limitante para o funcionamento do laser é o próprio ajuste físico do filtro. No limite inferior do laser, que acontece em aproximadamente 766 nm, a eficiência é drasticamente reduzida, possivelmente

por causa do limitado intervalo espectral de alta reflexão do coating dos espelhos. Além da redução na potência de saída do laser, o sistema de travamento eletrônico não mais consegue atuar por um longo tempo, tornando difícil a utilização do laser abaixo desse comprimento de onda.

Com o devido alinhamento do laser podemos alcançar uma eficiência de conversão de $\sim 22\%$. Durante o tempo em que utilizei o laser, não observei uma alteração em seu funcionamento para potências altas de bombeio em 532 nm. Na maior parte do tempo, utilizei o laser com 4 W de bombeio, o que corresponde a aproximadamente 880 mW de potência de saída em 795 nm. Mesmo para a potência mais alta na qual já trabalhei, de 9 W, o que representa aproximadamente 2 W de potência no infravermelho-próximo, o laser ainda funcionou monomodo e travado.

Setup

O setup é composto por duas partes. A primeira, é designada para a estabilização do laser, bem como para a caracterização ótica do próprio laser e do chip. Separamos 8 % da potência do feixe de luz de saída, e enviamos metade dessa potência para a cavidade de referência, e a outra metade para o detector que atua no travamento.

No nosso experimento, a cavidade de referência serve para dois propósitos. O primeiro é garantir o bom funcionamento do laser. Com ela, podemos checar a estabilidade do laser, e também verificar se ele encontra-se monomodo. A primeira coisa que devemos fazer antes de avançar com o experimento é garantir o adequado preparo do laser. O segundo propósito da cavidade de referência é quantificar a varredura do laser. O comprimento da cavidade foi medido com bas-

tante rigor, portanto, conhecemos com boa precisão o FSR da cavidade. Com essa informação, mesmo para pequenas mudanças no comprimento de onda do laser através da alteração do comprimento da cavidade laser com o pzt, conseguimos quantificar a sintonização em frequência pelos deslocamentos nos picos de ressonância da cavidade de referência.

A segunda parte do setup tem o objetivo de bombear o chip. O controle da potência do laser antes do acoplamento com o chip é feito por um conjunto composto por uma lâmina de $1/2$ onda e um cubo divisor por polarização. A polarização do feixe de bombeio é controlado por um conjunto QHQ - do inglês - *quarter-half-quarter waveplate*, composto por uma lâmina de $1/4$, $1/2$ e $1/4$ de onda. Esse conjunto permite ajustar a polarização em TE ou TM com boa pureza.

O acoplamento do feixe de luz em espaço livre com o chip é feito com lentes esféricas. Utilizamos as objetivas de microscópio da Newport, com diferentes aberturas numéricas (NA), e para diferentes acordos de modo. Para conseguir o melhor acoplamento, diminuimos ao máximo o tamanho do diâmetro do feixe de luz no ponto de acoplamento com o guia de onda. Isso foi conseguido utilizando uma lente objetiva de 60×, com NA de 0,85, e colimando o feixe antes da lente com aproximadamente o maior tamanho permitido pela abertura da lente, que é de 4,5 mm. Nessas condições, o tamanho do diâmetro do feixe no ponto focal da lente era um pouco menor do que 2 μm . A estimativa do diâmetro do feixe foi feita medindo o diâmetro do mesmo antes da lente, por um perfilador ótico da Thorlabs, modelo BP209-VIS, e em seguida calculando o diâmetro do feixe após a transformação paraxial por uma lente esférica. A máxima eficiência no acoplamento de entrada e saída com o chip que conseguimos foi de -3 dB. Evidentemente, a geometria de taper invertido do guia de onda facilitou o processo de acoplamento [109]. As simulações mostraram que para obter um melhor acoplamento, a largura do taper

deveria ser inferior a 100 nm para um feixe de luz em 800 nm. No entanto, por questões de segurança ², optamos por desenhar os tapers com largura um pouco superior a 100 nm. É importante lembrar que a eficiência de acoplamento com o chip envolve a reflexão de Fresnell que acontece na lente de acordo de modo, assim como a reflexão que acontece na interface ar-nitreto, a qual calculamos como sendo de 11% na Seção 1.1.3.

Geralmente, a configuração do setup utilizado para a caracterização da luz de saída do chip é aquele representado esquematicamente na Figura 3.7. A maior parte do feixe é acoplada em uma fibra ótica, e enviada para o analisador de espectro ótico. Para garantir o bom acoplamento em um amplo espectro de frequências, utilizamos uma fibra multimodo com diâmetro do núcleo de 50 μm . Uma pequena parte do feixe de saída do chip é dividido por uma lâmina antes do acoplamento com a fibra, e enviado a um detector com 25 MHz de largura de banda. A separação com a lâmina envia menos de 10 % do feixe para o detector, que registra a ressonância do micro-ressoador, e compara com sinal obtido da cavidade de referência. Uma medida típica do fator de qualidade do anel pode ser observada na Figura 3.8. A ressonância do anel está representada pela curva amarela, enquanto que a curva em vermelho mostra os picos da cavidade de referência separados de 1 GHz. A cavidade de referência quantifica a dessintonização do laser e a largura de banda do ressoador em função do tempo. Pela figura, podemos observar que a largura de banda do micro-ressoador é razoavelmente inferior a 1 GHz. De fato, para valores típicos dos fatores de qualidade que medimos, o FWHM é cerca de 300 MHz. Para a medida do fator de qualidade utilizamos uma potência de bombeio baixa, inferior a 100 μW . Para potências mais altas, começamos a observar o efeito térmico devido ao aquecimento do anel ao entrar em ressonância, e a dinâmica histerética

²Taper invertido muito estreito pode danificar a estrutura do guia de onda. A pequena espessura do guia de onda pode tomar por causa de instabilidades estruturais durante a fabricação.

dependente da direção de sintonização do laser, do azul para o vermelho ou no sentido oposto [110].

Figura 3.8: Medida típica do fator de qualidade do micro-ressoador. A curva em amarelo no formato de vale é a ressonância do anel, enquanto que os picos em magenta são da cavidade de referência, separados de 1 GHz. A cavidade Fabry-Perot foi montada a partir de espelhos com baixa transmissão, alta finesse. A consequência disso é que os picos de transmissão são bastante estreitos, como pode ser observado. Por causa da resposta temporal do detector, da ordem de MHz, a resolução do pico é baixa e apresenta uma flutuação na intensidade transmitida. Para evitar efeitos térmicos, a potência de bombeio foi ajustada para um valor inferior a 100 μW antes do acoplamento com o chip.

A Figura 3.9 mostra algumas fotos do setup montado no laboratório. A parte (b) da figura faz a comparação do tamanho de escala entre o chip e uma moeda. A parte (c), é uma foto tirada do chip com o microscópio durante o experimento.

Figura 3.9: Fotos do experimento. (a) Foto tirada do setup mostrando: a cavidade de referência, coberta por uma caixa vermelha de acrílico; o microscópio para o visível e infravermelho-próximo; e a região do setup onde o chip é apoiado. (b) Foto localizada mostrando apenas o chip e as pontas de prova para o controle do micro-aquecedor. A figura também compara o tamanho do chip com o de uma moeda. (c) Imagem do chip capturada pelo microscópio, podemos ver além do guia de onda e o anel, a porta de vazamento e as bases para o encosto das pontas de prova.

3.3 Ressorador 730 x 2000 nm

Nesta seção discutiremos os resultados experimentais obtidos com o projeto dos micro-ressoadores de 2 μm .

3.3.1 Modos acoplados

Devido à limitada sintonia contínua do laser, para visualizar um amplo espectro de ressonâncias da cavidade, cobrindo todos os modos acoplados ao interior do micro-ressoador, precisamos varrer o micro-aquecedor integrado em aproximadamente 150 mW, o que corresponde a cerca de 50 GHz, conforme a relação (2.6), para um comprimento de onda de 795 nm. A Figura 3.10 mostra os três modos TM acoplados.

Figura 3.10: Os três modos acoplados ao interior do ressonador na polarização TM. Dados capturados por um osciloscópio quando o micro-aquecedor integrado é varrido.

Os modos exibidos na Figura 3.10 são os únicos acoplados ao ressonador de 2 μm . Como foi mencionado na Seção 3.1, as imperfeições no processo de fabrica-

ção do chip podem levar à excitação de outros modos transversos. Como podemos ver pela figura, identificamos os modos TM_{00} , TM_{10} e TM_{20} . Contudo, para um gap particular, a taxa de extinção do modo TM_{10} é maior, evidenciando um melhor acoplamento para esse modo do que para os outros. Essa observação sugere um acordo de fase preferencial para o modo TM_{10} .

Como veremos adiante, os modos são identificados pelo fator de qualidade e intervalo espectral livre. Além dessas duas propriedades, também iremos comparar a medida da dispersão de segunda-ordem do modo de interesse com a dispersão total simulada [12].

3.3.2 Fator de qualidade

Na medição dos fatores de qualidade utilizamos a sintonia fina do laser. Com o PZT do laser, conseguimos mudar linearmente a frequência em no máximo 8 GHz. A frequência de varredura é aferida pela cavidade Fabry-Perot. Portanto, primeiro, devemos ajustar a frequência do laser manualmente através do etalon, enquanto observamos o modo de interesse pela varredura do micro-aquecedor. Uma vez garantido a cobertura da varredura em frequência pelo PZT, travamos o laser e fazemos a medida. As ressonâncias dos três modos acoplados ao ressonador podem ser observadas na Figura 3.11.

A Figura 3.11 mostra a amplitude de transmissão pelo chip normalizada por seu valor fora de ressonância. O valor Γ explícito no gráfico é referente à largura total a meia altura FWHM. A partir desse valor podemos obter o fator de qualidade conhecendo a frequência do laser, de acordo com a expressão (2.22). Para um comprimento de onda de 795 nm, encontramos os valores de Q-carregado para

Figura 3.11: Medida do fator de qualidade carregado para os três modos acoplados no ressonador de $2\ \mu\text{m}$. (a) Modo TM_{10} , $Q = 1,5 \times 10^6$; (b) TM_{00} , $Q = 3 \times 10^6$; e (c) TM_{20} , $Q = 0,4 \times 10^6$.

os modos TM_{00} , TM_{10} e TM_{20} em aproximadamente 3×10^6 , $1,5 \times 10^6$ e $0,4 \times 10^6$, respectivamente.

Durante o processo de medida dos fatores de qualidade e das frequências de ressonância do anel, o qual será discutido mais adiante, percebemos uma variação nos valores medidos do Q em função da frequência, principalmente o do modo fundamental. Essas medidas podem ser conferidas na Figura 3.12, para todo intervalo espectral coberto pelo laser, desde $\sim 766\ \text{nm}$ até $\sim 803\ \text{nm}$. Como podemos observar, a variação do Q do modo fundamental é bastante grande. O menor valor medido foi cerca de $1,5 \times 10^6$, enquanto que o maior valor foi por volta de 4×10^6 . Apesar de também haver uma variação nos outros modos, elas não são tão significativas quanto a do modo fundamental. Atribuímos essa variação no fator de qualidade a uma flutuação no acoplamento de entrada e saída, o que é intensificado em nossos chips, devido à variação no acordo de fase de acoplamento.

Também é bastante evidente que os fatores de qualidade do modo TM_{10} começam a diminuir para comprimento de onda menores que $\sim 775\ \text{nm}$, ver Figura 3.12. Por outro lado, os Q 's do modo TM_{20} começam a aumentar para comprimentos de

Figura 3.12: Medida dos fatores de qualidade dos modos do micro-ressoador de 2 μm .

onda menores que ~ 780 nm, a ponto de desaparecerem rapidamente. Acreditamos que esse efeito pode ser explicado pela dependência do acordo de fase de acoplamento com a frequência do laser. Simulamos o acordo de fase para um comprimento de onda ao redor de 795 nm, portanto, esperamos a adequada conversão de modos neste comprimento de onda. Ao nos afastarmos deste ponto, esperamos um desacordo maior no casamento de fase de acoplamento, a ponto de zerar a partir de certos valores de frequência, ou iniciar a conversão de outros modos. Discutiremos mais sobre esse efeito ao mostrar as frequências de ressonância.

Um outro ponto importante é a estimativa dos fatores de qualidade intrínsecos dos anéis. Para tanto, precisamos medir os Q's dos diferentes modos para diferentes gaps. A Figura 3.13 exibe essa análise. Como podemos ver na parte (a) da figura, os fatores de qualidade crescem de forma aproximadamente linear com o aumento do gap. O maior gap no qual ainda conseguimos visualizar o acoplamento dos modos TM_{00} e TM_{10} , é por volta de 350 nm. Para o modo TM_{20} , ainda conseguimos medir o Q para um gap de 400 nm. Conforme o gap de acoplamento

aumenta, menores são as perdas por acoplamento de entrada e saída, e o fator de qualidade começa a fornecer informações sobre as perdas espúrias. Portanto, o Q 's medidos com o maior gap são uma estimativa dos fatores de qualidade intrínseco dos anéis, como foi discutido na Seção 2.1. Os Q 's-intrínsecos medidos são da ordem de 7, 4 e 2×10^6 , para os modos TM_{00} , TM_{10} e TM_{20} , respectivamente.

É importante perceber que a razão entre os Q 's-intrínsecos dos modos transversos obedecem razoavelmente o cálculo teórico da energia propagada pelas paredes laterais do guia de onda do anel, ver Tabela 3.1. Queremos dizer com isso que os fatores de qualidade intrínsecos podem ser estimados por $Q_{int}^{10} \sim Q_{int}^{00}/3,9$ e $Q_{int}^{20} \sim Q_{int}^{00}/8,4$, onde Q_{int}^i é o fator de qualidade intrínseco do modo com índice transversal $i = 00, 10$ ou 20 . A pequena discrepância entre o cálculo teórico e o valor experimental pode ser explicada pela não consideração da energia propagada pelas paredes inferior e superior do guia de onda no cálculo.

Figura 3.13: Características do acoplamento dos modos transversos em função do gap. (a) Fator de qualidade, e (b) taxa de extinção.

A parte (b) da Figura 3.13 mostra a taxa de extinção dos modos em função do gap. A conclusão que tiramos dessas medidas é que subestimamos as perdas to-

tais dos anéis. Para os dois modos TM_{00} e TM_{10} , o acoplamento já é levemente subcrítico para o menor gap projetado, de 220 nm. Enquanto que o acoplamento para o modo TM_{20} está ainda supercrítico, passando pelo crítico próximo ao gap de 260 nm. O perfil transversal deste último modo se espalha mais pelo substrato de óxido, e portanto, maior é o alcance da onda evanescente. No entanto, para os primeiros dois modos, o acordo de fase deveria fazer com que o acoplamento do modo TM_{10} fosse maior do que o do modo fundamental. Imaginando um casamento de fase perfeito para os dois primeiros modos, o acoplamento crítico do modo fundamental implicaria em um acoplamento supercrítico para o primeiro modo de ordem-superior, justamente pela maior expansão da onda evanescente. Contudo, o casamento de fase fez com que os dois modos tivessem praticamente o mesmo acoplamento no primeiro gap. Mas como o Q-carregado do modo de ordem-superior é menor do que o do modo fundamental, implica que o casamento de fase está atuando de forma a aumentar o acoplamento do modo TM_{10} , como deveria ser. Mesmo assim, ainda temos uma condição de acoplamento quase crítico do modo de interesse, o que favorece a observação de processos não-lineares, mas não o de medidas sensíveis a perdas, como por exemplo, as de estados comprimidos [51].

3.3.3 Frequências ressonantes

Até o momento, não deixamos muito claro como a identificação dos modos foi feita. Sabemos que o fator de qualidade do modo fundamental deve ser o maior, seguido pelos fatores de qualidade em ordem crescente do índice transversal. Isto posto, podemos de certa forma, interpretar a observação dos modos acoplados como sendo os modos reconhecidos na seção anterior.

Todavia, essa forma de reconhecimento dos modos transversos não é precisa, e nem convincente. Uma outra forma mais exata pode ser feita através da comparação entre o valor medido do intervalo espectral livre com o cálculo teórico baseado na simulação da velocidade de grupo, ver expressão (2.18). Esta análise comparativa está exibida na Figura 3.14, onde os pontos marcadores são as medidas experimentais, e as linhas contínuas são os valores simulados.

Figura 3.14: Comparação entre os valores medidos do intervalo espectral livre dos três modos acoplados (pontos), com o cálculo teórico baseado na simulação da velocidade de grupo (linhas contínuas).

Como podemos verificar visualmente, há uma boa correspondência entre os valores mensurados com os valores simulados, e claramente podemos determinar o modo transverso a partir da medida do FSR. Com o objetivo de conseguir realizar as medidas das frequências de ressonância do anel, tivemos que estabilizar ativamente a temperatura do chip, a fim de reduzir as flutuações nas ressonâncias devido à variação térmica. Sem a estabilização térmica, a flutuação na frequência de cada ressonância era de ~ 2 GHz em um intervalo de 20 minutos. Com a estabilização térmica, a flutuação passou a ser de ~ 100 MHz no mesmo intervalo de

tempo. O Anexo D mostra o esquema da estabilização térmica ativa, e a análise da flutuação.

A diferença em frequência dos FSR's é da ordem de $\sim$ GHz, como foi inicialmente estipulada na Seção 1.4. Com essa diferença, podemos facilmente acompanhar as ressonâncias varrendo manualmente o laser com o etalon, sem correr o risco de confundir os modos. A exceção acontece nas proximidades de um anti-cruzamento, como pode ser claramente visto nos valores medidos do modo TM_{20} , por volta de 790 nm. O cruzamento não está relacionado com nenhum dos outros modos principais, acreditamos que ele ocorre com algum outro modo transversal que é acoplado fracamente ao anel apenas nas proximidades daquele comprimento de onda.

Um outro efeito interessante que ocorre com os modos de ordens superiores é a redução drástica do intervalo espectral livre a partir de certos comprimentos de onda. Esses valores críticos para redução do FSR são os mesmos nos quais observamos a mudança nos fatores de qualidade, na subseção anterior. Por exemplo, para o modo TM_{10} , o FSR é reduzido bruscamente para comprimentos de onda menores do que $\sim$ 775 nm, e volta a aparentemente estabilizar no FSR do modo TM_{20} , em $\sim$ 770 nm. Por outro lado, o FSR do modo TM_{20} começa a ser reduzido para comprimentos de onda menores que $\sim$ 780 nm, e o modo desaparece em aproximadamente 776 nm.

Entendemos as quedas nos valores de FSR's dos modos TM_{10} e TM_{20} como um possível anti-cruzamento entre famílias distintas de modos transversos [111]. O fato de observarmos apenas três modos acoplados em 795 nm, pode ser explicado pelo casamento de fase no acoplamento de entrada e saída. A correspondência entre as constantes de propagação com a largura dos guias de onda, reto e do res-

soador, favorece o acoplamento dos três primeiros modos transversos. Contudo, para comprimentos de onda distantes de 795 nm, devemos começar a observar o acoplamento entre outros modos.

Interpretamos a influência sofrida pelo modo TM_{10} como um cruzamento com o modo TM_{20} . O cruzamento afeta fortemente a dispersão local de ambos os modos [108], podendo levar a dispersão anômala uma geometria tipicamente caracterizada por dispersão normal, e vice-versa. A queda no FSR do modo TM_{20} também pode ser explicada por um cruzamento com um modo de ordem-superior. Apesar de não conseguirmos identificar visualmente o modo, estimamos o seu FSR em aproximadamente 159 GHz.

Por outro lado, para comprimentos de onda longos, a partir de ~ 798 nm, é notório uma leve tendência de queda no FSR do modo fundamental. Ao mesmo tempo que também percebemos uma inclinação positiva do primeiro modo transversal superior. Observando esse efeito, imaginamos imediatamente um possível cruzamento de modos em comprimentos de onda mais longos. No entanto, devido a limitada sintonização do laser, não pudemos seguir a tendência de cruzamento observada.

É importante ter em mente que a alteração observada no FSR pode efetivamente perturbar a dispersão local dos modos transversos [112, 106, 113].

3.3.4 Casamento de fase não-linear

Para compreender a relação entre a dispersão e o casamento de fase, vamos relembrar as expressões obtidas para o ganho (2.65)

$$\Lambda(\Omega) = -\alpha + \sqrt{\left[\gamma L \left(1 - \Omega^2/\omega_0^2\right) |A_0|^2\right]^2 - (\Delta\kappa)^2},$$

e para o acordo de fase não-linear (2.60)

$$\Delta\kappa = \delta_0 - L \sum_{n=2,4,\dots} \frac{\beta_n}{n!} \Omega^n - 2\gamma L |A_0|^2,$$

quando fizemos uso do modelo de LLE modificada [93, 97, 42] no estudo da dinâmica do processo de mistura de quatro-ondas dentro do micro-anel. O modelo prediz que o máximo ganho do processo paramétrico irá ocorrer em frequências de bandas laterais Ω que anulam o desacordo de fase não-linear. O parâmetro δ_0 é a dessintonia de fase entre a frequência de bombeio ω_0 e a ressonância da cavidade, L é comprimento físico do anel, β_n é a n -ésima ordem dos coeficientes de dispersão, γ é o parâmetro não-linear, $|A_0|^2$ é a potência circulante no micro-ressoador, e α são as perdas totais em uma volta completa.

Como discutido na Seção 2.5, o desacordo de fase $\Delta\kappa$ e o coeficiente de ganho Λ dependem somente dos termos de dispersão de ordem par, sendo o termo de 4°-ordem o próximo termo de ordem-superior. Considerando apenas o termo de dispersão de 2°-ordem e dessintonia nula $\delta_0 = 0$, para satisfazer a condição de acordo de fase é requerido dispersão anômala, $\beta_2 < 0$. É importante perceber que, quanto mais próximo do ponto de ZGVD, mais distantes serão as primeiras frequências em bandas laterais, e conseqüentemente mais largo será o pente [42].

No caso de dispersão normal, $\beta_2 > 0$, o termo de 4°-ordem de dispersão (FOD) ainda consegue satisfazer a condição de acordo de fase, com zero de dessintonia, se

ele for negativo, $\beta_4 < 0$. Sobretudo, caso o valor de β_2 seja muito grande, a frequência em banda lateral para satisfazer o acordo de fase deve ser muito grande, inviabilizando a oscilação devido a diversos fatores, entre eles, o aumento na potência necessária para atingir o limiar de oscilação, e a possibilidade das frequências caírem em uma região espectral que apresenta forte absorção. Como já foi previamente notado [87], a frequência em banda lateral satisfaz aproximadamente a condição de acordo de fase linear

$$\Omega^2 \approx -12 \frac{\beta_2}{\beta_4}. \quad (3.1)$$

Portanto, amplificação de bandas laterais distantes deve ocorrer quando β_2 e β_4 possuem sinais opostos, e observamos que elas podem estar tão distanciadas quanto $\sim \omega_0/2$.

Para haver oscilação, a expressão do ganho deve ser maior que zero, e isso significa que a expressão dentro da raiz quadrada precisa ser positiva e superior a α^2 . Na condição de casamento de fase não-linear ($\Delta\kappa = 0$), obtemos o limiar de oscilação para a potência intracavidade do processo de FWM

$$|A_0|^2 = \frac{\alpha}{\gamma L} \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right)^{-1}, \quad (3.2)$$

em que a perda total em uma volta completa α , está relacionada com o fator de qualidade carregado no acoplamento crítico (2.22). O termo $\alpha/(\gamma L)$ na expressão (3.2) contabiliza a potência necessária para iniciar a oscilação com uma dispersão anômala usual [99]. O termo extra, originado do auto-incremento [97], depende explicitamente da frequência de acordo de fase, aumentando a potência mínima exigida conforme as bandas laterais tornam-se mais distanciadas do bombeio. Definindo o termo envolvendo a frequência de acordo de fase como $S \equiv \left(1 - \Omega^2/\omega_0^2 \right)^{-1}$, no acoplamento crítico ($\alpha = \kappa$), através da expressão (2.61) obtemos a potência do limiar de oscilação para o feixe de luz no guia de onda reto, um pouco antes do

acoplamento com o anel,

$$P_{in}^{th} = \frac{\alpha^2}{\gamma L} S(1 + S^2), \quad (3.3)$$

em que o limiar para uma geometria com dispersão anômala é recuperada fazendo $S \rightarrow 1$.

Pelo método de FDTD, encontramos os valores dos coeficientes de dispersão $\beta_2 = 19 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$ e $\beta_4 = -2 \times 10^{-4} \text{ ps}^4 \text{ km}^{-1}$ para o modo TM_{10} . Usando a expressão (3.1), estimamos que as primeiras bandas laterais devem ser geradas a $\sim 170 \text{ THz}$ da frequência do laser de bombeio. Para a não-linearidade do nitreto de silício $\gamma \approx 1 \text{ W}^{-1} \text{ m}^{-1}$, encontramos o limiar de oscilação no interior do micro-anel de $8,9 \text{ W}$, que é equivalente a 136 mW no guia de onda reto.

Experimentalmente, a medida da potência do limiar de oscilação foi de 150 mW no guia de onda reto. Acreditamos que essa pequena diferença pode ser explicada pela absorção. A estimativa do coeficiente α foi feita baseada na largura da ressonância da cavidade no comprimento de onda do bombeio, e o modelo de LLE modificado a considera como constante ao longo de todo espectro. No entanto, o modo de sinal, em comprimento de onda curto, está provavelmente mais perto da região de forte absorção do nitreto de silício no ultra-violeta (UV) [34], e consequentemente deve sofrer mais absorção do que o modo de bombeio.

O gráfico da curva do desacordo de fase não-linear (2.60) é observado na Figura 3.15. Podemos ver uma pequena região de casamento de fase ao redor da frequência do bombeio, e então surgem dois abruptos cruzamentos em frequências distantes. Nós identificamos o modo de sinal em 548 nm , e o correspondente modo complementar em 1447 nm .

Figura 3.15: Cálculo do desacordo de fase para os valores simulados de $\beta_2 = 19 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$ e $\beta_4 = -2 \times 10^{-4} \text{ ps}^4 \text{ km}^{-1}$, dessintonia nula, comprimento de onda do bombeio em 795 nm, e potência intracavidade de 9 W. De acordo com estes parâmetros, devemos observar o crescimento de linhas em 548 e 1447 nm.

3.3.5 Oscilação paramétrica

A Figura 3.16 exibe a medida do espectro eletromagnético na saída do chip quando o micro-ressoador de 2 μm é bombeado pelo laser na polarização TM, comprimento de onda de 795 nm e potência de 1 W antes do acoplamento com o chip. Sintonizamos o anel com o micro-aquecedor de forma a colocar o modo TM_{10} em ressonância. Nesse caso, o feixe de bombeio está em um regime de dispersão normal, e observamos o crescimento do feixe de sinal em $\sim 545 \text{ nm}$, no mesmo lado espectral onde a dispersão é normal, ver Figura 3.1. A medida espectral de 300 nm até 600 nm foi realizada com um espectrômetro de baixa resolução $\sim 1 \text{ nm}$.

No limiar de oscilação, o correspondente par complementar cresce em 1465 nm, na região espectral com sinal oposto de dispersão, anômala, próximo do outro ponto de ZGVD na banda de telecom $\sim 1600 \text{ nm}$. A frequência de separação entre um dos modos gerados e o feixe de bombeio é de 174 THz, o que representa uma

Figura 3.16: Oscilação paramétrica causada pela dispersão do modo TM_{10} . (a) Espectro eletromagnético completo obtido na saída do chip. (b) Geração do modo sinal em 545 nm. (c) Oscilação paramétrica ao redor do feixe de bombeio. (d) Pente de frequências gerado pelo modo complementar.

boa concordância com o valor calculado de Ω (3.1). No nosso experimento, observamos uma radiação verde intensa emanando do chip quando o comprimento de onda do feixe de bombeio era trazido para valores inferiores a 796 nm. Acreditamos que este seja o ponto de ZGVD para essa geometria, que está levemente deslocado para comprimentos de onda menores quando comparado com o ponto simulado, Figura 3.1.

Conforme a potência de bombeio é aumentada, há aproximadamente uma correspondência linear com a potência do complementar, mas o sinal satura em algumas dezenas de microwatts. As bandas laterais estão claramente desbalanceadas, e a razão para isso pode, em parte, ser explicada novamente pelo aumento da ab-

sorção em comprimentos de onda curtos, mas também pela dinâmica da força de acoplamento dos modos. O ressonador está criticamente acoplado com respeito ao feixe de bombeio, mas a força de acoplamento dos modos gerados são evidentemente diferentes, porque os comprimentos de onda são muito distintos. Os acoplamentos do sinal e complementar são esperados serem subcrítico e supercrítico, respectivamente. Fisicamente, a justificativa é baseada no fato da atenuação da onda evanescente ser mais lenta para comprimentos de onda maiores. Os dois modos gerados, e o feixe de bombeio, possuem a mesma polarização TM na saída do chip.

É interessante notar que para altas potências, o modo complementar em 1465 nm atua como um feixe de bombeio em dispersão anômala, gerando através do processo de mistura de quatro-ondas degenerado um pente de frequências, ver Figura 3.16 (d). Esse tipo de geração foi observado recentemente e denominado de **pente de frequências agrupado** [114, 115]. Observamos a geração de modos intensos de ~ 1400 nm até ~ 1550 nm, no qual a distância entre cada modo é de aproximadamente 1,2 nm, correspondendo a um FSR. A medida espectral de 600 nm até 1700 nm foi realizada com um analisador de espectro ótico (OSA), com resolução máxima de 0,02 nm.

Ao redor do comprimento de onda do bombeio também observamos a geração de alguns modos, Figura 3.16 (c). Contudo, a intensidade de geração é bem inferior à dos modos gerados em telecom, e a distribuição espectral não é uniforme. A curva do desacordo de fase não-linear apresenta uma aproximação de zero ao redor do bombeio, apesar de nunca observarmos um cruzamento para dessintonia nula, ver Figura 3.15. Acreditamos que essa aproximação pode levar a um mínimo de desacordo de fase, ocasionando um ganho positivo para potências altas.

O modo sinal gerado em 545 nm é único, para essa geometria não observamos a geração de dois ou mais modos ³, ver Figura 3.16 (b). Como foi apontado em [116, 104], a curva de acordo de fase, para alguns tipos de fibras óticas, é fechada por causa da forma da curva de dispersão, e isso poderia levar à oscilação em duas frequências. No entanto, para a nossa geometria de 730×2000 nm, nunca observamos a geração de mais de um modo.

O modo único observado em 1090 nm é um artefato de medida do OSA. O analisador de espectro ótico mede todos os harmônicos inferiores de um feixe de luz. Por exemplo, apesar do OSA não abranger a detecção de modos óticos com comprimentos de onda inferiores a 600 nm, ele consegue detectar o harmônico de 545 nm, no comprimento de onda de $2\lambda_s = 1090$ nm.

A geração paramétrica de bandas laterais mostrada aqui estão separadas em mais de uma oitava, e a inexistência de modos intensos, contínuos, entre elas, sugere uma dinâmica diferente de oscilação paramétrica quando comparada com um processo de FWM regular em dispersão anômala. A dinâmica observada requer dispersão normal em GVD e dispersão anômala em FOD. Em particular, observamos a ocorrência com comprimento de onda do bombeio próximo do ponto de ZGVD.

3.3.6 Dispersão total

Para verificar a dispersão normal do modo TM_{10} , usamos FDTD para simular a dispersão total da geometria [12]. Como consequência da expansão (1.66), as frequên-

³Para a geometria de 730×2200 nm observamos a geração de dois modos simultâneos, em 650 nm e 582 nm. Infelizmente danifiquei o anel e não pude estudar mais detalhadamente a oscilação.

cias ressonantes de uma família de modos no micro-ressoador pode ser aproximada ao redor da frequência de bombeio ω_0 como uma série de Taylor

$$\omega_\mu = \omega_0 + \sum_{j=1} \frac{D_j \mu^j}{j!}, \quad (3.4)$$

onde μ é um número inteiro relativo ao modo de cavidade do ressoador com respeito ao modo de bombeio, $D_1/2\pi$ é o intervalo espectral livre do ressoador, e D_2 está relacionado ao parâmetro β_2 da dispersão da velocidade de grupo

$$D_2 = -\frac{c}{n_0} D_1^2 \beta_2, \quad (3.5)$$

onde n_0 é o índice de refração efetivo. Um D_2 positivo corresponde a um anômalo GVD, cujo efeito é levar a um desvio parabólico das frequências ressonantes equidistantes [117], espaçadas de D_1 , ver Figura 3.17.

Figura 3.17: Interpretação física do parâmetro GVD.

O desvio parabólico das ressonâncias pode ser modificado por termos dispersivos superiores [107]. Os parâmetros D_3 e D_4 estão relacionados aos coeficientes

de dispersão β_3 e β_4 via

$$D_3 = -\frac{c}{n_0} D_1^3 \left(\beta_3 - \frac{2c}{n_0} \beta_2^2 \right) \approx -\frac{c}{n_0} D_1^3 \beta_3, \quad (3.6)$$

$$D_4 = -\frac{c}{n_0} D_1^4 \left(\beta_4 - \frac{7c}{n_0} \beta_2 \beta_3 + \frac{6c^2}{n_0^2} \beta_2^3 \right) \approx -\frac{c}{n_0} D_1^4 \beta_4. \quad (3.7)$$

Para compreender o efeito dos coeficientes de dispersão sobre os modos da cavidade, é interessante calcular a **dispersão integrada**

$$D_{int}(\mu) \equiv \omega_\mu - (\omega_0 + D_1 \mu) = \frac{D_2 \mu^2}{2!} + \frac{D_3 \mu^3}{3!} + \frac{D_4 \mu^4}{4!} + \dots, \quad (3.8)$$

que quantifica o desvio das ressonâncias ω_μ do valor equidistante μD_1 , devido a todos os termos de dispersão. A Figura 3.18 mostra a simulação da dispersão integrada, usando FDTD, para a nossa geometria de 730×2000 nm, com raio de curvatura de $80 \mu\text{m}$.

Figura 3.18: Simulação em FDTD da dispersão integrada para a geometria de corte transversal de 730×2000 nm e raio de curvatura de $80 \mu\text{m}$.

As curvas da Figura 3.18 apresentam o desvio das frequências ressonantes dos modos equidistantes μD_1 , dos modos primeiros três modos transversos TM. Como podemos verificar, o modo fundamental apresenta dispersão normal para um feixe

de bombeio em ~ 795 nm ($\mu = 0$), enquanto que o modo TM_{20} possui dispersão anômala ($D_2 > 0$), parábola positiva. Percebemos que para dispersão anômala, os modos ressonantes vizinhos acabam se distanciando positivamente dos modos equidistantes, ou seja, $(\omega_\mu - \omega_0 - \mu D_1 > 0)$. Em contrapartida, dispersão normal implica em um distanciamento negativo, isto é, os intervalos espectrais livres dos modos ressonantes são encurtados conforme nos afastamos do bombeio, $(\omega_\mu - \omega_0 - \mu D_1 < 0)$.

A curva do modo TM_{10} é tipicamente caracterizada por dispersão normal, próximo do ponto de ZGVD [114]. Para uma lado espectral do feixe de bombeio, o distanciamento é positivo, e com relação ao lado espectral oposto, o distanciamento é negativo. Não é muito evidente na figura, mas na ressonância do bombeio ($\mu = 0$), a curva azul apresenta uma concavidade negativa ($D_2 < 0$), confirmando a normalidade da dispersão.

Figura 3.19: Medida experimental (marcadores em azul) e simulação da dispersão total (linha vermelha) utilizando o método de FDTD. O gráfico interno, compara o formato da curva simulada com a tendência experimental.

A Figura 3.19 exibe a comparação entre a medida experimental da dispersão

(marcadores em azul) com a curva simulada da dispersão total (linha vermelha), desta vez com um raio de curvatura de 132 μm . Na exposição dos dados experimentais nós negligenciamos as medidas de ressonância abaixo de 775 nm, devido a um possível anti-cruzamento com outra família de modos. Depois disso, a dispersão concorda bem com a simulação, mesmo considerando comprimentos de onda longos, como podemos ver pelo gráfico interno na figura. Para o modo de bombeio ($\mu = 0$), o GVD ainda é normal, como está indicado pela forma concava da curva interna. O zero de dispersão simulado, utilizando FDTD, foi obtido em ~ 806 nm, que está de bom acordo com o valor estimado experimentalmente em ~ 796 nm. O valor simulado no domínio espectral foi de 820 nm.

O roteiro da simulação em FDTD para o cálculo da dispersão total pode ser observado no Apêndice [A.2](#).

3.3.7 Geração sintonizável

Conseguimos, a partir de um feixe de bombeio em 795 nm, observar a geração de bandas laterais espectralmente distanciadas. Observamos a geração de diversos comprimentos de onda para diferentes geometrias, a saber, 1,8 μm , 2 μm , e 2,2 μm . Porém, nunca conseguimos sintonizar o processo. O modelo modificado de LLE prevê que a partir de certo comprimento de onda crítico, devemos parar de observar o pente de frequências convencional, e iniciar o processo de geração de apenas duas bandas laterais distancias [\[25\]](#). E, a partir da geração de unicamente dois modos, estes poderiam levar à geração de um pente de frequências localmente, como foi observado neste trabalho. A Figura [3.20](#) mostra a dinâmica de geração das primeiras bandas laterais em função da sintonia do laser.

Figura 3.20: Previsão de geração das primeiras bandas laterais em função do comprimento de onda do bombeio. O cálculo foi baseado nos valores de dispersão simulados em MPB. As linhas verticais tracejadas mostram os comprimentos de onda para o ponto de ZGVD simulados pelo MPB e FDTD.

Como podemos ver, a dinâmica de oscilação para comprimentos de onda maiores que o ZGVD leva à geração de bandas laterais próximas. Por outro lado, ao cruzar o ponto de ZGVD, na direção de dispersão normal, as bandas laterais geradas tornam-se amplamente distanciadas espectralmente. A figura mostra a comparação da curva simulada com o MPB, com o valor experimental observado. A comparação dos valores experimentais não casa muito bem com os valores calculados, principalmente com relação a modo complementar. Observamos a geração em 1465 nm, enquanto que a teoria prediz a geração próxima de 1600 nm. Contudo, para a simulação usando o FDTD, encontramos que o ponto de ZGVD está deslocado para comprimentos de onda menores, ~ 806 nm. Deslocando a curva inteira para a esquerda, devemos obter um acordo melhor, como mostra a Figura 3.15.

Um ponto interessante é quão vasto é processo de sintonização. Mudando le-

vemente a frequência de bombeio, deveríamos variar grandemente a frequências das bandas laterais. Por exemplo, para um bombeio em 795 nm, observamos linhas em ~ 1500 nm. Mas para um bombeio em 785 nm, deveríamos gerar um feixe complementar para além de 2000 nm.

Acreditamos que causa da não sintonização do processo pode ser explicada pelo acordo de fase no acoplamento. O modo de ordem-superior responsável pela mistura de quatro-ondas é o TM_{10} . E a sua extração eficiente depende do acordo de fase, que deixa de valer para comprimentos de onda muito diferentes de 795 nm. Acidentalmente conseguimos extrair os dois modos gerados por uma combinação de acoplamento ocasional entre os três campos.

3.3.8 Simulação da LLE

Uma outra forma de confirmar o modo responsável pelo crescimento da linha no visível, é a simulação da equação modificada de Lugiato-Lefever [96]. O método consiste em simular a evolução temporal da equação (2.55), utilizando o método de *split-step*, que está descrito no Anexo C. Como foi brevemente comentado na Seção 2.5, o método consiste em simular independentemente a evolução linear e a não-linear na equação de LLE, como auxílio da rápida transformada de Fourier FFT [44].

Aqui, os parâmetros de dispersão de ordem-superiores foram simulados pelo **método de diferenças finitas** (FEM) - do inglês - *finite element method*, utilizando o software COMSOL, baseado em nossa geometria de 730×2000 nm e raio de curvatura de 132 μ m. A simulação da LLE foi feita em MATLAB. A Figura (3.21) mostra que para a nossa geometria, a solução numérica da LLE com os parâmetros do

modo TM_{10} , e um feixe de bombeio em 795 nm, devemos observar o crescimento de uma linha em exato 546,9 nm.

Figura 3.21: Solução numérica da LLE modificada. Os parâmetros utilizados foram simulados pelo FEM para o modo TM_{10} , na geometria de 730×2000 nm e raio de curvatura de $132 \mu\text{m}$. A simulação dos parâmetros de dispersão, e a evolução da LLE, foram realizados por Yun Zhao, da Universidade de Columbia.

Experimentalmente constatamos a geração de um feixe intenso de luz em 545 nm. A comparação entre a simulação da LLE modificada com o resultado experimental observado está em excelente acordo. Isso implica que o modelo teórico utilizado para explicar nossas observações experimentais descreve com boa precisão a evolução do processo físico.

3.4 Ressorador 730 x 1200 nm

Nesta seção irei mostrar os resultados experimentais conseguidos com o micro-ressoador de 1,2 μm .

Durante o período deste trabalho, projetamos dois tipos de chips com esta geometria. Os primeiros, foram produzidos durante a fase na qual estávamos procurando gerações de modos procedentes do processo de segunda-ordem $\chi^{(2)}$, ver Seção 2.4. Para a tentativa de observação deste processo, projetamos ressoadores com duas portas, de entrada e de vazamento. Para estes chips, o fator de qualidade é reduzido, devido à não eliminação por completo do vazamento do modo de bombeio. Contudo, o fator de qualidade ainda foi suficientemente alto para acoplamentos subcríticos, de forma a observarmos oscilação paramétrica e geração de pentes de frequências, Figura 2.13 (b).

Na segunda fabricação, projetamos novamente chips com a mesma geometria, mas sem a porta de vazamento. A ideia era aprimorar nossos dispositivos para beneficiar o processo de FWM que estávamos observando, tanto da geração de bandas laterais amplamente separadas espectralmente, quanto no processo de geração de pentes.

Iremos descrever o processo não-linear observado com essa geometria, utilizando o mesmo laser em ~ 795 nm, na polarização TM, e dessa vez ressonante com o modo TM_{20} . As curvas de dispersão de segunda- e quarta-ordem podem ser vistas na Figura 3.1.

3.4.1 Acordo de fase não-linear

Como podemos observar na Figura 3.1, o sinal do parâmetro de GVD é negativo, dispersão anômala, à medida que o sinal de β_4 é positivo. A oposição de sinal entre os dois primeiros termos pares de ordem-superior na dispersão, garantem a tendência linear do acordo de fase (3.1), levando à geração de bandas laterais distanciadas espectralmente. Porém, por causa do GVD anômalo, e do limiar de oscilação dos modos próximos ser inferior ao dos modos distanciados, esperamos a observação de um pente de frequências regular, para potências suficientemente altas, condição na qual os primeiros modos gerados surgem próximos do bombeio.

A Figura 3.22 mostra o ganho (2.65) para os valores simulados, no domínio espectral, do modo TM_{20} . Os valores dos parâmetros utilizados foram: $\beta_2 = -25 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$ e $\beta_4 = 4 \times 10^{-4} \text{ ps}^4 \text{ km}^{-1}$, dessintonia nula, potência de bombeio de 22 W, e perdas totais $\alpha = 0,006$. O fator de qualidade desse modo é cerca de metade do valor do modo TM_{10} . Existem quatro regiões de ganho, duas próximas do bombeio, e duas mais afastadas, devido ao termo de FOD.

A largura do ganho para comprimentos de onda próximo do bombeio é fortemente dependente da potência. Para potências suficientemente altas, a região de ganho cobre aproximadamente de 750 a 770 nm de um lado, e de 830 até 850 nm do outro. Os ganhos mais longínquos são mais estreitos, mesmo para potências bastante altas. Nesse caso, os modos espectralmente distanciados devem aparecer em $\sim 600 \text{ nm}$ e $\sim 1200 \text{ nm}$, estando ambos em uma região de dispersão normal do ressoador, sendo improvável a geração de pentes agrupados [114]. É muito importante notar que o ganho dos modos distanciados são bem inferiores aos ganhos próximo do bombeio. Portanto, é provável que observemos apenas a oscilação dos modos próximos, principalmente por causa do fator de qualidade reduzido

Figura 3.22: Cálculo do ganho baseado nos valores de dispersão simulados. Os parâmetros utilizados foram $\beta_2 = -25 \text{ ps}^2 \text{ km}^{-1}$, $\beta_4 = 4 \times 10^{-4} \text{ ps}^4 \text{ km}^{-1}$, $\delta_0 = 0$, $|A_0|^2 = 22 \text{ W}$, e $\alpha = 0,006$.

do ressonador para este modo, $Q \approx 0,5 \times 10^6$.

3.4.2 Oscilação em 613 e 1128 nm

Durante o período no qual estávamos buscando uma geração em telecom, devido ao processo de PDC, observamos uma geração bastante forte de luz no setup configurado para filtrar o infravermelho próximo e detectar apenas a luz em 1550 nm. A medida espectral do feixe de saída do chip revelou um modo gerado em 1128 nm. Imediatamente imaginamos que o par conjugado de um processo $\chi^{(2)}$ estaria em $\sim 2600 \text{ nm}$, o que seria bastante difícil de confirmar pela falta de equipamento de detecção capaz de medir naquela frequência. Contudo, quando olhamos para o chip, vimos uma luz laranja emanando do dispositivo. Concluimos que era uma processo de mistura de quatro-ondas devido à conservação de energia dos campos gerados. O feixe de sinal apareceu em 613 nm. A Figura 3.23 mostra o espectro eletromagnético de saída do chip medido.

Figura 3.23: Espectro medido durante o processo de busca da geração em telecom devido ao processo de segunda-ordem. O feixe de bombeio estava com potência ajustada em aproximadamente 1 W antes do acoplamento, na polarização TM e comprimento de onda em ~ 793 nm.

Ainda não entendemos muito bem o porquê da ocorrência dessa geração. Evidentemente, a oposição dos valores de GVD e FOD permite a geração de modos ultra-distanciados, como vimos na descrição da geometria de $2\ \mu\text{m}$, onde tínhamos uma dispersão normal em GVD. Contudo, para a geometria de $1,2\ \mu\text{m}$, esperávamos primeiramente a geração de modos mais próximos. E é justamente isso o que acontece, excepcionalmente ao redor de 792 nm.

A Figura 3.24 mostra a oscilação paramétrica observada, por exemplo, em 794 nm. Por algum motivo, a partir de 794 até 792 nm, o ganho para os modos distanciados se torna maior do que para os modos mais próximos. Para essa geometria, não conseguimos gerar um pente de frequências completo por causa da redução do fator de qualidade do modo TM_{20} .

Figura 3.24: Oscilação paramétrica observada a partir do modo TM_{20} . O comprimento de onda do bombeio estava um pouco acima de 794 nm.

Modo	FSR [GHz]
TM_{00}	165,73
TM_{10}	161,58
TM_{20}	159,59
TM_{30}	155,08

Tabela 3.2: Cálculo do FSR dos quatro primeiros modos transversos na polarização TM, baseado na simulação da velocidade de grupo, em uma geometria de 730×1200 nm e raio de curvatura de $132 \mu\text{m}$.

3.4.3 Identificação do modo transverso

Assim como no caso da geometria de $2 \mu\text{m}$, para essa geometria também identificamos o modo responsável pela oscilação paramétrica através da medida do intervalo espectral livre, ver Figura 3.25. O FSR médio do modo responsável foi medido em $158,00(30)$ GHz. Os valores simulados dos primeiros quatro modos transversos, na polarização TM, podem ser verificados na Tabela 3.2.

Os valores calculados do FSR revelam uma maior probabilidade da oscilação

Figura 3.25: Medida do intervalo espectral livre do modo responsável pela geração dos feixes em 613 e 1128 nm.

estar ocorrendo por causa do modo TM_{20} . Contudo, ainda não podemos garantir, com certeza, que a geração do modo em 613 nm é devido ao termo de dispersão β_4 . Como pode ser observado na Figura 3.25, em ~ 795 nm, próximo da frequência de bombeio na qual observamos a geração dos modos espectralmente distanciados, em 793 nm, verificamos um cruzamento de modos. Além desse, acontecem mais outros dois em ~ 785 e 775 nm. Sabemos que anti-cruzamento podem mudar drasticamente o perfil de dispersão da geometria [108, 118, 106], o que poderia levar a oscilações imprevistas pela engenharia de dispersão. No entanto, como foi mostrado em [113], a oscilação paramétrica causada pela interação de famílias distintas de modos são locais, no sentido em que a geração ocorre em comprimentos de onda dentro de uma janela espectral estreita ao redor da interação. Além disso, um dos modos gerados é fixo (*pin modes*), isto é, a sintonia do bombeio causa a mudança do comprimento de onda em apenas um dos modos gerados, o outro modo permanece fixo [119].

A Figura 3.26 mostra a variação nos comprimentos de onda dos feixes sinal e

complementar conforme mudamos o comprimento de onda do laser. Como podemos ver, aumentando o comprimento de onda do laser de 792 para 793,5 nm, o comprimento de onda do sinal aumenta de 611 para 613 nm, enquanto que o comprimento de onda do complementar reduz de 1127 para 1125 nm, aproximadamente. Durante a medida dos comprimentos de onda, a frequência do laser foi alterada enquanto a ressonância era mantida controlando a potência elétrica no micro-aquecedor.

Figura 3.26: Medida dos comprimentos de onda dos modos gerados em função do comprimento de onda do modo de bombeio. Acreditamos que nenhum dos modos gerados está fixo, o que seria uma assinatura de geração por interação de modos.

O estudo da dinâmica da LLE modificada revelou que alguns modos transversos de ordem-superiores poderiam levar ao surgimento de uma linha em ~ 600 nm. A Figura 3.27 exibe o espectro eletromagnético teórico para cada um dos modos. A parte (a) da figura é a previsão dos feixes gerados a partir da dispersão do modo TM_{20} . As partes (b) e (c), são os espectros de geração dos modos TM_{01} e TE_{01} , respectivamente.

Como podemos ver pela Figura 3.27, os três modos transversos levam à gera-

ção de feixes próximo de ~ 600 nm, mas o que mais se assemelha aos resultados experimentais é o espectro da parte (a), o do modo TM_{20} . Apesar da semelhança de geração dos modos separados espectralmente e os modos gerados mais próximos, nunca conseguimos observar a geração de todos os modos simultaneamente. Mesmo que o fator de qualidade fosse mais elevado, esperaríamos sempre gerar um pente de frequências ao redor do bombeio antes da geração dos modos amplamente separados espectralmente.

3.4.4 Limiar de oscilação

Constatamos que o fator de qualidade intrínseco do modo TM_{20} é cerca 3 vezes menor que o do modo fundamental para uma mesma geometria, ver Figura 3.13 (a). Além disso, o fator de qualidade para o chip com uma porta extra de vazamento deve apresentar uma redução ainda maior. A geração dos modos em 613 e 1128 nm aconteceram somente para acoplamentos subcríticos em 792 nm, com fator de qualidade da ordem dos valores intrínsecos. O valor medido foi de $1,8 \times 10^6$. Para acoplamentos com gaps menores, ainda observamos a geração dos modos mais próximos, mas nunca dos modos distanciados.

Não é difícil estimar o fator de qualidade para um campo em 613 nm. Por ser um modo com comprimento de onda menor, o decaimento da onda evanescente é mais rápido que em 792 nm, justamente em razão do maior confinamento do campo. Portanto, presumimos que o acoplamento do feixe gerado em 613 nm deve ser ainda mais fraco que o acoplamento do feixe de bombeio.

Por outro lado, a análise do fator de qualidade para um campo em 1560 nm revelou um acoplamento supercrítico. O valor medido do Q-carregado foi de

Figura 3.27: Solução numérica da LLE modificada. Os parâmetros utilizados foram simulados pelo FEM para os modos (a) TM_{20} , (b) TM_{01} e (c) TE_{01} , em uma geometria de 730×1200 nm e raio de curvatura de $132 \mu\text{m}$. A simulação dos parâmetros de dispersão, e a evolução da LLE, foram realizados por Yun Zhao, da Universidade de Columbia.

$0,1 \times 10^6$. Para essa medida, utilizamos um laser em telecom, e fizemos o acoplamento através da porta de vazamento. Como vimos na Seção 2.4, a largura do guia de onda de vazamento é a mesma do ressonador. Portanto, o valor medido é referente ao modo fundamental. O fator de qualidade é tão baixo por dois motivos. O primeiro, vem do fato que projetamos o gap da porta de vazamento para ter um acoplamento supercrítico em 1560 nm. O segundo, é em razão do vazamento do modo fundamental dentro do ressonador pela porta do guia de onda reto. Apesar de não haver casamento de fase em 1560 nm, o modo fundamental é sempre acoplado à saída, como vimos na Figura 1.9.

Esperamos, que assim como o modo em 1560 nm, o modo em 1128 nm também esteja super acoplado. Por ter um comprimento de onda menor, o fator de qualidade do modo gerado deveria ser maior. Contudo, por ser um modo transversal de ordem-superior, ele é propagado menos confinado que o modo fundamental. Portanto, estimamos que o Q-carregado do feixe em 1128 nm, deve ser da mesma ordem de grandeza do modo fundamental em 1560 nm.

A partir dessa análise, concluímos que os acoplamentos de saída dos campos gerados não devem ser balanceados. Devemos coletar menos luz em 613 nm do que em 1128 nm. Além disso, por causa do vazamento do campo em infravermelho-próximo, devemos observar feixes intensos na saída das duas portas de acoplamento, guia de onda reto e de vazamento. A Figura 3.28 mostra a potência de saída, após a lente de acoplamento, de ambos os feixes gerados.

A Figura 3.28 (a) apresenta a potência de saída do feixe em 1128 nm. Como podemos observar, o campo sai em quantidades praticamente iguais pelas duas portas de saída. O limiar de oscilação para a geração das bandas laterais distanciadas espectralmente é de 50 mW. As potências do feixe de bombeio são estimadas

Figura 3.28: Medição das potências geradas em 613 nm e 1128 nm. (a) Potência em 1128 nm coletada pelas duas portas de saída. (b) Potência em 613 nm extraída pelo guia de onda reto.

no guia de onda reto, a partir das perdas de acoplamento de espaço livre para o chip. A parte (b) da figura expõe a potência medida do feixe em 613 nm na saída do guia de onda reto. Não observamos potência detectável na saída da porta de vazamento. Há uma saturação de saída do campo, que mesmo para potência altas de bombeio, está limitada em aproximadamente 400 μ W.

A potência do feixe gerado na frequência ω pode ser calculada por $N\hbar\omega$, onde N contabiliza o fluxo de fótons. A frequência do modo em 613 nm é aproximadamente duas vezes a frequência em 1128 nm. Portanto, como a potência em 1128 nm é cerca de seis vezes a potência observada em 613 nm, o número de fótons em 1128 nm extraídos do micro-ressoador é da ordem de doze vezes a quantidade de fótons extraídos em 613 nm.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Nesta tese, mostramos o processo de engenharia de dispersão dos micro-ressoadores para a observação de processos não-lineares de segunda- e terceira-ordem. A não-linearidade $\chi^{(2)}$ não é intrínseca aos materiais utilizados no processo de fabricação dos chips. No entanto, devido a diferentes causas na decorrência de fabricação, ou até mesmo de um efeito geométrico, o processo de geração de segundo-harmônico é observado. Mostramos como podemos otimizar a interação, com adequado acordo de fase, para a geração de um processo mais eficiente que o exposto em [65]. Além disso, demonstramos experimentalmente que o adequado controle entre o acoplamento de entrada do feixe de bombeio, e a extração do feixe gerado em segundo-harmônico, pode ser alcançado com duas portas de entrada e saída, com ajustado acordo de fase e gap para cada campo. Esse processo possibilitou a fabricação de diversos chips, que eficientemente levam a geração de segundo-harmônico para um comprimento de onda de bombeio bastante específico, em 1560 nm. Praticamente, observamos a geração de segundo-harmônico em todos os chips fabricados a partir do processo descrito nesta tese. A máxima eficiência de geração observada foi de 0,24%.

A observação de um processo de geração de segundo-harmônico não significa necessariamente que devemos observar o processo inverso, a conversão paramétrica descendente, pelo menos com respeito à potência disponível do laser. A fraca não-linearidade $\chi^{(2)}$ efetiva em nossos dispositivos, juntamente com o pequeno overlap dos modos interagentes no processo, permitiu a estimativa do limiar de oscilação de um OPO de segunda-ordem em aproximadamente 1 W, assumindo um fator de qualidade que estava além de nossas expectativas naquele período, $\sim \times 10^7$.

O estudo experimental do OPO $\chi^{(2)}$ exigia que o feixe de bombeio em 780 nm fosse o modo transversal de ordem-superior TM_{20} , dentro do micro-ressoador. A alta potência de bombeio em um modo espacial no qual a geometria apresenta dispersão anômala levou à observação da geração de um pente de frequências, e de bandas laterais no infravermelho.

O estudo da dispersão em nossas geometrias, revelou um forte papel do termo de quarta-ordem na dispersão sobre o processo de mistura de quatro-ondas. A nossa geometria originalmente projetada para PDC era caracterizada por dispersões anômala em β_2 e normal em β_4 . O processo associado ao GVD levou à oscilação paramétrica convencional, com geração de modos próximos do feixe de bombeio. Para potências suficientemente altas, deveríamos observar um pente de frequências centrado em ~ 800 nm. Associamos a geração de bandas laterais amplamente separadas espectralmente ao termo de β_4 . O acordo de fase não-linear, juntamente com o ganho da instabilidade de modulação, prevêm a geração de modos em 600 nm. Vimos uma boa concordância entre o valor simulado e a medida experimental dos comprimentos de onda gerados, apesar de ainda não compreender a geração dos modos distanciados espectralmente antes da oscilação paramétrica convencional.

Decidimos estudar outra geometria para a geração de bandas laterais amplamente separadas espectralmente. Escolhemos geometrias do ressoador com larguras do guia de onda do anel ao redor de 2000 nm, altura de 730 nm e raio de curvatura de 132 μm . Para essa geometria, a dispersão do modo TM_{10} em 795 nm é normal, e próximo do comprimento de onda do zero de dispersão. Por outro lado, o valor do coeficiente de dispersão de quarta-ordem é negativo. Nessas condições, obtivemos uma expressão do limiar de oscilação em termos da tendência do acordo de fase linear. Próximo do limiar de oscilação, observamos a oscilação

paramétrica de bandas laterais separadas em 174 THz.

Nossos resultados, abriram uma nova linha de pesquisa no grupo. A geração de unicamente dois modos em comprimentos de onda que podem ser amplamente sintonizados, possibilita o compartilhamento de informação entre dois sistemas físicos distintos. Como foi mostrado experimentalmente em [51], a geração de unicamente dois modos em um OPO do tipo Kerr apresenta correlações quânticas na intensidade dos feixes gerados. Teoricamente, o nosso grupo mostrou em [120], que na realidade, os feixes apresentam correlações quânticas em combinações das quadraturas de intensidade e fase dos três campos envolvidos, bombeio, sinal e complementar, isto é, o OPO baseado em mistura de quatro-ondas produz emaranhamento tripartite [121]. Portanto, com a geração de dois feixes a partir de um campo bombeio em 795 nm, com sinal em 589 nm e complementar em 1222 nm, poderíamos compartilhar informação quântica entre átomos de Rubídio e Sódio, intermediado por um chip fotônico compatível com a tecnologia CMOS com transmissão de informação na banda de telecomunicação.

Com essa finalidade, precisamos primeiramente eliminar a dependência do acordo de fase no acoplamento. Isto pode ser conseguido utilizando a conversão de modos antes do acoplamento com o micro-ressoador, através de um divisor de feixe com conversão de modos em guias de onda [74]. Após esse processo, precisamos projetar melhor o acoplamento para a extração balanceada dos feixes gerados espectralmente separados. Um acoplamento com gap variável possibilita a extração de modos com comprimentos de onda tão distintos [18]. A simulação em 2D indicando parte destas ideias pode ser observada na Figura 3.29.

Figura 3.29: Simulação em FDTD para a conversão paramétrica de frequências espectralmente distanciadas, com possível sintonização. (a) Figura mostrando inicialmente um divisor de feixe de 100 % com conversão do modo fundamental para o modo TM_{10} . Neste caso, a dimensão do guia de onda reto é a mesma do anel, estabelecendo uma região com casamento de fase perfeito com grande largura de banda. (b) Figura mostrando em detalhe a conversão de modos e o acoplamento com o anel. Acreditamos que com este dispositivo poderemos gerar apenas um par de modos amplamente separados espectralmente com sintonização até, talvez, ~ 400 nm.

APÊNDICE A

SIMULAÇÃO MEEP

Neste apêndice estão os roteiros de simulação escritos em Scheme para o método de diferenças finitas no domínio temporal (FDTD).

A.1 Guia de onda planar

Utilizando o MPB, é possível escolher o perfil transversal da fonte de luz usado em FDTD. O roteiro escrito simula a propagação do campo com polarização, comprimento de onda e perfil transversal específicos. A simulação roda em um guia de onda planar em SiN, limitado por baixo e por cima por SiO. Abaixo segue o código para simulação:

```
; author:  RR

; *****

; ***** parameters *****

(define-param w 1) ; waveguide width

(define-param wl 2) ; wavelength

(define-param fcen (/ wl)) ; frequency

(define-param band 1) ; eigen mode from mpb

(define-param dpml 1.0)

(define-param sz 22) ; propagation size

(define-param sx 8)

(define-param oxide 1.45)

(define-param nitride 2)

; *****
```

```

; ***** geometry *****

(set! geometry-lattice (make lattice (size sx no-size sz)))

(set! default-material (make dielectric (index oxide)))

(set! geometry (list

(make block

(center 0)

(size w infinity infinity)

(material (make dielectric (index nitride))))))

; *****

; ***** source *****

(set! sources (list

(make eigenmode-source

(src (make continuous-src (width 10) (frequency fcen)))

(component Hy)

(eig-parity TM)

(eig-band band)

(center 0 0 (+ (* -0.5 sz) dpml))

(size w))))

(set! pml-layers (list (make pml (thickness dpml))))

(set-param! resolution 16)

(run-until 120

(at-beginning output-epsilon)

(at-end output-hfield-y output-efield-x output-efield-z))

```

A.2 Dispersão total

Para o cálculo da dispersão total utilizamos FDTD. Simulamos a propagação temporal dos modos transversos em um anel. Utilizamos o sistema de coordenadas cilíndricas com simetria azimutal infinita, ou seja, uma simulação em 2D cuja coordenada angular é resolvida analiticamente. O roteiro encontra as frequências de ressonância para cada modo azimutal m . Em seguida, podemos calcular a dispersão através de diferenças. Esse método apresenta a vantagem de que o cálculo de diferenças é mais preciso do que o cálculo de derivadas, utilizado no modelo espectral. Em FDTD, precisamos definir a equação de Sellmeier no modelo lorentziano. Isso pode ser feito no próprio roteiro, ou em um arquivo separado no formato scm (Scheme).

```
; author: RR

; *****

; ***** geometry *****

(include "/home/renato/Documents/Doc/Simulations/meep/materials.scm")

(define-param w 1.2)

(define-param h 0.73)

(define-param r 60)

(define-param fcen 1.25)

(define-param df 1)

(define-param pad 2) ; used to be 4

(define-param dpml 1) ; used to be 2

(define-param just-compute? true)

(define sr (+ r w pad dpml))

(define sz (+ h pad dpml))
```



```

(set! dimensions CYLINDRICAL)

(set! geometry-lattice (make lattice (size sr no-size sz)))

(set! default-material SiO)

(set! geometry (list

(make block

(center (+ r (/ w 2)))

(size w infinity h)

(material SiN))))

(set! pml-layers (list (make pml (thickness dpml))))

(set-param! resolution 50)

; *****

; ***** source *****

(set-param! m 900)

(define-param dt 500)

(if just-compute?

(begin

(set! sources (list

(make source

(src (make gaussian-src (frequency fcen) (fwidth df)))

(component Ez) (center (+ r 0.1)))))

(run-sources+ dt

(after-sources (harminv Ez (vector3 (+ r (/ w 2) -0.1)) fcen df))))

(begin

(set! sources (list

(make source

(src (make gaussian-src (frequency fcen) (fwidth df)))

```

```

(component Ez) (center (+ r 0.1))))))
(run-sources+ dt
(at-beginning output-epsilon)
(at-end output-efield-z)
(after-sources (harminv Ez (vector3 (+ r (/ w 2) -0.1)) fcent
df))))))

```

APÊNDICE B

SIMULAÇÃO MPB

Neste apêndice estão os roteiros de simulação escritos em Scheme para o método de auto-solução de bloco-iterativo pré-condicionado em uma base de onda plana [39] (MPB). O método consiste na resolução das equações de Maxwell 1.1 no domínio espectral.

B.1 Guia de onda curvo

Este roteiro calcula a relação de dispersão $k(\omega)$ para dois comprimentos de onda, a saber, 1560 e 780 nm, em função da largura do guia de onda do anel. O efeito do raio de curvatura é incluído na dependência do índice de refração do nitreto com a posição a partir do centro do guia de onda, ver Referência [41].

```
; author:  RR

; *****

; ***** Sellmeier equations *****

(define (nitride wl) (sqrt (+ 1 (/ 253.86 (- (expt 9.1609 2) (expt (/ 1239.842
(* wl a 1e3)) 2))) (/ 0.040314 (- (expt 0.001 2) (expt (/ 1239.842 (* wl a 1e3))
2))))))

(define (oxide wl) (sqrt (+ 1.4124 (/ 85.493 (- (expt 11.061 2) (expt (/ 1239.842
(* wl a 1e3)) 2))) (/ 0.015888 (- (expt 0.10237 2) (expt (/ 1239.842 (* wl a 1e3))
2))))))

; *****

; ***** Parameters *****

(define-param wavelength-source 1.56) ;mu
```

```

(define-param radius-ring 114) ; mu
(define-param height-ring 0.43) ; mu
(define-param band-last 9)
(define-param width-ring-min 0.1) ; mpb units
(define-param width-ring-max 3) ; mpb units
(define-param width-step 0.1)
(define a wavelength-source)
(define wl (/ wavelength-source a))
(define R (/ radius-ring a))
(define h (/ height-ring a))
; ***** set *****
(set! resolution 32)
(set! mesh-size 16)
(set! num-bands band-last)
(set! geometry-lattice (make lattice (size 7 7 no-size)))
; ***** functions *****
(define (n-func p) (make dielectric (index (* (nitride wl) (+ 1 (/ (vector3-x
p) R)))))) ; bending radius
(define (k-find wl w h num-bands)
(set! default-material (make dielectric (index (oxide wl))))
(set! geometry (list
(make block
(center 0 0 0)
(size w h infinity)
(material (make material-function (material-func n-func))))))
(find-k NO-PARITY (/ 1 wl) 1 num-bands (vector3 0 0 1) 1e-4 (* 2 (/ 1 wl)) 0 22))

```

```

; ***** simulation *****

(map (lambda (wl)

(do ((x width-ring-min (+ x width-step))) (> x width-ring-max))

(k-find wl x h num-bands)

(print "width:  " x "\n")))

(list wl (* 0.5 wl)))

```

B.2 Dispersão de ordens superiores

Para o cálculo de β_2 e β_4 achamos mais eficiente simular a relação de dispersão $k(\omega)$ com alta resolução e tolerância baixa, e obter as relações de dispersão de ordens superiores a partir de derivação numérica.

```

; author:  RR

; *****

; ***** sellmeier equations *****

(define (eSiN wl) (+ 1 (/ (* 3.0249 (sqr wl)) (- (sqr wl) (sqr 0.1353406)))) (/
(* 40314 (sqr wl)) (- (sqr wl) (sqr 1239.842)))))

(define (eSi0 wl) (+ 1.4124 (/ (* 0.69878 (sqr wl)) (- (sqr wl) (sqr 0.1120913))))
(/ (* 1.51608 (sqr wl)) (- (sqr wl) (sqr 12.11138)))))

; *****

; ***** lattice *****

(define-param sy 8)

(define-param sz 6)

(define-param tol 1e-12)

(set! geometry-lattice (make lattice (size no-size sy sz))) ; 2D geometry

(set-param! resolution 128)

```

```

(set-param! mesh-size 5)

(set-param! tolerance tol)

; *****

; ***** parameters *****

(define-param w 2) ; waveguide width [um]

(define-param bands 3) ; number of bands

(define-param wl-min 0.4)

(define-param wl-max 2)

(define-param num-int 147)

(define f-max (/ wl-min))

(define f-min (/ wl-max))

(define fs (interpolate num-int (list f-min f-max))) ; list of frequencies

; *****

; ***** find-k *****

(define (k-find f)

(set! default-material (make dielectric (epsilon (eSiO (/ f)))))

(set! geometry (list (make block

(center 0)

(size infinity w 0.73)

(material (make dielectric (epsilon (eSiN (/ f)))))))

(find-k TM f 1 bands (vector3 1) tol (* 2 f) (* 1.2 f) (* 2.4 f)))

; *****

; ***** simulation *****

(map

(lambda (f)

(print "eps:, " (eSiO (/ f)) "\t" (eSiN (/ f)) "\n")

```

```
(k-find f))

fs)
```

B.3 Cálculo da energia sobre a parede lateral do guia de onda

Este roteiro mostra o cálculo da energia dos modos transversos que é propagada pelas paredes laterais em função do raio de curvatura do guia de onda.

```
; author: RR

; *****

; ***** sellmeier equation *****

(define (nitride wl) (sqrt (+ 1 (/ 253.86 (- (expt 9.1609 2) (expt (/ 1239.842
(* wl a 1e3)) 2))) (/ 0.040314 (- (expt 0.001 2) (expt (/ 1239.842 (* wl a 1e3))
2))))))

(define (oxide wl) (sqrt (+ 1.4124 (/ 85.493 (- (expt 11.061 2) (expt (/ 1239.842
(* wl a 1e3)) 2))) (/ 0.015888 (- (expt 0.10237 2) (expt (/ 1239.842 (* wl a 1e3))
2))))))

; *****

; ***** parameters *****

(define-param wl 0.8) ; wavelength [um]

(define-param ww 2) ; width waveguide [um]

(define-param modes 3) ; first modes to calculate

(define-param R 132.6) ; radius [um]

(define x-dir (vector3 1))

(define-param k-mod 2.4)

(define-param k-vec (vector3* k-mod x-dir))
```

```

(define a 1)

; *****

; ***** set-param *****

(set-param! resolution 128)

(set-param! mesh-size 5)

(set-param! tolerance 1.0e-7)

; *****

; ***** define *****

(define n-func

(lambda(p)

(make dielectric (index (* (nitride wl) (+ 1 (/ (vector3-y p) R))))))

(define (energy-core m) ; energy inside core

(get-dfield m)

(compute-field-energy)

(print "energy-core: ")

(compute-energy-in-dielectric

(pow2 (oxide wl)) (pow2 (nitride wl))) "\n"))

(define (energy-overlap m) ; overlap over sidewall

(get-dfield m)

(compute-field-energy)

(print "energy-overlap: ")

(integrate

(lambda (z)

(get-energy-point (vector3 0 (* -0.5 ww) z)))

(* -0.5 0.73) (* 0.5 0.73) 0.01) "\n"))

; *****

```



```

; ***** geometry *****
(set! k-points (list k-vec))
(set! num-bands modes)
(set! eigensolver-block-size modes)
(set! geometry-lattice (make lattice (size no-size 4 3)))
(set! default-material (make dielectric (index (oxide wl))))
(set! geometry (list
(make block (center 0 0 0)
(size infinity ww 0.73)
(material (make material-function (material-func n-func))))))
; (material (make dielectric (index (nitride wl))))))
(run-tm energy-overlap)

```

APÊNDICE C

MÉTODO DE SPLIT-STEP

A equação de Schrödinger não-linear (NLSE) é uma equação diferencial parcial não-linear que em geral não possui solução analítica. Um tratamento numérico é necessário para a compreensão dos efeitos não-lineares que surgem quando há a propagação de um feixe de luz ao longo de um guia de onda. Existe uma diversidade de métodos utilizados para o estudo da dinâmica da NLSE, alguns mais, ou menos eficientes, no entanto, iremos nos dedicar ao método conhecido como *split-step* [43]. A escolha deste método foi devido à sua eficiência e facilidade de aplicação, por utilizar técnicas e ferramentas conhecidas em diversas linguagens. A eficiência deste método comparado com outros é atribuído em parte pelo uso do algoritmo da *rápida transformada de Fourier* (FFT) [122].

C.1 Desenvolvimento matemático

Para entender a utilização deste método é conveniente escrever a NLSE da seguinte forma

$$\partial_z A = (\hat{D} + \hat{N})A, \quad (\text{C.1})$$

onde $A(z, t)$ descreve a amplitude do feixe de bombeio em função da coordenada espacial z , na mesma direção de propagação do feixe, e do tempo t . O operador $\hat{D}$ descreve a atuação do meio dispersivo sobre campo propagante no guia de onda, e o operador $\hat{N}$ descreve a atuação da não-linearidade do material sobre o campo. É importante notar que o operador $\hat{D}$ é composto por derivadas temporais de diversas ordens, dependendo dos termos de dispersão envolvidos na dinâmica, e por um termo de multiplicação, caso consideremos uma propagação com perdas.

Enquanto que o operador $\hat{N}$ é proporcional à intensidade do feixe de bombeio, que em princípio, também pode depender de z e t . Iremos assumir que a intensidade do feixe de bombeio não é afetada ao longo da propagação, isto é, $|A|^2$ é uma constante.

Em geral, a dispersão e a não-linearidade atuam juntas ao longo do guia de onda. O método de split-step obtém uma solução aproximada, assumindo que em uma propagação ao longo do guia de onda por uma distância pequena h , a dispersão e a não-linearidade atuam separadas e independentes. Mais especificamente, uma propagação de z para $z + h$ é calculada em dois passos. No primeiro passo, a não-linearidade atua sozinha, $\hat{D} = 0$ na equação (C.1). No segundo passo, a dispersão atua sozinha, $\hat{N} = 0$ na equação (C.1). Matematicamente, isto significa que temos duas dinâmicas independentes

$$\partial_z A = \hat{N}A, \quad (\text{C.2})$$

$$\partial_z A = \hat{D}A. \quad (\text{C.3})$$

A equação (C.2) descreve a dinâmica não-linear da propagação através do operador $\hat{N}$, e possui apenas termos multiplicativos associados à intensidade do feixe e à não-linearidade do material. Sua solução é imediata e trivial $A(z + h, t) = \exp(h\hat{N})A(z, t)$. A equação (C.3) descreve o efeito dispersivo e as perdas sobre a propagação através do operador $\hat{D}$, que é composto, além do termo de atenuação, por derivadas parciais temporais. Sua solução é complicada e pode não haver solução analítica. No entanto, no espaço de frequências, derivadas temporais são interpretadas como multiplicação por frequências, isto é, no espaço de Fourier temos a seguinte correspondência $\partial_t \rightarrow i\omega$.

Podemos definir a transformada de Fourier da amplitude $A(z, t)$ como

$$\mathcal{F}A(z, t) \rightarrow \tilde{A}(z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(z, t) e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt, \quad (\text{C.4})$$

onde ω_0 é a frequência do feixe de bombeio. Da mesma forma, obtemos $A(z, t)$ por uma aplicação da transformada de Fourier inversa em $\tilde{A}(z, \omega)$, isto é, $A(z, t) = \mathcal{F}^{-1}\tilde{A}(z, \omega)$. Portanto, no espaço de frequências, o efeito dispersivo do meio material pode ser escrito como

$$\partial_z \tilde{A} = \hat{D}(i\omega) \tilde{A}, \quad (\text{C.5})$$

onde $\hat{D}(i\omega)$ é o operador de dispersão no espaço de Fourier. A equação (C.5) possui solução imediata dada por $\tilde{A}(z + h, \omega) = \exp(h\hat{D})\tilde{A}(z, \omega)$. Encontrada a solução da dinâmica dispersiva no espaço de frequências, a correspondente solução no espaço temporal é obtida diretamente da transformada de Fourier inversa. A solução geral aproximada da dinâmica (C.1) é então construída por

$$A(z + h, t) \approx e^{h\hat{N}} \mathcal{F}^{-1} e^{h\hat{D}(i\omega)} \mathcal{F} A(z, t). \quad (\text{C.6})$$

O procedimento para a obtenção da solução aproximada da equação de Schrödinger não-linear pelo método de split-step requer que para cada passo h de propagação do feixe seja cumprido as seguintes exigências:

- (i) Encontrar a solução exata da dinâmica dispersiva no espaço de frequências (C.5).
- (ii) Obter a transformada de Fourier inversa da solução exata.
- (iii) Aplicar a solução exata da dinâmica não-linear no espaço temporal (C.2).

Podemos notar que para a construção da solução, em cada passo h precisamos encontrar duas soluções exatas para as dinâmicas independentes e calcular duas transformadas de Fourier. Dependendo do tamanho de cada passo propagado pelo feixe, a simulação da NLSE pode ser temporalmente custosa. Para micro-ressonadores em anel em um meio com alto contraste de índices de refração, que

apresenta alta não-linearidade, o caminho médio percorrido pelo fóton pode ser bastante curto, exigindo que o tamanho do passo h seja ao menos inferior ao perímetro do anel. Apesar desta restrição sobre o tamanho do passo, o algoritmo da rápida transformada de Fourier FFT pode tornar a simulação ainda eficiente.

C.2 Estimativa de erro

Para estimar a acurácia do método de split-step, notamos que a solução formal e exata da equação (C.1) é dada por

$$A(z + h, t) = e^{h(\hat{N} + \hat{D})} A(z, t), \quad (\text{C.7})$$

se assumirmos $\hat{N}$ independente de z . Relembrando a fórmula de Baker-Hausdorff [123] para dois operadores não comutáveis $\hat{a}$ e $\hat{b}$

$$e^{\hat{a}} e^{\hat{b}} = \exp \left(\hat{a} + \hat{b} + \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{b}] + \frac{1}{12} [\hat{a} - \hat{b}, [\hat{a}, \hat{b}]] + \dots \right), \quad (\text{C.8})$$

onde $[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}$ é o comutador entre os operadores. Vemos que a solução exata pode ser aproximada pela equação (C.6) às custas de um erro, dado em primeira ordem pelo comutador entre os operadores. Fazendo $\hat{a} = h\hat{N}$ e $\hat{b} = h\hat{D}$, o termo de erro dominante é resultado do comutador $\frac{1}{2}h^2[\hat{N}, \hat{D}]$. Portanto, o método de split-step é preciso até a segunda ordem do tamanho do passo h .

A acurácia do método pode ser melhorada adaptando um procedimento diferente na propagação do feixe entre z e $z + h$. Este procedimento determina que os efeitos dispersivo e não-linear sejam calculados não concomitantemente. Matematicamente, trocamos a solução (C.6) por

$$A(z + h, t) \approx \mathcal{F}^{-1} e^{\frac{h}{2}\hat{D}(i\omega)} \mathcal{F} e^{h\hat{N}} \mathcal{F}^{-1} e^{\frac{h}{2}\hat{D}(i\omega)} \mathcal{F} A(z, t). \quad (\text{C.9})$$

A principal diferença é que o efeito não-linear é incluído no meio do segmento, ao invés de no segmento inteiro. Por causa da forma simétrica dos operadores exponenciais em (C.9), este esquema é conhecido como método simétrico de split-step [124]. A vantagem neste tratamento reside no termo dominante de erro, que agora aparece por causa do duplo comutador na fórmula (C.8), proporcional à h^3 [43].

C.3 FFT

A solução numérica da NLSE requer repetidos cálculos da transformada de Fourier de $A(z, t)$, e da transformada de Fourier inversa de $\tilde{A}(z, \omega)$. O melhor algoritmo para o cálculo da transformada de Fourier é a *rápida transformada de Fourier* (FFT), que está disponível em código pronto para diversas linguagens computacionais. A FFT eficientemente calcula a transformada de Fourier discreta

$$\tilde{F}_m = \sum_{n=0}^{N-1} F_n e^{-2\pi i n m / N}, \quad (\text{C.10})$$

e sua inversa

$$F_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{F}_m e^{2\pi i n m / N}. \quad (\text{C.11})$$

Para saber como a definição discreta da transformada de Fourier está relacionada com a definição contínua representada pela equação (C.4), precisamos assumir que é uma boa aproximação considerar um intervalo finito de integração na transformada de Fourier direta

$$\tilde{A}(z, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_i}^{t_f} A(z, t) e^{-i\omega t} dt. \quad (\text{C.12})$$

Esta aproximação é válida quando o intervalo de tempo considerado na análise da simulação é suficientemente longo para o sistema entrar num estado estacionário.

O próximo passo é aproximar a integral por uma soma de Riemann de N termos. Com este objetivo, vamos aproximar o intervalo temporal infinitesimal da integral por um passo temporal de tamanho $\Delta t \equiv (t_f - t_i)/N$. A discretização do tempo e da frequência pode ser feito definindo $t_n \equiv t_0 + n\Delta t$, e também $\omega_m \equiv \omega_0 + m\Delta\omega$, onde $\Delta\omega \equiv 2\pi/(N\Delta t)$. Dessa forma temos

$$\tilde{A}(z, \omega_m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{N-1} A(z, t_n) e^{-i\omega_m t_n} \Delta t. \quad (\text{C.13})$$

A escolha de um intervalo finito no tempo implica que também há uma limitação na frequência a ser considerada. A consequência é que para frequências altas, o tempo precisa ser escolhido adequadamente. Substituindo as definições de tempo e frequência discretas, obtemos

$$\left[\tilde{A}(z, \omega_m) e^{imt_0 \Delta\omega} \right] \approx \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} A(z, t_n) e^{-i\omega_0 t_n} \right] e^{-2\pi i m n / N}. \quad (\text{C.14})$$

Da mesma forma para a transformada de Fourier inversa, obtemos

$$\left[\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} A(z, t_n) e^{-i\omega_0 t_n} \right] \approx \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \left[\tilde{A}(z, \omega_m) e^{imt_0 \Delta\omega} \right] e^{2\pi i m n / N}. \quad (\text{C.15})$$

Comparando a equação (C.14) com a (C.15), obtemos a seguinte correspondência discreta da transformada de Fourier

$$\frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} A(z, t_n) e^{-i\omega_0 t_n} \xrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{A}(z, \omega_m) e^{imt_0 \Delta\omega}, \quad (\text{C.16})$$

válido para as aproximações consideradas acima. Dessa forma, utilizando a FFT podemos calcular a evolução da NLSE numericamente.

APÊNDICE D

ESTABILIZAÇÃO TÉRMICA

Qualquer medida de ressonância do anel sofre com a variação térmica ambiente. A variação térmica causa uma flutuação nas frequências de ressonância. A Figura D.1 mostra a estimativa da flutuação em um intervalo de tempo de 20 minutos.

Figura D.1: Variação na posição de ressonância do anel devido à flutuação térmica, em um intervalo de tempo de 20 minutos.

Observamos pela figura acima que a flutuação térmica causa uma variação na posição de ressonância do micro-ressoador livre superior a 1 GHz, para uma largura de banda de 300 MHz.

A Figura D.2 mostra o esquema de estabilização ativa da temperatura. O chip é apoiado sobre uma base de cobre, e esta mantém contato com um peltier. Ajustamos a temperatura do peltier em aproximadamente 12° C, a qual é alta o suficiente para evitar condensação de água sobre o chip. Qualquer flutuação para além do valor médio ajustado, ocorre a realimentação negativa, estabilizando a temperatura no valor médio. Usamos um circuito de PID para atuar sobre o peltier. A flutuação na temperatura, com o circuito de travamento, é inferior a 2 mK.

Figura D.2: Esquema mostrando o sistema de estabilização da temperatura do chip com um PID.

A Figura D.3 mostra a flutuação na frequência de ressonância com o sistema de travamento ativo. A parte (a) é a flutuação da frequência em unidades de largura de banda de banda, e a parte (b) mostra a largura de banda. Nota-se que a flutuação é $\sim 0,3\Gamma \approx 100$ MHz.

Figura D.3: Estabilidade térmica com o sistema de travamento. (a) Flutuação em unidades de largura de banda da ressonância. (b) Largura de banda da ressonância.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] K. Luke, Y. Okawachi, M. R. E. Lamont, A. L. Gaeta, and M. Lipson, "Broadband mid-infrared frequency comb generation in a Si₃N₄ microresonator," *Optics Letters*, vol. 40, p. 4823, Nov. 2015.
- [2] T. Bååk, "Silicon oxynitride; a material for GRIN optics," *Applied Optics*, vol. 21, p. 1069, Mar. 1982.
- [3] S. B. Papp, K. Beha, P. DelHaye, F. Quinlan, H. Lee, K. J. Vahala, and S. A. Diddams, "Microresonator frequency comb optical clock," *Optica*, vol. 1, p. 10, July 2014.
- [4] M.-G. Suh, Q.-F. Yang, K. Y. Yang, X. Yi, and K. J. Vahala, "Microresonator soliton dual-comb spectroscopy," *Science*, vol. 354, pp. 600–603, Nov. 2016.
- [5] T. J. Kippenberg, R. Holzwarth, and S. A. Diddams, "Microresonator-Based Optical Frequency Combs," *Science*, vol. 332, pp. 555–559, Apr. 2011.
- [6] T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala, "Kerr-Nonlinearity Optical Parametric Oscillation in an Ultrahigh-Q Toroid Microcavity," *Physical Review Letters*, vol. 93, Aug. 2004.
- [7] J. S. Levy, A. Gondarenko, M. A. Foster, A. C. Turner-Foster, A. L. Gaeta, and M. Lipson, "CMOS-compatible multiple-wavelength oscillator for on-chip optical interconnects," *Nature Photonics*, vol. 4, pp. 37–40, Jan. 2010.
- [8] T. Herr, V. Brasch, J. D. Jost, C. Y. Wang, N. M. Kondratiev, M. L. Gorodetsky, and T. J. Kippenberg, "Temporal solitons in optical microresonators," *Nature Photonics*, vol. 8, pp. 145–152, Feb. 2014.
- [9] W. Liang, D. Eliyahu, V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, D. Seidel, and L. Maleki, "High spectral purity Kerr frequency comb radio frequency photonic oscillator," *Nature Communications*, vol. 6, Dec. 2015.
- [10] X. Yi, Q.-F. Yang, K. Y. Yang, M.-G. Suh, and K. Vahala, "Soliton frequency comb at microwave rates in a high-Q silica microresonator," *Optica*, vol. 2, p. 1078, Dec. 2015.
- [11] K. E. Webb, M. Erkintalo, S. Coen, and S. G. Murdoch, "Experimental observation of coherent cavity soliton frequency combs in silica microspheres," *Optics Letters*, vol. 41, pp. 4613–4616, Oct. 2016.

- [12] V. Brasch, M. Geiselmann, T. Herr, G. Lihachev, M. H. P. Pfeiffer, M. L. Gorodetsky, and T. J. Kippenberg, "Photonic chipbased optical frequency comb using soliton Cherenkov radiation," *Science*, vol. 351, pp. 357–360, Jan. 2016.
- [13] M. Yu, Y. Okawachi, A. G. Griffith, M. Lipson, and A. L. Gaeta, "Mode-locked mid-infrared frequency combs in a silicon microresonator," *Optica*, vol. 3, p. 854, Aug. 2016.
- [14] T. J. Kippenberg, A. L. Gaeta, M. Lipson, and M. L. Gorodetsky, "Dissipative Kerr solitons in optical microresonators," *Science*, vol. 361, p. ean8083, Aug. 2018.
- [15] K. Saha, Y. Okawachi, J. S. Levy, R. K. W. Lau, K. Luke, M. A. Foster, M. Lipson, and A. L. Gaeta, "Broadband parametric frequency comb generation with a 1-m pump source," *Optics Express*, vol. 20, p. 26935, Nov. 2012.
- [16] L. Wang, L. Chang, N. Volet, M. H. P. Pfeiffer, M. Zervas, H. Guo, T. J. Kippenberg, and J. E. Bowers, "Frequency comb generation in the green using silicon nitride microresonators," *Laser & Photonics Reviews*, vol. 10, pp. 631–638, July 2016.
- [17] S. Miller, K. Luke, Y. Okawachi, J. Cardenas, A. L. Gaeta, and M. Lipson, "On-chip frequency comb generation at visible wavelengths via simultaneous second- and third-order optical nonlinearities," *Optics Express*, vol. 22, pp. 26517–26525, Nov. 2014.
- [18] M. Karpov, M. H. P. Pfeiffer, J. Liu, A. Lukashchuk, and T. J. Kippenberg, "Photonic chip-based soliton frequency combs covering the biological imaging window," *Nature Communications*, vol. 9, Dec. 2018.
- [19] G. Reich, "Near-infrared spectroscopy and imaging: Basic principles and pharmaceutical applications," *Advanced Drug Delivery Reviews*, vol. 57, pp. 1109–1143, June 2005.
- [20] A. M. Smith, M. C. Mancini, and S. Nie, "Second window for in vivo imaging: Bioimaging," *Nature Nanotechnology*, vol. 4, pp. 710–711, Nov. 2009.
- [21] W. Drexler, U. Morgner, R. K. Ghanta, F. X. Kärtner, J. S. Schuman, and J. G. Fujimoto, "Ultrahigh-resolution ophthalmic optical coherence tomography," *Nature Medicine*, vol. 7, pp. 502–507, Apr. 2001.
- [22] S. Lloyd, M. S. Shahriar, J. H. Shapiro, and P. R. Hemmer, "Long Distance,

- Unconditional Teleportation of Atomic States via Complete Bell State Measurements," *Physical Review Letters*, vol. 87, Sept. 2001.
- [23] B. B. Blinov, D. L. Moehring, L.-M. Duan, and C. Monroe, "Observation of entanglement between a single trapped atom and a single photon," *Nature*, vol. 428, p. 153, Mar. 2004.
- [24] S. Tanzilli, W. Tittel, M. Halder, O. Alibart, P. Baldi, N. Gisin, and H. Zbinden, "A photonic quantum information interface," *Nature*, vol. 437, pp. 116–120, Sept. 2005.
- [25] J. D. Harvey, R. Leonhardt, S. Coen, G. K. L. Wong, J. Knight, W. J. Wadsworth, and P. St.J. Russell, "Scalar modulation instability in the normal dispersion regime by use of a photonic crystal fiber," *Optics Letters*, vol. 28, p. 2225, Nov. 2003.
- [26] N. L. B. Sayson, K. E. Webb, S. Coen, M. Erkintalo, and S. G. Murdoch, "Widely tunable optical parametric oscillation in a Kerr microresonator," *Optics Letters*, vol. 42, p. 5190, Dec. 2017.
- [27] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons, 2012.
- [28] J. Helmcke and F. Riehle, "Physics behind the definition of the meter," in *Recent Advances in Metrology and Fundamental Constants*, p. 453, 2001.
- [29] E. Hecht, *Optics*. Reading, Mass: Addison-Wesley, 4 edition ed., Aug. 2001.
- [30] W. E. Born, *Principles of optics*. Oxford: Pergamon Press, 1964.
- [31] I. N. Court and F. K. von Willisen, "Frustrated Total Internal Reflection and Application of Its Principle to Laser Cavity Design," *Applied Optics*, vol. 3, p. 719, June 1964.
- [32] S. Zhu, A. W. Yu, D. Hawley, and R. Roy, "Frustrated total internal reflection: A demonstration and review," *American Journal of Physics*, vol. 54, pp. 601–607, July 1986.
- [33] C. F. Bohren and D. R. Huffman, *Absorption and scattering of light by small particles*. John Wiley & Sons, 2008.
- [34] H. R. Philipp, "Optical Properties of Silicon Nitride," *Journal of The Electrochemical Society*, vol. 120, pp. 295–300, Feb. 1973.

- [35] L. V. Rodríguez-de Marcos, J. I. Larruquert, J. A. Méndez, and J. A. Aznárez, "Self-consistent optical constants of SiO₂ and Ta₂O₅ films," *Optical Materials Express*, vol. 6, p. 3622, Nov. 2016.
- [36] H. A. Haus, *Waves and fields in optoelectronics*. Prentice-Hall, 1984.
- [37] A. F. Oskooi, D. Roundy, M. Ibanescu, P. Bermel, J. D. Joannopoulos, and S. G. Johnson, "Meep: A flexible free-software package for electromagnetic simulations by the FDTD method," *Computer Physics Communications*, vol. 181, pp. 687–702, Mar. 2010.
- [38] J.-P. Berenger, "A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves," *Journal of Computational Physics*, vol. 114, pp. 185–200, Oct. 1994.
- [39] S. Johnson and J. Joannopoulos, "Block-iterative frequency-domain methods for Maxwell's equations in a planewave basis," *Optics Express*, vol. 8, p. 173, Jan. 2001.
- [40] J. D. Joannopoulos, S. G. Johnson, J. N. Winn, and R. D. Meade, *Photonic crystals: molding the flow of light*. Princeton university press, 2011.
- [41] R. T. Schermer and J. H. Cole, "Improved Bend Loss Formula Verified for Optical Fiber by Simulation and Experiment," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 43, pp. 899–909, Oct. 2007.
- [42] Y. Okawachi, M. R. E. Lamont, K. Luke, D. O. Carvalho, M. Yu, M. Lipson, and A. L. Gaeta, "Bandwidth shaping of microresonator-based frequency combs via dispersion engineering," *Optics Letters*, vol. 39, p. 3535, June 2014.
- [43] G. P. Agarwal, *Nonlinear fiber optics*. academic Press San Diego, CA, 2001.
- [44] S. Coen, H. G. Randle, T. Sylvestre, and M. Erkintalo, "Modeling of octave-spanning Kerr frequency combs using a generalized mean-field LugiatoLefever model," *Optics Letters*, vol. 38, p. 37, Jan. 2013.
- [45] A. Mussot, E. Louvergneaux, N. Akhmediev, F. Reynaud, L. Delage, and M. Taki, "Optical Fiber Systems Are Convectively Unstable," *Physical Review Letters*, vol. 101, Sept. 2008.
- [46] M. E. Marhic, *Fiber optical parametric amplifiers, oscillators and related devices*. Cambridge university press, 2008.

- [47] A. Yariv, "Critical coupling and its control in optical waveguide-ring resonator systems," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 14, pp. 483–485, Apr. 2002.
- [48] P. DelHaye, A. Schliesser, O. Arcizet, T. Wilken, R. Holzwarth, and T. J. Kippenberg, "Optical frequency comb generation from a monolithic microresonator," *Nature*, vol. 450, pp. 1214–1217, Dec. 2007.
- [49] A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, W. Liang, V. S. Ilchenko, D. Seidel, and L. Maleki, "Kerr combs with selectable central frequency," *Nature Photonics*, vol. 5, pp. 293–296, May 2011.
- [50] T. Udem, R. Holzwarth, and T. W. Hänsch, "Optical frequency metrology," Mar. 2002.
- [51] A. Dutt, K. Luke, S. Manipatruni, A. L. Gaeta, P. Nussenzveig, and M. Lipson, "On-Chip Optical Squeezing," *Physical Review Applied*, vol. 3, Apr. 2015.
- [52] D. T. Spencer, T. Drake, T. C. Briles, J. Stone, L. C. Sinclair, C. Fredrick, Q. Li, D. Westly, B. R. Ilic, A. Bluestone, N. Volet, T. Komljenovic, L. Chang, S. H. Lee, D. Y. Oh, M.-G. Suh, K. Y. Yang, M. H. P. Pfeiffer, T. J. Kippenberg, E. Norberg, L. Theogarajan, K. Vahala, N. R. Newbury, K. Srinivasan, J. E. Bowers, S. A. Diddams, and S. B. Papp, "An optical-frequency synthesizer using integrated photonics," *Nature*, vol. 557, pp. 81–85, May 2018.
- [53] D. T. Spencer, J. F. Bauters, M. J. R. Heck, and J. E. Bowers, "Integrated waveguide coupled Si₃N₄ resonators in the ultrahigh-Q regime," *Optica*, vol. 1, p. 153, Sept. 2014.
- [54] C. H. Henry, R. F. Kazarinov, H. J. Lee, K. J. Orlowsky, and L. E. Katz, "Low loss Si₃N₄SiO₂ optical waveguides on Si," *Applied Optics*, vol. 26, pp. 2621–2624, July 1987.
- [55] X. Ji, F. A. S. Barbosa, S. P. Roberts, A. Dutt, J. Cardenas, Y. Okawachi, A. Bryant, A. L. Gaeta, and M. Lipson, "Ultra-low-loss on-chip resonators with sub-milliwatt parametric oscillation threshold," *Optica*, vol. 4, pp. 619–624, June 2017.
- [56] N. Zen, T. A. Puurtinen, T. J. Isotalo, S. Chaudhuri, and I. J. Maasilta, "Engineering thermal conductance using a two-dimensional phononic crystal," *Nature Communications*, vol. 5, Dec. 2014.

- [57] F. Xia, L. Sekaric, and Y. Vlasov, "Ultracompact optical buffers on a silicon chip," *Nature Photonics*, vol. 1, pp. 65–71, Jan. 2007.
- [58] P. Lautenschlager, P. B. Allen, and M. Cardona, "Temperature dependence of band gaps in Si and Ge," *Physical Review B*, vol. 31, pp. 2163–2171, Feb. 1985.
- [59] M. S. Nawrocka, T. Liu, X. Wang, and R. R. Panepucci, "Tunable silicon microring resonator with wide free spectral range," *Applied Physics Letters*, vol. 89, p. 071110, Aug. 2006.
- [60] N. Sherwood-Droz, H. Wang, L. Chen, B. G. Lee, A. Biberman, K. Bergman, and M. Lipson, "Optical 4CE4 hitless silicon router for optical Networks-on-Chip (NoC)," *Optics Express*, vol. 16, pp. 15915–15922, Sept. 2008.
- [61] W. M. J. Green, H. F. Hamann, L. Sekaric, M. J. Rooks, and Y. A. Vlasov, "Ultra-compact reconfigurable silicon optical devices using micron-scale localized thermal heating," in *OFC/NFOEC 2007 - 2007 Conference on Optical Fiber Communication and the National Fiber Optic Engineers Conference*, pp. 1–3, Mar. 2007.
- [62] R. Soref and B. Bennett, "Electrooptical effects in silicon," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 23, pp. 123–129, Jan. 1987.
- [63] R. W. Boyd, *Nonlinear optics*. Elsevier, 2003.
- [64] C. Pollock and M. Lipson, *Integrated Photonics*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [65] J. S. Levy, M. A. Foster, A. L. Gaeta, and M. Lipson, "Harmonic generation in silicon nitride ring resonators," *Optics express*, vol. 19, no. 12, pp. 11415–11421, 2011.
- [66] S. V. Govorkov, V. I. Emelyanov, N. I. Koroteev, G. I. Petrov, I. L. Shumay, and V. V. Yakovlev, "Inhomogeneous deformation of silicon surface layers probed by second-harmonic generation in reflection," *JOSA B*, vol. 6, pp. 1117–1124, June 1989.
- [67] S. Miller, Y.-H. D. Lee, J. Cardenas, A. L. Gaeta, A. L. Gaeta, M. Lipson, and M. Lipson, "Electro-optic effect in silicon nitride," in *CLEO: 2015 (2015), paper SF1G.4*, p. SF1G.4, Optical Society of America, May 2015.
- [68] R. S. Jacobsen, K. N. Andersen, P. I. Borel, J. Fage-Pedersen, L. H. Frandsen,

- O. Hansen, M. Kristensen, A. V. Lavrinenko, G. Moulin, H. Ou, C. Peucheret, B. Zsigri, and A. Bjarklev, "Strained silicon as a new electro-optic material," *Nature*, vol. 441, pp. 199–202, May 2006.
- [69] N. K. Hon, K. K. Tsia, D. R. Solli, B. Jalali, and J. B. Khurgin, "Stress-induced (2)in silicon Comparison between theoretical and experimental values," in *2009 6th IEEE International Conference on Group IV Photonics*, pp. 232–234, Sept. 2009.
- [70] A. Rodriguez, M. Soljai, J. D. Joannopoulos, and S. G. Johnson, " $X^{(2)}$ and $X^{(3)}$ harmonic generation at a critical power in inhomogeneous doubly resonant cavities," *Optics Express*, vol. 15, pp. 7303–7318, June 2007.
- [71] Z.-F. Bi, A. W. Rodriguez, H. Hashemi, D. Duchesne, M. Loncar, K.-M. Wang, and S. G. Johnson, "High-efficiency second-harmonic generation in doubly-resonant (2) microring resonators," *Optics express*, vol. 20, no. 7, pp. 7526–7543, 2012.
- [72] L.-W. Luo, N. Ophir, C. P. Chen, L. H. Gabrielli, C. B. Poitras, K. Bergmen, and M. Lipson, "WDM-compatible mode-division multiplexing on a silicon chip," *Nature Communications*, vol. 5, Dec. 2014.
- [73] B. Stern, X. Zhu, C. P. Chen, L. D. Tzuang, J. Cardenas, K. Bergman, and M. Lipson, "On-chip mode-division multiplexing switch," *Optica*, vol. 2, p. 530, June 2015.
- [74] A. Mohanty, M. Zhang, A. Dutt, S. Ramelow, P. Nussenzveig, and M. Lipson, "Quantum interference between transverse spatial waveguide modes," *Nature Communications*, vol. 8, p. 14010, Jan. 2017.
- [75] J. Wang, P. Chen, S. Chen, Y. Shi, and D. Dai, "Improved 8-channel silicon mode demultiplexer with grating polarizers," *Optics Express*, vol. 22, p. 12799, June 2014.
- [76] Y.-D. Yang, Y. Li, Y.-Z. Huang, and A. W. Poon, "Silicon nitride three-mode division multiplexing and wavelength-division multiplexing using asymmetrical directional couplers and microring resonators," *Optics Express*, vol. 22, p. 22172, Sept. 2014.
- [77] A. C. Turner, M. A. Foster, A. L. Gaeta, and M. Lipson, "Ultra-low power parametric frequency conversion in a silicon microring resonator," *Optics Express*, vol. 16, p. 4881, Mar. 2008.

- [78] V. S. Ilchenko, A. A. Savchenkov, A. B. Matsko, and L. Maleki, "Nonlinear Optics and Crystalline Whispering Gallery Mode Cavities," *Physical Review Letters*, vol. 92, p. 043903, Jan. 2004.
- [79] J. U. Fürst, D. V. Strekalov, D. Elser, M. Lassen, U. L. Andersen, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Naturally Phase-Matched Second-Harmonic Generation in a Whispering-Gallery-Mode Resonator," *Physical Review Letters*, vol. 104, Apr. 2010.
- [80] R. C. Eckardt, C. D. Nabors, W. J. Kozlovsky, and R. L. Byer, "Optical parametric oscillator frequency tuning and control," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 8, p. 646, Mar. 1991.
- [81] K. S. Zhang, T. Coudreau, M. Martinelli, A. Maître, and C. Fabre, "Generation of bright squeezed light at 1.06 μ m using cascaded nonlinearities in a triply resonant cw periodically-poled lithium niobate optical parametric oscillator," *Physical Review A*, vol. 64, Aug. 2001.
- [82] J. U. Fürst, D. V. Strekalov, D. Elser, A. Aiello, U. L. Andersen, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Low-Threshold Optical Parametric Oscillations in a Whispering Gallery Mode Resonator," *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 263904, Dec. 2010.
- [83] A. D. Boardman, L. Pavlov, and S. Tanev, *Advanced Photonics with Second-Order Optically Nonlinear Processes*. Springer Science & Business Media, Dec. 2012.
- [84] T. Debuisschert, A. Sizmann, E. Giacobino, and C. Fabre, "Type-II continuous-wave optical parametric oscillators: oscillation and frequency-tuning characteristics," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 10, p. 1668, Sept. 1993.
- [85] L. A. Lugiato, C. Oldano, C. Fabre, E. Giacobino, and R. J. Horowicz, "Bistability, self-pulsing and chaos in optical parametric oscillators," *Il Nuovo Cimento D*, vol. 10, pp. 959–977, Aug. 1988.
- [86] M. Erkintalo, Y. Q. Xu, S. G. Murdoch, J. M. Dudley, and G. Genty, "Cascaded Phase Matching and Nonlinear Symmetry Breaking in Fiber Frequency Combs," *Physical Review Letters*, vol. 109, Nov. 2012.
- [87] S. J. Garth and C. Pask, "Four-photon mixing and dispersion in single-mode fibers," *Optics Letters*, vol. 11, p. 380, June 1986.

- [88] M. Haelterman, S. Trillo, and S. Wabnitz, "Dissipative modulation instability in a nonlinear dispersive ring cavity," *Optics Communications*, vol. 91, pp. 401–407, Aug. 1992.
- [89] P. K. A. Wai, C. R. Menyuk, Y. C. Lee, and H. H. Chen, "Nonlinear pulse propagation in the neighborhood of the zero-dispersion wavelength of monomode optical fibers," *Optics Letters*, vol. 11, p. 464, July 1986.
- [90] G. P. Agrawal, "Modulation instability induced by cross-phase modulation," *Physical Review Letters*, vol. 59, pp. 880–883, Aug. 1987.
- [91] T. Hansson, D. Modotto, and S. Wabnitz, "Dynamics of the modulational instability in microresonator frequency combs," *Physical Review A*, vol. 88, Aug. 2013.
- [92] C. Godey, I. V. Balakireva, A. Coillet, and Y. K. Chembo, "Stability analysis of the spatiotemporal Lugiato-Lefever model for Kerr optical frequency combs in the anomalous and normal dispersion regimes," *Physical Review A*, vol. 89, June 2014.
- [93] M. Haelterman, S. Trillo, and S. Wabnitz, "Additive-modulation-instability ring laser in the normal dispersion regime of a fiber," *Optics Letters*, vol. 17, p. 745, May 1992.
- [94] S. Coen and M. Haelterman, "Modulational Instability Induced by Cavity Boundary Conditions in a Normally Dispersive Optical Fiber," *Physical Review Letters*, vol. 79, pp. 4139–4142, Nov. 1997.
- [95] T. Hansson and S. Wabnitz, "Frequency comb generation beyond the Lugiato-Lefever equation: multi-stability and super cavity solitons," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 32, p. 1259, July 2015.
- [96] L. A. Lugiato and R. Lefever, "Spatial Dissipative Structures in Passive Optical Systems," *Physical Review Letters*, vol. 58, pp. 2209–2211, May 1987.
- [97] M. R. E. Lamont, Y. Okawachi, and A. L. Gaeta, "Route to stabilized ultra-broadband microresonator-based frequency combs," *Optics Letters*, vol. 38, p. 3478, Sept. 2013.
- [98] J. R. de Oliveira, M. A. de Moura, J. M. Hickmann, and A. S. L. Gomes, "Self-steepening of optical pulses in dispersive media," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 9, p. 2025, Nov. 1992.

- [99] V. Torres-Company, D. Castelló-Lurbe, and E. Silvestre, "Comparative analysis of spectral coherence in microresonator frequency combs," *Optics Express*, vol. 22, p. 4678, Feb. 2014.
- [100] I. D. Rukhlenko, M. Premaratne, and G. P. Agrawal, "Analytical study of optical bistability in silicon ring resonators," *Optics Letters*, vol. 35, p. 55, Jan. 2010.
- [101] H. M. Gibbs, S. L. McCall, and T. N. C. Venkatesan, "Differential Gain and Bistability Using a Sodium-Filled Fabry-Perot Interferometer," *Physical Review Letters*, vol. 36, pp. 1135–1138, May 1976.
- [102] M. R. Lamont, B. T. Kuhlmeiy, and C. M. de Sterke, "Multi-order dispersion engineering for optimal four-wave mixing," *Optics Express*, vol. 16, p. 7551, May 2008.
- [103] R. Stolen and J. Bjorkholm, "Parametric amplification and frequency conversion in optical fibers," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 18, pp. 1062–1072, July 1982.
- [104] R. A. Sammut and S. J. Garth, "Multiple-frequency generation on single-mode optical fibers," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 6, p. 1732, Sept. 1989.
- [105] S.-W. Huang, H. Zhou, J. Yang, J. McMillan, A. Matsko, M. Yu, D.-L. Kwong, L. Maleki, and C. Wong, "Mode-Locked Ultrashort Pulse Generation from On-Chip Normal Dispersion Microresonators," *Physical Review Letters*, vol. 114, p. 053901, Feb. 2015.
- [106] S. Ramelow, A. Farsi, S. Clemmen, J. S. Levy, A. R. Johnson, Y. Okawachi, M. R. E. Lamont, M. Lipson, and A. L. Gaeta, "Strong polarization mode coupling in microresonators," *Optics Letters*, vol. 39, p. 5134, Sept. 2014.
- [107] T. Herr, V. Brasch, J. Jost, I. Mirgorodskiy, G. Lihachev, M. Gorodetsky, and T. Kippenberg, "Mode Spectrum and Temporal Soliton Formation in Optical Microresonators," *Physical Review Letters*, vol. 113, Sept. 2014.
- [108] T. Carmon, H. G. L. Schwefel, L. Yang, M. Oxborrow, A. D. Stone, and K. J. Vahala, "Static Envelope Patterns in Composite Resonances Generated by Level Crossing in Optical Toroidal Microcavities," *Physical Review Letters*, vol. 100, Mar. 2008.

- [109] V. R. Almeida, R. R. Panepucci, and M. Lipson, "Nanotaper for compact mode conversion," *Optics Letters*, vol. 28, p. 1302, Aug. 2003.
- [110] T. Carmon, L. Yang, and K. J. Vahala, "Dynamical thermal behavior and thermal self-stability of microcavities," *Optics Express*, vol. 12, pp. 4742–4750, Oct. 2004.
- [111] P. Del'Haye, O. Arcizet, M. L. Gorodetsky, R. Holzwarth, and T. J. Kippenberg, "Frequency comb assisted diode laser spectroscopy for measurement of microcavity dispersion," *Nature Photonics*, vol. 3, pp. 529–533, Sept. 2009.
- [112] I. S. Grudinin, L. Baumgartel, and N. Yu, "Impact of cavity spectrum on span in microresonator frequency combs," *Optics Express*, vol. 21, pp. 26929–26935, Nov. 2013.
- [113] X. Xue, Y. Xuan, Y. Liu, P.-H. Wang, S. Chen, J. Wang, D. E. Leaird, M. Qi, and A. M. Weiner, "Mode-locked dark pulse Kerr combs in normal-dispersion microresonators," *Nature Photonics*, vol. 9, pp. 594–600, Sept. 2015.
- [114] A. B. Matsko, A. A. Savchenkov, S.-W. Huang, and L. Maleki, "Clustered frequency comb," *Optics Letters*, vol. 41, p. 5102, Nov. 2016.
- [115] S.-W. Huang, A. K. Vinod, J. Yang, M. Yu, D.-L. Kwong, and C. W. Wong, "Quasi-phase-matched multispectral Kerr frequency comb," *Optics Letters*, vol. 42, p. 2110, June 2017.
- [116] M. Yu, C. J. McKinstrie, and G. P. Agrawal, "Modulational instabilities in dispersion-flattened fibers," *Physical Review E*, vol. 52, pp. 1072–1080, July 1995.
- [117] T. Herr, M. L. Gorodetsky, and T. J. Kippenberg, "Dissipative Kerr solitons in optical microresonators," *arXiv:1508.04989 [physics]*, Aug. 2015. arXiv: 1508.04989.
- [118] T. J. Kippenberg, S. M. Spillane, and K. J. Vahala, "Modal coupling in traveling-wave resonators," *Optics Letters*, vol. 27, p. 1669, Oct. 2002.
- [119] Y. Liu, Y. Xuan, X. Xue, P.-H. Wang, S. Chen, A. J. Metcalf, J. Wang, D. E. Leaird, M. Qi, and A. M. Weiner, "Investigation of mode coupling in normal-dispersion silicon nitride microresonators for Kerr frequency comb generation," *Optica*, vol. 1, pp. 137–144, Sept. 2014.

- [120] C. González-Arciniegas, N. Treps, and P. Nussenzveig, "Third-order non-linearity OPO: Schmidt mode decomposition and tripartite entanglement," *Optics Letters*, vol. 42, p. 4865, Dec. 2017.
- [121] A. S. Coelho, F. a. S. Barbosa, K. N. Cassemiro, A. S. Villar, M. Martinelli, and P. Nussenzveig, "Three-Color Entanglement," *Science*, vol. 326, pp. 823–826, Nov. 2009.
- [122] J. W. Cooley and J. W. Tukey, "An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series," *Mathematics of Computation*, vol. 19, no. 90, pp. 297–301, 1965.
- [123] G. H. Weiss and A. A. Maradudin, "The BakerHausdorff Formula and a Problem in Crystal Physics," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 3, pp. 771–777, July 1962.
- [124] J. A. Fleck, J. R. Morris, and M. D. Feit, "Time-dependent propagation of high energy laser beams through the atmosphere," *Applied physics*, vol. 10, pp. 129–160, June 1976.