UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Processos semi-clássicos em buracos negros e buracos de minhoca quase-extremos

Marlon José Polo Cuello

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Carlos Molina Mendes

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Molina Mendes (EACH-USP)

Prof. Dr. Elcio Abdalla (IF-USP)

Prof. Dr. Vilson Tonin Zanchin (UFABC)

São Paulo

2014

-
-
-

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Polo Cuello, Marlon José

Processos semi-clássicos em buracos negros e buracos de minhoca quase-extremos. São Paulo, 2014.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Molina Mendes

Área de Concentração: Gravitação

Unitermos: 1. Buracos negros; 2. Buracos de minhoca; 3. Relatividade (Física); 4. Tunelamento quântico.

USP/IF/SBI-106/2014

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

Processos semi-clássicos em buracos negros e buracos de minhoca quase-extremos

Marlon José Polo Cuello

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Carlos Molina Mendes

São Paulo

2014

À minha família Max, Taliana e Tatiana.

*A paciência é amarga, mas
seus frutos são doces.*

Marlos Diaz Florez

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Molina Mendes, pela oportunidade de trabalho em sua área de pesquisa, pelo apoio, ajuda, compreensão e por sua paciência durante estes três anos de mestrado.

Aos excelentes professores que tive nas disciplinas cursadas no IFUSP por ensinar para mim seus conhecimentos.

À minha esposa Tatiana Orozco, pela compreensão e apoio durante estes 8 anos de relação.

À minha família: meus irmãos Karen e Oscar e em especial a meus pais Oscar e Maria, pelo apoio desde o início de meus estudos.

Ao pessoal da CPG IFUSP: Maria Izabel, Ever e Cláudia pela boa atenção e colaboração.

Ao pessoal do departamento de física matemática do IFUSP, Cecilia, Amélia e Simone por sua colaboração durante minha permanência no IFUSP.

Ao meu amigo e compadre Osman de la Cruz, por sua verdadeira amizade e apoio.

Aos meus amigos da Pós-Graduação: Yuber Perez, Hugo Camacho, Juliano Neves e Wallace Elias, pela ajuda e conselhos durante este tempo.

À Capes pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação são explorados efeitos clássicos e semi-clássicos em espaços-tempos quase-extremos. Na classe de geometrias tratadas aqui, uma região estática entre dois horizontes é considerada, de forma que estes horizontes estão muito próximos e as suas gravidades superficiais são muito pequenas. Este limite quase-extremo surge em vários contextos de interesse, envolvendo buracos negros assintoticamente de Sitter, buracos de minhoca e buracos negros em universos com seção espacial compacta. No trabalho desenvolvido, buracos de minhoca ligando duas regiões com horizontes cosmológicos são estudados em detalhes. Uma vez caracterizada, algumas das propriedades clássicas destas estruturas e efeitos semi-clássicos são explorados. O tratamento quântico proposto leva naturalmente a uma caracterização termodinâmica associada aos horizontes atrapantes presentes na geometria. Consideramos especificamente propriedades térmicas associadas a um campo escalar nos espaços-tempos de interesse. Uma revisão do formalismo de Hayward é feito, com a sua adaptação para espaços-tempos importantes. Buracos de minhoca no regime quase-extremo são discutidos em detalhes.

Abstract

In this dissertation, classical and semi-classical effects in quasi-extreme spacetimes are explored. In the class of geometries treated here, a static region between two horizons is considered, in such a way that these horizons are very close and their surface gravities are very small. This quasi-extreme limit appears in several contexts of interest, such as asymptotically de Sitter black holes, wormholes and black holes in universes with compact spatial section. In the developed work, wormholes connecting two regions bounded by cosmological horizons are studied in detail. Once some of the classical properties of these structures are characterized, semi-classical effects are explored. The proposed quantum treatment naturally leads to a thermodynamic characterization associated to the trapping horizons present in the geometry. We specifically consider thermal properties associated to a scalar field in the spacetimes of interest. A review of Hayward's formalism is presented, with a proper adaptation to important space-times. Wormholes in the near extreme regime are discussed in detail.

Sumário

1	Introdução	1
2	Relatividade Geral	5
2.1	Relatividade e espaço-tempo	5
2.2	Causalidade	7
2.3	Derivada covariante	9
2.4	Curvatura	11
2.5	Equações de Einstein	13
2.6	Simetrias	17
3	Buracos Negros Esfericamente Simétricos	20
3.1	Singularidades	21
3.2	Extensões maximais	23
3.3	Horizontes de Killing	27
3.4	Gravidade superficial	29
3.5	Termodinâmica de buracos negros	31
4	Buracos de Minhoca Esfericamente Simétricos	35
4.1	Buracos de minhoca atravessáveis	36
4.2	Geometria próxima à garganta	39
4.3	Um sistema de coordenadas conveniente	42
4.4	Tensor energia-momento na garganta	43

5	Horizontes Atrapantes e Termodinâmica Generalizada	47
5.1	Superfícies atrapadas e horizontes atrapantes	47
5.2	Campo vetorial de Kodama	53
5.3	Gravidade superficial geométrica	55
5.4	A garganta como um horizonte atrapante	57
5.5	Termodinâmica generalizada	59
5.6	Tunelamento através de horizontes atrapantes	61
6	Processos Térmicos em Geometrias Quase-Extremas	65
6.1	Buracos de minhoca quase-extremos	65
6.2	Tunelamento em buracos de minhoca estáticos	70
6.3	Tunelamento em horizontes cosmológicos	74
6.4	Termodinâmica em geometrias quase-extremas	78
7	Conclusões	84
A	Geometrias Quase-Extremas mais Gerais	86
	Referências Bibliográficas	91

Lista de Figuras

2.1	Um mapa é uma transformação $\phi: U \longrightarrow R^4$ que relaciona um subconjunto de uma variedade com $\mathbb{R}^4$. Quando duas mapas de uma variedade se interceptam uma transformação de coordenadas é induzida.	6
2.2	Estrutura causal do espaço-tempo em um nível local.	8
2.3	Percurso definido por dois deslocamentos infinitesimais dx^μ e dx^ν . . .	11
3.1	Diagrama conforme da métrica de Schwarzschild. O horizonte de eventos $r = 2M$, superfície que separa os pontos no espaço-tempo que são conectados por curvas tipo tempo de aqueles que não estão ($r_+ = 2M$). As partículas (ou sinais) dentro do horizonte de eventos terminam em singularidades ($r = 0$), fora deste a mesmas terminam no infinito $r \rightarrow \infty$	32
4.1	(Esquerda) Comportamento da função $r(l)$ próximo da garganta ($l = 0$) em um buraco de minhoca. (Direita) Comportamento das funções inversas de $r(l)$, próximas ao ponto $r = r_0$	41
4.2	(Esquerda) Diagrama de imersão da superfície (t_0, r, θ_0, ϕ) associada a um buraco de minhoca. (Direita) Seção $z - r$ do diagrama, com destaque para a divergência de dz/dr na garganta.	42
4.3	(Esquerda) Comportamento da função $r(r^*)$ próximo da garganta ($r^* = 0$) em um buraco de minhoca. (Direita) Comportamento das funções inversas de $r(r^*)$, próximas ao ponto $r = r_0$	43

5.1	Cones de luz futuros em torno de um horizonte atrapante. Na região interna, os cones de luz estão inclinados “para dentro”. Cada ponto na região a esquerda do horizonte representa uma superfície atrapada. Na figura apresentada, o horizonte atrapante é do tipo luz, e descreve a fronteira de um buraco negro.	49
5.2	Cones de luz futuros em torno de um horizonte atrapante tipo tempo. Na figura apresentada, o horizonte atrapante é do tipo tempo, e descreve a garganta de um buraco de minhoca.	58
6.1	Cones de luz futuros em torno de um horizonte atrapante que descreve um horizonte cosmológico futuro. Na região externa, os cones de luz estão inclinados “para fora”.	67
6.2	Comportamento da função $r(r^*)$ para geometrias tipo buraco de minhoca quase-extremas.	70
6.3	Caminho de integração na integral em (6.35).	73
6.4	Caminho de integração na integral (complexificada) em (6.61).	77
A.1	Comportamento da função $r(r^*)$ para as geometrias Schwarzschild-de Sitter quase-extremas.	88
A.2	Comportamento da função $r(r^*)$ para um buraco negro quase-extremo em um universo compacto.	90

Capítulo 1

Introdução

Buracos negros têm tido um papel central no desenvolvimento da física gravitacional nas últimas décadas. Do ponto de vista astrofísico, um buraco negro é um objeto extremamente compacto que gera um poço acentuado de potencial gravitacional. Fortes evidências observacionais para a existência e relevância de buracos negros têm se acumulado nas últimas décadas [1, 2]. A identificação de que estes objetos possuem propriedades termodinâmicas, e a ligação destas propriedades com características semi-clássicas e quânticas da gravidade é um dos pontos centrais da investigação teórica destes objetos.

Ainda assim, a definição padrão de um buraco negro, baseada no seu horizonte de eventos é, em muitos aspectos, pouco satisfatória. Um horizonte de eventos é uma propriedade global de um espaço-tempo, dependendo da estrutura de seus infinitos. Não está diretamente associado a campos gravitacionais fortes ou a qualquer quantidade puramente local. A detecção destas estruturas depende portanto de informações sempre no futuro distante, o que as tornam de pouca relevância para observadores que têm acesso a medidas locais. Dadas estas dificuldades, caracterizações alternativas de buracos negros têm sido propostas. Nestas definições, o buraco negro é limitado por estruturas bem definidas do ponto de vista local. Entre as propostas mais exploradas na literatura, o horizonte de eventos é substituído por horizontes de Killing, horizontes atrapantes ou horizontes isolados, entre as mais citadas [3].

Neste trabalho, o formalismo utilizado é baseado nos chamados *horizonte atrapante* [4]. Para as soluções de vácuo esfericamente simétricas da relatividade geral, o horizonte atrapante coincide com o horizonte de eventos. Mas para soluções com

matéria ou soluções dinâmicas, a hipersuperfície que caracteriza o horizonte atrapante não necessariamente coincide com o horizontes eventos mesmo quando este pode ser definido, o que nem sempre é o caso. Horizontes atrapantes capturam a noção intuitiva de uma superfície da qual nada escapa, ao mesmo tempo que têm uma caracterização local e geométrica. Uma descrição unificada de outros objetos de interesse em relatividade geral pode ser feita através de horizontes atrapantes.

Procuramos nesta dissertação explorar a caracterização de buracos de minhoca na linguagem dos horizontes atrapantes. Um buraco de minhoca é uma região compacta e topologicamente não trivial do espaço-tempo. Mais intuitivamente, pode ser visto como uma ligação entre regiões distintas do espaço-tempo. Embora sejam certamente estruturas exóticas, elas aparecem como soluções exatas das equações de Einstein e são compatíveis com a física microscópica usual, ao mesmo tempo que não existem evidências experimentais que descartem a possibilidade de buracos de minhoca como objetos físicos. Vistas como um “laboratório teórico”, estas estruturas estão intimamente ligadas a questões estruturais em teorias gravitacionais clássicas e semi-clássicas, associadas a problemas envolvendo causalidade e topologia [5, 6, 7]. Observações cosmológicas [8, 9, 10] e novas propostas teóricas têm motivado um interesse renovado em geometrias que descrevem buracos de minhoca Lorentzianos.

Uma vez que um buraco negro (ou um buraco de minhoca) é descrito através do seu horizonte atrapante, surge a questão de como a termodinâmica generalizada pode ser desenvolvida neste novo formalismo. A associação de uma temperatura a um buraco negro é necessariamente feita considerando-se efeitos quânticos. Em última análise, uma formulação quântica rigorosa só é factível com uma teoria quântica da gravidade bem desenvolvida, que ainda não está disponível. Ainda assim, considerações semi-clássicas são possíveis, e a partir deste tipo de abordagem foi observado o caráter térmico de um buraco negro. Vários formalismos foram desenvolvidos para esta questão, em particular métodos envolvendo tunelamento quântico em geometrias curvas.

Formalismos de tunelamento quântico foram desenvolvidos em formas ligeiramente diferentes por Parikh e Wilczek [11], Massar e Parentani [12], e Padmanabhan *et al.* [13]. Estes formalismos fornecem uma formulação precisa para a ideia de que a emissão térmica de buracos negros seja o resultado da separação de pares de partículas virtuais pelo horizonte. Uma característica relevante destes métodos é que eles podem ser adaptados para levar em conta a presença de horizontes atrapantes [14]. Desta forma, efeitos quânticos observados em buracos negros podem ser estendidos

para objetos como buracos de minhoca e anéis de minhoca.

O trabalho apresentado nesta dissertação pretende explorar alguns aspectos das chamadas geometrias quase-extremas. Nesta classe de geometrias, uma região estática entre dois horizontes de Killing (ou atrapantes) é considerada, de forma que estes horizontes estão muito próximos. Este limite quase-extremo surge em vários contextos de interesse, envolvendo buracos negros assintoticamente de Sitter, buracos de minhoca em mundos brana e buracos negros em universos com seção espacial compacta.

A estrutura da dissertação segue algumas das linhas de pesquisa comentadas nesta introdução. No capítulo 2 é feita uma breve síntese de relatividade geral e das soluções da equação de Einstein usadas neste trabalho. São caracterizados os conceitos de derivada covariante, transporte paralelo e geodésicas, para definir o escalar de curvatura e os tensores de Riemman, Ricci e Einstein. As equações de campo da relatividade geral – equações de Einstein – são apresentadas e discutidas. Encerramos com a definição de simetrias em relatividade, e com a introdução das geometrias de interesse neste trabalho, os espaços-tempos esfericamente simétricos.

Nos capítulos 3 e 4 as estruturas conhecidas como buracos negros e buracos de minhoca são introduzidas. Condições para a existência de singularidades, horizonte de eventos, horizontes de Killing são discutidas. A gravidade superficial em horizontes de Killing genéricos é expressa em termos das componentes da métrica. A termodinâmica de buracos negros é apresentada. A geometria na garganta de um buraco de minhoca é caracterizada. Condições para a existência de buracos de minhoca são apresentadas, e a necessidade de matéria exótica para manter estes objetos é estabelecida.

No capítulo 5, o formalismo dos horizontes atrapantes é apresentado. São definidos e discutidos alguns elementos básicos deste formalismo, como os campos de Kodama e a gravidade superficial generalizada. Uma versão generalizada da termodinâmica de buracos negros mediante horizontes atrapantes é apresentada.

No capítulo 6 as geometrias quase-extremas de interesse são abordadas. O método de tunelamento é aplicado a garganta e aos horizontes de Killing destas geometrias. Relações termodinâmicas são obtidas no limite quase-extremo, e os processos térmicos nesta classe de espaços-tempos é discutido. Comentários finais e conclusões são apresentados no capítulo 7.

No desenvolvimento apresentado nesta dissertação, a métrica tem assinatura $(-, +, +, +)$. Todos os resultados são expressos em unidades geométricas, nas quais

a velocidade da luz c e a constante gravitacional G são iguais a 1. As constantes de Boltzmann k_b e de Planck reduzida $\hbar$, a menos de algumas seções, são expressas como iguais a 1.

Capítulo 2

Relatividade Geral

A relatividade geral é uma teoria de campos clássica, publicada em 1915 pelo físico alemão Albert Einstein [15]. A mesma descreve a *gravitação*, uma das quatro interações fundamentais da natureza. Nesta teoria, o conceito de força gravitacional é substituído pelo de *curvatura*, postulando uma interdependência entre a matéria e a geometria do espaço-tempo. Descreve o universo em grande escala, sugerindo inclusive novos tipos de matéria, como a chamada matéria escura [16]. As propriedades de certas estruturas exploradas neste trabalho, os buracos negros e buracos de minhoca, são descritos pela relatividade geral. No presente capítulo, daremos uma breve descrição dos conceitos mais relevantes em nosso trabalho que concerne a esta teoria.

2.1 Relatividade e espaço-tempo

O tratamento matemático da teoria da Relatividade Geral tem suas fontes na geometria diferencial. Para descrever matematicamente um espaço-tempo curvo, é usado o conceito matemático de *variedade*. De forma pouco rigorosa, uma variedade quadridimensional $\mathcal{M}^4$ é um espaço que localmente tem o aspecto de $\mathbb{R}^4$. Esta descrição implica que em cada ponto da variedade existe uma transformação inversível ϕ que mapeia um subconjunto da variedade em $\mathbb{R}^4$, $U \subset \mathcal{M}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, como mostra a figura 2.1.

Assim as coordenadas em $\mathbb{R}^4$ induzem coordenadas locais x^μ na variedade $\mathcal{M}^4$, devido à transformação inversa ϕ^{-1} . A função inversível ϕ e as coordenadas locais induzidas formam um mapa. Se dois mapas ϕ_a e ϕ_b se interceptam em uma região

Figura 2.1: Um mapa é uma transformação $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^4$ que relaciona um subconjunto de uma variedade com $\mathbb{R}^4$. Quando duas mapas de uma variedade se interceptam uma transformação de coordenadas é induzida.

da variedade, as transformações inversas ϕ_a^{-1} e ϕ_b^{-1} (linhas quebradas na figura 2.1) induzem dois sistemas de coordenadas x^μ e y^ν .

Dado que existe uma intersecção destes mapas, as transformações ϕ_a e ϕ_b e as coordenadas induzidas devem satisfazer, na região de intersecção uma transformação, $\varphi = \phi_a \circ \phi_b^{-1}$ (e sua inversa) relacionada com as coordenadas x^μ e y^ν de cada mapa. Ou seja, na região de intercepção deve existir uma troca de coordenadas que permite fazer uma relação de um sistema de coordenadas para o outro, como mostra a figura 2.1.

Uma vez caracterizada a variedade e seus sistemas de coordenadas (mapas), mais estruturas podem ser definidas. Em particular, funções escalares, campos vetoriais, e de forma mais geral, campos tensoriais, podem ser introduzidos [17, 18]. Uma estrutura de fundamental importância na relatividade geral é a estrutura métrica. O tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ é um tensor de ordem dois, simétrico pela troca de índices,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (2.1)$$

normalmente especificado através do intervalo

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Chama-se *assinatura* da métrica ao número de autovalores positivos e negativos que tem a mesma quando é expressa em sua forma canônica [19]

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (2.3)$$

onde a expressão “diag” é uma matriz diagonal com os elementos aí mostrados. Dependendo de como é a assinatura da métrica é possível caracterizar a mesma. Se todos os sinais são positivos a métrica é chamada *Riemanniana*, se tem um só menos (-) a mesma é chamada *Lorentziana*. No caso onde qualquer dos autovalores da métrica é zero a mesma é chamada degenerada, e sua inversa não é bem definida.

O conjunto formado pela variedade (equipada com mapas diferenciáveis) e por uma métrica Lorentziana é denominado *espaço-tempo*. Neste ponto, a métrica ainda não é determinada. De fato, como veremos a seguir, as componentes do tensor métrico são dados por equações diferenciais definidas sobre a variedade. Na relatividade geral, estas equações são as equações de Einstein.

2.2 Causalidade

Um dos pontos básicos que diferencia a Relatividade Geral da gravitação newtoniana é na caracterização de causalidade. Em uma teoria relativística, um dado evento pode influir somente em um conjunto limitado de outros eventos. Em outras palavras, existe uma velocidade limite para a propagação de sinais, que é a velocidade da luz. Conforme veremos a seguir, a estrutura causal de um espaço-tempo é caracterizada por sua métrica.

Por simplicidade, consideremos inicialmente um contexto em que a gravidade não desempenha um papel importante. Ou seja, consideremos a Relatividade Especial. Dado um evento p no espaço-tempo (ver figura 2.2), chama-se “futuro causal” $J^+(p)$ o conjunto de pontos no cone de luz futuro que podem ser alcançados desde p por uma curva causal (uma curva que não é tipo espaço). Tomando com base a figura 2.2, os eventos que encontram-se no interior do cone de luz futuro são aqueles que podem ser alcançados por uma partícula massiva partindo de p . Este é o futuro cronológico de p denotado como $I^+(p)$. Definições análogas existem para o passado cronológico e o passado causal.

Figura 2.2: Estrutura causal do espaço-tempo em um nível local. C^+ , é a fronteira de $I^+(p)$, portanto $J^+(p) = I^+(p) \cup C^+$.

Considerando agora a gravidade, e portanto a Relatividade Geral, a estrutura causal do espaço-tempo é quantitativamente a mesma que a de espaço-tempo da relatividade especial, em um nível local. Entretanto, globalmente, podem existir diferenças devido a eventuais topologias não-triviais do espaço-tempo neste contexto. As considerações feitas para um dado ponto podem inclusive ser estendidas para subconjuntos da variedade. Se temos um subconjunto S de uma variedade $\mathcal{M}$, define-se o futuro (passado) causal de S , $J^+(S)$ ($J^-(S)$) como é o conjunto de pontos que podem ser alcançados a partir S por uma partícula massiva ou luz dirigida ao futuro (passado). Chama-se futuro (passado) cronológico de S , $I^+(S)$ ($I^-(S)$) o conjunto de eventos que podem ser influenciados desde S uma partícula massiva. Matematicamente se tem

$$I^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} I^\pm(p), \quad (2.4)$$

$$J^\pm(S) = \bigcup_{p \in S} J^\pm(p). \quad (2.5)$$

O tensor métrico codifica as noções de causalidade em um contexto relativístico. O futuro cronológico $I^+(S)$ de uma coleção S de eventos pode ser caracterizado como o conjunto de eventos ligados a S por curvas tipo tempo. Curvas tipo tempo são curvas em que o vetor tangente V^μ em qualquer ponto da curva é do tipo tempo, ou seja,

$$g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu < 0. \quad (2.6)$$

Desta forma, partículas massivas percorrem curvas tipo tempo, e a sua quadrivelocity é um vetor do tipo tempo.

Em termos da métrica, o futuro causal $J^+(S)$ de S é o conjunto de pontos no espaço-tempo que podem ser ligados a S por curvas tipo tempo ou por curvas tipo luz. Para estas últimas, o vetor tangente V^μ em qualquer ponto da curva satisfaz

$$g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu = 0. \quad (2.7)$$

Assim, partículas com massa de repouso nula percorrem trajetórias tipo luz. Para a radiação eletromagnética, em particular, o quadrivetor de onda associado é do tipo luz.

Eventos causalmente desconexos de um dado conjunto S são tais que não existem curvas do tipo tempo ou do tipo luz que ligam este evento a S . Mas (eventualmente) existem curvas tipo espaço que fazem a ligação. Curvas tipo espaço são curvas em que o vetor tangente é do tipo espaço, satisfazendo

$$g_{\mu\nu}V^\mu V^\nu > 0. \quad (2.8)$$

Curvas do tipo espaço desta forma não representam o movimento de partículas físicas no contexto da Relatividade Geral.

A discussão envolvendo causalidade nesta seção será importante nesta dissertação, uma vez que os objetos de interesse neste trabalho são estruturas com características causais peculiares – os buracos negros e os buracos de minhoca.

2.3 Derivada covariante

A gravitação de Einstein é invariante sob transformações gerais de coordenadas. Desta forma, para a caracterização das equações de movimento que determinam o tensor métrico, fazem-se necessárias caracterizações covariantes da operação de derivação. Veremos que estas caracterizações têm interpretações geométricas importantes, que serão discutidas nesta seção.

Considerando-se geometrias curvas, a derivação não é definida de forma única. Este ponto é natural se levarmos em conta que a comparação entre vetores (ou tensores) em pontos diferentes da variedade só é possível com a introdução de estruturas adicionais. Na relatividade geral, dado um vetor V^ν , se define a derivada covariante sob o mesmo como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda. \quad (2.9)$$

Em (2.9), as quantidades $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ são chamadas de conexões. Na relatividade geral, assume-se que as conexões são dadas pelos símbolos de Christoffel, os quais são definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}). \quad (2.10)$$

Através de (2.9), é possível mostrar que a derivada covariante de um vetor é um tensor [19], e portanto se considerarmos outro sistema de coordenadas $\{x'\}$ temos que

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu. \quad (2.11)$$

Na sequência, fornecemos algumas das propriedades da derivada covariante. Destas, destacam-se

$$\nabla_\mu (T^\lambda_{\lambda\rho}) = (\nabla T)^\lambda_{\mu\lambda\rho}, \quad (2.12)$$

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi, \quad (2.13)$$

$$\nabla^\mu g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.14)$$

A propriedade (2.12) expressa a comutação mediante contrações, a segunda propriedade (2.13) manifesta a igualdade da derivação covariante e da derivada parcial usual para funções escalares, enquanto que (2.14) expressa compatibilidade do tensor métrico com a conexão.

Para um vetor covariante K_ν , definido como $K_\nu = g_{\nu\mu} K^\mu$, tem-se que

$$\nabla_\mu K_\nu = \partial_\mu K_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda K_\lambda. \quad (2.15)$$

A derivada covariante de um tensor arbitrário é dado por:

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1} T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} + \cdots \\ &\quad - \Gamma_{\sigma\nu_1}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^\lambda T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_1\cdots\nu_l} - \cdots \end{aligned} \quad (2.16)$$

Uma outra interpretação geométrica da derivada covariante se encontra refletida no fato que a mesma quantifica a mudança de um campo tensorial quando este é transportado paralelamente. Vemos que, se transportamos um vetor por uma geometria curva de um ponto a outro por trajetórias diferentes, estes não coincidem [19]. De fato, a equação do transporte paralelo para um vetor V^ν depende da conexão

e é dado pela expressão

$$\frac{d}{d\lambda}V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0, \quad (2.17)$$

onde λ é um parâmetro afim. A condição de transporte paralelo para um vetor tangente ao caminho $x^\mu(\lambda)$ é dado por

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \nabla_\nu \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0,$$

ou

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0. \quad (2.18)$$

A equação (2.18) é conhecida como equação da geodésica. A interpretação física desta classe de curvas é bastante importante. Uma geodésica descreve a trajetória de uma partícula quando esta partícula não está submetida a nenhuma força (além da gravidade).

2.4 Curvatura

Na seção anterior foi mencionado que se transportamos paralelamente um vetor sobre uma superfície curva de um ponto a outro por trajetórias diferentes no final não coincidem. Este fato pode ser usado para caracterizar a curvatura da variedade. Nesta descrição, a curvatura está associada à forma de como é feito o transporte paralelo, que por sua vez está associado à conexão escolhida.

Uma implementação desta abordagem consiste em considerar o transporte paralelo infinitesimal ao longo de um paralelogramo de lados dx^μ e dx^ν , deslocamentos infinitesimais na direção x^μ e x^ν .

Figura 2.3: Percurso definido por dois deslocamentos infinitesimais dx^μ e dx^ν .

Transportamos paralelamente um vetor V^β inicialmente ao longo de dx^μ seguido por um deslocamento ao longo de dx^ν , e completamos com o transporte inverso (levar primeiro por dx^ν e depois por dx^μ), conforme indicado na figura 2.3. A operação indicada é dada pelo comutador das derivadas covariantes ao atuar em V^λ [20, 21]. Considerando-se a conexão Christoffel definida em (2.10), temos que

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\lambda = R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda V^\rho \quad (2.19)$$

onde

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\lambda = \partial_\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\rho}^\lambda + \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda \Gamma_{\mu\rho}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\nu\rho}^\sigma, \quad (2.20)$$

é o *tensor de Riemann*, o qual mede a variação de um vetor quando é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada. Este tensor tem a propriedade de que se seu valor é zero então a variedade é plana. Isso implica que quando se transporta um vetor paralelamente em uma geometria plana o resultado não depende da trajetória escolhida.

Em um contexto mais geral do que o apresentado aqui, o comutador (2.19) envolveria um tensor adicional $T_{\beta\gamma}^\alpha$, denominado *tensor de torsão*. Entretanto, com a definição (2.10), temos que $T_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0$. Este ponto mostra que a Relatividade Geral é uma teoria de torsão nula.

Um ponto de interesse é que em um espaço plano a conexão $\Gamma_{\rho\beta}^\lambda$ é zero em coordenadas cartesianas, e desta forma o tensor de Riemann também é nulo. O que implica que em qualquer sistema de coordenadas curvilíneas o tensor de Riemann será identicamente zero devido ao carácter tensorial do mesmo. Temos então que a variedade é plana se todas as componentes do tensor de Riemann são iguais zero, e curva se pelo menos uma de suas componentes é diferente de zero.

Se o tensor de Riemann é colocado em sua forma totalmente contravariante mediante o tensor métrico, conforme

$$R_{\mu\nu\rho\beta} = g_{\mu\alpha} R_{\nu\rho\beta}{}^\alpha, \quad (2.21)$$

temos as seguintes propriedades para este objeto:

$$R_{\mu\nu\rho\beta} = -R_{\nu\mu\rho\beta}, \quad (2.22)$$

$$R_{\mu\nu\rho\beta} = -R_{\mu\nu\beta\rho}, \quad (2.23)$$

$$R_{\mu\nu\rho\beta} = R_{\rho\beta\mu\nu}. \quad (2.24)$$

A contração do tensor de Riemann define o *tensor de Ricci*, conforme

$$R_{\mu\rho} = R_{\mu\nu\rho}{}^{\nu} = \partial_{\nu}\Gamma_{\mu\rho}^{\nu} - \partial_{\mu}\Gamma_{\nu\rho}^{\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\nu}^{\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\mu}^{\nu}. \quad (2.25)$$

Com a conexão dada por (2.10), o tensor de Ricci é simétrico em seus dois índices:

$$R_{\mu\rho} = R_{\rho\mu}. \quad (2.26)$$

Finalmente, a contração do tensor de Ricci define o chamado *escalar de curvatura* R :

$$R = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\mu\rho}R_{\mu\rho}. \quad (2.27)$$

Dado que a quantidade R é um escalar, ela é invariante por transformações de coordenadas.

A partir do tensor de Ricci, do escalar de curvatura e da métrica, é definido um tensor importante na Relatividade Geral conhecido como *tensor de Einstein*, o qual é dado por

$$G_{\mu\rho} = R_{\mu\rho} - \frac{1}{2}g_{\mu\rho}R. \quad (2.28)$$

Como os tensores $R_{\mu\rho}$ e $g_{\mu\rho}$ são simétricos pela troca de índices, o tensor de Einstein também o será,

$$G_{\mu\rho} = G_{\rho\mu}. \quad (2.29)$$

A seguir, discutiremos um pouco deste importante tensor da Relatividade Geral.

2.5 Equações de Einstein

Um princípio que levou Einstein a chegar na Teoria da Relatividade Geral foi o chamado *princípio da equivalência*¹. O princípio da equivalência afirma que, localmente, as leis físicas (não gravitacionais) têm a mesma forma que em referenciais inerciais, independente da posição no espaço-tempo e de forças gravitacionais. Este princípio sugere que a gravidade pode ser descrita como uma propriedade geométrica do espaço-tempo. A questão por resolver é o que afeta as propriedades geométricas do espaço-tempo. No contexto do formalismo apresentado, faz-se necessária a caracterização das componentes do tensor métrico.

¹Existem várias formulações do princípio da equivalência. Estamos apresentando aqui uma versão simplificada do mesmo. Para maiores detalhes, ver por exemplo capítulo 9 de [17], ou capítulo 3 de [22].

Einstein propôs que a geometria do espaço-tempo está relacionada com o conteúdo de matéria e energia no mesmo. Uma forma de descrever este conteúdo é através do tensor *energia-momento* $T^{\mu\nu}$. As componentes do tensor energia-momento representam as seguintes grandezas:

- T^{00} é fluxo de energia (densidade de energia) na direção temporal;
- T^{0i} é fluxo de momento através da superfície constante x^0 ;
- T^{ij} encontram-se associados às forças exercidas pelos elementos infinitesimais do fluido sobre outros elementos próximos.

As leis de conservação da energia e do momento, em termos do tensor energia-momento, são dadas pela expressão

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0. \quad (2.30)$$

De uma forma geral, podemos sempre achar uma expressão para o tensor energia-momento tal que

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (2.31)$$

Um exemplo que será relevante no trabalho apresentado nesta dissertação é o tensor energia-momento associado ao campo escalar, dado por

$$T^{\mu\nu} = \nabla^\mu \Phi \nabla^\nu \Phi - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} [\nabla^\rho \Phi \nabla_\rho \Phi + m^2 \Phi], \quad (2.32)$$

onde Φ é o campo escalar e m a massa do mesmo. De forma mais geral, entretanto, a forma do tensor energia-momento pode ser bastante mais complexa. A caracterização deste elemento é um problema complexo.

Na caracterização do tensor energia-momento, são sugeridas na literatura certas condições que a matéria dita como “usual” deve cumprir. Algumas destas condições são:

- condição de energia nula (NEC²),
- condição de energia fraca (WEC²),
- condição de energia forte (SEC²),
- condição de energia dominante (DEC²),

Tabela 2.1: Algumas condições de energia típicas.

Nome	Declaração	Condição
NEC	$\tilde{T}_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$	$\tilde{\rho} \geq 0, \tilde{\rho} + \tilde{p}_j \geq 0$
WEC	$\tilde{T}_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$	$\tilde{\rho} \geq 0, \tilde{\rho} + \tilde{p}_j \geq 0$
SEC	$\left(\tilde{T}_{\mu\nu} - \tilde{T}g_{\mu\nu}/2\right)V^\mu V^\nu \geq 0$	$\tilde{\rho} + \tilde{p}_j \geq 0, \tilde{\rho} + \sum_j \tilde{p}_j \geq 0$
DEC	$\tilde{T}_{\mu\nu}V^\mu V^\nu \geq 0$	$\tilde{\rho} \geq p_j , \tilde{p}_j \in [-\tilde{\rho}, +\tilde{\rho}]$

entre outras. Vários teoremas clássicos de singularidades e de termodinâmica de buracos negros são demonstrados mediante a consideração de hipóteses baseadas nestas condições de energia (ver por exemplo [23, 24]).

Na tabela 2.1 são resumidas algumas das condições de energia usadas na relatividade geral (detalhes de outras condições de energia podem ser encontrados por exemplo em [5]). Nesta tabela, é assumido um sistema de coordenadas $\{\tilde{x}^\mu\}$ onde o tensor energia-momento pode ser colocado em uma forma diagonal:

$$\tilde{T}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \begin{bmatrix} \tilde{\rho} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{p}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{p}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{p}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.33)$$

Com este sistema de coordenadas, k^μ é qualquer vetor nulo e V^μ é qualquer vetor tipo tempo, $\tilde{\rho}$ e os $\{\tilde{p}_j\}$ são a densidade de energia e as pressões efetivos associadas ao tensor energia-momento (2.33).

De particular interesse neste trabalho são as condições de energia fraca e nula. A interpretação física da WEC é que a mesma indica que a densidade de energia medida por um observador deve ser positiva. Se a declaração da condição de energia fraca é verdadeira, então por continuidade a mesma implica a condição de energia nula [5]. Alguns objetos de interesse neste trabalho, como os buracos de minhoca, violam a condição de energia nula, como será mostrado no capítulo 4. Ressaltamos que embora as condições de energia discutidas sejam naturais em um contexto clássico, elas são violadas em alguns sistemas quânticos [25] e em vários modelos cosmológicos discutidos na literatura [26].

Para fazer a conexão entre as propriedades geométricas do espaço-tempo e a

²As siglas derivam das abreviações dos termos em inglês.

matéria e energia presentes, Einstein postulou equações de movimento para as componentes da métrica. Estas equações de campo são as *Equações de Einstein*,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\tilde{T}_{\mu\nu}. \quad (2.34)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein introduzido em (2.28) e $\tilde{T}_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento total. Em (2.34) foram tomados sistemas de unidades em que a velocidade da luz c e a constante de gravitação de Newton G são dadas por $c = G = 1$.

As equações de campo (2.34) foram modificadas pelo próprio Einstein com a introdução de uma constante cosmológica Λ [27]. Embora as motivações iniciais para a introdução deste novo termo tenham se mostrado erradas, a constante cosmológica hoje é um elemento importante na descrição de um universo em grande escala. Com a constante Λ , as equações de Einstein ficam

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (2.35)$$

Nesta versão das equações de Einstein, a constante cosmológica está explicitada. A conexão entre o tensor energia-momento total $\tilde{T}_{\mu\nu}$ e o tensor $T_{\mu\nu}$ é portanto

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\mu\nu}. \quad (2.36)$$

Dado que as equações de Einstein têm um caráter tensorial, a Relatividade Geral respeita o chamado *princípio de covariância*, que estabelece que as leis da física devem ser as mesmas em todos os referenciais [22, 17].

Como $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ e $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$, as equações de Einstein formam um conjunto de dez equações diferenciais parciais acopladas, geralmente não lineares. A conservação da energia e momento reduz este conjunto de equações para seis independentes, ligadas aos graus de liberdade físicos [20]. As outras quatro podem ser identificadas com escolhas de sistemas de coordenadas. O problema geral da resolução das equações de Einstein, portanto, pode ser extremamente complexo. Veremos na próxima seção algumas condições que podem ser assumidas para que este problema se torne tratável.

2.6 Simetrias

Visto que o nosso universo é extremadamente complexo de descrever com precisão, geralmente temos que utilizar aproximações ligadas a algum problema em questão. Um exemplo disso são as soluções das equações de Einstein da Relatividade Geral. A não linearidade da mesmas faz das simetrias uma boa ferramenta para sua solução.

Sem muito rigor, diz-se que uma variedade é simétrica se a sua métrica associada não muda de um ponto a outro (quando se faz alguma transformação). Uma forma de caracterizar simetrias em uma geometria é procurando *campos vetoriais de Killing*. Estes campos $\{X_\mu\}$ satisfazem a equação

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0, \quad (2.37)$$

chamada equação de Killing. Se as componentes da métrica $\{g_{\mu\nu}\}$ são independentes de uma dada coordenada x^β , então

$$X^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \right)^\mu, \quad (2.38)$$

é um campo de Killing, associado a uma simetria na coordenada x^β [19]. Um campo vetorial de Killing implica em uma quantidade conservada associada. No caso de uma variedade de dimensão $n \geq 2$, existe a possibilidade de haver mais vetores de Killing que dimensões. Também é possível mostrar [19] que o comutador de dois vetores de Killing (quando temos coeficientes constantes de uma combinação linear destes) é um outro vetor de Killing, e o vetor resultante é linearmente independente.

Cabe ressaltar que o número de isometrias na variedade é igual ao número de vetores de Killing linearmente independentes, então para uma variedade n -dimensional tem-se que existem no máximo $n(n+1)/2$ vetores de Killing linearmente independentes. Espaços-tempos com este número máximo de vetores de Killing são chamados de *maximalmente simétricos*. Localmente, espaços-tempos Lorentzianos com máxima simetria podem ser identificados mediante as soluções das equações de Einstein (2.35)

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2 \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{\Lambda}{3} r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.39)$$

onde t é uma coordenada tipo tempo e r, θ, ϕ são as coordenadas esféricas usuais. Se $\Lambda = 0$, a equação (2.39) fornece a métrica de *Minkowski*. Se $\Lambda > 0$, temos a solução

de Sitter. E se $\Lambda < 0$, temos a solução *anti-de Sitter*.

Uma outra aplicação do formalismo envolvendo campos de Killing é a caracterização dos *espaços-tempos estacionários*, aqueles onde a métrica tem um campo vetorial de Killing X^μ tipo tempo. Desta forma, a métrica associada pode ser escrita na forma [19]

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x})dt^2 + g_{0i}(\vec{x})(dtdx^i + dx^i dt) + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j. \quad (2.40)$$

No sistema de coordenadas $(x^0, \{x^i\})$ usado em (2.40), o campo vetorial associado à coordenada x^0 é um campo de Killing.

Se o campo de Killing que define um espaço-tempo estacionário é perpendicular a um conjunto de superfícies que cobre a geometria, este espaço-tempo é chamado *estático*. Em um espaço-tempo estático, existe um sistema de coordenadas em que a métrica não possui termos cruzados [28, 21]. Assim a métrica (2.40) pode ser colocada na forma

$$ds^2 = g_{00}(\vec{x})dt^2 + g_{ij}(\vec{x})dx^i dx^j. \quad (2.41)$$

A simetria esférica pode ser caracterizada de forma precisa com o formalismo apresentado. São chamadas *geometrias esfericamente simétricas*, aqueles onde existem três campos de Killing que satisfazem as relações de comutação do grupo de rotações $SO(3)$. Assim, se $\{X_i\}$ são estes vetores, então

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad (2.42)$$

$$[X_2, X_3] = X_1, \quad (2.43)$$

$$[X_3, X_1] = X_2. \quad (2.44)$$

Um espaço-tempo que satisfaz os critérios antes mencionados (estaticidade e simetria esférica) possui uma métrica que pode ser colocada na forma

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.45)$$

Temos então que, em geometrias esfericamente simétricas e estáticas, a estrutura causal do espaço-tempo é caracterizada pelas funções $A(r)$ e $B(r)$. Como estamos interessados em variedades Lorentzianas, temos que o sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) é válido somente para valores de r tais que $A(r) > 0$ e $B(r) > 0$. Na

expressão (2.45), temos que $r^2 d\Omega^2$, com

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.46)$$

a métrica da 2-esfera (S^2) de raio r , a superfície bidimensional

$$\{(t_0, r_0, \theta, \phi), \ t_0 = \text{constante}, \ r_0 = \text{constante}\}. \quad (2.47)$$

A subvariedade (2.47) representa esferas – superfícies invariantes sob a ação do grupo de rotações. Definindo $g_2^{\mu\nu}$ como a métrica associada ao elemento de linha $r^2 d\Omega^2$ e

$$g_2 = \det(g_2^{\mu\nu}) = r^4 \sin^2 \theta, \quad (2.48)$$

temos que a área das superfícies bidimensionais (2.47) fica

$$\mathcal{A} = \int \sqrt{|g_2|} d\theta d\phi = 4\pi r^2. \quad (2.49)$$

Vemos, portanto, que a coordenada radial r em (2.45) é tal que o área das esferas de raio r é dada pela relação (2.49).

Capítulo 3

Buracos Negros Esfericamente Simétricos

Uma das consequências da teoria da gravitação de Einstein é que os buracos negros podem existir. Buracos negros são objetos compactos no qual o campo gravitacional é tão forte que nem a luz pode escapar para o infinito. Foi J. A Wheeler que batizou estas estruturas em meados dos anos 60, embora, a ideia já tivesse sido apresentada (no contexto da física newtoniana) por Michell e Laplace no século XVIII [28]. Em cenários astrofísicos, estes objetos são formados quando um corpo de massa M sofre uma contração até um certo raio chamado raio gravitacional $r_+ = 2GM/c^2$ (explicitando as constantes G e c). Quando estrelas têm uma massa da ordem do sol, podem alcançar um estado de equilíbrio e transformar-se em objetos astronômicos chamados anãs brancas, ou em estrelas de nêutrons. Porém, quando a massa é muito maior, o equilíbrio da mesma não é possível. Neste caso, os efeitos gravitacionais são mais fortes que as pressões e tensões da estrela, que ao implodir geram um ponto de densidade muito alta [17]. Esta região em que as forças gravitacionais são arbitrariamente altas (segundo a descrição clássica) tem como fronteira uma superfície que limita o acesso de observadores internos a regiões externas. Assim é formado uma estrutura causal não trivial no espaço-tempo, um *buraco negro* [28].

3.1 Singularidades

Embora não seja uma característica geral de buracos negros [29, 30], as soluções clássicas que descrevem estes objetos frequentemente estão associadas com regiões onde a curvatura do espaço-tempo é arbitrariamente grande. Nestes casos, temos a presença de uma singularidade de curvatura. Nos “pontos” onde a curvatura diverge, a métrica não é bem definida. A rigor, estes não fazem parte da variedade, e portanto, é um certo abuso de linguagem fazer referência a eles como parte do espaço-tempo.

Por outro lado, um dado sistema de coordenadas não necessariamente cobre toda a variedade. O uso de uma carta fora do seu domínio de validade pode levar a comportamentos patológicos da métrica, que em nada estão relacionados com a geometria do sistema.

Como um exemplo tomemos a métrica (2.45). Se existem valores da coordenada r onde a função $B(r)$ é zero, a componente $g_{rr} = B^{-1}$ da métrica torna-se singular. Mas isto não implica na existência de uma singularidade real, já que é possível que o sistema de coordenadas adotado, neste caso (t, r, θ, ϕ) , não seja válido para estes valores de r . Veremos que a situação apresentada é bastante comum.

Segue então que se fazem necessários critérios para discriminarmos singularidades reais de problemas envolvendo escolhas inapropriadas de sistemas de coordenadas. No caso geral, este problema pode-se tornar bastante complexo. No contexto desta dissertação, entretanto, onde serão consideradas geometrias esfericamente simétricas e estáticas, a regularidade do espaço-tempo em um dado ponto é caracterizada pela regularidade de quantidades escalares tais como

- o escalar de curvatura R ,
- o quadrado do tensor de Ricci $R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}$,
- o escalar de Kretschmann $R_{\alpha\beta\gamma\rho}R^{\alpha\beta\gamma\rho}$.

Calculando estas grandezas e avaliando os pontos em que elas divergem, é possível conhecer que tipo de singularidades temos.

O primeiro exemplo de solução relativística esfericamente simétrica foi obtido em 1916 pelo físico alemão Karl Schwarzschild [31]. A métrica de Schwarzschild é uma solução de vácuo ($T_{\mu\nu} = 0$) das equações de Einstein (2.34) com a constante cosmológica nula, e ainda hoje é uma das mais importantes soluções exatas da

Relatividade Geral. Descreve o campo gravitacional em torno de corpos compactos de massa M que possuem simetria esférica, e é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.1)$$

Na notação adotada nesta dissertação, a métrica de Schwarzschild é caracterizada como

$$A(r) = B(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (3.2)$$

Considerando a solução de Einstein com uma constante cosmológica não-nula (2.35), a solução de Schwarzschild é generalizada para [32]:

$$A(r) = B(r) = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \quad (3.3)$$

Se $\Lambda > 0$, (3.3) fornece a solução de Schwarzschild-de Sitter. Se $\Lambda < 0$, (3.3) obtemos a solução de Schwarzschild-anti-de Sitter.

As soluções de vácuo podem ainda ser generalizadas considerando objetos esfericamente simétricos com uma carga elétrica Q . Neste caso, temos as chamadas soluções de eletrovácuo [32, 23], em que as funções $A(r)$ e $B(r)$ são escritas como

$$A(r) = B(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3} r^2. \quad (3.4)$$

Estas são as soluções de Reissner-Nordström ($\Lambda = 0$), Reissner-Nordström-de Sitter ($\Lambda > 0$) e Reissner-Nordström-anti-de Sitter ($\Lambda < 0$).

Uma característica importante da solução de Schwarzschild (3.1) é que ela é única, obtida somente com a imposição de $T_{\mu\nu} = 0$, simetria esférica e que assintoticamente a solução é plana. A estaticidade é uma consequência das equações de Einstein. Este resultado é conhecido como teorema de Birkhoff na Relatividade Geral [19, 17], e pode ser generalizado para as soluções Schwarzschild-anti-de Sitter e Schwarzschild-anti-de Sitter com as modificações apropriadas nas condições assintóticas.

Um ponto chave nas expressões para $A(r)$ e $B(r)$ associadas a métrica de Schwarzschild é que estas funções possuem um zero em $r_+ = 2M$. E desta forma, no limite $r \rightarrow r_+$, a componente da métrica $g_{rr} = B^{-1}$ diverge. Vemos também que quando $r \rightarrow 0$, temos que $g_{tt} = A$ diverge. Para caracterizarmos possíveis problemas nos pontos $r = 2M$ e $r = 0$, é conveniente a consideração dos escalares de curvatura associados à geometria. Por exemplo, o escalar de Kretschmann (ou o escalar de

curvatura R) para a métrica de Schwarzschild é dado por [19, 17],

$$R_{\alpha\beta\gamma\rho}R^{\alpha\beta\gamma\rho} = \frac{48M^2}{r^6}. \quad (3.5)$$

Quando se avalia o escalar de Kretschmann para $r_+ = 2M$ observa-se que $R_{\alpha\beta\gamma\rho}R^{\alpha\beta\gamma\rho}$ é finito para este valor de r . De fato, a divergência de g_{rr} está associada a uma escolha inapropriada de sistemas de coordenadas. Como veremos a seguir, com um sistema de coordenadas adequado, a métrica é bem comportada em r_+ . Por outro lado, no limite $r \rightarrow 0$, não só a métrica, mas também o escalar de Kretschmann, divergem. Este ponto está associado a uma singularidade de curvatura real, uma singularidade física.

3.2 Extensões maximais

Conforme exposto no capítulo 2, a Relatividade Geral descreve a gravidade através uma série de estruturas geométricas. A base é a variedade, equipada com mapas diferenciáveis. Sobre a variedade, a estrutura métrica é definida, estrutura esta que está relacionada com as grandezas associadas à curvatura e torsão de forma que a conexão é dada pelos símbolos de Christoffel, conforme a expressão (2.10). A dinâmica gravitacional na Relatividade Geral, por sua vez, é definida a partir de equações de campo para as componentes da métrica – as equações de Einstein apresentadas em (2.34) e (2.35).

Do ponto de vista prático, entretanto, a construção de uma geometria que modela um dado cenário físico é feita do local em direção ao global. Nesta abordagem, o ponto de partida são as equações de Einstein em um certo sistema de coordenadas. A solução destas equações diferenciais está definida em um aberto da variedade, mas não necessariamente em toda ela. A solução de Schwarzschild em (3.1) exemplifica este ponto. Estritamente falando, a expressão apresentada em (3.1) só é válida para $r > r_+$.

Neste ponto, procura-se estender uma dada solução obtida de forma que a métrica seja definida em variedades maiores, que incluam como subconjunto o aberto inicial. Isto pode ser feito passando-se para outro sistema de coordenadas, e nesta nova carta, redefinir o domínio de validade da solução. Desta forma, a variedade é estendida. Quando o processo se completa, ou seja, quando não é mais possível estendermos a variedade, temos uma extensão maximal da geometria. Na abordagem descrita

aqui, uma extensão maximal será então caracterizada por um conjunto de sistemas de coordenadas, a partir dos quais os tensores relevantes estarão definidos. Um dado conjunto maximal de cartas é denominado *atlas* [19, 17].

Nesta seção, apresentaremos um procedimento de extensão para geometrias esfericamente simétricas e estáticas quando a métrica é escrita em termos do sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Vimos no capítulo 2 que neste sistema de coordenadas, a métrica tem a forma (2.45). Se as funções $A(r)$ e $B(r)$ possuem um zero em $r = r_+$, este sistema de coordenadas não será válido para $r \leq r_+$. A questão discutida aqui é como fazer a extensão, de forma que a variedade inclua a superfície $r = r_+$. Os resultados apresentados aqui serão aplicáveis no caso da solução de Schwarzschild em particular, e em várias outras geometrias de interesse.

A equação (2.45) representa a métrica mais geral possível em um geometria esfericamente simétrica e estática. Definimos a coordenada radial tartaruga¹ r^* , como

$$\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{\sqrt{A(r)B(r)}}. \quad (3.6)$$

A definição em (3.6) fixa uma função $r^*(r)$, a menos de uma constante arbitrária (a referência [21] apresenta esta definição para uma métrica com $A(r) = B(r)$). Um dos pré-requisitos para a aplicabilidade do desenvolvimento apresentado aqui é que a função inversa, $r(r^*)$, possa ser definida em um dado intervalo de r^* . O teorema da função inversa garante este ponto se a função $1/\sqrt{A(r)B(r)}$ é suficientemente diferenciável e possui derivada não nula.

Com base na coordenada r^* , definimos a seguir as coordenadas tempo avançado (x^+) e tempo atrasado (x^-) como

$$x^- = t - r^*, \quad (3.7)$$

$$x^+ = t + r^*. \quad (3.8)$$

Da expressão (3.8) e (3.7) tem-se que

$$t = x^+ - r^*, \quad (3.9)$$

$$t = x^- + r^*, \quad (3.10)$$

¹Adaptação do termo usado em inglês, “tortoise coordinate”.

e assim temos que $t = t(x^\pm, r^*)$. Portanto

$$dt = dx^\pm \mp dr^*. \quad (3.11)$$

Por outro lado, temos também que

$$dt = \frac{\partial t}{\partial x^\pm} dx^\pm + \frac{\partial t}{\partial r^*} dr^*. \quad (3.12)$$

De acordo (3.11) a última expressão fornece,

$$\begin{aligned} \frac{\partial t}{\partial r^*} &= -1, \quad \frac{\partial t}{\partial x^+} = 1, \\ \frac{\partial t}{\partial r^*} &= 1, \quad \frac{\partial t}{\partial x^-} = 1, \end{aligned}$$

o que mostra que

$$dt^2 = (dr^*)^2 \mp 2dr^*dx^\pm + (dx^\pm)^2. \quad (3.13)$$

Com o auxilio da expressão (3.6) que define a coordenada tartaruga, a métrica (2.45) toma a forma

$$ds^2 = \mathcal{A}(r^*) [(dr^*)^2 - dt^2] + r^2(r^*)d\Omega^2, \quad (3.14)$$

onde a função $\mathcal{A}(r^*)$ é definida com base na composição das funções $A(r)$ e $r(r^*)$ conforme

$$\mathcal{A}(r^*) = A(r(r^*)). \quad (3.15)$$

A partir da expressão para o elemento de linha em termos das variáveis r e r^* , passamos para o desenvolvimento da métrica em termos do sistema de coordenadas $(x^\pm, r, \phi, \theta)$. Inserindo (3.13) em (3.14) é obtido

$$ds^2 = \mathcal{A}(r^*) [-(dx^\pm)^2 \pm 2dr^*dx^\pm] + r^2(r^*)d\Omega^2, \quad (3.16)$$

Finalmente, com o auxilio de (3.6), a métrica em termos da carta $(x^\pm, r, \phi, \theta)$ assume a forma

$$ds^2 = -A(r)d^2x^+ + 2\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}dx^+dr + r^2d\Omega^2, \quad (3.17)$$

também no sistema de coordenadas (x^-, r, ϕ, θ) , a métrica é expressa como:

$$ds^2 = -A(r)d^2x^- - 2\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}dx^-dr + r^2d\Omega^2. \quad (3.18)$$

Antecipando uma notação que será usada mais adiante nesta dissertação, escrevemos as expressões (3.17) e (3.18) de forma compacta como

$$ds^2 = -A(r)d^2x^\pm \pm 2\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}dx^\pm dr + r^2d\Omega^2. \quad (3.19)$$

Conforme comentado, se a métrica original, em (2.45), é tal que as funções $A(r)$ e $B(r)$ possuem um zero em $r = r_+$, o sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) é válido somente para $r > r_+$. Vemos porém que esta métrica, quando reescrita em termos das cartas (x^-, r, ϕ, θ) ou (x^+, r, ϕ, θ) conforme as expressões (3.17) e (3.18), é bem definida no ponto $r = r_+$ se:

- a função $A(r)$ é bem definida em $r = r_+$,
- a função $\sqrt{A(r)/B(r)}$ tem um limite bem definido em $r \rightarrow r_+$.

Satisfeitas as condições anteriores, definimos então duas extensões “além de r_+ ” postulando que o elemento de linha (3.17) e (3.18) são válidos no aberto estendido $r_1 < r < r_2$, onde r_1 e r_2 são tais que este aberto contenha o ponto r_+ , $r_1 < r_+ < r_2$.

Como ilustração, aplicaremos o mecanismo de extensão apresentado para a métrica de Schwarzschild (3.1). Temos que a função $A(r)$ é bem definida em $r = r_+ = 2M$ e que o limite $\sqrt{A(r)/B(r)} = cte$ é bem definido em $r = r_+$ (neste caso, em qualquer valor de r). A função coordenada tartaruga $r^*(r)$ fica

$$r^*(r) = r + 2M \ln \left(\frac{r}{r_+} - 1 \right). \quad (3.20)$$

Esta função é contínua, diferenciável e monotonicamente crescente para $r > r_+$. Desta forma, o teorema da função inversa garante a existência da função $r(r^*)$, embora a determinação analítica da mesma não seja possível. Os sistemas de coordenadas (x^-, r, ϕ, θ) e (x^+, r, ϕ, θ) que descrevem duas possíveis extensões da métrica de Schwarzschild são válidos para $0 < r < \infty$.

O desenvolvimento apresentado nesta seção mostra que a superfície $r = r_+$ é bem definida na extensão do espaço-tempo, uma vez que a métrica (2.45) satisfaça certas condições. Veremos na próxima seção algumas das características desta superfície.

3.3 Horizontes de Killing

Uma vez definidas possíveis extensões da geometria para a região interior ao buraco negro (onde $r < r_+$), o próximo passo é caracterizar a sua fronteira. A caracterização de uma fronteira para um buraco negro é um tema em aberto se considerados espaços-tempos gerais [3]. Nesta dissertação, veremos algumas propostas possíveis. Estas propostas coincidem quando a geometria de Schwarzschild é considerada, e nela a superfície $r = r_+$ é um horizonte de Killing e de eventos (como veremos neste capítulo) e também um horizonte atrapante (como veremos no próximo capítulo).

Para espaços-tempos estacionários, equipado com um campo vetorial tipo tempo X^μ (em uma dada região, pelo menos), uma estrutura que pode ser definida é um *horizonte de Killing*. Um horizonte de Killing é definido como uma superfície H onde os vetores de Killing X^μ tangentes a ela são do tipo luz quando calculados em H , ou seja, $X^\mu X_\mu|_H = 0$ [24]. Uma caracterização para buracos negros estacionários e estáticos é defini-los através da presença de um horizonte de Killing. Estes estruturas são superfícies nulas, e desta forma se comportam como uma membrana de caminho único. No caso particular da geometria de Schwarzschild, a superfície $\{(x^- = \text{constante}, r, \theta, \phi)\}$ permite a passagem de observadores para o interior do buraco negro em direção a singularidade, mas não o caminho oposto. Generalizaremos este conceito para espaços-tempos mais gerais a seguir.

Vamos introduzir condições suficientes para a existência de um horizonte de Killing. Foi mostrado no capítulo 2 que a métrica pode ser escrita como (2.45) no sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) , portanto, a mesma é caracterizada pelas funções $A(r)$ e $B(r)$. As condições que devem cumprir as funções são:

1. as funções $A(r)$ e $B(r)$ são lisas (C^∞) em um aberto (r_1, r_2) com $0 < r_1 < r < r_2$;
2. As funções $A(r)$ e $B(r)$ possuem o mesmo zero simples em um ponto $r = r_+$ com $r_1 < r_+ < r_2$. Ou seja, podem ser escritas como

$$A(r) = A_0(r - r_+) + O(r - r_+)^2, \quad (3.21)$$

$$B(r) = B_0(r - r_+) + O(r - r_+)^2, \quad (3.22)$$

onde A_0 e B_0 são constantes.

3. $A(r) > 0$ e $B(r) > 0$ para $r_+ < r < r_2$.

Se as condições anteriores são satisfeitas, a superfície $r = r_+$ é um horizonte de Killing. De fato, como as componentes da métrica não dependem da coordenada t , vemos que o campo vetorial X^μ é um campo de Killing, com

$$X^\mu = \frac{\partial}{\partial t} = (1, 0, 0, 0), \quad (3.23)$$

de acordo com a expressão (2.38). Mas a carta (t, r, θ, ϕ) não está definido para $r = r_+$. Faz-se necessário a escolha de um sistema de coordenadas em que esta superfície seja bem definida. Tomamos desta forma o desenvolvimento feito na seção anterior. A função $A(r)$ é bem definida em $r = r_+$ e o limite $\sqrt{A(r)/B(r)} \propto \sqrt{A_0/B_0}$ é bem definido em $r = r_+$, de acordo com as hipóteses assumidas. Passamos então para o sistema de coordenadas (x^-, r, ϕ, θ) , onde o vetor X^μ é escrito como

$$X^\mu = (1, 0, 0, 0). \quad (3.24)$$

Na extensão analítica usando (t, r, θ, ϕ) , a norma do vetor de Killing X^μ na superfície $r = r_+$ é dada por

$$X_\mu X^\mu = g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu = -A(r). \quad (3.25)$$

Em $r = r_+$, temos portanto que $X_\mu X^\mu = -A(r_+) = 0$, e desta forma a superfície $r = r_+$ é uma superfície de Killing na extensão baseada no sistema de coordenadas (x^-, r, θ, ϕ) , conforme a definição apresentada. O mesmo desenvolvimento e conclusão são obtidos considerando-se a extensão baseada em (x^+, r, θ, ϕ) .

Deve ser salientado que as condições propostas para as funções $A(r)$ e $B(r)$ são condições suficientes, mas não necessárias. Isto significa que existem geometrias que possuem horizontes de Killing e não satisfazem as condições assumidas. Um contra-exemplo importante é dado pelo espaço-tempo de Reissner-Nordström extremo [23]. O elemento de linha é dado por (3.4) com a carga Q assumindo o seu valor extremo $Q = M$:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Q}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2Q}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.26)$$

Para a métrica caracterizada por (3.26), temos que

$$A(r) = B(r) = \bar{A}_0 (r - r_+)^2 + \mathcal{O}(r - r_+)^3, \quad (3.27)$$

com $r_+ = Q$. Claramente o espaço-tempo de Reissner-Nordström extremo não satisfaz as condições (3.21) e (3.22). Ainda assim, apesar de r_+ não ser um zero simples de $A(r)$ e $B(r)$, a superfície $r = r_+$ é um horizonte de Killing, como pode ser verificado em [17].

Veremos a seguir que as constantes A_0 e B_0 introduzidas em (3.21) e (3.22) podem ser associadas a um parâmetro importante relacionado ao horizonte de Killing em $r = r_+$, a chamada *gravidade superficial*.

3.4 Gravidade superficial

Para um dado horizonte de Killing, se encontra associada uma grandeza chamada *gravidade superficial*. Segundo a definição da gravidade superficial κ , apresentada por exemplo em [24], se X^μ é um vetor de Killing com horizonte de Killing $r = r_+$, a gravidade superficial κ é definida pela expressão

$$\nabla^\mu (X^\nu X_\nu) = -2\kappa X^\mu, \quad (3.28)$$

no limite em que o horizonte de Killing é considerado. A principal motivação para a introdução da quantidade κ é que ela está relacionada a interpretação termodinâmica da física de buracos negros. Especificamente, a gravidade superficial é proporcional a uma temperatura definida para o buraco negro.

Partindo da definição apresentada para a gravidade superficial, a equação (3.28) pode ser expressa como

$$\nabla^\mu (g_{\mu\nu} X^\nu X^\mu) \nabla_\mu (g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu) = 4\kappa^2 g_{\mu\nu} X^\mu X^\nu. \quad (3.29)$$

Fixamos agora o sistema de coordenadas como (x^-, r, θ, ϕ) ou (x^+, r, θ, ϕ) , de forma que a superfície $r = r_+$ é bem definida. Com qualquer uma das cartas apresentadas, a relação (3.25) é válida, e equação (3.29) toma a forma

$$g^{\mu\nu} \nabla_\nu (A) \nabla_\mu (A) = 4\kappa^2 A. \quad (3.30)$$

A somatória em (3.30) é simplificada considerando que a métrica é diagonal e que

$A = A(r)$. Temos então que (3.30) fornece

$$B(r) \left[\frac{d}{dr} A(r) \right]^2 = 4\kappa^2 A. \quad (3.31)$$

Utilizando o fato que

$$\frac{d}{dr} \left[\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \right] A(r) = \frac{d\sqrt{B(r)A(r)}}{dr} = \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \frac{dA(r)}{dr} + A(r) \frac{d}{dr} \left[\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \right], \quad (3.32)$$

a equação (3.31) é transformada em

$$\kappa = \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dr} \sqrt{B(r)A(r)} - A(r) \frac{d}{dr} \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \right|. \quad (3.33)$$

No limite em que consideramos o horizonte de Killing ($r \rightarrow r_+$), temos que $A(r) \rightarrow 0$, e a gravidade superficial κ é propriamente dita como:

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow r_+} \left| \frac{1}{2} \frac{d\sqrt{A(r)B(r)}}{dr} \right|. \quad (3.34)$$

Para as soluções de vácuo (3.3) e eletrovácuo (3.4) da relatividade geral, temos que $A(r) = B(r)$, e a expressão (3.34) fica

$$\kappa = \frac{A'(r_+)}{2}. \quad (3.35)$$

As condições (3.21) e (3.22) para a existência de um horizonte de Killing implicam uma relação simples entre a gravidade superficial κ e as constantes A_0 e B_0 em (3.21) e (3.22). De fato

$$\kappa = \lim_{r \rightarrow r_+} \left| \frac{1}{2} \frac{A'(r)B(r) + A(r)B'(r)}{2\sqrt{A(r)B(r)}} \right| = \frac{1}{4} \lim_{r \rightarrow r_+} \left| A'(r) \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} + B'(r) \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} \right|. \quad (3.36)$$

Como

$$A'(r) = A_0 \quad , \quad B'(r) = B_0 \quad , \quad (3.37)$$

e no limite $r \rightarrow r_+$

$$\lim_{r \rightarrow r_+} \frac{B(r)}{A(r)} = \frac{B_0}{A_0} \quad , \quad \lim_{r \rightarrow r_+} \frac{A(r)}{B(r)} = \frac{A_0}{B_0} \quad , \quad (3.38)$$

temos que

$$\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{A_0 B_0} , \quad (3.39)$$

para geometrias que satisfazem as condições (3.21) e (3.22).

3.5 Termodinâmica de buracos negros

A definição de um horizonte de Killing como a borda de um buraco negro tem a vantagem de ser simples, mas a extensão desta ideia para espaços-tempos mais gerais apresenta dificuldades. Caracterização usual para a fronteira do buraco negro é feita através dos *horizontes de eventos*, discutidos a seguir. Ressaltamos entretanto que embora horizontes de eventos e horizontes de Killing sejam estruturas em geral diferentes, as mesmas coincidem no caso de geometrias estacionárias e assintoticamente planas [19].

Para estudar a estrutura causal do espaço-tempo é muito frequente trabalhar com os diagramas de Carter-Penrose (diagramas conformes). Estes diagramas consistem em mapear, através de transformações conformes, os intervalos infinitos das coordenadas para um intervalo finito (o espaço-tempo inteiro é representado em uma região finita) mantendo a propriedade de que os cones de luz permanecem sendo linhas de 45° . De forma pouco rigorosa, o infinito corresponde ao destino e/ou origem de geodésicas do tipo luz, tempo e espaço. Então, temos três tipos de infinitos: tipo luz, tipo tempo e tipo espaço, que correspondem ao destino e/ou origem das geodésicas do tipo luz, tempo e espaço, respectivamente (veja por exemplo [23]).

Um exemplo desse diagramas é mostrado na figura 3.1, o qual representa a estrutura causal do espaço-tempo de Schwarzschild. Os infinitos destes diagramas são mostrados na figura 3.1. Eles são:

- infinito futuro tipo tempo i^+ ,
- infinito passado tipo tempo i^- ,
- infinito tipo espaço i^0 ,
- futuro nulo infinito $\mathcal{I}^+$,
- passado nulo infinito $\mathcal{I}^-$.

Figura 3.1: Diagrama conforme da métrica de Schwarzschild. O horizonte de eventos $r = 2M$, superfície que separa os pontos no espaço-tempo que são conectados por curvas tipo tempo de aqueles que não estão ($r_+ = 2M$). As partículas (ou sinais) dentro do horizonte de eventos terminam em singularidades ($r = 0$), fora deste a mesmas terminam no infinito $r \rightarrow \infty$.

Estes diagramas podem ser utilizados para a definição de horizontes de eventos. Definindo o passado causal de $\mathcal{I}^+$, $J^-(\mathcal{I}^+)$, como o conjunto de todos os eventos nos cones de luz passados emanando desde todos os eventos sobre $\mathcal{I}^+$. Define-se o horizonte de eventos futuro como a fronteira do passado causal de $\mathcal{I}^+$, ($r = 2M$ no diagrama conforme) [21].

O problema com a caracterização usual do buraco negro em termos de um horizonte de eventos é que esta estrutura depende das características globais do espaço-tempo. São objetos não-locais, ao contrário dos horizontes de Killing definidos previamente, o que torna a sua caracterização em torno de quantidades locais difícil para uma métrica arbitrária. Ainda assim, resultados muito gerais podem ser definidos em termos da caracterização de um buraco negro via horizontes de eventos. Apresentaremos algumas destas propriedades a seguir.

Na Relatividade Geral Clássica a temperatura física associada a buracos negros é zero absoluto [24], visto que classicamente estes objetos não irradiam. Esse fato e a descoberta de J. Wheeler que a existência de buracos negros clássicos contradizem a segunda lei da termodinâmica (quando um corpo é absorvido por um buraco negro clássico a entropia total diminui segundo um observador fora do mesmo), forneceu indicações de que a termodinâmica destas estruturas é associada a efeitos quânticos. Por outro lado, o teorema das áreas dos buracos negros [23, 24] (segundo a

relatividade clássica) estabelece que o área dos horizontes de eventos nunca diminui, o que pode ser escrito como

$$\Delta\mathcal{A} \geq 0. \quad (3.40)$$

Em 1973 [33], J. Bekenstein notou uma analogia desta equação com a que corresponde à segunda lei da termodinâmica

$$\Delta S \geq 0, \quad (3.41)$$

onde S é a entropia total de um sistema isolado. Ele propôs que a área do horizonte de eventos (com um termo de proporcionalidade adequado) seja interpretado como sua entropia. No mesmo período, J. M Bardeen e colaboradores [34] fornecem quatro leis da mecânica de buracos negros (só para buracos negros estacionários) baseados em analogias matemáticas da lei zero (gravidade superficial κ e a temperatura T) e segunda lei da termodinâmica (a área $\mathcal{A}$ do horizonte de eventos e a entropia S).

Tabela 3.1: Leis da termodinâmica e correspondentes para a física de buracos negros.

Lei	Termodinâmica	Buracos negros
Zero	T é constante sobre um sistema em equilíbrio termodinâmico	κ é constante ao longo do horizonte de um buraco negro estacionário
Primeira	$dE = TdS + \text{termos de trabalho}$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi}d\mathcal{A} + \Omega_H dJ$
Segunda	$\delta S \geq 0$ em qualquer processo	$\delta\mathcal{A} \geq 0$ em qualquer processo
Terceira	não possível atingir $T = 0$ por um número finito de processos físicos	não possível atingir $\kappa = 0$ por um número finito de processos físicos

A tabela 3.1 mostra as leis da termodinâmica e as suas correspondentes relações para a física de buracos negros. Pode ser observado que as quantidades análogas são dadas da seguinte forma

$$E \longleftrightarrow M, \quad T \longleftrightarrow \beta\kappa, \quad S \longleftrightarrow \frac{\mathcal{A}}{8\pi\beta}, \quad (3.42)$$

onde $\mathcal{A}$, κ e M são a área, gravidade superficial e a massa do buraco negro respectivamente. Neste ponto, β ainda é uma constante não especificada

Devido ao que, na Relatividade Geral Clássica, a temperatura do buraco negro é o zero absoluto, κ não representaria fisicamente uma temperatura neste contexto. Em 1974 [35], Stephen Hawking fez a descoberta que efeitos semi-clássico têm como

resultado que um buraco negro emite partículas para o infinito, com um espectro de corpo negro caracterizado pela temperatura

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}. \quad (3.43)$$

A temperatura (3.43) é conhecida como *temperatura Hawking*, e desta forma a gravidade superficial κ é interpretada como a temperatura física do buraco negro [24]. A expressão (3.43) obtida por Hawking fixa o valor de β como $\hbar/2\pi$ em (3.42). Desta forma, a relação entre entropia e área dos buracos negros fica

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4\hbar}. \quad (3.44)$$

O problema que manifestou Wheeler da aparente incompatibilidade da termodinâmica usual com a física de buracos negros foi resolvido por Bekenstein e Hawking, ao fornecer uma segunda lei generalizada na física de buracos negros na qual se têm em conta a entropia do buraco negro e a entropia da radiação e matéria fora de buraco negro [36].

Capítulo 4

Buracos de Minhoca Esfericamente Simétricos

Outra classe de soluções importantes das equações de Einstein são os buracos de minhoca. Um buraco de minhoca é uma região compacta do espaço-tempo com topologia não trivial e fronteira topologicamente simples [5]. Estas estruturas conectam, mediante uma “garganta”, duas regiões, as “bocas” do buraco de minhoca, que estariam arbitrariamente distantes. Uma das características destes objetos, que os diferenciam dos buracos negros, é a ausência de um horizonte. Até o presente momento, não existem evidências observacionais da existência de buracos de minhoca reais. Ainda assim, eles se apresentam como soluções consistentes na relatividade geral, e a investigação destes hipotéticos objetos é um tema de pesquisa relevante na comunidade [37, 14]. Se fossem compostos somente de matéria “ordinária”, os buracos de minhoca seriam intrinsecamente instáveis e não seria possível atravessá-los, dado que o tempo em que suas bocas permaneceriam abertas seria muito curto [6]. Para estabilizar estas estruturas é preciso que o material que gera estes objetos tenha uma densidade de energia negativa em algum referencial. Este tipo de matéria, ainda hipotética, é chamada de “matéria exótica” [6, 38]. Vale salientar que matéria deste tipo é postulada em diversos modelos cosmológicos contemporâneos [9, 39]. Neste capítulo, abordaremos alguns aspectos da física associada aos buracos de minhoca.

4.1 Buracos de minhoca atravessáveis

Uma abordagem usual no tratamento das equações de Einstein é assumir que o conteúdo de matéria pode ser modelado por um tensor energia-momento bem conhecido, e a partir deste ponto, resolver (quando possível) as equações diferenciais parciais resultantes. Por outro lado, outra forma de lidar com o problema é postular condições desejáveis (e razoáveis) para a geometria, e investigar as suas consequências para os possíveis tensores energia-momento associados [6, 5, 37].

No tratamento de buracos de minhoca, frequentemente são propostas algumas características que estes objetos devem possuir. Apresentamos a seguir algumas destas propriedades, adaptadas do tratamento feito em [5]:

1. A solução deve obedecer as equações de campo Einstein em todo o espaço-tempo. Esta condição fixa o cenário teórico em que estamos trabalhando.
2. Para ter um buraco de minhoca a solução deve ter uma garganta que conecte duas regiões maximalmente simétricas do espaço-tempo, e portanto com métricas dadas por (2.39).
3. Existe uma curva tipo tempo conectando as duas regiões assintóticas do buraco de minhoca. Ou seja, um observador pode atravessar esta estrutura, de uma região a outra.
4. As magnitudes das componentes do tensor de curvatura $R_{\mu}^{\nu\alpha\beta}$ devem ser limitadas. Ou seja, as forças gravitacionais de maré no buraco de minhoca não podem ser arbitrariamente grandes. Um corpo, em princípio, deve poder cruzar esta estrutura intacto.
5. Um viajante deve ser capaz de atravessar o buraco de minhoca em um tempo próprio finito, medido pelo mesmo e por observadores que encontrem-se na entrada e saída do buraco de minhoca.
6. A solução deve ser perturbativamente estável.
7. O espaço-tempo deve ser esfericamente simétrico e estático.

As *propriedades 1 a 3* são critérios básicos para uma geometria modelar um buraco de minhoca. A ideia é construir soluções a partir destes critérios propostos, e (se possível) ajustar os parâmetros do buraco de minhoca para que este satisfaça as *propriedades 4 a 6*.

A *propriedade 7* é uma escolha de conveniência, que será adotada neste trabalho. Conforme visto no capítulo 2, a métrica associada a um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático tem a forma (2.45) no sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Entretanto, para uma primeira caracterização dos buracos de minhoca, o uso do comprimento próprio como coordenada radial é interessante. Neste caso, a métrica pode ser escrita como

$$ds^2 = -e^{2\Phi(l)} dt^2 + dl^2 + r^2(l) d\Omega^2. \quad (4.1)$$

Que a coordenada l em (4.1) é um comprimento próprio pode ser visto considerando-se a trajetória radial (tipo espaço) dada por $(t = t_0, l, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0)$, onde t_0 , θ_0 e ϕ_0 são constantes, e l varia de l_{ini} a l_{fin} . Temos que o comprimento próprio Δs da curva é dado por

$$\Delta s = \int_{l_{ini}}^{l_{fin}} \sqrt{|ds^2|} = l_{fin} - l_{ini} = \Delta l. \quad (4.2)$$

A expressão (4.1), assim como (2.45), é uma forma geral de escrever a métrica associada a geometrias esfericamente simétricas e estáticas. Em (4.1), a métrica é caracterizada por duas funções, $\Phi(l)$ e $r(l)$ ¹. Já em (2.45), as funções que caracterizam a métrica são $A(r)$ e $B(r)$. Apresentaremos a relação entre estes dois conjuntos de funções. Comparando as expressões (2.45) e (4.1), temos que

$$l = \int \frac{dr}{\sqrt{B(r)}}. \quad (4.3)$$

A integração da equação (4.3) fornece a função $l(r)$, a menos de uma constante arbitrária. A inversa desta relação fornece a função $r(l)$. A partir das funções $r(l)$ e $l(r)$, são determinadas as relações entre $\Phi(l)$ e $A(r)$ através de

$$A(r) = e^{2\Phi(l(r))}, \quad (4.4)$$

$$\Phi(l) = \ln \left[\sqrt{A(r(l))} \right]. \quad (4.5)$$

¹É comum na literatura pertinente expressar as funções $A(r)$ e $B(r)$ como $A(r) = \exp[2\Phi(r)]$ e $B(r) = 1 - b(r)/r$, principalmente quando geometrias assintoticamente planas são consideradas. As funções $\Phi(r)$ e $b(r)$ são conhecidas como *função deslocamento* e *função de forma* respectivamente.

Apresentamos a seguir condições sobre a geometria que garantem que as propriedades apresentadas para os buracos de minhoca sejam satisfeitas:

- As funções $\Phi(l)$ e $r(l)$ devem ser bem definidas e infinitamente diferenciáveis (C^∞) para $-l_{max} < l < +l_{max}$. Eventualmente, l_{max} pode tender a infinito.
- A função $r(l)$ deve ser positivo-definida.
- A função $r(l)$ deve possuir um mínimo local ².
- A geometria assintoticamente tende a um espaço-tempo maximalmente simétrico. Ou seja, levando em conta (4.4) e (2.39), as funções $\Phi(l)$ e $r(l)$ devem satisfazer a relação

$$\lim_{l \rightarrow \infty} e^{2\Phi(l)} = \lim_{l \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{\Lambda}{3} r^2(l) \right]. \quad (4.6)$$

O fato de que funções $\Phi(l)$ e $r(l)$ são bem definidas e diferenciáveis para qualquer valor de l , combinada à condição para estas funções nos limites assintóticos ($l \rightarrow \pm\infty$), implica que a geometria caracterizada pela métrica (4.1) liga duas regiões maximalmente simétricas, conforme requerido pela *propriedade 2*. Como $r > 0$, este parâmetro pode ser interpretado como a coordenada radial usual.

Para considerar a *propriedade 3*, tomemos a curva parametrizada conforme apresentado a seguir, no sistema de coordenadas (t, l, θ, ϕ) :

$$t(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{C + K} e^{-\Phi(l(\tau'))} d\tau', \quad (4.7)$$

$$l(\tau) = \sqrt{C} (\tau - \tau_0) + l_0, \quad (4.8)$$

$$\theta(\tau) = \theta_0, \quad (4.9)$$

$$\phi(\tau) = \phi_0, \quad (4.10)$$

onde C , K , τ_0 , l_0 , θ_0 e ϕ_0 são constantes, com $C > K \geq 0$. Esta curva é tipo tempo se $K > 0$ ou tipo luz se $K = 0$, como pode ser verificado a partir do cálculo da quadrivelocidade tangente à curva, conforme

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \left(\sqrt{C + K} e^{-\Phi(l)}, \sqrt{C}, 0, 0 \right). \quad (4.11)$$

²Para vários resultados nesta dissertação, esta condição pode ser suavizada, com a restrição de que $r(l)$ possua um *extremo local*.

Desta forma, a magnitude de v^μ é dada por

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = -e^{2\Phi(l)} [(C + K)e^{-2\Phi(l)}] + C = -K. \quad (4.12)$$

A trajetória proposta é bem definida se $\Phi(l)$ é regular, mostrando que uma partícula massiva ou sem massa pode cruzar o buraco de minhoca de um extremo assintótico a outro, com $l_0 \rightarrow -\infty$ e $\tau \rightarrow \infty$. Desta forma, a finitude de $\Phi(l)$ garante que não existem horizontes de Killing (ou de eventos) entre as regiões $l = \pm l_{max}$.

4.2 Geometria próxima à garganta

A superfície onde r assume o seu valor mínimo, tomada como $l = 0$, é denominada de *garganta do buraco de minhoca*. Neste trabalho, denotaremos este valor extremo como r_0 , de forma que

$$r(l = 0) = r_0. \quad (4.13)$$

Vamos a seguir caracterizar algumas das propriedades geométricas destes objetos na região próxima a garganta.

A condição de extremalidade para $r(l)$ em $l = 0$ implica que esta função deve satisfazer:

$$\left. \frac{dr(l)}{dl} \right|_{l=0} = 0, \quad (4.14)$$

$$\left. \frac{d^2r(l)}{dl^2} \right|_{l=0} = c > 0, \quad (4.15)$$

onde (4.15) garante que $l = 0$ é de fato um ponto extremo de $r(l)$, e não um ponto de inflexão apenas. Estritamente falando, para um buraco de minhoca a constante c deve ser positiva, de forma que o ponto extremo é um mínimo local. Entretanto, para muitos dos resultados deste capítulo a condição de minimalidade não é necessária. Veremos no capítulo 5 que a constante c introduzida em (4.15) pode ser associada a um parâmetro importante relacionado a superfície $r = r_0$ ³, parâmetro este análogo a gravidade superficial apresentada no capítulo anterior.

A regularidade da função $r(l)$ no intervalo $-l_{max} < l < l_{max}$, complementada pelas condições (4.14) e (4.15), implicam que a função $r(l)$ pode ser escrita, na

³Ver Eq. (5.48), página 58.

região próxima a garganta, como:

$$r(l) = r_0 + \frac{c}{2} l^2 + \mathcal{O}(l^3). \quad (4.16)$$

Ilustramos este resultado na figura 4.1 (esquerda). A partir de (4.16), duas possíveis funções $l(r)$ são obtidas,

$$l(r) = \pm \sqrt{\frac{2}{c}} (r - r_0)^{1/2}. \quad (4.17)$$

Este resultado é ilustrado na figura 4.1 (direita). A não-unicidade na inversa de $r(l)$ está relacionado ao fato de que o sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) não cobre toda a variedade, e em particular a superfície $l = 0$ ($r \rightarrow r_0$).

Com base em (4.3) e (4.17), temos que

$$\frac{1}{B(r)} = \left[\frac{dl(r)}{dr} \right]^2 = \frac{1}{2c} (r - r_0)^{-1}, \quad (4.18)$$

e desta forma, vemos que a função $B(r)$, próximo de r_0 , é dada por

$$B(r) = 2c (r - r_0) + \mathcal{O}(r - r_0)^2. \quad (4.19)$$

Ou seja, r_0 é um *zero simples* da função $B(r)$. Em buracos de minhoca, onde $r(l)$ possui um mínimo em $l = 0$ e $c > 0$, vemos que $B(r)$ é uma função crescente em $r = r_0$. Mas se esta condição for relaxada, e admitirmos que $r(l)$ possui um máximo em $l = 0$, a função $B(r)$ é decrescente em $r = r_0$.

Vimos também, no capítulo anterior, que se as funções $A(r)$ e $B(r)$ possuem um mesmo zero simples, este ponto necessariamente é um horizonte de Killing, e portanto uma superfície tipo luz. Como estamos considerando buracos de minhoca atravessáveis, a garganta $r = r_0$ é uma superfície tipo tempo. Desta forma, a função $A(r)$, próxima a garganta, deve ser

$$A(r) = \bar{A}_0 + \mathcal{O}(r - r_0)^2, \quad (4.20)$$

com $\bar{A}_0 > 0$. Considerando a expressão (4.4), a forma (4.20) para $A(r)$ é equivalente a condição de que a função $\Phi(l)$ em (4.1) seja analítica no ponto $l = 0$.

Uma forma talvez mais intuitiva de visualização da geometria de um buraco de minhoca esfericamente simétrico é através de um diagrama de imersão [21]. Mais

Figura 4.1: (Esquerda) Comportamento da função $r(l)$ próximo da garganta ($l = 0$) em um buraco de minhoca. (Direita) Comportamento das funções inversas de $r(l)$, próximas ao ponto $r = r_0$.

precisamente, imergiremos a seção do buraco de minhoca

$$\{(t = t_0, r, \theta = \theta_0, \phi), t_0 = \text{constante}, \theta_0 = \text{constante}\}, \quad (4.21)$$

em um espaço euclidiano tridimensional. Este procedimento, embora não seja estritamente necessário, é frequentemente utilizado na literatura pertinente [40, 41]. Vamos desta forma apresentá-lo aqui.

A partir de (2.45), a métrica da subvariedade (4.21) é dada pelo elemento de linha

$$ds^2 = \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\varphi^2. \quad (4.22)$$

Por outro lado, a métrica euclidiana pode ser expressa em termos de coordenadas cilíndricas como

$$ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\varphi^2. \quad (4.23)$$

Igualando (4.23) e (4.22) temos que

$$\frac{dr^2}{B(r)} = dz^2 + dr^2. \quad (4.24)$$

Figura 4.2: (Esquerda) Diagrama de imersão da superfície (t_0, r, θ_0, ϕ) associada a um buraco de minhoca. (Direita) Seção $z - r$ do diagrama, com destaque para a divergência de dz/dr na garganta.

Assim obtemos a equação da superfície imersa, a qual é dada por

$$\frac{dz}{dr} = \pm \sqrt{\frac{1 - B(r)}{B(r)}}. \quad (4.25)$$

Na vizinhança da garganta de um buraco de minhoca ($r \approx r_0$), através do resultado (4.19), temos que

$$z(r) = \pm \sqrt{\frac{2}{c}} (r - r_0)^{1/2}. \quad (4.26)$$

Na figura 4.2 é mostrado um diagrama de imersão deste espaço-tempo, na região próxima à garganta.

4.3 Um sistema de coordenadas conveniente

Um sistema de coordenadas que será utilizado nesta dissertação na descrição de buracos de minhoca é o (t, r^*, θ, ϕ) , com a coordenada tartaruga introduzida em (3.6). Conforme visto no capítulo 2, a métrica escrita neste sistema de coordenadas tem a forma apresentada em (3.14).

Através das expressões (3.14) e (4.1) para a métrica de um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático, observamos que a relação entre as coordenadas radiais r^* e l é dada por

$$\frac{dl(r^*)}{dr^*} = \frac{1}{\mathcal{A}(r^*)}. \quad (4.27)$$

Com base na transformação (4.27), observamos que o buraco de minhoca, com

Figura 4.3: (Esquerda) Comportamento da função $r(r^*)$ próximo da garganta ($r^* = 0$) em um buraco de minhoca. (Direita) Comportamento das funções inversas de $r(r^*)$, próximas ao ponto $r = r_0$.

o sistema coordenado (t, r^*, θ, ϕ) , é tal que $-\infty < r^* < +\infty$. Com uma escolha conveniente para a constante de integração em (4.27), a garganta do buraco de minhoca ($l = 0$ ou $r = r_0$) é expresso como a superfície $r^* = 0$.

Vemos ainda, com o auxílio de (4.27) combinado ao fato de que $\mathcal{A}(r^*) > 0$, que a condição de extremalidade para $r(l)$ na garganta implica que a função $r(r^*)$ deve satisfazer:

$$\left. \frac{dr(r^*)}{dr^*} \right|_{r^*=0} = 0, \quad (4.28)$$

$$\left. \frac{d^2r(r^*)}{dr^{*2}} \right|_{r^*=0} > 0. \quad (4.29)$$

O perfil da função $r(r^*)$ e sua inversa próxima à garganta é ilustrado na figura 4.3.

Considerando as expressões (4.19) e (4.20) para as funções $B(r)$ e $A(r)$ próximas de $r = r_0$, temos que as funções métricas $\mathcal{A}(r^*)$ e $r(r^*)$, próxima à garganta, podem ser escritas como

$$\mathcal{A}(r^*) = \bar{A}_0, \quad (4.30)$$

$$r(r^*) = r_0 + \frac{c}{2} \bar{A}_0 (r^*)^2. \quad (4.31)$$

4.4 Tensor energia-momento na garganta

Até este ponto, as propriedades apresentadas para buracos de minhoca independem de equações de campo específicas. Vamos agora introduzir as equações de Einstein como ligação entre as propriedades geométricas e o tensor energia-momento associado.

Considerando uma métrica simetricamente esférica e estática nas coordenadas (t, r, θ, ϕ) conforme (2.45), o cálculo das conexões, do tensor de curvatura, e finalmente do tensor de Ricci pode ser feito de maneira direta a partir das equações (2.10), (2.20) e (2.25). As expressões finais para o tensor R_μ^ν são dadas por

$$R_t^t(r) = \frac{1}{4} \frac{B(r) [A'(r)]^2}{[A(r)]^2} - \frac{1}{r} \frac{B(r) A'(r)}{A(r)} - \frac{1}{4} \frac{A'(r) B'(r)}{A(r)} - \frac{1}{2} \frac{A''(r) B(r)}{A(r)}, \quad (4.32)$$

$$R_r^r(r) = \frac{1}{4} \frac{B(r) [A'(r)]^2}{[A(r)]^2} - \frac{1}{r} B'(r) - \frac{1}{4} \frac{A'(r) B'(r)}{A(r)} - \frac{1}{2} \frac{A''(r) B(r)}{A(r)}, \quad (4.33)$$

$$R_\theta^\theta(r) = R_\phi^\phi(r) = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} B(r) - \frac{1}{2r} \frac{A'(r) B(r)}{A(r)} - \frac{1}{2r} B'(r), \quad (4.34)$$

onde o apóstrofe (') denota a derivada em relação a r . Através de (4.32)-(4.34), o escalar de Ricci R pode ser diretamente calculado,

$$\begin{aligned} R(r) &= R_t^t(r) + R_r^r(r) + R_\theta^\theta(r) + R_\phi^\phi(r) \\ &= \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} B(r) - \frac{2}{r} \frac{A'(r) B(r)}{A(r)} + \frac{1}{2} \frac{B(r) [A'(r)]^2}{[A(r)]^2} - \frac{2}{r} B'(r) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{A'(r) B'(r)}{A(r)} - \frac{A''(r) B(r)}{A(r)} \end{aligned} \quad (4.35)$$

De acordo com (4.32)-(4.34), o tensor de Einstein, definido em (2.28), é diagonal se considerada a carta (t, r, θ, ϕ) . Como a métrica também é diagonal neste sistema de coordenadas segundo (2.45), as equações de Einstein (2.35) mostram que o tensor energia-momento deve necessariamente ser diagonal, na forma:

$$T_\mu^\nu = \begin{bmatrix} -\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_t \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

O sinal da componente T_0^0 foi definido de forma que ρ é a densidade de energia no referencial (local) de observadores que acompanham as curvas integrais de $\partial/\partial t$. De fato, o sistema de coordenadas $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ associado a estes observadores é dado por

$$\frac{\partial}{\partial \hat{t}} = \frac{1}{\sqrt{A(r)}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{r}} = \sqrt{B(r)} \frac{\partial}{\partial r}, \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (4.40)$$

e na carta $(\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, temos que

$$T_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_t \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Utilizando os resultados (4.32)-(4.35), temos, então, que a densidade de energia ρ e as pressões p_r e p_t podem ser expressas em termos das funções $A(r)$ e $B(r)$, conforme

$$8\pi\rho(r) = -\Lambda + \frac{1}{r^2} - \frac{B(r)}{r^2} - \frac{B'(r)}{r}, \quad (4.42)$$

$$8\pi p_r(r) = \Lambda - \frac{1}{r^2} + \frac{B(r)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{B(r) A'(r)}{A(r)}, \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} 8\pi p_t(r) = & \Lambda + \frac{1}{2r} \frac{A'(r) B(r)}{A(r)} - \frac{1}{4} \frac{(A'(r))^2 B(r)}{A^2(r)} + \frac{1}{2r} B'(r) + \frac{1}{4} \frac{A'(r) B'(r)}{A(r)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{A''(r) B(r)}{A(r)}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

onde admitimos uma eventual constante cosmológica Λ não nula.

Vamos agora calcular as componentes do tensor energia-momento na garganta ($r = r_0$). Através das expressões (4.42)-(4.44), temos que

$$8\pi\rho(r_0) = -\Lambda + \frac{1}{r_0^2} - \frac{B'(r_0)}{r_0}, \quad (4.45)$$

$$8\pi p_r(r_0) = \Lambda - \frac{1}{r_0^2} , \quad (4.46)$$

$$8\pi p_t(r_0) = \Lambda + \frac{1}{2} \frac{1}{r_0} B'(r_0) + \frac{1}{4} \frac{A'(r_0) B'(r_0)}{A(r_0)} . \quad (4.47)$$

A partir de (4.45) e (4.46), temos que

$$\rho(r_0) + p_r(r_0) = -\frac{B'(r_0)}{8\pi r_0} . \quad (4.48)$$

Conforme demonstrado em (4.19), a função $B(r)$ é necessariamente crescente em $r = r_0$ ($B'(r_0) > 0$) se um buraco de minhoca é considerado, ou seja, se $l = 0$ ($r = r_0$) é um ponto de mínimo. Desta forma, ρ e p_r satisfazem a seguinte desigualdade na garganta de um buraco de minhoca,

$$\rho(r_0) + p_r(r_0) < 0. \quad (4.49)$$

Como vimos no capítulo 2, a matéria que satisfaz (4.49) viola a condição de energia nula, sendo chamada de *matéria exótica* [5, 38, 42]. Desta forma, *um buraco de minhoca é necessariamente suportado por matéria exótica.*

Capítulo 5

Horizontes Atrapantes e Termodinâmica Generalizada

Neste capítulo apresentaremos uma generalização da termodinâmica usual de buracos negros discutida na seção 3.5. Esta generalização foi proposta por Kodama [43], Hayward [44, 45] e González Díaz [14]. Nesta versão, relações termodinâmicas são definidas para estruturas mais gerais que as previamente consideradas. É também uma formulação *quasi-local*, e desta forma a sua interpretação em termos de grandezas físicas é mais simples. Além de apresentarmos uma das bases do formalismo a ser utilizado neste trabalho, a nossa principal contribuição aqui é reescrever os resultados em [43, 44, 45, 14] de uma forma particularmente conveniente para sua aplicação em geometrias estáticas.

5.1 Superfícies atrapadas e horizontes atrapantes

Um horizonte de eventos delimita uma região em que a gravidade é forte o suficiente para confinar inclusive a luz. Esta estrutura por outro lado envolve a caracterização global de um espaço-tempo, o que envolve uma série de dificuldades. No capítulo anterior apresentamos uma outra caracterização da fronteira de um buraco negro, baseada em um horizonte de Killing. Mas a aplicabilidade deste objeto limita fortemente as geometrias que podem ser consideradas – no caso somente espaços-tempos estacionários.

Nesta seção vamos apresentar uma nova proposta para a caracterização de regiões confinadas, baseadas no conceito de *horizontes atrapantes*. A aplicabilidade deste

conceito é bastante geral [44, 45, 14]. Mas neste trabalho, que foca em geometrias esfericamente simétricas e estáticas, a motivação para a introdução dos horizontes atrapantes é que estes permitem uma descrição unificada de buracos de minhoca e buracos negros.

Vamos introduzir inicialmente a ideia de *superfícies atrapadas*¹. Intuitivamente (por enquanto), uma superfície bidimensional (espaço e compacta) é dita atrapada quando congruências tipo luz emitidas em direções opostas, para dentro e para fora, convergem. Em uma superfície atrapada os cones de luz estão inclinados, de forma que ambas as famílias de raios de luz que “entram” e que “saem” se dirigem em direção a região interna delimitada pela superfície atrapada. É instrutivo comparar o cenário apresentado com o que acontece em uma superfície não atrapada. Neste caso, os raios de luz que “saem” não convergem e se propagam até distâncias arbitrariamente grandes. Uma superfície atrapada desta forma captura a ideia de que (nesta superfície) a gravidade é forte o suficiente para confinar inclusive a luz.

Uma superfície bidimensional (espaço) é dita *marginal* se uma das famílias de raios de luz converge e a outra não converge ou diverge. Intuitivamente, uma superfície marginal é um caso limite, em que a gravidade é forte o suficiente para impedir a luz de escapar, mas não o suficiente para confiná-la completamente. Finalmente, temos que um *horizonte atrapante* é a fronteira de uma superfície tridimensional foleada por um conjunto de superfícies marginais. Ilustramos os conceitos apresentados na figura 5.1, considerando o horizonte atrapante como a fronteira de um buraco negro (ver também as figuras 5.2 e 6.1 mais adiante).

A seguir, faremos uma apresentação mais precisa dos conceitos envolvidos na caracterização das superfícies atrapadas e horizontes atrapantes, através do formalismo apresentado por Hayward em [4].

No capítulo 2, foi apresentada em (2.45) a forma da métrica associada a um espaço-tempo esfericamente simétrico e estático no sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Para a definição das superfícies atrapantes entretanto, um sistema de coordenadas mais conveniente é o (x^+, x^-, θ, ϕ) , onde x^+ e x^- são as coordenadas avançadas e retardadas definidas em (3.7) e (3.8)². Em termos deste sistema de coordenadas, o elemento de linha (2.45) pode ser escrito como

$$ds^2 = 2g_{+-}(x^+, x^-)dx^+dx^- + r^2(x^+, x^-)d\Omega^2. \quad (5.1)$$

¹Versão para o português de *trapped surfaces*, adotada neste trabalho.

²O formalismo baseado neste sistema de coordenadas é frequentemente chamado de “*double null*” na literatura.

Figura 5.1: Cones de luz futuros em torno de um horizonte atrapante. Na região interna, os cones de luz estão inclinados “para dentro”. Cada ponto na região a esquerda do horizonte representa uma superfície atrapada. Na figura apresentada, o horizonte atrapante é do tipo luz, e descreve a fronteira de um buraco negro.

As componentes da métrica g_{ab} , em notação matricial, podem ser lidas do elemento de linha (5.1),

$$[g_{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & -g_{+-} \\ -g_{+-} & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

As componentes g^{ab} serão úteis em várias passagens. Em notação matricial, elas podem ser escritas como

$$[g^{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & -g^{+-} \\ -g^{+-} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -g_{+-}^{-1} \\ -g_{+-}^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

como pode ser imediatamente verificado ($g^{ac}g_{cb} = \delta_b^a$).

A geometria com a métrica na forma (5.1) é esfericamente simétrica e não necessariamente estacionária. Visto que estamos interessados principalmente em geometrias estáticas, vamos obter a relação entre as funções $g_{+-}(x^+, x^-)$ e $A(r)$. De acordo com (5.1) e (3.18) temos que

$$-A(r)d^2x^+ + 2\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}dx^+dr = 2g_{+-}(x^+, x^-)dx^+dx^-. \quad (5.4)$$

Já a partir de (3.6) e (3.7) tem-se que

$$dx^- = dx^+ - 2 \frac{dr}{\sqrt{A(r)B(r)}}, \quad (5.5)$$

e desta forma

$$[-A(r) - 2g_{+-}(x^+, x^-)] d^2x^+ + \left[2\sqrt{\frac{A}{B}} + \frac{4g_{+-}(x^+, x^-)}{\sqrt{A(r)B(r)}} \right] dx^+ dr = 0. \quad (5.6)$$

Temos então que

$$g_{+-}(x^+, x^-) = -\frac{1}{2}A(r(x^+, x^-)), \quad (5.7)$$

e

$$g^{+-}(x^+, x^-) = [g_{+-}(x^+, x^-)]^{-1} = -\frac{2}{A(r(x^+, x^-))}. \quad (5.8)$$

Notamos, a partir de (5.7), que $g_{+-}(x^+, x^-) < 0$, de forma a garantir que a geometria seja Lorentziana. O próximo passo é relacionar $r(x^+, x^-)$ com as funções A e B . Da equação (5.5), pode-se observar que

$$\frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^+} = \frac{1}{2} \sqrt{A(r(x^+, x^-))B(r(x^+, x^-))}, \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^-} = -\frac{1}{2} \sqrt{A(r(x^+, x^-))B(r(x^+, x^-))}. \quad (5.10)$$

As relações (5.7), (5.9) e (5.10) determinam a relação entre as componentes da métrica nas cartas (t, r, θ, ϕ) e (x^+, x^-, θ, ϕ) .

Para caracterizar com mais rigor os conceitos de superfície atrapada, superfície marginal e horizonte atrapante, vamos introduzir os vetores nulos que caracterizam as congruências nulas que partem de uma superfície bidimensional S , tomada como fechada e tipo espaço. Estes vetores nulos são escritos [46, 14], em termos da carta (x^+, x^-, θ, ϕ) , por

$$X_{\pm} = \frac{\partial}{\partial x^{\pm}}. \quad (5.11)$$

No sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) , os vetores $X_{\pm}$ ficam

$$X_{\pm} = \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^{\pm}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial t(x^+, x^-)}{\partial x^{\pm}} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.12)$$

Levando em conta que, de (3.7) e (3.8), temos

$$dt = \frac{1}{2}(dx^+ + dx^-), \quad (5.13)$$

$$\frac{\partial t(x^+, x^-)}{\partial x^\pm} = \frac{1}{2}, \quad (5.14)$$

e portanto

$$X_\pm = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \pm \sqrt{A(r)B(r)} \frac{\partial}{\partial r} \right]. \quad (5.15)$$

As expansões associadas às congruências (5.11) são dadas por [46]

$$\hat{\theta}_\pm = \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial x^\pm} r(x^+, x^-), \quad (5.16)$$

onde $\hat{\theta}_+$ e $\hat{\theta}_-$ se referem a $\partial/\partial x^+$ e $\partial/\partial x^-$ respectivamente. As quantidades $\hat{\theta}_\pm$ medem a taxa de variação fracional da área da seção transversal dos feixes $X_\pm$ em (5.11) [5, 23].

Estas expansões, em termos das funções $A(r)$ e $B(r)$, assumem a forma

$$\hat{\theta}_\pm = \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial x^\pm} = \pm \frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{r}. \quad (5.17)$$

Uma superfície atrapada S é definida por meio das expansões de modo que $\hat{\theta}_+$ e $\hat{\theta}_-$ satisfazem

$$\hat{\theta}_+ \hat{\theta}_- \Big|_S > 0. \quad (5.18)$$

Desta forma, em uma superfície não atrapada temos que $\hat{\theta}_+ \hat{\theta}_-|_S < 0$.

Utilizando a mesma linguagem, define-se uma superfície marginal S de modo que

$$\hat{\theta}_+ \hat{\theta}_-|_S = 0,$$

o seja, uma expansão ou as duas são nulas. As superfícies marginais, tomando (por exemplo $\hat{\theta}_+|_S = 0$) são ditas futuras se $\hat{\theta}_-|_S < 0$, passadas se $\hat{\theta}_- > 0|_S$, e bifurcantes se $\hat{\theta}_-|_S = 0^3$.

³Estamos assumindo que uma seta do tempo bem definida está presente. Ou seja, que existe um campo vetorial contínuo tipo tempo sobre a variedade, e portanto o futuro e passado podem ser bem caracterizados [23, 4].

Definimos então o horizonte atrapante em termos das expansões, assim que

$$\hat{\theta}_+|_S = 0 \implies \hat{\theta}_-|_S \neq 0 \text{ e } \frac{\partial \hat{\theta}_+}{\partial x^-}|_S \neq 0, \quad (5.19)$$

ou

$$\hat{\theta}_-|_S = 0 \implies \hat{\theta}_+|_S \neq 0 \text{ e } \frac{\partial \hat{\theta}_-}{\partial x^+}|_S \neq 0. \quad (5.20)$$

Aqui temos que se fixamos uma expansão como nula, a outra encontra-se relacionada com a direção dos raios normais (de entrada ou saída) à superfície atrapada.

Os horizontes atrapantes podem ainda ser caracterizados como *exteriores*, quando

$$\frac{\partial \hat{\theta}_\pm}{\partial x^\pm}|_S < 0; \quad (5.21)$$

e *interiores*, se

$$\frac{\partial \hat{\theta}_\pm}{\partial x^\pm}|_S > 0. \quad (5.22)$$

No caso de superfícies marginais bifurcantes o horizonte atrapante é etiquetado da mesma forma, e no caso que

$$\frac{\partial \hat{\theta}_\pm}{\partial x^\pm}|_S = 0, \quad (5.23)$$

a superfície marginal é dita *degenerada*.

Uma outra aplicação do formalismo apresentado é a possibilidade de escrevermos as equações de Einstein em termos das expansões $\hat{\theta}_\pm$. Denotamos $T^{++} = T^{--}$ e $T^{+-} = T^{-+}$ são as componentes contravariantes do tensor energia-momento no sistema de coordenadas nulas,

$$[T^{ab}] = \begin{bmatrix} T^{++} & T^{+-} \\ T^{-+} & T^{--} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T^{++} & T^{+-} \\ T^{+-} & T^{++} \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Desta forma, as componentes T_{++} , T_{+-} do tensor T_{ab} ficam

$$T_{+-} = g_{+\alpha} g_{-\beta} T^{\alpha\beta} = (g_{+-})^2 T^{+-}, \quad (5.25)$$

$$T_{++} = g_{+\alpha} g_{+\beta} T^{\alpha\beta} = (g_{+-})^2 T^{++}. \quad (5.26)$$

Em termos de T_{++} , T_{+-} e das expansões $\hat{\theta}_\pm$, as equações de Einstein para geo-

metrias esfericamente simétricas (não necessariamente estáticas) são escritas como [49, 46],

$$\hat{\theta}_{\pm} \frac{\partial [\ln(-g_{+-})]}{\partial x^{\pm}} - \frac{\partial \hat{\theta}_{\pm}}{\partial x^{\pm}} - \frac{1}{2} (\hat{\theta}_{\pm})^2 = 8\pi T_{++}, \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial \hat{\theta}_{\mp}}{\partial x^{\pm}} - \hat{\theta}_{+} \hat{\theta}_{-} + \left(\Lambda - \frac{1}{r^2} \right) g_{+-} = 8\pi T_{++}. \quad (5.28)$$

As relações (5.27) e (5.28), válidas no caso dinâmico, se reduzem a (4.42)-(4.44), no sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) , quando a geometria é estática.

5.2 Campo vetorial de Kodama

Conforme discutido no capítulo 2, quando uma métrica é independente do tempo ela tem associado um campo vetorial de Killing. Um espaço-tempo estacionário é equipado com uma métrica deste tipo. Mas para geometrias mais gerais, que evoluem no tempo, um campo vetorial de Killing tipo tempo não está disponível, o que dificulta a definição de grandezas termodinâmicas fundamentais, como a gravidade superficial. Kodama [43], introduziu um campo vetorial que pode ser definido em qualquer espaço-tempo esfericamente simétrico, estacionário ou dinâmico. O campo vetorial de Kodama se reduz ao campo de Killing quando $A(r) = B(r)$ em (2.45), mas em geral, quando $A(r) \neq B(r)$, são quantidades distintas.

Para espaços-tempos esfericamente simétricos, a variedade quadridimensional $\mathcal{M}_4$ pode ser escrita como o produto de uma variedade bidimensional $\mathcal{M}_2$ e a bi-esfera S^2 . Por exemplo, adotando-se a carta (t, r, θ, ϕ) , $\mathcal{M}_2$ é identificado com a seção (t, r, θ_0, ϕ_0) , com θ_0 e ϕ_0 constantes. No espaço bidimensional $\mathcal{M}_2$, as componentes vetor de Kodama definido em [43], é expresso como [47, 48]

$$k^a = \frac{1}{\sqrt{-g^{(2)}}} \epsilon^{ab} \nabla_b r = \frac{1}{\sqrt{-g^{(2)}}} \epsilon^{ab} \frac{\partial r}{\partial x^b}, \quad (5.29)$$

com $g^{(2)} = \det[g_{ab}]$, e g_{ab} é a métrica induzida em $\mathcal{M}_2$, de forma que os índices latinos $\{a, b\}$ assumem valores em $\{0, 1\}$. O símbolo ϵ^{ab} é definido de forma que $\epsilon^{01} = 1$, $\epsilon^{10} = -1$ e $\epsilon^{00} = \epsilon^{11} = 0$.

O vetor k^a pode ser estendido para a variedade quadridimensional, que é identificado com o quadrivetor k^{μ} como:

$$k^{\mu} = (k^0, k^1, 0, 0). \quad (5.30)$$

Para simplificar a linguagem, deste ponto em diante trataremos os dois vetores k^a e k^μ como o mesmo objeto, a menos que a distinção entre eles necessite ser explicitada.

De acordo com a equação (5.29), as componentes do vetor de Kodama em coordenadas nulas são dadas por as expressões

$$k^+ = \frac{\epsilon^{+-}}{g_{+-}(x^+, x^-)} \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^-} = -g^{+-}(x^+, x^-) \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^-}, \quad (5.31)$$

e

$$k^- = \frac{\epsilon^{-+}}{g_{+-}(x^+, x^-)} \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^+} = g^{+-}(x^+, x^-) \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^+}. \quad (5.32)$$

Portanto o vetor de Kodama em coordenadas nulas toma a forma

$$k = g^{+-}(x^+, x^-) \left[\frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} - \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^-} \frac{\partial}{\partial x^+} \right]. \quad (5.33)$$

De acordo com (5.9) e (5.15), e utilizando também o fato de que $\partial r / \partial x^- = -\partial r / \partial x^+$, o vetor de Kodama é expresso como

$$k = -g^{+-}(x^+, x^-) \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (5.34)$$

Desta forma, o campo de Kodama k^μ é perpendicular às superfícies atrapadas e marginais esféricas, dadas por $\{(t = t_0, r = r_0, \theta, \phi)\}$. Vemos também que k tem a mesma direção de $\partial / \partial t$.

A proposta de Kodama e Hayward [43, 49] é adotar o campo vetorial de Kodama como uma generalização do campo vetorial de Killing. Vimos que em diversos cenários, a fronteira de um buraco negro pode ser definida por um horizonte de Killing. Obtemos um resultado análogo envolvendo horizontes e o campo de Kodama, considerando a sua norma:

$$k^2 = k^a k_a = g^{+-} \frac{\partial r}{\partial x^+} \frac{\partial r}{\partial x^-} + g^{+-} \frac{\partial r}{\partial x^-} \frac{\partial r}{\partial x^+} = \frac{r^2 g^{+-}}{2} \hat{\theta}_+ \hat{\theta}_-. \quad (5.35)$$

Com o resultado (5.35), vemos que o horizonte atrapante pode ser caracterizado como a superfície onde o vetor de Kodama é nulo. Também de acordo com (5.35), o vetor de Kodama é tipo tempo, espaço ou nulo para superfícies atrapada, não atrapada e marginais respectivamente.

5.3 Gravidade superficial geométrica

Continuando com a proposta de Kodama e Hayward, o próximo passo é definir uma quantidade que estenda o conceito de gravidade superficial, aplicável nos cenários mais gerais envolvendo superfícies atrapantes. A proposta destes autores é introduzir uma *gravidade superficial geométrica* κ_g , definida a partir do campo vetorial de Kodama. Define-se então κ_g [46] como

$$\nabla^\mu (k^\nu k_\nu) = -2\kappa_g k^\mu, \quad (5.36)$$

onde (5.36) deve ser aplicada no horizonte atrapante. Nota-se que a expressão (5.36) é análoga à definição da gravidade superficial em um horizonte de Killing, conforme visto em (3.28). Ressaltamos que, em ambas as definições, o limite em que o horizonte é tomado deve ser feito com bastante cuidado.

A partir de (5.36), uma expressão direta para κ_g poder ser obtida [47, 44],

$$\kappa_g = \frac{1}{2} \square^{(2)} r \Big|_H = \frac{1}{2\sqrt{-g^{(2)}}} \frac{\partial}{\partial x^a} \left[\sqrt{-g^{(2)}} g^{ab} \frac{\partial r(x^+, x^-)}{\partial x^b} \right] \Big|_H, \quad (5.37)$$

com o subscrito “(2)” se referindo ao subespaço bidimensional perpendicular às esferas de simetria, e “ $|_H$ ” fazendo referência à avaliação sobre o horizonte atrapante. Desenvolvendo (5.37), temos

$$\kappa_g = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{-g^{(2)}}} g^{ab} \frac{\partial r}{\partial x^b} \frac{\partial \sqrt{-g^{(2)}}}{\partial x^a} + g^{ab} \frac{\partial^2 r}{\partial x^a \partial x^b} + \frac{\partial r}{\partial x^b} \frac{\partial g^{ab}}{\partial x^a} \right) \Big|_H. \quad (5.38)$$

Vamos calcular a gravidade superficial geométrica usando o sistema de coordenadas nulas. A partir de (5.2), temos que

$$g = \det |g_{ab}| = -g_{+-}^2. \quad (5.39)$$

A expressão (5.38) fornece então, sem perda de generalidade,

$$\kappa_g = g^{+-} \frac{\partial^2 r(x^+, x^-)}{\partial x^- \partial x^+} \Big|_H. \quad (5.40)$$

Para as geometrias de interesse neste trabalho, é importante expressarmos a

gravidade superficial geométrica em termos da função $B(r)$. A partir de (5.40),

$$\begin{aligned}
\kappa_g &= [-2A^{-1}(r)] \frac{\partial}{\partial x^-} \left[\frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{2} \right] \Big|_H \\
&= [-2A^{-1}(r)] \frac{\partial r}{\partial x^-} \frac{d}{dr} \left[\frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{2} \right] \Big|_H \\
&= [-A^{-1}(r)] \left[\frac{-\sqrt{A(r)B(r)}}{2} \right] \left[\frac{A(r)B'(r) + B(r)A'(r)}{2\sqrt{A(r)B(r)}} \right] \Big|_H \\
&= \frac{1}{4} \left[\frac{dB(r)}{dr} + \frac{B(r)}{A(r)} \frac{dA(r)}{dr} \right] \Big|_H.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Vimos na seção anterior que o horizonte atrapante, nas geometrias esfericamente simétricas e estáticas, é dado por $r = r_0$, onde r_0 é um zero simples da função $B(r)$. Temos agora dois casos a considerar. Se o horizonte atrapante não é um horizonte de Killing, então $A(r_0) \neq 0$, e a relação (5.41) fornece

$$\kappa_g = \frac{1}{4} \frac{dB(r)}{dr} \Big|_H = \frac{B'(r_0)}{4}. \tag{5.42}$$

Por outro lado, o horizonte atrapante também pode ser um horizonte de Killing. Neste caso, r_0 é um zero simples de ambas as funções $A(r)$ e $B(r)$, de forma que elas satisfazem a relação

$$\frac{A'(r_0)}{A(r_0)} = \frac{B'(r_0)}{B(r_0)}. \tag{5.43}$$

A equação (5.41) fica então

$$\kappa_g = \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{1}{4} \left[B'(r) + \frac{B'(r)}{B(r)} B(r) \right] = \frac{B'(r_0)}{2}. \tag{5.44}$$

O resultado (5.44) indica que a gravidade superficial geométrica κ_g coincide (em módulo, pelo menos) com a gravidade superficial usual κ para as soluções de vácuo e eletrovácuo da relatividade geral, em que $A(r) = B(r)$, conforme observado comparando (3.35) (na seção 3.3) e (5.44). Porém, quando são consideradas geometrias em que $A(r) \neq B(r)$, temos em geral que $\kappa_g \neq \kappa$.

Podemos classificar os horizontes atrapantes com respeito a sua gravidade superficial. De fato, para estas superfícies pelo menos uma das expansões é nula.

Portanto, da relação (5.40), temos que em um horizonte atrapante,

$$\kappa_g \propto \frac{\partial \hat{\theta}_{\pm}}{\partial x^{\mp}}. \quad (5.45)$$

Vemos então que se $\kappa_g > 0$, $\kappa_g < 0$ e $\kappa_g = 0$, os horizontes atrapantes são exteriores, interiores e degenerados respectivamente.

5.4 A garganta como um horizonte atrapante

O resultado básico a ser comentado nesta seção é que a garganta de um buraco de minhoca, conforme introduzido por Morris *et al.* [6, 7], é um horizonte atrapante. Esta caracterização de um buraco de minhoca é bastante geral, uma extensão do conceito de buracos de minhoca e sua garganta associada.

Para as geometrias de interesse neste trabalho (nos restringiremos a geometrias estáticas), é útil expressarmos a norma do vetor de Kodama em termos da função $B(r)$. Através da (5.34) temos que,

$$k^2 = g_{00}k^0k^0 = -A(r) \left[\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \right]^2 = -B(r). \quad (5.46)$$

Ou seja, o campo vetorial de Kodama é tipo tempo ($k^2 < 0$) na região estática ($A(r) > 0$ e $B(r) > 0$), como esperado.

De fato, considerando os buracos de minhoca esfericamente simétricos discutidos no capítulo 4, o resultado obtido em (4.19) demonstra que a garganta é dada por $r = r_0$, onde r_0 é uma raiz simples da função $B(r)$. Desta forma, a equação (5.46) juntamente com o resultado (5.35), vemos que a garganta $r = r_0$ é um horizonte atrapante. A gravidade superficial geométrica na garganta de um buraco de minhoca é portanto dada pela expressão (5.42).

Vamos mostrar a seguir que a função $B(r)$, nos buracos de minhoca de interesse, é determinada pela gravidade superficial geométrica. Vimos no capítulo 4 que esta função pode ser escrita conforme a expressão (4.19) para $r \approx r_0$. Utilizando (4.19), temos que

$$B'(r_0) = 2c. \quad (5.47)$$

Através de (5.42), temos portanto que

$$\kappa_g = \frac{c}{2}. \quad (5.48)$$

Desta forma, a partir de (4.19) e (4.20), as funções $A(r)$ e $B(r)$ na região próxima a garganta podem ser escritas como

$$A(r) \approx \bar{A}_0, \quad (5.49)$$

$$B(r) \approx 4\kappa_g (r - r_0). \quad (5.50)$$

Já no sistema de coordenadas (t, r^*, θ, ϕ) as funções métricas $\mathcal{A}(r^*)$ e $r(r^*)$ ficam

$$\mathcal{A}(r^*) \approx \bar{A}_0, \quad (5.51)$$

$$r(r^*) \approx r_0 + \kappa_g \bar{A}_0 (r^*)^2, \quad (5.52)$$

onde os resultados (4.30) e (4.31) foram usados.

Figura 5.2: Cones de luz futuros em torno de um horizonte atrapante tipo tempo. Na figura apresentada, o horizonte atrapante é do tipo tempo, e descreve a garganta de um buraco de minhoca.

Através de da relação (5.48), como $c > 0$, temos que próximo a garganta do buraco de minhoca temos um horizonte atrapante exterior, de acordo com a classificação de Hayward. As expansões $\hat{\theta}_+$ e $\hat{\theta}_-$ na garganta, acordo com (5.17), são

$$\hat{\theta}_{\pm} \Big|_H = \pm \lim_{r \rightarrow r_0} \frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{r} = 0. \quad (5.53)$$

Este último resultado mostra que as gargantas de buracos de minhoca estacionários e esfericamente simétricos são descritos por horizontes atrapantes bifurcantes. Ilustramos a discussão apresentada na figura 5.2.

5.5 Termodinâmica generalizada

A proposta de caracterizar os buracos de minhoca através dos campos de Kodama e das gravidades superficiais geométricas associadas ganha importância quando Hayward propõem uma extensão da termodinâmica usual de buracos negros (comentada no capítulo 3). Nesta extensão, válida não somente em geometrias estacionárias, mas também nos casos dinâmicos, gravidade superficial geométrica assume o papel de uma temperatura física. Comentaremos esta *termodinâmica generalizada* nesta seção.

Em 1994 Hayward [4] introduziu um formalismo para a caracterização de buracos negros com o qual formulou uma termodinâmica generalizada associada a estas estruturas [49]. Esta termodinâmica generalizada é aplicável para qualquer espaço-tempo esfericamente simétrico, inclusive nos casos dinâmicos, onde um vetor de Killing do tipo tempo não está disponível. A termodinâmica proposta por Hayward se reduz à termodinâmica usual de buracos negros para as soluções de vácuo da relatividade geral.

Além das possíveis aplicações do formalismo desenvolvido em [4] para geometrias dinâmicas, foi observado por diversos autores, incluindo Hayward [45], González-Díaz e Prado [14], Maeda [50] que este formalismo poderia ser aplicado a estruturas que não são buracos negros. Nesta seção, a discussão da termodinâmica de Hayward será feita de forma geral para geometrias esfericamente simétricas. A aplicação das ferramentas apresentadas em geometrias de interesse será feita nos próximos capítulos.

O primeiro elemento da termodinâmica de Hayward é a sua versão da *lei zero da termodinâmica*. A grandeza que faz o papel de uma temperatura é a gravidade superficial geométrica κ_g , introduzida na seção 5.3, enquanto que sistemas em equilíbrio termodinâmico são modelados por geometrias estáticas. A lei zero, no presente formalismo, é expressa como [45]:

A gravidade superficial geométrica κ_g é constante em um horizonte atrapante estático.

Para a discussão da generalização da primeira lei da termodinâmica, é necessária a introdução de uma caracterização de energia associada ao campo gravitacional. Em espaços-tempos esfericamente simétricos (dinâmicos ou não), um candidato é a chamada energia gravitacional de Misner-Sharp [51], denotada aqui como E . A quantidade E é considerada um protótipo de energia gravitacional quase-local para geometrias esféricas. Ela se reduz à massa de Schwarzschild no vácuo, e também a massa newtoniana ao ser considerada no limite newtoniano [52, 46]. A energia gravitacional E é definida como

$$E = \frac{r}{2} (1 - g^{ab} \nabla_a r \nabla_b r). \quad (5.54)$$

Com o sistema de coordenadas (x^+, x^-, θ, ϕ) , E pode ser expressa como

$$E = \frac{r}{2} \left(1 - 2g^{+-} \frac{\partial r}{\partial x^+} \frac{\partial r}{\partial x^-} \right). \quad (5.55)$$

Em termos das componentes do tensor energia-momento T^{++} e T^{+-} no sistema de coordenadas nulas, conforme 5.24, é definida também o vetor invariante ψ ,

$$\psi = T^{++} \frac{\partial r}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^+} + T^{--} \frac{\partial r}{\partial x^-} \frac{\partial}{\partial x^-}. \quad (5.56)$$

O vetor ψ , cujas componentes são denotadas por

$$\psi^+ = T^{++} \frac{\partial r}{\partial x^+}, \quad (5.57)$$

$$\psi^- = T^{--} \frac{\partial r}{\partial x^-}, \quad (5.58)$$

captura a componente radioativa do tensor energia-momento [45].

Definimos ainda a quantidade w como

$$w = -g_{+-} T^{+-}. \quad (5.59)$$

Esta grandeza captura a contribuição “coulombiana” do tensor energia-momento. Por exemplo (ver [49]), $w = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi}$ quando consideramos o campo elétrico $\mathcal{E} = Q/r^2$ no buraco negro de Reissner-Nordström com uma carga elétrica Q , descrito pela métrica (3.4).

A primeira lei da termodinâmica generalizada, conforme formulada por Hayward

[49], é expressa em termos de E , $\psi_{\pm}$ e w , definidos em (5.55), (5.56) e (5.59) respectivamente, como

$$\frac{\partial E}{\partial x^{\pm}} = \mathcal{A} \left(\psi_{\pm} + w \frac{\partial r}{\partial x^{\pm}} \right). \quad (5.60)$$

Na expressão (5.60), $\mathcal{A}$ denota a área das esferas de simetria, conforme a expressão (2.49), enquanto que $\psi_{\pm}$ são as componentes “covariantes” do vetor ψ ,

$$\psi_{\pm} = g_{\pm a} \psi^a. \quad (5.61)$$

Os termos do lado direito da equação da primeira lei (5.60) são interpretados como termo fornecedor de energia ($\mathcal{A}\psi_{\pm}$) e termo de trabalho ($\mathcal{A}w\partial r/\partial x^{\pm}$). O primeiro fornece energia ao espaço-tempo devido ao fluxo de energia do vetor ψ , o segundo é o trabalho que tem fazer a matéria para manter sua configuração [49, 14]. Desta forma, a primeira lei pode ser também enunciada como:

A variação de energia associada a um horizonte atrapante é igual a soma da energia radiada para o horizonte mais o trabalho realizado pelo mesmo.

A segunda lei da termodinâmica na formulação de Hayward é análoga a versão usual apresentada no capítulo 3, com a área $\mathcal{A}$ da superfície atrapante tomando o papel da entropia. Para geometrias equipadas com um horizonte atrapante, a segunda lei é expressa na forma [45]:

A área $\mathcal{A}$ de horizontes atrapantes futuros, passados e estáticos sempre aumenta, diminui ou permanece constante, respectivamente.

Dado o resultado apresentado, é natural definir uma entropia para horizontes atrapantes S como

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4\hbar}, \quad (5.62)$$

que generaliza o resultado (3.44) de Bekenstein para buracos negros.

5.6 Tunelamento através de horizontes atrapantes

O formalismo apresentado na seção anterior é estritamente clássico, e pode ser visto como uma formulação alternativa da relatividade geral para espaços-tempos que possuem horizontes atrapantes. A interpretação deste formalismo como uma

termodinâmica no sentido mais amplo do termo envolve necessariamente argumentos semi-clássicos, em que o espaço-tempo é descrito classicamente, mas a matéria no seu entorno é quantizada. Estas considerações aparecem já na termodinâmica usual de buracos negros apresentada no capítulo 3, em que técnicas de teoria quântica em espaços curvos podem ser usadas para descrever a radiação Hawking [24].

Uma abordagem semi-clássica alternativa, que pode ser empregada tanto no tratamento termodinâmico usual quanto na termodinâmica apresentada na seção anterior, envolve a ideia de tunelamento semi-clássico através de horizontes atrapantes [44]. Antes de ser aplicado em casos específicos, cabe uma discussão sobre este método, chamado em algumas referências como “tunelamento de Hamilton-Jacobi”. Para a conveniência do leitor, serão mantidos de forma explícita nesta primeira exposição a constante de Planck reduzida ($\hbar$) e a constante de Boltzmann (k_b).

Vamos considerar que a matéria em torno do horizonte atrapante pode ser modelada por um campo escalar não-massivo Φ . O tensor energia-momento associado a este campo é dado pela expressão (2.32). Entretanto, a perturbação escalar está sendo considerada somente em primeira ordem, ou seja, estamos ignorando a reação de radiação (*back-reaction*) sobre a geometria. Isso significa que a contribuição do campo escalar no tensor energia-momento está sendo desprezada. Desta forma, estamos considerando um campo escalar Φ caracterizado pela equação de Klein-Gordon,

$$\square\Phi = g^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0, \quad (5.63)$$

evoluindo em uma geometria fixa equipada com uma métrica $g^{\mu\nu}$.

Tratamos então a equação de Klein-Gordon na aproximação eikonal [53], considerando por simplicidade modos esfericamente simétricos (ondas s). Neste caso, o campo Φ é expandindo na forma

$$\Phi = \Phi_0 \exp\left(i \frac{S}{\hbar}\right). \quad (5.64)$$

Na aproximação eikonal, Φ_0 é um termo que varia pouco, enquanto que S varia rapidamente.

Como estamos considerando modos esfericamente simétricos, a ação⁴ S é independente de θ e ϕ . A substituição de (5.64) na equação de onda (5.63), assumindo

⁴Seguindo a terminologia usual na abordagem de Hamilton-Jacobi não-relativística, S é denotada como “ação” também no caso relativístico.

as hipóteses da aproximação eikonal, fornece a equação de Hamilton-Jacobi para S ,

$$g^{ab} \frac{\partial S}{\partial x^a} \frac{\partial S}{\partial x^b} = 0. \quad (5.65)$$

Somente a métrica g^{ab} no espaço normal às esferas de simetria ($\mathcal{M}_2$) aparece em (5.65), já que estão sendo considerados modos esfericamente simétricos.

Em geral, a solução da equação (5.65) pode ser escrita como

$$S = \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial x^a} dx^a, \quad (5.66)$$

onde γ é uma curva nula. Deve ser ressaltado aqui que o formalismo é explicitamente covariante. Ainda assim, de um ponto de vista prático, é importante que a caracterização da ação S em (5.66) seja feita com um sistema de coordenadas bem definido na vizinhança do horizonte atrapante.

O ponto chave no método de tunelamento de Hamilton-Jacobi é que soluções classicamente permitidas da equação de Hamilton-Jacobi fornecerão um S real. Por outro lado, na extensão semi-clássica da teoria, S pode assumir valores complexos. É neste ponto que o campo escalar introduzido está sendo quantizado. A probabilidade de tunelamento, sendo considerada a curva γ , é então dada por

$$\Gamma \propto \Phi \Phi^*. \quad (5.67)$$

Se em um processo (necessariamente semi-clássico) a ação S possui uma parte imaginária, vemos através de (5.66) e (5.67) que a probabilidade de tunelamento fica

$$\Gamma \propto \exp \left(-\frac{2}{\hbar} \text{Im } S \right). \quad (5.68)$$

Um campo vetorial de Kodama k fornece uma noção de tempo preferencial, conforme visto na seção 5.2. Para uma dada ação S em uma trajetória γ (ver (5.66)), uma definição de energia invariante ω pode ser definida como [44, 47, 54]

$$\omega = -k^a \frac{\partial S}{\partial x^a}. \quad (5.69)$$

Uma interpretação para ω é que esta quantidade representa a energia dos “fótons escalares” associados ao campo escalar introduzido em (5.63), conforme medida por observadores que acompanham trajetórias definidas pelo campo de Kodama.

Em um processo térmico, é esperado que a probabilidade de tunelamento seja proporcional ao fator de Boltzmann [11, 12, 13, 44, 55]

$$\Gamma \propto \exp\left(-\frac{\omega}{k_b T_g}\right), \quad (5.70)$$

onde T_g é a temperatura associada às partículas do sistema com energia ω . É importante ressaltar que estamos identificando a energia de um dado modo (ou partícula) com a definição de energia invariante apresentada em (5.69).

Com os resultados (5.68) e (5.70), espera-se então que a um horizonte atrapante esteja associado a uma temperatura T_g dada por

$$T_g = \frac{\hbar\omega}{2k_b \text{Im}S}. \quad (5.71)$$

Nesta dissertação, propomos considerar o mecanismo de tunelamento de Hamilton-Jacobi em buracos de minhoca específicos. Este desenvolvimento será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 6

Processos Térmicos em Geometrias Quase-Extremas

Neste capítulo as ferramentas apresentadas nesta dissertação serão aplicadas em uma classe de espaços-tempos de interesse, denominados aqui de buracos de minhoca quase-extremos. Estas geometrias serão definidas com precisão, sendo mostrado que esta família pode ser interpretada como casos limites de espaços-tempos de interesse físico. A seguir processos térmicos serão estudados nestes cenários, incluindo uma discussão sobre processos semi-clássicos e termodinâmicos.

6.1 Buracos de minhoca quase-extremos

Em geral, são denominadas *geometrias extremas* aquelas que possuem um horizonte de Killing com gravidade superficial nula. Seguindo esta terminologia, as *geometrias quase-extremas* são espaços-tempos em que existe um horizonte de Killing com gravidade superficial não-nula, porém muito próxima de zero.

Um caso protótipo de espaço-tempo extremo¹ é a geometria de Schwarzschild-de Sitter extrema [23], onde a métrica é dada pela expressão (3.3) com a constante

¹Um outro exemplo protótipo de geometria extrema é o espaço-tempo de Reissner-Nordström com a carga Q assumindo o seu valor extremo $Q = M$. A métrica neste caso é dada por (3.26), e a gravidade superficial no horizonte de Killing $r = r_+ = M$ é nula. Neste caso, entretanto, a região estática não está confinada por um horizonte de Killing. Este tipo de extremalidade não será explorada nesta dissertação.

cosmológica Λ assumindo o seu valor extremo Λ_{ext} , onde

$$\Lambda_{ext} = \frac{1}{9M^2}. \quad (6.1)$$

Neste caso, $r = r_c = M$ é um horizonte de Killing com gravidade superficial nula. Entretanto, se Λ é muito próxima a Λ_{ext} , temos uma região estática delimitada pelos horizontes de eventos $r = r_+$ e pelo horizonte cosmológico $r = r_c$, ambos com gravidade superficial não-nula porém muito pequena.

De especial interesse nesta dissertação são os espaços-tempos que estamos denominando *buracos de minhoca quase-extremos*. Estas geometrias tipicamente surgem quando se assume uma constante cosmológica positiva, de forma análoga ao espaço-tempo Schwarzschild-de Sitter quase-extrema. Tanto a geometria Schwarzschild-de Sitter quase-extrema quanto os buracos de minhoca quase-extremos a serem apresentados a seguir possuem uma região estática, limitado por um horizonte de Killing que assume o papel de um horizonte cosmológico (ver comentários a seguir). Uma descrição unificada entre estas classes de geometrias é apresentada no apêndice A desta dissertação.

Vamos introduzir os buracos de minhoca quase-extremos inicialmente no sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) . Nesta carta, estes espaços-tempos são caracterizados pelo limite

$$A(r) = \tilde{A}_0(r_c - r) + \mathcal{O}(\delta^2), \quad (6.2)$$

$$B(r) = \tilde{B}_0(r_c - r)(r - r_0) + \mathcal{O}(\delta^3), \quad (6.3)$$

onde $\tilde{A}_0$ e $\tilde{B}_0$ são constantes positivas e o parâmetro δ é tomado como

$$\delta = \frac{r_c - r_0}{r_0} \ll 1. \quad (6.4)$$

O sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) só é válido para $r_0 < r < r_c$. Mas conforme visto nos capítulos 3 e 4, esta região é estendível. Como r_c é um zero simples das funções $A(r)$ e $B(r)$ em (6.2) e (6.3), vimos na seção 3.3 que a superfície $r = r_c$ é um horizonte de Killing na extensão da geometria “além de r_c ”. Por outro lado, como r_0 é um zero de $B(r)$ em (6.3) ao mesmo tempo que $A(r_0) \neq 0$ em (6.2), temos que a superfície $r = r_0$ é a garganta de um buraco de minhoca, segundo o desenvolvimento apresentado na seção 4.2.

Um aspecto das geometrias consideradas a ser enfatizado é que o horizonte de Killing $r = r_c$ é bem descrito como um *horizonte cosmológico*. Neste caso, a região

interna ao horizonte $r < r_c$ é a região estática². O exemplo protótipo de horizonte cosmológico surge na geometria de Sitter pura [23], em que

$$A(r) = B(r) = 1 - \frac{r^2}{r_c^2} . \quad (6.5)$$

Como vimos no início desta seção, horizontes cosmológicos aparecem também nas geometrias Schwarzschild-de Sitter. Curvas tipo luz “para fora” cruzam um horizonte cosmológico, mas o mesmo não acontece com curvas do tipo luz “para dentro”. Esta observação reflete o fato de que, a nível clássico, informação sai de um horizonte cosmológico, mas não entra. Esta estrutura é uma “membrana de caminho único” análoga ao horizonte de eventos, mas com o sentido inverso para a passagem de informação. Este ponto é ilustrado na figura 6.1.

Figura 6.1: Cones de luz futuros em torno de um horizonte atrapante que descreve um horizonte cosmológico futuro. Na região externa, os cones de luz estão inclinados “para fora”.

Visto que o horizonte cosmológico é um horizonte atrapante (e um horizonte de Killing), podemos associar a esta estrutura uma gravidade superficial geométrica. Segundo o resultado (5.44), esta quantidade é dada por κ_g^c , onde

$$\kappa_g^c = \frac{B'(r_c)}{2} < 0 . \quad (6.6)$$

O fato de κ_g^c ser negativo é compatível com o horizonte cosmológico futuro ser um

²Contrastando com o horizonte de Killing na geometria de Schwarzschild por exemplo, em que o horizonte de Killing é um horizonte de eventos. Neste caso, a região externa ao horizonte $r > r_+ = 2M$ é a região estática.

horizonte atrapante interior futuro (é instrutivo comparar as figuras 5.1 e 6.1). Desta forma, na vizinhança de um horizonte cosmológico, a função B é expressa como

$$B(r) = 2\kappa_g^c (r - r_c) , \quad (6.7)$$

com $\kappa_g^c < 0$ e $r - r_c < 0$.

Interpretamos então as geometrias que satisfazem os limites em (6.2) e (6.3) como um buraco de minhoca ligando duas regiões limitadas por horizontes cosmológicos. Utilizando o resultado (3.39), temos que a gravidade superficial no horizonte $r = r_c$ é dada por

$$\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{A}_0 \tilde{B}_0 (r_c - r_0)}. \quad (6.8)$$

Na expressão anterior e no restante do desenvolvimento apresentado aqui, não incluiremos os termos $\mathcal{O}(\delta^2)$, para simplificar a notação. A expressão (6.8) para a gravidade superficial κ pode ser reescrita em termos do parâmetro δ como

$$\kappa = \frac{1}{2} \sqrt{\tilde{A}_0 \tilde{B}_0 r_0} \delta^{1/2}. \quad (6.9)$$

Ou seja, tomando o limite $\delta \ll 1$ conforme (6.4), temos que a gravidade superficial no horizonte de Killing $r = r_c$ é muito próxima de zero, justificando o termo “quase-extremo” adotado.

É conveniente expressarmos a métrica de um buraco de minhoca quase-extremo nas coordenadas (t, r^*, θ, ϕ) . Nesta carta, o intervalo $r_0 < r < r_c$ é mapeado em $-\infty < r^* < +\infty$. De acordo com a definição de coordenada tartaruga apresentada em (3.6), a função $r^*(r)$ é expressa como

$$r^*(r) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_0 \tilde{B}_0}} \int \frac{dr}{(r_c - r) \sqrt{(r - r_0)}}. \quad (6.10)$$

A integral anterior pode ser resolvida (com o uso de resultados em [56]), de forma que

$$r^*(r) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{A}_0 \tilde{B}_0 (r_c - r_0)}} \ln \left(\frac{\sqrt{r_c - r_0} - \sqrt{r - r_0}}{\sqrt{r_c - r_0} + \sqrt{r - r_0}} \right). \quad (6.11)$$

Esta última expressão, por sua vez, pode ser reescrita como

$$r^*(r) = \frac{1}{2\kappa} \ln \left[\frac{(r_c - r_0) - (r - r_0)}{r - r_0 + (r_c - r_0) + 2\sqrt{r_c - r_0} \sqrt{r - r_0}} \right], \quad (6.12)$$

onde o resultado (6.8) para a gravidade superficial κ foi usado. É importante ressaltar que estamos assumindo o limite quase-extremo $\delta \ll 1$. Neste limite

$$\sqrt{r_c - r_0} \sqrt{r - r_0} \approx r_c - r_0, \quad (6.13)$$

e assim a função $r^*(r)$ toma a forma

$$r^*(r) = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{r_c - r}{r + 3r_c - 4r_0} \right). \quad (6.14)$$

Uma vez obtida $r^*(r)$, podemos obter a função $r(r^*)$ associada a métrica (3.14) escrita no sistema de coordenadas (t, r^*, θ, ϕ) . Invertendo a expressão (6.14), temos que

$$r(r^*) = \frac{r_c - (3r_c - 4r_0)e^{2\kappa r^*}}{e^{2\kappa r^*} + 1}, \quad (6.15)$$

que pode ser escrita como

$$r(r^*) = \frac{4r_c [\cosh^2(\kappa r^*)] - 4(r_c - r_0)(1 + e^{2\kappa r^*})}{4[\cosh^2(\kappa r^*)]}, \quad (6.16)$$

onde a definição da função cosseno hiperbólico,

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (6.17)$$

foi usada. A expressão (6.16) por sua vez pode ser simplificada para

$$r(r^*) = r_c - r_0 \delta \operatorname{sech}^2(\kappa r^*), \quad (6.18)$$

com $\operatorname{sech} x = 1/\cosh x$. O perfil típico da função $r(r^*)$ para os buracos de minhoca quase-extremos é apresentado na figura 6.2.

A segunda função métrica $\mathcal{A}(r^*)$ pode agora ser obtida. Temos que

$$\mathcal{A}(r^*) = A(r(r^*)) = \tilde{A}_0(r_c - r_0) \operatorname{sech}^2(\kappa r^*), \quad (6.19)$$

que em termos do parâmetro δ fica

$$\mathcal{A}(r^*) = \tilde{A}_0 r_0 \delta \operatorname{sech}^2(\kappa r^*). \quad (6.20)$$

A métrica que descreve um buraco de minhoca quase-extremo, no sistema de coor-

Figura 6.2: Comportamento da função $r(r^*)$ para geometrias tipo buraco de minhoca quase-extremas.

denadas (t, r^*, θ, ϕ) fica então

$$ds^2 = \tilde{A}_0 r_0 \delta \operatorname{sech}^2(\kappa r^*) [-dt^2 + (dr^*)^2] + [r_c - r_0 \delta \operatorname{sech}^2(\kappa r^*)]^2 d\Omega^2. \quad (6.21)$$

Cabe aqui alguns comentários sobre geometrias que de fato possuem um limite do tipo buraco de minhoca quase-extremo. Um exemplo de geometrias deste tipo surge quando são consideradas soluções esféricas e estáticas em modelos de mundos brana tipo Randall-Sundrum [57]. Admitindo que a brana possui constante cosmológica positiva, a métrica na brana é tal que existe um limite quase-extremo, conforme comentado em [57]. Neste limite, os componentes da métrica assumem a forma (6.2) e (6.3). Um outro exemplo de geometria para o qual as considerações neste capítulo se aplicam é o espaço-tempo isotrópico comentado em [40] com uma constante cosmológica positiva. Neste caso, um limite quase-extremo também é possível, portanto, os resultados desenvolvidos nesta seção aplicam-se.

6.2 Tunelamento em buracos de minhoca estáticos

Vimos na seção 5.4 do capítulo 5 que a garganta de um buraco de minhoca pode ser interpretada como um horizonte atrapante exterior. Desta forma, as relações termodinâmicas desenvolvidas na seção 5.5 se aplicam a esta estrutura, e cabe a questão da extensão semi-clássica destes resultados para os buracos de minhoca. Este ponto foi tratado por González Díaz *et al.* em [14], porem, não houve a preocupação com a verificação da regularidade do sistemas de coordenadas usado (Eddington-Finkelstein-Bardeen) em torno dos horizontes atrapantes que modelam buracos de minhoca.

Vamos usar o formalismo apresentado na seção 5.6. A proposta aqui é usar o sistema de coordenadas (t, r^*, θ, ϕ) , que, como vimos na seção 4.3 do capítulo 4, é adequado para descrever a garganta (superfície $r^* = 0$). A contribuição imaginária para a ação em (5.65) se dá próximo ao horizonte atrapante, e, desta forma, podemos nos limitar a esta região.

Consideramos tunelamento quântico entre pontos localizados a esquerda ($r^* = -\Delta r^*$) e a direita ($r^* = +\Delta r^*$) da garganta ($r^* = 0$). Tomamos então a curva γ , “para fora”, com $\gamma(\tau) = (t(\tau), r^*(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$, onde

$$t(\tau) = \tau, \quad (6.22)$$

$$r^*(\tau) = \tau, \quad (6.23)$$

$$\theta(\tau) = \theta_0, \quad (6.24)$$

$$\phi(\tau) = \phi_0. \quad (6.25)$$

Tomamos os pontos inicial e final de γ de forma que r^* varia entre $-\Delta r^*$ a $+\Delta r^*$, e t varia entre $-\Delta t$ a $+\Delta t$. Estamos assumindo que $\Delta t \ll 1$ e $\Delta r^* \ll 1$, pois consideramos curvas próximas ao horizonte. Conforme será visto mais adiante, esta é a região relevante para o cálculo da temperatura.

É imediato ver que as curvas γ são do tipo luz, visto que

$$g_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial \gamma^\nu}{\partial \tau} = \mathcal{A}(r^*(\tau)) [-1 + 1] = 0. \quad (6.26)$$

Temos também que para a curva γ as coordenadas t e r^* satisfazem

$$dt = dr^*, \quad (6.27)$$

conforme pode ser verificado a partir de (6.23) e (6.24).

No sistema de coordenadas (t, r^*, θ, ϕ) , a equação de Hamilton-Jacobi (5.65) introduzida no capítulo anterior fica (no plano radio-temporal)

$$-\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial r^*}\right)^2 = 0. \quad (6.28)$$

A equação (6.29) possui duas soluções. Tomamos a solução associada a curva “para fora”, dada por

$$\frac{\partial S}{\partial t} = + \frac{\partial S}{\partial r^*}. \quad (6.29)$$

A partir de (5.66), considerando as relações (6.28) e (6.30), temos então que

$$S = \int_{\gamma} \left[\frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial r^*} dr^* \right] = \int_{\gamma} \left[\frac{\partial S}{\partial r^*} dr^* + \frac{\partial S}{\partial r^*} dr^* \right] = 2 \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial r^*} dr^*. \quad (6.30)$$

A expressão (6.31) é válida para qualquer geometria esfericamente simétrica. Vamos nos restringir agora a buracos de minhoca estáticos. O vetor de Kodama k para estes espaços-tempos é dado pela expressão (5.34). Levando em conta as expressões (5.51) e (5.52), temos que o vetor de Kodama pode ser expresso, na região próxima à garganta, como

$$k = 2\kappa_g r^* \frac{\partial}{\partial t}. \quad (6.31)$$

Com a relação (5.69), levando em conta as relações (6.32) e (6.30), a energia invariante é dada por

$$\omega = -k^0 \frac{\partial S}{\partial t} = -2\kappa_g r^* \frac{\partial S}{\partial t} = -2\kappa_g r^* \frac{\partial S}{\partial r^*}. \quad (6.32)$$

Desta forma, substituindo (6.33) em (6.31), observamos que na região próxima à garganta, considerando a trajetória γ apresentada,

$$S = -\frac{\omega}{\kappa_g} \int_{-\Delta r^*}^{+\Delta r^*} \frac{dr^*}{r^*}. \quad (6.33)$$

A integral na expressão (6.34) não é bem definida. Na abordagem empregada aqui, a quantização implica em redefinir a integração em (6.34), conforme [55, 47]:

$$\int_{-\Delta r^*}^{+\Delta r^*} \frac{dr^*}{r^*} \longrightarrow \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_C \frac{d\tilde{r}^*}{\tilde{r}^*}, \quad (6.34)$$

onde $\tilde{r}^*$ é a versão complexificada de r^* com

$$\text{Re } \tilde{r}^* = r^*, \quad (6.35)$$

enquanto que C é o caminho de integração indicado na figura 6.3. Esta regra é a chamada *prescrição de Feynman* [55].

Figura 6.3: Caminho de integração na integral em (6.35).

A integral complexa em (6.35) pode ser reescrita como

$$\int_C \frac{d\tilde{r}^*}{\tilde{r}^*} = \int_{-\Delta r^*}^{-\epsilon} \frac{dr^*}{r^*} + \int_{+\epsilon}^{+\Delta r^*} \frac{dr^*}{r^*} + \int_{C_1} \frac{d\tilde{r}^*}{\tilde{r}^*}, \quad (6.36)$$

onde o contorno C_1 é a circunferência de raio ϵ em torno da origem, conforme diagrama na figura 6.3. A soma das duas primeiras integrais em (6.37), no limite $\epsilon \rightarrow 0$, é chamado *valor principal de Cauchy* da integral de $1/r^*$, frequentemente indicada pelo símbolo $\mathcal{P}$. O valor principal possui um valor bem definido, que pode ser imediatamente calculado:

$$\mathcal{P} \int_{-\Delta r^*}^{+\Delta r^*} \frac{dr^*}{r^*} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\Delta r^*}^{-\epsilon} \frac{dr^*}{r^*} + \int_{+\epsilon}^{+\Delta r^*} \frac{dr^*}{r^*} \right) = 0. \quad (6.37)$$

A integral complexa em C_1 pode ser resolvida escrevendo $\tilde{r}^*$ em coordenadas polares,

$$\tilde{r}^* = \epsilon e^{i\varphi}, \quad d\tilde{r}^* = i\epsilon e^{i\varphi} d\varphi, \quad (6.38)$$

de forma que

$$\int_{C_1} \frac{d\tilde{r}^*}{\tilde{r}^*} = i \int_{\pi}^0 d\varphi = -i\pi, \quad (6.39)$$

sendo esta última integral independente de ϵ . Justificamos neste ponto a nossa simplificação ao tomar curvas próximas do horizonte. Para curvas arbitrárias que cruzam $r^* = 0$, a parte real da integral em S seria diferente do obtido aqui. Mas a parte imaginária, que é a relevante no desenvolvimento apresentado, seria dada por (6.40), para qualquer curva.

Substituindo os resultados (6.38) e (6.40) em (6.35), temos que

$$\int_C \frac{d\tilde{r}^\star}{\tilde{r}^\star} = -i\pi. \quad (6.40)$$

De acordo com a prescrição de Feynman, a versão quântica da ação S , próximo da garganta, fica

$$S = i \frac{\pi\omega}{\kappa_g}, \quad (6.41)$$

e portanto S possui uma parte imaginária não-nula. Considerando trajetórias não necessariamente próximas à garganta, a parte real da ação S muda, mas a sua parte imaginária é sempre

$$\text{Im}(S) = \frac{\pi\omega}{\kappa_g}, \quad (6.42)$$

de acordo com (6.42).

Desta forma, o desenvolvimento apresentado na seção 5.6 sugere que a garganta de um buraco de minhoca estático possui uma temperatura física associada. Através do resultado em (5.71), temos que esta temperatura é dada por

$$T_g = \frac{\kappa_g}{2\pi}, \quad (6.43)$$

onde estamos considerando aqui um sistema de unidades em que $k_b = \hbar = 1$.

Um ponto a ser destacado é que a temperatura T_g em (6.44) é positiva. Este resultado está de acordo com o obtido por Hayward *et al.* em [45] mas difere do proposto por González Díaz *et al.* em [14].

6.3 Tunelamento em horizontes cosmológicos

Nesta seção consideramos o tunelamento de geodésicas nulas através de horizontes atrapantes que são também horizontes de Killing futuros. O formalismo geral a ser utilizado é ainda o apresentado na seção 5.6. Mas, ao contrário do desenvolvimento da seção 6.2, no caso de horizontes de Killing o sistema de coordenadas $(t, r^\star, \theta, \phi)$ não é adequado, já que este sistema de coordenadas não inclui o horizonte de Killing.

Cartas mais apropriadas para a descrição de horizontes de Killing são os sistemas de coordenadas baseados nos tempos avançados e retardados $(x^\pm)$, apresentados no capítulo 3. No caso de interesse nesta seção, vamos investigar horizontes cosmoló-

gicos. Para estes horizontes, curvas “para fora” são regulares, porém curvas “para dentro” que cruzam este horizonte não são bem definidas classicamente. Ou seja, a expectativa clássica é que informação sai do horizonte cosmológico, mas não entra. Desta forma, no mecanismo de tunelamento quântico, vamos considerar curvas “para dentro” na região próxima a $r = r_c$. Usaremos as coordenadas (x^-, r, θ, ϕ) ³. O comportamento discutido para as geodésicas tipo luz é ilustrado na figura 6.1.

Consideramos a curva $\gamma(\tau) = (x^-(\tau), r(\tau), \theta(\tau), \phi(\tau))$, onde

$$x^-(\tau) = 2\tau, \quad (6.44)$$

$$\int_{r_0}^r \frac{dr'}{\sqrt{A(r')B(r')}} = -\tau, \quad (6.45)$$

$$\theta(\tau) = \theta_0, \quad (6.46)$$

$$\phi(\tau) = \phi_0. \quad (6.47)$$

A expressão (6.46) é equivalente a $r^* = -\tau$. Desta forma, (6.45) e (6.46) fornecem $x^- = -2r^*$, ou $t + r^* = \text{cte}$ escrita no sistema de coordenadas (x^-, r, θ, ϕ) que inclui o horizonte de Killing $r = r_c$. Conforme visto na seção anterior, esta curva é uma geodésica tipo luz.

Seguindo o desenvolvimento apresentado no capítulo 5, consideramos um campo escalar não massivo na aproximação eikonal. Vamos estudar algumas propriedades semi-clássicas deste campo na região próxima ao horizonte cosmológico. Para tal, passamos para a análise da ação S , solução da equação de Hamilton-Jacobi. Seguindo (5.66), escrevemos S como

$$S = \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial x^-} dx^- + \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial r} dr, \quad (6.48)$$

tomando γ como a tipo luz introduzida por (6.45)-(6.48).

A equação de Hamilton-Jacobi (5.65), no sistema de coordenadas (x^-, r, θ, ϕ) que estamos utilizando, fica

$$2g^{-r} \frac{\partial S}{\partial x^-} \frac{\partial S}{\partial r} + g^{--} \frac{\partial S}{\partial x^-} \frac{\partial S}{\partial x^-} + g^{rr} \frac{\partial S}{\partial r} \frac{\partial S}{\partial r} = 0. \quad (6.49)$$

De acordo com (3.17), temos que as versões covariantes e contravariantes do tensor

³O horizonte cosmológico também é um horizonte de Killing e como foi visto no capítulo 3, este sistema coordenado é regular em $r = r_c$

métrico (no plano radial-temporal) são dadas por

$$[g_{ab}] = \begin{bmatrix} -A(r) & -\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} \\ -\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} & 0 \end{bmatrix}, \quad [g^{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \\ -\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} & B(r) \end{bmatrix}, \quad (6.50)$$

e desta forma, a equação (6.50) é reescrita como

$$-2\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \frac{\partial S}{\partial x^-} \frac{\partial S}{\partial r} + B(r) \left[\frac{\partial S}{\partial r} \right]^2 = 0, \quad (6.51)$$

e desta forma

$$-2\frac{\partial S}{\partial x^-} + \sqrt{A(r)B(r)} \frac{\partial S}{\partial r} = 0. \quad (6.52)$$

De acordo com (5.29), as componentes do vetor de Kodama no sistema de coordenadas (x^-, r, θ, ϕ) são

$$k^- = \frac{1}{\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}}} \epsilon^{01} \frac{\partial r}{\partial r} = \sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}}, \quad (6.53)$$

$$k^r = 0. \quad (6.54)$$

Portanto a energia invariante ω , de acordo com (5.69), é

$$\omega = -\sqrt{\frac{B(r)}{A(r)}} \frac{\partial S}{\partial x^-}. \quad (6.55)$$

Desta forma,

$$\frac{\partial S}{\partial x^-} = -\sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} \omega. \quad (6.56)$$

O resultado anterior (6.57) mostra que o termo $\partial S/\partial x^-$ é regular no horizonte cosmológico $r = r_c$, visto que $A(r)/B(r)$ é bem definido no limite $r \rightarrow r_c$, conforme visto no capítulo 3 (de forma geral) e na seção 6.1 (para as geometrias de interesse aqui). Desta forma, o primeiro termo no lado direito de (6.49) é bem definido e real, ou seja,

$$\text{Im} \int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial x^-} dx^- = -\omega \sqrt{\frac{\tilde{A}_0}{\tilde{B}_0}} \times \text{Im} \int_{-\Delta x^-}^{+\Delta x^-} \frac{dx^-}{\sqrt{r(x^-) - r_0}} = 0. \quad (6.57)$$

A contribuição imaginária para S que estamos procurando desta forma é prove-

niente do segundo termo no lado direito de (6.49). Através dos resultados (6.53) e (6.57), temos que

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{2}{\sqrt{A(r)B(r)}} \frac{\partial S}{\partial x^-} = -\frac{2}{\sqrt{A(r)B(r)}} \sqrt{\frac{A(r)}{B(r)}} \omega = -\frac{2\omega}{B(r)}. \quad (6.58)$$

Vemos então, a partir de (6.59) e (6.7), que o segundo termo no lado direito de (6.49) não é bem definido, pois

$$\frac{\partial S}{\partial r} = -\frac{\omega}{\kappa_g^c} \frac{1}{r - r_c}, \quad (6.59)$$

na região próxima ao horizonte cosmológico $r = r_c$. Um pólo simples em S é esperado classicamente,

$$\int_{\gamma} \frac{\partial S}{\partial r} dr = -\frac{\omega}{\kappa_g^c} \int_{r_c+\Delta r}^{r_c-\Delta r} \frac{dr}{r - r_c}. \quad (6.60)$$

Figura 6.4: Caminho de integração na integral (complexificada) em (6.61).

Conforme discutido no capítulo 5, o processo de tunelamento quântico implica em redefinir a integral em (6.61) [55, 47]. Complexificando a variável de integração r com a *prescrição de Feynman* [55], de forma análoga ao feito na seção anterior, tomamos o caminho de integração apresentado na figura 6.4. Com $\tilde{r}$ sendo a versão complexificada de r ,

$$\begin{aligned} \int_{r_c+\Delta r}^{r_c-\Delta r} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_c} &= \int_{r_c+\Delta r}^{r_c+\epsilon} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_c} + \int_{r_c-\epsilon}^{r_c-\Delta r} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_c} + \int_{C_1} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_c} \\ &= \mathcal{P} \int_{r_c+\Delta r}^{r_c-\Delta r} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_c} + \int_{C_1} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_c}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Levando em conta que o valor principal da integral indicada é zero, e fazendo

$$\tilde{r} - r_c = \epsilon e^{i\varphi} (d\tilde{r} = i\epsilon e^{i\varphi} d\varphi),$$

$$\int_{C_1} \frac{d\tilde{r}}{\tilde{r} - r_c} = i \int_0^\pi d\varphi = i\pi. \quad (6.62)$$

Temos então, através dos resultados (6.61) e (6.63), que

$$\text{Im} \int_\gamma \frac{\partial S}{\partial r} dr = -\frac{\pi\omega}{\kappa_g^c}. \quad (6.63)$$

Desta forma, através dos resultados (6.58) e (6.64), temos que a contribuição imaginária para a ação em (6.49) é $-\pi\omega/\kappa_g^c$. Através do desenvolvimento em (5.71), temos que esta temperatura é dada por

$$T_g^c = -\frac{\kappa_g^c}{2\pi}, \quad (6.64)$$

onde estamos considerando um sistema de unidades em que $k_b = \hbar = 1$. Ou seja, o horizonte cosmológico possui uma temperatura física associada.

Alguns comentários são pertinentes aqui. Como estamos considerando horizontes cosmológicos futuros, temos que $\kappa_g^c < 0$, e desta forma a temperatura geométrica associada é positiva. Finalmente, ressaltamos que o resultado (6.65), obtido através de técnicas de tunelamento, generaliza resultados análogos para horizontes cosmológicos em espaços-tempos onde $A = B$ [35].

6.4 Termodinâmica em geometrias quase-extremas

Na presente seção aplicaremos os resultados gerais envolvendo a termodinâmica generalizada para as geometrias quase-extremas, com ênfase no comportamento termodinâmico da garganta. Vários dos resultados envolvendo os horizontes de eventos espaços-tempos usuais têm um correspondente para o horizonte atrapante tipo tempo nos espaços-tempos de interesse nesta seção.

O primeiro ponto abordado é a determinação de expressões explícitas para as temperaturas generalizadas introduzidas nas seções anteriores. Lembrando que nas geometrias quase-extremas a função $B(r)$ tem a forma (6.3), temos que

$$B'(r) = \tilde{B}_0 [(r_c - r) - (r - r_0)] . \quad (6.65)$$

Obtemos então as gravidades superficiais generalizadas κ_g e κ_g^c , na garganta $r = r_0$ e no horizonte cosmológico $r = r_c$ respectivamente, como

$$\kappa_g = \frac{\tilde{B}_0(r_c - r_0)}{4} > 0 , \quad (6.66)$$

$$\kappa_g^c = -\frac{\tilde{B}_0(r_c - r_0)}{2} < 0 , \quad (6.67)$$

onde foram usadas as relações (5.42) e (5.44) respectivamente. As temperaturas associadas T_g e T_g^c , de acordo com (6.44), (6.65), (6.67) e (6.68), tomam a forma

$$T_g = \frac{\tilde{B}_0}{8\pi}(r_c - r_0) = \frac{\tilde{B}_0}{8\pi}r_0 \delta , \quad (6.68)$$

$$T_g^c = \frac{\tilde{B}_0}{4\pi}(r_c - r_0) = \frac{\tilde{B}_0}{4\pi}r_0 \delta . \quad (6.69)$$

Vemos desta forma que as temperaturas são proporcionais ao parâmetro δ . No limite quase-extremo $0 < \delta \ll 1$, as temperaturas assumem valores muito pequenos:

$$0 < T_g \ll 1 , \quad (6.70)$$

$$0 < T_g^c \ll 1 . \quad (6.71)$$

Em particular, a temperatura associada à garganta possui o mesmo comportamento da temperatura Hawking em (3.43) associada ao horizonte cosmológico no limite quase-extremo.

Vamos considerar agora as contribuições “radioativa” (ψ) e “coulombiana” (w) para a energia associada ao campo gravitacional, definidas segundo o tratamento proposto por Hayward (ver seção 5.5).

As componentes do vetor invariante ψ ficam

$$\psi_{\pm} = g_{+-} T^{++} \frac{\partial r}{\partial x^{\mp}} , \quad (6.72)$$

e, desta forma, considerando estas quantidades na garganta,

$$\psi_{\pm}|_{r_0} = r_0 \frac{\kappa_g}{\mathcal{A}(r_0)} \left. \frac{\partial r}{\partial x^{\mp}} \right|_{r_0} = 0 . \quad (6.73)$$

O resultado (6.74) é esperado uma vez que os espaços-tempos considerados são

estáticos. Uma interpretação para (6.74) é que não existe propagação de energia gravitacional a partir da garganta em ambas as direções nulas “para dentro” e “para fora”.

Por outro lado, a componente “coulombiana” da energia gravitacional é não nula no horizonte atrapante, mesmo levando em conta que estamos considerando um espaço-tempo estático. Temos que

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}_+}{\partial x^-} \right|_{r_0} = - \left. \frac{\partial \hat{\theta}_+}{\partial x^+} \right|_{r_0}, \quad (6.74)$$

e com o auxílio de (5.17), temos que

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}_+}{\partial x^+} \right|_{r_0} = \frac{\partial}{\partial x^+} \left[\frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{r} \right] \Big|_{r_0} = \frac{\partial r}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\sqrt{A(r)B(r)}}{r} \right] \Big|_{r_0}. \quad (6.75)$$

Portanto

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}_+}{\partial x^+} \right|_{r_0} = \frac{1}{4r_0} \left[A'(r)B(r) + B'(r)A(r) - \frac{2A(r)B(r)}{r} \right] \Big|_{r_0} = \frac{A(r_0)B'(r_0)}{4r_0}, \quad (6.76)$$

e desta forma,

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}_+}{\partial x^+} \right|_{r_0} = \frac{A(r_0)\kappa_g}{r_0}. \quad (6.77)$$

Na garganta, a equação de Einstein (5.28) fica

$$\left. \frac{\partial \hat{\theta}_\mp}{\partial x^\pm} \right|_{r_0} - 2A(r_0) \left(\Lambda - \frac{1}{r_0^2} \right) = 8\pi T_{+-}|_{r_0}. \quad (6.78)$$

De acordo com (6.75) e (6.78), a equação (6.79) pode ser reescrita como

$$T_{+-}|_{r_0} = \kappa_g \frac{g_{+-}(x^+, x^-)|_{r_0}}{4\pi r_0} + \left(\Lambda - \frac{1}{r_0^2} \right) \frac{g_{+-}(x^+, x^-)|_{r_0}}{8\pi}. \quad (6.79)$$

Com isso a grandeza w , na garganta, pode ser expressa como

$$w|_{r_0} = -g_{+-}T^{+-} = -g^{+-}T_{+-} = - \left[\frac{\kappa_g}{4\pi r_0} + \frac{1}{8\pi} \left(\Lambda - \frac{1}{r_0^2} \right) \right], \quad (6.80)$$

ou, em termos da temperatura T_g da garganta, temos que

$$w|_{r_0} = \frac{1 - \Lambda r_0^2}{8\pi r_0^2} - \frac{T_g}{2r_0} \neq 0 . \quad (6.81)$$

A interpretação para o resultado (6.82) é que ele expressa o trabalho que a matéria exótica tem que fazer para manter a garganta. Este trabalho, no limite quase-extremo, é igual a uma constante não nula $(1 - \Lambda r_0^2)/8\pi r_0^2$, mais um termo de ordem δ ($T_g \propto \delta$). A componente w da energia é portanto uma grandeza de ordem zero no parâmetro δ que caracteriza a quase-extremalidade.

Finalmente, consideramos a energia gravitacional total E no buraco de minhoca quase-extremo. A partir da expressão (5.55), temos que E pode ser escrita como

$$E = \frac{r}{2} [1 - B(r)] , \quad (6.82)$$

a qual de acordo com (6.3) no limite quase-extremo toma a forma

$$E = \frac{r_0}{2} \left[1 - \tilde{B}_0(r_c - r)(r - r_0) \right] . \quad (6.83)$$

Desta forma, a energia varia em torno do valor E_0 nos horizontes atrapantes, onde

$$E_0 = \frac{r_0}{2} . \quad (6.84)$$

O desvio de E em torno do valor E_0 é da ordem de

$$\max [(r_c - r)(r - r_0)] \propto \delta^2 , \quad (6.85)$$

sendo desta forma muito pequeno.

Notamos também que a partir da relação (5.60) apresentada no capítulo 5, combinada com os resultados (6.74), fornece

$$\left. \frac{\partial E}{\partial x^\pm} \right|_{r_0} \propto \left. \frac{\partial r}{\partial x^\pm} \right|_{r_0} = 0 . \quad (6.86)$$

Desta forma, a energia total não varia (conforme esperado) em uma geometria estática. De fato, vemos que a relação (6.87), juntamente com (5.16), mostra que a condição de minimização da área que caracteriza a garganta pode ser traduzida como uma condição de extremalidade da energia de Misner-Sharp E .

Embora os espaços-tempos de interesse nesta seção sejam estáticos, podemos considerar uma termodinâmica de *quase equilíbrio* [58]. Nesta proposta, consideramos um conjunto de geometrias estáticas (um ensemble) representando estados de equilíbrio térmico. A transição quase-estática entre estados de equilíbrio se propõem a ser uma descrição simplificada em um processo envolvendo um espaço-tempo dinâmico que evolui de forma suficientemente lenta.

Vamos relacionar a energia total com a entropia generalizada, conforme introduzida em (5.62). Na garganta, temos que a entropia é dada por

$$S_0 = \pi r_0^2 . \quad (6.87)$$

Combinando as expressões (6.85) e (6.88), temos

$$S_0 = 4\pi E_0^2 . \quad (6.88)$$

Tomando as quantidades E_0 e S_0 como parâmetros termodinâmicos extensivos, de forma que

$$E_0 = E_0(S_0) . \quad (6.89)$$

Consideramos então a variação de E_0 em relação a variações de S_0 ,

$$\Delta E_0 = \frac{1}{8\pi E_0} \Delta S_0 . \quad (6.90)$$

É desta forma natural associar uma “temperatura de quase-equilíbrio” T_{qe} a quantidade $\partial E_0 / \partial S_0$ [58], de forma que

$$\Delta E_0 = \frac{\partial E_0}{\partial S_0} \Delta S_0 = T_{qe} \Delta S_0 , \quad (6.91)$$

e assim

$$T_{qe} = \frac{\partial E_0}{\partial S_0} = \frac{1}{8\pi E_0} = \frac{1}{4\pi r_0} . \quad (6.92)$$

A proposta aqui é identificar a temperatura geométrica generalizada T_g com a temperatura de quase-equilíbrio T_{qe} . Assim $T_{qe} = T_g$, o que implica em

$$\frac{1}{8\pi E_0} = \frac{\tilde{B}_0}{8\pi} r_0 \delta , \quad (6.93)$$

onde os resultados (6.69), (6.91) e (6.93) foram usados. A relação (6.94), por sua

vez implica em

$$\frac{1}{4\pi r_0} = \frac{\tilde{B}_0}{8\pi} r_0 \delta , \quad (6.94)$$

e assim

$$r_0 \propto \frac{1}{\delta^{1/2}} . \quad (6.95)$$

O resultado (6.96) nos sugere que no limite quase-extremo ($0 < \delta \ll 1$) o raio da garganta é muito grande ($r_0 \gg 1$). Ou seja, o regime de quase-extremalidade é compatível com uma termodinâmica de quase-equilíbrio somente para buracos de minhoca grandes.

Capítulo 7

Conclusões

Nesta dissertação foram tratados alguns aspectos da física clássica e semi-clássica de buracos negros e buracos de minhoca esfericamente simétricos e estáticos. Na abordagem apresentada aqui, a caracterização usual [23] de um buraco negro, definido como a região cuja fronteira é um horizonte de eventos, foi substituída por uma descrição quase-local [4]. Nesta caracterização alternativa, a fronteira do buraco negro é um horizonte atrapante.

Um dos pontos chave na proposta aqui apresentada é, portanto, a nova noção de horizonte apresentada por Hayward [4]. Para as soluções de vácuo esfericamente simétricas da relatividade geral, o horizonte atrapante coincide com o horizonte de eventos. Mas para soluções com matéria ou soluções dinâmicas, a hiper-superfície que caracteriza o horizonte atrapante não necessariamente coincide com o horizonte de eventos mesmo quando este pode ser definido, o que nem sempre é o caso. Horizontes atrapantes capturam a noção intuitiva de uma superfície da qual nada escapa, ao mesmo tempo que têm uma caracterização local e geométrica. Mais ainda, uma descrição unificada de outros objetos de interesse em relatividade geral – os buracos de minhoca – pode ser feita através de horizontes atrapantes. É oportuno mencionar que, apesar dos resultados clássicos apresentados já serem discutidos na literatura pertinente, eles foram reescritos aqui em uma forma conveniente para as aplicações discutidas neste trabalho.

Este novo enfoque na caracterização da fronteira de buracos negros e buracos de minhoca abre a possibilidade do emprego de técnicas baseadas em tunelamento quântico para a investigação de propriedades semi-clássicas de uma ampla classe de espaços-tempos de interesse.

Nesta dissertação, com o emprego do formalismo apresentado, resultados semi-clássicos e termodinâmicos foram obtidos para um tipo de espaço-tempo que pode ser interpretado como um buraco de minhoca ligando duas regiões delimitadas por horizontes cosmológicos. Em particular, focamos no regime em que a gravidade superficial destes horizontes é muito próxima de zero, o regime quase-extremo.

Para os buracos de minhoca quase-extremos, o mecanismo de tunelamento quântico foi revisado em detalhes, com sistemas de coordenadas convenientes às geometrias consideradas. Embora estes resultados já tenham sido apresentados na literatura pertinente, a escolha dos sistemas de coordenadas apropriados é feito de forma mais cuidadosa nesta dissertação. Expressões explícitas foram obtidas para diversas grandezas termodinâmicas associadas aos buracos de minhoca quase-extremos, entre elas as temperaturas generalizadas, componentes radioativas e coulombianas da energia gravitacional e energia de Misner-Sharp.

Apresentamos também uma proposta para um tratamento de quase equilíbrio, no contexto dos buracos de minhoca quase-extremos. Este enfoque pode ser aplicável se a dinâmica do espaço-tempo for suficientemente lenta. Uma observação interessante obtida a partir desta abordagem é que o regime de quase extremalidade é compatível com uma evolução quase-estática somente se o buraco de minhoca é grande, ou seja, se a área da garganta cresce a medida que o parâmetro δ que caracteriza o regime quase-extremo é reduzido.

Um ponto a ser ressaltado é que grande parte dos resultados obtidos neste trabalho podem ser generalizados para um conjunto maior de espaços-tempos quase-extremos. De fato, os buracos de minhoca estudados aqui são casos particulares de uma classe maior de geometrias, conforme discutido no apêndice A desta dissertação.

Apêndice A

Geometrias Quase-Extremas mais Gerais

As geometrias quase-extremas introduzidas no capítulo 6 podem ser melhor entendidas se as contextualizamos em um cenário um pouco mais geral. Vamos considerar geometrias cuja métrica, no sistema de coordenadas (t, r^*, θ, ϕ) , têm a forma

$$ds^2 = \tilde{A}_0 \operatorname{sech}^2(\kappa r_*) [-dt^2 + (dr^*)^2] + [r(r^*)]^2 d\Omega_2^2, \quad (\text{A.1})$$

com a função $r(r^*)$ satisfazendo as seguintes condições:

- a função $r(r^*)$ é tal que no sistema coordenado (t, r^*, θ, ϕ) , temos $r_1 < r < r_2$ para qualquer valor de r^* , com

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_1} \ll 1; \quad (\text{A.2})$$

- $r(r^*)$ é contínua e infinitamente diferenciável para $-\infty < r^* < \infty$.

Ou seja, a métrica (A.1) deve ser bem definida para qualquer valor de r^* , e a coordenada radial associada a geometria esférica em questão deve ser muito próxima de um certo valor r_0 entre r_1 e r_2 .

Os espaços-tempos descritos por (A.1) podem ser vistos como a região delimitada por horizontes de Killing. Estes horizontes (quando a extensão maximal é considerada) correspondem aos limites $r_* \rightarrow \pm\infty$. Vamos comentar alguns casos protótipos que admitem um limite quase-extremo a seguir.

Buracos de minhoca quase-extremos

As soluções assintoticamente de Sitter apresentadas em [40, 57] são exemplos de espaços-tempos que admitem um limite quase-extremo. Conforme discutido no capítulo 6, estas geometrias admitem uma métrica na forma (6.22), que é um caso particular de (A.1).

Os espaços-tempos comentados no capítulo 6 possuem um horizonte atrapante exterior em $r^* = 0$ ($r = r_0$) e horizontes de Killing em $r^* \rightarrow \pm\infty$ ($r = r_c$). Podem desta forma ser interpretadas como buracos de minhoca que ligam regiões delimitadas por horizontes cosmológicos.

Os detalhes do tratamento destes objetos foram apresentados na seção 6.1, e não serão repetidos aqui. É instrutivo, entretanto, compará-los com os espaços-tempos quase-extremos discutidos a seguir.

Geometria Schwarzschild-de Sitter quase-extrema

O espaço-tempo mais comentado na literatura que admite um limite quase-extremo nos termos das condições introduzidas anteriormente é a geometria de Schwarzschild-de Sitter. No sistema de coordenadas (t, r, θ, ϕ) , a métrica de Schwarzschild-de Sitter é dada pelas funções $A(r) = B(r)$ em (3.3). Para este espaço-tempo, existe um valor máximo que a constante cosmológica Λ pode assumir, dado por $\Lambda_{ext} = 1/9M^2$.

Quando $0 < \Lambda < \Lambda_{ext}$ e $M > 0$, a função $A(r)$ em (3.3) possui três raízes reais, duas positivas (r_1 e r_2 , com $r_1 < r_2$) e uma negativa (r_M , com $r_M = -r_1 - r_2$). As funções $A(r)$ e $B(r)$ podem então ser reescritas como

$$A(r) = B(r) = \frac{\Lambda}{3r}(r_2 - r)(r - r_1)(r - r_M). \quad (\text{A.3})$$

No limite $\Lambda \leq \Lambda_{ext}$, as raízes r_1 e r_2 se aproximam do ponto $r_0 = M$, com $r_1 < r_0 < r_2$. Definindo o parâmetro δ de forma análoga a (6.4),

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_0}, \quad (\text{A.4})$$

vemos que $\delta \rightarrow 0$ a medida que $\Lambda \rightarrow \Lambda_{ext}$. Desta forma, neste limite, as funções

Figura A.1: Comportamento da função $r(r^*)$ para as geometrias Schwarzschild-de Sitter quase-extremas.

$A(r)$ e $B(r)$ podem ser aproximadas por

$$A(r) = B(r) = \frac{\tilde{A}_0}{r_0} (r_2 - r)(r - r_1), \quad (\text{A.5})$$

onde aqui a constante $\tilde{A}_0$ é dada por

$$\tilde{A}_0 = \frac{\Lambda(r_0 - r_M)}{3}. \quad (\text{A.6})$$

A partir das expressões para $A(r)$ e $B(r)$ em (A.5), a função $r^*(r)$ pode ser imediatamente calculada,

$$r^* = \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{r - r_1}{r_2 - r} \right), \quad (\text{A.7})$$

onde κ é a gravidade superficial em r_2 , a menos de correções de segunda ordem em δ . A partir de (A.7), a função $r(r^*)$ pode ser expressa como

$$r(r^*) = \frac{r_1 e^{-\kappa r^*} + r_2 e^{\kappa r^*}}{e^{-\kappa r^*} + e^{\kappa r^*}}. \quad (\text{A.8})$$

A função $\mathcal{A}(r^*)$, com o resultado (A.8), é dada então por

$$\mathcal{A}(r^*) = r_0 \tilde{A}_0 \delta^2 \text{sech}^2(\kappa r^*). \quad (\text{A.9})$$

As expressões (A.8) e (A.9) para as funções métricas $r(r^*)$ e $\mathcal{A}(r^*)$ caracterizam a geometria Schwarzschild-de Sitter quase-extrema como um caso particular de (A.1). A diferença entre o buraco negro Schwarzschild-de Sitter quase-extremo e os buracos de minhoca quase-extremos está na função $r(r^*)$. No presente caso, a função $r(r^*)$ é monotonicamente crescente. Ilustramos o perfil típico de $r(r^*)$ no presente caso

na figura A.1. Como não existem pontos extremos para $r(r^*)$, os resultados no capítulo 5 nos mostram que não existem horizontes atrapantes entre os horizontes de eventos e cosmológicos. A termodinâmica para o espaço-tempo Schwarzschild-de Sitter está restrita aos seus horizontes de Killing.

Buracos negros quase-extremos em universos compactos

Na referência [40], foram construídas soluções das equações de Einstein que respeitam o vínculo isotrópico, em que as pressões radial (p_r) e tangencial (p_t) definidas em (4.41) são iguais, de forma que

$$p_r = p_t. \quad (\text{A.10})$$

Soluções assintoticamente planas para o vínculo (A.10) são expressas como

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (\text{A.11})$$

$$B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + C \left(\frac{r}{M} - 1\right)^2\right]. \quad (\text{A.12})$$

Em (A.12), C é uma constante que assume valores entre $-1 < C < 0$. É aparente das expressões (A.11) e (A.12) que as funções $A(r)$ e $B(r)$ possuem um zero simples em r_+ , onde

$$r_+ = 2M. \quad (\text{A.13})$$

Desta forma, na extensão maximal desta geometria a superfície $r = r_+$ é um horizonte de Killing, conforme o desenvolvimento apresentado no capítulo 3. A gravidade superficial κ neste horizonte de Killing é dada por

$$\kappa = \frac{C + 1}{4M}. \quad (\text{A.14})$$

Por outro lado, a função $B(r)$ possui um segundo zero simples r_0 , definido como

$$r_0 = M \left(1 + \frac{1}{\sqrt{|C|}}\right). \quad (\text{A.15})$$

Figura A.2: Comportamento da função $r(r^*)$ para um buraco negro quase-extremo em um universo compacto.

Desta forma, o desenvolvimento no capítulo 5 indica que a superfície $r = r_0$ é um horizonte atrapante. Mas

$$r_+ < r_0, \quad (\text{A.16})$$

de forma que a seção estática é dada por $r_+ < r < r_0$, e $r = r_0$ não é um ponto de mínimo, e sim um ponto de máximo. No limite $C \rightarrow -1$ temos que $r_+ \rightarrow r_0$ e $\kappa \rightarrow 0$, caracterizando o regime quase-extremo. Definimos o parâmetro δ aqui como

$$\delta = \frac{r_0 - r_+}{r_0}, \quad (\text{A.17})$$

de forma que o limite quase-extremo é dado por $\delta \ll 1$.

De fato, o desenvolvimento na seção 6.1 pode ser repetido aqui (com algumas poucas adaptações), e as funções métricas $r(r^*)$ e $\mathcal{A}(r^*)$ obtidas são

$$r(r^*) = r_+ - r_+ \delta \operatorname{sech}^2(\kappa r^*), \quad (\text{A.18})$$

$$\mathcal{A}(r^*) = \tilde{A}_0 r_0 \delta \operatorname{sech}^2(\kappa r^*). \quad (\text{A.19})$$

O perfil típico da função $r(r^*)$ em (A.18) é apresentado na figura A.2.

A superfície $r^* = 0$ ($r = r_0$) é um horizonte atrapante, conforme o desenvolvimento no capítulo 5. Mas, ao contrário dos buracos de minhoca quase-extremos, $r^* = 0$ é um ponto de máximo da função $r(r^*)$. Desta forma, este horizonte é atrapante interior, e não pode ser interpretado da mesma forma que uma garganta de um buraco de minhoca. Os resultados termodinâmicos apresentados podem ser aplicados neste caso, mas a interpretação dos mesmos permanece em aberto.

Referências Bibliográficas

- [1] Stefanie Komossa, Vadim Burwitz, Gunther Hasinger, Peter Predehl, Jelle S. Kaastra, et al. Discovery of a binary agn in the ultraluminous infrared galaxy ngc 6240 using chandra. *Astrophys.J.*, 582:L15–L20, 2003.
- [2] C. Rodriguez, Greg B. Taylor, R.T. Zavala, A.B. Peck, L.K. Pollack, et al. A Compact Supermassive Binary Black Hole System. *Astrophys.J.*, 646:49–60, 2006.
- [3] Ivan Booth. Black hole boundaries. *Can. J. Phys.*, 83:1073–1099, 2005.
- [4] S. A. Hayward. General laws of black-hole dynamics. *Phys. Rev.*, D49:6467–6474, 1994.
- [5] Matt Visser. *Lorentzian Wormholes*. American Institute of Physics, 1996.
- [6] M.S. Morris, K.S. Thorne, and U. Yurtsever. Wormholes, Time Machines, and the Weak Energy Condition. *Phys. Rev. Lett.*, 61:1446–1449, 1988.
- [7] M.S. Morris and K.S. Thorne. Wormholes in space-time and their use for interstellar travel: A tool for teaching general relativity. *Am. J. Phys.*, 56:395–412, 1988.
- [8] R.R. Caldwell. A Phantom menace? *Phys. Lett.*, B545:23–29, 2002.
- [9] Robert R. Caldwell, Marc Kamionkowski, and Nevin N. Weinberg. Phantom energy and cosmic doomsday. *Phys.Rev.Lett.*, 91:071301, 2003.
- [10] Pedro F. Gonzalez-Diaz. Thermal processes in ringholes. *Phys. Rev.*, D82:044016, 2010.
- [11] Maulik K. Parikh and Frank Wilczek. Hawking radiation as tunneling. *Phys. Rev. Lett.*, 85:5042–5045, 2000.

- [12] S. Massar and R. Parentani. How the change in horizon area drives black hole evaporation. *Nucl.Phys.*, B575:333–356, 2000. Extensively revised version of GR-QC-9801043.
- [13] S. Shankaranarayanan, K. Srinivasan, and T. Padmanabhan. Method of complex paths and general covariance of Hawking radiation. *Mod. Phys. Lett.*, A16:571–578, 2001.
- [14] Prado Martin-Moruno and Pedro F. Gonzalez-Diaz. Thermal radiation from Lorentzian traversable wormholes. *Phys. Rev.*, D80:024007, 2009.
- [15] Einstein A. Die Feldgleichungen der Gravitation. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, pages 844–847.
- [16] Reinabelle Reyes, Rachel Mandelbaum, Uros Seljak, Tobias Baldauf, James E. Gunn, et al. Confirmation of general relativity on large scales from weak lensing and galaxy velocities. *Nature*, 464:256–258, 2010.
- [17] d’Inverno Ray. *Introducing Einstein’s Relativity*.
- [18] Bernard F. Schutz. *A first course in general relativity*. 1985.
- [19] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Prentice Hall, 2004.
- [20] Bert Janssen. *Teoria de Relatividad General*. Universidad de Granada, 2013.
- [21] T. Padmanabhan. *Gravitation foundations and frontiers*. 2010.
- [22] Ta . Pei Cheng. *Relativity, Gravitation, and Cosmology. A basic introduction* . 2005.
- [23] S. W Hawking and G. F .R. Ellis. *The large scale structure of space-time* . 1973.
- [24] R.M. Wald. *General Relativity*. 1984.
- [25] Matt Visser. Gravitational vacuum polarization. I. Energy conditions in the Hartle-Hawking vacuum. *Phys. Rev. D*, 54:5103–5115, Oct 1996.
- [26] Paolo Creminelli, Markus A. Luty, Alberto Nicolis, and Leonardo Senatore. Starting the Universe: stable violation of the null energy condition and non-standard cosmologies. *Journal of High Energy Physics*, 2006(12):080, 2006.

- [27] Norbert Straumann. The History of the cosmological constant problem. 2002.
- [28] V. Frolov and I. Novikov. *Black holes physics, basic concepts e new developments*. 1997.
- [29] Abhay Ashtekar, Victor Taveras, and Madhavan Varadarajan. Information is Not Lost in the Evaporation of 2D Black Holes. *Phys. Rev. Lett.*, 100:211302, May 2008.
- [30] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. Loop Quantization of the Schwarzschild Black Hole. *Phys. Rev. Lett.*, 110:211301, May 2013.
- [31] Karl Schwarzschild (tradução de S. Antoci e A. Loinger). On the gravitational field of a point mass according to Einstein’s theory. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)*, pages 189–196, 1916.
- [32] Kristin Schleich and Donald M. Witt. A simple proof of Birkhoff’s theorem for cosmological constant. *J.Math.Phys.*, 51:112502, 2010.
- [33] J. Bekenstein. Black holes and Entropy. *Phys. Rev. D*, 7(2333-2346), 1973.
- [34] J. M Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Commun. math. Phys.*, 31(161-170), 1973.
- [35] S.W. Hawking. Particle creation by black holes. 43(3):199–220.
- [36] J. Bekenstein. Generalized Second Law of Thermodynamics in Black Hole Physics . *Phys. Rev. D*, 9(3292-3300), 1974.
- [37] Matt Visser. Traversable wormholes: Some simple examples. *Phys. Rev. D*, 39:3182–3184, May 1989.
- [38] Matt Visser, Sayan Kar, and Naresh Dadhich. Traversable Wormholes with Arbitrarily Small Energy Condition Violations. *Phys. Rev. Lett.*, 90:201102, 2003.
- [39] Pedro F. Gonzalez-Diaz. K-essential phantom energy: Doomsday around the corner? *Phys. Lett.*, B586:1–4, 2004.
- [40] C. Molina, Prado Martin-Moruno, and Pedro F. Gonzalez-Diaz. Isotropic extensions of the vacuum solutions in general relativity. *Phys. Rev.*, D84:104013, 2011.

- [41] Stanislav Hledik, Zdenek Stuchlik, and Alois Cipko. Visualizing spacetimes via embedding diagrams. pages 2299–2301, 2007.
- [42] Francisco S.N. Lobo. Energy conditions, traversable wormholes and dust shells. *General Relativity and Gravitation*, 37(12):2023–2038.
- [43] Hideo Kodama. Conserved Energy Flux for the Spherically Symmetric System and the Backreaction Problem in the Black Hole Evaporation. *Progress of Theoretical Physics*, 63(4):1217–1228, 1980.
- [44] Sean A. Hayward, R. Di Criscienzo, M. Nadalini, L. Vanzo, and S. Zerbini. Local temperature for dynamical black holes. *AIP Conf.Proc.*, 1122:145–151, 2009.
- [45] Sean A. Hayward. Wormhole dynamics in spherical symmetry. *Phys. Rev. D*, 79:124001, 2009.
- [46] S. A. Hayward. Gravitational energy in spherical symmetry. *Phys. Rev. D*, 53:1938–1949, 1996.
- [47] Roberto Di Criscienzo, Sean A Hayward, Mario Nadalini, Luciano Vanzo, and Sergio Zerbini. Hamilton–Jacobi tunneling method for dynamical horizons in different coordinate gauges. *Classical and Quantum Gravity*, 27(1):015006, 2010.
- [48] R. Di Criscienzo, M. Nadalini, L. Vanzo, S. Zerbini, and G. Zoccatelli. On the Hawking radiation as tunneling for a class of dynamical black holes. *Phys.Lett.*, B657:107–111, 2007.
- [49] S. A. Hayward. Unified first law of black-hole dynamics and relativistic thermodynamics. *Classical and Quantum Gravity*, 15(10):3147, 1998.
- [50] Hideki Maeda and Masato Nozawa. Static and symmetric wormholes respecting energy conditions in Einstein-Gauss-Bonnet gravity. *Phys. Rev. D*, 78:024005, Jul 2008.
- [51] Charles W. Misner and David H. Sharp. Relativistic Equations for Adiabatic, Spherically Symmetric Gravitational Collapse. *Phys. Rev.*, 136:B571–B576, Oct 1964.

-
- [52] Sean A. Hayward. Quasilocal gravitational energy. *Phys. Rev. D*, 49:831–839, 1994.
- [53] Matt Visser. Essential and inessential features of Hawking radiation. *Int.J.Mod.Phys.*, D12:649–661, 2003.
- [54] L Vanzo, G Acquaviva, and R Di Criscienzo. Tunnelling methods and Hawking’s radiation: achievements and prospects. *Classical and Quantum Gravity*, 28(18):183001, 2011.
- [55] Matt Visser. Essential and inessential features of Hawking radiation. *Int.J.Mod.Phys.*, D12:649–661, 2003.
- [56] I. S Gradshteyn and I.M. Ryzhik. *Table of Integrals, Series, and Products* . Academic Press, 2007.
- [57] C. Molina and J.C.S. Neves. Wormholes in de Sitter branes. *Phys. Rev.*, D86:024015, 2012.
- [58] H.B. Callen. *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatistics*. Wiley, 1985.