

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

**CRITICALIDADE AUTO-ORGANIZADA NO
MODELO OLAMI-FEDER-CHRISTENSEN**

JOSUÉ XAVIER DE CARVALHO

SBI-IFUSP



305M810T3656

Tese de Doutorado
submetida ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo

Orientadora: Profa. Dra. Carmen Pimentel Cintra do Prado

Banca examinadora:

Profa. Dra. Carmen Pimentel Cintra do Prado (IF-USP)

Prof. Dr. Mário José de Oliveira (IF-USP)

Prof. Dr. José Fernando Fontanari (IFSC-USP)

Profa. Dra. Monica Bahiana (IF-UFRJ)

Prof. Dr. Roberto Fernandes Silva Andrade (IF-UFBA)

Carmen P. C. do Prado

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo:

3656
ex. 1

São Paulo
2002

Armando Corbani Ferraz
Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

def. 22/03/02

551.22
C331c
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Carvalho, Josué Xavier de

Criticalidade Auto-organizada no Modelo
Olami-Feder-Christensen. São Paulo 2002.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento de Física Geral

Orientador: Profa. Dra. Carmen Pimentel C. do Prado
Área de Concentração: Física da Matéria Condensada

Unitermos: 1. Criticalidade Auto-organizada;
2. Avalanches;
3. Processo fora do equilíbrio;
4. Mapas acoplados;
5. Terremotos.

USP/IF/SBI-023/2002

*Dedido este trabalho à
minha avó (in memoriam).*

Agradecimentos

Muitas pessoas acabaram contribuindo, mesmo que indiretamente, para que este trabalho pudesse ser concluído. Gostaria de agradecer mais diretamente:

À professora Carmen Pimentel Cintra do Prado por ter-me aceito como aluno de doutorado. Pelos conselhos, dicas e sugestões durante todo esse tempo.

À minha família.

À Andrea pelos bons momentos. Especialmente por me mostrar um outro lado de São Paulo que eu não conhecia.

A todos aqueles que se sentem meus amigos.

Ao pessoal da computação: Leonel, Jairo, Marcos Yamaguti, Sérgio e Valdir, que em diversas ocasiões me ajudaram a resolver problemas computacionais.

Às secretárias Silvana, Dirce e Ivone.

Aos demais funcionários que com seu trabalho ajudam a manter as dependências funcionando.

Ao professor Mário de Oliveira por oferecer, como chefe de departamento, boas condições de trabalho.

Aos demais professores do grupo de Mecânica Estatística.

Gostaria de agradecer também a todos os brasileiros honestos, que pagam seus impostos e desta forma ajudam a manter o programa brasileiro de pós-graduação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos o modelo Olami-Feder-Christensen (OFC). Fortes correlações espaciais e temporais dificultam a obtenção de resultados analíticos para este modelo. Assim, nossas investigações foram realizadas através de simulações computacionais. Afim de identificar o regime estacionário de forma eficiente e econômica desenvolvemos algumas estratégias. Também percebemos que a escolha adequada da configuração inicial pode antecipar ou retardar o início do regime estacionário. Por fim, a criticalidade do modelo foi estudada através de uma abordagem totalmente nova. Em vez de tentarmos identificar o comportamento crítico do sistema por meio da distribuição de avalanches, definimos uma grandeza σ , que em um processo ramificado simples seria a taxa de ramificação do sistema. Analisando o comportamento dessa variável em um espaço de fases verificamos que o modelo OFC e sua versão aleatória (que de antemão sabemos que só apresenta criticalidade no regime conservativo) têm um comportamento bastante similar. Obtivemos, ao contrário do que se acreditava, fortes evidências de que o modelo OFC apenas exhibe criticalidade no regime conservativo.

Abstract

We have investigated the Olami-Feder-Christensen model. The model presents strong temporal and spatial correlations what makes it very difficult to perform analytical calculations. So our treatment was numerical. We developed strategies to identify the regime with high level of accuracy. We noticed that depending on the initial configurations, the statistical stationary state can be reached faster. Finally we have investigated the criticality of the model through new strategy. Instead of looking for power laws, we defined a quantity σ , very similar to the branching ratio in a simple branching process. We were able to show the behavior of the Olami-Feder-Christensen and the random version of this model are similar. We got strong numerical evidences that, in oposition to previous results, the Olami-Fedel-Christensen model is critical only in the conservative regime.

Sumário

1	Introdução	1
2	Algumas questões sobre criticalidade auto-organizada	5
2.1	Considerações Gerais	5
2.2	O modelo de pilha de areia	9
2.3	Efeitos de tamanho finito	14
2.4	Principais modelos	18
2.5	Críticas ao conceito de SOC	22
3	O modelo Olami-Feder e Christensen	25
3.1	Aspectos gerais sobre terremotos	25
3.1.1	Magnitude	27
3.1.2	Energia	32
3.2	Criticalidade auto-organizada e terremotos	33
3.2.1	Modelos massa-mola para terremotos	35
3.3	O modelo Olami-Feder-Christensen	39
3.4	Simulações	42
3.4.1	Introdução	42
3.4.2	Estatégias para identificação do regime estacionário	43
3.4.3	Resultados numéricos	47

3.4.4	Estratégias para redução do tempo associado regime ao transiente	58
4	O modelo Olami-Feder e Christensen com vizinhos aleatórios	63
4.1	Introdução	63
4.2	O modelo R-OFC	64
4.3	Taxa de ramificação no modelo R-OFC	65
4.4	Efeitos de superfície no modelo R-OFC	69
5	Criticalidade no Modelo OFC	73
5.1	Introdução	73
5.2	O modelo Feder e Feder extremal	75
5.3	Criticalidade no modelo OFC	81
5.3.1	Principais resultados	82
5.3.2	Taxa de ramificação no modelo OFC	84
6	Conclusões	93
A	Algumas considerações sobre <i>finite size scaling</i>	95
B	Processos ramificados	99
B.1	Modelos de criticalidade como processos ramificados	101
C	Ánalise de momentos	103
C.1	Parte A	103
C.2	Parte B	106
D	Densidade de probabilidade de estados para o modelo EFF	109
D.1	Taxa de ramificação no modelo EFF para o caso não conservativo	111
	Bibliografia	114

Capítulo 1

Introdução

Existem fenômenos, em áreas completamente distintas, onde sistemas formados por vários elementos idênticos e interagindo entre si de forma simples geram um comportamento coletivo rico e bastante complexo. O comportamento global do sistema não reproduz o comportamento individual de cada uma das partes que o formam e nem pode ser previsto ou entendido a partir das regras de interação entre os elementos. Uma pequena mudança na forma como os elementos interagem gera um novo comportamento coletivo, totalmente diferente do anterior. Sistemas com estas características são denominados sistemas complexos. Por sua vez, o comportamento coletivo dos sistemas complexos são denominados de comportamento emergente. Podemos encontrar complexidade em diversas áreas, como por exemplo biologia molecular, neurobiologia, economia, geologia e engenharia, além da física. Talvez o maior paradigma de complexidade seja o próprio cérebro humano. Um único neurônio não é capaz de pensar. No entanto, bilhões de neurônios conectados entre si através das sinapses formam uma estrutura como o cérebro que possui a capacidade de raciocinar.

Nos últimos anos tem havido um esforço no sentido de tentar compreen-

der quais os mecanismos que levam ao surgimento de comportamentos complexos, nas suas mais diferentes formas de manifestação. A observação de certas regularidades na descrição estatística de diversos sistemas complexos fez nascer a crença de que talvez possa haver princípios gerais governando o seu comportamento. Vemos o surgimento de uma visão holística, em contraposição ao reducionismo que sempre marcou as ciências de um modo geral nos últimos séculos. Essa nova proposta ainda não foi totalmente aceita pela comunidade científica. De fato, os estudos sobre complexidade ainda estão em uma fase muito embrionária, não havendo até o momento resultados substanciais.

Dentro deste cenário, a teoria da criticalidade auto-organizada tem despertado um interesse muito grande da comunidade científica nos últimos anos. Proposta por Bak, Tang e Wiesenfeld em 1987 [1], originalmente tinha o propósito de explicar a vasta ocorrência de invariância de escala espacial e temporal na natureza. Um fenômeno apresenta invariância de escala quando os resultados observados independem da escala de observação usada. Invariância de escala espacial está intimamente relacionada a fractais, que são objetos que apresentam a mesma ‘aparência’ geométrica, não importa a escala de observação. Flocos de neve, a distribuição de galáxias, etc., são exemplos de fractais encontrados na natureza[2], [3]. Invariância de escala também ocorre em séries temporais, onde as flutuações no tempo são sempre similares, independente da escala temporal de observação. Os espectros de potência destas séries temporais geralmente se comportam como $1/f^\varphi$, caracterizando o chamado ruído $1/f$. Como exemplos podemos citar a variação dos níveis dos rios, a variação temporal do tráfego nas rodovias, etc..

Em linhas gerais podemos dizer que criticalidade auto-organizada ou SOC (Self-organized Criticality) é um estado estatisticamente estacionário, carac-

terizado pela ausência de qualquer comprimento de escala espacial ou temporal. As funções de distribuição das grandezas de interesse manifestam-se em leis de potência, assim como ocorre em transições de fase de segunda ordem em Mecânica Estatística de equilíbrio. Por isso o estado é dito crítico. O termo auto-organizado é usado pois, ao contrário do que ocorre em transições de segunda ordem, onde o estado crítico é atingido pelo ajuste externo de algum parâmetro, agora a própria dinâmica conduz o sistema ao estado crítico. Além disso, a evolução até o estado crítico independe das condições iniciais, sendo este, portanto, um atrator da dinâmica. Observa-se criticalidade auto-organizada em sistemas dinâmicos estendidos, isto é, sistemas que apresentam muitos graus de liberdade espaciais e temporal, abertos e dissipativos. A evolução espaço-temporal destes sistemas é pouco estudada, apesar de tais sistemas serem bastante comuns em áreas tão diversas como física, biologia, economia e ciências sociais.

A partir do trabalho inicial de Bak, Tang e Wiesenfeld, uma vasta literatura surgiu em torno do assunto. Diversos autores empregaram SOC para explicar fenômenos tais como terremotos, incêndios florestais e evolução das espécies, motivando o surgimento de diversos modelos. No entanto, apesar do grande número de trabalhos, a teoria carece de um formalismo matemático e não existe uma definição precisa do que seja SOC. Também não se conhece quais os mecanismos básicos que geram esse comportamento. Alguns autores têm procurado estabelecer uma conexão entre a teoria da criticalidade auto-organizada e outros fenômenos ocorrendo em Mecânica Estatística fora do equilíbrio [4]. Além disso, existem questões que dizem respeito à criticalidade dos modelos que exibem SOC. Quais são os expoentes, as funções de escala, classes de universalidade, etc..

Neste trabalho o objetivo principal é estudar o modelo Olami-Feder-

Christensen (OFC), proposto dentro do contexto da dinâmica de terremotos. Nosso principal resultado foi estabelecer uma conexão entre um modelo com estrutura espacial e que supostamente exhibe SOC com processos ramificados. Até então, essa conexão só havia sido feita para modelos sem estrutura espacial. Esta tese está organizada da seguinte forma: no capítulo 2 revemos o conceito de criticalidade auto-organizada com um pouco mais de detalhes. Para introduzir as idéias principais usaremos o modelo de pilha de areia. No capítulo 3 apresentaremos o modelo OFC, que é o objeto principal de estudo desta tese. Na primeira metade do capítulo reproduzimos diversos resultados, mostrando a suposta conexão do modelo com terremotos. No restante do capítulo enfatizaremos aspectos relacionados a implementação numérica do modelo. Em seguida, no capítulo 4, apresentaremos o modelo R-OFC, que é uma versão aleatória do modelo OFC. Nesse capítulo explicitaremos como é possível encarar os modelos de SOC como um processo ramificado. No capítulo 5 fazemos uma breve revisão de alguns trabalhos que relacionam as versões de campo médio de modelos com criticalidade auto-organizada a processos ramificados. Apresentamos a teoria da quase-criticalidade, expondo as idéias por meio do modelo Feder e Feder extremal. O modelo OFC é retomado, mas dessa vez usando uma abordagem muito próxima de processos ramificados. Finalmente, no capítulo 6, apresentaremos as nossas conclusões, junto com algumas questões recentes sobre o modelo OFC. Discutiremos também perspectivas de continuidade.

Capítulo 2

Algumas questões sobre criticalidade auto-organizada

2.1 Considerações Gerais

Por simetria entendemos uma invariância com relação a alguma mudança. Algo (uma lei física, uma figura geométrica, etc.) permanece inalterado mesmo tendo sido efetuada algum tipo de mudança. A auto-similaridade é uma forma de simetria, presente em fractais e multi-fractais, estando associada a leis de potência. Consiste em uma invariância com relação a variações de escala. Em outras palavras, continuamos observando a mesma estrutura, independente da escala que usamos para isso. Por exemplo, vamos considerar um fenômeno qualquer, cujos eventos são descritos pela variável s , e a distribuição de probabilidade de ocorrência de eventos obedece uma lei de potência, $P(s) \sim s^{-\beta}$ ($\beta > 1$). Se $\mathcal{P}(s)$ é a probabilidade de que ocorram eventos maiores que s , a probabilidade de que ocorram eventos maiores que λs , com λ podendo assumir quaisquer valor, será dada por $\mathcal{P}(\lambda s) = \lambda^{1-\beta} \mathcal{P}(s)$. Isso mostra que, uma vez fixado o valor de λ , se fi-

zermos medidas das grandezas de interesse no intervalo entre s e λs , obteremos sempre os mesmos resultados, independentemente do valor escolhido para s . A proporção de grandes e pequenos eventos será sempre a mesma, não importa o intervalo que tomamos para observar o fenômeno. Leis de potência são comuns em diversos ramos da ciência, como por exemplo em biologia, química, economia, física, etc.. Em particular, podemos citar que em Mecânica Estatística de equilíbrio, próximo a transições de fase contínuas, as grandezas de interesse do sistema considerado são muito bem descritas por leis de potência. Resultados do grupo de renormalização mostram que os detalhes microscópicos não são importantes na descrição das transições de fase. Sistemas físicos diferentes exibem o mesmo comportamento crítico (isto é, exibem os mesmos expoentes críticos) independente das particularidades físicas de cada sistema. Assim, é possível classificar as diversas transições de fase (em supercondutores, materiais ferromagnéticos, etc..) em classes de universalidade, caracterizadas por alguns poucos expoentes críticos, que dependem da dimensionalidade do sistema, da dimensionalidade do parâmetro de ordem e da simetria do modelo considerado. Desde que as transições de fase apresentam um caráter universal, é possível estudar os fenômenos críticos por meio de modelos teóricos simples, como o modelo de Ising ou Heisenberg, que capturam aspectos gerais do problema.

O sucesso na descrição de fenômenos críticos como um fenômeno universal pelo grupo de renormalização deve-se à presença de invariância de escala próximo à criticalidade. No entanto, para que os sistemas em Mecânica Estatística estejam próximo à criticalidade, é necessário o ajuste externo de algum parâmetro, como por exemplo a temperatura, o campo magnético, etc.. Por outro lado, diversas manifestações de invariância de escala (espacial e temporal) são ubíquas na natureza e, ao contrário de transições

de fase contínuas, aparentemente espontâneas. Uma questão surge naturalmente então sobre a ocorrência generalizada de leis de potência na natureza; seriam estas devido a algum princípio geral ou cada caso seria devido as causas particulares? Em um trabalho de 1987 Per Bak e colaboradores [1] afirmam que esse princípio geral existe, propondo a teoria da criticalidade auto-organizada como possível explicação para as diversas manifestações de invariância de escala na natureza. Conforme exposto neste trabalho [1], criticalidade auto-organizada seria a propriedade apresentada por vários sistemas dinâmicos fora do equilíbrio e com muitos graus de liberdade espaciais e temporal, dissipativos e abertos, de evoluírem naturalmente até um estado crítico estatisticamente estacionário, quando submetidos a uma lenta e permanente perturbação externa. O estado crítico, assim como em fenômenos críticos de equilíbrio, caracteriza-se por invariância de escala. Para os sistemas que exibem criticalidade auto-organizada, uma vez atingido o estado estatisticamente estacionário, a resposta do sistema às perturbações podem ser de qualquer tamanho (invariância de escala). As distribuições estatísticas das grandezas de interesse (espaciais e temporais) são regidas por leis de potência. Mas, ao contrário dos fenômenos críticos de equilíbrio, o estado crítico agora é um atrator da dinâmica sendo atingido sem qualquer tipo de ajuste externo e independentemente das condições iniciais. Além disso, o estado crítico é robusto com relação a variação de parâmetros locais e ruído.

Apesar de estarem fora do equilíbrio, os modelos exibindo SOC diferem daqueles geralmente estudados em Mecânica Estatística fora do equilíbrio, pois possuem duas escalas temporais distintas. Enquanto em Mecânica Estatística fora do equilíbrio a escala temporal da perturbação externa (um ruído por exemplo) é da mesma ordem da escala temporal de evolução da dinâmica, para os modelos que exibem SOC existem duas escalas tempo-

rais. Uma lenta, em que o sistema é perturbado externamente, e uma outra rápida na qual o sistema relaxa. A escala temporal rápida (relaxação) é praticamente instantânea se comparada com a escala temporal lenta (perturbação). A existência dessas duas escalas temporais dificulta a abordagem desses modelos por meio do formalismo de equações mestras.

O paradigma da criticalidade auto-organizada é a pilha de areia. Imagine que em uma superfície plana começamos a despejar grãos de areia. A cada unidade de tempo um único grão é adicionado em uma posição aleatória sobre a superfície. Após a adição de cada grão, espera-se até que todos os grãos estejam novamente em repouso. Apenas a partir desse momento é que novos grãos poderão ser adicionados ao sistema. Passado um certo tempo, um novo grão adicionado ao sistema cairá numa posição onde já existia um outro grão. O grão adicionado provavelmente se tornará instável e rolará, originando uma avalanche microscópica. Dando prosseguimento com o processo de deposição de grãos haverá o surgimento de pequenas pilhas. Para que uma pilha se mantenha estável é necessário que cada inclinação local da pilha seja inferior a um dado ângulo crítico. No entanto, a constante injeção de grãos no sistema acaba por criar uma série de avalanches. Essas avalanches acabam fazendo com que as diversas pilhas se fundam em uma única grande pilha, que crescerá até um certo ponto. A inclinação média da pilha atinge um valor denominado ângulo de repouso, que não será excedido, por mais que seja despejada areia na pilha. O estado atingido pela pilha de areia é estatisticamente estacionário, onde a injeção de grãos de areia no sistema é compensada pela perda de grãos ocasionada pelas avalanches. Desta maneira é possível que a inclinação média da pilha tenha um valor estatisticamente estacionário. Todavia, continua havendo uma variação muito grande das inclinações locais, que continuam não podendo exceder um certo valor crítico

sem que haja rolamento de grãos. Quando um ‘sítio’ possui uma inclinação igual ao valor crítico dizemos que este sítio está em um estado minimamente estável. Assim, as avalanches ocorrem quando um grão é depositado em um sítio minimamente estável conectado a outros sítios minimamente estáveis. Devido a grande variação das inclinações locais, é difícil prever qual o resultado da deposição de um único grão de areia. Pode ocorrer uma avalanche global, ou o deslizamento de alguns poucos grãos de areia, ou, quem sabe, o grão depositado pode simplesmente permanecer no local onde caiu.

As idéias em torno do conceito de criticalidade auto-organizada foram apresentadas através de um automato celular muito simples, denominado modelo BTW (Bak, Tang e Weinsefeld). Este modelo também é conhecido como modelo de pilha de areia, pois suas regras de evolução, pelo menos intuitivamente, tentam descrever grãos de areia deslizando em avalanches ocorrendo em pilhas de areia reais. Na próxima seção apresentamos o modelo BTW em uma e duas dimensões.

2.2 O modelo de pilha de areia

Em uma dimensão, o modelo de ‘pilha de areia’ ou modelo BTW consiste em um autômato celular definido em uma cadeia linear com N sítios. É associada a cada sítio uma variável discreta h_i , que pictoricamente representa a altura da pilha de areia naquele sítio. A ‘inclinação’ local z_i de um sítio i qualquer da rede é definida como

$$z_i = h_i - h_{i+1}. \quad (2.1)$$

Imporemos $h_0 = h_1$ e $h_{N+1} = 0$ como condições de contorno. Isto significa que a extremidade esquerda é fechada e os grãos só poderão abandonar a pilha pela extremidade direita. Pode-se tomar como configuração inicial uma

configuração totalmente plana ($h_i = 0, \forall i$) ou uma configuração totalmente aleatória. O sistema é perturbado pela adição de um grão de areia em um sítio escolhido aleatoriamente,

$$h_i \rightarrow h_i + 1, \quad (2.2)$$

o que modifica as inclinações da pilha nos sítios i e $i - 1$,

$$\begin{cases} z_i & \rightarrow z_i + 1, \\ z_{i-1} & \rightarrow z_{i-1} - 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Prossegue-se acrescentando grãos a sítios escolhidos aleatoriamente até que alguma das inclinações z_i torne-se instável, isto é, exceda a inclinação crítica z_c , ($z_i > z_c$). A partir desse momento o sistema deixa de ser perturbado externamente e relaxa. Um grão pertencente ao sítio com inclinação instável rolará para o sítio mais a direita, modificando as alturas nos sítios i e $i + 1$,

$$\begin{cases} h_i & \rightarrow h_i - 1, \\ h_{i+1} & \rightarrow h_{i+1} + 1. \end{cases} \quad (2.4)$$

Em consequência, as inclinações do sítios i e $i \pm 1$ se modificam,

$$\begin{cases} z_i & \rightarrow z_i - 2, \\ z_{i\pm 1} & \rightarrow z_{i\pm 1} + 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Esta redistribuição de grãos pode ocasionar algum novo sítio crítico ($z_{i\pm 1}$), acarretando mais uma vez a redistribuição de grãos. Esta reação em cadeia é chamada de avalanche. Tal processo continua até que todas as inclinações estejam novamente estáveis, $z_i < z_c, \forall i$. Caso o sítio h_N seja perturbado, vindo a se tornar crítico, teremos então um grão rolando para fora da pilha. Isto leva a perda de grãos de areia. Neste modelo unidimensional, após um transiente (que depende da configuração inicial) o sistema atinge uma configuração onde $z_i = z_c, \forall i$. Assim, qualquer grão adicionado à pilha rolará

para fora da pilha. Esta configuração é um atrator trivial da dinâmica, já que o sistema sempre retorna para esta configuração após ser perturbado e relaxar.

Um comportamento mais rico é obtido em duas dimensões. As regras (2.5) são facilmente generalizadas para duas dimensões. Neste caso não é tão fácil relacionar $z_{i,j}$ com a inclinação da pilha. O sistema é perturbado com o acréscimo de 1 grão, sempre escolhendo aleatoriamente o sítio a ser perturbado. Quando um sítio torna-se crítico, ou seja, $z_{i,j} > z_c$, aplica-se a regra de relaxação:

$$\begin{cases} z_{i,j} & \rightarrow z_{i,j} - 4, \\ z_{n,n} & \rightarrow z_{n,n} + 1, \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $z_{n,n}$ corresponde aos quatro primeiros vizinhos do sítio que tornou-se crítico. Como resultado, um ou mais sítios podem tornar-se críticos, iniciando uma avalanche. As atualizações dos sítios críticos são feitas de forma paralela ou síncrona, o que significa que todos os sítios são atualizados ao mesmo tempo. Geralmente uma avalanche é caracterizada pelo seu tamanho s , a duração T e a área que ocupa a . O tamanho s da avalanche é definido como sendo igual ao número de sítios que relaxam. Se um sítio relaxar n vezes em uma avalanche, essas n vezes são contadas para o tamanho da avalanche. A área a ocupada pela avalanche corresponde ao número de sítios que participaram da avalanche. As atualizações, isto é, o processo de relaxamento dos sítios críticos ocorrem de forma síncrona. Se mais de um sítio torna-se crítico, todos relaxam ao tempo (escala curta de tempo). Assim, definimos como duração da avalanche T o número total de atualizações feitas durante um processo de avalanche (note que aqui nos referimos à escala curta de tempo).

Na Figura 2.1 podemos ver a função distribuição do tamanho das ava-

lanches $P(s)$ para simulações realizadas no modelo pilha de areia em duas dimensões, para rede de tamanho $L = 50$, $L = 100$ e $L = 200$. As condições de contorno são abertas, ou seja, se sítios que pertencem a borda tornam-se críticos haverá a perda de grãos pelo sistema, uma vez que sítios da borda possuem um número menor de vizinhos. Ao contrário da versão unidimensional, este modelo apresenta, no estado estacionário, um comportamento rico, com avalanches de todos os tamanhos, limitados apenas pelo tamanho físico do sistema. A distribuição de probabilidade $P(s, L)$ dos tamanhos das avalanches s , obedece uma lei de potência por várias décadas (veja a Figura 2.1). A partir de um certo tamanho de avalanche s^* (que depende do tamanho de rede considerado) a distribuição de probabilidade dos tamanhos de avalanches deixa de obedecer a uma lei de potência, sendo caracterizada por um rápido decaimento exponencial $P(s, L) \sim \exp(-s/s^*)$. Este rápido decaimento pode ser entendido como efeito do tamanho finito dos sistemas considerados, pois o tamanho das avalanches é limitado pelo tamanho físico do sistema.

O modelo BTW ilustra as principais propriedades de sistemas que exibem SOC. Temos um sistema aberto, realizando troca com o meio externo ('grãos' de areia são injetados no sistema e eventualmente perdidos pela pilha nos processos de relaxamento dos sítios da borda). É um modelo totalmente fora do equilíbrio e evolui "espontaneamente" para um estado crítico caracterizado por invariância de escala. Isto é, dada uma configuração inicial qualquer, aplicando as regras de evolução sucessivamente, o sistema atinge um estado de equilíbrio estatístico, em que as grandezas macroscópicas flutuam em torno de um valor médio. Além disso, este estado é caracterizado por invariância de escala nas distribuições estatísticas. Apesar das regras de evolução do sistema serem localmente conservativas (veja as equações (2.6)),

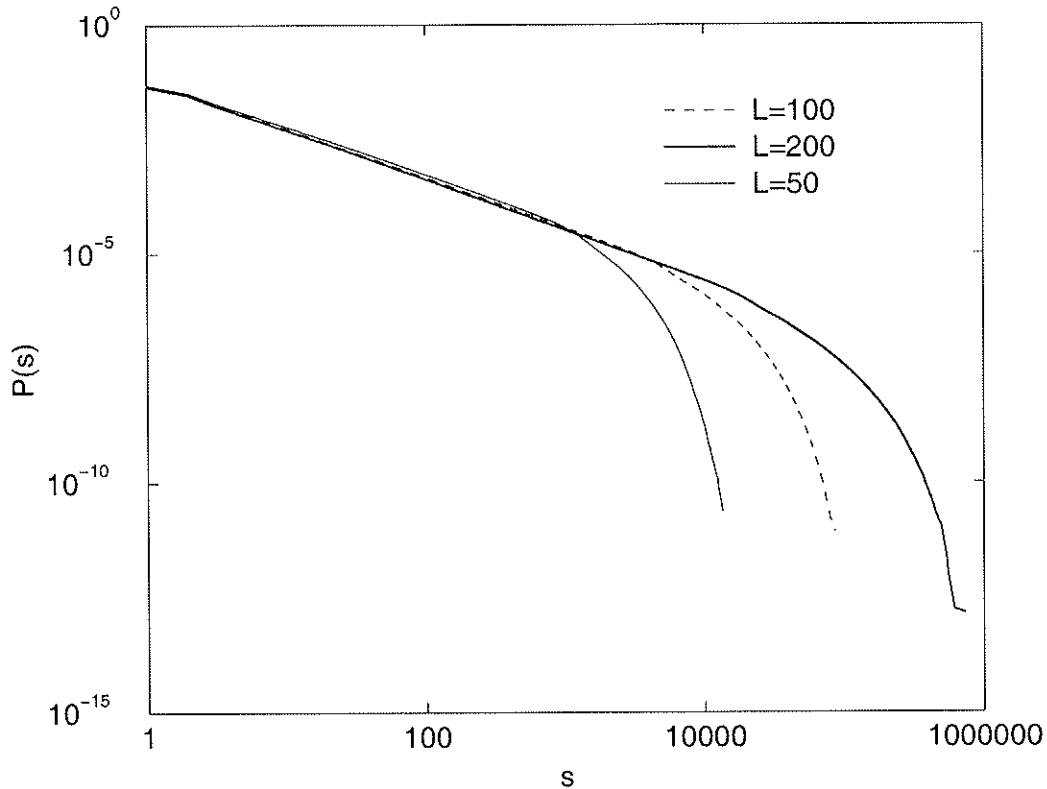


Figura 2.1: Distribuição das avalanches no modelo pilha de areia para redes de tamanho $L = 50$, $L = 100$ e $L = 200$. Os resultados foram obtidos considerando-se estatística da ordem 20 000 000 de avalanches.

globalmente o sistema é dissipativo. Grãos de areia são perdidos pelo sistema quando sítios pertencentes à borda relaxam. Uma vez que estes sítios possuem um número menor de vizinhos, quando tornam-se críticos ocorre dissipação da quantidade z_i , que corresponde em termos pictóricos a um grão caindo fora da pilha. Ao contrário das transições de fase de segunda ordem, onde os efeitos de borda deixam de ter importância à medida que o limite termodinâmico é alcançado, as condições de contorno são importantes em modelos de criticalidade auto-organizada. Elas garantem a estacionaridade do sistema, influenciam as leis de escala observadas e, a depender da condição

de contorno, o sistema pode nem apresentar criticalidade auto-organizada.

O trabalho inicial de Per Bak despertou um interesse muito grande da comunidade científica. Desde então, uma infinidade de trabalhos tem surgido a cada ano, sendo a maioria trabalhos teóricos ou de simulações numéricas. Alguns trabalhos experimentais, com pilhas de areia reais, foram realizados (para uma revisão destes trabalhos veja [5]), conseguindo, no entanto, produzir leis de potência em pequenas pilhas apenas. O sistema passava a exibir um comportamento oscilatório quando grandes pilhas de areia eram consideradas. Acredita-se que efeitos inerciais impeçam que pilhas de areia reais exibam invariância de escala [6] e [7]. À medida que o grão desliza, vai ganhando energia cinética, ficando cada vez mais difícil parar. Aparentemente esta hipótese foi confirmada em um trabalho, onde avalanches em pilhas de arroz de diferentes espécies (e portanto, de diferentes formatos) foram analisadas [8]. Pilhas de arroz com formato mais próximo do esférico produziram apenas decaimento exponencial. Já pilhas de arroz com formato mais alongado, que restringe o movimento dos grãos, favorecendo ao atrito (suprimindo assim os efeitos de inércia) produziram leis de potência em várias décadas. Baseado nesses resultados, os autores concluíram que SOC não é um fenômeno universal para sistemas granulares lentamente perturbados. A diferença no mecanismo de dissipação levaria a uma mudança de comportamento crítico para não-crítico.

2.3 Efeitos de tamanho finito

Boa parte dos resultados relacionados a criticalidade auto-organizada são obtidos através de simulações computacionais. Nessas simulações, em geral, parte-se de uma configuração inicial aleatória e espera-se até que o sistema at-

inja um regime estatisticamente estacionário, quando grandezas macroscópicas flutuam em torno de um certo valor médio. Uma vez atingido este regime estacionário, começa-se a coletar as estatísticas das grandezas de interesse. Na grande maioria dos trabalhos publicados, os autores, de um modo geral, admitem que o sistema é invariante por escala caso seja constatada a presença de leis de potência na distribuição das grandezas de interesse, como por exemplo, na distribuição do tamanho das avalanches. Desde que o tamanho das avalanches (e de outras grandezas de interesse) é limitado pelo tamanho do sistema, as distribuições apresentam leis de potências em algumas décadas apenas, como é o caso, por exemplo, da distribuição de avalanches do modelo BTW mostrada na Figura 2.1. Uma vez que não é possível simular redes de tamanho infinito, deve-se verificar como o tamanho da rede interfere nos resultados e tentar prever o comportamento do sistema no limite termodinâmico, onde $L \rightarrow \infty$.

Na vasta literatura em torno do conceito SOC é muito comum o emprego da teoria da escala de tamanhos finitos (*finite size scaling-FSS*) [9] para estudar a dependência dos modelos com o tamanho da rede. A teoria da escala de tamanhos finitos foi desenvolvida no contexto de transições de fase contínuas. Basicamente consiste em um método para extrair parâmetros críticos (principalmente expoentes) de sistemas finitos, nas proximidades do limite termodinâmico¹, verificando-se como as grandezas termodinâmicas variam com o tamanho do sistema. Assim, se uma função termodinâmica $F_L(T, V)$ qualquer, que no limite termodinâmico comporta-se como

$$F_\infty(T, V) \sim C_\infty t^{-\beta}, \quad (2.7)$$

onde $t = (T - T_c)/T_c \rightarrow 0$, quando este mesmo sistema estiver próximo

¹O limite termodinâmico é obtido quando o número N de partículas do sistemas e o volume V do sistema tendem ao infinito com a densidade $\rho = N/V$ mantida fixa.

à criticalidade e L for suficientemente grande, o comportamento da função $F_L(T, V)$ deixa de ser descrito pela expressão (2.7) e passa a ser

$$F_L(T, V) \sim L^n g(tL^{1/\nu}), \quad (2.8)$$

onde $g(tL^{1/\nu})$, denominada função de escala, representa os efeitos de tamanho finito sobre o comportamento crítico do sistema.

O emprego da teoria de FSS em modelos de criticalidade auto-organizada consiste em analisar como a cauda das distribuições estatísticas (em um gráfico log – log) das grandezas de interesse se comportam com o aumento do tamanho da rede. Sendo $P(x, L)$ a função distribuição de uma grandeza x qualquer (x podendo ser a , s ou T) para um dado sistema de tamanho L , espera-se que $P(x, L) \sim x^{-\tau_x}$, quando $L \rightarrow \infty$. No caso de sistemas finitos, $P(x, L)$ deve obedecer a uma lei de potência para $x \ll L^{D_x}$, onde D_x é um expoente que caracteriza como a cauda da curva escala com o tamanho da rede. Por outro lado, para $x \gg L^{D_x}$ espera-se que $P(x, L)$ decaia muito rapidamente. Em geral, para descrever este comportamento, emprega-se o ansatz

$$P(x, L) \sim L^{-\beta_x} G(x/L^{D_x}) \quad (2.9)$$

ou

$$P(x, L) \sim x^{-\tau_x} F(x/L^{D_x}), \quad (2.10)$$

onde $\beta_x = D_x \tau_x$ e τ_x é o expoente referente à lei de potência. As funções de escala nas expressões (2.9) e (2.10) devem satisfazer à seguinte relação

$$F(y) = y^{\tau_x} G(y), \quad (2.11)$$

qualquer que seja y . Além disso, quando $y \rightarrow 0$, a função $G(y)$ tende a uma lei de potência (enquanto $F(y) \rightarrow \text{cte}$).

De um modo geral, para determinar se um sistema obedece ou não ao FSS, plota-se em um mesmo gráfico $\ln [P(x, L)L^{\beta_x}]$ ou $\ln [P(x, L)x^{\tau_x}]$ versus $\ln(x/L^{D_x})$ para diversos tamanhos diferentes de rede L . Se o sistema obedece ao FSS espera-se que todas as curvas colapsem em uma única curva, dita curva universal. No entanto, devido às limitações computacionais, na prática torna-se muito difícil distinguir entre lei de potência e um decaimento exponencial $x^{-\beta}e^{-x/x_0}$ com o tamanho característico x_0 muito grande. Diversas investigações, em modelos do tipo pilha de areia em que ajustes de FSS foram empregados, conduziram a resultados contraditórios (veja por exemplo [10], [11] e [12]).

Recentemente no estudo da dependência dos modelos com o tamanho da rede tem sido empregada a técnica da análise dos momentos [13]. Introduzida em 1998 por Menech [14] e colaboradores, essa técnica consiste em analisar os momentos da distribuição de interesse, isto é,

$$\langle s^q \rangle = \int P_s(s, L) s^q ds, \quad (2.12)$$

ao invés de analisar diretamente a distribuição. A idéia é escrever os momentos em termo do espectro multifractal da distribuição de probabilidade integrada $f(\alpha)$ [15], definido por

$$f(\alpha) = \frac{\ln [\int_s^\infty P_s(x, L) dx]}{\ln L} \quad (2.13)$$

onde $\alpha = \ln s / \ln L$ e é implícito que $L \rightarrow \infty$, para escrever os momentos da distribuição. Com um pouco de esforço (veja o apêndice C para maiores detalhes) é possível mostrar que

$$\langle s^q \rangle = \int \exp [f(\alpha) + q\alpha] d\alpha \sim L^{\sigma(q)}, \quad (2.14)$$

onde $\sigma(q) = \max_\alpha [f(\alpha) + q\alpha]$. Com este resultado é possível testar se as grandezas estudadas obedecem ou não ao FSS. Se admitirmos como ver-

dadeiro o ansatz (2.10), o espectro multifractal deve comporta-se como (veja o apêndice C)

$$f(\alpha) = \begin{cases} -(\tau_s - 1) & \text{para } 0 < \alpha < D_s, \\ -\infty & \text{para } \alpha > D_s, \end{cases}$$

e

$$\sigma(q) = \begin{cases} D_s(q - \tau_s + 1) & \text{para } 0 < \alpha < D_s, \\ 0 & \text{para } \alpha > D_s. \end{cases}$$

Se a distribuição de eventos obedece ao FSS, $\sigma(q)$ deve ser uma função linear com relação a seus argumentos, correspondendo à inclinação em um gráfico $\log - \log$ do q -ésimo momento $\langle s^q \rangle$ versus o tamanho da rede L . Desde que $D_s = d\sigma_s(q)/dq$, τ_s pode ser obtido a partir da relação $\sigma(1) = D_s(2 - \tau_s)$.

A análise de momentos consiste basicamente em um teste para verificar se o sistema obedece ou não ao FSS. Caso o sistema não obedeça ao FSS, pode-se tentar um ajuste mais geral, denominado de multifractal e proposto por Kadanoff e colabores [16]. Consiste em tentar fazer um ajuste de $\log P(s, L)/\log(\lambda L)$ versus $\log(s)/\log(\lambda L)$ para um valor conveniente de λ . É interessante ressaltar que este ponto fica um pouco obscuro na literatura. Efetuar a análise de momentos, não significa que o sistema seja multifractal, como parece vem sendo assumido às vezes na literatura.

2.4 Principais modelos

Desde o surgimento da teoria de criticalidade auto-organizada uma infinidade de modelos foram propostos. Em sua grande maioria são automatos celulares ou mapas acoplados, onde existe um valor limiar a partir do qual o processo de

avalanche é deflagrado. Devido ao grande número, é impossível citar todos os modelos. No entanto, como muitos modelos possuem muitas características em comum, é possível separar os diversos modelos em grupos com algumas características similares.

Naturalmente o primeiro grupo é o dos modelos tipo “pilha de areia”. Esses modelos são definidos em uma rede, cuja dimensionalidade pode variar. A variável que descreve o estado de cada sítio é discreta. Na maioria dos casos as regras da dinâmica local desses modelos são determinísticas e localmente conservativas. A dissipação ocorre apenas nas bordas do sistema. A perturbação é feita localmente e de forma aleatória. As regras de relaxação em duas dimensões são dadas pela expressão (2.6). Duas exceções importantes, bastantes estudadas na literatura, são um modelo introduzido por Zhang em 1989 [17] e um modelo introduzido por Manna [18]. No modelo de Zhang associa-se a cada sítio (i, j) da rede uma variável real $E_{i,j}$. Perturba-se o sistema aleatoriamente acrescentando uma quantidade δE a um sítio escolhido aleatoriamente, isto é, $E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} + \delta E$. Quando algum sítio excede o valor crítico, isto é, $E_{i,j} > E_c$ o sistema relaxa de acordo com

$$\begin{cases} E_{n,n} & \rightarrow E_{n,n} + \epsilon E_{i,j}, \\ E_{i,j} & \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde $\epsilon = 0.25$. O modelo de Zhang, assim como o modelo BTW também é conservativo, com a dissipação ocorrendo apenas nas bordas. Este modelo é estudado para $E_c = 1$ e δE tomado uniformemente no intervalo $[0, 0.5]$. Para $\epsilon < 0.25$ o modelo é não conservativo, deixando de exibir lei de potência. Já no modelo de Manna, também conhecido como modelo de dois estados, a cada sítio da rede é associada uma variável inteira. O sistema é perturbado pela adição de uma grão em um sítio escolhido aleatoriamente. Quando um sítio fica crítico ($z_{i,j} = 2$), este sítio relaxa distribuindo os seus dois

grão para dois vizinhos escolhidos aleatoriamente. Ainda dentro deste grupo é possível uma outra classificação em termos da regra dinâmica local de evolução. Existem os modelos para os quais regras de evolução dependem da diferenças das alturas e aqueles que dependem apenas do valor absoluto da altura. Os modelos cuja as regras da dinâmica dependem apenas da altura possuem propriedades comutativas. Esta propriedades permite que sejam definidos operadores que geram um subgrupo abeliano [19]. Por isso estes modelos são chamados de abelianos. Devido a estrutura de grupo é possível um tratamento analítico de várias propriedades dos modelos abelianos.

Uma outra classe de modelos foi inspirada em modelos mecânicos do tipo massa-mola. Dentro desse grupo, os modelos mais importantes são o modelo Feder e Feder (FF) e o modelo Olami-Feder-Christensen (OFC), propostos dentro do contexto da dinâmica de terremotos. As regras de evolução são totalmente determinísticas, estando o único elemento de aleatoriedade presente nas condições iniciais. A perturbação é global, ou seja, todos os sítios são perturbados ao mesmo tempo e de forma idêntica, isto é,

$$E_{i,j} \rightarrow E_{i,j} + \delta E, \quad (2.16)$$

para todos os sítios (i, j) da rede.

Estes modelos possuem um parâmetro α por meio do qual é possível controlar o grau de dissipação do sistema. Os dois modelos diferem no momento em que os sítios críticos relaxam. Sendo $E_{i,j}$ a variável associada a cada sítio da rede, quando $E_{i,j} > E_c$ temos

$$\begin{cases} E_{n,n} & \rightarrow E_{n,n} + \Delta, \\ E_{i,j} & \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.17)$$

onde $\Delta = \alpha E_{i,j}$ no modelo OFC e $\Delta = \alpha$ no modelo FF. Note que, em duas dimensões e $\alpha = 0.25$, o modelo OFC é conservativo, enquanto o modelo

FF jamais é conservativo. Além disso, para que não sincronize, ao simular o modelo FF é necessário acrescentar um pequeno ruído ao sítio que relaxa. Fortes evidências numéricas parecem demonstrar que tais modelos exibem SOC mesmo quando são dissipativos. Ao longo desta tese retornaremos ao modelo OFC.

Existem modelos que não se enquadram nem na categoria dos modelos com dinâmica local conservativa, nem na categoria dos modelos com dinâmica local não-conservativa. Vamos apresentar dois dos mais importantes dessa classe de modelos. O modelo fogo floresta e o modelo Bak-Sneppen. Inicialmente falaremos do modelo fogo floresta ou FFM. Proposto em 1992 por Drossel e Schwabl [20], suas regras de evolução são estocásticas, não conservativas, e o modelo geralmente é definido em uma rede. Cada sítio da rede pode estar em três estados. Vazio, ocupado por uma árvore ou ocupado por uma árvore em chamas. As condições de contorno são periódicas e a configuração inicial é totalmente aleatória. A dinâmica do modelo é feita de forma paralela de acordo com as seguintes regras:

- a) Um sítio que contém uma árvore em chamas se tornará um sítio vazio na próxima unidade de tempo.
- b) Um sítio vazio pode receber uma árvore verde com probabilidade p .
- c) Um sítio que está com uma árvore verde, desde que não esteja conectada a um outro sítio com uma árvore em chamas, poderá com probabilidade f a tornar-se uma árvore em chamas.

Simulações computacionais e análises teóricas mostram que o modelo FFM exibe invariância de escala quando $p \rightarrow 0$ e $f/p \rightarrow 0$.

Por fim, citaremos o modelo de evolução proposto por Bak Sneppen [21]. Em uma cadeia unidimensional (a generalização para dimensões superiores é

imediate) a cada sítio da rede associa-se uma variável real $x_i \in [0, 1]$. A cada unidade de tempo escolhe-se o sítio com menor x_i . Seu valor é trocado por um outro valor escolhido aleatoriamente no intervalo $[0, 1]$, o mesmo ocorrendo para seus dois vizinhos mais próximos. O conceito de avalanches nesse modelo é um pouco diferente, precisando ser redefinido. O comportamento estatístico originado é bastante rico. Para uma revisão dos principais resultados veja a referência [22]

Finalmente também é interessante citar uma classe de modelos que denominaremos de modelos de vizinhos aleatórios. Estes modelos, em geral, são modelos derivados de outros modelos definidos em uma rede. Enquanto nos modelos definidos em uma rede, ao relaxar, o sítio distribui sua energia para vizinhos mais próximos, nos modelos de vizinhos aleatórios os sítios que recebem a energia são escolhidos aleatoriamente. Esta propriedade permite que resultados analíticos sejam obtidos, sendo estes modelos uma espécie de versão de campo médio dos modelos correspondentes definidos em uma rede.

2.5 Críticas ao conceito de SOC

O termo criticalidade auto-organizada é amplamente utilizado, porém ainda hoje seu significado é vago e pouco preciso. Originalmente, a idéia era de que certos sistemas atingiriam um estado crítico sem necessidade de ajustes externo em algum parâmetro do sistema. O estado crítico seria caracterizado por invariância de escala e a distribuição espectral de potência associada a resposta do sistema (avalanches) teria um comportamento descrito por $1/f^\varphi$, onde $\varphi \approx 1$. O surgimento de estruturas fractais e do ruído $1/f$ seria consequência natural da dinâmica de sistemas criticamente auto-organizados. Como visto neste capítulo, tais idéias foram testadas em um automato celular denom-

inado modelo BTW. Pouco após o surgimento da teoria, porém, uma série de trabalhos vieram obscurecer a aplicabilidade desta. Jensen, Christensen e Fogedby [23] mostram que o modelo BTW exhibe ruído $1/f^2$ (conhecido como ruído browniano) ao invés do ruído $1/f$, como exposto no trabalho original de Per Bak e colaboradores [1]. Kadanoff e colaboradores apresentam uma série de modelos unidimensionais com comportamento altamente complexo [16], violando a proposta original de Per Bak de que SOC seria um comportamento característico de sistemas de duas ou três dimensões. Diversos experimentos realizados com pilhas de areia reais mostram que o comportamento das pilhas reais é muito mais complexo do que uma simples lei de potência. Em face desses resultados não é mais possível encarar SOC como uma teoria geral capaz de explicar a vasta ocorrência de estruturas fractais e do ruído $1/f$. Resta ainda o apelo do estado crítico atingido sem ajustes externo, em oposição a transições de fase de segunda ordem, onde o sistema só atinge o estado crítico se algum parâmetro externo for ajustado (campo magnético, temperatura, etc.). Porém, aqui residem duas ambiguidades. O termo auto-organização é empregado em uma série de fenômenos distintos, com o intuito de expressar a idéia de que uma certa ordem ou padrão surge espontaneamente. No entanto, quando colocado sobre o ponto crítico, qualquer que seja a configuração inicial, após certo tempo, o modelo de Ising atinge uma configuração ordenada sem que este fato seja mencionado como auto-organizado. No caso de SOC, como tem sido apontado por vários autores [24], [25] e [26], para que o sistema atinja a criticalidade é necessário que a taxa de perturbação do sistema seja ajustada a zero (o que equivale a uma separação infinita na escala de perturbação e relaxação do sistema). Este ajuste estaria oculto na definição dos modelos. A implementação deste ajuste em modelos computacionais é muito fácil, já que consiste em uma

separação infinita nas escalas temporais. Em realizações experimentais, por sua vez, este ajuste não é tão fácil de ser realizado.

Capítulo 3

O modelo Olami-Feder e Christensen

3.1 Aspectos gerais sobre terremotos

É comum os meios de comunicação veicularem notícias a respeito de terremotos (medidos com certa intensidade em uma escala conhecida como escala Richter) ocorridos em lugares como México, Turquia, Japão ou Chile. O que talvez a maior parte das pessoas não saiba é que a maioria dos terremotos não ocorrem em pontos aleatórios no globo terrestre, mas em regiões bem determinadas. Essas regiões quase sempre possuem grande atividade sísmica como atividade vulcânica e a presença de grandes cadeias de montanhas. Certamente estes não são fatos isolados e serviram de ponto de partida para a teoria das placas tectônicas [27]. Esta teoria é a mais aceita para a explicação da maioria dos terremotos (é importante salientar que terremotos podem ser causados por outros fatores como atividade vulcânica ou a explosão de um artefato nuclear).

Para entender a teoria das placas tectônicas é preciso conhecer a estrutura

interna da Terra. Com base em informações obtidas a partir de investigações sísmicas, a Terra pode ser dividida em três zonas principais: crosta, manto e núcleo [28]. A zona mais externa é a crosta, camada sólida constituída de diversos minerais. Os continentes e o leito oceânico formam a crosta, cuja espessura varia de 30km a 40km sob os continentes (esta espessura pode chegar a 70km sob as grandes montanhas) e 10km em média sob o leito oceânico. Em seguida encontramos o manto, uma larga camada, constituída principalmente de rocha densa e óxidos metálicos. O manto ocupa aproximadamente 80% do volume do globo terrestre. O núcleo é a porção central, com um raio de cerca de 3400 km e temperaturas da ordem de 6000 °C, formado basicamente por metais (principalmente Níquel e Ferro). O núcleo pode ser dividido em núcleo interior e núcleo exterior. Devido às altas pressões, o núcleo interior é sólido, enquanto que o núcleo exterior se apresenta sob a forma líquida.

A crosta e a parte mais externa do manto formam a litosfera, região onde se concentram todos os terremotos, com espessura variando de 50km a 200km. A litosfera repousa sobre a astenosfera. Devido as altas temperaturas e pressões, a astenosfera se comporta como um fluído viscoso para tempos geológicos (da ordem de milhões a bilhões de anos) e como um sólido elástico para tempos curtos (isto é, de segundos a minutos). A litosfera é formada por várias placas, que se formam devido a transições de fases ocasionadas pelas diferenças de temperaturas entre as várias camadas. Cada placa consiste em enormes blocos de rocha, e estão se movimentando horizontalmente umas em relação às outras, muito lentamente. O movimento das placas é induzido por correntes de convecção que ocorrem na astenosfera, devido as altas temperaturas existentes nesta região. O movimento relativo causa colisões entre as placas (Figura 3.1 B), que ocasionam deformações nas suas bordas. As

tensões nas bordas das placas são lenta e gradualmente acumuladas durante centenas, milhares de anos. Quando o limite de resistência da rocha é excedido, ocorre um movimento repentino e rápido entre as duas placas (Figura 3.1 C). A energia liberada é convertida em calor e ondas elásticas que se propagam pela crosta terrestre provocando tremores de terras ou terremotos, causando mortes e consideráveis perdas materiais.

O plano onde ocorre o deslizamento das placas é denominado de falha geológica. Apesar de menos frequente, é possível haver falha geológica no interior de uma placa tectônica (Veja a Figura 3.2) que muitas vezes nem chega a superfície. Os sismos originados em falha geológica intraplaca, com raras exceções, são de pequeno poder de destruição. O ponto sobre a falha geológica a partir do qual se inicia a liberação da energia acumulada é denominado de hipocentro. Sua projeção até a superfície corresponde ao epicentro. A distância entre o hipocentro e o epicentro é denominado de distância focal.

As ondas sísmicas geradas durante a ruptura da rocha podem ser divididas em dois grupos quanto ao meio de propagação. As ondas que se propagam pelo interior da Terra podem ser longitudinais (ondas P) ou transversais (ondas S) [29]. A velocidade de propagação das ondas P é maior que a velocidade de propagação das ondas S. Temos dois tipos de ondas que se propagam próximo à superfície da Terra: as ondas Love, que correspondem a uma superposição de várias ondas S com vibrações horizontais, e as ondas Rayleigh, que são uma combinação de ondas S e P.

3.1.1 Magnitude

Existem diversos registros de grandes abalos sísmicos ocorridos ao longo da história da humanidade. Civilizações de elevado grau de desenvolvimento

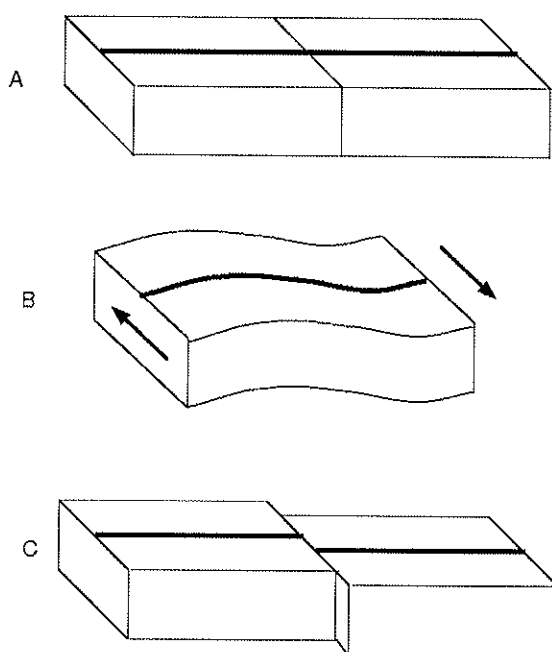


Figura 3.1: Figura esquemática mostrando o mecanismo básico que ocasiona os terremotos: A - as placas tectônicas se movem em direção oposta e tensão é acumulada nas bordas da placa. B - as placas não suportam a tensão. Ocorre um rápido e brusco deslocamento das placas. A energia acumulada é liberada rapidamente em formas de ondas elásticas que propagam em todas as direções (terremotos). C - todo o processo se inicia novamente.

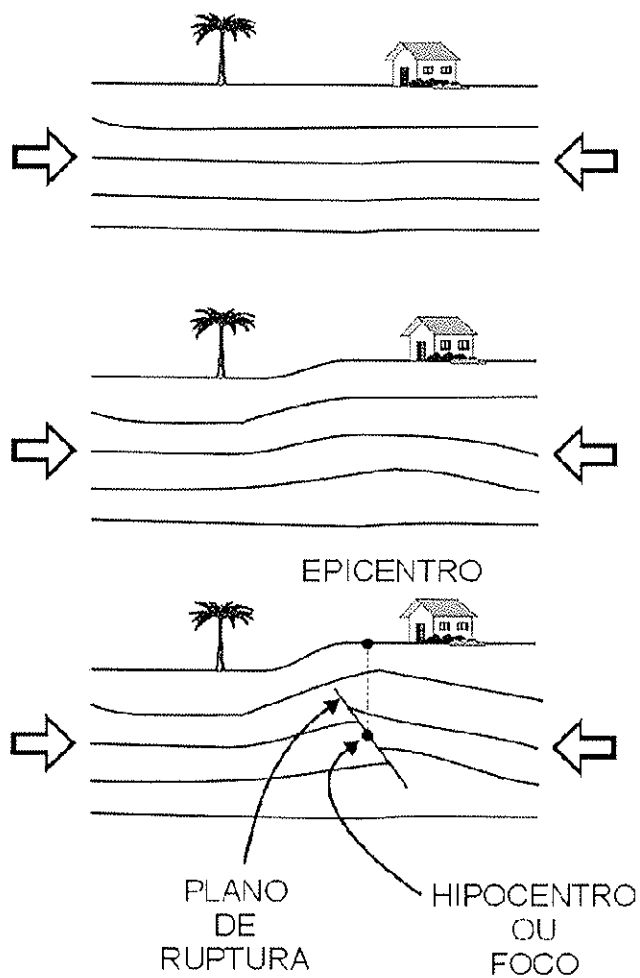


Figura 3.2: Esta Figura mostra esquematicamente o surgimento de uma falha geológica intraplaca.

floresceram em regiões sujeitas a tremores de terra. Exemplos dessas civilizações podem ser encontradas na China, Grécia, Índia, Japão, México, Pérsia e Roma, dentre outras. Algumas dessas regiões foram habitadas continuamente até os dias de hoje. De uma forma ou de outra, o homem sempre tentou entender os mecanismos que provocam o surgimento de terremotos. Um velho sonho é o de poder prever quando vai ocorrer o próximo terremoto. As tentativas iniciais de entendimento do fenômeno estiveram envoltos em lendas e superstições. Durante um longo período a descrição dos terremotos foi feita de uma forma totalmente subjetiva, baseada prioritariamente nos estragos causados.

Um grande passo foi dado quando, há cerca de 2000 anos atrás, os chineses inventaram um aparelho que era capaz de registrar tremores de terra. Desde esse período, o sismógrafo sofreu uma série de aperfeiçoamentos, praticamente adquirindo sua versão moderna em 1890.¹ É com base em amplitudes de ondas sísmicas registradas por sismógrafos, que C. F. Richter introduz em 1935, a idéia de escala de magnitudes de terremotos como uma medida de intensidades desses fenômenos. Até então os terremotos continuavam sendo medidos através dos estragos causados.

Dispondo de diversos registros sismográficos feitos em estações do sul da Califórnia, Richter propôs comparar os diversos terremotos por meio das amplitudes das ondas sísmicas, acrescentando um termo de atenuação para levar em conta a distância entre a estação e o epicentro do terremoto.² No

¹Os sismógrafos modernos amplificam e registram qualquer vibração do solo (em períodos da ordem de 0.1 a 100 segundos) em função do tempo. São capazes de registrar tremores de terra de qualquer natureza (um terremoto, a passagem de um caminhão, a explosão de uma ogiva nuclear, etc.).

²É possível determinar a localização do epicentro de um terremoto a partir de dados de três estações sismográficas localizadas em três pontos distintos.

entanto, não foi fácil encontrar um fator de atenuação satisfatório. Inspirado em um trabalho do professor K. Wadi, que comparava diferentes terremotos representando graficamente a amplitude máxima das ondas sísmica versus a distância até o epicentro, Richter decidiu empregar o mesmo procedimento em seus dados. Como havia uma variação muito grande entre os grandes e pequenos terremotos, o Dr. Beno Gutenberg sugeriu o uso de logaritmos, o que permitiu a Richter encontrar facilmente a curva de atenuação. Ao longo de 50 anos a escala de magnitudes originalmente proposta por Richter sofreu uma série de alterações [30]. Existem várias fórmulas para o cálculo da magnitude de um terremoto que dependem do tipo de onda sísmica que é medida. Abaixo apresentamos uma das fórmulas mais usadas [31], que consiste em uma generalização da escala de magnitude original proposta por Richter:

$$M_s = \log(A/T) + 1.66 \log \Delta + 2.0, \quad (3.1)$$

onde A é a amplitude da onda superficial Rayleigh (μm) com período em torno de 20 s, e Δ é a distância angular epicentral em graus (corresponde ao ângulo no centro da Terra entre o epicentro e a estação sísmica).

A escala de magnitude proposta por Richter apresenta o inconveniente de ser totalmente empírica, não levando em consideração os mecanismos básicos de ocorrência dos terremotos. O desenvolvimento da sismologia, o surgimento de computadores mais rápidos, a eficiência e rapidez dos modernos meios de comunicação, que permitem a rápida troca de informação entre as estações sísmicas ao redor do mundo, tornou factível medir os tamanhos dos terremotos a partir do momento sísmico, definido por [32]

$$M_o = \int_{\Omega} d\Omega \mu u, \quad (3.2)$$

onde μ é o módulo de cisalhamento da rocha, u é o movimento relativo de um dos lados da falha com relação ao outro lado e Ω é a área da falha. Uma

nova escala de magnitude pode então ser definida [33]

$$M_W = \frac{2}{3} \log M_o - 10.7, \quad (3.3)$$

que permite uma medida mais precisa da magnitude dos terremotos, pois é baseada em processos físicos que ocorrem durante o terremoto.

3.1.2 Energia

A quantidade de energia irradiada pelas ondas sísmicas oferece uma medida do poder de destruição de um terremoto, principalmente em estruturas feitas pelo homem. A determinação precisa da energia irradiada por um terremoto envolveria a soma de diversos fluxos de energia, considerando um amplo espectro de frequências correspondentes às ondas sísmicas geradas pelo terremoto. Devido às limitações dos equipamentos de medida, as estimativas de energia irradiada por um terremoto são feitas por meio de uma relação empírica estabelecida por Gutenberg e Richter [34]:

$$\log E = c + dm, \quad (3.4)$$

onde $c \approx 11$, d é igual 1 para pequenos terremotos e $3/2$ para grandes terremotos e m é magnitude do terremoto.

Gutenberg e Richter também estabeleceram que a relação entre a quantidade de terremotos N com magnitude m maior que m_o e a magnitude obedece uma lei de potência [35]

$$\log N = a - bm. \quad (3.5)$$

O parâmetro a mede o nível de atividade sísmica da região, variando entre 0.8 e 1.06 para pequenos terremotos e de 1.23 até 1.54 para grandes terremotos. A lei é denominada lei de Gutenberg-Richter, sendo uma das mais importantes leis empíricas da sismologia.

As expressões (3.5) e (3.4) permitem obter uma relação entre a quantidade de terremotos e a energia irradiada

$$N(E_o > E) \sim E^{-\frac{b}{a}} = E^{-B}, \quad (3.6)$$

onde B é praticamente constante para todos os terremotos (grandes e pequenos) variando entre 0.80 e 1.05.

3.2 Criticalidade auto-organizada e terremotos

Diversos autores têm apontado a dinâmica dos terremotos como uma possível realização experimental da teoria da criticalidade auto-organizada, justificando a hipótese por meio das diversas similaridades entre os dois fenômenos. Tendo como ponto de partida a teoria das placas tectônicas para uma explicação da origem dos terremotos, podemos identificar os seguintes aspectos em comum entre as duas teorias:

- (a) Na teoria da criticalidade auto-organizada há uma lenta e permanente perturbação do sistema. Na dinâmica dos terremotos a perturbação do sistema ocorre através do lento movimento das placas tectônicas, originado pelas correntes de convecção que ocorrem no manto.
- (b) Os sistemas exibindo SOC possuem duas escalas temporais distintas. Uma lenta, onde o sistema é perturbado, e outra rápida, onde o sistema relaxa. O mesmo ocorre nos terremotos, onde existe um lento e gradual acúmulo de tensão nas bordas das placas tectônicas durante centenas, milhares de anos (escala lenta), que resulta numa rápida liberação da energia que provoca ondas sísmicas que se propagam pelo interior e

superfície da terra, correspondendo ao terremoto, que ocorre em um tempo da ordem de minutos (escala rápida).

- (c) Leis de potência (a marca registrada de SOC) e propriedades fractais estão presentes nos sistemas que exibem criticalidade auto-organizada. Os terremotos apresentam diversas leis de potência, sendo a mais famosa a lei de Gutenberg-Richter. Também podemos citar a estrutura fractal exibida pelas falhas e pela distribuição espacial dos epicentros.
- (d) Uma característica comum a todos os modelos com SOC é a presença de um valor limiar, que, quando superado, dá início ao processo de avalanche. No mecanismo proposto pela teoria das placas tectônicas também existe um limiar, que corresponde à resistência da rocha a esforços.

A suposta conexão entre SOC e terremotos fez renascer o interesse em um modelo introduzido em 1967 por Burridge e Knopoff [36]. Uma versão bidimensional deste modelo, que denominaremos modelo BK, consiste em um conjunto de vários blocos conectados entre si por meio de molas (veja a Figura 3.3). Cada bloco também está ligado a uma placa superior móvel por meio de uma mola e pode escorregar com atrito sobre outra placa inferior estacionária. De acordo com Burridge e Knopoff este conjunto de blocos e molas descreveria adequadamente o processo de acúmulo/descarga de tensão que ocorre nas bordas das placas tectônicas durante um terremoto. O exato momento em que o limiar de resistência da rocha é excedido, e as placas se movem abruptamente (veja Figura 3.1), corresponderia, no modelo BK, ao momento em que as forças elásticas que atuam sobre um dos blocos excedem o limiar do atrito estático e o bloco começa a deslizar. O deslizamento de um bloco aumenta/diminui sua distância com seus vizinhos. Isto aumenta a força

elástica sobre ele (tendendo a freá-lo) o que diminui sua velocidade, até que a força de atrito estático equilibra a força elástica novamente. No entanto, esse movimento pode induzir o movimento de outros blocos, o que segundo Burridge e Knopoff, corresponderia ao momento em que as superfícies das duas placas estão deslizando uma em relação a outra. Simulações computacionais (para um número muito pequeno de blocos) e experimentos em laboratórios foram realizados. Os resultados mostravam uma lei de potência para pequenos eventos, e um comportamento quase-periódico para grandes eventos.

O modelo BK foi novamente retomado pelos físicos em 1989, quando Carlson e Langer consideraram uma versão determinística [37]. Resolvendo simultaneamente as equações de movimento, eles obtiveram leis de potência para pequenos eventos e um comportamento quase periódico para grandes avalanches. Tentando evitar os longos tempos de simulação da versão de Carlson e Langer, Nakanishi simplificou a dinâmica do sistema, discretizando o tempo, obtendo um conjunto de mapas acoplados [38]. Além disso, computacionalmente é mais fácil simular um conjunto de mapas acoplados do que resolver o conjunto de equações diferenciais acopladas da versão do modelo proposto por Carlson e Langer. Uma série de versões desses modelos então foram propostos (para uma revisão veja [39]) com pequenas diferenças entre si e que obedecem, em linhas gerais, a dinâmica exposta a seguir.

3.2.1 Modelos massa-mola para terremotos

Em duas dimensões o modelo consiste em um conjunto de blocos idênticos dispostos sobre uma placa fixa formando uma rede quadrada. Cada bloco está conectado a uma placa móvel superior por meio de uma mola de constante elástica K_L e sofre efeito do atrito estático com a placa fixa. Todos os blocos

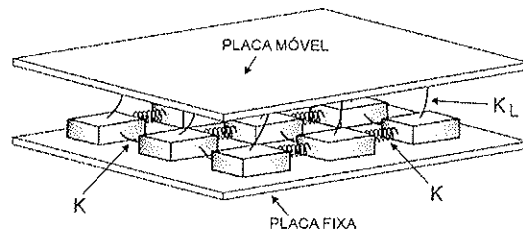


Figura 3.3: Sistema massa-mola da versão bidimensional do modelo Burridge-Knopoff.

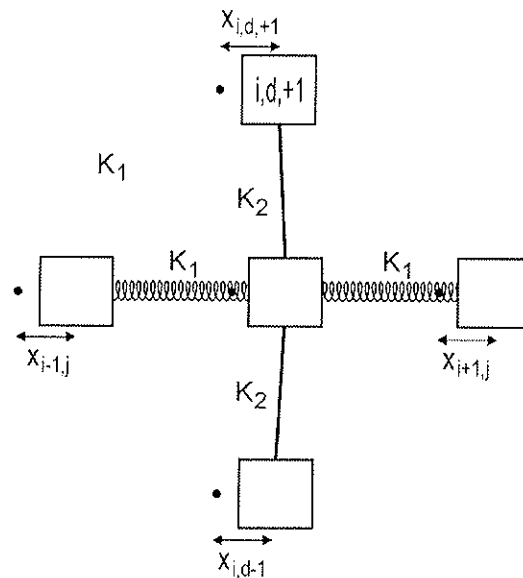


Figura 3.4: Detalhe de um bloco (i, j) com os seus primeiros vizinhos do sistema massa-mola da versão bidimensional do model de Burridge-Knopoff.

estão conectados entre si por meio de molas de constante elástica K_1 e K_2 (veja as Figuras 3.4 e 3.3), onde $K_1 \neq K_2$ corresponde a situação mais geral possível. Identificaremos cada bloco pelo par de inteiros (i, j) , que definem a posição do bloco na rede. A placa superior se move lentamente em relação a placa fixa com velocidade relativa constante v . Um bloco na posição $x_{i,j}$, sofre portanto uma força

$$\begin{aligned} F_{i,j} = & K_1(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} - 2x_{i,j}) \\ & + K_2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1} - 2x_{i,j}) \\ & + K_L(vt - x_{i,j}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

devido a ação das molas. Esta força aumenta a cada unidade de tempo em consequência do movimento relativo entre as placas. O bloco (i, j) permanecerá em repouso até que a força $F_{i,j}$ exceda o limite máximo para a força de atrito estático F_{th} . Quando isto ocorre, o bloco (i, j) desliza para uma nova posição $x'_{i,j}$, com consequente diminuição de energia potencial. Supõe-se que apenas o bloco (i, j) se move, permanecendo todos os outros blocos em repouso. Em sua nova posição $x'_{i,j}$, a força exercida pelas molas sobre o bloco (i, j) é agora

$$\begin{aligned} F'_{i,j} = & K_1(x_{i-1,j} + x_{i+1,j} - 2x'_{i,j}) \\ & + K_2(x_{i,j-1} + x_{i,j+1} - 2x'_{i,j}) \\ & + K_L(vt - x'_{i,j}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

e a variação da força elástica agindo sobre o bloco (i, j) é dado então por:

$$\delta F_{i,j} = F_{i,j} - F'_{i,j} = (2K_1 + 2K_2 + K_L)(x'_{i,j} - x_{i,j}). \quad (3.9)$$

O deslizamento do bloco (i, j) causa ainda a variação nas forças elásticas que agem sobre seus vizinhos mais próximos. Não é difícil verificar que, após o

deslizamento, as forças sobre os primeiros vizinhos do sítio (i, j) são

$$\begin{aligned} F'_{i,j\pm 1} &= F_{i,j\pm 1} + K_2(x'_{i,j} - x_{i,j}), \\ F'_{i\pm 1,j} &= F_{i\pm 1,j} + K_1(x'_{i,j} - x_{i,j}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando a expressão (3.9) podemos eliminar $(x'_{i,j} - x_{i,j})$ das expressões acima.

Assim,

$$\begin{aligned} F'_{i,j\pm 1} &= F_{i,j\pm 1} + \frac{K_2}{2K_1 + 2K_2 + K_L} \delta F_{i,j}, \\ F'_{i\pm 1,j} &= F_{i\pm 1,j} + \frac{K_1}{2K_1 + 2K_2 + K_L} \delta F_{i,j}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Essas expressões nos dizem que, quando um bloco desliza para uma nova posição, uma fração da variação de força $\delta F_{i,j}$ sofrida na força $F_{i,j}$ que atuava sobre o bloco é redistribuída para seus primeiros vizinhos. Caso a resultante das forças elásticas exercida sobre esses primeiros vizinhos exceda a força de atrito estático, novos deslizamentos ocorrerão.

Como não dispomos do conhecimento da variação $\delta F_{i,j}$, devemos deduzí-la, obviamente baseando-nos em argumentos físicos. Abre-se assim a possibilidade de definição de uma classe de modelos do tipo

$$F_{i,j} \rightarrow F'_{i,j} = \phi(F_{i,j} - F_{th}) \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} F'_{i,j\pm 1} &= F_{i,j\pm 1} + \alpha_2(F_{i,j} - F'_{i,j}), \\ F'_{i\pm 1,j} &= F_{i\pm 1,j} + \alpha_1(F_{i,j} - F'_{i,j}), \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde a função $\phi(x)$ descreve como a força será relaxada quando algum sítio da rede exceder o limiar F_{th} , isto é, $F_{i,j} > F_{th}$ e deve satisfazer as condições:

$$\begin{aligned} \phi(0^+) &= F_{th} - \delta F \\ |\phi(x)| &< F_{th}, \text{ para } x > 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde δF é o menor evento possível (que ocorre quando apenas um único bloco está envolvido [38]). Os parâmetros $\alpha_{1,2}$ são dados por

$$\alpha_{1,2} = \frac{K_{1,2}}{2K_1 + 2K_2 + K_L}. \quad (3.15)$$

As regras de relaxamento são muito parecidas com as do modelo BTW. No entanto, para $K_L > 0$ a quantidade $F_{i,j}$ não é conservada. Após um deslizamento de um sítio que excedeu o limiar de atrito estático F_{th} , a variação total de forças no sistema é

$$\Delta F = (2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 1)(F'_{i,j} - F_{i,j}). \quad (3.16)$$

Para que houvesse conservação com relação a redistribuição de forças, seria necessário que $2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 1$. No entanto, isso significa $K_L = 0$, que fisicamente corresponde a um desacoplamento da placa superior móvel, deixando de haver perturbação do sistema. Assim não é possível haver conservação com relação a redistribuição de forças no modelo BK.

O modelo OFC é obtido quando $\phi(0) = 0$. Este vínculo significa que, ao deslizar, o bloco retorna para sua posição de equilíbrio. Também consideramos apenas o caso isotrópico, isto é, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, o que corresponde a $K_1 = K_2 = K$, sendo α dado por

$$\alpha = \frac{K}{4K + K_L} \quad (3.17)$$

e a expressão (3.16) se reduz a

$$\Delta F = (1 - 4\alpha)F_{i,j}. \quad (3.18)$$

O modelo é conservativo para $\alpha = 1/4$, o que corresponde a $K_L = 0$, que como visto no parágrafo anterior corresponde a desacoplar a placa móvel superior.

3.3 O modelo Olami-Feder-Christensen

O modelo Olami-Feder-Christensen (OFC) é o modelo mais conhecido e estudado da classe dos modelos massa-mola. Foi originalmente definido em uma

rede quadrada com $N = L^2$ sítios. A cada sítio (i, j) da rede associamos uma variável F_{ij} , que pode ser interpretada como tensão ou energia. Inicialmente os F_{ij} 's assumem valores distribuídos aleatoriamente no intervalo $[0, F_{th}]$. A tensão ou energia F_{ij} é então aumentada lentamente e de maneira uniforme em toda a rede. Em algum momento, para algum sítio (i, j) da rede, F_{ij} se torna maior que o limiar F_{th} . Dizemos que o sítio tornou-se crítico ou instável (vamos representar este sítio por F_{ij}^*). O sistema deixa então de ser perturbado e relaxa de acordo com as seguintes regras,

$$\begin{aligned} F_{nn} &\rightarrow F_{nn} + \alpha F_{ij}^*, \\ F_{ij}^* &\rightarrow 0, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde F_{ij}^* é a tensão do sítio crítico, nn indica as coordenadas de seus primeiros vizinhos e α é um parâmetro que controla a dissipação no sistema, estando definida no intervalo $[0, 1/4]$. Esta redistribuição de energia pode fazer com que um ou mais dos sítios vizinhos ao sítio (i, j) se tornem críticos. As regras (3.19) são então novamente aplicadas, até que todos os sítios da rede estejam estáveis novamente, isto é, $F_{ij} \leq F_{th} \forall (i, j)$. A este processo denominamos de avalanche (ou terremoto). O tamanho de uma avalanche é igual ao número de relaxamentos que ocorrem durante o processo de relaxação.

As condições de contorno desempenham um papel importante nos modelos de criticalidade auto-organizada, pois, dependendo da condição de contorno adotada, o sistema pode nem exibir invariância de escala. Determinar as condições de contorno implica em especificar de que forma os sítios da borda, que possuem um número menor de vizinhos, vão redistribuir sua energia, caso venham a ficar críticos. No modelo OFC isso pode ser feito determinando que sítios críticos, pertencentes à borda, ao redistribuírem sua energia o façam com $\alpha = \alpha_{borda}$, podendo α_{borda} assumir valores diferentes daquele usado no interior da rede. Cada condições de contorno corresponde

a um determinado valor de α_{borda} , existindo assim a possibilidade de uma infinidade de condições de contorno. Se Retornarmos ao modelo massa-mola, de onde é inspirada as regras de evolução do modelo OFC, veremos que existem duas situações limites em se tratando de condições de contorno. A primeira situação é considerar que cada bloco pertencente a alguma das bordas, esteja conectado apenas aos blocos que estão sobre a placa estacionária. Podemos implementá-la impondo $\alpha_{borda} = 1/(1 - \alpha)$ para sítios da borda com três vizinhos e $\alpha_{borda} = 1/(1 - 2\alpha)$ para os sítios do canto que possuem dois vizinhos apenas.³ Esta condição de contorno é denominada livre. A outra situação limite ocorre se supusermos que cada bloco da borda está conectado a um bloco imaginário por meio de uma mola de constante elástica K . Assim, ao relaxar o sítio da borda vai redistribuir uma fração de energia para este sítio. Este tipo de condição de contorno, que denominaremos de aberta é implementada fazendo $\alpha_{borda} = \alpha$, sendo portanto, mais dissipativa que a condição de contorno livre. De um modo geral, em nossas simulações do modelo OFC, usamos sempre condições de contorno abertas.

Apesar das regras de evolução do modelo OFC serem muito parecidas com as regras de evolução do modelo BTW, existem algumas diferenças. No modelo OFC, durante o processo de relaxação, ao contrário do que ocorre no modelo BTW para pilha de areia, $F_{ij}^* \rightarrow 0$ (no BTW, $z_i^* \rightarrow z_i^* - z_c$). O modelo OFC é não abeliano (no sentido definido por Dhar [40]), e a atualização do sistema deve necessariamente ser feita de forma paralela. Além disso, cada vez que um sítio crítico (i, j) relaxa, há um decréscimo na tensão

³Em um sistema massa-mola (modelo BK) isotrópico quando um bloco da borda desliza, por exemplo o bloco na posição (i, L) , a redistribuição de forças para seus três vizinhos é $F'_{nn} = F_{nn} + K(\delta F_{1,L})/(3K + K_L)$. Quando o sistema é isotrópico $\alpha = K/(4K + K_L)$ e então $\alpha/(1 - \alpha) = K/(3K + K_L)$. Definindo $\alpha_{borda} = \alpha/(1 - \alpha)$, podemos reescrever a redistribuição de forças nos vizinhos como $F'_{nn} = F_{nn} + \alpha_{borda}\delta F_{1,L}$.

total do sistema de $(1 - 4\alpha)F_{ij}$. Para $\alpha < 1/4$ o sistema é dissipativo mesmo quando o sítio crítico pertence ao interior da rede. Outra diferença importante entre este modelo e o modelo BTW é que suas regras de evolução são determinísticas, sendo a única aleatoriedade a da configuração inicial.

3.4 Simulações

3.4.1 Introdução

A simulação do modelo OFC se inicia com o sorteio de uma configuração aleatória. Cada sítio recebe uma energia F_{ij} que está no intervalo $[0, F_{th}]$. Em nossas simulações assumimos $F_{th} = 1$, o que não afeta a generalidade dos nossos resultados. O passo seguinte é perturbar o sistema. De acordo com a definição do modelo deveríamos acrescentar a mesma pequena perturbação $\delta = dF_{ij}/dt$ a todos os sítios da rede, até que algum sítio torne-se igual ou exceda F_{th} . No entanto, um pouco de reflexão nos mostra que o sítio que vai tornar-se crítico é aquele sítio que possui a maior tensão F_{max} dentre todos os sítios da rede. O acréscimo, em um único passo de tempo, de $\Delta = F_{th} - F_{max}$ a todos os sítios da rede permite economizar algum tempo de simulação.

Nas simulações também é conveniente manter uma lista dos sítios ativos, isto é, dos sítios que acabam de se tornar críticos. Nesses modelos, na maior parte do tempo, apenas poucos sítios participam do processo de avalanches. Ao manter listas dos sítios ativos evita-se percorrer toda a rede a cada busca de sítios críticos, ganhando-se eficiência.

3.4.2 Estratégias para identificação do regime estacionário

Invariância de escala sem ajuste fino externo constitui a marca registrada de criticalidade auto-organizada. Os sistemas que exibem SOC só começam a manifestar invariância de escala após um período de tempo (um certo número de avalanches), que depende da configuração inicial e que corresponde a um regime transiente. O sistema entra então em um estado estatisticamente estacionário, onde as grandezas macroscópicas flutuam em torno de um valor médio. O tempo gasto para atingir o estado estacionário pode ser bem grande. A identificação do regime estacionário constitui, portanto, um primeiro passo na simulação desses modelos.

Seguindo a definição de SOC, a primeira possibilidade que se apresenta na identificação do início do regime estacionário é a de fazê-la pelo monitoramento da evolução temporal (isto é, após cada avalanche) da tensão média na rede, definida por

$$F_t = \frac{1}{L^2} \sum_{(ij)} F_{ij}, \quad (3.20)$$

onde L é o tamanho da rede considerada e a somatória acima efetuada sobre todos os sítios da rede. Enfatizamos que aquilo que chamamos de “tempo” corresponde ao número de avalanches que o sistema sofre, sendo t uma grandeza discreta. Uma vez alcançado o regime estacionário, esperamos que F_t flutue em torno de um valor médio. Na Figura 3.5 vemos a evolução temporal da tensão média na rede para o modelo OFC, em uma rede de comprimento linear $L = 256$ e em duas situações distintas. O gráfico com a linha mais grossa representa o caso conservativo ($\alpha = 0.25$), enquanto o gráfico com a linha mais fina mostra a evolução do sistema quando há a presença de um pequeno grau de dissipação ($\alpha = 0.249$). Observando a Figura 3.5 podemos perceber que, quando o sistema é conservativo, é fácil determi-

nar o início do regime estacionário. A tensão média na rede cresce, quase linearmente, até um certo momento, quando passa a flutuar em torno de um valor médio. No entanto, o acréscimo de uma quantidade mínima de dissipação muda completamente esse panorama. Agora a tensão média na rede cresce rapidamente até um certo valor, decrescendo logo em seguida. Volta então a crescer muito lentamente, até um certo momento quando começa a flutuar em torno de um valor médio (veja a Figura 3.6). Para $\alpha < 0.25$ ocorre um aumento significativo do tempo associado ao transiente. Este aumento está diretamente relacionado com a presença de dissipação local, como pode ser visto nas Figuras 3.5 e 3.6. Para $\alpha = 0.25$ a dissipação no sistema ocorre apenas nas bordas, o que torna possível o surgimento de avalanches de tamanho maior. No entanto, quando há dissipação local, uma quantidade maior de energia é dissipada pelo sistema e, em consequência, as avalanches são menores. Como o mecanismo que cria as correlações espaciais são as avalanches, há um aumento do tempo de transiente, que é justamente o tempo necessário para o sistema formar as correlações espaciais, responsáveis pela invariância de escala no sistema. Portanto, quanto mais dissipativo for o sistema, maior será o tempo que o sistema levará para atingir o regime estacionário. Salientamos também que quanto maior for o tamanho da rede considerada, maior será o tempo até o sistema atingir o regime estacionário. Redes de tamanho maiores implicam uma área maior que precisa ser varrida pelas avalanches a fim de que as correlações espaciais sejam formadas.

O rápido crescimento do transiente, em função do grau de dissipação e do tamanho da rede, torna pouco eficiente e muito custosa a determinação do regime estacionário pelo simples monitoramento da tensão média na rede F_t após cada avalanche. Tempos de transiente cada vez maiores implicam séries temporais cada vez maiores e portanto difíceis de serem manipuladas. Além

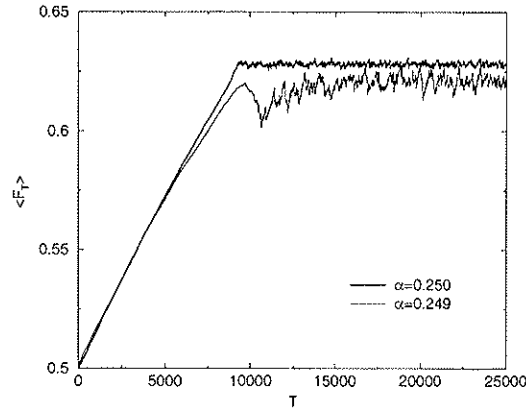


Figura 3.5: Evolução temporal da tensão média na rede no modelo OFC, para $L = 256$, $\alpha = 0.25$ e 0.249 .

disso é necessário bastante espaço em disco para armazenar todos os pontos destas séries. Outro obstáculo são as flutuações locais, que surgem e tendem a crescer à medida que o parâmetro α decresce, mascarando o início do regime estacionário. Estas dificuldades podem ser contornadas usando o fato de que o regime estacionário é caracterizado por equilíbrio estatístico. Portanto, flutuações locais não trazem informação a respeito da estacionariedade do sistema. Dessa forma, não perdemos informação alguma se, ao invés de mantermos toda a série F_t , guardamos apenas as médias dos F_t 's a cada intervalo de τ avalanches, isto é,

$$f_t = \frac{1}{\tau} \sum_{t' = t - \tau + 1}^t F_{t'}, \quad (3.21)$$

onde t é múltiplo de τ . A tensão média na rede continua sendo calculada após cada avalanche. No entanto, a cada τ avalanches, é feita uma nova média. Esse processo gera uma nova série temporal, $\{f_t : t = 1, 2, \dots, M\}$. Esta série possui um número menor de pontos e, principalmente, menos flutuações locais que a série original $\{F_t : t = 1, 2, \dots, N\}$, como pode ser constatado na Figura 3.7 ($\tau = 1000$ avalanches). Essa figura foi feita com os mesmos

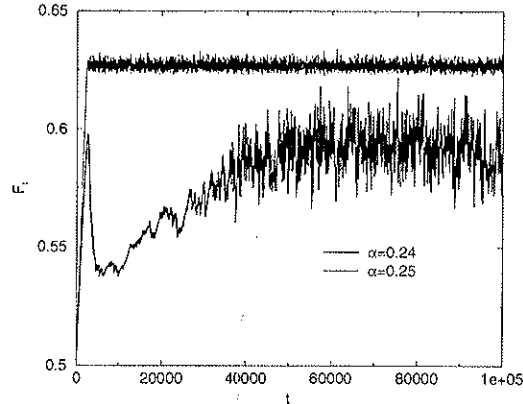


Figura 3.6: Evolução temporal da tensão média na rede no modelo OFC, para $L = 128$, $\alpha = 0.25$ e 0.24 .

dados da Figura 3.6. Comparando as Figuras 3.6 e 3.7 podemos perceber que ambas apresentam a mesma forma geral, sendo que a Figura 3.7 apresenta menos flutuações que a Figura 3.6. A mesma informação é obtida, porém, na construção da Figura 3.7, foram empregados apenas 10^3 pontos, enquanto na Figura 3.6 foram utilizados 10^5 .

Infelizmente o procedimento descrito anteriormente não elimina completamente as flutuações, principalmente para valores menores de α . O efeito das flutuações remanescentes, no entanto, pode ser reduzido por meio do cálculo de médias móveis, que de forma geral pode ser descrito como um filtro que elimina as flutuações de baixa frequência. Na prática, consiste em substituir cada ponto f_t , de uma dada série $\{f_t : t = 1, 2, \dots, M\}$ pela média dos $2W + 1$ pontos centrados em torno do ponto f_t , ou seja,

$$\tilde{f}_t = \frac{1}{2W + 1} \sum_{t'=-W}^W f_{t+t'}. \quad (3.22)$$

Note que, na realização das médias móveis, perdemos W observações em cada extremidade da série. Não existe uma regra geral na escolha do valor

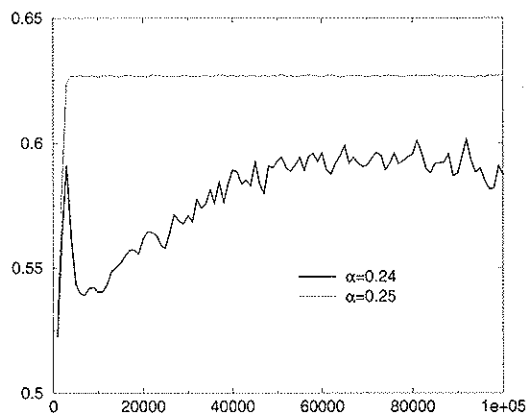


Figura 3.7: Evolução temporal da tensão média na rede no modelo OFC, para $L = 128$ e $\alpha = 0.25$ e 0.24 . Cada ponto corresponde à das tensões média durante $\tau = 1000$ avalanches.

de W , que é feita através de tentativa e erro. Na Figura 3.8 é apresentado os resultados da aplicação de médias móveis para dados oriundos da simulação do modelo OFC em uma rede $L = 200$ e $\alpha = 0.18$. Para este grau de dissipação as flutuações são fortíssimas, por isso mesmo apresentamos apenas os dados após ter sido efetuadas médias móveis, considerando $W = 100$ (linha preta) e $W = 1000$ (linha vermelha). Para $W = 1000$ ocorre uma redução drástica das flutuações, permanecendo apenas a tendência de longo prazo.

Os procedimentos aqui expostos foram utilizados para determinação do transiente não apenas do modelo OFC, mas de todos os outros modelos que foram simulados nesta tese.

3.4.3 Resultados numéricos

Diversas simulações do modelo OFC, para vários tamanhos de rede e graus de dissipação foram realizadas.

Na Figura 3.9 apresentamos a evolução temporal da tensão média na

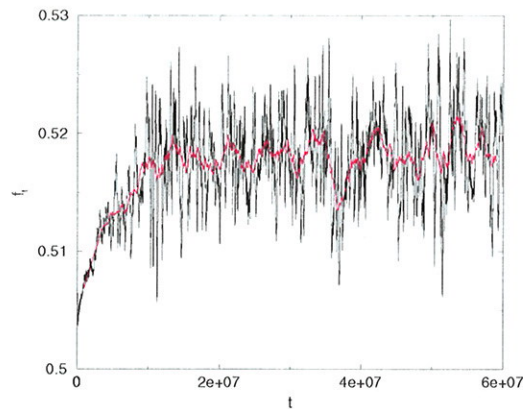


Figura 3.8: Médias móveis aplicadas em dados oriundos da simulação no modelo OFC, $L=200$ e $\alpha = 0.18$. O gráfico com linha preta representa as médias para $W = 100$. O gráfico com linha vermelha foi feito com $W = 1000$.

rede para $\alpha = 0.25$ considerando vários tamanhos de rede. Cada ponto corresponde à média das últimas tensões médias na rede, considerando intervalos regulares de $\tau = 100$ avalanches. Observando a Figura 3.9 percebemos que, à medida que o tamanho da rede cresce, ocorre um aumento do tempo necessário para o sistema atingir o regime estacionário. O valor médio da tensão aumenta levemente, havendo uma pequena diminuição das flutuações. Na Figura 3.10 é feita o mesmo tipo de análise considerando $\alpha = 0.20$. Podemos observar que, também neste caso, há um aumento do tempo de transiente com o aumento do tamanho da rede. No entanto, à medida que o tamanho da rede cresce, temos um leve decréscimo no valor médio da tensão na rede e um aumento nas flutuações.

Uma questão que surge naturalmente é se existe algum tipo de relação entre o tempo necessário para o sistema alcançar o regime estacionário e o tamanho da rede considerada. Para verificar a possível existência dessa relação é necessário um critério que forneça com razoável precisão o momento

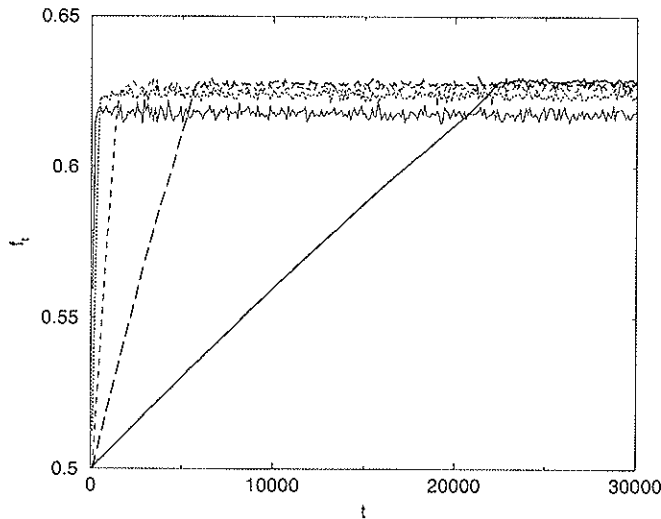


Figura 3.9: Médias das tensões médias no modelo OFC para $\alpha = 0.25$. Da esquerda para direita respectivamente $L = 25, 50, 100, 200$ e 400 .

exato em que o sistema entra no regime estacionário. Obviamente tal critério só poder existir se houver uma maneira de distinguir claramente entre regime transiente e estacionário. Resultados para $\alpha = 0.25$ (veja a Figura 3.5) nos fazem crer, pelo menos para este caso e em situações que o sistema esteja próximo do caso conservativo, que tal critério exista. No entanto, definir este critério não parece ser uma tarefa fácil. Como visto na seção anterior, assumimos que o sistema se encontra no estado estacionário, quando séries temporais de grandezas macroscópicas (geralmente a tensão média na rede) atingem o estado estacionário (isto é, flutuam em torno de um valor médio). Porém, para determinar a estacionariedade de uma série temporal é preciso fazer análises do comportamento da série considerando diversos períodos, o que na prática, para o nosso problema em particular, pode tornar a identificação do regime transiente bastante complicada e trabalhosa.

Tentando contornar complicações de ordem prática, optamos por um procedimento simples e intuitivo ao estimar o tempo associados ao transiente.

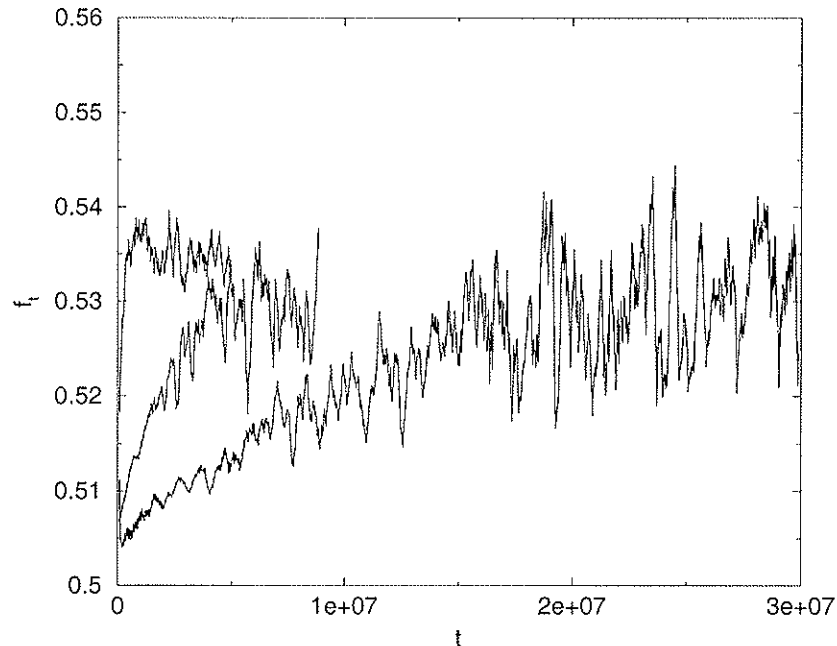


Figura 3.10: Médias das tensões médias no modelo OFC e $\alpha = 0.20$. Da esquerda para direita temos $L = 100, 200$ e 300 .

O procedimento que adotamos está esquematizado abaixo:

- a) Simulamos o modelo OFC para vários tamanhos de rede e valores de α guardando sempre f_t (veja expressão (3.21)). Quando preciso, médias móveis eram efetuadas.
- b) Através de uma inspeção visual em um gráfico de f_t versus t , determinávamos a partir de qual momento o sistema começava a flutuar em torno de um valor médio e calculávamos a média temporal envolvendo todos os f_t 's a partir deste ponto.
- b) Verificamos para qual valor de t a tensão média correspondente, isto é, f_t supera pela primeira vez o valor médio calculado no item anterior. Assumimos que este tempo corresponde à duração do regime transiente.

Como exemplo, vamos usar o procedimento acima na determinação do tempo associado ao transiente no modelo OFC para $L = 200$ e $\alpha = 0.23$. Consideramos 5 milhões de avalanches, e após cada avalanche calculamos a tensão média na rede. A cada $\tau = 1000$ avalanches a média das tensões médias é calculada (como podemos ver na Figura 3.11). Por volta de 1,5 milhão de avalanches o sistema começa a flutuar em torno de um valor médio (linha horizontal). Devido a presença de fortes flutuações essa estimativa visual pode ser enganosa. Empregando médias móveis ($W = 50$) as flutuações locais são atenuadas, permanecendo apenas a tendência de longo prazo (Figura 3.12). Consideramos como valor de transiente o valor de t para o qual o valor da média móvel supera pela primeira vez o valor médio (que corresponde ao valor da linha horizontal nas Figuras 3.12 e 3.11), ou seja, $t = 1\,035\,000 \sim 10^6$. De forma similar determinamos o tempo de transiente para diversos valores de α e tamanhos de rede. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 3.1. Os cálculos foram feitos para $\alpha = 0.23, 0.24$ e 0.25 . Devido aos longos transientes é difícil obter resultados para uma série de tamanhos de redes diferentes para $\alpha < 0.23$. Além disso, à medida que o parâmetro α decresce, maiores são as flutuações e mais difícil se torna a determinação precisa do transiente. Os dados da tabela 3.1 parecem se ajustar muito bem a uma reta (veja a Figura 3.13). Portanto, a relação entre t e L deve ser uma lei de potência, $t \sim L^z$, onde $z = 1.92 \pm 0.09, 4.1 \pm 0.2$ e 3.6 ± 0.2 respectivamente para $\alpha = 0.25, 0.24$ e 0.23 . Não devemos dar muita importância ao fato do expoente obtido para $\alpha = 0.23$ ser ligeiramente maior que o expoente obtido para $\alpha = 0.24$. Esse resultado decorre da dificuldade em determinar o momento exato em que o sistema entra no regime estacionário, principalmente quando aumenta a dissipação no sistema. Para $\alpha = 0.25$, $z \approx 2.0$, o que parece indicar que o sistema atinge o regime estacionário, quando cada sítio

relaxa pelo menos uma vez. Por outro lado, para $\alpha = 0.24$ ou $\alpha = 0.23$ temos $z \approx 4.0$. Isso indica que a simples presença de uma leve dissipação no sistema, torna necessário que cada sítio da rede relaxe pelo menos L^2 para que o regime estacionário seja atingido.

Ressaltamos que o fato do tempo associado ao transiente obedecer a uma lei de potência, está de acordo com um resultado anterior obtido por Middleton e Tang [41], segundo o qual os sítios do interior rapidamente convergiriam para um estado aproximadamente periódico com período $1 - 4\alpha$. No entanto, os sítios das borda seriam aperiódicos e em tempos longos a região aperiódica invadiria a região periódica destruindo a periodicidade e construindo as correlações espaço-temporal. Esta invasão seria caracterizada por uma lei de potência $y(t) \sim t^{\beta(\alpha)}$, onde t corresponde ao tempo (escala longa).

L	t_{trans} estimado		
	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.24$	$\alpha = 0.23$
50	$4,60 \times 10^2$	$8,5 \times 10^2$	$5,0 \times 10^3$
100	$1,60 \times 10^3$	$1,8 \times 10^4$	$1,5 \times 10^5$
150	$5,00 \times 10^3$	$1,7 \times 10^5$	$6,5 \times 10^5$
200	$5,70 \times 10^3$	$3,1 \times 10^5$	$1,0 \times 10^6$
300	$17,00 \times 10^3$	$1,5 \times 10^6$	$5,5 \times 10^6$
400	$22,50 \times 10^3$	$4,0 \times 10^6$	$11,0 \times 10^6$

Tabela 3.1: Tabela contendo os transientes estimados para modelo OFC e $\alpha = 0.25, 0.24$ e 0.23 .

Também tentamos verificar a existência de alguma relação entre o tempo associado ao transiente e o parâmetro α , mantendo o tamanho da rede L fixo. Considerando redes de tamanho $L = 200$, determinamos os tempos associado ao transiente para diversos valores do parâmetro α . Os resultados

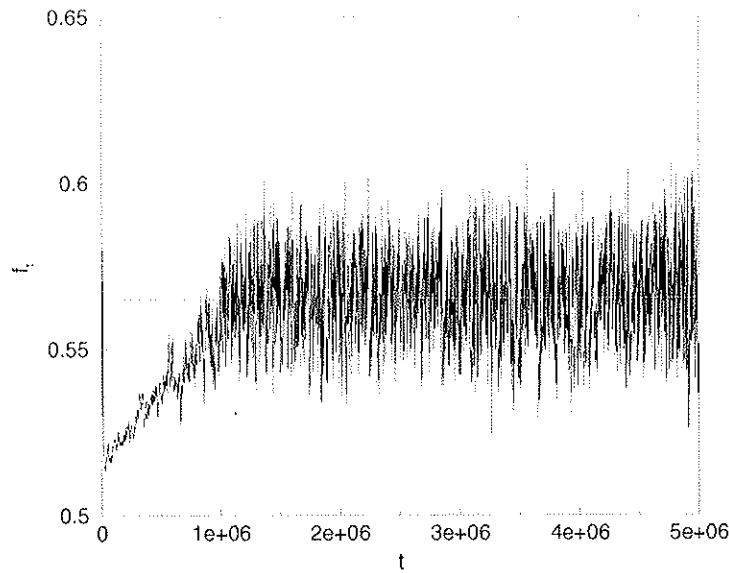


Figura 3.11: Evolução temporal no modelo OFC para $L = 200$ e $\alpha = 0.23$. Cada ponto no gráfico corresponde a média em um intervalo de $\tau = 1000$ avalanches. A reta (em verde) corresponde a média da tensão média considerando as tensões média a partir de 2×10^6 .

podem ser vistos na tabela 3.2 e na Figura 3.14 é traçado o gráfico de t_{trans} versus L . A linha pontilhada corresponde ao melhor ajuste obtido para os pontos, cuja expressão é

$$t_{trans} = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2, \quad (3.23)$$

onde $A_2 = (1.8 \pm 0.3) \times 10^8$, $A_1 = (-9 \pm 1) \times 10^8$ e $A_0 = (1.1 \pm 0.1) \times 10^7$. Note que os erros obtidos para cada um dos coeficientes do polinômio é muito grande, o que mostra que o ajuste não é muito bom. Isso se deve à grande dificuldade em determinar o tempo associado ao transiente à medida que o parâmetro α decresce.

Por fim, vale destacar que, à medida que aumenta o grau de dissipação (isto é, decresce o valor de α), torna-se cada vez mais difícil a determinação do

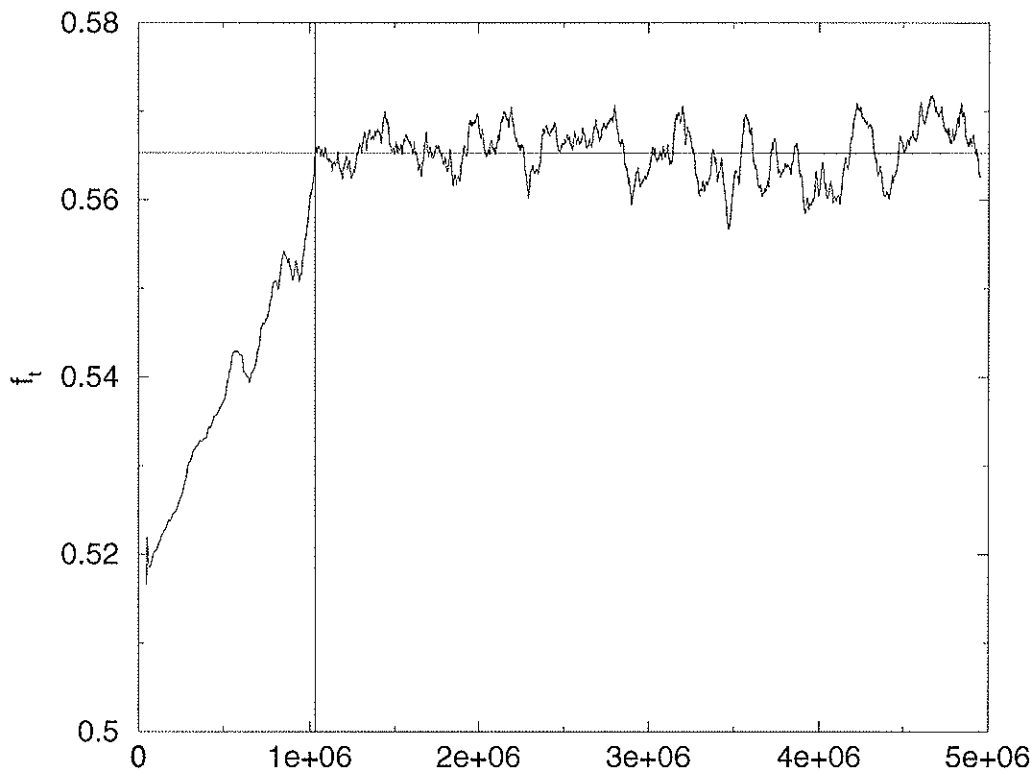


Figura 3.12: Para construir esta figura foram usados os mesmos dados da Figura 3.11, sendo efetuadas médias móveis para eliminar as flutuações com $W = 50$. A linha horizontal corresponde ao valor médio da tensão média, sendo calculada para dados a partir de $t = 2\,000\,000$. No caso $\bar{f}_t = 0.56533 \pm 0.00006$. O valor estimado do transiente é $t_{trans} = 1\,035\,000$.

início do regime estacionário por meio da tensão média na rede (veja Figura 3.15). A dissipação torna-se tão grande que o valor médio em torno do qual a tensão média flutua, no regime estacionário, é muito próximo de $F_{th}/2$, que corresponde ao valor médio da configuração inicial (sorteada aleatoriamente no intervalo $[0, F_{th}]$). Nesse caso é mais conveniente usarmos o valor médio do tamanho das avalanches (veja Figura 3.16), onde usamos, no cálculo das médias todos os procedimentos até aqui discutidos para o valor médio da

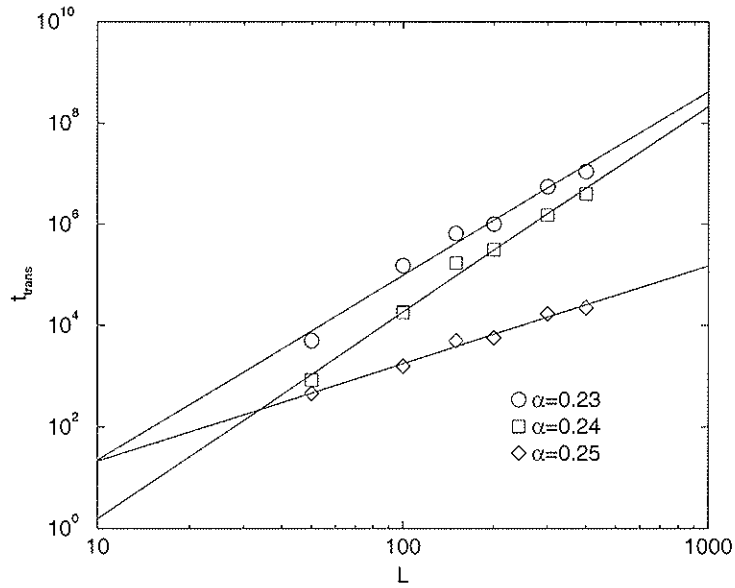


Figura 3.13: Tempos de transiente estimados para vários tamanhos de redes e valores de α . Os ajustes foram feitos supondo $t_{trans} \sim L^z$, sendo obtido $z \approx 1.92 \pm 0.09, 4.1 \pm 0.2$ e 3.6 ± 0.2 para $\alpha = 0.25, 0.24$ e 0.23 .

tensão na rede.

α	t_{trans} estimado
0.25	$5,0 \times 10^3$
0.24	$3,0 \times 10^5$
0.23	$1,0 \times 10^6$
0.22	$2,5 \times 10^6$
0.20	$4,9 \times 10^6$
0.18	$1,0 \times 10^7$

Tabela 3.2: Tabela contendo os transientes estimados para modelo OFC e $L = 200$ $\alpha = 0.25, 0.24$ e 0.23 .

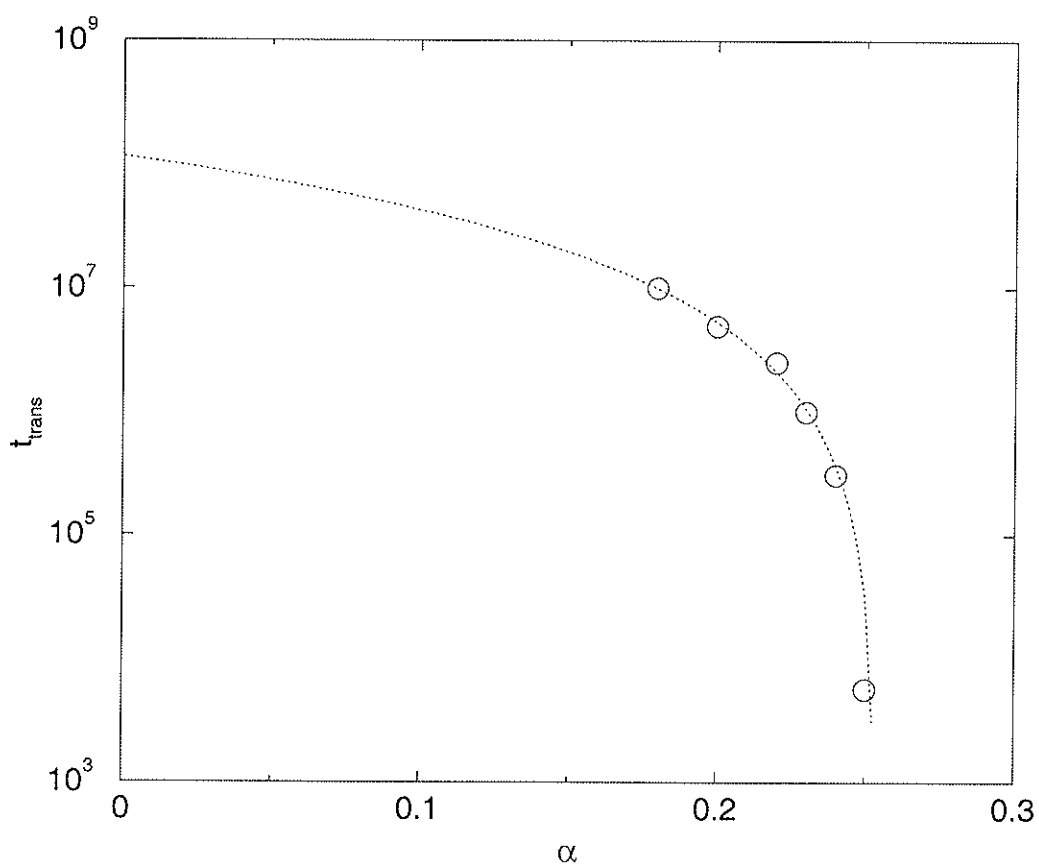


Figura 3.14: Tempos de transiente estimados para vários valores de α e $L = 200$. Os pontos ficam bem ajustados por uma curva do tipo $t_{trans} = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2$, onde $A_2 = (1.8 \pm 0.3) \times 10^8$, $A_1 = (-9 \pm 1) \times 10^8$ e $A_0 = (1.1 \pm 0.1) \times 10^7$.

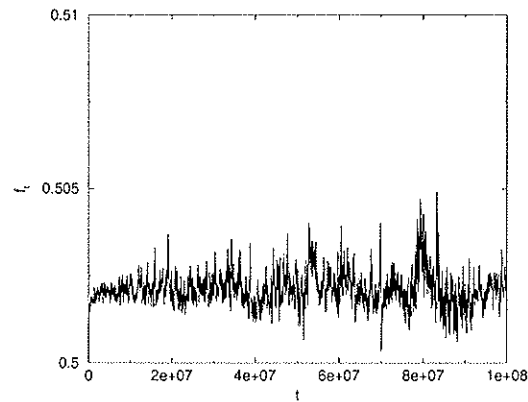


Figura 3.15: Evolução temporal da tensão média na rede no modelo OFC para $L = 100$ e $\alpha = 0.10$. Médias móveis foram efetuadas sobre os dados originais ($W = 100$).

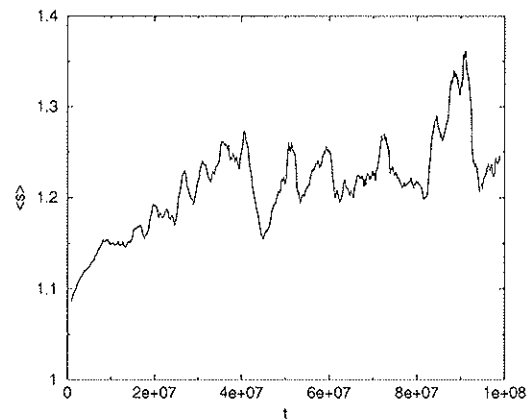


Figura 3.16: Evolução temporal do tamanho médio das avalanches para o modelo OFC $L = 100$ e $\alpha = 0.10$. Médias móveis foram efetuadas sobre os dados originais ($W = 1000$).

3.4.4 Estratégias para redução do tempo associado regime ao transiente

Até o momento o estudo do modelo OFC tem sido feito por meio de simulações numéricas. As fortes correlações espaciais e temporais que este modelo exhibe dificultam uma abordagem por meio de técnicas analíticas. Por outro lado, para que os resultados analíticos sejam confiáveis é necessário verificar a dependência dos resultados com o tamanho da rede, tentando efetuar simulações em redes tão grandes quanto possível. No entanto, os longos transientes, que como já vimos anteriormente, crescem com o tamanho da rede e com a taxa de dissipação presente no sistema, são grandes obstáculos na simulação do modelo OFC. Dentro deste cenário, é de grande importância técnicas que permitam uma redução nos tempos gastos na simulação.

Uma das possíveis estratégias para economizar tempo de simulação consiste em criar formas de reduzir o tempo associado ao transiente, período durante o qual são formadas as correlações espaciais e temporais que resultarão na invariância de escala presente no sistema no regime estacionário. Notamos que, se iniciarmos as simulações com uma configuração que já contenha parte das correlações espaciais e temporais formadas, o sistema atingirá o regime estacionário em um tempo significativamente menor. Note que este procedimento se justifica pela própria definição de SOC, que afirma que o sistema deve atingir invariância de escala independentemente da configuração inicial escolhida.

Uma maneira muito simples de conseguir uma configuração inicial que já contenha correlações espaciais e temporais parcialmente formada consiste em juntarmos quatro redes menores, que por sua vez já tenham alcançado o regime estacionário, para formar uma rede maior. Assim, se desejamos simular o modelo OFC para uma rede de tamanho L e parâmetro de con-

servação α , simulamos o modelo para o mesmo valor do parâmetro α em quatro redes de tamanho $L/2$, com condições iniciais aleatórias e diferentes. Uma vez que cada uma das quatro redes atinjam o regime estacionário, juntamos então as quatro redes formando uma única rede de tamanho L . Esta configuração é usado como configuração inicial (em vez de uma configuração inicial aleatória) e atingirá o regime estacionário mais rapidamente do que se usássemos uma configuração inicial totalmente aleatória, como podemos constatar nas Figuras 3.17 e 3.18. Nas duas Figuras estamos considerando o modelo OFC para $\alpha = 0.20$ e dois valores diferentes de rede $L = 200$ e $L = 400$. Na Figura 3.17 o gráfico com linha mais grossa corresponde a evolução temporal da tensão média para $L = 200$ e $\alpha = 0.20$ tendo uma configuração inicial aleatória. Já o gráfico com linha mais grossa mostra a evolução temporal do OFC para $L = 200$ e $\alpha = 0.20$, porém a configuração inicial é formada por quatro redes de tamanho $L = 100$, $\alpha = 0.20$, sendo que cada uma destas configurações já estão no regime estacionário. Devido as fortes flutuações, foram empregadas médias móveis ($W=400$). Observando a Figura 3.9 vemos que, partindo de uma configuração inicial aleatória, a tensão média na rede cresce lentamente até atingir um ponto onde começa a flutuar em torno de um valor médio. Mas, quanto o modelo é simulado partindo de uma configuração formada por quatro outras redes já no regime estacionário, o tempo gasto para atingir o estado estacionário é bem menor. Este fato fica ainda mais claro na Figura 3.18, onde consideramos redes de tamanho $L = 400$.

O gráfico com linha preta foi obtido a partir de uma configuração inicial totalmente aleatória. A configuração inicial usada para se obter gráfico com linha vermelha foi formada por quatro outras configurações, já no regime estacionário, obtidas a partir da simulação do modelo OFC para $L = 200$,

$\alpha = 0.20$ e configuração inicial aleatória.

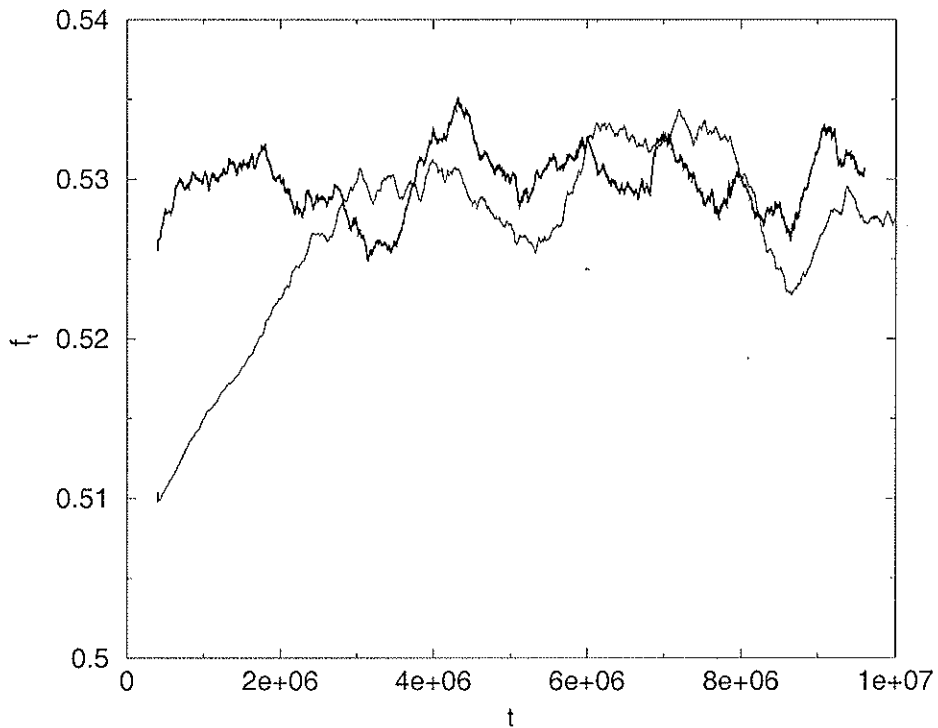


Figura 3.17: Evolução temporal da tensão média na rede no modelo OFC para $L = 200$ e $\alpha = 0.20$. O gráfico com linha mais fina foi obtido a partir de uma configuração inicial totalmente aleatória. A configuração inicial usada para se obter o gráfico com linha mais grossa foi formada por quatro outras configurações, já no regime estacionário, obtidas a partir da simulação do modelo OFC para $L = 200$, $\alpha = 0.20$ e configuração inicial aleatória. casos foram feitas médias móveis, tomando $W = 400$.

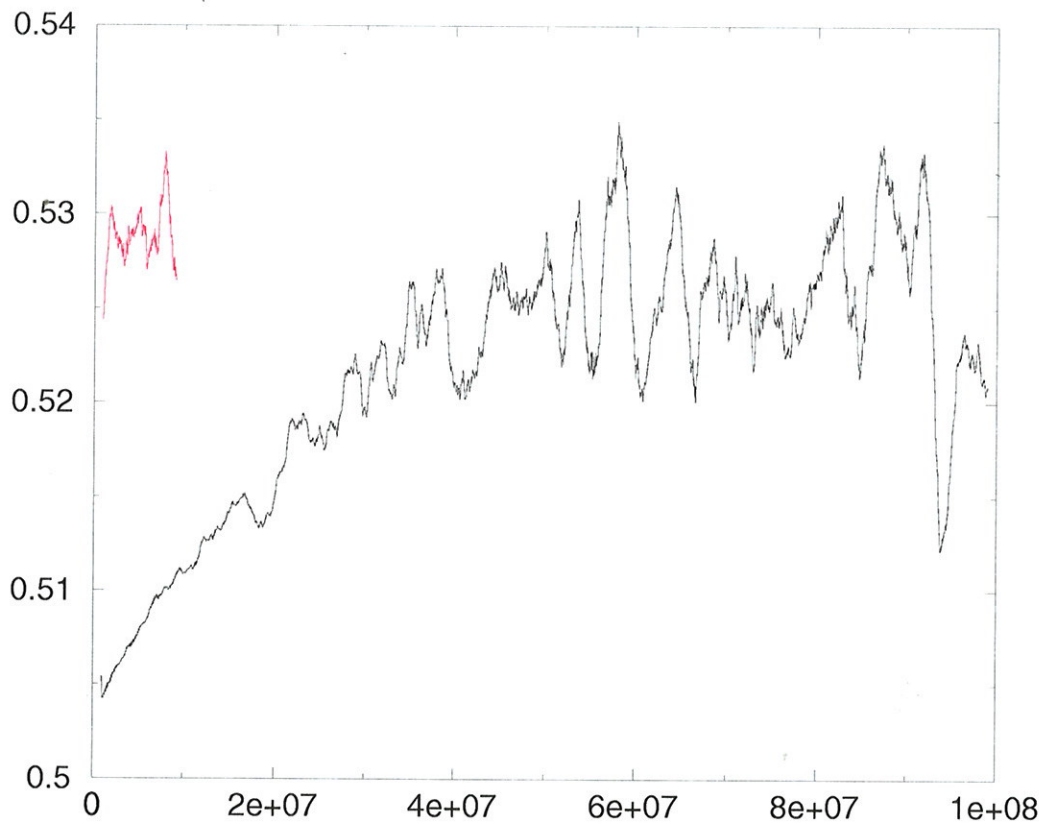


Figura 3.18: Evolução temporal da tensão média na rede no modelo OFC para $L = 400$ e $\alpha = 0.20$. O gráfico com linha preta foi obtido a partir de uma configuração inicial totalmente aleatória. A configuração inicial usada para se obter gráfico com linha vermelha foi formada por quatro outras configurações, já no regime estacionário, obtidas a partir da simulação do modelo OFC para $L = 200$, $\alpha = 0.20$ e configuração inicial aleatória. Em ambos os casos foram feitas médias móveis, tomando $W = 1000$.

Capítulo 4

O modelo Olami-Feder e Christensen com vizinhos aleatórios

4.1 Introdução

Como visto no capítulo anterior, o modelo OFC é um mapa acoplado cuja dinâmica, acredita-se, consegue capturar os principais aspectos da dinâmica de terremotos proposta pela teoria das placas tectônicas. No entanto, fortes correlações espaciais e temporais presentes nesse modelo dificultam uma abordagem analítica. Porém, as correlações espaciais podem ser eliminadas se a redistribuição de energia durante o relaxamento do sítio crítico for feita para quatro sítios escolhidos aleatoriamente, ao invés de ser feita para os primeiros vizinhos. Uma versão do modelo OFC com ‘vizinhos’ tomados aleatoriamente, que denominaremos de modelo R-OFC, foi proposta por Lise e Jensen [42]. Fazendo suposições injustificadas, Lise e Jensen concluíram que o modelo R-OFC deixava de exibir criticalidade quando o parâmetro

conservativo α assumia valores abaixo de $\alpha_c = 2/9$. Posteriormente, análises mais cuidadosas revelaram [43]-[45] que de fato o modelo R-OFC só exhibe criticalidade no regime conservativo.

Na próxima seção apresentaremos com mais detalhes a definição do modelo R-OFC. Em seguida expomos brevemente a abordagem do modelo em termos de processos ramificados, seguindo a análise efetuada por Lise e Jensen. Por fim, faremos alguns comentários a respeito da implementação numérica do modelo.

4.2 O modelo R-OFC

Em uma cadeia com N sítios associa-se a cada sítio i uma variável real E_i , cujo valor inicial é escolhido aleatoriamente no intervalo $[0, E_c)$. Em seguida o sistema passa a ser perturbado globalmente, isto é, $E_i \rightarrow E_i + \delta$ para todos os sítios da rede, tendo δ um valor pequeno. Quando a energia de algum sítio i da rede supera o limiar de energia E_c , isto é $E_i \geq E_c$, então o sistema deixa de ser perturbado e k vizinhos são escolhidos aleatoriamente. O sistema relaxa de acordo com as regras abaixo:

$$\text{se } E_i \geq E_c \Rightarrow \begin{cases} E_{RN} & \rightarrow E_{RN} + \alpha E_i, \\ E_i & \rightarrow 0. \end{cases} \quad (4.1)$$

O índice RN se refere aos k vizinhos escolhidos aleatoriamente, E_i corresponde a energia do sítio crítico e α é um parâmetro que controla o grau de conservação do sistema, assumindo valores no intervalo $[1, 1/k]$. O sistema é conservativo quando $\alpha = 1/k$. Note que, a cada vez que um sítio fica crítico, novos vizinhos são escolhidos (desordem *annealed*), o que evita o surgimento de correlações espaciais. A redistribuição de energia durante o processo de relaxamento pode fazer com que algum outro sítio torne-se crítico. As regras

(4.1) são aplicadas sucessivamente até que todos os sítios da rede estejam em equilíbrio novamente, isto é, $E_i < E_c, \forall i$. Na prática, em vez de perturbar o sistema com um δ arbitrário, toma-se $\delta = E_c - E_{max}$, onde E_{max} corresponde à energia do sítio com maior energia na rede.

4.3 Taxa de ramificação no modelo R-OFC

Nesta seção vamos analisar o modelo R-OFC em termos de um processo ramificado seguindo os passos de Lise and Jensen [42].

Designaremos sítios estáveis aqueles sítios cuja energia supera o limiar crítico ($E_i > E_c$), enquanto sítios instáveis serão aqueles com energia abaixo do limiar crítico ($E_i < E_c$). Usaremos os superescritos (+) e (-) para representar os sítios instáveis e estáveis respectivamente. Um sítio instável, ao relaxar, doa αE^+ de sua energia para cada um de seus k vizinhos. Portanto, ao ser atingido por uma avalanche, um sítio qualquer só poderá tornar-se crítico se possuir energia E no intervalo $[E_c - \alpha E^+, E_c]$. Um pouco de reflexão mostra que a probabilidade com que um sítio qualquer torna-se crítico ao ser varrido por uma avalanche é dada por

$$P_+(E^+) = \int_{E_c - \alpha E^+}^{E_c} \rho(E) dE, \quad (4.2)$$

onde $\rho(E)$ é a densidade de probabilidade de que um sítio qualquer da rede tenha energia E , uma vez que apenas sítios com energia no intervalo $[E_c - \alpha E^+, E_c]$ podem tornar-se crítico. Portanto, um sítio com energia E^+ produz em média $kP_+(E^+)$ novos sítios críticos. O número médio de sítios instáveis (críticos) gerados a partir de um sítio instável é denominado de taxa ramificação [42] e será identificada pela letra σ . Só é possível a existência de avalanches de tamanho infinito se $\sigma \geq 1$, pois, neste caso, teremos

em média pelo menos um sítio crítico sendo gerado a cada relaxamento de um sítio crítico.

Para que novos sítios críticos sejam gerados durante o processo de relaxamento de um sítio crítico é necessário que os vizinhos escolhidos tenham energia no intervalo $[E_c - \alpha E^+, E_c]$, o que ocorre com probabilidade $P_+(E^+)$. Já que a densidade de probabilidade de um sítio ter energia E é $\rho(E)$, a taxa de ramificação do sistema é

$$\sigma = k \int_{E_c}^{\infty} P_+(E^+) \rho(E^+) dE^+. \quad (4.3)$$

O cálculo exato de σ não é simples, sendo necessário o conhecimento da forma funcional de $\rho(E)$ que não é simples. Na Figura 4.1 apresentamos resultados numéricos para $\rho(E)$ em uma rede de tamanho $L = 400$ e $\alpha = 0.23$.

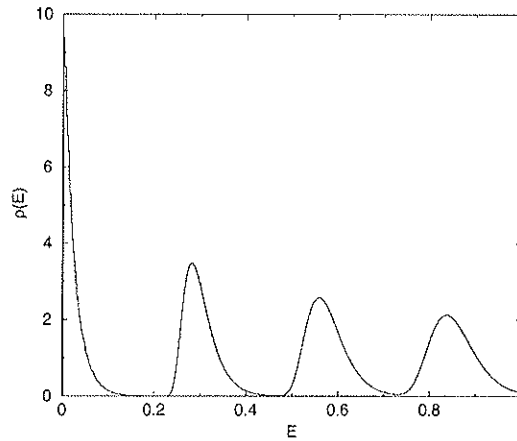


Figura 4.1: Densidade de probabilidade de energia de que um sítio tenha energia E , modelo R-OFC com sítios de borda (veja texto). Os dados foram obtidos para uma rede de tamanho $L = 400$, $\alpha = 0.23$, tomando uma estatística de 4 000 000 de avalanches.

Lise e Jensen sugeriram a seguinte forma funcional para $\rho(E)$ [42]

$$\rho(E) = \begin{cases} \frac{1}{E_c} & \text{se } E \leq E_c, \\ 0 & \text{se } E > E_c. \end{cases} \quad (4.4)$$

Com esta escolha $P_+(E^+)$ torna-se

$$P_+(E^+) = \alpha \frac{E^+}{E_c}. \quad (4.5)$$

Logo σ é dado por

$$\sigma = \frac{k\alpha}{E_c} \int_{E_c}^{\infty} E^+ \rho(E^+) dE^+ = k\alpha \frac{\langle E^+ \rangle}{E_c}. \quad (4.6)$$

Resta então estimar $\langle E^+ \rangle$. Seja j um sítio qualquer da rede que em um instante de tempo t (na escala de tempo curta) recebe um contribuição αE_i^+ de um sítio i . A energia do sítio j imediatamente após o relaxamento do sítio i é

$$E_j^+(t + \Delta t) = E_j^-(t) + \alpha E_i^+(t). \quad (4.7)$$

Considerando-se diversas avalanches é possível escrever

$$\langle E_j^+ \rangle = \langle E_j^- \rangle + \alpha \langle E_i^+ \rangle, \quad (4.8)$$

Por outro lado $E_c - \alpha E_i^+ < E_j^- < E_c$. O valor médio de E_j^- neste intervalo é

$$\langle E_j^- \rangle = \frac{\int_{E_c - \alpha E_i^+}^{E_c} E_i^- \rho(E_i^-) dE_i^-}{\int_{E_c - \alpha E_i^+}^{E_c} \rho(E_i^-) dE_i^-}, \quad (4.9)$$

onde $\rho(E)$ é a densidade de probabilidade de um sítio qualquer da rede ter energia E . Mais uma vez usando a aproximação uniforme sugerida por Lise e Jensen para $\rho(E)$, a integral acima torna-se

$$\langle E_j^- \rangle = E_c - \frac{1}{2} \alpha E_i^+. \quad (4.10)$$

Uma vez que a densidade de probabilidade de energia por sítio converge para um valor estacionário, temos $\langle E_j^+ \rangle = \langle E_i^+ \rangle = \langle E^+ \rangle$, $\langle E_j^- \rangle = \langle E^- \rangle$. Substituindo a expressão (4.10) na (4.8) encontramos

$$\langle E^+ \rangle = \frac{E_c}{1 - \alpha/2}. \quad (4.11)$$

Desta forma σ é igual a

$$\sigma = \frac{k\alpha}{1 - \alpha/2}. \quad (4.12)$$

A condição para se obter avalanches de tamanho infinito, $\sigma \geq 1$, é obtida quando

$$\alpha \geq \frac{1}{k + 1/2}. \quad (4.13)$$

Para $k = 4$ obtém-se $\alpha \geq 2/9$.

Os resultados dos cálculos teóricos aparentemente foram confirmados por meio de simulações numéricas. Lise e Jensen simularam o modelo R-OFC em redes de tamanho $L = 100, 200$ e 400 , tanto para $\alpha < \alpha_c$ quanto para $\alpha > \alpha_c$. Efeitos de bordas foram considerados, escolhendo aleatoriamente alguns sítios que ao tornarem-se crítico relaxavam para um número menor de vizinhos, dissipando parte da energia. Diversas simulações confirmaram os resultados teóricos. Assim, para $\alpha < \alpha_c$ a distribuição de avalanches para os diferentes tamanhos de redes colapsavam em uma única curva indicando a existência de um tamanho característico. Por outro lado, para $\alpha > \alpha_c$ o tamanho máximo das avalanches pareciam crescer com o tamanho da rede.

Os cálculos de Lise e Jensen foram refeitos por Kinouchi, Pinho e Prado, e desta vez foi usada uma distribuição mais realista para $\rho(E)$, consistindo de quatro picos quadrados idênticos. Cada pico tinha largura $2\Delta_p$ e eram separados entre si por uma distância Δ_a e centrados em $0, \alpha E_c, 2\alpha E_c$ e $3\alpha E_c$. Realizando cálculos trabalhosos, porém simples [45], é possível mostrar que no limite conservativo, isto é, $\Delta_p \rightarrow 0$ e $\Delta_a \rightarrow \alpha E_c$, $\sigma = 1$ implica em

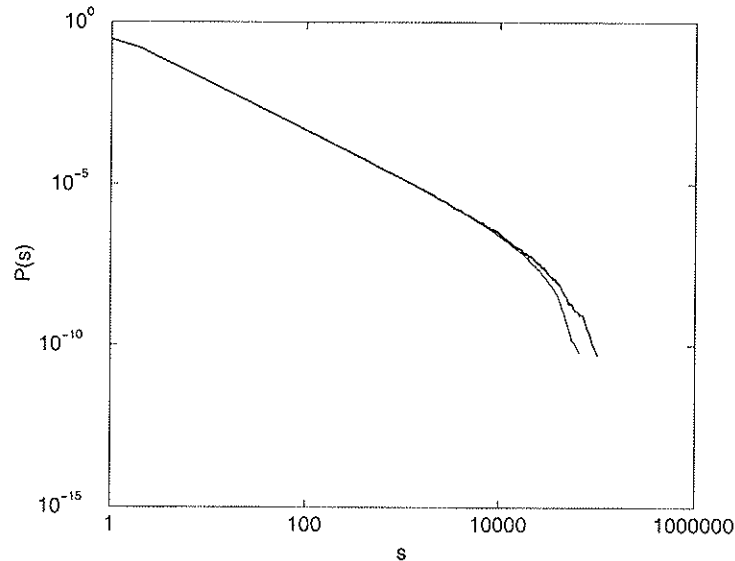


Figura 4.2: Distribuição de avalanches, modelo R-OFC com sítios de borda (veja texto) para $\alpha = 0.23$. Da esquerda para direita temos redes de tamanho $L=400$ e 600 .

$\alpha = 0.25$. Os resultados de Lise e Jensen podem ser obtidos impondo $\Delta_b \rightarrow 0$ e $\Delta_p \rightarrow E_c/7$. Nesse caso para $\sigma = 1$ obtemos $\alpha = 2/9$. Também foi mostrado que, se aumentarmos o tamanho da rede, o colapso das curvas é observado

4.4 Efeitos de superfície no modelo R-OFC

Em modelos com estrutura espacial, quando simulados com condições de contorno aberta, os sítios pertencentes à borda, ao relaxarem acabam dissipando parte de sua energia. Acredita-se que as inhomogeneidades geradas pelas bordas seja o principal mecanismo responsável pelo surgimento das correlações espaciais e temporais, que por sua vez se manifestam através de invariância de escala no modelo OFC. Desde que o modelo R-OFC é um modelo sem

estrutura espacial, alguns autores acham desnecessário a inclusão de sítios de borda [43]. Outros porém, acham que os efeitos de bordas devem ser considerados, pois não havendo sítios de superfície para dissipar parte da energia do sistema, quando $L \rightarrow \infty$ e $\alpha = 0.25$ haveria apenas uma avalanche infinita [46].

Efetuamos simulações considerando e não considerando sítios de superfície. Percebemos que, para valores de α abaixo de $2/9$, não faz qualquer diferença a presença ou não de sítios de superfície, como pode ser visto na Figura 4.3. Aqui a distribuição de avalanches para o modelo R-OFC considerando e sem considerar efeitos de superfície colapsam em uma única curva, indicando a existência de um tamanho médio de avalanche finito. A curva cheia corresponde ao modelo R-OFC sem considerar efeitos de bordas, isto é, todos os sítios tem o mesmo número de vizinhos. Por outro lado, a curva com estrelinhas corresponde ao modelo R-OFC, onde alguns sítios escolhidos aleatoriamente, ao tornarem-se críticos relaxam sua energia para um número menor de vizinhos. Esse resultado não tem nada de surpreendente. Apenas mostra que para valores do parâmetro dissipativo abaixo de $2/9$ o tamanho médio das avalanches rapidamente converge para um valor característico. Desta forma a inclusão ou não de sítios de superfície não faz muita diferença no resultado final.

Para $\alpha > 2/9$ a situação muda um pouco. O grau de dissipação é menor, o que possibilita que as avalanches atinjam um maior número de sítios. Na versão com sítios de borda, será maior a probabilidade de que sítios de superfície sejam participem das avalanches. Como esses sítios possuem um número menor de vizinhos, para $\alpha > 2/9$ a dissipação na versão com sítios de superfície será bem maior que na versão sem sítios de superfície, o que se reflete na distribuição de avalanches. Na Figura 4.4 apresentamos a dis-

tribuição de avalanches no modelo R-OFC para $L = 200$ e $\alpha = 0.23$. A curva com linha grossa corresponde à situação em que sistema possui sítios de superfície. A curva com linha fina, por sua vez foi obtido sem considerar sítios de superfície. Note que a versão sem sítios de superfície apresenta avalanches maiores. Obviamente quando $L \rightarrow \infty$ as duas curvas devem colapsar.

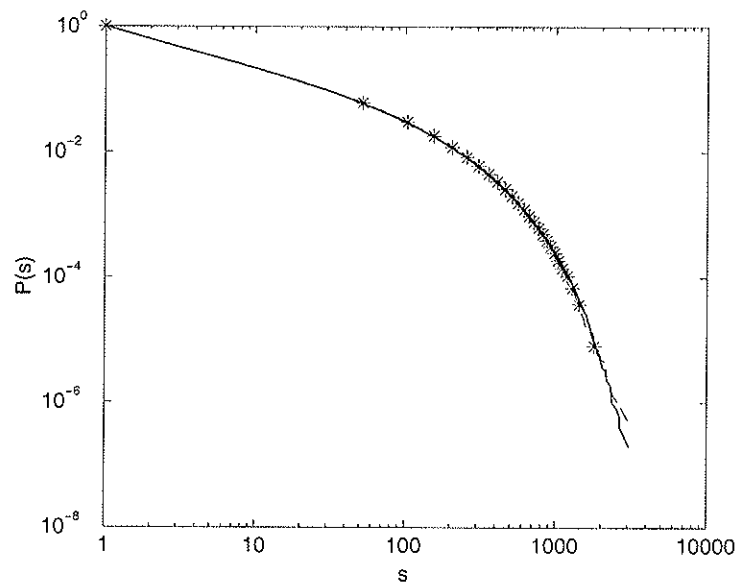


Figura 4.3: Distribuição integrada de avalanches para o modelo R-OFC, considerando $\alpha = 0.22$. A linha cheia corresponde aos dados obtidos sem considerar efeitos de borda para $L = 200$. As estrelas corresponde ao modelo R-OFC simulado considerando efeitos de borda para uma rede de tamanho $L = 100$.

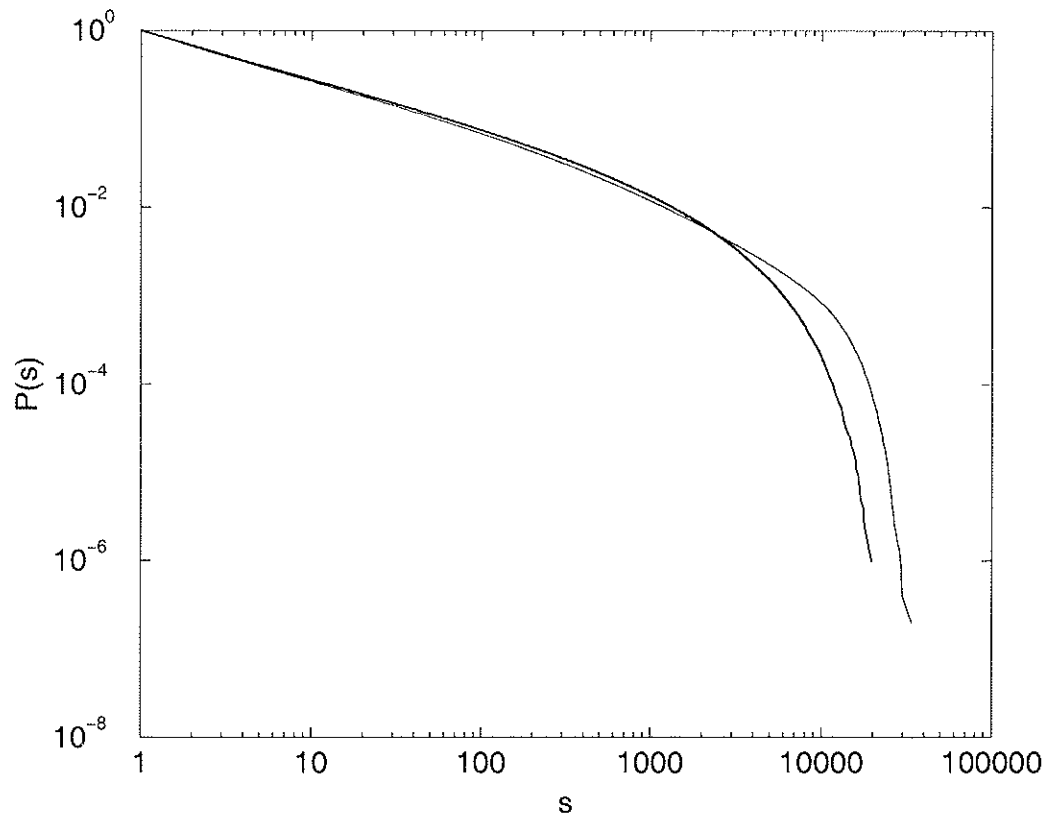


Figura 4.4: Distribuição integrada de avalanches para o modelo R-OFC, considerando $\alpha = 0.23$ e redes de tamanho $L = 200$. A curva com linha mais grossa corresponde a dados obtidos considerando efeitos de borda, enquanto que a curva com linha mais fina corresponde a dados obtidos sem levar em consideração os efeitos de borda.

Capítulo 5

Criticalidade no Modelo OFC

5.1 Introdução

Desde o surgimento da teoria de criticalidade auto-organizada, diversas análises de campo médio, em diferentes modelos, foram realizadas, todas conduzindo a uma distribuição de probabilidade de eventos com expoente $\tau = 3/2$ ($P(s) \sim s^{-\tau}$) [47]. Por outro lado $\tau = 3/2$ é o expoente que surge naturalmente na distribuição de eventos de um processo ramificado com taxa de ramificação constante e igual a $\sigma = 1$ (veja o apêndice B). A conexão entre SOC e processos ramificados foi investigada por diversos autores [48], que conseguiram descrever a versão de campo médio do modelo de pilha de areia como um processo ramificado. No entanto, de acordo com Zapperi e colaboradores [49] essas análises continham um paradoxo, já que, para o sistema ser crítico, era necessário ajustar a taxa de ramificação em $\sigma = 1$, o que equivale a sintonizar o sistema no ponto crítico, violando a idéia central da criticalidade auto-organizada. Eles introduzem então um modelo denominado processo ramificado auto-organizado, ou SOBP (self-organized branching process), facilmente mapeado no modelo de pilha de areia de dois estados

[18], e que atinge o estado crítico sem ajustes externo. Dentro deste cenário Kinouchi e Prado [50] sugerem que o processo de avalanches em modelos com estrutura espacial seria controlado por uma variável dinâmica $\sigma_t = \sigma(\rho_t(E))$, que em um processo ramificado simples corresponderia à taxa de ramificação e que seria função da densidade de probabilidade de energia $\rho_t(E)$ do sistema considerado. Assim, como as demais grandezas estatísticas que caracterizam os modelos de criticalidade auto-organizada, após o regime transiente, $\rho_t(E)$ converge para uma distribuição estacionária $\rho_\infty(E)$. Como consequência σ_t também converge para um valor estacionário σ_∞ independentemente da configuração inicial. Portanto, σ_∞ deve depender apenas de parâmetros referentes ao modelo estudado, como por exemplo, a taxa de dissipação no caso do modelo OFC. A criticalidade do sistema, que ocorre para $\sigma_\infty = 1$, pode então ser analisada em termos dos valores assumidos por σ_∞ em um espaço de fase definido pelos parâmetros que caracterizam o sistema estudado. Tem sido empregado o termo SOC genérica quando $\sigma_\infty = 1$ em toda uma região do espaço de fase considerado, para diferenciar do caso em que $\sigma_\infty = 1$ em um único ponto. Neste último caso é possível interpretar que a dinâmica do sistema foi definida de modo que $\sigma_\infty = 1$, o que corresponderia a um ajuste externo. Isto ocorre, por exemplo, com o modelo pilha de areia, que só exibe criticalidade quando sua dinâmica é localmente conservativa. Para outros modelos, como o OFC, o estado estacionário crítico parece ser atingido mesmo no regime não conservativo. Kinouchi e Prado [50], estudando o comportamento de um modelo solúvel analiticamente (modelo Feder-Feder extremal ou modelo EFF), notaram que uma classe de modelos tem um comportamento curioso, que denominaram quase-crítico. Nesses modelos, embora a criticalidade exista apenas para um valor do parâmetro de conservação α (ou seja, $\sigma_\infty = 1$ apenas se $\alpha = \alpha^*$), observa-se que $\sigma_\infty(\alpha)$ é fortemente

não linear em α , de modo que $\sigma_\infty \approx 1$ em todo um intervalo de valores de α próximo de α^* . Nessa situação leis de potência são observadas por muitas décadas, sendo praticamente impossível determinar se o sistema é crítico ou não com base apenas na observação das distribuições de eventos.

Na próxima seção, apresentaremos o modelo EFF e reproduziremos alguns dos principais resultados obtidos por Kinouchi e Prado [50]. Em seguida, tendo em mente as idéias de quase-criticalidade, apresentamos uma nova abordagem para o modelo OFC, apresentando algumas similaridades com a teoria dos processos ramificados.

5.2 O modelo Feder e Feder extremal

Associa-se a cada elemento de uma cadeia com N sítios uma variável real E_j , $j = 1, \dots, N$ com valores igualmente distribuídos no intervalo $[0, 1]$, que, sem perda de generalidade, denominaremos de energia. A cada unidade de tempo (escala de tempo longa), escolhe-se aquele sítio j da rede que possui o maior valor de energia dentre todos os sítios da rede, que denominaremos E_j^* . Este sítio relaxa, descarregando toda ou parte de sua energia em k sítios escolhidos aleatoriamente. A cada vez que um sítio fica crítico e relaxa, novos vizinhos são escolhidos aleatoriamente (desordem *annealed*). O novo valor de E para o sítio que dispara é zero mais um ruído η igualmente distribuído no intervalo $[0, \epsilon]$. A introdução deste ruído, cujo valor máximo ϵ será discutido mais adiante, é essencial para que o modelo não sincronize. Os k vizinhos recebem uma descarga α mais um ruído η_{RN} , também identicamente distribuídos no intervalo $[0, \epsilon]$. Note que cada vizinho recebe um valor de ruído diferente. Se $E_i^*(t) = \max\{E_j\} \geq 1$, então as regras de evolução do modelo podem ser

sintetizadas pelas expressões

$$\begin{cases} E_i^* & \rightarrow \eta, \\ E_{RN} & \rightarrow E_{RN} + \alpha + \eta_{RN}, \end{cases} \quad (5.1)$$

onde E^* é o sítio que relaxa, RN indica os k vizinhos escolhidos aleatoriamente e t corresponde ao tempo na escala curta. Este processo pode ocasionar um novo sítio crítico, que também relaxa, gerando uma reação em cadeia (avalanche) que prossegue até que todos os sítios da rede estejam novamente em equilíbrio, ou seja, até que $E_i < 1, \forall i$. O tamanho da avalanche s é igual ao número de relaxamentos ocorridos. Ao proporem este modelo, Kinouchi e Prado [50] consideraram $\eta_{RN} \neq 0$ (modelo EFF com ruído) e $\eta_{RN} = 0$ (modelo EFF sem ruído).

Após um número muito grande de avalanches, quando todos os sítios da rede tiverem relaxado pelo menos uma vez, cada sítio da rede assumirá apenas valores de energia E_j que estejam em um dos intervalos

$$I_n = [(n-1)\alpha, (n-1)\alpha + n\epsilon], \quad (5.2)$$

onde $n = 1, 2, \dots, n_{max}$, corresponde ao número de vezes que o sítio j participou de alguma avalanche (a primeira vez como sítio crítico e as outras como vizinho de algum sítio crítico), sendo n_{max} o número máximo de vezes que cada sítio pode participar de alguma avalanche antes de tornar-se crítico. Se tomarmos $\epsilon < \alpha/n_{max}$ deixa de haver sobreposição dos respectivos intervalos. Assim, quando um sítio qualquer tiver energia em determinado intervalo, diremos simplesmente que o sítio em questão está ou pertence ao intervalo I_n . A probabilidade de que um sítio qualquer esteja no intervalo I_n é dada pela expressão

$$P_n = \int_{(n-1)\alpha}^{(n-1)\alpha + n\epsilon} \rho(E) dE, \quad (5.3)$$

onde $\rho(E)$ é a densidade de probabilidade de que um sítio qualquer da rede tenha energia E . Se N é o número total de sítios da rede, então NP_n corresponde à fração de sítios da rede que estão no intervalo I_n . A redistribuição de energia durante as avalanches faz com que os sítios sejam transferidos entre os intervalos I_n 's. Ao relaxar, o sítio crítico passa para o intervalo I_1 . Os seus k sítios vizinhos (que podem estar em qualquer intervalo I_n), devido a contribuição que recebem passam para o intervalo I_{n+1} . Em média kP_1 sítios são transferidos do intervalo I_1 para o intervalo I_2 . Quando $n \neq 1$, em média, kP_{n-1} sítios são transferidos do intervalo I_{n-1} para o intervalo I_n . Após um número muito grande de avalanches, os P_n 's devem obedecer às seguintes equações:

$$P_1(t+1) = P_1(t) + \frac{1}{N}[1 - kP_1(t)],$$

$$P_n(t+1) = P_n(t) + \frac{1}{N}[kP_{n-1}(t) - kP_n(t)],$$
(5.4)

onde t agora é o tempo na escala de tempo longa. No regime estacionário as grandezas não devem mais depender do tempo. Portanto, $P_n(t+1) = P_n(t)$, para qualquer intervalo I_n . Logo

$$kP_1 = 1,$$
(5.5)

$$P_{n-1} = P_n,$$

de onde conclui-se que $P_n = 1/k$. Portanto, a probabilidade de que um sítio qualquer da rede tenha energia em qualquer um dos intervalos I_n é $1/k$, qualquer que seja este intervalo I_n . Por outro lado, como $\rho(E)$ é normalizado é possível escrever

$$\sum_{n=1}^{n_{max}} P_n = \sum_{n=1}^{n_{max}} \frac{1}{k} = 1,$$
(5.6)

o que implica em $n_{max} = k$. Portanto, para que não haja sobreposição dos intervalos I_n os valores que ϵ deve tomar devem ser tais que

$$\epsilon < \frac{\alpha}{k}. \quad (5.7)$$

Dessa forma para o caso em que cada sítio possua 4 vizinhos, $\rho(E)$ será formado por 4 “picos” localizados em cada um dos 4 intervalos I_n 's.

Estamos agora em condições de calcular $\sigma_\infty(\alpha)$, que será igual ao número médio de sítios críticos gerados. Inicialmente vamos tratar o caso conservativo, $\alpha = 1/k$, o que implica $\epsilon < 1/k^2$. Para que o sistema seja crítico (e não super-crítico) é preciso que o limite superior do último intervalo I_k esteja abaixo do limiar crítico, ou seja,

$$(k-1)\alpha + k\epsilon < 1, \quad (5.8)$$

o que também garante que apenas os sítios que estão no último intervalo podem tornar-se críticos. Por outro lado, como todos os sítios que estão no último intervalo I_k recebem uma contribuição de pelo menos $1/k$, toda vez que estes sítios são atingidos por uma avalanche tornam-se críticos. Então o número médio de sítios críticos gerados é

$$\sigma = kP_k = k \frac{1}{k} = 1, \quad (5.9)$$

que corresponde à taxa de ramificação do sistema. Uma vez que σ_∞ é constante, podemos aplicar os resultados da teoria de processos ramificados simples (veja o apêndice B). Neste caso a distribuição de avalanches obedece uma lei de potência $P(s) \sim s^{-\tau}$, com expoente $\tau = 3/2$.

O cálculo da taxa de ramificação para o caso não conservativo é um pouco mais trabalhoso e exige o conhecimento explícito de $\rho(E)$ (detalhes desse cálculo são deixados para o apêndice D). Aqui também os sítios que

contribuem para a taxa de ramificação pertencem ao último intervalo, havendo uma pequena diferença em relação ao caso conservativo, pois nem todos os sítios que estão no último intervalo tornam-se críticos, como é o caso dos sítios com energia $E < 1 - \alpha - \epsilon$. Já os sítios com energia $E \geq 1 - \alpha$ sempre tornam-se críticos se atingidos por uma avalanche, contribuindo com

$$\sigma' = k \int_{1-\alpha}^1 \rho(E) dE, \quad (5.10)$$

para a taxa de ramificação. Usando a forma explícita de $\rho(E)$ (veja o apêndice D) a expressão acima pode ser reescrita como

$$\sigma' = \int_{\delta}^{\delta+\alpha} p(z_k) dz_k, \quad (5.11)$$

onde $z_k = E - (k - 1)\alpha$ e $\delta = 1 - k\alpha$.

Por sua vez, sítios com energia $1 - \alpha - \epsilon < E < 1 - \alpha$ poderão torna-se críticos, desde que recebam a quantidade adequada de ruído, isto é, $\eta > 1 - E - \alpha$. Com alguns argumentos simples é possível mostrar que a contribuição desses sítios para a taxa de ramificação é

$$\sigma'' = \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z_k) \left(1 - \frac{\delta - z_k}{\epsilon}\right) dz_k. \quad (5.12)$$

As expressões (5.11) e (5.12) permitem calcular a taxa de ramificação do sistema, $\sigma_{\infty} = \sigma' + \sigma''$, dada por

$$\sigma_{\infty} = 1 - \int_0^{\delta-\epsilon} p(z) dz - \frac{\delta}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z) dz + \frac{1}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} zp(z) dz. \quad (5.13)$$

Usando os resultados de processos ramificados também é possível calcular a distribuição de avalanches e o tamanho médio das avalanches. Maiores detalhes desses cálculos podem ser encontrado na referência [50]. O principal interesse aqui é investigar o comportamento da taxa de ramificação σ em função do parâmetro α .

Os mesmos cálculos podem ser realizados para o modelo EFF sem ruído, onde apenas o sítio que relaxa recebe ruído ($\eta_{RN}(t) = 0$). Nesse caso $\rho(E)$ assume a forma de k picos retangulares de altura $1/k\epsilon$ e os valores permitidos de energia são $E = (n-1)\alpha + \epsilon$. Os únicos sítios que podem torna-se críticos são aqueles pertencentes ao último pico. Assim a taxa de ramificação desse sistema é

$$\sigma = k \frac{1}{k\epsilon} \int_{1-\alpha}^{(k-1)\alpha+\epsilon} dE, \quad (5.14)$$

e portanto

$$\sigma = \begin{cases} 1 - \delta/\epsilon & 0 < \delta < \epsilon \\ 0 & \delta > \epsilon \end{cases} \quad (5.15)$$

Na Figura 5.1 apresentamos o comportamento da taxa de ramificação para o modelo EFF com ruído (linhas cheias e mais finas), sem ruído (linhas pontilhadas) e uma curva teórica que corresponderia à observação de SOC genérica. Na ausência de ruído podemos perceber que grandes avalanches só poderão se manifestar quando α estiver muito próximo de $1/k$, sendo facilmente percebido por meio da distribuição de eventos, que o sistema só apresenta criticalidade para $\alpha = 1/k$. No entanto, quando é acrescentado ruído ao sistema, mesmo em pequenas quantidades, grandes avalanches estão presentes para toda uma região próximo à $\alpha = 1/k$. Nesses casos fica difícil distinguir quase-criticalidade de criticalidade por meio de simulações numéricas, onde busca-se observar a distribuição de eventos apenas, como vem sendo feito tradicionalmente na literatura.

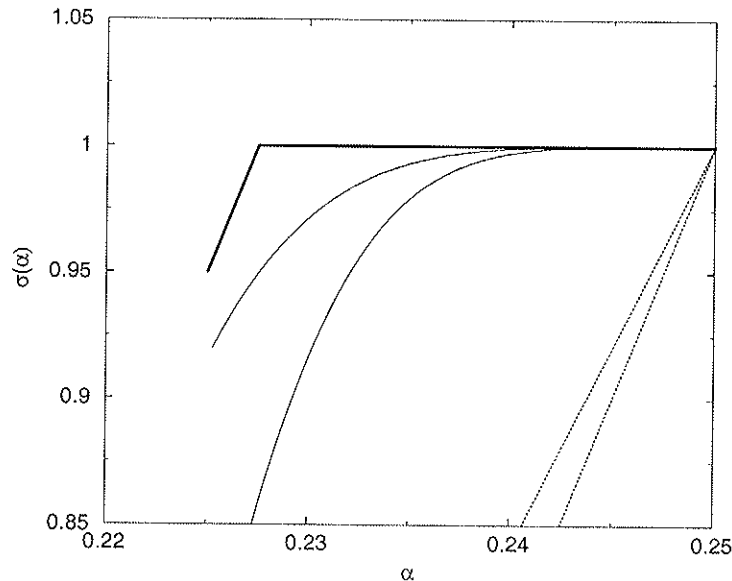


Figura 5.1: A linha grossa corresponde a Criticalidade auto-organizada genérica. As duas curvas em linha cheia mais fina correspondem ao modelo EFF com ruído para $\epsilon = 0.0625$, (curva que começa mais a esquerda) e $\epsilon = 0.05$, (curva que começa mais a direita). As duas curvas com linha pontilhada correspondem ao modelo EFF sem ruído, para $\epsilon = 0.25$ (curva que começa mais a direita) e $\epsilon = 0.2$ (curva que começa mais a esquerda).

5.3 Criticalidade no modelo OFC

Inspirados pelo trabalho de Prado e Kinouchi [50] revisitamos o modelo OFC propondo uma nova maneira de abordar o modelo. Já introduzimos o modelo OFC no capítulo 3, mostrando como suas regras de evolução podem ser obtidas a partir do modelo mecânico de Burridge e Knopoff. Também já discutimos aspectos relacionados a sua simulação. No entanto, deixamos para este capítulo, as principais questões envolvendo a criticalidade deste modelo, que será apresentada na próxima subsecção. Em seguida apresentaremos nossas sugestões no sentido de tentar estudar o modelo OFC e demais modelos

de criticalidade auto-organizada de uma outra maneira.

5.3.1 Principais resultados

Evidências numéricas apontam a presença de SOC neste modelo mesmo no regime dissipativo ($\alpha < 1/4$). Este é um resultado inesperado, já que sistemas dinâmicos fora do equilíbrio, dirigidos e sujeitos a um ruído branco externo apenas, exibem invariância de escala na presença de leis de conservação [51]. Portanto, a invariância de escala no modelo OFC no regime não conservativo sugere a existência de um novo mecanismo responsável pelo surgimento de criticalidade em modelos de criticalidade auto-organizada. De um ponto de vista teórico é bastante desejável a existência de modelos localmente dissipativos exibindo SOC, pois os sistemas físicos naturais raramente são conservativos. Os resultados de diversas simulações efetuadas por diversos autores mostram a existência de invariância de escala na distribuição de eventos desde o regime conservativo ($\alpha = 0.25$) até um certo valor α_c , cujo valor nunca ficou bem definido. No trabalho que introduziu o modelo na literatura, baseado em simulações em redes de tamanho $25 < L < 45$, os autores concluem que $\alpha_c = 0.05$ e que a distribuição de eventos obedece a um FSS [52]. Posteriormente, simulações efetuadas em redes maiores, levaram Grassberger a concluir que $\alpha_c = 0.18$ e que o modelo não obedecia a FSS [53]. Middleton e Tang propuseram $\alpha_c = 0^+$ [41]. De acordo com estes autores os sítios pertencentes à bordas do modelo funcionariam como fontes de ruído, pois devido ao menor número de vizinhos não apresentariam a mesma tendência à sincronização que os demais sítios pertencentes ao interior da rede. A inhomogeneidade criada pelos sítios pertencentes à borda penetrariam lentamente no interior da rede, sendo que o tempo necessário para varrer toda a rede aumentaria à medida que α decrescesse. Assim, seria necessário

esperar um tempo muito grande para poder observar invariância de escala para valores de α pequenos.

Também foi estudada a robustez das leis de potência exibidas pelo modelo OFC na presença de desordem. Christensen [54] investigou o modelo OFC sendo perturbado de forma análoga ao modelo BTW, ou seja, escolhendo um sítio aleatório para acrescentar a perturbação δE . Para grandes valores de δE a distribuição das grandezas apresentam um decaimento exponencial. No entanto, quando $\delta E \rightarrow 0$ a distribuição se aproxima cada vez mais de uma lei de potência. János e Kertész consideraram o modelo OFC onde o limiar F_{th} a partir do qual o sítio torna-se crítico variava de sítio a sítio [55]. Eles observaram que para $\alpha = 0.25$ o sistema continuava a exibir invariância de escala, que no entanto não sobrevive no regime dissipativo. O modelo OFC com desordem no parâmetro conservativo α foi investigado por Mosseau [56]. Durante o processo de relaxamento, cada sítio o fazia com um determinado valor do parâmetro dissipativo, $\alpha_i = \alpha + \delta_i$, onde $\delta_i \in [-\delta, \delta]$. Simulações em uma rede de tamanho $L = 100$ e condições não periódicas de contorno revelou um diagrama $\delta \times \alpha$ rico, onde havia regiões em que o sistema sincronizava, exibia invariância de escala e decaimento exponencial. Considerando condições de contorno periódicas o sistema apenas exibia um decaimento exponencial.

Devido às fortes correlações espaciais e temporais é muito difícil obter resultados analíticos no modelo OFC. De um modo geral as investigações sobre o modelo OFC se fazem por meio de simulações numéricas, onde determinando o comportamento da distribuição de avalanches. Quando a distribuição de avalanches obedece a uma lei de potência por várias décadas, assume-se que o modelo exibe SOC. Entretanto, os diversos resultados sobre o modelo OFC devem ser recebidos com muita cautela. Vamos supor, por exemplo, que a

distribuição de avalanches obedeça a uma relação $P(s) \sim s^{-\tau} \exp(-s/s_o)$, onde $s_o \sim L^\nu$, sendo que s_o só cresce até um certo tamanho de rede L^* . Simulações efetuadas em redes de tamanho $L < L^*$ indicariam invariância de escala na distribuição de avalanches, levando-nos a crer que o sistema exibe SOC. Infelizmente, até o momento, não existe nenhum algoritmo que permita indentificar, a priori, qual seria esse tamanho de rede L^* .

5.3.2 Taxa de ramificação no modelo OFC

Revisitamos o modelo OFC explorando as idéias contidas no trabalho de Kinouchi e Prado [50]. Em vez de estudar o modelo observando o comportamento da distribuição de eventos do sistema, como vem sendo feito na literatura, tentamos identificar a variável dinâmica σ_t que controla o processo das avalanches, como sugerido por Kinouchi e Prado. Uma vez que $\rho_t(E)$ não assume uma forma simples no modelo OFC, não temos como determinar σ_t a priori. Também sabemos que os resultados de processos ramificados não se aplicam ao modelo OFC. Um processo ramificado simples consiste de uma partícula inicial que gera $n = 0, 1, \dots, \infty$ novas cópias idênticas com probabilidade p_n . Por sua vez, cada uma dessas novas partículas geram novas n cópias, sempre com a mesma probabilidade p_n e independentemente das outras partículas. Na Figura 5.2 apresentamos um processo ramificado simples representado por uma estrutura em forma de árvore. A cada nodo dessa árvore associamos uma partícula. O tamanho da população na n -ésima geração é representada pela variável Z_n e o tamanho total da população $s = Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots$. Para um processo ramificado simples $Z_0 = 1$ sempre. Como cada partícula sempre produz novas cópias de si mesma independentemente das demais e sempre com a mesma probabilidade, cada nodo dessa árvore é equivalente aos demais nodo da árvore. Essa propriedade permite a

obtenção de resultados analíticos (veja o apêndice B). A probabilidade de extinção está associada ao valor assumido pela taxa de ramificação σ , definida como

$$\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} np_n. \quad (5.16)$$

Quando $\sigma < 1$ a probabilidade de extinção do processo é igual a um. No entanto, quando $\sigma \geq 1$ existe uma probabilidade finita de que o processo não se extinga nunca. Para $\sigma = 1$ a probabilidade de que o tamanho total da população seja s é dado por $P(s) \sim s^{-3/2}$. Também é possível mostrar que

$$\langle s \rangle = \begin{cases} 1/(1 - \sigma), & \sigma < 1 \\ \infty, & \sigma \geq 1 \end{cases} \quad (5.17)$$

Avalanches ocorrendo em modelos com estrutura espacial também podem ser vistos como uma estrutura em forma de árvore, onde os sítios críticos correspondem aos nodos. No entanto, a simples presença de uma estrutura espacial introduz correlações e os resultados de processos ramificados simples não podem mais ser aplicados. Na Figura 5.3 mostramos esquematicamente como essas correlações podem surgir por meio de uma hipotética avalanche. O processo se inicia com o sítio representado pela bolinha cheia. Ao redistribuir uma fração de sua energia para seus primeiros vizinhos, dois destes ficam críticos (sítios com bolinhas vazias). Note que temos dois sítios críticos que possuem um vizinho em comum, representado pelo quadrado cheio. Para que este sítio torne-se crítico é necessário que ele receba um valor adequado de energia dos dois sítios representado por bolinhas vazias. Vemos assim que em uma avalanche ocorrendo em modelo com estrutura espacial a probabilidade de um sítio produzir novas cópias pode ser afetada por outros sítios. Ou seja, se visualizarmos a avalanche como uma estrutura em forma de árvore,

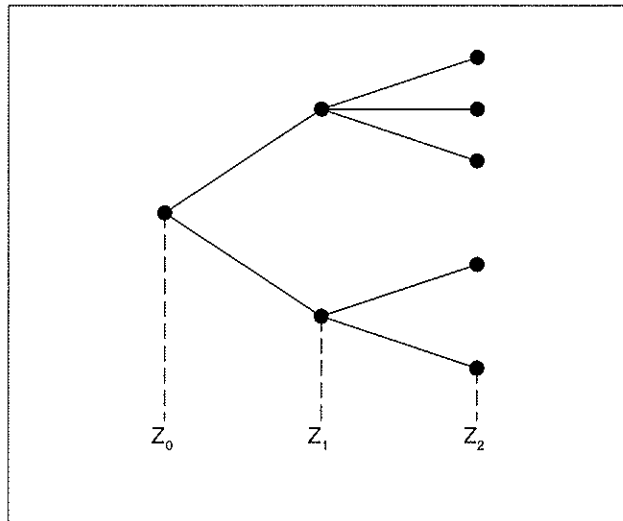


Figura 5.2: Estrutura em árvore para um processo ramificado simples. O processo se inicia com uma partícula que produz n cópias idênticas de si mesma com probabilidade p_n . Cada cópia por sua vez produz n novas cópias idênticas com probabilidade p_n e assim sucessivamente. A variável Z_n corresponde ao tamanho da população na n -ésima geração. Em um processo ramificado simples temos sempre $Z_0 = 1$.

onde cada nodo corresponde a um sítio crítico, a probabilidade de um nodo qualquer na geração n produzir novos nodos na geração $n + 1$ depende dos outros nodos na geração n . Portanto, avalanches ocorrendo em modelos com estruturas espacial não correspondem a um processo ramificado simples.

Em face das dificuldades de uma abordagem analítica, tratamos o problema numericamente. Uma vez que não é possível determinar σ_t a priori, foi necessário definir uma grandeza σ que correspondesse de σ_t . Sugerimos que σ fosse igual ao número médio de sítios críticos gerados a partir do relaxamento de cada um dos sítios críticos participando de um número significativo de avalanches. Na prática, para cada sítio crítico medimos o número b de

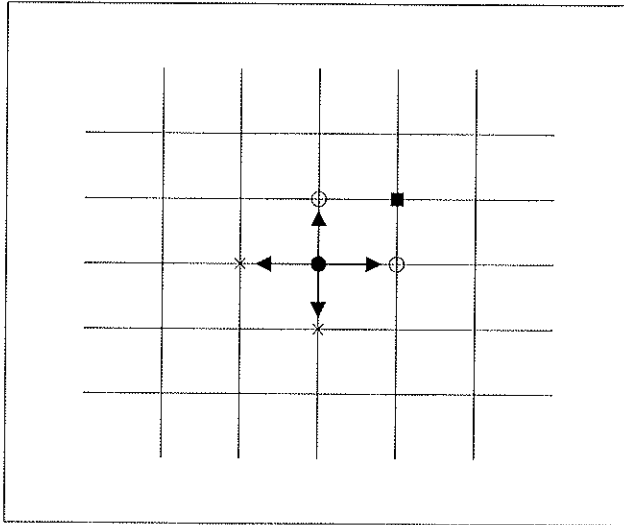


Figura 5.3: O esquema acima mostra uma hipotética avalanche. O sítio que deflagra a avalanche está representado por uma bolinha cheia. Ao redistribuir sua energia para os seus primeiros vizinhos, dois destes acabam tornando-se críticos (sítios representados por bolinhas vazias). Note que o sítio representado por um quadrado cheio recebe energia de dois sítios críticos.

novos sítios críticos gerados, realizando uma estatística para um conjunto suficientemente grande de avalanches. Sendo $N(b)$ o número total, isto é, ao longo de diversas avalanches, de sítios que produzem b novos sítios críticos, a expressão para σ é dado por

$$\sigma = \frac{\sum_b bN(b)}{\sum_b N(b)}. \quad (5.18)$$

Uma vez que as atualizações dos sítios críticos no modelo OFC é síncrona, haverá situações em que mais de um sítio produz um único sítio crítico (como por exemplo, na Figura 5.3). Nessas situações contamos $1/n$ para cada um dos n 's “pais”.

Também é possível resgatar um resultado simples de processo ramificados.

Se aplicarmos a definição (5.18) para uma única avalanche, obtemos

$$\sigma_i = \frac{\sum_b b N_i(b)}{N_i(b)} = \frac{s_i - 1}{s_i}, \quad (5.19)$$

onde s_i é o tamanho da i -ésima avalanche, $N_i(b)$ corresponde ao número de sítios críticos dentro dessa avalanche que produzirão b novos sítios críticos e σ_i a taxa de ramificação média para essa avalanche. Para determinarmos a taxa de ramificação média considerando agora um conjunto muito grande de avalanches é necessário conhecer o peso da taxa de ramificação individual de cada avalanche. Esse peso é proporcional ao tamanho da avalanche. Assim,

$$\sigma = \frac{\sum_i \sigma_i s_i}{\sum_i s_i} = 1 - \frac{1}{\langle s \rangle}, \quad (5.20)$$

onde $\langle s \rangle$ é o tamanho médio da avalanche.

Também podemos interpretar σ como a probabilidade de um sítio visitado por uma avalanche tornar-se crítico. Basta considerar como conjunto universo todos os sítios vizinhos aos sítios críticos participando do total de avalanches consideradas. Os sítios críticos produzidos a cada relaxamento de um sítio crítico correspondem aos eventos favoráveis. Note que σ depende do estado microscópico do sistema. Se medirmos σ para uma avalanche apenas, quanto maior for a avalanche mais próximo da unidade será o valor de σ . Assim, o valor assumido por σ , quando medido sobre diversas avalanches, reflete a proporção entre grandes e pequenas avalanches que o sistema apresentou. Se o sistema já se encontra no estado estatisticamente estacionário, então o valor de σ deve convergir para um valor fixo (se tomarmos um conjunto suficientemente grande de avalanches). Portanto, σ caracteriza o estado macroscópico do sistema. Intuitivamente é fácil perceber que quando $\sigma = 1$ o sistema é crítico, pois nesse caso haverá, em média, sempre um sítio crítico sendo produzido. Em um processo ramificado simples, σ corresponderia à

taxa de ramificação do sistema. Mesmo sabendo que avalanches que ocorrem em modelos com estrutura espacial não correspondem a um processo ramificado simples, ainda assim denominaremos σ de taxa de ramificação.

Alguns cuidados precisam ser tomados, em trabalhos numéricos, uma vez que fatores não relacionados diretamente com a física do problema podem influir nos resultados. De um ponto de vista físico esperamos que σ deva depender do parâmetro de conservação α . Uma vez que nossas simulações foram realizadas em redes finitas, também haverá uma dependência com o tamanho do sistema. Porém, em nossas simulações, também percebemos uma leve dependência de σ com a configuração inicial. A dependência em relação a configuração inicial pode ser eliminada realizando médias para os diversos valores de σ medido a partir de diferentes condições iniciais. Obviamente nossos resultados foram obtidos quando o sistema já se encontrava no regime estacionário. Na determinação do regime estacionário usamos os procedimentos descritos no capítulo 3. Assim, os resultados obtidos dependem apenas de α e L , isto é, $\sigma = \sigma(\alpha, L)$. Medimos $\sigma(\alpha, L)$ para diversos valores de α e L com o intuito de observar a dependência de σ em relação a essas variáveis.

Na Figura 5.4 é apresentada a evolução da taxa de ramificação de $\sigma(\alpha, L)$ em função do parâmetro de conservação α , considerando redes de tamanho $L = 100$. As curvas representam resultados para o modelo OFC (bolinhas) e o modelo R-OFC (quadrados). O comportamento do modelo R-OFC é conhecido, apresentando criticalidade apenas no regime conservativo (veja capítulo 4). Comparando as duas curvas vemos que a evolução da taxa de ramificação para ambos os modelos é bastante similar. À medida que nos aproximamos do regime conservativo, a taxa de ramificação lenta e gradualmente se aproxima de um. Não há qualquer evidência de descontinuidade

que pudesse indicar que $\sigma = 1$ para $\alpha < 0.25$. Nas Figuras 5.5 e 5.6 apresentamos a dependência da taxa de ramificação com o inverso do tamanho da rede. Para o modelo OFC (veja a Figura 5.5) a taxa de ramificação parece crescer quase linearmente. Isso significa que mesmo para $\alpha = 0.24$ se fizemos $L \rightarrow \infty$ teremos $\sigma < 1$. Se bem que nesse caso a taxa de ramificação teria um valor próximo de um e o sistema seria quase-crítico. Dentro desse cenário, as inhomogeneidades criadas pela borda, que até então vinha sendo visto como o mecanismo responsável pelo surgimento de invariância de escala, funcionariam como fontes de ruído que levariam a um comportamento quase-crítico, assim como ocorre como o modelo EFF.

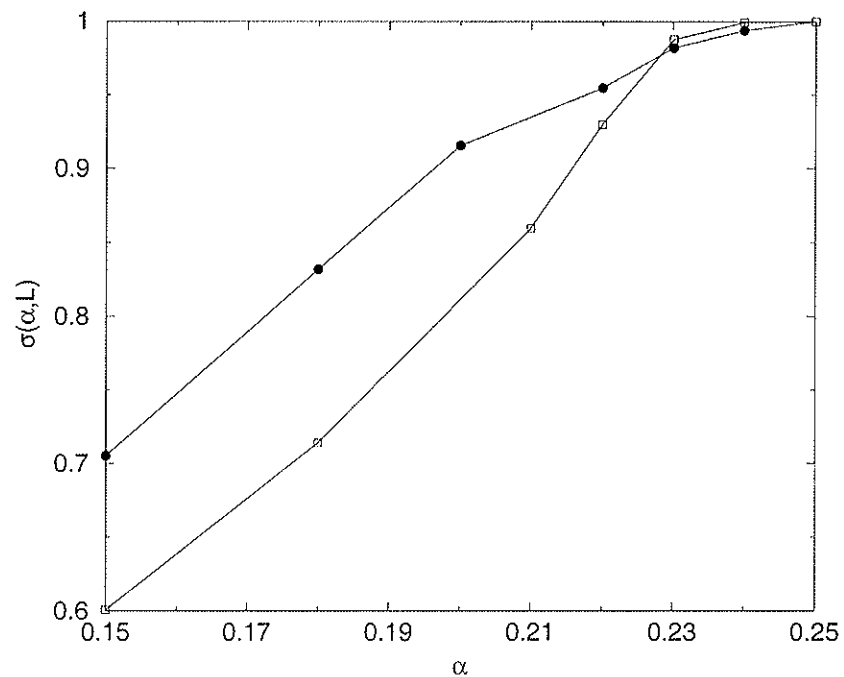


Figura 5.4: Taxa de ramificação em função do parâmetro de dissipação α . Os pontos representados por bolinhas (quadrados) correspondem à taxa de ramificação obtida para o modelo OFC (R-OFC). O tamanho de rede considerado foi $L = 100$.

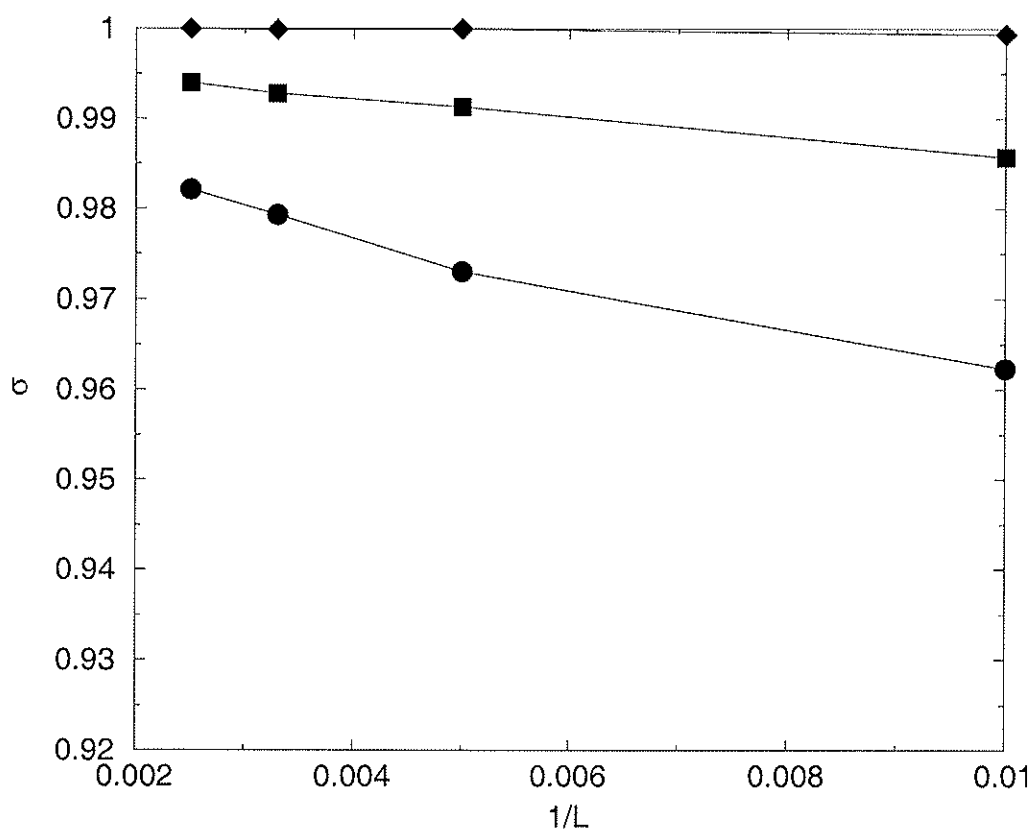


Figura 5.5: Taxa de ramificação para o modelo OFC em função do inverso do tamanho da rede. Cada curva se refere a um determinado valor de do parâmetro de conservação α .

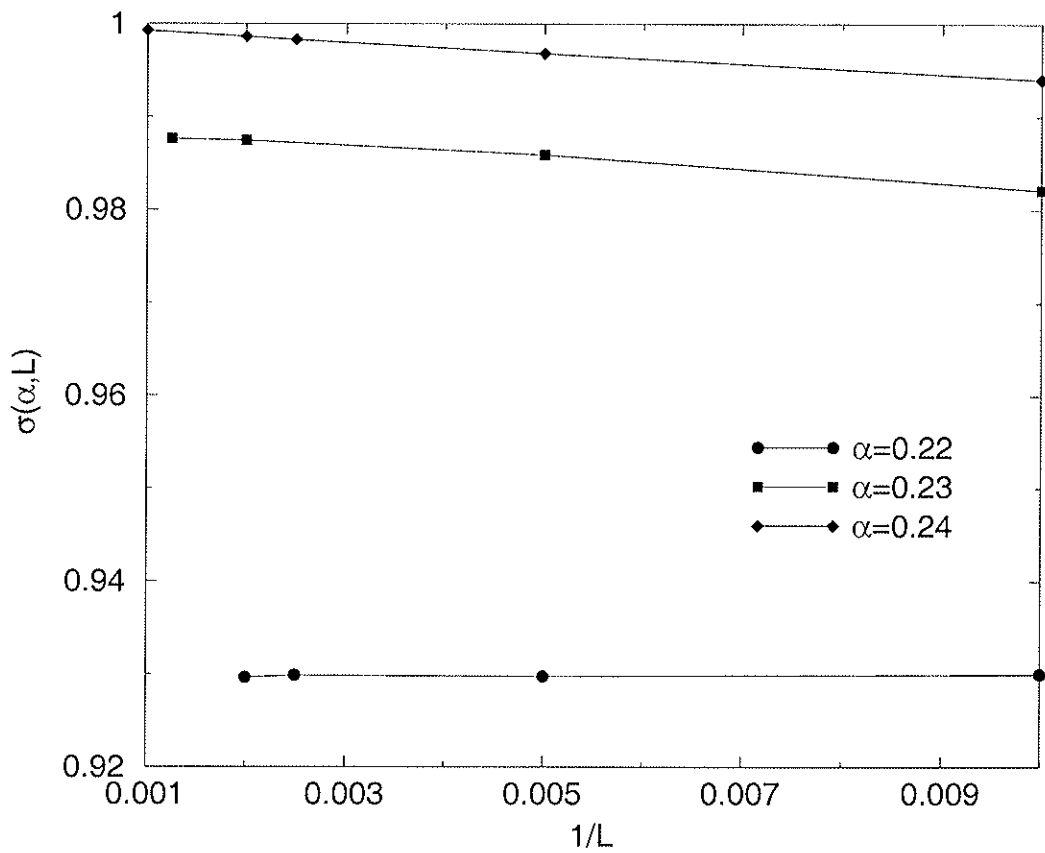


Figura 5.6: Taxa de ramificação para o modelo R-OFC em função do inverso do tamanho da rede. Cada curva se refere a um determinado valor do parâmetro de conservação α .

Capítulo 6

Conclusões

O tema central dessa tese foi o modelo OFC. Este é um dos poucos modelos proposto dentro do contexto de SOC com dinâmica local não conservativa e que apresenta evidências de criticalidade. O modelo apresenta fortes correlações espaciais e temporais que impedem um tratamento analítico. Por isso o modelo de um modo geral sempre é estudado por meio de simulações numéricas. Por outro lado longos transientes dificultam a simulação desse modelo. No capítulo 3 dessa tese mostramos como as regras de evolução do modelo podem ser obtida a partir de um modelo mecânico massa-mola. Na outra parte do capítulo nos dedicamos a detalhes da simulação do modelo. Apresentamos um método para determinar quando o sistema entra no regime estacionário. Notamos que para $\alpha = 0.25$ e $\alpha = 0.24$ a relação entre o tempo associado ao transiente e o tamanho rede é uma lei de potência, mas com expoente bastante diferente o que indicaria classes de universalidade diferentes. Desenvolvemos um método, a partir do qual, para uma escolha adequada da configuração inicial é possível reduzir o tempo necessário para o sistema atingir o estado estacionário. No capítulo 4 revistamos o modelo OFC explorando as idéias de quase criticalidade proposta por Prado e Kinouchi.

Ao invés de observar a distribuição de eventos, como vem sendo feito na literatura, procuramos definir uma grandeza, que em um processo ramificado simples seria a taxa de ramificação do sistema. Essa grandeza depende basicamente do parâmetro dissipativo do sistema e do tamanho da rede. Nossos resultados mostram que o modelo se comporta de forma bastante similar à versão aleatória do modelo OFC e só é crítico no regime conservativo. Também investigamos a dependência dessa grandeza com o tamanho da rede. Aparentemente nossos resultados parecem ser válidos mesmo quando o tamanho do sistema tende ao infinito. Não temos a pretensão de afirmar que nossos resultados são conclusivos, uma que são evidências numéricas. No entanto, apresentamos uma outra forma de analisar o problema e propusemos um novo cenário para explicar a observação de leis de potência no regime não conservativo.

Apêndice A

Algumas considerações sobre *finite size scaling*

As transições de fase em sistemas em equilíbrio termodinâmico ocorrem apenas no limite termodinâmico, isto é, quando o número de partículas N e o volume do sistema V tendem a infinito, com a densidade $\rho = N/V$ mantida fixa. No entanto, em realizações experimentais, os sistemas apresentam transições de fase caracterizadas por aparentes singularidades nas grandezas termodinâmicas. Nestes casos, apesar de N e V (se comparado com as dimensões de cada partícula) serem grandes, ainda assim são finitos. Como explicar esta suposta contradição? Além disso, por que as aparentes singularidades nas funções termodinâmicas muitas vezes coincidem com as divergências obtidas em cálculos teóricos? Seria mera coincidência? As respostas para estas e outras perguntas são dadas pela teoria da análise de tamanho finito (*finite size scaling*-FSS). De um ponto de vista estritamente formal, esta teoria considera o limite em que o sistema está muito próximo do ponto crítico e seu tamanho tende ao infinito. Entretanto, suas conclusões podem ser empregadas em sistemas bem menores. Desta forma, é possível

obter informações a respeito de parâmetros críticos para sistemas infinitos, estudando como as grandezas termodinâmicas variam com o tamanho, em sistemas finitos.

A idéia básica da teoria de FSS é que a magnitude dos efeitos de tamanho finito são determinados pelo comprimento de correlação do parâmetro de ordem, cujo comportamento próximo ao ponto crítico é

$$\xi \sim t^{-\nu}, \quad t \rightarrow 0, \quad (\text{A.1})$$

onde $t = (T - T_c)/T_c$ e T_c é a temperatura crítica. O comportamento das diversas grandezas termodinâmicas passam a depender de

$$y = L/\xi(L) \sim lt^\nu, \quad (\text{A.2})$$

onde L é o comprimento linear do sistema considerado, $l = L/a$, sendo a algum comprimento microscópico (por exemplo, o espaçamento de rede para um hipercubo d -dimensional de comprimento L).

Desta forma o comportamento crítico característico do limite termodinâmico ocorreria para $y \gg 1$. Por outro lado, quando $y \ll 1$ os efeitos de tamanho finito devem se manifestar nas diversas grandezas termodinâmicas.

A hipótese de escala da teoria FSS [58] postula que para uma grandeza termodinâmica $X_L(T)$, que está próxima à criticalidade e no limite termodinâmico, comporta-se como

$$X_\infty \sim C_\infty t^{-\rho}, \quad (\text{A.3})$$

onde $t = (T - T_c)/T_c \rightarrow 0$, para sistemas finitos, tenha seu comportamento descrito por

$$X_L(T) \sim l^\omega Q_P(l^{1/\nu}t), \quad (\text{A.4})$$

A função $Q(x)$ comporta-se assintoticamente da maneira descrita abaixo

$$Q(x) \sim \begin{cases} C_\infty x^{-\rho}, & \text{para } x \rightarrow \infty, \\ Q_0, & \text{para } x \rightarrow 0. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Desta forma, para t fixo e $l \rightarrow \infty$,

$$X_T(L) \sim C_\infty l^{\omega - \rho/\nu} t^{-\rho}, \quad (\text{A.6})$$

de onde conclui-se que $\omega = \rho/\nu$. Por outro lado para $t \rightarrow 0$ e l mantido fixo

$$X_T(L) \sim Q_0 l^\omega. \quad (\text{A.7})$$

Este resultado mostra que o comportamento das propriedades termodinâmicas para sistemas finitos dependem de expoentes críticos do sistema no limite termodinâmico. Assim é possível calcular os expoentes críticos a partir de sistemas finitos.

A teoria de FSS foi desenvolvida no contexto de transições de fases contínuas. No entanto, análise semelhantes podem ser feitas para sistemas resultados de simulações de modelos de Mecânica Estatística fora do equilíbrio.

Apêndice B

Processos ramificados

O estudo de processos ramificados tem início por volta de 1874 com Francis Galton e H. W. Watson. Foi a primeira vez que o problema da extinção de certos sobrenomes foi estudado em termos matemáticos. Na época, acreditava-se que melhores condições de vida seriam inevitavelmente acompanhadas de uma redução na taxa de fertilidade da população. Essa era a explicação comumente aceita para a extinção de sobrenomes, outrora muito comuns, de origem nobre. No entanto, os resultados dos trabalhos de Galton e Watson mostraram que esta hipótese era infundada. A probabilidade de extinção de uma família não tinha nenhuma relação com o fato da família ser de origem nobre ou não.

O interesse do estudo de processos ramificados é descrever como evolui determinada população sujeita a determinadas taxas de fertilidade. Em sua versão mais simples, também denominado processo de Galton-Watson, uma partícula inicial (uma bactéria, um neutron em uma reação em cadeia, etc.), na geração zero, se reproduz gerando $k = 0, 1, 2, \dots$ novas cópias de si mesma,

todas idênticas, com probabilidade p_k . O conjunto p_k satisfaz

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \quad (\text{B.1})$$

As partículas resultantes fazem parte da primeira geração. Estas partículas, por sua vez, se reproduzirão, independentemente umas das outras, gerando k novos “filhos” com probabilidade p_k .

A probabilidade p_k , de que uma partícula qualquer gere k novas cópias, pode ser interpretada como a probabilidade condicional de que na primeira geração o tamanho da população seja k . Isto é, se Z_n é o tamanho da população na geração n

$$P(Z_0|Z_1 = k) = k, \quad (\text{B.2})$$

sendo $Z_0 = 1$ sempre. Se o tamanho da amostra na geração $n - 1$ é l , a probabilidade condicional de que a geração n tenha tamanho Z_n é igual a distribuição de l variáveis aleatórias com distribuição p_k (portanto, idênticas a Z_1). Assim, $Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ corresponde a um conjunto de variáveis aleatórias. Os principais resultados são obtidos por meio da função geratriz

$$f(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k, \quad |u| \leq 1. \quad (\text{B.3})$$

É importante definir uma grandeza σ , que denominaremos taxa de ramificação, que na verdade corresponde ao primeiro momento de Z_1 , que é dada por

$$\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i. \quad (\text{B.4})$$

Abaixo apresentamos um resultado básico para a probabilidade de extinção do processo Galton-Watson.

Teorema 1 *Se $\sigma < 1$, a probabilidade de extinção é igual a 1. Se $\sigma \geq 1$, a probabilidade de extinção é a única solução não negativa menor que 1 da*

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3656

ex. 1

equação

$$s = f(s). \quad (\text{B.5})$$

A demonstração do teorema acima não é difícil. Para maiores detalhes e mais resultados a respeito do processo Galton-Watson e outros tipos de processos ramificados veja a referência [60].

B.1 Modelos de criticalidade como processos ramificados

Nos modelos de criticalidade auto-organizada com vizinhos tomados aleatoriamente, a cada relaxamento de um sítio crítico as avalanches possuem estrutura de árvore. Vamos imaginar que em um desses modelo (R-OFC, EFF, etc..) a probabilidade de um sítio qualquer da rede, atingido por uma avalanche, de ficar crítico seja p . Portanto, a probabilidade p_l de um sítio crítico, com k vizinhos, produzir l novos sítios críticos é

$$p_l = \binom{k}{l} (1-p)^{k-l} p^l. \quad (\text{B.6})$$

A função geratriz dada por

$$f(u) = \sum_{l=0}^k p_l u^l, \quad (\text{B.7})$$

neste caso torna-se

$$f(u) = (1 - p + up)^k. \quad (\text{B.8})$$

O tamanho s de uma avalanche é igual ao número total de partículas geradas no processo, ou seja,

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n, \quad (\text{B.9})$$

De acordo com um teorema devido a Dwass [59] a distribuição dos tamanhos de avalanches $P(s)$ é dada por

$$P(s) = \frac{1}{s} a_{s-1}^{(s)}, \quad s \geq 1. \quad (\text{B.10})$$

onde $a_{s-1}^{(s)}$ é o coeficiente linear da expansão em série de Taylor de $[f(u)]^s$, ou seja,

$$[f(u)]^s = a_0^{(s)} + a_1^{(s)}u + a_2^{(s)}u^2 + \dots \quad (\text{B.11})$$

Tomando a expressão (B.8) e elevando a s -ésima potência encontramos que o termo geral $a_r^{(s)}$ da expansão é dado pela expressão

$$a_r^{(s)} = \binom{ks}{r} (1-p)^{ks-r} p^r. \quad (\text{B.12})$$

Usando o resultado (B.10) encontramos a distribuição de probabilidades do tamanho das avalanches

$$P(s) = \frac{1}{s} \binom{ks}{s-1} (1-p)^{(k-1)s+1} p^{s-1}. \quad (\text{B.13})$$

De acordo com o teorema de limite de Moivre-Laplace (veja [61]) quando $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\delta_k/2npq}, \quad (\text{B.14})$$

onde $\delta_k = k - np$. Usando o teorema acima para $s \rightarrow \infty$ a expressão (B.13) torna-se

$$P(s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi kp(1-p)}} s^{-3/2} e^{-s/s_\xi}, \quad (\text{B.15})$$

e $s_\xi = 2kp(1-p)/(1-kp)$. Para $p = 1/k$ (caso conservativo) $s_\xi \rightarrow \infty$ e $P(s)$ se reduz a

$$P(s) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-1/k)}} s^{-3/2}. \quad (\text{B.16})$$

Apêndice C

Ánalyse de momentos

C.1 Parte A

Consideremos a função distribuição de probabilidade $P(x, L)$ de uma quantidade x , para uma rede de tamanho L . A quantidade x pode ser o tamanho, a área ou a duração de uma avalanche. Ao longo deste apêndice vamos considerar o tamanho da avalanche s . No entanto, os resultados são de caráter geral, valendo quaisquer que sejam as grandezas consideradas (como por exemplo a área ou duração da avalanche).

O q -ésimo momento da distribuição $P(s, L)$, onde s corresponde ao tamanho da avalanches, é dada por

$$\langle s^q \rangle = \int s^q P(s, L) ds. \quad (\text{C.1})$$

Como veremos ao durante o desenrolar dos cálculos, o uso da distribuição integrada de eventos, definida como

$$\mathcal{P}(s, L) = \int_s^\infty P(x, L) dx, \quad (\text{C.2})$$

permite uma grande simplificação dos cálculos. Para não carregar muito a notação, representaremos a distribuição integrada de eventos apenas por

$\mathcal{P}(s)$. Derivando ambos os lados da expressão acima com relação a s , obtemos

$$d\mathcal{P} = -P(s, L) ds. \quad (\text{C.3})$$

Assim, (C.1) pode ser reescrito como

$$\langle s^q \rangle = - \int_0^\infty s^q d\mathcal{P}, \quad (\text{C.4})$$

que, integrando por partes, torna-se

$$\langle s^q \rangle = s^q \mathcal{P}(s) \Big|_{s_{min}}^{s_{max}} + q \int s^{q-1} \mathcal{P}(s) ds, \quad (\text{C.5})$$

onde s_{max} e s_{min} são os maiores e menores valores que s pode assumir. Mais adiante veremos que o primeiro termo do lado direito da igualdade acima se anula à medida que $s_{max} \rightarrow \infty$. Assim,

$$\langle s^q \rangle = q \int s^{q-1} \mathcal{P}(s) ds, \quad (\text{C.6})$$

ou, explicitamente,

$$\langle s^q \rangle = q \int ds s^{q-1} \int_s^\infty P(x, L) dx \quad (\text{C.7})$$

O espectro multifractal associada com o logaritmo da função distribuição integrada é

$$f(\alpha) = \frac{\ln \left[\int_s^\infty P(x, L) dx \right]}{\ln L}, \quad (\text{C.8})$$

onde $\alpha = \ln s / \ln L$ é fixado e assume-se também que $L \rightarrow \infty$. A expressão acima pode ser reescrita como

$$\int_s^\infty P(x, L) dx = L^{f(\alpha)}. \quad (\text{C.9})$$

Desde que $\ln s = \alpha \ln L$, a igualdade abaixo é verdadeira

$$s^{-1} ds = \ln L d\alpha, \quad (\text{C.10})$$

e a expressão (C.7) torna-se

$$\langle s^q \rangle = q \ln L \int d\alpha L^{[q\alpha + f(\alpha)]}, \quad (\text{C.11})$$

onde usamos a identidade $s = L^\alpha$. A fim de explorar o limite $L \rightarrow \infty$, é mais conveniente colocar a expressão acima na forma

$$\langle s^q \rangle = \int d\alpha \exp \{ [\alpha q + f(\alpha)] \ln L + \ln(\ln L^q) \}, \quad (\text{C.12})$$

onde usamos $y = \exp(\ln y)$. Usando o teorema de L'Hôpital não é difícil mostrar que

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\ln(\ln L^q)}{\ln L} = 0. \quad (\text{C.13})$$

Portanto, no limite $L \rightarrow \infty$ (C.12) se reduz a

$$\langle s^q \rangle = \int d\alpha \exp \{ [f(\alpha) + \alpha q] \ln L \}. \quad (\text{C.14})$$

Usando o método ponto de sela, podemos aproximar a integral acima por

$$\langle s^q \rangle \sim L^{\sigma(q)}, \quad (\text{C.15})$$

onde $\sigma(q) = \max[f(\alpha) + \alpha q]$.

Vamos analisar agora o primeiro termo da igualdade (C.5), isto é,

$$s^q \mathcal{P}(s) \Big|_{s_{min}}^{s_{max}} = s_{max}^q \mathcal{P}(s_{max}) - s_{min}^q \mathcal{P}(s_{min}), \quad (\text{C.16})$$

sendo $\mathcal{P}(s_{max})$ dada pela expressão (C.2). No limite $L \rightarrow \infty$ teremos também $s_{max} \rightarrow \infty$. Portanto, o termo dominante na expressão acima é $s_{max}^q \mathcal{P}(s_{max})$.

Usando a identidade $y = \exp(\ln y)$, é possível escrever

$$\begin{aligned} s_{max}^q \mathcal{P}(s_{max}) &= \exp \{ \ln [s_{max}^q \mathcal{P}(s_{max})] \}, \\ &= \exp \{ \ln \mathcal{P}(s_{max}) + q \ln s_{max} \}, \\ &= \exp \left\{ \ln \mathcal{P}(s_{max}) \left[1 + \frac{q \ln s_{max}}{\ln \mathcal{P}(s_{max})} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Usando o teorema de L'Hôpital encontramos

$$\lim_{s_{max} \rightarrow \infty} \frac{q \ln s_{max}}{\ln \mathcal{P}(s_{max})} = - \lim_{s_{max} \rightarrow \infty} \frac{q \int_{s_{max}}^{\infty} P(x, L) dx}{s_{max} P(s_{max}, L)} = 0, \quad (\text{C.18})$$

desde que $P(s_{max}, L)$ seja finito. Sendo assim,

$$\lim_{s_{max} \rightarrow \infty} s_{max}^q \mathcal{P}(s_{max}) = \lim_{s_{max} \rightarrow \infty} \exp \left\{ \ln \int_{s_{max}}^{\infty} P(x, L) dx \right\} = 0, \quad (\text{C.19})$$

como queríamos demonstrar.

C.2 Parte B

Nesta seção vamos calcular a forma assintótica do espectro multifractal da distribuição de probabilidade integrada $f(\alpha)$, definida por

$$f(\alpha) = \frac{\ln \int_s^{\infty} dx P(x, L)}{\ln L}. \quad (\text{C.20})$$

onde $\alpha = \ln x / \ln L$. Como visto no capítulo 2, assume-se que os efeitos de tamanho finito, das redes consideradas sobre a distribuições estatística das grandezas de interesse, seja descrita por

$$P(x, L) \sim x^{-\tau_x} F(x/L^{D_x}), \quad (\text{C.21})$$

onde $F(z) \rightarrow \text{cte}$, para $z \rightarrow 0$.

Uma vez que estamos considerando que $x \sim L^{\alpha_x}$, isso implica em $F(x/L^{D_x}) \sim F(L^{\alpha_x - D_x})$. Para situações em $\alpha_x < D_x$ (lembrando sempre que $L \rightarrow \infty$) $P(x, L) \sim x^{-\tau_x}$. Portanto,

$$f(\alpha) = \frac{\ln \int_s^{\infty} dx x^{-\tau_x}}{\ln L}. \quad (\text{C.22})$$

Realizando a integral acima e considerando $x = L^{\alpha_x}$, encontramos que $f(\alpha) = \alpha_x(1 - \tau_x)$.

Para o caso em que $\alpha_x > D_x$ estamos considerando o fim da distribuição. Quanto maior for L maior será $x \sim L^{\alpha_x}$. Assim, à medida que aumentamos o tamanho do sistema, o limite inferior de integração se aproxima do limite superior. Portanto no limite $L \rightarrow \infty$ encontramos $f(\alpha) = 0$.

Apêndice D

Densidade de probabilidade de estados para o modelo EFF

Após um número muito grande de avalanches os sítios só poderão assumir valores de energia que estejam restritos aos intervalos I_n , dado pela expressão (5.2), onde $n = 1, 2, \dots, k$ (ver capítulo 4). Assim, em um dado intervalo I_n são possíveis os seguintes valores de energia:

$$E_n = (n - 1)\alpha + \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad n = 1, \dots, k, \quad (\text{D.1})$$

onde η_i são variáveis aleatórias identicamente distribuídas no intervalo $[0, \epsilon]$. Note que aqui E_n refere-se ao valor de energia no intervalo I_n e não ao valor de energia assumido por um sítio n qualquer da rede.

A expressão (D.1) é formado pela soma de dois termos independentes. O primeiro, $(n - 1)\alpha$ depende apenas do intervalo considerado, o que ocorre sempre com probabilidade $1/k$, como visto anteriormente. O segundo, que representaremos por z_n corresponde à soma de n variáveis aleatórias η_i , ou seja,

$$z_n = \sum_{i=1}^n \eta_i \quad n = 1, \dots, k. \quad (\text{D.2})$$

Como distribuição de probabilidade de cada variável $\eta_i = z_1$ é conhecida e dada por

$$p(z_1) = \frac{1}{\epsilon} \Theta(z_1) \Theta(\epsilon - z_1), \quad (\text{D.3})$$

é possível calcular a distribuição de probabilidade para z_n , o que pode ser feito por intermédio da expressão

$$p(z_n) = \int \left[\prod_{i=1}^n d\eta_i \rho(\eta_i) \right] \delta\left(\sum_i \eta_i - z_n\right). \quad (\text{D.4})$$

Um pouco de reflexão nos mostra que uma expressão geral possível para $\rho(E)$ é

$$\rho(E) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k p(z_n = E - (n-1)\alpha) \Theta(E - (n-1)\alpha) \Theta((n-1)\alpha + z_n - E). \quad (\text{D.5})$$

A forma explícita para $\rho(E)$ só pode ser conhecida se conhecermos as distribuições $p(z_n)$. Abaixo apresentamos $p(z_2)$, $p(z_3)$ e $p(z_4)$:

$$p(z_2) = \frac{1}{\epsilon^2} z_2 \Theta(z_2) \Theta(\epsilon - z_2) + \frac{1}{\epsilon^2} (2\epsilon - z_2) \Theta(z_2 - \epsilon) \Theta(2\epsilon - z_2) \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} p(z_3) &= \frac{1}{2\epsilon^3} z_3^2 \Theta(z_3) \Theta(\epsilon - z_3) + \\ &+ \frac{1}{\epsilon^3} (-z_3^2 + 3\epsilon z_3 - \frac{3}{2}\epsilon^2) \Theta(z_3 - \epsilon) \Theta(2\epsilon - z_3) + \\ &+ \frac{1}{\epsilon^2} (\frac{z_3^2}{2} - 3\epsilon z_3 + \frac{9}{2}\epsilon^2) \Theta(z_3 - 2\epsilon) \Theta(3\epsilon - z_3) \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} p(z_4) &= \frac{z_4^3}{6\epsilon^4} \Theta(\epsilon - z_4) \Theta(z_4) + \\ &+ \frac{1}{\epsilon^4} \Theta(z_4 - \epsilon) \Theta(2\epsilon - z_4) \left(-\frac{1}{2}z_4^3 + 2\epsilon z_4^2 - 2\epsilon z_4^2 + \frac{2}{3}\epsilon^3\right) \\ &+ \frac{1}{\epsilon^4} \Theta(z_4 - 2\epsilon) \Theta(3\epsilon - z_4) \left(-\frac{1}{2}x^3 + 2\epsilon x^2 - 2\epsilon^2 x + \frac{2}{3}\epsilon^3\right) \\ &+ \frac{1}{\epsilon^4} \Theta(z_4 - 3\epsilon) \Theta(4\epsilon - z_4) \frac{1}{6}x^3, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

onde $x = (4\epsilon - z_4)$.

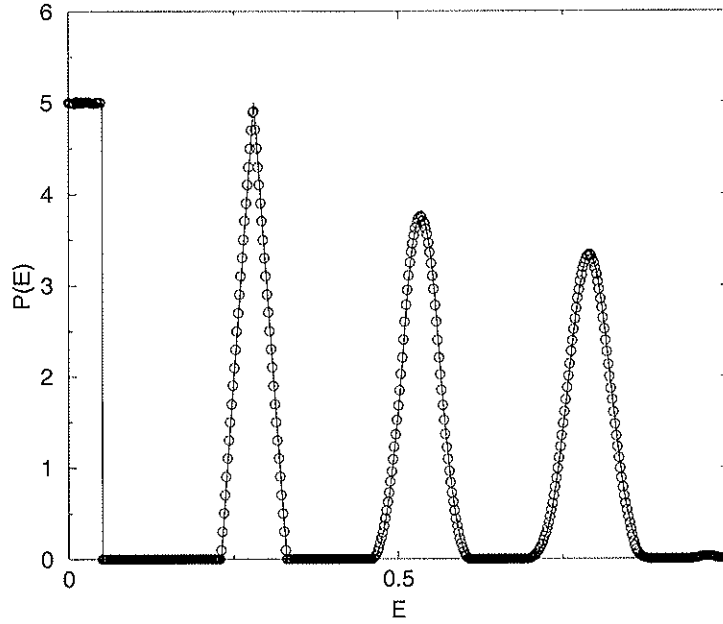


Figura D.1: Densidade de probabilidade de energia $\rho(E)$ para o modelo EFF, $L = 256$, $\alpha = 0.23$ e $\epsilon = 0.05$. A linha cheia corresponde à curva teórica e as bolinhas corresponde as dados provenientes de simulação.

D.1 Taxa de ramificação no modelo EFF para o caso não conservativo

Os sítios que contribuem para a taxa de ramificação são aqueles que ficam críticos ao serem atingidos por uma avalanche qualquer. Obviamente estes sítios devem pertencer ao último intervalo I_k . Entre os sítios deste intervalo, aqueles com energia $E \geq 1 - \alpha$ sempre ficam críticos ao serem atingidos por uma avalanche, contribuindo para a taxa de ramificação com

$$\sigma' = k \int_{1-\alpha}^1 \rho(E) dE, \quad (\text{D.9})$$

onde $\rho(E)$ é a densidade de probabilidade de que um sítio qualquer da rede tenha energia E . Usando a expressão (D.5), a integral acima torna-se

$$\sigma' = \int_{\delta}^{\delta+\alpha} p(z_k) dz_k. \quad (\text{D.10})$$

onde os intervalos de integração são determinados por meio de

$$E = (k-1)\alpha + z_k, \quad (\text{D.11})$$

e $\delta = 1 - k\alpha$.

Sítios com energia $E < 1 - \alpha - \epsilon$ nunca ficam críticos se atingidos por uma avalanche, mesmo recebendo a contribuição máxima possível. Por outro lado sítios com energia $1 - \alpha - \epsilon < E < 1 - \alpha$, podem torna-se críticos, desde que $\eta > 1 - E - \alpha$. A contribuição destes sítios para a taxa de ramificação é

$$\sigma'' = k \int_{1-\alpha-\epsilon}^{1-\alpha} \rho(E) p(\eta > 1 - E - \alpha) dE, \quad (\text{D.12})$$

onde $p(\eta > 1 - E - \alpha)$ é a densidade de probabilidade de que o sítio receba uma quantidade de ruído $\eta > 1 - E - \alpha$. Esta última condição, reescrita em termos de $\delta = 1 - k\alpha$, torna-se $\eta > \delta - z_k$. Como η é identicamente distribuído no intervalo $[0, \epsilon]$, é fácil mostrar que

$$p(\eta > \delta - z_k) = 1 - \left(\frac{\delta - z_k}{\epsilon} \right). \quad (\text{D.13})$$

Em termos de z_k e usando a expressão acima, (D.12) torna-se

$$\sigma'' = \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z_k) \left(1 - \frac{\delta - z_k}{\epsilon} \right) dz_k. \quad (\text{D.14})$$

A taxa de ramificação, $\sigma = \sigma' + \sigma''$, é dada por

$$\sigma = \int_{\delta}^{\delta+\alpha} p(z_k) dz_k + \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z_k) dz_k - \frac{\delta}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z_k) dz_k + \frac{1}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} z_k p(z_k) dz_k. \quad (\text{D.15})$$

A integral acima pode ser simplificada usando a identidade

$$1 = \int_0^{\delta+\alpha} p(z_k) dz_k = \int_0^{\delta-\epsilon} p(z_k) dz_k + \int_{\delta-\epsilon}^{\delta+\alpha} p(z_k) dz_k. \quad (\text{D.16})$$

A expressão (D.15) torna-se

$$\sigma = 1 - \int_0^{\delta-\epsilon} p(z_k) dz_k - \frac{\delta}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} p(z_k) dz_k + \frac{1}{\epsilon} \int_{\delta-\epsilon}^{\delta} z_k p(z_k) dz_k, \quad (\text{D.17})$$

que, juntamente com as expressões (D.3) e (D.4), nos permite determinar a taxa de ramificação do sistema. Uma vez determinada taxa de ramificação podemos calcular o tamanho médio das avalanches.

Referências Bibliográficas

- [1] P. Bak, C. Tang e K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality: an explanation of $1/f$ noise*, Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987); *Self-organized criticality*, Phys. Rev. A **38**, 364 (1988).
- [2] B. Mandelbrot, “*The fractal geometry of nature*” (W. H. Freeman, San Francisco, 1982).
- [3] J. Feder, “*Fractals*” (Plenum Press, New York, 1988).
- [4] R. Dickman, M. A. Muñoz, A. Vespignani e S. Zapperi, *Paths to self-organized criticality*, Brazilian Journal of Physics **30**, 27 (2000).
- [5] K. Nagel, *Instabilities in a sandpile*, Rev. Mod. Phys. **64**, 321 (1992); J. Feder, *The evidence for self-organized criticality in sandpile dynamics*, Fractals **3**, 431 (1995).
- [6] D. Dhar, *Sandpiles and self-organized criticality*, Physica A **186**, 82 (1992).
- [7] C. P. C. Prado e Z. Olami, *Inertia and break of self-organized criticality in sandpile cellular-automata models*, Phys. Rev. A **45**, 665 (1992).
- [8] V. Frette, K. Christensen, A. Malthe-Sørensen, J. Feder, T. Jøssang e P. Meakin, *Avalanche dynamics in a pile of rice*, Nature **379**, 49 (1996).

- [9] M. E. Fisher e M. N. Barber, *Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region*, Phys. Rev. Lett. **28**, 1516 (1972).
- [10] S. S. Manna, *Large-scale simulation of avalanche cluster distribution in sandpile model*, J. Stat. Phys. **59**, 509 (1990); P. Grassberger e S. S. Manna, *Some more sandpiles*, J. Phys. (Paris) **51**, 1077 (1990).
- [11] S. Lübeck e K. D. Usadel, *Bak-Tang-Wiesenfeld sandpiles model around upper critical dimension*, Phys. Rev. E **55**, 4095 (1997).
- [12] M. Paczuski e S. Boettcher, *Avalanches and waves in the Abelian sandpile model*, Phys. Rev. E **56**, R3745 (1997).
- [13] A. Chessa, H. E. Stanley, A. Vespignani e S. Zapperi, *Universality in sandpiles*, Phys. Rev. E. **59**, R12 (1999); C. Tebaldi, M. De Menech e A. L. Stella, *Multifractal Scaling in the Bak-Tang-Wiesenfeld Sandpile and Edge Events*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3952 (1999).
- [14] M. De Menech, A. L. Stella e C. Tebaldi, *Rare events and breakdown of simple scaling in the Abelian sandpile model*, Phys. Rev. E **58**, R2677 (1998).
- [15] C. Everstz e B. Mandelbrot, in *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, editado por H. O. Peitgen, H. Jurgens e D. Saupe (Springer, New York, 1992).
- [16] L. P. Kadanoff, S. R. Nagel, L. Wu e S-M Zhou, *Scaling and universality in avalanches*, Phys. Rev. A **39**, 6524 (1989).
- [17] Y. -C. Zhang, *Scaling theory of self-organized criticality*, Phys. Rev. Lett. **63**, 470 (1989).

- [18] S. S. Manna, *Two-state model of self-organized criticality*, J. Phys. A: Math. Gen. **24**, L363-L369 (1991).
- [19] D. Dhar e R. Ramaswamy, *Exactly Solved Model of Self-Organized Critical Phenomena*, Phys. Rev. Lett. **63**, 1659 (1989).
- [20] B. Drossel e F. Schwabl, *Self-organized critical forest-fire model*, Phys. Rev. Lett. **69**, 1629 (1992).
- [21] P. Bak e K. Sneppen, *Punctuated equilibrium and criticality in a simple model of evolution*, Phys. Rev. Lett. **71**, 4083 (1993).
- [22] N-N. Pang, *The Bak-Sneppen model: a self-organized critical model of biological evolution*, Int. J. Mod. Phys. B **11**, 1411 (1997).
- [23] H. J. Jensen, K. Christensen e H. C. Fogedby, *1/f noise, distribution of lifetimes and a pile of sand*, Phys. Rev. B **40**, 7425 (1989).
- [24] G. Grinstein, in *Scale Invariance, Interfaces and Non-Equilibrium Dynamics, Vol. 344 of NATO Advanced Study Institute, Series B: Physics*, editado por A. McKane *et al.* (Plenum, New York, 1995).
- [25] A. Vespignani, S. Zapperi e V. Loreto, *Renormalization of nonequilibrium system with critical stationary state*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4560 (1996); *Dynamically driven renormalization group*, J. Stat. Phys. **88**, 47 (1997).
- [26] A. Vespignani e S. Zapperi, *Renormalization group approach for forest fire models*, Phys. Rev. Lett. **78**, 4793 (1997).
- [27] D. Gubbins, *Seismology and Plate Tectonics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

- [28] B. Gutenberg, *Physics of the Earth's interior*. Academic Press, New York, 1968.
- [29] K. E. Bullen, *An introduction to the theory of seismology*. Cambridge University Press, Cambridge, 1963.
- [30] C. F. Richter, *An instrumental earthquake magnitude scale*, Bull. Seismol. Soc. Am., **25**, 1 (1935).
- [31] B. Gutenberg, *Amplitudes of surface waves and magnitudes of shallow earthquakes*, Bull. Seismol. Soc. Am., **35**, 3 (1945a).
- [32] A. Aki, *Estimation of earthquake moment released energy and stress drop from the G wave spectra*, Bull. Earthq. Res. Inst., Univ. Tokyo, **44**, 73 (1966).
- [33] H. Kanamori, *The energy release in great earthquakes*, J. Geophys. Res. **82**, 2981 (1977).
- [34] B. Gutenberg e C. F. Richter, *Magnitude and energy of earthquakes*, Ann. Geofis. (Rome) **9**, 1 (1956).
- [35] B. Gutenberg e C. F. Richter, *Seismicity of the Earth and Associated Phenomena*, Princeton Univ. Press., Princeton, New Jersey, 1954.
- [36] R. Burridge e L. Knopoff, *Model and theoretical seismicity*, Bull. Seismol. Soc. Amer. **57**, 341 (1967).
- [37] J. M. Carlson e J. S. Langer, *Properties of earthquakes generate by fault dynamics*, Phys. Rev. Lett. **62**, 2632 (1989); *A mechanical model of an earthquake fault*, Phys. Rev. A **40**, 6470 (1989).

- [38] H. Nakanishi, *Cellular-automaton model of earthquakes with deterministic dynamics*, Phys. Rev. A **41**, 7086 (1990); H. Nakanishi, *Statistical properties of the cellular-automaton model for earthquakes*, Phys. Rev. A **43**, 6613 (1991).
- [39] D. L. Turcotte, *Self-organized criticality*, Rep. Prog. Phys. **62**, 1377 (1999).
- [40] D. Dhar, *Self-Organized Critical State of Sandpile Automaton Models*, Phys. Rev. Lett. **64**, 1613 (1990).
- [41] A. A. Middleton e C. Tang, *Self-Organized Criticality in Nonconserved Systems*, Phys. Rev. Lett. **30**, 742 (1995).
- [42] S. Lise e H. Jensen, *Transitions in Nonconserving Models of Self-Organized Criticality*, Phys. Rev. Lett. **76**, 2327 (1996).
- [43] H. M. Broker e P. Grassberger, *Random neighbor of the Olami-Feder-Christensen earthquake model*, Phys. Rev. E **56**, 3944 (1997);
- [44] M. L. Chabanol e V. Hakin, *Analysis of a dissipative model of self-organized criticality with random neighbors*, Phys. Rev. E **56**, R2343 (1997)
- [45] S. T. R. Pinho, C. P. C. Prado e O. Kinouchi, *Absence of self-organized criticality in a random-neighbor version of the OFC stick-slip model*, Physica A **257**, 488 (1998).
- [46] S. Lise e A. L. Stella, *Boundary effects in a random neighbor model of earthquakes*, Phys. Rev. E **57**, 3633 (1998).
- [47] C. Tang e P. Bak, *Mean field-theory of self-organized critical phenomena*, J. Stat. Phys. **51**, 797 (1988); D. Dhar e S. N. Majumdar, *Abelian*

- sandpile model on the Bette lattice*, J. Phys. A **23**, 4333 (1990); S. A. Janowsky e C. A. Laberge, *Exact-solutions for a mean field abelian sandpile*, J. Phys. A **26**, L973 (1993).
- [48] P. Alstrøm, *Mean-Field Exponents for Self-organized Critical Phenomena*, Phys. Rev. A **38**, 4905 (1988); K. Christensen e Z. Olami, *Sandpile models with and without underlying spatial structure*, Phys. Rev. E **48**, 3361 (1993); R. García-Pelayo, *Dimension of branching processes and self-organized criticality*, Phys. Rev. E **49**, 4903 (1994).
- [49] S. Zapperi, K. B. Lauritsen e H. E. Stanley, *Self-Organized Branching Processes: Mean-Field Theory for Avalanches*, Phys. Rev. Lett. **75**, 4071 (1995).
- [50] O. Kinouchi e C. P. C. Prado, *Robustness of scale invariance in models with self-organized criticality*, Phys. Rev. E **59**, 4964 (1999).
- [51] J. E. Socolar, G. Grinstein e C. Jayaprakash, *On self-organized criticality in nonconserving systems*, Phys. Rev. E **47**, 2366 (1993); G. Grinstein, *Generic scale invariance in classical nonequilibrium systems*, J. Appl. Phys. **69**, 5441 (1991).
- [52] Z. Olami, H. J. Feder e K. Christensen, *Self-organized criticality in a continuous, nonconservative cellular automaton modeling earthquakes*, Phys. Rev. Lett. **68**, 1244 (1992).
- [53] P. Grassberger, *Efficient large-scale simulations of a uniformly driven system*, Phys. Rev. E **49**, 2436 (1994).
- [54] K. Christensen, *Self-organization in Models of Sandpiles, Earthquakes, and Flashing Fireflies*, Ph. D. Thesis, Department of Physics, University of Aarhus, Denmark.

- [55] I. M. Jánosi e J. Kertész, *Self-organized criticality with and without conservation*, Physica (Amsterdam) **200**, 179 (1993).
- [56] N. Mousseau, *Synchronization by disorder in coupled systems*, Phys. Rev. Lett. **77**, 968 (1996).
- [57] M. E. Fisher e A. E. Ferdinand, *Interfacial boundary and size effects at critical points*, Phys. Rev. Lett. **19**, 169 (1967).
- [58] *Phase Transitions and Critical Phenomena*, C. Domb and J. L. Lebowitz, vol. 8.
- [59] M. Dwass, *Total progeny in a branching process and a related random walk*, J. Appl. Prob. **6**, 682 (1969).
- [60] T. E. Harris, “*The theory of branching processes*”, (Springer-Verlag, Berlin, 1963).
- [61] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. I, John & Sons, New York, 1957.

