

SBI-IFUSP



305M810T3654

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Caos e Controle em Sistemas
Mecânicos com Impactos

Silvio Luiz Thomaz de Souza

Tese apresentada ao
Instituto de Física da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do título
de Doutor em Ciências

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas (IF-USP / Orientador)

Prof. Dr. Celso Grebogi (IF-USP)

Prof. Dr. Hans Ingo Weber (PUC/Rio)

Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana (UFPR)

Prof. Dr. Thomas Braun (UFRGS)

São Paulo 2002

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo:

3654

ex. 1

del. 22/03/02

530.155352
S729c
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Souza, Silvio Luiz Thomaz de

Caos e Controle em Sistemas Mecânicos com Impactos.
São Paulo 2002.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas
Área de Concentração: Física Nuclear

Unitermos: 1. Teoria de Caos;
2. Controle; 3. Sistemas com Impactos;
4. Sistemas não-ideais.

USP/IF/SBI-021/2002

Agradecimentos

Aos meus pais Luiz Thomaz de Souza e Maria Bernadete de Souza.

Ao meu orientador Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas.

Ao meu orientador de iniciação científica e co-orientador deste trabalho Prof. Dr. José Manoel Balthazar.

Ao Prof Dr. Reyolando M. L. R. F. Brasil pelas discussões que auxiliaram o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus professores na UNESP Profa. Dra. Maria Aparecida Pion Abuabara, Prof. Dr. Ricardo Egydio de Carvalho e Prof. Dr. Roberto Naves Domingos.

Às secretarias, sempre prestativas, Eleonora Loduca e Maria Mavilia Vara (Lia).

Aos meus amigos, pela ajuda no desenvolvimento deste trabalho, Alexander Sperandio, Antonio Marcos Batista, Anselmo Rodrigues, Kai Ullmann, Elinei Santos, Elton C. da Silva, José Geraldo Chagas, Nara Guisoni e Ricardo Trentin.

A todos do Laboratório de Física de Plasma e MBE, cuja convivência tornou o trabalho desta tese mais agradável, José A. S. da Matta, Valdemar Bellintani Jr, Helder Fecundo Severo, André Ferreira, Edson Ozono, Gisele A. Oda, Rene O. Medrano-Torricos, Francisco Alberto Marcus, Eduardo G. Altmann, Sandro Martini, Tomas Lamas e Marcelo J. da Silva.

À Angélica Alves Lima pela amizade e constante apoio.

À FAPESP, à CAPES e ao CNPq pelo suporte financeiro.

Conteúdo

| | |
|--|-----------|
| Agradecimentos | 1 |
| Resumo | 5 |
| Abstract | 7 |
| 1 Introdução | 9 |
| 2 Sistemas Mecânicos com Impactos | 17 |
| 2.1 Lei de Newton para impactos | 18 |
| 2.2 Oscilador com impactos | 19 |
| 2.3 Par de impactos | 23 |
| 2.4 Caixa de engrenagens | 31 |
| 3 Métodos de Análise | 39 |
| 3.1 Plano de fase | 39 |
| 3.2 Mapa de Poincaré | 44 |
| 3.3 Diagrama de bifurcação | 52 |
| 3.4 Diagrama isoperiódico | 56 |
| 3.5 Expoentes de Lyapunov | 60 |
| 3.5.1 Em mapas | 61 |
| 3.5.2 Oscilador com impactos | 63 |
| 3.5.3 Par de impactos | 64 |
| 3.5.4 Caixa de engrenagens | 66 |
| 3.6 Diagrama no espaço dos parâmetros | 67 |
| 4 Fenômenos Não-Lineares | 71 |
| 4.1 Crise de fronteira e transiente caótico | 72 |
| 4.2 Crise interior e intermitência caos-caos | 76 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 4.3 | Intermitência laminar-caos | 78 |
| 4.4 | Coexistências de atratores e bacias de atração | 80 |
| 5 | Controle de Caos | 91 |
| 5.1 | Supressão do caos | 91 |
| 5.1.1 | Caixa de engrenagens | 92 |
| 5.2 | Método OGY | 97 |
| 5.2.1 | Implementação do método OGY | 98 |
| 5.2.2 | Técnica de colocação dos pólos | 100 |
| 5.2.3 | Oscilador com impactos | 103 |
| 5.2.4 | Par de impactos | 108 |
| 5.2.5 | Caixa de engrenagens | 110 |
| 6 | Sistema Não-Ideal com Impactos | 115 |
| 6.1 | Sistema não-ideal | 117 |
| 6.2 | Regra de impacto | 122 |
| 6.3 | Sistema com impactos | 124 |
| 6.4 | Fenômenos não-lineares | 135 |
| 6.4.1 | Crises e intermitências | 135 |
| 6.4.2 | Coexistências de atratores e bacias de atração | 138 |
| 7 | Conclusões | 141 |
| | Bibliografia | 147 |

Resumo

Inicialmente, analisamos três sistemas mecânicos ideais com impactos: um oscilador com impactos, um sistema com par de impactos e uma caixa de engrenagens. Entre os impactos, o movimento é descrito por uma equação diferencial linear. Por ocasião dos impactos, introduzimos na solução analítica novas condições iniciais, de acordo com a lei de Newton para impactos. Devidos aos impactos, as trajetórias no espaço de fase são descontínuas e descritas por um mapa transcendental. Os expoentes de Lyapunov, importantes para caracterizar a natureza dos atratores obtidos, são calculados através desses mapas. Nas simulações numéricas, observamos fenômenos não-lineares como crises, intermitências, transientes caóticos e coexistências de atratores e obtemos as bacias de atração dos atratores coexistentes. Ademais, mostramos como controlar comportamentos caóticos, a partir de um forçamento de amplitude pequena, e pelo método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos. Finalmente, investigamos a dinâmica de um sistema não-ideal com impactos, que é composto pelo sistema de par de impactos sobreposto ao um sistema não-ideal (para qual a ação da fonte de energia depende da oscilação do sistema). A partir de simulações numéricas, identificamos fenômenos não-lineares como crise interior, intermitências e coexistência de atratores. Associado à crise interior observamos um tipo de intermitência que leva o sistema a oscilar entre três atratores caóticos. Além dessa intermitência, observamos uma outra, que envolve dois atratores periódicos e um caótico. Além disso, mostramos as bacias de atração de dois atratores periódicos coexistentes. Essas bacias possuem uma característica de bacia crivada.

Abstract

Initially, we analyze three ideal mechanical systems with impacts: an impact oscillator, an impact-pair, and a gear-box (gear-rattling). Between impacts, the motion is described by a linear differential equation. After each impact, we use the Newton law of impact to determine new initial conditions of an analytical solution. Due to impacts, the trajectories in phase space are discontinuous and described by a transcendental map. The Lyapunov exponents, important to characterize the attractors, are calculated from the transcendental map. In the numerical simulations, we observe nonlinear phenomena as crises, intermittency, chaotic behavior, and coexisting attractors. Moreover, we present the basins of attraction of the coexisting attractors. Furthermore, we show how to control the chaotic behavior, with a small perturbation and by the OGY (Ott, Grebogi, and Yorke) method. Finally, we investigate the dynamics of a non-ideal system with impacts, that is composed by an impact-pair system on a non-ideal system (in this system, the energy source actions depend on the system oscillations). From the numerical simulations, we identify nonlinear phenomena as interior crises, intermittency, and coexisting attractors. Associated to the interior crises, we observe an intermittency, for which the system oscillates among three chaotic attractors. Besides this intermittency, we observe another one. Associated to a chaotic and two periodic attractors. In addition, we show the riddle basins of attraction of the two coexisting periodic attractors.

Capítulo 1

Introdução

No final do século XIX, a partir do estudo de um sistema determinístico (problema de três corpos), Henri Poincaré descobriu que esse tipo de sistema admite soluções complexas [1]. Tais soluções correspondem a movimentos muito complicados e imprevisíveis.

Em princípio, a descoberta de Poincaré é um paradoxo aparente, pois, segundo o princípio do determinismo de Newton [2], o estado inicial de um sistema (o conjunto das posições e velocidades dos pontos do sistema em um instante qualquer do tempo), descrito por equações diferenciais, determina de maneira unívoca todo o movimento deste. No entanto, um sistema determinístico pode possuir soluções imprevisíveis. Isso é devido à sensibilidade às condições iniciais (estado inicial) do sistema. De maneira que as trajetórias de tais soluções, cujas condições iniciais são arbitrariamente próximas, se afastam exponencialmente com o tempo. Por conseguinte, para uma imprecisão mínima nas condições iniciais, a solução do sistema torna-se imprevisível. Neste caso, os comportamentos correspondentes a essas soluções são denominados caóticos [3]. Essas soluções são encontradas em sistemas conservativos e dissipativos.

Nas últimas décadas, o caos (comportamento caótico) foi identificado em diversos sistemas dinâmicos como na atmosfera terrestre [4], na física de plasmas [5–9], na dinâmica populacional [10, 11], nos circuitos elétricos [12], nas reações químicas [13] e na dinâmica de formação de gotas (torneira gotejante) [14–16].

Nesta tese, propomos, como objeto de estudo, a análise e o controle de sistemas dinâmicos não-lineares que apresentam comportamento caótico, tendo particularmente como interesse sistemas mecânicos. Dentre a ampla gama de sistemas

mecânicos, estudaremos a classe de sistemas que apresenta impactos sucessivos, decorrente de folgas, levando a respostas dinâmicas complexas [17–25]. Tais sistemas são denominados de vibratórios com impactos (*vibro-impact*). O estudo deles é de grande interesse na área de engenharia mecânica, devido a sua aplicação em projetos de algumas máquinas e equipamentos [26–28]. Como esses sistemas são não-lisos (*non-smooth*), há, também, um interesse na área de matemática [29–31].

Um exemplo de sistema vibratório com impactos, cuja dinâmica é muito estudada, é o oscilador com impactos [29–33]. Ele é composto por um oscilador forçado, cuja amplitude de deslocamento é limitada por um obstáculo rígido (parede). O seu movimento é determinado, entre os impactos (*free flight*), a partir da solução de uma equação diferencial. Por ocasião dos impactos, o sistema é reinicializado de acordo com uma regra de impactos conhecida a priori. Em geral, utiliza-se a lei de Newton para impactos [26, 34], devido a sua simplicidade.

Alguns sistemas com impactos, estudados na física, são similares aos que aparecem na engenharia mecânica. Entre eles, o problema de Fermi [35–38] é um exemplo clássico de sistemas com sucessivos impactos. Originalmente, ele consiste em um movimento de uma bola entre duas paredes rígidas, com uma parede fixa e a outra oscilando no tempo. O modelo do problema de Fermi foi desenvolvido com o objetivo de estudar um possível mecanismo de aceleração de raios cósmicos.

Como exemplo de sistema similar ao problema de Fermi, temos o par de impactos (*impact-pair*) [39–43]. Esse sistema é constituído por uma bola deslocando-se livremente dentro de uma caixa em movimento. Ou seja, ele consiste em um movimento de uma bola entre duas paredes oscilando no tempo. O movimento da caixa (das paredes) pode ser tanto periódico quanto caótico.

O sistema de caixa de engrenagens, proposto nas referências [44, 45], possui um modelo matemático semelhante ao sistema de par de impactos [46]. Portanto, o sistema de caixa de engrenagens, também, é similar ao problema de Fermi. Esse sistema foi desenvolvido com a finalidade de proporcionar uma forma de estudo da redução de ruídos (barulho) em caixa de câmbio de carros. Ele é composto por duas engrenagens com uma folga (*backlash*) entre os dentes. Uma das engrenagens desloca-se periodicamente e a outra de acordo com a solução de uma equação diferencial linear. Quando em movimento, devido à folga, há impactos sucessivos, gerando um ruído (*rattling*). Outros sistemas com a finalidade de reduzir ruídos são

encontrados na literatura [47, 48].

Em geral, quando estudamos a dinâmica de um sistema não-linear a partir de simulações numéricas, o modelo matemático utilizado é dado por um conjunto de equações diferenciais [4] ou por um conjunto de equações de diferenças (mapas) [49]. Assim, para obter a evolução temporal de um sistema descrito por equações diferenciais (como o sistema de Lorenz [4]), devemos usar um integrador numérico (por exemplo, Runge-Kutta). Para um sistema descrito por equações de diferenças (como o mapa de Hénon [49]), devemos apenas iterar o mapa, pois, neste caso, há uma relação de recorrência.

No entanto, para os sistemas com impactos, aqui, considerados, as simulações numéricas são feitas de uma forma diferente [50]. Isso porque, a dinâmica do movimento entre os impactos é dada por uma equação diferencial linear, cuja solução é, facilmente, obtida de forma analítica. Assim sendo, não é necessário utilizar um integrador numérico. Além das soluções analíticas, para obter a evolução temporal desses sistemas, usamos ainda uma regra de impactos para reinicializar, por ocasião dos impactos, tais soluções.

Ademais, devido ao tipo de impacto considerado (obstáculo imóvel durante o intervalo de duração dos impactos), as trajetórias dos sistemas apresentam, no espaço de fase, descontinuidades, o que dificulta a sua análise. Por exemplo, o cálculo dos expoentes de Lyapunov não é trivial, para esse tipo de sistema não-liso. Para sistemas lisos (*smooth*) o procedimento para obter esses expoentes é bem conhecido, tanto para sistemas de tempo contínuos (sistemas descritos por equações diferenciais) como de tempo discretizados (sistemas descritos por mapa) [51].

Os expoentes de Lyapunov são coeficientes muito importantes na análise dinâmica de sistemas não-lineares, pois com eles podemos caracterizar a natureza de um atrator a partir de seus expoentes de Lyapunov. Por exemplo, quando o maior expoente de Lyapunov, de um atrator, for negativo dizemos que esse atrator é periódico, se for zero o atrator é quase-periódico e se for positivo o atrator é caótico.

Para calcular os expoentes de Lyapunov nos sistemas com impactos, usamos um mapa denominado, por nós, de transcendental [52–54]. Ele é obtido a partir das soluções analíticas e a regra de impactos. A relação entre as variáveis dinâmicas, para dois impactos sucessivos, são dadas por equações transcendentais. Para determinar os expoentes de Lyapunov, utilizamos um método, já existente, de cálculo

para mapas [55] e o mapa transcendental. Em outras palavras, a partir do mapa transcendental calculamos tais expoentes, de forma similar ao cálculo feito para os mapas bidimensionais, como o mapa de Hénon. No entanto, é importante ressaltar, a partir do mapa transcendental não é possível obter a evolução dos sistemas considerados nesta tese. Para isso, devemos usar as soluções analíticas e a regra de impactos.

Além disso, o procedimento para o cálculo dos expoentes utilizando o mapa transcendental é novo, ou seja, foi introduzido por nós [53]. Tal mapa era utilizado, na literatura [43, 50], apenas no estudo de estabilidade de órbitas de período 1. Ademais, o procedimento, aqui indicado, não é único. Podemos, também, obter os expoentes de Lyapunov a partir de um algoritmo para fluxos (sistema de tempo contínuo) [51]. No entanto, nesse algoritmo é necessário introduzir, como indicado na referência [56], algumas modificações que levam em consideração a característica do sistema impactante, ou seja, as descontinuidades. Além desses procedimentos, podemos obter (estimar) o maior valor do expoente de Lyapunov, como descrito na referência [57], a partir de um método que utiliza a sincronização de caos.

Além do cálculo dos expoentes de Lyapunov, utilizamos os mapas transcendentais para implementar o método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos [58]. Com isso, desenvolvemos um procedimento novo da aplicação desse método em sistemas com impactos [54]. O método OGY consiste em estabilizar uma das infinitas órbitas periódicas instáveis, previamente determinadas, imersas em um atrator caótico. Isso é feito através de pequenas perturbações em um dos parâmetros de controle. Neste caso, as perturbações são calculadas a partir de um mapa transcendental. Ademais, na literatura [59–64] encontramos outras formas de controlar sistemas caóticos com impactos, pelo método OGY e por outros métodos, mas sem usar mapas transcendentais como neste trabalho.

Neste trabalho, utilizamos o oscilador com impactos e o sistema de par de impactos, principalmente, para mostrar como calcular os expoentes de Lyapunov e como implementar o método OGY em sistemas com impactos [53, 54]. Além disso, a descrição do sistema de par de impactos é importante como uma introdução ao sistema não-ideal com impactos [65], mostrado no capítulo 6. Para o sistema de caixa de engrenagens, além de calcular os expoentes de Lyapunov e implementar o método OGY, investigamos sua dinâmica a partir da variação dos parâmetros de controle [52]. Com isso, identificamos vários fenômenos não-lineares (capítulo 4).

Em nosso estudo, consideramos, também, um sistema de par de impactos [65], cujo deslocamento da caixa (das paredes) é dado por um sistema não-ideal [66, 67].

Na análise dos sistemas dinâmicos é quase sempre suposto que a fonte de energia não sofre qualquer influência do sistema oscilante. Em outras palavras, a ação da fonte de energia independe da oscilação do sistema. Como isso, a descrição matemática é simplificada, o que facilita a análise do sistema. Neste caso, o sistema é dito ideal [68], pois possui uma fonte de energia denominada ideal [66]. Como exemplo de sistema ideal, temos o oscilador forçado. Em geral, podemos dizer que os sistemas ideais compreendem os problemas de oscilações forçadas por um termo periódico externo com uma amplitude e uma frequência específicas. Esse termo periódico é a fonte de energia do sistema, que é obtida a partir de um motor de potência infinita. Como exemplo de sistema ideal, temos o oscilador forçado.

Às vezes, na formulação das equações dinâmicas de um sistema, devemos considerar, também, a influência do sistema oscilante sobre a fonte de energia. Neste caso, o sistema e sua fonte de energia são denominados não-ideais [66, 68–74]. Essa fonte de energia é obtida a partir de um motor de potência finita. Além disso, é importante ressaltar, a fonte de energia não-ideal não pode ser representada por uma função puramente temporal. Assim sendo, é necessário introduzir, na descrição matemática, uma equação que relaciona a fonte de energia com a equação de movimento do sistema.

No capítulo 2, descrevemos os modelos matemáticos dos sistemas impactantes considerados como objeto de estudo. Além disso, obtemos os mapas transcendentais correspondentes a esses modelos. Inicialmente, descrevemos de forma sucinta a lei de Newton para impactos [26, 34], pois usamos essa lei para reinicializar os sistemas por ocasião dos impactos. Além disso, apresentamos a descrição matemática do oscilador com impactos [29–32]. Apresentamos, também, a descrição do sistema de par de impactos (*impact-pair*) [39–43]. Finalmente, descrevemos o sistema da caixa de engrenagens [44, 45, 52].

No capítulo 3, apresentamos os métodos utilizados na análise dos sistemas mecânicos com impactos. Como exemplos, aplicamos esses métodos nos três sistemas descritos no capítulo 2. Inicialmente, mostramos como identificar a natureza de algumas soluções, usando, para isso, o plano de fase [75]. Descrevemos como usar o

mapa de Poincaré, de uma forma adequada, em sistemas com impactos [50]. Mostramos, também, como analisar o comportamento dinâmico de um sistema a partir de um dos parâmetros de controle. Para isso, utilizamos os diagramas de bifurcação. Além disso, mostramos como obter diagramas isoperiódicos [76]. A partir desses diagramas, que são determinados variando dois parâmetros de controle, podemos analisar o comportamento dinâmico de um sistema em uma grande variedade de situações.

Ainda neste capítulo, mostramos como calcular os expoentes de Lyapunov em sistemas cujas trajetórias apresentam descontinuidades no espaço de fase [53]. Assim sendo, é possível caracterizar as soluções obtidas desses sistemas. Finalmente, a partir do cálculo do maior expoente de Lyapunov e variando dois parâmetros de controle, apresentamos os diagramas denominados espaços dos parâmetros [77]. Tais diagramas são, também, utilizados na análise do comportamento dinâmico.

No capítulo 4, apresentamos os resultados das simulações numéricas do sistema da caixa de engrenagens. Nessas simulações, variando os parâmetros de controle, detectamos fenômenos tipicamente não-lineares como crise interior e de fronteira [78], intermitência laminar-caos [79] e coexistência de atratores [52, 80, 81]. Próximo a crise interior, observamos uma intermitência caos-caos [82]. Associado à crise de fronteira, identificamos transientes caóticos [52, 83, 84]. O tempo de duração do transiente depende das condições iniciais. Para mostrar essa dependência, fixando uma das condições iniciais e variando as outras duas, graficamos o tempo de duração do transiente. Com isso, identificamos uma figura com características de uma bacia crivada (*riddled basin*) [84–87]. Para os atratores coexistentes, mostramos as bacias de atração e, usando o expoente de incerteza [88], analisamos a estrutura de suas fronteiras. Assim, notamos que essas fronteiras são fractais [89].

No capítulo 5, mostramos como controlar comportamentos caóticos em sistemas mecânicos com impactos. Em primeiro lugar, apresentamos um método de supressão de caos [90] obtido a partir de uma perturbação periódica fraca, ou seja, um forçamento periódico externo de amplitude pequena. Aplicamos tal método no sistema da caixa de engrenagens. Além disso, descrevemos como implementar o método OGY de controle de caos [58] em sistemas com impactos [54]. Como exemplos numéricos, controlamos órbitas caóticas dos sistemas oscilador com impactos, par de impactos e caixa de engrenagens.

No capítulo 6, investigamos a dinâmica de um sistema não-ideal com impactos, que, por sua vez, é composto pelo sistema de par de impactos sobreposto ao sistema não-ideal. Assim sendo, o sistema não-ideal atua como função de excitação do sistema de par de impactos. Em outras palavras, o sistema, em questão, é constituído por uma bola que movimenta-se dentro de uma caixa sobreposta a um sistema não-ideal [65]. Além disso, consideramos, também, que tanto o sistema de par de impactos quanto o sistema não-ideal sofrem, por ocasião dos impactos, mudanças abruptas em suas trajetórias. Essas mudanças ocorrem de acordo com as massas e as velocidades desses sistemas. Com isso, a dinâmica do sistema não-ideal é completamente alterada, o que implica em mudanças na dinâmica do sistema de par de impactos. Em primeiro lugar, descrevemos o modelo matemático do sistema não-ideal e o sistema ideal correspondente. O sistema não-ideal é constituído por um oscilador, cujos coeficiente elástico da mola e amortecimento são lineares. O forçamento (fonte de energia) desse sistema é dado por um motor de massa desbalanceada. E o sistema ideal, correspondente, é um oscilador linear forçado.

Além disso, nesse capítulo, apresentamos a regra de impactos utilizada. Essa regra é obtida a partir das equações que representam a perda de energia e a conservação da quantidade de movimento. A perda de energia no instante dos impactos é modelada por um coeficiente de restituição constante, ou seja, de forma semelhante aos sistemas descritos no capítulo 2. No entanto, neste caso, devemos considerar a conservação da quantidade de movimento total imediatamente antes e depois de cada impacto. Isso porque, como dito anteriormente, ambos os sistemas (par de impactos e o não-ideal) sentem os impactos. Por fim, descrevemos o sistema não-ideal com impactos. A partir de simulações numéricas, identificamos fenômenos tipicamente não-lineares como crise interior, intermitências e coexistência de atratores. Associado à crise interior observamos um tipo de intermitência que leva o sistema a oscilar entre quatro atratores caóticos. Além dessa intermitência, observamos uma outra, que envolve dois atratores periódicos e um caótico. Além disso, mostramos as bacias de atração de dois atratores periódicos coexistentes. Essas bacias possuem uma característica de bacia crivada (*riddled basin*).

Por fim, no capítulo 7, apresentamos as conclusões relativas aos resultados obtidos. Todos os resultados numéricos apresentados nesta tese foram obtidos a partir de programas computacionais desenvolvidos, por nós, em Linguagem C. Para a confecção da maioria dos gráficos, utilizamos dois programas distintos: o "XMGR", desenvolvido por P. J. Turner, e o "PGPLOT GRAPHICS SUBROUTINE LIBRARY",

desenvolvido por T. J. Pearson.

Capítulo 2

Sistemas Mecânicos com Impactos

Neste capítulo, descrevemos os modelos matemáticos dos sistemas impactantes considerados como objeto de estudo. Além disso, obtemos os mapas transcendentais correspondentes a esses modelos. A partir de tais mapas podemos caracterizar os sistemas e desenvolver alguns algoritmos numéricos com maior facilidade. Em princípio, consideramos apenas os sistemas dito ideais, ou seja, sistemas cujas fontes de excitações independem das oscilações dos mesmos. A dinâmica do movimento dos sistemas, aqui tratados, é composta pela solução analítica de uma equação diferencial linear, para o movimento entre os impactos. Por ocasião dos impactos, reinicializamos tal solução, utilizando, para isso, a lei de Newton para impactos.

Inicialmente, na seção 2.1, descrevemos de forma sucinta a lei de Newton para impactos [26,34]. Na seção 2.2, apresentamos o modelo matemático do oscilador com impactos [29–32]. Utilizamos esse oscilador, principalmente, para mostrar (capítulo 5) como implementar o método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos em sistemas mecânicos com impactos. Na seção 2.3, descrevemos o sistema de par de impactos (*impact-pair*) [39–43]. Tal descrição é importante como introdução ao sistema não-ideal com impactos abordado neste trabalho (capítulo 6). Finalmente, na seção 2.4, apresentamos o sistema de caixa de engrenagens [44,45]. Para esse último, a partir de um estudo feito com a variação dos parâmetros de controle, identificamos vários fenômenos como crises, intermitências, transientes caóticos e coexistência de atratores.

2.1 Lei de Newton para impactos

A dinâmica dos sistemas aqui tratados, como dito anteriormente, é descrita pelas soluções de equações diferenciais, isso entre os impactos. Por ocasião dos impactos, reinicializamos tais soluções, a partir de uma regra de impactos conhecida a priori.

Nesta seção, direcionamos nossa atenção à regra de impactos, aqui, utilizada. Porém, fazemos apenas uma descrição sucinta (descrições detalhadas de várias regras de impactos podem ser vistas na referência [91]). Tal regra é conhecida na literatura como lei de Newton para impactos [26, 34].

Cumprе salientar que os sistemas dinâmicos considerados são de apenas um grau de liberdade, o que implica em impactos unidimensionais.

Em geral, quando os impactos são unidimensionais, adotamos a lei de Newton para impactos, sendo essa decorrente de um modelo de impactos indicado na figura 2.1, que, por sua vez, utiliza o coeficiente de restituição constante para representar a perda de energia durante o impacto, de acordo com a relação a seguir:

$$v_f = -rv_i \quad (2.1)$$

onde os subscritos i e f indicam, respectivamente, os estados imediatamente antes e depois do impacto, v é a velocidade relativa da bola em relação a parede (obstáculo rígido) que, por sua vez, não sente os impactos, e, por fim, r é o coeficiente de restituição constante cujo valor está entre 0 e 1 (impacto inelástico) .

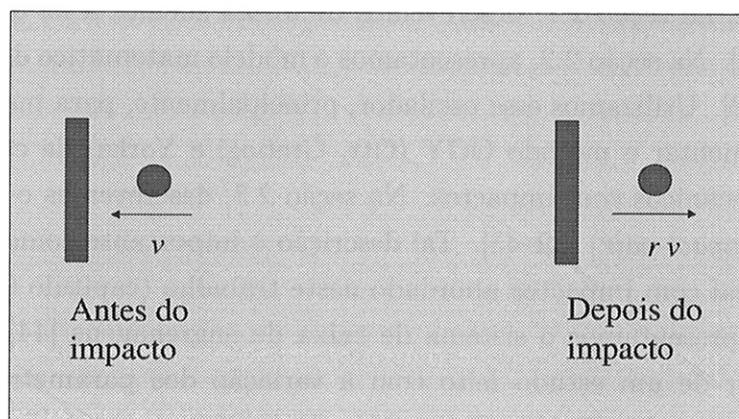


Figura 2.1: Modelo de impacto unidimensional.

Assim sendo, para obter o modelo em questão, consideramos que o impacto ocorre instantaneamente e todas as deformações provenientes das forças dele resultantes não interferem no movimento do corpo (bola) após o impacto. Ademais, a perda de energia cinética representada pelo coeficiente de restituição pode se transformar em várias modalidades de energia. Por exemplo, energia acústica, sendo essa ligada ao ruído (barulho) produzido no instante do impacto.

Por fim, é importante ressaltar que a regra de impacto, da forma descrita aqui, é apenas utilizada, por nós, nos sistemas ideais. No sistema não-ideal (capítulo 6) a regra utilizada é semelhante a essa, porém não é exatamente a mesma, pois levamos em consideração que ambos corpos impactantes sentem os impactos. Contudo, a perda de energia continua sendo representada pelo coeficiente de restituição.

2.2 Oscilador com impactos

Nesta seção, descrevemos o modelo matemático do oscilador com impactos [31] ilustrado na figura 2.2. Além disso, obtemos o mapa transcendental correspondente. Esse sistema é composto por um oscilador forçado e uma parede (obstáculo rígido) que limita o movimento do oscilador.

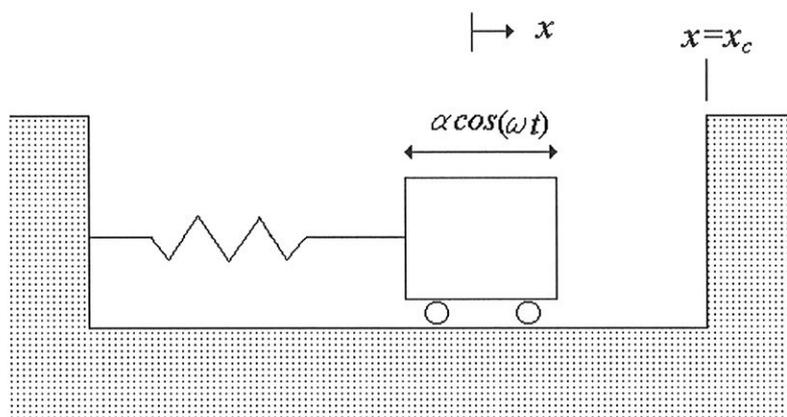


Figura 2.2: Esquema do oscilador com impactos.

Assim, a trajetória do sistema é descrita pela solução de uma equação diferencial linear, entre os impactos. Quando ocorrem os impactos, introduzimos na solução as

novas condições iniciais obtidas a partir da lei de Newton para impactos. Além disso, para determinar com precisão quando houve o impacto, nós utilizamos o método de Newton-Raphson.

Em nosso trabalho utilizaremos esse sistema, principalmente, para mostrar como implementar o método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos. Para isso, será necessário obtermos um mapa transcendental, sendo esse obtido a partir da solução da equação diferencial, que descreve o movimento do oscilador entres os impactos, e a regra de impactos utilizada. Tal mapa é importante não apenas para implementar o método OGY, mas também para desenvolver um algoritmo para o cálculo dos expoentes de Lyapunov.

O movimento do oscilador forçado, entre os impactos, é dado pela solução da equação :

$$\ddot{x} + x = \alpha \cos(\omega t), \quad x < x_c \quad (2.2)$$

onde x_c é a posição da parede (obstáculo rígido), α e ω são amplitude e frequência do forçamento, respectivamente.

Integrando a equação (2.2) e impondo as condições iniciais $x(t_0) = x_0, \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, temos:

$$x = \left[x_0 - \frac{\alpha}{(1 - \omega^2)} \cos(\omega t_0) \right] \cos(t - t_0) + \left[\dot{x}_0 + \frac{\alpha\omega}{(1 - \omega^2)} \text{sen}(\omega t_0) \right] \text{sen}(t - t_0) + \frac{\alpha}{(1 - \omega^2)} \cos(\omega t) \quad (2.3)$$

$$\dot{x} = \left[-x_0 + \frac{\alpha}{(1 - \omega^2)} \cos(\omega t_0) \right] \text{sen}(t - t_0) + \left[\dot{x}_0 + \frac{\alpha\omega}{(1 - \omega^2)} \text{sen}(\omega t_0) \right] \cos(t - t_0) - \frac{\alpha\omega}{(1 - \omega^2)} \text{sen}(\omega t) \quad (2.4)$$

Assim, o movimento entre os impactos é descrito pelas equações (2.3) e (2.4). Porém, quando $x(t) = x_c$ ocorrem os impactos. Depois de cada impacto, introduzimos nas equações (2.3) e (2.4) as novas condições iniciais:

$$\begin{aligned} t_0 &= t \\ x_0 &= x \\ \dot{x}_0 &= -r\dot{x} \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde r é o coeficiente de restituição.

Assim sendo, a dinâmica do oscilador com impactos é descrita pelas equações (2.3), (2.4) e (2.5). Com isso, o sistema depende dos parâmetros de controle x_c , α , ω e r .

Além disso, o comportamento dinâmico pode ser bem diferente se os valores dos parâmetros de controle forem alterados. Por exemplo, variando o parâmetro de controle ω , podemos observar nas figuras 2.3, 2.4 e 2.5 soluções distintas. Nas figuras 2.3 e 2.4 temos duas soluções regulares, porém não idênticas, e na figura 2.5 uma solução irregular. Veremos mais tarde (seção 3.5) que a solução regular correspondente à figura 2.3 é periódica e da figura 2.5 é caótica. Ademais, podemos, também, notar, nas figuras 2.3b, 2.4b e 2.5b, que a variável dinâmica \dot{x} apresenta descontinuidades (linha tracejada). Tal descontinuidade é decorrente dos impactos.

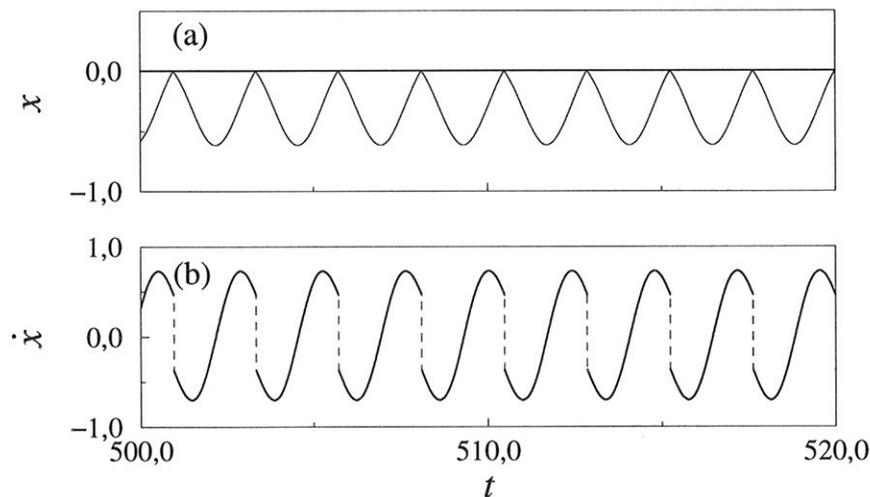


Figura 2.3: Solução regular do oscilador com impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,00$, $\omega = 2,64$, $r = 0,80$ e $x_c = 0$. (a) Evolução temporal da variável dinâmica x . (b) Evolução temporal da variável dinâmica \dot{x} .

A fim de obter um mapa (transcendental) no instante do impacto, devemos registrar para cada impacto n as variáveis x_n , \dot{x}_n e t_n que correspondem às variáveis x , \dot{x} e t no instante imediatamente antes desse impacto. As variáveis x_{n+1} , \dot{x}_{n+1} e t_{n+1} obtidas da solução do sistema, para as condições iniciais:

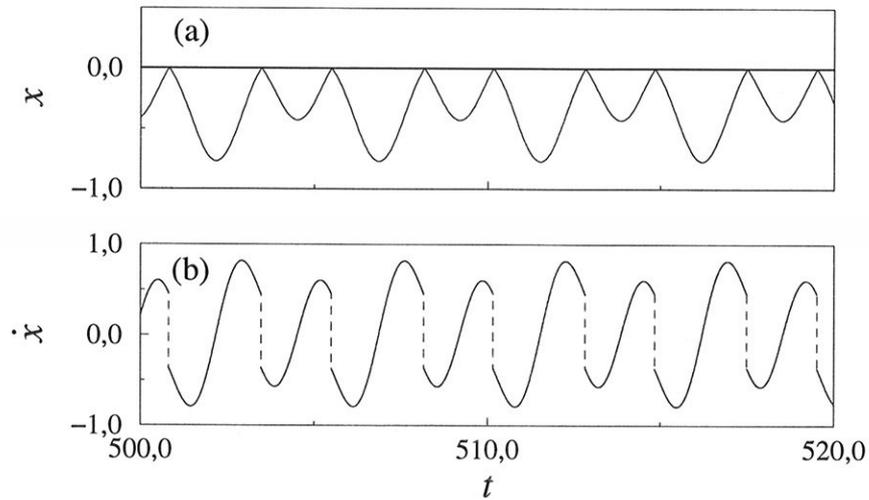


Figura 2.4: Solução regular do oscilador com impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,00$, $\omega = 2,69$, $r = 0,80$ e $x_c = 0$. (a) Evolução temporal da variável dinâmica x . (b) Evolução temporal da variável dinâmica \dot{x} .

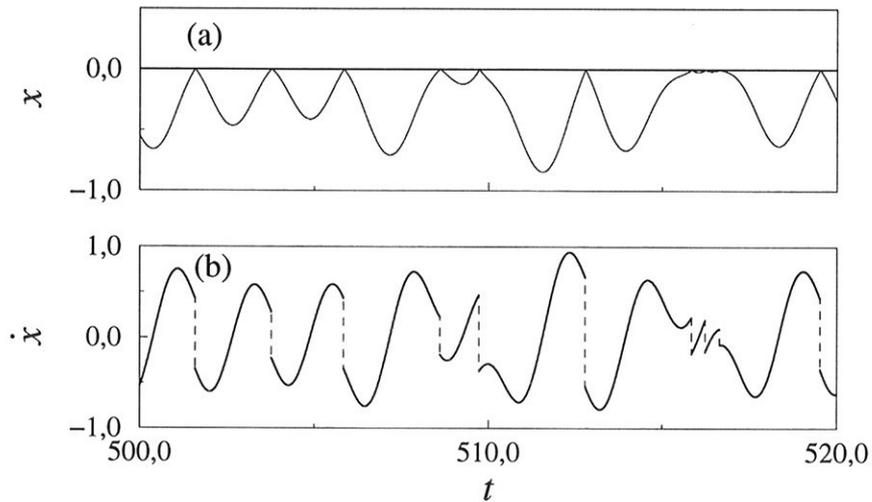


Figura 2.5: Solução irregular do oscilador com impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,0$, $\omega = 2,8$, $r = 0,8$ e $x_c = 0$. (a) Evolução temporal da variável dinâmica x . (b) Evolução temporal da variável dinâmica \dot{x} .

$$\begin{aligned}
t_0 &= t_n \\
x_0 &= x_n \\
\dot{x}_0 &= -r\dot{x}_n
\end{aligned}
\tag{2.6}$$

A partir das equações (2.3), (2.4) e (2.6), introduzimos o mapa transcendental:

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= \left[x_n - \frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \cos(\omega t_n) \right] \cos(t_{n+1} - t_n) + \left[-r\dot{x}_n + \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} \text{sen}(\omega t_n) \right] \\
&\quad \text{sen}(t_{n+1} - t_n) + \frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \cos(\omega t_{n+1}) \\
\dot{x}_{n+1} &= \left[-x_n + \frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \cos(\omega t_n) \right] \text{sen}(t_{n+1} - t_n) + \left[-r\dot{x}_n + \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} \text{sen}(\omega t_n) \right] \\
&\quad \cos(t_{n+1} - t_n) - \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} \text{sen}(\omega t_{n+1})
\end{aligned}
\tag{2.7}$$

sendo $x_{n+1} = x_n = x_c$.

Por fim, é importante ressaltar, a dinâmica do sistema em questão não é obtida a partir do mapa transcendental (2.7). Mas sim, como mencionado anteriormente, a partir da solução dada pelas equações (2.3) e (2.4) e a lei de Newton para impactos (eq. 2.5). Em outras palavras, não podemos estudar o sistema utilizando apenas o mapa acima, pois esse não é explícito, ou seja, dado (\dot{x}_n, t_n) não é possível determinar (\dot{x}_{n+1}, t_{n+1}) .

2.3 Par de impactos

Nesta seção, descrevemos o modelo matemático [43] do sistema de par de impactos (*impact-pair*), ilustrado na figura 2.6. Além disso, obtemos o mapa transcendental correspondente, que será de grande valia no cálculo dos expoentes de Lyapunov. Esse sistema é composto por uma caixa (sendo ν a distância entre as paredes), que oscila no tempo de acordo com uma função $e(t)$, e uma bola de massa m que movimentada-se livremente dentro da caixa onde ela está contida. O movimento da caixa $e(t)$ pode ser qualquer (como veremos a seguir), ou seja, periódico, quase-periódico ou, até mesmo, caótico. Ademais, esse sistema é semelhante ao modelo de Fermi [7] que, por sua vez, consiste num movimento de uma bola entre duas paredes

rígidas, com uma parede fixa e a outra oscilando no tempo.

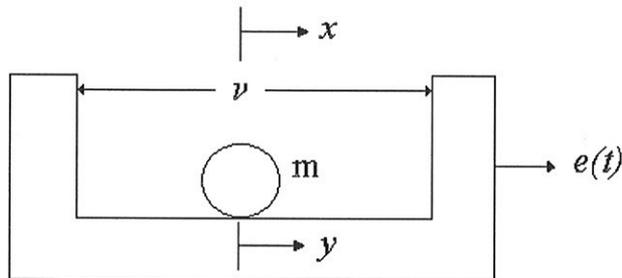


Figura 2.6: Esquema do sistema de par de impactos.

Em nosso trabalho, descreveremos o sistema de par de impactos, pois ele é importante como introdução ao sistema não-ideal com impactos que será objeto de estudo no decorrer deste trabalho (capítulo 6). Além disso, também, utilizamos este sistema para mostrar que a idéia do cálculo dos expoentes de Lyapunov, a partir do algoritmo derivado de um mapa transcendental, é muito mais abrangente do que nos parece a priori.

A equação de movimento da bola de massa m , entre os impactos, no referencial em repouso (referencial do laboratório) é dada por:

$$\ddot{x} = 0 \quad (2.8)$$

Integrando a equação (2.8) e impondo as condições iniciais $x(t_0) = x_0$ e $\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$, temos:

$$x(t) = x_0 + (t - t_0)\dot{x}_0 \quad (2.9)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 \quad (2.10)$$

Assim, o movimento do sistema é composto, entre os impactos, pelo deslocamento x da massa m e pelo movimento da caixa $e(t)$. No entanto, no limite da folga (intervalo de tolerância) ocorrem os impactos.

Ademais, na simulação numérica desse sistema, é interessante fazer uma mudança de variável, ou seja, passar do deslocamento absoluto x (referencial em repouso) para deslocamento relativo y entre a massa m e a caixa (referencial em movimento). Isso porque, no referencial em movimento as paredes não se movimentam, ou seja, independem do tempo. Com isso, é mais fácil determinar o instante t (com uma maior precisão) em que houve o impacto. Para isso, utilizamos o método de Newton-Raphson. Nas figuras 2.7a e 2.8a, mostramos uma possível solução no referencial em repouso (no laboratório) e nas figuras 2.7b e 2.8b no referencial em movimento (com a caixa).

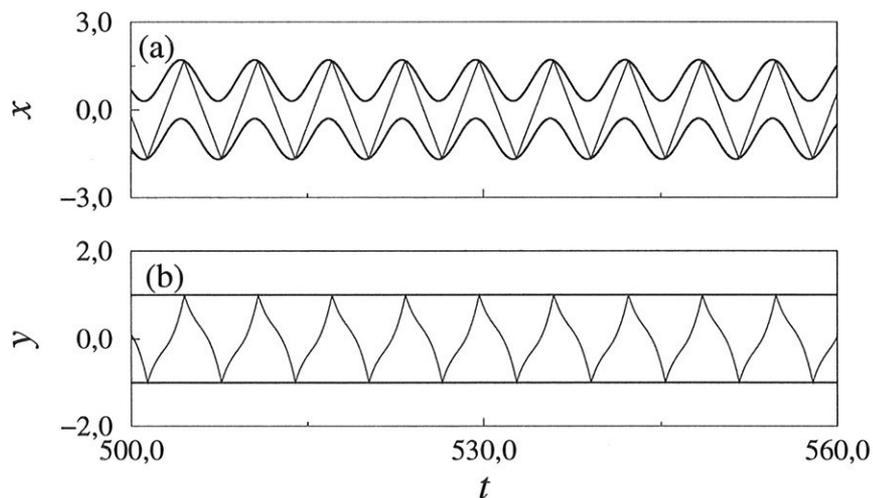


Figura 2.7: Solução regular do sistema par de impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 0,7$, $\omega = 1,0$, $\nu = 2,0$ e $r = 0,7$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto x . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo y .

A relação de x e y é dada pela seguinte equação:

$$x = y + e(t) \quad (2.11)$$

Substituindo a equação (2.11) nas equações (2.9) e (2.10), temos:

$$y(t) = y_0 + e(t_0) - e(t) + [\dot{y}_0 + \dot{e}(t_0)](t - t_0) \quad (2.12)$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 + \dot{e}(t_0) - \dot{e}(t) \quad (2.13)$$

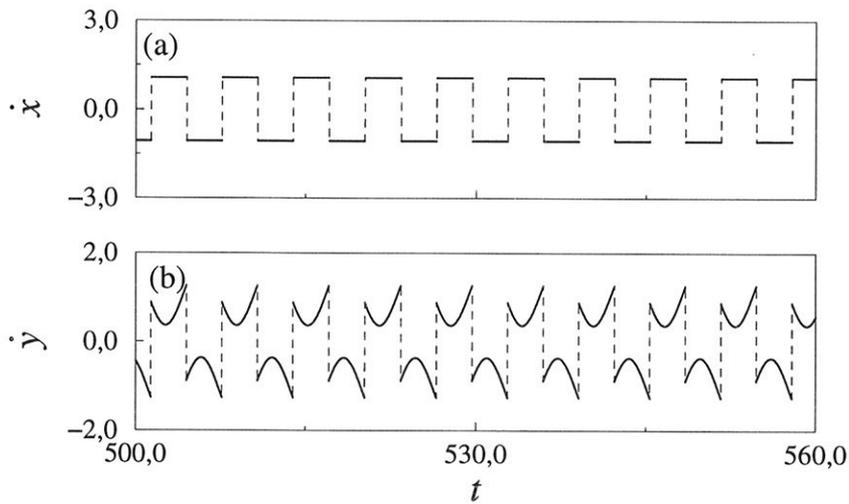


Figura 2.8: Mesma solução do sistema par de impactos indicada na figura 2.7. (a) Evolução temporal da velocidade absoluta \dot{x} . (b) Evolução temporal da velocidade relativa \dot{y} .

O impacto ocorre quando $y = \nu/2$ ou $-\nu/2$. Depois de cada impacto, introduzimos nas equações (2.12) e (2.13) as novas condições iniciais:

$$\begin{aligned} t_0 &= t \\ y_0 &= y \\ \dot{y}_0 &= -r\dot{y} \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde r é o coeficiente de restituição.

Por conseguinte, podemos estudar a dinâmica do sistema a partir das equações (2.12), (2.13) e (2.14). Para isso, devemos variar os parâmetros de controle que são ν e r . Além desses, há os parâmetros relacionados com a função de excitação $e(t)$ (fonte de energia) que corresponde ao movimento da caixa. Por exemplo, se considerarmos $e(t) = \alpha \sin(\omega t)$, teríamos α e ω como parâmetros.

Além disso, considerar a função $e(t)$ harmônica (periódica) não é a única possibilidade. Podemos, também, obter $e(t)$ a partir da solução da equação de Duffing:

$$\ddot{e} - e + e^3 + c\dot{e} = \alpha \cos(\omega t), \quad (2.15)$$

(ou outra equação adequada), logo, teríamos c , α e ω como parâmetros. Esse procedimento é muito interessante, pois permite que utilizemos uma função de excitação

$e(t)$ caótica. Ademais, tal procedimento pode ser representado a partir de uma sobreposição do sistema de par de impactos (fig. 2.6) em um sistema mecânico descrito pela equação de Duffing (fig. 2.9), como ilustrado na figura 2.10.

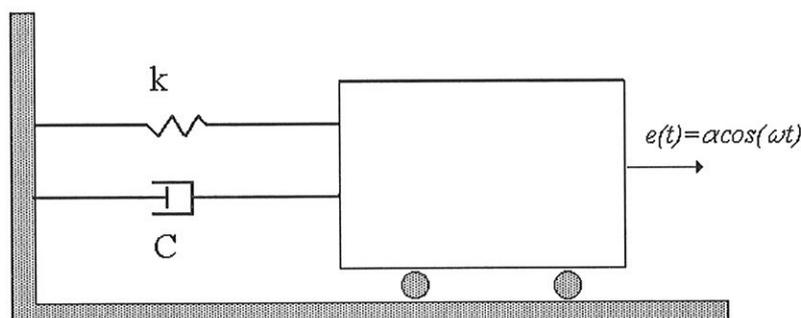


Figura 2.9: Esquema do sistema mecânico cuja dinâmica é descrita pela equação de Duffing.

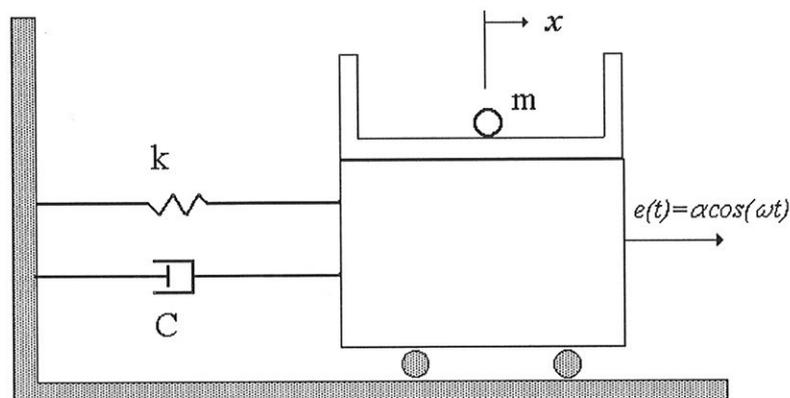


Figura 2.10: Esquema do sistema de par de impactos cuja fonte de energia $e(t)$ é dada pela solução da equação de Duffing.

Como exemplos de soluções, utilizando uma função de excitação periódica $e(t) = \alpha \sin(\omega t)$. Nós variamos apenas o parâmetro de controle α e fixamos os demais em $\nu = 2,0$, $r = 0,7$ e $\omega = 1,0$. Com isso, obtivemos soluções regulares para $\alpha = 0,7$ (fig. 2.7) e $\alpha = 1,0$ (fig. 2.11). No entanto, para $\alpha = 1,5$ a solução é irregular (fig. 2.13). Veremos na seção 3.5, com o cálculo dos expoentes de Lyapunov, que a solução regular, mostrada na figura 2.7, é periódica e a irregular, na figura 2.13, é caótica.

Nas figuras 2.8, 2.12 e 2.14, mostramos as evoluções temporais da variável dinâmica velocidade para soluções correspondentes indicadas nas figuras 2.7, 2.11 e 2.13, respectivamente. Nestas figuras, podemos notar, novamente, que a velocidade apresenta descontinuidades (linha tracejada), sendo essas decorrentes dos impactos.

Na figura 2.15, mostramos uma solução do sistema, tendo uma função $e(t)$ caótica como fonte de energia (função de excitação). Essa função é dada pela solução da equação de Duffing (a integração é feita usando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem) para os parâmetros de controle fixados em $\nu = 2,00$, $r = 0,90$, $c = 0,25$, $\alpha = 0,30$ e $\omega = 1,00$. Como não poderia deixar de ser, a solução é irregular, pois o envoltório (oscilação das paredes) que limita o movimento da bola de massa m é caótico. Veremos mais tarde (seção 3.5) que tal solução é, também, caótica.

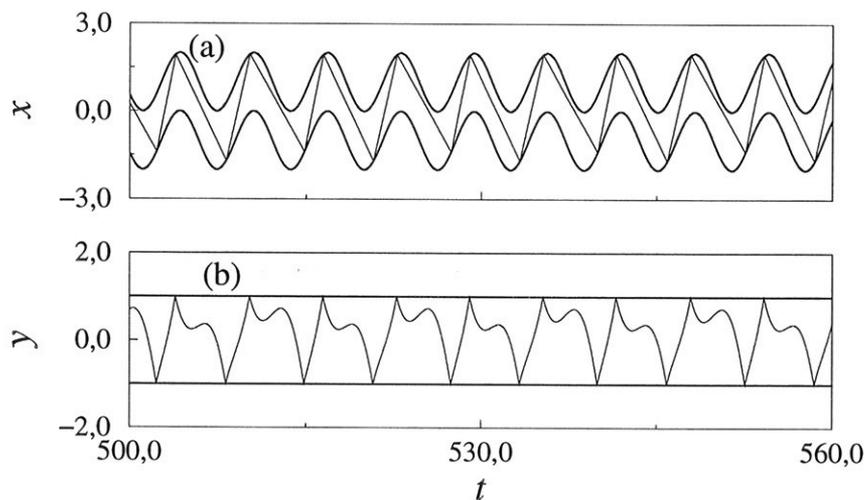


Figura 2.11: Solução regular do sistema par de impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,0$, $\omega = 1,0$, $\nu = 2,0$ e $r = 0,7$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto x . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo y .

Passamos, agora, a descrever o procedimento necessário para a obtenção do mapa transcendental.

O mapa transcendental é obtido quando registramos as variáveis y_n , \dot{y}_n , $e(t_n)$ e $\dot{e}(t_n)$ que correspondem às variáveis y , \dot{y} , $e(t)$ e $\dot{e}(t)$ no instante imediatamente antes do impacto. As variáveis y_{n+1} , \dot{y}_{n+1} , $e(t_{n+1})$ e $\dot{e}(t_{n+1})$ obtidas das equações (2.12) e (2.13), para as condições iniciais:

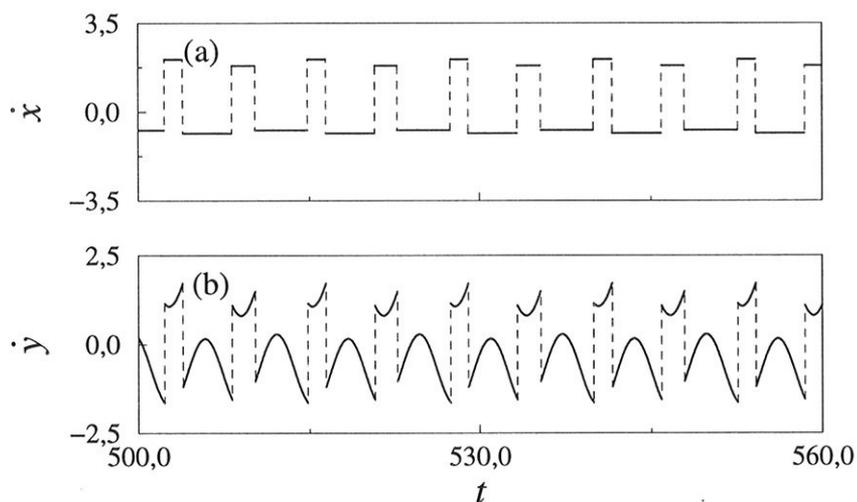


Figura 2.12: Mesma solução do sistema par de impactos indicada na figura 2.11. (a) Evolução temporal da velocidade absoluta \dot{x} . (b) Evolução temporal da velocidade relativa \dot{y} .

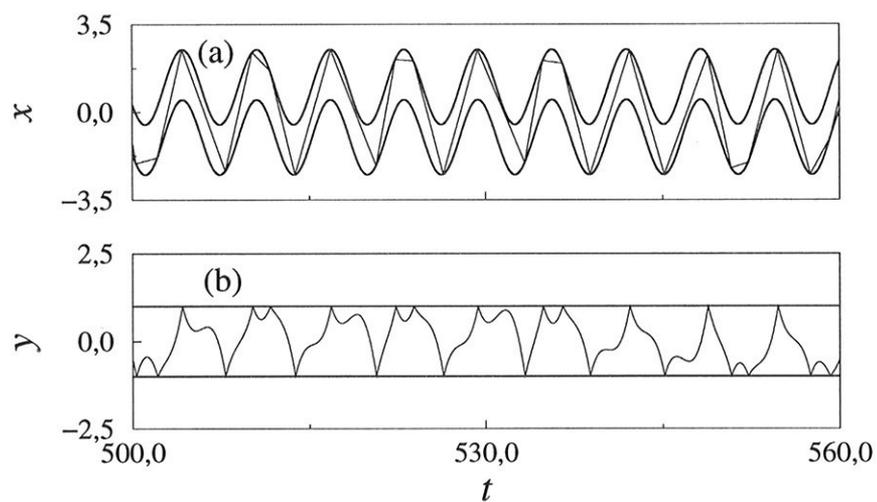


Figura 2.13: Solução irregular do sistema par de impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,5$, $\omega = 1,0$, $\nu = 2,0$ e $r = 0,7$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto x . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo y .

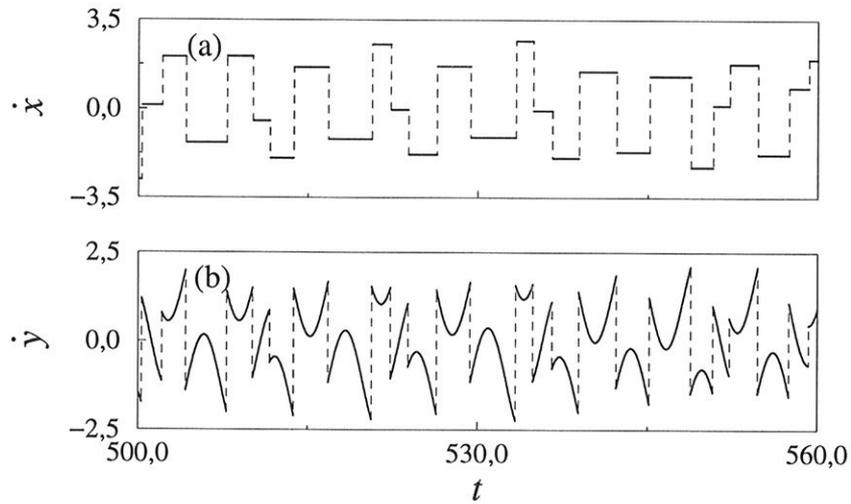


Figura 2.14: Mesma solução do sistema par de impactos indicada na figura 2.13. (a) Evolução temporal da velocidade absoluta \dot{x} . (b) Evolução temporal da velocidade relativa \dot{y} .

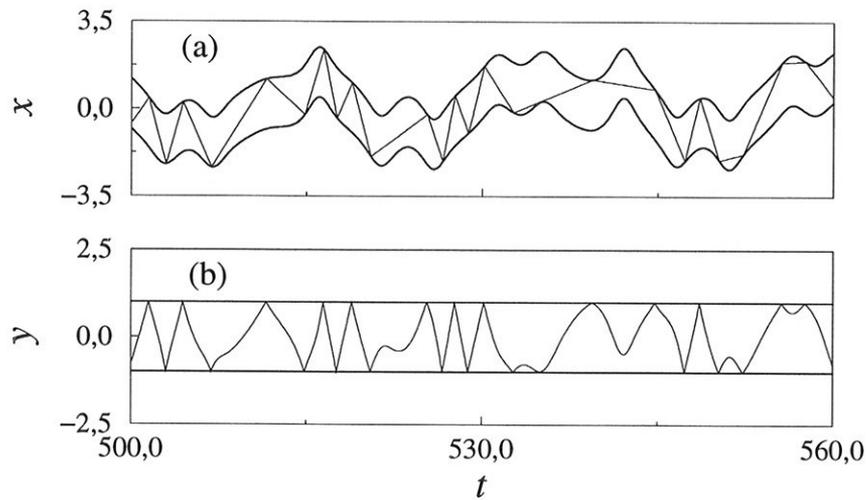


Figura 2.15: Solução de sistema de par de impactos para uma função de excitação caótica dada pela equação de Duffing, para os parâmetros de controle $\nu = 2,00$, $r = 0,90$, $c = 0,25$, $\alpha = 0,30$ e $\omega = 1,00$.

$$\begin{aligned}
 t_0 &= t_n \\
 y_0 &= y_n \\
 \dot{y}_0 &= -r\dot{y}_n
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Assim sendo, introduzimos o mapa transcendental (obtido das equações (2.12), (2.13) e (2.16)):

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= y_n + e(t_n) - e(t_{n+1}) + [-r\dot{y}_n + \dot{e}(t_n)](t_{n+1} - t_n) \\
 \dot{y}_{n+1} &= -r\dot{y}_n + \dot{e}(t_n) - \dot{e}(t_{n+1})
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

sendo $y_{n+1}, y_n = \nu/2$ ou $-\nu/2$.

Por fim, como o mapa (2.17) descrito acima, podemos desenvolver um algoritmo para o cálculo dos expoentes de Lyapunov do sistema considerado, mesmo sem conhecer a forma analítica da função $e(t)$. Ademais, ressaltamos que a função, em questão, pode ser periódica, quase-periódica ou caótica.

2.4 Caixa de engrenagens

Nesta seção, apresentamos a descrição matemática [44, 45] do sistema de caixa engrenagens (*gearboxes*), indicado na figura 2.16. O modelo desse sistema mecânico foi desenvolvido com o objetivo de fornecer elementos para o estudo da influência dos parâmetros de controle na redução do ruído (*rattling*) produzido na caixa de câmbio de carros (caixa de transmissão).

Em nosso trabalho, a partir de um estudo feito com a variação dos parâmetros de controle, identificamos no sistema de caixa de engrenagens vários fenômenos; por exemplo, crises, intermitências, transientes caóticos e coexistência de atratores. Além disso, nesse sistema, implementamos o método OGY de controle de caos e um método de supressão de caos obtido a partir de uma perturbação periódica fraca.

O modelo matemático pode ser desenvolvido sem dificuldades para sistemas com vários graus de liberdade. No entanto, as questões que nos interessamos podem ser

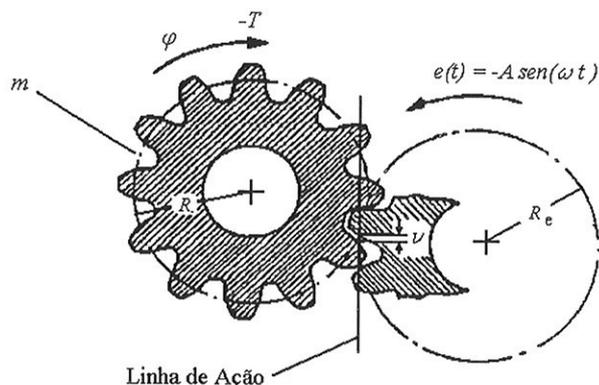


Figura 2.16: Esquema da caixa de engrenagens.

investigadas usando um modelo com apenas um grau de liberdade. Assim sendo, esse modelo é semelhante [46] ao sistema de par de impactos [43] descrito na seção anterior. Podemos notar tal semelhança observando, para isso, os esquemas simplificados desses sistemas que são ilustrados na figura 2.17.

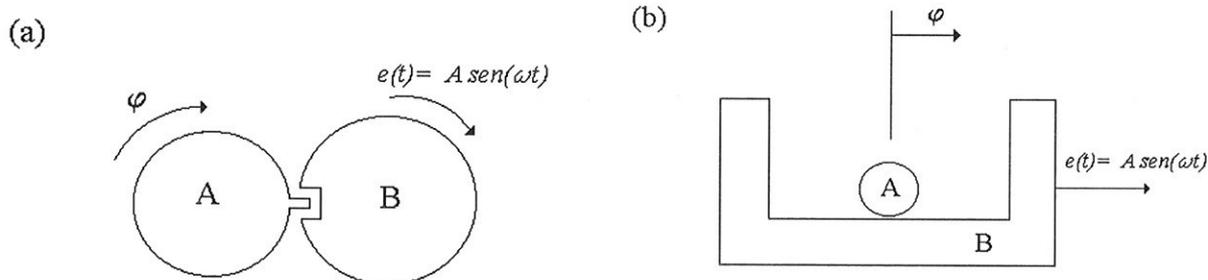


Figura 2.17: Esquema simplificado dos sistemas caixa de engrenagens (a) e par de impactos (b).

O sistema, em questão, é composto por duas engrenagens. Entre os dentes dessas engrenagens há uma folga ν , como indicado na figura 2.16.

Uma das engrenagens oscila de acordo com a função de excitação $e(t) = -A \sin \omega t$. O movimento da outra engrenagem, entre os impactos, é obtido com a solução da equação diferencial linear:

$$m\ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} = -T \quad (2.18)$$

sendo m o momento de inércia, d o amortecimento devido à lubrificação e T o torque.

Além disso, no limite da folga (intervalo de tolerância) ocorrem os impactos. Assim, o movimento do sistema é composto pelo movimento sem restrição $\varphi(t)$ e a suas alterações produzidas pelos sucessivos impactos.

Ademais, na simulação numérica desse sistema, é interessante fazer uma mudança de variável, ou seja, passar de φ (deslocamento absoluto) para S (deslocamento relativo entre as engrenagens). Na figura 2.18a, mostramos uma possível solução do sistema no referencial em repouso (no laboratório) e na figura 2.18b no referencial em movimento (com a engrenagem).

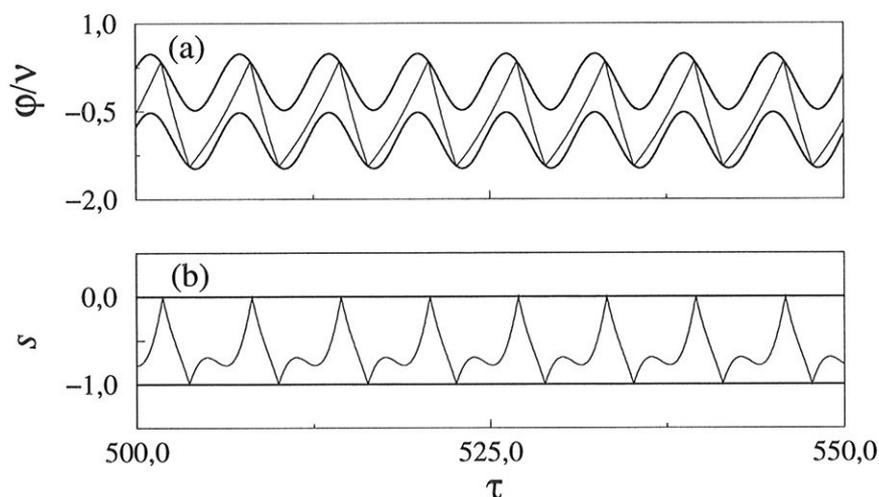


Figura 2.18: Solução regular do sistema caixa de engrenagens para os parâmetros de controle $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,1$ e $r = 0,9$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto φ . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo s .

A relação entre S e φ é obtida através de uma consideração geométrica do sistema mecânico, sendo dada por:

$$S(\varphi, t) = AR_e \text{sen}(\omega t) - R\varphi \quad (2.19)$$

onde R_e e R são os raios das engrenagens indicados na figura 2.16.

Substituindo a equação (2.19) na equação (2.18) e introduzindo a variável $s = S/\nu$, a equação de movimento para a coordenada relativa do sistema é dado por:

$$\ddot{s} + \beta\dot{s} = \ddot{e} + \beta\dot{e} + \gamma, \quad \text{para } -1 < s < 0 \quad (2.20)$$

sendo $e = \alpha \text{sen}(\omega t)$, $\dot{s} \equiv \frac{ds}{d\tau}$ e $\tau = \omega t$.

Assim, as variáveis dinâmicas desse sistema são: s, \dot{s}, τ .

Os parâmetros adimensionais são definidos como:

$$\beta \equiv d/(m\omega) \quad \text{amortecimento,}$$

$$\gamma \equiv (TR)/(m\omega^2\nu) \quad \text{momento,}$$

$$\alpha \equiv AR_e/\nu \quad \text{amplitude de excitação.}$$

A solução da equação não-autônoma (2.20) é dada por:

$$s = s_0 + \alpha[\text{sen}(\tau) - \text{sen}(\tau_0)] + \frac{\gamma}{\beta}(\tau - \tau_0) + \frac{1}{\beta}\{1 - \exp[-\beta(\tau - \tau_0)]\}[\dot{s}_0 - \alpha \cos(\tau_0) - \frac{\gamma}{\beta}] \quad (2.21)$$

$$\dot{s} = \alpha \cos(\tau) + [\dot{s}_0 - \alpha \cos(\tau_0) - \frac{\gamma}{\beta}] \exp[-\beta(\tau - \tau_0)] + \frac{\gamma}{\beta} \quad (2.22)$$

O impacto ocorre para $s = -1$ ou 0 . Depois de cada impacto, introduzimos nas equações (2.21) e (2.22) as novas condições iniciais:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau \\ s_0 &= s \\ \dot{s}_0 &= -r\dot{s} \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde r é o coeficiente de restituição e mais um parâmetro de controle.

Por conseguinte, a dinâmica do sistema pode ser investigada a partir das equações (2.21), (2.22) e (2.23). Os parâmetros de controle são α, β, γ e r . Na investigação do sistema, nós fixamos os parâmetros $\beta = 0, 1$ e $\gamma = 0, 1$ e variamos os demais. Por exemplo, variando o parâmetro α (para $r = 0, 9$) identificamos soluções regulares e irregulares. A solução regular (periódica), mostrada na figura 2.18 é obtida com o parâmetro $\alpha = 0, 5$ e irregular (caótica), figura 2.19, com $\alpha = 3, 0$. Podemos,

também, identificar soluções distintas (coexistência de atratores) para os mesmos parâmetros de controle, como mostrado nas figuras 2.18 e 2.20. Tais figuras foram obtidas a partir de condições iniciais diferentes.

Nas figuras 2.21, 2.22 e 2.23 graficamos, a evolução temporal da velocidade, para soluções indicadas nas figuras 2.18, 2.19 e 2.20, respectivamente. Novamente, podemos notar que estas figuras apresentam descontinuidades (linha tracejada). Sabemos, também, que tais descontinuidades dificultam, e muito, o cálculo dos expoentes de Lyapunov. No entanto, é possível fazê-lo, como dito anteriormente, a partir de um mapa transcendental, descrito a seguir.

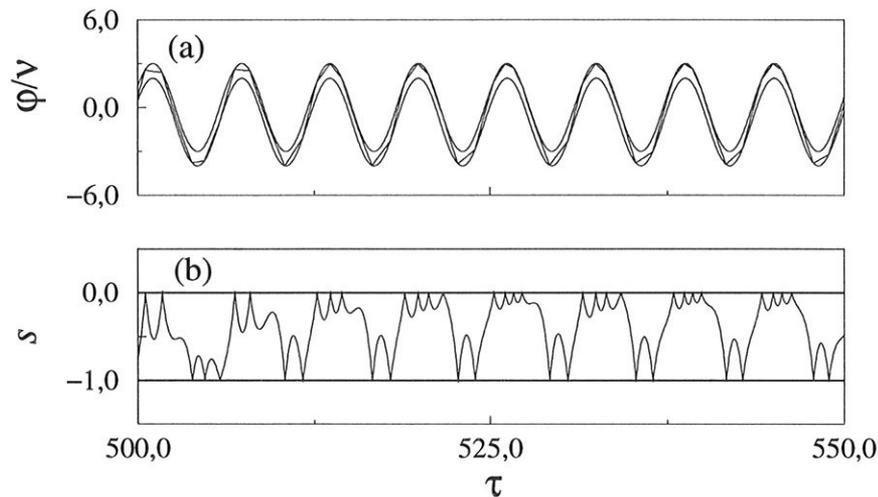


Figura 2.19: Solução irregular do sistema caixa de engrenagens para os parâmetros de controle $\alpha = 3,0$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,1$ e $r = 0,9$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto φ . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo s .

A fim de obter o mapa transcendental devemos registrar para cada impacto n as variáveis s_n , \dot{s}_n e τ_n que correspondem às variáveis s , \dot{s} e τ no instante imediatamente antes desse impacto. As variáveis s_{n+1} , \dot{s}_{n+1} e τ_{n+1} obtidas da solução das equações (2.21) e (2.22), para as condições iniciais:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau_n \\ s_0 &= s_n \\ \dot{s}_0 &= -r\dot{s}_n \end{aligned} \tag{2.24}$$

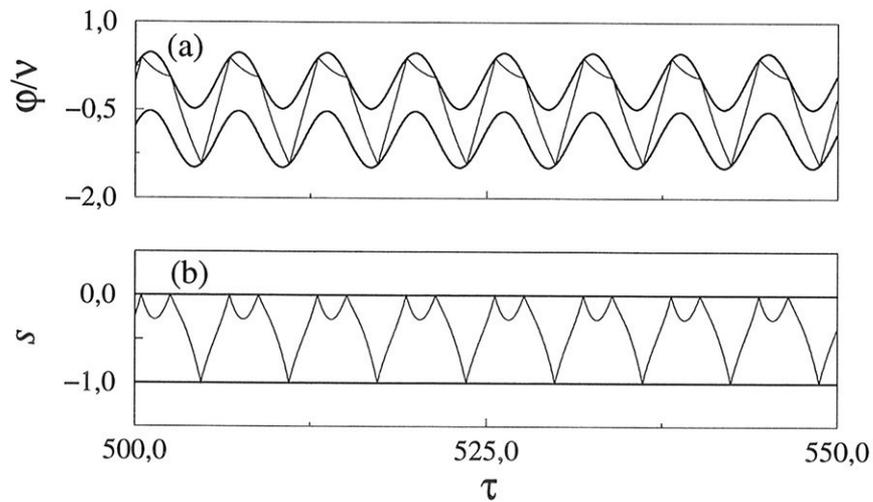


Figura 2.20: Solução regular do sistema caixa de engrenagens para os parâmetros de controle $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,1$ e $r = 0,9$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto φ . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo s .

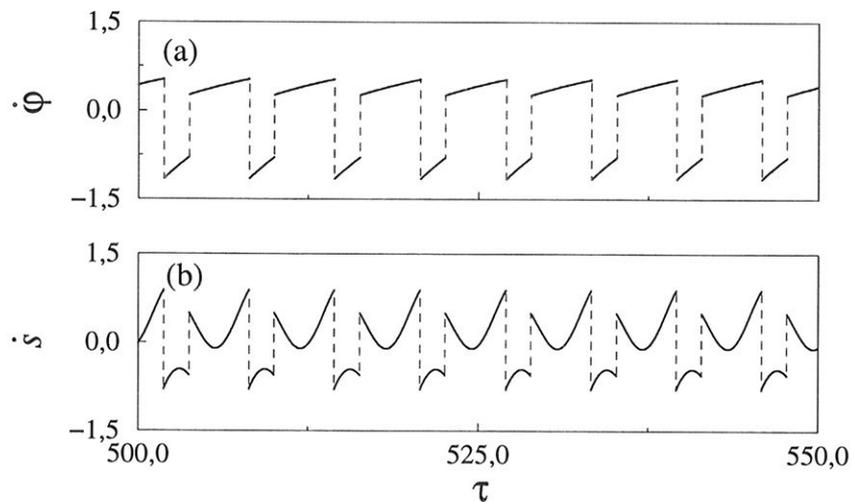


Figura 2.21: Mesma solução do sistema caixa de engrenagens indicada na figura 2.18. (a) Evolução temporal da velocidade absoluta $\dot{\varphi}$. (b) Evolução temporal da velocidade relativa \dot{s} .

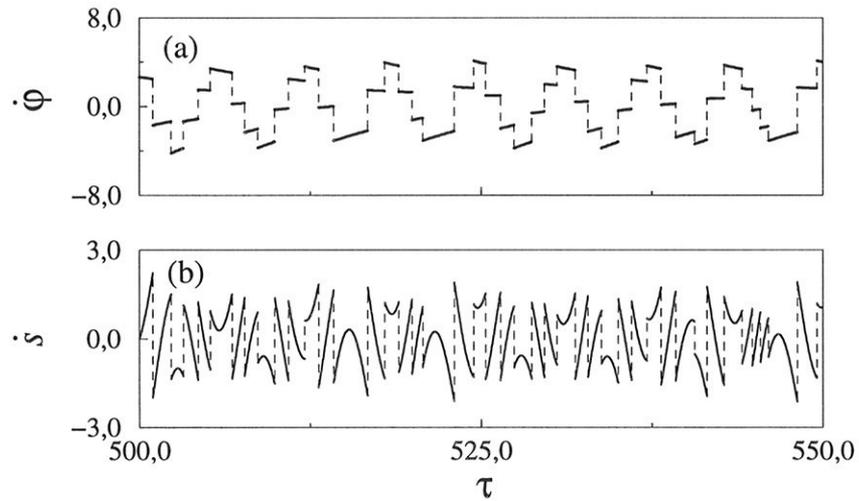


Figura 2.22: Mesma solução do sistema caixa de engrenagens indicada na figura 2.19. (a) Evolução temporal da velocidade absoluta $\dot{\phi}$. (b) Evolução temporal da velocidade relativa \dot{s} .

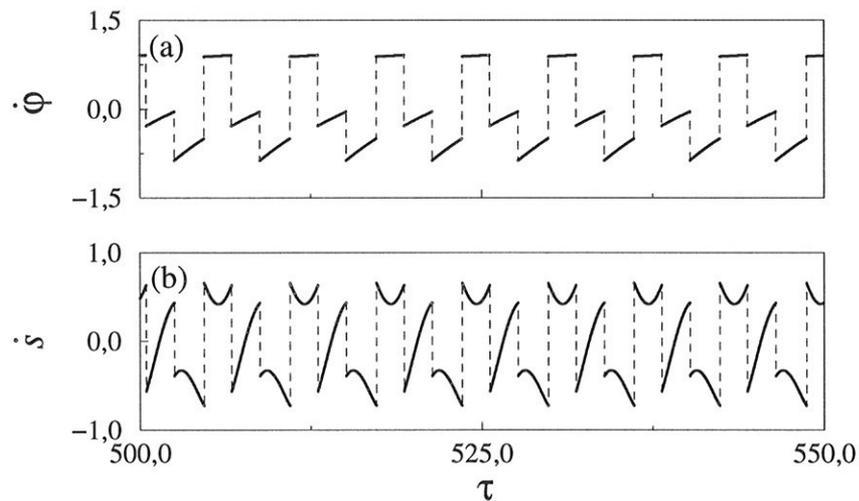


Figura 2.23: Mesma solução do sistema caixa de engrenagens indicada na figura 2.20. (a) Evolução temporal da velocidade absoluta $\dot{\phi}$. (b) Evolução temporal da velocidade relativa \dot{s} .

Assim sendo, introduzimos o mapa transcendental (obtido das equações (2.21), (2.22) e (2.24)):

$$\begin{aligned}
 s_{n+1} &= s_n + \alpha[\text{sen}(\tau_{n+1}) - \text{sen}(\tau_n)] + \frac{\gamma}{\beta}(\tau_{n+1} - \tau_n) \\
 &\quad - \frac{1}{\beta}\{1 - \exp[-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)]\}[r\dot{s}_n + \alpha \cos(\tau_n) + \frac{\gamma}{\beta}] \\
 \dot{s}_{n+1} &= \alpha \cos(\tau_{n+1}) - [r\dot{s}_n + \alpha \cos(\tau_n) + \frac{\gamma}{\beta}] \exp[-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)] + \frac{\gamma}{\beta} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

sendo $s_{n+1}, s_n = -1$ ou 0 .

Por fim, cabe ressaltar que não podemos estudar o sistema utilizando apenas o mapa acima, pois esse não é explícito, ou seja, dado (\dot{s}_n, τ_n) não é possível determinar $(\dot{s}_{n+1}, \tau_{n+1})$, sendo necessário, para isso, utilizarmos evolução temporal das equações (2.21) e (2.22). Porém, com esse mapa podemos caracterizar o sistema e desenvolver alguns algoritmos numéricos. Por exemplo, algoritmos para o cálculo dos expoentes de Lyapunov e para implementação do método OGY de controle de caos.

Capítulo 3

Métodos de Análise

Neste capítulo, apresentamos os métodos utilizados na análise dos sistemas mecânicos com impactos. Inicialmente, na seção 3.1, mostramos como identificar a natureza de algumas soluções, usando, para isso, o plano de fase [75]. Na seção 3.2, descrevemos como usar o mapa de Poincaré, de uma forma adequada, em sistemas com impactos [50]. Na seção 3.3, mostramos como analisar o comportamento dinâmico de um sistema a partir de um dos parâmetros de controle. Para isso, utilizamos os diagramas de bifurcação. Além disso, na seção 3.4, mostramos como obter diagramas isoperiódicos [76]. A partir desses diagramas, que são determinados variando dois parâmetros de controle, podemos analisar o comportamento dinâmico de um sistema em uma grande variedade de situações. E na seção 3.5, apresentamos um algoritmo, desenvolvido por nós, para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em sistemas cujas trajetórias apresentam descontinuidades no espaço de fase [53]. Assim sendo, é possível caracterizar as soluções obtidas desses sistemas. Finalmente, na seção 3.6, a partir do cálculo do maior expoente de Lyapunov e variando dois parâmetros de controle, apresentamos os diagramas denominados espaços dos parâmetros [77]. Tais diagramas são, também, utilizados na análise do comportamento dinâmico.

3.1 Plano de fase

Os sistemas dinâmicos aqui estudados, como visto anteriormente, são de um grau de liberdade e não-autônomos, o que implica em um espaço de fase tridimensional e três variáveis dinâmicas, a saber: posição, velocidade e tempo.

O espaço de fase é um espaço abstrato, onde podemos representar a evolução temporal do sistema [75]. Além disso, cabe salientar que tal espaço é formado a partir dos eixos correspondentes às variáveis dinâmicas do sistema. Assim, o estado do sistema em um tempo dado é representado por um ponto no espaço de fase.

Ademais, a evolução temporal do sistema no espaço de fase descreve uma trajetória que, por sua vez, corresponde à solução do sistema. É conveniente, por uma questão de simplicidade, graficar a trajetória em um plano (velocidade e posição). Esse plano é denominado plano de fase.

Considerando que os sistemas são dissipativos, para graficar a trajetória no plano de fase, devemos, em primeiro lugar, eliminar o transiente, também denominado de transitório. Em outras palavras, devemos desconsiderar os primeiros valores obtidos das variáveis dinâmicas velocidade e posição, graficando a solução depois que essa tenha convergido a um atrator. Para figuras desta seção, consideramos 1.000 impactos como transiente.

Como exemplos de planos de fase, nas figuras 3.1 e 3.2, mostramos duas soluções regulares para o oscilador com impactos. As linhas tracejadas nessas figuras indicam as descontinuidades das trajetórias, decorrentes dos impactos. Na figura 3.3, mostramos um solução irregular para esse sistema. Além desses exemplos, mostramos, também, nas figuras 3.4 e 3.5 soluções regulares (em dois referenciais) para o sistema de par de impactos e, mais uma vez, as linhas tracejadas indicam as descontinuidades. Nessas figuras a função de excitação $e(t)$ é dada por uma função $\alpha \text{sen}(\omega t)$. Ainda utilizando essa função podemos observar, na figura 3.6, uma solução irregular. Além disso, podemos notar na figura 3.7 uma outra solução irregular para o sistema de par de impactos. Porém, neste caso, a função de excitação é caótica, sendo obtida a partir da equação de Duffing. Por fim, para o sistemas de caixa de engrenagens mostramos uma solução regular (fig. 3.8) e uma irregular (fig. 3.9).

Na prática podemos, a partir do plano de fase, identificar a natureza da solução do sistema, isto é, determinar se a solução do sistema é periódica (regular) ou caótica (irregular). No entanto, devemos ter um certo cuidado com isso, pois utilizando apenas o plano de fase não podemos diferenciar uma solução quase-periódica (regular) de uma caótica. Para isso, é necessário o cálculo do expoentes de Lyapunov. Além do plano de fase para identificar a natureza das soluções, podemos usar, também, o

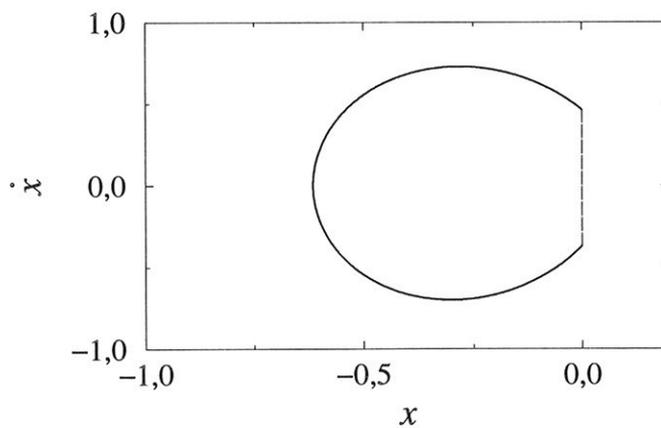


Figura 3.1: Plano de fase correspondente à solução regular (fig. 2.3) do oscilador com impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,00$, $\omega = 2,64$, $r = 0,80$ e $x_c = 0$.

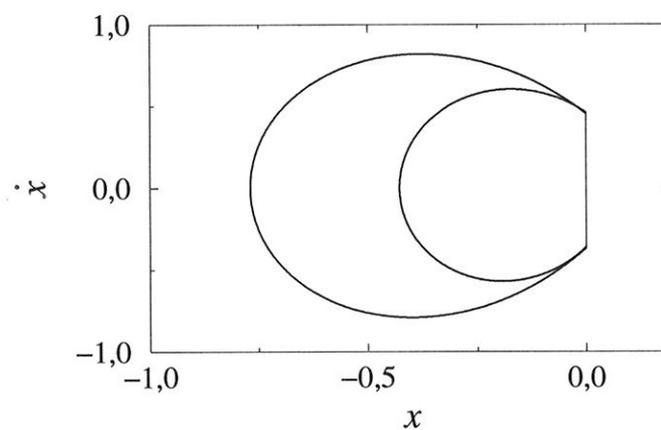


Figura 3.2: Plano de fase correspondente à solução regular (fig. 2.4) do oscilador com impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,00$, $\omega = 2,69$, $r = 0,80$ e $x_c = 0$.

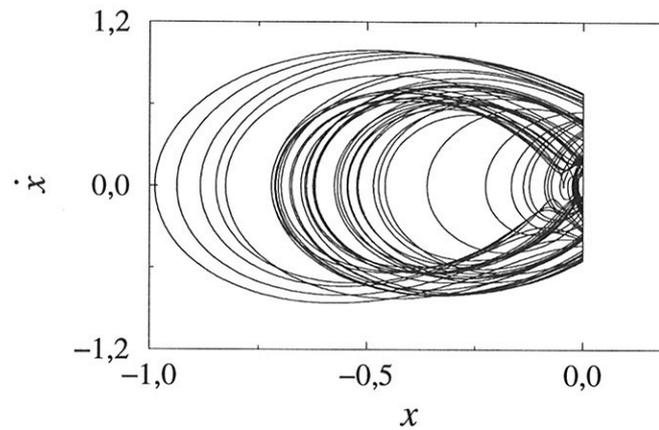


Figura 3.3: Plano de fase correspondente à solução irregular (fig. 2.5) do oscilador com impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,0$, $\omega = 2,8$, $r = 0,8$ e $x_c = 0$.

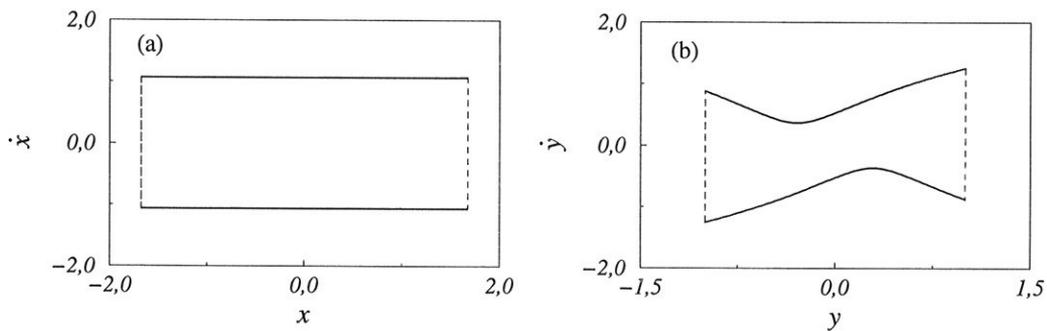


Figura 3.4: Plano de fase correspondente à solução regular (fig. 2.7) do sistema de par de impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 0,7$, $\omega = 1,0$, $\nu = 2,0$ e $r = 0,7$. (a) Referencial em repouso. (b) Referencial em movimento.

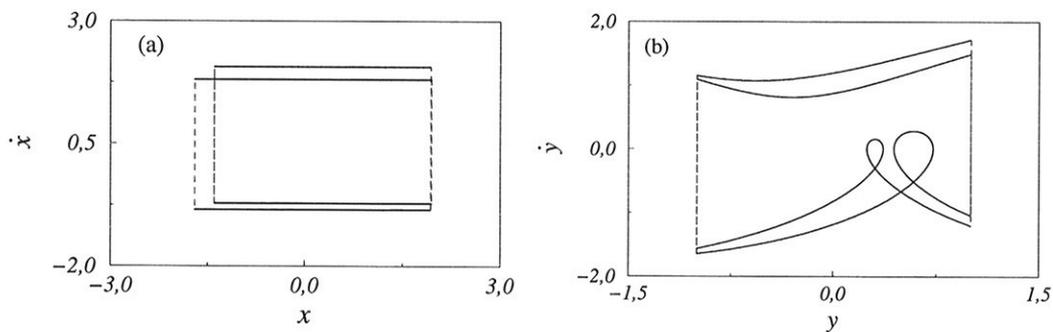


Figura 3.5: Plano de fase correspondente à solução regular (fig. 2.11) do sistema de par de impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,0$, $\omega = 1,0$, $\nu = 2,0$ e $r = 0,7$. (a) Referencial em repouso. (b) Referencial em movimento.

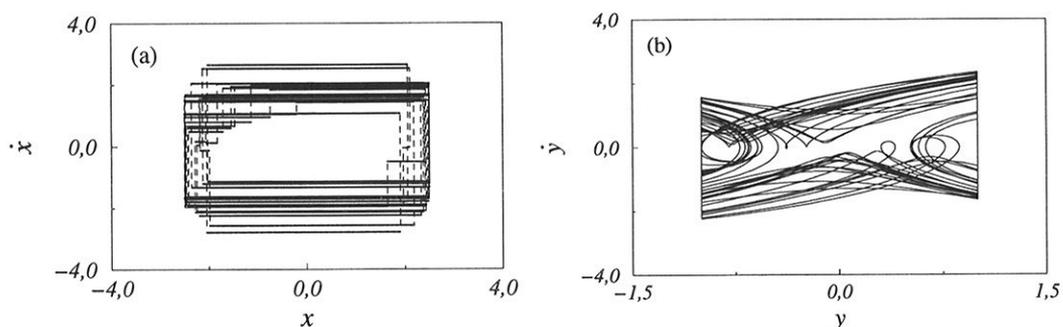


Figura 3.6: Plano de fase correspondente à solução irregular (fig. 2.13) do sistema de par de impactos para os parâmetros de controle $\alpha = 1,5$, $\omega = 1,0$, $\nu = 2,0$ e $r = 0,7$. (a) Referencial em repouso. (b) Referencial em movimento.

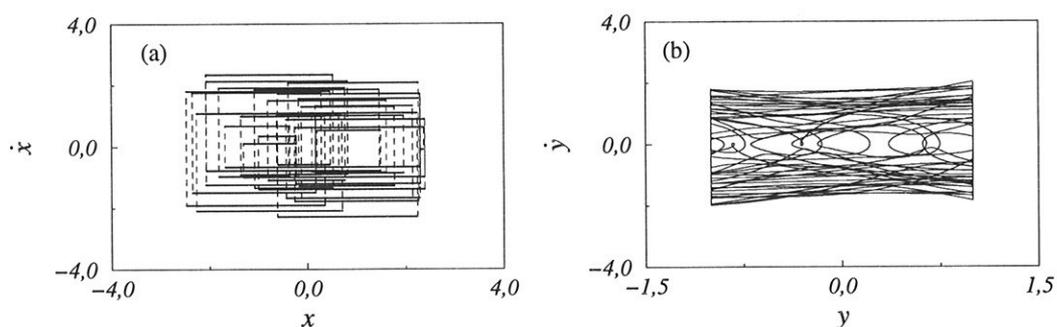


Figura 3.7: Plano de fase correspondente à solução irregular (fig. 2.15) do sistema de par de impactos para uma função de excitação caótica dada pela equação de Duffing, para os parâmetros de controle $\nu = 2,00$, $r = 0,90$, $c = 0,25$, $\alpha = 0,30$ e $\omega = 1,00$. (a) Referencial em repouso. (b) Referencial em movimento.

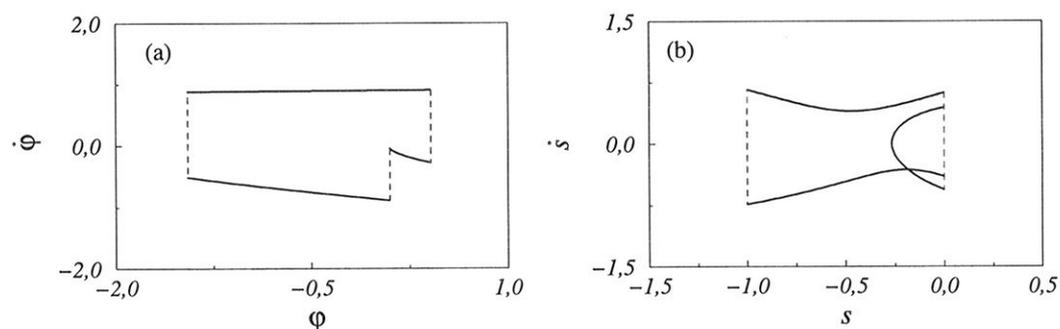


Figura 3.8: Plano de fase correspondente à solução regular (fig. 2.20) do sistema de caixa de engrenagens para os parâmetros de controle $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,1$ e $r = 0,9$. (a) Referencial em repouso. (b) Referencial em movimento.

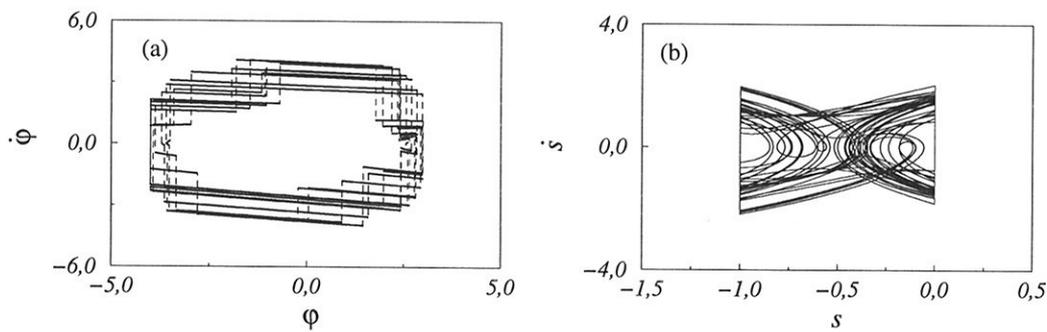


Figura 3.9: Plano de fase correspondente à solução irregular (fig. 2.19) do sistema de caixa de engrenagens para os parâmetros de controle $\alpha = 3,0$, $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,1$ e $r = 0,9$. (a) Referencial em repouso. (b) Referencial em movimento.

mapa de Poincaré como veremos a seguir. Porém, cabe ressaltar que nem sempre é possível usar o mapa (como veremos); por exemplo, no sistema de par de impactos com uma função de excitação caótica ou no sistema não-ideal (capítulo 6). Neste caso, podemos apenas usar o plano de fase.

3.2 Mapa de Poincaré

Nesta seção, mostramos como usar o mapa de Poincaré, de uma forma adequada, em sistemas cujas trajetórias apresentam descontinuidades no espaço de fase [50].

O mapa de Poincaré é uma ferramenta importante e freqüentemente utilizada para identificar a natureza das soluções em sistemas dinâmicos não-lineares. Isso porque, podemos, por exemplo, analisar o comportamento de um sistema tridimensional de tempo contínuo, a partir de um sistema bidimensional correspondente de tempo discretizado. Cabe ressaltar que nessa análise não há uma perda qualitativa.

A fim de obter o mapa de Poincaré para um sistema tridimensional, devemos, em primeiro lugar, considerar um superfície bidimensional no espaço de fase, sendo essa transversal a trajetória do sistema. Tal superfície é denominada seção de Poincaré. Quando a trajetória intercepta a seção de Poincaré, coletamos, em sentido único, um ponto cujas coordenadas são correspondentes aos valores das variáveis dinâmicas na seção. Com esse procedimento simples, obtemos um mapeamento que é, por sua vez, o mapa de Poincaré. Ademais, a seqüência desses pontos é conhecida na

literatura como órbita.

Nos sistemas com impactos é conveniente considerar a seção de Poincaré, no espaço de fase, onde as discontinuidades da trajetória ocorrem. Em outras palavras, o mapa de Poincaré é obtido no instante dos impactos. Para isso, nós coletamos as variáveis dinâmicas velocidade e tempo no instante (imediatamente antes) do impacto. E a variável tempo é considerada no intervalo $[0, 2\pi/\omega)$, onde ω é a frequência da fonte de energia. Por conseguinte, os sistemas, cuja frequência não é conhecida, não é possível obter o mapa de Poincaré como descrito; por exemplo, no sistema de par de impactos com uma função de excitação caótica ou no sistema não-ideal (como veremos no capítulo 6).

O procedimento descrito acima não é único, considerando que os sistemas são não-autônomos. Nesses sistemas, para uma frequência ω específica da fonte de energia, a variável dinâmica tempo é cíclica em um intervalo $[0, 2\pi/\omega)$. Com isso, fixando a variável tempo, podemos obter um mapa de Poincaré. Esse mapa, também, é denominado de mapa estroboscópico.

Como exemplos de mapas de Poincaré, inicialmente mostramos, para o oscilador com impactos, na figura 3.10 um mapa de Poincaré obtido no instante dos impactos (fig. 3.10a) e um mapa estroboscópico (fig. 3.10b). A partir do mapa estroboscópico podemos identificar o período da órbita. Neste caso (fig. 3.10b), como no mapeamento há apenas um ponto, temos uma órbita de período 1, o que pode ser comprovado a partir da figura 3.11. Ainda, para o oscilador, na figura 3.12 mostramos uma solução regular. De acordo com o mapa estroboscópico (fig. 3.12b), essa solução é de período 2, o que podemos, realmente, comprovar a partir da figura 3.13. E nas figuras 3.14 e 3.15, mostramos uma solução irregular, sendo graficado na figura 3.14a um atrator estranho obtido a partir de um mapa no instante dos impactos e na figura 3.14b um atrator obtido a partir de um mapa estroboscópico.

Para o sistema de par de impactos, nas figuras 3.16, 3.17 e 3.18 mostramos soluções de período 1, período 2 e caótica, respectivamente. Na solução mostrada na figura 3.16, apesar de ser uma órbita de período 1, podemos notar que na figura 3.16a (mapa no instante dos impactos) há dois pontos. E algo semelhante podemos observar, na figura 3.17a (mapa com quatro pontos), para órbita de período 2. Isso acontece porque, usamos, nestes casos, duas seções de Poincaré, que correspondem as paredes do sistema de par de impactos, como descrito na seção 2.3. Assim sendo,

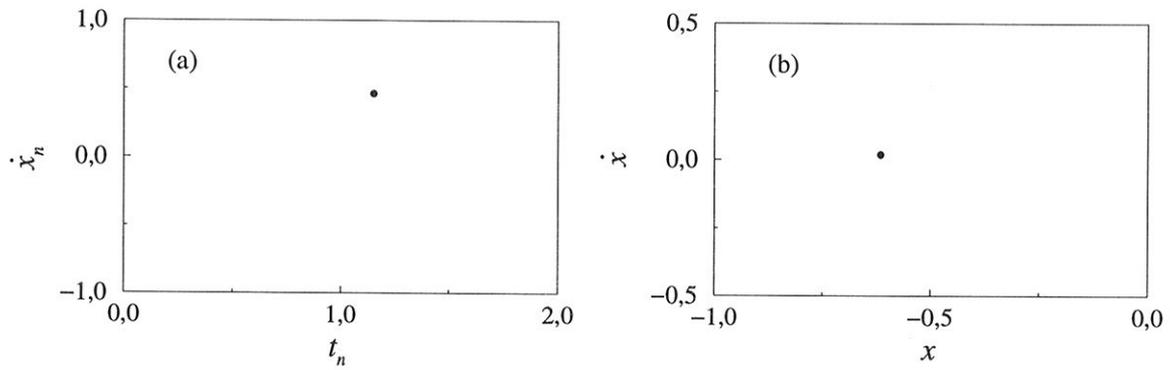


Figura 3.10: Mesma solução do oscilador com impactos mostrada na figura 3.1. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

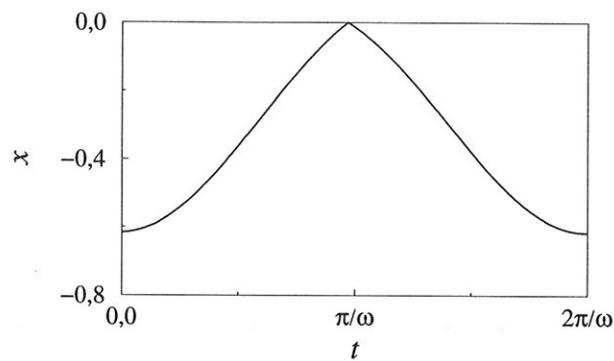


Figura 3.11: Mesma solução do oscilador com impactos mostrada na figura 3.1. Variável dinâmica x em função do tempo $t(\text{mod } 2\pi/\omega)$.

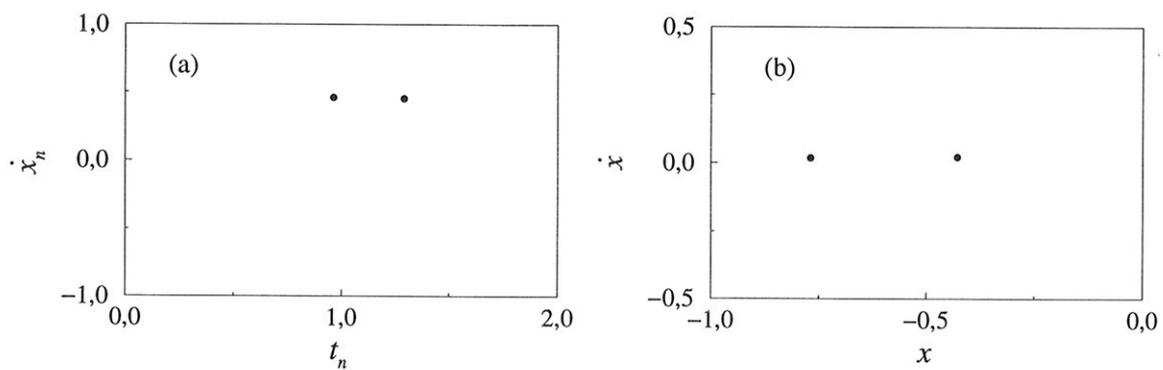


Figura 3.12: Mesma solução do oscilador com impactos mostrada na figura 3.2. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

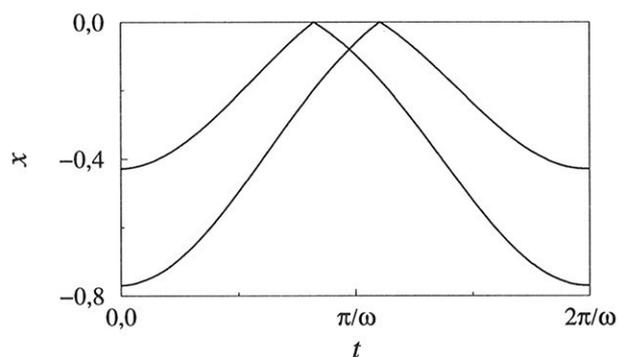


Figura 3.13: Mesma solução do oscilador com impactos mostrada na figura 3.2. Variável dinâmica x em função do tempo $t(\text{mod } 2\pi/\omega)$.

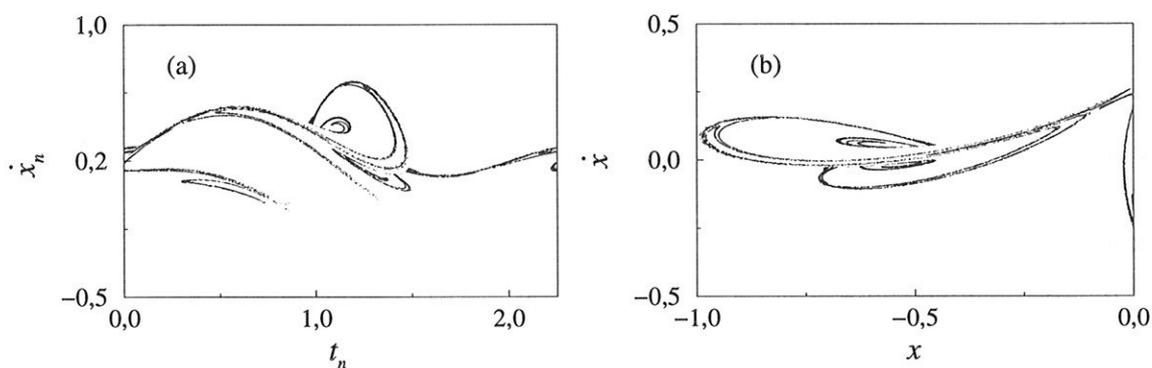


Figura 3.14: Mesma solução do oscilador com impactos mostrada na figura 3.3. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

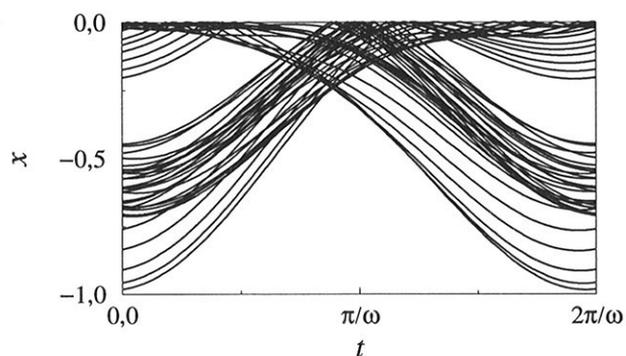


Figura 3.15: Mesma solução do oscilador com impactos mostrada na figura 3.3. Variável dinâmica x em função do tempo $t(\text{mod } 2\pi/\omega)$.

a órbita de período 1 é, no mapa no instante dos impactos, representada por dois pontos e a órbita de período 2 por quatro pontos. Com isso, podemos pensar que basta apenas uma seção de Poincaré, e não duas, para obter informações suficientes a respeito das soluções. No entanto, isso não é verdade. Por exemplo, para a caixa de engrenagens que, por sua vez, usamos também duas seções de Poincaré, mostramos na figura 3.19 uma órbita de período 1 (fig. 3.19b) cuja solução (fig. 3.20) é dada por uma trajetória que intercepta duas vezes um seção de Poincaré e uma vez a outra. Portanto, se usássemos apenas uma seção de Poincaré teríamos um ou dois pontos, de acordo com a seção que adotássemos. Além disso, perderíamos informação desta solução.

Assim sendo, a partir do mapa de Poincaré no instante dos impactos, nós sabemos como ocorrem os impactos. Porém, nada podemos dizer sobre a periodicidade da solução. Por exemplo, na figura 3.21 vemos uma solução da caixa de engrenagens cuja trajetória intercepta três vezes cada seção de Poincaré (fig. 3.22a). No entanto, essa solução é de período 1, como podemos ver na figura 3.22b. Além disso, na figura 3.23 mostramos um plano de fase para essa solução e, novamente, parece que o período é superior a um; no entanto, como vimos, isso não é verdade. Com isso, podemos concluir que para determinar a periodicidade de uma solução devemos usar o mapa estroboscópico.

Finalmente, nas figuras 3.24a e 3.24b, apresentamos mapas de Poincaré de uma solução (fig. 3.25) caótica (como veremos a seguir).

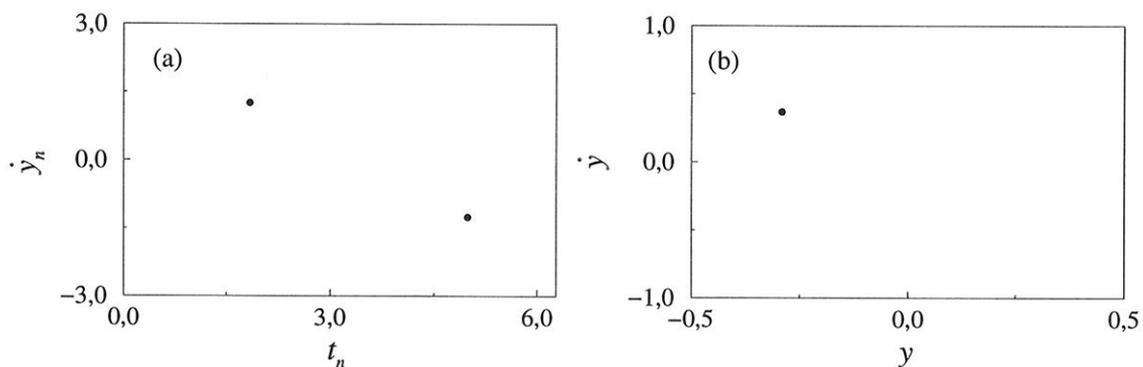


Figura 3.16: Mesma solução do sistema de par de impactos mostrada na figura 3.4. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

Por fim, mostramos nessa seção como obter um mapa de Poincaré para sistemas

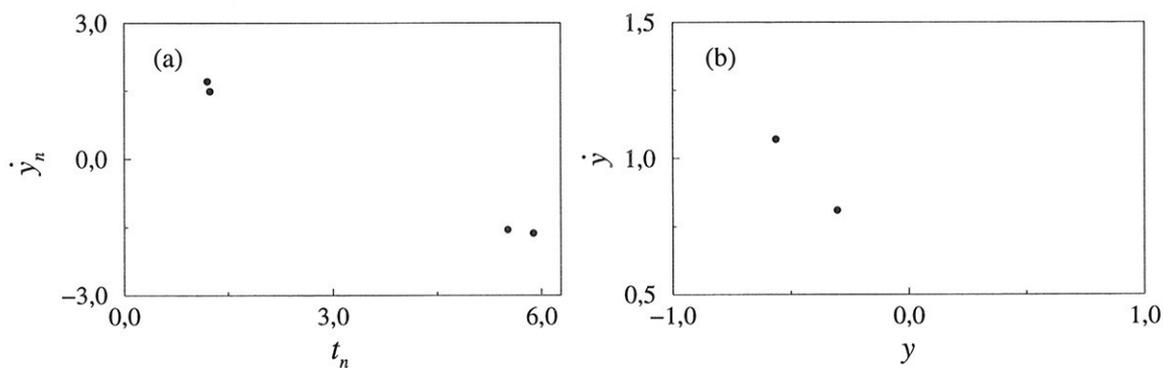


Figura 3.17: Mesma solução do sistema de par de impactos mostrada na figura 3.5. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

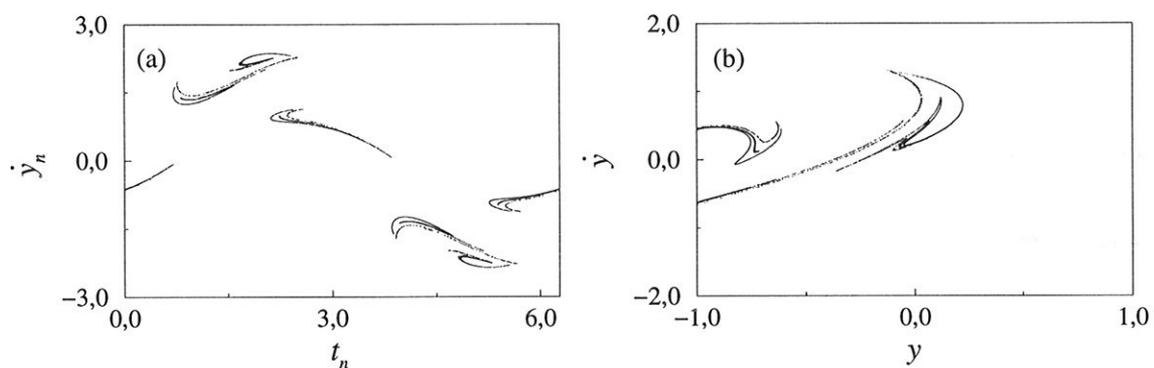


Figura 3.18: Mesma solução do sistema de par de impactos mostrada na figura 3.6. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

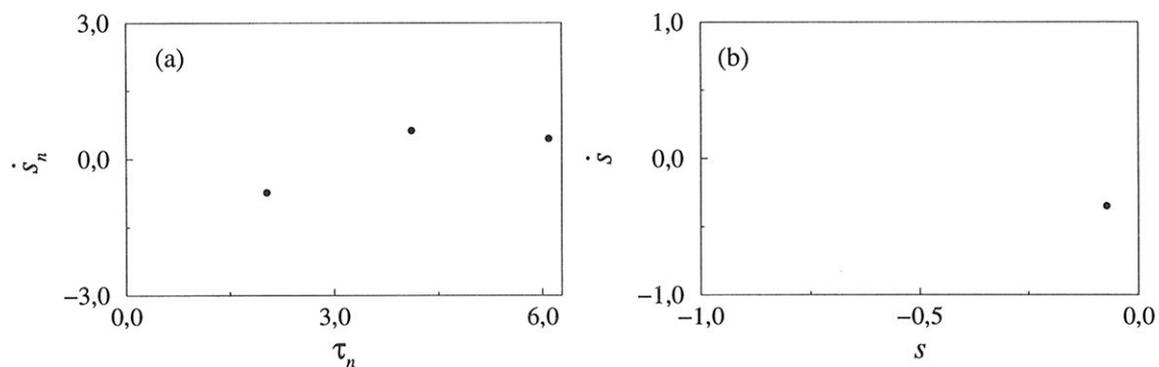


Figura 3.19: Mesma solução do sistema de caixa de engrenagens mostrada na figura 3.8. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

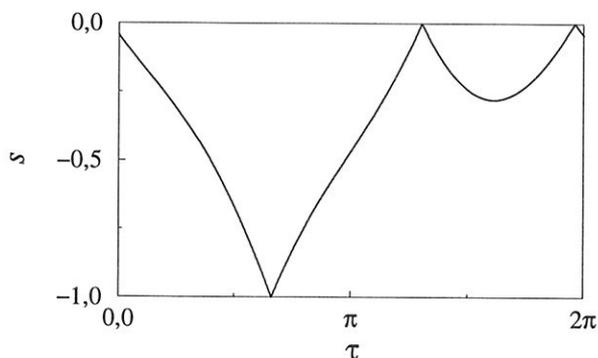


Figura 3.20: Mesma solução do sistema de caixa de engrenagens mostrada na figura 3.8. Variável dinâmica s em função do tempo $\tau(\text{mod } 2\pi)$.

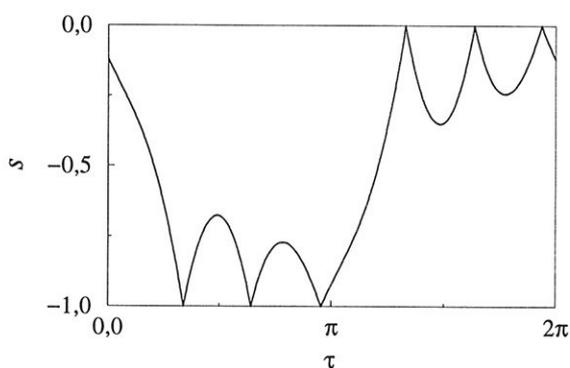


Figura 3.21: Solução do sistema de caixa de engrenagens para os parâmetros $\alpha = 3,00$, $\beta = 0,10$, $\gamma = 0,10$ e $r = 0,82$. Variável dinâmica s em função do tempo $\tau(\text{mod } 2\pi)$.

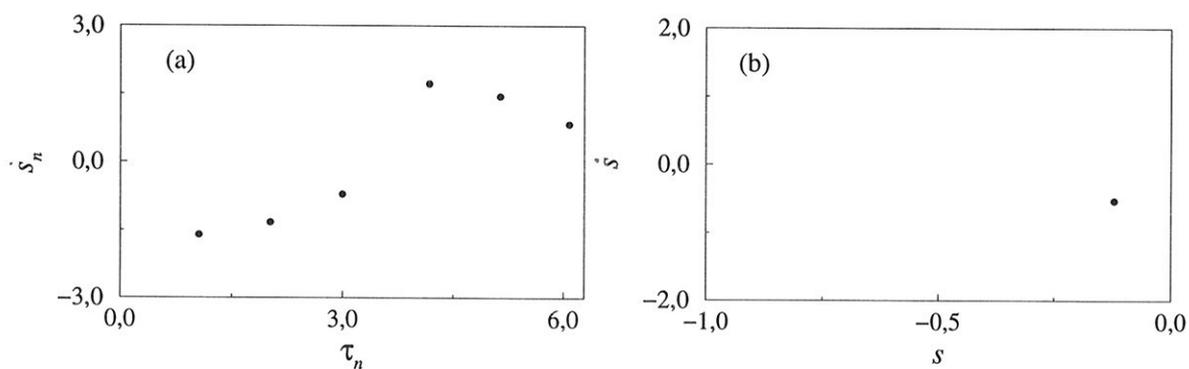


Figura 3.22: Solução do sistema de caixa de engrenagens para os parâmetros da figura 3.21. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

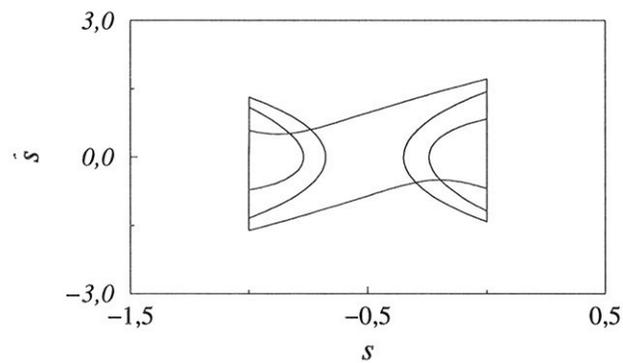


Figura 3.23: Plano de fase do sistema de caixa de engrenagens para os parâmetros da figura 3.21.

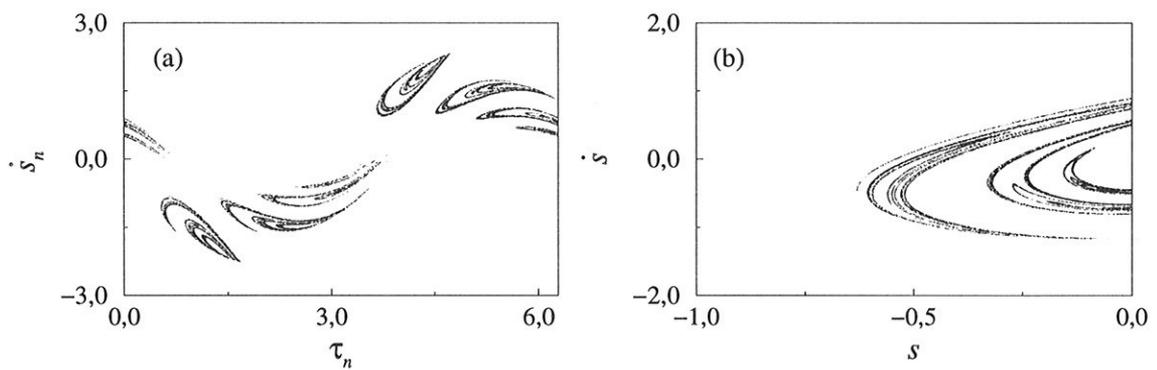


Figura 3.24: Mesma solução do sistema de caixa de engrenagens mostrada na figura 3.9. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

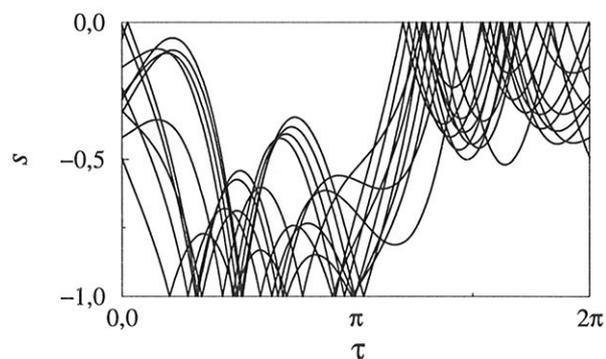


Figura 3.25: Mesma solução do sistema de caixa de engrenagens mostrada na figura 3.9. Variável dinâmica s em função do tempo $\tau(\text{mod } 2\pi)$.

com impactos. Esse mapa pode ser um mapa no instante dos impactos ou um mapa estroboscópico. É importante ressaltar que, alguns autores [92] denominam o mapa estroboscópico como um mapa de Poincaré, e outros não [93]. Além disso, não é possível obter o mapa de Poincaré para o sistema de par de impactos com uma função de excitação caótica e para o sistema não-ideal (como veremos no capítulo 6). Para esses sistemas, devemos usar o plano de fase para identificar a natureza das soluções obtidas.

3.3 Diagrama de bifurcação

Um sistema dinâmico depende de um, ou mais, parâmetros que são chamados de parâmetros de controle. O comportamento dinâmico do sistema pode, por sua vez, ser bem diferente se os valores desses parâmetros forem alterados. Além disso, quando estudamos um sistema, em geral, estamos interessados em analisar o comportamento deste em uma grande variedade de situações, ou seja, para diversos valores de parâmetros de controle.

Nesta seção, mostramos como analisar o comportamento dinâmico de um sistema a partir de um dos parâmetros de controle. Para isso, utilizamos um gráfico denominado diagrama de bifurcação.

O diagrama de bifurcação é um gráfico de uma das variáveis dinâmicas em função de um dos parâmetros de controle do sistema [55,94]. A variável dinâmica graficada é obtida a partir de um mapa de Poincaré (no instante dos impactos ou estroboscópico).

Para os gráficos mostrados aqui, utilizamos no eixo horizontal 500 valores igualmente espaçados de um dos parâmetros de controle. No eixo vertical graficamos até 300 valores de uma das variáveis dinâmicas. Esses valores são coletados após um transiente de 1.000 impactos, exceto para caixa de engrenagens cujo transiente é de 5.000 impactos. Assim sendo, para obter o diagrama de bifurcação, nós variamos um parâmetro de controle e fixamos os demais. Para cada valor do parâmetro do diagrama, realizamos uma simulação numérica. Nessas simulações optamos em utilizar sempre as mesmas condições iniciais. No entanto, cabe ressaltar que essa prática não é necessária, poderíamos utilizar condições iniciais distintas. Ademais, para

cada simulação numérica, coletamos, após o transiente, um conjunto de 300 valores de uma das variáveis dinâmicas. Porém, nem sempre graficamos os 300 valores. Isso porque, quando a solução for periódica, esse conjunto possui valores repetidos. Por uma questão de conveniência é interessante graficar apenas valores distintos, isto é, é vantajoso em termos práticos obter figuras com o menor número de pontos possíveis. Para isso, desenvolvemos um algoritmo (rotina computacional) que verifica a periodicidade do conjunto de valores. Além disso, podemos utilizar esse algoritmo não só para construir diagramas de bifurcação, mas também para obter diagramas isoperiódicos, como veremos na próxima seção.

Inicialmente, na figura 3.26, mostramos diagramas de bifurcação para o oscilador com impactos. Nesses diagramas graficamos as variáveis dinâmicas em função da frequência, ω . Tais variáveis são obtidas a partir de um mapa de Poincaré no instante dos impactos. Ademais, podemos notar, nesses diagramas, que há um comportamento periódico (representado por uma linha) para uma grande faixa de intervalo de frequência e um comportamento caótico para uma pequena faixa (no final do intervalo de parâmetro adotado). Além disso, na figura 3.26a podemos notar, em $\omega = 2,0$, efeitos de uma ressonância.

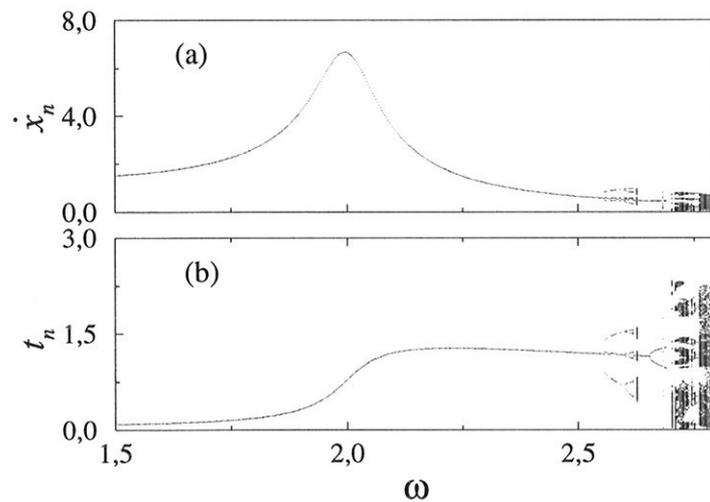


Figura 3.26: Diagrama de bifurcação, do oscilador com impactos, em função do parâmetro de controle ω (frequência) e para os demais parâmetros fixados em $\alpha = 1,0$, $r = 0,8$ e $x_c = 0$.

Na figura 3.27, ainda utilizando o mapa de Poincaré no instante dos impactos, mostramos, para o sistema de par de impactos com um excitação $\alpha \text{sen}(\omega t)$, diagra-

mas de bifurcação em função do parâmetro de controle α . E novamente, podemos observar comportamentos periódicos e caóticos. E na figura 3.28, para o sistema de caixa de engrenagens, apresentamos diagramas de bifurcação (obtidos a partir do mapa no instante dos impactos). Nesse diagrama, variando o parâmetro α (amplitude de excitação), podemos ver que comportamentos periódicos são intercalados com comportamentos caóticos. Além disso, podemos, também, notar que comportamentos caóticos desaparecem repentinamente, isto é, há uma mudança abrupta de um atrator caótico para um pequena variação do parâmetro de controle. Esse fenômeno é conhecido, na literatura, como crise. Para valores de parâmetros próximos às crises, podemos observar, como veremos no capítulo 4, alguns fenômenos interessantes como intermitências e transientes caóticos. Ainda para o sistema de caixa de engrenagens, na figura 3.29, apresentamos diagramas em função do coeficiente de restituição, r .

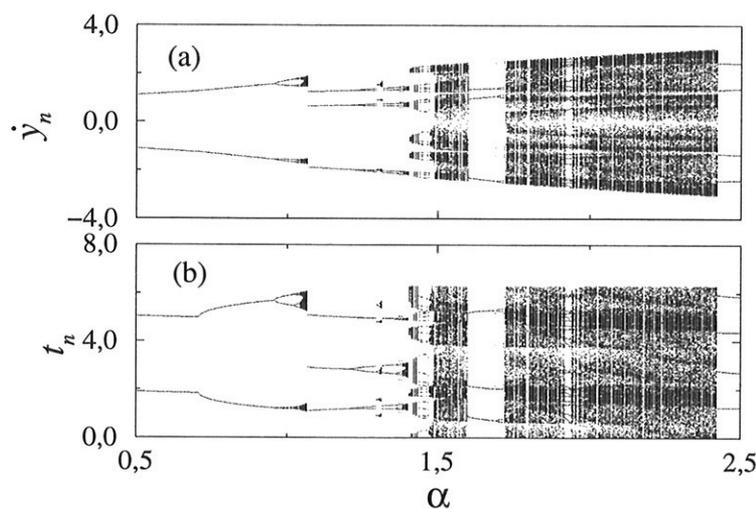


Figura 3.27: Diagrama de bifurcação, do sistema de par de impactos, em função do parâmetro de controle α (amplitude de excitação) e para os demais parâmetros fixados em $\omega = 1,0$, $\nu = 2,0$ e $r = 0,7$.

Finalmente, nas figuras 3.30 e 3.31 apresentamos diagramas de bifurcação equivalentes aos que foram mostrados, respectivamente, nas figuras 3.28 e 3.29. Porém, as variáveis dinâmicas graficadas nestes diagramas foram obtidas a partir de um mapa de estroboscópico. Com isso, determinamos a periodicidade do atrator graficado. E nos diagramas (figuras 3.28 e 3.29), que são obtidos a partir de um mapa de Poincaré no instante dos impactos com duas seções, obtemos informações das

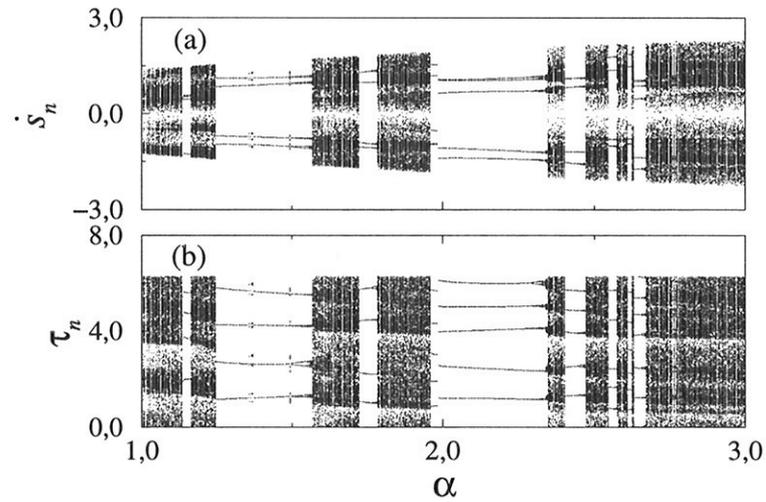


Figura 3.28: Diagrama de bifurcação, do sistema de caixa de engrenagens, em função do parâmetro de controle α (amplitude de excitação) e para os demais parâmetros fixados em $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,1$ e $r = 0,9$.

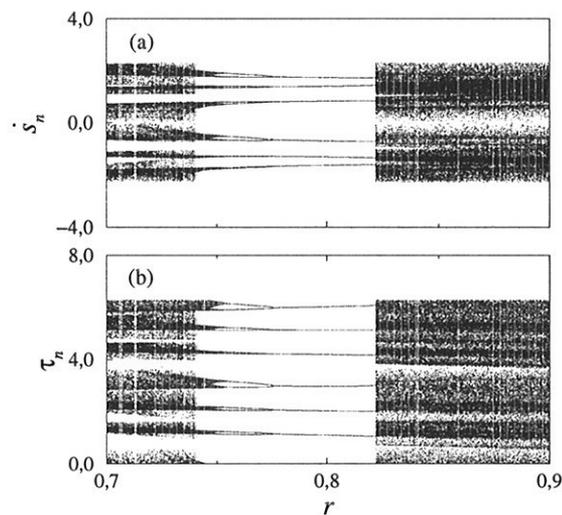


Figura 3.29: Diagrama de bifurcação, do sistema de caixa de engrenagens, em função do parâmetro de controle r (coeficiente de restituição) e para os demais parâmetros fixados em $\alpha = 3,0$, $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,1$.

soluções em relação aos impactos. Por exemplo, na figura 3.31 para $r = 0,8$, nós temos um atrator de período 1. E esse mesmo atrator, como vemos no diagrama da figura 3.29, apresenta três impactos em cada lado.

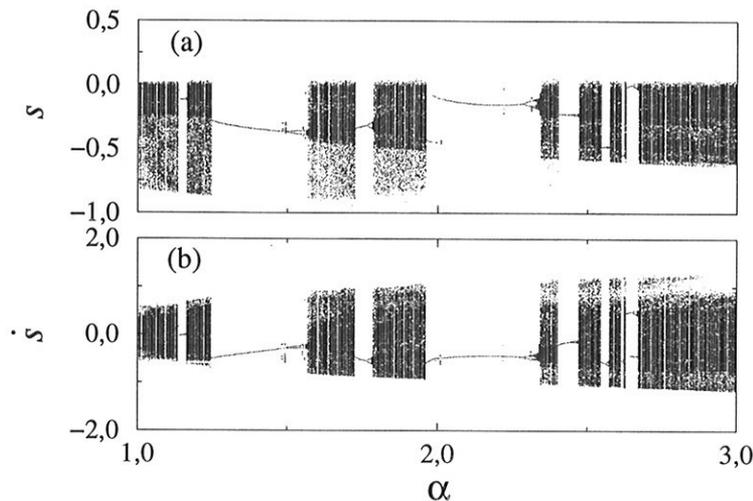


Figura 3.30: Diagrama de bifurcação, do sistema de caixa de engrenagens, em função do parâmetro de controle α (amplitude de excitação) e para os demais parâmetros fixados em $\beta = 0,1$, $\gamma = 0,1$ e $r = 0,9$.

Por fim, o diagrama de bifurcação, como vimos nessa seção, é uma ferramenta importante no estudo de sistemas dinâmicos, pois a partir desse diagrama conhecemos o comportamento dinâmico de um sistema em relação a um dos seus parâmetros de controle. Além disso, determinamos no diagrama valores de parâmetro no qual o atrator caótico sofre uma mudança abrupta, ou seja, passa por uma crise. Quando isso ocorre identificamos, como dito anteriormente, intermitência e transiente caótico.

3.4 Diagrama isoperiódico

Na seção anterior, mostramos um procedimento de como estudar o comportamento dinâmico de um sistema, a partir da variação de um dos parâmetros de controle (diagrama de bifurcação). E nesta seção, apresentamos um outro procedimento. Com o qual podemos estudar um sistema variando simultaneamente dois

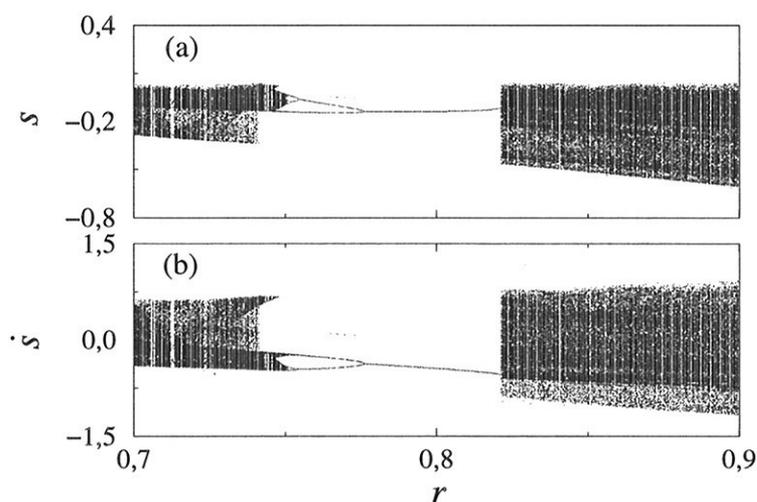


Figura 3.31: Diagrama de bifurcação, do sistema de caixa de engrenagens, em função do parâmetro de controle r (coeficiente de restituição) e para os demais parâmetros fixados em $\alpha = 3,0$, $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,1$.

parâmetros de controle. Para isso, utilizamos o diagrama denominado isoperiódico [76, 95]. Tal diagrama é constituído por dois parâmetros de controle. Para cada par de parâmetros há associado um número, cujo valor corresponde à periodicidade do atrator obtido para esses parâmetros.

A fim de obter o diagrama isoperiódico, devemos, em primeiro lugar, fazer uma simulação numérica para um valor fixo dos dois parâmetros considerados. Nessa simulação após um transiente, coletamos um conjunto de 300 valores de uma das variáveis dinâmicas do sistema. Esses valores são obtidos a partir de um mapa estroboscópico. Em segundo lugar, verificamos a periodicidade do conjunto obtido. E isso é possível a partir do algoritmo indicado na seção anterior. Ou seja, o algoritmo usado na construção dos diagramas de bifurcação com a menor quantidade de pontos possíveis. Nas figuras mostradas, nesta seção, usamos uma grade de 400×400 pontos, ou seja, 400 valores de cada parâmetro. Os pontos são graficados na forma de pequenas células, de maneira que o diagrama é completamente preenchido, isto é, não há espaços entre os pontos da grade. Além disso, cada célula possui uma cor (escala em cinza) de acordo com o valor da periodicidade do atrator para os parâmetros correspondentes. Ademais, cabe ressaltar que para um atrator caótico (ou quase-periódico) o valor associado será de 300.

Inicialmente, na figura 3.32, vemos um diagrama isoperiódico, para o oscilador com impactos, cujos parâmetros são amplitude α e frequência ω de forçamento. Os atratores são graficados, em uma escala cinza, de acordo com suas periodicidades. No entanto, o que podemos, realmente, notar são atratores periódicos de baixo período graficados em preto e atratores caóticos (esses são caóticos e não quase-periódicos, como veremos nas próximas seções) em branco.

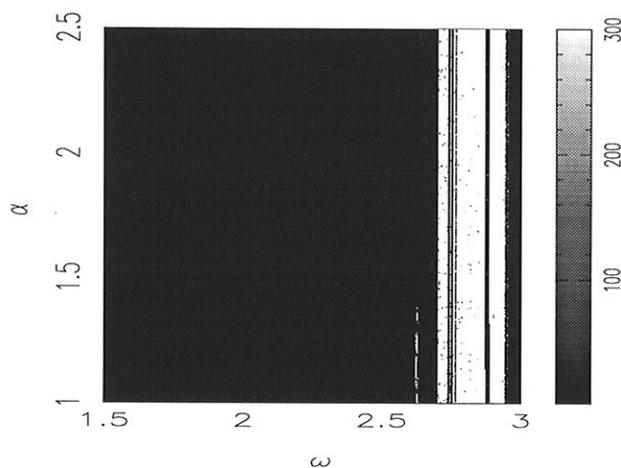


Figura 3.32: Diagrama isoperiódico do oscilador com impactos para os parâmetros amplitude α e frequência ω de forçamento e os demais parâmetros fixados em $r = 0,8$ e $x_c = 0$. Os atratores periódicos de baixo período são graficados em preto e atratores caóticos em branco, de acordo com a escala a direita da figura.

Na figura 3.33, mostramos um diagrama para o sistema de par de impactos, cuja função de excitação é dada por $e(t) = \alpha \text{sen}(\omega t)$. O diagrama é obtido variando os parâmetros α e ω . Novamente em preto temos atratores periódicos e em branco caóticos. Além disso, podemos notar que o comportamento do sistema, neste caso, praticamente não muda quando variamos o parâmetro ω . No entanto, quando variamos o parâmetro α , verificamos mudanças abruptas de comportamento. Atratores caóticos desaparecem, para um pequena variação em α , ou seja, ocorrem crises.

Finalmente, na figura 3.34, mostramos um diagrama do sistema de caixa de engrenagens, para os parâmetros de controle amplitude de excitação α e coeficiente de restituição r . Neste caso, podemos notar que a estrutura do diagrama é bem complexa. Nesse diagrama, identificamos crises variando tanto α quanto r .

Por fim, o diagrama isoperiódico mostra ser um ferramenta útil na análise dinâmica de um sistema. Além desse diagrama, podemos usar o diagrama no espaço dos

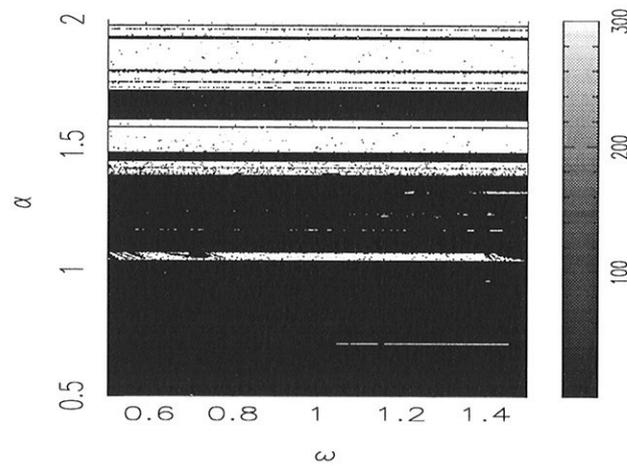


Figura 3.33: Diagrama isoperiódico do sistema de par de impactos para os parâmetros amplitude, α , e frequência, ω , da função de excitação, e os demais parâmetros fixados em $r = 0,7$ e $\nu = 2,0$. Os atratores periódicos de baixo período são graficados em preto e atratores caóticos em branco, de acordo com a escala a direita da figura.

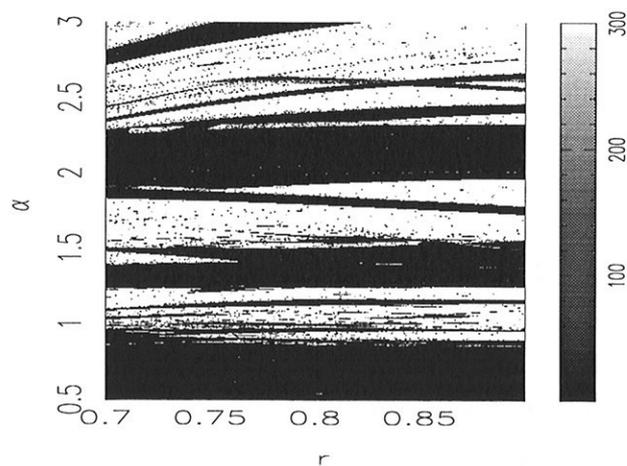


Figura 3.34: Diagrama isoperiódico do sistema de caixa de engrenagens para os parâmetros amplitude de excitação, α , e coeficiente de restituição, r , e os demais parâmetros fixados em $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,1$. Os atratores periódicos de baixo período são graficados em preto e atratores caóticos em branco, de acordo com a escala a direita da figura.

parâmetros, para estudar o comportamento de um sistema em uma grande variedade de situações. O diagrama no espaço dos parâmetros é obtido de forma semelhante ao isoperiódico. No entanto, não usamos, neste caso, o valor da periodicidade de um atrator, mas sim o valor do maior expoente de Lyapunov.

3.5 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são coeficientes muito importantes na análise dinâmica de sistemas não-lineares, pois podemos caracterizar um atrator a partir de seus expoentes de Lyapunov. Por exemplo, quando o maior expoente de Lyapunov, de um atrator, for negativo dizemos que esse atrator é periódico, se for zero o atrator é quase-periódico e se for positivo o atrator é caótico.

Para sistemas lisos (*smooth*) o procedimento para obter esses expoentes é bem conhecido, tanto para sistemas de tempo contínuos como de tempo discretizados [51]. Os sistemas de tempo contínuos são aqueles cujas trajetórias são descritas por equações diferenciais e os sistemas de tempo discretizados são aqueles cujas órbitas são descritas por equações de diferenças, também conhecidas como mapas.

Entretanto, o cálculo dos expoentes de Lyapunov, para os sistemas não-lisos, não é trivial. Por exemplo, para sistemas cujo fluxo no espaço de fase apresenta discontinuidades devido a impactos ou não. Apesar disso e a fim de analisar a dinâmica de sistemas com impactos, desenvolvemos um algoritmo para o cálculo dos expoentes de Lyapunov [53]. Para isso, utilizamos um método, já existente, de cálculo para mapas [55] e o mapa transcendental, descrito anteriormente. Em outras palavras, a partir do mapa transcendental calculamos tais expoentes, de forma similar ao cálculo feito para os mapas bidimensionais, como o mapa de Hénon. Porém, convém lembrar, conforme discutimos no capítulo 2, que não é possível estudar a dinâmica do sistema impactante usando, apenas, o mapa transcendental.

Além disso, o procedimento para o cálculo utilizando o mapa transcendental é novo, ou seja, foi introduzido por nós. Tal mapa era utilizado, na literatura [43, 50], apenas no estudo de estabilidade de órbitas de período 1. Ademais, o procedimento, aqui indicado, não é único. Podemos, também, obter os expoentes de Lyapunov a

partir de um algoritmo para fluxos (sistema de tempo contínuo) [51]. No entanto, nesse algoritmo é necessário introduzir, como indicado na referência [56], algumas modificações que levam em consideração a característica do sistema impactante, ou seja, as descontinuidades. Além desses procedimentos, podemos obter (estimar) o valor do expoente de Lyapunov maior, como descrito na referência [57], a partir de um método que utiliza a sincronização de caos.

3.5.1 Em mapas

Nesta seção descrevemos o método para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em mapas bidimensionais.

Para um mapa bidimensional os expoentes são dados por:

$$\lambda_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln |\Lambda_j^N|, \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

onde os $|\Lambda_j^N|$ são os autovalores da Matriz M definida por

$$M = \prod_{n=1}^N J^n \quad (3.2)$$

sendo J^n a matriz jacobiana da n -ésima interação do mapa.

Além disso, não basta utilizar as equações acima para implementar o método, pois o produto das matrizes jacobianas na equação (3.2) implica em um problema numérico. Quando o atrator é caótico os elementos dessa matriz crescem de tal forma, que impossibilitam o cálculo numérico para o número de iterações necessário. Em outras palavras, os elementos das matriz M tornam-se enormes, mesmo para um número pequeno de iterações, o que leva a um estorno de memória (*overflow*). E quando o atrator é periódico os coeficientes da matriz se anulam, impossibilitando, novamente, o cálculo dos expoentes.

A fim de contornar esse problema numérico, recorreremos a um artifício, ou seja, transformamos a matriz M num produto de matrizes triangulares, como segue:

$$\prod_{n=0}^N J^n = J^N \cdot J^{N-1} \dots J^1 \cdot J^0$$

$$\begin{aligned}
&= J^N.(T^N.T^{N-1}).J^{N-1}.(T^{N-1}.T^{N-1-1})\dots(T^2.T^{2-1})J^1.(T^1.T^{1-1}).J^0.(T^0.T^{0-1}) \\
&= (J^N.T^N)(T^{N-1}.J^{N-1}.T^{N-1})\dots(T^{2-1}.J^1.T^1).(T^{1-1}.J^0.T^0) \\
&= Q^N.Q^{N-1}\dots Q^1.Q^0
\end{aligned}$$

onde as matrizes ortonormais T^n são definidas como:

$$T^n \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta_n & \text{sen } \theta_n \\ -\text{sen } \theta_n & \cos \theta_n \end{pmatrix}$$

e as matrizes Q^n devem ser triangulares:

$$Q^n \equiv T^{(n+1)^{-1}} J^n T^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ 0 & c_n \end{pmatrix}$$

Para que as matrizes Q^n sejam, realmente, triangulares devemos impor as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
\tan \theta_{n+1} &= \frac{J_{22}^n \text{sen} \theta_n - J_{21}^n \cos \theta_n}{J_{11}^n \cos \theta_n - J_{12}^n \text{sen} \theta_n} \\
\theta_0 &= 0.
\end{aligned}$$

Por conseguinte, podemos escrever os expoentes de Lyapunov como:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \|a_n\| \\
\lambda_2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \ln \|c_n\|
\end{aligned} \tag{3.3}$$

onde os coeficientes a_n e c_n são dados por:

$$\begin{aligned}
a_n &= (J_{11}^n \cos \theta_n - J_{12}^n \text{sen} \theta_n) \cos \theta_{n+1} - (J_{21}^n \cos \theta_n - J_{22}^n \text{sen} \theta_n) \text{sen} \theta_{n+1} \\
c_n &= (J_{21}^n \text{sen} \theta_n + J_{22}^n \cos \theta_n) \cos \theta_{n+1} + (J_{11}^n \text{sen} \theta_n + J_{12}^n \cos \theta_n) \text{sen} \theta_{n+1}
\end{aligned}$$

Como a triangularização da matriz M no cálculo dos expoentes, passamos de uma fórmula (eq. (3.1)), que envolvia uma produtória, para uma fórmula (eq. (3.3)), que envolve uma somatória. Com isso, evitamos o problema numérico.

Por fim, com o procedimento descrito aqui é possível determinar os expoentes de Lyapunov dos sistemas de nosso interesse. No entanto, para isso, devemos determinar a matriz jacobiana, que, por sua vez, é obtida a partir do mapa transcendental, como veremos a seguir.

3.5.2 Oscilador com impactos

Mostramos, aqui, resultados numéricos do cálculo dos expoentes de Lyapunov para o oscilador com impactos. Para isso, usamos as equações descritas na seção anterior, onde a matriz jacobiana

$$J^n \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \dot{x}_n} \\ \frac{\partial \dot{x}_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial \dot{x}_{n+1}}{\partial \dot{x}_n} \end{pmatrix}$$

é obtida a partir do mapa transcendental (seção 2.2), sendo os elementos dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} &= \frac{1}{\dot{x}_{n+1}} [-x_n + \alpha \cos(\omega t_n)] \text{sen}(t_{n+1} - t_n) - r \dot{x}_n \cos(t_{n+1} - t_n) \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \dot{x}_n} &= \frac{1}{\dot{x}_{n+1}} [r \text{sen}(t_{n+1} - t_n)] \\ \frac{\partial \dot{x}_{n+1}}{\partial t_n} &= \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} [-x_{n+1} + \alpha \cos(\omega t_{n+1})] + [x_n - \alpha \cos(\omega t_n)] \cos(t_{n+1} - t_n) \\ &\quad - r \dot{x}_n \text{sen}(t_{n+1} - t_n) \\ \frac{\partial \dot{x}_{n+1}}{\partial \dot{x}_n} &= \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \dot{x}_n} [-x_{n+1} + \alpha \cos(\omega t_{n+1})] - r \cos(t_{n+1} - t_n) \end{aligned}$$

Na figura 3.35a, vemos o teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, para um atrator periódico e, conforme esperado, os valores são negativos. Além disso, parece, nessa figura, que há apenas um valor de expoente graficado. No entanto, nós graficamos os dois expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, que possuem valores muito próximos.

Na figura 3.35b, vemos o teste de convergência dos expoentes de Lyapunov $\lambda_{1,2}$ para um atrator caótico onde há um valor negativo e um outro positivo. Neste caso,

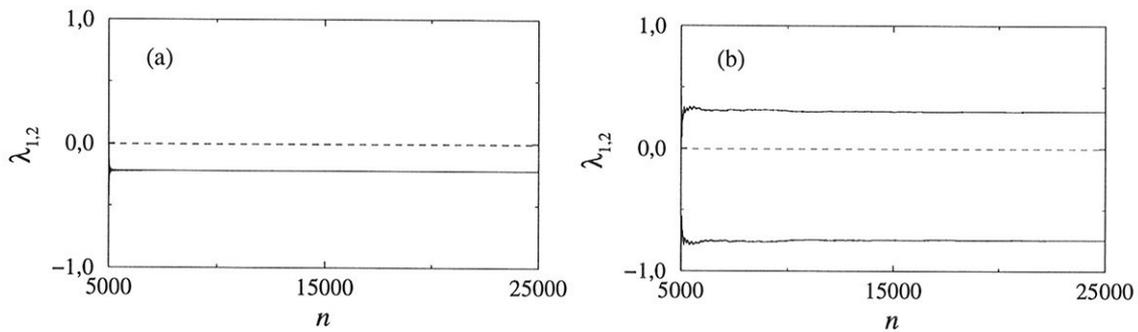


Figura 3.35: Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função do número de impacto, n , para o oscilador com impactos. (a) Solução periódica mostrada na figura 3.1. (b) Solução caótica mostrada na figura 3.3.

considerando que o atrator é caótico, a convergência dos expoentes é muito boa.

De acordo com as figuras do teste de convergência, podemos dizer que o método usado, para cálculo dos expoentes, funciona bem para o oscilador com impactos.

3.5.3 Par de impactos

Mostramos, aqui, resultados numéricos do cálculo dos expoentes de Lyapunov para o sistema de par de impactos. Para isso, usamos as equações descritas na seção 3.5, onde a matriz jacobiana

$$J^n \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \dot{y}_n} \\ \frac{\partial \dot{y}_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial \dot{y}_{n+1}}{\partial \dot{y}_n} \end{pmatrix}$$

é obtida a partir do mapa transcendental (seção 2.3), sendo os elementos dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} &= -\frac{1}{\dot{y}_{n+1}} [r\dot{y}_n + \ddot{e}(t_n)(t_{n+1} - t_n)] \\ \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \dot{y}_n} &= \frac{r}{\dot{y}_{n+1}} (t_{n+1} - t_n) \\ \frac{\partial \dot{y}_{n+1}}{\partial t_n} &= -\frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} \ddot{e}(t_{n+1}) + \ddot{e}(t_n) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{y}_{n+1}}{\partial \dot{y}_n} = -\frac{\partial t_{n+1}}{\partial \dot{y}_n} \ddot{e}(t_{n+1}) - r$$

Para o sistema de par de impactos com uma excitação periódica ($e(t) = \alpha \sin(\omega t)$). Na figura 3.36a, mostramos para um atrator periódico o teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$. Podemos notar nessa figura que os expoentes convergem, e bem, para dois valores negativos. Na figura 3.36b, mostramos para um atrator caótico o teste de convergência dos expoentes e, novamente, podemos notar que a convergência dos expoentes é muito boa.

Na figura 3.37, para o sistema de par de impactos com uma excitação caótica, mostramos o teste de convergência dos expoentes de Lyapunov de uma atrator irregular. Nessa figura podemos ver, conforme esperado, que o atrator em questão é caótico, pois um dos expoente é positivo. Além disso, apesar da fonte de energia (função de excitação $e(t)$) ser caótica, o método para o cálculo dos expoentes de Lyapunov funciona.

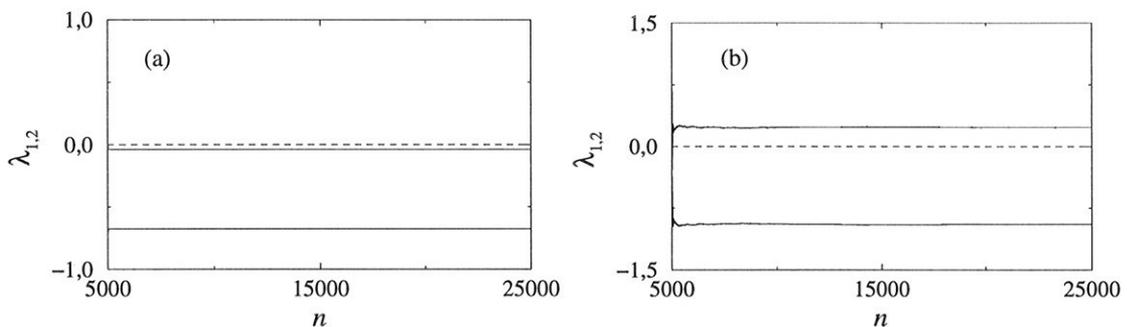


Figura 3.36: Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função do número de impacto, n , para o sistema de par de impactos. (a) Solução periódica mostrada na figura 3.4. (b) Solução caótica mostrada na figura 3.6.

De acordo com as figuras do teste de convergência mostradas nessa seção, podemos dizer que o método usado, para cálculo dos expoentes, funciona muito bem para o sistema de par de impactos, tanto para uma fonte de energia (função de excitação $e(t)$) periódica quanto caótica.

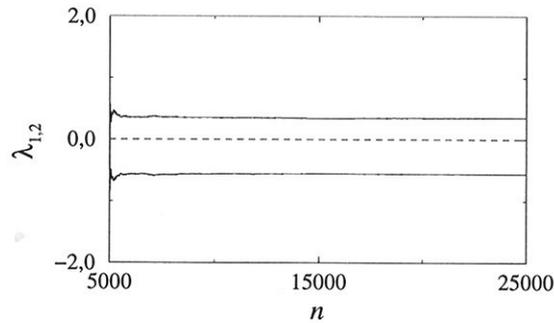


Figura 3.37: Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função do número de impacto, n , de uma solução caótica mostrada na figura 3.7, para o sistema de par de impactos com um função de excitação caótica obtida a partir da integração da equação de Duffing.

3.5.4 Caixa de engrenagens

Mostramos, aqui, resultados numéricos do cálculo dos expoentes de Lyapunov para o sistema de caixa de engrenagens. Para isso, usamos as equações descritas na seção 3.5, onde a matriz jacobiana

$$J^n \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \tau_n} & \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \dot{s}_n} \\ \frac{\partial \dot{s}_{n+1}}{\partial \tau_n} & \frac{\partial \dot{s}_{n+1}}{\partial \dot{s}_n} \end{pmatrix}$$

é obtida a partir do mapa transcendental (seção 2.3), sendo os elementos dados por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \tau_n} &= \frac{\alpha}{\dot{s}_{n+1}} \left\{ \cos(\tau_n) - \cos(\tau_{n+1}) - \frac{1}{\beta} \text{sen}(\tau_n) [1 - \exp(-0.1(\tau_{n+1} - \tau_n))] \right\} + 1 \\ \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \dot{s}_n} &= \frac{r}{\beta \dot{s}_{n+1}} [1 - \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n))] \\ \frac{\partial \dot{s}_{n+1}}{\partial \tau_n} &= \left(\frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \tau_n} - 1 \right) (r \dot{s}_n + \alpha \cos(\tau_n) + \frac{\gamma}{\beta}) \beta \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)) \\ &\quad - \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \dot{s}_n} \alpha \text{sen}(\tau_{n+1}) + \alpha \text{sen}(\tau_n) \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)) \\ \frac{\partial \dot{s}_{n+1}}{\partial \dot{s}_n} &= \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \dot{s}_n} \left\{ -\alpha \text{sen}(\tau_{n+1}) + \beta [r \dot{s}_n + \alpha \cos(\tau_n) + \frac{\gamma}{\beta}] \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)) \right\} \\ &\quad - r \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)) \end{aligned}$$

Nas figuras 3.38a e 3.38b, mostramos testes de convergência dos expoentes de Lyapunov para um atrator periódico e um caótico, respectivamente. Ademais, para ambos atratores a convergência é boa.

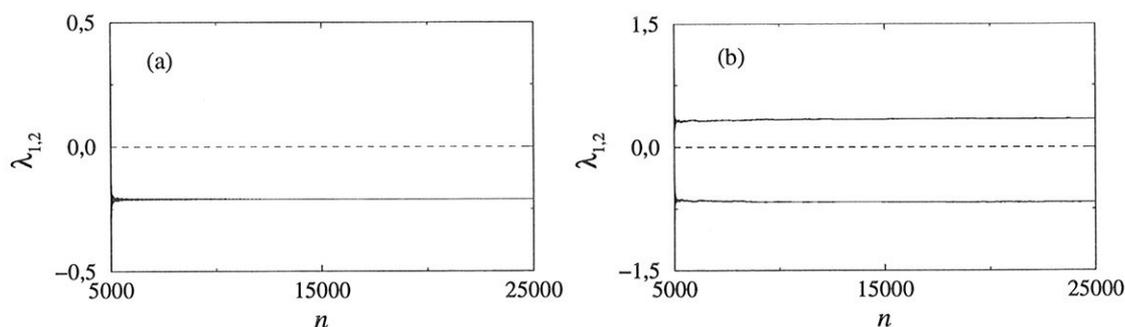


Figura 3.38: Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função do número de impacto, n , para o sistema caixa de engrenagens. (a) Solução periódica mostrada na figura 3.8. (b) Solução caótica mostrada na figura 3.9.

Por fim, podemos dizer, de acordo com os testes de convergências, que o método (obtido a partir do mapa transcendental) para o cálculo dos expoentes de Lyapunov em sistemas com impactos funciona muito bem.

3.6 Diagrama no espaço dos parâmetros

Nesta seção, mostramos como obter o diagrama no espaço dos parâmetros [55, 77]. Para isso, devemos variar dois parâmetros de controle. Assim sendo, tal diagrama é obtido de forma semelhante ao diagrama isoperiódico. No entanto, não utilizamos o valor da periodicidade dos atratores, como fizemos para o diagrama isoperiódico. Mas sim, neste caso, utilizamos o valor do maior expoente de Lyapunov.

Inicialmente, mostramos, na figura 3.39, o diagrama no espaço dos parâmetros do oscilador com impactos. Os atratores são graficados de acordo com a escala à direita da figura, que corresponde aos valores do maior expoente de Lyapunov. Como podemos observar, esse diagrama é semelhante ao diagrama isoperiódico mostrado na figura 3.32. E na figura 3.40, vemos um diagrama do para de impactos para os

parâmetros (α e ω) da função de excitação $e(t) = \alpha \text{sen}(\omega t)$. E novamente, notamos que esse é semelhante ao diagrama isoperiódico, mostrado na figura 3.33. No entanto, podemos, também, notar que o diagrama no espaço dos parâmetros apresenta uma maior riqueza de detalhes, em relação ao diagrama isoperiódico. Ainda para o par de impactos, na figura 3.41 apresentamos um diagrama cujos parâmetros de controle são a amplitude de excitação, α , e o coeficiente de restituição, r . Esse diagrama possui uma estrutura complexa.

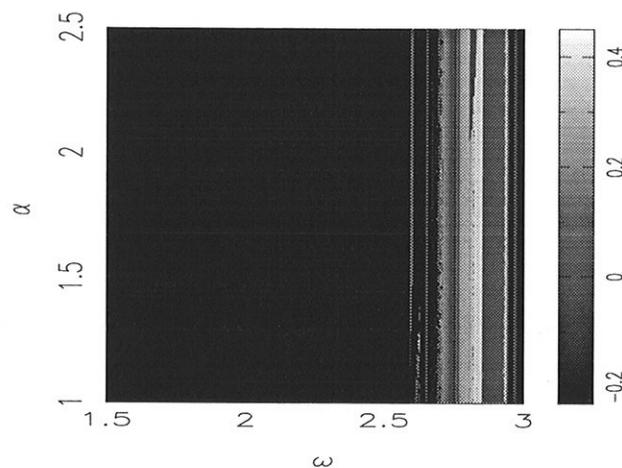


Figura 3.39: Diagrama no espaço dos parâmetros do oscilador com impactos para os parâmetros amplitude, α , e frequência, ω , de forçamento e os demais parâmetros fixados em $r = 0,8$ e $x_c = 0$. O valor do maior expoente de Lyapunov dos atratores são graficados de acordo com a escala cinza.

Finalmente, na figura 3.42, vemos o diagrama da caixa de engrenagens, para os parâmetros amplitude de excitação, α , e coeficiente de restituição, r . Comparando esse com o diagrama isoperiódico da figura 3.34, notamos uma grande semelhança.

Por fim, como vimos nessa seção, a partir de um diagrama no espaço dos parâmetros, podemos conhecer o comportamento dinâmico de uma sistema em um grande variedade de situações. Além disso, notamos que os resultados obtidos com esse diagrama é semelhante aos do isoperiódico. Porém, com o diagrama no espaço dos parâmetros, podemos notar uma maior riqueza de detalhes nas estruturas.

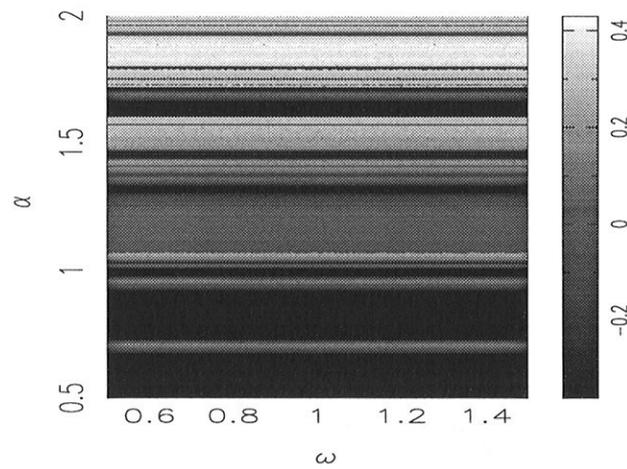


Figura 3.40: Diagrama no espaço dos parâmetros do par de impactos para os parâmetros amplitude, α , e frequência, ω , da função de excitação, e os demais parâmetros fixados em $r = 0,7$ e $\nu = 2,0$. O valor do maior expoente de Lyapunov dos atratores é graficado de acordo com a escala cinza.

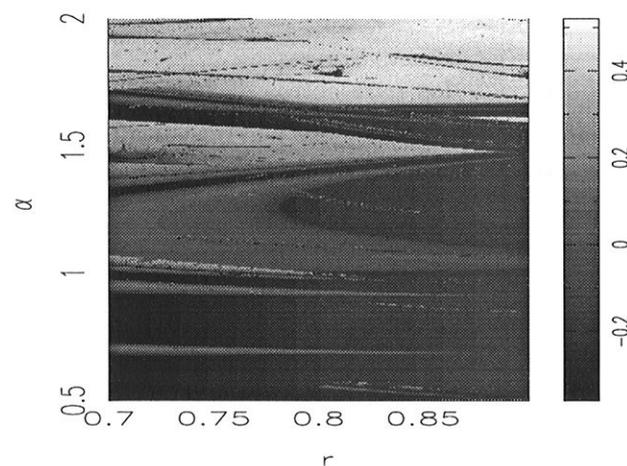


Figura 3.41: Diagrama no espaço dos parâmetros do par de impactos para os parâmetros amplitude de excitação, α , e o coeficiente de restituição, r , e os demais parâmetros fixados em $\omega = 1,0$ e $\nu = 2,0$. O valor do maior expoente de Lyapunov dos atratores é graficado de acordo com a escala cinza.

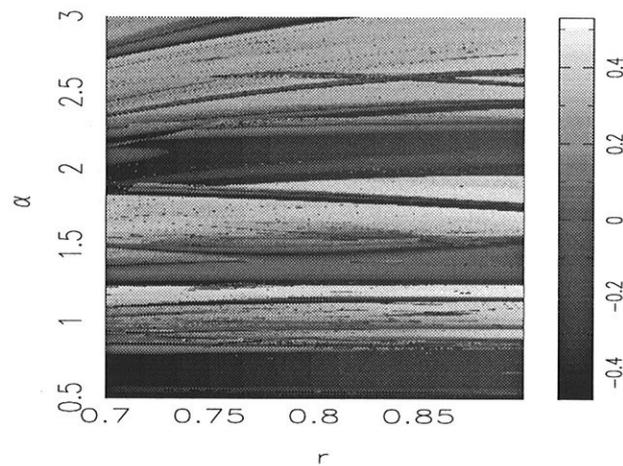


Figura 3.42: Diagrama no espaço dos parâmetros da caixa de engrenagens para os parâmetros amplitude de excitação, α , e coeficiente de restituição, r , e os demais parâmetros fixados em $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,1$. O valor do maior expoente de Lyapunov dos atratores é graficado de acordo com a escala cinza.

Capítulo 4

Fenômenos Não-Lineares

Neste capítulo, apresentamos os resultados das simulações numéricas do sistema da caixa de engrenagens, cuja descrição matemática encontra-se na seção 2.4. Nessas simulações, dentre os parâmetros de controle do sistema, variamos apenas a amplitude de excitação, α , e o coeficiente de restituição, r . Com isso, detectamos e identificamos fenômenos tipicamente não-lineares como crise [78], transiente caótico [52, 83, 84], intermitência caos-caos [82], intermitência laminar-caos [79] e coexistência de atratores [52, 80, 81].

A crise a ser considerada é da mudança súbita de um atrator caótico, para uma pequena variação do parâmetro de controle. Essa crise é causada pela colisão entre um atrator caótico e uma órbita periódica instável, como definido na referência [78].

Na seção 4.1, a partir de um diagrama de bifurcação em função de parâmetro de controle α , observamos a ocorrência de uma crise de fronteira. Para este tipo de crise, o atrator caótico é destruído quando passa por um valor crítico do parâmetro α . Próximo a este valor, há um comportamento denominado transiente caótico [52, 83]. Assim, uma órbita do atrator periódico após a crise gasta um tempo finito na região que atrator caótico ocupava antes da crise. O tempo de duração do transiente depende das condições iniciais. Para mostrar essa dependência, fixando uma das condições iniciais e variando as outras duas, graficamos o tempo de duração do transiente. Com isso, identificamos uma figura com características de uma bacia crivada [84]. As bacias crivadas implicam na indeterminação do estado final de um sistema. No caso do transiente caótico, para uma pequena variação nas condições iniciais, podemos ter tanto um transiente longo quanto um curto. Além disso, mos-

tramos, também, a dependência do tempo de duração do transiente em relação ao parâmetro de controle. Quanto mais afastado da crise menor será o transiente.

Na seção 4.2, mostramos uma crise interior, que foi identificada a partir de um diagrama de bifurcação em função do parâmetro de controle r . Neste caso, o atrator caótico sofre uma mudança súbita em seu tamanho. Associada a esta crise, há um comportamento intermitente [82]. Assim sendo, uma órbita, obtida logo após a crise, oscila entre dois atratores caóticos. Esses dois atratores correspondem ao atrator que ocupava a banda caótica antes da crise e ao atrator expandido devido a crise.

Na seção 4.3, identificamos um intermitência laminar-caos. Neste caso, a intermitência descreve um sinal cuja evolução temporal permanece regular por um determinado tempo (fase laminar) e de repente passa a se comportar de forma irregular (fase caótica).

Por fim, na seção 4.4, apresentamos coexistências de atratores [52]. Os sistemas não-lineares, para um conjunto de parâmetros de controle fixo e condições iniciais distintas, pode apresentar soluções diversas, ou seja, coexistência de atratores. Além disso, mostramos as bacias de atração desses atratores. A bacia de atração é o conjunto de condições iniciais cujas trajetórias convergem para um dado atrator. Além disso, mostramos, também, as evoluções das bacias quando o parâmetro de controle é variado.

4.1 Crise de fronteira e transiente caótico

A crise de fronteira implica na destruição do atrator caótico, quando este atrator passa por um valor crítico de um dos parâmetros de controle. Na figura 4.1, variando o parâmetro de controle α (amplitude de excitação), mostramos um diagrama de bifurcação. Neste diagrama, podemos notar várias crises, que são, por sua vez, identificadas a partir das mudanças súbitas dos atratores caóticos, para uma pequena variação do parâmetro α .

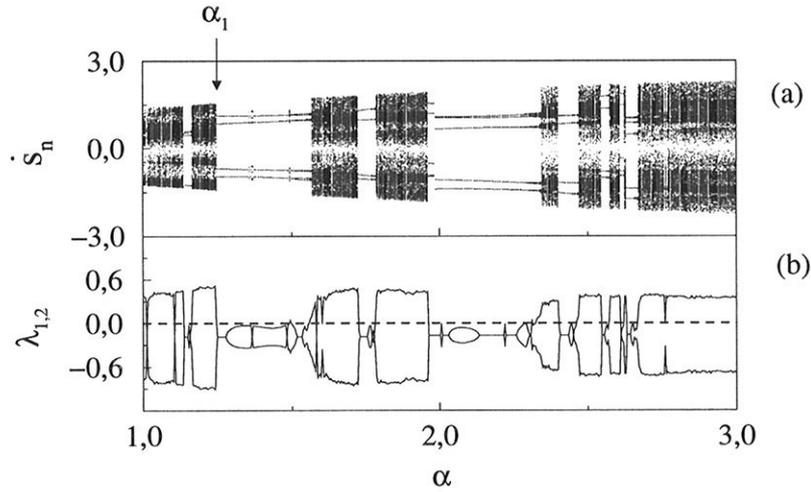


Figura 4.1: Parâmetros de controle $r = 0,9$, $\gamma = 0,1$ e $\beta = 0,1$. (a) Diagrama de bifurcação de \dot{s}_n em função de α (amplitude excitação). (b) Expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função de α .

Para $\alpha = \alpha_1 \approx 1,2434705$ (fig. 4.1), detectamos uma crise de fronteira [52]. Neste caso, como podemos notar, o atrator caótico desaparece e surge um atrator periódico. Associado a esta crise temos um transiente caótico, para o parâmetro α justamente após o valor crítico α_1 .

Assim sendo, uma órbita do atrator periódico, identificado após a ocorrência da crise, gasta um tempo finito na região que o atrator caótico ocupava. Na figura 4.2a, para $\alpha < \alpha_1$, mostramos o atrator caótico. E na figura 4.2b, para $\alpha > \alpha_1$, mostramos o atrator periódico e seu transiente. Comparando estas figuras, notamos que, realmente, o transiente do atrator periódico (fig. 4.2b) ocupa a região no espaço de fase, que, por sua vez, era ocupada pelo atrator caótico (fig. 4.2a).

Além disso, o tempo de duração do transiente caótico depende das condições iniciais. Por exemplo, na figura 4.3, para o conjunto de condições iniciais $s_0 = -0,5$, $\dot{s}_0 = 1,0$ e $\tau_0 = 0$, há um transiente longo e na figura 4.4, para $s_0 = -0,5$, $\dot{s}_0 = -0,2$ e $\tau_0 = 0$, há um transiente curto. Para uma análise mais detalhada desta dependência, na figura 4.5 (para $\alpha = 1,244$) graficamos o tempo de duração do transiente caótico de acordo com as condições iniciais. Para isso, fixamos $s_0 = -0,5$ e variamos \dot{s}_0 e τ_0 em uma grade de 400×400 pontos. Na simulação numérica, para obter esta

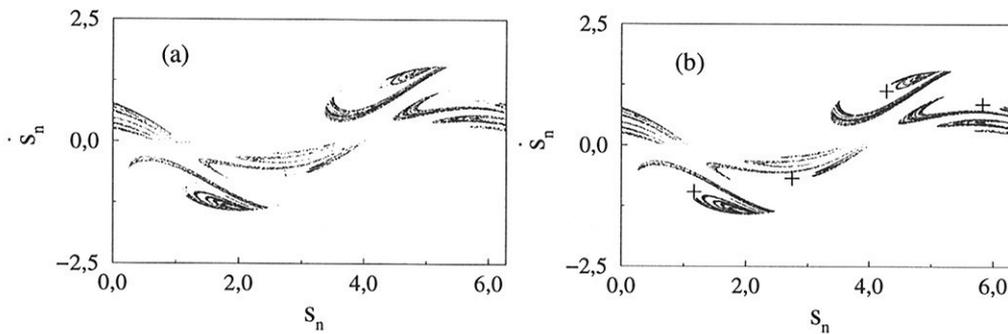


Figura 4.2: Parâmetros de controle da figura 4.1. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos de um atrator caótico para $\alpha = 1,243$. (b) Mapa de Poincaré no instante dos impactos de um transiente caótico e um atrator periódico (+) para $\alpha = 1,244$.

figura, iteramos cada ponto até 5.000 impactos. A duração do transiente é graficada de acordo com a escala cinza a direita da figura. Assim sendo, um ponto, cujas condições iniciais levam a um transiente longo, é graficado em preto e em branco para um transiente curto.

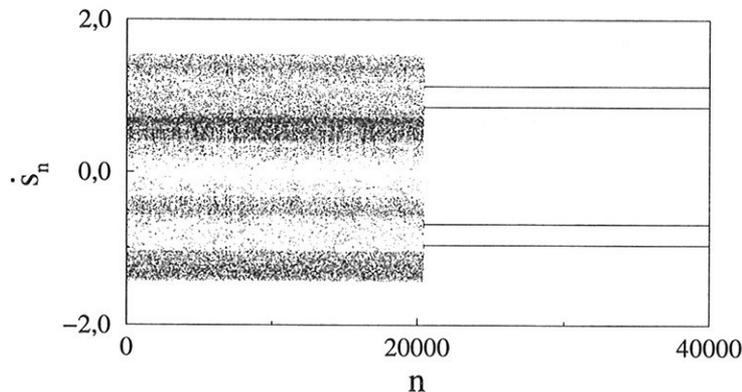


Figura 4.3: Evolução de \dot{s}_n (obtido a partir do mapa de Poincaré no instante dos impactos) de um transiente caótico para os parâmetros de controle $r = 0,900$ e $\alpha = 1,244 \gtrsim \alpha_1$ e com as condições iniciais $s_0 = -0,5$, $\dot{s}_0 = 1,0$ e $\tau_0 = 0$.

Ademais, o tempo de duração do transiente caótico, além das condições iniciais, depende também do valor do parâmetro de controle. Quanto maior a diferença entre α e α_1 menor o transiente. Por exemplo, na figura 4.6 para $\alpha = 1,245$, podemos facilmente notar (comparando com a figura 4.5) a diminuição do transiente, cujo tempo de duração está relacionado com a cor da figura.

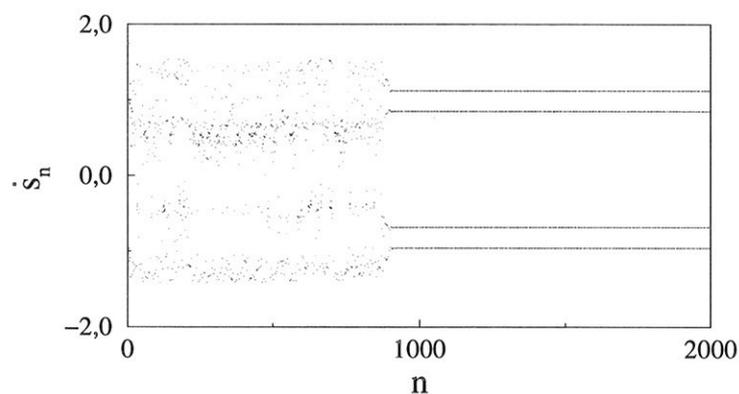


Figura 4.4: Evolução de \dot{s}_n (obtido a partir do mapa de Poincaré no instante dos impactos) para os parâmetros de controle $r = 0,900$ e $\alpha = 1,244 \gtrsim \alpha_1$ e com as condições iniciais $s_0 = -0,5$, $\dot{s}_0 = -0,2$ e $\tau_0 = 0$.

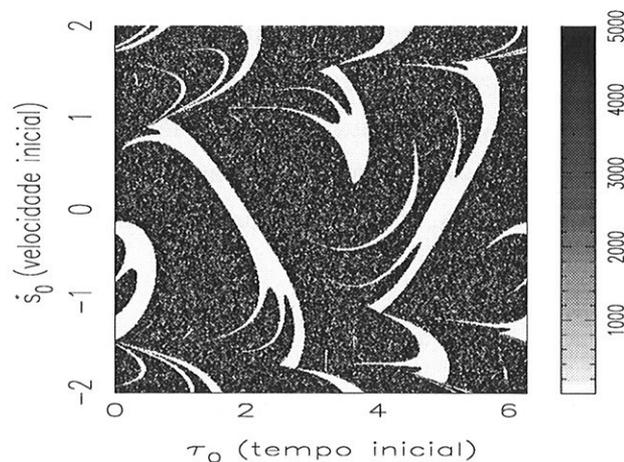


Figura 4.5: Tempo de duração do transiente caótico de acordo com as condições iniciais (para $s_0 = -0,5$) para os parâmetros de controle da figura 4.1 com $\alpha = 1,244 \gtrsim \alpha_1$. A duração do transiente (número de impactos) é graficada de acordo com a escala cinza a direita da figura.

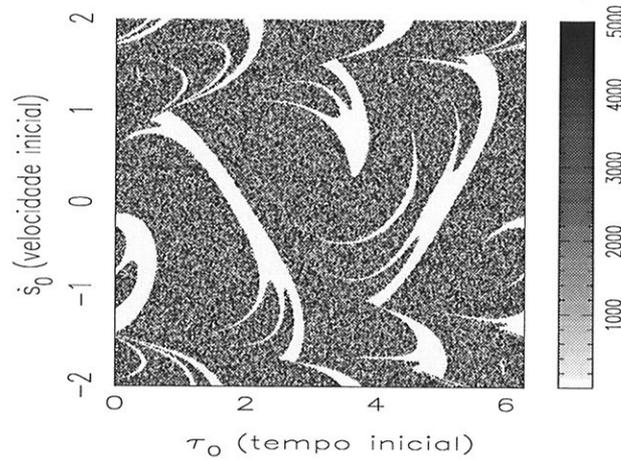


Figura 4.6: Tempo de duração do transiente caótico de acordo com as condições iniciais (para $s_0 = -0,5$) para os parâmetros de controle da figura 4.1 com $\alpha = 1,245 \gtrsim \alpha_1$. A duração do transiente (número de impactos) é graficada de acordo com a escala cinza a direita da figura.

Por fim, vemos que as figuras 4.5 e 4.6 são constituídas basicamente por duas regiões. Uma região em branco bem definida (transientes curtos) e uma outra onde há uma mistura de pontos brancos e pretos (transientes curtos e longos). Para esta última, não é possível identificar uma estrutura bem definida, com podemos ver na figura 4.7. Esta figura tem características de uma bacia crivada (*riddled basin*) [96]. Tais características, observadas em transientes caóticos, foram estudadas e analisadas na referência [84]. Os sistemas com bacias crivadas possuem uma grande sensibilidade às condições iniciais, o que implicam em uma indeterminação do estado final do sistema.

4.2 Crise interior e intermitência caos-caos

A crise interior implica em um alargamento súbito do atrator caótico. Esse tipo de crise é devido a colisão de uma órbita periódica instável com uma banda caótica [78].

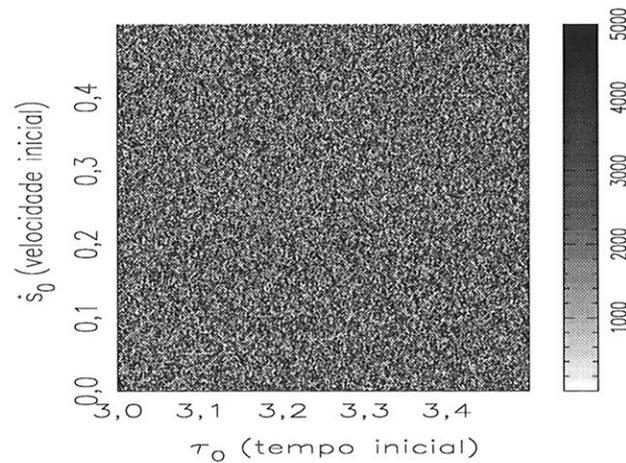


Figura 4.7: Ampliação da figura 4.6.

Na figura 4.8, variando o parâmetro de controle r (coeficiente de restituição), mostramos um diagrama de bifurcação. Neste diagrama, para $r = r_1$, identificamos uma crise interior. Associado a essa crise há um intermitência caos-caos. Assim, uma órbita, para um valor de parâmetro logo após a crise ($r \gtrsim r_1$), apresenta um comportamento intermitente, como podemos observar na figura 4.9.

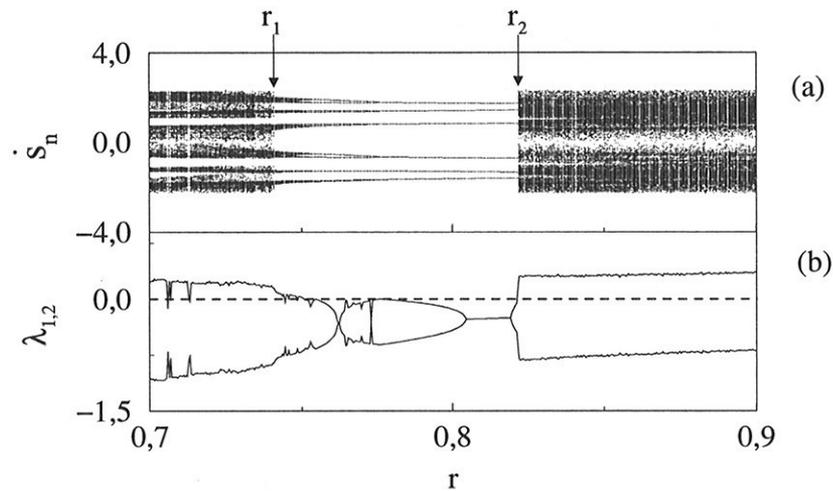


Figura 4.8: Parâmetros de controle $\alpha = 3,0$, $\gamma = 0,1$ e $\beta = 0,1$. (a) Diagrama de bifurcação de \dot{s}_n em função de r (coeficiente de restituição). (b) Expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função de r .

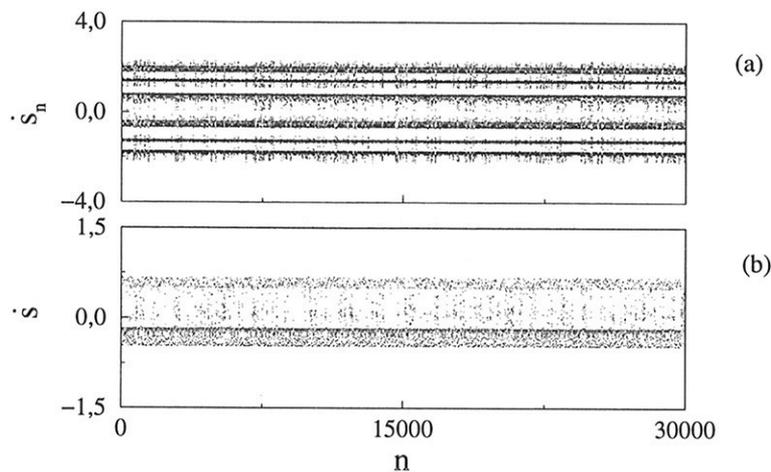


Figura 4.9: Intermitência caos-caos para os parâmetros de controle $\alpha = 3,0$ e $r = 0,74001 \lesssim r_1$. (a) Evolução de s_n (obtido a partir do mapa de Poincaré no instante dos impactos). (b) Evolução de s (obtido a partir de um mapa estroboscópico).

4.3 Intermitência laminar-caos

Além das crises, identificamos, no sistema da caixa de engrenagens, um intermitência laminar-caos. Tal intermitência foi detectada para valores do parâmetro r (coeficiente de restituição) imediatamente após r_2 (indicado na figura 4.8). Além disso, essa intermitência descreve um sinal cuja evolução temporal permanece regular por um determinado tempo (fase laminar) e de repente passa a se comportar caoticamente (estouro caótico), como podemos notar na figura 4.10. Quando aumentamos o parâmetro r ($r > r_2$), os estouros caóticos tornam-se mais frequentes, como vemos na figura 4.11.

Os comportamentos intermitentes em sistema não-lineares foram estudados por Pomeau e Manneville [79]. Eles descreveram e caracterizaram três tipos de intermitências (tipos I, II e III).

Por fim, o comportamento intermitente mostrado nesta seção lembra a intermitência do tipo I, que é observada para um valor de parâmetro de controle junto a

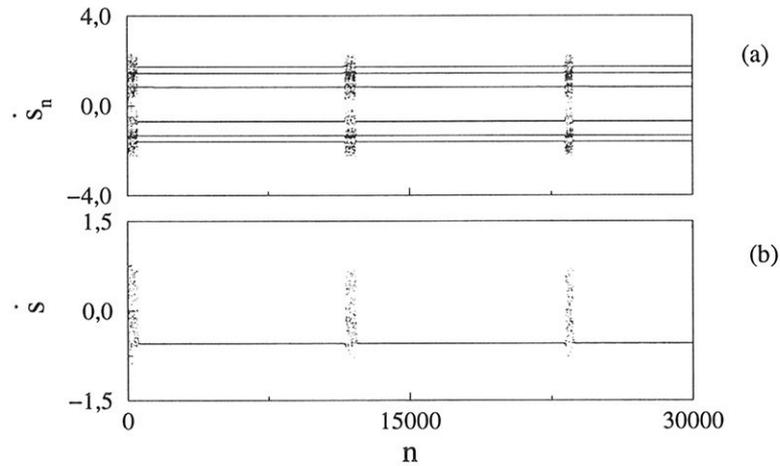


Figura 4.10: Intermitência laminar-caos para os parâmetros de controle $\alpha = 3,0$ e $r = 0,8214405 \gtrsim r_2$. (a) Evolução de \dot{s}_n (obtido a partir do mapa de Poincaré no instante dos impactos). (b) Evolução de \dot{s} (obtido a partir de um mapa estroboscópico).

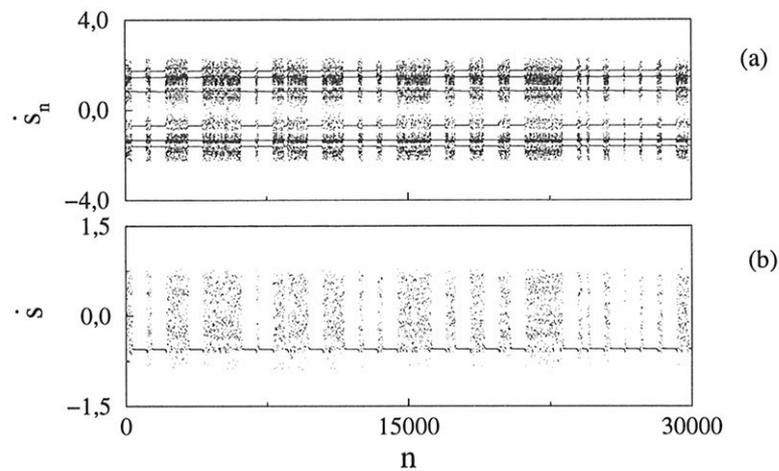


Figura 4.11: Intermitência laminar-caos para os parâmetros de controle $\alpha = 3,0$ e $r = 0,82145 \gtrsim r_2$. (a) Evolução de \dot{s}_n (mapa de Poincaré no instante dos impactos). (b) Evolução de \dot{s} (mapa estroboscópico).

um bifurcação sela-nó.

4.4 Coexistências de atratores e bacias de atração

Um sistema não-linear, para um mesmo conjunto de parâmetros de controle e condições iniciais distintas, pode apresentar mais de uma solução. Isto é denominado coexistência de atratores. O conjunto de condições iniciais no espaço de fase cujas trajetórias convergem, após um regime transitório, para um dado atrator é denominado bacia de atração deste atrator.

No sistema de caixa de engrenagens, para vários conjuntos fixos de parâmetros de controle, é possível observar a coexistência de atratores [52]. Por exemplo na figura 4.12, mostramos um diagrama de bifurcação, da velocidade no instante dos impactos, \dot{s}_n , em função de parâmetro α . Neste diagrama são graficados, em cores distintas, três atratores. Graficamos, em vermelho, um atrator periódico, que ocupa toda extensão do diagrama. Em azul, graficamos um outro atrator, que ocupa uma boa parte da extensão do diagrama. Quando variamos o parâmetro α , este atrator sofre duplicações de período, passa por uma crise interior e, finalmente, é destruído quando ocorre uma crise de fronteira. Por fim, graficamos, em verde, um atrator que ocupa uma pequena extensão do diagrama. Este atrator surgiu, provavelmente, a partir de uma bifurcação sela-nó. Quando variamos o parâmetro, ele passa por duplicações de período, por uma crise interior e é destruído em um crise de fronteira.

Para $\alpha = 0,48$, há dois atratores cujas evoluções temporais do deslocamento, s , são mostradas na figura 4.13. Nas figuras 4.14 e 4.15, apresentamos os planos de fases e os testes de convergências dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, desses atratores. De acordo com os expoentes de Lyapunov ($\lambda_{1,2} < 0$), tais atratores são periódicos. Na figura 4.16, fixando $s_0 = -0,5$ e variando \dot{s}_0 e τ_0 em uma grade de 400x400 pontos, graficamos as bacias de atração desses atratores.

Nas figuras 4.17 e 4.18, apresentamos sucessivas ampliações das bacias de atração (fig. 4.16). Com isso, podemos notar que as fronteiras das bacias dos dois atratores

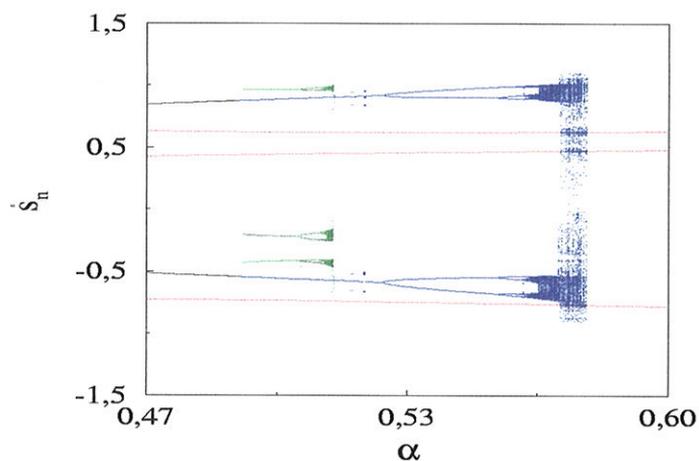


Figura 4.12: Diagrama de bifurcação, de três atratores, da velocidade no instante dos impactos, \dot{s}_n , em função da amplitude de excitação, α , para os parâmetros de controle $r = 0,9$, $\gamma = 0,1$ e $\beta = 0,1$.

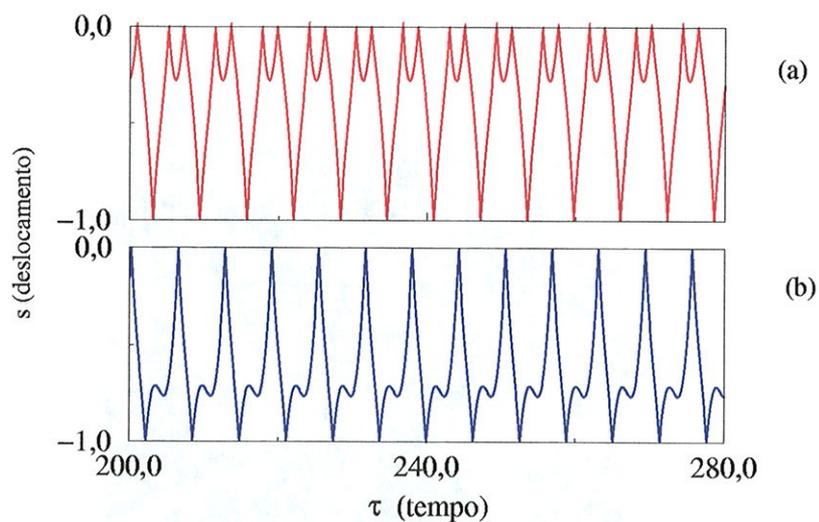


Figura 4.13: Evolução temporal da variável dinâmica s de dois atratores periódicos coexistentes, para os parâmetros de controle $\alpha = 0,48$, $r = 0,90$, $\gamma = 0,10$ e $\beta = 0,10$.

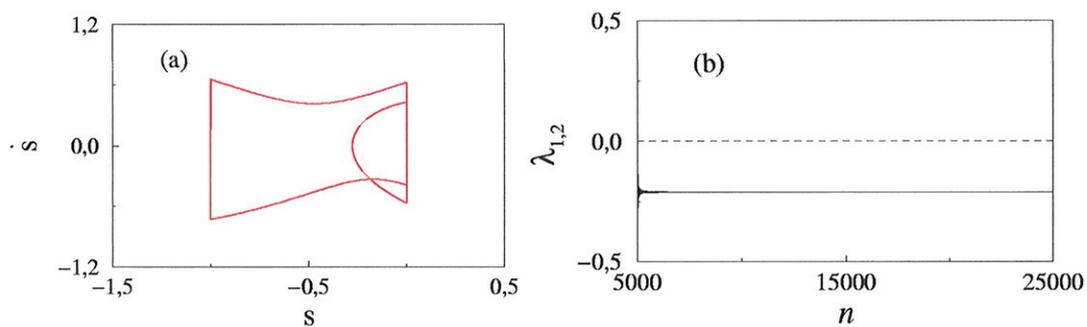


Figura 4.14: (a) Plano de fase do atrator periódico indicado na figura 4.13a. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, deste atrator.

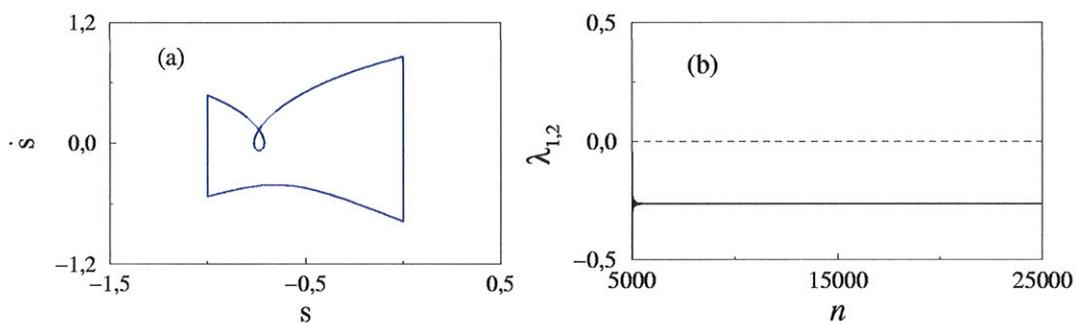


Figura 4.15: (a) Plano de fase do atrator periódico indicado na figura 4.13b. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, deste atrator.

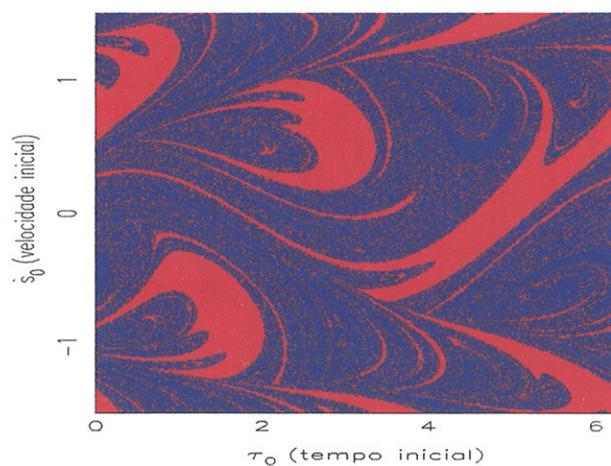


Figura 4.16: Bacias de atração, para $s_0 = -0,5$, dos dois atratores periódicos indicados na figura 4.13.

são complexas e provavelmente fractais, conforme se observa na análise das bacias de atração de outros sistemas dinâmicos [97,98]. Devido a este tipo de bacia, há no sistema uma dependência sensível às condições iniciais. Em outras palavras, uma pequena incerteza, ϵ , nas condições iniciais implica em uma indeterminação do estado final do sistema. Assim sendo, para uma análise mais detalhada da dependência das condições iniciais e da estrutura destas fronteiras, calculamos o expoente de incerteza [88].

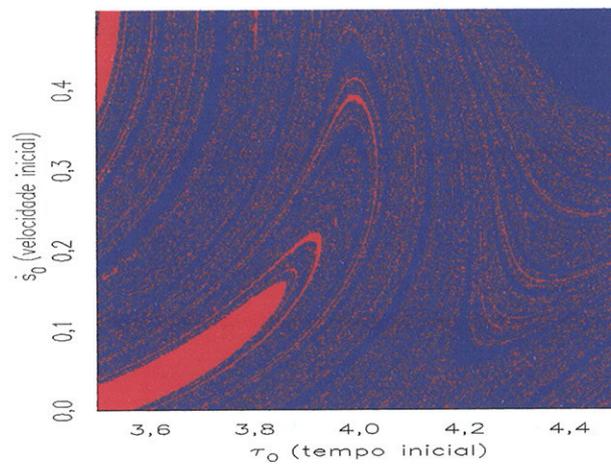


Figura 4.17: Ampliação das bacias de atração mostradas na figura 4.16.

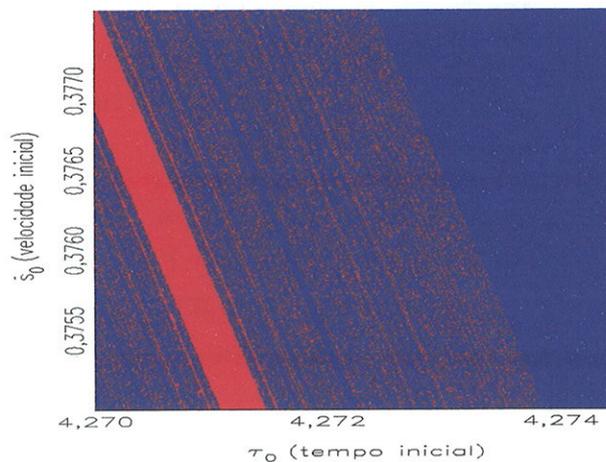


Figura 4.18: Ampliação das bacias de atração mostradas na figura 4.16.

O expoente de incerteza, a , mede o grau de indeterminação do estado final do sistema. Assim sendo, a partir do cálculo de tal expoente, quantificamos a depen-

dência às condições iniciais. Para o cálculo desse expoente, fixamos $s_0 = -0,5$ e geramos aleatoriamente 3.000 pontos de condições iniciais (τ_0, \dot{s}_0) . Para cada ponto, aplicamos uma pequena perturbação ϵ . Assim, obtemos duas novas condições iniciais $(\tau_0 + \epsilon, \dot{s}_0)$ e $(\tau_0 - \epsilon, \dot{s}_0)$. Iteramos as três condições iniciais e verificamos o atrator do sistema. Se as três condições iniciais não levam ao mesmo atrator, contamos a condição sem perturbação como incerta. Fazemos isso para os 3.000 pontos. Dividindo os pontos incertos, obtidos, por 3.000, temos a probabilidade de incerteza $f(\epsilon)$. Repetimos esse procedimento para oito valores de ϵ em potências de 10 (10^{-3} a 10^{-10}). Com isso, obtemos oito pontos $(\epsilon, f(\epsilon))$. Graficamos esses pontos em um gráfico de escala logaritmica (log-log), ou simplesmente graficamos $(\log \epsilon, \log f(\epsilon))$. Isso porque, consideramos que a probabilidade $f(\epsilon) \sim \epsilon^a$. Para determinar o expoente de incerteza, a , devemos calcular o coeficiente angular da reta obtida a partir da interpolação dos oito pontos graficados.

Por fim, na figura 4.19, mostramos a aplicação desse procedimento, para as bacias de atração da figura 4.16. Como isso, determinamos o valor do expoente de incerteza $a = 0,070 \pm 0,002$. Este valor nos fornece fortes indícios de que essas bacias, realmente, possuem fronteiras fractais [89]. Além disso, este valor indica a sensibilidade às condições iniciais, ou seja, a incerteza em relação ao estado final do sistema. Por exemplo, para condições iniciais em uma simulação numérica com precisão de 10^{-8} , temos uma incerteza de $f(\epsilon) \sim 10^{0,07 \times -8} \approx 0,275$ (27,5 %). Com o aumento da precisão para 10^{-16} , esta incerteza passa a ser $f(\epsilon) \sim 10^{0,07 \times -16} \approx 0,076$ (7,6 %). Cabe ressaltar que o valor dessa incerteza é apenas uma estimativa, pois não levamos em consideração o erro associado ao integrador numérico.

Para $\alpha = 0,50$, como podemos ver no diagrama de bifurcação (fig. 4.12), há três atratores cujas evoluções temporais do deslocamento, s , são mostradas na figura 4.20. Os atratores, correspondentes as evoluções temporais graficadas em vermelho e azul, são semelhantes aos atratores obtidos para $\alpha = 0,48$. Por conseguinte, mostramos na figura 4.21, apenas o plano de fase e o teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, do atrator graficado em verde. De acordo com os expoentes de Lyapunov ($\lambda_{1,2} < 0$), tal atrator é periódico. Na figura 4.22, mostramos as bacias de atração desses três atratores.

Para $\alpha = 0,57$, há dois atratores cujas evoluções temporais do deslocamento, s ,

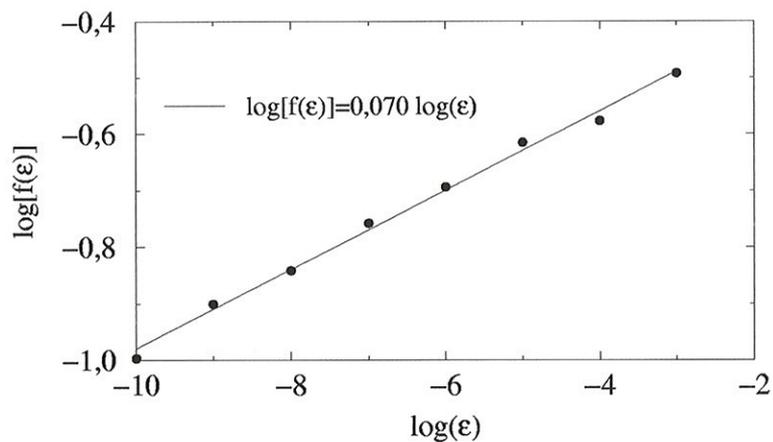


Figura 4.19: Probabilidade de incerteza, $f(\epsilon)$, das bacias de atração da figura 4.16.

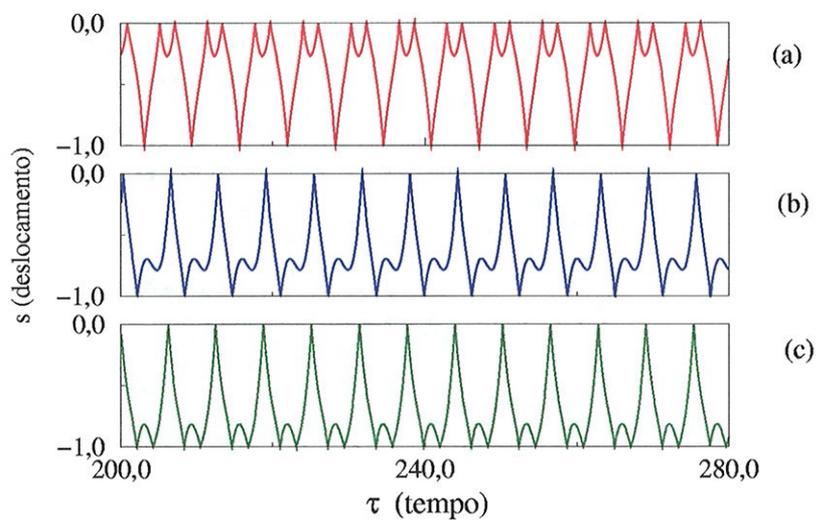


Figura 4.20: Evolução temporal da variável dinâmica s de três atratores periódicos coexistentes, para os parâmetros de controle $\alpha = 0,5$, $r = 0,9$, $\gamma = 0,1$ e $\beta = 0,1$.

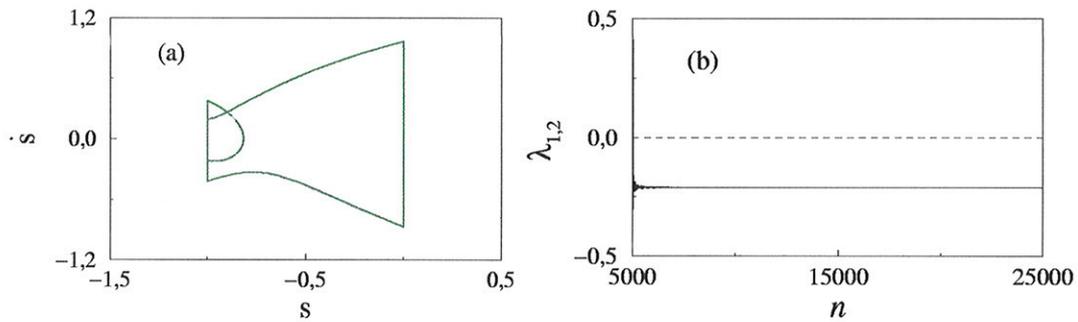


Figura 4.21: (a) Plano de fase do atrator periódico indicado na figura 4.20c. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, deste atrator.

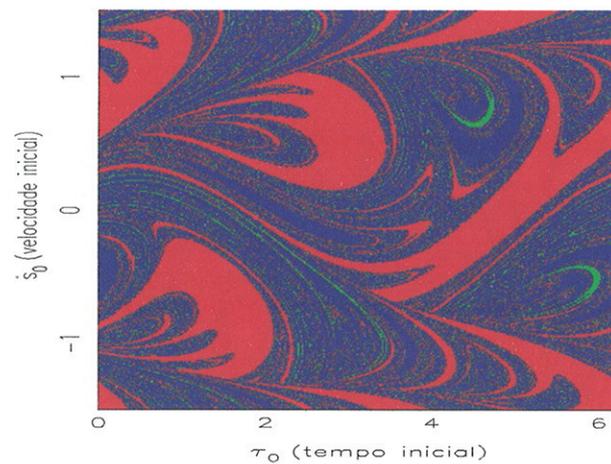


Figura 4.22: Bacias de atração, para $s_0 = -0,5$, dos três atratores periódicos indicados na figura 4.20.

são mostradas na figura 4.23. O atrator, correspondente a evolução temporal graficada em vermelho, é semelhante ao atrator obtido para $\alpha = 0,48$. Por conseguinte, mostramos na figura 4.24, apenas o plano de fase e o teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, do atrator graficado em azul. De acordo com o maior expoente de Lyapunov ($\lambda_1 > 0$), tal atrator é caótico. Na figura 4.25, mostramos as bacias de atração desses dois atratores. Comparando as figuras 4.16 e 4.25, notamos a evolução das bacias de atração quando variamos o parâmetro α . Neste caso, houve um aumento do volume no espaço de fase da bacia de atração do atrator graficado em vermelho.

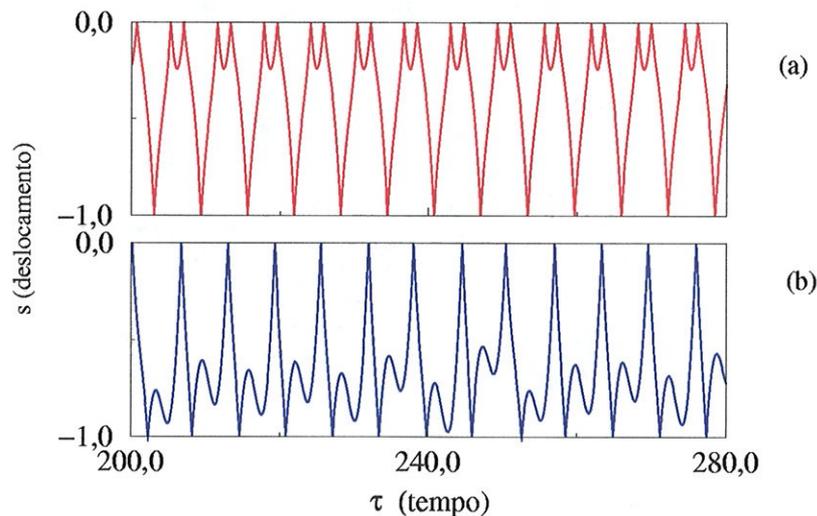


Figura 4.23: Evolução temporal da variável dinâmica s dos atratores periódico (a) e caótico (b) coexistentes, para os parâmetros de controle $\alpha = 0,57$, $r = 0,90$, $\gamma = 0,10$ e $\beta = 0,10$.

Além da coexistência dos atratores mostrada no diagrama de bifurcação da figura 4.12, identificamos no sistema da caixa de engrenagens outras coexistências. Por exemplo, para o parâmetro $\alpha = 1,99$ mostramos na figura 4.26 as evoluções temporais do deslocamento, s , de dois atratores coexistentes. Nas figuras 4.27a e 4.28a, mostramos os planos de fases e nas figuras 4.27b e 4.28b os testes de convergências dos expoentes de Lyapunov. Por conseguinte, sabemos que esses atratores são periódicos ($\lambda_{1,2} < 0$). Na figura 4.29, vemos as bacias de atração, cuja ampliação é mostrada na figura 4.30. A probabilidade de incerteza, $f(\epsilon)$, é graficada na figura 4.31. Neste caso, o expoente de incerteza é $a = 0,0348 \pm 0,0005$. E, novamente, temos bacias de atração com fronteiras fractais.

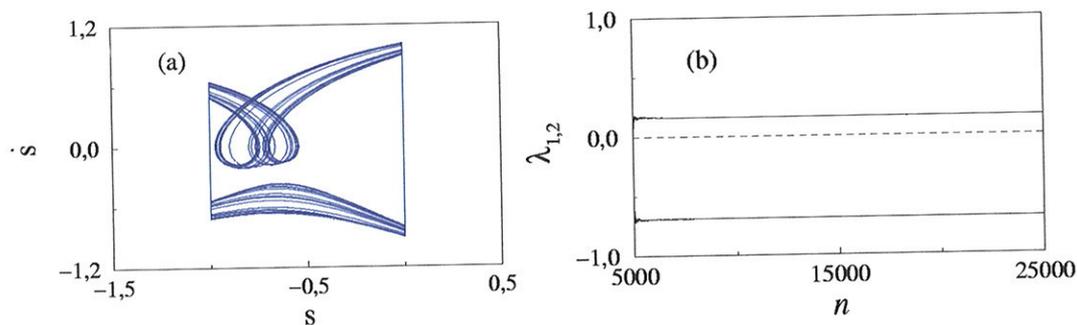


Figura 4.24: (a) Plano de fase do atrator caótico indicado na figura 4.23b. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, deste atrator.

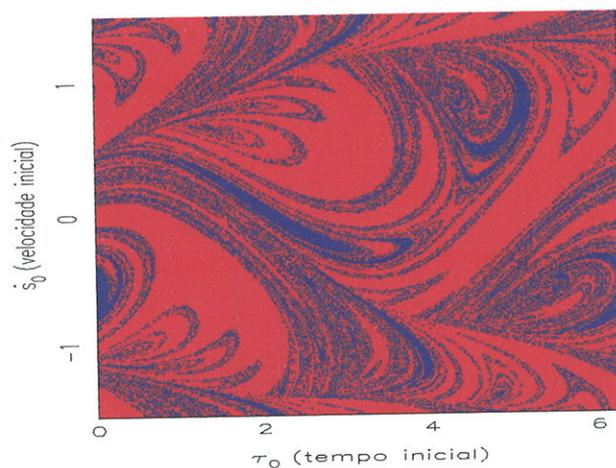


Figura 4.25: Bacias de atração, para $s_0 = -0,5$, dos atratores periódico e caótico indicados na figura 4.23.

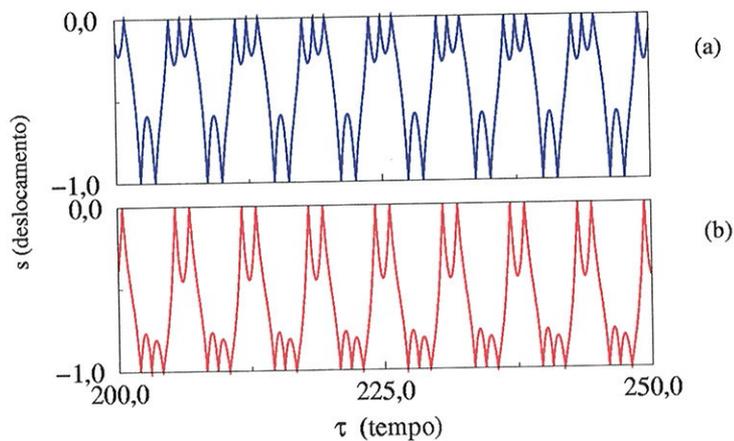


Figura 4.26: Evolução temporal da variável dinâmica s de dois atratores periódicos coexistentes, para os parâmetros de controle $\alpha = 1,99$, $r = 0,90$, $\gamma = 0,10$ e $\beta = 0,10$.

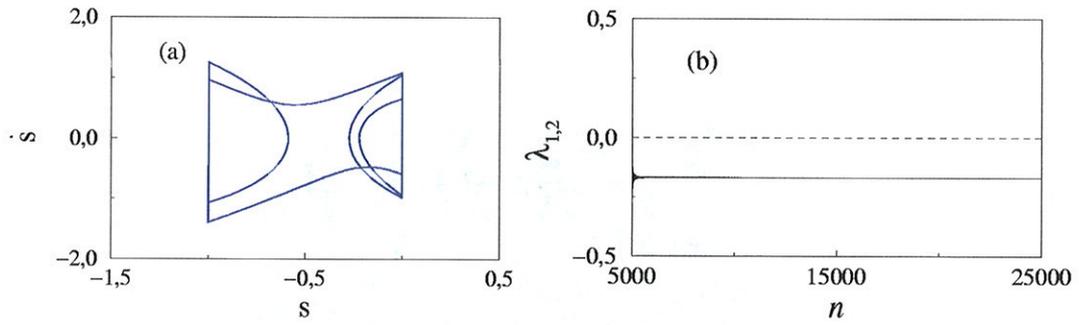


Figura 4.27: (a) Plano de fase do atrator periódico indicado na figura 4.26a. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, deste atrator.

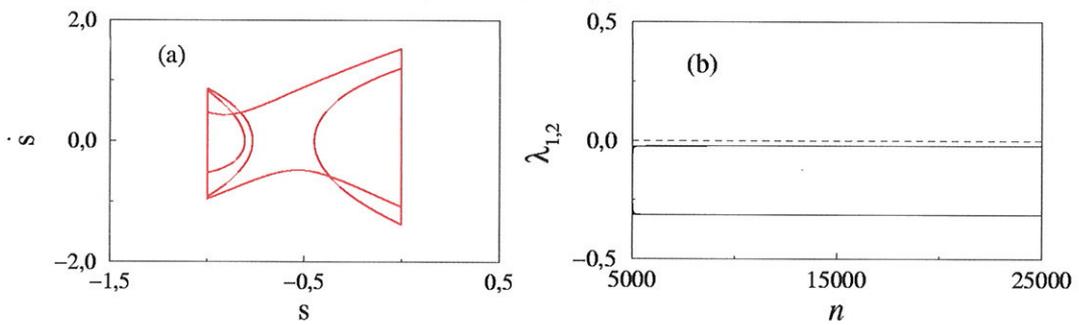


Figura 4.28: (a) Plano de fase do atrator periódico indicado na figura 4.26b. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, deste atrator.

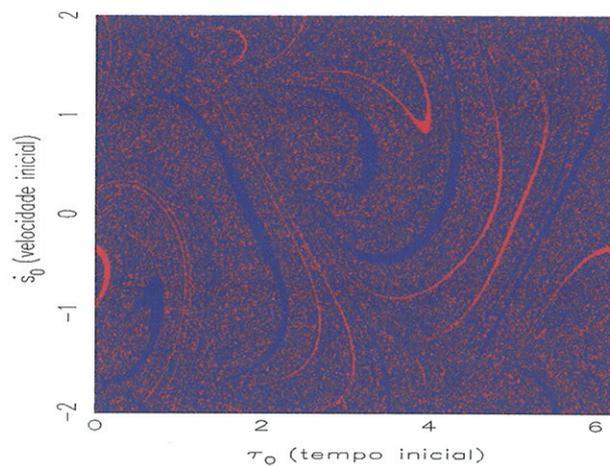


Figura 4.29: Bacias de atração, para $s_0 = -0,5$, dos dois atratores periódicos indicados na figura 4.26.

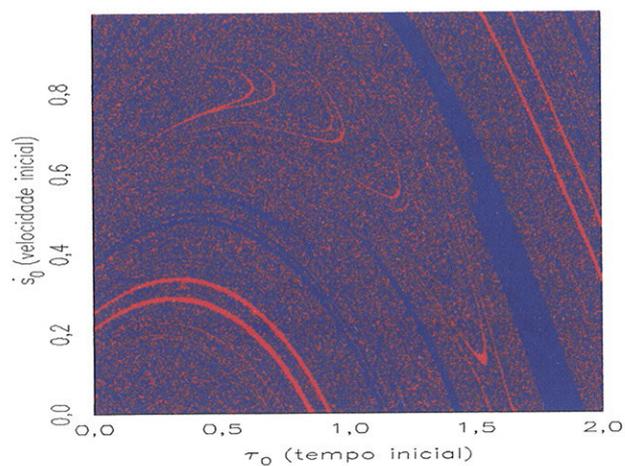


Figura 4.30: Ampliação das bacias de atração mostradas na figura 4.29.

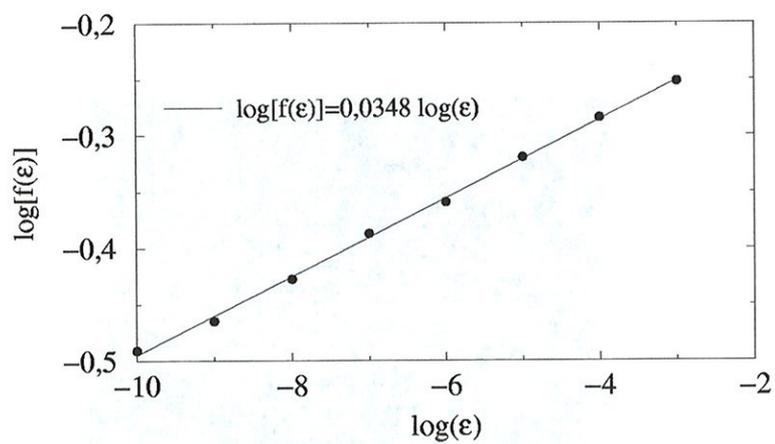


Figura 4.31: Probabilidade de incerteza, $f(\epsilon)$, das bacias de atração da figura 4.29.

Capítulo 5

Controle de Caos

Neste capítulo, mostramos como controlar comportamentos caóticos em sistemas mecânicos com impactos. Inicialmente, na seção 5.1, apresentamos um método de supressão de caos [90] obtido a partir de uma perturbação periódica fraca, ou seja, um forçamento periódico externo de amplitude pequena. Aplicamos tal método no sistema da caixa de engrenagens. Na seção 5.2, descrevemos como implementar o método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos [58] em sistemas cujas trajetórias apresentam descontinuidades no espaço de fase devido aos impactos [54]. Tal método consiste em estabilizar uma das infinitas órbitas periódicas instáveis, previamente determinadas, imersas em um atrator caótico. Isso é feito através de pequenas perturbações em um dos parâmetros de controle. Essas perturbações são calculadas a partir de um mapa transcendental, como os obtidos no capítulo 2. Assim, aplicamos o método OGY no oscilador com impactos, no par de impactos e na caixa de engrenagens.

5.1 Supressão do caos

Podemos obter a supressão de um comportamento caótico em um sistema dinâmico, a partir de uma perturbação periódica fraca [76,90]. Isso pode ser feito quando introduzimos um forçamento periódico externo a um sistema, cujo comportamento é caótico. Esse sistema pode vir a oscilar periodicamente, mesmo que a amplitude de forçamento seja pequena. No entanto, para isso devemos escolher uma frequência de forçamento apropriada. Neste caso, estamos alterando a dinâmica do sistema a

ser controlado.

Como exemplo, aplicamos este método ao sistema de caixa de engrenagens. Para isso, adicionamos, à fonte de excitação $\alpha \text{sen}(\tau)$ (considerada no capítulo 2), uma perturbação periódica $\alpha_p \text{sen}(\omega_p \tau)$, como indicado na figura 5.1. Além disso, usamos os expoentes de Lyapunov para distinguir um comportamento caótico de um periódico. Como no capítulo 3, utilizamos um mapa transcendental para o cálculo dos expoentes de Lyapunov. No entanto, devemos determinar novamente esse mapa, pois é necessário considerar o termo adicional de perturbação introduzido.

5.1.1 Caixa de engrenagens

O método, em questão, consiste na adição de uma perturbação periódica fraca $\alpha_p \text{sen}(\omega_p \tau)$ ao sistema de caixa de engrenagens (fig. 5.1) com comportamento caótico. Os parâmetros dessa perturbação (amplitude α_p e frequência ω_p) são escolhidos de tal forma que o comportamento caótico do sistema é suprimido e surge em seu lugar um comportamento periódico estável.

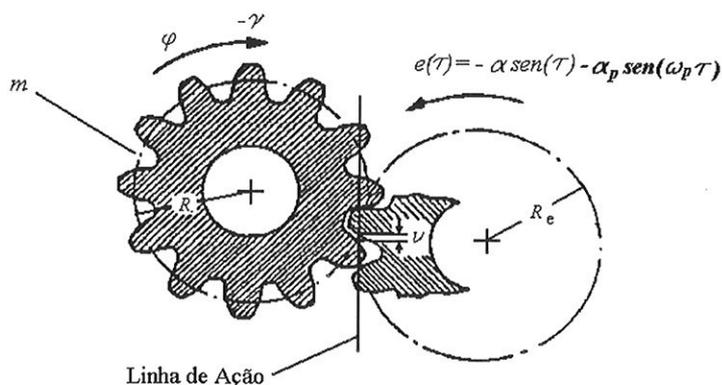


Figura 5.1: Esquema do sistema caixa de engrenagens com o termo de perturbação $\alpha_p \text{sen}(\omega_p \tau)$.

Para aplicar tal método, fixamos a amplitude de excitação $\alpha_p = 0$ e escolhemos um conjunto de parâmetros para os quais o comportamento do sistema seja caótico. Posteriormente, fazemos uma varredura no parâmetro α_p (amplitude da perturbação), para uma frequência de excitação ($\omega_p = 0,5$) comensurável com a frequência

unitária da fonte de excitação do sistema. A partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov, determinamos para quais valores de α_p o comportamento passa a ser periódico. O comportamento é dito periódico quando os expoentes de Lyapunov são negativos $\lambda_{1,2} < 0$.

Assim, para implementar o método desejado, devemos descrever o modelo matemático, considerando a perturbação senoidal. Além disso, devemos também determinar o mapa transcendental novo, pois a partir dele calculamos os expoentes de Lyapunov.

A descrição matemática é feita de forma similar ao sistema sem a perturbação. Assim sendo, apresentamos de forma sucinta as equações que descrevem a dinâmica do sistema.

O sistema considerado é composto por duas engrenagens, como indicado na figura 5.1. Entre os dentes dessas engrenagens há um folga ν . Uma das engrenagens oscila de acordo com a função $e = -\alpha \text{sen}(\tau) - \alpha_p \text{sen}(\omega_p \tau)$. O movimento da outra engrenagem, para a coordenada relativa do sistema s , é dado pela seguinte equação:

$$\ddot{s} + \beta \dot{s} = \ddot{e} + \beta \dot{e} + \gamma \quad \text{para } -1 < s < 0 \quad (5.1)$$

sendo

β amortecimento,

γ momento,

α amplitude de excitação,

α_p amplitude de excitação da perturbação,

ω_p frequência de excitação da perturbação,

os parâmetros de controle adimensionais.

A solução da equação não-autônoma (5.1) é dada por:

$$s = s_0 + \alpha [\text{sen}(\tau) - \text{sen}(\tau_0)] + \alpha_p [\text{sen}(\omega_p \tau) - \text{sen}(\omega_p \tau_0)] + \frac{\gamma}{\beta} (\tau - \tau_0) + \frac{1}{\beta} \{1 - \exp[-\beta(\tau - \tau_0)]\} \left[\dot{s}_0 - \alpha \cos(\tau_0) - \alpha_p \omega_p \cos(\omega_p \tau_0) - \frac{\gamma}{\beta} \right] \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{s} = & \alpha \cos(\tau) + \alpha_p \omega_p \cos(\omega_p \tau) + \left[\dot{s}_0 - \alpha \cos(\tau_0) - \alpha_p \omega_p \cos(\omega_p \tau) - \frac{\gamma}{\beta} \right] \\ & \times \exp[-\beta(\tau - \tau_0)] + \frac{\gamma}{\beta} \end{aligned} \quad (5.3)$$

O impacto ocorre para a variável dinâmica $s = -1$ ou 0 . Depois de cada impacto, introduzimos nas equações (5.2) e (5.3) as novas condições iniciais:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau \\ s_0 &= s \\ \dot{s}_0 &= -r\dot{s} \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde r é o coeficiente de restituição.

A cada impacto n registramos as variáveis s_n , \dot{s}_n e τ_n que correspondem às variáveis s , \dot{s} e τ no instante imediatamente antes desse impacto. As variáveis s_{n+1} , \dot{s}_{n+1} e τ_{n+1} são obtidas da solução das equações (5.2) e (5.3), para as condições iniciais:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau_n \\ s_0 &= s_n \\ \dot{s}_0 &= -r\dot{s}_n \end{aligned} \quad (5.5)$$

Assim sendo, introduzimos o mapa transcendental que foi obtido das equações (5.2), (5.3) e (5.5):

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= s_n + \alpha[\text{sen}(\tau_{n+1}) - \text{sen}(\tau_n)] + \alpha_p[\text{sen}(\omega_p \tau_{n+1}) - \text{sen}(\omega_p \tau_n)] \\ &+ \frac{\gamma}{\beta}(\tau_{n+1} - \tau_n) - \frac{1}{\beta}\{1 - \exp[-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)]\} \\ &[r\dot{s}_n + \alpha \cos(\tau_n) + \alpha_p \omega_p \cos(\omega_p \tau_n) + \frac{\gamma}{\beta}] \\ \dot{s}_{n+1} &= \alpha \cos(\tau_{n+1}) + \alpha_p \omega_p \cos(\omega_p \tau_{n+1}) + \frac{\gamma}{\beta} - \exp[-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)] \\ &[r\dot{s}_n + \alpha \cos(\tau_n) + \alpha_p \omega_p \cos(\omega_p \tau_n) + \frac{\gamma}{\beta}] \end{aligned} \quad (5.6)$$

A partir do mapa (5.6), para $s_n = 0$ ou -1 , obtemos as séries discretas \dot{s}_n e τ_n e, para essas variáveis, calculamos os expoente de Lyapunov, de forma semelhante ao

cálculo desses expoentes para o sistema da caixa de engrenagens sem a perturbação, descrita no capítulo 3.

Como exemplo numérico da implementação do método, fixamos a amplitude de excitação $\alpha_p = 0$ e escolhemos um conjunto de parâmetros ($\beta = 0,10$, $\gamma = 0,10$, $r = 0,90$ e $\alpha = 1,24$) para os quais o comportamento do sistema é caótico (fig. 5.2).

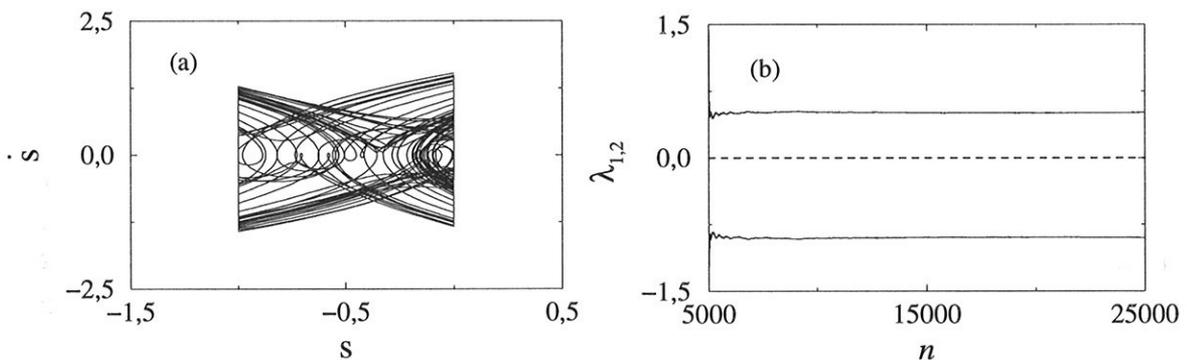


Figura 5.2: Parâmetros de controle $\beta = 0,10$, $\gamma = 0,10$, $r = 0,90$, $\alpha = 1,24$, $\omega_p = 0$ e $\alpha_p = 0$. (a) Plano de fase de uma trajetória caótica. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função do número de impacto, n .

Posteriormente, para uma frequência de perturbação fixa ($\omega_p = 0,5$), fazemos uma varredura na amplitude de perturbação, α_p , calculando os expoentes de Lyapunov, como indicado na figura 5.3. Com isso, identificamos uma faixa de valores do parâmetro α_p (com $\lambda_{1,2} < 0$) que levam à supressão do caos, ou seja, levam o sistema a oscilar de forma periódica.

Por fim, na figura 5.4 mostramos uma trajetória com comportamento periódico para uma amplitude de perturbação pequena $\alpha_p = 0,05$. Assim sendo, vimos que é possível a supressão de caos a partir de uma perturbação periódica, cuja amplitude ($\alpha_p = 0,05$) é pequena em relação a amplitude ($\alpha = 1,24$) da função de excitação (fonte de energia) do sistema.

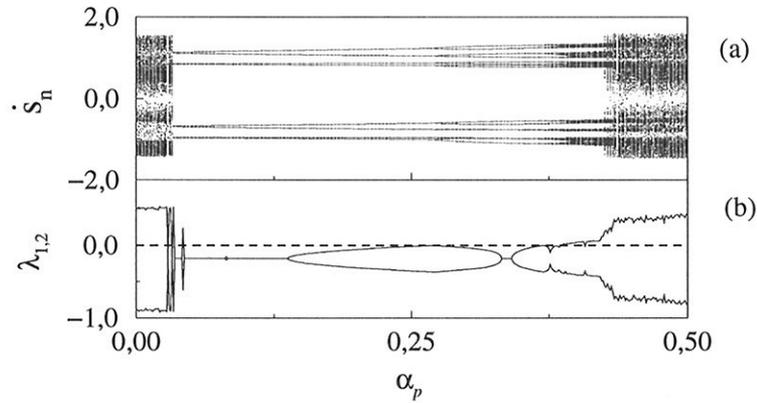


Figura 5.3: Parâmetros de controle $\beta = 0,10$, $\gamma = 0,10$, $r = 0,90$, $\alpha = 1,24$ e $\omega_p = 0,50$. (a) Diagrama de bifurcação \dot{s}_n em função do parâmetro de controle α_p . (b) Expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função de α_p .

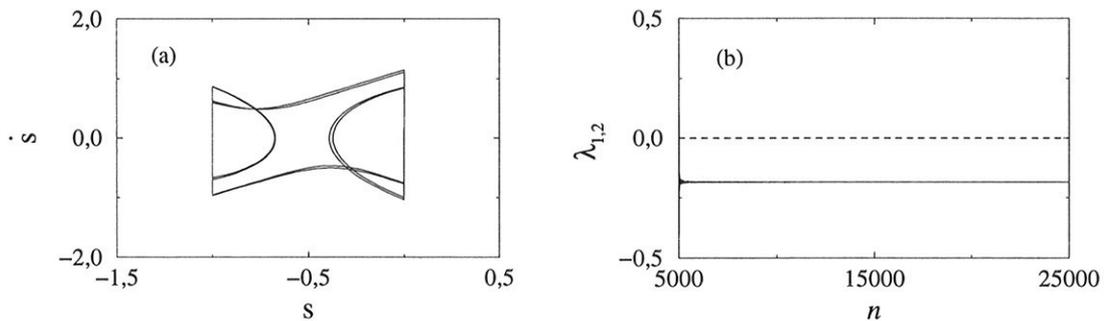


Figura 5.4: Parâmetros de controle $\beta = 0,10$, $\gamma = 0,10$, $r = 0,90$, $\alpha = 1,24$, $\omega_p = 0,50$ e $\alpha_p = 0,05$. (a) Plano de fase de uma trajetória periódica. (b) Teste de convergência dos expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função do número de impacto, n .

5.2 Método OGY

Nesta seção, mostramos como implementar o método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos [58] em sistemas mecânicos com impactos [54]. Tal método consiste em estabilizar uma das infinitas órbitas periódicas instáveis, previamente determinadas, imersas em um atrator caótico. Isso é feito através de pequenas perturbações em um dos parâmetros de controle. Essas perturbações são devidamente calculadas, a fim de desviar a órbita perturbada na direção da variedade estável do ponto fixo instável, cuja órbita queremos estabilizar.

Além disso, é importante ressaltar, somente aplicamos a perturbação quando a órbita no atrator caótico estiver próxima do ponto fixo instável (área de controle). E isso é possível devido à natureza ergódica dos atratores caóticos. Em outras palavras, uma órbita, com uma condição inicial na bacia de atração do atrator caótico, percorre todo o atrator passando eventualmente próximo do ponto fixo instável.

Ademais, cabe lembrar que, como vimos nos dois parágrafos anteriores, a aplicação desse método utiliza as propriedades dinâmicas do sistema a ser controlado.

A dificuldade de implementar este método, em sistemas com impactos, cujas trajetórias apresentam descontinuidades no espaço de fase, reside no cálculo da perturbação do parâmetro de controle. No entanto, podemos obter a perturbação, a ser aplicada, a partir de um mapa transcendental. Como vimos no capítulo 2, a dinâmica dos sistemas considerados é descrita pela solução de uma equação diferencial linear, entre os impactos, e pela regra de impactos previamente estabelecida. A partir da solução da equação diferencial e da regra de impactos, determinamos os mapas transcendentais. Além disso, para sistemas impactantes e não-autônomos de um grau de liberdade, como estes considerados aqui, o mapa transcendental é bidimensional.

Assim sendo, aplicamos o método de controle desejado nos sistemas com impactos, de forma semelhante aos sistemas descritos por mapas bidimensionais; por exemplo, o mapa de Hénon. Por outro lado, um mapa, como o de Hénon, descreve a evolução do sistema. E, nos sistemas com impactos, como vimos anteriormente, as evoluções dos sistemas não são obtidas a partir de mapas transcendentais, e sim pelas soluções das equações diferenciais lineares (entre os impactos) e as regras de impactos. Assim, no nosso caso o mapa transcendental é utilizado somente para

determinar a perturbação do parâmetro de controle e não a evolução do sistema.

Ademais, como sabemos, as variáveis dinâmicas do mapa transcendental são obtidas no instante dos impactos. Por conseguinte, a variação do parâmetro é calculada quando ocorre um impacto. Com isso, às vezes para estabilizar uma órbita de período 1, devemos tratá-la como sendo de período 2; como veremos a seguir nos resultados numéricos da implementação do controle no sistema de par de impactos.

5.2.1 Implementação do método OGY

Na aplicação do controle nos sistemas com impactos, usamos a amplitude de excitação, α , como parâmetro a ser perturbado. Inicialmente, vamos determinar como deve variar o parâmetro α em torno de seu valor nominal α_0 [99], para estabilizar órbitas de período 1. Para isso, devemos linearizar o mapa transcendental em torno do ponto fixo instável, cuja órbita queremos estabilizar, como segue:

$$Z_{n+1} = A_i Z_n + B_i(\alpha - \alpha_0) \quad (5.7)$$

para

$$Z_n = \begin{pmatrix} \dot{z}_n - \dot{z}_i \\ t_n - t_i \end{pmatrix}$$

$$A_i(\dot{z}_{n+1}, \dot{z}_n, t_{n+1}, t_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \dot{z}_n} \\ \frac{\partial \dot{z}_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial \dot{z}_{n+1}}{\partial \dot{z}_n} \end{pmatrix}$$

$$B_i(\dot{z}_{n+1}, \dot{z}_n, t_{n+1}, t_n) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \dot{z}_{n+1}}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

onde (\dot{z}_i, t_i) é o ponto fixo instável. Os elementos da matriz jacobiana A_i (doravante usamos A para denotar matriz jacobiana, no capítulo 3 usamos J) e da matriz B_i dependem de \dot{z}_n e t_n e também de \dot{z}_{n+1} e t_{n+1} , o que é característico dos mapas transcendentais. Nisso diferindo de outros mapas como o de Hénon, que dependem

apenas das variáveis dinâmicas na interação n . Além disso, calculamos os valores dos elementos das matrizes no ponto fixo usando o parâmetro nominal $\alpha = \alpha_0$.

Para órbitas de período 2, as matrizes A_i e B_i são dadas por:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+2}}{\partial t_{n+1}} & \frac{\partial t_{n+2}}{\partial z_{n+1}} \\ \frac{\partial z_{n+2}}{\partial t_{n+1}} & \frac{\partial z_{n+2}}{\partial z_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial t_{n+1}}{\partial z_n} \\ \frac{\partial z_{n+1}}{\partial t_n} & \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

$$B_i = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+2}}{\partial t_{n+1}} & \frac{\partial t_{n+2}}{\partial z_{n+1}} \\ \frac{\partial z_{n+2}}{\partial t_{n+1}} & \frac{\partial z_{n+2}}{\partial z_{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial z_{n+1}}{\partial \alpha} \end{pmatrix}$$

Considerando a órbita (z_n, t_n) na área de controle, ou seja, próxima do ponto fixo (z_i, t_i) , devemos aplicar a perturbação, de tal forma, que a órbita (z_{n+1}, t_{n+1}) evolua no sentido do autovetor estável do ponto fixo. Para isso, devemos impor a seguinte relação:

$$[Z_{n+1}] \cdot \vec{f}_{u,i+1} = 0 \quad (5.8)$$

onde \vec{f}_u é um vetor contravariante e i o número correspondente a periodicidade da órbita a ser estabilizada. Neste caso, $[Z_{n+1}]$ é um vetor cujas componentes são os elementos da matriz Z_{n+1} .

Os vetores contravariantes são obtidos a partir das relações $\vec{f}_s \cdot \vec{e}_s = \vec{f}_s \cdot \vec{e}_u = 1$, $\vec{f}_u \cdot \vec{e}_s = \vec{f}_s \cdot \vec{e}_u = 0$, onde \vec{e}_s e \vec{e}_u são os autovetores nas direções estável e instável correspondentes aos autovalores estável ($|\lambda_s| < 1$) e instável ($|\lambda_u| > 1$) da matriz A_i .

Os autovetores estável e instável, correspondentes a matriz A_i , são dados por:

$$\vec{e}_s = \frac{1}{\sqrt{p_1^2 + 1}}(p_1 \hat{x} + \hat{y})$$

$$\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{p_2^2 + 1}}(p_2 \hat{x} + \hat{y})$$

para

$$p_1 = (\lambda_s - a_{22})/a_{21}$$

$$p_2 = (\lambda_u - a_{22})/a_{21}$$

Os vetores contravariantes são dados por:

$$\vec{f}_s = \frac{\sqrt{p_1^2+1}}{(p_1-p_2)}(\hat{x} - p_2\hat{y})$$

$$\vec{f}_u = \frac{\sqrt{p_2^2+1}}{(p_2-p_1)}(\hat{x} - p_1\hat{y})$$

Finalmente, a partir das equações (5.7) e (5.8), obtemos a perturbação do parâmetro ($\alpha_n - \alpha_0$):

$$\alpha_n = \alpha_0 - \frac{[A_i Z_n] \cdot \vec{f}_{u,i+1}}{[B_i] \cdot \vec{f}_{u,i+1}} \quad (5.9)$$

Portanto, uma vez aplicado o controle, temos o valor α_n corrigido a cada impacto n . Cabe lembrar que aplicamos o controle apenas quando a perturbação é pequena, caso contrário usamos $\alpha_n = \alpha_0$. Além disso, a forma descrita aqui para o cálculo da variação do parâmetro de controle não é única. Podemos, também, obter essa variação utilizando, para isso, a técnica de colocação dos pólos, como veremos na próxima seção.

5.2.2 Técnica de colocação dos pólos

A partir da técnica de colocação dos pólos, como descrita nas referências [100, 101], podemos determinar o quanto deve variar o parâmetro α na aplicação do controle. Nesta seção, mostramos como usar esta técnica em um mapa bidimensional.

Em primeiro lugar, devemos definir a matriz de controle C e a matriz W .

A matriz C é dada por:

$$C = (B:AB) = \begin{pmatrix} b_1 & a_{11}b_1 + a_{12}b_2 \\ b_2 & a_{21}b_1 + a_{22}b_2 \end{pmatrix}$$

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3654

ex. 1

A matriz W é dada por:

$$W = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

onde a_1 é um dos coeficientes do polinômio característico da matriz A , ou seja

$$(s - \lambda_s)(s - \lambda_u) = s^2 + a_1s + a_2$$

logo, $a_1 = -(\lambda_s + \lambda_u)$ e $a_2 = \lambda_s\lambda_u$.

Em segundo lugar, supomos que a variação do parâmetro de controle $\alpha_n - \alpha_0$ é proporcional a Z_n , ou seja

$$\alpha_n - \alpha_0 = -K^T Z_n \quad (5.10)$$

onde K^T é uma matriz 1×2 .

Substituindo a equação (5.10) na equação (5.7), obtemos a seguinte relação:

$$Z_{n+1} = (A_i - B_i K^T) Z_n \quad (5.11)$$

A partir da técnica de colocação dos pólos, determinamos K^T de maneira que a matriz $A_i - B_i K^T$ tenha somente autovalores (pólos), menores que 1 (em módulo), o que é necessário para estabilizar uma órbita.

A matriz K^T é dada por:

$$K^T = (k_2 \ k_1) T^{-1} = (\eta_2 - a_2 \ \eta_1 - a_1) T^{-1} \quad (5.12)$$

onde $T = CW$ e $\{\eta_2, \eta_1\}$ são os coeficientes do polinômio característico da matriz $A_i - B_i K^T$, ou seja

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) = s^2 + \eta_1s + \eta_2$$

logo, $\eta_1 = -(\mu_1 + \mu_2)$ e $\eta_2 = \mu_1\mu_2$.

Para visualização gráfica da escolha dos pólos (autovalores de $A_i - B_i K^T$), mostramos na figura 5.5 um triângulo graficado no plano (η_1, η_2) , cuja área interna corresponde aos valores de η_1 e η_2 para os quais os pólos (μ_1 e μ_2) têm módulos menores que 1. As retas, que formam este triângulo correspondem à estabilidade marginal dos pólos. Elas são dadas por $1 \pm \eta_1 + \eta_2 = 0$ ($\mu_1 = \pm 1$) e $\eta_2 = 1$ ($\mu_1 \mu_2 = 1$). Além disso, podemos notar nesta figura os eixos k_1 e k_2 que estão relacionados com η_1 e η_2 a partir de uma translação ($k_1 = \eta_1 - a_1$ e $k_2 = \eta_2 - a_2$).

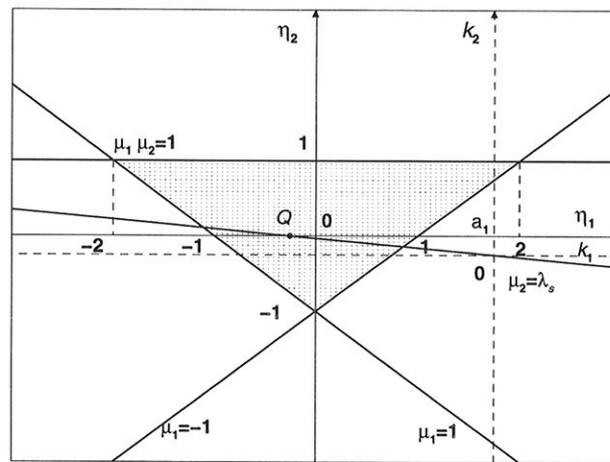


Figura 5.5: Ilustração referente a técnica de colocação dos pólos.

O ponto Q , indicado na figura 5.5, é uma possível solução do problema da colocação dos pólos. Como podemos ver, este ponto é obtido a partir da intersecção do eixo η_1 com uma reta, cuja inclinação é $-\lambda_s$. Além disso, tal reta passa pela origem de (k_1, k_2) , ou seja, passa pelo ponto $(\eta_1, \eta_2) = (a_1, a_2)$. Posto isto, sabemos que o valor da coordenada do ponto Q é $(\eta_1, \eta_2) = (-\lambda_s, 0)$. Por conseguinte, os pólos são dados por:

$$\mu_1 = 0 \text{ e } \mu_2 = \lambda_s \quad (5.13)$$

o que implica em

$$k_1 = \lambda_u \text{ e } k_2 = -\lambda_u \lambda_s \quad (5.14)$$

Por fim, a partir das equações (5.11), (5.12) e (5.14), obtemos a perturbação do parâmetro $(\alpha_n - \alpha_0)$:

$$\alpha_n = \alpha_0 + \lambda_u(\lambda_s - 1)T^{-1}. \quad (5.15)$$

5.2.3 Oscilador com impactos

Nesta seção, mostramos os resultados numéricos da implementação do método OGY no oscilador com impactos. Aplicamos o método em órbitas de períodos 1 e 2.

Para aplicar o método de controle, devemos, em primeiro lugar, encontrar um conjunto de parâmetros de controle que leve o sistema a oscilar de forma caótica. Na figura 5.6a, para o parâmetro $\alpha = \alpha_0 = 1,0$ e os demais parâmetros fixados em $\omega = 2,8$, $r = 0,8$ e $x_c = 0$, temos um comportamento caótico, de acordo com o maior expoente de Lyapunov (fig. 5.6b).

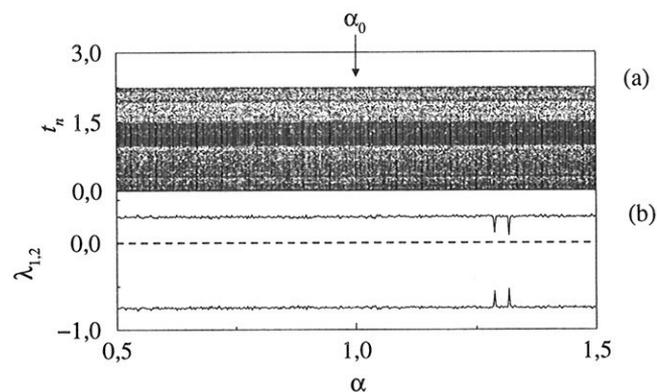


Figura 5.6: Parâmetros de controle $\omega = 2,8$, $r = 0,8$ e $x_c = 0$ do oscilador com impactos. (a) Variável dinâmica t_n em função do parâmetro de controle α . (b) Expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função de α .

Em segundo lugar, devemos determinar os pontos fixos instáveis, cujas órbitas queremos estabilizar. Usando o mapa transcendental (descrito no capítulo 2)

$$x_{n+1} = \left[x_n - \frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \cos(\omega t_n) \right] \cos(t_{n+1} - t_n) + \left[-r\dot{x}_n + \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} \text{sen}(\omega t_n) \right] \text{sen}(t_{n+1} - t_n) + \frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \cos(\omega t_{n+1})$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{n+1} = & \left[-x_n + \frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \cos(\omega t_n)\right] \text{sen}(t_{n+1} - t_n) + \left[-r\dot{x}_n + \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} \text{sen}(\omega t_n)\right] \\ & \cos(t_{n+1} - t_n) - \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} \text{sen}(\omega t_{n+1}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

podemos determinar o ponto fixo de período 1. Para isso, devemos considerar

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + 2\pi/\omega \\ \dot{x}_{n+1} &= \dot{x}_n \end{aligned} \quad (5.17)$$

Substituindo o conjunto de equações (5.17) no mapa (5.16), para $x_{n+1} = x_n = x_c = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)\right] \cos(\omega t_n) + \left[-r\dot{x}_n + \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} \right. \\ & \left. \text{sen}(\omega t_n)\right] \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_n = & \frac{1}{1+r \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)} \left[\frac{\alpha}{(1-\omega^2)} \text{sen}\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \cos(\omega t_n) \right. \\ & \left. - \frac{\alpha\omega}{(1-\omega^2)} (1 - \cos\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)) \text{sen}(\omega t_n)\right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Assim sendo, basta substituir \dot{x}_n da equação (5.19) na equação (5.18). Com isso, a equação (5.18) passa a depender apenas da variável t_n . Como não é possível isolar t_n a partir desta equação, devemos recorrer a métodos numéricos para determinar t_n . Usando o método de Newton-Raphson, para os valores de parâmetros do atrator caótico, obtemos $t_n = t_f \approx 1,092635$. Substituindo t_f na equação (5.19), determinamos a velocidade $\dot{x}_n = \dot{x}_f \approx 0,336177$. Assim, o ponto fixo instável de período 1 é dado por $(t_f, \dot{x}_f) \approx (1,092635, 0,336177)$. Cabe ressaltar, aqui, que a partir desse procedimento podemos determinar uma outra solução. No entanto, essa outra solução não é conveniente, pois o ponto obtido nem mesmo se encontra imerso no atrator caótico.

Na figura 5.7a, mostramos o atrator caótico e a órbita de período 1 (X) que desejamos estabilizar. Além disso, podemos ver também uma órbita de período 2 (+). A fim de obter os valores do ponto fixo correspondente a órbita de período 2, iteramos o sistema e verificamos a diferença (Δ) entre os pontos (t_n, \dot{x}_n) e

(t_{n+2}, \dot{x}_{n+2}) . Quando essa diferença for pequena ($\Delta < 0,001$), coletamos o ponto (t_n, \dot{x}_n) . Para melhorar a precisão, variamos em torno do ponto obtido e iteramos novamente. Para menor diferença (Δ) entre os pontos considerados, coletamos (t_n, \dot{x}_n) e (t_{n+1}, \dot{x}_{n+1}) . Com isso, obtemos os seguintes valores, para o ponto fixo instável, $(t_{f,1}, \dot{x}_{f,1}) \approx (1,3978, 0,4447)$ e $(t_{f,2}, \dot{x}_{f,2}) \approx (0,7352, 0,4669)$.

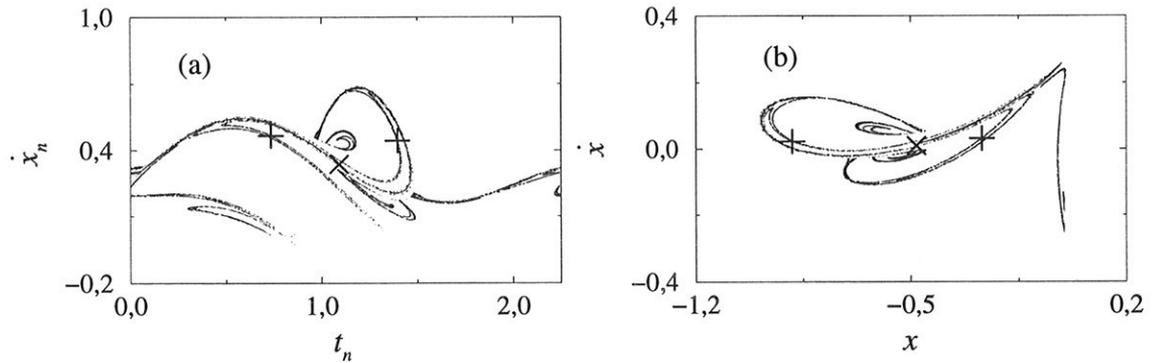


Figura 5.7: Atrator caótico e as órbitas instáveis de período 1 (X) e 2 (+), do oscilador com impactos, para os parâmetros de controle da figura 5.6 e para $\alpha = \alpha_0 = 1,0$. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

Na figura 5.8, mostramos a aplicação do método, para a área de controle (área do espaço de fase onde o controle é aplicado) $\epsilon = 0,01$, estabilizando duas órbitas de período 1 e 2. Neste caso, para determinar o quanto o parâmetro deve variar, utilizamos a equação (5.9), onde a matriz jacobiana A_i é descrita no capítulo 3 (seção 3.5.2) e os elementos da matriz B_i são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\dot{x}_{n+1}(1-\omega^2)} [\cos(\omega t_n) \cos(t_{n+1} - t_n) - \omega \text{sen}(\omega t_n) \text{sen}(t_{n+1} - t_n) \\ &\quad - \cos(\omega t_{n+1})] \\ \frac{\partial \dot{x}_{n+1}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha} \left\{ [-x_c + \frac{\alpha}{1-\omega^2}] \cos(t_{n+1} - t_n) + [r\dot{x}_n - \frac{\alpha\omega}{1-\omega^2} \text{sen}(t_{n+1} - t_n)] \right. \\ &\quad \left. \text{sen}(t_{n+1} - t_n) \right\} + \frac{1}{1-\omega^2} [\cos(\omega t_n) \text{sen}(t_{n+1} - t_n) \\ &\quad + \omega \text{sen}(\omega t_n) \cos(t_{n+1} - t_n) - \omega \cos(\omega t_{n+1})] \end{aligned} \quad (5.20)$$

Além disso, na figura 5.8, podemos também notar, de acordo com o indicativo da variação do parâmetro ($\delta\alpha = 100(\alpha - \alpha_0)/\alpha_0$), que a mudança no parâmetro de controle α é pequena ($\delta\alpha < 1\%$).

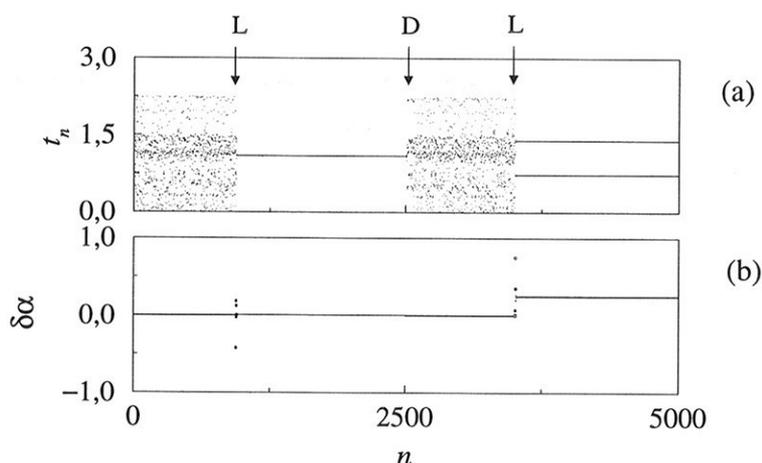


Figura 5.8: Aplicação do método OGY estabilizando as órbitas periódicas indicadas na figura 5.7, para uma área de controle $\epsilon = 0,01$, onde L e D indicam quando o controle foi ligado e desligado, respectivamente. (a) Variável dinâmica t_n em função de número de impactos n . (b) Indicativo da variação do parâmetro de controle α ($\delta\alpha = 100(\alpha - \alpha_0)/\alpha_0$).

Para ativar o controle, além da equação (5.9), podemos também usar a equação (5.15) que, por sua vez, foi obtida a partir da técnica de colocação dos pólos. Assim sendo, na figura 5.9, mostramos a implementação do controle. E, novamente, podemos notar (fig. 5.9b) que a variação do parâmetro α para ativar o controle é muito pequena ($\delta\alpha < 0,1\%$). Nessa figura notamos as variações de α em torno dos dois pontos da órbita de período 2 estabilizada.

Na figura 5.10, mostramos os planos de fase da trajetória caótica e das trajetórias periódicas estabilizadas.

Por fim, vimos nessa seção como implementar o método de controle OGY no oscilador com impactos. Nesse sistema, como vimos no capítulo 3 (seção 3.1) e podemos notar na figura 5.7, comparando os mapas no instante dos impactos (fig. 5.7a) e estroboscópio (fig. 5.7b), que o número de impactos da órbita periódica é igual sua periodicidade. No entanto, isso não ocorre nos demais sistemas considerados, tanto no sistema de par de impactos quanto no sistema da caixa de engrenagens. Assim sendo, para aplicar o controle em órbitas de período 1, às vezes devemos tratá-las como fossem de período 2, como veremos a seguir.

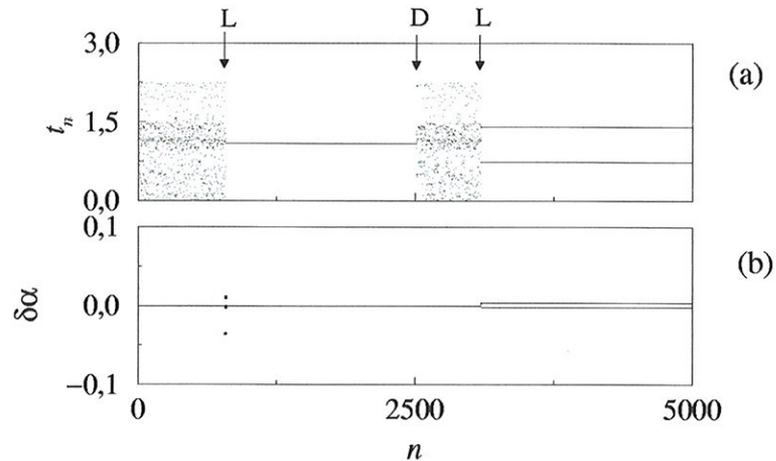


Figura 5.9: Aplicação do método OGY utilizando a técnica de colocação dos pólos para estabilizar as órbitas periódicas indicadas na figura 5.7, para uma área de controle $\epsilon = 0,01$, onde L e D indicam quando o controle foi ligado e desligado, respectivamente. (a) Variável dinâmica t_n em função de número de impactos n . (b) Indicativo da variação do parâmetro de controle α ($\delta\alpha = 100(\alpha - \alpha_0)/\alpha_0$).

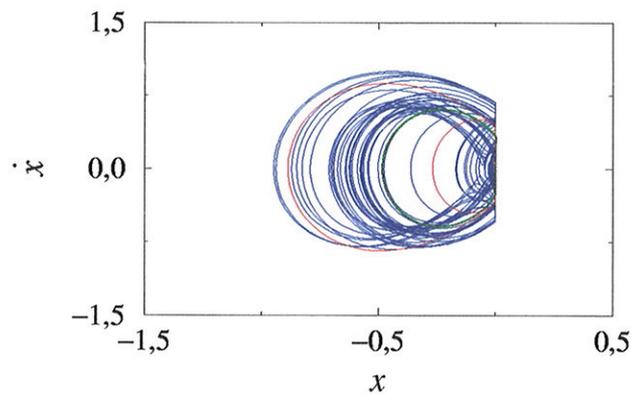


Figura 5.10: Plano de fase das trajetórias caótica (em azul) e periódicas estabilizadas de período 1 (em verde) e de período 2 (em vermelho), para os parâmetros de controle indicados na figura 5.7.

5.2.4 Par de impactos

Nesta seção, mostramos os resultados numéricos da implementação do método OGY no sistema de par de impactos, estabilizando uma órbita de período 1.

Neste sistema, a periodicidade de uma órbita e o número de impactos, para uma mesma trajetória, não são iguais. A trajetória mais simples de uma órbita de período 1 apresenta duas descontinuidades por ciclo. Em outras palavras, a cada intervalo de período $2\pi/\omega$ há dois impactos. Assim sendo, devemos tratar, para aplicar o método de controle, tal órbita de período 1 como órbita de período 2. Isso porque, usamos o mapa transcendental, que é obtido no instante dos impactos.

Para implementar o controle, devemos, em primeiro lugar, encontrar um conjunto de parâmetros que leve o sistema a oscilar de forma caótica. Na figura 5.11a, para os parâmetros de controle fixados em $\nu = 2,0$, $r = 0,7$ e $\omega = 1,0$, mostramos um diagrama de bifurcação da variável dinâmica \dot{y}_n em função de α . Para $\alpha = \alpha_0 = 2,3$ nesta figura, temos um comportamento caótico, de acordo com o maior expoente de Lyapunov (fig. 5.11b).

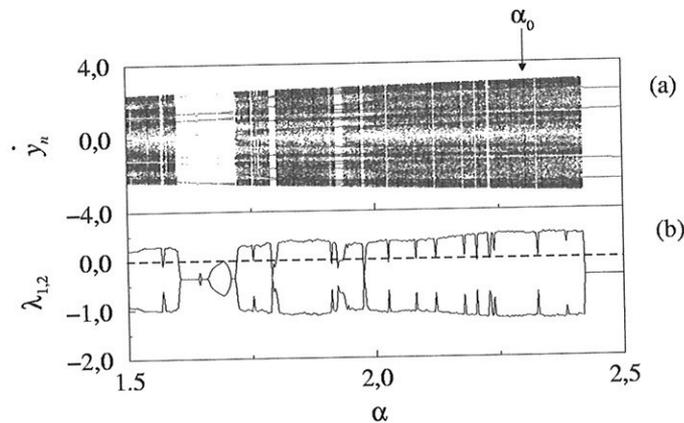


Figura 5.11: Parâmetros de controle $\nu = 2,0$, $r = 0,7$ e $\omega = 1,0$ do sistema de par de impactos. (a) Diagrama de bifurcação \dot{y}_n em função do parâmetro de controle α . (b) Expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função de α .

Em segundo lugar, devemos determinar o ponto fixo instável, cuja órbita desejamos estabilizar. Isso pode ser feito a partir do mapa transcendental, que foi descrito no capítulo 2 (seção 2.3). Para a função de excitação $e(t) = \alpha \text{sen}(\omega t)$ o mapa é dado por:

$$y_{n+1} = y_n + \alpha \text{sen}(\omega t_n) - \alpha \text{sen}(\omega t_{n+1}) + [-r\dot{y}_n + \alpha\omega \cos(\omega t_n)](t_{n+1} - t_n) \quad (5.21)$$

$$\dot{y}_{n+1} = -r\dot{y}_n + \alpha\omega \cos(\omega t_n) - \alpha\omega \cos(\omega t_{n+1}) \quad (5.22)$$

A fim de obter um ponto fixo de período 1, para o parâmetro $\omega = 1, 0$, devemos considerar que

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= t_n + \pi \\ \dot{y}_{n+1} &= -\dot{y}_n \\ y_{n+1} &= -y_n = -\frac{\nu}{2} \end{aligned} \quad (5.23)$$

Substituindo o conjunto de equações (5.23) no mapa (5.22) temos:

$$\text{sen}(t_n) + \frac{\pi(1+r)}{2(1-r)} \cos(t_n) = -\frac{\nu}{2\alpha} \quad (5.24)$$

$$\dot{y}_n = -\frac{2\alpha}{1-r} \cos(t_n) \quad (5.25)$$

A partir da equação (5.24), usando o método de Newton-Raphson e os parâmetros da figura 5.11 para $\alpha = \alpha_0 = 2, 3$, obtemos $t_{f,1} \approx 1, 7312311$. Substituindo esse valor na equação (5.25) temos que $\dot{y}_{f,1} \approx 2, 4494606$. De acordo com o conjunto das equações (5.23), sabemos que $t_{f,2} \approx 4, 8728238$ e $\dot{y}_{f,2} \approx -2, 4494606$. Assim sendo, o ponto fixo é dado por $(t_{f,1}, \dot{y}_{f,1}) \approx (1, 7312311, 2, 4494606)$ e $(t_{f,2}, \dot{y}_{f,2}) \approx (4, 8728238, -2, 4494606)$.

Na figura 5.12, para $\alpha = \alpha_0$, mostramos o atrator caótico e a órbita instável de período 1 (+). Ainda, nesta figura, notamos que a periodicidade da órbita instável (fig. 5.12b) não é igual ao número de impactos (fig. 5.12a), como esperado.

Quando a órbita caótica estiver próxima do ponto fixo, ou seja, na área de controle ($\epsilon = 0, 05$), usamos a equação (5.9), para ativar o controle, onde os elementos que compõem a matriz A_i são descritos no capítulo 3 (seção 3.5.3) e as derivadas parciais da matriz B_i são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\dot{y}_{n+1}} [\text{sen}(\omega t_{n+1}) - \text{sen}(\omega t_n) - \omega \cos(\omega t_n)(t_{n+1} - t_n)] \\ \frac{\partial \dot{y}_{n+1}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial t_{n+1}}{\partial \alpha} \alpha \omega^2 \text{sen}(\omega t_n) + \omega \cos(\omega t_n) - \omega \cos(\omega t_{n+1}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

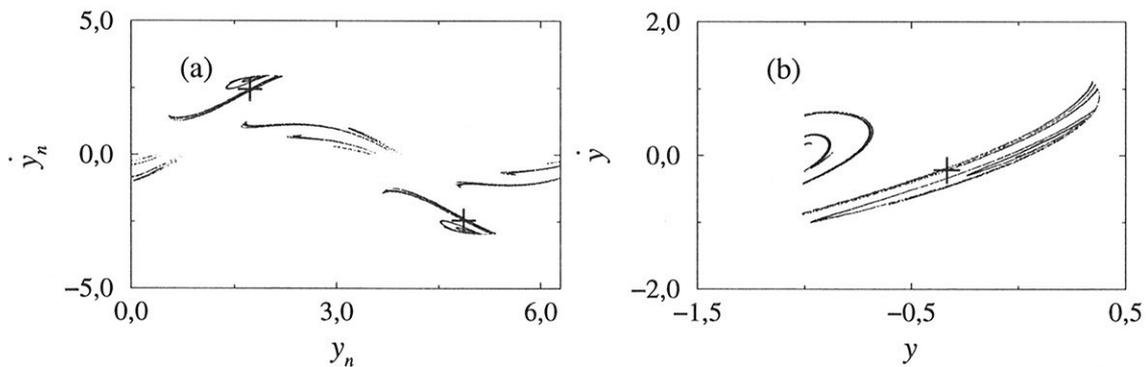


Figura 5.12: Atrator caótico e órbita instável de período 1 (+), do sistema de par de impactos, para os parâmetros de controle da figura 5.11 e para $\alpha = \alpha_0 = 2,3$. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

Na figura 5.13, mostramos o resultado numérico da implementação do controle. Além disso, podemos notar nesta figura que a variação do parâmetro α é pequena ($\delta\alpha < 0,5\%$). E, na figura 5.14, mostramos os planos de fase da trajetória caótica e da trajetória periódica de período 1 (com dois impactos por ciclo) estabilizada.

Por fim, descrevemos nessa seção como estabilizar órbitas de período 1 no sistema de par de impactos, a partir do método OGY e de um mapa transcendental. Para isso, tratamos a órbita de período 1 com fosse de período 2. Isso porque, a variação do parâmetro, para ativar o controle, é calculada nos instantes dos impactos. E, como sabemos, neste tipo de sistema (par de impactos e caixa de engrenagens) há no mínimo dois impactos por ciclo em uma órbita de período 1. No entanto, o procedimento mostrado aqui não é único. Às vezes podemos também implementar, como veremos na próxima seção, o método de controle neste tipo de sistema, aplicando a perturbação no parâmetro somente quando ocorre um dos dois impactos.

5.2.5 Caixa de engrenagens

Nesta seção, apresentamos os resultados numéricos da implementação do método OGY no sistema da caixa de engrenagens. Aplicamos o método numa órbita de período 1. Neste caso, como no sistema de par de impactos, há dois impactos

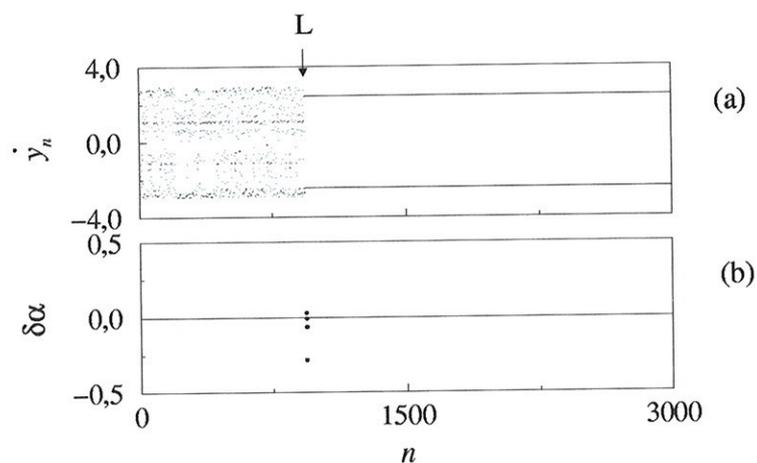


Figura 5.13: Aplicação do método OGY estabilizando a órbita periódica indicada na figura 5.12, para área de controle $\epsilon = 0,05$, onde L indica quando o controle foi ativado. (a) Variável dinâmica \dot{y}_n em função de número de impactos n . (b) Indicativo da variação do parâmetro de controle α ($\delta\alpha = 100(\alpha - \alpha_0)/\alpha_0$).

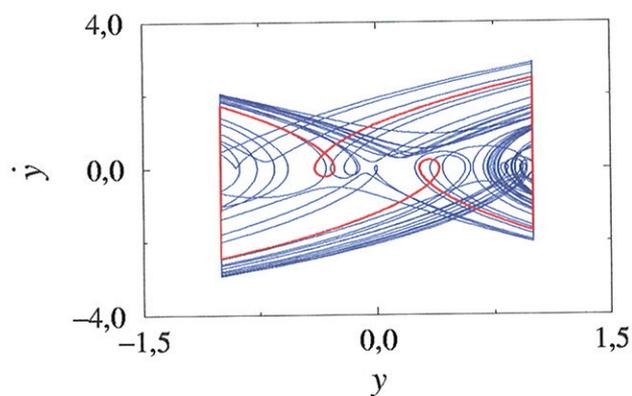


Figura 5.14: Plano de fase das trajetórias caótica (em azul) e periódica estabilizada de período 1 (em vermelho), para os parâmetros de controle indicados na figura 5.12.

por ciclo (intervalo de tempo 2π) para trajetória, cuja órbita desejamos estabilizar. Apesar disso, para ativar o controle, aplicamos a perturbação no parâmetro apenas quando ocorre um dos dois impactos.

Inicialmente, para aplicar o método, devemos encontrar um conjunto de parâmetros de controle que leve o sistema a oscilar de forma caótica. Na figura 5.15a, para os parâmetros $r = 0,9$, $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,1$, mostramos um diagrama de bifurcação da variável \dot{s}_n em função de α . Para $\alpha = \alpha_0 = 0,43$, temos um comportamento caótico, de acordo com o maior expoente de Lyapunov (fig. 5.15b).

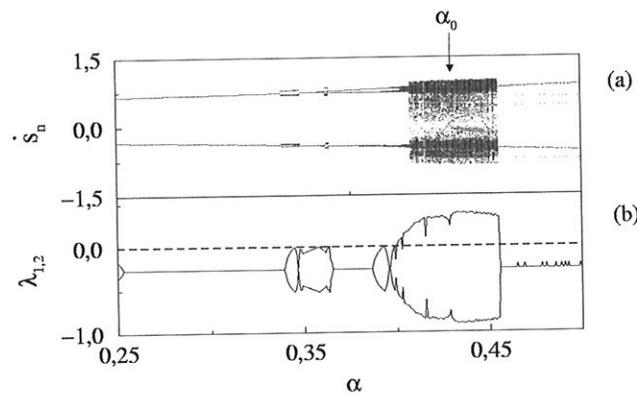


Figura 5.15: Parâmetros de controle $r = 0,9$, $\beta = 0,1$ e $\gamma = 0,1$ do sistema caixa de engrenagens. (a) Diagrama de bifurcação \dot{s}_n em função do parâmetro de controle α . (b) Expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função de α .

O ponto fixo instável de período 1, cuja órbita desejamos estabilizar, é obtido (de maneira semelhante ao ponto fixo de período 2 do oscilador com impactos, descrito na seção 5.2.3) numericamente a partir da interação do sistema. Assim sendo, este ponto é dado por $(\tau_{f,1}, \dot{s}_{f,1}) \approx (2,6864, -0,4814)$ e $(\tau_{f,2}, \dot{s}_{f,2}) \approx (4,6212, 0,8121)$.

Na figura 5.16, mostramos, para $\alpha = \alpha_0 = 0,43$, o atrator caótico e a órbita instável de período 1 (+). Além disso, podemos notar, como esperado, que a periodicidade da órbita instável (fig. 5.16b) não é igual ao número de impactos (fig. 5.16a).

Quando a órbita caótica estiver próxima do ponto fixo $(\tau_{f,2}, \dot{s}_{f,2})$ para $\epsilon = 0,02$ (área de controle), aplicamos o controle. Para determinar a perturbação do parâmetro, usamos a equação (5.9), onde a matriz A_i é descrita no capítulo 3 (seção 3.5.3) e os elementos da matriz B_i são dadas por:

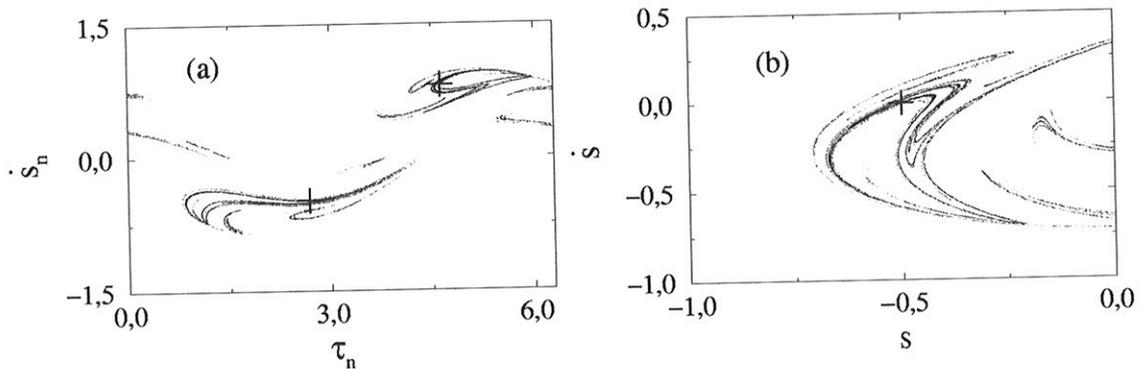


Figura 5.16: Atrator caótico e órbita instável de período 1 (+), do sistema caixa de engrenagens, para os parâmetros de controle da figura 5.15 e para $\alpha = 0,43$. (a) Mapa de Poincaré no instante dos impactos. (b) Mapa estroboscópico.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \alpha} &= \frac{1}{\dot{s}_{n+1}} \left\{ \text{sen}(\tau_n) - \text{sen}(\tau_{n+1}) - \frac{1}{\beta} [1 - \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n))] \cos(\tau_n) \right\} \\ \frac{\partial \dot{s}_{n+1}}{\partial \alpha} &= \frac{\partial \tau_{n+1}}{\partial \alpha} \left[\beta(r\dot{s}_n + \alpha \cos(\tau_n) + \frac{\gamma}{\beta}) \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)) - \text{sen}(\tau_{n+1}) \right] \\ &\quad + \cos(\tau_{n+1}) + \cos(\tau_n) \exp(-\beta(\tau_{n+1} - \tau_n)) \end{aligned} \quad (5.27)$$

Na figura 5.17, apresentamos o resultado numérico da implementação do controle. Além disso, podemos notar que a variação do parâmetro α é pequena ($\delta\alpha < 1,0\%$). E, na figura 5.18, mostramos os planos de fase da trajetória caótica e da trajetória periódica de período 1 estabilizada.

Por fim, nessa seção, apresentamos o procedimento para implementar o método OGY no sistema da caixa de engrenagens.

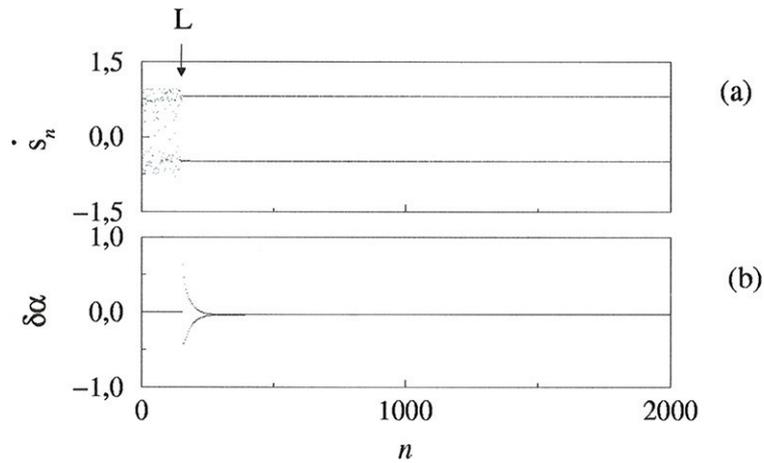


Figura 5.17: Aplicação do método OGY estabilizando a órbita periódica indicada na figura 5.16, para área de controle $\epsilon = 0,02$, onde L indica quando o controle foi ativado. (a) Variável dinâmica s_n em função de número de impactos n . (b) Indicativo da variação do parâmetro de controle α ($\delta\alpha = 100(\alpha - \alpha_0)/\alpha_0$).

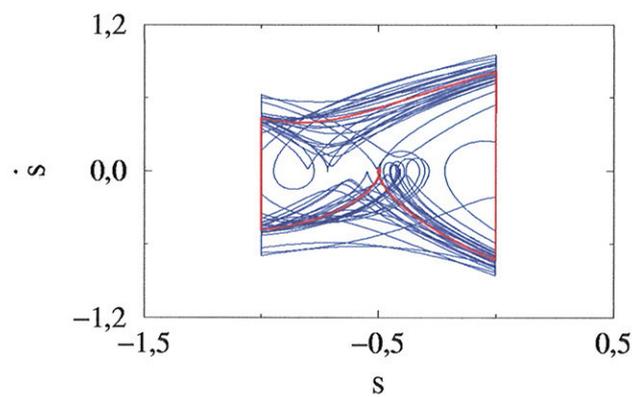


Figura 5.18: Plano de fase das trajetórias caótica (em azul) e periódica estabilizada de período 1 (em vermelho), para os parâmetros de controle indicados na figura 5.16.

Capítulo 6

Sistema Não-Ideal com Impactos

Na análise dos sistemas dinâmicos é quase sempre suposto que a fonte de energia não sofre qualquer influência do sistema oscilante. Em outras palavras, a ação da fonte de energia independe da oscilação do sistema. Com isso, a descrição matemática é simplificada, o que facilita a análise do sistema. Neste caso, o sistema é dito ideal [68], pois possui uma fonte de energia denominada ideal [66].

Em geral, podemos dizer que os sistemas ideais compreendem os problemas de oscilações forçadas por um termo periódico externo com uma amplitude e frequência específicas. Esse termo periódico é a fonte de energia do sistema, que é obtido a partir de motor de potência ilimitada. Como exemplo de sistema ideal, temos o oscilador forçado (fig. 6.1).

Às vezes na formulação das equações dinâmicas de um sistema, devemos considerar, também, a influência do sistema oscilante sobre a fonte de energia. Neste caso, o sistema e sua fonte de energia são denominados não-ideais [65–74]. Essa fonte de energia é obtida a partir de um motor de potência limitada. Além disso, é importante ressaltar, a fonte de energia não-ideal não pode ser representada por uma função puramente temporal. Assim sendo, é necessário introduzir, na descrição matemática, uma equação que relaciona a fonte de energia com a equação de movimento do sistema. Com isso, os sistemas não-ideais possuem um grau de liberdade a mais em relação aos sistemas ideais correspondentes.

Ademais, usamos o formalismo Lagrangiano para obter as equações de movimento do sistema não-ideal (fig. 6.2). Para a descrição matemática da fonte de energia, usamos um modelo do motor de massa desbalanceada. Esse modelo é constituído por uma parte mecânica e uma elétrica. A parte mecânica é representada por um

rotor acoplado ao oscilador e é introduzida na descrição matemática a partir da função Langrangiana. A parte elétrica corresponde aos torques (dependentes apenas da velocidade de rotação do rotor) ativo e resistente gerados pelo circuito elétrico do motor e é introduzida na descrição como um vínculo das equações de Lagrange.

Neste capítulo, investigamos a dinâmica de sistema não-ideal com impactos, que é composto pelo sistema de par de impactos sobreposto ao sistema não-ideal (fig. 6.6). Assim sendo, o sistema não-ideal atua como função de excitação do sistema de par de impactos. Em outras palavras, o sistema, em questão, é constituído por uma bola que movimenta-se dentro de uma caixa sobreposta a um sistema não-ideal. Além disso, consideramos, também, que tanto o sistema de par de impactos quanto o sistema não-ideal sofrem, por ocasião dos impactos, mudanças abruptas em suas trajetórias. Essas mudanças ocorrem de acordo com as massas e as velocidades desses sistemas. Com isso, a dinâmica do sistema não-ideal é completamente alterada, o que implica em mudanças na dinâmica do sistema de par de impactos.

Inicialmente, na seção 6.1, descrevemos o modelo matemático do sistema não-ideal e o sistema ideal correspondente. O sistema não-ideal é constituído por um oscilador, cujos coeficiente elástico da mola e amortecimento são lineares [66, 67]. O forçamento (fonte de energia) desse sistema é dado por um motor de massa desbalanceada. E o sistema ideal, correspondente, é um oscilador linear forçado. Para certas condições de operação, o sistema não-ideal equivale ao sistema ideal. Assim sendo, podemos dizer que o sistema ideal é um caso particular do não-ideal.

Na seção 6.2, apresentamos a regra de impactos utilizada. Essa regra é obtida a partir das equações que representam a perda de energia e a conservação da quantidade de movimento. A perda de energia no instante dos impactos é modelada por um coeficiente de restituição constante, ou seja, de forma semelhante aos sistemas descritos no capítulo 2. No entanto, neste caso, devemos considerar a conservação da quantidade de movimento total imediatamente antes e depois de cada impacto. Isso porque, como dito anteriormente, ambos os sistemas (par de impactos e o não-ideal) sentem os impactos.

Na seção 6.3, apresentamos a descrição matemática do sistema não-ideal com impactos. Além disso, variando um dos parâmetros de controle relacionado com o motor (fonte de energia do sistema não-ideal), identificamos comportamentos periódicos e caóticos. Mostramos e analisamos alguns resultados numéricos. Para isso,

levamos em consideração que o sistema com impactos, em questão, é composto pelos sistemas de par de impactos (de massa m) e não-ideal (de massa M). E a interação entre esses dois sistemas apenas ocorre por ocasião dos impactos. Em outras palavras, entre os impactos temos dois sistemas independentes, que são acoplados, no instante dos impactos, de acordo com suas massas. Assim sendo, variamos a razão entre as massas (m/M) para estudar o comportamento destes sistemas. Com isso, observamos, para $m/M \ll 1$, apenas soluções periódicas para o sistema não-ideal e soluções periódicas ou caóticas para o sistema de par de impactos. Variando a razão entre as massas, m/M , notamos que é possível obter a supressão de caos do sistema de par de impactos e, além disso, obter soluções caóticas para sistema não-ideal.

Na seção 6.4, a partir de simulações numéricas, identificamos fenômenos tipicamente não-lineares como crise interior, intermitências e coexistência de atratores. Associado à crise interior identificamos uma tipo de intermitência que leva o sistema a oscilar entre três atratores caóticos. Além dessa intermitência, observamos uma outra, que envolve dois atratores periódicos e um caótico. Mostramos, também, as bacias de atração de dois atratores periódicos coexistentes. Essas bacias possuem uma característica de bacia crivada.

6.1 Sistema não-ideal

Nesta seção, descrevemos o modelo matemático do sistema não-ideal, que utilizamos para introduzir a função de excitação do sistema de par de impactos. Além disso, apresentamos o sistema ideal correspondente a este sistema não-ideal. Em geral, como foi dito anteriormente, na análise dos sistemas dinâmicos, supomos que a fonte de energia não sofre qualquer influência do sistema oscilatório. Neste caso, o sistema é chamado ideal [68]. Essa suposição facilita, e muito, a análise do sistema, pois simplifica as equações de movimento.

Os sistemas ideais compreendem os problemas de oscilações forçadas por um termo periódico externo com uma amplitude e frequência específicas; por exemplo, o oscilador forçado, ilustrado na figura 6.1, cuja equação de movimento é dada por:

$$M\ddot{z} + c\dot{z} + kz = A \cos(\omega t) \quad (6.1)$$

onde M , c , e k são a massa do bloco, o amortecimento, o coeficiente elástico da mola, respectivamente. O termo $A\cos(\omega t)$ corresponde à fonte de energia ideal (forçamento) do sistema. Tal fonte de energia depende, como podemos ver, apenas do tempo t e não da oscilação do sistema $z(t)$, o que é uma característica de sistemas ideais.

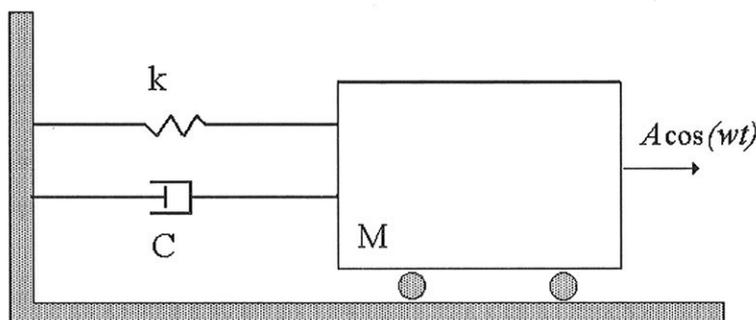


Figura 6.1: Esquema de um oscilador forçado.

Ademais, na análise de um sistema dinâmico, podemos também considerar em sua formulação matemática a influência do sistema oscilante sobre a fonte de energia (motor). Neste caso, temos um sistema não-ideal [68].

Na figura 6.2, mostramos um sistema não-ideal. Este sistema é um oscilador, cujo forçamento (fonte de energia) é dado por um motor de massa desbalanceada m_0 [66, 67].

Para descrever matematicamente o sistema não-ideal, utilizamos o formalismo Lagrangeano. Para isso, devemos, em primeiro lugar, determinar a função Lagrangeana, que é dada por:

$$L = T - V \quad (6.2)$$

onde T e V são as energias cinética e potencial, respectivamente.

Em segundo lugar, devemos substituir a função L nas equações de Lagrange. Neste caso, tais equações são dadas por:

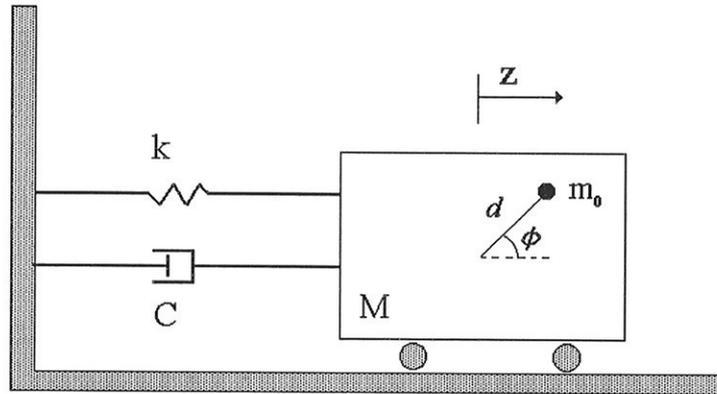


Figura 6.2: Esquema do sistema não-ideal.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{Z}} \right] - \frac{\partial L}{\partial Z} = -c\dot{Z} \quad (6.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right] - \frac{\partial L}{\partial \phi} = Y(\dot{\phi}) - D(\dot{\phi}) \quad (6.4)$$

onde c um amortecimento linear, Y é um torque ativo gerado pelo circuito elétrico do motor e D o torque resistente do motor, sendo Z e ϕ os deslocamentos das massas M e m_0 , respectivamente.

A energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2}(M + m_0)\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 - m_0d\dot{\phi}\dot{Z}\sin(\phi) \quad (6.5)$$

onde d é a excentricidade da massa desbalanceada do motor m_0 , M é a massa da fundação e do motor, J é o momento de inércia do motor.

A energia potencial é dada por:

$$V = \frac{1}{2}kZ^2 \quad (6.6)$$

onde a constante k é o coeficiente elástico da mola.

A partir das equações (6.5) e (6.6), temos a função Lagrangiana, como segue:

$$L = \frac{1}{2}(M + m_0)\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 - m_0d\dot{\phi}\dot{Z}\sin(\phi) - \frac{1}{2}kZ^2 \quad (6.7)$$

Substituindo a função L nas equações (6.3) e (6.4) e considerando $z = Z/d$, obtemos as seguintes equações de movimento para o sistema não-ideal:

$$\ddot{z} + \mu\dot{z} + z = \epsilon[\ddot{\phi}\text{sen}(\phi) + \dot{\phi}^2 \cos(\phi)] \quad (6.8)$$

$$\ddot{\phi} = \ddot{z}\text{sen}(\phi) + H(\dot{\phi}) \quad (6.9)$$

onde $\mu = c/\sqrt{k(M + m_0)}$ e $\epsilon = m/(M + m_0)$. O ponto (\cdot) representa as derivadas das variáveis dinâmicas em relação a τ ($\tau = \sqrt{k/(M + m_0)}t$). A função $H(\dot{\phi})$ é proporcional à diferença entre o torque ativo gerado pelo circuito elétrico do motor, $L(\dot{\phi})$, e o torque resistente do motor, $D(\dot{\phi})$, ou seja, $H(\dot{\phi}) \sim L(\dot{\phi}) - D(\dot{\phi})$. A função $H(\dot{\phi})$ é uma curva característica do motor e pode ser representada por uma exponencial, ou simplesmente por uma reta. Nas simulações numéricas, optamos por uma reta. Com isso, temos que

$$H(\dot{\phi}) = E_1 + E_2\dot{\phi} \quad (6.10)$$

Assim sendo, os parâmetros de controle deste sistema são μ , ϵ , E_1 e E_2 .

Ademais, é interessante notar que o sistema ideal (oscilador forçado), cujo movimento é descrito pela equação (6.1), é um caso particular do sistema não-ideal descrito acima. Isso porque, quando a velocidade angular $\dot{\phi}$ da massa m_0 é uma constante, as equações (6.8) e (6.9) equivalem à equação do sistema ideal. Além disso, como podemos ver nessa seção, o sistema não-ideal possui um grau de liberdade a mais em relação ao sistema ideal.

Para obter as soluções do sistema não-ideal, integramos numericamente suas equações. Para isso, utilizamos o método Runge-Kutta de 4ª ordem. No entanto, para usar este método, devemos, primeiro, isolar $\ddot{\phi}$ e \ddot{z} das equações (6.8) e (6.9). Assim sendo, podemos escrever estas equações da seguinte forma:

$$\ddot{z} = \frac{1}{1 - \epsilon\text{sen}^2(\phi)}[\epsilon\dot{\phi}^2 \cos(\phi) - \mu\dot{z} - z + \epsilon H(\dot{\phi})\text{sen}(\phi)] \quad (6.11)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{1 - \epsilon\text{sen}^2(\phi)}[(\epsilon\dot{\phi}^2 \cos(\phi) - \mu\dot{z} - z)\text{sen}(\phi) + H(\dot{\phi})] \quad (6.12)$$

Assim, as soluções do sistema não-ideal são obtidas a partir da integração numérica das equações (6.11) e (6.12).

Na figura 6.3, para os parâmetros de controle $\mu = 0,02$, $\epsilon = 0,10$ e $E_2 = 1,50$, verificamos a variação da frequência de oscilação do sistema não-ideal, quando variamos o parâmetro de controle do motor, E_1 . Ainda nesta figura, podemos notar que há uma descontinuidade (um salto) no domínio da frequência. Este fenômeno é conhecido como efeito Sommerfeld [66,68] e é observado quando há uma transição por uma ressonância. Com isso, o sistema não possui soluções, perto de um ressonância, para certos valores de frequência.

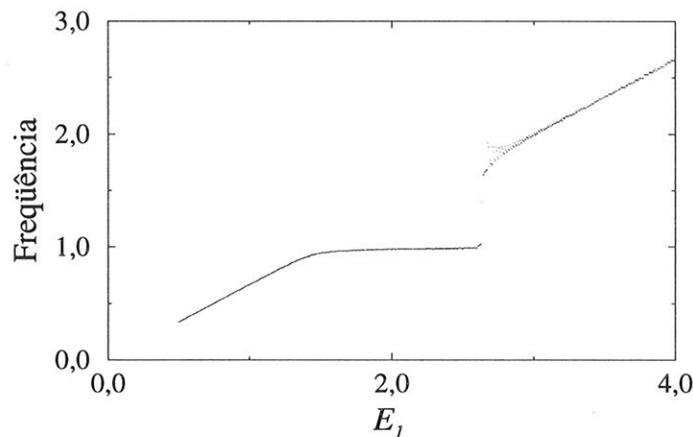


Figura 6.3: Frequência de oscilação do sistema não-ideal em função do parâmetro de controle do motor, E_1 , para os demais parâmetros fixados em $\mu = 0,02$, $\epsilon = 0,1$ e $E_2 = 1,5$.

Quando variamos o parâmetro E_1 não é somente a frequência que muda, mas, também, a amplitude de oscilação do sistema, como podemos observar na figura 6.4.

Assim, nessa seção, descrevemos as equações de movimento do sistema não-ideal e mostramos o sistema ideal correspondente. Além disso, variando o parâmetro de controle do motor, E_1 , apresentamos resultados numéricos do sistema não-ideal. Com isso, verificamos como a frequência e a amplitude de oscilação do sistema mudam. Neste caso, identificamos apenas soluções periódicas. Ademais, cabe lembrar que o sistema não-ideal será utilizado como função de excitação do sistema de par de impactos. Assim sendo, usaremos o parâmetro E_1 para variar a amplitude e frequência de excitação do sistema de par de impactos (seção 6.3). No entanto, isso somente é possível quando o sistema não-ideal não sente o efeito dos impactos. Caso contrário, a dinâmica do sistema não-ideal é completamente alterada. Isso devido as descontinuidades de suas trajetórias, que ocorrem de acordo com a regra de impacto.

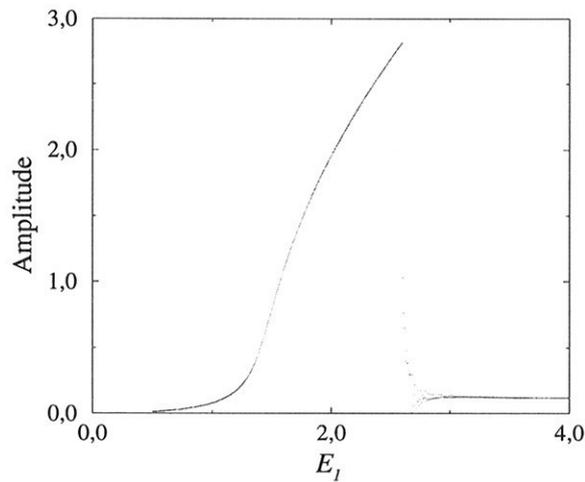


Figura 6.4: Amplitude de oscilação do sistema não-ideal em função do parâmetro de controle do motor, E_1 , para os demais parâmetros fixados em $\mu = 0,02$, $\epsilon = 0,10$ e $E_2 = 1,50$.

Na próxima seção, descrevemos a regra de impacto a ser utilizada.

6.2 Regra de impacto

Nesta seção, descrevemos a regra de impacto utilizada no sistema não-ideal com impactos. Por ocasião do impacto, devemos reinicializar a solução analítica do par de impactos e a solução numérica (Runge-Kutta de 4ª ordem) do sistema não-ideal.

A fim de obter tal regra, consideramos um modelo, ilustrado na figura 6.5, constituído por dois corpos pontuais de massas m e M . Ademais, a regra de impacto descrita aqui é semelhante a regra, descrita na seção 2.1, utilizada no sistema ideal. Isso porque, a perda de energia no instante do impacto é modelada por um coeficiente de restituição constante. Além disso, os impactos são unidimensionais e ocorrem instantaneamente.

Porém, para o sistema ideal apenas um dos corpos impactantes sentia o efeito dos impactos. Neste caso, ambos corpos sentem os impactos. Com isso, além da equação que representa a perda de energia a partir do coeficiente de restituição, devemos, para obter a regra de impacto, considerar a equação da conservação da quantidade de movimento total imediatamente antes e depois de cada impacto.

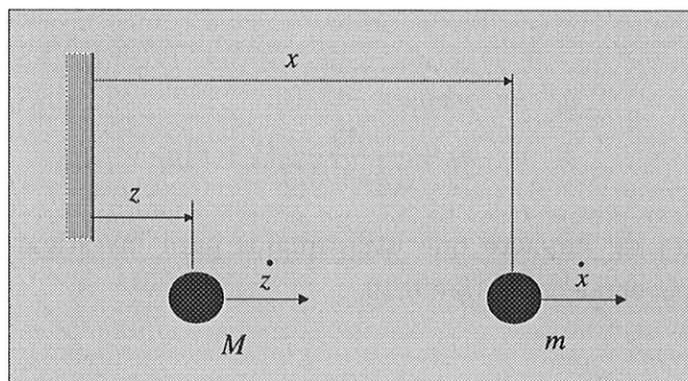


Figura 6.5: Modelo de impacto entre dois corpos pontuais.

Por conseguinte, a regra de impacto é obtida a partir das equações:

$$\dot{x}_i - \dot{z}_i = -r(\dot{x}_f - \dot{z}_f) \quad (6.13)$$

$$m\dot{x}_i + M\dot{z}_i = m\dot{x}_f + M\dot{z}_f \quad (6.14)$$

onde m e M são as massas dos corpos impactantes, r é o coeficiente de restituição. Os índices f e i correspondem, respectivamente, aos estados imediatamente antes e depois do impacto, a equação 6.13 representa a perda de energia cinética e a equação 6.14 representa a conservação de quantidade de movimento.

Isolando \dot{x}_i e \dot{z}_i a partir das equações 6.13 e 6.14, temos que a regra de impacto é dada por:

$$\dot{x}_i = \dot{x}_f - \frac{M}{(m+M)}(1+r)(\dot{x}_f - \dot{z}_f) \quad (6.15)$$

$$\dot{z}_i = \dot{z}_f + \frac{m}{(m+M)}(1+r)(\dot{x}_f - \dot{z}_f) \quad (6.16)$$

Além disso, por uma questão de conveniência, usamos um outro sistema de coordenadas nas simulações numéricas. Portanto, devemos representar a regra de impacto em tais coordenadas. Nessas coordenadas o deslocamento relativo y da massa m em relação ao deslocamento da massa M é dada por:

$$y = x - z \quad (6.17)$$

Substituindo a equação 6.17 nas equações 6.15 e 6.16, temos:

$$\dot{y}_i = -r\dot{y}_f \quad (6.18)$$

$$\dot{z}_i = \dot{z}_f + \frac{m}{(m+M)}(1+r)\dot{y}_f \quad (6.19)$$

Por fim, a regra de impacto que utilizaremos para investigar a dinâmica do sistema é dada pelas equações 6.18 e 6.19.

6.3 Sistema com impactos

O nosso sistema não-ideal com impactos é composto pelo sistema de par de impactos sobreposto ao sistema não-ideal, como mostrado na figura 6.6. Assim sendo, o sistema não-ideal, neste caso, atua como uma função de excitação do sistema de par de impactos. Ademais, a interação entre esses dois sistemas apenas ocorre por ocasião dos impactos. Em outras palavras, entre os impactos temos dois sistemas independentes.

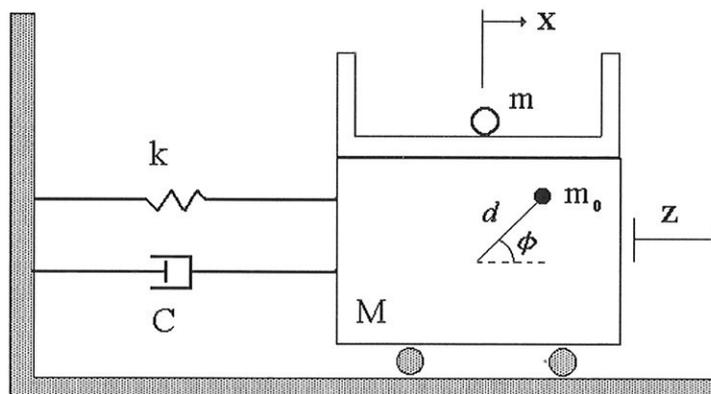


Figura 6.6: Esquema do sistema não-ideal com impactos.

A fim de estudar a dinâmica do sistema com impactos, devemos resolver numericamente as equações (6.11) e (6.12), obtendo assim a função de excitação do sistema de par de impactos, ou seja, o deslocamento $z(\tau)$ da caixa. Além disso, devemos determinar o movimento da massa m entre os impactos.

Podemos, por uma questão de conveniência, considerar a massa m movimentando-se livremente dentro da caixa onde ela esta contida. Dessa forma, a equação de movimento da massa m , entre os impactos, no referencial em repouso (referencial do laboratório) é dada por:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = 0 \quad (6.20)$$

onde x o deslocamento da massa m e τ o tempo, sendo $\tau = \sqrt{k_1/(M + m_1)}t$ e $x = X/d$ (de acordo com o sistema não-ideal).

A solução da equação (6.20) é dada por:

$$x(\tau) = x_0 + \dot{x}_0(\tau - \tau_0) \quad (6.21)$$

$$\dot{x}(\tau) = \dot{x}(\tau_0) \quad (6.22)$$

Assim, a evolução dinâmica do sistema é composta, entre os impactos, pela solução numérica das equações (6.11) e (6.12) (descrita na seção 6.1) e pelas equações (6.21) e (6.22).

Para $x(\tau) = z(\tau) + \nu/2$ e $x(\tau) = z(\tau) - \nu/2$ ocorrem os impactos, onde ν é a distância entre as paredes da caixa. Por ocasião dos impactos, devemos introduzir nas equações (6.11), (6.12), (6.21) e (6.22) as novas condições, de acordo com a regra de impacto descrita na seção 6.2, como segue:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau \\ x_0 &= x \\ z(\tau_0) &= z(\tau) \\ \dot{x}_0 &= \dot{x} - \frac{M}{(m + M)}(1 + r)(\dot{x} - \dot{z}(\tau)) \\ \dot{z}(\tau_0) &= \dot{z}(\tau) + \frac{m}{(m + M)}(1 + r)(\dot{x} - \dot{z}(\tau)) \end{aligned} \quad (6.23)$$

onde r é o coeficiente de restituição.

Ademais, na simulação numérica desse sistema, é interessante fazer uma mudança de variável, ou seja, passar de x (deslocamento absoluto) para y (deslocamento relativo entre a massa m e a caixa).

A relação de x e y é dada por:

$$x = y + z(\tau) \quad (6.24)$$

Substituindo a equação (6.24) nas equações (6.21) e (6.22), temos:

$$y(\tau) = y_0 + z(\tau_0) - z(\tau) + [\dot{y}_0 + \dot{z}(\tau_0)](\tau - \tau_0) \quad (6.25)$$

$$\dot{y}(\tau) = \dot{y}_0 + \dot{z}(\tau_0) - \dot{z}(\tau) \quad (6.26)$$

Neste caso, o impacto ocorre para $y = \pm\nu$. Depois de cada impacto, introduzimos nas equações (6.11), (6.12), (6.25) e (6.26) as novas condições iniciais:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \tau \\ y_0 &= y \\ z(\tau_0) &= z(\tau) \\ \dot{y}_0 &= -r\dot{y} \\ \dot{z}(\tau_0) &= \dot{z}(\tau) + \frac{m}{(m+M)}(1+r)\dot{y} \end{aligned} \quad (6.27)$$

A partir das equações descritas nessa seção e na seção 6.1, podemos estudar a dinâmica do sistema com impactos. Para isso, fixamos os parâmetros de controle $\epsilon = 0,10$, $\mu = 0,02$, $E_2 = 1,50$, $\nu = 1,00$ e variamos os demais, ou seja, os parâmetros E_1 e r . Além desses parâmetros, variamos, também, a razão entre massas, m/M , dos sistemas de par de impactos (m) e do não-ideal (M). Com isso, identificamos comportamentos periódicos e caóticos.

Como exemplo de comportamento periódico, graficamos na figura 6.7, para os parâmetros de controle $E_1 = 1,0$, $r = 0,9$ e $m/M \ll 1$, a evolução temporal de uma solução periódica. Na figura 6.7a, temos um evolução temporal em um referencial em repouso e, na figura 6.7b, em um referencial em movimento. Neste caso, como a razão entre as massas $m/M \ll 1$, apenas o sistema de par de impactos tem sua trajetória mudada por ocasião dos impactos, como podemos observar nas figuras 6.8 e 6.9. Nas figuras 6.8a e 6.8b, mostramos as evoluções temporais das velocidades dos sistemas par de impactos e não-ideal, respectivamente. Com isso, notamos que há uma descontinuidade (linha tracejada) na evolução da velocidade,

\dot{y} , do sistemas de par de impactos (fig. 6.8a). Na figura 6.9, graficamos os planos de fase desses sistemas e, novamente, podemos ver a descontinuidade da trajetória do sistema de par de impactos (fig. 6.9a).

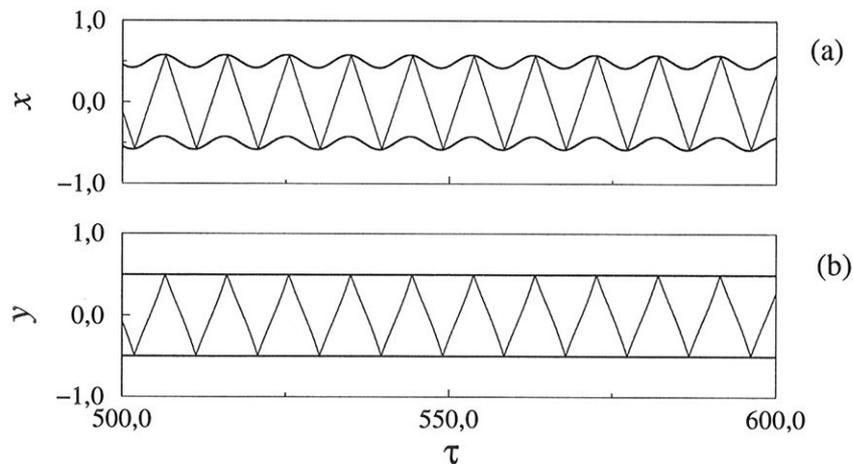


Figura 6.7: Solução periódica para os parâmetros de controle $E_1 = 1,0$, $r = 0,9$ e $m/M \ll 1$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto x . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo y .

Como exemplo de comportamento caótico, graficamos na figura 6.10, para os parâmetros de controle $E_1 = 1,5$, $r = 0,9$ e $m/M \ll 1$, a evolução temporal de uma solução caótica. E, novamente, apenas o sistema de par de impactos tem sua trajetória mudada por ocasião dos impactos, como podemos ver (linhas tracejadas) nas figuras 6.11 e 6.12. Isso porque, a razão entre as massas é dada por $m/M \ll 1$. Além disso, neste caso, a solução caótica foi identificada quando variamos apenas (em relação à solução periódica) o parâmetro de controle do motor, E_1 . Como vimos na seção 6.1, quando variamos esse parâmetro, alteramos a amplitude e frequência de excitação do sistema de par de impactos. Com isso, modificamos o comportamento do sistema, como podemos ver no diagrama de bifurcação da figura 6.13. Nessa figura, vemos, também, os expoentes de Lyapunov $\lambda_{1,2}$ (fig. 6.13b) do sistema de par de impactos. Para o cálculo dos expoentes, usamos o procedimento descrito na seção 3.5.3.

O comportamento dinâmico do sistema não-ideal é alterado quando consideramos não desprezível a razão entre as massas, m/M . Por conseguinte, o comportamento do sistema de par de impactos, também, é alterado. Com isso, podemos obter, para

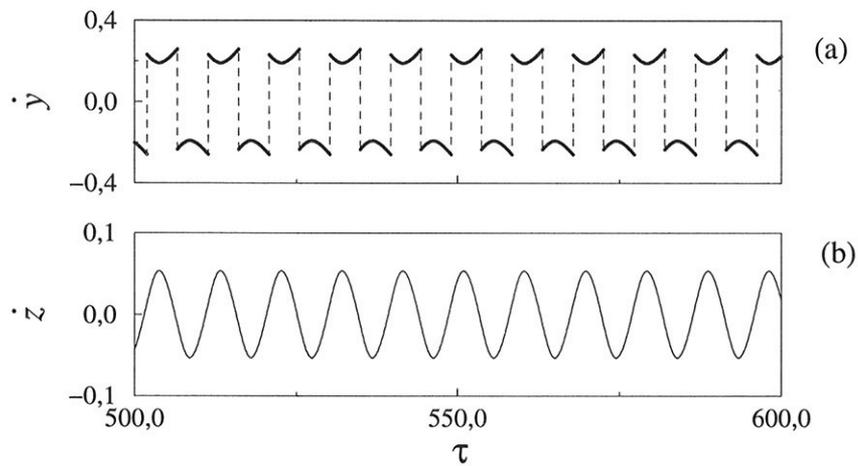


Figura 6.8: Mesma solução indicada na figura 6.7. (a) Evolução temporal da velocidade, \dot{y} , do sistema de par de impactos. (b) Evolução temporal da velocidade, \dot{z} , do sistema não-ideal.

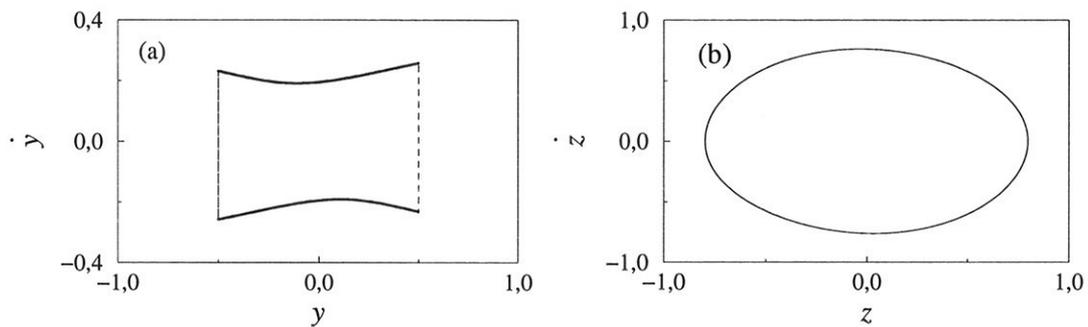


Figura 6.9: Mesma solução indicada na figura 6.7. (a) Plano de fase do sistema de par de impactos. (b) Plano de fase do sistema não-ideal.

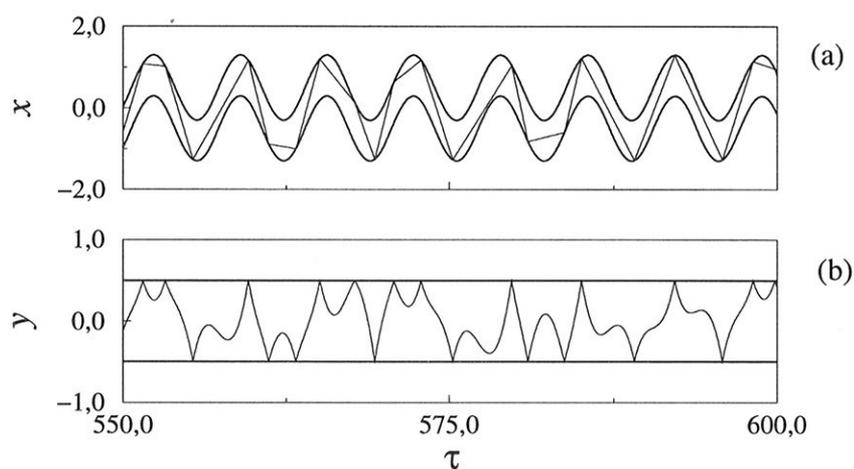


Figura 6.10: Solução caótica para os parâmetros de controle $E_1 = 1,5$, $r = 0,9$ e $m/M \ll 1$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto x . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo y .

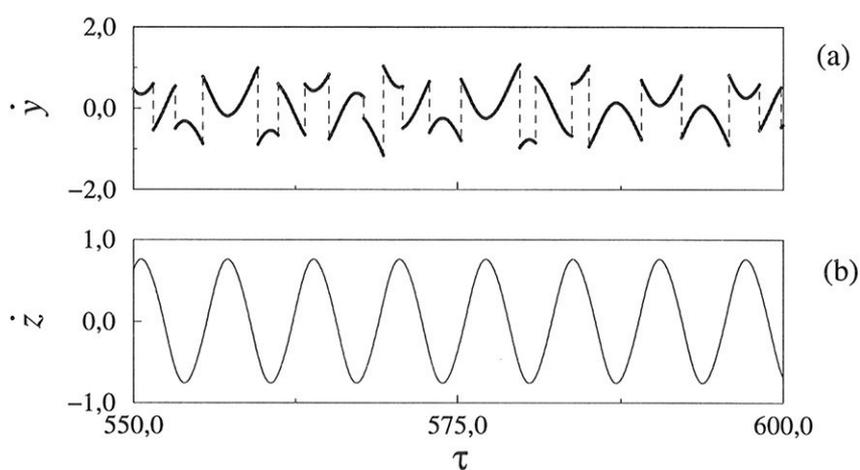


Figura 6.11: Mesma solução indicada na figura 6.10. (a) Evolução temporal da velocidade, \dot{y} , do sistema de par de impactos. (b) Evolução temporal da velocidade, \dot{z} , do sistema não-ideal.

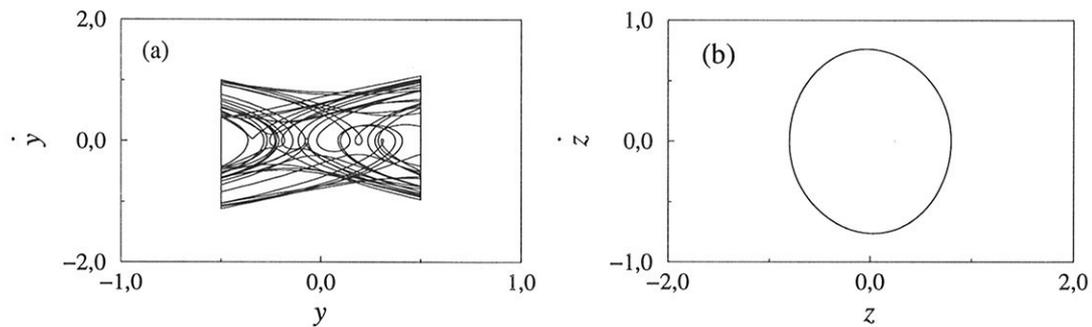


Figura 6.12: Mesma solução indicada na figura 6.10. (a) Plano de fase do sistema de par de impactos. (b) Plano de fase do sistema não-ideal.

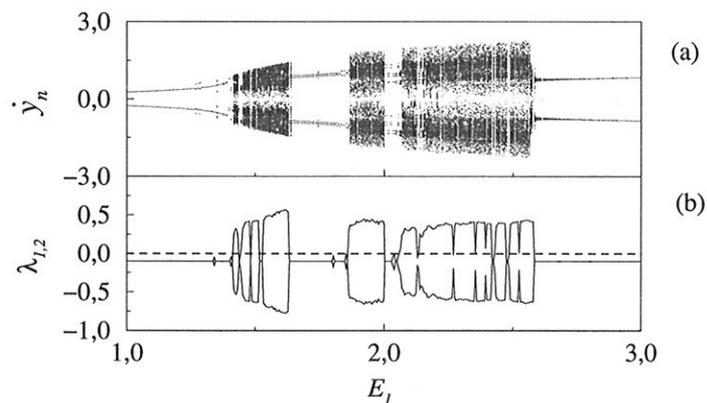


Figura 6.13: Parâmetros de controle $r = 0,9$ e $m/M \ll 1,0$. (a) Diagrama de bifurcação da velocidade da massa m (par de impactos) imediatamente antes dos impactos, \dot{y}_n , em função do parâmetro de controle do motor E_1 . (b) Expoentes de Lyapunov, $\lambda_{1,2}$, em função de E_1 .

o par de impactos, um comportamento periódico a partir de uma solução caótica. Em outras palavras, podemos obter a supressão de caos para este sistema, quando variamos o parâmetro m/M . Na figura 6.14, mostramos, a partir de um diagrama de bifurcação em função de m/M , que o comportamento caótico, ilustrado na figura 6.12a, torna-se periódico para certos valores de m/M . Por exemplo, para $m/M = 0,3$, há um comportamento periódico, cuja evolução temporal é mostrada na figura 6.15. Para esse comportamento, mostramos nas figuras 6.16a e 6.16b as evoluções temporais das velocidades do sistema de par de impactos, \dot{y} , e do sistema não-ideal, \dot{z} , respectivamente. Nessas figuras, notamos as descontinuidades (linha tracejada) das velocidades, o que implica em mudanças nas trajetórias desses sistemas, como podemos ver nas figuras 6.17a e 6.17b.

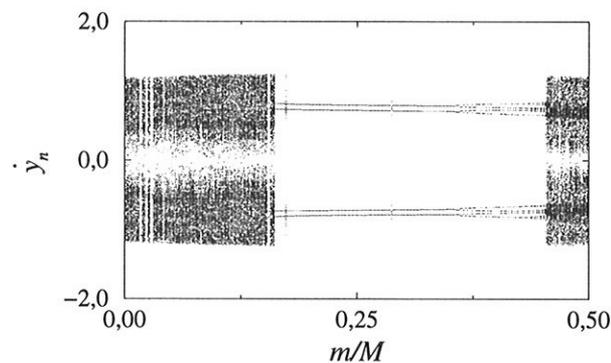


Figura 6.14: Diagrama de bifurcação da velocidade da massa m (par de impactos) imediatamente antes dos impactos, \dot{y}_n , em função de m/M , para os parâmetros de controle $E_1 = 1,5$ e $r = 0,9$.

A partir do diagrama de bifurcação da figura 6.14, além dos comportamentos periódicos, detectamos soluções caóticas. Por exemplo, para $m/M = 0,5$, temos um comportamento caótico, cuja evolução temporal é mostrada na figura 6.18. Nas figuras 6.19a e 6.19b, graficamos as velocidades. E, novamente, podemos notar as descontinuidades, tanto para o sistema de par de impactos quanto para o sistema não-ideal. Nas figuras 6.20a e 6.20b, graficamos os planos de fase desses sistemas. Neste caso, a razão entre as massas, m/M , introduz uma perturbação (por ocasião dos impactos) no sistema não-ideal levando-o a oscilar de forma caótica (fig. 6.20b). Cabe lembrar que para $m/M \ll 1$ o sistema não-ideal possui apenas soluções periódicas.

Nessa seção, apresentamos a descrição matemática do sistema com impactos,

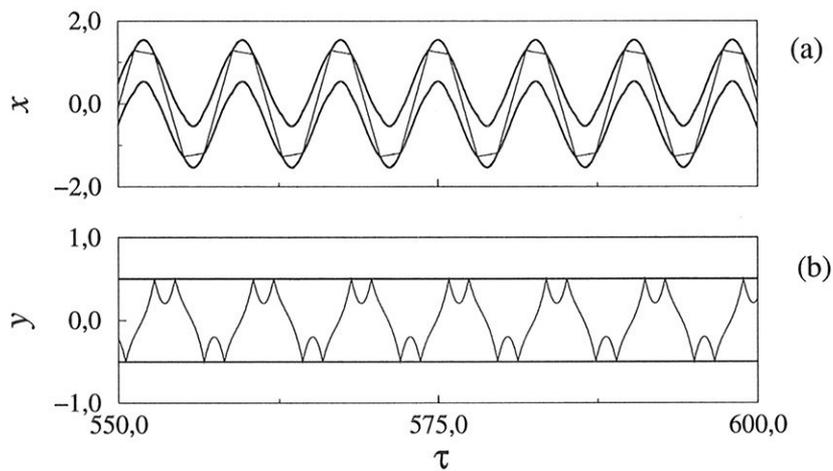


Figura 6.15: Solução periódica para os parâmetros de controle $E_1 = 1,5$, $r = 0,9$ e $m/M = 0,3$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto x . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo y .

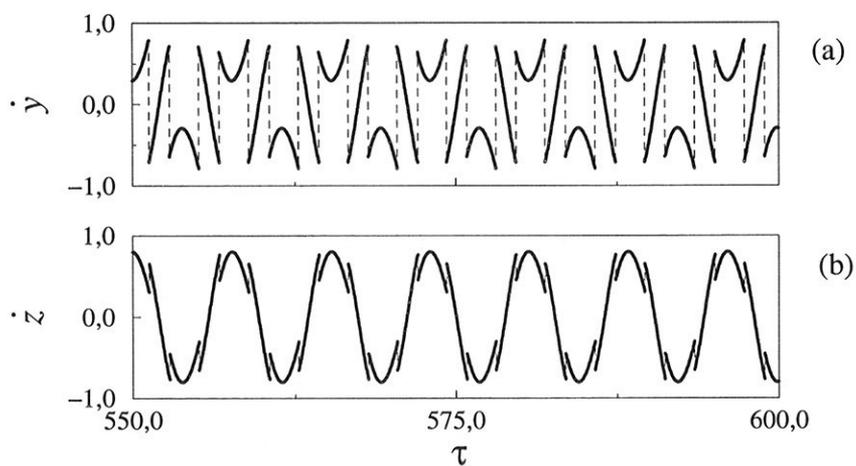


Figura 6.16: Mesma solução indicada na figura 6.15. (a) Evolução temporal da velocidade, \dot{y} , do sistema de par de impactos. (b) Evolução temporal da velocidade, \dot{z} , do sistema não-ideal.

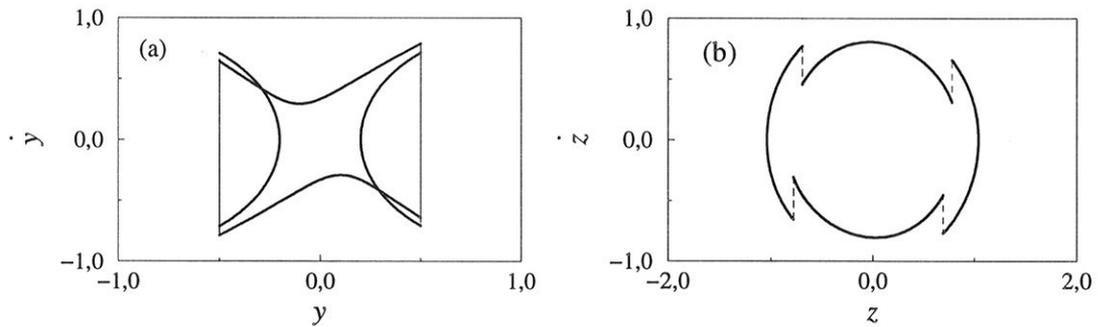


Figura 6.17: Mesma solução indicada na figura 6.15. (a) Plano de fase do sistema de par de impactos. (b) Plano de fase do sistema não-ideal.

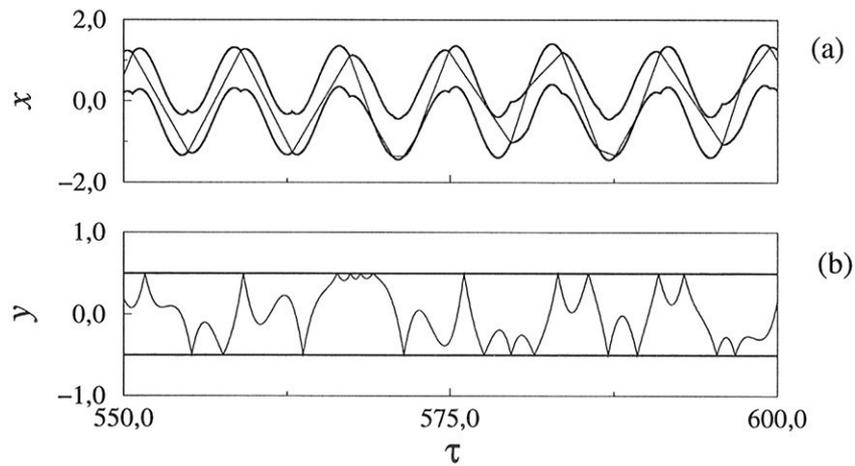


Figura 6.18: Solução caótica para os parâmetros de controle $E_1 = 1,5$, $r = 0,9$ e $m/M = 0,5$. (a) Evolução temporal do deslocamento absoluto x . (b) Evolução temporal do deslocamento relativo y .

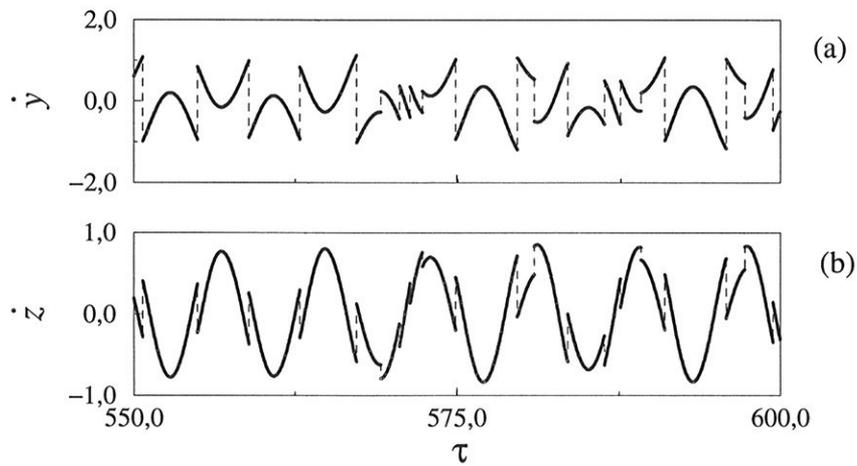


Figura 6.19: Mesma solução indicada na figura 6.18. (a) Evolução temporal da velocidade, \dot{y} , do sistema de par de impactos. (b) Evolução temporal da velocidade, \dot{z} , do sistema não-ideal.

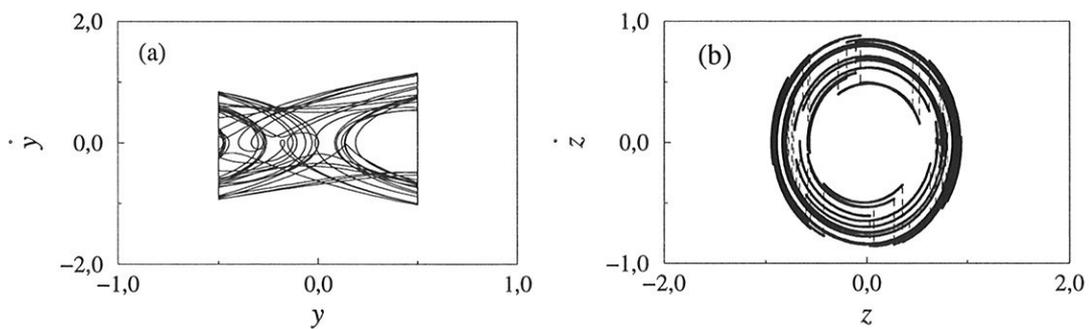


Figura 6.20: Mesma solução indicada na figura 6.18. (a) Plano de fase do sistema de par de impactos. (b) Plano de fase do sistema não-ideal.

que é composto pelos sistemas de par de impactos e não-ideal. Entre os impactos, as evoluções dinâmicas desses dois sistemas são independentes. Por ocasião dos impactos, há o acoplamento dos sistemas. No entanto, para $m/M \ll 1$, o sistema não-ideal continua oscilando de forma independente e possui apenas soluções periódicas. Neste caso, o sistema de par de impactos possui tanto soluções periódicas quanto caóticas, o que já era esperado, uma vez que observamos tais comportamentos (capítulos 2 e 3), quando a excitação era dada por uma função seno. Quando variamos m/M , a dinâmica do sistema não-ideal é alterada. Com isso, tal sistema apresenta comportamentos caóticos e periódicos. Neste caso, o sistema de par de impactos possui soluções correspondentes aos comportamentos do sistema não-ideal. Isso porque, os dois sistemas têm suas trajetórias alteradas no mesmo momento (instante dos impactos), o que implica em um vínculo no tipo de comportamento. Ou seja, quando as mudanças nas trajetórias ocorrem em uma seqüência periódica as soluções dos sistemas são periódicas e quando a seqüência é caótica as soluções são caóticas. Ademais, nessa seção, variando o parâmetro de controle do motor, E_1 , verificamos as mudanças do comportamento do sistema não-ideal com impactos.

6.4 Fenômenos não-lineares

Nesta seção, apresentamos alguns resultados das simulações numéricas do sistema não-ideal com impactos. A partir dessas simulações, detectamos os fenômenos tipicamente não-lineares como crise interior, intermitência e coexistência de atratores.

6.4.1 Crises e intermitências

Na figura 6.21, variando o parâmetro de controle r (coeficiente de restituição) para $m/M \ll 1$, graficamos um diagrama de bifurcação. Nesse diagrama, identificamos, para $r = r_1$, uma crise interior. Esse tipo de crise implica em uma expansão súbita do atrator caótico e é devido a colisão de uma órbita periódica instável com uma banda caótica [78].

Associado a uma crise interior há uma intermitência caos-caos. Assim, uma ór-

bita, para um valor de parâmetro de controle logo após a crise ($r \gtrsim r_1$), apresenta um comportamento intermitente. Na figura 6.22, mostramos tal comportamento. No entanto, neste caso, podemos notar que a órbita oscila entre quatro atratores caóticos. Esses quatro atratores correspondem as bandas caóticas antes da crise e aos atratores expandidos devido as crises.

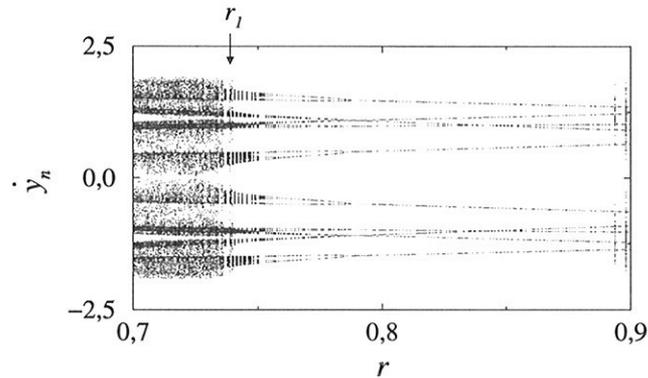


Figura 6.21: Diagrama de bifurcação da velocidade da massa m (sistema de par de impactos) imediatamente antes dos impactos, \dot{y}_n , em função do parâmetro de controle r (coeficiente de restituição), para os parâmetros de controle $E_1 = 2,0$ e $m/M \ll 1,0$.

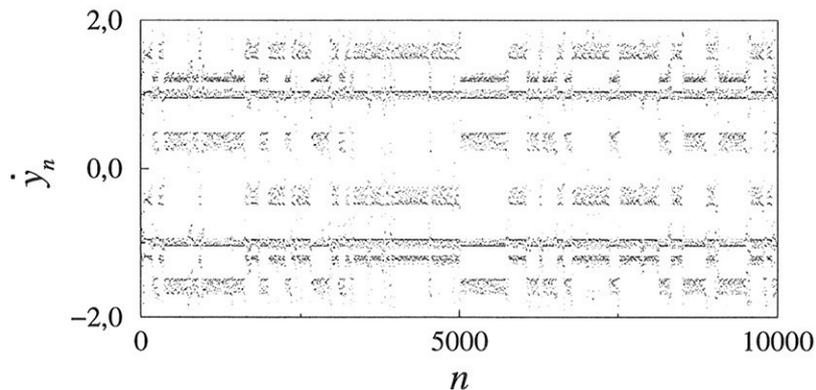


Figura 6.22: Comportamento intermitente para os parâmetros de controle da figura 6.21 com $r = 0,737211 \lesssim r_1$.

Na figura 6.23, variando, novamente, o parâmetro de controle r para $m/M = 0,1$, graficamos um diagrama de bifurcação. Nesse diagrama, identificamos, para $r = r_3$, uma crise interior. E, novamente, associado a essa crise (para $r \gtrsim r_3$) podemos

observar, na figura 6.24, um comportamento intermitente envolvendo três atratores caóticos.

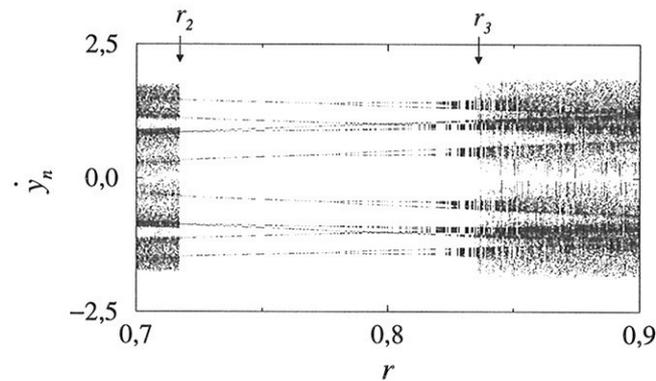


Figura 6.23: Diagrama de bifurcação da velocidade da massa m (sistema de par de impactos) imediatamente antes dos impactos, \dot{y}_n , em função do parâmetro de controle r (coeficiente de restituição), para os parâmetros de controle $E_1 = 2,0$ e $m/M = 0,1$.

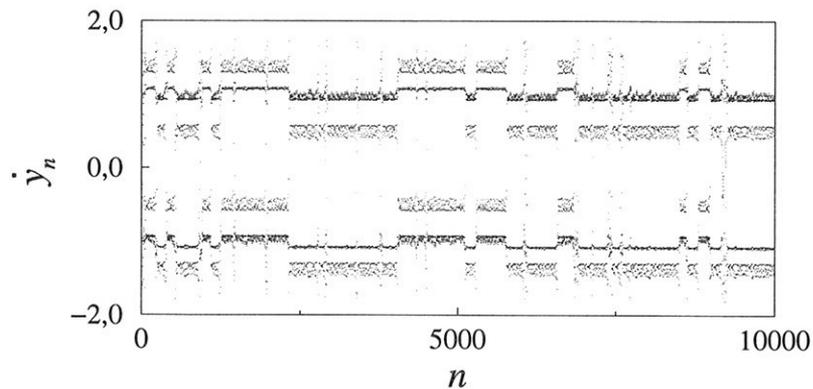


Figura 6.24: Comportamento intermitente para os parâmetros de controle da figura 6.23 com $r = 0,837024 \gtrsim r_3$.

Na figura 6.25, para $r \lesssim r_2$, identificamos um outro comportamento intermitente. Neste caso, a órbita oscila entre dois atratores periódicos e um caótico.

Nessa seção, identificamos crises e intermitências. As intermitências envolvem mais de dois atratores. Isto acontece devido as coexistências de atratores.

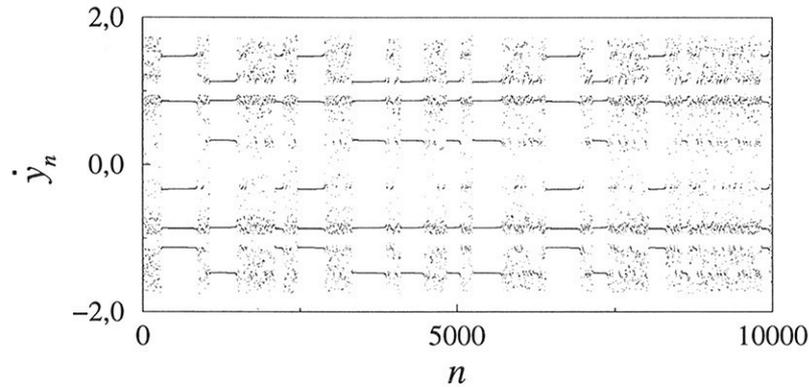


Figura 6.25: Comportamento intermitente para os parâmetros de controle da figura 6.23 com $r = 0,717249 \lesssim r_2$.

6.4.2 Coexistências de atratores e bacias de atração

Um sistema não-linear, para um mesmo conjunto de parâmetros de controle e condições iniciais distintas, pode apresentar mais de uma solução. Isto é denominado coexistência de atratores. O conjunto de condições iniciais no espaço de fase cujas trajetórias convergem, após um regime transitório, para um dado atrator é denominado bacia de atração deste atrator.

No diagrama de bifurcação da figura 6.21, podemos notar a coexistência de atratores. Por exemplo, para $r = 0,82$ há dois atratores periódicos. Nas figuras 6.26a e 6.26b, mostramos a evolução temporal desses atratores. E nas figuras 6.27a e 6.27b, graficamos os planos de fase. Com isso, podemos notar que esses atratores são simétricos.

Na figura 6.28, variando y_0 e \dot{y}_0 em uma grade de 400×400 pontos, graficamos as bacias de atração dos dois atratores periódicos. Em preto são graficadas as condições iniciais que levam ao atrator da figura 6.27a e em branco o atrator da figura 6.27b. Esta figura tem características de uma bacia crivada. Os sistemas com bacias crivadas possuem uma grande sensibilidade às condições iniciais, o que implicam em uma indeterminação do estado final do sistema.

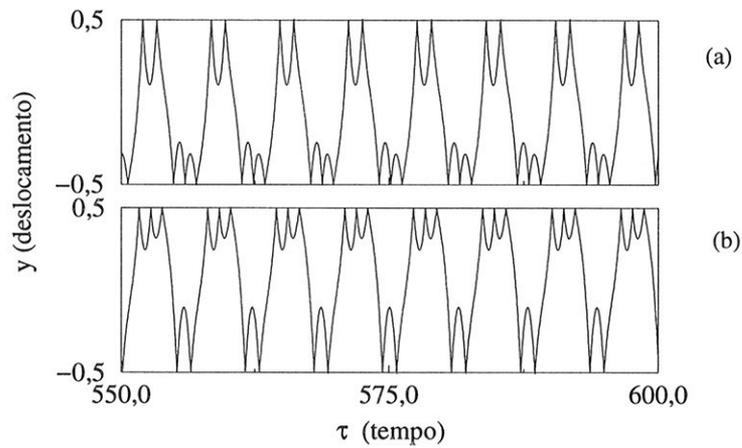


Figura 6.26: Evolução temporal da variável dinâmica y de dois atratores periódicos coexistentes, para os parâmetros de controle $m/M \ll 1$, $r = 0,82$ e $E_1 = 2,00$.

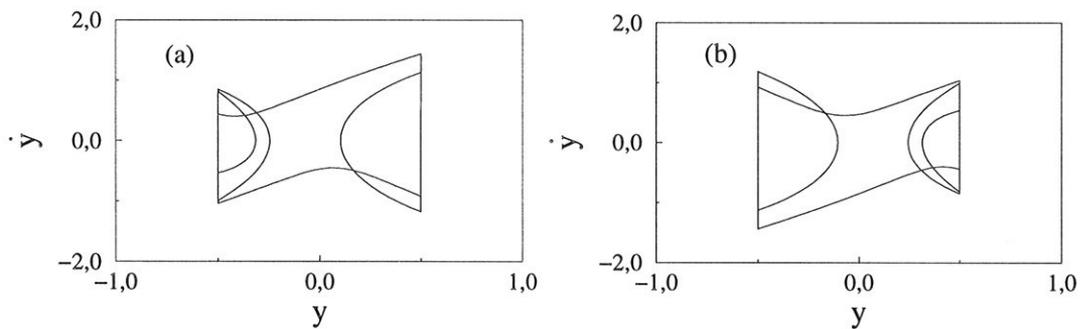


Figura 6.27: Planos de fase dos atratores periódicos indicados na figura 6.26a.(a) e na 6.26b (b).

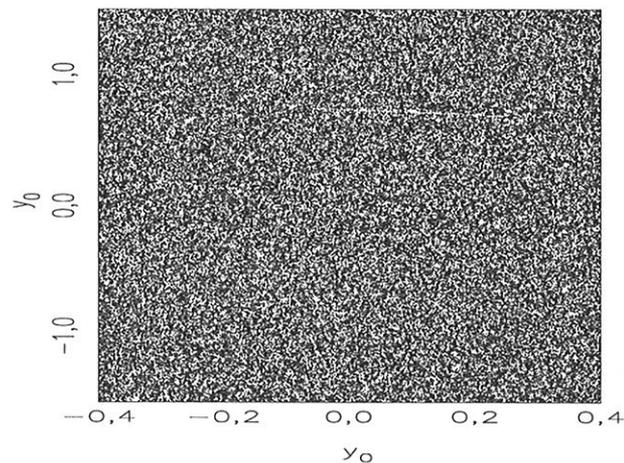


Figura 6.28: Bacias de atração dos dois atratores periódicos indicados na figura 6.26, para $\tau_0 = 0$, $z_0 = 0,3$, $\dot{z}_0 = 1,0$, $\phi = 0$, $\dot{\phi} = 0$.

Capítulo 7

Conclusões

Nessa tese, consideramos, como objeto de estudo, a análise e o controle de casos em sistemas mecânicos com impactos. Para desenvolver nosso estudo, além do sistema não-ideal com impactos (capítulo 6), utilizamos o oscilador com impactos, o sistema de par de impactos e o sistema da caixa de engrenagens (descritos no capítulo 2). A dinâmica de movimento desses sistemas é descrita, entre os impactos, por uma equação diferencial linear, cuja solução analítica é facilmente obtida. Por ocasião dos impactos, essa solução é reinicializada a partir de uma regra de impactos simples (lei de Newton para impactos). Devido os impactos, as trajetórias, desses sistemas, possuem descontinuidades no espaço de fase, o que dificulta a análise da dinâmica. Por exemplo, o cálculo dos expoentes de Lyapunov não é trivial, neste caso. Como sabemos, eles são coeficientes muito importantes na análise de sistemas não-lineares, pois a partir deles caracterizamos a natureza dos atratores obtidos como solução.

Para o cálculo dos expoentes, neste caso, desenvolvemos um procedimento novo [53]. Para isso, usamos um mapa denominado, por nós, de transcendental [52–54]. Ele é obtido a partir das soluções analíticas e a lei de Newton para impactos. A relação entre as variáveis dinâmicas, para dois sucessivos impactos, são dadas por equações transcendentais. Para determinar os expoentes, utilizamos um método, já existente, de cálculo para mapas [55] e o mapa transcendental. Em outras palavras, a partir do mapa transcendental calculamos tais expoentes, de forma similar ao cálculo feito para os mapas bidimensionais, como o mapa de Hénon. No capítulo 3, mostramos a implementação desse método nos sistemas descritos no capítulo 2. Inclusive mostramos o cálculo para o sistema de par de impactos com uma excitação caótica.

Além do cálculo dos expoentes de Lyapunov, no capítulo 3, apresentamos os métodos utilizados na análise do comportamento dinâmico dos sistemas com impactos. Como exemplos, aplicamos esses métodos nos sistemas descritos no capítulo 2 (oscilador com impactos, par de impactos e caixa de engrenagens). Inicialmente, a partir do plano de fase, mostramos que é possível identificar a natureza das soluções, ou seja, se elas são periódicas ou caóticas. No entanto, quando usamos somente o plano de fase, devemos ter um certo cuidado, pois em alguns casos não conseguimos diferenciar uma solução quase-periódica de uma caótica. Neste caso, devemos usar os expoentes de Lyapunov. Além do plano de fase, um método importante e freqüentemente utilizado no estudo de sistemas não-lineares é o mapa de Poincaré. Assim sendo, mostramos como obter esse mapa, de forma adequada, em sistemas com trajetórias descontínuas. Para isso, podemos coletar os valores das variáveis dinâmicas nos instantes dos impactos, ou seja, quando ocorrem as descontinuidades. Mostramos, também, como analisar o comportamento dinâmico de um sistema a partir de um dos parâmetros de controle. Para isso, utilizamos um gráfico denominado de diagrama de bifurcação. A partir desse gráfico, podemos identificar o comportamento dinâmico de um sistema em uma grande variedade de situações. Além disso, podemos identificar ocorrências de crises. Isso é interessante, pois, como sabemos, próximo as crises há fenômenos como transientes caóticos e intermitências. Ademais, mostramos como obter os diagramas isoperiódicos, que são determinados variando dois parâmetros de controle. E a partir do cálculo do maior expoente de Lyapunov e variando, novamente, dois parâmetros, apresentamos os diagramas nos espaços dos parâmetros.

Com esses métodos de análise, no capítulo 4, investigamos a dinâmica do sistema de caixa de engrenagens. Para isso, variamos os parâmetros de controle, a amplitude de excitação, α , e o coeficiente de restituição, r . A partir de um diagrama de bifurcação em função de parâmetro de controle, α , observamos a ocorrência de uma crise de fronteira. Para este tipo de crise, o atrator caótico é destruído quando passa por um valor crítico do parâmetro, α . Próximo a este valor, há um transiente caótico [52]. Assim, uma órbita do atrator periódico após a crise gasta um tempo finito na região que atrator caótico ocupava antes da crise. O tempo de duração do transiente depende das condições iniciais. Para mostrar essa dependência, fixando uma das condições iniciais e variando as outras duas, graficamos o tempo de duração do transiente. Com isso, identificamos uma figura com características de uma

bacia crivada [84]. Assim sendo, para uma pequena variação nas condições iniciais, podemos ter tanto um transiente longo quanto um curto.

Observamos, também, uma crise interior que foi identificada a partir de um diagrama de bifurcação em função do parâmetro de controle, r . Neste caso, o atrator caótico sofre uma mudança súbita em seu tamanho. Associada a esta crise, há um comportamento intermitente. Em outras palavras, uma órbita, obtida logo após a crise, oscila entre dois atratores caóticos. Esses dois atratores correspondem ao atrator que ocupava a banda caótica antes da crise e ao atrator expandido devido a crise. Ademais, identificamos um intermitência laminar-caos. Neste caso, a intermitência descreve um sinal cuja evolução temporal permanece regular por um determinado tempo (fase laminar) e de repente passa a se comportar de forma irregular (fase caótica). Por fim, detectamos coexistências de atratores [52]. Além disso, mostramos as bacias de atração desses atratores, cujas fronteiras possuem estruturas fractais, de acordo com o cálculo dos expoentes de incerteza.

Ademais, vimos como controlar sistemas caóticos com impactos. Inicialmente, vimos a implementação de um método de supressão de caos no sistema de caixa de engrenagens. Para isso, introduzimos, no sistema, um forçamento periódico externo de amplitude pequena (perturbação periódica fraca). Em outras palavras, o método consiste na adição de um perturbação periódica fraca $\alpha_p \text{sen}(\omega_p \tau)$ ao sistema de caixa de engrenagens com comportamento caótico. Os parâmetros dessa perturbação (amplitude α_p e frequência ω_p) são escolhidos de tal forma que o comportamento caótico do sistema é suprimido e surge em seu lugar um comportamento periódico estável. Para aplicar tal método, fazemos uma varredura no parâmetro α_p (amplitude da perturbação), para um frequência de excitação ($\omega_p = 0,5$) comensurável com a frequência unitária da fonte de excitação do sistema. A partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov obtido com mapa transcendental, determinamos uma faixa de valores do parâmetro α_p , que leva o sistema a oscilar de forma periódica.

Vimos, também, como implementar o método OGY (Ott, Grebogi e Yorke) de controle de caos [54]. Tal método consiste em estabilizar uma das infinitas órbitas periódicas instáveis, previamente determinadas, imersas em um atrator caótico. Isso é feito através de pequenas perturbações em um dos parâmetros de controle. Para obter os valores das perturbações, usamos o mapa transcendental. Assim, aplicamos o método OGY no oscilador com impactos, no par de impactos e na caixa de engrenagens. Para isso, usamos o parâmetro de controle α (amplitude de excitação).

No oscilador com impactos, controlamos órbitas de período 1 e 2. No sistema de par de impactos, controlamos um órbita de período 1. Porém, para esse sistema, a periodicidade da órbita e o número de impactos, para uma mesma trajetória, não são iguais. Assim sendo, tratamos, para aplicar o método de controle, tal órbita de período 1 como órbita de período 2. Isso porque, o mapa transcendental usado é obtido no instante do impactos. No entanto, esse procedimento não é único. Por exemplo, como vimos no sistema de caixa de engrenagens, uma órbita de período 1 com dois impactos por ciclo é estabilizada, aplicando, para isso, a perturbação no parâmetro somente quando ocorre um dos dois impactos.

Ademais, investigamos e analisamos a dinâmica de um sistema não-ideal com impactos, que é constituído por um sistema de par de impactos sobreposto a um sistema não-ideal [65]. Assim sendo, o deslocamento do sistema não-ideal corresponde a função de excitação do sistema de par de impactos. Em outras palavras, o sistema, em questão, é composto por uma bola que movimenta-se dentro de uma caixa sobreposta a um sistema não-ideal. Além disso, consideramos, também, que tanto o sistema de par de impactos quanto o sistema não-ideal sofrem, por ocasião dos impactos, mudanças abruptas em suas trajetórias. Essas mudanças ocorrem de acordo com as massas e as velocidades desses sistemas. Com isso, a dinâmica do sistema não-ideal é completamente alterada, o que implica em mudanças na dinâmica do sistema de par de impactos.

Inicialmente, mostramos a descrição do modelo matemático do sistema não-ideal, que é constituído por um oscilador, cujos coeficiente elástico da mola e amortecimento são lineares [67]. O forçamento (fonte de energia) desse sistema é dado por um motor de massa desbalanceada. Mostramos, também, a descrição do sistema não-ideal com impactos. Posteriormente nas simulações numéricas, variando um dos parâmetros de controle relacionado com o motor (fonte de energia do sistema não-ideal), identificamos comportamentos periódicos e caóticos. Além disso, mostramos e analisamos alguns resultados numéricos. Para isso, levamos em consideração que o sistema com impactos, em questão, é composto pelos sistemas de par de impactos (de massa m) e não-ideal (de massa M). E a interação entre esses dois sistemas apenas ocorre por ocasião dos impactos. Em outras palavras, entre os impactos temos dois sistemas independentes, que são acoplados, no instante dos impactos, de acordo com suas massas. Assim sendo, variamos a razão entre as massas (m/M) para estudar o comportamento destes sistemas. Com isso, observamos, para $m/M \ll 1$, apenas soluções periódicas para o sistema não-ideal e periódicas e caóticas para o

sistema de par de impactos. Variando a razão entre as massas, m/M , notamos que é possível obter a supressão de caos do sistema de par de impactos e, além disso, obter soluções caóticas para sistema não-ideal.

A partir de diagramas de bifurcação em função do parâmetro r (coeficiente de restituição), identificamos fenômenos tipicamente não-lineares como crise interior, intermitências e coexistência de atratores. Associado a essa crise interior observamos uma tipo de intermitência que leva o sistema a oscilar entre quadro atratores caóticos. Além dessa intermitência, observamos uma outra, que envolve dois atratores periódicos e um caótico. Mostramos, também, as bacias de atração de dois atratores periódicos coexistentes. Essas bacias possuem uma característica de bacia crivada.

O sistema correspondente ao problema de Fermi, que foi desenvolvido com o objetivo de estudar um possível mecanismo de aceleração de raios cósmicos, é um exemplo de sistemas com sucessivos impactos. Originalmente, ele é composto por uma bola deslocando-se livremente entre duas paredes rígidas, com uma parede fixa e a outra oscilando no tempo. Esse sistema é similar aos sistemas, considerados aqui, par de impactos e caixa de engrenagens. No entanto, sua dinâmica é estudada [35] a partir de um mapa bidimensional. Para obter o mapa é necessário impor certas condições (por exemplo, bola com uma velocidade alta); porém, isso limita o estudo da dinâmica do sistema. Assim sendo, poderíamos investigar a dinâmica do problema de Fermi, usando, para isso, soluções analíticas de equações diferenciais e regras de impactos. Poderíamos considerar duas possíveis situações, uma com impactos elásticos e outra com inelástico e utilizar em sua análise os expoentes de Lyapunov obtidos a partir de mapas transcendentais.

O sistema de caixa de engrenagens, considerado nesse trabalho, foi desenvolvido [44, 45] com a finalidade de proporcionar uma forma de estudo da redução de ruídos (barulho) em caixa de câmbio de carros. Neste caso, consideramos apenas duas engrenagens. Entretanto, um sistema com muitas engrenagens acopladas tem sido investigado em engenharia. O estudo desse problema exigiu uma análise estatística das oscilações observadas, devido às dimensões do sistema [26, 102].

Poderíamos, também, estudar a dinâmica do sistema não-ideal com motor de massa desbalanceada (descrito no capítulo 6), que é constituído por um oscilador cujos coeficientes elástico da mola e amortecimento são lineares. Porém, neste caso,

a amplitude de oscilação seria limitada por um parede. Assim sendo, ele seria similar ao oscilador com impactos descrito no capítulo 2. Como podemos deslocar a parede, neste caso, é possível investigar a dinâmica do sistema, para impactos com velocidades baixas (*grazing impacts*).

No capítulo 6, consideramos um sistema composto pelo acoplamento de dois sistemas o par de impactos e o não-ideal. Neste caso, observamos que pode ocorrer uma sincronização de impactos, o que leva o sistema a oscilar de forma periódica. Cabe lembrar que podemos substituir o sistema não-ideal por um outro [103–105], como o oscilador descrito pela equação Duffing com solução caótica. Assim sendo, podemos utilizar esse acoplamento como um método de supressão de caos.

Bibliografia

- [1] F. Diacu e P. Holmes. *Celestial Encounters - The Origins of Chaos and Stability*. Princeton Science Library, 1996.
- [2] V. I. Arnold. *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*. Editora Mir Moscovo, 1987.
- [3] T.-Y. Li e J. A. Yorke. *Period three implies chaos*. American Mathematical Monthly, 82(10):985–992, 1975.
- [4] E. N. Lorenz. *Deterministic nonperiodic flow*. Journal of the Atmospheric Sciences, 20(2):130–141, 1963.
- [5] T. Braun, J. A. Lisbôa, R. E. Francke e J. A. C. Gallas. *Observation of deterministic chaos in electrical discharges in gases*. Physical Review Letters, 59:613–616, 1987.
- [6] T. Braun, J. A. Lisbôa e J. A. C. Gallas. *Evidence of homoclinic chaos in the plasma of a glow discharge*. Physical Review Letters, 68:2770–2773, 1992.
- [7] A. L. Lichtenberg e M. A. Lieberman. *Regular and Chaotic Dynamics*. Springer Verlag, 1992.
- [8] I. L. Caldas, J. M. Pereira, K. Ullmann e R. L. Viana. *Magnetic field line mappings for a tokamak with ergodic limiters*. Chaos, Solitons & Fractals, 7:991–1010, 1996.
- [9] K. Ullmann e I. L. Caldas. *A symplectic mapping for the ergodic magnetic limiter and its dynamical analyses*. Chaos, Solitons & Fractals, 11:2129–2140, 2000.
- [10] R. M. May. *Simple mathematical models with very complicated dynamics*. Nature, 261:459–467, 1976.

- [11] M. J. Feigenbaum. *Quantitative universality for a class of nonlinear transformations*. Journal of Statistical Physics, 19(1):25–52, 1978.
- [12] T. Matsumoto e L. O. Chua. *The double scroll*. IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-32:797–818, 1985.
- [13] J. C. Roux, R. H. Simoyi e H. L. Swinney. *Observation of a strange attractor*. Physica D, 8:256–266, 1983.
- [14] P. Martien, S. C. Pope, P. L. Scott e R. S. Shaw. *The chaotic behavior of the leaky faucet*. Physics Letters A, 110:399–404, 1985.
- [15] J. C. Sartorelli, W. M. Gonçalves e R. D. Pinto. *Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment*. Physical Review E, 49(5):3963–3975, 1994.
- [16] R. D. Pinto, W. M. Gonçalves, J. C. Sartorelli e M. J. de Oliveira. *Hopf bifurcation in a leaky-faucet experiment*. Physical Review E, 52(6):6896–6899, 1995.
- [17] G. W. Luo e J. H. Xie. *Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system*. Journal of Sound and Vibration, 213(3):391–408, 1998.
- [18] G. W. Luo, J. H. Xie e S. H. L. Guo. *Periodic motions and global bifurcations of a two-degree-of-freedom system with plastic vibro-impact*. Journal of Sound and Vibration, 240(5):837–858, 2001.
- [19] B. Blazejczyk-Okolewska e T. Kapitaniak. *Dynamics of impact oscillator with dry friction*. Chaos, Solitons & Fractals, 7(9):1455–1459, 1996.
- [20] B. Blazejczyk-Okolewska e F. Peterka. *Investigation of the dynamic system with impacts*. Chaos, Solitons & Fractals, 9(8):1321–1338, 1998.
- [21] B. Blazejczyk-Okolewska e K. Czolczynski. *Some aspects of the dynamical behaviour of the impact force generator*. Chaos, Solitons & Fractals, 9(8):1307–1320, 1998.
- [22] B. Blazejczyk-Okolewska. *Study of the impact oscillator with elastic coupling of masses*. Chaos, Solitons & Fractals, 11:2487–2492, 2000.
- [23] B. Blazejczyk-Okolewska. *Analysis of an impact damper of vibrations*. Chaos, Solitons & Fractals, 12:1983–1988, 2001.

- [24] B. Blazejczyk-Okolewska, J. Brindley, K. Czolczynski e T. Kapitaniak. *Antiphase synchronization of chaos by noncontinuous coupling: two impacting oscillators*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 12:1823–1826, 2001.
- [25] K. Czolczynski, B. Blazejczyk-Okolewska e T. Kapitaniak. *Impact force generator: self-synchronization and regularity of motion*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11:2505–2510, 2000.
- [26] F. Pfeiffer e C. Glocker. *Multibody Dynamics with Unilateral Contacts*. John Wiley & Sons, 1996.
- [27] T. Kapitaniak e M. Wiercigroch. *Dynamics of impact systems*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11:2411–2412, 2000.
- [28] M. Wiercigroch, R. D. Neilson e M. A. Player. *Material removal rate prediction for ultrasonic drilling of hard materials using an impact oscillator approach*. *Physics Letters A*, 259:91–96, 1999.
- [29] A. B. Nordmark. *Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator*. *Journal of Sound and Vibration*, 145(2):279–297, 1991.
- [30] A. B. Nordmark. *Effects due to low velocity impact in mechanical oscillators*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2(3):597–605, 1992.
- [31] C. Budd e F. Dux. *Intermittency in impact oscillators close to resonance*. *Nonlinearity*, 7:1191–1224, 1994.
- [32] N. Hinrichs, M. Oestreich e K. Popp. *Dynamics of oscillators with impact and friction*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 8(4):535–558, 1997.
- [33] F. Casas, W. Chin, C. Grebogi e E. Ott. *Universal grazing bifurcations in impact oscillators*. *Physical Review E*, 53(1):134–139, 1996.
- [34] F. C. Moon. *Applied Dynamics with Applications to Multibody and Mechatronic Systems*. John Wiley & Sons, 1998.
- [35] M. A. Lieberman e A. J. Lichtenberg. *Stochastic and adiabatic behavior of particles accelerated by periodic forces*. *Physical Review A*, 5(4):1852–1866, 1972.
- [36] G. A. Worrell, A. Matulich e B. N. Miller. *Dynamics in a discontinuous field: The smooth Fermi piston*. *Chaos*, 3(3):397–404, 1993.

- [37] V. Zharnitsky. *Instability in Fermi-Ulam 'ping-pong' problem*. Nonlinearity, 11:1481–1487, 1998.
- [38] R. D. Friend e V. K. Kinra. *Particle impact damping*. Journal of Sound and Vibration, 233(1):93–118, 2000.
- [39] C. N. Bapat, N. Popplewell e K. McLachlan. *Stable periodic motions of an impact-pair*. Journal of Sound and Vibration, 87(1):19–40, 1983.
- [40] C. N. Bapat e C. Bapat. *Impact-pair under periodic excitation*. Journal of Sound and Vibration, 120(1):53–61, 1988.
- [41] M. S. Heiman, P. J. Sherman e A. K. Bajaj. *On the dynamics and stability of an inclined impact pair*. Journal of Sound and Vibration, 114(3):535–547, 1987.
- [42] M. S. Heiman, A. K. Bajaj e P. J. Sherman. *Periodic motions and bifurcations in dynamics of an inclined impact pair*. Journal of Sound and Vibration, 124(1):55–78, 1988.
- [43] R. P. S Han, A. C. J. Luo e W. Deng. *Chaotic motion of a horizontal impact pair*. Journal of Sound and Vibration, 181(2):231–250, 1995.
- [44] F. Pfeiffer e A. Kunert. *Rattling models from deterministic to stochastic processes*. Nonlinear Dynamics, 1:63–74, 1990.
- [45] K. Karagiannis e F. Pfeiffer. *Theoretical and experimental investigations of gear-rattling*. Nonlinear Dynamics, 2:367–387, 1991.
- [46] F. C. Moon. *Chaotic and Fractal Dynamics-An Introduction for Applied Scientists and Engineers*. John Wiley & Sons, 1992.
- [47] R. Singh, H. Xie e R. J. Comparin. *Analysis of automotive neutral gear rattle*. Journal of Sound and Vibration, 131(2):177–196, 1989.
- [48] A. Cahraman e R. Singh. *Non-linear dynamics of a spur gear pair*. Journal of Sound and Vibration, 142(1):49–75, 1990.
- [49] M. Hénon. *A two-dimensional mapping with a strange attractor*. Communications in Mathematical Physics, 50:69–77, 1976.

- [50] A. C. J. Luo e R. P. S. Han. *The dynamics of a bouncing ball with a sinusoidally vibrating table revisited*. *Nonlinear Dynamics*, 10:1–18, 1996.
- [51] J. P. Eckmann e D. Ruelle. *Ergodic theory of chaos*. *Reviews of Modern Physics*, 57:617–656, 1985.
- [52] S. L. T. de Souza e I. L. Caldas. *Basins of attraction and transient chaos in a gear-rattling model*. *Journal of Vibration and Control*, 7(6):849–862, 2001.
- [53] S. L. T. de Souza e I. L. Caldas. *Calculation of Lyapunov exponents in systems with impacts*. A ser apresentado na *Ninth Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and dynamics of Structures (2002)*. A ser submetido no *Journal of Vibration and Control*.
- [54] S. L. T. de Souza e I. L. Caldas. *Controlling chaotic behavior in mechanical system with impacts*. A ser apresentado na *Ninth Conference on Nonlinear Vibrations, Stability, and dynamics of Structures (2002)*. A ser submetido no *Journal of Vibration and Control*.
- [55] K. Ullmann. *Métodos de Análise de Mapeamentos Não-Lineares com Aplicações à Física de Plasmas*. Tese de doutorado, 1997, Instituto de Física - USP.
- [56] P. Müller. *Calculation of Lyapunov exponents for dynamics systems with discontinuities*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(9):1671–1681, 1995.
- [57] A. Stefanski. *Estimation of the largest Lyapunov exponent in systems with impacts*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 11:2443–2451, 2000.
- [58] E. Ott, C. Grebogi e J. A. Yorke. *Controlling chaos*. *Physical Review Letters*, 64(11):1196–1199, 1990.
- [59] F. Casas e C. Grebogi. *Control of chaotic impacts*. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 7(4):951–955, 1997.
- [60] M. Paskota. *On modelling and the control of vibroformers in aluminium production*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9:323–335, 1998.
- [61] S. R. Bishop, D. J. Wagg e D. Xu. *Use of control to maintain period-1 motions during wind-up and wind-down operations of an impacting driven beam*. *Chaos, Solitons & Fractals*, 9:261–269, 1998.

- [62] S. Lenci e G. Rega. *Controlling nonlinear dynamics in a two-well impact system. I. attractors and bifurcation scenario under symmetric excitations*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 8(12):2387–2407, 1998.
- [63] J. Awrejcewicz, K. Tomczak e C.-H. Lamarque. *Controlling systems with impacts*. International Journal of Bifurcation and Chaos, 9(3):547–553, 1999.
- [64] C. J. Begley e L. N. Virgin. *On the OGY controle of an impact-friction oscillator*. Journal of Vibration and Control, 7(6):923–931, 2001.
- [65] S. L. T. de Souza, I. L. Caldas, J. M. Balthazar e R. M. L. R. F. Brasil. *Analysis of regular and irregular dynamics of a non ideal gear rattling problem*. Aceito para publicação em J. of the Braz. Mechanical Sciences.
- [66] V. O. Kononenko. *Vibrating Systems with a Limited Power Supply*. Iliffe Books, London, 1969.
- [67] M. F. Dimentberg, L. McGovern, R. L. Norton, J. Chapdelaine e R. Harrison. *Dynamics of an unbalanced shaft interating with a limited power supply*. Nonlinear Dynamics, 13:171–187, 1997.
- [68] J. M. Balthazar. *Modelos Dinâmicos Não-Ideais*. Tese de livre docência, Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP, 1997.
- [69] D. Belato. *Não Linearidade do Eletro-Pêndulo*. Dissertação de mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, 1998.
- [70] T. S. Krasnopolskaya e A. Y. Shvets. *Chaos in vibrating systems with a limited power-supply*. Chaos, 3(3):387–395, 1993.
- [71] B. R. Pontes, V. Oliveira e J. M. Balthazar. *On friction driven vibrations in a mass block-belt-motor system with a limited power supply*. Journal of Sound and Vibration, 234(4):713–723, 2000.
- [72] J. M. Balthazar, B. I. Cheshankov, D. T. Rushev, L. Barbanti e H. I. Weber. *Remarks on the passage through resonance of a vibrating system with two degree of freedom, excited by a non-ideal source*. Journal of Sound and Vibration, 239(5):1075–1085, 2001.
- [73] J. Warminsky, J. M. Balthazar e R. M. L. R. F. Brasil. *Vibration of a non-ideal parametrically and self-excited model*. Journal of Sound and Vibration, 234(4):713–723, 2001.

- [74] D. Belato, H. I. Weber, J. M. Balthazar e D. T. Mook. *Chaotic vibrations of a non-ideal electro-mechanical system*. International Journal of Solids and Structures, 38:1699–1706, 2001.
- [75] J. Argyris, G. Faust e M. Haase. *An Exploration of Chaos*. Elsevier Science B. V, North-Holland, 1994.
- [76] M. S. Baptista e I. L. Caldas. *Phase-locking and bifurcation of the sinusoidal-driven double scroll circuit*. Nonlinear Dynamics, 17:119–139, 1998.
- [77] K. Ullmann e I. L. Caldas. *Transitions in the parameter space of a periodically forced dissipative system*. Chaos, Solitons & Fractals, 7:1913–1921, 1996.
- [78] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke. *Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos*. Physica D, 7:181–200, 1983.
- [79] P. Pomeau e P. Manneville. *Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems*. Communications in Mathematical Physics, 74:189–197, 1980.
- [80] B. Blazejczyk-Okolewska e T. Kapitaniak. *Co-existing attractors of impact oscillator*. Chaos, Solitons & Fractals, 9(8):1439–1443, 1998.
- [81] B. Blazejczyk-Okolewska, J. Brindley e T. Kapitaniak. *Practical riddling in mechanical systems*. Chaos, Solitons & Fractals, 11:2511–2514, 2000.
- [82] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras e J. A. Yorke. *Critical exponent for crisis-induced intermittency*. Physical Review A, 36(11):5365–5380, 1987.
- [83] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke. *Critical exponent of chaotic transients in nonlinear dynamics systems*. Physical Review Letters, 57(11):1284–1287, 1986.
- [84] M. Woltering e M. Markus. *Riddled-like basins of transient chaos*. Physical Review Letters, 84(4):630–633, 2000.
- [85] Y.-C. Lai, C. Grebogi, J. Yorke e S. C. Venkataramani. *Riddling bifurcation in chaotic dynamical systems*. Physical Review Letters, 77(1):55–58, 1996.
- [86] Y.-C. Lai e C. Grebogi. *Characterizing riddled-fractal sets*. Physical Review E, 53(2):1371–1374, 1996.

- [87] Y.-C. Lai e C. Grebogi. *Intermingled basins and two-state on-off intermittency*. Physical Review E, 52(4):R3313–R3316, 1995.
- [88] S. W. McDonald, C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke. *Fractal basin boundaries*. Physica D, 17:125–153, 1985.
- [89] B.-S. Park, C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke. *Scaling of fractal basin boundaries near intermittency transitions to chaos*. Physical Review A, 40(3):1576–1581, 1989.
- [90] Y. Braiman e I. Goldhirsh. *Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations*. Physical Review Letters, 66(20):2545–2548, 1991.
- [91] M. C. de Mattos. *Alterações na Dinâmica de Sistemas com Vibroimpacto Devidas a Variações da Folga*. Tese de doutorado, Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, 1998.
- [92] J. Guckenheimer e P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer Verlag, 1986.
- [93] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke. *Chaos an Introduction to Dynamical Systems*. Springer Verlag, New York, 1997.
- [94] D. Gulick. *Encounter with Chaos*. McGraw-Hill Higher Education, 1992.
- [95] M. S. Baptista. *Perturbando Sistemas Não-Lineares uma Abordagem ao Controle de Caos*. Tese de doutorado, 1996, Instituto de Física- USP.
- [96] E. P. dos Santos. *Bifurcações, Controle e Sincronização do Caos nos Circuitos de Matsumoto-Chua*. Tese de doutorado, 2001, Instituto de Física- USP.
- [97] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke. *Chaos, strange attractors, a fractal basin boundaries in nonlinear dynamics*. Science, 238:623–638, 1987.
- [98] H. E. Nusse e J. A. Yorke. *Fractal basin boundaries generated by basin cells and the geometry of mixing chaotic flows*. Physical Review Letters, 84(4):626–629, 2000.
- [99] Y.-C. Lai e C. Grebogi. *Converting transient chaos into sustained chaos by feedback control*. Physical Review E, 49(2):1094–1098, 1994.

- [100] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott e W. P. Dayawansa. *Controlling chaotic dynamical systems*. Physica D, 58:165, 1992.
- [101] C. Grebogi e Y.-C. Lai. *Controlling chaotic dynamical systems*. Systems & Control Letters, 31:307–312, 1997.
- [102] A. Kunert. *Dynamik Spielbehafteter Maschinenteile*. Doktor-Ingenieurs dissertation, Technischen Universität München (1992). VDI Verlag, Reiche 11 Nr. 175 (1992).
- [103] S. Ma e S. E. Semercigil. *A modified passive tuned absorber for secondary systems under random excitation*. Journal of Sound and Vibration, 208(3):349–366, 1997.
- [104] F. S. Collette. *A combined tuned absorber and pendulum impact damper under random excitation*. Journal of Sound and Vibration, 216(2):199–213, 1998.
- [105] S. Chatterjee e A. K. Mallik. *Bifurcations and chaos in autonomous self-excited oscillators with impact damping*. Journal of Sound and Vibration, 191(4):539–562, 1996.

