

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

Instituto de Física

# A Classificação dos Sistemas Elementares Relativísticos em 1 + 1 Dimensões

Ricardo Oliveira de Mello

Tese submetida ao Instituto de Física  
da Universidade de São Paulo para ob-  
tenção do título de Doutor em Ciências.

**Orientador:** Prof.Dr.Victor de Oliveira Rivelles

**Comissão Examinadora:**

Prof.Dr.Victor de Oliveira Rivelles (orientador)

Prof.Dr.J.C.A.Barata (IFUSP)

Prof.Dr.J.Frenkel (IFUSP)

Prof.Dr.R.Aldrovandi (IFT/UNESP)

Prof.Dr.L.A.Ferreira (IFT/UNESP)

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tabela:

*DR*  
3640  
ex. 1

São Paulo

2001

*Armando Corbani Ferraz*  
Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP



305M810T3640

rec. 15/03/02

530.122  
M527c  
D  
ex.1

## FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Mello, Ricardo Oliveira de

A Classificação dos Sistemas Elementares  
Relativísticos em 1 + 1 Dimensões. São Paulo 2001.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo  
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles  
Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e  
Campos

Unitermos: 1. Partícula Relativística em duas  
Dimensões;  
2. Teoria de Representações;  
3. Anomalias;  
4. Teoria de Cohomologia de Álgebras de Lie

USP/IF/SBI-071/2001

## Resumo

Investigando a estrutura dos sistemas elementares com simetria de Poincaré em  $1 + 1$  dimensões, devemos considerar o problema da eliminação das anomalias clássicas, que têm origem no segundo grupo de cohomologia não-trivial deste grupo dinâmico, gerando um termo de Wess-Zumino na ação da partícula relativista. Efetuamos a classificação geral de todos os sistemas elementares em  $1 + 1$  dimensões, em termos de co-órbitas, mostrando que existe um simplectomorfismo entre o espaço de fase reduzido da partícula e uma determinada co-órbita na álgebra de Lie dual à de Poincaré estendida.



### **Abstract**

While researching the structure of elementary systems with Poincaré symmetry in  $1 + 1$  dimensions, we must be concerned about the problem of elimination of the classical anomalies, which arise from the non-trivial second cohomology group of this dynamical group, generating a Wess-Zumino term in the relativistic particle action. We classify all elementary systems in  $1 + 1$  dimensions in terms of co-orbits, showing that there is a symplectomorphism between the reduced phase space of the particle and a certain co-orbit in the Lie algebra dual to the extended Poincaré one.



*Aos físicos que se dedicaram asceticamente à  
busca do conhecimento puro, apesar da tra-  
gicidade de suas vidas pessoais.*





*“...What immortal hand or eye,  
Dare frame thy fearful symmetry?”*

William Blake, *The Tiger* (1794)



# Conteúdo

<b>Agradecimentos</b>	<b>3</b>
<b>Introdução</b>	<b>5</b>
<b>1 O Grupo de Poincaré Estendido</b>	<b>11</b>
1.1 Representações projetivas e extensões centrais . . . . .	13
1.1.1 A álgebra de Poincaré estendida $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$ . . . . .	18
1.2 Estrutura e propriedades de $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$ . . . . .	25
1.3 O grupo de Poincaré estendido $\bar{\mathcal{P}}$ . . . . .	34
1.3.1 Formas e campos invariantes sobre $\bar{\mathcal{P}}$ . . . . .	41
1.3.2 Operadores de Casimir e métricas invariantes associadas a $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$ . . . . .	45
1.4 Cohomologia de álgebras de Lie . . . . .	47
1.4.1 Definições . . . . .	48
1.4.2 Extensões por uma álgebra abeliana e as interpretações de $H_\rho^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e $H_\rho^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ . . . . .	51
1.4.3 Os cálculos de $H_0^1(\bar{\mathfrak{I}}_2^1, \mathfrak{R})$ e $H_0^2(\bar{\mathfrak{I}}_2^1, \mathfrak{R})$ . . . . .	61
<b>2 A Partícula Relativista em 1 + 1 Dimensões</b>	<b>65</b>
2.1 Termo de Wess-Zumino e as anomalias clássicas . . . . .	67
2.1.1 O espaço-tempo estendido $\bar{M}$ . . . . .	80
2.2 Análise hamiltoniana . . . . .	81

2.3	A versão anômala do modelo . . . . .	85
2.4	A equação de Hamilton-Jacobi relativista . . . . .	90
2.5	Fixação de gauge . . . . .	93
<b>3</b>	<b>A Construção de KSK</b>	<b>97</b>
3.1	Geometria Simplética . . . . .	98
3.2	Os sistemas elementares . . . . .	105
3.2.1	As co-órbitas como sistemas elementares . . . . .	105
3.2.2	A classificação dos “sistemas elementares clássicos” . .	110
3.3	A classificação da partícula relativista em 1 + 1 dimensões . .	115
3.3.1	As co-órbitas de $\bar{\mathcal{P}}$ . . . . .	122
3.3.2	O “mapeamento de momentum” aplicado à superfície de vínculos . . . . .	127
3.3.3	O espaço de fase reduzido . . . . .	131
	<b>Conclusão</b>	<b>139</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>140</b>

### **Agradecimentos**

Gostaria de agradecer ao Prof.Dr.Ruben Aldrovandi (IFT/UNESP), pelas discussões produtivas acerca da construção de KSK, e ao Prof.Dr.Alexander Nikolaevich Grishkov (IME-USP), pelo auxílio prestado nos cálculos do segundo grupo de cohomologia da álgebra de Poincaré estendida. Sou especialmente grato ao Prof.Dr.Victor de Oliveira Rivelles (DFMA-IFUSP), meu orientador, pela motivação desta obra e pela ênfase da abordagem hamiltoniana dos sistemas dinâmicos vinculados que auxiliou na interpretação física do modelo.

Agradeço ao CNPq pelos anos de pesquisa financiados, assim como ao COSEAS e aos estudantes residentes no Conjunto Residencial da USP pelos anos que me proporcionaram como hóspede e pela convivência agradável. Desejo também expressar minha sincera gratidão a todos os meus familiares e amigos, cujo apoio emocional e muitas vezes financeiro tem sido sine qua non para a realização do meu trabalho.



# Introdução

Em 1+1 dimensões o tensor de Einstein é identicamente nulo tal que a ação de Einstein-Hilbert é uma derivada total, de modo que o setor gravitacional é melhor descrito pelo modelo de gravidade dilatônica de Callan-Giddings-Harvey-Strominger (CGHS) [8], proveniente da redução dimensional de uma solução clássica de buraco negro com carga magnética de uma teoria efetiva de super-cordas a baixas energias e adequadamente compactificada em 3 + 1 dimensões [20]:

$$\bar{I}_{dilat\acute{o}n} = \frac{1}{G} \int d^2x \sqrt{-\bar{g}} e^{-2\phi} (\bar{R} + 4\bar{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \lambda_0), \quad (1)$$

em termos da “métrica física”  $\bar{g}_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}/\eta$ , onde  $G$  é a constante de acoplamento gravitacional e  $\lambda_0$  é a constante cosmológica. Pode-se mostrar que próximo do horizonte de eventos a dinâmica da métrica é descrita por uma teoria bidimensional e que o modelo (1) também pode ser obtido como o setor de ondas esféricas da relatividade geral, que retém todas as características interessantes dos buracos negros.

Definindo ainda  $e^{2\phi} = 1/\eta$ , pode-se mostrar que o modelo (1) admite uma formulação de gauge para o grupo de Poincaré estendido, em termos de uma teoria topológica de campos do tipo BF não-abeliana dada por

$$\begin{aligned} I_{gravidade} &= \frac{1}{G} \int \eta_A F^A \\ &= \frac{1}{G} \int \left( \eta_a (de^a + \varepsilon^a{}_b \omega e^b) + \eta_2 d\omega + \eta_3 \left( da + \frac{1}{2} e^a \varepsilon_{ab} e^b \right) \right), \quad (2) \end{aligned}$$

sendo que as equações de movimento fornecem  $\eta_3 = \lambda_0$  e definimos  $\eta_2 \equiv 2\eta$ , onde  $A_\mu = e_\mu^a P_a + \omega_\mu J + B a_\mu I$  (curvatura plana). Apesar dos graus de liberdade das teorias de campos topológicas não se propagarem, o modelo de gravidade dilatônica em 1+1 dimensões descrito por (2) é interessante porque prevê a formação e evaporação de buracos negros, com a subsequente emissão da radiação de Hawking.

Quando o efeito quântico de “back-reaction” é introduzido e uma série de vínculos são aplicados, inclusive levando em consideração as conexões com as teorias de campo conformes, chega-se a um modelo de gravidade quântica exatamente solúvel denominado de Russo-Susskind-Thorlacius (RST) [28] [29]. Quando adequadamente corrigido [34], este modelo permite investigar, por exemplo, o “paradoxo da informação” (originalmente proposto por S.Hawking [17] [18]) concluindo que a informação não seria destruída, mas liberada de volta pelo buraco negro juntamente com a radiação de Hawking, um resultado que pode ser considerado um sucesso do programa de gravidade dilatônica em 1+1 dimensões.

Apenas em 1+1 dimensões é possível acrescentar uma força  $\mathcal{F}^\mu$  à equação de movimento da geodésica [10],

$$\frac{d}{d\tau} \frac{1}{N} \dot{x}^\mu + \frac{1}{N} \dot{x}^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \dot{x}^\beta = \mathcal{F}^\mu, \quad (3)$$

onde  $N \equiv \sqrt{\dot{x}^\alpha g_{\alpha\beta} \dot{x}^\beta} / m$ ,  $\mathcal{F}_\mu = \mathcal{F}_{\mu\nu} \dot{x}^\nu$ ,  $\mathcal{F}_{\mu\nu} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu} \mathcal{F}$  e  $\mathcal{F} = -\frac{A}{2} R - B$  que preserve a covariância geral e a invariância por mudança de parâmetros da linha de universo, utilizando apenas as variáveis dinâmicas gravitacionais e da partícula.

A equação da geodésica generalizada (3) é obtida variando a ação

$$I_m = - \int d\tau \left[ m \sqrt{\dot{x}^\mu(\tau) g_{\mu\nu}(x(\tau)) \dot{x}^\nu(\tau)} + \dot{x}^\mu (\mathcal{A} \omega_\mu(x(\tau)) + B a_\mu(x(\tau))) \right], \quad (4)$$

onde  $\omega$  é a conexão de spin e  $a$  uma 1-forma satisfazendo a condição  $da = vol$ ,  $vol \equiv -\frac{1}{2} \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ .



Tanto no caso da partícula pontual como para campos, os acoplamentos de matéria invariantes de gauge empregam uma variável dinâmica auxiliar  $q^a$  atuante como um campo de Higgs e transformando-se pela ação do grupo de Poincaré estendido como

$$q^a \rightarrow (\Lambda^{-1})^a_b (q^b + \varepsilon^b_c \theta^c). \quad (5)$$

Esta “coordenada de Poincaré”  $q^a$  descreve a liberdade de escolha da origem no espaço tangente, que é um espaço afim nas teorias de gravidade em gauge de Poincaré [16]. Aplicando a prescrição de Grignani e Nardelli, Cangemi e Jackiw mostraram que a ação invariante de gauge associada a (4) é dada por

$$I_{part} = \int d\tau \left( p_a (\mathcal{D}_\tau q)^a - \frac{1}{2} N (p^2 + m^2) + q_A A_\mu^A \dot{x}^\mu - \frac{1}{2} q^a \varepsilon_{ab} \dot{q}^b \right), \quad (6)$$

onde  $(\mathcal{D}_\tau q)^a = (\dot{x}^\mu \mathcal{D}_\mu q)^a = \dot{q}^a + \varepsilon^a_b (q^b \omega_\mu - e_\mu^b) \dot{x}^\mu$ .

Partículas transportando carga não-abeliana  $Q(\tau) = g(\tau) K g^{-1}(\tau)$  foram introduzidas originalmente no contexto da QCD. A dinâmica de uma tal partícula em interação com potenciais de Yang-Mills é descrita pelas equações de Wong [38]:

$$\begin{aligned} \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho &= -e F_\nu^{A\mu} Q_A(\tau) \dot{x}^\nu(\tau), \\ \frac{d}{d\tau} Q(\tau) + e \dot{x}^\mu(\tau) \left[ A_\mu(x(\tau)), Q(\tau) \right] &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

As equações de Wong (7) podem ser geradas pela variação da ação

$$I = -m \int_W d\tau \sqrt{\dot{x}^2} + \int_W d\tau \langle Q(\tau), \mathcal{D}_\tau g(\tau) g^{-1}(\tau) \rangle, \quad (8)$$

onde o segundo termo foi proposto por Balachandran para descrever a interação [4].

Uma vez que as equações de Wong (7) representam uma generalização não-abeliana da equação de força de Lorentz (3), não seria tão surpreendente

se o formalismo de Balachandran encontrasse aplicação ao problema de efetuar o acoplamento gravidade-matéria de modo invariante de gauge do grupo de Poincaré estendido.

Tentativas anteriores de transportar o termo de Balachandran para o contexto da gravidade dilatônica em 1+1 dimensões, entretanto, continuaram a interpretá-lo como um termo de interação, considerando o termo da partícula não-interagente e na ausência de gravidade à parte e propondo ações com a estrutura  $I = I_{part} + I_{gravidade} + I_{int}$ , como em [26] que propuseram a ação

$$I = -m \int_W d\tau \sqrt{\dot{x}^2} + \frac{1}{G} \int_{M^2} \eta_A F^A + \int_W d\tau \langle Q(\tau), \mathcal{D}_\tau g(\tau) g^{-1}(\tau) \rangle, \quad (9)$$

ou [25] que argumentaram que o termo cinético da partícula  $\int d\tau \frac{1}{2e} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$  não é invariante de gauge, devendo ser eliminado e propuseram a ação

$$I = \frac{1}{2} m^2 \int d\tau e(\tau) + \frac{1}{G} \int_{M^2} \eta_A F^A + \int_W d\tau \langle Q(\tau), \mathcal{D}_\tau g(\tau) g^{-1}(\tau) \rangle + g \int_W d\tau e(\tau) Q^A(\tau) \eta_A, \quad (10)$$

onde  $g$  é uma constante de acoplamento, em que se destaca o último termo que acopla a carga não-abeliana ao campo  $\eta$ , com o auxílio do einbein  $e(\tau)$ .

Pesquisando as origens da formulação de Balachandran, descobrimos que ela se baseia em métodos grupo-teóricos originalmente empregados por Kirillov, Souriau e Kostant (KSK) [21] [32] [23] para descrever os sistemas elementares clássicos. Cálculos preliminares nos indicaram que o termo de Balachandran  $I_{int}$  descreve, na verdade, a partícula minimamente acoplada ao potencial gravitacional, de modo que nossa reivindicação é que o acoplamento invariante de gauge da partícula à gravidade deve ser efetuado por meio de uma ação da forma  $I = I_{gravidade} + I_{int}$ , sem o termo redundante da partícula. Para demonstrar essa afirmação, nos pareceu interessante, do ponto de vista metodológico, examinar os sistemas elementares relativísticos inicialmente na ausência de gravidade, a qual seria reintroduzida por acopla-

mento mínimo numa segunda etapa, na esperança de interpretar a formulação de Balachandran em termos da construção de KSK.

Com exceção dos resumos teóricos cujas fontes são citadas no decorrer do texto, todo o material aqui apresentado é absolutamente original e servirá de base para avanços futuros em que pretendemos examinar a formulação de Balachandran aplicada à gravidade dilatônica em termos dos métodos grupo-teóricos da construção de KSK. Dentre as contribuições originais desta tese podemos destacar:

1. A descoberta do fato de que a álgebra de Poincaré estendida é solúvel exponencial, apresentada no primeiro capítulo e que permitirá, como seqüência deste trabalho, a aplicação da teoria dos grupos exponenciais de Pukanszky [27], que estende o método das órbitas de Kirillov [14] originalmente aplicável aos grupos nilpotentes, para determinarmos todas as representações unitárias irredutíveis do grupo de Poincaré estendido a partir das co-órbitas e que trará conseqüências para a quantização do modelo aqui apresentado.
2. Os cálculos do primeiro e do segundo grupo de cohomologia da álgebra de Poincaré estendida, efetuados no primeiro capítulo, importantes para a aplicação do teorema de Kirillov no terceiro capítulo.
3. A descoberta do fato da ação da partícula não-interagente e na ausência de gravidade em 1+1 dimensões ser anômala. Aplicando o teorema de Lévy-Leblond, mostramos no segundo capítulo que a ação mais geral que se pode escrever para a partícula inclui um termo de Wess-Zumino gerado pelo 2-cociclo da extensão central do grupo de Poincaré e que pode ser “neutralizado” pela adição de um terceiro termo dependente de uma variável dinâmica extra, cuja fixação de gauge fornece sua interpretação como a função de ação da versão anômala do modelo. Em particular, o termo de Wess-Zumino possibilita uma nova perspectiva

para a interpretação do segundo termo da força  $\mathcal{F}^\mu$ , característica do caso bidimensional e que generaliza a equação da geodésica (3), esclarecendo sua origem algébrica.

4. A exibição de todas as co-órbitas do grupo de Poincaré estendido no terceiro capítulo, onde aplicamos o teorema de Kirillov para mostrar como essas co-órbitas classificam todos os sistemas elementares relativísticos em 1+1 dimensões, levando em consideração a trivialidade do segundo grupo de cohomologia da álgebra de Poincaré estendida e o fato do grupo de Poincaré estendido ser simplesmente conexo, como consequência de sua natureza solúvel exponencial.
5. A demonstração, no terceiro capítulo, da existência de um simplectomorfismo entre uma determinada co-órbita na álgebra de Lie dual à de Poincaré estendida e o espaço de fase reduzido do modelo da partícula não-interagente e na ausência de gravidade em 1+1 dimensões, em sua versão livre de anomalias.

# Capítulo 1

## O Grupo de Poincaré Estendido

Após um resumo teórico da teoria das representações projetivas e da teoria de extensões centrais de um grupo de Lie, apresentamos na subseção 1.1.1 a definição abstrata da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  em termos da contração de uma “pseudo-extensão” do grupo de anti-de Sitter  $SO(2, 1)$ , que deixa clara a natureza da carga central  $B$  como parâmetro do 2-cociclo não-trivial  $\xi_B(g', g)$  (1.47) pertencente ao segundo grupo de cohomologia do grupo de Poincaré em  $1 + 1$  dimensões  $\mathcal{P}$ . A lei de composição do grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  assim calculada (1.49) torna-se função da carga central  $B$ , que pode ser rastreada na expressão da representação adjunta (1.79), assim como nas expressões das formas e campos invariantes sobre  $\bar{\mathcal{P}}$  (1.127) (1.128) (1.130) (1.132) e na métrica invariante associada a  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  (1.140).

Em seguida efetuamos uma análise da estrutura e das propriedades da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  do ponto de vista da teoria das álgebras de Lie na seção 1.2, pela qual mostramos, na proposição 1.2.2, que a álgebra de Poincaré estendida é isomorfa ao produto semidireto da álgebra de Lie do grupo de Lorentz em  $1+1$  dimensões  $so(1, 1)$  pela álgebra de Lie do grupo de Weyl-Heisenberg  $wh$ . Além disso, a aplicação dos métodos algébricos também nos permitiu mostrar na proposição 1.2.4 que  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  não é nilpotente mas

é solúvel exponencial. A importância das álgebras solúveis deve-se ao teorema de Levi-Mal'čev (Teo.1.4.6) que se insere no contexto da teoria de cohomologia de álgebras de Lie que é abordada na última seção deste capítulo. Como consequência da natureza exponencial da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{h}}_2^1$ , podemos definir o grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  pelo mapeamento exponencial e mostramos no início da seção 1.3 que a lei de grupo está definida globalmente a partir de uma decomposição em co-conjuntos (1.99) (1.102) (1.105).

Na última seção deste capítulo, depois de apresentarmos a definição 1.4.1 do  $n$ -ésimo grupo de cohomologia de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  com coeficientes num espaço vetorial  $V$  e esclarecermos na subseção 1.4.2 as interpretações do primeiro e do segundo grupos de cohomologia da álgebra  $\mathfrak{g}$  com coeficientes numa álgebra de Lie abeliana, encontramos a expressão geral do 2-cociclo não-trivial  $\omega^{(2)}$  (1.169) que caracteriza a extensão central de  $\mathfrak{g}$  e pertence ao segundo grupo de cohomologia de Chevalley-Eilenberg (Def.1.4.6) do grupo de Lie  $G$  associado à álgebra  $\mathfrak{g}$ , o qual será importante para a caracterização dos termos de Wess-Zumino que faremos no segundo capítulo.

Derivamos uma expressão explícita para o cálculo do primeiro grupo de cohomologia de  $\mathfrak{g}$  com coeficientes em  $\mathfrak{R}$  no caso da representação trivial (1.154) e enfatizamos que no caso de álgebras de Lie de dimensão baixa o cálculo do segundo grupo de cohomologia é realizado a partir da definição 1.4.1. Como exemplos apresentamos os cálculos do segundo grupo de cohomologia de  $\mathfrak{R}^2$  cuja extensão central é a álgebra de Weyl-Heisenberg  $wh$ , cujo segundo grupo de cohomologia também é calculado e resulta ser bidimensional. Este último exemplo mostra que o segundo grupo de cohomologia de uma álgebra de Lie que possua uma estrutura de extensão central não é necessariamente trivial, daí a necessidade de efetuarmos o cálculo do segundo grupo de cohomologia da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{h}}_2^1$ , o que fazemos no fim do capítulo juntamente com o cálculo do primeiro grupo de cohomologia

da mesma álgebra. Estes resultados terão conseqüências para a quantização da partícula relativista em 1+1 dimensões e para a classificação dos sistemas elementares relativísticos que efetuaremos no terceiro capítulo.

## 1.1 Representações projetivas e extensões centrais

Foi demonstrado por Bargmann que a segunda cohomologia do grupo inhomogêneo  $I_n^p$  de um espaço pseudo-ortogonal n-dimensional, de assinatura  $(p, n-p)$ ,  $H_0^2(I_n^p, \mathfrak{R})$  é trivial para  $n > 2$  [3, p.192]. Entretanto,  $H_0^2(I_2^1, \mathfrak{R})$  tem dimensão 1 e, portanto, o grupo de Poincaré  $\mathcal{P} = I_2^1$ , em 1 + 1 dimensões, pode ser estendido centralmente de modo não-trivial. O grupo de Poincaré estendido por  $\mathfrak{R}$  será denotado por  $\bar{\mathcal{P}} = \bar{I}_2^1$  e sua álgebra de Lie por  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$ .

A motivação física para se considerar a extensão central de um grupo de simetrias  $G$  de um sistema dinâmico advém da mecânica quântica, quando é necessário definir uma “representação projetiva” ou “representação de raio” do grupo de Lie  $G$ . Vamos rever brevemente alguns fatos matemáticos básicos concernentes à teoria abstrata das “representações projetivas”. Na mecânica quântica, os “estados puros” são representados por “raios”, de modo que os operadores de simetria podem ser realizados por “operadores de raio” unitários  $\bar{U}$ ,

$$\bar{U}(g')\bar{U}(g) = \bar{U}(g'g), \quad g', g \in G, \quad (1.1)$$

onde a barra indica a classe de equivalência dos operadores que diferem por uma fase,

$$U, U' \in \bar{U} \Leftrightarrow U = \gamma U', |\gamma| = 1. \quad (1.2)$$

Escolhendo representantes  $U(g')$ ,  $U(g)$  e  $U(g'g)$ , respectivamente das classes  $\bar{U}(g')$ ,  $\bar{U}(g)$  e  $\bar{U}(g'g)$ , a equação (1.1) é substituída por

$$U(g')U(g) = \omega(g', g)U(g'g), \quad (1.3)$$

onde  $\omega(g', g) := \exp\frac{i}{\hbar}\xi(g', g)$  é um fator de fase e  $\xi(g', g)$  seu expoente. Então, em virtude da associatividade  $[U(g'')U(g')]U(g) = U(g'')[U(g')U(g)]$ , propriedade necessária dos operadores lineares, obtemos a condição de 2-cociclo

$$\omega(g'', g')\omega(g''g', g) = \omega(g'', g'g)\omega(g', g) \quad (1.4)$$

que deve ser satisfeita pelos fatores de fase. Em termos dos expoentes  $\xi(g', g)$ , as equações de 2-cociclo e de normalização se expressam por

$$\begin{aligned} \xi(g'', g') + \xi(g''g', g) - \xi(g'', g'g) - \xi(g', g) &= 0 \\ \xi(g, e) = 0 = \xi(e, g) \quad , \quad \xi(g, g^{-1}) &= \xi(g^{-1}, g), \end{aligned} \quad (1.5)$$

sendo que um expoente será uma 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  se existir uma função  $\eta(g)$  tal que

$$\xi_{cob}(g', g) = \eta(g') + \eta(g) - \eta(g'g), \quad (1.6)$$

de modo que dois expoentes serão equivalentes,  $\xi \sim \xi'$ , se eles diferirem por uma coborda  $\xi'(g', g) = \xi(g', g) + \xi_{cob}(g', g)$ .

Escrevendo os operadores pertencentes à classe  $\bar{U}(g)$  sob a forma

$$e^{i\varphi}U(g), \quad (1.7)$$

em termos de uma nova coordenada do grupo  $\varphi$ , temos que

$$\begin{aligned} e^{i\varphi''}U(g'') &:= e^{i\varphi'}U(g')e^{i\varphi}U(g) \\ e^{i\varphi''}U(g'') &= e^{i(\varphi'+\varphi)}e^{i\xi(g',g)}U(g'g), \end{aligned} \quad (1.8)$$

de modo que, dado um grupo de Lie  $G$  e um expoente  $\xi : G \times G \rightarrow \mathfrak{R}$ , podemos definir um novo grupo  $\bar{G}$  com elementos  $\bar{g} = (\varphi, g)$  satisfazendo a lei de grupo

$$\bar{g}'' = \bar{g}' \cdot \bar{g} = (\varphi' + \varphi + \xi(g', g), g'g), \quad (1.9)$$

tal que

$$\begin{aligned} (0, e) = \bar{e} \in \bar{G} \quad , \quad \bar{g}^{-1} &= (-\varphi - \xi(g, g^{-1}), g^{-1}) \\ \xi(g, g^{-1}) &= \xi(g^{-1}, g), \end{aligned} \quad (1.10)$$



sendo que pode-se verificar que a associatividade da lei de composição (1.9) implica a condição de 2-cociclo (1.5) [3, p.163].

Podemos, ainda, calcular a alteração produzida na álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  do grupo  $G$  de dimensão  $r$ ,

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k \quad i, j, k \in \{1, \dots, r\}, \quad (1.11)$$

pelo 2-cociclo  $\xi(g', g)$  [3, p.239]. Os geradores da extensão central  $\bar{\mathfrak{g}}$  de dimensão  $r + 1$  (1.11) podem ser calculados usando a equação (1.11) aplicada à lei de grupo (1.9) resultando em

$$\begin{aligned} \bar{T}_i(\varphi, g) &= T_i(g) + \left. \frac{\partial \xi(g', g)}{\partial g^i} \right|_{\substack{g'=g \\ g=e}} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad i \in \{1, \dots, r\} \\ \bar{T}_{(\varphi)}(\varphi, g) &= \frac{\partial}{\partial \varphi}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Usando o “segundo teorema de Lie”, podemos calcular as constantes de estrutura de  $\bar{\mathfrak{g}}$ ,

$$\begin{aligned} f_{ij}^k &= \left( \frac{\partial^2 \bar{g}''^k(\bar{g}', \bar{g})}{\partial g'^i \partial g^j} - \frac{\partial^2 \bar{g}''^k(\bar{g}', \bar{g})}{\partial g'^j \partial g^i} \right) \Bigg|_{\substack{g'=e \\ g=e}} = \left( \frac{\partial^2 g''^k}{\partial g'^i \partial g^j} - \frac{\partial^2 g''^k}{\partial g'^j \partial g^i} \right) \Bigg|_{\substack{g'=e \\ g=e}} \\ f_{ij}^{(\varphi)} &= \left( \frac{\partial^2 \bar{g}''^{(\varphi)}}{\partial g'^i \partial g^j} - \frac{\partial^2 \bar{g}''^{(\varphi)}}{\partial g'^j \partial g^i} \right) \Bigg|_{\substack{g'=e \\ g=e}} = \left( \frac{\partial^2 \xi(g', g)}{\partial g'^i \partial g^j} - \frac{\partial^2 \xi(g', g)}{\partial g'^j \partial g^i} \right) \Bigg|_{\substack{g'=e \\ g=e}} \\ f_{i(\varphi)}^j &= f_{i(\varphi)}^{(\varphi)} = 0, \end{aligned} \quad (1.13)$$

tal que os comutadores de  $\bar{\mathfrak{g}}$  têm a forma

$$[\bar{T}_{(\varphi)}, \bar{T}_i] = 0, \quad [\bar{T}_i, \bar{T}_j] = f_{ij}^k \bar{T}_k + f_{ij}^{(\varphi)} \bar{T}_{(\varphi)}. \quad (1.14)$$

A adição de uma 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$ , gerada pela função  $\eta(g)$  sobre  $G$  (1.6), ao 2-cociclo da extensão central  $\xi(g', g)$ ,

$$\xi'(g', g) = \xi(g', g) + \eta(g') + \eta(g) - \eta(g'g), \quad (1.15)$$

provoca uma mudança de base dos geradores de  $\bar{\mathfrak{g}}$  que pode ser calculada pela equação (1.12) aplicada ao novo 2-cociclo  $\xi'(g', g)$  (1.15),

$$\begin{aligned}\bar{T}'_i(\varphi, g) &= \bar{T}_i(\varphi, g) + \left[ \frac{\partial\eta(g)}{\partial g^i} \Big|_{g=e} - \frac{\partial\eta(g)}{\partial g^j} \frac{\partial g'^j(g', g)}{\partial g^i} \Big|_{\substack{g=e \\ g'=g}} \right] \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \bar{T}'_{(\varphi)}(\varphi, g) &= \bar{T}_{(\varphi)}(\varphi, g).\end{aligned}\quad (1.16)$$

A modificação das constantes de estrutura de  $\bar{\mathfrak{g}}$ , correspondente à adição da 2-coborda pode ser calculada pela equação (1.13) aplicada ao novo 2-cociclo  $\xi'(g', g)$  (1.15),

$$\begin{aligned}f'_{ij}{}^k &= f_{ij}{}^k, \quad f'_{i(\varphi)}{}^j = f'_{i(\varphi)} = f_{i(\varphi)}^j = f_{i(\varphi)}^{(\varphi)} = 0 \\ f'_{ij}{}^{(\varphi)} &= f_{ij}{}^{(\varphi)} - \mu_{ij}, \quad \mu_{ij} := \eta_k f_{ij}{}^k, \quad \eta_k := \frac{\partial\eta(g)}{\partial g^k} \Big|_{g=e},\end{aligned}\quad (1.17)$$

de modo que os comutadores de  $\bar{\mathfrak{g}}$  assumem a forma

$$[\bar{T}'_{(\varphi)}, \bar{T}'_i] = 0, \quad [\bar{T}'_i, \bar{T}'_j] = f_{ij}{}^k \bar{T}'_k + \left[ f_{ij}{}^{(\varphi)} - f_{ij}{}^k \frac{\partial\eta(g)}{\partial g^k} \Big|_{g=e} \right] \bar{T}'_{(\varphi)}.\quad (1.18)$$

A associatividade de  $\bar{G}$  implica a identidade de Jacobi para  $\bar{\mathfrak{g}}$ , tal que as constantes de estrutura  $f_{ij}{}^{(\varphi)}$  satisfazem as condições de consistência

$$f_{ij}{}^m f_{mk}{}^{(\varphi)} + f_{jk}{}^m f_{mi}{}^{(\varphi)} + f_{ki}{}^m f_{mj}{}^{(\varphi)} = 0,\quad (1.19)$$

assim como  $\mu_{ij}$ ,

$$f_{ij}{}^m \mu_{mk} + f_{jk}{}^m \mu_{mi} + f_{ki}{}^m \mu_{mj} = 0,\quad (1.20)$$

análogas às condições de 2-cociclo (1.5) satisfeitas por  $\xi(g', g)$ .

Observe ainda que se o 2-cociclo  $\xi(g', g)$  de (1.9) for uma 2-coborda  $\xi(g', g) = \xi_{cob}(g', g)$  satisfazendo (1.6), então ele será equivalente a zero e o novo grupo, formado pelos elementos  $\bar{g} = (\varphi, g)$  satisfazendo (1.9), terá a estrutura de produto direto, constituindo a “extensão de produto direto”  $G \times \mathfrak{R}$  de  $G$  por  $\mathfrak{R}$ . Por outro lado, se o 2-cociclo  $\xi(g', g)$  não for trivial, no

sentido de não haver nenhuma função  $\eta(g)$  que permita identificar  $\xi(g', g)$  a uma 2-coborda satisfazendo (1.6), então o novo grupo formado pelos elementos  $\bar{g} = (\varphi, g)$  constituirá a “extensão central” de  $G$  por  $\mathfrak{R}$ , denotada por  $\bar{G}$ , onde o caráter central da extensão é evidenciado por (1.14). Então  $G$  admite uma extensão não-trivial somente se a segunda cohomologia do grupo for não-trivial<sup>1</sup>  $H_0^2(G, \mathfrak{R}) \neq 0$ .

Caso esteja bem definida a contração do grupo de Lie  $G$ , denominada por  $G_c$ , pode ocorrer que uma “extensão de produto direto”  $G \times \mathfrak{R}$  de um grupo de Lie  $G$  se defina em termos de uma 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  de  $G$ , a qual defina, no limite de contração, um 2-cociclo não-trivial do grupo contraído  $G_c$ , gerando uma “extensão central” do mesmo  $\bar{G}_c$ . Podemos caracterizar de modo geral as 2-cobordas  $\xi_{cob}(g', g)$  de  $G$  que levam a 2-cociclos não-triviais do grupo contraído  $G_c$ ; elas são geradas por funções  $\eta(g)$  que não estão definidas no limite de contração mas que geram 2-cobordas (1.6) com um limite de contração bem definido. O resultado deste limite será um 2-cociclo não-trivial, uma vez que não pode ser obtido de um 1-cociclo.

Denominaremos uma “extensão de produto direto”  $G \times \mathfrak{R}$  de um grupo de Lie  $G$  por “pseudo-extensão” quando esta for definida em termos de uma 2-coborda levando a uma “extensão central” no limite de contração. A álgebra de Poincaré estendida se define, então, em termos de uma contração não-convencional de uma “pseudo-extensão” da álgebra de anti-de Sitter. E a não-convencionalidade da contração deve-se ao comportamento singular da função  $\eta(g)$ , geradora da 2-coborda do grupo de anti-de Sitter, explicado acima.

---

<sup>1</sup>Veja a discussão da seção 1.4.2 na página 55.

### 1.1.1 A álgebra de Poincaré estendida $\bar{1}_2^1$

Considere a álgebra de Lie real de anti-de Sitter  $so(2, 1)$

$$[P_a, J] = \varepsilon_a{}^b P_b \quad [P_a, P_b] = \Lambda \varepsilon_{ab} J \quad a, b \in \{0, 1\}, \quad (1.21)$$

onde  $\varepsilon^{01} = -\varepsilon_{01} = 1$ , os índices  $a, b$  são levantados e abaixados com a métrica dada por  $h_{ab} = \text{diag}(1, -1)$  e a constante  $\Lambda$  possui dimensão  $[\Lambda] = L^{-2}$  em unidades naturais (tal que  $[P_a] = L^{-1}$  e  $[J]$  seja adimensional).

Lembramos que a lei de composição do grupo  $SO(3)$  pode ser expressa, numa vizinhança da identidade, sob a forma

$$\epsilon^{ni} = \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^2}{4}} \epsilon^{ni} + \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^2}{4}} \epsilon^i - \frac{1}{2} \eta^i{}_{jk} \epsilon'^j \epsilon^k \quad i, j, k \in \{1, 2, 3\}, \quad (1.22)$$

onde  $\vec{\epsilon}$  é o vetor que determina a direção do eixo de rotação e o ângulo de rotação  $\psi$ , por  $|\vec{\epsilon}| = 2 \text{Sin}(\psi/2)$ , e  $\eta$  denota o tensor totalmente antissimétrico. A partir das equações (1.22) e (1.111) obtemos as expressões dos campos vetoriais invariantes à esquerda

$$J_i(\epsilon) = \left( \sqrt{1 - \frac{\vec{\epsilon}^2}{4}} \delta^j{}_i + \frac{1}{2} \eta^j{}_{ik} \epsilon^k \right) \frac{\partial}{\partial \epsilon^j}, \quad (1.23)$$

tal que

$$[J_i, J_j] = -\eta_{ij}{}^k J_k. \quad (1.24)$$

Os elementos do grupo  $SO(2, 1)$  são obtidos por exponenciação sendo associados aos parâmetros dados por

$$g(\gamma, \gamma^a) = \exp(\gamma J + \gamma^a P_a), \quad (1.25)$$

sendo que os índices associados às coordenadas  $(\gamma^a)$  serão levantados e abaixados com a métrica  $h_{ab} = \text{diag}(1, -1)$ , onde  $a, b \in \{0, 1\}$ . Efetuando, então, a mudança de base definida por

$$J_1 = iJ \quad , \quad J_2 = i\sqrt{-\frac{1}{\Lambda}} P_0 \quad , \quad J_3 = -\sqrt{-\frac{1}{\Lambda}} P_1, \quad (1.26)$$

tal que  $\gamma J + \gamma^a P_a = \vec{\epsilon} \cdot \vec{J}$  e

$$\epsilon^1 = -i\gamma \quad , \quad \epsilon^2 = -i\sqrt{-\Lambda}\gamma^0 \quad , \quad \epsilon^3 = -\sqrt{-\Lambda}\gamma^1, \quad (1.27)$$

notamos que a álgebra (1.21) é isomorfa à álgebra  $so(3)$  (1.24), de modo que podemos obter a lei de composição de  $SO(2, 1)$  substituindo (1.27) em (1.22), obtendo  $g''(\gamma'', \gamma''^a) = g'(\gamma', \gamma'^a)g(\gamma, \gamma^a)$  com

$$\begin{aligned} \gamma'' &= \gamma' \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\Lambda}{4} \gamma^a \gamma_a} + \gamma \sqrt{1 + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\Lambda}{4} \gamma'^a \gamma'_a} + \frac{\Lambda}{2} \epsilon_{ab} \gamma'^a \gamma^b \\ \gamma''^a &= \gamma'^a \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\Lambda}{4} \gamma^a \gamma_a} + \gamma^a \sqrt{1 + \frac{\gamma'^2}{4} - \frac{\Lambda}{4} \gamma'^a \gamma'_a} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon^a{}_b (\gamma'^b \gamma - \gamma^b \gamma'). \end{aligned} \quad (1.28)$$

A contração  $\Lambda \rightarrow 0$  da álgebra (1.21) produz a álgebra de Poincaré bidimensional  $i_2^1$

$$[P_a, J] = \epsilon_a{}^b P_b \quad [P_a, P_b] = 0. \quad (1.29)$$

Não é difícil de ver que, no limite de contração, a lei de composição do grupo  $SO(2, 1)$  (1.28) tende para a lei do grupo de Poincaré bidimensional  $\mathcal{P}$ , de acordo com (1.29). De fato, após tomar o limite  $\Lambda \rightarrow 0$  na equação (1.28) e mudar os parâmetros dos elementos do grupo por  $g = g(\theta^a, \alpha)$ , tal que

$$\text{Sinh}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\gamma}{2} \quad , \quad \theta^a = \Lambda \left(\frac{\alpha}{2}\right)^a{}_b \gamma^b, \quad (1.30)$$

onde  $\Lambda(\alpha)^a{}_b = \delta^a{}_b \text{Cosh}\alpha + \epsilon^a{}_b \text{Sinh}\alpha$ , obtemos a lei de composição do grupo de Poincaré em 1 + 1 dimensões

$$\begin{aligned} \theta''^b &= \theta'^b + \Lambda(\alpha')^b{}_a \theta^a \\ \alpha'' &= \alpha' + \alpha, \end{aligned} \quad (1.31)$$

com o elemento inverso dado por  $g^{-1} = g(-\Lambda(-\alpha)^a{}_b \theta^b, -\alpha)$ .

Efetuamos a “extensão de produto direto”  $SO(2, 1) \times \mathfrak{R}$ , incluindo um gerador central adicional  $I$  na álgebra,

$$\begin{aligned} [P_a, J] &= \varepsilon_a^b P_b & [P_a, P_b] &= \Lambda \varepsilon_{ab} J \\ [I, P_a] &= 0 & [I, J] &= 0, \end{aligned} \quad (1.32)$$

que corresponde à lei de composição

$$(\beta'', g'') = (\beta', g')(\beta, g) = (\beta' + \beta, g'g), \quad (1.33)$$

onde  $g''$  é fornecido pelas equações (1.28) e  $\beta$  é a nova coordenada do grupo associada ao gerador central  $I$  (1.7-1.12).

Em seguida, acrescentamos uma 2-coborda  $\xi_{cob}$  à lei de grupo (1.33) gerada por  $\eta(g)$  tal que

$$\begin{aligned} \eta(g) &= -\frac{1}{2\Lambda} \eta_1(g) + \eta_2(g), \\ \eta_1(g) &= 4B \text{ArcSinh}\left(\frac{\gamma}{2}\right), \\ \eta_2(g) &= -\frac{B}{8} \gamma^a \gamma_a \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}}, \end{aligned} \quad (1.34)$$

onde  $g = g(\gamma, \gamma^a)$  (1.25) e, uma vez que  $[\gamma^a] = L$ , temos que  $[B] = L^{-2}$  em unidades naturais<sup>2</sup>. A alteração da lei de grupo (1.33), produzida pelo acréscimo da 2-coborda  $\xi_{cob}$ , é

$$(\beta'', g'') = (\beta', g')(\beta, g) = (\beta' + \beta + \xi_{cob}(g', g), g'g), \quad (1.35)$$

de acordo com a equação (1.9).

Calculamos a 2-coborda satisfazendo a equação (1.6),

$$\begin{aligned} \xi_{cob}(g', g) &= -\frac{1}{2\Lambda} \xi_{1,cob}(g', g) + \xi_{2,cob}(g', g), \\ \xi_{1,cob}(g', g) &= \eta_1(g') + \eta_1(g) - \eta_1(g'g), \\ \xi_{2,cob}(g', g) &= \eta_2(g') + \eta_2(g) - \eta_2(g'g), \end{aligned} \quad (1.36)$$

---

<sup>2</sup>Veja o comentário logo após a definição da álgebra  $so(2, 1)$  na página 18.

de onde, usando (1.34), obtemos

$$\xi_{1,cob}(g', g) = 4B \left[ \text{ArcSinh}\left(\frac{\gamma'}{2}\right) + \text{ArcSinh}\left(\frac{\gamma}{2}\right) - \text{ArcSinh}\left(\frac{\gamma''}{2}\right) \right] \quad (1.37)$$

e

$$\xi_{2,cob}(g', g) = -\frac{B}{8} \left[ \gamma'^a \gamma'_a \frac{\gamma'}{\sqrt{1 + \frac{\gamma'^2}{4}}} + \gamma^a \gamma_a \frac{\gamma}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} - \gamma''^a \gamma''_a \frac{\gamma''}{\sqrt{1 + \frac{\gamma''^2}{4}}} \right], \quad (1.38)$$

onde  $\gamma''$  e  $\gamma''^a$  são dados pelas equações (1.28).

Utilizando a equação (1.18), podemos calcular a modificação da álgebra de Lie da “extensão de produto direto”  $SO(2, 1) \times \mathfrak{R}$  produzida pelo acréscimo da 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  à lei de grupo (1.33), associada à alteração da mesma (1.35). Lembrando que a base da álgebra de Lie  $so(2, 1) \times \mathfrak{R}$  (1.32),  $\{J, P_a, I\}$ , pertence ao espaço tangente ao grupo sobre a identidade  $T_{(0,e)}(SO(2, 1) \times \mathfrak{R})$ , vemos que a mudança das expressões dos “campos vetoriais invariantes à esquerda” é tal que os novos campos vetoriais preservam seus valores sobre a identidade, como mostra a equação<sup>3</sup> (1.16)

$$\begin{aligned} \bar{T}'_{(\gamma)}(0, e) &= \bar{T}_{(\gamma)}(0, e) := J \\ \bar{T}'_{(\gamma^a)}(0, e) &= \bar{T}_{(\gamma^a)}(0, e) := P_a \\ \bar{T}'_{(\beta)}(0, e) &= \bar{T}_{(\beta)}(0, e) := I. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Então, a partir de (1.34), calculamos

$$\left. \frac{\partial \eta(g)}{\partial \gamma} \right|_{g=e} = -\frac{B}{\Lambda} \quad \text{e} \quad \left. \frac{\partial \eta(g)}{\partial \gamma^a} \right|_{g=e} = 0 \quad (1.40)$$

para obter a modificação da álgebra  $so(2, 1) \times \mathfrak{R}$  que assume a forma “pseudo-estendida”  $so'(2, 1) \times \mathfrak{R}$

$$\begin{aligned} [P_a, J] &= \varepsilon_a^b P_b & [P_a, P_b] &= \Lambda \varepsilon_{ab} J + B \varepsilon_{ab} I \\ [I, P_a] &= 0 & [I, J] &= 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

<sup>3</sup>Veja também a equação (1.113) e a discussão na subseção 1.3.1 à página 42.

Observamos que a álgebra de Lie modificada  $so'(2, 1) \times \mathfrak{R}$  (1.41) é isomorfa à álgebra  $so(2, 1) \times \mathfrak{R}$  (1.32) numa outra base, definida por

$$J \mapsto J' = J - \frac{B}{\Lambda} I, \quad (1.42)$$

de modo que a mudança de base (1.42) da álgebra estendida  $so(2, 1) \times \mathfrak{R}$  corresponde ao acréscimo da 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  à lei de grupo (1.33).

Mostraremos<sup>4</sup> a seguir que o grupo  $SO'(2, 1) \times \mathfrak{R}$ , definido em termos da 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$ , é na verdade uma “pseudo-extensão”, uma vez que o limite de contração da 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  quando  $\Lambda \rightarrow 0$  é um 2-cociclo não-trivial na cohomologia da contração do grupo de anti-de Sitter, que é o grupo de Poincaré bidimensional  $\mathcal{P}$ . Evidentemente este limite não pode ser tomado nas equações (1.34) ou (1.42), assinalando o caráter não-convencional da contração e demonstrando que se o limite da 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  existir e não for nulo então este será necessariamente um 2-cociclo não-trivial, pois não pode ser gerado pelo limite da função geradora  $\eta(g)$  (1.34).

Calculamos o limite da 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  (1.36)

$$\lim_{\Lambda \rightarrow 0} \xi_{cob}(g', g) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \xi_{1,cob}(g', g)}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=0} + \xi_{2,cob}(g', g) \Big|_{\Lambda=0}, \quad (1.43)$$

usando a regra de L'Hospital para o primeiro termo e observando que apenas  $g'' = g'g$  contém  $\Lambda$ . Aplicando a mudança de coordenadas (1.30) na última igualdade obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{1,cob}(g', g)}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=0} &= \frac{B}{\sqrt{1 + \frac{\gamma''(\Lambda=0)^2}{4}}} \left( \frac{1}{4} \frac{\gamma^a \gamma_a}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}} \gamma' + \frac{1}{4} \frac{\gamma'^a \gamma'_a}{\sqrt{1 + \frac{\gamma'^2}{4}}} \gamma - \varepsilon^{ab} \gamma_a \gamma'_b \right) \\ \frac{\partial \xi_{1,cob}(g', g)}{\partial \Lambda} \Big|_{\Lambda=0} &= \frac{B}{2} \left( \theta^a \theta_a \frac{\text{Sinh}(\frac{\alpha'}{2})}{\text{Cosh}(\frac{\alpha''}{2}) \text{Cosh}(\frac{\alpha}{2})} + \theta'^a \theta'_a \frac{\text{Sinh}(\frac{\alpha}{2})}{\text{Cosh}(\frac{\alpha''}{2}) \text{Cosh}(\frac{\alpha'}{2})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\text{Cosh}(\frac{\alpha''}{2})} \theta'^a \varepsilon_{ab} \Lambda \left( \frac{\alpha' - \alpha}{2} \right)^b \theta^c \right), \end{aligned} \quad (1.44)$$

<sup>4</sup>Apresentamos aqui uma revisão de [3, p.196] com pequenas correções e explicações adicionais.



onde  $\gamma''(\Lambda = 0) = \gamma\sqrt{1 + \frac{\gamma'^2}{4}} + \gamma'\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{4}}$  e  $\alpha'' = \alpha' + \alpha$ . O segundo termo da soma (1.43) pode ser calculado diretamente, após a aplicação da mudança de coordenadas (1.30),

$$\begin{aligned} \xi_{2,cob}(g', g)|_{\Lambda=0} &= \frac{B}{4} \left[ \theta^a \theta_a \left( \text{Tanh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right) - \text{Tanh}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) + \right. \\ &+ \theta'^a \theta'_a \left( \text{Tanh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right) - \text{Tanh}\left(\frac{\alpha'}{2}\right) \right) \left. + 2\text{Tanh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right) \theta'_a \Lambda(\alpha')^a{}_b \theta^b \right]. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Efetuada a soma (1.43), usando as equações (1.44), (1.45) e as identidades

$$\begin{aligned} \frac{\text{Sinh}\left(\frac{\alpha'}{2}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right)\text{Cosh}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &= \text{Tanh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right) - \text{Tanh}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ \text{Sinh}(\alpha')\text{Tanh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right) &= \text{Cosh}(\alpha') - \frac{\text{Cosh}\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right)} \\ \text{Cosh}(\alpha')\text{Tanh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right) &= \text{Sinh}(\alpha') - \frac{\text{Sinh}\left(\frac{\alpha' - \alpha}{2}\right)}{\text{Cosh}\left(\frac{\alpha''}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (1.46)$$

obtemos a expressão do 2-cociclo não-trivial na cohomologia do grupo de Poincaré bidimensional  $\mathcal{P}$

$$\xi_B(\alpha', \theta'^a; \alpha, \theta^a) = \lim_{\Lambda \rightarrow 0} \xi_{cob}(g', g) = \frac{B}{2} \theta'^c \varepsilon_{cb} \Lambda(\alpha')^b{}_a \theta^a. \quad (1.47)$$

Lembrando que  $\omega(g', g) := \exp\frac{i}{\hbar} \xi_B(g', g)$  é um fator de fase e  $\xi_B(g', g)$  seu expoente definindo a representação projetiva de  $\mathcal{P}$  (1.3), vemos que a carga central possui dimensão<sup>5</sup>  $[B] = L^{-2} \times [\hbar]$  em unidades onde  $c = 1$ .

Conseqüentemente<sup>6</sup>, a lei de composição do grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$ , definido como a contração não-convencional da “pseudo-extensão”  $SO'(2, 1) \times \mathfrak{R}$  no limite quando  $\Lambda \rightarrow 0$  em termos do 2-cociclo não-trivial  $\xi_B(g', g)$  (1.47), assume a forma

$$g''(\theta''^a, \alpha'', \beta'') = g'(\theta'^a, \alpha', \beta') g(\theta^a, \alpha, \beta) \quad (1.48)$$

<sup>5</sup>Veja os comentários acerca das unidades da carga central  $B$  em unidades naturais no início da página 20.

<sup>6</sup>Veja discussão nas páginas 14 e 17.

com

$$\begin{aligned}
\theta''^b &= \theta'^b + \Lambda(\alpha')^b{}_a \theta^a \\
\alpha'' &= \alpha' + \alpha \\
\beta'' &= \beta' + \beta + \frac{B}{2} \theta'^c \varepsilon_{cb} \Lambda(\alpha')^b{}_a \theta^a,
\end{aligned} \tag{1.49}$$

nas coordenadas (1.30) de  $\mathcal{P}$  com elemento inverso<sup>7</sup> dado por  $g^{-1} = g(-\Lambda(-\alpha)^a{}_b \theta^b, -\alpha, -\beta)$ . Observamos que o 2-cociclo não trivial  $\xi_B(g', g)$  (1.47), na cohomologia do grupo  $\mathcal{P}$ , está associado ao parâmetro da carga central  $B$ , cujos valores caracterizam a extensão do grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$  e de sua álgebra de Lie  $i_2^1$ .

A contração da álgebra pseudo-estendida  $so'(2, 1) \times \mathfrak{K}$  (1.41) é efetuada tomando-se o limite  $\Lambda \rightarrow 0$ , o que define a álgebra de Poincaré estendida  $\bar{i}_2^1$

$$[P_a, J] = \varepsilon_a{}^b P_b, \quad [P_a, P_b] = B \varepsilon_{ab} I, \quad [P_a, I] = [J, I] = 0. \tag{1.50}$$

Os geradores de  $\bar{i}_2^1$  também serão denotados por  $\{\bar{T}_A\}$ , onde  $A \in \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $a, b \in \{0, 1\}$  e

$$\begin{aligned}
[\bar{T}_A, \bar{T}_B] &= f_{AB}^C \bar{T}_C \\
\bar{T}_a &= P_a \quad \bar{T}_2 = J \quad \bar{T}_3 = I.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Da equação (1.50) vemos que a extensão é central pois o gerador  $I$ , associado à coordenada  $\beta$  de  $\bar{\mathcal{P}}$ , ocupa o centro da álgebra .

Observe que o diagrama mostrado na figura 1.1 não é comutativo. De fato, este é um exemplo de geração de cohomologia de álgebra por um processo de contração<sup>8</sup> . Mostramos<sup>9</sup> que no limite de contração  $\Lambda \rightarrow 0$  a 2-coborda  $\xi_{cob}(g', g)$  gera um 2-cociclo não trivial  $\xi_B(g', g)$  na cohomologia do grupo  $\mathcal{P}$  tal que  $i_2^1 \times \mathfrak{K}$  e  $\bar{i}_2^1$  não podem ser relacionadas pela adição de uma 2-coborda na cohomologia de  $\mathcal{P}$ , o que mostra o caráter não trivial da extensão.

<sup>7</sup>Veja página 19 e (1.10).

<sup>8</sup>Veja discussão na página 17.

<sup>9</sup>Veja discussão nas páginas 22 e 23.

$$\begin{array}{ccc}
so(2, 1) \times \mathfrak{R} & \xrightarrow{\text{contração}} & i_2^1 \times \mathfrak{R} \\
\text{adição} & \downarrow & \downarrow \\
\text{de coborda} & & \\
so'(2, 1) \times \mathfrak{R} & \xrightarrow{\text{contração}} & \bar{i}_2^1
\end{array}$$

Figura 1.1: Geração de cohomologia por contração

## 1.2 Estrutura e propriedades de $\bar{i}_2^1$

Iniciaremos relembando a definição de “ideal”, que nos será útil adiante. Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie, então para dois subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $\mathfrak{g}$  utilizaremos a notação  $[A, B]$  para indicar o subespaço gerado por

$$[A, B] = \{[X, Y] : X \in A, Y \in B\}. \quad (1.52)$$

**Definição 1.2.1 (Ideal)** *Um subespaço  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  é um ideal se  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ .*

**Nota 1.2.1** *É evidente que todo ideal é subálgebra. No entanto, nem toda subálgebra é ideal.*

Para investigar a estrutura da álgebra  $\bar{i}_2^1$  (1.50), é útil reescrevê-la por meio dos geradores  $\{H, P, Q, E\}$  definidos por

$$H = -J \quad P = P_0 \quad Q = P_1 \quad E = BI, \quad (1.53)$$

em termos dos quais obtemos

$$\begin{aligned}
[Q, P] &= E & [H, Q] &= P & [H, P] &= Q \\
[H, E] &= [P, E] = [Q, E] & &= 0.
\end{aligned} \quad (1.54)$$

**Nota 1.2.2** *De imediato notamos que o subespaço gerado por  $\{Q, P, E\}$  é um ideal de  $\bar{i}_2^1$  isomorfo à álgebra de Weyl-Heisenberg  $wh$ , enquanto que  $so(1, 1) = \mathfrak{R}$  é a subálgebra abeliana gerada por  $\{H\}$  (1.54).*

A álgebra de Poincaré estendida possui uma estrutura de produto semi-direto, como mostra a (Prop.1.2.2), a qual demonstraremos depois de relembrar a definição de “derivação”:

**Definição 1.2.2 (Derivação)** *Uma aplicação linear  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é uma derivação da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se satisfaz*

$$D[X, Y] = [DX, Y] + [X, DY] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (1.55)$$

**Nota 1.2.3** *O conjunto das “derivações” formado pela imagem da representação adjunta constitui as chamadas “derivações internas”. De fato,  $ad(X)$  é uma “derivação”, pois satisfaz a equação (1.55), ou*

$$ad(X)[Y, Z] = [ad(X)Y, Z] + [Y, ad(X)Z], \quad (1.56)$$

*em virtude da identidade de Jacobi [30, p.35].*

Representando-se uma álgebra de Lie em outra por derivações (Def.1.2.2), pode-se construir uma álgebra de Lie no produto cartesiano das duas álgebras, denominado “produto semi-direto”.

**Proposição 1.2.1 (Produto semidireto)** *Sejam  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  álgebras de Lie e  $\rho$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{h}$ . Se, para todo  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $\rho(X)$  for uma “derivação” (Def.1.2.2) de  $\mathfrak{h}$ , então  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  será uma álgebra de Lie com colchete definido por*

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], \rho(X_1)Y_2 - \rho(X_2)Y_1 + [Y_1, Y_2]). \quad (1.57)$$

*Com esse colchete,  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$  se decompõe em uma soma direta*

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = (\mathfrak{g} \times 0) \oplus (0 \times \mathfrak{h})$$

*de uma subálgebra isomorfa a  $\mathfrak{g}$  por um ideal isomorfo a  $\mathfrak{h}$ <sup>10</sup>.*

<sup>10</sup>Para uma prova, veja [30, p.37].

**Nota 1.2.4** A notação empregada para o produto semidireto é  $\mathfrak{g} \times_s \mathfrak{h}$  ou  $\mathfrak{g} \times_\rho \mathfrak{h}$ . A última notação, além de distinguir  $\mathfrak{g}$  de  $\mathfrak{h}$ , tem a vantagem de ressaltar a representação que define o produto semidireto.

**Nota 1.2.5** Como consequência da última afirmação da proposição 1.2.1, quaisquer duas álgebras de Lie  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$ , com uma representação  $\rho$  bem definida entre elas, estão sempre associadas a uma única álgebra  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g} \times_\rho \mathfrak{h}$  e a recíproca também é verdadeira; toda álgebra  $\mathfrak{s}$  que seja uma soma direta de um ideal  $\mathfrak{h}$  por uma subálgebra  $\mathfrak{g}$  é isomorfa ao produto semidireto  $\mathfrak{g} \times_\rho \mathfrak{h}$ , com a representação de  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{h}$  dada pela restrição a  $\mathfrak{g}$  da representação adjunta de  $\mathfrak{s}$ , o que é possível pelo fato de  $\mathfrak{h}$  ser um ideal [30, p.38].

**Proposição 1.2.2** A álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1$  é isomorfa ao produto semidireto

$$\bar{\mathfrak{i}}_2^1 = so(1, 1) \times_\rho wh, \quad (1.58)$$

com a representação de  $so(1, 1)$  em  $wh$  fornecida pela restrição a  $so(1, 1)$  da representação adjunta de  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1$  (Nota 1.2.5), onde  $wh$  é o ideal de  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1$  gerado por  $\{Q, P, E\}$  e  $so(1, 1) = \mathfrak{R}$  é a subálgebra abeliana gerada por  $\{H\}$  (Nota 1.2.2).

*Prova* : A álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1$  evidentemente se decompõe na soma direta  $so(1, 1) \oplus wh$ . Esta decomposição pode ser efetuada por meio do mapeamento linear  $\varphi : \bar{\mathfrak{i}}_2^1 \rightarrow so(1, 1) \oplus wh$ , definido tal que  $\varphi(V) = (X, Y)$ ,  $V \in \bar{\mathfrak{i}}_2^1$ ,  $X \in so(1, 1)$ ,  $Y \in wh$  e

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= (0, Q) \\ \varphi(P) &= (0, P) \\ \varphi(E) &= (0, E) \\ \varphi(J) &= (J, 0). \end{aligned} \quad (1.59)$$

Além disso, restringindo a representação adjunta de  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1$  a  $so(1, 1)$ , obtemos a representação  $\rho$  de  $so(1, 1)$  em  $wh$ ,  $\rho(X) : wh \rightarrow wh$ ,

$$\rho(X)Y = ad(X)Y = [X, Y], \quad (1.60)$$

onde  $X \in so(1, 1)$  e  $Y \in wh$ . Note que a representação  $\rho$  está bem definida pois  $wh$  é um ideal de  $\bar{\mathfrak{g}}_2^1$ .

A soma direta  $so(1, 1) \oplus wh$  torna-se o produto semidireto  $so(1, 1) \times_{\rho} wh$ , com o colchete

$$[\varphi(V_1), \varphi(V_2)] = ([X_1, X_2], \rho(X_1)Y_2 - \rho(X_2)Y_1 + [Y_1, Y_2]), \quad (1.61)$$

de modo que a decomposição de  $\bar{\mathfrak{g}}_2^1$ , efetuada pelo mapeamento  $\varphi$ , é um isomorfismo  $\varphi : \bar{\mathfrak{g}}_2^1 \rightarrow so(1, 1) \times_{\rho} wh$ , tal que

$$[\varphi(V_1), \varphi(V_2)] = \varphi([V_1, V_2]). \quad (1.62)$$

De fato, usando (1.59) e (1.61), não é difícil verificar que

$$\begin{aligned} [\varphi(Q), \varphi(P)] &= \varphi([Q, P]) = \varphi(E) \\ [\varphi(H), \varphi(Q)] &= \varphi([H, Q]) = \varphi(P) \\ [\varphi(H), \varphi(P)] &= \varphi([H, P]) = \varphi(Q) \\ [\varphi(H), \varphi(E)] &= \varphi([H, E]) = 0 \\ [\varphi(P), \varphi(E)] &= \varphi([P, E]) = 0 \\ [\varphi(Q), \varphi(E)] &= \varphi([Q, E]) = 0. \quad QED \end{aligned} \quad (1.63)$$

Mostraremos em seguida que a álgebra de Poincaré estendida não é nilpotente, mas é solúvel. Antes de definirmos álgebras solúveis e nilpotentes, porém, definiremos as séries de composição.

**Definição 1.2.3 (Série derivada)** A “série derivada” da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é definida, por indução, em termos da seguinte seqüência de subespaços:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Pode-se mostrar<sup>11</sup> que as componentes  $\mathfrak{g}^{(k)}$ , denominadas “álgebras derivadas” de  $\mathfrak{g}$ , são ideais para todo  $k \geq 0$ . Em particular  $\mathfrak{g}^{(k)}$  são subálgebras e, portanto, a seqüência (1.64) é decrescente:  $\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}$ .

**Definição 1.2.4 (Série central descendente)** *A “série central descendente” da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é definida, por indução, em termos da seguinte seqüência de subespaços:*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Pode-se mostrar<sup>12</sup> que as componentes  $\mathfrak{g}^k$  são ideais, para todo  $k \geq 1$ , e que a “série central descendente” (1.65) é decrescente:  $\mathfrak{g}^{k+1} \subset \mathfrak{g}^k$ . Mostra-se também que a “série derivada” (1.64) decresce mais rápido que a “série central descendente” (1.65):  $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$ .

**Definição 1.2.5 (Álgebras solúveis)** *Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$$

*para algum  $k_0 \geq 1$  (e, portanto,  $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$  para todo  $k \geq k_0$ ) [30, p.43].*

Diremos que um grupo de Lie é solúvel se sua álgebra de Lie for solúvel.

**Definição 1.2.6 (Álgebras nilpotentes)** *Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é nilpotente se sua “série central descendente” se anula em algum momento, isto é,*

$$\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$$

*para algum  $k_0 \geq 1$  (e, portanto,  $\mathfrak{g}^k = 0$  para todo  $k \geq k_0$ ) [30, p.45].*

<sup>11</sup>Para uma prova veja [30, p.39].

<sup>12</sup>Para uma prova veja [30, p.42].

Diremos que um grupo de Lie é nilpotente se sua álgebra de Lie for nilpotente.

**Nota 1.2.6** Destacamos que toda álgebra de Lie nilpotente também é solúvel, pois  $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^{k+1}$  mas a recíproca não é verdadeira, como mostra a álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{v}}_2^1$  (Prop.1.2.4).

**Nota 1.2.7** É importante salientar que a classe das álgebras nilpotentes e, portanto, a das solúveis, contém as álgebras abelianas e constituem uma espécie de extensão das mesmas. Nesse sentido, as álgebras solúveis ou nilpotentes diferem completamente das semi-simples, que são o oposto das álgebras abelianas [30, p.49].

A importância das álgebras solúveis deve-se ao teorema de Levi (Teo.1.4.6) que decompõe uma álgebra de Lie arbitrária como soma direta de uma álgebra semi-simples e uma álgebra solúvel. Nesse contexto é importante a noção de radical solúvel, definido por meio da seguinte proposição<sup>13</sup>:

**Proposição 1.2.3** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então existe em  $\mathfrak{g}$  um único ideal (Def.1.2.1) solúvel (Def.1.2.5)  $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$  que contém todos os ideais solúveis de  $\mathfrak{g}$ . Este ideal solúvel de dimensão máxima é chamado de radical de  $\mathfrak{g}$ , para o qual utilizaremos a notação  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ .

**Nota 1.2.8** Então  $\mathfrak{g}$  é solúvel se e somente se  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ .

**Definição 1.2.7 (Álgebras semi-simples)** Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é semi-simples se

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0,$$

isto é,  $\mathfrak{g}$  não contém ideais solúveis além de 0.

**Proposição 1.2.4** A álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{v}}_2^1$  e, portanto, o grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  não são nilpotentes (Def.1.2.6) mas são solúveis (Def.1.2.5).

---

<sup>13</sup>Para uma prova veja [30, p.47].



*Prova* : A álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{g}}_2^1$  não é nilpotente pois, calculando sua “série central descendente” (Def.1.2.4),

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{g}}_2^{1^1} &= \bar{\mathfrak{g}}_2^1 \\ \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^2} &= [\bar{\mathfrak{g}}_2^1, \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^1}] = wh \\ \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^k} &= [\bar{\mathfrak{g}}_2^1, \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{k-1}}] = wh \quad \forall k \geq 2,\end{aligned}\tag{1.66}$$

vemos que a mesma não se anula para nenhum valor de  $k$ .

Apesar de não ser nilpotente (Nota1.2.6), a álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{g}}_2^1$  é solúvel pois, calculando sua “série derivada” (Def.1.2.3),

$$\begin{aligned}\bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(0)}} &= \bar{\mathfrak{g}}_2^1 \\ \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(1)}} &= [\bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(0)}}, \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(0)}}] = wh \\ \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(2)}} &= [\bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(1)}}, \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(1)}}] = \{E\} \\ \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(k)}} &= [\bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(k-1)}}, \bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(k-1)}}] = 0 \quad \forall k \geq 3,\end{aligned}\tag{1.67}$$

onde  $\bar{\mathfrak{g}}_2^{1^{(2)}}$  é isomorfo ao subespaço de  $\bar{\mathfrak{g}}_2^1$  gerado por  $\{E\}$ , vemos que a mesma se anula para todo  $k \geq 3$ . QED

Ocorre que a álgebra de Poincaré estendida e, conseqüentemente, o grupo de Poincaré estendido, são “solúveis exponenciais”, o que demonstraremos após apresentarmos a seguinte definição [6, p.38]:

**Definição 1.2.8 (Grupos e álgebras exponenciais)** *Seja  $G$  um grupo de Lie real conexo e  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie. Diremos que  $G$  é “exponencial” se a aplicação exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$  for sobrejetora. Diremos que uma álgebra de Lie é “exponencial” se for a álgebra de Lie de um grupo “exponencial”.*

A prova é conseqüência do seguinte teorema <sup>14</sup>:

**Teorema 1.2.1** *Sejam  $G$  um grupo de Lie real, solúvel, conexo e simplesmente conexo e  $\mathfrak{g}$  sua álgebra de Lie, com a aplicação exponencial  $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

<sup>14</sup>Para uma prova veja [7, p.2].

1. Para todo  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $ad(X)$  não possui autovalores não nulos e imaginários puros.
2. A aplicação exponencial  $exp$  é injetora.
3. A aplicação exponencial  $exp$  é sobrejetora.
4. A aplicação exponencial  $exp$  é bijetora.
5. A aplicação exponencial  $exp$  é um difeomorfismo.
6. As raízes<sup>15</sup> de  $\mathfrak{g}$  têm a forma  $\psi(X)(1 + i\alpha)$ , onde  $\alpha \in \mathfrak{R}$  e  $\psi$  é uma forma linear real sobre  $\mathfrak{g}$ .

**Definição 1.2.9 (Álgebras e grupos solúveis exponenciais)** Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e o grupo  $G$  conexo e simplesmente conexo correspondente são ditos serem “solúveis exponenciais” se satisfizerem às condições do teorema 1.2.1.

**Nota 1.2.9** Observe que nem toda álgebra “exponencial” é “solúvel”, como mostra a álgebra de Lie do grupo  $SO(3)$ , por exemplo, que é “exponencial”, de acordo com a definição 1.2.8, mas não é “solúvel” [36, p.114]. Da mesma forma, nem toda álgebra “solúvel” é “exponencial”, como mostram as álgebras de Lie do grupo do oscilador harmônico unidimensional  $H_4$  e do grupo euclidiano em duas dimensões  $ISO(2)$ , por exemplo, que são “solúveis” mas não são “exponenciais” [3, p.254].

**Nota 1.2.10** Note que toda álgebra “nilpotente” é “solúvel exponencial”, mas a recíproca não é verdadeira, como mostra a álgebra de Poincaré estendida  $\overline{\mathfrak{h}}_2^1$  (Prop.1.2.5 e Prop.1.2.4). Isto significa que as álgebras “solúveis exponenciais” formam uma extensão das álgebras “nilpotentes”.

---

<sup>15</sup>Esta condição coincide com o critério de Dixmier que determina se o mapeamento exponencial é sobrejetor ou não, em um grupo de Lie solúvel (veja [13] e [33, p.224]).

**Proposição 1.2.5** *A álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  e o grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  são solúveis exponenciais (Def.1.2.9).*

*Prova* : Basta verificar que, para todo  $X \in \bar{\mathfrak{p}}_2^1$ ,  $ad(X)$  não possui auto-valores não nulos e imaginários puros. De fato, para todo  $X \in \bar{\mathfrak{p}}_2^1$ ,

$$ad(X) = \begin{pmatrix} 0 & -X^2 & X^1 & 0 \\ -X^2 & 0 & X^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ BX^1 & -BX^0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.68)$$

onde  $X = X^a P_a + X^2 J + X^3 I$ , tal que os auto-valores de  $ad(X)$  são  $\{0, 0, -X^2, X^2\}$ <sup>16</sup>. Logo, pelo (Teo.1.2.1), a álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  é “solúvel exponencial”. QED

Vimos que a álgebra de Poincaré estendida é isomorfa a um produto semidireto  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1 = so(1, 1) \times_s wh$  (Nota1.2.4), onde  $wh$  é a álgebra de Lie do grupo de Weyl-Heisenberg  $WH$ . Encerraremos esta seção com alguns comentários acerca desta importante subálgebra de  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$ . A álgebra  $wh$  é nilpotente, exponencial e solúvel [3] [30], sendo ainda a extensão central de  $\mathfrak{R}^2$  por  $\mathfrak{R}$  ou  $U(1)$ . A última característica implica, em particular, que a álgebra  $wh$  não possui uma estrutura de produto semi-direto do tipo  $\mathfrak{R}^2 \times_s \mathfrak{R}$ , dado o caráter não-trivial da extensão central. As variedades diferenciáveis da álgebra  $wh$  e do grupo  $WH$  são ambas difeomorfas a  $\mathfrak{R}^3$ , apesar de possuírem uma estrutura algébrica não-abeliana adicional à de espaço vetorial.

Vale notar que  $WH(\mathfrak{R}^2, U(1) \text{ ou } \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^3$  possui uma estrutura de fibrado principal [3, p.165], sendo que  $\mathfrak{R}^3 = \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}$  globalmente enquanto que  $\mathfrak{R}^3 \sim \mathfrak{R}^2 \times S^1$  apenas localmente. Então, no caso de extensão por  $\mathfrak{R}$ ,  $WH$  ou  $wh$  formam um fibrado principal trivial, enquanto que na extensão por  $U(1)$  formam um fibrado principal não-trivial.

---

<sup>16</sup>Veja a seção 1.3.

No caso de extensão por  $\mathfrak{R}$ ,  $wh$  ou  $WH$  possuem topologia  $\mathfrak{R}^3 = \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}$ , embora não possuam uma estrutura algébrica do tipo  $\mathfrak{R}^2 \times_s \mathfrak{R}$ . A estrutura algébrica não-abeliana de  $WH$  ou  $wh$  é independente de sua estrutura topológica. Entretanto esta estrutura não-abeliana não é qualquer;  $wh$  é nilpotente e, portanto, pertence a uma espécie de extensão das álgebras abelianas (Nota1.2.7).

### 1.3 O grupo de Poincaré estendido $\bar{\mathcal{P}}$

Uma vez que a álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  é solúvel exponencial (Prop.1.2.5), definimos o grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  como sendo o grupo conexo e simplesmente conexo  $\bar{\mathcal{P}}$  obtido como a imagem de  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  pelo mapeamento exponencial

$$\exp : \bar{\mathfrak{I}}_2^1 \rightarrow \bar{\mathcal{P}}. \quad (1.69)$$

Neste caso,  $\exp$  é um difeomorfismo global, conseqüentemente o grupo  $\bar{\mathcal{P}}$  é homologicamente trivial [3, p.254]. De fato,  $\bar{\mathcal{P}}$  é globalmente difeomorfo a  $\mathfrak{R}^4$ , sendo então também homotopicamente trivial, contrátil, etc.

Outra conseqüência da exponenciabilidade de  $\bar{\mathcal{P}}$  é que todo elemento do grupo pertence a um subgrupo uniparamétrico. Portanto, podemos empregar o mapeamento exponencial para efetuar várias decomposições de  $\bar{\mathcal{P}}$  em “co-conjuntos”, cada uma atribuindo parâmetros diferentes aos elementos do grupo e todas relacionadas por fórmulas de Baker-Campbell-Hausdorff.

Mostraremos em seguida que a decomposição em “co-conjuntos” que gera os parâmetros associados à lei de composição (1.49) é dada por  $g = g(\theta^a, \alpha, \beta)$  tal que (1.51)

$$g(\theta^a, \alpha, \beta) = \tau(\theta^c)S(\alpha)W(\beta) \quad \forall g \in \bar{\mathcal{P}}, \quad (1.70)$$

onde

$$\tau(\theta^c) = \exp(\theta^c \bar{T}_c), \quad S(\alpha) = \exp(\alpha \bar{T}_2), \quad W(\beta) = \exp(\beta \bar{T}_3). \quad (1.71)$$

A representação adjunta da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  pode ser obtida diretamente a partir da equação (1.50), usando

$$ad(\bar{T}_C)^A{}_B = f_{CB}^A, \quad (1.72)$$

$$ad(P_c)^A{}_B = \begin{pmatrix} 0 & -\varepsilon^a{}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B\varepsilon_{cb} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(J)^A{}_B = \begin{pmatrix} \varepsilon^a{}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(I)^A{}_B = 0. \quad (1.73)$$

A representação adjunta do grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$ , por sua vez, pode ser obtida a partir da equação (1.70) e

$$(Adg)^A{}_B = (Adexp(\theta^c P_c))^A{}_C (Adexp(\alpha J))^C{}_D (Adexp(\beta I))^D{}_B. \quad (1.74)$$

Imediatamente notamos (1.73) que

$$(Adexp(\beta I))^D{}_B = \delta^D{}_B. \quad (1.75)$$

O primeiro e o segundo fatores de (1.74) podem ser obtidos da equação (1.73) e somando-se diretamente a série que define a exponencial. No caso do primeiro fator, a série é truncada no terceiro termo:

$$\begin{aligned} \theta^c ad(P_c) &= \begin{pmatrix} 0 & -\theta^c \varepsilon^a{}_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ B\theta^c \varepsilon_{cb} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ (\theta^c ad(P_c))^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B\theta^c \theta_c & 0 \end{pmatrix} \\ (\theta^c ad(P_c))^3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.76)$$

de modo que, usando (1.76),

$$(Adexp(\theta^c P_c))^A{}_C = (exp(\theta^c ad(P_c)))^A{}_C$$

$$\begin{aligned}
(Adexp(\theta^c P_c))^A_C &= \delta^A_C + \theta^c ad(P_c) + \frac{1}{2}(\theta^c ad(P_c))^2 \\
(Adexp(\theta^c P_c))^A_C &= \begin{pmatrix} \delta^a_b & -\theta^c \varepsilon^a_c & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B\theta^c \varepsilon_{cb} & -\frac{B}{2}\theta^c \theta_c & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.77}
\end{aligned}$$

Quanto ao segundo fator obtemos

$$\begin{aligned}
(Adexp(\alpha J))^C_D &= (exp(\alpha ad(J)))^C_D \\
(Adexp(\alpha J))^C_D &= \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha ad(J))^m}{m!} \right)^C_D \\
(Adexp(\alpha J))^C_D &= \begin{pmatrix} \delta^c_d \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2m}}{(2m)!} + \varepsilon^c_d \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2m+1}}{(2m+1)!} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(Adexp(\alpha J))^C_D &= \begin{pmatrix} \Lambda^c_d & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.78}
\end{aligned}$$

Então, substituindo (1.75), (1.77) e (1.78) em (1.74), obtemos a representação adjunta e sua inversa

$$(Adg)^A_B = \begin{pmatrix} \Lambda^a_b & \theta^c \varepsilon_c^a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ B\theta^c \varepsilon_{cd} \Lambda^d_b & -\frac{B}{2}\theta^a \theta_a & 1 \end{pmatrix} \text{ e} \tag{1.79}$$

$$(Adg^{-1})^A_B = \begin{pmatrix} (\Lambda^{-1})^a_b & -(\Lambda^{-1})^c_d \theta^d \varepsilon_c^a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -B\theta^c \varepsilon_{cb} & -\frac{B}{2}\theta^a \theta_a & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.80}$$

A 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita a valores na álgebra  $\mathfrak{g}_2^1$  pode ser obtida de (1.70) e lembrando [12, p.80] que se  $g = exp(X^A \bar{T}_A)$  então

$$dgg^{-1} = \bar{T}_A (R_{g*}(e)^{-1})^A_B dX^B, \tag{1.81}$$

com

$$(R_{g^*}(e)^{-1})^A_B = \left( \frac{\exp(X^C ad(\bar{T}_C)) - \mathbf{1}}{X^C ad(\bar{T}_C)} \right)^A_B, \quad (1.82)$$

onde

$$\left( \frac{\exp(X^C ad(\bar{T}_C)) - \mathbf{1}}{X^C ad(\bar{T}_C)} \right)^A_B = \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(X^C ad(\bar{T}_C))^m}{(m+1)!} \right)^A_B. \quad (1.83)$$

De fato, usando (1.70) e (1.81), temos

$$\begin{aligned} dg &= d\tau SW + \tau dSW + \tau SdW \\ g^{-1} &= W^{-1}S^{-1}\tau^{-1} \\ dgg^{-1} &= d\tau\tau^{-1} + \tau dSS^{-1}\tau^{-1} + dWW^{-1} \end{aligned} \quad (1.84)$$

e, uma vez que,

$$\begin{aligned} d\tau\tau^{-1} &= P_a d\theta^a + I \frac{B}{2} \theta^b \varepsilon_{ba} d\theta^a \\ dSS^{-1} &= Jd\alpha \\ dWW^{-1} &= Id\beta, \end{aligned} \quad (1.85)$$

de (1.84-1.85), temos

$$dgg^{-1} = P_a d\theta^a + \tau J\tau^{-1} d\alpha + I \left( \frac{B}{2} \theta^b \varepsilon_{ba} d\theta^a + d\beta \right). \quad (1.86)$$

O segundo termo de (1.86) pode ser calculado lembrando [10, p.243] que

$$g\bar{T}_A g^{-1} = \bar{T}_B (Adg)^B_A, \quad (1.87)$$

de modo que, usando (1.87) e (1.79), temos

$$\begin{aligned} \tau J\tau^{-1} &= \bar{T}_B (Ad\tau)^B_2 \\ \tau J\tau^{-1} &= P_a \theta^c \varepsilon_c^a + J - I \frac{B}{2} \theta^a \theta_a. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Então, a partir de (1.86) e (1.88), obtemos a expressão da 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita

$$dgg^{-1} = P_a (d\theta^a - \varepsilon^a_b \theta^b d\alpha) + Jd\alpha + I \left( d\beta - \frac{B}{2} \theta^a \theta_a d\alpha + \frac{B}{2} \theta^b \varepsilon_{ba} d\theta^a \right). \quad (1.89)$$

Enfatizamos que as expressões da representação adjunta do grupo  $\bar{\mathcal{P}}$  (1.79) e da 1-forma de Maurer Cartan invariante à direita (1.89) foram obtidas exclusivamente a partir da álgebra  $\bar{\mathfrak{g}}_2^1$  (1.50) e da decomposição em “co-conjuntos” (1.70), sendo que em nenhuma etapa dos cálculos foi utilizada a lei de composição de  $\bar{\mathcal{P}}$  (1.49).

Vamos considerar agora a multiplicação de dois elementos quaisquer do grupo de Poincaré estendido. Podemos associar a cada  $g(\theta^a, \alpha, \beta) \in \bar{\mathcal{P}}$  um elemento de um subgrupo uniparamétrico<sup>17</sup>  $g(t) = g(\theta^a(t), \alpha(t), \beta(t)) \in \bar{\mathcal{P}}$  tal que

$$\begin{aligned}\theta^a(t) &= \theta^a \\ \alpha(t) &= \alpha \\ \beta(t) &= \beta,\end{aligned}\tag{1.90}$$

em termos dos parâmetros gerados pela decomposição em “co-conjuntos” (1.70). Então é possível escrever a lei de grupo sob a forma

$$g''(\theta''^a(t), \alpha''(t), \beta''(t)) = g'(\theta'^a(t), \alpha'(t), \beta'(t))g(\theta^a(t), \alpha(t), \beta(t)).\tag{1.91}$$

E, uma vez que conhecemos a expressão da 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita (1.89), de (1.91) calculamos

$$\dot{g}''g''^{-1} = \dot{g}'g'^{-1} + g'\dot{g}g^{-1}g'^{-1},\tag{1.92}$$

onde o ponto denota a derivada com respeito ao parâmetro  $t$  do subgrupo.

Para obter o segundo termo de (1.92),

$$g'\dot{g}g^{-1}g'^{-1} = (\dot{g}g^{-1})^a g' P_a g'^{-1} + (\dot{g}g^{-1})^2 g' J g'^{-1} + (\dot{g}g^{-1})^3 I,\tag{1.93}$$

usando (1.79) e (1.87), calculamos

$$\begin{aligned}S' P_a S'^{-1} &= \bar{T}_A(AdS')^A_a = P_b \Lambda(\alpha')^b_a \\ \tau' P_a \tau'^{-1} &= \bar{T}_A(Ad\tau')^A_a = P_a + B\theta'^c \varepsilon_{ca} I.\end{aligned}\tag{1.94}$$

---

<sup>17</sup>Veja discussão na página 34.



Então, de (1.94), temos

$$\begin{aligned}
 g'P_ag'^{-1} &= \tau'S'P_aS'^{-1}\tau'^{-1} \\
 g'P_bg'^{-1} &= \tau'P_b\tau'^{-1}\Lambda(\alpha')^b{}_a \\
 g'P_ag'^{-1} &= \Lambda(\alpha')^b{}_aP_b + B\theta'^c\varepsilon_{cb}\Lambda(\alpha')^b{}_aI
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

e, de (1.88),

$$g'Jg'^{-1} = \tau'J\tau'^{-1} = P_a\theta'^c\varepsilon_c{}^a + J - I\frac{B}{2}\theta'^a\theta'_a. \tag{1.96}$$

Portanto, usando (1.93), (1.95) e (1.96), obtemos

$$\begin{aligned}
 g'\dot{g}g^{-1}g'^{-1} &= (\Lambda(\alpha')^b{}_a(\dot{g}g^{-1})^a - (\dot{g}g^{-1})^2\varepsilon^b{}_c\theta'^c)P_b + (\dot{g}g^{-1})^2J + \\
 &+ (B\theta'^c\varepsilon_{cb}\Lambda(\alpha')^b{}_a(\dot{g}g^{-1})^a - \frac{B}{2}(\dot{g}g^{-1})^2\theta'^a\theta'_a + (\dot{g}g^{-1})^3)I.
 \end{aligned} \tag{1.97}$$

Utilizando as equações (1.89), (1.92) e (1.97) obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas de primeira ordem:

$$\left\{ \begin{aligned}
 \dot{\theta}''^a - \varepsilon^a{}_c\theta''^c\dot{\alpha}'' &= \dot{\theta}'^a - \varepsilon^a{}_c\theta'^c\dot{\alpha}' + \Lambda(\alpha')^a{}_b(\dot{\theta}^b - \varepsilon^b{}_c\theta^c\dot{\alpha}) - \\
 &- \dot{\alpha}\varepsilon^a{}_b\theta^b \\
 \dot{\alpha}'' &= \dot{\alpha}' + \dot{\alpha} \\
 \dot{\beta}'' - \frac{B}{2}\theta''^a\theta''_a\dot{\alpha}'' + \frac{B}{2}\theta''^b\varepsilon_{ba}\dot{\theta}''^a &= \dot{\beta}' - \frac{B}{2}\theta'^a\theta'_a\dot{\alpha}' + \frac{B}{2}\theta'^b\varepsilon_{ba}\dot{\theta}'^a + \\
 &+ B\theta'^a\varepsilon_{ab}\Lambda(\alpha')^b{}_c(\dot{\theta}^c - \varepsilon^c{}_d\theta^d\dot{\alpha}) - \\
 &- \frac{B}{2}\theta'^a\theta'_a\dot{\alpha} + \dot{\beta} - \frac{B}{2}\theta^a\theta_a\dot{\alpha} + \frac{B}{2}\theta^b\varepsilon_{ba}\dot{\theta}^a.
 \end{aligned} \right. \tag{1.98}$$

A segunda equação do sistema (1.98) pode ser integrada diretamente, fornecendo

$$\begin{aligned}
 \alpha''(t) &= \alpha'(t) + \alpha(t) \\
 \Lambda(\alpha''(t))^a{}_b &= \Lambda(\alpha'(t))^a{}_c\Lambda(\alpha(t))^c{}_b.
 \end{aligned} \tag{1.99}$$

Observando que

$$\Lambda(\alpha)^a{}_b \frac{d}{dt}(\Lambda^{-1}(\alpha)^b{}_c \theta^c) = \dot{\theta}^a - \varepsilon^a{}_b \theta^b \dot{\alpha} \quad (1.100)$$

e usando (1.99) podemos reescrever a primeira equação do sistema (1.98) como

$$\frac{d}{dt}(\Lambda^{-1}(\alpha'')^a{}_b \theta''^b) = \frac{d}{dt}(\Lambda^{-1}(\alpha)^a{}_b \theta^b) + \frac{d}{dt}(\Lambda^{-1}(\alpha'')^a{}_b \theta^b). \quad (1.101)$$

Integrando (1.101) obtemos

$$\theta''^a(t) = \theta'^a(t) + \Lambda(\alpha'(t))^a{}_b \theta^b(t). \quad (1.102)$$

Utilizando (1.99) e (1.102), calculamos

$$\begin{aligned} -\frac{B}{2} \theta''^a \theta''^a \dot{\alpha}'' + \frac{B}{2} \theta''^b \varepsilon_{ba} \dot{\theta}''^a &= -\frac{B}{2} \theta'^a \Lambda(\alpha')^a{}_b \theta^b \dot{\alpha}' - \frac{B}{2} \theta'^a \theta'^a \dot{\alpha}' - \frac{B}{2} \theta^a \theta_a \dot{\alpha} - \\ &\quad - \frac{B}{2} \theta'^a \theta'^a \dot{\alpha} - B \theta'^a \Lambda(\alpha')^a{}_b \theta^b \dot{\alpha} + \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \dot{\theta}^b - \\ &\quad - \frac{B}{2} \theta'^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha')^b{}_c \theta^c + \frac{B}{2} \theta'^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha')^b{}_c \dot{\theta}^c + \\ &\quad + \frac{B}{2} \theta'^a \varepsilon_{ab} \dot{\theta}^b \end{aligned} \quad (1.103)$$

e, substituindo (1.103) na terceira equação do sistema (1.98), temos

$$\dot{\beta}'' = \dot{\beta}' + \dot{\beta} + \frac{B}{2} \frac{d}{dt}(\theta'^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha')^b{}_c \theta^c). \quad (1.104)$$

Integrando (1.104) obtemos

$$\beta''(t) = \beta'(t) + \beta(t) + \frac{B}{2} \theta'^a(t) \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha'(t))^b{}_c \theta^c(t). \quad (1.105)$$

Por fim, aplicando a associação (1.90) às equações (1.99), (1.102) e (1.105), obtemos a lei de grupo (1.49). Deste modo, mostramos que a lei de composição do grupo  $\bar{\mathcal{P}}$  é determinada pela sua álgebra de Lie  $\bar{\mathfrak{L}}_2^1$  (1.50) e pela decomposição em “co-conjuntos” (1.70), como queríamos demonstrar<sup>18</sup>.

<sup>18</sup>Veja a página 34.

### 1.3.1 Formas e campos invariantes sobre $\bar{\mathcal{P}}$

Nesta subsecção obteremos as expressões dos campos vetoriais e 1-formas invariantes à direita e à esquerda nas coordenadas (1.70) de  $\bar{\mathcal{P}}$ , as quais serão amplamente utilizadas nos próximos capítulos. Lembramos que, num grupo de Lie  $G$  de dimensão  $r$  e álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = T_e(G)$

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k \quad i, j, k \in \{1, \dots, r\}, \quad (1.106)$$

a lei de grupo

$$g'' = g'g := L_{g'}g := R_g g' \quad \forall g', g \in G, \quad (1.107)$$

pode ser interpretada de duas maneiras; como a “ação à esquerda”  $L_{g'}$  de um elemento fixo do grupo  $g'$  sobre a variedade  $G$  parametrizada pelas coordenadas  $g^i$  de  $g$ , ou como o resultado da ação à direita  $R_g$  sobre  $G$ , desta vez parametrizada pelas coordenadas de  $g'$ .

No primeiro caso, obtemos os geradores  $\{T_i^R(g)\}$  da “ação à esquerda”, que formam uma base do espaço vetorial de dimensão  $r$  dos “campos vetoriais invariantes à direita” sobre  $G$ ,  $\mathfrak{X}^R(G)$ , razão pela qual empregaremos o índice superscrito  $R$ . Estes campos vetoriais são expressos nas coordenadas  $g^i$  do grupo  $G$  por

$$T_i^R(g) = (R_{g^*}(e))^j_i \frac{\partial}{\partial g^j}, \quad (1.108)$$

onde

$$(R_{g^*}(e))^j_i = \left. \frac{\partial g''^j(g', g)}{\partial g'^i} \right|_{\substack{g'=e \\ g=g}}. \quad (1.109)$$

O espaço vetorial  $\mathfrak{X}^R(G)$ , com o colchete de Lie, constitui uma álgebra de Lie anti-homomorfa a  $\mathfrak{g}$  (1.106), isto é,

$$[T_i^R(g), T_j^R(g)] = -f_{ij}^k T_k^R(g). \quad (1.110)$$

No segundo caso, obtemos os geradores  $\{T_i(g)\}$  da “ação à direita”, que formam uma base do espaço vetorial de dimensão  $r$  dos “campos vetoriais

invariantes à esquerda” sobre  $G$ ,  $\mathfrak{X}^L(G)$ , sendo que nenhum índice superscrito será utilizado para assinalar tal fato. Estes campos vetoriais são expressos nas coordenadas  $g^i$  do grupo  $G$  por

$$T_i(g) = (L_{g*}(e))^j_i \frac{\partial}{\partial g^j}, \quad (1.111)$$

onde

$$(L_{g*}(e))^j_i = \frac{\partial g^{''j}(g', g)}{\partial g^i} \Bigg|_{\substack{g=e \\ g'=g}}. \quad (1.112)$$

Usando a translação esquerda (1.112), mostra-se que existe um isomorfismo entre a álgebra de Lie formada pelo espaço vetorial  $\mathfrak{X}^L(G)$  com o colchete de Lie  $[T_i(g), T_j(g)]$  e (1.106), sendo que o colchete desta última é definido a partir do colchete de Lie na primeira. Observe ainda que, uma vez que  $g'' = g' \cdot e = g'$  e  $g'' = e \cdot g = g$ , temos

$$\frac{\partial g^{''j}(g', g)}{\partial g^i} \Bigg|_{\substack{g'=e \\ g=e}} = \delta^j_i, \quad \frac{\partial g^{''j}(g', g)}{\partial g^i} \Bigg|_{\substack{g=e \\ g'=e}} = \delta^j_i, \quad (1.113)$$

de modo que

$$T_i(e) = T_i^R(e) = \frac{\partial}{\partial g^i} \Bigg|_{g=e}. \quad (1.114)$$

Denotaremos por  $\{\omega^i(g)\}$  e  $\{\omega_R^i(g)\}$  as bases dos espaços vetoriais  $\mathfrak{X}^{*L}(G)$  e  $\mathfrak{X}^{*R}(G)$  de 1-formas invariantes à esquerda e à direita, duais a  $\{T_i(g)\}$  e  $\{T_i^R(g)\}$  respectivamente e definidas por

$$\langle \omega^i(g), T_j(g) \rangle = \delta^i_j \quad \langle \omega_R^i(g), T_j^R(g) \rangle = \delta^i_j. \quad (1.115)$$

As 1-formas invariantes à esquerda  $\{\omega^i(g)\}$  são expressas nas coordenadas  $g^i$  do grupo  $G$  por

$$\omega^i(g) = (L_{g^{-1}*}(e))^i_j dg^j, \quad (1.116)$$

onde

$$(L_{g^{-1}*}(e))^i_j = \frac{\partial g^{''i}(g', g)}{\partial g^j} \Bigg|_{\substack{g=g \\ g'=g^{-1}}}. \quad (1.117)$$

E as 1-formas invariantes à direita  $\{\omega_R^i(g)\}$  são expressas nas coordenadas  $g^i$  do grupo  $G$  por

$$\omega_R^i(g) = (R_{g^{-1}}^*(e))^i_j dg^j, \quad (1.118)$$

onde

$$(R_{g^{-1}}^*(e))^i_j = \left. \frac{\partial g'^i(g', g)}{\partial g'^j} \right|_{\substack{g'=g \\ g=g^{-1}}}. \quad (1.119)$$

Note que

$$(R_{g^{-1}}^*(e))^i_j = (R_{g^*}(e)^{-1})^i_j \quad \text{e} \quad (L_{g^{-1}}^*(e))^i_j = (L_{g^*}(e)^{-1})^i_j, \quad (1.120)$$

consistentemente com (1.115) [3, p.55].

As 1-formas invariantes satisfazem equações equivalentes às relações de comutação (1.106) e (1.110), denominadas “equações de estrutura de Maurer-Cartan” expressas por

$$d\omega^i = -\frac{1}{2}f_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k \quad \text{ou} \quad d\omega_R^i = \frac{1}{2}f_{jk}^i \omega_R^j \wedge \omega_R^k. \quad (1.121)$$

Definindo as 1-formas canônicas invariantes de Maurer-Cartan a valores na álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = T_e(G)$  por

$$\omega(g) = \omega^i(g) \otimes T_i \quad \text{e} \quad \omega_R(g) = \omega_R^i(g) \otimes T_i, \quad (1.122)$$

podemos reescrever as “equações de estrutura de Maurer-Cartan” (1.121) como

$$d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega] = -\omega \wedge \omega \quad \text{ou} \quad d\omega_R = \frac{1}{2}[\omega_R, \omega_R] = \omega_R \wedge \omega_R. \quad (1.123)$$

Caso consideremos uma representação linear  $\sigma$  de  $G$  como um subgrupo de  $GL(p)$  sobre  $\mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} \sigma_g = D_n^m(g) : \mathbb{R}^p &\mapsto \mathbb{R}^p \\ x &\mapsto y = D(g)x, \end{aligned} \quad (1.124)$$

a qual sempre existe localmente para algum valor de  $p$  de acordo com o *teorema de Ado* [1, p.277], então pode-se calcular [15, p.131] as 1-formas de Maurer-Cartan nas coordenadas padrão de  $GL(p)$ ,  $D^m_n$ ,

$$\omega^m_n(g) = D^m_i(g^{-1})dD^i_n(g) \quad \omega^m_{Rn}(g) = dD^m_i(g)D^i_n(g^{-1}), \quad (1.125)$$

sendo que as fórmulas (1.125) são freqüentemente abreviadas por

$$\omega(g) = g^{-1}dg \quad \omega_R(g) = dgg^{-1}. \quad (1.126)$$

No caso da lei de grupo (1.49) em termos dos parâmetros (1.70) de  $\bar{\mathcal{P}}$ , podemos aplicar diretamente as fórmulas (1.108) e (1.111) para obter as expressões em coordenadas dos campos vetoriais invariantes. Os campos vetoriais invariantes à direita sobre cada  $g(\theta^a, \alpha, \beta) \in \bar{\mathcal{P}}$  são expressos por<sup>19</sup>

$$\begin{aligned} \bar{T}_a^R(g) &= \frac{\partial}{\partial \theta^a} + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \theta^b \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \bar{T}_2^R(g) &= \varepsilon^a_b \theta^b \frac{\partial}{\partial \theta^a} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \bar{T}_3^R(g) &= \frac{\partial}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (1.127)$$

e os campos vetoriais invariantes à esquerda são expressos por

$$\begin{aligned} \bar{T}_a(g) &= \Lambda^b_a \frac{\partial}{\partial \theta^b} + \frac{B}{2} \theta^c \varepsilon_{cb} \Lambda^b_a \frac{\partial}{\partial \beta} \\ \bar{T}_2(g) &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \bar{T}_3(g) &= \frac{\partial}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

Já obtivemos anteriormente<sup>20</sup> a expressão em coordenadas da 1-forma de Maurer-Cartan invariante à direita sobre cada  $g(\theta^a, \alpha, \beta) \in \bar{\mathcal{P}}$  sem utilizar a lei de grupo (1.49):

$$\bar{\omega}_R(g) = \bar{\omega}_R^A(g) \bar{T}_A, \quad (1.129)$$

<sup>19</sup>Lembre-se da notação empregada para denotar os geradores de  $\bar{\mathfrak{g}}$  coletivamente, explicada na seção 1.1.1 na página 24.

<sup>20</sup>Veja discussão na página 38.

onde

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}_R^1(g) &= d\theta^a - \varepsilon^a{}_b \theta^b d\alpha \\
\bar{\omega}_R^2(g) &= d\alpha \\
\bar{\omega}_R^3(g) &= \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} d\theta^b - \frac{B}{2} \theta^a \theta_a d\alpha + d\beta.
\end{aligned} \tag{1.130}$$

Uma vez de posse da lei de grupo, entretanto, é muito mais simples calcular a expressão em coordenadas da 1-forma de Maurer-Cartan invariante à esquerda a partir das fórmulas (1.116) e (1.122):

$$\bar{\omega}(g) = \bar{\omega}^A(g) \bar{T}_A, \tag{1.131}$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}^1(g) &= \Lambda(-\alpha)^a{}_b d\theta^b \\
\bar{\omega}^2(g) &= d\alpha \\
\bar{\omega}^3(g) &= -\frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} d\theta^b + d\beta.
\end{aligned} \tag{1.132}$$

### 1.3.2 Operadores de Casimir e métricas invariantes associadas a $\bar{\mathfrak{g}}_2^1$

O número de operadores de Casimir independentes, associados a qualquer álgebra de Lie pode ser calculado pela fórmula de Beltrametti e Blasi [5], que demonstraram o importante teorema [40, p.142]:

**Teorema 1.3.1 (Beltrametti e Blasi)** *O número  $\nu$  de operadores invariantes de Casimir independentes de qualquer ordem, associados à álgebra de qualquer grupo de Lie  $G$  de dimensão  $r$ ,*

$$[T_i, T_j] = f_{ij}^k T_k \quad i, j, k \in \{1, \dots, r\}, \tag{1.133}$$

é igual a

$$\nu = r - \text{posto} \|f_{ij}^k \gamma_k\|, \tag{1.134}$$

onde  $\gamma_k$  são  $r$  parâmetros independentes e a quantidade  $\text{posto} \|f_{ij}^k \gamma_k\|$  é interpretada como o posto máximo da matriz  $\|f_{ij}^k \gamma_k\|$ .

A fórmula de Beltrametti e Blasi (1.134) nos informa que há 2 operadores de Casimir independentes e invariantes pela ação da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  (1.50). De fato,

$$\begin{aligned} \nu &= 4 - \text{posto} \begin{pmatrix} B\varepsilon_{ab}\gamma_3 & \varepsilon_a{}^c\gamma_c & 0 \\ -\varepsilon_b{}^c\gamma_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \nu &= 4 - 2 = 2. \end{aligned} \quad (1.135)$$

Pode-se verificar facilmente que os 2 casimirs são quadráticos,  $P^a P_a - 2BJI$  e  $I^2$ , de modo que o casimir mais geral que se pode escrever é

$$C = P^a P_a - 2BJI - cI^2, \quad (1.136)$$

onde  $c$  é uma constante real.

O operador de Casimir (1.136) define uma forma bilinear, cujas componentes são expressas por

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} h_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & c/B^2 & -1/B \\ 0 & -1/B & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.137)$$

onde

$$h_{ab} = h^{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.138)$$

Esta forma bilinear é simétrica, não-degenerada e invariante pela ação do grupo  $\bar{\mathcal{P}}$ ,

$$h_{AB} = h_{CD} (Adg)^C{}_A (Adg)^D{}_B, \quad (1.139)$$

onde  $(Adg)^A{}_B$  é a representação adjunta do elemento do grupo de Poincaré estendido  $g \in \bar{\mathcal{P}}$  dada pela equação (1.79). Portanto a forma bilinear  $h_{AB}$  é



uma métrica sobre  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$ . Efetuamos a escolha<sup>21</sup>  $c = 0$ , de acordo com [10, p.249], obtendo a métrica

$$h_{AB} = \begin{pmatrix} h_{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/B \\ 0 & -1/B & 0 \end{pmatrix} \quad h^{AB} = \begin{pmatrix} h^{ab} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B \\ 0 & -B & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.140)$$

A métrica (1.140) estabelece um isomorfismo canônico entre  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  e  $\bar{\mathfrak{I}}_2^{1*}$  dado por  $\zeta = h(V, \cdot)$ , onde  $\zeta \in \bar{\mathfrak{I}}_2^{1*}$  e  $V \in \bar{\mathfrak{I}}_2^1$ , além de definir em cada um desses espaços vetoriais um produto interno [1, p.190]. Então se  $V = V^A \bar{T}_A$  e  $W = W^A \bar{T}_A$  são dois vetores quaisquer de  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$ , onde  $\{\bar{T}_A\}$  são os geradores de  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  (1.51), temos que

$$\langle W, V \rangle = W^a V_a - \frac{1}{B}(W^3 V^2 + W^2 V^3) \quad (1.141)$$

e, usando que  $V_A = h_{AB} V^B$ ,

$$V_a = h_{ab} V^b \quad V_2 = -\frac{V^3}{B} \quad V_3 = -\frac{V^2}{B}, \quad (1.142)$$

vemos ainda que

$$\langle V, V \rangle = V^A V_A = V^a V_a - 2BV_2 V_3. \quad (1.143)$$

## 1.4 Cohomologia de álgebras de Lie

A motivação para o estudo da teoria de cohomologia de álgebras de Lie vem da teoria de extensões, sendo que estamos interessados apenas nas álgebras centralmente estendidas por uma álgebra abeliana, alguns aspectos das quais examinamos na seção 1.1. Enunciaremos sem demonstração dois

---

<sup>21</sup>Pode-se mostrar que a liberdade no parâmetro  $c$  corresponde a uma simetria global também encontrada no modelo do dilaton onde sua anomalia desempenha um papel crucial na existência da radiação de Hawking [9].

resultados importantes neste contexto que são os lemas de Whitehead sobre cohomologias de álgebras semi-simples e o teorema de Levi que é uma consequência destes últimos e é fundamental para se compreender a estrutura das álgebras de Lie, o qual já mencionamos quando apresentamos as álgebras solúveis na seção 1.2.

Não abordaremos a cohomologia dos grupos de Lie, mas mencionaremos a relação entre as cohomologias de grupos e de álgebras no caso particular dos grupos simplesmente conexos. Também será mencionada a relação existente entre a cohomologia de álgebras e a de de Rham associada às topologias das variedades dos grupos compactos. Nesta obra apresentaremos apenas as interpretações do primeiro e do segundo grupos de cohomologia de álgebras de Lie, omitindo completamente os grupos de cohomologia de ordens superiores, pois apenas estes dois são relevantes para a quantização e classificação dos sistemas elementares, como veremos no terceiro capítulo<sup>22</sup>.

Ao final da seção mostraremos que, contrariamente ao que possa parecer, nem sempre o segundo grupo de cohomologia de uma álgebra centralmente estendida é trivial, como mostra o exemplo da álgebra de Weyl-Heisenberg, a qual já apresentamos na seção 1.2. Daí a necessidade de efetuarmos o cálculo do segundo grupo de cohomologia da álgebra de Poincaré estendida, o qual será apresentado, assim como o do primeiro grupo de cohomologia da mesma álgebra.

### 1.4.1 Definições

Nos limitaremos nesta discussão ao caso em que  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie real de dimensão  $r$  e  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  atuante à esquerda no espaço vetorial  $V$  de dimensão  $d$  sobre o corpo dos reais.

---

<sup>22</sup>Veja a discussão da seção 3.1 à página 103.

**Definição 1.4.1 (V-cocadeias n-dimensionais sobre  $\mathfrak{g}$ )** Uma V-cocadeia n-dimensional  $\omega_n$  sobre  $\mathfrak{g}$  é um mapeamento n-linear alternado

$$\omega_n : \underbrace{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}}_n \rightarrow V. \quad (1.144)$$

O grupo abeliano de todos os n-cociclos será denotado por  $C^n(\mathfrak{g}, V)$ .

As V-cocadeias de dimensão nula são definidas como mapeamentos constantes  $\omega_v : \mathfrak{g} \rightarrow V$ ,  $\omega_v(X) = v$ , de modo que

$$C^0(\mathfrak{g}, V) = V, \quad (1.145)$$

e a dimensão de  $C^n(\mathfrak{g}, V)$  é dada por

$$\dim C^n(\mathfrak{g}, V) = d \binom{r}{n}. \quad (1.146)$$

**Definição 1.4.2 (Operador de coborda)** O operador de coborda  $d_n : C^n(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$  é definido pela fórmula

$$\begin{aligned} (d\omega_n)(X_1, \dots, X_{n+1}) := & \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(X_i) \omega_n(X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_{n+1}) + \\ & + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j < k}}^{n+1} (-1)^{j+k} \omega([X_j, X_k], X_1, \dots, \hat{X}_j, \dots, \hat{X}_k, \dots, X_{n+1}) \quad , \end{aligned} \quad (1.147)$$

onde  $X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathfrak{g}$ .

Como estamos interessados apenas nas cohomologias de ordem mais baixa, apresentamos abaixo as expressões de  $d_n$  para  $n \leq 2$ :

$$\begin{aligned} (d\omega_0)(X_1) &= \rho(X_1)\omega_0 \\ (d\omega_1)(X_1, X_2) &= \rho(X_1)\omega_1(X_2) - \rho(X_2)\omega_1(X_1) - \omega_1([X_1, X_2]) \\ (d\omega_2)(X_1, X_2, X_3) &= \rho(X_1)\omega_2(X_2, X_3) - \rho(X_2)\omega_2(X_1, X_3) + \\ &+ \rho(X_3)\omega_2(X_1, X_2) - \omega_2([X_1, X_2], X_3) + \\ &+ \omega_2([X_1, X_3], X_2) - \omega_2([X_2, X_3], X_1). \end{aligned} \quad (1.148)$$

Pode-se mostrar que para toda cocadeia  $\omega_n \in C^n(\mathfrak{g}, V)$ ,  $d\omega_n \in C^{n+1}(\mathfrak{g}, V)$  e  $d^2 = 0$ , isto é,  $d_{n+1}d_n = 0$  para todo  $n \geq 0$ . Então temos as definições:

**Definição 1.4.3 (n-cociclos, n-cobordas, cohomologia)** 1. O grupo abeliano dos  $n$ -cociclos é definido como o núcleo do operador  $d_n$

$$Z_\rho^n(\mathfrak{g}, V) = \text{Nuc } d_n \subset C^n(\mathfrak{g}, V).$$

2. O grupo abeliano das  $n$ -cobordas é definido como a imagem do operador  $d_{n-1}$

$$B_\rho^n(\mathfrak{g}, V) = \text{Im } d_{n-1},$$

sendo que pela proposição enunciada acima temos que  $B_\rho^n(\mathfrak{g}, V) \subset Z_\rho^n(\mathfrak{g}, V)$ .

3. O  $n$ -ésimo grupo de cohomologia de  $\mathfrak{g}$  com coeficientes em  $V$  correspondente à representação  $\rho$  é definido como o quociente de espaços vetoriais

$$H_\rho^n(\mathfrak{g}, V) := Z_\rho^n(\mathfrak{g}, V) / B_\rho^n(\mathfrak{g}, V) \quad \forall n \geq 1. \quad (1.149)$$

Deve-se ressaltar que

$$H_\rho^n(\mathfrak{g}, V) = Z_\rho^n(\mathfrak{g}, V) = 0 \quad \forall n > r. \quad (1.150)$$

Por convenção  $B_\rho^0(\mathfrak{g}, V) = 0$ , de modo que  $H_\rho^0(\mathfrak{g}, V) = Z_\rho^0(\mathfrak{g}, V)$ , para todo  $V$ . E, uma vez que uma zero-cocadeia é um vetor  $v \in V$  (1.145), se ela for também um zero-cociclo então, usando (1.148), temos

$$(dv)(X) = \rho(X)v = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

ou seja,  $v$  é um elemento invariante. Portanto,

$$H_\rho^0(\mathfrak{g}, V) = V^\mathfrak{g}, \quad (1.151)$$

onde  $V^{\mathfrak{g}}$  denota o subespaço dos vetores invariantes de  $V$ . Se  $V = \mathfrak{R}$  e  $\rho$  for trivial, então  $H_0^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$ .

No caso das 1-cocadeias, por causa de (1.148) os 1-cociclos  $\omega_1$  devem satisfazer

$$(d\omega_1)(X_1, X_2) = \rho(X_1)\omega_1(X_2) - \rho(X_2)\omega_1(X_1) - \omega_1([X_1, X_2]) = 0, \quad (1.152)$$

para todo  $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ . Uma 1-cocadeia será uma coborda  $\omega_{cob}$  se existir uma zero-cocadeia  $v$  tal que  $dv = \omega_{cob}$ , ou seja, usando (1.148), se

$$\omega_{cob}(X) = \rho(X)v \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (1.153)$$

No caso particular em que  $V = \mathfrak{R}$  e  $\rho$  for trivial, de (1.153) vemos que  $\omega_{cob} = 0$  e de (1.152) vemos que a condição de 1-cociclo torna-se  $\omega_1([X_1, X_2]) = 0$ . Isto implica que, neste caso, os 1-cociclos são funcionais lineares aniquilando  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ , isto é,

$$H_0^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*, \quad (1.154)$$

onde o asterisco indica o espaço vetorial dual.

Em situações mais complexas o cálculo da cohomologia exige o emprego de técnicas especiais como a “resolução de Koszul” [22, p.169]. Entretanto, no caso de álgebras de dimensão baixa como  $\mathfrak{I}_2^1$  que possui  $r = 4$ , pode-se utilizar a definição 1.4.3 diretamente, como faremos adiante.

### 1.4.2 Extensões por uma álgebra abeliana e as interpretações de $H_\rho^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ e $H_\rho^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$

Sejam  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{a}$  álgebras de Lie reais de dimensão finita.

**Definição 1.4.4 (Extensão de uma álgebra de Lie)** *Uma álgebra de Lie real  $\tilde{\mathfrak{g}}$  é uma extensão de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{a}$  se existir uma “seqüência exata” de álgebras de Lie*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \xrightarrow{\iota} \tilde{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\rho} \mathfrak{g} \longrightarrow 0. \quad (1.155)$$

Lembramos que os mapeamentos que compõe uma “seqüência exata” são homomorfismos tais que, para cada álgebra de Lie, o núcleo do mapeamento que sai é igual à imagem do mapeamento que entra. Em particular, a imagem de  $\mathfrak{a}$  deve ser um ideal (Def.1.2.1) em  $\tilde{\mathfrak{g}}$  para que seja o núcleo de  $\rho$ , de modo que  $\tilde{\mathfrak{g}}/\iota(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}$ .

Assumiremos que  $\mathfrak{a}$  é abeliana. Neste caso, (1.155) torna  $\mathfrak{a}$  um espaço de representação para  $\mathfrak{g}$  se definirmos  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End } \mathfrak{a}$

$$\pi(X)Y = \iota^{-1}[\rho^{-1}(X), \iota(Y)] = \iota^{-1}[\tau(X), \iota(Y)] \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \forall Y \in \mathfrak{a}, \quad (1.156)$$

onde  $\rho^{-1}(X)$  denota qualquer imagem inversa de  $X$  em  $\tilde{\mathfrak{g}}$  e  $\iota^{-1}$  está bem definido sobre  $[\rho^{-1}(X), \iota(Y)]$ , pois  $\iota(\mathfrak{a})$  é um ideal em  $\tilde{\mathfrak{g}}$ .

Fixando um mapeamento linear  $\tau : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ , tal que  $\rho \circ \tau = 1$ , podemos associar a uma solução de (1.155), também fixa, uma 2-cocadeia (Def.1.4.1)  $\omega_2 \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  definida por

$$\omega_2(X_1, X_2) = \iota^{-1}([\tau(X_1), \tau(X_2)] - \tau[X_1, X_2]) \quad \forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}. \quad (1.157)$$

Então pode-se mostrar<sup>23</sup> que  $\omega_2$ , definido por (1.157) é de fato um 2-cociclo (Def.1.4.3)  $\omega_2 \in Z_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  e que a escolha de um outro mapeamento linear  $\tau' \neq \tau$  define a mesma representação  $\pi$  (1.156) mas um outro 2-cociclo  $\omega'_2$  definido por (1.157) e tal que  $\omega'_2 - \omega_2 \in B_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .

Conseqüentemente a extensão de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{a}$  define um elemento  $[\omega_2]$  de  $H_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  (Def.1.4.3) representado por (1.157), sendo que as cobordas apenas refletem a liberdade de escolha do mapeamento  $\tau$  que determina os representantes das classes de equivalência de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  por  $\iota(\mathfrak{a})$  (os elementos de  $\mathfrak{g}$ ).

**Definição 1.4.5 (Equivalência de extensões)** *Duas extensões  $\tilde{\mathfrak{g}}'$  e  $\tilde{\mathfrak{g}}$  são equivalentes se existir um isomorfismo de álgebras de Lie  $\sigma$  tal que o diagrama exibido na figura 1.2 seja comutativo.*

<sup>23</sup>Para detalhes veja [3, p.235] e [22, p.163].

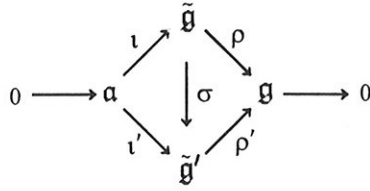


Figura 1.2: Equivalência de extensões

Usando o diagrama da figura 1.2, não é difícil de ver que extensões equivalentes definem o mesmo elemento  $[\omega_2]$  de  $H_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  e a mesma representação  $\pi$  (1.156). Além disso, tendo fixado a representação  $\pi$ , podemos determinar uma classe de extensões equivalentes a partir de cada elemento  $[\omega_2]$  de  $H_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .

De fato, construímos uma solução de (1.155) formando o espaço vetorial  $\tilde{\mathfrak{g}} = (\mathfrak{g} \times 0) \oplus (0 \times \mathfrak{a})$ , cujos elementos são denotados por  $(X, Y)$ ,  $\forall X \in \mathfrak{g}$  e  $\forall Y \in \mathfrak{a}$ , com as inserções na primeira e na segunda coordenadas dadas por  $(X, 0) = \tau(X)$  e  $(0, Y) = \iota(Y)$ , e definindo sobre ele o colchete

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], \pi(X_1)Y_2 - \pi(X_2)Y_1 + \omega_2(X_1, X_2)), \quad (1.158)$$

$\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{g}, \forall Y_1, Y_2 \in \mathfrak{a}$ , que é nulo no subespaço  $\iota(\mathfrak{a}) = 0 \times \mathfrak{a}$ , corresponde a (1.156) entre os subespaços  $\tau(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \times 0$  e  $\iota(\mathfrak{a})$  e a (1.157) no subespaço  $\tau(\mathfrak{g})$ . Observamos que  $\tau(\mathfrak{g})$  não é em geral uma subálgebra de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  e que o colchete (1.158) satisfaz a identidade de Jacobi porque  $\omega_2 \in Z_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  (Def.1.4.3). Portanto, demonstramos o seguinte teorema que fornece a interpretação de  $H_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ :

**Teorema 1.4.1** *Para um dado  $\pi$ , existe uma bijeção entre o conjunto formado pelas classes de extensões equivalentes  $[\tilde{\mathfrak{g}}]$  (Def.1.4.5) de  $\mathfrak{g}$  pela álgebra abeliana  $\mathfrak{a}$  (Def.1.4.4) e os elementos do segundo grupo de cohomologia  $H_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ .*

A classe correspondente ao elemento 0 de  $H_\pi^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  é especialmente interessante, pois fornece uma interpretação para  $H_\pi^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ . Um 2-cociclo representante é  $\omega_2 = 0$  e neste caso a equação (1.158) implica que a inclusão  $\tau$  de  $\mathfrak{g}$  em  $\tilde{\mathfrak{g}}$  é um homomorfismo de álgebras de Lie, de modo que o subespaço  $\tau(\mathfrak{g})$  se fecha numa subálgebra de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ , que se decompõe no produto semi-direto  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_\pi \mathfrak{a}$  (Prop.1.2.1). Qualquer outra inclusão  $\tau'$  de  $\mathfrak{g}$  em  $\tilde{\mathfrak{g}}$  se define por

$$\tau'(X) = (X, \omega_1(X)) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad (1.159)$$

onde  $\omega_1(X) \in \mathfrak{a}$ . Mas  $\tau'$  (1.159) fornece uma decomposição  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times_\pi \mathfrak{a}$  que respeite a estrutura de colchetes de  $\mathfrak{g}$  e de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  somente se  $\omega_1 \in Z_\pi^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ . Entre todos os  $\omega_1$  possíveis, aqueles dados por

$$\omega_Y(X) = \pi(X)Y \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad (1.160)$$

para um  $Y \in \mathfrak{a}$  fixo, são 1-cobordas então  $H_\pi^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$  classifica todas as decomposições possíveis de  $\tilde{\mathfrak{g}}$  a menos daquelas triviais dadas em termos de mapeamentos  $\omega_Y$  da forma (1.160). Se também  $\pi = 0$  (ação trivial) então tanto  $\tau(\mathfrak{g})$  como  $\iota(\mathfrak{a})$  são ideais da álgebra estendida, a qual se decompõe no produto direto  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{a}$ .

Se  $\pi = 0$  (ação trivial) mas  $\omega_2 \neq 0$ , a equação (1.158) mostra que o colchete da álgebra estendida é dado por

$$[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)] = ([X_1, X_2], \omega_2(X_1, X_2)), \quad (1.161)$$

de onde vemos, em particular, que o ideal  $\iota(\mathfrak{a})$  está no centro da álgebra estendida e, portanto,  $\tilde{\mathfrak{g}}$  é uma extensão central. Neste caso a condição de 2-cociclo se reduz a

$$\omega_2([X_1, X_2], X_3) + \omega_2([X_2, X_3], X_1) + \omega_2([X_3, X_1], X_2) = 0 \quad \forall X_1, X_2, X_3 \in \mathfrak{g}. \quad (1.162)$$



Ocorre que as extensões centrais de grupos de Lie  $G$  por  $\mathfrak{R}$ , que surgem quando consideramos as representações projetivas de  $G$  e as quais já analisamos no caso geral anteriormente<sup>24</sup>, são classificadas pelo segundo grupo de cohomologia  $H_0^2(G, \mathfrak{R})$  o qual é isomorfo a  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$ , fato este que pode ser generalizado para grupos  $G$  simplesmente conexos, como o grupo de Poincaré estendido  $\bar{P}$ , pelo seguinte teorema [3, p.253]:

**Teorema 1.4.2** *Sejam  $G$  e  $A$  grupos de Lie conexos, com  $G$  simplesmente conexo e  $A$  abeliano. Dada uma ação de  $G$  sobre  $A$  (um espaço vetorial) através da representação  $\sigma : G \rightarrow \text{Aut}A$ , juntamente com o mapeamento induzido  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}A$ , então  $H_\sigma^2(G, A)$  é isomorfo a  $H_\pi^2(\mathfrak{g}, A)$ .*

Na seção 1.1 já havíamos denotado por  $\bar{G}$  a extensão central de  $G$  por  $\mathfrak{R}$ , cuja lei de composição era dada por (1.9), sendo que já havíamos observado que a extensão central era determinada por um 2-cociclo não-trivial  $\xi(g', g) \in H_0^2(G, \mathfrak{R})$  que alterava a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  para sua extensão central  $\bar{\mathfrak{g}}$ , de acordo com a equação (1.14). Naquela ocasião<sup>25</sup>, também havíamos examinado como a adição de uma 2-cocorda  $\xi_{cob}(g', g)$  ao 2-cociclo da extensão central  $\xi(g', g)$  modificava a álgebra estendida  $\bar{\mathfrak{g}}$  (1.18). Tendo em vista que  $H_0^2(G, \mathfrak{R}) = H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$  é importante que investiguemos agora como esta estrutura algébrica se reflete no segundo grupo de cohomologia  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$ .

Uma vez que o colchete de Lie é bilinear, os  $f_{ij}^{(\varphi)}$  da equação (1.14) definem uma  $\mathfrak{R}$ -cocadeia bidimensional  $\omega_2 \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$  (Def.1.4.1)

$$\omega_2 : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{R}, \quad \omega_2(T_i, T_j) = f_{ij}^{(\varphi)}, \quad i, j \in \{1, \dots, r\}. \quad (1.163)$$

A condição de 2-cociclo (1.19) pode ser reescrita como

$$\omega_2([T_i, T_j], T_k) + \omega_2([T_j, T_k], T_i) + \omega_2([T_k, T_i], T_j) = 0 \quad \forall i, j, k \in \{1, \dots, r\}. \quad (1.164)$$

<sup>24</sup>Veja a discussão da seção 1.1 na página 17.

<sup>25</sup>Veja discussão na página 15.

A equação (1.164) expressa que  $d\omega_2 = 0$ , como mostra a equação (1.148) para  $\rho = 0$ , de modo que  $\omega_2 \in Z_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$ . Analogamente, os  $\mu_{ij}$  da equação (1.17) definem outra  $\mathfrak{R}$ -cocadeia bidimensional  $\omega_{cob} \in C^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$  (Def.1.4.1)

$$\omega_{cob} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{R}, \quad \omega_{cob}(T_i, T_j) = -\omega_1[T_i, T_j], \quad (1.165)$$

onde  $\omega_1(T_k) = \eta_k$ . Este mapeamento é um 2-cociclo  $\omega_{cob} \in Z_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$ , como mostram as equações (1.165) e (1.162)

$$\begin{aligned} d\omega_{cob}(T_i, T_j, T_k) &= \omega_{cob}([T_i, T_j], T_k) + \omega_{cob}([T_j, T_k], T_i) + \omega_{cob}([T_k, T_i], T_j) \\ d\omega_{cob}(T_i, T_j, T_k) &= -\omega_1[[T_i, T_j], T_k] - \omega_1[[T_j, T_k], T_i] - \omega_1[[T_k, T_i], T_j] \\ d\omega_{cob}(T_i, T_j, T_k) &= 0, \end{aligned} \quad (1.166)$$

onde usamos a identidade de Jacobi na última passagem. O 2-cociclo (1.165) também é uma 2-coborda<sup>26</sup>  $\omega_{cob} \in B_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$ , porque

$$\omega_{cob}(X_1, X_2) = -\omega_1[X_1, X_2] = (d\omega_1)(X_1, X_2),$$

para todo  $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ . Então as constantes de estrutura  $f_{ij}^{(\varphi)}$  e  $\mu_{ij}$  definem  $\mathfrak{R}$ -cocadeias bidimensionais que correspondem a um 2-cociclo  $\omega_2 \in Z_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$  e uma 2-coborda  $\omega_{cob} \in B_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$ , respectivamente, na cohomologia de  $\mathfrak{g}$  [3, p.241].

A teoria de cohomologia de álgebras de Lie pode ser formulada em termos de formas diferenciais invariantes sobre um grupo de Lie  $G$ . Podemos identificar o mapeamento  $n$ -linear alternado (1.144) ao valor  $\omega(e)$  sobre  $e \in G$  de uma  $n$ -forma invariante à esquerda  $\omega$  sobre  $G$ , processo este denominado “localização”<sup>27</sup>. Nesta formulação o operador de diferenciação exterior  $d^{(n)}$  desempenha o mesmo papel do operador de coborda  $d_n$  (Def.1.4.2) para a representação trivial  $\rho = 0$  atuando nas cocadeias  $\omega_n$  sobre  $\mathfrak{g}$ .

<sup>26</sup>Veja a equação (1.148) para  $\rho = 0$ .

<sup>27</sup>Para maiores detalhes sobre a abordagem de Chevalley-Eilenberg da teoria de cohomologia de álgebras de Lie veja o clássico [11].

**Definição 1.4.6 (Cohomologia de Chevalley-Eilenberg)** *Seja  $G$  um grupo de Lie.*

1. *Uma  $n$ -cocadeia é uma  $n$ -forma diferencial invariante à esquerda sobre  $G$ .*
2. *O espaço vetorial  $Z_G^n = \text{Nuc } d^{(n)}$  é o grupo dos  $n$ -cociclos; seus elementos são as  $n$ -formas invariantes à esquerda sobre  $G$  que são fechadas.*
3. *O espaço vetorial  $B_G^n = \text{Im } d^{(n-1)}$  é o grupo de  $n$ -cobordas; seus elementos são as  $n$ -formas invariantes à esquerda sobre  $G$  que são dadas pela diferenciação exterior de uma  $(n-1)$ -forma invariante à esquerda sobre  $G$ .*

*Definimos, então, o “ $n$ -ésimo grupo de cohomologia de Chevalley-Eilenberg” por*

$$E^n(G) = Z_G^n / B_G^n. \quad (1.167)$$

Apenas mencionaremos os resultados [3, p.247] mais relevantes para os nossos propósitos, como

**Teorema 1.4.3** *Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie de um grupo de Lie  $G$ . Então  $H_0^n(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$  é isomorfo ao grupo de cohomologia de Chevalley-Eilenberg  $E^n(G)$ , obtido utilizando  $n$ -formas diferenciais invariantes à esquerda sobre  $G$ .*

**Nota 1.4.1** *É importante salientar que, para um grupo de Lie genérico  $G$ , uma  $n$ -forma  $\omega$  pode ser trivial(exata) na cohomologia de de Rham e mesmo assim ainda definir um elemento não-trivial da cohomologia de Chevalley-Eilenberg  $E^n(G)$ . Para isto é necessário e suficiente que  $\omega$  não seja a derivada exterior de uma  $(n-1)$ -forma invariante à esquerda sobre  $G$ .*

De fato, apenas no caso em que  $G$  é compacto a cohomologia de CE é igual à cohomologia de de Rham de  $G$ , isto é [3, p.247],

**Teorema 1.4.4** *Seja  $G$  um grupo de Lie conexo e compacto, então  $E^n(G)$  é isomorfo ao grupo de cohomologia de de Rham  $H_{DR}^n(G)$  sobre  $G$ .*

Então, em geral,  $H_{DR}^n(G)$  pode ser trivial mesmo que  $E^n(G) = H_0^n(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$  seja não-trivial.

Podemos associar ao 2-cociclo não-trivial  $\omega_2 \in H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$  que define a extensão central  $\bar{\mathfrak{g}}$  uma 2-forma invariante à esquerda sobre  $G$ ,  $\omega^{(2)} \in E^2(G)$  na formulação de Chevalley-Eilenberg, definida por “localização” com o auxílio de (1.163)

$$\begin{aligned} \omega^{(2)} : \mathfrak{X}^L(G) \times \mathfrak{X}^L(G) &\rightarrow \mathfrak{R} \\ \omega^{(2)}(T_i, T_j) &= \omega_2(T_i, T_j) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, r\} \end{aligned} \quad (1.168)$$

ou, de modo equivalente,

$$\omega^{(2)} = \frac{1}{2} f_{ij}^{(\varphi)} \omega^i \wedge \omega^j, \quad (1.169)$$

onde  $\{\omega^i\}$  é a base dual de  $\mathfrak{X}^{*L}(G)$  (1.115). A 2-forma (1.169) será importante quando caracterizarmos os termos de Wess-Zumino no próximo capítulo<sup>28</sup>.

A dimensão de  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$  é dada por

$$\dim H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) \leq \frac{1}{2} r(r-1), \quad (1.170)$$

sendo que a dimensão máxima (1.146) ocorre apenas se  $\mathfrak{g}$  for abeliana. Isto porque neste caso  $\omega_{cob} = 0$  para todo  $\omega_1$  na equação (1.165) e a condição de 2-cociclo (1.164) é trivialmente satisfeita para toda 2-cocadeia. No caso abeliano podemos visualizar a dimensão máxima em (1.170) como o número de pares de elementos de uma base de  $\mathfrak{g}$  para os quais seus comutadores abelianos podem ser substituídos por outros com um elemento central no segundo membro. Generalizando, podemos interpretar a dimensão de  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R})$

<sup>28</sup>Veja a discussão na página 73.

como o número de parâmetros independentes (“cargas centrais”) cujos valores caracterizam a extensão central de  $\mathfrak{g}$  por  $\mathfrak{R}$ .

Como primeiro exemplo, vamos calcular o segundo grupo de cohomologia  $H_0^2(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R})$  da álgebra de Lie real abeliana bidimensional  $\mathfrak{R}^2$ ,

$$[Q, P] = 0. \quad (1.171)$$

Pelo exposto acima temos que  $\dim H_0^2(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) = 1$  e

$$\begin{aligned} H_0^2(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) &= C^2(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) \\ H_0^2(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) &= \Lambda^2 \mathfrak{R}^2 \\ H_0^2(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) &= \mathfrak{R}, \end{aligned} \quad (1.172)$$

onde  $\Lambda^2 \mathfrak{R}^2$  é o espaço vetorial(real) das formas bilineares alternadas a valores reais sobre  $\mathfrak{R}^2$ . Conseqüentemente a álgebra  $\mathfrak{R}^2$  (1.171) pode ser estendida de uma única maneira, constituindo a álgebra de Weyl-Heisenberg  $wh$  (Nota 1.2.2)

$$[Q, P] = BI \quad [Q, I] = 0 \quad [P, I] = 0, \quad (1.173)$$

onde  $B$  é a “carga central”.

Como segundo exemplo, vamos calcular o segundo grupo de cohomologia  $H_0^2(wh, \mathfrak{R})$  da álgebra de Weyl-Heisenberg  $wh$  (1.173). Neste caso a condição de 2-cociclo (1.164) é trivialmente satisfeita para toda  $\mathfrak{R}$ -cocadeia bidimensional  $\omega_2 \in C^2(wh, \mathfrak{R})$ ,

$$\begin{aligned} \omega_2([Q, P], I) + \omega_2([P, I], Q) + \omega_2([I, Q], P) &= B\omega_2(I, I) \\ \omega_2([Q, P], I) + \omega_2([P, I], Q) + \omega_2([I, Q], P) &= 0, \end{aligned} \quad (1.174)$$

de modo que  $Z_0^2(wh, \mathfrak{R}) = C^2(wh, \mathfrak{R}) = \Lambda^2 wh$ , o espaço vetorial(real) das formas bilineares alternadas a valores reais sobre  $wh$ , de dimensão (1.146)

$$\dim Z_0^2(wh, \mathfrak{R}) = \binom{3}{2} = 3. \quad (1.175)$$

O espaço das 2-cobordas  $\omega_{cob} \in B_0^2(wh, \mathfrak{R})$  (Def.1.4.3) é facilmente identificável como o subespaço de  $\Lambda^2 wh$  formado por 2-formas cujas componentes podem ser expressas por matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & -B\omega_1(I) & 0 \\ B\omega_1(I) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.176)$$

para algum  $\omega_1 \in C^1(wh, \mathfrak{R})$ , de modo que  $\dim B_0^2(wh, \mathfrak{R}) = 1$ . Então  $\dim H_0^2(wh, \mathfrak{R}) = \dim Z_0^2(wh, \mathfrak{R}) - \dim B_0^2(wh, \mathfrak{R}) = 2$  (1.175) e, portanto,

$$H_0^2(wh, \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}^2. \quad (1.177)$$

A dimensão do grupo de cohomologia (1.177) indica que há duas “cargas centrais”  $C, D \in \mathfrak{R}$ , cujos valores caracterizam a extensão central

$$\begin{aligned} [Q, P] &= BI & [Q, I] &= C\Xi & [P, I] &= D\Xi \\ [Q, \Xi] &= 0 & [P, \Xi] &= 0 & [I, \Xi] &= 0 \end{aligned} \quad (1.178)$$

de  $wh$  (1.173) por  $\mathfrak{R}$ , onde  $\Xi \in \overline{wh}$  é o novo gerador central.

Os dois exemplos acima mostram que a álgebra de Weyl-Heisenberg  $wh$  é a extensão central da álgebra de Lie abeliana bidimensional  $\mathfrak{R}^2$  e, mesmo assim, seu segundo grupo de cohomologia (1.177) é bidimensional, indicando que ela pode ser adicionalmente estendida (1.178). Isto mostra que

**Nota 1.4.2** *Para uma álgebra de Lie genérica  $\mathfrak{g}$ , o segundo grupo de cohomologia  $H_0^2(\tilde{\mathfrak{g}}, \mathfrak{R})$  de sua extensão central por  $\mathfrak{R}$  não é necessariamente trivial.*

Observamos de passagem que as álgebras de Lie  $wh$  e  $\mathfrak{R}^2$  são nilpotentes<sup>29</sup>, de modo que as dimensões não-nulas de seus segundos grupos de cohomologia (1.172,1.177) são consistentes com [3, p.243]

<sup>29</sup>Veja a definição 1.2.6 e a discussão na página 33.

**Proposição 1.4.1** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie nilpotente, então  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) \neq 0$ .*

Os lemas de Whitehead são resultados fundamentais da teoria de cohomologia de álgebras de Lie e estão embutidos no seguinte teorema<sup>30</sup>

**Teorema 1.4.5 (Whitehead)** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie real semi-simples (Def.1.2.7) e seja  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  sobre o espaço vetorial real  $V$ . Então (Def.1.4.3)*

$$H_\rho^1(\mathfrak{g}, V) = 0 \quad e \quad H_\rho^2(\mathfrak{g}, V) = 0.$$

O teorema (Teo.1.4.5) está intimamente relacionado ao teorema de decomposição de Levi<sup>31</sup>:

**Teorema 1.4.6 (Levi-Mal'čev)** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie de dimensão finita e  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$  o seu radical solúvel (Prop.1.2.3). Então, existe uma subálgebra  $\mathfrak{s}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{s}$ . Como  $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}/\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ ,  $\mathfrak{s}$  é semi-simples.*

A soma que aparece no enunciado do teorema 1.4.6 é uma soma direta de subespaços de  $\mathfrak{g}$ , não significando que  $\mathfrak{g}$  seja o produto direto de  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$  com  $\mathfrak{s}$ , uma vez que  $\mathfrak{s}$  não é, em geral, um ideal de  $\mathfrak{g}$ .

### 1.4.3 Os cálculos de $H_0^1(\bar{\mathfrak{r}}_2^1, \mathfrak{R})$ e $H_0^2(\bar{\mathfrak{r}}_2^1, \mathfrak{R})$

No caso em que  $\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{r}}_2^1$ , usando que  $[\bar{\mathfrak{r}}_2^1, \bar{\mathfrak{r}}_2^1] = wh$  (1.67) é um ideal de  $\bar{\mathfrak{r}}_2^1$ ,  $\bar{\mathfrak{r}}_2^1 = wh \oplus \mathfrak{R}$  e a equação (1.154), podemos calcular

$$\begin{aligned} \bar{\mathfrak{r}}_2^1/wh &= \mathfrak{R} \\ H_0^1(\bar{\mathfrak{r}}_2^1, \mathfrak{R}) &= \mathfrak{R}. \end{aligned} \tag{1.179}$$

<sup>30</sup>Veja [3, p.242] e [30, p.131].

<sup>31</sup>Veja [3, p.243] e [30, p.135].

Por definição (1.69), o grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  é simplesmente conexo, o que implica que  $H_{DR}^1(\bar{\mathcal{P}}) = 0$ . Por outro lado, notamos (1.179) que  $H_0^1(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R}) \neq 0$ , o que é consistente com a trivialidade da cohomologia de de Rham do grupo uma vez que  $\bar{\mathcal{P}}$  não é compacto<sup>32</sup>.

A álgebra  $\bar{\mathcal{I}}_2^1$  não é semi-simples (Teo.1.4.5) e, apesar de possuir uma estrutura de extensão central (Nota1.4.2), nada garante que  $H_0^2(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R}) = 0$ . A álgebra de Poincaré estendida também não é nilpotente (Prop.1.4.1) de modo que não podemos garantir que  $H_0^2(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R}) \neq 0$  tampouco. Daí a necessidade de calcularmos seu segundo grupo de cohomologia, o que faremos a partir da definição (Def.1.4.3), como fizemos nos dois exemplos que apresentamos no final da subseção anterior.

A condição de 2-cociclo (1.164) aplicada à álgebra (1.50) fornece

$$\omega_2(I, J) = 0 \quad \omega_2(P_1, I) = 0 \quad \omega_2(P_0, I) = 0, \quad (1.180)$$

de modo que  $Z_0^2(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R})$  é o subespaço de  $C^2(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R}) = \Lambda^2 \bar{\mathcal{I}}_2^1$  formado pelas 2-formas cujas componentes podem ser expressas pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & x & y & 0 \\ -x & 0 & z & 0 \\ -y & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.181)$$

onde  $x, y, z \in \mathfrak{R}$  são parâmetros reais. Portanto  $\dim Z_0^2(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R}) = 3$ .

O espaço das 2-cobordas  $\omega_{cob} \in B_0^2(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R})$  é identificável como o subespaço de  $Z_0^2(\bar{\mathcal{I}}_2^1, \mathfrak{R})$  formado pelas 2-formas (1.165) cujas componentes podem ser expressas pelas matrizes

$$\begin{pmatrix} 0 & B\omega_1(I) & -\omega_1(P_1) & 0 \\ -B\omega_1(I) & 0 & -\omega_1(P_0) & 0 \\ \omega_1(P_1) & \omega_1(P_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.182)$$

<sup>32</sup>Veja o teorema 1.4.4 e a observação que o segue.



para algum  $\omega_1 \in C^1(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R})$ , de onde vemos que  $\dim B_0^2(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R}) = 3$  também.

Logo a dimensão do segundo grupo de cohomologia de  $\bar{I}_2^1$  é nula,

$$\begin{aligned}\dim H_0^2(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R}) &= \dim Z_0^2(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R}) - \dim B_0^2(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R}) \\ \dim H_0^2(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R}) &= 3 - 3 = 0\end{aligned}\tag{1.183}$$

e, portanto,

$$H_0^2(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R}) = 0.\tag{1.184}$$



## Capítulo 2

# A Partícula Relativista em 1 + 1 Dimensões

Iniciamos analisando como a dimensão não-nula do segundo grupo de cohomologia do grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$  afeta a dinâmica da partícula relativista em 1 + 1 dimensões. Depois de traduzirmos as equações de Euler-Lagrange (teorema 2.1.1) e o teorema de Noether (teorema 2.1.2) para a linguagem de “jet-bundles”, apresentamos o teorema de Lévy-Leblond (teorema 2.1.3) que mostra como o segundo grupo de cohomologia de um grupo dinâmico classifica as lagrangeanas inequivalentes e quase-invariantes por este grupo. Paralelamente, examinamos o problema da geração de termos da ação a partir de 1-formas de Wess-Zumino (definição 2.1.3) sobre um grupo de Lie, mostrando como a 1-forma potencial  $\beta_{(B)}^{(1)}$  do 2-cociclo da extensão central de  $\mathcal{P}$  dá origem a um termo de Wess-Zumino na lagrangeana da partícula (2.36).

Esta lagrangeana se torna, assim, quase-invariante pelo grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$  enquanto que as cargas de Noether conservadas constituem uma realização por colchetes de Poisson da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  (2.44), situação esta designada por anomalia clássica. Mostramos ainda que o termo de Wess-

Zumino pode ser “neutralizado” pela adição de um outro termo dependente de uma variável dinâmica  $\chi$  extra com dimensão de ação à lagrangeana, tornando-a invariante pelo grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$ , cujo segundo grupo de cohomologia é trivial, eliminando a anomalia (2.50). Esclarecemos na subseção 2.1.1 que o espaço-tempo estendido  $\bar{M}$ , constituído pela adoção da variável dinâmica  $\chi$ , não possui estrutura Minkowskiana, logo não deve ser interpretado como um espaço-tempo tipo 2+1.

A seguir procedemos a análise dos vínculos, expressando sob forma hamiltoniana a ação da partícula relativista em 1+1 dimensões livre de anomalias (2.72) e a forma de Poincaré-Cartan (2.74), a qual coincide com a 1-forma de Liouville que será utilizada no terceiro capítulo. Tomando esta ação parcialmente “on-shell” (2.81) recuperamos a ação utilizada por Cangemi e Jackiw para descrever uma partícula não-interagente e na ausência de gravidade em 1+1 dimensões [10, p.233].

A interpretação física do modelo é feita em termos da sua versão anômala, cuja ação é análoga à de uma partícula relativística acoplada a um campo elétrico externo (2.84). Calculamos os colchetes de Dirac (2.93) e mostramos que as equações de hamilton são corretamente reproduzidas (2.97), sob forma canônica, utilizando como hamiltoniana a energia total da partícula no potencial externo associado à carga central  $B$  no lugar da hamiltoniana total nula. Nos termos da mecânica relativística, mostramos que a partícula executa um movimento relativista uniformemente acelerado sob a ação de uma força física constante e igual a  $B$  (2.104).

Na última seção deste capítulo fixamos o grau de liberdade de gauge  $\chi$  por meio de uma condição de gauge canônica que identifica naturalmente a variável dinâmica extra  $\chi$  à função de ação da versão anômala do modelo (2.109), que é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi relativista (2.117) previamente construída na seção 2.4. Observamos ainda que as dificuldades de interpretação da hamiltoniana sem positividade definida, considerando-

se que o sistema constituído apenas pela partícula é fechado, podem ser intrínsecas às condições de gauge canônicas adotadas.

## 2.1 Termo de Wess-Zumino e as anomalias clássicas

Vimos no primeiro capítulo como a teoria de cohomologia é importante para a compreensão do problema de extensões centrais de um grupo de Lie, que surge quando se considera as representações projetivas de grupos de simetria em mecânica quântica. No nível clássico o problema se reflete na quase-invariança das lagrangeanas gerando as chamadas anomalias clássicas, as quais podem ser eliminadas efetuando-se a extensão central do grupo dinâmico original.

Nesta seção utilizaremos a formulação da mecânica lagrangeana em termos da teoria de “jet-bundles”, adequada para o tratamento de princípios variacionais, sendo que precisaremos traduzir alguns resultados familiares como as equações de Euler-Lagrange e o teorema de Noether para esta linguagem, pois ela nos permite compreender com clareza a relação entre as anomalias clássicas e a cohomologia, expressa pelo teorema de Lévy-Leblond. Neste contexto surge paralelamente a questão da obtenção de partes da lagrangeana a partir de 2-cociclos não triviais, que nos leva naturalmente ao conceito de termos de Wess-Zumino sobre uma variedade de grupo como o espaço-tempo.

Se definirmos a dinâmica de uma partícula relativista no espaço-tempo bidimensional  $M(\sim \mathfrak{R}^2)$  por meio da lagrangeana

$$L_0 = -m\sqrt{\dot{q}^2} \quad , \quad (2.1)$$

onde  $q^a$  são as coordenadas sobre  $M$ , perceberemos que  $L_0$  é *invariante* sob as transformações de simetria rígidas atuantes sobre  $M$  à esquerda

$$q'^a = \theta^a + \Lambda(\alpha)^a_b q^b \quad , \quad (2.2)$$

onde  $\Lambda(\alpha)^a_b = \delta^a_b \text{Cosh}\alpha + \varepsilon^a_b \text{Sinha}\alpha$ ,  $\theta^a, \alpha \in \mathfrak{R}$  são parâmetros reais e  $a, b \in \{0, 1\}$ . As transformações (2.2) definem o grupo de Poincaré bidimensional  $\mathcal{P}$  cujos elementos  $g = g(\theta^a, \alpha)$  satisfazem a lei de composição (1.31).

Utilizando a equação (1.111), podemos então calcular as expressões dos geradores da “ação à direita” de  $\mathcal{P}$  sobre si mesmo,

$$T_a(g) = \Lambda(\alpha)^b_a \frac{\partial}{\partial \theta^b} \quad T_2(g) = \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad (2.3)$$

que formam uma base do espaço vetorial tridimensional  $\mathfrak{X}^L(\mathcal{P})$  dos “campos vetoriais invariantes à esquerda”, tal que  $T_a(e) = P_a$  e  $T_2(e) = J$ , constituindo uma álgebra de Lie isomorfa à álgebra de Poincaré bidimensional  $i_2^1$  (1.29). As expressões da base do espaço vetorial dual  $\mathfrak{X}^{*L}(\mathcal{P})$  de 1-formas invariantes à esquerda podem ser calculadas, por sua vez, a partir de (1.116),

$$\omega^a(g) = \Lambda^{-1}(\alpha)^a_b d\theta^b \quad \omega^2(g) = d\alpha. \quad (2.4)$$

Também podemos calcular as expressões dos geradores da ação à esquerda de  $\mathcal{P}$  sobre  $M$  (2.2), pertencentes a  $\mathfrak{X}(M)$ ,

$$\begin{aligned} T_a^M(q) &= \left. \frac{\partial q^b}{\partial \theta^a} \right|_{g=e} \frac{\partial}{\partial q^b} = \delta^b_a \frac{\partial}{\partial q^b} \\ T_2^M(q) &= \left. \frac{\partial q^b}{\partial \alpha} \right|_{g=e} \frac{\partial}{\partial q^b} = \varepsilon^a_b q^b \frac{\partial}{\partial q^a}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

que formam uma álgebra de Lie isomorfa àquela dos campos vetoriais invariantes à direita sobre  $\mathcal{P}$  e, portanto, anti-homomorfa à álgebra de Poincaré bidimensional  $i_2^1$  (1.29).

Seja  $E = \mathfrak{R} \times M$  a variedade com coordenadas  $(\tau, q^a)$ , onde  $\tau$  é o parâmetro da linha de universo da partícula. Para incorporar as bi-velocidades à descrição do sistema é conveniente definirmos<sup>1</sup> o “fibrado de 1-jets”  $J^1(E) :=$

<sup>1</sup>O material que estamos apresentando é uma adaptação daquele exposto em [3, p.282] para o caso de sistemas relativísticos e vinculados.

$\mathfrak{R} \times T(M)$  com coordenadas  $(\tau, q^a, \dot{q}^a)$ . As trajetórias neste “espaço de evolução relativístico” são seções

$$s^1 : \tau \rightarrow s^1(\tau) = (q^a(\tau), \dot{q}^a(\tau)) \quad (2.6)$$

do fibrado de 1-jets, sendo que neste estágio  $q^a(\tau)$  e  $\dot{q}^a(\tau)$  não estão funcionalmente relacionadas. As trajetórias físicas ou “histórias” são seções  $s$  do fibrado  $E$  dadas por

$$s(\tau) = q^a(\tau). \quad (2.7)$$

Estas podem ser estendidas a seções  $j^1(s)$  de  $J^1(E)$  dadas por

$$j^1(s) = (q^a(\tau), \dot{q}^a(\tau) = dq^a(\tau)/d\tau), \quad (2.8)$$

sendo que apenas neste caso as coordenadas  $q^a(\tau)$  e  $\dot{q}^a(\tau)$  de  $J^1(E)$  estão relacionadas pela derivada em relação a  $\tau$ .

Um campo vetorial arbitrário  $X^1 \in \mathfrak{X}(J^1(E))$  é dado por

$$X^1 = X^{(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} + X^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \dot{X}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}. \quad (2.9)$$

Se  $X^{(\tau)}$  e  $X^a$  não dependerem de  $\dot{q}^a$ , então o campo vetorial (2.9) será da forma

$$X^1 = X + \dot{X}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}, \quad (2.10)$$

onde  $X \in \mathfrak{X}(E)$ , sendo que  $\dot{X}^a$  não estão relacionadas às componentes de  $X$ .

Quando as componentes  $\dot{X}^a$  forem determinadas pelas componentes de  $X$  através da expressão

$$\dot{X}^a = \frac{\partial X^a}{\partial \tau} - \dot{q}^a \frac{\partial X^{(\tau)}}{\partial \tau} + \dot{q}^b \frac{\partial X^a}{\partial q^b} - \dot{q}^b \frac{\partial X^{(\tau)}}{\partial q^b} \dot{X}^a, \quad (2.11)$$

então diremos que  $X^1$  é a elevação de  $X \in \mathfrak{X}(E)$ , o que denotaremos por  $X^1 = j^1(X)$ . Como consequência da equação (2.11), pode-se mostrar que a

elevação de campos vetoriais para  $\mathfrak{X}(J^1(E))$  preserva sua estrutura de álgebra de Lie:

$$j^1([X, Y]) = [j^1(X), j^1(Y)] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(E). \quad (2.12)$$

As transformações (2.2) podem ser estendidas ao fibrado  $E = \mathfrak{R} \times M$ , acrescentando  $\tau' = \tau$ , o que implica que os geradores (2.5) podem ser vistos sobre  $\mathfrak{X}(E)$ . Então os geradores (2.5) podem ser elevados para  $\mathfrak{X}(J^1(E))$ , usando a equação (2.11) para  $X^{(\tau)} = 0$ :

$$\begin{aligned} j^1(T_a^M) &= \delta^b_a \frac{\partial}{\partial q^b} \\ j^1(T_2^M) &= \varepsilon^a_b q^b \frac{\partial}{\partial q^a} + \varepsilon^a_b \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Note o termo adicional produzido pela elevação no último campo vetorial.

Para considerar o papel das simetrias e traduzir o teorema de Noether para a linguagem dos fibrados de 1-jets é conveniente utilizarmos a forma de Poincaré-Cartan  $\Theta_{PC}$ , determinada pela lagrangeana  $L(\tau, q^a, \dot{q}^a)$  sobre  $J^1(E)$ :

$$\Theta_{PC} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} (dq^a - \dot{q}^a d\tau) + L d\tau. \quad (2.14)$$

Note que o pull-back da forma de Poincaré-Cartan (2.14) para a variedade base  $\mathfrak{R}$  pela seção  $j^1(s)$  de  $J^1(E)$  dada por  $j^1(s) = (q^a(\tau), \dot{q}^a(\tau) = dq^a(\tau)/d\tau)$  fornece a lagrangeana usual:

$$(j^1(s))^* \Theta_{PC} = L(\tau, q^a, dq^a(\tau)/d\tau). \quad (2.15)$$

**Definição 2.1.1 (Princípio variacional)** *Seja o funcional das trajetórias físicas  $s$  (2.7) definido por*

$$S[s] = \int_{j^1(s)(I)} \Theta_{PC}, \quad (2.16)$$

onde  $I \subset \mathfrak{R}$  é um intervalo fechado da reta real. Então as trajetórias críticas  $s$  são aquelas para as quais  $\delta S = 0$ , isto é,

$$\int_I (j^1(s))^* (L_{X^1} \Theta_{PC}) = 0 \quad \forall X^1 \in \mathfrak{X}(J^1(E)), \quad (2.17)$$



onde as variações arbitrárias são produzidas pela derivada de Lie com respeito a um campo vetorial arbitrário  $X^1 \in \mathfrak{X}(J^1(E))$  (2.9) e  $(j^1(s))^*$  é o “pull-back” pela seção de 1-jet  $j^1(s)$  (2.8).

Então pode-se mostrar [3, p.284]

**Teorema 2.1.1 (Equações de Euler-Lagrange)** *As trajetórias críticas  $s$  (Def.2.1.1) são as soluções de*

$$(j^1(s))^*(i_{X^1}d\Theta_{PC}) = 0, \quad (2.18)$$

onde  $X^1 \in \mathfrak{X}(J^1(E))$  é um campo vetorial arbitrário dado por (2.9).

**Definição 2.1.2** *Um campo vetorial  $X \in \mathfrak{X}(E)$  gera uma simetria do sistema dinâmico descrito por (2.14) se sua elevação para  $\mathfrak{X}(J^1(E))$ , calculada a partir de (2.11), satisfizer a condição de quase-invariança*

$$L_{j^1(X)}\Theta_{PC} = d\Delta, \quad (2.19)$$

onde  $\Delta \neq \Delta(\dot{q}^a)$ .

**Teorema 2.1.2 (Noether)** *A quantidade*

$$\mathcal{N} = i_{j^1(X)}\Theta_{PC} - \Delta \quad (2.20)$$

*é conservada sobre as trajetórias críticas (Def.2.1.1) (soluções das equações de Euler-Lagrange (2.18)). Portanto,  $\mathcal{N}$  (2.20) é uma constante do movimento.*

Considere o sistema dinâmico descrito pela lagrangeana  $L(\tau, q^a, dq^a(\tau)/d\tau)$ , a qual é quase-invariante sob a ação do grupo dinâmico  $G$ ,

$$L(g\tau, gq^a, gdq^a(\tau)/d\tau) = L(\tau, q^a, dq^a(\tau)/d\tau) + \frac{d}{d\tau}\Delta(\tau, q^a; g). \quad (2.21)$$

Se acrescentarmos um termo que seja uma derivada com relação a  $\tau$  à lagrangeana  $L$ , a nova lagrangeana será  $\tilde{L} = L + d\phi(\tau, q^a(\tau))/d\tau$ . Como as equações de movimento permanecem inalteradas,  $\tilde{L}$  é equivalente a  $L$ , entretanto a variação de  $\tilde{L}$  com respeito a  $G$  fornece um termo a ser adicionado a  $\Delta(\tau, q^a; g)$  em (2.21) expresso por

$$\Delta_{cob}(\tau, q^a; g) = \phi(g\tau, gq^a) - \phi(\tau, q^a) + \eta(g), \quad (2.22)$$

uma vez que uma função  $\eta(g)$  sempre pode ser adicionada a  $\Delta(\tau, q^a; g)$  sem alterar (2.21).

Então pode-se mostrar [3, p.298]

**Teorema 2.1.3 (Lévy-Leblond)** 1. O mapeamento  $\xi : G \times G \rightarrow \mathfrak{R}$ , definido por

$$\xi(g', g) := \Delta(g\tau, gq^a; g') - \Delta(\tau, q^a; g'g) + \Delta(\tau, q^a; g), \quad (2.23)$$

é uma função definida sobre  $G \times G$  a valores em  $\mathfrak{R}$ , independente das coordenadas do espaço-tempo, a qual define um 2-cociclo de  $G$ .

2. O mapeamento  $\xi_{cob} : G \times G \rightarrow \mathfrak{R}$ , definido por

$$\xi_{cob}(g', g) := \Delta_{cob}(g\tau, gq^a; g') - \Delta_{cob}(\tau, q^a; g'g) + \Delta_{cob}(\tau, q^a; g), \quad (2.24)$$

onde  $\Delta_{cob}(\tau, q^a; g)$  é dado por (2.22), é uma 2-coborda gerada por  $\eta(g)$ .

Conseqüentemente, as lagrangeanas inequivalentes  $L$ , satisfazendo (2.21), são classificadas por  $H_0^2(G, \mathfrak{R})$ .

Vendo a lagrangeana  $L_0$  (2.1) sobre  $J^1(E)$ , podemos calcular a forma de Poincaré-Cartan  $\Theta_{PC}^0$  usando (2.14):

$$\Theta_{PC}^0 = -\frac{m\dot{q}_a}{\sqrt{\dot{q}^2}} dq^a. \quad (2.25)$$

Entretanto, em 1+1 dimensões o segundo grupo de cohomologia da álgebra de Poincaré com coeficientes em  $\mathfrak{R}$  não é trivial e, uma vez que as lagrangeanas

inequivalentes são classificadas por  $H_0^2(\mathcal{P}, \mathfrak{R})$  (Teo.2.1.3), a lagrangeana mais geral que se pode escrever deve ser *quase-invariante* sob  $\mathcal{P}$ , daí a necessidade de modificarmos  $L_0$  (2.1)(que corresponde a  $[0] \in H_0^2(\mathcal{P}, \mathfrak{R})$ ).

**Definição 2.1.3 (Forma de Wess-Zumino)** *Seja  $G$  um grupo de Lie com cohomologia de de Rham trivial. Uma forma de Wess-Zumino é a  $(p+1)$ -forma potencial  $\beta^{(p+1)}$  sobre  $G$  de uma  $(p+2)$ -forma  $\omega^{(p+2)}$  que seja um elemento não-trivial do  $(p+2)$ -ésimo grupo de cohomologia de Chevalley-Eilenberg  $E^{(p+2)}(G)$  (Def.1.4.6).*

Termos de Wess-Zumino são então dados por formas diferenciais e não dependem da métrica da variedade sobre a qual estão definidos, sendo por isso chamados de *topológicos*.

**Teorema 2.1.4 (Condição de consistência de Wess-Zumino)** *A forma potencial  $\beta^{(p+1)}$  é quase-invariante, isto é, sua derivada de Lie é uma forma exata,*

$$L_{T_i^R} \beta^{(p+1)} = d\Delta_i^{(p)}, \quad (2.26)$$

e os  $\Delta_i^{(p)}$  satisfazem a condição de consistência

$$d(L_{T_i^R} \Delta_j^{(p)} - L_{T_j^R} \Delta_i^{(p)} - \Delta_{[i,j]}^{(p)}) = 0 \quad \forall T_i^R \in \mathfrak{g}^R. \quad (2.27)$$

*Prova:* Uma vez que estamos assumindo que  $G$  possui cohomologia de de Rham trivial e  $\omega^{(p+2)}$  é fechada, temos

$$\omega^{(p+2)} = d\beta^{(p+1)}. \quad (2.28)$$

E, como  $\omega^{(p+2)}$  é invariante à esquerda,  $L_{T_i^R} \omega^{(p+2)} = 0$ . Portanto, da comutatividade entre a derivada exterior e a derivada de Lie,

$$L_{T_i^R} \omega^{(p+2)} = dL_{T_i^R} \beta^{(p+1)} = 0 \quad (2.29)$$

e, como  $\beta^{(p+1)} \notin \mathfrak{X}^{*L}(G)$ ,  $L_{T_i^R} \beta^{(p+1)} \neq 0$  de onde segue-se a equação (2.26).

A equação (2.27), por sua vez, é conseqüência da identidade  $[L_X, L_Y] - L_{[X,Y]} = 0$ . QED

A equação (2.27) leva o nome de condição de Wess-Zumino por analogia com uma condição similar que aparece no contexto de teorias de gauge anômalas. No caso  $p = 0$ , se  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) \neq 0$ , tomando a 2-forma da extensão central  $\bar{\mathfrak{g}}$ ,  $\omega^{(2)} \in E^2(G)$  dada pela equação (1.169), deduzimos de (2.28) que

$$f_{ij}^{(\varphi)} = T_i \cdot \beta^{(1)}(T_j) - T_j \cdot \beta^{(1)}(T_i) - \beta^{(1)}([T_i, T_j]), \quad (2.30)$$

que relaciona as constantes de estrutura da álgebra centralmente estendida envolvendo o gerador central com a 1-forma de Wess-Zumino.

Está claro que o grupo de Poincaré bidimensional tem uma estrutura de produto semi-direto  $\mathcal{P} = SO(1,1) \times_{\sigma} H$ , onde  $SO(1,1)$  atua sobre  $H$  através da representação  $\sigma : SO(1,1) \rightarrow \text{Aut}H$  dada por  $\theta^a \rightarrow \Lambda(\alpha)^a_b \theta^b$ . Em particular, o espaço homogêneo  $H = \mathcal{P}/SO(1,1)$  é um subgrupo abeliano de  $\mathcal{P}$ , simplesmente conexo e possui cohomologia de de Rham trivial. Podemos identificar o espaço-tempo  $M$  ao espaço homogêneo  $H$ , fazendo  $q^a = \theta^a$ .

Usando a equação (2.4), podemos expressar a 2-forma da extensão central  $\bar{\omega}_2^{(1)}$  (1.169) nas coordenadas de  $M$  por

$$\omega_{(B)}^{(2)} = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} dq^a \wedge dq^b = d\beta_{(B)}^{(1)}, \quad (2.31)$$

onde

$$\beta_{(B)}^{(1)} = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^a dq^b. \quad (2.32)$$

Daí vemos que  $\omega_{(B)}^{(2)}$  é invariante à esquerda sob a ação do subgrupo  $H$  e exata sobre  $H = M$ .

A quase-invariança de  $\beta_{(B)}^{(1)}$  é exibida pelo fato de que, por uma transformação finita  $g = g(\theta^a, \alpha)$  atuando à esquerda,

$$\delta\beta_{(B)}^{(1)} = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} (\theta^a + \Lambda(\alpha)^a_c q^c) \Lambda(\alpha)^b_e dq^e - \beta_{(B)}^{(1)} = d\left(\frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha)^b_c q^c\right) \quad (2.33)$$

(de (2.5) vemos que a derivada de Lie  $L_{\theta^a T_a^M + \alpha T_2^M} \beta_{(B)}^{(1)} = d(\frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} q^b)$  dá o mesmo resultado até primeira ordem). Portanto,  $\omega_{(B)}^{(2)} \in E^2(H)$  e  $\beta_{(B)}^{(1)}$  é uma forma de Wess-Zumino sobre  $M$ .

E, como o espaço-tempo  $M$  é uma subvariedade do “espaço de evolução relativístico”, podemos ver a forma de WZ (2.32) definida sobre  $J^1(E)$ . Modificamos, então, a forma de Poincaré-Cartan (2.25) por

$$\Theta_{PC} := \Theta_{PC}^0 + \beta_{(B)}^{(1)} = p_a dq^a, \quad (2.34)$$

onde

$$p_a = -\frac{m\dot{q}_a}{\sqrt{\dot{q}^2}} - \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \dot{q}^b \quad (2.35)$$

é o momento canônico. Então, efetuando o pull-back de (2.34) para a variedade base por meio da seção de 1-jet  $j^1(s)$  dada por (2.8), obtemos a nova lagrangeana (2.15)

$$L := (j^1(s))^*(\Theta_{PC}) = L_0 + L_{WZ}, \quad (2.36)$$

onde

$$L_{WZ} = -\frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \dot{q}^a \dot{q}^b \quad (2.37)$$

é um termo de Wess-Zumino.

A lagrangeana (2.36) é quase-invariante sob a ação de  $\mathcal{P}$  (2.2),

$$L(q'^a, \dot{q}'^a) - L(q^a, \dot{q}^a) = \frac{d}{d\tau} \Delta_{(B)}(q; g), \quad (2.38)$$

onde<sup>2</sup>

$$\Delta_{(B)}(q; g) = \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha)^b{}_c q^c. \quad (2.39)$$

Pelo teorema de Lévy-Leblond (Teo.2.1.3), então, o mapeamento  $\xi_B : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathfrak{R}$  definido por

$$\xi_B(g', g) = \frac{\Delta_{(B)}(q'; g') - \Delta_{(B)}(q; g'g) + \Delta_{(B)}(q; g)}$$

<sup>2</sup>Compare com a equação (2.33).

$$\begin{aligned}
\xi_B(g', g) &= \frac{B}{2} \theta'^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha')^b{}_c q^c - \frac{B}{2} (\theta'^a + \Lambda(\alpha')^a{}_d \theta^d) \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha')^b{}_e \Lambda(\alpha)^e{}_f q^f + \\
&\quad + \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha)^b{}_c q^c \\
\xi_B(g', g) &= \frac{B}{2} \theta'^a \varepsilon_{ab} \Lambda(\alpha')^b{}_c \theta^c
\end{aligned} \tag{2.40}$$

é um 2-cociclo, que sabemos ser não-trivial e característico da extensão central de  $\mathcal{P}$  (1.47) em virtude da teoria de cohomologia.

Assim temos que

$$L_{j^1(T_2^M)} \Theta_{PC} = 0 \quad \text{e} \quad L_{j^1(T_a^M)} \Theta_{PC} = d\Delta_a, \tag{2.41}$$

onde

$$\Delta_a = -\frac{B}{2} \varepsilon_{ba} q^b, \tag{2.42}$$

então pelo teorema de Noether (Teo.2.1.2) as seguintes cargas são conservadas “on-shell”<sup>3</sup>

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_2 &= i_{j^1(T_2^M)} \Theta_{PC} = p_a \varepsilon^a{}_b q^b \\
\mathcal{N}_a &= i_{j^1(T_a^M)} \Theta_{PC} - \Delta_a = p_a + \frac{B}{2} \varepsilon_{ba} q^b.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Estendendo as quantidades (2.43) “off-shell” e usando  $\{q^a, p_b\} = \delta^a{}_b$ , calculamos

$$\{\mathcal{N}_a, \mathcal{N}_2\} = \varepsilon_a{}^b \mathcal{N}_b \quad \{\mathcal{N}_a, \mathcal{N}_b\} = B \varepsilon_{ab}, \tag{2.44}$$

de onde notamos que as cargas conservadas formam uma realização por colchetes de Poisson da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  (1.50).

Se estendermos o espaço-tempo<sup>4</sup> adicionando um parâmetro extra  $\chi$ , então os geradores  $\{\bar{T}_A^{\bar{M}}\}$  da ação à esquerda do grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre este espaço-tempo estendido  $\bar{M}$  podem ser lidos das cargas conservadas

<sup>3</sup>O momento canônico (2.35) satisfaz o vínculo  $(p_a + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b)(p^a + \frac{B}{2} \varepsilon^{ab} q_b) = m^2$ .

<sup>4</sup>Veja a discussão da subseção 2.1.1 à página 80.

(2.43), efetuando a substituição  $p_a \rightarrow \partial/\partial q^a$ ,

$$\begin{aligned}\bar{T}_a^{\bar{M}} &= \frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b \frac{\partial}{\partial \chi} \\ \bar{T}_2^{\bar{M}} &= \varepsilon^a{}_b q^b \frac{\partial}{\partial q^a} \\ \bar{T}_3^{\bar{M}} &= \frac{\partial}{\partial \chi},\end{aligned}\tag{2.45}$$

e formam uma álgebra de Lie isomorfa à álgebra direita  $\bar{\mathfrak{I}}_2^{1R}$  (1.127).

Neste ponto nos deparamos com a situação notável de que a álgebra das cargas conservadas fornece uma realização da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{I}}_2^1$  enquanto que a lagrangeana é quase-invariante pelo grupo de Poincaré  $\mathcal{P}$ . Esta situação é designada como “anomalia clássica”. A anomalia se origina dos termos  $\Delta_a$  nas cargas conservadas  $\mathcal{N}_a$  (2.41-2.43) que, longe de serem irregulares, apenas indicam que o grupo dinâmico relevante para o problema físico em questão é o grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$ .

Então podemos alterar  $\beta_{(B)}^{(1)}$  para obtermos uma outra  $\bar{\beta}_{(B)}^{(1)}$  que seja invariante à esquerda. Isto pode ser realizado definindo  $\bar{\beta}_{(B)}^{(1)}$  sobre o espaço homogêneo  $\bar{H} = \bar{\mathcal{P}}/SO(1,1)$  e identificando  $\bar{H} = \bar{M}$ , fazendo  $(q^a, \chi) = (\theta^a, \beta)$ . A ação de  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\chi$  é fornecida por

$$\chi' = \chi + \beta + \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \Lambda^b{}_c q^c.\tag{2.46}$$

A equação (2.46) juntamente com (2.2) definem a ação do grupo  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\bar{M}$ , cujos geradores determinamos nas equações (2.45). Está claro então que a nova 1-forma invariante é <sup>5</sup>

$$\bar{\beta}_{(B)}^{(1)} = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^a dq^b - d\chi,\tag{2.47}$$

a qual não é um termo de WZ (Def.2.1.3), pois de (2.45) vemos que  $L_{\theta^a \bar{T}_a^{\bar{M}} + \alpha \bar{T}_2^{\bar{M}} + \beta \bar{T}_3^{\bar{M}}} \bar{\beta}_{(B)}^{(1)} = 0$ , e não podemos estender mais o espaço-tempo porque  $H_0^2(\bar{\mathcal{P}}, \mathfrak{R}) = 0$ .

<sup>5</sup> Compare com  $\bar{\omega}^3(g)$  na equação (1.132) a menos de um sinal global.

Seja  $\bar{E} = \mathfrak{R} \times \bar{M}$ , então podemos definir a forma de Poincaré-Cartan sobre  $J^1(\bar{E}) := \mathfrak{R} \times T(\bar{M})$  com parâmetros  $(\tau, q^a, \chi, \dot{q}^a, \dot{\chi})$  por

$$\bar{\Theta}_{PC} := \Theta_{PC} - d\chi \quad (2.48)$$

e efetuando o pull-back de (2.48) para a variedade base por meio da seção de 1-jet  $j^1(\bar{s}) : \mathfrak{R} \rightarrow J^1(\bar{E})$  dada por

$$j^1(\bar{s})(\tau) = (q^a(\tau), \chi(\tau), \dot{q}^a(\tau) = dq^a(\tau)/d\tau, \dot{\chi}(\tau) = d\chi(\tau)/d\tau) \quad (2.49)$$

obtemos a lagrangeana (2.15)

$$\bar{L} := L - \dot{\chi}, \quad (2.50)$$

onde  $L$  é dada por (2.36).

Neste espaço de evolução estendido  $J^1(\bar{E})$  não há equação de movimento para  $\chi$  e as equações de Euler-Lagrange para  $q^a$  permanecem inalteradas. De fato, escrevendo um campo vetorial de 1-jet arbitrário  $\bar{X}^1 \in J^1(\bar{E})$  como

$$\bar{X}^1 = X^1 + X^{(x)} \frac{\partial}{\partial \chi} + \dot{X}^{(x)} \frac{\partial}{\partial \dot{\chi}}, \quad (2.51)$$

onde

$$X^1 = X^{(\tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} + X^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \dot{X}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}, \quad (2.52)$$

e observando de (2.48) que  $d\bar{\Theta}_{PC} = d\Theta_{PC}$ , temos

$$i_{\bar{X}^1} d\bar{\Theta}_{PC} = i_{\bar{X}^1} d\Theta_{PC} = i_{X^1} d\Theta_{PC}. \quad (2.53)$$

E como a 1-forma da equação (2.53) não tem componentes nas direções  $d\chi$  e  $d\dot{\chi}$ , das equações (2.8) e (2.49) temos ainda que

$$(j^1(\bar{s}))^*(i_{\bar{X}^1} d\bar{\Theta}_{PC}) = (j^1(s))^*(i_{X^1} d\Theta_{PC}), \quad (2.54)$$

de modo que as equações de Euler-Lagrange (Teo.2.1.1)  $(j^1(\bar{s}))^*(i_{\bar{X}^1} d\bar{\Theta}_{PC}) = 0$  e  $(j^1(s))^*(i_{X^1} d\Theta_{PC}) = 0$  são equivalentes, como queríamos demonstrar.



As elevações dos campos vetoriais (2.45) para o espaço de evolução estendido  $J^1(\bar{E})$  são

$$\begin{aligned} j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}}) &= \frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b \frac{\partial}{\partial \chi} + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial \dot{\chi}} \\ j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}}) &= \varepsilon^a{}_b q^b \frac{\partial}{\partial q^a} + \varepsilon^a{}_b \dot{q}^b \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \\ j^1(\bar{T}_3^{\bar{M}}) &= \frac{\partial}{\partial \chi}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Então

$$L_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})} \bar{\Theta}_{PC} = L_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})} \Theta_{PC} - L_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})} d\chi = 0, \quad (2.56)$$

pois  $L_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})} d\chi = di_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})}(d\chi) = d(\frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b)$  e  $L_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})} \Theta_{PC} = L_{\partial/\partial q^a} \Theta_{PC} = d(-\frac{B}{2} \varepsilon_{ba} q^b)$ .

$$L_{j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}})} \bar{\Theta}_{PC} = L_{j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}})} \Theta_{PC} - L_{j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}})} d\chi = 0, \quad (2.57)$$

pois  $L_{j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}})} d\chi = di_{j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}})}(d\chi) = 0$ .

$$L_{j^1(\bar{T}_3^{\bar{M}})} \bar{\Theta}_{PC} = 0. \quad (2.58)$$

Tal que não há um termo  $\Delta$  adicional nas correntes de Noether “on-shell”

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_a &= i_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})} \Theta_{PC} - i_{j^1(\bar{T}_a^{\bar{M}})} d\chi = p_a - \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b \\ \mathcal{N}_2 &= i_{j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}})} \bar{\Theta}_{PC} = i_{j^1(\bar{T}_2^{\bar{M}})} \Theta_{PC} = p_a \varepsilon^a{}_b q^b \\ \mathcal{N}_3 &= i_{j^1(\bar{T}_3^{\bar{M}})} \bar{\Theta}_{PC} = -i_{\partial/\partial \chi} d\chi = -1, \end{aligned} \quad (2.59)$$

embora elas mantenham as mesmas expressões que (2.43). Estendendo as quantidades (2.59) “off-shell” e usando  $\{q^a, p_b\} = \delta^a{}_b$ , obtemos

$$\begin{aligned} \{\mathcal{N}_a, \mathcal{N}_2\} &= \varepsilon_a{}^b \mathcal{N}_b, \quad \{\mathcal{N}_a, \mathcal{N}_b\} = B \varepsilon_{ab} \mathcal{N}_3 \\ \{\mathcal{N}_3, \mathcal{N}_a\} &= 0, \quad \{\mathcal{N}_3, \mathcal{N}_2\} = 0, \end{aligned} \quad (2.60)$$

a diferença em relação a (2.44) sendo que agora temos uma carga identicamente conservada  $\mathcal{N}_3$  associada ao gerador central e realizada pela unidade.

Deste modo, eliminamos as anomalias clássicas (2.42) em termos de uma lagrangeana (2.50) *invariante* pelo grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  e definida sobre  $J^1(\bar{E})$ , tal que as cargas conservadas fecham uma álgebra de Lie (2.60) que é uma realização por colchetes de Poisson da álgebra de Poincaré estendida  $\bar{\mathfrak{p}}_2^1$  (1.50).

### 2.1.1 O espaço-tempo estendido $\bar{M}$

Pelo fato do espaço-tempo estendido ser definido como o espaço homogêneo  $\bar{M} = \bar{\mathcal{P}}/SO(1, 1)$  o mesmo é isomorfo ao grupo de Weyl-Heisenberg  $WH$  e, portanto, herda as propriedades algébricas das álgebras nilpotentes<sup>6</sup>. Esta estrutura não-abeliana de  $\bar{M}$  é um indício de que o mesmo não deva ser interpretado como um espaço-tempo.

Por outro lado, das equações (2.38-2.40) vemos que, mesmo no nível clássico, o 2-cociclo da extensão central  $\xi_B$  associado às anomalias clássicas do sistema dinâmico definido por (2.36) deve possuir dimensão de ação<sup>7</sup>. Portanto, as equações (2.46) e (2.50) mostram que tanto a coordenada de grupo  $\beta$  como a variável dinâmica  $\chi$ , associadas à extensão central de  $\mathcal{P}$ , possuem dimensão de ação  $[\chi] = [\hbar]$  em unidades onde  $c = 1$ , sendo adimensionais apenas em unidades naturais em que também  $\hbar = 1$ . Em particular, a coordenada  $\chi$  de  $\bar{M}$  não possui dimensão de espaço-tempo.

Mais do que isto, o espaço-tempo estendido  $\bar{M}$  não admite nenhuma métrica invariante pelo grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  definida sobre ele. De fato, lembrando que o espaço-tempo estendido foi definido como  $\bar{M} = \bar{\mathcal{P}}/SO(1, 1)$ , tal que possui a topologia  $\bar{M} = \mathfrak{R}^2 \times \mathfrak{R}$ , com a estrutura algébrica da álgebra

---

<sup>6</sup>Veja os comentários finais da seção 1.2 na página 33, acerca das propriedades algébricas de  $WH$  ou  $wh$ .

<sup>7</sup>Consistentemente com a dimensão exigida do expoente que define uma representação projetiva de  $\mathcal{P}$  (1.47) no nível quântico.

de Weyl-Heisenberg  $wh$ ,

$$[P_a, P_b] = B\epsilon_{ab}I, \quad (2.61)$$

vemos que, pela fórmula de Beltrametti e Blase (1.134), existe

$$n = r - \text{posto} \|B\epsilon_{ab}\| = 3 - 2 = 1 \quad (2.62)$$

um único operador de Casimir invariante independente associado à álgebra  $wh$ ,

$$C = I^2, \quad (2.63)$$

que é uma forma bilinear simétrica degenerada na base  $\{P_a, I\}$  de  $\bar{M}$ .

Conseqüentemente, o espaço tempo estendido  $\bar{M}$  não possui uma estrutura Minkowskiana (do tipo 2+1), caso em que a causalidade não se encontra bem definida. Veremos adiante que a variável dinâmica  $\chi$  é, na verdade, um grau de liberdade de “gauge” não-físico, cuja interpretação física será fornecida, em última análise, por fixação de gauge. Mostraremos mais adiante que a condição de gauge canônica mais natural identifica o grau de liberdade de “gauge”  $\chi$  à função de ação  $S(q^a)$  da versão anômala do modelo.

## 2.2 Análise hamiltoniana

Na seção anterior, vimos que a dinâmica da partícula relativística em 1+1 dimensões é afetada pela cohomologia não-trivial do grupo de Poincaré bidimensional  $\mathcal{P}$ . O 2-cociclo da extensão central  $\xi_B$  está associado a um termo de Wess-Zumino que torna a lagrangeana quase-invariante por  $\mathcal{P}$ , gerando as anomalias clássicas. Estas anomalias podem ser eliminadas adicionando-se mais um termo à lagrangeana, expresso em termos de uma variável dinâmica extra  $\chi$  com dimensão de ação, que “neutraliza”, por assim dizer, o termo de Wess-Zumino, deixando a lagrangeana invariante pelo grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$ .

Iniciamos a análise hamiltoniana da lagrangeana (2.50), definida sobre  $J^1(\bar{E})$  com coordenadas  $(\tau, q^a, \chi, \dot{q}^a, \dot{\chi})$ ,

$$\bar{L}(\tau, q^a, \chi, \dot{q}^a, \dot{\chi}) = -m\sqrt{\dot{q}^2} - \frac{B}{2}\varepsilon_{ab}\dot{q}^a q^b - \dot{\chi}, \quad (2.64)$$

onde  $a, b \in \{0, 1\}$ , calculando os momentos canônicos conjugados a  $q^a$  e  $\chi$ , respectivamente,

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^a} = -\frac{m\dot{q}_a}{\sqrt{\dot{q}^2}} - \frac{B}{2}\varepsilon_{ab}q^b \\ \pi &= \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{\chi}} = -1 \end{aligned} \quad (2.65)$$

e a hamiltoniana canônica

$$H_C = 0. \quad (2.66)$$

Utilizando o colchete de Poisson

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^a} \frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial G}{\partial q^a} + \frac{\partial F}{\partial \chi} \frac{\partial G}{\partial \pi} - \frac{\partial F}{\partial \pi} \frac{\partial G}{\partial \chi} \quad (2.67)$$

podemos calcular os colchetes de Poisson fundamentais

$$\begin{aligned} \{q^a, p_b\} &= \delta^a_b & \{q^a, q^b\} &= 0 & \{p_a, p_b\} &= 0, \\ \{\chi, \pi\} &= 1 & \{\chi, \chi\} &= 0 & \{\pi, \pi\} &= 0, \\ \{\pi, p_a\} &= 0 & \{\pi, q^a\} &= 0 & \{\chi, q^a\} &= 0, \\ & & \{\chi, p_a\} &= 0. & & \end{aligned} \quad (2.68)$$

Calculando o hessiano

$$H_{rs} = \frac{\partial^2 \bar{L}}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s}, \quad r, s \in \{0, 1, 2\}, \quad (2.69)$$

temos que

$$H_{ab} = \frac{\partial p_a}{\partial \dot{q}^b}, \quad H_{2a} = H_{a2} = \frac{\partial p_a}{\partial \dot{\chi}} = 0 \quad \text{e} \quad H_{22} = \frac{\partial \pi}{\partial \dot{\chi}} = 0, \quad (2.70)$$

onde  $q^2 = \chi$  e  $p_2 = \pi$ . E como  $\text{posto}[H_{rs}] = \text{posto}[H_{ab}] = 1$ , concluímos que há 2 vínculos primários:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \pi + 1 \\ \phi_2 &= \left(p_a - \frac{B}{2}\pi\varepsilon_{ab}q^b\right)^2 - m^2.\end{aligned}\quad (2.71)$$

E como temos também que  $\{\phi_1, \phi_2\} = 0$  e  $H_C = 0$ , deduzimos que não há vínculos secundários, além de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  serem de primeira classe. Vemos ainda que, pelo fato de  $\{\phi_1, \chi\} = -1$ ,  $\chi$  não é um observável e, portanto, é um grau de liberdade de gauge, não físico. Então a ação correspondente a (2.64), sob forma hamiltoniana, se expressa por

$$\bar{S}[q^a, \chi, p_b, \pi, u] = \int_W d\tau (p_a \dot{q}^a + \pi \dot{\chi} - u^m \phi_m), \quad (2.72)$$

onde  $W$  é a linha de universo da partícula e os  $u^m$  são multiplicadores de Lagrange com  $m \in \{1, 2\}$ .

Como veremos adiante, é possível fixar o gauge de  $\phi_1$  globalmente por meio da condição de gauge canônica  $C_1 = \chi - S(q^a)$ , onde  $S(q^a)$  é a função principal de Hamilton da versão anômala do modelo<sup>8</sup>. Se incluirmos  $C_1$ , resolvendo-o dentro da ação (2.72) juntamente com  $\phi_1$ , recuperaremos a ação em sua versão anômala, após descartarmos uma derivada total,

$$S[q^a, p_b, e] = \int_W d\tau \{p_a \dot{q}^a - e[(p_a + \frac{B}{2}\varepsilon_{ab}q^b)^2 - m^2]\}, \quad (2.73)$$

onde  $e$  é o einbein. Entretanto, como não queremos que a teoria pareça “anômala”, optamos por manter o grau de liberdade  $\chi$ .

A forma de Poincaré-Cartan ou 1-forma canônica (2.48) se expressa na formulação hamiltoniana por

$$\bar{\Theta}_{PC} = p_a dq^a + \pi d\chi := \bar{\Lambda} \quad (2.74)$$

---

<sup>8</sup>Veja discussão da página 96.

e está definida sobre  $J^{1*}(\bar{E}) = \mathfrak{R} \times T^*(\bar{M})$ . Vemos, ainda, que a 1-forma canônica coincide com a 1-forma de Liouville  $\bar{\Lambda}$ , uma vez que a hamiltoniana canônica  $H_C = 0$ .

Estendendo a ação à esquerda do grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  para  $\bar{S} = T^*(\bar{M})$ , tal que

$$\begin{aligned} q'^a &= \theta^a + \Lambda^a{}_b q^b \\ \chi' &= \chi + \beta + \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \Lambda^b{}_c q^c \\ p'_b &= p_a (\Lambda^{-1})^a{}_b - \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \pi \\ \pi' &= \pi, \end{aligned} \tag{2.75}$$

onde  $g(\theta^a, \alpha, \beta) \in \bar{\mathcal{P}}$ ,  $\Lambda^a{}_b(\alpha) = \delta^a{}_b \text{Cosh} \alpha + \varepsilon^a{}_b \text{Sinh} \alpha$  e  $s = (q^a, \chi, p_b, \pi) \in \bar{S}$ , podemos calcular as elevações de  $\bar{T}_A^{\bar{M}} \in \mathfrak{X}(\bar{M})$  (2.45) para  $\mathfrak{X}(\bar{S})$  obtendo

$$\begin{aligned} \bar{T}_a^{\bar{S}} &= \delta^b{}_a \frac{\partial}{\partial q^b} + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \pi \frac{\partial}{\partial p_b} \\ \bar{T}_2^{\bar{S}} &= \varepsilon^a{}_b q^b \frac{\partial}{\partial q^a} - p_b \varepsilon^b{}_a \frac{\partial}{\partial p_a} \\ \bar{T}_3^{\bar{S}} &= \frac{\partial}{\partial \chi}, \end{aligned} \tag{2.76}$$

onde  $A \in \{0, 1, 2, 3\}$  e  $a, b \in \{0, 1\}$ .

Podemos então calcular diretamente, usando (2.74) e (2.76), que

$$L_{\bar{T}_A^{\bar{S}}} \bar{\Lambda} = 0, \tag{2.77}$$

mostrando que a 1-forma de Liouville é invariante pelas transformações geradas por (2.76), o que era esperado em virtude das equações (2.56-2.58). Além disso, a equação (2.77) mostra que a ação de  $\bar{i}_2^1$  sobre  $\bar{S}$  é automaticamente canônica, pois

$$L_{\bar{T}_A^{\bar{S}}} \bar{\Lambda} = 0 \Rightarrow L_{\bar{T}_A^{\bar{S}}} \bar{\Omega} = 0. \tag{2.78}$$

Note que a quantidade definida por

$$\tilde{p}_a := p_a - \frac{B}{2} \pi \varepsilon_{ab} q^b \tag{2.79}$$

transforma-se tal que

$$\tilde{p}_a \rightarrow \tilde{p}_b (\Lambda^{-1})^b_a \quad (2.80)$$

e, por isso, deve ser interpretada como o momento cinético da partícula.

Em termos do momento cinético  $\tilde{p}_a$  e sobre a superfície  $\phi_1 = C_1 = 0$ , a ação (2.73) se expressa por<sup>9</sup>

$$S[q^a, \tilde{p}_b, e] = \int_W d\tau [(\tilde{p}_a - \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b) \dot{q}^a - e(\tilde{p}^a \tilde{p}_a - m^2)], \quad (2.81)$$

equivalente à ação utilizada por Cangemi e Jackiw para descrever uma partícula não-interagente e na ausência de gravidade em 1+1 dimensões [10, p.233].

## 2.3 A versão anômala do modelo

Nesta seção nos concentraremos no sistema descrito pela lagrangeana (2.36),

$$L(\tau, q^a, \dot{q}^a) = -m\sqrt{\dot{q}^2} - \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \dot{q}^a q^b, \quad (2.82)$$

para efeitos de interpretação física do modelo. Vimos que, pelo fato de  $H_0^2(\mathcal{P}, \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$ , o teorema de Lévy-Leblond (Teo.2.1.3) garante que (2.82) é a lagrangeana mais geral que se pode escrever para descrever uma partícula relativística não-interagente e na ausência de gravidade em 1+1 dimensões. Das equações de Euler-Lagrange deduzidas de (2.82), mostra-se facilmente que  $m = 0 \Rightarrow B = 0$ . Então para que a lagrangeana (2.82) não seja trivial precisamos assumir que  $m \neq 0$ . E, apesar de (2.82) estar bem definida para todo  $B \in \mathfrak{R}$ , estamos interessados no caso em que esta lagrangeana é quase-invariante, incorporando o termo de Wess-Zumino o qual desejamos interpretar fisicamente. Por este motivo também assumiremos que  $B \neq 0$ .

O modelo da partícula relativista em 1+1 dimensões em sua versão anômala é análogo ao de uma carga em um campo eletromagnético [24, p.70]. A

<sup>9</sup>Compare com a equação (2.A.26) de [10].

ação correspondente à lagrangeana (2.82), sob forma hamiltoniana, expressa por

$$S[q^a, p_b, e, f] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ p_a \dot{q}^a - e [(p_a + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b)^2 - m^2] - f(q^0 - \tau) \}, \quad (2.83)$$

no gauge  $q^0 := t = \tau$ , é equivalente à ação de uma partícula relativística acoplada a um campo eletromagnético externo [35, p.193],

$$S[q^a, p_b, e, f] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \{ p_a \dot{q}^a - e [(p_a + g A_a)^2 - m^2] - f(q^0 - \tau) \}, \quad (2.84)$$

como a identificação

$$A_a = \frac{B}{2g} \varepsilon_{ab} q^b \quad (2.85)$$

deixa claro.

Lembre-se que em unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ), a carga elétrica tem dimensão  $[g] = L^{-1}$  e a carga central  $[B] = L^{-2}$ , tal que o potencial eletromagnético  $A_a$  é adimensional, consistentemente com (2.85). Prosseguindo com a analogia, usando  $A_a = (\varphi, -A^1)$  e

$$E^1 = -\frac{\partial A^1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial q^1}, \quad (2.86)$$

concluimos que  $B = gE^1$ , de onde vemos que a carga central é análoga a uma força elétrica.

Denominando os vínculos por

$$\phi_2 = \tilde{p}^2 - m^2 \quad \text{e} \quad C_2 = q^0 - \tau \quad (2.87)$$

e usando o fato de que suas equações de consistência  $\dot{\phi}_2 = 0$  e  $\dot{C}_2 = 0$  fornecem

$$f \approx 0 \quad e \approx \frac{1}{2\tilde{p}_0}, \quad (2.88)$$

onde  $\tilde{p}_a = p_a + B\varepsilon_{ab}q^b/2$  é o momento cinético da partícula (2.79), podemos escrever as equações de Hamilton para  $q^1$  e  $p_1$ :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \frac{B}{2} \\ \dot{q}^1 &= -\frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_0}. \end{aligned} \quad (2.89)$$



Vemos portanto que o bivector de energia-momento  $\mathcal{N}_a = p_a - B\varepsilon_{ab}q^b/2$  (2.43) deve ser interpretado como gerador de translações espaço-temporais. A energia relativística da partícula, por sua vez, pode ser escrita em termos do momento cinético

$$\mathcal{E}(t) := -\tilde{p}_0(t) = \sqrt{m^2 + \tilde{p}_1^2(t)}, \quad (2.90)$$

incluindo a energia de repouso.

Identificando  $v := \dot{q}^1$  com a velocidade ordinária unidimensional da partícula, vemos que as equações de Hamilton (2.89) se expressam de modo equivalente por

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{p}}_1 &= B \\ \tilde{p}_1 &= \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \quad (2.91)$$

uma forma bem conhecida da mecânica relativista.

Calculando os colchetes de Dirac,

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \frac{1}{2\tilde{p}^0} [\{F, \tilde{p}^2\}\{q^0, G\} - \{F, q^0\}\{\tilde{p}^2, G\}], \quad (2.92)$$

onde o colchete de Poisson  $\{F, G\}$  é dado por (2.67), obtemos

$$\begin{aligned} \{\tilde{p}^a, q^b\}^* &= -h^{ab} + h^{a0} \frac{\tilde{p}^b}{\tilde{p}^0} \\ \{\tilde{p}^a, p^b\}^* &= \frac{B}{2}\varepsilon^{ab} - \frac{B}{\tilde{p}^0} \left( \varepsilon^a{}_c h^{0b} + \frac{h^{a0}}{2} \varepsilon_c{}^b \right) \tilde{p}^c \\ \{q^a, q^b\}^* &= 0 \\ \{p^a, q^b\}^* &= \{\tilde{p}^a, q^b\}^* \\ \{\tilde{p}^a, \tilde{p}^b\}^* &= B\varepsilon^{ab} - \frac{B}{\tilde{p}^0} \left( \varepsilon^a{}_c h^{0b} + h^{a0} \varepsilon_c{}^b \right) \tilde{p}^c \\ \{p^a, p^b\}^* &= -\frac{B}{2\tilde{p}^0} \left( \varepsilon^a{}_c h^{0b} + h^{a0} \varepsilon_c{}^b \right) \tilde{p}^c. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Enquanto isso, resolvendo os vínculos  $\phi_2$  e  $C_2$  dentro da ação (2.83), obtemos

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ -m[1 - (\dot{q}^1)^2]^{1/2} + \frac{B}{2}q^1 - \frac{B}{2}\dot{q}^1 t \right\} \quad (2.94)$$

e calculando a hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \dot{q}^1 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^1} - L \quad (2.95)$$

obtemos

$$\mathcal{H}(q^1, p_1, t) = \sqrt{m^2 + (p_1 + \frac{B}{2}t)^2} - \frac{B}{2}q^1. \quad (2.96)$$

Observando que a hamiltoniana (2.96) é a soma da energia relativista da partícula (2.90) a um termo análogo à energia potencial da mesma  $\mathcal{E}_{pot} = g\varphi$  no campo elétrico  $E^1 = B/g$  associado à carga central, vemos que a hamiltoniana (2.96) pode ser interpretada como a energia total da partícula  $\mathcal{H}(q^1, p_1, t) = \mathcal{E}(p_1, t) + \mathcal{E}_{pot}(q^1)$ . Notamos também que a hamiltoniana depende explicitamente do tempo, curiosamente por meio da energia relativista pois o potencial vetor  $A^1(t)$  depende explicitamente do tempo, de modo que o sistema não é conservativo. A energia total (2.96) não é positiva definida e nem conservada porque estamos considerando o bipotencial  $A_a = (\varphi, -A^1)$  externo.

É importante salientar que, embora a carga central  $B$  seja fisicamente indiscernível de uma força elétrica aplicada, em virtude do teorema de Lévy-Leblond a mesma é também característica do sistema da partícula relativista não-interagente e na ausência de gravidade em 1+1 dimensões (considerado como sistema fechado), tanto quanto a massa  $m$ . Neste caso, as dificuldades de interpretação da hamiltoniana dependente do tempo e sem positividade definida (2.96) podem ser intrínsecas à escolha do gauge  $t = \tau$  e  $\chi = S(q^a)$ . De fato, na abordagem grupo-teórica do próximo capítulo mostraremos que o espaço de fase reduzido associado à ação (2.72) constitui um “sistema elementar clássico”, independentemente de qualquer fixação de gauge.

Observando que a hamiltoniana (2.96) vale  $\mathcal{H} = -p_0$ , verifica-se que a mesma substitui a Hamiltoniana total nula pois, em termos do colchete de Dirac (2.92), temos que as equações

$$\dot{q}^1 = \{q^1, \mathcal{H}\}^* \quad \dot{p}_1 = \{p_1, \mathcal{H}\}^* \quad (2.97)$$

reproduzem corretamente as equações de Hamilton (2.89).

As equações (2.97) também podem ser expressas por

$$\begin{aligned}\dot{p}_1 &= \frac{B}{2} \\ \dot{q}^1 &= \frac{p_1 + Bt/2}{\sqrt{m^2 + (p_1 + Bt/2)^2}},\end{aligned}\quad (2.98)$$

uma forma mais adequada para a sua integração que resulta em

$$\begin{aligned}q^1(t) &= q^1(t_0) - \sqrt{1 + (p_1(t_0)/m + \omega_0 t_0/2)^2}/\omega_0 + \\ &\quad + \sqrt{1 + (p_1(t_0)/m - \omega_0 t_0/2 + \omega_0 t)^2}/\omega_0 \\ p_1(t) &= p_1(t_0) + m\omega_0(t - t_0)/2,\end{aligned}\quad (2.99)$$

onde  $\omega_0 = B/m$ .

Calculando a aceleração da partícula em relação ao referencial inercial temos

$$\ddot{q}^1 = \omega_0 [1 + (p_1(t_0)/m - \omega_0 t_0/2 + \omega_0 t)^2]^{-3/2}. \quad (2.100)$$

O fato da aceleração (2.100) ter o mesmo sinal de  $B$  em todos os instantes mostra que a linha de universo da partícula é uma hipérbola retangular com a concavidade voltada para a direita, caso  $B > 0$ . Além disso, como

$$\ddot{q}^1 = \gamma^{-3}\omega_0, \quad \text{onde } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.101)$$

vemos que  $\omega_0$  é a aceleração da partícula no referencial próprio.

De fato, definindo a bivelocidade

$$u^a = \left( \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \right), \quad (2.102)$$

tangente à linha de universo, temos que a aceleração no referencial próprio é dada por

$$\left. \frac{d}{dt} \left( \frac{v}{\sqrt{1 - v^2}} \right) \right|_{v=0} = \left. \frac{\dot{p}_1}{m} \right|_{v=0} = \frac{B}{m} = \omega_0. \quad (2.103)$$

Vemos, portanto, que em relação ao referencial inercial a partícula realiza um movimento relativista uniformemente acelerado [24, p.41] sob a ação de uma força física constante ao longo da direção  $q^1$ :

$$F = m\omega_0 = B. \quad (2.104)$$

## 2.4 A equação de Hamilton-Jacobi relativista

Como dissemos anteriormente, nosso propósito agora é fixar o gauge de  $\phi_1 = \pi + 1$  por meio da condição de gauge canônica  $C_1 = \chi - S(q^a)$ , onde  $S(q^a)$  é a função principal de Hamilton da versão anômala do modelo.

Durante esta seção adotaremos a notação  $q^0 \equiv t$ ,  $p_1 \equiv p$  e  $q^1 \equiv q$ . Lembrando que as trajetórias dinâmicas são extremantes de um princípio variacional, podemos definir

**Definição 2.4.1 (Função de ação)** *A função de ação é definida pela integral*

$$S(q, t) := S(q_0, t_0) + \int_{(q_0, t_0)}^{(q, t)} L(q(\bar{t}), \dot{q}(\bar{t}), \bar{t}) d\bar{t} \quad (2.105)$$

ao longo da trajetória dinâmica ligando  $(q_0, t_0)$  a  $(q, t)$ .

Entretanto, para que a função de ação esteja bem definida, é necessário que as trajetórias dinâmicas partindo do ponto  $(q_0, t_0)$  não se cruzem em nenhum outro ponto mas, ao contrário, constituam um “campo central de extremantes” [2, p.253].

Observamos que as trajetórias dinâmicas ou linhas-de-universo partindo de  $(q_0, t_0)$ , que são os extremantes da ação definida pela lagrangeana

$$L(q, \dot{q}, \bar{t}) = -m\sqrt{1 - \dot{q}^2} + \frac{B}{2}q - \frac{B}{2}\dot{q}\bar{t}, \quad (2.106)$$

são dadas para  $\bar{t} > t_0$  por  $(q(\bar{t}), \bar{t})$ , onde (2.99)

$$\begin{aligned} q(\bar{t}) = & q_0 - \sqrt{1 + (p(t_0)/m + \omega_0 t_0/2)^2/\omega_0} + \\ & + \sqrt{1 + (p(t_0)/m - \omega_0 t_0/2 + \omega_0 \bar{t})^2/\omega_0}, \end{aligned} \quad (2.107)$$

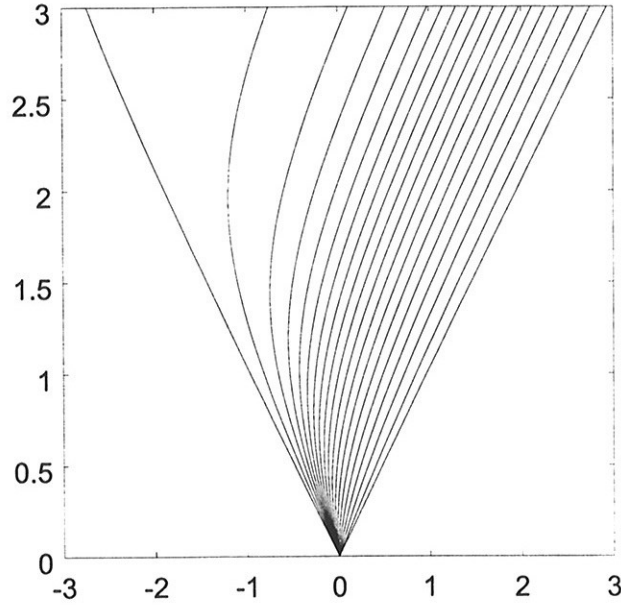


Figura 2.1: Campo central de extremantes associados a  $L(q, \dot{q}, \bar{t})$

de modo que  $(q(\bar{t}), \bar{t})$  pertence ao cone-de-luz futuro do ponto  $(q_0, t_0)$ . Resolvendo a equação (2.107) para  $p(t_0)/m$  como incógnita, podemos verificar que qualquer evento  $(q, t)$  para o qual  $(q - q_0)^2 - (t - t_0)^2 < 0$  pode ser atingido por uma única linha-de-universo (2.107) com

$$\frac{p(t_0)}{m} = -\frac{\omega_0 t}{2} + (q - q_0) \sqrt{\left(\frac{\omega_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{(q - q_0)^2 - (t - t_0)^2}} \quad (2.108)$$

Conseqüentemente os extremantes partindo de  $(q_0, t_0)$  da ação definida pela lagrangeana (2.106) constituem um “campo central de extremantes”. O gráfico da figura 2.1 ilustra o “campo central de extremantes” partindo de  $(0, 0)$  no caso em que  $B = 1$  e  $m = 1$ , com o eixo  $t$  apontando para cima e o eixo  $q$  apontando para a direita. Estão representadas dezenove linhas de universo (2.107), com valores de  $p(0)$  respectivamente iguais a (da esquerda para a direita)  $-4.09, -1.96, -1.43, -1.18, -1.02, -0.90, -0.80, -0.69, -0.60,$

-0.50, -0.40, -0.29, -0.18, -0.04, 0.11, 0.32, 0.61, 1.19 e 3.37.

Então a função de ação pode ser obtida efetuando-se a integração (2.105) ao longo da trajetória dinâmica definida pelas equações (2.107) e (2.108), com a lagrangeana (2.106).

O resultado é

$$S(q, t) = S(q_0, t_0) + \frac{1}{2}\mathcal{N}_0\Delta t + \frac{1}{2}\mathcal{N}_1\Delta q - \frac{1}{2}m\Delta t' \quad , \quad (2.109)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_0 &= -m\gamma(t_0) + Bq_0 \\ \mathcal{N}_1 &= p(t_0) - \frac{B}{2}t_0 \\ \gamma(\bar{t}) &= \sqrt{1 + u^2(\bar{t})} \\ u(\bar{t}) := \frac{\tilde{p}_1(\bar{t})}{m} &= \frac{p(t_0)}{m} - \frac{\omega_0 t_0}{2} + \omega_0 \bar{t} \\ \Delta t &= t - t_0 \\ \Delta q &= q - q_0 \\ \Delta t' &= \frac{1}{\omega_0} (\text{ArcSinh}(u(t)) - \text{ArcSinh}(u(t_0))). \end{aligned} \quad (2.110)$$

Note que  $\mathcal{N}_a$  é o bivector energia-momento conservado (2.43),  $u$  é a componente espacial da bivelocidade (2.102) e  $\Delta t'$  é o intervalo de tempo próprio definido por

$$\Delta t' = \int_{t_0}^t d\bar{t} \gamma^{-1}(\bar{t}) \quad . \quad (2.111)$$

Verifica-se que a função de ação (2.109) tem a propriedade

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad - \quad \mathcal{H} = \frac{\partial S}{\partial t} \quad (2.112)$$

onde (2.96)

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sqrt{m^2 + (p + \frac{B}{2}t)^2} - \frac{B}{2}q. \quad (2.113)$$

E como  $\mathcal{H} = -p_0$ , podemos reunir a propriedade (2.112) em

$$p_a = \frac{\partial S}{\partial q^a} \quad (2.114)$$

Da propriedade (2.114) segue-se que a função de ação (2.109) satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi relativista [24, p.71]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathcal{H} \left( \frac{\partial S}{\partial q}, q, t \right) = 0, \quad (2.115)$$

onde  $\mathcal{H}$  é dada por (2.113). De fato, vemos que a equação (2.115) é obtida do vínculo da concha-de-massa

$$\tilde{p}^2 - m^2 = 0, \quad (2.116)$$

com  $\tilde{p}_a = p_a + B\varepsilon_{ab}q^b/2$ , pela substituição  $p_a = \partial S/\partial q^a$ , sendo equivalente à equação diferencial parcial não-linear de primeira ordem

$$\frac{\partial S}{\partial q^a} \frac{\partial S}{\partial q_a} + B \frac{\partial S}{\partial q^a} \varepsilon^a{}_b q^b - \frac{B^2}{4} q^a q_a - m^2 = 0. \quad (2.117)$$

## 2.5 Fixação de gauge

Como vimos, a existência do 2-cociclo não-trivial  $\xi_B$  induz uma extensão do espaço-tempo, por meio da adoção de um grau de liberdade de gauge  $\chi$  com a dimensão de ação. Nesta seção veremos como a questão da fixação global do gauge de  $\phi_1 = \pi + 1$  pela condição de gauge canônica  $C_1 = \chi - S(q^a)$  auxilia na compreensão do significado físico de  $\chi$ .

Na versão clássica do modelo, o grau de liberdade  $\chi$  emerge da extensão central do grupo de Poincaré por  $\mathfrak{H}(\bar{\mathcal{P}})$ . Na versão quântica, entretanto, o grupo dinâmico relevante é a extensão central do grupo de Poincaré por  $U(1)(\tilde{\mathcal{P}})$ . Mais adiante<sup>10</sup> veremos que os vínculos  $\phi_m$  ( $m \in \{1, 2\}$ ) geram

<sup>10</sup>Veja discussão da seção 3.3.3 na página 131.

uma única órbita de gauge bidimensional  $K$  por cada ponto da superfície de vínculos  $\Gamma_+$  (3.59). Ocorre que a órbita de gauge bidimensional  $K$  é difeomorfa a  $K = \mathfrak{R}^2$  caso adotemos  $\bar{\mathcal{P}}$  como grupo dinâmico ou  $K = \mathfrak{R} \times S^1$  caso adotemos  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Como veremos adiante, a superfície de vínculos é difeomorfa à variedade do grupo,  $\Gamma_+ = \bar{\mathcal{P}}$  (Nota3.3.1). Todo grupo de Lie  $G$ , por sua vez, possui uma estrutura de fibrado principal  $G(K, G/K)$  sobre o quociente  $G/K$  por qualquer subgrupo fechado  $K \subset G$  [3, p.16]. E como qualquer fibrado sobre uma variedade base contrátil é trivial [3, p.20], vemos que somente é possível fixar o gauge globalmente por meio de condições de gauge canônicas  $C_m$  se o quociente  $G/K$  for contrátil.

Notando que as órbitas de gauge  $K_m$  geradas por  $\phi_m$  sobre a variedade  $\Gamma_+ = \bar{\mathcal{P}}$  correspondem a subgrupos fechados de  $\bar{\mathcal{P}}$ , veremos que o vínculo  $\phi_2$  sempre gera  $K_2 = \mathfrak{R}$ , enquanto que  $\phi_1$  gera  $K_1 = \mathfrak{R}$  ou  $K_1 = S^1$  dependendo de adotarmos  $\bar{\mathcal{P}}$  ou  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Então podemos fixar globalmente o gauge dos vínculos  $\phi_1$  e  $\phi_2$  simultaneamente ou de  $\phi_1$  isoladamente, caso em que as variedades base são respectivamente  $\mathfrak{R}^2$  e  $\mathfrak{R}^3$ . Mas não é possível fixar globalmente o gauge de  $\phi_2$  isoladamente caso adotemos  $\tilde{\mathcal{P}}$ , pois nesse caso a variedade base é  $\mathfrak{R}^2 \times S^1$ , que não é contrátil. Na versão clássica do modelo, entretanto, podemos fixar globalmente  $\phi_1$  ou  $\phi_2$  isoladamente assim como simultaneamente.

Vamos discutir a fixação de gauge de  $\phi_m$  simultaneamente por condições de gauge canônicas  $C_m$ . Isto pode ser feito globalmente tanto no caso de  $\bar{\mathcal{P}}$  como de  $\tilde{\mathcal{P}}$ .

Obtemos as equações de Hamilton variando a ação

$$\bar{S}[q^a, \chi, p_b, \pi, u, v] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau (p_a \dot{q}^a + \pi \dot{\chi} - u^m \phi_m - v^m C_m), \quad (2.118)$$

com respeito a  $q^a, \chi, p_b, \pi, u$  e  $v$ , onde

$$\phi_1 = \pi + 1 \quad , \quad \phi_2 = \left( p_a - \frac{B}{2} \pi \varepsilon_{ab} q^b \right)^2 - m^2,$$



$$C_1 = \chi - S(q^a) \quad , \quad C_2 = q^0 - \tau \quad (2.119)$$

e  $S(q^a)$  é a função de ação da versão anômala do modelo (2.109) que é solução da equação de Hamilton-Jacobi (2.115) ou (2.117):

$$\begin{aligned} -\dot{p}_0 - u^2 \left[ B\pi p_1 - \frac{(B\pi)^2}{2} q_0 \right] - v^2 + v^1 \frac{\partial S}{\partial q^0} &= 0 \\ -\dot{p}_1 - u^2 \left[ B\pi p_0 + \frac{(B\pi)^2}{2} q^1 \right] + v^1 \frac{\partial S}{\partial q^1} &= 0 \\ \dot{q}^0 - u^2(2p_0 + B\pi q^1) &= 0 \\ \dot{q}^1 - u^2(-2p_1 + B\pi q^0) &= 0 \\ -\dot{\pi} - v^1 &= 0 \\ \dot{\chi} - u^1 - u^2 \left( -Bp_a \varepsilon^a{}_b q^b - \frac{B\pi}{2} q^a q_a \right) &= 0 \\ \pi + 1 &\approx 0 \\ q^0 \equiv t &\approx \tau \\ p_a p^a - B\pi p_a \varepsilon^a{}_b q^b - \frac{(B\pi)^2}{4} q^a q_a - m^2 &\approx 0 \\ \chi - S(q^a) &\approx 0 \end{aligned} \quad (2.120)$$

Note que  $\{C_1, \phi_1\} = 1$ ,  $\{C_2, \phi_2\} \approx 2\tilde{p}_0 \not\approx 0$ , e  $\{C_2, \phi_1\} = 0$ , de modo que

$$\det\{\phi_m, C_n\} \approx 2\tilde{p}_0 \not\approx 0, \quad (2.121)$$

o que mostra que as condições de gauge canônicas são eficazes.

As condições de consistência dos vínculos  $\phi_m$

$$\frac{\partial \phi_m}{\partial \tau} + \{\phi_m, H_C\} + u^n \{\phi_m, \phi_n\} + v^n \{\phi_m, C_n\} \approx 0, \quad (2.122)$$

onde  $H_C = 0$  é a hamiltoniana nula (2.66) associada à lagrangeana (2.64) e  $m, n \in \{1, 2\}$ , fornecem

$$v^m \approx 0. \quad (2.123)$$

A condição de consistência de  $C_2$ ,

$$\frac{\partial C_2}{\partial \tau} + \{C_2, H_C\} + u^m \{C_2, \phi_m\} + v^n \{C_2, C_n\} \approx 0, \quad (2.124)$$

fornece

$$u^2 \approx \frac{1}{2\tilde{p}_0}. \quad (2.125)$$

A condição de consistência de  $C_1$ ,

$$\frac{\partial C_1}{\partial \tau} + \{C_1, H_C\} + u^m \{C_1, \phi_m\} + v^n \{C_1, C_n\} \approx 0, \quad (2.126)$$

é equivalente, usando a propriedade (2.114) da função de ação  $S(q^a)$ , a

$$u^1 - 2u^2 \left( \frac{\partial S}{\partial q^a} \frac{\partial S}{\partial q_a} + B \frac{\partial S}{\partial q_a} \varepsilon^a{}_b q^b - \frac{B^2}{4} q^a q_a \right) \approx 0. \quad (2.127)$$

E como  $S(q^a)$  é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi relativista (2.117), ou

$$\frac{\partial S}{\partial q^a} \frac{\partial S}{\partial q_a} + B \frac{\partial S}{\partial q_a} \varepsilon^a{}_b q^b - \frac{B^2}{4} q^a q_a = m^2, \quad (2.128)$$

ocorre que a equação (2.127) equivale a

$$u^1 - 2u^2 m^2 \approx 0, \quad (2.129)$$

que implica

$$u^1 \approx \frac{m^2}{\tilde{p}_0}. \quad (2.130)$$

Observe ainda que a propriedade (2.114) da função de ação  $S(q^a)$  torna a equação de vínculo  $\phi_2 \approx 0$  equivalente à equação de Hamilton-Jacobi relativista, que passa a integrar as equações de Hamilton da versão do modelo livre de anomalias (2.72), enquanto que na versão anômala esta equação era implicada pelas equações de Hamilton.

## Capítulo 3

### A Construção de KSK

As duas primeiras seções deste capítulo têm por objetivo desenvolver os métodos grupo-teóricos que serão aplicados à classificação da partícula relativista em 1+1 dimensões, na seção final. Depois de revermos algumas noções de geometria simplética na primeira seção, onde definimos as noções de variedade simplética (definição 3.1.1), grupo dinâmico  $G$  (definição 3.1.2), simplectomorfismo (definição 3.1.3) e campos globalmente hamiltonianos, discutimos o problema de associar um observável a cada subgrupo uniparamétrico do grupo dinâmico, o que nos leva à noção de comomentos (figura 3.1). Observamos que no caso em que a variedade simplética  $S$  é simplesmente conexa e o segundo grupo de cohomologia de  $G$  é trivial, os comomentos estão bem definidos globalmente sobre  $S$  tal que a ação de  $G$  sobre  $S$  é dita ser Poisson.

A seguir desenvolvemos os conceitos de sistema elementar clássico (definição 3.2.1) e  $G$ -espaço hamiltoniano (definição 3.1.4), que é um sistema elementar onde a ação do grupo dinâmico também é Poisson, sendo que na subseção 3.2.1 mostramos que as co-órbitas são os exemplos mais simples de  $G$ -espaço hamiltoniano (teorema 3.2.1). Na subseção seguinte apresentamos a noção importante de mapeamento de momentum (definição 3.2.7) com suas propriedades, que nos permite efetuar uma classificação de todos os

G-espços hamiltonianos (proposição 3.2.2) e de todos os sistemas elementares por meio do teorema de Kirillov (teorema 3.2.2), que tem a condição  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$  por hipótese.

Na seoo final aplicamos os métodos grupo-teóricos, desenvolvidos nas duas seoes iniciais, ao caso da partícula relativista em 1+1 dimensões, mostrando que a superfície de vínculos  $\Gamma^+$  (3.59) é globalmente difeomorfa à variedade do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  (nota 3.3.1), constituindo uma variedade pré-simplética sobre a qual  $\bar{\mathcal{P}}$  possui uma aoo Poisson. Obtemos expressões nas coordenadas intrínsecas de  $\Gamma^+$  para os geradores de transformaoes de gauge (3.83), associados aos vínculos de primeira classe, mostrando que estes atuam à direita sobre  $\Gamma^+$  constituindo uma álgebra de Lie isomorfa a álgebra do grupo de estabilidade  $\bar{i}_{2\zeta}^1$  (proposição 3.3.2) da imagem de um ponto fixo sobre  $\Gamma^+$  pelo mapeamento de momentum, na co-álgebra.

Na subseoo 3.3.1 obtemos todas as co-órbitas de  $\bar{\mathcal{P}}$  em termos das quais mostramos que o mapeamento de momentum do grupo de Poincaré estendido  $\bar{\mathcal{P}}$  é um symplectomorfismo entre o espaço de fase reduzido do modelo (3.123) e uma certa co-órbita de  $\bar{\mathcal{P}}$  em  $\bar{i}_2^1$  (proposição 3.3.3). Enfatizamos que o espaço de fase reduzido do modelo da partícula relativista em 1+1 dimensões livre de anomalias (2.72) é um sistema elementar clássico independentemente da adoçoo de quaisquer condições de gauge canônicas.

## 3.1 Geometria Simplética

Nesta seoo revisaremos algumas noções de geometria simplética, aproveitando para fixar convenções e notações.

**Definição 3.1.1 (Variedade (pré-)simplética)** *Uma forma simplética  $\Omega$  numa variedade de dimensão par  $S^{2n}$  é uma 2-forma fechada de posto máximo  $(2n)$  (o posto de uma forma  $\alpha$  é o número mínimo de 1-formas independentes necessárias para expressar  $\alpha$ ). O par  $(S, \Omega)$  é denominado variedade sim-*

plética. Entretanto, se posto  $\Omega = 2s < 2n$ , então o par  $(S, \Omega)$  é denominado variedade pré-simplética.

**Teorema 3.1.1 (Darboux)** *Toda variedade simplética  $(S, \Omega)$  admite um atlas de coordenadas canônicas  $(q^a, p_b)$  no qual*

$$\Omega = dp_a \wedge dq^a \quad ,$$

onde  $a \in \{1, \dots, n\}$ <sup>1</sup>.

Uma “ação à esquerda” do grupo  $G$  sobre a variedade (pré-)simplética  $S$  é um mapeamento diferenciável

$$l : G \times S \rightarrow S \quad (3.1)$$

tal que  $l(e, s) = s$  e  $l(g', l(g, s)) = l(g'g, s)$  para todo  $s \in S$ . Então vemos que o mapeamento  $l_g : S \rightarrow S$  tal que  $l_g = l(g, \cdot)$ , associado à ação do grupo, satisfaz

$$l_{g'} \circ l_g = l_{g'g}. \quad (3.2)$$

Realizaremos a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sobre  $S$  por meio de campos vetoriais  $X^S$ , induzidos por esta ação.

**Definição 3.1.2 (Grupo dinâmico)** *Um grupo de Lie  $G$  é um grupo dinâmico com respeito à variedade (pré-)simplética  $(S, \Omega)$  se*

$$L_{X^S} \Omega = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad , \quad (3.3)$$

onde  $X^S$  é o gerador da ação sobre  $S$ .

Uma vez que  $\Omega$  é fechada, (3.3) implica que  $di_{X^S} \Omega = 0$  ou que  $X^S \in \mathcal{A}_0(S)$ , o conjunto de todos os campos vetoriais localmente Hamiltonianos. Vemos

<sup>1</sup>Para uma prova veja, por exemplo, [31, p.7].

que  $\mathcal{A}_0(S) \subset \mathfrak{X}(S)$ , o espaço dos campos vetoriais reais sobre  $S$ , e se  $i_{X^S}\Omega$  for também exata, então existe uma função  $f \in C^\infty(S)$  tal que  $X^S = X_f^S$  e

$$i_{X_f^S}\Omega + df = 0 \quad , \quad (3.4)$$

onde  $i_{X_f^S}\Omega(X_1) = \Omega(X_f^S, X_1) \quad \forall X_1 \in \mathcal{A}_0(S)$ . Nestas condições, dizemos que  $X^S \in \mathcal{A}(S)$ , o conjunto dos campos vetoriais globalmente hamiltonianos, e vemos que  $\mathcal{A}(S) \subset \mathcal{A}_0(S)$ .

Observamos que os campos vetoriais  $\{X^S\}$ , que realizam  $\mathfrak{g}$  sobre  $S$ , varrem uma subálgebra de  $\mathcal{A}_0(S)$ , sendo que esta última constitui, na verdade, a álgebra de Lie maior, dos geradores das transformações canônicas infinitesimais, definida como a maior subálgebra de  $\mathfrak{X}(S)$  satisfazendo (3.3). Pode-se mostrar [37, p.402] que  $\mathcal{A}_0(S)$  constitui a álgebra de Lie do grupo de transformações canônicas, formado por todos os difeomorfismos  $\varphi$  da variedade (pré-)simplética  $S$  que preservam  $\Omega$ , ou

$$\text{Diff}(S, \Omega) := \{\varphi \in \text{Diff}(S) \mid \varphi^*\Omega = \Omega\} \quad . \quad (3.5)$$

De modo mais geral,

**Definição 3.1.3 (Simplectomorfismo)** *Sejam  $(S_1^{2n}, \Omega_1^{2n})$  e  $(S_2^{2n}, \Omega_2^{2n})$  duas variedades simpléticas e  $\varphi : S_1^{2n} \rightarrow S_2^{2n}$  um difeomorfismo. Então  $\varphi$  é um simplectomorfismo se e somente se  $\varphi^*\Omega_2 = \Omega_1$ .*

Então vemos que o mapeamento  $\sigma$ , induzido pela ação à esquerda  $l$  de  $G$  sobre a variedade (pré-)simplética  $S$ ,

$$\begin{aligned} \sigma: \mathfrak{g} &\rightarrow \mathcal{A}_0(S) \\ X &\rightarrow X^S \end{aligned} \quad (3.6)$$

é, de fato, um anti-homomorfismo de álgebras de Lie [31]:

$$[T_A^S, T_B^S] = -[T_A, T_B]^S \quad , \quad (3.7)$$

onde os  $\{T_A\}$  são os geradores de  $\mathfrak{g}$  e  $A \in I$ , o conjunto dos índices denumerando as dimensões de  $\mathfrak{g}$ , satisfazendo

$$[T_A, T_B] = f_{AB}^C T_C \quad .$$

Definimos os colchetes de Poisson por

$$\{f, g\} = -X_f^S(g) = -\Omega(X_f^S, X_g^S), \quad (3.8)$$

de modo que, se a variedade  $S$  for simplética, então pelo (Teo.3.1.1) existem coordenadas canônicas  $(q^a, p_b)$  tais que os colchetes de Poisson possuem a forma usual

$$\begin{aligned} \{q^a, p_b\} &= \delta_b^a \\ \{f, g\} &= \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial g}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial g}{\partial q^a} \end{aligned} \quad (3.9)$$

e os campos vetoriais globalmente hamiltonianos  $X_f^S \in \mathcal{A}(S)$  satisfazendo (3.4) admitem a expressão em coordenadas

$$X_f^S = \frac{\partial f}{\partial p_a} \frac{\partial}{\partial q^a} - \frac{\partial f}{\partial q^a} \frac{\partial}{\partial p_a}. \quad (3.10)$$

**Proposição 3.1.1** *O “colchete de Lie” de dois campos vetoriais globalmente hamiltonianos  $X_f^S, X_g^S \in \mathcal{A}(S)$  sobre uma variedade (pré-)simplética  $(S, \Omega)$  é globalmente hamiltoniano,*

$$[X_f^S, X_g^S] = -X_{\{f, g\}}^S \quad , \quad (3.11)$$

tal que o mapeamento  $f \mapsto X_f^S$  é um anti-homomorfismo de álgebras de Lie.

*Prova :* A prova está apoiada nas relações [31, p.16]

$$L_{X^S} = i_{X^S} d + di_{X^S} \quad (3.12)$$

$$i_{[X^S, Y^S]} = L_{X^S} i_{Y^S} - i_{Y^S} L_{X^S} \quad \forall X^S, Y^S \in \mathfrak{X}(S). \quad (3.13)$$

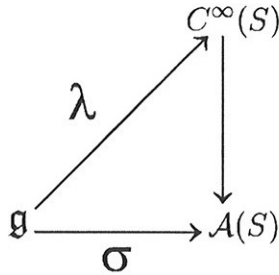


Figura 3.1: “Elevação” do mapeamento  $\sigma$

Usando (3.13), temos

$$i_{[X_f^S, X_g^S]}\Omega = L_{X_f^S}i_{X_g^S}\Omega - i_{X_g^S}L_{X_f^S}\Omega.$$

Então, usando (3.3), (3.4) e (3.12)

$$\begin{aligned} i_{[X_f^S, X_g^S]}\Omega &= di_{X_f^S}(i_{X_g^S}\Omega) \\ i_{[X_f^S, X_g^S]}\Omega + d\Omega(X_f^S, X_g^S) &= 0. \text{ QED} \end{aligned}$$

A questão de associar um observável  $u_A \in C^\infty(S)$  a cada subgrupo uniparamétrico do grupo dinâmico  $G$  se reduz ao problema de construir a “elevação” do mapeamento  $\sigma$  (3.6),

$$\lambda : \mathfrak{g} \rightarrow C^\infty(S) \quad , \quad (3.14)$$

que faz com que o diagrama de homomorfismos de álgebras de Lie exibido na figura 3.1 seja comutativo [31, p.20].

E para que esteja bem definido o mapeamento  $\lambda(T_A) = u_A$ , duas condições são necessárias e suficientes:

1.  $\sigma(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{A}(S)$ , o que significa que existe uma função  $u_A \in C^\infty(S)$ , globalmente definida sobre  $S$ , associada a cada campo  $T_A^S \in \mathcal{A}(S)$  por

$$i_{T_A^S}\Omega + du_A = 0 \quad . \quad (3.15)$$



As funções  $u_A$  satisfazendo esta condição chamam-se “hamiltonianas”, as quais sempre existem, por sua vez, num dos casos abaixo:

- Se a variedade (pré-)simplética  $S$  for simplesmente conexa, o que implica em  $H_{DR}^1(S) = 0$ .
- (Ou) Se  $H_0^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ .

2. A “elevação”  $\lambda$  deve ser um homomorfismo de álgebras de Lie,

$$\lambda([T_A, T_B]) = \{\lambda(T_A), \lambda(T_B)\} = \{u_A, u_B\} \quad \forall A, B \in I \quad , \quad (3.16)$$

para o que é suficiente que  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ .

No contexto puramente clássico, não há necessidade estrita de exigir que a segunda condição (3.16) seja satisfeita. Entretanto ela é importante no processo de quantização e garante, essencialmente, que um grupo de simetrias de um sistema clássico também seja um grupo de simetrias do sistema quântico correspondente. Note que esta condição sempre é satisfeita se  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ , a qual elimina a anomalia clássica, como vimos no capítulo anterior. Ela também é importante para a classificação dos sistemas elementares clássicos, como veremos na próxima seção.

Se as hamiltonianas,  $\lambda(T_A) = u_A$ , estiverem bem definidas localmente (por exemplo se  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ ) e globalmente (por exemplo, se  $S$  for simplesmente conexa), então elas serão denominadas “comomentos”. Se ainda  $H_0^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ , então existe uma única “elevação”  $\lambda$ , mas diremos que  $\mathfrak{g}$  possui uma “ação Poisson” sobre a variedade (pré-)simplética  $S$  sempre que existirem os “comomentos”, mesmo que estes não estejam univocamente determinados. E, pelo fato de estarmos considerando a ação à esquerda  $l$  (3.1), temos ainda que o fato do mapeamento  $\sigma$  ser um anti-homomorfismo (3.7) entre  $\mathfrak{g}$  e  $\mathcal{A}(S)$  implica que sua “elevação”,  $\lambda$ , seja um homomorfismo de álgebras de

Lie (3.14) entre  $\mathfrak{g}$  e  $\lambda(\mathfrak{g}) \subset C^\infty(S)$ , ou

$$\{u_A, u_B\} = f_{AB}^C u_C \quad , \quad (3.17)$$

em virtude de (3.11). Notamos, ainda, que os “comomentos” são também as correntes conservadas associadas à invariança da hamiltoniana sob a ação do grupo dinâmico  $G$ , o que é garantido pelo teorema de Noether, em sua versão hamiltoniana [1, p.655]:

**Teorema 3.1.2 (Noether)** *Se a função hamiltoniana  $h$  for invariante sob a ação do grupo dinâmico  $G$ ,  $L_{T_A^S} h = 0$ , então os “comomentos” constituem as correntes de Noether associadas conservadas  $\dot{u}_A = \{u_A, h\} = 0$ .*

*Prova:* Das equações (3.10) e (3.15) vemos que

$$\{u_A, h\} = -T_A^S(h) = -L_{T_A^S} h \quad .$$

Logo,

$$L_{T_A^S} h = 0 \Leftrightarrow \{u_A, h\} = 0 \quad . \quad \text{QED} \quad (3.18)$$

Diremos que o grupo dinâmico  $G$  atua transitivamente sobre a variedade (pré-)simplética  $S$ , se a ação de  $\mathfrak{g}$  for transitiva, no sentido dos campos vetoriais  $X^S \in \mathcal{A}_0(S)$ , que a realizam como geradores de transformações canônicas infinitesimais (3.5), varrerem o espaço tangente sobre cada ponto da variedade. Neste caso diremos também que  $(S, \Omega)$  é uma “variedade (pré-)simplética homogênea”.

**Definição 3.1.4 (G-espaço Hamiltoniano)** *Seja  $(S, \Omega)$  uma “variedade simplética homogênea”. Então diremos que  $(S, \Omega)$  é uma “variedade simplética estritamente homogênea” (ou um “G-espaço Hamiltoniano” [23, p.176]) se o grupo dinâmico  $G$  possuir também uma “ação Poisson” sobre a variedade  $S$ .*

## 3.2 Os sistemas elementares

O princípio de relatividade impõe que as leis da física sejam covariantes pelo grupo de Poincaré o que requer, em particular, que as partículas elementares pertençam a representações irredutíveis deste grupo. Podemos expressar de maneira mais exata essa situação, dizendo que sistemas deste tipo são “elementares”. Na teoria quântica, um sistema com simetria é dito ser “elementar” se o grupo de simetria estiver representado irredutivelmente no espaço de estados quântico.

Por outro lado, na abordagem grupo-teórica em que se insere a construção KSK, busca-se um conceito correspondente de “sistema elementar clássico”, cuja quantização deve tornar bem explícita a relação entre as simetrias nos níveis quântico e clássico. No nível clássico, a condição de irredutibilidade torna-se uma de transitividade, então é natural definirmos um “sistema elementar clássico” como sendo uma “variedade simplética homogênea”. Em particular, todo “G-espaço hamiltoniano” (Def.3.1.4) também é um “sistema elementar clássico”.

**Definição 3.2.1 (Sistema elementar)** *Denotaremos por “sistema elementar clássico” toda “variedade simplética homogênea”  $(S, \Omega)$ , associada a um grupo dinâmico  $G$ .*

Veremos adiante que, sob certas condições, a construção KSK fornece todos os “sistemas elementares clássicos” associados a um dado grupo de Lie conexo. Antes, porém, examinaremos as co-órbitas geradas pela ação co-adjunta do grupo dinâmico  $G$ .

### 3.2.1 As co-órbitas como sistemas elementares

Como veremos na seqüência, as co-órbitas são “G-espaços hamiltonianos” (Def.3.1.4) e os exemplos mais simples de “sistemas elementares”. An-

tes, porém, definiremos as representações co-adjuntas do “grupo dinâmico”  $G$  e de sua álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sobre a co-álgebra  $\mathfrak{g}^*$ :

**Definição 3.2.2 (Representação co-adjunta do grupo)** *A representação co-adjunta de  $g \in G$  sobre a co-álgebra  $\mathfrak{g}^*$  é definida pelo contra-gradiente  $Ad^*g$  da representação adjunta  $Adg$ , tal que*

$$\langle Ad^*g\zeta, X \rangle := \langle \zeta, Adg^{-1}X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad e \quad \zeta \in \mathfrak{g}^* \quad . \quad (3.19)$$

Expressando (3.19) em componentes, escritas como vetores linha

$$(Ad^*g\zeta)_A = \zeta_B (Adg^{-1})^B_A \quad A, B \in I, \quad (3.20)$$

fica fácil observar, em particular, que  $Ad^*g'g\zeta = Ad^*g'(Ad^*g\zeta)$ , o que significa que a representação co-adjunta do grupo atua à esquerda sobre  $\mathfrak{g}^*$ .

Então cada  $Y \in \mathfrak{g}$  determina uma família uniparamétrica  $Ad^*g(t)$  de transformações lineares de  $\mathfrak{g}^*$ , onde  $g(t) = \exp(tY)$ , e portanto campos vetoriais  $V_Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*)$ . Identificando  $T_\zeta\mathfrak{g}^*$  com  $\mathfrak{g}^*$ , vemos que a representação co-adjunta do elemento  $Y \in \mathfrak{g}$ , induzida por (3.19), se define analogamente por [23, p.180]:

**Definição 3.2.3 (Representação co-adjunta da álgebra)** *A representação co-adjunta de  $Y \in \mathfrak{g}$  sobre a co-álgebra  $\mathfrak{g}^*$  é definida por  $ad^*Y$ , tal que*

$$\begin{aligned} \langle ad^*Y\zeta, X \rangle &:= \left\langle \zeta, \frac{d}{dt}(Adg^{-1}(t)X)|_{t=0} \right\rangle \\ \langle ad^*Y\zeta, X \rangle &= \langle \zeta, [X, Y] \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad e \quad \zeta \in \mathfrak{g}^* \quad . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Então vemos que os valores dos campos vetoriais  $V_Y \in \mathfrak{X}(\mathfrak{g}^*)$  sobre  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$ ,  $V_Y(\zeta) \in T_\zeta\mathfrak{g}^*$ , são dados por

$$\begin{aligned} V_Y(\zeta) &= ad^*Y\zeta \\ \langle V_Y(\zeta), X \rangle &= \langle \zeta, [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad (3.22)$$

e que os mesmos varrem o espaço  $T_\zeta \text{Orb}(\zeta)$ , tangente à co-órbita por  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$  (Def.3.2.4). De (3.21) e (3.22) segue-se, ainda, que

$$V_{[X,Y]} = [V_X, V_Y] \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (3.23)$$

**Definição 3.2.4 (Co-órbita)** Denotamos por  $\text{Orb}(\zeta)$  a co-órbita por  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$ , gerada pela ação co-adjunta de  $G$ , e que é constituída pela subvariedade

$$\text{Orb}(\zeta) = \{Ad^*g\zeta, \forall g \in G\} \subset \mathfrak{g}^*. \quad (3.24)$$

Também podemos representar a co-órbita por  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$  por meio do espaço homogêneo de “co-conjuntos” à esquerda

$$\text{Orb}(\zeta) = G/G_\zeta \cdot \zeta, \quad (3.25)$$

onde  $G_\zeta$  é o grupo de estabilidade de  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$ :

**Definição 3.2.5 (Grupo de estabilidade)** Definimos o grupo de estabilidade de  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$  como sendo o subgrupo fechado de  $G$  que preserva  $\zeta$ ,

$$G_\zeta = \{g \in G | Ad^*g\zeta = \zeta\}, \quad (3.26)$$

O grupo de estabilidade de  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$ , por sua vez, é gerado pela subálgebra  $\mathfrak{g}_\zeta \subset \mathfrak{g}$ , tal que

$$\mathfrak{g}_\zeta = \{Y \in \mathfrak{g} | V_Y(\zeta) = 0\}, \quad (3.27)$$

sendo que são equivalentes as condições

$$\begin{aligned} V_Y(\zeta) = 0 &\Leftrightarrow ad^*Y\zeta = 0 \\ V_Y(\zeta) = 0 &\Leftrightarrow \langle \zeta, [X, Y] \rangle = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

**Definição 3.2.6 (Forma de Kirillov)** Cada  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$  define uma 2-forma  $B_\zeta$ , denominada “forma de Kirillov”, por

$$B_\zeta(X, Y) = \langle \zeta, [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \quad (3.29)$$

Expressando a 1-forma  $\zeta \in \mathfrak{g}^*$  em componentes,  $\zeta = \zeta_A \omega^A$ , vemos que (3.29) implica que  $B_\zeta(T_A, T_B) = \zeta_C f_{AB}^C$ , onde  $\{T_A\}$  é uma base de  $\mathfrak{g}$ ,  $\{\omega^A\}$  é a base dual de  $\mathfrak{g}^*$  e  $A, B, C \in I$ . Então as equações de estrutura de Maurer-Cartan implicam [1, p.656]

$$B_\zeta = \frac{1}{2} \zeta_C f_{AB}^C \omega^A \wedge \omega^B \quad \text{e} \quad (3.30)$$

$$B_\zeta = -\zeta_C d\omega^C = -d\zeta. \quad (3.31)$$

A subálgebra  $\mathfrak{g}_\zeta \subset \mathfrak{g}$  (3.27) também pode ser representada pelo núcleo da “forma de Kirillov”  $B_\zeta$  sobre  $\mathfrak{g}$ , ou

$$\text{Nuc} B_\zeta = \{Y \in \mathfrak{g} \mid B_\zeta(X, Y) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}\} = \mathfrak{g}_\zeta. \quad (3.32)$$

Sobre cada  $\eta \in \text{Orb}(\zeta)$ , definimos então

$$b_\eta(V_X, V_Y) = -B_\eta(X, Y) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad (3.33)$$

para demonstrar o seguinte teorema [39, p.53]:

**Teorema 3.2.1** *O par  $(\text{Orb}(\zeta), b)$  constitui um “ $G$ -espaço hamiltoniano”, sendo  $b$  (3.33) uma “forma simplética” bem definida e o mapeamento  $X \mapsto V_X$  uma “ação Poisson” de  $\mathfrak{g}$  com “comomento”  $k : \mathfrak{g} \mapsto C^\infty(\text{Orb}(\zeta))$  onde  $k_X(\eta) = \langle \eta, X \rangle$  e  $\eta \in \text{Orb}(\zeta)$ .*

*Prova:* A ação de  $\mathfrak{g}$  é evidentemente transitiva sobre  $\text{Orb}(\zeta)$ , uma vez que por definição (3.22) os  $V_X(\eta)$  varrem  $T_\eta \text{Orb}(\zeta)$  em cada  $\eta \in \text{Orb}(\zeta)$ . De (3.22), (3.29) e (3.33), temos que

$$V_Y(\eta) = 0 \Leftrightarrow b_\eta(V_X, V_Y) = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad (3.34)$$

portanto  $b_\eta$  é uma 2-forma bem definida em  $\eta$  (ela depende apenas dos valores de  $V_X$  e  $V_Y$  em  $\eta$ ) e não-degenerada, uma vez que não admite autovetores nulos.

Para mostrar que  $b_\eta$  também é uma 2-forma fechada em cada  $\eta \in Orb(\zeta)$ , primeiramente concluímos, usando (3.19) e  $k_Y(\eta) = \langle \eta, Y \rangle$ , que, para  $X, Y \in \mathfrak{g}$  e  $g(t) = \exp(tX)$ ,

$$\begin{aligned} (V_X(k_Y))(\eta) &= \frac{d}{dt}\{k_Y(Ad^*g(t)\eta)\}|_{t=0} \\ (V_X(k_Y))(\eta) &= \langle \eta, \frac{d}{dt}(Adg^{-1}(t)Y)|_{t=0} \rangle \\ (V_X(k_Y))(\eta) &= -\langle \eta, [X, Y] \rangle, \end{aligned} \quad (3.35)$$

portanto  $V_X(k_Y) = -k_{[X, Y]} = b(V_X, V_Y)$ . Então, de (3.35) e (3.23), temos que  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,

$$\begin{aligned} db_\eta(V_X, V_Y, V_Z) &= \sum\{V_X(b_\eta(V_Y, V_Z)) - b_\eta([V_X, V_Y], V_Z)\} \\ db_\eta(V_X, V_Y, V_Z) &= \sum\{-V_X(k_{[Y, Z]})(\eta) - b_\eta(V_{[X, Y]}, V_Z)\} \\ db_\eta(V_X, V_Y, V_Z) &= \sum\{\langle \eta, [X, [Y, Z]] \rangle + \langle \eta, [[X, Y], Z] \rangle\} \\ db_\eta(V_X, V_Y, V_Z) &= 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

pela identidade de Jacobi ( $\sum$  denota a somatória cíclica sobre  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ). Portanto  $b$  é fechada.

Por fim, usando (3.35),

$$\begin{aligned} L_{V_Y}k_X(\eta) &= i_{V_Y}dk_X(\eta) \\ (V_Y(k_X))(\eta) &= i_{V_Y}dk_X(\eta) \\ i_{V_Y}dk_X(\eta) &= -\langle \eta, [Y, X] \rangle \end{aligned} \quad (3.37)$$

e, portanto, de (3.37), (3.33) e (3.29) temos que

$$\begin{aligned} i_{V_Y}(i_{V_X}b_\eta + dk_X(\eta)) &= b_\eta(V_X, V_Y) + i_{V_Y}dk_X(\eta) \\ i_{V_Y}(i_{V_X}b_\eta + dk_X(\eta)) &= -\langle \eta, [X, Y] \rangle - \langle \eta, [Y, X] \rangle \\ i_{V_Y}(i_{V_X}b_\eta + dk_X(\eta)) &= 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

De (3.38) e do fato de  $b$  ser fechada inferimos que  $L_{V_X}b = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}$ , o que significa que a ação de  $\mathfrak{g}$  sobre  $Orb(\zeta)$  é canônica, com  $V_X \in \mathcal{A}(Orb(\zeta))$

(3.15). Além disso, considerando que  $V_X(k_Y) = -k_{[X,Y]}$  (3.35) e definindo o colchete de Poisson por  $\{k_X, k_Y\} = -V_X(k_Y)$  (3.10), vemos que os “comomentos”  $k_X$  satisfazem (3.16)

$$\{k_X, k_Y\} = k_{[X,Y]}, \quad (3.39)$$

mostrando que a ação de  $\mathfrak{g}$  é Poisson, o que implica que  $(\text{Orb}(\zeta), b)$  é um “G-espaco hamiltoniano”. QED

**Nota 3.2.1** *É digno de nota que para estabelecer a condição (3.39) não seja necessário que  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ , sendo o teorema 3.2.1 aplicável independentemente disto.*

### 3.2.2 A classificação dos “sistemas elementares clássicos”

Iniciaremos definindo o “mapeamento de momentum” [3, p.173] e descrevendo algumas de suas propriedades:

**Definição 3.2.7 (Mapeamento de momentum)** *Seja  $(S, \Omega)$  uma variedade simplética ou pré-simplética. Um “mapeamento de momentum” (ou “momentum de Souriau” [32])  $\mu$  do grupo dinâmico  $G$  é uma função a valores em  $\mathfrak{g}^*$   $\mu : S \rightarrow \mathfrak{g}^*$  sobre  $S$ , onde  $\mathfrak{g}^*$  é a álgebra dual (ou co-álgebra), tal que*

$$i_{X^s} \Omega = -d\langle \mu, X \rangle \quad \forall X \in \mathfrak{g} \quad . \quad (3.40)$$

Observamos que (3.40) não determina  $\mu$  unicamente, sendo que

$$\mu' = \mu + \mu_0 \quad (3.41)$$

também é um “mapeamento de momentum” se  $\mu_0$  for, onde  $\mu_0 : S \rightarrow \mathfrak{g}^*$  é um mapeamento constante ( $d\langle \mu_0, X \rangle = 0$ ). Em particular, para uma variedade conexa,  $H_{DR}^0(S) = \mathfrak{R}$ , o fato de  $d\langle (\mu' - \mu), X \rangle = 0$  implica que todos os



“mapeamentos de momentum” associados a uma dada ação de  $\mathfrak{g}$  (por meio dos campos  $X^S$ ) diferem por um mapeamento constante. Expressando  $X \in \mathfrak{g}$  em componentes  $X = X^A T_A$ , onde  $\{\omega^A\}$  é a base de 1-formas invariantes à esquerda de  $\mathfrak{g}^*$ , dual a  $\{T_A\}$  e  $A \in I$ , o conjunto de índices, e lembrando que  $u$  é um mapeamento linear (3.14) definido por  $u_A = \lambda(T_A)$ , temos que  $u_X = X^A u_A$ . Disto resulta que, como os campos  $X^S \in \mathcal{A}(S)$  são “globalmente hamiltonianos”, a condição (3.15) é equivalente a

$$i_{X^S} \Omega + du_X = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (3.42)$$

Além disso, (3.42) e (3.40) implicam que, se a variedade (pré-)simplética  $S$  for conexa, então, a menos de uma constante, sobre cada  $s \in S$

$$\langle \mu(s), X \rangle = u_X(s) \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad (3.43)$$

de modo que  $\langle \mu, T_A \rangle = u_A$ , tal que expressamos o “mapeamento de momentum” em componentes por

$$\mu = u_A \omega^A. \quad (3.44)$$

Vimos (Teo.3.1.1) que toda variedade simplética admite coordenadas canônicas, tais que  $\Omega = d\Lambda = dp_a \wedge dq^a$  ou  $\Lambda = p_a dq^a$  ( $a \in \{1, \dots, n\}$ ), onde  $\Lambda$  é a 1-forma canônica ou “forma de Liouville”. No caso particularmente simples em que a “forma de Liouville” é invariante pelas transformações canônicas infinitesimais,

$$L_{X^S} \Lambda = 0, \quad (3.45)$$

segue-se de  $L_{X^S} \Lambda = i_{X^S} d\Lambda + di_{X^S} \Lambda$  que

$$i_{X^S} \Omega = -d(i_{X^S} \Lambda) \quad (3.46)$$

e, de (3.40), a menos de uma constante

$$\langle \mu, X \rangle = i_{X^S} \Lambda \quad \forall X \in \mathfrak{g}. \quad (3.47)$$

As propriedades de transformação do “mapeamento de momento” [21, p.234] são exibidas pela

**Proposição 3.2.1** *Seja  $(S, \Omega)$  uma variedade simplética ou pré-simplética sobre a qual o “grupo dinâmico”  $G$  possui uma “ação Poisson”. Então o “mapeamento de momentum”  $\mu : S \rightarrow \mathfrak{g}^*$  definido por (3.43) comuta com a “ação à esquerda” do grupo (3.2) ou*

$$\mu \circ l_g = Ad^*g\mu \quad \forall g \in G, \quad (3.48)$$

onde  $Ad^*g$  denota a representação co-adjunta de  $g$  (Def.3.2.2).

*Prova:* O mapeamento  $\mu$ , tal que

$$\langle \mu(s), X \rangle = u_X \quad \forall X \in \mathfrak{g}, \quad (3.49)$$

faz com que o fluxo canônico por cada  $s \in S$ , gerado por  $Y^S \in \mathcal{A}(S)$ , para todo  $Y \in \mathfrak{g}$ ,  $l_{g(t)}(s)$ , onde  $g(t) = \exp(tY)$ , induza um fluxo correspondente sobre  $\mathfrak{g}^*$ ,  $\mu(l_{g(t)}(s))$ , cujo gerador podemos calcular:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \mu(l_{g(t)}(s)), X \rangle|_{t=0} &= Y^S(\langle \mu(s), X \rangle) \\ \langle \frac{d}{dt} \mu(l_{g(t)}(s))|_{t=0}, X \rangle &= Y^S(u_X(s)) \\ \langle \frac{d}{dt} \mu(l_{g(t)}(s))|_{t=0}, X \rangle &= -\{u_Y, u_X\} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad (3.50)$$

e, como o grupo dinâmico  $G$  possui uma “ação Poisson” sobre a variedade simplética ou pré-simplética  $(S, \Omega)$ , temos que

$$\{u_Y, u_X\} = u_{[Y, X]} \quad (3.51)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dt} \mu(l_{g(t)}(s))|_{t=0}, X \rangle &= -u_{[Y, X]}(s) \\ \langle \frac{d}{dt} \mu(l_{g(t)}(s))|_{t=0}, X \rangle &= -\langle \mu(s), [Y, X] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \end{aligned} \quad (3.52)$$

e, como consequência de (3.22),

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dt} \mu(l_{g(t)}(s))|_{t=0}, X \rangle &= \langle V_Y(\mu), X \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g} \\ \frac{d}{dt} \mu(l_{g(t)}(s))|_{t=0} &= V_Y(\mu(s)) \quad \forall Y \in \mathfrak{g}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Então

$$\mu_*(Y^S) := \frac{d}{dt}\mu(l_{g(t)}(s))|_{t=0} = V_Y(\mu(s)) \quad \forall Y \in \mathfrak{g} \quad (3.54)$$

e, conseqüentemente,  $\mu \circ l_g = Ad^*g\mu \quad \forall g \in G$ . QED

**Nota 3.2.2** *Notamos que a condição (3.51) é crucial na prova da (Prop.3.2.1), sendo também necessária para que  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ , podendo ainda ser satisfeita independentemente desta última, como ocorre com as co-órbitas (Nota3.2.1).*

Com isto, conseguimos uma classificação de todos os “G-espacos hamiltonianos” em termos de co-órbitas [21, p.234]:

**Proposição 3.2.2** *O “mapeamento de momentum”  $\mu : S \rightarrow Orb(\zeta)$ , onde  $\mu(s_0) = \zeta$  e  $s_0 \in S$ , é um difeomorfismo local entre todo “G-espaco hamiltoniano”  $(S, \Omega)$  e uma certa co-órbita do grupo dinâmico  $G$  em  $\mathfrak{g}^*$ .*

*Prova :* Todo “G-espaco hamiltoniano” é uma “variedade simplética homogênea”, portanto todo  $s \in S$  é da forma  $s = l_{g(t)}(s_0)$ , onde  $g(t) = \exp(tY)$  com  $Y \in \mathfrak{g}$  e  $t \in \mathfrak{R}$ . Então, usando (3.48), vemos que a imagem de todo  $s \in S$  pelo “mapeamento de momentum”, com  $\mu(s_0) = \zeta$ , possui a forma

$$\mu(l_{g(t)}(s_0)) = Ad^*g(t)\zeta \quad (3.55)$$

e, portanto,  $\mu(s) \in Orb(\zeta) \quad \forall s \in S$  (Def.3.2.4). Conseqüentemente, o mapeamento  $\mu : S \rightarrow Orb(\zeta)$  é sobrejetor.

Por outro lado, a equação (3.54)

$$\mu_*(Y^S(s)) = V_Y(\mu(s)) \quad (3.56)$$

estabelece um isomorfismo linear entre  $T_sS$  e  $T_{\mu(s)}Orb(\zeta)$  para todo  $s \in S$ , uma vez que estes espacos tangentes são varridos pelos campos  $\{Y^S\}$  e  $\{V_Y\}$ , respectivamente. Logo, pela generalização do “teorema do mapeamento inverso” a variedades diferenciáveis [37, p.77], o “mapeamento de momentum”

$\mu$  é um difeomorfismo entre uma vizinhança de cada  $s \in S$  e uma vizinhança de  $\mu(s) \in Orb(\zeta)$ . QED

**Nota 3.2.3** *Então todo “G-espaço hamiltoniano” “recobre” uma certa co-órbita de G em  $\mathfrak{g}^*$ , no sentido de que o “mapeamento de momentum”  $\mu : S \rightarrow Orb(\zeta)$  é um difeomorfismo local sobrejetor. Se o grupo G for simplesmente conexo, então suas co-órbitas em  $\mathfrak{g}^*$  também serão simplesmente conexas e não admitirão nenhum “recobrimento” não-trivial. Neste caso, então, o “mapeamento de momentum”  $\mu$  será um difeomorfismo global e todos os “G-espaços hamiltonianos” serão simplesmente conexas.*

**Nota 3.2.4** *Se G for simplesmente conexo, todo “G-espaço hamiltoniano”  $(S, \Omega)$  será trivial (Nota 3.2.3), de modo que toda ação de  $\mathfrak{g}$  sobre a variedade S será estritamente hamiltoniana (3.15). Então, se também  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ , teremos a condição  $u_{[X,Y]} = \{u_X, u_Y\} \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$  automaticamente satisfeita (3.16), de modo que toda ação de  $\mathfrak{g}$  será também Poisson e toda “variedade simplética homogênea” será um “G-espaço hamiltoniano” (Def. 3.2.1).*

Nestas condições, podemos classificar todos os “sistemas elementares clássicos” em termos de co-órbitas [21, p.235]:

**Teorema 3.2.2 (Kirillov)** *Seja G um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e tal que  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ . Então o “mapeamento de momentum”  $\mu : S \rightarrow Orb(\zeta)$  (Def. 3.2.7) é um symplectomorfismo (Def. 3.1.3) entre todo “sistema elementar clássico” (Def. 3.2.1)  $(S, \Omega)$  e uma co-órbita (Def. 3.2.4)  $(Orb(\zeta), b)$  de G em  $\mathfrak{g}^*$ , tal que  $\mu^*b = \Omega$  (Teo. 3.2.1), com  $\zeta = \mu(s_0)$  e  $s_0 \in S$ .*

*Prova:* Vimos na (Nota 3.2.4) que se G for simplesmente conexo e  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{R}) = 0$ , então a (Prop. 3.2.2) implica que o “mapeamento de momentum”  $\mu : S \rightarrow Orb(\zeta)$  é um difeomorfismo global entre a variedade simplesmente conexa S de todo “sistema elementar clássico”  $(S, \Omega)$  e uma co-órbita  $Orb(\zeta) \subset \mathfrak{g}^*$ , tal que  $\zeta = \mu(s_0)$  e  $s_0 \in S$ .

Vemos, então, usando (3.56), (3.33) e (Def.3.2.6) que

$$\begin{aligned}
\mu^*b(X^S(s), Y^S(s)) &= b_{\mu(s)}(\mu_*(X^S(s)), \mu_*(Y^S(s))) \\
\mu^*b(X^S(s), Y^S(s)) &= b_{\mu(s)}(V_X(\mu(s)), V_Y(\mu(s))) \\
\mu^*b(X^S(s), Y^S(s)) &= -\langle \mu(s), [X, Y] \rangle \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

então, usando  $H_0^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{K}) = 0$  e as equações (3.43) e (3.8), temos que

$$\begin{aligned}
\mu^*b(X^S(s), Y^S(s)) &= -u_{[X, Y]} \\
\mu^*b(X^S(s), Y^S(s)) &= -\{u_X(s), u_Y(s)\} \\
\mu^*b(X^S(s), Y^S(s)) &= \Omega(X^S(s), Y^S(s)) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Logo  $\mu^*b = \Omega$ . QED

### 3.3 A classificação da partícula relativista em 1 + 1 dimensões

Nesta seção aplicaremos os métodos grupo-teóricos desenvolvidos na seção anterior ao caso da partícula relativista em 1 + 1 dimensões que estudamos no capítulo anterior, mostrando que o “mapeamento de momentum” do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  é um “symplectomorfismo” entre o espaço de fase reduzido do modelo e uma certa co-órbita de  $\bar{\mathcal{P}}$  em  $\bar{\mathbb{I}}_2^*$ .

Lembramos que a partícula relativista é um sistema hamiltoniano vinculado, cuja dinâmica foi definida, em termos variacionais, sobre a superfície co-isotrópica de 4 dimensões  $\Gamma^+ \subset T^*(\bar{M})$ ,

$$\begin{aligned}
\phi_2 &= (p_a - \pi \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b)(p^a - \pi \frac{B}{2} \varepsilon^a{}_b q^b) - m^2 = 0 \\
\phi_1 &= \pi + 1 = 0 \\
p_0 + \pi \frac{B}{2} q^1 &> 0,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

a qual, por sua vez, está imersa na variedade simplética  $(\bar{S}, \bar{\Omega})$  de 6 dimensões, com coordenadas canônicas  $(q^a, \chi, p_b, \pi)$ , onde  $\bar{S} = T^*(\bar{M})$ ,  $\bar{\Omega} = d\bar{\Lambda}$ ,  $\bar{\Lambda} = p_a dq^a + \pi d\chi$  e  $a, b \in \{0, 1\}$ .

Observamos que a 2-forma induzida  $\Omega^+ = \bar{\Omega}|_{\Gamma^+}$  é fechada e degenerada ao máximo, tal que o núcleo de  $\Omega^+$  sobre  $\mathfrak{X}(\Gamma^+)$ ,

$$Nuc\Omega^+ = \{X^{\Gamma^+} \in \mathfrak{X}(\Gamma^+) | i_{X^{\Gamma^+}}\Omega^+ = 0\}, \quad (3.60)$$

varrido linearmente pelos campos globalmente hamiltonianos  $X_{\phi_m}^{\Gamma^+} \in \mathcal{A}(\Gamma^+)$  gerados pelas funções  $\phi_m \in C^\infty(\bar{S})$  tais que  $\phi_m|_{\Gamma^+} = \text{constante}$  (3.64), possui a dimensão máxima  $\text{codim}\Gamma^+ = 6 - 4 = 2$  [19, p.52], onde  $m \in \{1, 2\}$ . De modo mais formal, sejam  $\Gamma^+ \subset \bar{S}$ ,  $X_{\phi_m}^{\bar{S}} \in \mathcal{A}(\bar{S})$  e  $X_{\phi_m}^{\Gamma^+} = X_{\phi_m}^{\bar{S}}|_{\Gamma^+}$ . Então

$$i_{X_{\phi_m}^{\bar{S}}} \bar{\Omega} + d\phi_m = 0 \quad (3.61)$$

e uma vez que

$$i_{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}}\Omega^+ + d\phi_m|_{\Gamma^+} = 0 \Leftrightarrow X_{\phi_m}^{\bar{S}} \in \mathfrak{X}(\Gamma^+) \quad (3.62)$$

temos que

$$d\phi_m|_{\Gamma^+} = 0 \Rightarrow \left( i_{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}}\Omega^+ = 0 \Leftrightarrow X_{\phi_m}^{\bar{S}} \in \mathfrak{X}(\Gamma^+) \right). \quad (3.63)$$

Mas como  $d\phi_m|_{\Gamma^+} = 0$ ,

$$\begin{aligned} i_{Y^{\Gamma^+}}(i_{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}}\Omega^+) &= \Omega^+(X_{\phi_m}^{\Gamma^+}, Y^{\Gamma^+}) \\ i_{Y^{\Gamma^+}}(i_{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}}\Omega^+) &= -Y^{\Gamma^+}(\phi_m) \\ i_{Y^{\Gamma^+}}(i_{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}}\Omega^+) &= 0 \quad \forall Y^{\Gamma^+} \in \mathfrak{X}(\Gamma^+) \\ i_{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}}\Omega^+ &= 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

as equações (3.63) e (3.64) implicam que  $X_{\phi_m}^{\bar{S}} \in \mathfrak{X}(\Gamma^+)$ . Conseqüentemente o espaço tangente à superfície de vínculos  $\Gamma^+$  contém os “vetores nulos” em

cada ponto que são gerados pelos vínculos  $\phi_m$  e pertencem ao núcleo da 2-forma induzida  $\Omega^+$  (3.60), como é característico das superfícies co-isotrópicas. Resulta que a variedade  $(\Gamma^+, \Omega^+)$  é apenas pré-simplética, como consequência do fato da 2-forma  $\Omega^+$  possuir um núcleo bidimensional  $Nuc\Omega^+$ , do qual os geradores das transformações de gauge infinitesimais  $\{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}\}$  são uma base.

A variedade  $\bar{S} = T^*(\bar{M})$  é simplesmente conexa por construção<sup>2</sup> e, uma vez que  $H_0^2(\bar{\mathbb{I}}_2^1, \mathfrak{R}) = 0$ , a ação à esquerda gerada por  $\{\bar{T}_A^{\bar{S}}\}$  (2.76) é canônica, em virtude de (2.78), e Poisson<sup>3</sup>. Conseqüentemente os “comomentos”  $\bar{u}_A$  estão globalmente definidos sobre  $\bar{S}$  e satisfazem as equações (3.17) e (3.15), ou

$$\begin{aligned} \{\bar{u}_A, \bar{u}_B\} &= f_{AB}^C \bar{u}_C \\ i_{\bar{T}_A^{\bar{S}}} \bar{\Omega} + d\bar{u}_A &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (3.65)$$

e podemos calculá-los, com o auxílio das equações (3.47) e (3.43), ou

$$\bar{u}_A = i_{\bar{T}_A^{\bar{S}}} \bar{\Lambda}, \quad (3.66)$$

obtendo

$$\begin{aligned} \bar{u}_a &= p_a + \pi \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b \\ \bar{u}_2 &= p_a \varepsilon^a{}_b q^b \\ \bar{u}_3 &= \pi. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Das equações (3.67), não é difícil de ver que a álgebra dos “comomentos”  $\{\bar{u}_A\}$  é homomorfa à do grupo dinâmico enquanto que a álgebra dos campos globalmente hamiltonianos  $\{\bar{T}_A^{\bar{S}}\}$  é anti-homomorfa à mesma, de modo consistente com as equações (3.7), (3.17) e (3.11).

A ação do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\bar{S}$  evidentemente não é transitiva. Para ver isto basta observar que dois pontos em  $\bar{S}$  que possuam valores das

<sup>2</sup>Veja a discussão da seção 2.1 na página 77.

<sup>3</sup>Veja a discussão da seção 3.1 na página 103.

coordenadas  $\pi$  distintos não estão relacionados por nenhum  $g(\theta^a, \alpha, \beta) \in \bar{\mathcal{P}}$  (2.75). Entretanto, a superfície de vínculos  $\Gamma^+$  é homogênea sob a ação do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$ , em virtude da seguinte proposição:

**Proposição 3.3.1** *O grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  possui uma ação simplesmente transitiva e livre [37, p.108] sobre a superfície de vínculos  $\Gamma^+$ .*

*Prova* : Reescrevendo as equações de transformação (2.75) em termos de dois pontos quaisquer  $s = (q^a, \chi, p_b, \pi)$  e  $s_0 = (q_0^a, \chi_0, p_{0b}, \pi_0)$  pertencentes a  $\Gamma^+$  (3.59) e do “momento cinético” da partícula  $\tilde{p}_a = p_a - \pi \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b$ ,

$$\begin{aligned} q^a &= \theta^a + \Lambda^a_b q_0^b \\ \chi &= \chi_0 + \beta + \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \Lambda^b_c q_0^c \\ \tilde{p}_b &= \tilde{p}_{0a} (\Lambda^{-1})^a_b \\ \pi &= \pi_0 = -1, \end{aligned} \tag{3.68}$$

não é difícil de ver que as equações (3.68) possuem uma solução única para  $\theta^a$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  em função de  $s$  e  $s_0$ :

$$\begin{aligned} \theta^a(s, s_0) &= q^a - \Lambda^a_b(\alpha) q_0^b \\ \alpha(s, s_0) &= \text{ArcSinh} \left( \frac{\varepsilon^{ab} \tilde{p}_{0a} \tilde{p}_b}{m^2} \right) \\ \beta(s, s_0) &= \chi - \chi_0 - \frac{B}{2} q^a \varepsilon_{ab} \Lambda^b_c(\alpha) q_0^c. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Logo, para todo  $s$  e  $s_0$  pertencentes a  $\Gamma^+$ , existe um único  $g(\theta^a, \alpha, \beta) \in \bar{\mathcal{P}}$  tal que  $s = g s_0$  e, portanto, a ação de  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\Gamma^+$  é simplesmente transitiva.

E, como as equações (3.69) deixam claro, se  $s = g s$  para algum  $s \in \Gamma^+$  então  $g = e$ . Segue-se que a ação de  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\Gamma^+$  é livre. QED

**Nota 3.3.1** *Em virtude da (Prop.3.3.1), a superfície de vínculos  $\Gamma^+$  é homogênea sob a ação à esquerda  $l_g$  (3.1) do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$ , definida por*



(3.68), e pode ser reconstruída em termos de  $\bar{\mathcal{P}}$  e do grupo de estabilidade  $\bar{\mathcal{P}}_{s_0}$  de algum ponto  $s_0 \in \Gamma^+$  [37, p.112],

$$\Gamma^+ = \bar{\mathcal{P}} \cdot s_0, \quad (3.70)$$

de modo que o mapeamento definido por

$$\begin{aligned} \varphi : \bar{\mathcal{P}} &\mapsto \Gamma^+ \\ g &\mapsto \varphi(g) = l_g(s_0) \end{aligned} \quad (3.71)$$

induz um difeomorfismo  $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_{s_0} \mapsto \Gamma^+$ . Como a ação de  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\Gamma^+$  é livre, temos que  $\bar{\mathcal{P}}_{s_0} = \{e\}$  e então o próprio mapeamento  $\varphi$  (3.71) é um difeomorfismo global entre o grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  e a superfície de vínculos  $\Gamma^+$ .

**Nota 3.3.2** Em virtude da (Nota 3.3.1) e da (1.69), vemos que  $(\Gamma^+, \Omega^+)$  é uma variedade pré-simplética homogênea e simplesmente conexa sobre a qual a ação do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  é Poisson. E como  $\bar{T}_A^S \in \mathfrak{X}(\Gamma^+)$ , os “comomentos”  $u_A^+ = \bar{u}_A|_{\Gamma^+}$  (3.67) estão bem definidos para todo  $s \in \Gamma^+$  (3.59) e são dados por

$$\begin{aligned} u_a^+(s) &= p_a - \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^b \\ u_2^+(s) &= p_a \varepsilon^a{}_b q^b \\ u_3^+(s) &= -1, \end{aligned} \quad (3.72)$$

que coincidem com as correntes de Noether (Teo.3.1.2) previamente obtidas no formalismo lagrangeano (2.59).

**Definição 3.3.1 (Coordenadas de grupo)** Seja  $s_0$  um ponto arbitrário e fixo de  $\Gamma^+$  e  $s = l_g(s_0)$ . Então definimos as “coordenadas de grupo” de  $s \in \Gamma^+$  por meio do difeomorfismo (3.71) e das equações (3.69), isto é,  $g = \varphi^{-1}(s)$ , que denotaremos por  $g(s) = g(\theta^a(s), \alpha(s), \beta(s))$ .

Sejam  $g'' = g'g$ ,  $s = l_g(s_0)$  e  $s' = l_{g'}(s_0)$ . Então a equação

$$l_{g'}(s_0) = \varphi(g'g) \quad (3.73)$$

pode ser interpretada de duas maneiras: como a ação à esquerda  $l_{g'}$  de um elemento fixo do grupo  $g'$  sobre a variedade  $\Gamma^+$  (3.2), parametrizada pelas “coordenadas de grupo”  $g(s) = g(\theta^a(s), \alpha(s), \beta(s))$ , ou como o resultado da ação à direita, definida por

$$r_g(s') := l_{g'}(s_0) \quad (3.74)$$

e satisfazendo  $r_{g_1} \circ r_{g_2} = r_{g_2g_1}$ , sobre  $\Gamma^+$ , cujos pontos agora têm as “coordenadas de grupo” de  $s'$  por parâmetros. No primeiro caso, calculando o diferencial de (3.73) com relação a  $g'$ , deduzimos que

$$\bar{T}_A^{\Gamma^+}(s) = \varphi_*(\bar{T}_A^R(g)) := \bar{T}_A^R(g(s)) \quad (3.75)$$

e no segundo caso, calculando o diferencial de (3.73) com relação a  $g$ , deduzimos que

$$\bar{T}_A^{L^{\Gamma^+}}(s) = \varphi_*(\bar{T}_A(g)) := \bar{T}_A(g(s)). \quad (3.76)$$

As equações (3.68) implicam que a mudança para as “coordenadas de grupo”  $g(s)$ , para todo  $s \in \Gamma^+$  (3.59), é efetuada por

$$\begin{aligned} \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial\theta^a}\right) &:= \frac{\partial}{\partial\theta^a}(s) = \frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{B}{2}\varepsilon_{ab}\Lambda^b{}_c q_0^c \frac{\partial}{\partial\chi} + \frac{B}{2}\varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial p_b} \\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) &:= \frac{\partial}{\partial\alpha}(s) = \varepsilon^a{}_b \Lambda^b{}_c q_0^c \frac{\partial}{\partial q^a} + \frac{B}{2}\theta_b \Lambda^b{}_c q_0^c \frac{\partial}{\partial\chi} - p_{0a}\varepsilon^a{}_b (\Lambda^{-1})^b{}_c \frac{\partial}{\partial p_c} \\ \varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial\beta}\right) &:= \frac{\partial}{\partial\beta}(s) = \frac{\partial}{\partial\chi}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Então, usando as equações (3.77), (2.76) e (1.127), verificamos explicitamente a equação (3.75), para todo  $s \in \Gamma^+$  (3.59), ou

$$\bar{T}_a^{\Gamma^+}(s) = \frac{\partial}{\partial\theta^a}(s) + \frac{B}{2}\varepsilon_{ab}\theta^b \frac{\partial}{\partial\beta}(s)$$

$$\begin{aligned}\bar{T}_2^{\Gamma^+}(s) &= \varepsilon^a{}_b \theta^b \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(s) \\ \bar{T}_3^{\Gamma^+}(s) &= \frac{\partial}{\partial \beta}(s).\end{aligned}\quad (3.78)$$

E como os vetores  $\bar{T}_A^{\Gamma^+}(s)$  varrem linearmente o espaço tangente  $T_s\Gamma^+$  sobre cada  $s \in \Gamma^+$ , em virtude da (Prop.3.3.1), vemos que os campos vetoriais  $\{\bar{T}_A^{\Gamma^+}\}$  constituem uma base não coordenada de  $\mathfrak{X}(\Gamma^+)$ .

Também podemos obter as expressões dos geradores da ação à direita (3.74) nas “coordenadas de grupo”, usando (3.77), (1.128) e (3.76), ou

$$\begin{aligned}\bar{T}_a^{L\Gamma^+}(s) &= \Lambda^b{}_a \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s) + \frac{B}{2} \theta^c \varepsilon_{cb} \Lambda^b{}_a \frac{\partial}{\partial \beta}(s) \\ \bar{T}_2^{L\Gamma^+}(s) &= \frac{\partial}{\partial \alpha}(s) \\ \bar{T}_3^{L\Gamma^+}(s) &= \frac{\partial}{\partial \beta}(s).\end{aligned}\quad (3.79)$$

Então, usando o fato de que os geradores das transformações de gauge infinitesimais pertencem a  $\mathfrak{X}(\Gamma^+)$ <sup>4</sup> e as equações (3.61) e (3.10), podemos calcular as expressões nas coordenadas  $(q^a, \chi, p_b, \pi)$  de  $\bar{S}$  de  $\{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}\}$ , para todo  $s \in \Gamma^+$  (3.59),

$$\begin{aligned}X_{\phi_1}^{\Gamma^+}(s) &= \frac{\partial}{\partial \chi} \\ X_{\phi_2}^{\Gamma^+}(s) &= 2(p^a + \frac{B}{2} \varepsilon^a{}_b q^b) \frac{\partial}{\partial q^a} - B(p^a + \frac{B}{2} \varepsilon^a{}_b q^b) \varepsilon_{ab} q^b \frac{\partial}{\partial \chi} - \\ &\quad - B(p^a + \frac{B}{2} \varepsilon^a{}_b q^b) \varepsilon_{ab} \frac{\partial}{\partial p_b},\end{aligned}\quad (3.80)$$

ou, nas coordenadas de grupo e em relação à base  $\{\bar{T}_A^{\Gamma^+}\}$  (3.78),

$$\begin{aligned}X_{\phi_1}^{\Gamma^+}(s) &= \bar{T}_3^{\Gamma^+}(s) \\ X_{\phi_2}^{\Gamma^+}(s) &= 2u^{+A}(s) \bar{T}_A^{\Gamma^+}(s),\end{aligned}\quad (3.81)$$

---

<sup>4</sup>Veja discussão na página 116.

onde  $u^{+A}(s) = h^{AB}u_B^+(s)$ , em virtude de (1.140) e (3.72). Ou ainda, usando que

$$u_A^+(s) = u_B^+(s_0)(Adg^{-1})^B_A \quad (3.82)$$

e  $Adg = R_{g^{-1}*}(g) \circ L_{g*}(e)$ , vemos que em relação à base  $\{\bar{T}_A^{L\Gamma^+}\}$  (3.79),

$$\begin{aligned} X_{\phi_1}^{\Gamma^+}(s) &= \bar{T}_3^{L\Gamma^+}(s) \\ X_{\phi_2}^{\Gamma^+}(s) &= 2u^{+A}(s_0)\bar{T}_A^{L\Gamma^+}(s), \end{aligned} \quad (3.83)$$

onde  $s = l_g(s_0)$ , em virtude da (Prop.3.2.1) e da (Nota3.3.2). A equação (3.83) mostra que os geradores de transformações de gauge  $\{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}\}$  atuam à *direita* sobre  $\Gamma^+$ , uma vez que correspondem a campos invariantes à esquerda nas coordenadas de grupo.

Por fim, calculando a matriz jacobiana dos parâmetros (3.68) de  $\Gamma^+$ , não é difícil de ver que a expressão da 2-forma induzida  $\Omega^+ = \bar{\Omega}|_{\Gamma^+}$  nas “coordenadas de grupo”  $g(\theta^a, \alpha, \beta)$  (Def.3.3.1), para todo  $s \in \Gamma^+$ , é

$$\Omega_s^+ = \frac{B}{2}\varepsilon_{ab}d\theta^a(s) \wedge d\theta^b(s) + (p_{0d}(\Lambda^{-1})^d_c - \frac{B}{2}\varepsilon_{cd}\Lambda^d_a q_0^a)\varepsilon^c_b d\theta^b(s) \wedge d\alpha(s), \quad (3.84)$$

onde  $s = l_g(s_0)$ . Vemos, em particular, que  $\text{posto}\Omega^+ = 2$ , tal que a restrição de  $\Omega^+$  ao espaço homogêneo gerado por  $\{\partial/\partial\theta^a\}$  é não-degenerada.

### 3.3.1 As co-órbitas de $\bar{\mathcal{P}}$

Usando (1.80), vemos que a co-órbita por um covetor fixo  $\zeta = \zeta_A\bar{\omega}^A$  em  $\bar{\mathfrak{I}}_2^{1*}$  (Def.3.2.4) é formada pelos pontos  $\mu = u_A\bar{\omega}^A$  tais que  $u_A = \zeta_B(Adg^{-1})^B_A$ , ou

$$\begin{aligned} u_a &= \zeta_b(\Lambda^{-1})^b_a - B\theta^b\varepsilon_{ba}\zeta_3 \\ u_2 &= \zeta_c\varepsilon^c_a(\Lambda^{-1})^a_b\theta^b + \zeta_2 - \frac{B}{2}\theta^a\theta_a\zeta_3 \\ u_3 &= \zeta_3, \end{aligned} \quad (3.85)$$

onde  $\zeta_A, \mu_A \in \mathfrak{R}$  e  $\{\bar{\omega}^A\}$  é a base de  $\bar{\mathfrak{I}}_2^{1*}$  dual a  $\{\bar{T}_A\}$  (1.51).

Como conseqüência da equação (3.85), são verdadeiras as duas identidades seguintes:

$$\begin{aligned} u^A u_A &= \zeta^A \zeta_A \\ u_3 &= \zeta_3 \end{aligned} \quad (3.86)$$

O grupo de estabilidade de  $\zeta \in \bar{\mathfrak{I}}_2^{1*}$  é gerado pela subálgebra  $\bar{\mathfrak{I}}_{2\zeta}^1 \subset \bar{\mathfrak{I}}_2^1$  que é o núcleo da “forma de Kirillov”  $B_\zeta(X, Y)$  (Def.3.2.6), constituído por todos os vetores  $Y \in \bar{\mathfrak{I}}_2^1$  tais que  $\langle \zeta, [X, Y] \rangle = 0 \quad \forall X \in \bar{\mathfrak{I}}_2^1$ , ou

$$\begin{aligned} \zeta_3 B \varepsilon_{ab} Y^b + \varepsilon_a^b \zeta_b Y^2 &= 0 \\ \varepsilon_a^b \zeta_b Y^a &= 0. \end{aligned} \quad (3.87)$$

Vemos que a dimensão do “grupo de estabilidade”  $\bar{\mathcal{P}}_\zeta$  é  $4 - \text{posto}C$ , onde  $C$  é a matriz dos coeficientes do sistema linear homogêneo (3.87)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -B\zeta_3 & \zeta_1 & 0 \\ B\zeta_3 & 0 & \zeta_0 & 0 \\ -\zeta_1 & -\zeta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.88)$$

Como  $\text{Orb}(\zeta) = \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_\zeta \cdot \zeta$ , temos que a dimensão da co-órbita  $\text{Orb}(\zeta)$  é igual a  $\text{posto}C$ . Analisando a matriz  $C$  acima distinguimos três casos:

1.  $\zeta_3 \neq 0 \Rightarrow \text{posto}C = 2$

Então, usando (3.86) e (1.143), vemos que a co-órbita é a superfície bidimensional difeomorfa a  $\mathfrak{R}^2$  definida pelas equações

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{u^a u_a}{2B u_3} - \frac{\zeta^A \zeta_A}{2B u_3} \\ u_3 &= \zeta_3, \end{aligned} \quad (3.89)$$

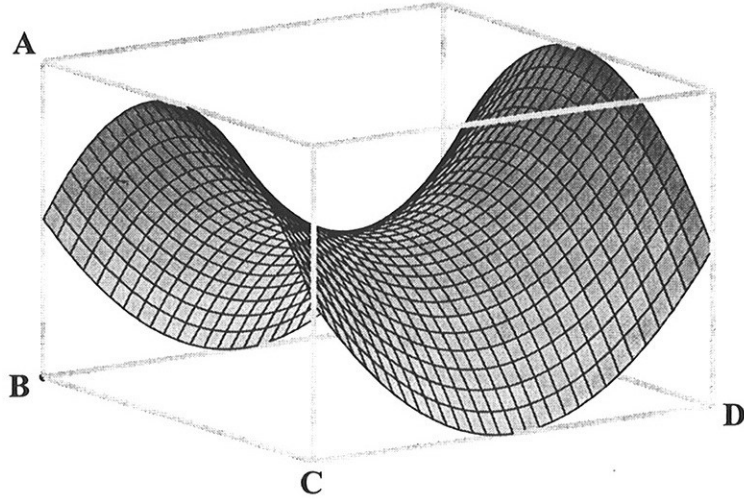


Figura 3.2: A co-órbita por  $(0, 0, 1/2, -1)$

pertencente ao hiperplano tridimensional  $u_3 = \zeta_3$  e passando pelo ponto  $(0, 0, -\frac{\zeta^A \zeta_A}{2B\zeta_3}, \zeta_3)$ . Neste caso as co-órbitas são classificadas por  $\zeta_3$  e  $\zeta^A \zeta_A$ .

A figura 3.2 ilustra a co-órbita (3.89) para  $\zeta^A \zeta_A = 1$ ,  $\zeta_3 = -1$  e  $B = 1$ . Esta representação do hiperplano tridimensional  $u_3 = -1$  coloca o ponto de observação numa posição tal que os pontos assinalados possuem coordenadas  $(u_0, u_1, u_2)$   $A = (-10^2, -10^2, 5 \times 10^3)$ ,  $B = (-10^2, -10^2, -5 \times 10^3)$ ,  $C = (10^2, -10^2, -5 \times 10^3)$  e  $D = (10^2, 10^2, -5 \times 10^3)$ , sendo que o eixo  $u_0$  é paralelo a  $\overrightarrow{BC}$ , o eixo  $u_1$  é paralelo a  $\overrightarrow{CD}$  e o eixo  $u_2$  é paralelo a  $\overrightarrow{BA}$ .

2.  $\zeta_3 = 0$  e  $\zeta_a = 0 \Rightarrow \text{posto}C = 0$

Então a co-órbita é o ponto  $(0, 0, \zeta_2, 0)$ , pertencente ao hiperplano tridimensional  $u_3 = 0$ . Neste caso as co-órbitas são classificadas por  $\zeta_2$ .

3.  $\zeta_3 = 0$  e  $(\zeta_0 \neq 0$  ou  $\zeta_1 \neq 0) \Rightarrow \text{posto}C = 2$

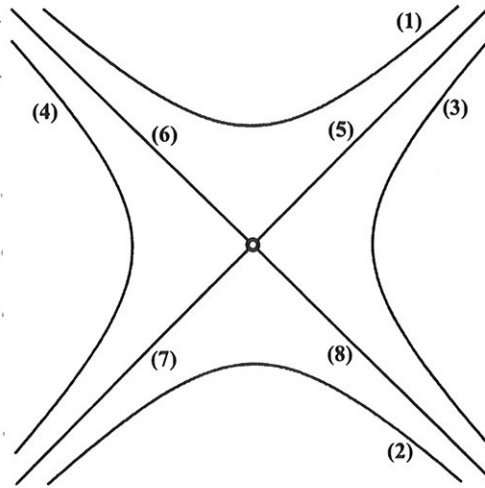


Figura 3.3: As oito famílias de co-órbitas

Então a co-órbita é uma superfície bidimensional difeomorfa a  $\mathbb{R}^2$  imersa no hiperplano tridimensional  $u_3 = 0$  e definida pela equação

$$u^a u_a = \zeta^a \zeta_a, \quad (3.90)$$

a qual pode ser um hiperbolóide ou um semi-plano invariante por translações na direção do eixo  $u_2$ . Neste caso há oito famílias distintas de co-órbitas classificadas por  $\zeta_a$ .

A figura 3.3 representa uma seção transversal paralela ao plano  $u_0 u_1$  das oito famílias de co-órbitas imersas no hiperplano tridimensional  $u_3 = 0$ , onde o eixo  $u_0$  aponta horizontalmente para a direita e o eixo  $u_1$  aponta verticalmente para cima. Observe que o eixo  $u_2$  (saindo do plano do papel) foi excluído da representação da figura 3.3, pois não pertence a nenhuma família. As co-órbitas (3.90) com  $\zeta^a \zeta_a < 0$  pertencem às famílias (1) e (2), aquelas com  $\zeta^a \zeta_a > 0$  pertencem às famílias (3) e (4) e as co-órbitas (5), (6), (7) e (8) possuem  $\zeta^a \zeta_a = 0$ .

No primeiro caso acima, em que  $\zeta_3 \neq 0$ , não é difícil de ver que a solução

do sistema linear homogêneo (3.87) é constituída por todos os vetores  $Y \in \bar{\mathfrak{i}}_2^1$ , da forma

$$Y = Y^2 \left( -\frac{\zeta^a}{B\zeta_3} \bar{T}_a + \bar{T}_2 \right) + Y^3 \bar{T}_3 \quad \forall Y^2, Y^3 \in \mathfrak{R}, \quad (3.91)$$

o que implica que o par de vetores  $\{Z, W\}$ ,

$$\begin{aligned} Z &= -\frac{\zeta^a}{B\zeta_3} \bar{T}_a + \bar{T}_2 \\ W &= \bar{T}_3, \end{aligned} \quad (3.92)$$

é uma base da subálgebra abeliana  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1 \subset \bar{\mathfrak{i}}_2^1$ .

Devido à natureza “exponencial” do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$ , todo elemento do “grupo de estabilidade”  $\bar{\mathcal{P}}_\zeta$  pode ser representado por

$$g(X_Z, X_W) = \exp \left( -\frac{X_Z}{B\zeta_3} \zeta^a \bar{T}_a \right) \exp(X_Z \bar{T}_2) \exp(X_W \bar{T}_3), \quad (3.93)$$

onde  $X = X_Z Z + X_W W$  (3.92) e  $X_Z, X_W \in \mathfrak{R}$ . E observando que  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1 = \mathfrak{t} + \bar{\mathfrak{i}}_2^1$ , onde  $\mathfrak{t}$  indica o subespaço de  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1$  gerado por  $\{\bar{T}_a\}$ , vemos que os “co-conjuntos” à esquerda são fornecidos por

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_\zeta &= \exp(\bar{\mathfrak{i}}_2^1/\bar{\mathfrak{i}}_2^1) \\ \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_\zeta &= \exp \mathfrak{t} \end{aligned} \quad (3.94)$$

e, portanto, os elementos  $g \in \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_\zeta$  são representados por

$$g(\theta^a) = \exp(\theta^a \bar{T}_a). \quad (3.95)$$

Note que, como a subálgebra  $\bar{\mathfrak{i}}_2^1$  não é um ideal, então o subespaço  $\mathfrak{t}$  não é uma subálgebra logo os “co-conjuntos” à esquerda  $\bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_\zeta$  não são um subgrupo de  $\bar{\mathcal{P}}$ .

Então, usando (3.95), (3.94) e (3.85) obtemos a equação paramétrica de  $Orb(\zeta)$  (3.25):

$$\begin{aligned} u_a &= \zeta_a - B\theta^b \varepsilon_{ba} \zeta_3 \\ u_2 &= \zeta_c \varepsilon^c{}_a \theta^a + \zeta_2 - \frac{B}{2} \theta^a \theta_a \zeta_3 \\ u_3 &= \zeta_3. \end{aligned} \quad (3.96)$$



### 3.3.2 O “mapeamento de momentum” aplicado à superfície de vínculos

Como vimos, a variedade  $(\Gamma^+, \Omega^+)$  é pré-simplética, de modo que o “mapeamento de momentum” (Def.3.2.7) (3.43) está bem definido sobre todo  $s \in \Gamma^+$  (3.59)

$$\mu^+(s) = u_A^+(s)\bar{\omega}^A, \quad (3.97)$$

onde os “comomentos”  $u_A^+(s)$  são fornecidos pelas equações (3.72) e  $\{\bar{\omega}^A\}$  é a base de 1-formas da co-álgebra  $\bar{\mathfrak{t}}_2^*$ , dual à base  $\{\bar{T}_A\}$  de  $\bar{\mathfrak{t}}_2^1$  (1.51).

Observamos que para todo  $s_0 \in \Gamma^+$  (3.59) é verdade que

$$m^2 = p_{0a}p_0^a + Bp_{0a}\varepsilon^a{}_b q_0^b - \frac{B^2}{4}q_0^a q_{0a}, \quad (3.98)$$

então, denotando  $\mu^+(s_0) = \zeta$ , das equações (3.98), (3.72) e (1.143) verificamos que os “comomentos” não são todos independentes, mas satisfazem as identidades

$$\begin{aligned} \zeta^A \zeta_A &= m^2 \\ \zeta_3 &= -1. \end{aligned} \quad (3.99)$$

E como a variedade  $(\Gamma^+, \Omega^+)$  também é simplesmente conexa, a ação do grupo dinâmico  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\Gamma^+$  é Poisson (Nota3.3.2), de modo que a (Prop.3.2.1) garante que

$$Ad^*g\zeta = \mu^+ \circ l_g(s_0) \quad \forall g \in \bar{\mathcal{P}} \quad \text{e} \quad \forall s_0 \in \Gamma^+, \quad (3.100)$$

onde  $\mu^+(s_0) = \zeta$ , o que também pode ser verificado explicitamente usando as equações (3.68) e (3.72).

Não é difícil de ver que o “mapeamento de momentum”

$$\mu^+ : \Gamma^+ \rightarrow Orb(\zeta), \quad (3.101)$$

onde  $\mu^+(s_0) = \zeta$ , é sobrejetor. De fato, todo  $o \in Orb(\zeta)$  é da forma  $Ad^*g\zeta$ , então a equação (3.100) implica que  $o = \mu^+(l_g(s_0))$  para algum  $g \in \bar{\mathcal{P}}$ , tal que  $Orb(\zeta) \subset \mu^+(\Gamma^+)$ . Usando o fato de que a variedade  $\Gamma^+$  é homogênea sob a ação de  $\bar{\mathcal{P}}$  (Prop.3.3.1), temos que todo  $s \in \Gamma^+$  é da forma  $s = l_g(s_0)$ , então de (3.100) vemos que  $\mu^+(s) = Ad^*g\zeta$  para algum  $g \in \bar{\mathcal{P}}$ , portanto  $\mu^+(\Gamma^+) \subset Orb(\zeta)$ . Logo  $\mu^+(\Gamma^+) = Orb(\zeta)$ , a co-órbita por  $(0, 0, m^2/(2B), -1)$  em  $\bar{\mathfrak{t}}_2^*$ , de acordo com (3.99) e (3.89).

Mas o mapeamento (3.101) evidentemente não é injetor, uma vez que  $\Gamma^+$  possui dimensão 4, enquanto que  $Orb(\zeta)$  é bidimensional, o que é consistente com o fato de existirem duas identidades relacionando funcionalmente os “comomentos” (3.99). Isto significa que o diferencial de  $\mu^+$  (3.56),

$$\mu_*^+(Y^{\Gamma^+}(s_0)) = V_Y(\zeta) \quad \forall Y \in \bar{\mathfrak{t}}_2^1 \quad \text{e} \quad \forall s_0 \in \Gamma^+, \quad (3.102)$$

aniquila um subespaço bidimensional de  $T_{s_0}\Gamma^+$  isomorfo a  $\bar{\mathfrak{t}}_{2\zeta}^1$  (3.92) (3.28), o que verificaremos na seguinte proposição:

**Proposição 3.3.2** *O posto do “mapeamento de momentum”*

$$\mu^+ : \Gamma^+ \rightarrow Orb(\zeta) \quad (3.103)$$

é constante e igual a 2 sobre todo  $s \in \Gamma^+$  e os geradores das transformações de gauge infinitesimais  $\{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}\}$  constituem uma álgebra de Lie isomorfa à álgebra do grupo de estabilidade  $\bar{\mathfrak{t}}_{2\zeta}^1$ , formando também uma base do “espaço nulo”  $N \subset T_{s_0}\Gamma^+$  do diferencial de  $\mu^+$

$$\mu_*^+ : T_{s_0}\Gamma^+ \rightarrow T_\zeta Orb(\zeta), \quad (3.104)$$

sobre  $s_0 \in \Gamma^+$ , tal que  $\mu_*^+(N) = 0$  e  $\mu^+(s_0) = \zeta$ .

*Prova:* Considerando a co-órbita  $Orb(\zeta)$  imersa na co-álgebra  $\bar{\mathfrak{t}}_2^*$  com coordenadas  $(u_A^+)$  e tomando as “coordenadas de grupo”  $(\theta^\alpha(s), \alpha(s), \beta(s))$  sobre

$\Gamma^+$  (Def.3.3.1), podemos calcular a matriz jacobiana do mapeamento (3.103) sobre todo  $s = l_g(s_0)$ ,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^+}{\partial \theta^b}(s) & \frac{\partial u_1^+}{\partial \alpha}(s) & \frac{\partial u_1^+}{\partial \beta}(s) \\ \frac{\partial u_2^+}{\partial \theta^b}(s) & \frac{\partial u_2^+}{\partial \alpha}(s) & \frac{\partial u_2^+}{\partial \beta}(s) \\ \frac{\partial u_3^+}{\partial \theta^b}(s) & \frac{\partial u_3^+}{\partial \alpha}(s) & \frac{\partial u_3^+}{\partial \beta}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.105)$$

usando (3.72) e (3.68),

$$\begin{aligned} u_1^+(s) &= p_{0b}(\Lambda^{-1})^b{}_a + B\theta^b \varepsilon_{ba} - \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \Lambda^b{}_c q_0^c \\ u_2^+(s) &= p_{0b}(\Lambda^{-1})^b{}_a \varepsilon^a{}_c \theta^c + \frac{B}{2} \theta^a \theta_a + p_{0a} \varepsilon^a{}_c q_0^c + \frac{B}{2} \theta_a \Lambda^a{}_c q_0^c \\ u_3^+(s) &= -1, \end{aligned} \quad (3.106)$$

obtendo

$$\begin{pmatrix} -B\varepsilon_{ab} & -p_{0b} \varepsilon^b{}_c (\Lambda^{-1})^c{}_a - \frac{B}{2} \Lambda_{ac} q_0^c & 0 \\ p_{0c} (\Lambda^{-1})^c{}_d \varepsilon^d{}_b + B\theta_b + \frac{B}{2} \Lambda_b{}^c q_{0c} & -p_{0c} (\Lambda^{-1})^c{}_d \theta^d + \frac{B}{2} \theta_a \varepsilon^a{}_c \Lambda^c{}_b q_0^b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.107)$$

Substituindo a terceira linha da matriz acima pela combinação linear formada pela mesma acrescida das duas primeiras contraídas com  $\theta^e \varepsilon_e{}^a$ , vemos que a matriz jacobiana (3.107) e, portanto, o mapeamento (3.103) possui posto constante e igual a 2 sobre toda a variedade  $\Gamma^+$ .

A equação  $\mu_*^+(Y) = 0$  sob forma matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1^+}{\partial \theta^b}(s_0) & \frac{\partial u_1^+}{\partial \alpha}(s_0) & \frac{\partial u_1^+}{\partial \beta}(s_0) \\ \frac{\partial u_2^+}{\partial \theta^b}(s_0) & \frac{\partial u_2^+}{\partial \alpha}(s_0) & \frac{\partial u_2^+}{\partial \beta}(s_0) \\ \frac{\partial u_3^+}{\partial \theta^b}(s_0) & \frac{\partial u_3^+}{\partial \alpha}(s_0) & \frac{\partial u_3^+}{\partial \beta}(s_0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^b \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.108)$$

com  $Y = Y^b \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s_0) + Y^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}(s_0) + Y^3 \frac{\partial}{\partial \beta}(s_0)$ , pode ser reescrita usando (3.107),

$$\begin{pmatrix} -B\varepsilon_{ab} & -\zeta^c \varepsilon_{ca} & 0 \\ \zeta^c \varepsilon_{cb} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Y^b \\ Y^2 \\ Y^3 \end{pmatrix} = 0, \quad (3.109)$$

onde  $\zeta^a = p_0^a - \frac{B}{2}\varepsilon^a{}_b q_0^b$ .

Considere a álgebra de Lie abeliana, definida em termos da base  $\{\bar{T}_A^{L\Gamma^+}\}$  (3.79), gerada pelos campos

$$\begin{aligned} Z^{\Gamma^+}(s) &= -\frac{\zeta^a}{B\zeta_3}\bar{T}_a^{L\Gamma^+}(s) + \bar{T}_2^{L\Gamma^+}(s) \\ W^{\Gamma^+}(s) &= \bar{T}_3^{L\Gamma^+}(s) \end{aligned} \quad (3.110)$$

e isomorfa a  $\bar{\mathfrak{L}}_{2\zeta}^1$  (3.92) por construção. Observando, então, que

$$\begin{aligned} X_{\phi_1}^{\Gamma^+}(s) &= W^{\Gamma^+}(s) \\ X_{\phi_2}^{\Gamma^+}(s) &= 2BZ^{\Gamma^+}(s) - 2BW^{\Gamma^+}(s), \end{aligned} \quad (3.111)$$

vemos que os geradores das transformações canônicas (3.83) formam uma base da álgebra gerada por (3.110) e, portanto, constituem uma álgebra de Lie isomorfa a  $\bar{\mathfrak{L}}_{2\zeta}^1$ .

Por fim, observando que sobre  $s_0 \in \Gamma^+$

$$\begin{aligned} \bar{T}_a^{L\Gamma^+} &= \bar{T}_a^{\Gamma^+} = \frac{\partial}{\partial\theta^a}(s_0) \\ \bar{T}_2^{L\Gamma^+} &= \bar{T}_2^{\Gamma^+} = \frac{\partial}{\partial\alpha}(s_0) \\ \bar{T}_3^{L\Gamma^+} &= \bar{T}_3^{\Gamma^+} = \frac{\partial}{\partial\beta}(s_0), \end{aligned} \quad (3.112)$$

vemos que os geradores das transformações canônicas (3.81) sobre  $s_0 \in \Gamma^+$  são

$$\begin{aligned} X_{\phi_1}^{\Gamma^+}(s_0) &= \frac{\partial}{\partial\beta}(s_0) \\ X_{\phi_2}^{\Gamma^+}(s_0) &= 2\zeta^a \frac{\partial}{\partial\theta^a}(s_0) + 2B \frac{\partial}{\partial\alpha}(s_0) + 2\zeta^3 \frac{\partial}{\partial\beta}(s_0). \end{aligned} \quad (3.113)$$

Então, substituindo (3.113) em (3.109), vemos que

$$\mu_*^+(X_{\phi_m}^{\Gamma^+}(s_0)) = 0 \quad m \in \{1, 2\}, \quad (3.114)$$

portanto, como  $\dim N = 2$  e os vetores  $X_{\phi_m}^{\Gamma^+}(s_0)$  são linearmente independentes, vemos que estes formam uma base do “espaço nulo”  $N \subset T_{s_0}\Gamma^+$  de  $\mu_*^+(s_0)$ , sobre todo  $s_0 \in \Gamma^+$ . QED

**Nota 3.3.3** A proposição (Prop.3.3.2) e as equações (3.114), (3.102) e (3.27) explicam porque o “mapeamento de momentum”  $\mu^+$  (3.101) não é um difeomorfismo, uma vez que os geradores de transformações de gauge são levados nos geradores do grupo de estabilidade de  $\zeta$  na co-álgebra.

A partir das expressões (3.106), (3.78) e da fórmula (3.8) não é difícil de verificar que

$$\begin{aligned} \{u_a^+, u_2^+\} &= \varepsilon_a^b u_b^+ \quad , \quad \{u_a^+, u_b^+\} = B\varepsilon_{ab}u_3^+, \\ \{u_a^+, u_3^+\} &= \{u_2^+, u_3^+\} = 0 \end{aligned} \quad (3.115)$$

e, usando (3.106), (3.78) e (3.84),

$$i_{\bar{T}\Gamma^+} \Omega^+ + du_A^+ = 0, \quad (3.116)$$

como esperado.

### 3.3.3 O espaço de fase reduzido

Vimos anteriormente (3.111) que os geradores das transformações de gauge constituem uma realização da álgebra de Lie do “grupo de estabilidade” de  $\zeta$ ,  $\bar{i}_{2\zeta}^1 \subset \bar{i}_2^1$ , fornecida por

$$\begin{aligned} X_{\phi_1}^{\Gamma^+}(s') &= \varphi_*(W(g')) \\ X_{\phi_2}^{\Gamma^+}(s') &= \varphi_*(2BZ(g') - 2BW(g')), \end{aligned} \quad (3.117)$$

(3.76) onde  $s' = l_{g'}(s_0)$  é um ponto qualquer de  $\Gamma^+$  com “coordenadas de grupo”  $g'(s')$  e  $W(g')$  e  $Z(g')$  são os campos vetoriais invariantes à esquerda associados a  $W, Z \in \bar{i}_2^1$  sobre  $g' \in \bar{P}$ . Conseqüentemente, pelo teorema

de Frobenius [37, p.223], existe uma única variedade integral bidimensional passando por cada ponto  $s' \in \Gamma^+$  gerada por  $\{X_{\phi_m}^{\Gamma^+}\}$ , denominada “órbita de gauge” por  $s'$ ,  $\mathcal{O}_{s'}$ , e fornecida por

$$\mathcal{O}_{s'} = \{r_g(s'), \quad \forall g \in \bar{\mathcal{P}}_\zeta \quad \text{e} \quad s' \in \Gamma^+\}. \quad (3.118)$$

De fato, todo gerador de transformações de gauge  $X^{\Gamma^+}(s') = X_1 X_{\phi_1}^{\Gamma^+}(s') + X_2 X_{\phi_2}^{\Gamma^+}(s')$  é o representante de um gerador do “grupo de estabilidade” de  $\zeta$ , segundo  $X^{\Gamma^+}(s') = \varphi_*(X_W W(g') + X_Z Z(g'))$ , onde  $X_W = X_1 - 2BX_2$  e  $X_Z = 2BX_2$  (3.117). Então  $\mathcal{O}_{s'}$  (3.118) pode ser parametrizada por  $X_1, X_2 \in \mathfrak{R}$  com  $g \in \bar{\mathcal{P}}$  dado pela equação (3.93) e  $\zeta = \mu^+(s_0)$  satisfazendo (3.99), lembrando que  $r_g(s') = l_{g'g}(s_0)$  e usando a ação à esquerda (3.68) e a lei de composição do grupo (1.48).

As “órbitas de gauge”  $\mathcal{O}_{s'}$  definem uma relação de equivalência sobre  $\Gamma^+$  tal que dois pontos  $s_1 = l_{g_1}(s_0) = \varphi(g_1)$  e  $s_2 = l_{g_2}(s_0) = \varphi(g_2)$ ,  $g_1, g_2 \in \bar{\mathcal{P}}$ , são equivalentes  $s_1 \sim s_2$  se e somente se  $s_1 = r_h(s_2)$  para algum  $h \in \bar{\mathcal{P}}_\zeta$ , de modo que definimos o “espaço de fase reduzido” pelo quociente

$$\Gamma_R^+ = \Gamma^+ / \bar{\mathcal{P}}_\zeta. \quad (3.119)$$

Lembrando que  $\Gamma^+$  é difeomorfo a  $\bar{\mathcal{P}}$ ,  $\Gamma^+ = \varphi(\bar{\mathcal{P}})$ , e que a ação de  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre  $\Gamma^+$  é simplesmente transitiva (Prop.3.3.1) e (Nota3.3.1), vemos que  $s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow g_1 = R_h(g_2)$  pois

$$\begin{aligned} \varphi(g_1) &= r_h \circ \varphi(g_2) \\ l_{g_1}(s_0) &= r_h \circ l_{g_2}(s_0) = l_{g_2 h}(s_0) \\ l_{g_1}(s_0) &= l_{g_2 h}(s_0) \Leftrightarrow g_1 = g_2 h \\ \varphi(g_1) &\sim \varphi(g_2) \Leftrightarrow g_1 = R_h(g_2). \end{aligned} \quad (3.120)$$

Portanto o difeomorfismo  $\varphi$  preserva as relações de equivalência,

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\mathcal{P}}) / \bar{\mathcal{P}}_\zeta &= \varphi(\bar{\mathcal{P}} / \bar{\mathcal{P}}_\zeta) \\ \Gamma_R^+ &= \varphi(\bar{\mathcal{P}} / \bar{\mathcal{P}}_\zeta) \end{aligned} \quad (3.121)$$

de modo que temos

$$\Gamma_R^+ = \{l_g(s_0), \quad \forall g \in \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_\zeta \quad \text{e} \quad s_0 \in \Gamma^+\}. \quad (3.122)$$

Usando (3.122), (3.68) e (3.95) podemos obter a equação paramétrica de  $\Gamma_R^+ \subset \bar{S}$ :

$$\begin{aligned} q^a &= \theta^a + q_0^a \\ \chi &= \chi_0 + \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} q_0^b \\ p_b &= p_{0b} + \frac{B}{2} \theta^a \varepsilon_{ab} \\ \pi &= -1, \end{aligned} \quad (3.123)$$

onde, vale lembrar,  $s_0 = (q_0^a, \chi_0, p_{0b}, -1)$  é um ponto arbitrário mas fixo de  $\Gamma^+$  satisfazendo (3.59), ou

$$\begin{aligned} (p_{0a} + \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q_0^b)(p_0^a + \frac{B}{2} \varepsilon^a{}_b q_0^b) - m^2 &= 0 \\ p_{00} - \frac{B}{2} q_0^1 &> 0. \end{aligned} \quad (3.124)$$

Da equação (3.122), vemos que as “coordenadas de grupo” sobre todo  $s \in \Gamma_R^+$  são definidas por  $g(s) = g(\theta^a(s))$ , onde  $g \in \bar{\mathcal{P}}/\bar{\mathcal{P}}_\zeta$ . De (3.123) notamos que  $q^a$  e  $\theta^a$  diferem apenas por uma constante, de modo que podemos adotar coordenadas  $q^a$  sobre o “espaço de fase reduzido”  $\Gamma_R^+$ . Observando que a variedade  $\Gamma_R^+ \sim \mathbb{R}^2$  é simplesmente conexa (3.121), temos que a ação de  $\bar{\mathcal{P}}$  sobre ela é Poisson <sup>5</sup> e os campos vetoriais globalmente hamiltonianos são fornecidos em relação à base  $\{\bar{T}_A^{\Gamma_R^+} = \bar{T}_A^{\Gamma^+}|_{\Gamma_R^+}\}$ , a qual se expressa nas coordenadas  $\theta^a(s)$ (ou  $q^a$ ) por (3.78)

$$\begin{aligned} \bar{T}_1^{\Gamma_R^+}(s) &= \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s) = \frac{\partial}{\partial q^a} \\ \bar{T}_2^{\Gamma_R^+}(s) &= \varepsilon^a{}_b \theta^b \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s) = \varepsilon^a{}_b q^b \frac{\partial}{\partial q^a} \\ \bar{T}_3^{\Gamma_R^+}(s) &= 0. \end{aligned} \quad (3.125)$$

<sup>5</sup>Veja discussão na seção 3.1 na página 103

Nestas coordenadas, a 2-forma  $\Omega^{+R} = \Omega^+|_{\Gamma_R^+}$  se expressa por

$$\Omega_s^{+R} = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} d\theta^a(s) \wedge d\theta^b(s) = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} dq^a \wedge dq^b, \quad (3.126)$$

sendo evidentemente não-degenerada. E uma vez que a mesma também é exata

$$\begin{aligned} \Omega^{+R} &= d\Lambda^{+R} \\ \Lambda^{+R} &= \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} \theta^a(s) d\theta^b(s) = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} q^a dq^b, \end{aligned} \quad (3.127)$$

resulta que  $\Omega^{+R}$  é fechada.

Observe que a 1-forma canônica ou “forma de Liouville”  $\Lambda^{+R}$  é uma forma de Wess-Zumino (2.32) e, portanto, não é invariante à esquerda<sup>6</sup>. De fato não é difícil de calcular diretamente, usando  $L_X = i_X d + di_X$  e (3.125), que

$$\begin{aligned} L_{\bar{T}_a^{\Gamma^+}} \Lambda^{+R} &= \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} d\theta^b = \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} dq^b \\ L_{\bar{T}_2^{\Gamma^+}} \Lambda^{+R} &= 0 \\ L_{\bar{T}_3^{\Gamma^+}} \Lambda^{+R} &= 0. \end{aligned} \quad (3.128)$$

Embora a “forma de Liouville” não seja invariante por  $\bar{\mathcal{P}}$ , devido a (3.128), a ação deste grupo é canônica sobre  $\Gamma_R^+$ , pois pode-se calcular diretamente, usando  $L_X = i_X d + di_X$  e (3.125), que

$$L_{\bar{T}_A^{\Gamma^+}} \Omega^{+R} = 0. \quad (3.129)$$

Uma vez que  $\bar{T}_A^{\Gamma^+} \notin \mathfrak{X}(\Gamma_R^+)$  (3.78) resulta que  $u_A^{+R} \neq u_A^+|_{\Gamma_R^+}$  (3.106). E por causa de (3.128) não podemos calcular os “comomentos”  $u_A^{+R}$  usando (3.47). Mas não é difícil de verificar, usando (3.126) e (3.125), que os “comomentos”

$$\begin{aligned} u_a^{+R}(s) &= B\theta^b \varepsilon_{ba} \\ u_2^{+R}(s) &= \frac{m^2}{2B} + \frac{B}{2} \theta_a \theta^a \\ u_3^{+R}(s) &= -1 \end{aligned} \quad (3.130)$$

<sup>6</sup>Veja discussão na seção 2.1 na página 73



são uma solução de

$$i_{\bar{T}_A^+ \Gamma_R^+} \Omega^{+R} + du_A^{+R} = 0 \quad (3.131)$$

satisfazendo

$$\begin{aligned} \{u_a^{+R}, u_2^{+R}\} &= \varepsilon_a^b u_b^{+R} \quad , \quad \{u_a^{+R}, u_b^{+R}\} = B \varepsilon_{ab} u_3^{+R}, \\ \{u_a^{+R}, u_3^{+R}\} &= \{u_2^{+R}, u_3^{+R}\} = 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Note que  $u_2^{+R}$  está definido a menos de um termo constante e indeterminado, de modo que os “comomentos”  $u_A^{+R}$  não estão univocamente determinados, consistentemente<sup>7</sup> com o fato de  $H_0^1(\bar{I}_2^1, \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}$  (1.179).

Das equações (3.130) e (3.123) deduzimos que

$$q^a = -\frac{\varepsilon^{ab}}{B} u_b^{+R} + q_0^a \quad (3.133)$$

e, usando (3.132),

$$\{q^a, q^b\} = \frac{\varepsilon^{ab}}{B}. \quad (3.134)$$

**Nota 3.3.4** *É muito interessante que o espaço-tempo em 1 + 1 dimensões possua uma estrutura simplética e que tempo e espaço sejam essencialmente variáveis canonicamente conjugadas, pois, definindo  $q := q^1$  e  $p := -Bq^0$ , de (3.134) vemos que  $\{q, p\} = 1$  (3.9). Isto só pode ocorrer em espaços-tempo de dimensão par e é uma característica de 1 + 1 dimensões, pois somente neste caso o grupo de Poincaré  $\mathcal{P} = I_2^1$  pode ser estendido centralmente de modo não-trivial<sup>8</sup>.*

Ocorre que  $\Gamma_R^+$  também é uma variedade homogênea sob a ação de  $\bar{\mathcal{P}}$ , pois está contida em  $\Gamma^+$ , que é homogênea (Prop.3.3.1). Logo,  $(\Gamma_R^+, \Omega^{+R})$  é um “G-espaço hamiltoniano” (Def.3.1.4) e, portanto, um “sistema elementar clássico”. Do teorema (Teo.3.2.2) sabemos que  $(\Gamma_R^+, \Omega^{+R})$  deve ser simplectomorfo a uma certa co-órbita em  $\bar{I}_2^{1*}$ , o que demonstraremos a seguir:

<sup>7</sup>Veja a discussão na seção 3.1 na página 103.

<sup>8</sup>Veja discussão na seção 1.1 na página 13.

**Proposição 3.3.3** O “mapeamento de momentum” (Def.3.2.7)  $\mu_R^+ : \Gamma_R^+ \rightarrow Orb(\eta)$ , definido por  $\mu_R^+(s) = u_A^{+R}(s)\bar{\omega}^A$  (3.130), é um “simplectomorfismo” (Def.3.1.3) entre o “sistema elementar clássico” (Def.3.2.1)  $(\Gamma_R^+, \Omega^{+R})$  e a co-órbita por  $\eta = (0, 0, m^2/(2B), -1)$  (3.89),  $(Orb(\eta), b)$  (Teo.3.2.1), onde  $\{\bar{\omega}^A\}$  é a base de 1-formas da co-álgebra  $\bar{\mathfrak{v}}_2^*$ , dual à base  $\{\bar{T}_A\}$  de  $\bar{\mathfrak{v}}_2$  (1.51).

*Prova* : Das equações (3.130), (3.96) e (3.89) é evidente que o “mapeamento de momentum”  $\mu_R^+$  é um difeomorfismo global entre  $\Gamma_R^+$  e  $Orb(\eta)$ , onde  $\eta = \mu_R^+(s_0)$ ,  $\eta^A \eta_A = m^2$  e  $\eta_3 = -1$ .

Das equações (3.130) e (1.80) podemos verificar que

$$u_A^{+R}(s) = u_B^{+R}(s_0)(Adg^{-1})^B_A$$

(3.20), ou  $\mu_R^+ \circ l_g = Ad^*g\mu_R^+$  (Prop.3.2.1). Conseqüentemente temos<sup>9</sup>

$$\mu_{R^*}^+(Y^{\Gamma_R^+}(s)) = V_Y(\mu(s)) \quad \forall Y \in \bar{\mathfrak{v}}_2^1. \quad (3.135)$$

Então, calculando as componentes do “pull-back” da “forma simplética”  $b$ , definida sobre  $Orb(\eta)$  (3.33), pelo “mapeamento de momentum” em relação à base coordenada de  $\Gamma_R^+$  (3.125),

$$\frac{\partial}{\partial \theta^a}(s) = \bar{T}_a^{\Gamma_R^+}(s), \quad (3.136)$$

obtemos, usando (3.136) e (3.135),

$$\begin{aligned} \mu_R^{+*}b \left( \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s), \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s) \right) &= b_{\mu_R^+(s)} \left( \mu_{R^*}^+(\bar{T}_a^{\Gamma_R^+}), \mu_{R^*}^+(\bar{T}_b^{\Gamma_R^+}) \right) \\ \mu_R^{+*}b \left( \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s), \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s) \right) &= b_{\mu_R^+(s)} (V_{\bar{T}_a}, V_{\bar{T}_b}) \\ \mu_R^{+*}b \left( \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s), \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s) \right) &= -\langle \mu_R^+(s), [\bar{T}_a, \bar{T}_b] \rangle \\ \mu_R^{+*}b \left( \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s), \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s) \right) &= -u_A^{+R}(s)f_{ab}^A \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Compare com a equação (3.56).

$$\begin{aligned}
\mu_R^{+*b} \left( \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s), \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s) \right) &= -u_3^{+R}(s) B \varepsilon_{ab} \\
\mu_R^{+*b} \left( \frac{\partial}{\partial \theta^a}(s), \frac{\partial}{\partial \theta^b}(s) \right) &= B \varepsilon_{ab}.
\end{aligned} \tag{3.137}$$

Logo

$$\begin{aligned}
\mu_R^{+*b} &= \frac{B}{2} \varepsilon_{ab} d\theta^a \wedge d\theta^b \\
\mu_R^{+*b} &= \Omega^{+R}. \quad \text{QED}
\end{aligned} \tag{3.138}$$



## Conclusão

Pelo fato do segundo grupo de cohomologia da álgebra de Poincaré em 1+1 dimensões ser unidimensional, o teorema de Lévy-Leblond garante que a lagrangeana livre de anomalias mais geral que se pode escrever para uma partícula não-interagente e na ausência de gravidade é dada por (2.64). Esta lagrangeana é invariante pelo grupo de Poincaré estendido, que é o grupo dinâmico relevante para o problema, e mostramos que o espaço de fase reduzido a ela associado é um G-espaço hamiltoniano simplectomorfo a uma certa co-órbita, independentemente de qualquer fixação de gauge. O simplectomorfismo dado pelo mapeamento de momentum nos permite formular o modelo em termos grupo-teóricos, adequados para o tratamento do problema do acoplamento invariante de gauge da partícula ao campo gravitacional, assunto que está sendo presentemente analisado.



# Bibliografia

- [1] Aldrovandi, R. e Pereira, J.G. (1995): *An Introduction to Geometrical Physics*, World Scientific
- [2] Arnold, V.I. (1989): *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag
- [3] Azcárraga, J.A. e Izquierdo, J.M. (1995): *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in Physics*, Cambridge University Press
- [4] Balachandran, A.P.; Borchardt, S. e Stern, A. (1978): *Lagrangian and Hamiltonian descriptions of Yang-Mills particles*, Phys.Rev.D **17**, 3247-3256
- [5] Beltrametti, E.G. e Blasi, A. (1965): *On the number of Casimir operators associated with any Lie Group*, Phys. Lett. **20** (No.1), 62-64
- [6] Bernat, M.P. (1965): *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie résolubles*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **82** (3<sup>a</sup> série), 37-99
- [7] Bernat, P.; Conze, N.; Duflo, M.; Lévy-Nahas, M.; Rais, M.; Renouard, P. e Vergne, M. (1972): *Représentations des groupes de Lie résolubles*, Dunod
- [8] Callan, C.G.; Giddings, S.B.; Harvey, J.A. e Strominger, A. (1992): Phys. Rev. D **45**, R1005

- [9] Cangemi, D. (1993): *2-D Gravity as gauge theories with extended groups*, gr-qc/9310037
- [10] Cangemi, D. e Jackiw, R. (1993): *Poincaré gauge theory for gravitational forces in (1+1) dimensions*, Ann. Phys. **225**, 229-263
- [11] Chevalley, C. e Eilenberg, S. (1948): *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Am. Math. Soc. **63**, 85-124
- [12] DeWitt, B.S. (1965): *Dynamical Theory of Groups and Fields*, Gordon and Breach Science Publishers
- [13] Dixmier, J. (1957): *L'application exponentielle dans les groupes de Lie résolubles*, Bull. Soc. Math. France **85**, 113-121
- [14] Duflo, M.; Pedersen, N.V. e Vergne, M. (1990): *The orbit method in representation theory*, Progress in Mathematics **82**, Birkhäuser
- [15] Gökeler, M. e Schücker, T. (1987): *Differential geometry, gauge theories, and gravity*, Cambridge University Press
- [16] Grignani, G. e Nardelli, G. (1992): Phys. Rev. D **45**, 2719
- [17] Hawking, S.W. (1975): Comm. Math. Phys. **43**, 199
- [18] Hawking, S.W. (1976): Phys. Rev. **D14**, 2460
- [19] Henneaux, M. e Teitelboim, C. (1992): *Quantization of gauge systems*, Princeton University Press
- [20] Kazama, Y. (1994): *On Quantum Black Holes*, hep-th/9412224
- [21] Kirillov, A.A. (1976): *Elements of the theory of representations*, Springer-Verlag



- [22] Knapp, A.W. (1988): *Lie groups, Lie algebras and cohomology*, Princeton University Press
- [23] Kostant, B. (1970): *Quantization and unitary representations*, Lect. Notes Math. **170**, Springer-Verlag
- [24] Landau, L. e Lifshitz, E. (1980): *Teoria do Campo*, Editora Mir
- [25] Leite, M.M. e Rivelles, V.O. (1997): *Black holes in the gauge theoretic formulation of dilatonic gravity*, Phys. Lett. B **392**, 305-310
- [26] Lupi, J.P.; Restuccia, A. e Stephany, J. (1996): Phys. Rev. D **54**, 3861
- [27] Pukanszky, L. (1967): *On the theory of exponential groups*, Trans. Am. Math. Soc. **126**, 487-507
- [28] Russo, J.G.; Susskind, L. e Thorlacius, L. (1992): Phys.Rev. **D46**, 3444
- [29] Russo, J.G.; Susskind, L. e Thorlacius, L. (1993): Phys.Rev. **D47**, 533
- [30] San Martin, L.A.B. (1999): *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp
- [31] Simms, D.J. e Woodhouse, N. (1976): *Lectures on Geometric Quantization*, Lect. Notes Phys. **53**, Springer-Verlag
- [32] Souriau, J.M. (1970): *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod
- [33] Streater, R.F. (1967): *The representations of the oscillator group*, Commun. math. Phys. **4**, 217-236
- [34] Strominger, A. (1995): *Les Houches Lectures on Black Holes*, hep-th/9501071
- [35] Sundermeyer, K. (1982): *Constrained Dynamics*, Lect. Notes Phys. **169**, Springer-Verlag

- [36] Varadarajan, V.S. (1974): *Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations*, Prentice-Hall
- [37] Von Westenholz, C. (1978): *Differential Forms in Mathematical Physics*, North-Holland
- [38] Wong, S.K. (1970): *Field and Particle Equations for the Classical Yang-Mills Field and Particles with Isotopic Spin*, *Il Nuovo Cimento* **LXV** No.4, 689-694
- [39] Woodhouse, N. (1980): *Geometric Quantization*, Clarendon Press
- [40] Wybourne, B.G. (1974): *Classical Groups for Physicists*, John Wiley & Sons