Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Categorias Monoidais e Álgebras de Hopf

James Miller Simeão Toledo da Silva

Orientador: Prof. Dr. _____

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho - Orientador (IFUSP)
Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano (IME-USP)
Prof. Dr. Valdecir Marvulle (UFABC)

São Paulo
2020

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Silva, James Miller Simeão Toledo da

Categorias monoidais e álgebras de Hopf. São Paulo, 2020.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Ordem topológica; 2. Categorias monoidais; 3. Álgebras de Hopf; 4. Drinfeld quantum double; 5. Fusion categories.

USP/IF/SBI-029/2020

University of São Paulo
Physics Institute

Monoidal Categories and Hopf Algebras

James Miller Simeão Toledo da Silva

Advisor: Dr. _____

Masters thesis submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo, as parcial fullfilment of the requirements for the degree of Master of Sciences.

Examining Committee:
Prof. Dr. Paulo Teotônio Sobrinho - Advisor (IFUSP)
Prof. Dr. Hugo Luiz Mariano (IME-USP)
Prof. Dr. Valdecir Marvulle (UFABC)

São Paulo
2020

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, pois sem ela teria sido muito difícil me graduar em Física e realizar o mestrado.

Agradeço ao professor Paulo Teotônio e aos colegas do grupo de pesquisa, Juan Pablo, Marzia Petrucci, Lucas e Rodrigo, com os quais pude ter várias discussões e também pelos seminários que demos uns aos outros.

Agradeço aos meus colegas de sala no Departamento de Física Matemática, com os quais pude discutir sobre relatividade geral e conceitos relacionado à teoria de cordas. Também aos colegas Gustavo, Jorge e Alisson, que iniciaram o mestrado no mesmo semestre que eu e têm me ajudado nesse período.

Agradeço aos meus colegas Alberto e João Victor, que participaram dos meus primeiros seminários sobre categorias, o que foi muito importante no início deste mestrado, e têm me acompanhado no IME por alguns anos. Também agradeço ao Daniel Almeida por poder discutir sobre n-categorias e ao Sebastian que foi um bom parceiro em Topologia Álgebrica, além da boa companhia que ambos têm proporcionado. Também aos colegas Daniel Kawai e Douglas, em especial o Kawai por ter me esclarecido a definição de produto tensorial de bimódulos.

Também agradeço a cada professor que tive durante este mestrado, em especial à Lucília Borsari, com quem aprendi grande parte do que sei de Topologia Algébrica, ao professor Ivan Shestakov que me ensinou Teoria de Categorias e ao professor Hugo Mariano por ser um professor bastante receptivo.

Agradeço a cada membro da banca por terem aceitado participar da defesa de mestrado e pelos comentários críticos feitos.

Também agradeço à Secretaria do Departamento de Física Matemática e à Seção de Pós-Graduação do IF pelo apoio dado.

Especialmente agradeço ao professor Alexis Virelizier por ter respondido a um email que o enviei tratando de algumas de minhas dúvidas.

Por fim, agradeço ao CNPq pela bolsa de mestrado concedida e que me permitiu realizar este trabalho. Vale lembrar a importância desta agência para manter a pós-graduação no Brasil.

"Tudo quanto te vier à mão para fazer,
faze-o conforme as tuas forças, porque
na sepultura, para onde tu vais, não há
obra nem projeto, nem conhecimento,
nem sabedoria alguma."
(Eclesiastes 9:10)

Resumo

As fases da matéria mais conhecidas são as sólida, líquida e gasosas. Estas e outras fases são descritas pela teoria de quebra de simetria de Landau. Segundo esta teoria basta conhecer as propriedades da matéria localmente para determinar sua fase. Para o Efeito Hall Quântico Fracionário a teoria de Landau não consegue descrever suas diferentes fases, dizemos que tal sistema possui ordem topológica. Tais fases são caracterizadas, dentre outras coisas por haver degenerescência do estado fundamental e esta depender da topologia da variedade em que o sistema físico se encontra. Há diversos modelos teóricos de sistemas com ordem topológica, um deles é o *toric code* e suas generalizações, o Quantum Double Model e o modelo de *string-net*. O modelo de *string-net* forma uma classe grande de modelos com ordem topológica, ele é construído a partir de uma categoria fusion esférica. Nesta dissertação estudamos a teoria de categorias monoidais, especializando em categorias pivotais, esféricas, braided e fusion, e é estudado com mais detalhe o exemplo da categoria de representações do Quantum Double de um grupo finito, que é um exemplo de categoria fusion esférica braided. Além disso, fazemos uso de linguagens gráficas para categorias monoidais e álgebras de Hopf de forma a simplificar a demonstração de diversos resultados.

Palavras-chave: categorias monoidais; álgebras de Hopf; representações; Quantum Double.

Abstract

The most well-known phases of matter are solid, liquid and gas. These and other phases are described by Landau's symmetry breaking theory. According to this theory, it is sufficient to know the properties of matter locally to determine its phase. In the case of the Fractional Quantum Hall Effect, Landau's theory cannot describe its different phases, we say that such a system has topological order. Such phases are characterized, among other things, by the degeneracy of the ground state and this depends on the topology of the manifold in which the physical system is in. There are several theoretical models of systems with topological order, one of them is the toric code and its generalizations, the Quantum Double Model and the string-net model. The string-net model forms a large class of models with topological order, it is built from a spherical fusion category. In this dissertation we study the theory of monoidal categories, specializing in pivotal, spherical, braided and fusion categories, and we study in more detail the example of the category of representations of the Quantum Double of a finite group, which is an example of a spherical fusion braided category. Also, we use graphical languages for monoidal categories and Hopf algebras to simplify many proofs.

Keywords: monoidal categories; Hopf algebras; representations; Quantum Double.

Sumário

1 Introdução **9**
1.1 Contextualição 9
1.1.1 Toric Code 10
1.2 Descrição do Conteúdo 17
1.3 Organização do Texto 22

2 Preliminares **24**
2.1 Noções Básicas de Teoria de Categorias 24
2.1.1 Categorias 24
2.1.2 Alguns termos comuns 26
2.1.3 Categoria oposta ou dual 27
2.1.4 Funtores 27
2.1.5 Transformações Naturais 28
2.1.6 Equivalência de Categorias 29
2.2 Módulos e Produto Tensorial 29
2.2.1 Módulos 29
2.2.2 Produto Tensorial de Módulos 31
2.2.3 Produto Tensorial de Mapas Lineares 41
2.2.4 O funtor produto tensorial 41
2.3 Álgebras de Hopf 42
2.3.1 Duas perspectivas sobre álgebras 42
2.3.2 Diagramas de Kuperberg 43
2.3.3 Álgebra 45
2.3.4 Coálgebra 46
2.3.5 Biálgebra 46
2.3.6 Álgebra de Hopf 48
2.3.7 A antípoda é antihomomorfismo 50
2.3.8 Produto Tensorial de Álgebras 53

3 Categorias Monoidais **55**
3.1 Categorias Monoidais 55
3.1.1 Categorias Monoidais 55
3.1.2 Teorema de Mac Lane e Convenção de Notação 57
3.1.3 Cálculo Gráfico 59
3.1.4 Funtores monoidais 60
3.1.5 Categoria Monoidais Duais 61

3.2 Categorias Pivotais e Categorias Esféricas 62
3.2.1 Pareamentos e Dualidade 62
3.2.2 Funtores duais 67
3.2.3 Categorias Pivotais 70
3.2.4 Cálculo Gráfico para Categorias Pivotais 70
3.2.5 O duplo dual 72
3.2.6 Traço e dimensão 72
3.3 Categorias Braided 75
3.3.1 Categorias Braided e Categorias Simétricas 75
3.3.2 Cálculo Gráfico para Categorias Pivotais Braided 77
3.4 Categorias Fusion 83
3.4.1 Categorias Monoidais Lineares 84
3.4.2 Somas Diretas e Aditividade 85
3.4.3 Categorias Pre-Fusion 89
3.4.4 Categorias monoidais lineares não-degeneradas 91
3.4.5 Categorias Fusion Pivotais 91
3.4.6 Partições por Objetos Simples 92
3.4.7 Cálculo Gráfico para Categorias Pre-fusion Pivotais 95

4 Categoria de Representações de uma Álgebra de Hopf 100
4.1 Representações 100
4.1.1 Intertwiners 101
4.1.2 Irredutibilidade e Subrepresentações 102
4.1.3 Somas diretas 102
4.2 A categoria de representações de uma álgebra de Hopf 105
4.2.1 Notação diagramática 105
4.2.2 Estrutura monoidal 106
4.2.3 Dualidades, Pivotalidade e Esfericidade 111
4.2.4 Braiding 115
4.2.5 Linearidade e Aditividade 120
4.3 Categoria de Representações do Drinfeld Quantum Double 120
4.3.1 Drinfeld Quantum Double 120
4.3.2 Estrutura Fusion 122

5 Conclusão 132

6 Apêndice: Módulos, Bimódulos e Produto Tensorial 133
6.1 Produto tensorial de bimódulos 139
6.1.1 Produto Tensorial de Homomorfismos de Bimódulos 141
6.1.2 O funtor produto tensorial 142

Capítulo 1

Introdução

1.1 Contextualição

As fases da matéria mais básicas e comumente conhecidas são as sólida, líquida e gasosa. A diferença entre esses estados pode ser entendida através da teoria de quebra de simetria de Landau, nesta teoria uma fase é caracterizada por uma simetria que um sistema tem localmente, isto quer dizer que basta analisar tal sistema em um pedaço para determinar sua fase. Porém, o efeito Hall quântico fracionário (EHQF) não pode ser descrito pela teoria de quebra de simetria de Landau, por não haverem simetrias a serem quebradas, as fases desse sistema dizemos que possuem ordem topológica [23]. A ordem topológica é caracterizada, dentre outras coisas, por o estado fundamental do sistema possuir degenerescência e esta depender da topologia da variedade onde tal sistema está imerso. Um dos exemplos teóricos mais simples e conhecidos de um sistema com ordem topológica é o *toric code* [15], este consiste de uma rede sobre um toro com graus de liberdade de spin nos *links* (ou arestas) dessa rede. O modelo do *toric code* foi generalizado pelo *Quantum Double Model* (QDM) e pelo modelo de Levin-Wen ou *string-net* [17]. O QDM pode ser entendido como uma subclasse do modelo de *string-net*, como mostrado em [3]. O *toric code* é baseado no grupo $\mathbb{Z}_2$, porém o modelo de *string-net* é construído a partir de uma categoria do tipo fusion esférica. Como mostrado em [2] e [12], o modelo de *string-net* é equivalente ao invariante de Turaev-Viro para alguma categoria fusion esférica. Desta forma, categorias fusion esféricas e o invariante de Turaev-Viro podem ser utilizados para construir modelos com ordem topológica, através do modelo de *string-net*. Isso nos dá uma classe grande de modelos com ordem topológica, porém não é suficiente para classificar todos modelos. Este trabalho descreve as noções básicas sobre a teoria de categorias fusion esféricas e analisa com mais detalhe o exemplo da categoria de representações de uma álgebra de Hopf. Através disso temos exemplos de categorias que podem ser utilizados na construção do invariante de Turaev-Viro. O invariante de Turaev-Viro pode ser estendido a um funtor, o qual chamamos de uma Teoria Quântica de Campos Topológica (TQFT), apesar de sua importância a TQFT de Turaev-Viro não será estudada nesta dissertação.

A seguir é tratado o *toric code* com mais detalhe, com o intuito de melhor contextualizar este trabalho. Para uma melhor introdução a ordem topológica, veja o capítulo 6 *Introduction to Topological Order* em [23].

1.1.1 Toric Code

Esta seção é fortemente baseada na dissertação de mestrado de Juan Pablo Ibieta Jimenez [11]. Não serão feitos todos os detalhes do *toric code*, para mais detalhes veja [11] e [15]. Esta seção não é necessária para o que será tratado adiante.

O *toric code* consiste em uma rede quadrada sobre um toro (veja figura 1.1), com graus de liberdade de *spin* sobre as arestas (*links*). Na verdade é possível também considerar o mesmo modelo para redes que não são quadradas (por exemplo, o *honeycomb* em [17]), mas nos restringiremos às redes quadradas. O toro pode ser entendido como um quadrado com lados opostos identificados (ou condições periódicas de contorno). Na figura 1.2 ilustramos uma rede formada por 25 quadrados, em que a sua fronteira possui condições periódicas de contorno. Nessa figura é destacado em vermelho um *link* l da rede, uma face (ou plaqueta) p (em rosa) e um vértice v. Em azul é destaca a estrela de v, denotada $st(v)$, que são os 4 *links* adjacentes a v. O bordo da plaqueta p é ∂p, que é um quadrado formado por 4 *links*. As estrelas $st(v)$ e bordos ∂p serão utilizados para definir operadores locais A_v e B_p, conforme explicado a seguir.

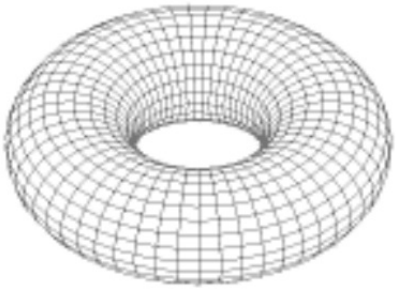


Figura 1.1: rede sobre um toro.

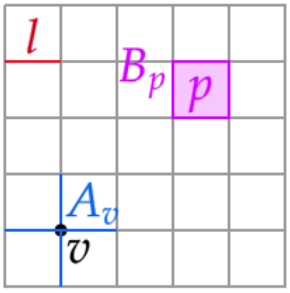


Figura 1.2: rede do *toric code*.

Seja $\mathcal{L}$ o conjunto de *links* da rede do *toric code*. A cada $l \in \mathcal{L}$ é associado um espaço de Hilbert $\mathcal{H}_l = \mathbb{C}^2$, então o espaço de Hilbert do *toric code* é

$$\mathcal{H} = \bigotimes_{l \in \mathcal{L}} \mathcal{H}_l = \bigotimes_{l \in \mathcal{L}} \mathbb{C}^2.$$

Utilizaremos as matrizes de Pauli σ_x e σ_z:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.1}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Essas matrizes correspondem a operadores $\sigma_x, \sigma_z \colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Agora, sejam $\mathcal{V}$ o conjunto de vértices e $\mathcal{P}$ o conjunto de plaquetas da rede. Para cada $v \in \mathcal{V}$ é definido o operador $A_v \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$A_v = \bigotimes_{l \in st(v)} \sigma_x, \tag{1.3}$$

que age sobre os 4 *links* da estrela $st(v)$ de v por σ_x, e para os demais *links* age como identidade. O produto tensorial sobre os *links* fora de $st(v)$ de operadores identidade é deixado implícito na notação. Também, para cada plaqueta $p \in \mathcal{P}$ é definido o operador $B_p \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ dado por

$$B_p = \bigotimes_{l \in \partial p} \sigma_z. \tag{1.4}$$

Como para A_v, é deixado implícito o produto tensorial de operadores identidade que agem sobre os *links* fora de ∂p.

O operador hamiltoniano do sistema é

$$H = -\sum_{v \in \mathcal{V}} A_v - \sum_{p \in \mathcal{P}} B_p. \tag{1.5}$$

Estamos interessados nos *grounds states* (estados de energia mínima). Construiremos os *ground states* como autoestados dos A_v's e B_p's (simultaneamente). Primeiramente, como $(\sigma_x)^2 = (\sigma_z)^2 = \mathbb{1}$, o operador identidade, então $A_v^2 = B_p^2 = \mathbb{1}$, para quaisquer $v \in \mathcal{V}$ e $p \in \mathcal{P}$. Também σ_x e σ_z são diagonalizáveis e hermitianos, logo A_v e B_p também são. Se $|\psi\rangle$ é um autovetor de A_v com autovalor a_v, então

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= A_v^2 |\psi\rangle \\ &= a_v^2 |\psi\rangle, \end{aligned}$$

como $|\psi\rangle \neq 0$ então $a_v^2 = 1$, mas A_v somente possui autovalores reais, logo

$$a_v = \pm 1. \tag{1.6}$$

Da mesma forma, os autovalores de B_p pertencem a $\{-1, +1\}$. Também $[A_v, B_p] = 0$, isso é imediato no caso em que $st(v) \cap \partial p = \varnothing$. Se $st(v) \cap \partial p \neq \varnothing$ então v é vertice da plaqueta p e $st(v) \cap \partial p$ possui exatamente dois *links*. Como

$$\sigma_x \sigma_z = -\sigma_z \sigma_x \tag{1.7}$$

então

$$A_v B_p = (-1)^2 B_p A_v, \tag{1.8}$$

em que cada fator (-1) corresponde a um *link* de $st(v) \cap \partial p$. Portanto,

$$[A_v, B_p] = 0. \tag{1.9}$$

É simples mostrar que $[A_v, A_{v'}] = 0$ e $[B_p, B_{p'}] = 0$ para quaisquer vértices v e v' e plaquetas p e p'. Isso se deve ao fato de que

$$[\sigma_x, \sigma_x] = 0, \tag{1.10}$$

$$[\sigma_z, \sigma_z] = 0, \tag{1.11}$$

$$[\sigma_x, \mathbb{1}] = 0, \tag{1.12}$$

$$[\sigma_z, \mathbb{1}] = 0. \tag{1.13}$$

Com isto, todos operadores A_v e B_p comutam entre si e são diagonalizáveis, portanto podemos diagonalizar todos esses operadores simultaneamente, ou seja, há uma base de $\mathcal{H}$ cujos vetores são autovetores de todos A_v's e B_p's ao mesmo tempo.

Se $|\psi\rangle$ é autovetor de todos A_v's e B_p's simultaneamente, então $A_v|\psi\rangle = a_v|\psi\rangle$ e $B_p|\psi\rangle = b_p|\psi\rangle$, assim

$$H|\psi\rangle = -\left(\sum_{v\in\mathcal{V}} a_v + \sum_{p\in\mathcal{P}} b_p\right)|\psi\rangle, \tag{1.14}$$

mas $a_v, b_p \in \{-1, +1\}$, logo a energia mínima E_0 satisfaz

$$E_0 \geq -(N_v + N_p), \tag{1.15}$$

em que N_v é o número de vértices e N_p é o número de plaquetas da rede. De fato, vale a igualdade. Para simplificar a notação, sejam

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$|-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Um autoestado de energia mínima é

$$|\psi_0\rangle = \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right)\left[\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle\right]. \tag{1.16}$$

Para mostrar isso, note que

$$\sigma_z|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |1\rangle, \tag{1.17}$$

logo

$$B_p\left[\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle\right] = \left[\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle\right]. \tag{1.18}$$

Como $[A_v, B_p] = 0$, então

$$\begin{aligned} B_p|\psi_0\rangle &= B_p\left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right)\left[\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle\right] \\ &= \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right) B_p\left[\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle\right] \\ &= \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right)\left[\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle\right] \end{aligned}$$

$$= |\psi_0\rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} A_v(\mathbb{1} + A_v) &= A_v + A_v^2 \\ &= A_v + \mathbb{1} \\ &= \mathbb{1} + A_v, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} A_{v'}\left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right) &= A_{v'}\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_{v'})\left(\prod_{v\in\mathcal{V}\setminus\{v'\}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_{v'})\left(\prod_{v\in\mathcal{V}\setminus\{v'\}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right) \\ &= \prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v), \end{aligned}$$

de onde temos que

$$A_{v'}|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle. \tag{1.19}$$

Com isto,

$$\begin{aligned} H|\psi_0\rangle &= \left(-\sum_{v\in\mathcal{V}} A_v - \sum_{p\in\mathcal{P}} B_p\right)|\psi_0\rangle \\ &= \left(-\sum_{v\in\mathcal{V}} 1 - \sum_{p\in\mathcal{P}} 1\right)|\psi_0\rangle \\ &= -(N_v + N_p)|\psi_0\rangle. \end{aligned}$$

Isto conclui que $E_0 = -(N_v + N_p)$.

Como mostrado em [15], o autoespaço de energia mínima possui dimensão 4, ou seja, a degenerescência do *ground state* é 4. O $|\psi_0\rangle$ é um *ground state*. Antes de discutir sobre os demais *ground states*, convém introduzir uma representação diagramática dos estados e notar que $|\psi_0\rangle$ pode ser entendido como um **gás de loops**.

Um estado da forma $|\psi\rangle = \bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |m_l\rangle$, para $m_l \in \{-1, +1\}$, é representado graficamente da seguinte forma: para cada *link* l para o qual $m_l = -1$ é desenhado um traço azul perpendicular a l, se $m_l = +1$ então não é desenhado tal traço. Dizemos que o traço azul está na rede dual. A rede dual é a rede quadrada cujos vértices são os centros das plaquetas da rede original. Uma ilustração dessa representação de estados é feita na figura 1.3. O estado $\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle$ é representado graficamente por não desenhar nenhum traço azul na rede dual. Como

$$\sigma_x|1\rangle = |-1\rangle, \tag{1.20}$$

então, para qualquer vértice v, o operador A_v age sobre $\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle$ introduzindo um loop azul centrado em v, como na figura 1.4. Agora se v e v' são os dois vértices de algum

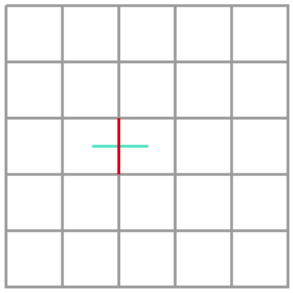


Figura 1.3: Um *link* (em vermelho) com estado $|-1\rangle$ é representado por um traço perpendicular azul.

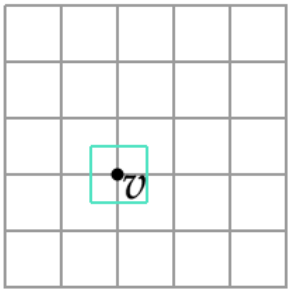


Figura 1.4: representação gráfica do estado $A_v(\bigotimes_{l\in\mathcal{L}}|1\rangle)$.

link, então A_v e $A_{v'}$ ambos agem sobre *links* distintos exceto pelo *link* que contém v e v'. Dessa forma, a representação gráfica de $A_vA_{v'}(\bigotimes_{l\in\mathcal{L}}|1\rangle)$ é um loop retangular (não quadrado), como na figura 1.5. Na figura 1.6 é dado um exemplo para 5 vértices.

Dessa forma, $|\psi_0\rangle$ é uma combinação linear de estados da forma $A_{v_1}...A_{v_n}(\bigotimes_{l\in\mathcal{L}}|1\rangle)$, neste sentido ele é um **gás de loops**. É importante que esses loops são todos contráteis, no sentido de que podem ser encolhidos a um ponto. Mais precisamente, como os caminhos são discretos, pois estão numa rede quadrada, a contração nada mais é do que uma aplicação sucessiva de finitos operadores A_v. Da mesma forma que os A_v's são utilizados para construir os loops, eles também podem ser utilizados para desfazê-los, já que $A_v^2 = \mathbb{1}$.

Como o autoespaço de energia mínima tem dimensão 4, então resta construir mais 3 *ground states* linearmente independentes. Eles estão associados a loops não contráteis, dois loops não contráteis e não homotopicamente equivalentes são ilustrados na figura 1.7. Não há uma única forma de mapear no toro em $\mathbb{R}^3$ a rede quadrada com condições periódicas de contorno, pois poderíamos identificar uma linha horizontal da rede com qualquer um dos loops C_1 e C_2 da figura 1.7. Digamos que a correspondência entre os loops da figura 1.7 seja conforme a figura 1.8, em que os loops C_1 e C_2 estão na rede dual. Um outro *ground state* é obtido trocando na equação (1.16) o estado $\bigotimes_{l\in\mathcal{L}}|1\rangle$ pelo estado representado graficamente pela curva C_1. Da mesma forma, se ao invés de C_1 utilizarmos C_2 ou a união $C_1 \cup C_2$, também obtemos *ground states*. Mostremos isso para a curva C_1. Seja

$$|\psi_1\rangle = \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right)\left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1}|-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1}|1\rangle\right], \tag{1.21}$$

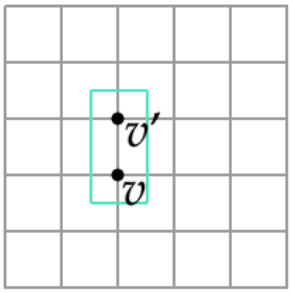


Figura 1.5: representação gráfica do estado $A_v A_{v'}(\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle)$, para v e v' os dois vértices de um *link*.

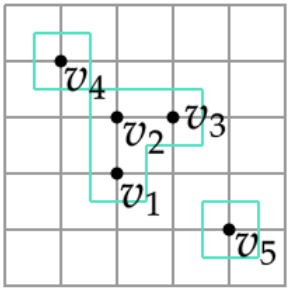


Figura 1.6: representação gráfica do estado $A_{v_1}A_{v_2}A_{v_3}A_{v_4}A_{v_5}(\bigotimes_{l\in\mathcal{L}} |1\rangle)$, para dados vértices v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5.

nesta equação $\overline{C}_1$ é o conjunto de *links* **verticais** que intersectam a curva C_1 da figura 1.8 (este C_1 da figura é **horizontal**), veja a figura 1.9. Como mostrado anteriormente, para qualquer vértice v' vale que

$$A_{v'}\left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right) = \prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v), \tag{1.22}$$

de onde segue que

$$A_{v'}|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle. \tag{1.23}$$

Agora, dada uma plaqueta p, ou ∂p não intersecta $\overline{C}_1$ ou intersecta em exatamente dois *links*. Como $\sigma_z|\pm 1\rangle = \pm|\pm 1\rangle$, se ∂p intersecta $\overline{C}_1$ então

$$\begin{aligned} B_p\left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1} |1\rangle\right] &= (-1)^2\left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1} |1\rangle\right] \\ &= \left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1} |1\rangle\right]. \end{aligned}$$

Além disso, $[A_v, B_p] = 0$, logo

$$B_p|\psi_1\rangle = B_p\left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1} + A_v)\right)\left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1} |1\rangle\right]$$

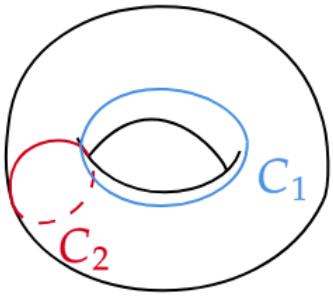


Figura 1.7: toro e dois loops não homotopicamente equivalentes C_1 e C_2.

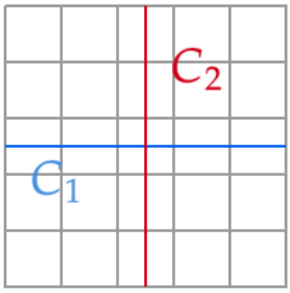


Figura 1.8: loops não contráteis C_1 e C_2 na rede dual, correspondentes ao loops da figura 1.7.

$$
\begin{aligned}
&= \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}+A_v)\right) B_p \left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1} |1\rangle\right] \\
&= \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}+A_v)\right) \left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1} |1\rangle\right] \\
&= |\psi_1\rangle.
\end{aligned}
$$

Disto temos que $|\psi_1\rangle$ é *ground state*, pois satisfaz que $A_v|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle$ e $B_p|\psi_1\rangle = |\psi_1\rangle$. Como feito para C_1, definimos $\overline{C}_2$ como sendo o conjunto de *links* **horizontais** que intersectam C_2. Então, de forma semelhante a $|\psi_1\rangle$, os estados

$$
|\psi_2\rangle = \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}+A_v)\right) \left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_2} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_2} |1\rangle\right], \tag{1.24}
$$

e

$$
|\psi_{1,2}\rangle = \left(\prod_{v\in\mathcal{V}} \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{1}+A_v)\right) \left[\bigotimes_{l\in\overline{C}_1\cup\overline{C}_2} |-1\rangle \bigotimes_{l\in\mathcal{L}\setminus\overline{C}_1\cup\overline{C}_2} |1\rangle\right], \tag{1.25}
$$

são também *ground states*. Para $|\psi_{1,2}\rangle$ a única diferença nos argumentos é que se p é uma plaqueta que intersecta $\overline{C}_1$ e $\overline{C}_2$ simultaneamente, então $\partial p \subseteq \overline{C}_1 \cup \overline{C}_2$, de forma que a intersecção neste caso é formada por 4 *links* ao invés de 2. Que esses 4 *ground states* são linearmente independentes, isso se deve aos loops C_1 e C_2 serem não homotopicamente equivalentes, de forma que não podem ser deformados um no outro agindo com os operadores A_v.

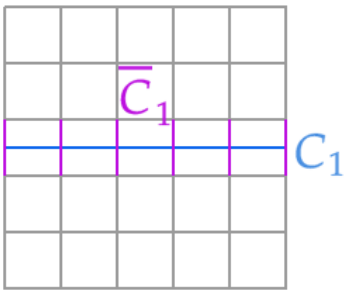


Figura 1.9: curva C_1 na rede dual e o conjunto de *links* $\overline{C}_1$ associado.

O mesmo modelo pode ser considerado para superfícies orientáveis conexas fechadas de gênero g, tendo então uma degenerescência do *ground state* igual a 4^g [15]. Uma ilustração destas superfícies para gênero baixo é feita na figura 1.10. Podemos observar que a degenerescência do *ground state* não depende do tamanho da rede, ela depende somente da topologia da superfície através de seu gênero, o que motiva o nome ordem topológica.

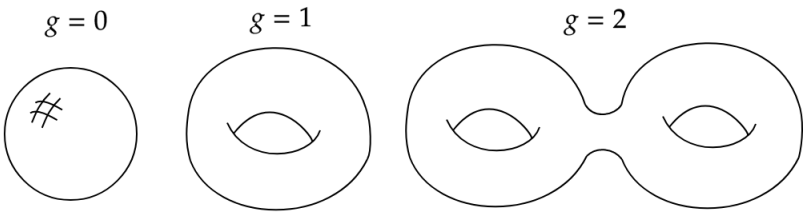


Figura 1.10: superfícies orientáveis conexas fechadas de gênero g. Da esquerda para direita, temos uma esfera ($g = 0$), um toro ($g = 1$) e um bitoro ($g = 2$).

1.2 Descrição do Conteúdo

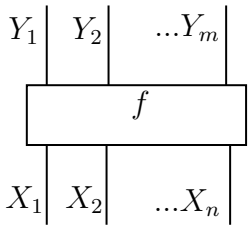
Nesta dissertação serão estudados alguns tipos de categorias monoidais, em particular categorias fusion esféricas. Essas categorias são utilizadas na construção da TQFT de Turaev-Viro e este permite construir uma grande classe de modelos com ordem topológica por meio do modelo de *string-net*. O *toric code* é baseado no grupo $\mathbb{Z}_2$, o modelo de *string-net*, que é uma de suas generalizações, utiliza uma estrutura algébrica mais complexa, que são essas categorias monoidais.

Uma categoria consiste de objetos e flechas (também chamados de morfismos), o exemplo mais comum de categoria é a categoria $\mathbf{Set}$ cujos objetos são os conjuntos e cujas flechas são as funções. Outro exemplo também comum é $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$, a categoria que consiste dos espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$ e das transformações lineares entre esses espaços vetoriais. Ambas categorias são exemplos de categorias monoidais, uma categoria monoidal é, grosso modo, uma categoria com um produto tensorial (também chamado de produto monoidal), este produto é definido sobre os objetos e as flechas da categoria, além disso categorias monoidais possuem um objeto unidade $\mathbb{1}$ que o análogo do elemento unidade de uma operação de multiplicação. Para $\mathbf{Set}$ o produto monoidal é o

produto cartesiano, mais especificamente, dados conjuntos X e Y seu produto cartesiano é o conjunto dos pares ordenados (x, y) para $x \in X$ e $y \in Y$, mas o produto monoidal age também sobre as flechas da categoria, assim dadas funções $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$ o produto cartesiano de ambas é a função

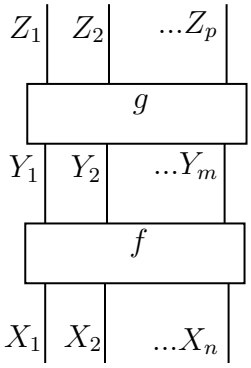
$$\begin{aligned} X \times Y &\longrightarrow X' \times Y' \\ (x, y) &\longmapsto (f(x), g(y)) \end{aligned}$$

além disso o objeto unidade é qualquer conjunto unitário, digamos que $\mathbb{1} = \{*\}$, este conjunto tem o papel de unidade do produto cartesiano no sentido de que $\{*\} \times X \cong X$ e $X \cong X \times \{*\}$, neste caso o símbolo $\cong$ significa que há uma bijeção entre os conjuntos. Para a categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ o produto monoidal é o produto tensorial e o objeto unidade é o corpo $\mathbb{C}$. Fixemos uma base $\{x_i\}_{i \in I}$ de X e uma base $\{y_j\}_{j \in J}$, então $\{x_i \otimes y_j\}_{i \in I, j \in J}$ é uma base de $X \otimes Y$, dadas transformações lineares $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$ o produto tensorial $f \otimes g$ é a transformação linear dada por $f \otimes g(x_i \otimes y_j) = f(x_i) \otimes g(y_j)$. Numa categoria monoidal qualquer podemos representar graficamente as flechas por caixas com linhas anexas, uma flecha $f\colon X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n \to Y_1 \otimes Y_2 \otimes ... \otimes Y_m$ é representada por um diagrama como o abaixo:

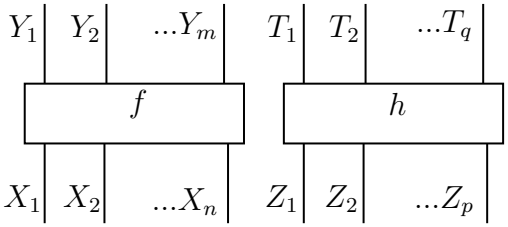


Dizemos que essas linhas são coloridas pelos objetos X_1, X_2 e etc., e que a caixa é colorida por f. A composição é representada por justapor caixas uma acima da outra, e o produto monoidal é representado por colocar diagramas um ao lado do outro, conforme os seguintes diagramas

$g \circ f =$



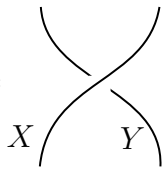
$f \otimes h =$

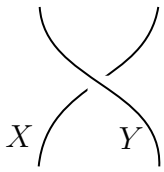


As propriedades do produto monoidal, que é um funtor, nos permitem subir ou descer caixas nesses diagramas. Linhas coloridas por $\mathbb{1}$ não precisam ser desenhadas. Essas propriedades permitem fazer cálculos com muito mais facilidade através desses diagramas.

Categorias monoidais podem ter outras estruturas e propriedades além de ter um produto monoidal. Uma categoria braided é uma categoria monoidal com algumas condições de comutatividade sobre o produto monoidal. Mais especificamente é uma categoria com

um braiding τ, que é uma família formada por flechas $\tau_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$, com uma flecha para cada par ordenado (X, Y), sendo X e Y objetos da categoria. Essas flechas $\tau_{X,Y}$ são isomorfismos satisfazendo algumas propriedades, conforme será visto adiante. O nome braiding se deve a podermos utilizar diagramas de braiding (tranças) para representar graficamente as flechas $\tau_{X,Y}$. A categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{C}}$ é braided (na verdade ela é simétrica, o que quer dizer que $\tau_{X,Y}^{-1} = \tau_{Y,X}$), em que $\tau_{X,Y}\colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ é o isomorfismo de permutação, ou seja, $\tau_{X,Y}(x_i \otimes y_j) = y_j \otimes x_i$ (utilizando as bases fixadas anteriormente). A representação gráfica de $\tau_{X,Y}$ e $\tau_{Y,X}^{-1}$ numa categoria braided são

$\tau_{X,Y} =$ 

, $\tau_{Y,X}^{-1} =$ 

.

Porém esses diagramas somente serão utilizados no contexto de categorias pivotais braided, neste caso as linhas recebem também uma orientação. Para categorias simétricas não é necessário desenhar nos diagramas linhas passando por cima ou por baixo de outra, já que ambos cruzamentos são equivalentes.

A noção de dual de um espaço vetorial pode ser generalizada para categorias monoidais, mas esta generalização não inclui os espaços vetoriais de dimensão infinita. Ela é feita por meio dos pareamentos não degenerados. Os pareamentos não-degenerados serão estudados com mais detalhe adiante. A categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ é uma categoria com duais, o dual de um espaço vetorial X é o espaço $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{C})$ dos funcionais lineares. O pareamento associado ao espaço vetorial X e seu dual X^* é a avaliação (*evaluation*) $\overleftarrow{ev}_X\colon X^* \otimes X \to \mathbb{C}$ dada por $\overleftarrow{ev}_X(f \otimes x) = f(x)$, em que $x \in X$ e $f \in X^*$. Também temos o pareamento $\overrightarrow{ev}_X\colon X \otimes X^* \to \mathbb{C}$ dado por $\overrightarrow{ev}_X(x \otimes f) = f(x)$. Ambos caracterizam X^* ser o dual de X no sentido de serem pareamentos não-degenerados, isto é equivalente a dizer que, dada uma base $\{x_i\}_{1 \le i \le n}$ de X e a base dual $\{x^i\}_{1 \le i \le n}$ dada por $x^i(x_j) = \delta_j^i$, a matriz $[\overleftarrow{ev}_X(x^i \otimes x_j)]_{1 \le i \le n, 1 \le j \le n}$ é inversível, o que é trivial neste caso pois a matriz é a identidade, e analogamente para $\overrightarrow{ev}_X$. Ao invés de utilizar matrizes, a definição numa categoria monoidal qualquer de um pareamento ser não-degenerado é dada em termos da existência de um tipo de inversa do pareamento, mas não no sentido de o pareamento ser um isomorfismo, o que em geral não é o caso. Para a categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ a "inversa"do pareamento $\overleftarrow{ev}_X$ é a coavaliação $\overleftarrow{coev}_X\colon \mathbb{C} \to X \otimes X^*$ dada por

$$\overleftarrow{coev}_X(1) = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes x^i$$

e a "inversa"de $\overrightarrow{ev}_X$ é a coavaliação dada por

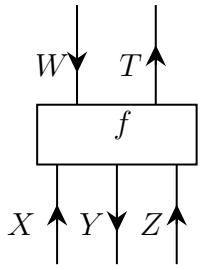
$$\overrightarrow{coev}_X(1) = \sum_{i=1}^{n} x^i \otimes x_i.$$

Elas são "inversas"no sentido de serem satisfeitas as equações

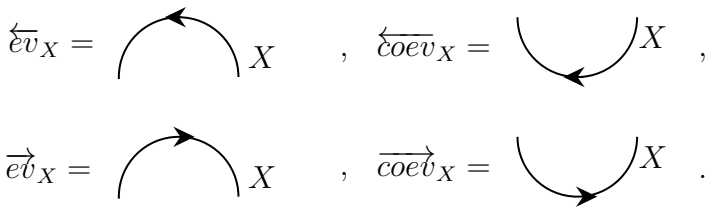
$$(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) \circ (\mathrm{id}_{X^*} \otimes \overleftarrow{coev}_X) = \mathrm{id}_{X^*},$$
$$(\mathrm{id}_X \otimes \overleftarrow{ev}_X) \circ (\overleftarrow{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_X,$$

$$(\overrightarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_X) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \overrightarrow{coev}_X) = \mathrm{id}_X,$$
$$(\mathrm{id}_{X^*} \otimes \overrightarrow{ev}_X) \circ (\overrightarrow{coev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*}) = \mathrm{id}_{X^*}.$$

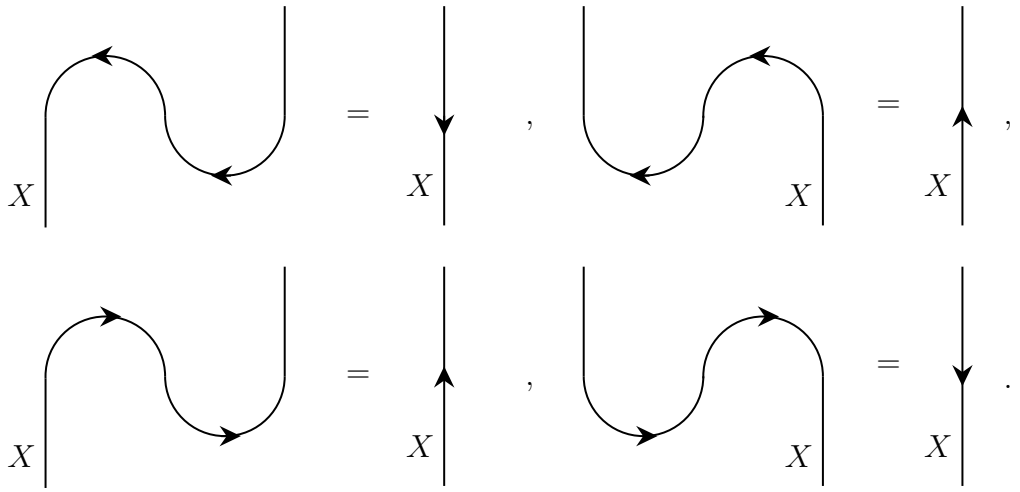
A noção de categoria com duais que utilizaremos é a de categoria pivotal, uma categoria pivotal é uma categoria monoidal em que existem e são fixados pareamentos não-degenerados $\overleftarrow{ev}_X \colon X^* \otimes X \to \mathbb{1}$ e $\overrightarrow{ev}_X \colon X \otimes X^* \to \mathbb{1}$ para cada objeto X da categoria e satisfazendo mais algumas condições que não serão tratadas agora. Como esses pareamentos são não-degenerados então existem as "inversas" $\overleftarrow{coev}_X \colon \mathbb{1} \to X \otimes X^*$ e $\overrightarrow{coev}_X \colon \mathbb{1} \to X^* \otimes X$, podemos mostrar que essas "inversas" são únicas. A linguagem gráfica de categorias monoidais pode ser especializada para categorias pivotais adicionando orientações às linhas. Os diagramas anteriores, não-orientados, podem ser considerados como diagramas em que as linhas estão orientadas para cima. Uma linha orientada para baixo passa a representar o objeto dual, por exemplo, uma flecha $f \colon X \otimes Y^* \otimes Z \to W^* \otimes T$ é representada graficamente por



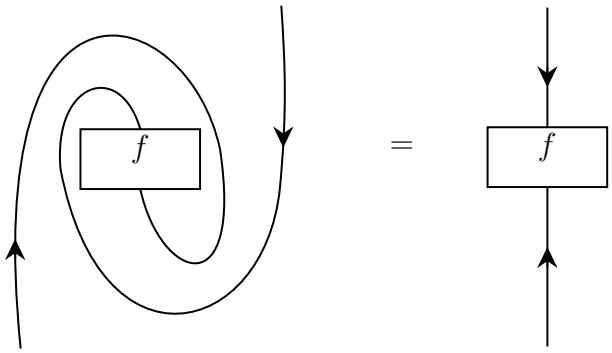
Além disso os pareamentos e suas inversas, $\overleftarrow{ev}_X$, $\overrightarrow{ev}_X$, $\overleftarrow{coev}_X$ e $\overrightarrow{coev}_X$ são representados graficamente por *caps* e *cups*:



A condição de os pareamentos serem não-degenerados é representada graficamente por

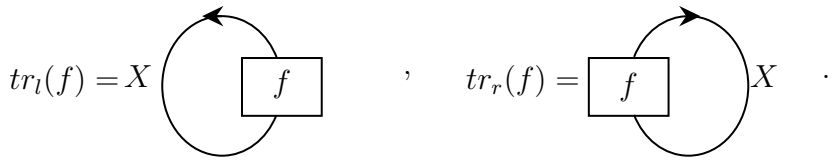


Disto segue que podemos deformar as linhas desses diagramas sem alterar a flecha que eles representam na categoria pivotal. Além disso, podemos mostrar que qualquer caixa nos diagramas de uma categoria pivotal pode ser girada por uma volta completa ($360°$), nos sentidos horário ou anti-horário, sem alterar o resultado do diagrama, como no exemplo abaixo.



Para categorias pivotais braided podemos utilizar os diagramas de braiding com orientações.

Categorias pivotais têm duas noções de traço, que são um traço à esquerda tr_l e um traço à direita tr_r, estes traços agem sobre endomorfismos da categoria, ou seja, sobre flechas com mesmos domínio e contradomínio. Dada uma flecha $f\colon X \to X$, numa categoria pivotal, os traços $tr_l(f)$ e $tr_r(f)$ são endomorfismos $\mathbb{1} \to \mathbb{1}$ dados graficamente por



Quando os dois tipos de traço coincidem dizemos que a categoria é esférica. Este é o caso da categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$, em que $tr_l(f) = tr_r(f)$ é o endomorfismo $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dado por $1 \mapsto tr[f]$, sendo $[f]$ a matriz de f e $tr[f]$ seu traço. Logo, $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ é categoria esférica e simétrica.

Nosso interesse é estudar categorias fusion esféricas. Uma categoria pre-fusion é uma categoria monoidal em que

- os conjuntos $\mathrm{Hom}(X, Y)$, de flechas de X em Y, são espaços vetoriais;
- a composição $\circ$ e o produto monoidal $\otimes$ são bilineares sobre flechas;
- a categoria possui somas diretas de famílias finitas;
- há um conjunto I de objetos simples satisfazendo:
  - $\mathbb{1} \in I$;
  - $\mathrm{Hom}(i, j) = 0$ se $i, j \in I$ e $i \neq j$;

– e todo objeto da categoria pode ser decomposto como soma direta de uma família finita de objetos de I.

Um objeto simples é um objeto i da categoria tal que $\dim \mathrm{End}(i) = 1$, em que $\mathrm{End}(i) = \mathrm{Hom}(i, i)$ é o conjunto de endomorfismos de i. Uma categoria pre-fusion pivotal é dita fusion pivotal quando I é finito (o caso geral de categorias fusion não-pivotais não será tratado nesta dissertação). Há uma linguagem gráfica para categorias pre-fusion, porém isto será tratado nos próximos capítulos. A categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ é um exemplo simples de categoria fusion pivotal, em que $I = \{\mathbb{C}\}$, como todo espaço vetorial é caracterizado por sua dimensão então, a menos de isomorfismo, todo espaço vetorial é uma soma direta $\oplus_{k=1}^{n}\mathbb{C}$ para algum $n \geq 0$.

Portanto, a categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ é um exemplo de categoria fusion esférica simétrica e pode ser utilizada no invariante de Turaev-Viro. Porém, esta é uma categoria muito simples e são necessários exemplos mais complexos para que o invariante de Turaev-Viro apresente alguma utilidade prática. Um exemplo menos trivial é o da categoria de representações de uma álgebra de Hopf, que é tratado no capítulo 4. Mais especificamente, mostraremos que para a álgebra de Hopf que é o Quantum Double de um grupo finito sua categoria de representações é fusion esférica braided.

1.3 Organização do Texto

Nesta dissertação são introduzidos alguns conceitos de categorias monoidais e é estudado com mais detalhe um exemplo de categoria monoidal, que pode ser utilizado na construção de Turaev-Viro de uma TQFT tridimensional e então obter modelos com ordem topológica, tal como o de *string nets*. A ordem topológica em si e TQFT não são tratados nos capítulos a seguir.

No capítulo 2 é introduzida a Teoria de Categorias, cuja linguagem é utilizada por toda a dissertação, porém somente serão necessários conceitos elementares da teoria geral. Também são estudados módulos sobre aneis comutativos com unidade e o produto tensorial de módulos, isto não é essencial para grande parte da dissertação, pois se tomamos o anel como sendo um corpo, tal como $\mathbb{C}$, então os módulos são espaços vetoriais, porém isto é feito para posteriormente, no capítulo 3, ser construída a categoria monoidal de espaços vetoriais. A definição do produto tensorial de módulos é, no caso geral, dada por uma propriedade universal, e esta não é normalmente ensinada para físicos, dessa forma estudar o produto tensorial de módulos pode tornar mais clara a definição de categoria monoidal e é também uma oportunidade de se familiarizar com o conceito de propriedade universal. Além disso, são estudadas brevemente as álgebras de Hopf, que serão utilizadas no capítulo 4 para construir um exemplo de categoria fusion esférica.

No capítulo 3 são estudadas as categorias monoidais, que é um dos conceitos centrais desta dissertação. Além da estrutura monoidal, podemos considerar categorias com mais estrutura, esse é o caso das categorias pivotais, esféricas, braided e fusion, que também são estudadas nesse capítulo. Categorias pivotais são, grosso modo, categorias com duais, categorias braided são categorias em que o produto monoidal (ou tensorial) satisfaz algumas relações de comutavidade, e categorias fusion são, grosso modo, categorias com uma forma de linearidade e tal que todos objetos podem ser decompostos como soma direta de objetos simples e tal que há finitas classes de isomorfismo de objetos simples. As ca-

tegorias fusion são também chamadas por outros autores de semi-simples. Para cada tipo de categoria monoidal é introduzida uma linguagem gráfica, estas linguagens gráficas são uma forma alternativa de representar as flechas da categoria e de realizar cálculos, utilizando assim argumentos topológicos para obter um resultado algébrico.

No capítulo 4 é estudado o exemplo da categoria de representações de uma álgebra de Hopf, é feito com mais detalhe o caso em que a categoria é o *Drinfeld Quantum Double* de um grupo finito e é mostrado que a categoria de representações para tal *Drinfeld Quantum Double* é uma categoria fusion esférica.

O capítulo 5 é uma breve conclusão.

No capítulo 6, que é um apêndice, é estudado o produto tensorial para módulos sobre aneis que não precisam ser comutativos e também o produto tensorial de bimódulos. Isto somente será utilizado no capítulo 4 devido a tomarmos produtos tensoriais sobre uma álgebra, que é $\mathbb{C}Z_k$ nesse capítulo. Vale notar que toda álgebra é um anel e que uma álgebra de grupo $\mathbb{C}H$ somente é comutativa se o grupo H for trivial ($H = \{e\}$), logo, a menos do caso trivial, o produto tensorial sobre tal álgebra é um produto tensorial sobre um anel não-comutativo.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Noções Básicas de Teoria de Categorias

A Teoria de Categorias é uma teoria abstrata, por meio da qual podemos descrever estrutura matemáticas que aparecem em diversas áreas distintas. Devido a isto é uma boa linguagem, pois com isto é possível obter resultados que valem em contextos que, em princípio, podem parecer muito distintos, mas que na verdade são uma manifestação de uma mesma estrutura abstrata. A seguir são expostas algumas noções básicas da Teoria de Categorias, para um maior aprofundamento veja as referênciais [1] e [18].

2.1.1 Categorias

A definição de categoria é obtida por uma abstração de propriedades que funções em geral satisfazem, porém uma categoria não precisa estar relacionada com funções. Primeiro vejamos quais são as propriedades que funções possuem que queremos abstrair. Um conjunto é grosso modo uma coleção de objetos, por exemplo temos os conjuntos $\{1, 2, 3\}$, $\{a, b, c, d, e, f, ..., z\}$ e etc., e uma função $f\colon A \to B$ entre conjuntos A e B é uma regra que a cada elemento x do conjunto A associa um elemento $f(x)$ do conjunto B. Os conjuntos A e B são chamados de domínio ($\mathrm{dom}(f)$) e contra-domínio ($\mathrm{cod}(f)$) de f, respectivamente. Por simplicidade não considerarei o conjunto vazio e nem a função vazia neste momento. Se temos uma função $f\colon A \to B$ e uma outra $g\colon B \to C$, podemos definir a função composta $g \circ f : A \to C$ dada por $g \circ f(x) \coloneqq g(f(x))$. Se além disso temos uma função $h\colon C \to D$, então podemos compor f, g e h de duas formas, que são $h \circ (g \circ f)$ e $(h \circ g) \circ f$, sendo ambas funções de A em D. Elas são a mesma função, pois $h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = (h \circ g)(f(x))$, $\forall x \in A$, ou seja, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, esta é a propriedade associativa da composição. Como consequência podemos sem ambiguidade escrever escrever as composições sem colocar parênteses. Funções podem ser representadas diagramaticamente por flechas, conforme o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=60, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rrr, bend right=60, "(h\circ g)\circ f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "h\circ g"'] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

Podemos observar que não é necessário fazer referência direta aos elementos de A para enunciar a associatividade, bastando escrever que $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, este é um fato que permite a abstração desejada. Além de poder compor funções, outro fato geral é que para qualquer conjunto A sempre existe uma função $A \to A$, a identidade id_A, que é dada por $\mathrm{id}_A(x) = x$. Para quaisquer funções $f\colon A \to B$ e $g : C \to A$, vale que $f \circ \mathrm{id}_A(x) = f(\mathrm{id}_A(x)) = f(x)$ e $\mathrm{id}_A \circ g(y) = \mathrm{id}_A(g(y)) = g(y)$, $\forall x \in A$ e $\forall y \in C$. Podemos reescrever essa propriedade sem fazer referência aos elementos do conjunto, como $f \circ \mathrm{id}_A = f$ e $\mathrm{id}_A \circ g = g$.

A definição de categoria é abstraída destas propriedades trocando os conjuntos por objetos e as funções por flechas, com alguma operação de composição que é associativa e tal que existem flechas identidade para quaisquer objetos. Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.1. Uma categoria $\mathbf{C}$ consiste de uma classe de objetos $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e uma classe de flechas $\mathrm{Ar}(\mathbf{C})$ tal que dadas flechas $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to C$ fixa-se uma flecha composta $g \circ f\colon A \to C$, essa composição é associativa e $\forall A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existe uma flecha $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ com a propriedade de que para quaisquer flechas $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to A$, $f \circ \mathrm{id}_A = f$ e $\mathrm{id}_A \circ g = g$. O domínio de uma flecha $f\colon A \to B$ é $\mathrm{dom}(f) = A$ e seu contradomínio é $\mathrm{cod}(f) = B$.

Um termo mais difícil de compreender nesta definição é classe. Ele é utilizado no lugar de conjunto por causa de algumas dificuldades existentes em Fundamentos da Matemática. A categoria $\mathbf{Set}$ é a categoria cujos objetos são todos os conjuntos e as flechas são as funções entre eles. O paradoxo de Russell mostra que não existe um conjunto que contém todos os conjuntos, dessa forma $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ não pode ser um conjunto, por isso $\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ é dita uma classe. Uma categoria é dita pequena se as classes de objetos e de flechas são ambas conjuntos, caso contrário são chamadas de categorias grandes. Grande parte das categorias que são utilizadas com frequência são grandes, sendo uma delas a $\mathbf{Set}$. Apesar disso, o $\mathrm{Hom}(A, B)$, a coleção das flechas $A \to B$ em $\mathrm{Ar}(\mathbf{Set})$, é um conjunto, e por isso diversas outras categorias definidas de forma semelhante a $\mathbf{Set}$ também têm essa propriedade. Dizemos que uma categoria $\mathbf{C}$ é localmente pequena se $\mathrm{Hom}(A, B)$ é conjunto $\forall A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$.

Na verdade, a definição de categoria pode diferir dependendo da fundamentação matemática em uso, mas estaremos utilizando a definição acima.

Note que, para todo objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, id_A é única, de fato, se existe outra identidade $\mathrm{id}'_A : A \to A$ então, como id_A é identidade, $\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}'_A = \mathrm{id}'_A$, e como id'_A é identidade então $\mathrm{id}_A \circ \mathrm{id}'_A = \mathrm{id}_A$, logo $\mathrm{id}'_A = \mathrm{id}_A$.

Alguns exemplos de categorias são:

- $\mathbf{Set}$, a categoria cujos objetos são os conjuntos e cujas flechas são as funções entre eles;
- $\mathbf{Top}$, a categoria dos espaços topológicos e funções contínuas;
- $\mathbf{Grp}$, a categoria dos grupos e homomorfismos de grupos;
- $\mathbf{Ab}$, a categoria dos grupos abelianos e funções contínuas;
- $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, a categoria dos $\mathbb{K}$-espaços vetoriais e transfomações lineares;
- $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$, a categoria dos $\mathbb{K}$-espaços vetoriais de dimensão finita e transformações lineares.

2.1.2 Alguns termos comuns

Fixemos uma categoria $\mathbf{C}$.

Uma flecha $f\colon A \to B$ in $\mathrm{Ar}(\mathbf{C})$ é dita um isomorfismo se possui uma inversa, ou seja, se existe uma flecha $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$. A flecha g é única e é denotada f^{-1}. Na categoria $\mathbf{Set}$ um isomorfismo é uma bijeção, em $\mathbf{Top}$ é um homeomorfismo, em $\mathbf{Grp}$ é um isomorfismo de grupos e em $\mathbf{Vect_K}$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Se existe um isomorfismo $f\colon A \to B$ dizemos que A e B são isomorfos.

Um diagrama numa categoria é, grosso modo, uma coleção de flechas que formam determinados caminhos, em que um caminho é uma composição flechas. Uma definição mais precisa é que um diagrama é um homomorfismo de grafos, mas, devido ao nível de abstração desta definição, recorreremos somente à intuição do que é um diagrama. Somente estaremos interessados em diagramas com finitas flechas. Abaixo temos um exemplo de diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "g"] \arrow[ddr, bend left, "j"] & \\
C \arrow[r, "i"] \arrow[drr, bend right, "k"'] & D \arrow[dr, "l"] & \\
& & E
\end{tikzcd}$$

Um diagrama é dito comutar quando dados quaisquer dois vértices do diagrama, quaisquer caminhos entre esses dois vértices são equivalentes, no sentido de que a composição das flechas que formam um caminho é igual à composição das flechas que formam o outro caminho. Por exemplo, o diagrama acima é comutativo se valem as seguintes igualdades:

- $g \circ f = i \circ h$;
- $j = l \circ g$;
- $k = l \circ i$.

Sendo este o caso, claro que vale também que $k \circ h = l \circ i \circ h = l \circ g \circ f = j \circ f$.

2.1.3 Categoria oposta ou dual

Dada uma categoria $\mathbf{C}$, a categoria oposta, ou dual, de $\mathbf{C}$ é a categoria $\mathbf{C}^{op}$ cujos objetos são os mesmos que os de $\mathbf{C}$, mas cujas flechas são as flechas de $\mathbf{C}$ com uma troca do domínio pelo contra-domínio, ou seja , $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$. Uma flecha $\overline{f}\colon A \to B$ em $\mathbf{C}^{op}$ é, portanto, uma flecha $f\colon B \to A$ em $\mathbf{C}$. Dadas flechas $\overline{f}\colon A \to B$ e $\overline{g}\colon B \to C$ em $\mathbf{C}^{op}$, devemos ter uma composta $\overline{g} \circ \overline{f}\colon A \to C$, as flechas $\overline{f}$ e $\overline{g}$ correspondem a flechas $f\colon B \to A$ e $g\colon C \to B$ em $\mathbf{C}$, cuja composição é $f \circ g\colon C \to A$, assim a composição em $\mathbf{C}^{op}$ é dada por $\overline{g} \circ \overline{f} = \overline{f \circ g}$.

Um dos motivos para se utilizar categorias duais é para não precisar definir funtores como covariantes ou contravariantes. Todos os funtores são considerados covariantes. Além disso podemos provar resultados por dualidade, mais precisamente pode ser provado um resultado em $\mathbf{C}^{op}$ e este corresponde a um resultado dual em $\mathbf{C}$.

2.1.4 Funtores

Em Álgebra é comum termos um conjunto munido de uma estrutura algébrica, que pode ser algumas operações (por exemplo, soma ou produto) e a existência de elementos com propriedades especiais (por exemplo, elemento neutro). Ao considerar funções entre essas estruturas algébricas é conveniente exigir que tais funções respeitem de alguma forma essa estrutura, por exemplo, em teoria de grupos consideramos os homomorfismos, que são funções que preservam o produto e o elemento neutro. Um funtor entre categorias $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ é então um mapa $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que preserva a estrutura de categoria. É conveniente que sejam preservadas a composição de flechas e as identidades, o que leva à seguinte definição:

Definição 2.2. Um funtor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é um par de mapas, sendo um deles um mapa $F_0\colon \mathrm{Ob}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathbf{B})$ e o outro um mapa $F_1\colon \mathrm{Ar}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Ar}(\mathbf{B})$, ambos denotaremos simplesmente por F. Dada uma flecha $f\colon X \to Y$ em $\mathbf{A}$, o funtor F a leva em $F(f)$ que é uma flecha $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$. Além disso, deve valer que

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
- $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$;

para quaisquer flechas f e g em $\mathrm{Ar}(\mathbf{A})$ que podem ser compostas e para qualquer objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$.

Um exemplo trivial de funtor é a identidade $\mathrm{id}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$. Alguns outros também simples de definir são os funtores esquecedores, que esquecem alguma estrutura, tais como $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$, $U' : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ e $U'' : \mathbf{Vect_K} \to \mathbf{Set}$ que levam os espaços topológicos, grupos e espaços vetorias nos conjuntos subjacentes, e as funções contínuas, homomorfismos e transformações lineares nelas mesmas. Há também os funtores livres, um funtor livre é um funtor no sentido oposto do esquecedor, tal como o $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ que leva um conjunto no grupo livre sobre G e uma função $f\colon X \to Y$ entre conjuntos no correspondente homomorfismo $F(f)\colon F(X) \to F(Y)$. Um fato importante, que não será explorado nesta dissertação, é que $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ e $U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ formam um par de funtores adjuntos. A Topologia Álgébrica também é uma boa fonte de funtores, vale mencionar que há os funtores $\pi_1\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$, em que $\mathbf{Top}_*$ é categoria de espaços

topológicos com ponto base e funções contínuas que preservam pontos base, e, dado um espaço topológico X e um ponto base $x \in X$, o grupo $\pi_1(X, x)$ é o grupo fundamental, além deste temos também o funtor homologia singular $\mathrm{H}_n \colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ que leva um espaço topológico X no grupo de homologia $\mathrm{H}_n(X)$. Nenhum destes exemplos serão relevantes nesta dissertação, exemplos que serão utilizados serão dados posteriormente.

Se temos funtores $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e $G \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ podemos definir o funtor $G \circ F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, que é dado pela composição de mapas. Disto surge a questão se é possível definir uma categoria de todas as categorias, mas para evitar problemas como o do Paradoxo de Russell se define a categoria $\mathbf{Cat}$ de todas categorias pequenas e funtores entre elas.

Um isomorfismo entre categorias é um funtor $F \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que possui um funtor inverso $F^{-1} \colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$, de forma que $F^{-1} \circ F = \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ e $F \circ F^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. Porém, em Teoria de Categorias não é esperado que categorias sejam isomorfas, mas sim equivalentes, o que é uma noção mais fraca, porém é necessário primeiro dizer o que são transformações naturais para introduzir equivalências de categorias.

2.1.5 Transformações Naturais

Fixemos funtores $F, G, H \colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Uma transformação natural $\eta \colon F \Rightarrow G$ é uma coleção de morfismos em $\mathbf{B}$ que estabelecem uma relação entre as ações de F e G. Formalmente, temos:

Definição 2.3. Uma transformação natural $\eta \colon F \Rightarrow G$ é uma família de flechas $\eta = \{\eta_X \colon F(X) \to G(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})}$ em $\mathrm{Ar}(\mathbf{B})$, tal que $\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X$ para toda flecha $f \colon X \to Y$ em $\mathbf{A}$, ou seja, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Se temos transformações naturais $\eta \colon F \Rightarrow G$ e $\mu \colon G \Rightarrow H$, então a transformação natural composta $\mu \circ \eta \colon F \Rightarrow G$ é definida por $\mu \circ \eta := \{(\mu \circ \eta)_X := \mu_X \circ \eta_X \colon F(X) \to H(X)\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})}$. Essa composição é chamada de composição vertical, se temos funtores $F', G' \colon \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ e uma transformação natural $\eta' \colon F' \Rightarrow G'$ então é possível definir uma composição de η' com η, esta composição é chamada de composição horizontal e existe uma compatibilidade entre os dois tipos de composição, mas não estaremos interessados na composição horizontal. Também isso torna a categoria $\mathbf{Cat}$ uma 2-categoria estrita, mas não exploraremos este fato.

Um isomorfismo natural é uma transformação η tal que as flechas $\eta_X \colon F(X) \to G(X)$ são isomorfismos para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$. Equivalentemente, um isomorfismo natural é uma transformação natural $\eta \colon F \Rightarrow G$ tal que existe uma transformação natural $\gamma \colon G \Rightarrow F$ que é inversa de η, ou seja, $\gamma \circ \eta = \mathrm{id}_F$ e $\eta \circ \gamma = \mathrm{id}_G$, onde id_F e id_G são as transformações naturais identidade, dadas por $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_{F(X)}$ e analogamente para G. A notação $F \cong G$ significa que há um isomorfismo natural entre F e G.

Transformações naturais têm um papel importante em Teoria de Categorias, há alguns exemplos simples, porém não são relevantes nesta dissertação, alguns exemplos de transformações naturais serão dados posteriormente.

2.1.6 Equivalência de Categorias

Ao invés de isomorfismos, a noção conveniente é de equivalência de categorias. Esta noção será dada por completeza, mas não será utilizada adiante. Duas categorias $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são ditas equivalentes se existe um par de funtores $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ e $G\colon \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tais que $G \circ F \cong \mathrm{id}_{\mathbf{A}}$ e $F \circ G \cong \mathrm{id}_{\mathbf{B}}$. Assumindo o axioma da escolha (para classes), um funtor $F\colon \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ é uma equivalência se é um funtor pleno, fiel e essencialmente sobrejetor. Ser pleno quer dizer que para quaisquer $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$ o mapa

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{Hom}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(F(X),F(Y)) \\ f &\longmapsto F(f) \end{aligned}$$

é sobrejetor, ser fiel quer dizer que este mapa é injetor, logo ser pleno e fiel é este mapa ser uma bijeção, e ser essencialmente sobrejetor quer dizer que para qualquer $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B})$ existe um $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$ tal que $B \cong F(A)$.

Em diante o símbolo de composição estará muitas vezes implícito, a composição será indicada por justaposição.

2.2 Módulos e Produto Tensorial

2.2.1 Módulos

Serão dados nesta seção alguns resultados básicos da Teoria de Módulos com ênfase no produto tensorial. Somente será tratado o caso dos módulos sobre anéis comutativos com unidade, para o caso de anéis não-comutativos veja o apêndice. Exceto no capítulo 4, não há uma necessidade muito forte de compreender a Teoria de Módulos, porém o produto tensorial, mesmo de espaços vetoriais, será entendido em termos de uma propriedade universal, como feito para módulos em geral. Esta seção é em grande parte baseada nas referências [10], [4] e [5].

Seja R um anel comutativo com unidade $1 \in R$, o qual estará fixo por toda esta seção. A definição de um R-módulo à esquerda é a mesma de um espaço vetorial exceto por termos um anel R ao invés de um corpo. Mais especificamente, temos a seguinte definição:

Definição 2.4. Um R-módulo à esquerda é uma quádrupla $(M, +, 0, \cdot)$ em que $(M, +, 0)$ é um grupo abeliano e $\cdot\colon R \times M \to M$ é uma operação de multiplicação por escalar satisfazendo às seguintes propriedades:

- $r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$;
- $(r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot y$;
- $(rs) \cdot x = r \cdot (s \cdot x)$;
- $1 \cdot x = x$.

Um R-módulo à esquerda $(M, +, 0, \cdot)$ é denotado também por ${}_RM$ ou simplesmente M. Uma função $f\colon M \to N$ entre R-módulos à esquerda é dita R-linear se $f(m+m') = f(m) + f(m')$ e $f(r \cdot m) = r \cdot f(m)$, para quaisquer $m, m' \in M$ e $r \in R$.

A definição de R-módulo à direita é análoga, com a principal diferença de que neste caso a operação de produto por escalar é da forma $\cdot\colon M \times R \to M$.

Definição 2.5. Um R-módulo à direita é uma quádrupla $(M, +, 0, \cdot)$ em que $(M, +, 0)$ é um grupo abeliano e $\cdot\colon M \times R \to M$ é uma operação de multiplicação por escalar satisfazendo às seguintes propriedades:

- $(x + y) \cdot r = x \cdot r + y \cdot r$;
- $x \cdot (r + s) = x \cdot r + y \cdot s$;
- $x \cdot (rs) = (x \cdot r) \cdot s$;
- $x \cdot 1 = x$.

Um R-módulo à direita $(M, +, 0, \cdot)$ é denotado também por M_R ou simplesmente M. Uma função $f\colon M \to N$ entre R-módulos à direita é dita R-linear se $f(m + m') = f(m) + f(m')$ e $f(m \cdot r) = f(m) \cdot r$, para quaisquer $m, m' \in M$ e $r \in R$.

Também é comum denotar um R-módulo à direita por M_R. Como R é comutativo, sempre que temos um R-módulo à esquerda M podemos construir um produto por escalar à direita dado por

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (x, r) &\longmapsto r \cdot x \end{aligned}$$

onde $\cdot$ é o produto por escalar à esquerda proveniente da estrutura de R-módulo à esquerda. Neste sentido, podemos tomar os produtos à esquerda e à direita como iguais e então um módulo à esquerda pode ser considerado um módulo à direita e vice-versa, devido a isto em diante chamaremos os módulos à esquerda ou à direita simplesmente de módulos, desde que o anel R seja comutativo e estejamos interessados em somente uma estrutura de produto. Somente haverá interesse em distinguir módulos à esquerda de módulos à direita no capítulo 4, sobre a categoria de representações de uma álgebra de Hopf. Semelhantemente aos espaços vetorias, temos uma categoria $\mathbf{Mod}_R$ cujos objetos são os R-módulos e cujas flechas são os mapas R-lineares.

Alguns exemplos de módulos são imediatos devido à semelhança entre a definição de módulo e de espaço vetorial. De fato, se R é um corpo, por exemplo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, os R-módulos são os R-espaços vetorias. Note que R é naturalmente um R-módulo, em que a soma e o produto por escalar da estrutura de módulo correspondem à soma e produto da estrutura de anel de R. Se $R = \mathbb{Z}$ então o produto por escalar é irrelevante e podemos considerar que um $\mathbb{Z}$-módulo é simplesmente um grupo abeliano. Vale notar que também podemos entender representações de grupos como módulos, este caso será tratado com mais detalhes no capítulo 4.

Apesar da semelhança entre as definições de espaço vetorial e de módulo, o fato de R ser um anel ao invés de um corpo faz com que diversas propriedades que valem para espaços vetoriais não valham para módulos em geral. Em particular, todo espaço espaço vetorial tem uma base e as cardinalidades de todas as bases de um espaço são as mesmas. Para módulos em geral não necessariamente existe uma base, se uma base existe ele é dito livre.

Definição 2.6. Um R-módulo M é dito livre se possui uma base, que é um conjunto $B \subseteq M$ que gera M, ou seja, todo elemento de M é da forma $x = r_1b_1 + ... + r_nb_n$, em que $n \geq 1$, $r_i \in R$ e $b_i \in B$, e além disso B é l.i., ou seja, para qualquer $B' \subseteq B$ subconjunto finito, a equação

$$\sum_{b \in B'} r_b b = 0$$

é satisfeita se e somente se $r_b = 0, \forall b \in B'$.

Todo espaço vetorial é um módulo livre. Também, para qualquer anel comutativo com unidade R, o conjunto $R^{(I)}$ das funções $f\colon I \to R$ de suporte finito, ou seja, tais que $f(i) \neq 0$ para finitos i's, é um R-módulo livre. Um R-módulo é livre se, e somente se, é isomorfo a uma soma direta $\oplus_{\alpha \in A} R$, para algum conjunto A.

Definição 2.7 (Soma Direta)**.** Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de R-módulos. Se $A = \varnothing$, definimos $\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha := \{0\}$, o R-módulo nulo. Se $A \neq \varnothing$ então $\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ é o conjunto das sequências $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ em que $x_\alpha \in X_\alpha$ e o conjunto $\{\alpha \in A : x_\alpha \neq 0\}$ é finito. A soma e produto em $\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ são componente a componente:

- $(x_\alpha)_{\alpha \in A} + (x'_\alpha)_{\alpha \in A} = (x_\alpha + x'_\alpha)_{\alpha \in A}$;
- $r \cdot (x_\alpha)_{\alpha \in A} = (r \cdot x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Dada uma família $(f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha)_{\alpha \in A}$ de mapas lineares, temos o mapa soma direta

$$\begin{aligned} \oplus_{\alpha \in A} f_\alpha\colon \ \oplus_{\alpha \in A} X_\alpha &\longrightarrow \oplus_{\alpha \in A} Y_\alpha \\ (x_\alpha)_{\alpha \in A} &\longmapsto (\oplus_{\alpha \in A} f_\alpha)((x_\alpha)_{\alpha \in A}) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha \in A} \end{aligned}$$

Segue imediatamente que se cada f_α é um isomorfismo então $\oplus_{\alpha \in A} f_\alpha$ é também isomorfismo.

2.2.2 Produto Tensorial de Módulos

O produto tensorial é definido em termos de uma propriedade universal, dessa forma ele é único a menos de isomorfismo. Enfatizo que, neste capítulo, os R-módulos são sempre sobre um anel R comutativo com unidade, o caso não comutativo será tratado no capítulo 6, o apêndice.

Definição 2.8. Dados R-módulos X e Y, o produto tensorial de X por Y é um par $(P, \otimes)$ em que P é um R-módulo e $\otimes\colon X \times Y \to P$ é um mapa R-bilinear, e além disso $(P, \otimes)$ satisfaz a uma propriedade universal, conforme explicado a seguir. É utilizada a notação $\otimes(x, y) = x \otimes y$ para o produto tensorial, então a bilinearidade de $\otimes$ significa que valem as seguintes igualdades para quaisquer $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ e $r \in R$:

- $x \otimes (y + y') = x \otimes y + x \otimes y'$;
- $(x + x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$;
- $(rx) \otimes y = r(x \otimes y)$;
- $x \otimes (ry) = r(x \otimes y)$.

O par $(P, \otimes)$ é universal no sentido de que dado outro par (Q, B), em que Q é um R-módulo e $B\colon X \times Y \to Q$ é um mapa R-bilinear, o mapa B se fatora por $\otimes$ de forma única por um mapa linear, ou seja, $!\exists u\colon P \to Q$ mapa R-linear tal que $u \circ \otimes = B$.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "B"'] & P \arrow[d, dashed, "u"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

Como $(P, \otimes)$ é único a menos de isomorfismo, denotamos P por $X \otimes Y$. Por brevidade também faremos referência ao produto tensorial simplesmente por $X \otimes Y$, estando implícito o mapa bilinear $\otimes$. Os elementos de $X \otimes Y$ da forma $x \otimes y$ são chamados de tensores elementares.

A definição do produto tensorial não garante a existência de um par $(P, \otimes)$ que satisfaça à propriedade universal, para isto temos uma construção geral do produto tensorial:

Teorema 2.9. *Dados quaisquer R-módulos X e Y, existe um produto tensorial de X e Y.*

Demonstração. A ideia da prova é construir um módulo P e um mapa bilinear $\otimes\colon X \times Y \to P$ exigindo o mínimo possível de propriedades sobre ambos, de forma que o par $(P, \otimes)$ seja universal. Para isto, considere o R-módulo livre sobre $X \times Y$, denotado por $F(X \times Y)$, que é o R-módulo cujos elementos são as combinações lineares formais finitas de pares $(x, y) \in X \times Y$ com coeficientes em R, ou seja, um elemento de $z \in F(X \times Y)$ é da forma

$$z = \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} r_{x,y}(x, y).$$

em que $r_{x,y} \in R$ é não-nulo para finitos pares (x, y). Agora, P é construído como um quociente deste módulo livre por um submódulo que contém as relações necessárias para obter a bilinearidade do produto tensorial, mais especificamente seja D (de denominador) o R-módulo gerado pelos elementos das formas

- $(x + x', y) - (x, y) - (x', y)$;
- $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$;
- $(rx, y) - r(x, y)$;
- $(x, ry) - r(x, y)$;

para $x \in X$, $y \in Y$ e $r \in R$ quaisquer. Então seja $P := F(X \times Y)/D$ e $\otimes\colon X \times Y \to P$ o mapa

$$\begin{aligned} \otimes\colon X \times Y &\longrightarrow P \\ (x, y) &\longmapsto \overline{(x, y)} = (x, y) + D \end{aligned}$$

em que $\overline{(x, y)}$ é a classe de equivalência de $(x, y) \in F(X, Y)$. Segue imediatamente da definição de D que $\otimes\colon X \times Y \to P$ é R-bilinear, resta então mostrar que o par $(P, \otimes)$ satisfaz à propriedade universal do produto tensorial.

Seja (Q, B) um par em que Q é um R-módulo e $B\colon X \times Y \to Q$ é um mapa bilinear, devemos mostrar a existência e unicidade de um mapa R-linear $u\colon P \to Q$ tal que $u \circ \otimes = B$. Note que $\otimes$ tem por imagem $\operatorname{Im} \otimes = \{\overline{(x, y)} : x \in X, y \in Y\}$, que é um conjunto gerador de P, então todo mapa linear $P \to Q$ é determinado completamente pelos valores que toma sobre $\operatorname{Im} \otimes$. Em particular, se o u desejado existe, ele é determinado completamente pela equação $u \circ \otimes = B$, isto garante a unicidade dada a existência, agora mostremos que existe um mapa linear u que satisfaz essa equação. Note que $\otimes\colon X \times Y \to P$ é a composição do mapas

$$\begin{aligned} i\colon X \times Y &\longrightarrow F(X \times Y) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

e a projeção canônica

$$\begin{aligned} \pi\colon F(X \times Y) &\longrightarrow P \\ z &\longmapsto \overline{z} \end{aligned}$$

Como $F(X \times Y)$ é módulo livre, temos o mapa linear $q\colon F(X \times Y) \to Q$ tal que $q \circ i = B$,

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "B"'] & F(X \times Y) \arrow[d, "q"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

ou seja, q é dado sobre os geradores por $q(x, y) = B(x, y)$ e estendendo por linearidade se obtém q sobre todo $F(X \times Y)$. Como $\otimes = \pi \circ i$ e $B = q \circ i$, temos que a equação $u \circ \otimes = B$ equivale a $u \circ \pi \circ i = q \circ i$, mas $u \circ \pi$ e q são lineares, então isto vale se e somente se $u \circ \pi = q$. Com isto o problema se torna mostrar que existe um $u\colon P \to Q$ linear que completa o diagrama abaixo tornando-o comutativo

$$\begin{tikzcd} F(X \times Y) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & P \\ Q & \end{tikzcd}$$

Para funções em geral, um diagrama desse tipo pode ser completado se a relação determinada por uma das funções está contida na relação determinada pela outra função. Neste caso as funções são lineares então isto pode ser reescrito em termos de núcleos de mapas, assim o mapa u desejado existe se e somente se $\ker \pi \subseteq \ker q$. Pela definição de projeção canônica, é imediato que $\ker \pi = D$. Como D é gerado por quatro tipos de elementos de $F(X \times Y)$, então basta mostrar que cada um desses tipos de elementos pertence a $\ker q$ que então pela linearidade de q segue que $D \subseteq \ker q$. Temos que

$$\begin{aligned} q((x + x', y) - (x, y) - (x', y)) &= q(x + x', y) - q(x, y) - q(x', y) \\ &= B(x + x', y) - B(x, y) - B(x', y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$q((rx, y) - r(x, y)) = q(rx, y) - rq(x, y)$$

$$
\begin{aligned}
&= B(rx, y) - rB(x, y) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

e analogamente seguem os resultados para os outros dois tipos de geradores de D, isto conclui que $D \subseteq \ker q$. Dessa forma, existe o mapa linear $u\colon P \to Q$ tal que $u \circ \pi = q$, e este é único, o que demonstra que $(P, \otimes)$ satisfaz à propriedade universal do produto tensorial.

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\otimes"] \arrow[dr, "B"'] & F(X \times Y) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q"] & P \arrow[dl, dashed, "u"] \\
& Q &
\end{tikzcd}
$$

$\square$

Algumas Propriedades

Primeiramente, como dito na definição do produto tensorial, ele é único a menos de isomorfismo por ser definido em termos de uma propriedade universal. Também vale notar que $X \otimes Y$ é gerado pelos tensores elementares $x \otimes y$, isto é de certa forma evidente se olharmos para a construção do produto tensorial, mas isto pode ser provado sem fazer referência a tal construção. Além disso, o produto tensorial é, a menos de isomorfismo, comutativo, tem o anel R por unidade, é associativo e se distribui sobre a soma direta. Como consequênica desses resultados temos também que produto tensorial de módulos livres é livre. A seguir são demonstradas essas afirmações.

Teorema 2.10 (Unicidade a menos de isomorfismo)**.** *Sejam X e Y R-módulos e $(P, \otimes)$ e $(P', \otimes')$ dois produtos tensoriais de X por Y, então existe um único isomorfismo $u\colon P \to P'$ tal que $\otimes' = u \circ \otimes$.*

Demonstração. O método de prova é típico de propriedades universais. Como $\otimes'\colon X \times Y \to P'$ é bilinear, pela propriedade universal do produto tensorial aplicada ao par $(P, \otimes)$, existe um único mapa linear $u\colon P \to P'$ tal que $u \circ \otimes = \otimes'$

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\otimes'"'] & P \arrow[d, dashed, "u"] \\
& P'
\end{tikzcd}
$$

e da mesma forma, aplicando a propriedade universal ao par $(P', \otimes')$, existe um único mapa linear $u'\colon P' \to P$ tal que $u' \circ \otimes' = \otimes$.

$$
\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\otimes'"] \arrow[dr, "\otimes"'] & P' \arrow[d, dashed, "u'"] \\
& P
\end{tikzcd}
$$

Podemos combinar esses dois diagramas, obtendo

$$\begin{tikzcd}
 & P' \arrow[d, dashed, "u'"] \arrow[dd, bend left, "\mathrm{id}"] \\
X \times Y \arrow[ur, "\otimes'"] \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\otimes'"'] & P \arrow[d, dashed, "u"] \\
 & P'
\end{tikzcd}$$

observe que $(u \circ u') \circ \otimes' = \otimes'$ e $\mathrm{id} \circ \otimes' = \otimes'$, então pela propriedade universal aplicada a $(P', \otimes')$, existe um único mapa linear satisfazendo essa propriedade, logo $u \circ u' = \mathrm{id}$. Analogamente segue que $u' \circ u = \mathrm{id}$, portanto $u' = u^{-1}$, ou seja, u é isomorfismo. $\square$

Teorema 2.11. *(O produto tensorial é gerado pelos tensores elementares) Sejam X e Y R-módulos e $(X \otimes Y, \otimes)$ um produto tensorial deles. Então $\mathrm{Im} \otimes$, o conjunto dos tensores elementares de $X \otimes Y$, gera $X \otimes Y$.*

Demonstração. $X \otimes Y$ é gerado pelos tensores elementares se, e somente se, $\langle \mathrm{Im} \otimes \rangle = X \otimes Y$, ou equivalentemenete $X \otimes Y / \langle \mathrm{Im} \otimes \rangle = \{0\}$. Considere a projeção canônica $\pi \colon X \otimes Y \to X \otimes Y / \langle \mathrm{Im} \otimes \rangle$, como π é linear e $\otimes$ é bilinear então $\pi \circ \otimes$ é bilinear, considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\pi \circ \otimes"'] & X \otimes Y \arrow[d, shift right, "\pi"'] \arrow[d, shift left, "0"] \\
 & X \otimes Y / \langle \mathrm{Im} \otimes \rangle
\end{tikzcd}$$

pela definição de π é imediato que $\pi \circ \otimes(x, y) = 0$, logo o mapa $0 \colon X \otimes Y \to X \otimes Y / \langle \mathrm{Im} \otimes \rangle$ faz o triângulo comutar, ou seja, $0 \circ \otimes = \pi \circ \otimes$, por outro lado π também faz esse triângulo comutar, trivialmente, então pela propriedade universal do produto tensorial tal mapa é único, portanto $\pi = 0$, ou seja, $X \otimes Y = \langle \mathrm{Im} \otimes \rangle$. $\square$

Teorema 2.12 (Comutatividade)**.** *Sejam X e Y R-módulos, temos então o isomorfismo $\tau \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ dado por $\tau(x \otimes y) = y \otimes x$.*

Demonstração. Considere o mapa $\sigma \colon X \times Y \to Y \times X$ dado por $\sigma(x, y) = (y, x)$ e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\sigma"] & X \otimes Y \\
Y \times X \arrow[r, "\otimes"] & Y \otimes X
\end{tikzcd}$$

Temos que $\otimes \circ \sigma \colon X \times Y \to Y \otimes X$ é mapa bilinear, então pela propriedade universal aplicada a $(X \otimes Y, \otimes)$ existe um único mapa linear $\tau \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$ tal que $\tau \circ \otimes = \otimes \circ \sigma$,

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "\sigma"] & X \otimes Y \arrow[d, dashed, "\tau"] \\
Y \times X \arrow[r, "\otimes"] & Y \otimes X
\end{tikzcd}$$

ou seja, $\tau(x \otimes y) = \tau(\otimes(x,y)) = \otimes(\sigma(x,y)) = \otimes(y,x) = y \otimes x$. Analogamente existe um único mapa linear $\tau' \colon Y \otimes X \to X \otimes Y$ tal que $\tau'(y \otimes x) = x \otimes y$, e então é imediato que $\tau' = \tau^{-1}$, ou seja, τ é isomorfismo. $\square$

Teorema 2.13 (Unitalidade)**.** *Dado um R-módulo X, existem únicos isomorfismos $l_X \colon R \otimes X \to X$ e $r_X \colon X \otimes R \to X$ tais que $l_X(1 \otimes x) = x$ e $r_X(x \otimes 1) = x$.*

Demonstração. Será demonstrada somente a existência e unicidade de l_X, para r_X é análogo. Considere o mapa $\mu \colon R \times X \to X$ dado pelo produto por escalar, ou seja, $\mu(r,x) = rx$. Este mapa é bilinear, então pela propriedade universal do produto tensorial $!\exists l_X \colon R \otimes X \to X$ linear tal que $l_X \circ \otimes = \mu$,

$$\begin{tikzcd} R \times X \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\mu"'] & R \otimes X \arrow[d, dashed, "l_X"] \\ & X \end{tikzcd}$$

calculando em $(1,x) \in R \times X$ temos que $l_X(1 \otimes x) = x$. Resta mostrar que l_X é isomorfismo, para isto considere o mapa linear $l' \colon X \to R \otimes X$ dado por $l'(x) = 1 \otimes x$, é imediato que $l' \circ l_X = \mathrm{id}$, por outro lado $l_X \circ l'(1 \otimes x) = 1 \otimes x$. Note que todo elemento de $R \otimes X$ pode ser escrito na forma $1 \otimes x$, isso se deve primeiramente ao fato de $R \otimes X$ ser gerado pelos tensores elementares, assim um elemento de $R \otimes X$ é da forma $z = \sum_{i=1}^{n} a_n(r_n \otimes x_n)$, em que $n \geq 1$, $a_n, r_n \in R$ e $x_n \in X$, mas como $\otimes$ é bilinear então $z = \sum_{i=1}^{n} a_n r_n (1 \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes a_n r_n x_n) = 1 \otimes (\sum_{i=1}^{n} a_n r_n x_n)$. Portanto, $l_X \circ l' = \mathrm{id}$, o que conclui que $l' = l_X^{-1}$, ou seja, l_X é isomorfismo. $\square$

Para mostrar a associatividade do produto tensorial, convém primeiro definir o produto tensorial triplo e mostrar que podemos construir produtos tensoriais triplos a partir do produto tensorial duplo.

Definição 2.14. Sejam X, Y e Z R-módulos, o produto tensorial triplo destes três módulos é um par $(M, \otimes)$ em que M é um R-módulo e $\otimes \colon X \times Y \times Z \to M$ é um mapa R-trilinear satisfazendo a propriedade universal de que dado outro par (M', T), em que M' é um R-módulo e $T \colon X \times Y \times Z \to M'$ é um mapa R-trilinear, $!\exists u \colon M \to M'$ mapa R-linear tal que $u \circ \otimes = T$.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times Z \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "T"'] & M \arrow[d, dashed, "u"] \\ & M' \end{tikzcd}$$

Como o par $(M, \otimes)$ é único a menos de isomorfismo, é comum escrever $M = X \otimes Y \otimes Z$ e deixar implícito o mapa trilinear $\otimes$.

Teorema 2.15. *Sejam X, Y, Z R-módulos e $(X \otimes Y, \otimes)$ e $((X \otimes Y) \otimes Z, \otimes)$ produtos tensorias duplos, então $((X \otimes Y) \otimes Z, \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id}))$ é um produto tensorial triplo dos R-módulos X, Y e Z.*

Demonstração. Seja (M, T) um par em que M é um R-módulo e $T \colon X \times Y \times Z \to M$ é um mapa trilinear. Para cada $z \in Z$ temos um mapa bilinear $B_z \colon X \times Y \to M$ dado por $B_z(x,y) = T(x,y,z)$, então pela propriedade universal do produto tensorial aplicada ao par $(X \otimes Y, \otimes)$ existe um único mapa linear $u_z \colon X \otimes Y \to M$ tal que $u_z \circ \otimes = B_z$

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "B_z"'] & X \otimes Y \arrow[d, dashed, "u_z"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Por outro lado, $B_{z+z'} = B_z + B_{z'}$ e $B_{rz} = rB_z$, $\forall z.z' \in Z$ e $\forall r \in R$, logo

$$\begin{aligned} u_{z+z'} \circ \otimes &= B_{z+z'} \\ &= B_z + B_{z'} \\ &= u_z \circ \otimes + u_{z'} \circ \otimes \\ &= (u_z + u_{z'}) \circ \otimes, \end{aligned}$$

e então pela propriedade universal do produto tensorial o mapa que faz o diagrama comutar é único, portanto, $u_{z+z'} = u_z + u_{z'}$, analogamente segue que $u_{rz} = ru_z$, ou seja, u_z é linear em z. Com isto podemos construir o mapa bilinear $b\colon (X \otimes Y) \times Z \to M$ dado por $b(t, z) = u_z(t)$, e então, pela propriedade universal do produto tensorial aplicada ao par $((X \otimes Y) \otimes Z, \otimes)$, $!\exists u\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to M$ mapa linear tal que $u \circ \otimes = b$

$$\begin{tikzcd} (X \otimes Y) \times Z \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "b"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, dashed, "u"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Resta verificar que este u é o mapa da propriedade universal de produto tensorial triplo, temos que

$$\begin{aligned} u \circ \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id})(x, y, z) &= u \circ \otimes(x \otimes y, z) \\ &= b(x \otimes y, z) \\ &= u_z(x \otimes y) \\ &= u_z \circ \otimes(x, y) \\ &= B_z(x, y) \\ &= T(x, y, z), \end{aligned}$$

isto conclui que $u \circ [\otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id})] = T$, resta agora mostrar que u é o único com esta propriedade. Seja $v\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to M$ qualquer mapa linear tal que $v \circ \otimes \circ (\otimes \times \mathrm{id})(x, y, z) = T$, fixemos um $z \in Z$, temos então o mapa bilinear

$$\begin{aligned} X \times Y &\longrightarrow M \\ (x, y) &\longmapsto v((x \otimes y) \otimes z) \end{aligned}$$

então pela propriedade universal temos que existe um mapa linear $v_z\colon X \otimes Y \to M$ tal que $v_z(x \otimes y) = v((x \otimes y) \otimes z)$, mas $v_z \circ \otimes(x, y) = v_z(x \otimes y) = v((x \otimes y) \otimes z) = T(x, y, z) = B_z(x, y)$, por outro lado $u_z \circ \otimes(x, y) = B_z(x, y)$, então pela propriedade universal só há um mapa linear com essa propriedade, logo $v_z = u_z$, $\forall z \in Z$, então $v_z(x \otimes y) = u_z(x \otimes y) \implies v((x \otimes y) \otimes z) = u((x \otimes y) \otimes z), \forall x \in X, y \in Y, z \in Z$, e como todo elemento de $(X \otimes Y) \otimes Z$ é combinação linear de tensores da forma $(x \otimes y) \otimes z$ isso implica que $v = u$, isto conclui que u é único. $\square$

Analogamente podemos tomar produtos tensoriais duplos na outra ordem para obter um produto tensorial triplo.

Teorema 2.16. *Sejam X, Y, Z R-módulos e $(Y \otimes Z, \otimes)$ e $(X \otimes (Y \otimes Z), \otimes)$ produtos tensorias duplos, então $(X \otimes (Y \otimes Z), \otimes \circ (\mathrm{id} \times \otimes))$ é um produto tensorial triplo dos R-módulos X, Y e Z.*

Com isto, segue facilmente a associatividade do produto tensorial.

Teorema 2.17 (Associatividade)**.** *Sejam X, Y, Z R-módulos, existe um único isomorfismo $a_{X,Y,Z} \colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ tal que $a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$.*

Demonstração. Pelos teoremas anteriores os produtos tensoriais iterados formam um produto tensorial triplo. Temos dois produtos tensoriais triplos, que são $((X \otimes Y) \otimes Z, \otimes(\otimes \times \mathrm{id}))$ e $(X \otimes (Y \otimes Z), \otimes(\mathrm{id} \times \otimes))$, aplicando a propriedade universal de produto tensorial triplo ao par $((X \otimes Y) \otimes Z, \otimes(\otimes \times \mathrm{id}))$ temos a existência e unicidade do mapa linear $a_{X,Y,Z}$ do enunciado.

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \times Z \arrow[r, "\otimes(\otimes\times\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\otimes(\mathrm{id}\times\otimes)"'] & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[d, dashed, "a_{X,Y,Z}"] \\
& X \otimes (Y \otimes Z)
\end{tikzcd}$$

Para obter a inversa de $a_{X,Y,Z}$, provando assim que é um isomorfismo, basta aplicar a propriedade universal do produto tensorial triplo ao par $(X \otimes (Y \otimes Z), \otimes(\mathrm{id} \times \otimes))$. $\square$

Teorema 2.18 (Distributividade)**.** *Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de R-módulos indexada por um conjunto A, que pode ser infinito, e seja Y um R-módulo. Então $(\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha) \otimes Y \cong \oplus_{\alpha \in A}(X_\alpha \otimes Y)$ e $Y \otimes (\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha) \cong \oplus_{\alpha \in A}(Y \otimes X_\alpha)$.*

Demonstração. Por brevidade o conjunto A estará implícito na notação. Sejam $p_\alpha \colon \oplus_\beta X_\beta \to X_\alpha$ e $p'_\alpha \colon \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y) \to X_\alpha \otimes Y$ as projeções, dadas por $p_\alpha((x_\beta)_\beta) = x_\alpha$ e $p'_\alpha((x_\beta \otimes y_\beta)_\beta) = x_\alpha \otimes y_\alpha$, e sejam $q_\alpha \colon X_\alpha \to \oplus_\beta X_\beta$ e $q'_\alpha \colon X_\alpha \otimes Y \to \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y)$ as "inclusões", dadas por $q_\alpha(x_\alpha) = (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta$ e $q'_\alpha(x_\alpha \otimes y) = (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y)_\beta$, em que é utilizado o abuso de notação $\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha$, que é $\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha = x_\alpha \in X_\alpha$ se $\alpha = \beta$ e $\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha = 0 \in X_\beta$ se $\alpha \neq \beta$.

Considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\oplus_\beta X_\beta) \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "p_\alpha \times \mathrm{id}"] & (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \arrow[d, dashed, "u_\alpha"] \\
X_\alpha \times Y \arrow[r, "\otimes"] & X_\alpha \otimes Y
\end{tikzcd}$$

Como $\otimes \colon X_\alpha \times Y \to X_\alpha \otimes Y$ é bilinear e p_α e id são lineares, então a composta $\otimes(p_\alpha \times \mathrm{id})$ é bilinear, portanto, pela propriedade universal do produto tensorial $!\exists u_\alpha \colon (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \to X_\alpha \otimes Y$ linear que faz esse diagrama comutar. Compondo com q'_α temos um mapa $q'_\alpha u_\alpha \colon (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \to \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y)$, não é de se esperar que este seja um isomorfismo, uma possibilidade seria somar todos esses mapas, mas A pode ser um conjunto infinito e não temos aqui uma noção de soma de infinitos elementos. Portanto só faz sentido fazer

tal soma se ela sempre resulta em uma soma finita, o que de fato ocorre. Um elemento $z \in (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$ é da forma $z = \sum_{i=1}^n (x_{i,\beta})_\beta \otimes y_i$, $n \geq 1$, então

$$\begin{aligned}
u_\alpha(z) &= u_\alpha\left(\sum_{i=1}^n (x_{i,\beta})_\beta \otimes y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^n u_\alpha((x_{i,\beta})_\beta \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n u_\alpha \otimes ((x_{i,\beta})_\beta, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \otimes(p_\alpha \times \mathrm{id})((x_{i,\beta})_\beta, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \otimes(x_{i,\alpha}, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n x_{i,\alpha} \otimes y_i,
\end{aligned}$$

mas, pela definição de soma direta, para cada i há finitos β's tais que $x_{i,\beta} \neq 0$, porém os i's são finitos, logo há finitos índices (i, β) tais que $x_{i,\beta} \neq 0$, portanto, $u_\alpha(z) \neq 0$ para finitos α's e então $\sum_\alpha q'_\alpha u_\alpha(z)$ é uma soma finita para qualquer $z \in (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$. Isto permite definir o mapa $f := \sum_\alpha q'_\alpha u_\alpha \colon (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \to \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y)$, provemos que este é um isomorfismo.

Para obter a inversa de f, considere agora o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "q_\alpha \times \mathrm{id}"] & X_\alpha \otimes Y \arrow[d, dashed, "v_\alpha"] \\
(\oplus_\beta X_\beta) \times Y \arrow[r, "\otimes"] & (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y
\end{tikzcd}$$

Como $\otimes$ é bilinear e q_α e id são lineares, então $\otimes(q_\alpha \times \mathrm{id})$ é bilinear, logo pela propriedade universal do produto tensorial $!\exists v_\alpha \colon X_\alpha \otimes Y \to (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$ linear que faz esse diagrama comutar. Podemos então construir o mapa $g \colon \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y) \to (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$, dado por $g((z_\beta)_\beta) = \sum_\beta v_\beta(z_\beta)$, este mapa é a inversa de f. Antes de mostrar isso, calculemos f e g sobre geradores de seus domínios. Temos que

$$\begin{aligned}
f((x_\alpha)_\alpha \otimes y) &= \sum_\beta q'_\beta u_\beta((x_\alpha)_\alpha \otimes y) \\
&= \sum_\beta q'_\beta u_\beta \otimes ((x_\alpha)_\alpha, y) \\
&= \sum_\beta q'_\beta \otimes (p_\beta \times \mathrm{id})((x_\alpha)_\alpha, y) \\
&= \sum_\beta q'_\beta \otimes (x_\beta, y) \\
&= \sum_\beta q'_\beta (x_\beta \otimes y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_\beta \otimes y)_\beta \\
&= (x_\alpha \otimes y)_\alpha
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g((x_\alpha \otimes y_\alpha)_\alpha) &= \sum_\alpha v_\alpha(x_\alpha \otimes y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha v_\alpha \otimes (x_\alpha, y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \otimes(q_\alpha \times \mathrm{id})(x_\alpha, y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \otimes((\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta, y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y_\alpha.
\end{aligned}
$$

Com isto, temos então que

$$
\begin{aligned}
gf((x_\alpha)_\alpha \otimes y) &= g((x_\alpha \otimes y)_\alpha) \\
&= \sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y \\
&= \left(\sum_\alpha \delta_{\alpha,\beta} x_\alpha \right)_\beta \otimes y \\
&= (x_\beta)_\beta \otimes y \\
&= (x_\alpha)_\alpha \otimes y,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
fg((x_\alpha \otimes y_\alpha)_\alpha) &= f\left(\sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y_\alpha \right) \\
&= \sum_\alpha f((\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\alpha)_\beta \\
&= \left(\sum_\alpha \delta_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\alpha \right)_\beta \\
&= (x_\beta \otimes y_\beta)_\beta \\
&= (x_\alpha \otimes y_\alpha)_\alpha.
\end{aligned}
$$

Como gf e fg agem como identidade sobre elementos que geram seus domínios, então $gf = \mathrm{id}$ e $fg = \mathrm{id}$, isto conclui que $g = f^{-1}$, de onde temos que $(\oplus_{\alpha\in A} X_\alpha) \otimes Y \cong \oplus_{\alpha\in A}(X_\alpha \otimes Y)$. De forma análoga podemos provar que $Y \otimes (\oplus_{\alpha\in A} X_\alpha) \cong \oplus_{\alpha\in A}(Y \otimes X_\alpha)$. Outra forma, mais econômica, é combinar o isomorfismo $(\oplus_{\alpha\in A} X_\alpha) \otimes Y \cong \oplus_{\alpha\in A}(X_\alpha \otimes Y)$ com os isomorfismos de comutatividade, temos que $Y \otimes (\oplus_{\alpha\in A} X_\alpha) \cong (\oplus_{\alpha\in A} X_\alpha) \otimes Y \cong \oplus_{\alpha\in A}(X_\alpha \otimes Y) \cong \oplus_{\alpha\in A}(Y \otimes X_\alpha)$. $\square$

Corolário 2.19 (Produto tensorial de módulos livres é livre)**.** *Sejam X e Y módulos livre, então $X \otimes Y$ é módulo livre.*

Demonstração. Nesta prova é utilizado o produto tensorial de mapas lineares, o que é introduzido logo após este corolário, porém como essa noção é simples, esta prova não será postergada. Como X e Y são livres então existem conjuntos I e J tais que $X \cong \oplus_{i\in I} R$ e $Y \cong \oplus_{j\in J} R$. Pelo isomorfismo de unitalidade temos que $R \otimes R \cong R$, de onde temos que $X \otimes Y \cong (\oplus_{i\in I} R) \otimes (\oplus_{j\in J} R) \cong \oplus_{i\in I}(R \otimes (\oplus_{j\in J} R)) \cong \oplus_{i\in I}(\oplus_{j\in J} R \otimes R) \cong \oplus_{i\in I}(\oplus_{j\in J} R) \cong \oplus_{(i,j)\in I\times J} R$. Este último isomorfismo é um isomorfismo de reindexação, ele é dado por $((x_{i,j})_{j\in J})_{i\in I} \mapsto (x_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$. $\square$

2.2.3 Produto Tensorial de Mapas Lineares

Sejam $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$ mapas R-lineares entres R-módulos, temos então o mapa $f \times g\colon X \times Y \to X' \times Y'$ dado por $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$, agora considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f\times g"'] & X \otimes Y \\ X' \times Y' \arrow[r, "\otimes"] & X' \otimes Y' \end{tikzcd}$$

como a composta $\otimes(f \times g)$ é bilinear, então pela propriedade universal do produto tensorial existe um único mapa linear $f \otimes g\colon X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ tal que $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$, o mapa $f \otimes g$ é o produto tensorial dos mapas f e g.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f\times g"'] & X \otimes Y \arrow[d, dashed, "f\otimes g"] \\ X' \times Y' \arrow[r, "\otimes"] & X' \otimes Y' \end{tikzcd}$$

2.2.4 O funtor produto tensorial

Com os resultados anteriores podemos construir um funtor $\otimes$, para isto é necessário primeiro fixar os produtos tensoriais de módulos, pois estes são únicos a menos de isomorfismo. Por exemplo, podemos escolher que o produto tensorial de módulos é o utilizado na sua construção, o que provou sua existência.

A categoria dos R-módulos $\mathbf{Mod}_R$ tem por objetos os R-módulos e por flechas os mapas R-lineares entre R-módulos. Fixando uma escolha de produto tensorial de R-módulos, temos então um funtor $\otimes\colon \mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ entre categorias, que sobre objetos é dado por $\otimes(X, Y) = X \otimes Y$ e sobre as flechas é $\otimes(f, g) = f \otimes g$, para quaisquer R-módulos X, X', Y, Y' e mapas lineares $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$. Além disto, $\otimes\colon \mathrm{Mod}_R \times \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$ ser um funtor significa que valem as seguintes propriedades:

- $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$, para quaisquer mapas lineares $f\colon X \to X'$, $f'\colon X' \to X''$, $g\colon Y \to Y'$, $g'\colon Y' \to Y''$, e módulos X, X', Y, Y';
- $\mathrm{id}_{X\otimes Y} = \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y$, para quaisquer módulos X e Y.

Para mostrar que valem essas propriedades, basta mostrar que valem para tensores elementares, pois estes são geradores de $X \otimes Y$. Temos que, para quaisquer $x \in X$ e $y \in Y$,

$$\begin{aligned}
[(f' \otimes g') \circ (f \otimes g)](x \otimes y) &= (f' \otimes g')(f(x) \otimes g(y)) \\
&= f'(f(x)) \otimes g'(g(y)) \\
&= (f' \circ f)(x) \otimes (g' \circ g)(y) \\
&= [(f' \circ f) \otimes (g' \circ g)](x \otimes y),
\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{X \otimes Y}(x \otimes y) &= x \otimes y \\
&= \mathrm{id}_X(x) \otimes \mathrm{id}_Y(y) \\
&= (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y)(x \otimes y).
\end{aligned}$$

Através deste funtor podemos dar a $\mathbf{Mod}_R$ uma estrutura de categoria monoidal, como será visto no próximo capítulo.

2.3 Álgebras de Hopf

Somente estaremos interessados em álgebras de Hopf sobre o corpo dos complexos $\mathbb{C}$ e de dimensão finita. Uma álgebra de Hopf é uma sêxtupla $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ em que (A, μ, η) é uma álgebra, (A, Δ, ε) é uma coálgebra, há uma compatibilidade entre essas duas estruturas no sentido de que $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra, e além disso existe um operador $S\colon A \to A$ que é a antípoda da biálgebra. A antípoda, se existe, é única, então uma biálgebra ser uma álgebra de Hopf é uma propriedade dela. A seguir são dadas as definições com mais detalhes. Duas boas referências para este assunto são [6] e [14].

2.3.1 Duas perspectivas sobre álgebras

A seguir são discutidas duas formas de se pensar a estrutura de álgebra. Isto não será essencial em grande parte do que será feito adiante, exceto no capítulo 4 quando for discutido o Drinfeld Quantum Double, porém conseguir entender álgebra das duas formas expostas a seguir torna as ideias mais claras.

Uma álgebra é um espaço vetorial A munido de uma multiplicação. Mais especificamente, estaremos interessados em álgebras associativas com unidade, então o produto é uma operação binária

$$\begin{aligned}
m\colon A \times A &\longrightarrow A \\
(x, y) &\longmapsto m(x, y) = x \cdot y
\end{aligned}$$

satisfazendo às seguintes propriedades de bilinearidade, associatividade e unitalidade:

- $(x + x') \cdot y = x \cdot y + x' \cdot y, \forall x, x', y \in A$;
- $x \cdot (y + y') = x \cdot y + x \cdot y', \forall x, y, y' \in A$;

- $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y), \forall x, y \in A, \lambda \in \mathbb{C}$;
- $x \cdot (\lambda y) = \lambda(x \cdot y), \forall x, y \in A, \lambda \in \mathbb{C}$;
- $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in A$;
- $\exists e \in A$, chamado de unidade, tal que $e \cdot x = x = x \cdot e, \forall x \in A$.

Agora, como $m\colon A \times A \to A$ é bilinear, pela propriedade universal do produto tensorial ele se fatora por um único mapa linear $\mu\colon A \otimes A \to A$ tal que $\mu(x \otimes y) = m(x, y)$.

$$\begin{tikzcd} A \times A \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "m"'] & A \otimes A \arrow[d, dashed, "\mu"] \\ & A \end{tikzcd}$$

A associatividade de m implica que μ satifaz à equação $\mu(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu)a_{A,A,A}$ (em que $a_{A,A,A}$ é o isomorfismo de associtivade definido no teorema 2.17), à qual também chamamos de associatividade. Também podemos construir a transformação linear $\eta\colon \mathbb{C} \to A$ dada por $\eta(1) = e$, as propriedades de unidade que e satisfaz implicam que η satisfaz às equações $\mu(\eta \otimes \mathrm{id}_A)l_A^{-1} = \mathrm{id}_A$ e $\mu(\mathrm{id}_A \otimes \eta)r_A^{-1} = \mathrm{id}_A$, onde $l_A\colon \mathbb{C} \otimes A \to A$ e $r_A\colon A \otimes \mathbb{C} \to A$ são os isomorfismos dados por $l_A(1 \otimes x) = x$ e $r_A(x \otimes 1) = x$, e, portanto, $l_A^{-1}(x) = 1 \otimes x$ e $r_A^{-1}(x) = x \otimes 1$. Como será visto adiante, a categoria dos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, ou, de forma mais geral, a categoria dos R-módulos para algum anel comutativo com unidade R, é uma categoria monoidal, e então devido ao Teorema de Coerência de Mac Lane podemos deixar implícitos os isomorfismos $a_{A,A,A}$, l_A e r_A sem ambiguidade. Com isto, estas equações se reescrevem como $\mu(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu)$, $\mu(\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A$ e $\mu(\mathrm{id}_A \otimes \eta) = \mathrm{id}_A$.

Por outro lado, dado um espaço vetorial A e transformações lineares $\mu\colon A \otimes A \to A$ e $\eta\colon \mathbb{C} \to A$ tais que sejam satisfeitas a equação de associatividade $\mu(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu)$ e as de unitalidade $\mu(\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A$ e $\mu(\mathrm{id}_A \otimes \eta) = \mathrm{id}_A$, podemos construir uma operação binária $m\colon A \times A \to A$ dada pela composição $m = \mu \otimes$ e temos um elemento $e \in A$ definido como $e := \eta(1)$. Segue da linearidade de μ e da bilinearidade de $\otimes$ que m é bilinear, da associatividade de μ que m é associativa e das equações de unitalidade que η satisfaz segue que e é unidade de A, de forma que A é álgebra associativa com unidade.

Com isto, temos duas formas equivalentes de descrever uma álgebra associativa com unidade, que são:

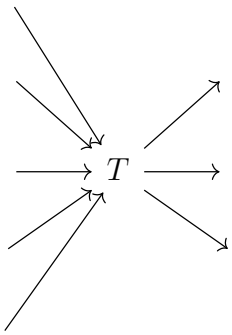
- um espaço vetorial A munido de uma operação binária $m\colon A \times A \to A$ bilinear, associativa e com um elemento $e \in A$ tal que $e \cdot x = x = x \cdot e, \forall x \in A$, ou;
- um espaço vetorial A munido de transformações lineares $\mu\colon A \otimes A \to A$ e $\eta\colon \mathbb{C} \to A$ que satisfazem à equação de associatividade $\mu(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu)$ e às de unitalidade $\mu(\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A$ e $\mu(\mathrm{id}_A \otimes \eta) = \mathrm{id}_A$.

2.3.2 Diagramas de Kuperberg

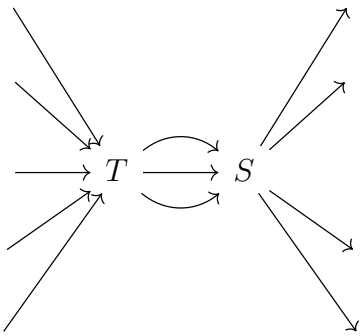
Será muitas vezes conveniente fazer cálculos utilizando a notação de diagramática de Kuperberg. Há diversas formas equivalentes de se interpretar os diagramas, aqui adotaremos

a intepretação de que os diagramas representam composições e produtos tensoriais de transformações lineares. Outra interpretação, também muito útil, é de que os diagramas representam contrações de tensores, como feito em [8].

Utilizaremos a notação $A^{\otimes^n}$ para o produto tensorial $A \otimes A \otimes ... \otimes A$ em que A aparece n vezes, com $n \geq 0$. Se $n = 1$ então $A^{\otimes^1} = A$, e se $n = 0$ então convencionamos que $A^{\otimes^0} = \mathbb{C}$. Os isomorfismos de associatividade e unitalidade estarão sempre implícitos, de forma que não colocaremos parênteses como em $(A \otimes A) \otimes A$ e confundiremos $\mathbb{C} \otimes A$ e $A \otimes \mathbb{C}$ com A. Uma transformação linear da forma $T\colon A^{\otimes^m} \to A^{\otimes^n}$, para $m, n \geq 0$, é representada diagramaticamente por um T com m flechas entrando e n flechas saindo. O diagrama se lê de cima para baixo e da esquerda para a direita. Para $m = 5$ e $n = 3$ o diagrama é da forma



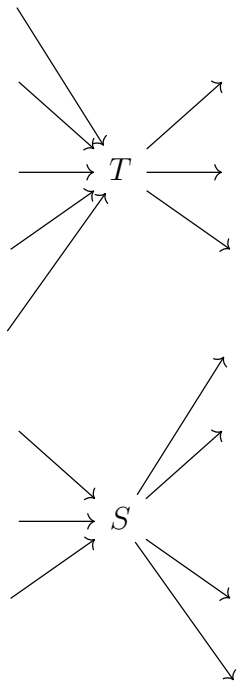
A composição de transformações lineares $T\colon A^{\otimes^m} \to A^{\otimes^n}$ e $S\colon A^{\otimes^n} \to A^{\otimes^p}$ é representada diagramaticamente pela concatenação dos diagramas de T e S. Para $m = 5$, $n = 3$ e $p = 4$ essa composição se representa como



Como a composição é representada por concatenação, temos então a notação conveniente para id_A que é representá-la por uma flecha:

$$\mathrm{id}_A \qquad = \qquad \longrightarrow$$

O produto tensorial de transformações lineares é representado por colocar o diagrama de uma transformação linear paralelo ao diagrama da outra. No caso dos T e S anteriores, o produto tensorial $T \otimes S\colon A^{\otimes^8} \to A^{\otimes^7}$ é representado por



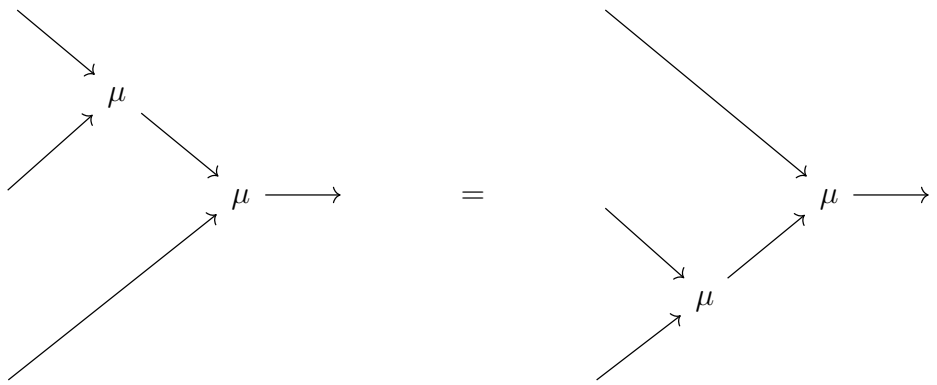
Note que uma transformação linear da forma $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por produto por um número $\lambda \in \mathbb{C}$, ou seja, T é da forma $T(x) = \lambda x$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}$ fixo. Podemos então interpretar o produto tensorial $T \otimes S$ dessa transformação linear $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por uma $S\colon A^{\otimes^n} \to A^{\otimes^m}$ como o produto $\lambda S\colon A^{\otimes^m} \to A^{\otimes^n}$. Confundindo T com o λ, podemos dizer que neste caso o produto tensorial $T \otimes S$ é o mesmo que a multiplicação TS. Isto também permite interpretar um diagrama vazio como representando o número 1.

2.3.3 Álgebra

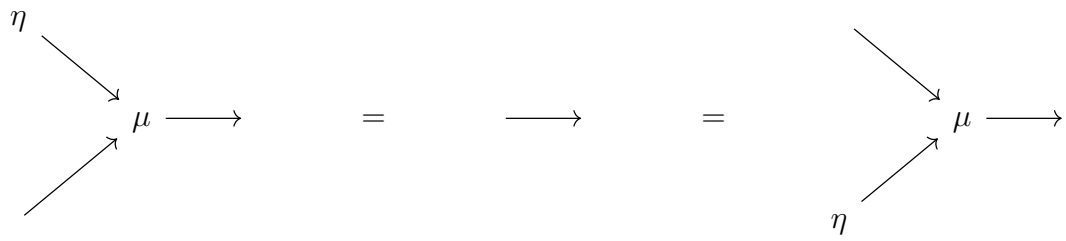
Daqui em diante por álgebra se entenderá uma álgebra associativa com unidade. Também estarão implícitos os isomorfismos de associatividade e unitalidade $a_{A,A,A}\colon (A \otimes A) \otimes A \to A \otimes (A \otimes A)$, $l_A\colon \mathbb{C} \otimes A \to A$ e $r_A\colon A \otimes \mathbb{C} \to A$. A enumeração em letras romanas maiúsculas, a seguir, será utilizada para citar os axiomas de álgebra de Hopf.

Uma álgebra é uma tripla (A, μ, η), em que A é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, e $\mu\colon A \otimes A \to A$ e $\eta\colon \mathbb{C} \to A$ são transformações lineares satisfazendo às equações:

I. (associtividade) $\mu(\mu \otimes \mathrm{id}_A) = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \mu)$;



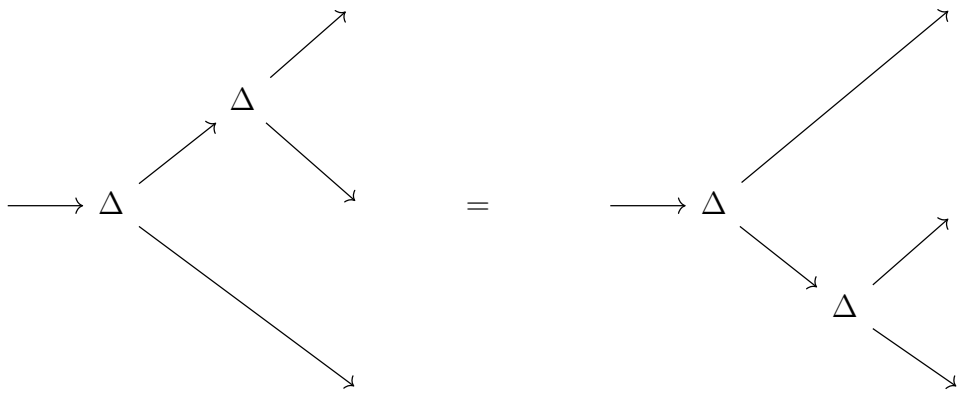
II. (unitalidade) $\mu(\eta \otimes \mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_A = \mu(\mathrm{id}_A \otimes \eta)$.



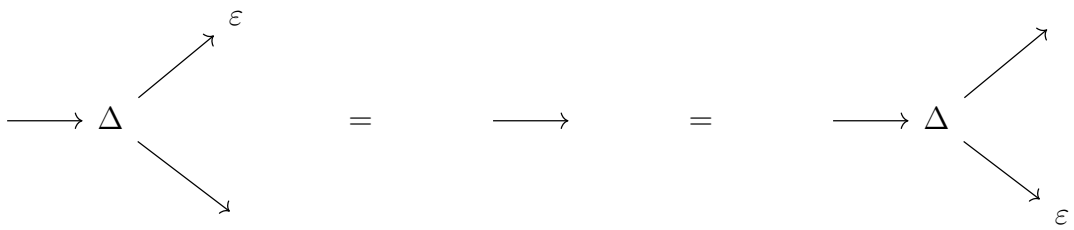
2.3.4 Coálgebra

Coálgebra é a noção dual de álgebra. Uma coálgebra é uma tripla (A, Δ, ε) em que A é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e $\Delta\colon A \to A \otimes A$ e $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$ são transformações lineares satifazendo às equações:

III. (coassociatividade) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = (\mathrm{id}_A \otimes \Delta)\Delta$;



IV. (counitalidade) $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = \mathrm{id}_A = (\mathrm{id}_A \otimes \varepsilon)\Delta$.



2.3.5 Biálgebra

Uma biálgebra é uma quíntupla $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ em que (A, μ, η) é uma álgebra, (A, Δ, ε) é uma coálgebra, e há uma compatibilidade entre essas duas estruturas, no sentido de que são satisfeitas as seguintes equações:

V. $(\mu \otimes \mu)(\mathrm{id}_A \otimes \tau_{A,A} \otimes \mathrm{id}_A)(\Delta \otimes \Delta) = \Delta\mu$;

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & \Delta \arrow[r] \arrow[dr] & \mu \arrow[r] & {} \\ & \Delta \arrow[r] \arrow[ur] & \mu \arrow[r] & {} \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd}[row sep=small] & {} \arrow[dr] & & {} \\ & & \mu \arrow[r] & \Delta \arrow[ur] \arrow[dr] \\ & {} \arrow[ur] & & {} \end{tikzcd}$$

VI. $\varepsilon\mu = \varepsilon \otimes \varepsilon$;

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & {} \arrow[r] & \varepsilon \\ & \mu \arrow[r] & \varepsilon & \\ & & {} \arrow[r] & \varepsilon \end{tikzcd}$$

VII. $\Delta\eta = \eta \otimes \eta$;

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & {} \arrow[r] & \eta \\ \eta \arrow[r] & \Delta \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & & {} \arrow[r] & \eta \end{tikzcd}$$

VIII. $\varepsilon\eta = 1$.

$$\eta \longrightarrow \varepsilon \qquad = \qquad \varnothing$$

Antes de definir o que é uma antípoda, concluindo a definição de álgebra de Hopf, convém notar que a estrutura de biálgebra permite dar a $\mathrm{Hom}(A, A)$ uma estrutura de álgebra (associativa com unidade), em que o produto $f \cdot g$ é dado por

$$f \cdot g = \begin{tikzcd}[row sep=small] & & f \arrow[dr, bend left] & & \\ & \Delta \arrow[ur, bend left] \arrow[dr, bend right] & & \mu \arrow[r] & {} \\ & & g \arrow[ur, bend right] & & \end{tikzcd}$$

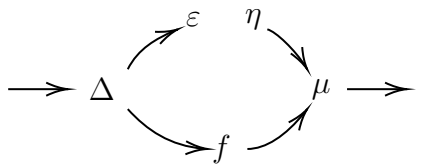
e a unidade é

$$\overline{e} = \quad \longrightarrow \varepsilon \qquad \eta \longrightarrow$$

Lema 2.20. *Dada uma biálgebra* $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$*,* $\mathrm{Hom}(A, A)$ *é uma álgebra com o produto e unidade anteriores.*

Demonstração. Dado um $f \in \mathrm{Hom}(A, A)$, temos que

$\overline{e} \cdot f =$



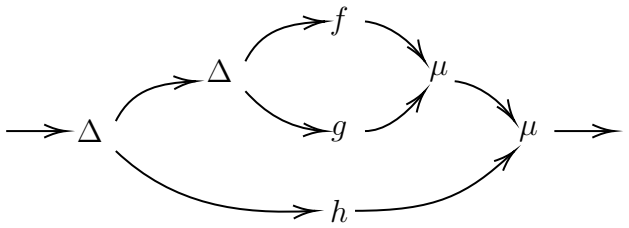
(II) e (IV)

$=$

$= f,$

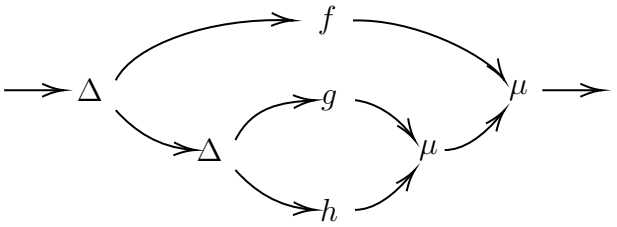
e da mesma forma $f \cdot \overline{e} = f$. Que o produto é associativo, dados $f, g, h \in \mathrm{Hom}(A, A)$ temos que

$(f \cdot g) \cdot h =$



(I) e (III)

$=$



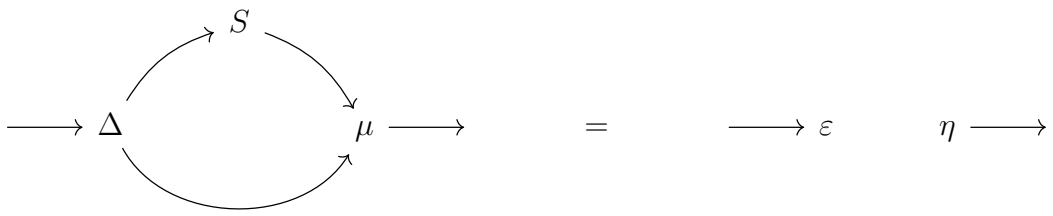
$= f \cdot (g \cdot h).$

□

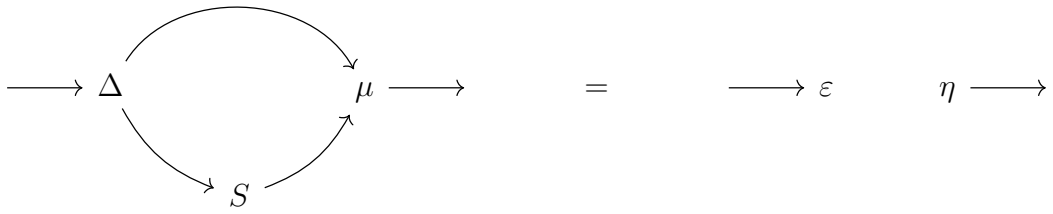
2.3.6 Álgebra de Hopf

Uma álgebra de Hopf é uma sêxtupla $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ em que $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ é uma biálgebra e $S\colon A \to A$ é um operador, chamado de antípoda, que satisfaz às equações:

IX. $\mu(S \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = \eta\varepsilon$;



X. $\mu(\mathrm{id}_A \otimes S)\Delta = \eta\varepsilon$;



Pelo lema 2.20 podemos entender $\mathrm{Hom}(A, A)$ como uma álgebra, de forma que as equações $\mu(S \otimes \mathrm{id}_A)\Delta = \eta\varepsilon$ e $\mu(\mathrm{id}_A \otimes S)\Delta = \eta\varepsilon$ podem ser reescritas como $S \cdot \mathrm{id}_A = \overline{e}$ e $\mathrm{id}_A \cdot S = \overline{e}$. Como dito anteriormente, uma biálgebra admite no máximo uma antípoda. De fato, se $S' \colon A \to A$ é outra antípoda, então

$$\begin{aligned} S' &= \overline{e} \cdot S' \\ &= (S \cdot \mathrm{id}_A) \cdot S' \\ &= S \cdot (\mathrm{id}_A \cdot S') \\ &= S \cdot \overline{e} \\ &= S. \end{aligned}$$

Exemplo: Álgebra de Grupo

Seja G um grupo finito qualquer. A álgebra de grupo é o $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}G$, que é o espaço vetorial que tem por base o próprio grupo G, assim um elemento $x \in \mathbb{C}G$ é da forma $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g$, em que $\lambda_g \in \mathbb{C}$.

A álgebra de grupo $A = \mathbb{C}G$ é uma álgebra de Hopf com a seguinte estrutura:

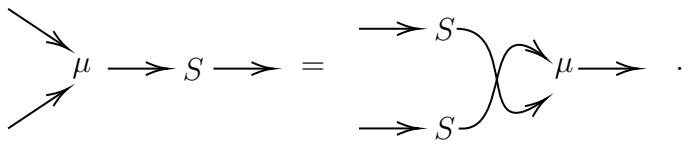
- $\mu \colon A \otimes A \to A$ é dado pelo produto em G, ou seja, $\mu(g \otimes h) = gh, \forall g, h \in G$;
- $\eta \colon \mathbb{C} \to A$ é dado por $\eta(1) = e$, em que $e \in G$ é o elemento neutro do grupo;
- $\Delta \colon A \to A \otimes A$ é dado por $\Delta(g) = g \otimes g, \forall g \in G$;
- $\varepsilon \colon A \to \mathbb{C}$ é dado por $\varepsilon(g) = 1, \forall g \in G$;
- $S \colon A \to A$ é dado por $S(g) = g^{-1}, \forall g \in G$.

2.3.7 A antípoda é antihomomorfismo

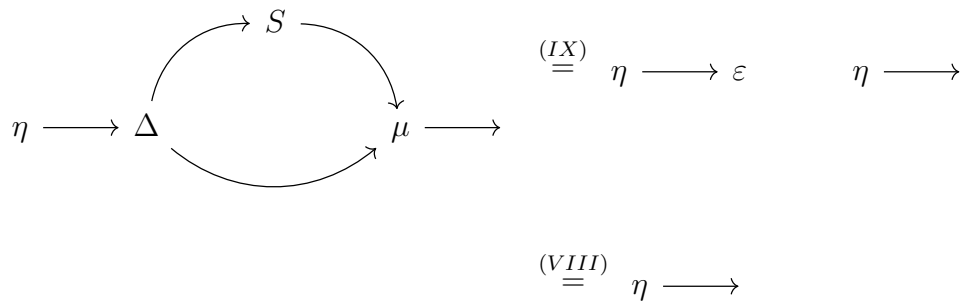
Para uso posterior, mostremos que a antípoda $S\colon A \to A$ de uma álgebra de Hopf $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ é um antihomomorfismo de álgebras, isto quer dizer que $S(e) = e$ e $S(x \cdot y) = S(y) \cdot S(x)$, ou, equivalentemente, $S\eta = \eta$ e $S\mu = \mu^{op}(S \otimes S)$, em que $\mu^{op} = \mu\tau_{A,A}$. Diagramaticamente, isso se escreve como

$$\eta \longrightarrow S \longrightarrow \quad = \quad \eta \longrightarrow$$

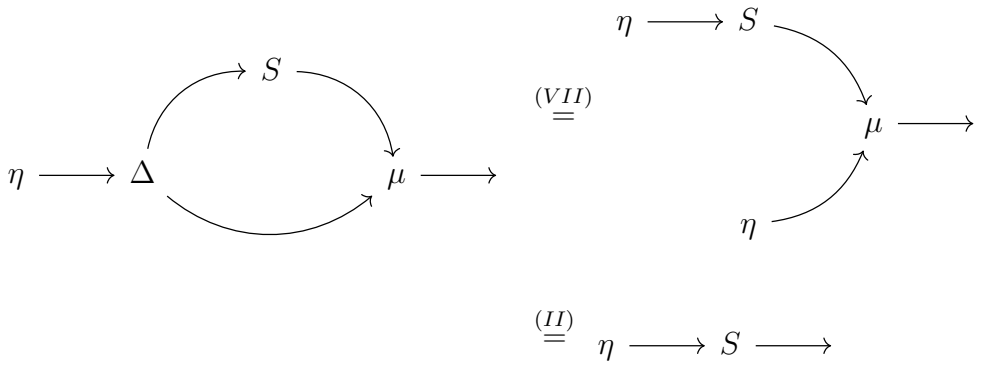
e



Primeiro mostremos que $S\eta = \eta$, temos que



por outro lado,



logo $S\eta = \eta$. Resta mostrar que $S\mu = \mu^{op}(S \otimes S)$, ambos $S\mu$ e $\mu^{op}(S \otimes S)$ são elementos de $\mathrm{Hom}(A \otimes A, A)$, para mostrar a identidade utilizaremos uma estrutura de álgebra que

$\mathrm{Hom}(A \otimes A, A)$ possui. Dados $f, g \in \mathrm{Hom}(A \otimes A, A)$, definimos seu produto como

$$f * g = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \Delta \arrow[r] \arrow[dr] & f \arrow[dr] & \\ & & & \mu \arrow[r] \\ & \Delta \arrow[r] \arrow[ur] & g \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

A unidade de $\mathrm{Hom}(A \otimes A, A)$ é

$$u = \begin{tikzcd}[row sep=small] & \varepsilon \\ & \varepsilon \end{tikzcd} \quad \eta \longrightarrow \quad .$$

Temos que

$$(S\mu) * \mu = \begin{tikzcd}[column sep=small] & \Delta \arrow[r] \arrow[dr] & \mu \arrow[r] & S \arrow[dr] & \\ & & & & \mu \arrow[r] \\ & \Delta \arrow[r] \arrow[urr] & & \mu \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$\overset{(V)}{=} \begin{tikzcd}[column sep=small] & & & S \arrow[dr] & \\ & \mu \arrow[r] & \Delta \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mu \arrow[r] \\ & & & & \end{tikzcd}$$

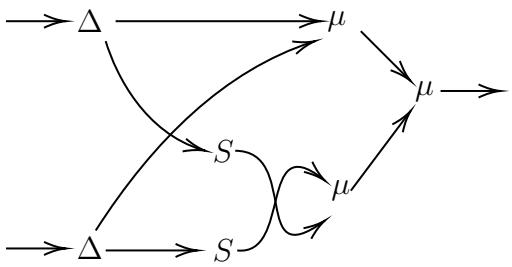
$$\overset{(IX)}{=} \begin{tikzcd}[column sep=small] & & & \\ & \mu \arrow[r] & \varepsilon & \eta \arrow[r] \\ & & & \end{tikzcd}$$

$$\overset{(VI)}{=} \begin{tikzcd}[row sep=small] & \varepsilon \\ & \varepsilon \end{tikzcd} \quad \eta \longrightarrow$$

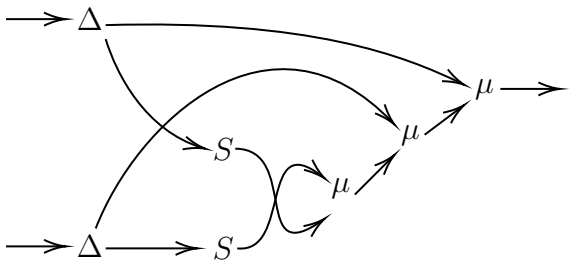
$$= u,$$

por outro lado,

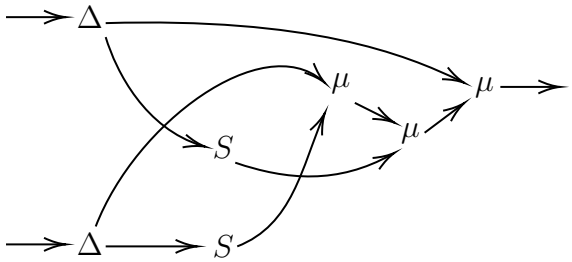
$$\mu * (\mu^{op}(S \otimes S)) =$$



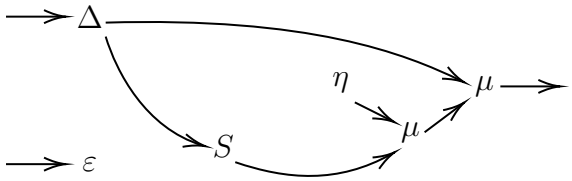
$$\overset{(I)}{=}$$



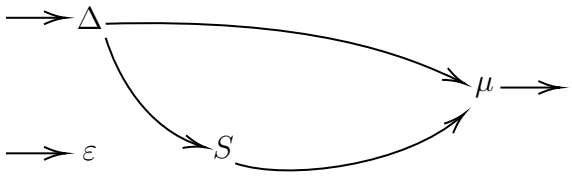
$$\overset{(I)}{=}$$



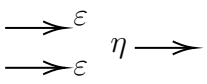
$$\overset{(X)}{=}$$



$$\overset{(II)}{=}$$



$$\overset{(X)}{=}$$



$$= u.$$

Com isto, obtivemos que $(S\mu) * \mu = u$ e $\mu * (\mu^{op}(S \otimes S)) = u$, portanto,

$$\begin{aligned} S\mu &= (S\mu) * u \\ &= (S\mu) * \mu * (\mu^{op}(S \otimes S)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= u * (\mu^{op}(S \otimes S)) \\
&= \mu^{op}(S \otimes S),
\end{aligned}
$$

o que conclui que $S\colon A \to A$ é antihomomorfismo. Note que, se S é invertível, então S^{-1} também é antihomomorfismo, pois

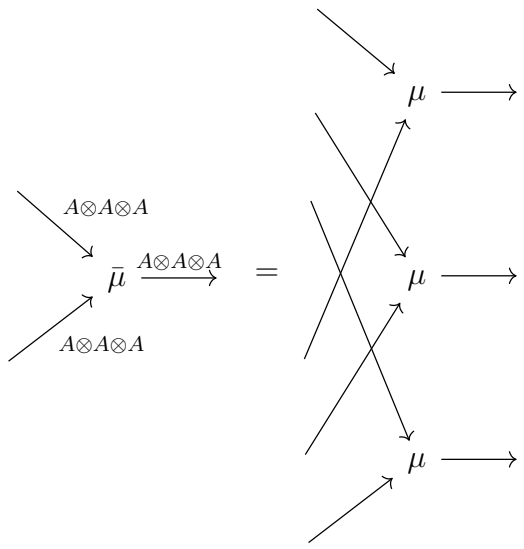
$$S^{-1}(e) = S^{-1}(S(e)) = e,$$

e também

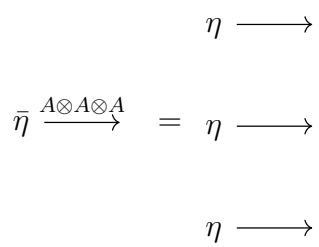
$$S^{-1}(x \cdot y) = S^{-1}(SS^{-1}(x) \cdot SS^{-1}(y)) = S^{-1}S(S^{-1}(y) \cdot S^{-1}(x)) = S^{-1}(y) \cdot S^{-1}(x).$$

2.3.8 Produto Tensorial de Álgebras

Para uso posterior, convém notar que dada uma álgebra (A, μ, η) podemos dar uma estrutura de álgebra a $A \otimes A$ ou, de forma mais geral, para $A^{\otimes^n}$ para qualquer $n \geq 1$. Para $n = 3$, a álgebra $(A^{\otimes^n}, \bar{\mu}, \bar{\eta})$ é dada diagramaticamente por



e



Para os demais n's é análogo. Como visto anteriormente, a álgebra (A, μ, η) é equivalentemente uma tripla (A, m, e), em que $m\colon A \times A \to A$ é o produto em A dado por $m(x, y) = \mu(x \otimes y)$, o que se denota por $m(x, y) = x \cdot y$, e a unidade é $e = \eta(1)$, de forma que $e \cdot x = x = x \cdot e$, $\forall x \in A$. Podemos entender a álgebra $(A^{\otimes^n}, \bar{\mu}, \bar{\eta})$ como uma tripla $(A^{\otimes^n}, \bar{m}, \bar{e})$, em que $\bar{m}\colon A^{\otimes^n} \times A^{\otimes^n} \to A^{\otimes^n}$ é a multiplicação componente a

componente, no seguinte sentido: dados $x_1 \otimes ... \otimes x_n, y_1 \otimes ... \otimes y_n \in A \otimes A$, o produto de ambos é $\bar{m}(x_1 \otimes ... \otimes x_n, y_1 \otimes ... \otimes y_n) = (x_1 \otimes ... \otimes x_n) \cdot (y_1 \otimes ... \otimes y_n) = x_1 \cdot y_1 \otimes ... \otimes x_n \cdot y_n$, o produto $\bar{m}$ é então obtido estendendo por linearidade. A unidade é $\bar{e} = e \otimes ... \otimes e$, em que e aparece n vezes. Dessa forma, $\bar{\mu}$ é tal que $\bar{\mu}(x_1 \otimes ... \otimes x_n \otimes y_1 \otimes ... \otimes y_n) = x_1 \cdot y_1 \otimes ... \otimes x_n \cdot y_n = \mu(x_1 \otimes y_1) \otimes ... \otimes \mu(x_n \otimes y_n)$.

Estas são duas descrições equivalentes da álgebra $(A^{\otimes^n}, \bar{\mu}, \bar{\eta})$, a verificação dos axiomas de álgebra é simples e não será feita aqui. Se A é uma álgebra de Hopf, também é possível tornar $A \otimes A$ uma álgebra de Hopf por uma construção semelhante à descrita acima, porém isto não será utilizado.

Capítulo 3

Categorias Monoidais

3.1 Categorias Monoidais

Categorias monoidais do tipo fusion esféricas são utilizadas na construção do invariante de Turaev-Viro, este permite construir modelos com ordem topológica, como exposto em [2]. Neste capítulo trataremos de forma geral as categorias monoidais, e é em grande parte baseado em [21], mas também um pouco em [22]. Serão dados poucos exemplos de categorias monoidais, porém é exposto com mais detalhe o exemplo da categoria de representações de uma álgebra de Hopf no capítulo 4. Também será tratado do cálculo gráfico, que permite realizar cálculos algébricos envolvendo flechas de uma categoria monoidal através de manipulações geométricas. Além das duas referências anteriores, também há a [20] que trata de linguagens gráficas para categorias monoidais de forma mais geral.

3.1.1 Categorias Monoidais

Uma categoria monoidal é uma categoria com multiplicação. Elas são também chamadas de categorias tensoriais e o produto monoidal é também chamado de produto tensorial. O nome monoidal vem de essa multiplicação ser semelhante à da definição de um monóide, mas algumas igualdades que teríamos para um monóide são substituídas por isomorfismos. Relembremos a definição de um monóide. Um monóide é um conjunto M munido de uma operação binária $\cdot : M \times M \to M$, chamada de multiplicação, tal que:

- a multiplicação é associativa, ou seja, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \forall x, y, z \in M$;
- existe um elemento neutro $e \in M$, tal que $e \cdot x = x = x \cdot e, \forall x \in M$.

Semelhantemente, uma categoria monoidal $\mathbf{C}$ é uma categoria com uma multiplicação, mas esta multiplicação age sobre objetos e flechas, então ela é definida como um funtor $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Para isso, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.1. Dadas categorias $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, a categoria produto $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ é a categoria cujos objetos são pares (C, D) e as flechas são pares $(f, g) \colon (C, D) \to (C', D')$, onde $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, $D, D' \in \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$, $f \in \mathrm{Ar}(\mathbf{C})$ e $g \in \mathrm{Ar}(\mathbf{D})$, com composição componente a componente, ou seja, $(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g)$, e identidade $\mathrm{id}_{(C,D)} = (\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_D)$.

Além disso, uma categoria monoidal possui um objeto unidade $\mathbb{1}$, que é análogo ao elemento neutro de um monóide. Porém, a propriedade de elemento neutro e a associatividade são neste caso a menos de isomorfismo, então uma categoria monoidal é definida da seguinte forma:

Definição 3.2. Uma categoria monoidal $\mathbf{C}$ é uma categoria munida de:

- um funtor $\otimes\colon \mathbf{C}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ chamado de produto monoidal;
- um objeto $\mathbb{1}$ chamado de objeto unidade;
- um isomorfismo natural de associatividade $a\colon \otimes\circ(\otimes\times\mathrm{id}_{\mathbf{C}})\to\otimes\circ(\mathrm{id}_{\mathbf{C}}\times\otimes)$, $a=\{a_{X,Y,Z}\colon (X\otimes Y)\otimes Z\to X\otimes(Y\otimes Z)\}_{X,Y,Z\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$;
- um isomorfismo natural de unitalidade à esquerda $l\colon \mathbb{1}\otimes ?\to\mathrm{id}_{\mathbf{C}}$, $l=\{l_X\colon \mathbb{1}\otimes X\to X\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$;
- um isomorfismo natural de unitalidade à direita $r\colon ?\otimes\mathbb{1}\to\mathrm{id}_{\mathbf{C}}$, $r=\{r_X\colon \mathbb{1}\otimes X\to X\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$;

tal que são satisfeitos os axiomas do pentágono e do triângulo, que é a comutatividade dos diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd}
 & (X\otimes Y)\otimes(Z\otimes W) \arrow[dr, "a_{X,Y,Z\otimes W}"] & \\
((X\otimes Y)\otimes Z)\otimes W \arrow[ur, "a_{X\otimes Y,Z,W}"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}\otimes\mathrm{id}_W"'] & & X\otimes(Y\otimes(Z\otimes W)) \\
(X\otimes(Y\otimes Z))\otimes W \arrow[rr, "a_{X,Y\otimes Z,W}"'] & & X\otimes((Y\otimes Z)\otimes W) \arrow[u, "\mathrm{id}_X\otimes a_{Y,Z,W}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & X\otimes Y & \\
(X\otimes\mathbb{1})\otimes Y \arrow[ur, "r_X\otimes\mathrm{id}_Y"] \arrow[rr, "a_{X,\mathbb{1},Y}"] & & X\otimes(\mathbb{1}\otimes Y) \arrow[ul, "\mathrm{id}_X\otimes l_Y"']
\end{tikzcd}$$

para todos objetos X,Y,Z e $W\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Os funtores $\mathbb{1}\otimes ?, ?\otimes\mathbb{1}\colon \mathbf{C}\to\mathbf{C}$ são dados por

$$\begin{aligned}
&\mathbb{1}\otimes ?(X)=\mathbb{1}\otimes X,\\
&\mathbb{1}\otimes ?(f)=\mathrm{id}_{\mathbb{1}}\otimes f,\\
&?\otimes\mathbb{1}(X)=X\otimes\mathbb{1},\\
&?\otimes\mathbb{1}(f)=f\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{1}},
\end{aligned}$$

para $X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e $f\in\mathrm{Ar}(\mathbf{C})$. A naturalidade de a, l e r significa que para todas flechas $f:X\to X'$, $g:Y\to Y'$ e $h:Z\to Z'$ em $\mathbf{C}$, os diagramas a seguir comutam.

$$\begin{tikzcd}
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[r, "(f\otimes g)\otimes h"] \arrow[d, "a_{X,Y,Z}"] & (X' \otimes Y') \otimes Z' \arrow[d, "a_{X',Y',Z'}"] \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[r, "f\otimes(g\otimes h)"] & X' \otimes (Y' \otimes Z')
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \otimes X \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}\otimes f"] \arrow[d, "l_X"] & \mathbb{1} \otimes Y \arrow[d, "l_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \otimes \mathbb{1} \arrow[r, "f\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, "r_X"] & Y \otimes \mathbb{1} \arrow[d, "r_Y"] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

Para o produto monoidal é utilizada a notação $\otimes(X, Y) = X \otimes Y$, $\otimes(f, g) = f \otimes g$, $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e $\forall f, g \in \mathrm{Ar}(\mathbf{C})$. A funtorialidade de $\otimes$ implica que, para quaisquer flechas $f : X \to X'$, $f' : X' \to X''$, $g : Y \to Y'$ e $g' : Y' \to Y''$ em $\mathbf{C}$, $(f'f) \otimes (g'g) = (f' \otimes g')(f \otimes g)$ e $\mathrm{id}_{X\otimes Y} = \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y$.

Como exemplo de categoria monoidal, temos a categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ do espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e transformações lineares. Ela tem como objeto unidade $\mathbb{1} = \mathbb{K}$ e como produto monoidal o produto tensorial $\otimes : \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \times \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} \to \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Dados espaços vetoriais Xe Y com bases $\{x_i\}_i$ e $\{y_j\}_j$, respectivamente, o produto tensorial $X \otimes Y$ é o espaço vetorial que tem por base $\{x_i \otimes y_j\}_{i,j}$. Note que se um espaço vetorial tem dimensão infinita, o termo base aqui se refere à base de Hamel, assim $\{x_i\}_i$ ser base de X significa que para todo vetor $x \in X$ existe uma única família $\{a_i\}_i \subseteq \mathbb{K}$ onde $\{i : a_i \neq 0\}$ é finito e $x = \sum_i a_i x_i$. Em outras palavras, as combinações lineares são finitas. Para transformações lineares $f\colon X \to X'$ e $g\colon Y \to Y'$ o produto tensorial $f \otimes g\colon X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ é a transformação linear dada por $(f \otimes g)(x_i \otimes y_j) = f(x_i) \otimes g(y_j)$.

O isomorfismo de associatividade é $a_{X,Y,Z}\colon (X \otimes Y) \otimes Z \to X \otimes (Y \otimes Z)$ dado por $a_{X,Y,Z}((x \otimes y) \otimes z) = x \otimes (y \otimes z)$. Os isomorfismos de unitalidade são $l_X\colon \mathbb{K} \otimes X \to X$ dado por $l_X(1 \otimes x) = x$ e $r_X\colon X \otimes \mathbb{K} \to X$ dado por $r_X(x \otimes 1) = x$.

De forma mais geral, para qualquer anel comutativo com unidade R temos uma categoria monoidal $\mathbf{Mod}_R$, o produto monoidal $\otimes\colon \mathbf{Mod}_R \times \mathbf{Mod}_R \to \mathbf{Mod}_R$ e os isomorfismos naturais a, l e r são conforme mostrado nos preliminares sobre módulos.

3.1.2 Teorema de Mac Lane e Convenção de Notação

Num monóide o produto é associativo, isso permite não precisar escrever os parênteses quando escrevemos produtos de mais de dois elementos. Também, o elemento neutro sempre pode ser omitido quando multiplica qualquer outro elemento do monóide. A definição de categoria monoidal é suficiente para termos propriedades semelhantes, conforme o Teorema de Coerência de Mac Lane (este resultado é tratado no livro [18] no capítulo VII.*Monoids*, na seção 2.*Coherence*, também convém ver na referência [20] a seção sobre *(planar) monoidal categories*):

Teorema 3.3. *Dada uma categoria monoidal* $\mathbf{C}$*, qualquer diagrama formal obtido por composição ou produto monoidal de flechas identidade ou os isomorfismos* $a_{X,Y,Z}$*,* l_X *e* r_X*, comuta. Um diagrama formal é aquele que é obtido a partir dos axiomas de categoria monoidal, sem utilizar alguma propriedade específica da categoria* $\mathbf{C}$*.*

Este resultado unido com a naturalidade de a, l e r, implica que ao compormos flechas da categoria monoidal $\mathbf{C}$ podemos omitir as flechas $a_{X,Y,Z}$, l_X e r_X, os parênteses e o objeto unidade $\mathbb{1}$, sem ambiguidade. Dados objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ que são relacionados por diferentes ordenações dos parênteses, no que diz respeito ao produto monoidal, e pela presença ou ausência de $\mathbb{1}$ multiplicando (tensorizando) algum objeto, os objetos A e B são isomorfos e esse isomorfismo é construído por isomorfismos de associatividade ($a_{X,Y,Z}$), unitalidade (l_X e r_X) e identidades, por composição e tensorização. Então pelo Teorema 3.3 esse isomorfismo, construído dessa forma, é único, e portanto podemos deixá-lo implícito, sem ambiguidade. Se temos flechas $f : X \to A$ e $g : B \to Y$, e $i : A \to B$ é o isomorfismo anterior, então temos a composta $gif : X \to Y$, como i é único então podemos simplificar a notação escrevendo $gf : X \to Y$.

Note que, se uma flecha qualquer é tensorizada por um isomorfismo de associatividade ou unitalidade, podemos usar a funtorialidade de $\otimes$ para reescrever tal expressão como composição de uma flecha sem os isomorfismos de associatividade e unitalidade e outra somente com esses isomorfismo e identidades. Por exemplo, dada uma flecha $f : X \to Y$, a funtorialidade de $\otimes$ implica que $(\mathrm{id}_Y \otimes l_Z)(f \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{1}\otimes Z}) = f \otimes l_Z = (f \otimes \mathrm{id}_Z)(\mathrm{id}_X \otimes l_Z)$.

Para que este conceito fique mais claro, façamos um exemplo. Fixemos objetos $X, Y, Z, W, P, Q \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, se temos flechas $f : X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \to ((Z \otimes \mathbb{1}) \otimes W) \otimes P$ e $g : (\mathbb{1} \otimes Z) \otimes (W \otimes P) \to Q$ em $\mathbf{C}$, então temos o isomorfismo $i = [l_Z^{-1} \otimes (\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_P)]a_{Z,W,P}[(r_Z \otimes \mathrm{id}_W) \otimes \mathrm{id}_P] : ((Z \otimes \mathbb{1}) \otimes W) \otimes P \to (\mathbb{1} \otimes Z) \otimes (W \otimes P)$.

$$\begin{tikzcd}
X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \arrow[r, "f"] & ((Z \otimes \mathbb{1}) \otimes W) \otimes P \arrow[d, "(r_Z \otimes \mathrm{id}_W) \otimes \mathrm{id}_P"] \arrow[ddd, bend right, "i"'] \\
& (Z \otimes W) \otimes P \arrow[d, "a_{Z,W,P}"] \\
& Z \otimes (W \otimes P) \arrow[d, "l_Z^{-1} \otimes (\mathrm{id}_W \otimes \mathrm{id}_P)"] \\
& (\mathbb{1} \otimes Z) \otimes (W \otimes P) \arrow[r, "g"] & Q
\end{tikzcd}$$

Com isto, temos a composta $gif : X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y) \to Q$, mas como o i é único podemos deixá-lo implícito. Porém, também temos o isomorfismo $j = \mathrm{id}_X \otimes l_Y^{-1} : X \otimes Y \to X \otimes (\mathbb{1} \otimes Y)$, o qual podemos compor com gif para obter uma flecha $gifj : X \otimes Y \to Q$, mas, como ambos i e j são únicos, podemos omití-los da notação e escrever $gf : X \otimes Y \to Q$.

Podemos observar que os isomorfismo de unitalidade l_X e r_X e suas inversas permitem aumentar ou diminuir o numéro de $\mathbb{1}$'s e os isomorfismos de associatividade $a_{X,Y,Z}$ permitem reordenar os parênteses. Mas dadas quaisquer duas ordenações de parênteses, existe um isomorfismo único (conforme o Teorema 3.3) entre os objetos obtidos pela duas ordenações, assim podemos não escrever os parênteses e deixar o isomorfismo entre as duas ordenações implícito. Apesar disso, se quisermos definir uma flecha que tem um

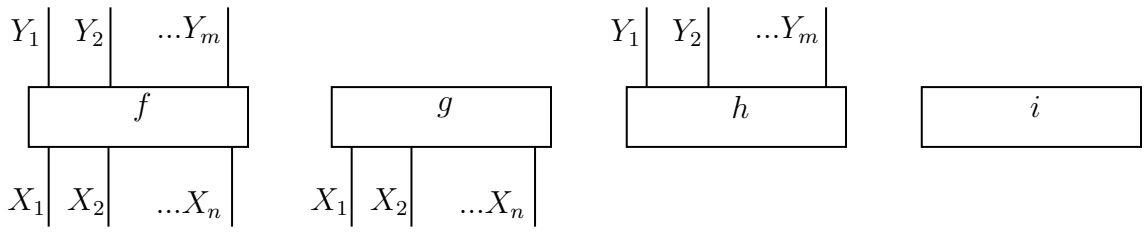
domínio ou contra-domínio com uma ordenação de parênteses específica, é conveniente fixar que $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n := ((X_1 \otimes X_2) \otimes ...) \otimes X_n$. Como os isomorfismo de unitalidade podem também ser sempre omitidos então podemos também omitir multiplicações por $\mathbb{1}$. Disso segue também que multiplicações por $\mathrm{id}_{\mathbb{1}}$ também podem ser omitidas, devido à naturalidade l e r.

Em resumo, esses fatos permitem estabelecer a seguinte convenção:

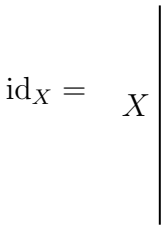
- são omitidos os parênteses de associatividade;
- são omitidos os produtos por $\mathbb{1}$ e por $\mathrm{id}_{\mathbb{1}}$;
- são omitidos os isomorfismo de associatividade $a_{X,Y,Z}$ e de unitalidade l_X e r_X;
- $X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n := ((X_1 \otimes X_2) \otimes ...) \otimes X_n$.

3.1.3 Cálculo Gráfico

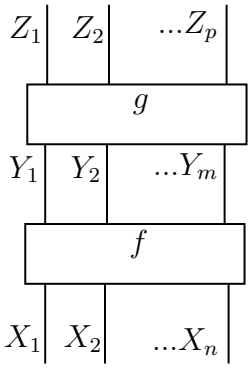
Os resultados da convenção anterior e a funtorialidade de $\otimes$ estabelecem o cálculo gráfico para categorias monoidais. O cálculo gráfico é uma forma de representar flechas por *string diagrams*. Uma flecha $f : X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n \to Y_1 \otimes Y_2 \otimes ... \otimes Y_m$ é representada por uma caixa colorida por f e com linhas verticais anexadas abaixo coloridas por $X_1, ..., X_n$, e linhas anexadas acima coloridas pelos objetos $Y_1, ..., Y_m$. Uma flecha $g : X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n \to \mathbb{1}$ é representada por uma caixa sem linhas anexas acima, e uma flecha $h : \mathbb{1} \to Y_1 \otimes Y_2 \otimes ... \otimes Y_m$ é representada por uma caixa sem linhas anexadas abaixo, em particular um flecha $i : \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ é representada por uma caixa sem linhas anexadas, conforme os diagramas abaixo:

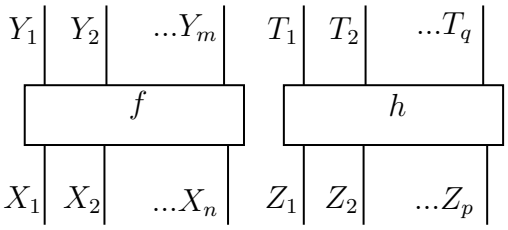


A identidade id_X é representada por uma linha vertical colorida por X, conforme o diagrama a seguir:

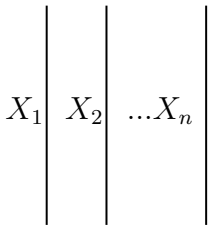


A composição de flechas $f : X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n \to Y_1 \otimes Y_2 \otimes ... \otimes Y_m$ e $g : Y_1 \otimes Y_2 \otimes ... \otimes Y_m \to Z_1 \otimes Z_2 \otimes ... \otimes Z_p$ é representada por colocar uma caixa acima de outra. O produto monoidal de flechas é representado por colocar um diagrama à direita de outro. Esses diagramas são ilustrados abaixo.

$g \circ f =$ 

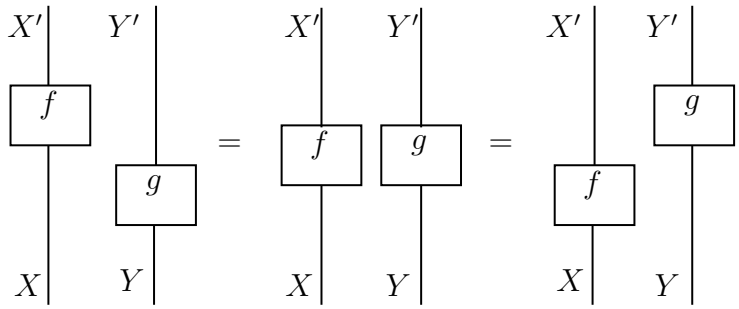
$f \otimes h =$ 

Em particular, a identidade $\mathrm{id}_{X_1 \otimes X_2 \otimes ... X_n}$ pode ser representado por

$\mathrm{id}_{X_1 \otimes X_2 \otimes ... \otimes X_n} =$ 

Como podemos omitir produtos por $\mathrm{id}_{\mathbb{1}}$ então linhas coloridas por $\mathbb{1}$ podem sempre ser omitidas ou acrescentadas. Por consistência, um diagrama vazio, ou seja, sem caixas ou linhas, representa a flecha $\mathrm{id}_{\mathbb{1}}$.

Por fim, a funtorialidade de $\otimes$ implica que para quaisquer flechas $f : X \to X'$ e $g : Y \to Y'$ temos que $(f \otimes \mathrm{id}_{Y'})(\mathrm{id}_X \otimes g) = f \otimes g = (\mathrm{id}_{X'} \otimes g)(f \otimes \mathrm{id}_Y)$, o que é representado graficamente por podermos subir ou descer caixas, o que é chamado de propriedade de troca de nível. Isto se representa diagramaticamente por:



3.1.4 Funtores monoidais

Uma categoria monoidal possui uma estrutura a mais em sua definição, se comparado a categorias em geral. Por isso, é conveniente considerar funtores que de alguma forma respeitam tal estrutura, esses são os funtores monoidais.

Sejam $\mathbf{C}$ e $\mathbf{C}'$ categorias monoidais. A notação para o objetos unidade, produto monoidal e isomorfismos de associatividade e unitalidade será a mesma para ambas categorias exceto por colocar um linha para aqueles que correspondem à categoria $\mathbf{C}'$. Um funtor monoidal $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ é um funtor F munido de uma flecha $F_0\colon \mathbb{1}' \to F(\mathbb{1})$ em $\mathbf{C}'$ e uma transformação natural $F_2 = \{F_2(X,Y)\colon F(X) \otimes' F(Y) \to F(X \otimes Y)\}_{X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$, $F_2\colon \otimes' \circ (F \times F) \Rightarrow F \circ \otimes$, tais que os seguintes diagramas comutam:

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \arrow[r, "a'_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "F_2(X,Y)\otimes' \mathrm{id}_{F(Z)}"] & F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)}\otimes' F_2(Y,Z)"] \\
F(X \otimes Y) \otimes' F(Z) \arrow[d, "F_2(X\otimes Y,Z)"] & F(X) \otimes' F(Y \otimes Z) \arrow[d, "F_2(X,Y\otimes Z)"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a_{X,Y,Z})"] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}' \otimes' F(X) \arrow[r, "l'_{F(X)}"] \arrow[d, "F_0\otimes' \mathrm{id}_{F(X)}"] & F(X) \\
F(\mathbb{1}) \otimes' F(X) \arrow[r, "F_2(\mathbb{1},X)"] & F(\mathbb{1} \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' \mathbb{1} \arrow[r, "r'_{F(X)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(X)}\otimes' F_0"] & F(X) \\
F(X) \otimes' F(\mathbb{1}) \arrow[r, "F_2(X,\mathbb{1})"] & F(X \otimes \mathbb{1}) \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}$$

A naturalidade de F_2 significa que para quaisquer flechas $f\colon X \to \overline{X}$ e $g\colon Y \to \overline{Y}$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
F(X) \otimes' F(Y) \arrow[r, "F_2(X,Y)"] \arrow[d, "F(f)\otimes' F(g)"] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "F(f\otimes g)"] \\
F(\overline{X}) \otimes' F(\overline{Y}) \arrow[r, "F_2(\overline{X},\overline{Y})"] & F(\overline{X} \otimes \overline{Y})
\end{tikzcd}$$

Um funtor monoidal $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}'$ é dito forte se F_0 e F_2 são isomorfismos, e é dito estrito se F_0 e F_2 são identidade.

Alguns exemplos triviais de funtores monoidais são os funtores identidade, que são além disso monoidais estritos.

3.1.5 Categoria Monoidais Duais

Para categorias usuais temos a categoria dual $\mathbf{C}^{op}$ que é obtida trocando os domínios pelos contradomínios. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria monoidal, temos um produto monoidal $\otimes : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, podemos definir outro produto monoidal a partir deste, que é $\otimes^{op} : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ dado por $X \otimes^{op} Y := Y \otimes X$ e $f \otimes^{op} g := g \otimes f, \forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e $\forall f, g \in \mathrm{Ar}(\mathbf{C})$. Para que $\mathbf{C}$ seja categoria monoidal com o produto $\otimes^{op}$ é necessário modificar os isomorfismos de associatividade e unitalidade. A categoria monoidal $\mathbf{C}^{\otimes^{op}} = (\mathbf{C}, \otimes^{op}, \mathbb{1}, a^{\otimes^{op}}, l^{\otimes^{op}}, r^{\otimes^{op}})$ é a categoria $\mathbf{C}$ munida do mesmo objeto unidade $\mathbb{1}$, mas com produto monoidal $\otimes^{op}$ e isomorfismos de associatividade e unitalidade $a^{\otimes^{op}}$, $l^{\otimes^{op}}$ e $r^{\otimes^{op}}$, dados por $a^{\otimes^{op}}_{X,Y,Z} = (a_{Z,Y,X})^{-1}$, $l^{\otimes^{op}}_X = (r_X)^{-1}$ e $r^{\otimes^{op}}_X = (l_X)^{-1}$.

Também a categoria oposta $\mathbf{C}^{op}$ tem uma estrutura de categoria monoidal induzida por $(\mathbf{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$. Como $\mathrm{Ob}(\mathbf{C^{op}}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$, então

temos o funtor $\overline{\otimes}\colon \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{C}^{op}$, que é o mesmo que $\otimes\colon \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ para os objetos, e para flechas $\overline{f}\colon X \to X'$ e $\overline{g}\colon Y \to Y'$ em $\mathbf{C}^{op}$, dadas por flechas $f\colon X' \to X$ e $g\colon Y' \to Y$ em $\mathbf{C}$, o funtor é dado por $\overline{f}\overline{\otimes}\overline{g} = \overline{f \otimes g}\colon X \otimes Y \to X' \otimes Y'$. Como em $\mathbf{C}^{op}$ as flechas são invertidas, ou seja, os domínio e contradomínio são trocados com relação a $\mathbf{C}$, basta tomar como isomorfismos de associatividade e unitalidade os inversos dos originais. Assim, temos a categoria monoidal $\mathbf{C}^{op} = (\mathbf{C}^{op}, \overline{\otimes}, \mathbb{1}, a^{op}, l^{op}, r^{op})$, em que $a^{op}_{X,Y,Z} = (a_{X,Y,Z})^{-1}$, $l^{op}_X = (l_X)^{-1}$ e $r^{op}_X = (r_X)^{-1}$.

Essas duas construções podem ser combinadas para formar a categoria monoidal reversa $\mathbf{C}^{rev} = (\mathbf{C}^{op})^{\otimes^{op}} = (\mathbf{C}^{\otimes^{op}})^{op}$.

Em diante serão omitidas as barras em $\overline{f}$ e $\overline{\otimes}$. Então teremos frases como "$f\colon X \to Y$ em $\mathbf{C}^{op}$ é uma flecha $f\colon Y \to X$ em $\mathbf{C}$".

3.2 Categorias Pivotais e Categorias Esféricas

3.2.1 Pareamentos e Dualidade

Uma categoria pivotal é, grosso modo, uma categoria com duais. Neste contexto, não é possível definir o dual de um objeto como $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$, para algum corpo $\mathbb{K}$, como feito para espaços vetoriais, pois as flechas de uma categoria podem até mesmo não ser funções e $\mathbb{K}$ também pode não ser um objeto da categoria. Então o conceito de dual é abstraído daquele encontrado na Álgebra Linear através dos pareamento (*pairings*) não-degenerados.

O exemplo mais básico a ser considerado é o da categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ dos espaços vetoriais de dimensão finita, onde o dual de um objeto X é o espaço vetorial $X^* = \mathrm{Hom}(X, \mathbb{K})$, com o pareamento $\overleftarrow{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbb{K}$ induzido pelo mapa de avaliação. Mais precisamente, temos uma mapa R-bilinear $X^* \times X \to \mathbb{K}$ dado por $(f, x) \mapsto f(x)$, então pela propriedade universal do produto tensorial $!\exists \overleftarrow{ev}_X\colon X^* \otimes X \to \mathbb{K}$ mapa $\mathbb{K}$-linear tal que o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} X^* \times X \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr] & X^* \otimes X \arrow[d, "\overleftarrow{ev}_X"] \\ & \mathbb{K} \end{tikzcd}$$

Dessa forma, dados $f : X \to \mathbb{K}$ funcional linear e $x \in X$, o pareamento é calculado por

$$\overleftarrow{ev}_X(f \otimes x) = f(x).$$

A esse pareamento $\overleftarrow{ev}_X$ é associado o co-pareamento $\overleftarrow{coev}_X : \mathbb{K} \to X \otimes X^*$, que é a transformação linear dada por $\overleftarrow{coev}_X(1) = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e^i$, onde $n = \dim(X)$, $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ é uma base de X e $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$ é a base dual de X^* dada por $e^i(e_j) = \delta^i_j$. Note que $\overleftarrow{coev}_X$ não depende da base de X escolhida para calculá-lo. Podemos mostrar isso usando matrizes de mudança de base, como no lema a seguir, porém veremos adiante que este $\overleftarrow{coev}_X$ torna $\overleftarrow{ev}_X$ um pareamento não-degenerado, e existe um único co-pareamento que satisfaz isso, logo $\overleftarrow{coev}_X$ não pode depender da base utilizada para calculá-lo. A seta sobre $\overleftarrow{ev}_X$ e $\overleftarrow{coev}_X$ é colocada porque será notação conveniente para categorias pivotais.

Lema 3.4. *Dado um $\mathbb{K}$-espaço vetorial X, o co-pareamento $\overleftarrow{coev}_X \colon \mathbb{K} \to X \otimes X^*$ definido acima não depende da base utilizada para calculá-lo.*

Demonstração. Sejam $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ e $\{e'_i : 1 \leq i \leq n\}$ duas bases de X, e sejam $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$ e $\{e'^i : 1 \leq i \leq n\}$ as respectivas bases duais, de forma que $e^i(e_j) = \delta^i_j$ e $e'^i(e'_j) = \delta^i_j$. As duas bases de X estão relacionadas por matrizes de mudança de base R e $S = R^{-1}$. Digamos que

$$R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & \dots & r_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & \dots & r_{n,n} \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

de forma que

$$\begin{pmatrix} e'_1 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1,1} & \dots & r_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n,1} & \dots & r_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

Com isto, podemos escrever que

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} r_{i,j} e_j. \tag{3.3}$$

Escrevendo S como

$$S = \begin{pmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n,1} & \dots & s_{n,n} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

temos analogamente que

$$e_j = \sum_{k=1}^{n} s_{j,k} e'_k. \tag{3.5}$$

Como $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$ e $\{e'^i : 1 \leq i \leq n\}$ são ambas bases de X^*, então podemos escrever e'^i como

$$e'^i = \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} e^l, \tag{3.6}$$

portanto,

$$\begin{aligned} e'^i(e_j) &= \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} e^l(e_j) \\ &= \sum_{l=1}^{n} a_{i,l} \delta^l_j \\ &= a_{i,j}, \end{aligned}$$

mas, pela equação (3.5), temos que

$$e'^i(e_j) = e'^i \left(\sum_{k=1}^{n} s_{j,k} e'_k \right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} s_{j,k} e'^{i}(e'_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} s_{j,k} \delta_k^i \\
&= s_{j,i},
\end{aligned}
$$

logo

$$a_{i,j} = s_{j,i} \tag{3.7}$$

e

$$e'^{i} = \sum_{l=1}^{n} s_{l,i} e^l. \tag{3.8}$$

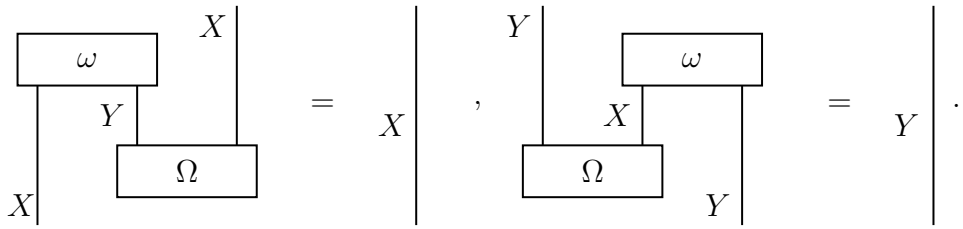
Assim, temos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes e'^{i} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} r_{i,j} e_j \right) \otimes \left(\sum_{l=1}^{n} s_{l,i} e^l \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_{l,i} r_{i,j} \right) e_j \otimes e^l \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} (SR)_{l,j} e_j \otimes e^l \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \delta_{l.j} e_j \otimes e^l \\
&= \sum_{j=1}^{n} e_j \otimes e^j.
\end{aligned}
$$

Na igualdade com $(*)$ foi utilizado que $S = R^{-1}$.

□

Definição 3.5. Dada uma categoria monoidal **C**, um pareamento entre dois objetos X e Y é uma flecha $\omega : X \otimes Y \to \mathbb{1}$. Ele é dito não-degenerado se existe uma flecha $\Omega : \mathbb{1} \to Y \otimes X$, chamada de inversa de ω, com a propriedade de que $(\omega \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \otimes \Omega) = \mathrm{id}_X$ e $(\mathrm{id}_Y \otimes \omega)(\Omega \otimes \mathrm{id}_Y) = \mathrm{id}_Y$, o que é representado gráficamente por



Note que neste contexto Ω ser inversa de ω não significa que $\Omega = \omega^{-1}$, e também que estamos utilizando a convenção de omitir os isomorfismos de associatividade e de

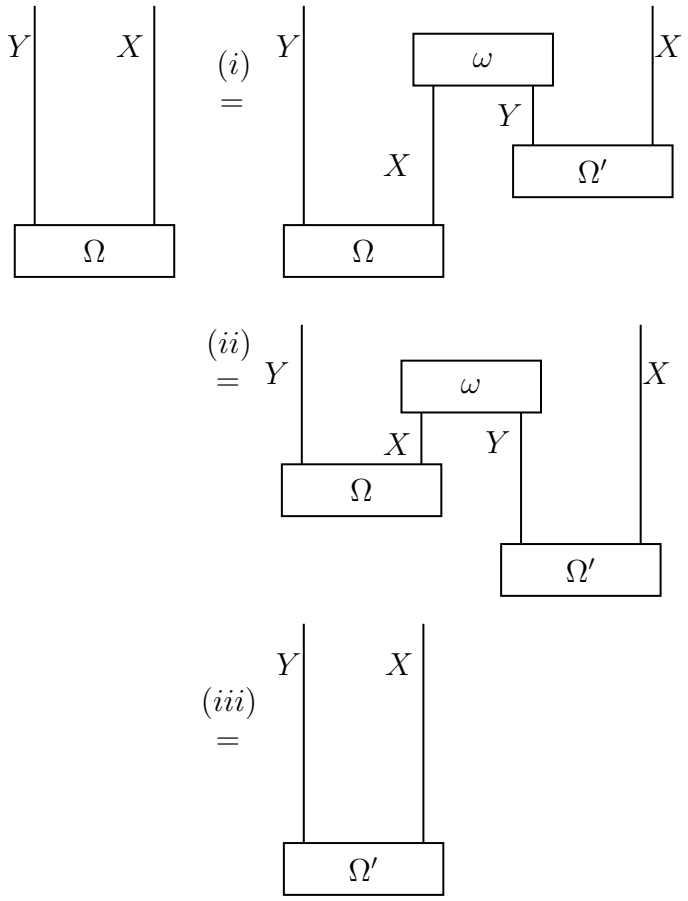
unitalidade da categoria monoidal, explicitando esses isomorfismos a condição de ω ser não-degenerado se escreve como

$$l_X(\omega \otimes \mathrm{id}_X)a^{-1}_{X,Y,X}(\mathrm{id}_X \otimes \Omega)r^{-1}_X = \mathrm{id}_X$$

e

$$r_Y(\mathrm{id}_Y \otimes \omega)a_{Y,X,Y}(\Omega \otimes \mathrm{id}_Y)l^{-1}_Y = \mathrm{id}_Y.$$

Um pareamento não-degenerado $\omega : X \otimes Y \to \mathbb{1}$ possui uma única inversa $\Omega : \mathbb{1} \to Y \otimes X$, isto pode ser facilmente verificado através do cálculo gráfico. De fato, dada $\Omega' : \mathbb{1} \to Y \otimes X$ outra inversa de ω, temos que



Foi utilizado que: (i) Ω' é inversa de ω, (ii) a propriedade de troca de nível e (iii) Ω é inversa de ω.

Verifiquemos que o pareamento $\overleftarrow{ev}_X$ de $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ é não degenerado com inversa $\overleftarrow{coev}_X$. Devemos mostrar duas igualdades, que são

$$l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*})a^{-1}_{X^*,X,X^*}(\mathrm{id}_{X^*} \otimes \overleftarrow{coev}_X)r^{-1}_{X^*} = \mathrm{id}_{X^*} \tag{3.9}$$

e

$$r_X(\mathrm{id}_X \otimes \overleftarrow{ev}_X)a_{X,X^*,X}(\overleftarrow{coev}_X \otimes \mathrm{id}_X)l^{-1}_X = \mathrm{id}_X. \tag{3.10}$$

É possível fazer esses cálculos deixando implícitos os parênteses de associatividade e os isomorfismo de associatividade e unitalidade se entendermos que quando $\overleftarrow{coev}_X$ não

receber um argumento então deve ser calculado $\overleftarrow{coev}_X(1)$. Mas, por clareza, façamos os cálculos explicitamente. Para a equação (3.9), dado $f : X \to \mathbb{K}$ com X espaço vetorial de dimensão n e $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ uma base de X, temos que

$$\begin{aligned}
&l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*})a^{-1}_{X^*,X,X^*}(\mathrm{id}_{X^*} \otimes \overleftarrow{coev}_X)r^{-1}_{X^*}(f) = \\
&= l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*})a^{-1}_{X^*,X,X^*}(\mathrm{id}_{X^*} \otimes \overleftarrow{coev}_X)(f \otimes 1) \\
&= l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*})a^{-1}_{X^*,X,X^*}(f \otimes \overleftarrow{coev}_X(1)) \\
&= l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*})a^{-1}_{X^*,X,X^*}(f \otimes \sum_{i=1}^{n}(e_i \otimes e^i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*})a^{-1}_{X^*,X,X^*}(f \otimes (e_i \otimes e^i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X \otimes \mathrm{id}_{X^*})((f \otimes e_i) \otimes e^i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} l_{X^*}(\overleftarrow{ev}_X(f \otimes e_i) \otimes e^i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} l_{X^*}(f(e_i) \otimes e^i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f(e_i)e^i \\
&= f.
\end{aligned}$$

A última igualdade se deve a $\sum_{i=1}^{n} f(e_i)e^i$ ser f escrito na base dual. Como o resultado vale $\forall f \in X^*$ então segue que essa composição é id_{X^*}. A segunda igualdade se mostra de forma análoga.

De forma mais geral, um pareamento $\omega : X \otimes Y \to \mathbb{K}$ em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ é não-degenerado se, e somente se, ambos X e Y têm dimensão finita, digamos $\dim(X) = n$ e $\dim(Y) = m$, e dadas bases $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ de X e $\{f_j : 1 \leq j \leq m\}$ de Y a matriz $W = [\omega(e_i \otimes f_j)]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ é inversível. Em particular, deve valer que $n = m$. O lema 1.6 de [21] implica que para ω ser não-degenerado é necessário que X e Y sejam $\mathbb{K}$-módulos projetivos de tipo finito. Em nosso contexto, como X e Y são $\mathbb{K}$-espaços vetoriais então são, em particular, $\mathbb{K}$-módulos projetivos. Ser projetivo de tipo finito é equivalente, neste caso, a X e Y terem dimensão finita. A afirmação anterior é então consequência direta do lema 1.7 de [21], observando que todo $\mathbb{K}$-espaço vetorial é um $\mathbb{K}$-módulo livre.

Devido a isto, a abstração de dual para categorias monoidais não é totalmente geral, pois um espaço vetorial de dimensão infinita não é considerado dualizável, por não existir um pareamento não-degenerado desse espaço com algum outro. Vejamos agora como se define dual numa categoria monoidal.

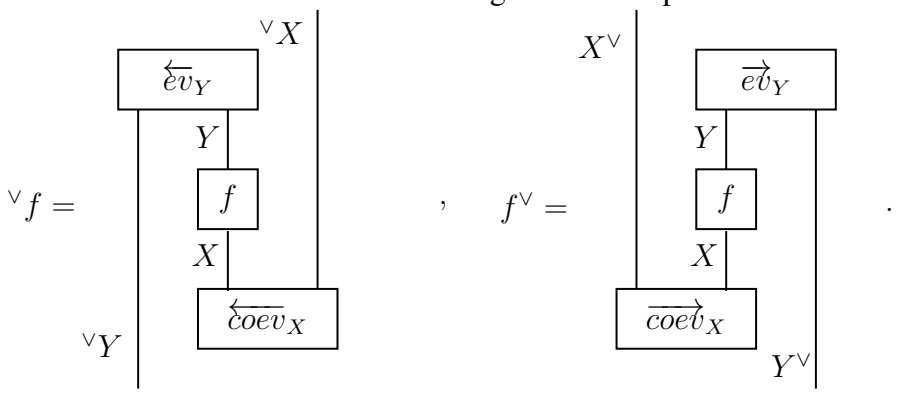
Definição 3.6. Em uma categoria monoidal $\mathbf{C}$, dado um objeto X um dual à esquerda para ele é um par $({}^{\vee}X, \overleftarrow{ev}_X : {}^{\vee}X \otimes X \to \mathbb{1})$ em que $\overleftarrow{ev}_X$ é um pareamento não-degenerado. A inversa de $\overleftarrow{ev}_X$ é denotada por $\overleftarrow{coev}_X$, que é uma flecha $\overleftarrow{coev}_X : \mathbb{1} \to X \otimes {}^{\vee}X$. De forma análoga, um dual à direita de X é um par $(X^{\vee}, \overrightarrow{ev}_X : X \otimes X^{\vee} \to \mathbb{1})$, em que $\overrightarrow{ev}_X$ é um pareamento não-degenerado, cuja inversa é denotada por $\overrightarrow{coev}_X : \mathbb{1} \to X^{\vee} \otimes X$.

Pelas considerações anteriores $(X^*, \overleftarrow{ev}_X : X^* \otimes X \to \mathbb{K})$ é um dual à esquerda para X, $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}})$. De forma análoga, sendo $\overrightarrow{ev}_X : X \otimes X^* \to \mathbb{K}$ o pareamento induzido pela avaliação, dado por $\overrightarrow{ev}_X(x \otimes f) = f(x)$, $\forall x \in X$ e $\forall f \in X^*$, $\overrightarrow{ev}_X$ é não-degenerado com inversa $\overrightarrow{coev}_X : \mathbb{K} \to X^* \otimes X$ dada por $\overrightarrow{coev}_X(1) = \sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e_i$, em que $\dim(X) = n$, $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ é base de X e $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$ é a base dual de X^*. Podemos ver que a diferença nas definições de $\overleftarrow{ev}_X$ e $\overrightarrow{ev}_X$ e entre $\overleftarrow{coev}_X$ e $\overrightarrow{coev}_X$ é dada pelo flip $\tau_{X,X^*} : X \otimes X^* \to X^* \otimes X$, dado por $\tau_{X,X^*}(x \otimes f) = f \otimes x$.

Uma categoria pivotal é uma categoria com duais à esquerda e com duais à direita (fixados), em que ${}^{\vee}X = X^{\vee}$ e o mesmo vale também para flechas, isto quer dizer que os funtores duais ${}^{\vee}?$ e $?^{\vee}$ definidos a seguir coincidem.

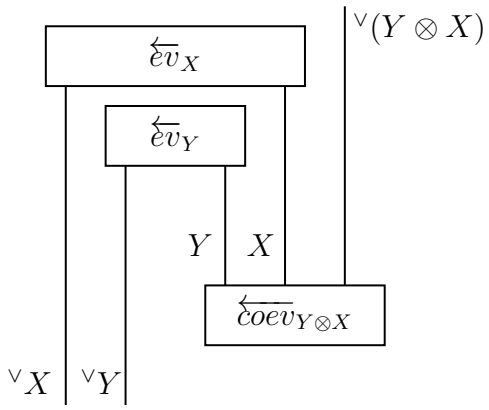
3.2.2 Funtores duais

Seja $\mathbf{C}$ uma categoria monoidal com duais à esquerda $({}^{\vee}X, \overleftarrow{ev}_X \colon {}^{\vee}X \otimes X \to \mathbb{1})$ e à direita $(X^{\vee}, \overrightarrow{ev}_X \colon X \otimes X^{\vee} \to \mathbb{1})$ fixados, $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. As famílias $({}^{\vee}X, \overleftarrow{ev}_X \colon {}^{\vee}X \otimes X \to \mathbb{1})_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$ e $(X^{\vee}, \overrightarrow{ev}_X \colon X \otimes X^{\vee} \to \mathbb{1})_{X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$ são chamadas, respectivamente, de dualidades à esquerda e à direita. Com essa estrutura podemos definir funtores ${}^{\vee}? \colon \mathbf{C}^{rev} \to \mathbf{C}$ e $?^{\vee} \colon \mathbf{C}^{rev} \to \mathbf{C}$, induzidos pelas dualidades à esquerda e à direita. Para um objeto X eles são dados por ${}^{\vee}?(X) = {}^{\vee}X$ e $?^{\vee}(X) = X^{\vee}$. Para as flechas é feito uso dos pareamento e suas inversas. Dada uma flecha $f \colon X \to Y$ em $\mathbf{C}$, ela corresponde a uma flecha $f \colon Y \to X$ em $\mathbf{C}^{rev}$, logo os funtores ${}^{\vee}?$ e $?^{\vee}$ a levam em flechas ${}^{\vee}f \colon {}^{\vee}Y \to {}^{\vee}X$ e $f^{\vee} \colon Y^{\vee} \to X^{\vee}$. Essas flechas são dadas graficamente por



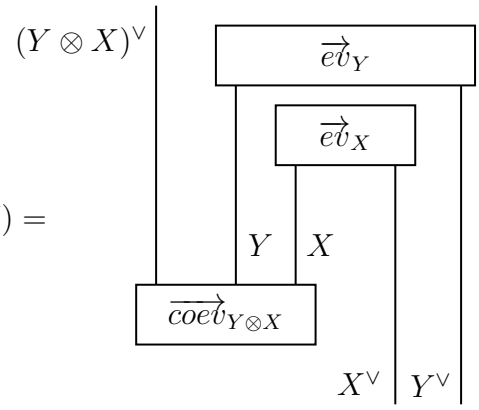
Além disso, ambos funtores são monoidais fortes, com ${}^{\vee}?_0 = \overleftarrow{coev}_{\mathbb{1}} \colon \mathbb{1} \to {}^{\vee}\mathbb{1}$ (explicitamente, $l_{{}^{\vee}\mathbb{1}}\overleftarrow{coev}_{\mathbb{1}}$), $?_0^{\vee} = \overrightarrow{coev}_{\mathbb{1}} \colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}^{\vee}$ (ou $r_{\mathbb{1}^{\vee}}\overrightarrow{coev}_{\mathbb{1}}$), e ${}^{\vee}?_2(X,Y) \colon {}^{\vee}X \otimes {}^{\vee}Y \to {}^{\vee}(X \otimes^{op} Y) = {}^{\vee}(Y \otimes X)$ e $?_2^{\vee}(X,Y) \colon X^{\vee} \otimes Y^{\vee} \to (Y \otimes X)^{\vee}$ são dados graficamente por

$^{\vee}?_2(X,Y) =$



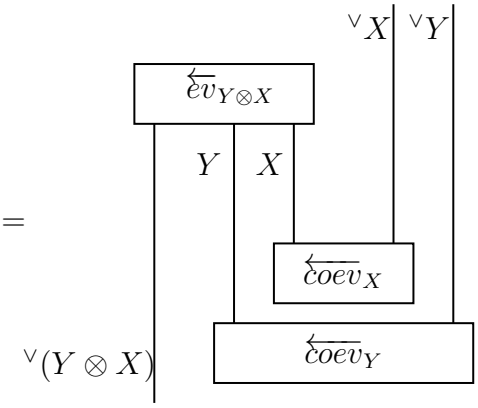
e

$?_2^{\vee}(X,Y) =$



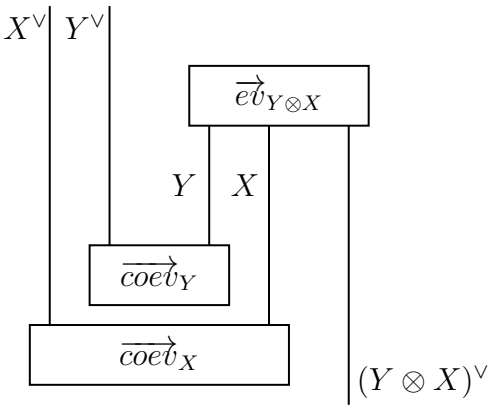
As inversas são $(^{\vee}?_0)^{-1} = \overleftarrow{ev}_{\mathbb{1}} \colon \mathbb{1} \to {}^{\vee}\mathbb{1}$ (ou $\overleftarrow{ev}_{\mathbb{1}} r_{^{\vee}\mathbb{1}}^{-1}$), $(?_0^{\vee})^{-1} = \overrightarrow{ev}_{\mathbb{1}} \colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}^{\vee}$ (ou $\overrightarrow{ev}_{\mathbb{1}} l_{\mathbb{1}^{\vee}}$),

$(^{\vee}?_2(X,Y))^{-1} =$

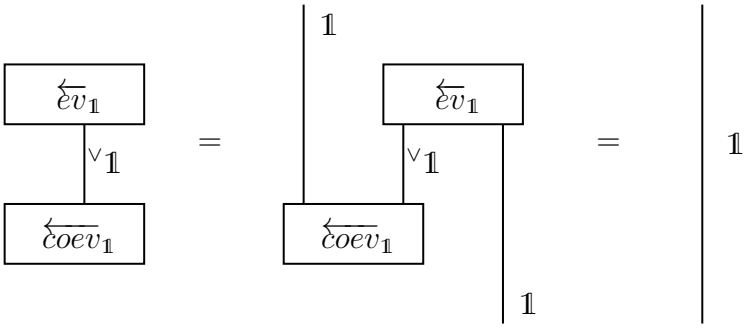


e

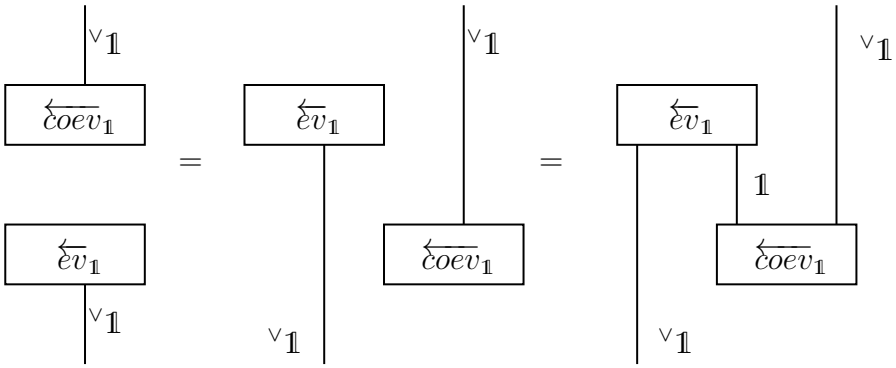
$(?_2^\vee(X,Y))^{-1} =$

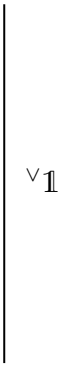


Verifiquemos que $\overleftarrow{ev}_{\mathbb{1}}$ é inversa de $\overleftarrow{coev}_{\mathbb{1}}$. Temos que



e



$=$ 

.

Isso conclui que $\overleftarrow{ev}_{\mathbb{1}} = (\overleftarrow{coev}_{\mathbb{1}})^{-1}$, a prova de que $\overrightarrow{ev}_{\mathbb{1}} = (\overrightarrow{coev}_{\mathbb{1}})^{-1}$ é análoga.

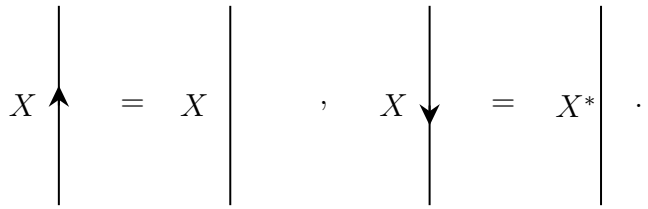
3.2.3 Categorias Pivotais

Definição 3.7. Uma categoria monoidal $\mathbf{C}$ com dualidades à esquerda e à direita fixadas é pivotal se os funtores duais ${}^{\vee}? : \mathbf{C}^{rev} \to \mathbf{C}$ e $?^{\vee} : \mathbf{C}^{rev} \to \mathbf{C}$ são iguais como funtores monoidais, que é então denotado $?^*$.

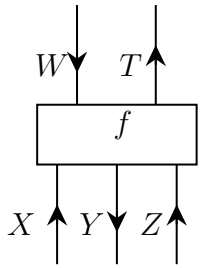
A condição de os funtores ${}^{\vee}?$ e $?^{\vee}$ serem iguais implica, em particular, que ${}^{\vee}X = X^{\vee}$, $\forall X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Como vimos anteriormente, a categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ possui duais à esquerda e à direita, ela além disso é pivotal.

3.2.4 Cálculo Gráfico para Categorias Pivotais

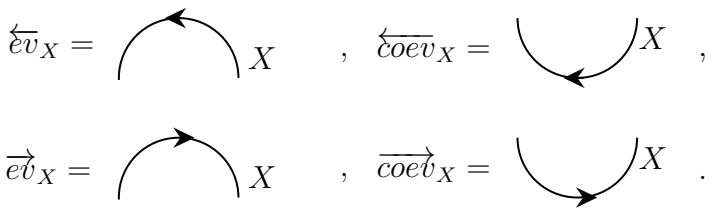
O cálculo gráfico para categorias monoidais possui uma especialização para categorias pivotais. As convenções do cálculo gráfico serão conforme [21] exceto por utilizarmos o sentido para baixo para indicar o dual e por colocar setas sobre os ev e $coev$. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria pivotal. As linhas passarão a ter um sentido, o sentido para cima corresponde ao mesmo que tínhamos para categorias monoidais em geral, o sentido para baixo é equivalente a tomar o dual, ou seja,



Por exemplo, uma flecha $f : X \otimes Y^* \otimes Z \to W^* \otimes T$ é representada por

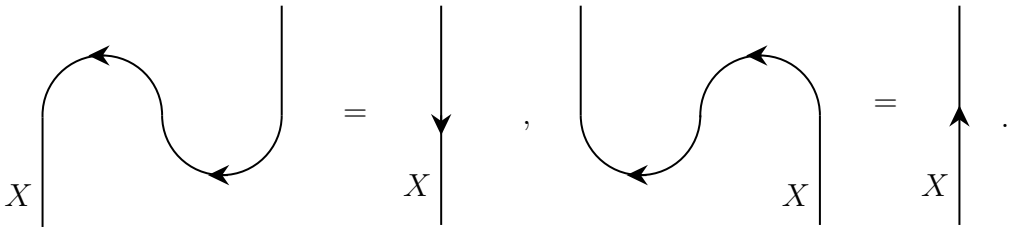


Os pareamento $\overleftarrow{ev}_X$, $\overrightarrow{ev}_X$ e suas inversas $\overleftarrow{coev}_X$ e $\overrightarrow{coev}_X$ são representados por caps e cups:

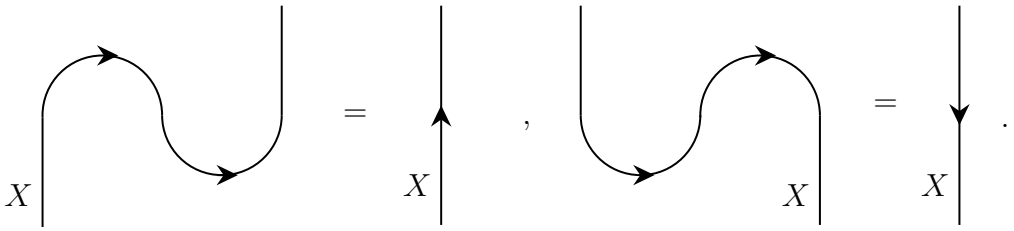


Note que se o X é escrito à direita ou à esquerda dos caps e cups, a flecha representada pelo diagrama é a mesma. Podemos colocar o objeto que colore uma linha próximo a qualquer pedaço dela.

A condição de $\overleftarrow{ev}_X$ ser pareamento não-degenerado é representada graficamente por

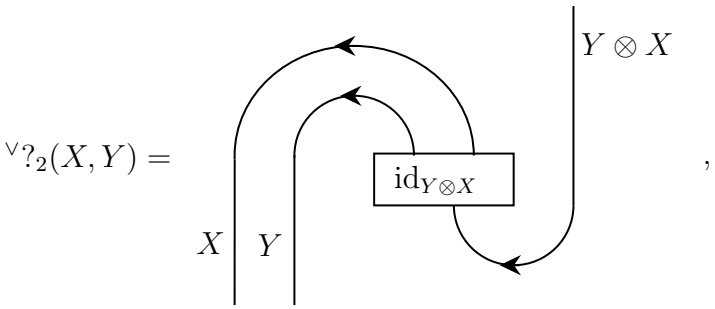


Para $\overrightarrow{ev}_X$ a condição é representada por

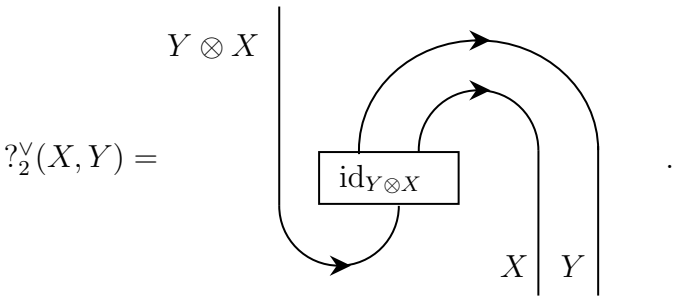


Destas condições segue que podemos deformar quaisquer linhas sem modificar a flecha representada pelo diagrama.

Como $?_2^* = {}^\vee?_2 = ?_2^\vee$, temos duas representações gráficas para $?_2^*(X,Y)$. Podemos representar ${}^\vee?_2(X,Y)$ por



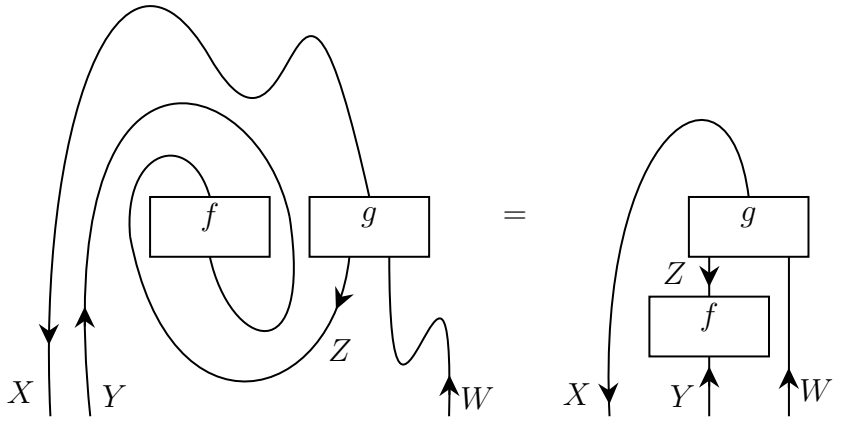
e $?_2^\vee(X,Y)$ é representado por



Ambas são representações gráficas de $?_2^*(X,Y)$, e podemos observar que a diferença entre elas é uma rotação de $360°$ da caixa de $\mathrm{id}_{Y\otimes X}$, em que as linhas anexadas à caixa acompanham o movimento de rotação. Usando as propriedades de categoria pivotal podemos provar o seguinte fato mais geral:

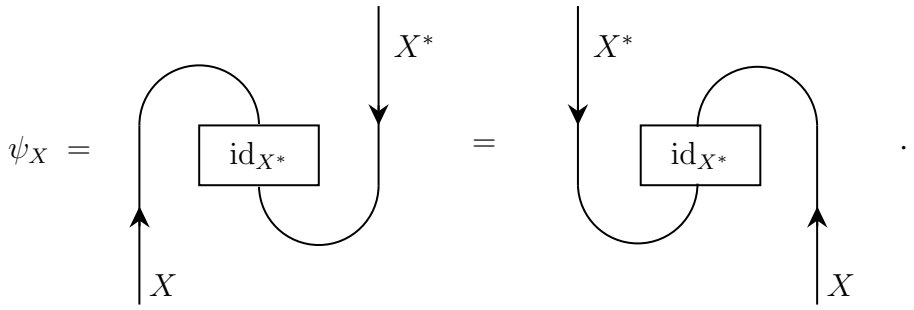
Teorema 3.8. *Dada uma categoria pivotal* **C***, para quaisquer diagramas do cálculo gráfico podemos girar qualquer caixa nos sentidos horário ou anti-horário por* $360°$ *e também deformar as linhas do diagrama, sem alterar a flecha que ele representa.*

A prova deste teorema é longa, para mais detalhes veja a seção 2.4 de [21]. Abaixo é dado um exemplo de uso deste teorema. Neste exemplo, temos flechas $f\colon Y \to Z^*$ e $g\colon Z^* \otimes W \to X$. A igualdade corresponde a girar a caixa colorida com f por $360°$ no sentido anti-horário, suavizar ou esticar as linhas e ajustar as posições das caixas, colocando g acima de f.



3.2.5 O duplo dual

Seja $\mathbf{C}$ uma categoria pivotal. Dado um objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, o objeto $X^{**} := (X^*)^*$ é chamado de duplo dual de X. Ele é isomorfo a X pelo isomorfismo

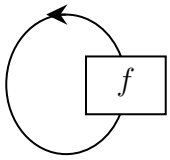


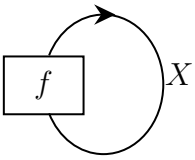
A família $\{\psi_X\colon X \to X^{**}\}_{X\in\mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$ é chamada de estrutura pivotal de $\mathbf{C}$ e pode ser utilizada para definir de forma equivalente o que é categoria pivotal.

3.2.6 Traço e dimensão

Para categorias pivotais há uma generalização da noção de traço de operadores lineares e de dimensão de espaços vetorias. Seja $f\colon X \to X$ um endomorfismo (ou seja, flecha com domínio e contradomínio iguais) numa categoria pivotal $\mathbf{C}$. Os traços à esquerda e

à direita de f são definidos como $tr_l(f) := \overleftarrow{ev}_X(\mathrm{id}_{X^*} \otimes f)\overrightarrow{coev}_X \colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ e $tr_r(f) := \overrightarrow{ev}_X(f \otimes \mathrm{id}_{X^*})\overleftarrow{coev}_X \colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}$, ou, graficamente,

$tr_l(f) =$ 

, $tr_r(f) =$ 

.

Para $\mathbf{C} = \mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ e $f \colon X \to X$ um operador linear, onde $\dim(X) = n$, dada uma base $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ de X e a base dual $\{e^i : 1 \leq i \leq n\}$ de X^*, temos que

$$\begin{aligned} tr_l(f)(1) &= \overleftarrow{ev}_X(\mathrm{id}_{X^*} \otimes f)\overrightarrow{coev}_X(1) \\ &= \overleftarrow{ev}_X(\mathrm{id}_{X^*} \otimes f)(\sum_{i=1}^{n} e^i \otimes e_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overleftarrow{ev}_X(e^i \otimes f(e_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} e^i(f(e_i)), \end{aligned}$$

mas, sendo $[f_{i,j}]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ a matriz da transformação linear f, então $f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} e_j$, logo

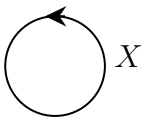
$$\begin{aligned} tr_l(f)(1) &= \sum_{i=1}^{n} e^i(\sum_{j=1}^{n} f_{i,j} e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} e^i(e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_{i,j} \delta_j^i \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_{i,i} \\ &= tr[f], \end{aligned}$$

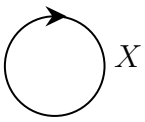
em que $tr[f]$ é o traço da matrix $[f]$. Logo $tr_l(f)$ é o operador

$$\begin{aligned} tr_l(f) \colon \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ k &\longmapsto tr[f]k \end{aligned}$$

De forma semelhante, segue que $tr_r = tr_l$.

Dada uma categoria pivotal $\mathbf{C}$ e um objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, as dimensões à esquerda e à direita de X são definidas como $\dim_l(X) := tr_l(\mathrm{id}_X) \colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ e $\dim_r(X) := tr_r(\mathrm{id}_X) \colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}$, ou

$dim_l(X) =$ 

, $dim_r(X) =$ 

.

Para $\mathbf{C} = \mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$, dado um espaço vetorial X de dimensão n e uma base $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ de X, a matriz do operador identidade é $[\mathrm{id}_X] = I_n$, que é a matriz identidade, então temos que

$$\begin{aligned}\dim_l(X)(1) &= tr_l(\mathrm{id}_X)\\ &= tr[I_n]\\ &= n\\ &= \dim(X).\end{aligned}$$

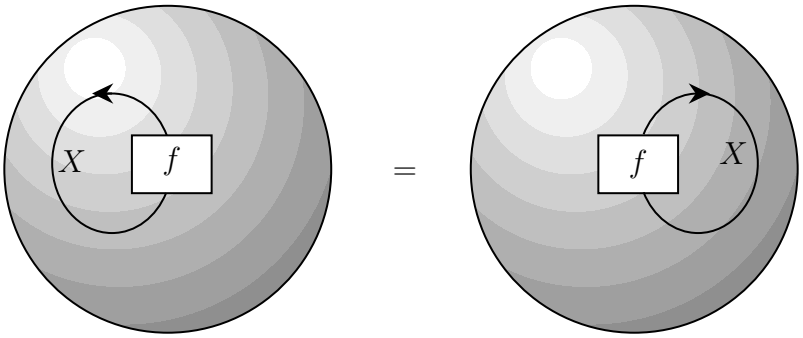
Logo, $\dim_l(X)$ é o operador

$$\begin{aligned}\dim_l(X)\colon \mathbb{K} &\longrightarrow \mathbb{K}\\ k &\longmapsto \dim(X)k\end{aligned}$$

Como $tr_r = tr_l$ então $\dim_r(X) = \dim_l(X)$. Podemos observar que em $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ não há diferença entre traços à esquerda e à direita, e nem entre dimensões à esquerda e à direita, mas isto não é verdadeiro para todas categorias pivotais. Quando os dois tipos de traço coincidem, temos o que é chamado de categoria esférica. Em [21] é dado como exemplo de categoria pivotal não esférica a categoria $G_{\Bbbk}^{\alpha,d}$, em que G é um grupo, $\Bbbk$ é um anel comutativo com unidade, $\alpha\colon G \times G \times G \to \Bbbk^*$ é um 3-cociclo e $d\colon G \to \Bbbk^*$ é um homomorfismo de grupos. O grupo $\Bbbk^*$ é $\Bbbk \setminus \{0\}$, com a operação de multiplicação. A categoria $G_{\Bbbk}^{\alpha,d}$ não é esférica se não vale a igualdade $d(g)^2 = 1$, $\forall g \in G$. Para mais detalhes veja [21], exemplo 2.7.2.

Definição 3.9. Uma categoria pivotal $\mathbf{C}$ é dita esférica se $tr_l(f) = tr_r(f)$, para todo endomorfismo $f\colon X \to X$ em $\mathbf{C}$. Neste caso os traços à esquerda e à direita são denotados por tr e as dimensões à esquerda e à direita por $\dim$.

Para categorias monoidais e pivotais o cálculo gráfico é feito em $\mathbb{R}^2$, em que a direção horizontal correponde ao produto monoidal e a vertical à composição. Numa categoria esférica, dado um endomorfismo $f\colon X \to X$, a igualdade $tr_l(f) = tr_r(f)$ pode ser entendida como uma isotopia na esfera, conforme o diagrama abaixo.



Tal isotopia consiste em passar o laço pela parte de trás da esfera. Este fato motiva o nome categoria esférica. Porém, não utilizaremos diagramas sobre uma esfera, para mais detalhes veja em [21] o lema 2.9 e em [20] a seção 4.3 *Spherical pivotal categories*.

3.3 Categorias Braided

3.3.1 Categorias Braided e Categorias Simétricas

Um braiding é uma forma de comutatividade do produto monoidal, formalmente temos a seguinte definição:

Definição 3.10. Dada uma categoria monoidal $\mathbf{C}$, um braiding é uma família de isomorfismos $\tau = \{\tau_{X,Y} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X\}_{X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})}$, que é uma transformação natural $\tau \colon \otimes \to \otimes^{op}$ e é $\otimes$-multiplicativo, no sentido de que para todos objetos $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ vale que

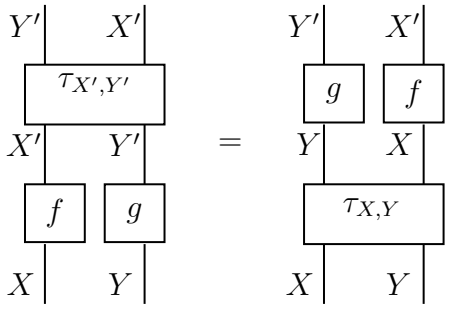
$$\tau_{X,Y\otimes Z} = (\mathrm{id}_Y \otimes \tau_{X,Z})(\tau_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_X),$$
$$\tau_{X\otimes Y,Z} = (\tau_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes \tau_{Y,Z}).$$

Uma categoria monoidal $\mathbf{C}$ munida de uma braiding é dita uma categoria braided. Se $\tau_{X,Y}^{-1} = \tau_{Y,X}$, $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, então τ é chamado de simetria e $\mathbf{C}$ de categoria simétrica.

A naturalidade de τ significa que para quaisquer flechas $f \colon X \to X'$ e $g \colon Y \to Y'$ em $\mathbf{C}$, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
X \otimes Y \arrow[r, "\tau_{X,Y}"] \arrow[d, "f\otimes g"] & Y \otimes X \arrow[d, "g\otimes f"] \\
X' \otimes Y' \arrow[r, "\tau_{X',Y'}"] & Y' \otimes X'
\end{tikzcd}$$

ou, equivalentemente, no cálculo gráfico,



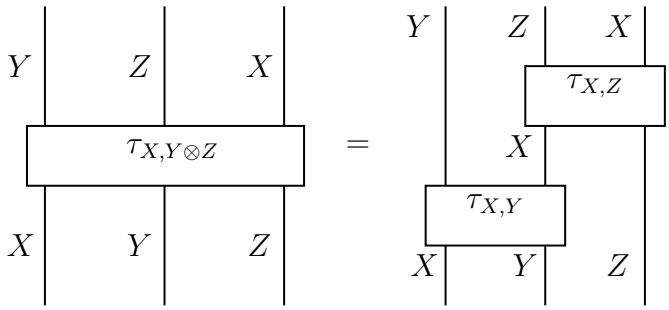
A $\otimes$-multiplicatividade de τ pode ser escrita explicitamente, o que é dado pela comutatividade dos diagramas hexagonais

$$\begin{tikzcd}
 & X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[rr, "\tau_{X,Y\otimes Z}"] & & (Y \otimes Z) \otimes X \arrow[dr, "a_{Y,Z,X}"] & \\
(X \otimes Y) \otimes Z \arrow[ur, "a_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\tau_{X,Y}\otimes \mathrm{id}_Z"'] & & & & Y \otimes (Z \otimes X) \\
 & (Y \otimes X) \otimes Z \arrow[rr, "a_{Y,X,Z}"'] & & Y \otimes (X \otimes Z) \arrow[ur, "\mathrm{id}_Y\otimes \tau_{X,Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

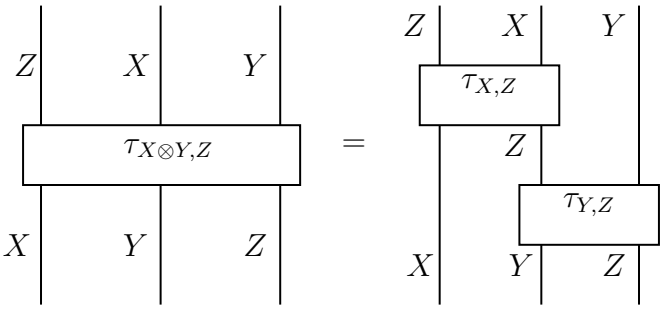
e

$$\begin{tikzcd}
 & (X \otimes Y) \otimes Z \arrow[rr, "\tau_{X\otimes Y,Z}"] & & Z \otimes (X \otimes Y) \arrow[dr, "a^{-1}_{Z,X,Y}"] & \\
X \otimes (Y \otimes Z) \arrow[ur, "a^{-1}_{X,Y,Z}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_X \otimes \tau_{Y,Z}"'] & & & & (Z \otimes X) \otimes Y \\
 & X \otimes (Z \otimes Y) \arrow[rr, "a^{-1}_{X,Z,Y}"'] & & (X \otimes Z) \otimes Y \arrow[ur, "\tau_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

o que no cálculo gráfico é representado por



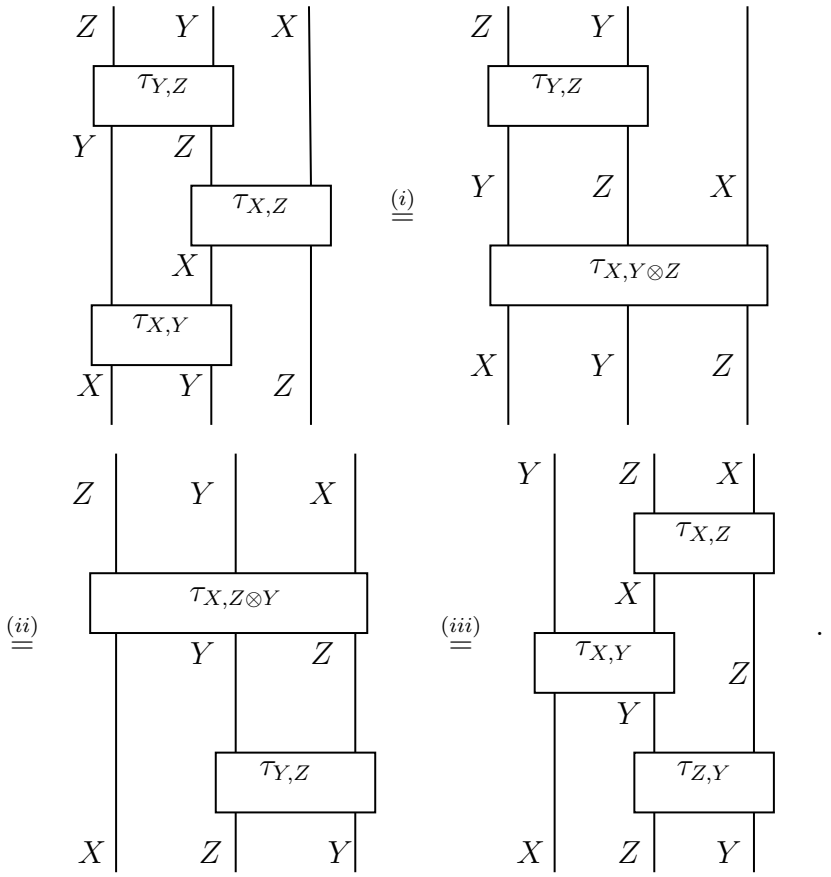
e



Podemos facilmente verificar que o braiding satisfaz à equação de Yang-Baxter, ou seja, para quaisquer objetos $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ vale que

$$(\tau_{Y,Z} \otimes \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_Y \otimes \tau_{X,Z})(\tau_{X,Y} \otimes \mathrm{id}_Z) = (\mathrm{id}_Z \otimes \tau_{X,Y})(\tau_{X,Z} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes \tau_{Y,Z}). \quad (3.11)$$

Verifiquemos isto, temos que



Foram utilizados: (i) $\otimes$-multiplicatividade (ou diagramas hexagonais); (ii) naturalidade de τ para $f = \mathrm{id}_X$ e $g = \tau_{Y,Z}$; (iii) $\otimes$-multiplicatividade.

Exemplo

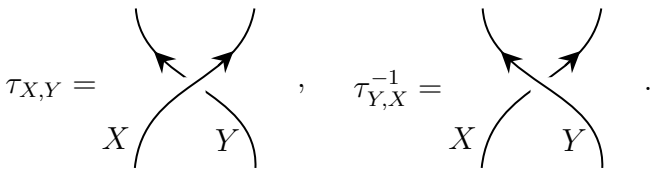
A categoria $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ dos $\mathbb{K}$-espaços vetoriais é categoria simétrica com simetria τ dada pelo flip $\tau_{X,Y} \colon X \otimes Y \to Y \otimes X$, tal que $\tau_{X,Y}(x \otimes y) = y \otimes x$, $\forall x \in X$ e $\forall y \in Y$.

Mirror Braiding

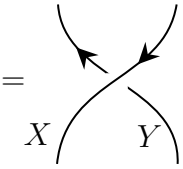
Dada uma categoria monoidal braided $\mathbf{C}$, com braiding τ, podemos construir um outro braiding para a categoria monoidal $\mathbf{C}$ chamado de *mirror braiding*, que é o braiding $\overline{\tau}$ em que $\overline{\tau}_{X,Y} = \tau_{Y,X}^{-1}$.

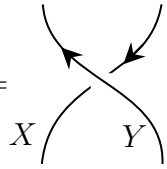
3.3.2 Cálculo Gráfico para Categorias Pivotais Braided

Seja $\mathbf{C}$ uma categoria pivotal braided, o cálculo gráfico para categorias pivotais é modificado passando a representar $\tau_{X,Y}$ e $\overline{\tau}_{X,Y} = \tau_{Y,X}^{-1}$ por linhas que se cruzam por cima ou por baixo, como nos diagramas abaixo:

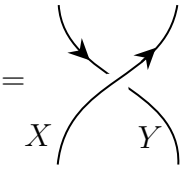


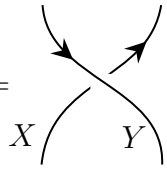
Da mesma forma que no cálculo gráfico para categorias pivotais, uma linha orientada para baixo corresponde ao objeto dual, de forma que

$\tau_{X^*,Y} =$ 

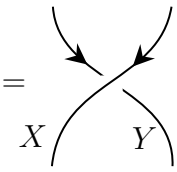
, $\tau^{-1}_{Y,X^*} =$ 

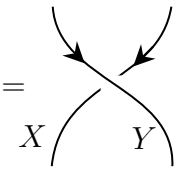
,

$\tau_{X,Y^*} =$ 

, $\tau^{-1}_{Y^*,X} =$ 

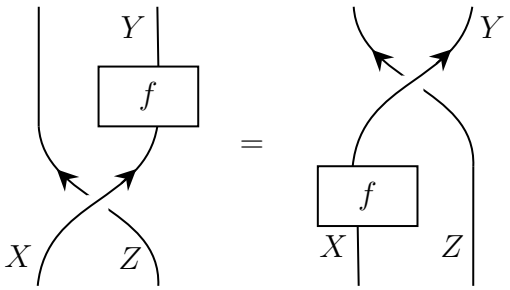
,

$\tau_{X^*,Y^*} =$ 

, $\tau^{-1}_{Y^*,X^*} =$ 

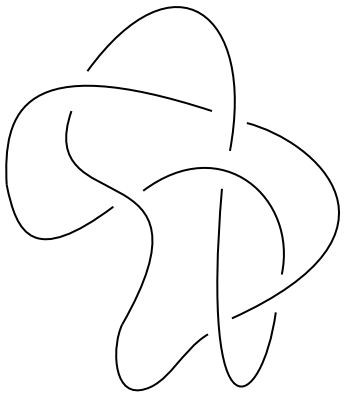
.

Além das transformações válidas para categorias pivotais, temos outras transformações dos diagramas que são específicas de categorias braided, envolvendo estes novos diagramas. A naturalidade do braiding é expressa por podermos passar uma linha por cima ou por baixo de uma caixa, como em



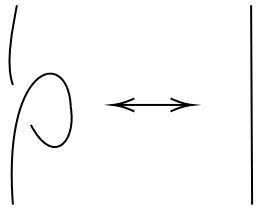
.

Em Teoria de Nós, os nós podem ser estudados por meio dos *link diagrams*, que são diagramas planares formados por laços, a linha que forma o laço cruza a si mesma, por cima ou por baixo, formando um nó, como no exemplo abaixo:

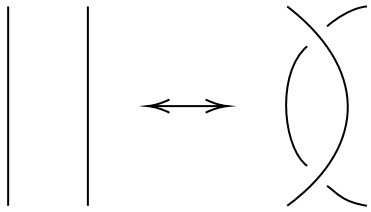


Dois nós são equivalentes se podem ser deformados um no outro por isotopias. Se dois *link diagrams* representam um mesmo nó, então dizemos que os diagramas são equivalentes. Há 3 tipos de transformações locais, chamados de movimentos de Reidemeister, que podemos fazer sobre um *link diagram* produzindo um diagrama equivalente. Os 3 movimentos são:

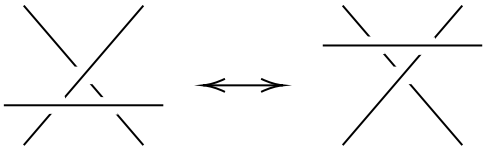
I. torção ou destorção:



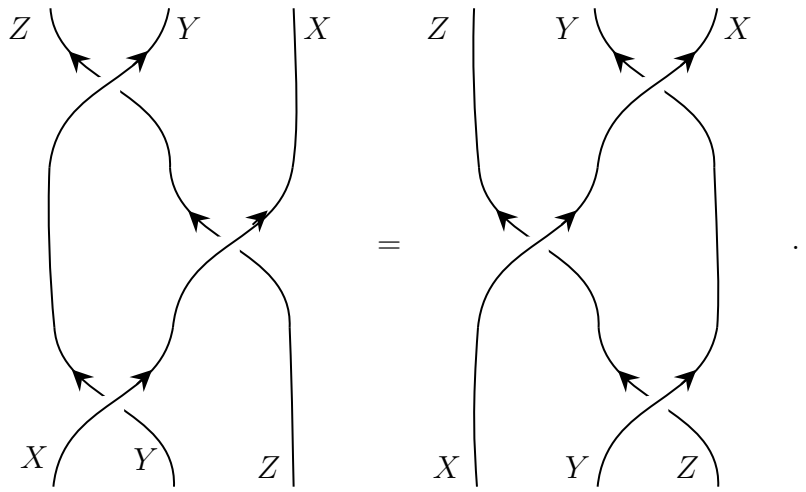
II. passar uma linha por cima da outra:



III. passar uma linha sobre ou sob um cruzamento:



Um teorema devido a Reidemeister diz que dois diagramas de nós são equivalentes se, e somente se, são relacionados por uma sequência de movimentos de Reidemeister. Queremos um resultado análogo para manipular os diagramas de categorias pivotais braided, mas num contexto que não se limite a diagramas de nós. Em particular, os nós são laços, queremos poder trabalhar também com linhas que não se fecham formando laços. Antes de discutirmos o primeiro movimento de Reidemeister, analisemos os outros dois. O segundo movimento de Reidemeister, no contexto de categorias braided, nada mais é do que a identidade $\overline{\tau}_{Y,X}\tau_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, ou simplesmente $\tau^{-1}_{X,Y}\tau_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, e o terceiro movimento de Reidemeister corresponde à equação de Yang-Baxter (3.11). Para maior clareza, dados $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ objetos quaisquer, a equação de Yang-Baxter é representada diagramaticamente por

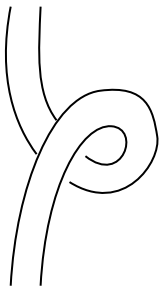


Observe que o terceiro movimento de Reidemeister consiste em passar a linha colorida com X por cima do cruzamento entre as linhas coloridas com Y e Z. Essa mesma igualdade vale também se invertemos os sentidos de quaisquer das linhas ou se a linha colorida com X passa por baixo das demais ao invés de por cima. Também a igualdade é mantida se trocamos todos os cruzamentos, ou seja, se trocamos τ por $\overline{\tau}$, o *mirror braiding*.

O primeiro movimento de Reidemeister corresponde a trocar o twist

$\theta_X =$

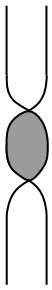
pela identida id_X. Geometricamente, uma linha torcida pode ser sempre esticada, porém isto não é em geral uma transformação legítima no cálculo gráfico de categorias braided, já que nem sempre vale a identidade $\theta_X = \mathrm{id}_X$, devido a isto os diagramas de braidings, entendidos como formados por linhas e caixas, não correspondem bem às propriedades algébricas de uma categoria braided. Podemos alterar esses diagramas trocando as linhas por fitas (*ribbons*), digamos que um lado da fita seja claro e o outro escuro. A torção feita anteriormente corresponde para fitas ao diagrama abaixo:



Essa fita não pode ser esticada (mantendo as extremidades fixas) para se obter uma fita como

,

pois ao tentar esticar tal fita haverá uma torção, como em

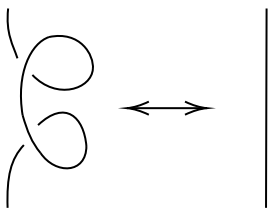


.

Para maiores detalhes deste tipo de diagrama, veja a referência [22]. Nesta referência, logo no início são introduzidas categorias ribbon, e os diagramas utilizados são fitas ao invés de linhas. Conforme a primeira das três fitas anteriores, podemos sempre representar uma torção da fita por uma rotação desta mantendo somente o lado claro da fita visível no diagrama. Utilizando fitas com largura muito pequena, o diagrama usando fitas se torna semelhante ao que usa linhas. Utilizaremos então a interpretação de que as linhas são fitas muito finas com somente o lado claro visível.

A troca de linhas por fitas evita o uso do primeiro movimento de Reidemeister anterior. Ao invés de utilizar esse movimento, utilizaremos o primeiro movimento de Reidemeister modificado

1'. torção ou destorção (modificado):

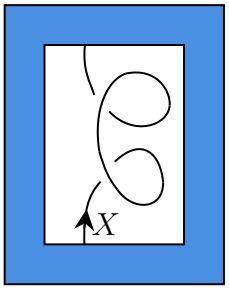


Note que em $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ vale que $\theta_X = \mathrm{id}_X$, então todos movimentos de Reidemeister (modificado ou não) podem ser utilizados para esta categoria. Temos o seguinte teorema:

Teorema 3.11. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria pivotal braided. Os diagramas do cálculo gráfico são invariantes pelos segundo e terceito movimentos de Reidemeister. Se a categoria é, além disso, esférica, então os diagramas também são invariantes pelo primeiro movimento de Reidemeister modificado para diagramas que representam flechas* $\mathbb{1} \to \mathbb{1}$.

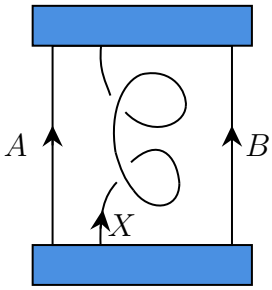
Demonstração. Como discutido anteriormente, o segundo movimento de Reidemeister corresponde à identidade $\tau_{X,Y}^{-1}\tau_{X,Y} = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$ e o terceiro movimento corresponde à equação de Yang-Baxter (3.11).

Suponhamos que a categoria $\mathbf{C}$ seja esférica e seja $f\colon \mathbb{1} \to \mathbb{1}$ representada por um diagrama que contém uma torção (como no primeiro movimento de Reidemeister modificado). Esse diagrama é, portanto, da forma

$f =$ 

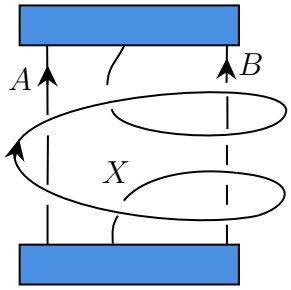
.

em que a parte azul corresponde ao resto do diagrama que não é a torção sobre a qual queremos aplicar o primeiro movimento de Reidemeister. A parte em azul é formada por caixas e linhas, podemos subir e descer essas caixas de forma que podemos representar f por

$f =$ 

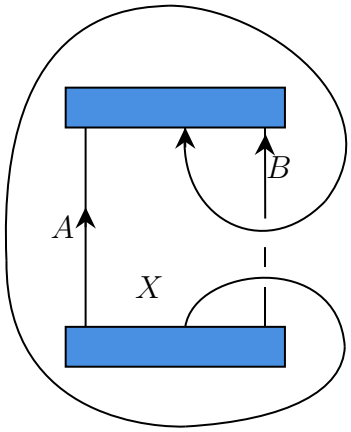
.

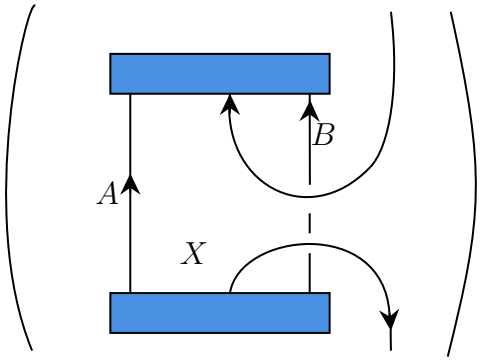
para algum par de objetos $A, B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$. Agora, aplicando o segundo movimento de Reidemeister três vezes temos que

$f =$ 

.

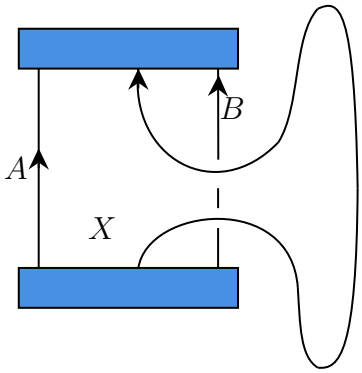
Utilizando a naturalidade do braiding podemos passar a linha por cima das duas caixas azuis, obtendo

$f =$ 

$= tr_l$ 

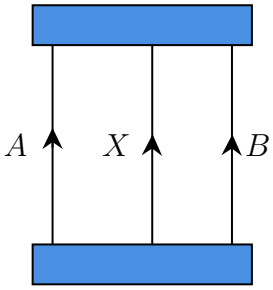
,

mas a categoria é esférica, então $tr_l = tr_r$, logo

$f =$ 

,

por fim, utilizando o segundo movimento de Reidemeister temos que

$f =$ 

.

□

Este teorema e a naturalidade do braiding implicam que podemos passar uma linha por cima ou por baixo de quaisquer caixas e cruzamentos de linhas.

3.4 Categorias Fusion

Para definir categoria fusion será necessário definir primeiro o que são categorias $\mathbb{K}$-lineares e categorias pre-fusion. Fixemos um corpo $\mathbb{K}$ por toda esta seção (enfatizo que $0 \neq 1$, logo $\mathbb{K} \neq \{0\}$).

3.4.1 Categorias Monoidais Lineares

Apesar de podermos definir categoria linear separadamente, a seguir somente são estudadas as que são monoidais lineares. Devido a isto, em diversos resultados a categoria não necessita ser monoidal.

Definição 3.12. Uma categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear $\mathbf{C}$ é uma categoria monoidal com uma estrutura de $\mathbb{K}$-espaço vetorial para $\mathrm{Hom}(X, Y)$ para cada $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, tal que a composição é bilinear, ou seja, para todos $f, f' \in \mathrm{Hom}(X, Y)$, $g, g' \in \mathrm{Hom}(Y, Z)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, para todos $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, são satisfeitas as igualdades:

$$\begin{aligned} g \circ (f + f') &= g \circ f + g \circ f', \\ g \circ (\lambda f) &= \lambda(g \circ f), \\ (g + g') \circ f &= g \circ f + g' \circ f, \\ (\lambda g) \circ f &= \lambda(g \circ f), \end{aligned}$$

além disso, o produto monoidal é bilinear, ou seja, são satisfeitas equações como as quatro anteriores, porém trocando $\circ$ por $\otimes$.

Note que nessa definição nada é dito sobre qual a estrutura de espaço vetorial. Também, da definição podemos concluir algumas propriedades que categorias em geral não precisam satisfazer. De haver uma estrutura de espaço vetorial sobre $\mathrm{Hom}(X, Y)$ segue que há uma flecha $0_{X,Y} \colon X \to Y$ em $\mathrm{Hom}(X, Y)$, o elemento zero do espaço vetorial, para cada $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, em particular $\mathrm{Hom}(X, Y) \neq \varnothing$. Como $0_{X,Y}$ é o vetor nulo de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ então $0_{X,Y} = 0 \cdot 0_{X,Y}$, em que $0 \in \mathbb{K}$, e então pela bilinearidade da composição e do produto monoidal segue que, para quaisquer $f \colon Z \to X$ e $g \colon Y \to W$ e $h \colon S \to T$ flechas em $\mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} 0_{X,Y} \circ f &= 0 \cdot (0_{X,Y} \circ f) = 0_{Z,Y}, \\ g \circ 0_{X,Y} &= 0 \cdot (g \circ 0_{X,Y}) = 0_{X,W}, \\ 0_{X,Y} \otimes h &= 0 \cdot (0_{X,Y} \otimes h) = 0_{X \otimes S, Y \otimes T}, \\ h \otimes 0_{X,Y} &= 0 \cdot (h \otimes 0_{X,Y}) = 0_{S \otimes X, T \otimes Y}, \end{aligned}$$

ou seja, composição e produto por uma flecha zero é uma flecha zero, disto segue também que $0_{Y,Z} \circ 0_{X,Y} = 0_{X,Z}$.

Exemplo

A categoria dos espaços vetorias $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ é um exemplo de categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear, em que a estrutura de espaço vetorial de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ é a usual da Álgebra Linear, em que a soma em $\mathrm{Hom}(X, Y)$ é a soma de funções, ou seja, dadas transformações lineares $f, g \colon X \to Y$, sua soma é a transformação linear $f + g \colon X \to Y$ dada por $(f + g)(x) = f(x) + g(x), \forall x \in X$, e dado $\lambda \in \mathbb{K}$ o produto de f por λ é a transformação linear $\lambda f \colon X \to Y$ dada por $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x)), \forall x \in X$. Neste caso o vetor nulo $0_{X,Y} \colon X \to Y$ é a transformação linear dada por $0_{X,Y}(x) = 0, \forall x \in X$. Da mesma forma, a subcategoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ dos espaços vetoriais de dimensão finita é categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear, e além disso é categoria esférica, como visto anteriormente.

3.4.2 Somas Diretas e Aditividade

Uma categoria pre-fusion é uma categoria com uma família de objetos com propriedades especiais, chamados de objetos simples, em termos dos quais os outros objetos são dados a menos de isomorfismo. Os objetos são isomorfos a somas diretas de objetos simples. Para tornar esses termos precisos, é necessário estudar primeiro o que são somas diretas em categorias $\mathbb{K}$-lineares. Esta é uma generalização do conceito de soma direta de espaços vetoriais, então, antes de apresentar a definição abstrata e geral, estudemos algumas propriedades da soma direta de espaços vetoriais. Somente estaremos interessados nos espaços vetoriais de dimensão finita e em somas diretas finitas.

Consideremos o caso mais simples em que temos dois espaços vetoriais X e Y, de dimensão finita, a soma direta (externa) de X e Y é o espaço vetorial $X \oplus Y$ que é o conjunto $X \times Y$ munido da operação de soma e produto por escalar ambos componente a componente, ou seja, dados $(x, y), (x', y') \in X \oplus Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, a soma é definida como $(x, y) + (x', y') := (x + x', y + y')$ e o produto por escalar é $\lambda \cdot (x, y) := (\lambda x, \lambda y)$. Observe que os subespaços vetoriais $X' := \{(x, 0) : x \in X\}$ e $Y' := \{(0, y) : y \in Y\}$ de $X \oplus Y$ são isomorfos a X e Y, respectivamente. Além disso, $X \oplus Y$ é soma direta interna desses dois subespaços, porém não entrarei nestes detalhes. Temos então transformações lineares $q_1 \colon X \to X \oplus Y$ e $q_2 \colon Y \to X \oplus Y$, dadas por $q_1(x) = (x, 0)$ e $q_2(y) = (0, y)$, e também $p_1 \colon X \oplus Y \to X$ e $p_2 \colon X \oplus Y \to Y$, dadas por $p_1(x, y) = x$ e $p_2(x, y) = y$. Os mapas q_1 e q_2 são injetores e estabelecem isomorfismos entre X e X' e entre Y e Y', de forma natural, nesse sentido eles são inclusões de X e Y em $X \oplus Y$. Os mapas p_1 e p_2 são as projeções canônicas.

Um vetor de $X \oplus Y$ pode ser decomposto como $(x, y) = (x, 0) + (0, y) = q_1(x) + q_2(y) = q_1p_1(x, y) + q_2p_2(x, y)$, essa propriedade equivale à equação $\sum_{i\in\{1,2\}} q_ip_i = \mathrm{id}_{X\oplus Y}$. Também temos que $p_1q_1(x) = x$ e $p_2q_2(y) = y$, e se misturamos os dois tipos de projeções e inclusões então temos que $p_1q_2(y) = p_1(0, y) = 0$ e $p_2q_1(x) = 0$, essas quatro equações se resumem em $p_iq_j = \delta_{i,j}\mathrm{id}$. Aqui id tem o mesmo domínio que q_i, logo temos o abuso de notação, quando $i \neq j$, em que $0 \cdot \mathrm{id}$ é a flecha $0_{X,Y}$ ou $0_{Y,X}$, conforme o caso. Reciprocamente, se para um espaço vetorial S existem transformações lineares $q'_1 \colon X \to S$, $q'_2 \colon Y \to S$, $p'_1 \colon S \to X$ e $p'_2 \colon S \to Y$ satisfazendo às equações $\sum_{i\in\{1,2\}} q'_ip'_i = \mathrm{id}_{X\oplus Y}$ e $p'_iq'_j = \delta_{i,j}\mathrm{id}$, segue então que S é isomorfo a $X \oplus Y$, e o isomorfismo construído de forma natural é $q_1p'_1 + q_2p'_2 \colon S \to X \oplus Y$, cuja inversa é $q'_1p_1 + q'_2p_2 \colon X \oplus Y \to S$. Portanto, ao invés de definir soma direta em termos de um produto cartesiano (o que não é desejável pois objetos em categorias não precisam ser definidos como conjuntos), podemos utilizar as flechas q e p que satisfazem às condições anteriores como definição de soma direta a menos de isomorfismo.

Definição 3.13. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear. Dada um conjunto finito $\Lambda \neq \varnothing$ e uma família $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de objetos de $\mathbf{C}$, uma soma direta dessa família é um objeto $S \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ com uma família de flechas $(p_\alpha \colon S \to X_\alpha, q_\alpha \colon X_\alpha \to S)_{\alpha\in\Lambda}$ satisfazendo às equações $\sum_{\alpha\in\Lambda} q_\alpha p_\alpha = \mathrm{id}_S$ e $p_\alpha q_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}_{X_\alpha}, \forall \alpha, \beta \in \Lambda$. As flechas q_α são chamadas de inclusões e as p_α de projeções. Uma soma direta de uma família vazia ($\Lambda = \varnothing$) é um objeto zero, caso exista. Um objeto zero é um objeto que é inicial e terminal, ou, equivalentemente para categorias monoidais $\mathbb{K}$-lineares, é um objeto Z tal que $\mathrm{End}(Z) = \mathrm{Hom}(Z, Z) = \{0_{Z,Z}\}$.

Note que a soma direta de objetos é única a menos de isomorfismo.

Lema 3.14. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria monoidal* $\mathbb{K}$*-linear,* $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *uma família de objetos de* $\mathbf{C}$ *e* $(p_\alpha\colon S \to X_\alpha, q_\alpha\colon X_\alpha \to S)_{\alpha\in\Lambda}$ *e* $(p'_\alpha\colon S' \to X_\alpha, q'_\alpha\colon X_\alpha \to S')_{\alpha\in\Lambda}$ *duas somas diretas de* $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$*, então* $f = \sum_{\alpha\in\Lambda} q'_\alpha p_\alpha\colon S \to S'$ *é o único isomorfismo tal que* $p'_\alpha f = p_\alpha$ *e* $fq_\alpha = q'_\alpha$*,* $\forall\alpha \in \Lambda$*, também sua inversa é* $f^{-1} = \sum_{\alpha\in\Lambda} q_\alpha p'_\alpha$*.*

Demonstração. Suponhamos que existe um isomorfismo $f\colon S \to S'$ tal que $p'_\alpha f = p_\alpha$ e $fq_\alpha = q'_\alpha$, $\forall\alpha \in \Lambda$. Então $f = p'_\alpha f q_\beta = p'_\alpha q'_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}$, logo $\sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} q'_\alpha p'_\alpha f q_\beta p_\beta = \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} \delta_{\alpha,\beta} q'_\alpha p_\beta = \sum_{\alpha\in\Lambda} q'_\alpha p_\alpha$. Mostremos que este é um isomorfismo, temos que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} q'_\alpha p_\alpha\right)\left(\sum_{\beta\in\Lambda} q_\beta p'_\beta\right) &= \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} q'_\alpha p_\alpha q_\beta p'_\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta\in\Lambda} \delta_{\alpha,\beta} q'_\alpha p'_\beta \\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda} q'_\alpha p'_\alpha \\ &= \mathrm{id},\end{aligned}$$

e de forma análoga temos que

$$\left(\sum_{\beta\in\Lambda} q_\beta p'_\beta\right)\left(\sum_{\alpha\in\Lambda} q'_\alpha p_\alpha\right) = \mathrm{id},$$

logo $f^{-1} = \sum_{\alpha\in\Lambda} q_\alpha p'_\alpha$. Por fim, note que

$$\begin{aligned}p'_\alpha f &= p'_\alpha \sum_{\beta\in\Lambda} q'_\beta p_\beta \\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda} p'_\alpha q'_\beta p_\beta \\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda} \delta_{\alpha,\beta} p_\beta \\ &= p_\alpha,\end{aligned}$$

e analogamente temos que $fq_\alpha = q'_\alpha$. □

A soma direta pode ser passada para fora de um Hom, conforme o lema a seguir.

Lema 3.15. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria monoidal* $\mathbb{K}$*-linear,* $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ *uma família de objetos de* $\mathbf{C}$ *que possui uma soma direta e* $Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$*. Então* $\mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, Y) \cong \oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{Hom}(X_\alpha, Y)$ *e* $\mathrm{Hom}(Y, \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) \cong \oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{Hom}(Y, X_\alpha)$*.*

Demonstração. Seja $(p_\alpha\colon \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha, q_\alpha\colon X_\alpha \to \oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ uma soma direta de $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$. Considere o mapa

$$\begin{aligned}\varphi\colon \mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha, Y) &\longrightarrow \oplus_{\alpha\in\Lambda}\mathrm{Hom}(X_\alpha, Y) \\ f &\longmapsto (fq_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\end{aligned}$$

este é um isomorfismo de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, de fato, sua inversa é

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\colon \oplus_{\alpha\in\Lambda}\operatorname{Hom}(X_\alpha, Y) &\longrightarrow \operatorname{Hom}(\oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha, Y)\\ (g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} &\longmapsto \sum_{\alpha\in\Lambda} g_\alpha p_\alpha\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}\varphi(f) &= \varphi^{-1}(fq_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda} fq_\alpha p_\alpha\\ &= f\sum_{\alpha\in\Lambda} q_\alpha p_\alpha\\ &= f,\end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\varphi\varphi^{-1}(g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} &= \varphi\left(\sum_{\beta\in\Lambda} g_\beta p_\beta\right)\\ &= \left(\left(\sum_{\beta\in\Lambda} g_\beta p_\beta\right) q_\alpha\right)_{\alpha\in\Lambda}\\ &= \left(\sum_{\beta\in\Lambda} \delta_{\alpha,\beta} g_\beta\right)_{\alpha\in\Lambda}\\ &= (g_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}.\end{aligned}$$

Analogamente, temos um isomorfismo

$$\begin{aligned}\psi\colon \operatorname{Hom}(Y, \oplus_{\alpha\in\Lambda}X_\alpha) &\longrightarrow \oplus_{\alpha\in\Lambda}\operatorname{Hom}(Y, X_\alpha)\\ f &\longmapsto (p_\alpha f)_{\alpha\in\Lambda}\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Uma categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear é dita aditiva se possui soma direta para qualquer família finita (possivelmente vazia) de objetos. Numa categoria aditiva podemos formar somas diretas por iterações.

Lema 3.16. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria monoidal* $\mathbb{K}$*-linear aditiva. Dadas duas famílias* $(X^1_\alpha)_{\alpha\in A}$ *e* $(X^2_\beta)_{\beta\in B}$ *de objetos de* $\mathbf{C}$*, com* A *e* B *não vazios,* $(p^1_\alpha\colon S_1 \to X^1_\alpha, q^1_\alpha\colon X^1_\alpha \to S_1)_{\alpha\in A}$ *uma soma de direta de* $(X^1_\alpha)_{\alpha\in A}$*,* $(p^2_\beta\colon S_2 \to X^2_\beta, q^2_\beta\colon X^2_\beta \to S_2)_{\beta\in B}$ *uma soma direta de* $(X^2_\beta)_{\beta\in B}$ *e* $(P_i\colon T \to S_i, Q_i\colon S_i \to T)_{i\in\{1,2\}}$ *uma soma direta de* (S_1, S_2)*. Seja* $C = A\times\{1\}\cup B\times\{2\}$*, então a família* $(p^i_\gamma P_i, Q_i q^i_\gamma)_{(\gamma,i)\in C}$ *é uma soma direta de* $(X^i_\gamma)_{(\gamma,i)\in C}$*.*

Demonstração. Temos que

$$p^i_\gamma P_i Q_j q^j_\eta = \delta_{i,j} p^i_\gamma q^j_\eta$$

$$= \delta_{i,j}\delta_{\gamma,\eta}\mathrm{id},$$

e também

$$\begin{aligned}
\sum_{(\gamma,i)\in C} Q_i q^i_\gamma p^i_\gamma P_i &= \sum_{\alpha\in A} Q_1 q^1_\alpha p^1_\alpha P_1 + \sum_{\beta\in B} Q_2 q^2_\beta p^2_\beta P_2 \\
&= Q_1 \left(\sum_{\alpha\in A} q^1_\alpha p^1_\alpha\right) P_1 + Q_2 \left(\sum_{\beta\in B} q^2_\beta p^2_\beta\right) P_2 \\
&= Q_1 P_1 + Q_2 P_2 \\
&= \mathrm{id}.
\end{aligned}$$

□

Exemplo

Pelas considerações anteriores, uma soma direta em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ para uma família não-vazia e finita de espaços vetoriais $(X_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ é dada pelo produto $S = \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ com as inclusões $q_\alpha\colon X_\alpha \to \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta$ dadas por $q_\alpha(x_\alpha) = (x_\beta)_{\beta\in\Lambda}$, em que $x_\beta = 0 \in X_\beta$ se $\beta \neq \alpha$, e com as projeções $p_\alpha\colon \prod_{\beta\in\Lambda} X_\beta \to X_\alpha$ dadas por $p_\alpha((x_\beta)_{\beta\in\Lambda}) = x_\alpha$. Esta categoria possui objeto zero, que é o espaço vetorial nulo $\{0\}$, portanto, $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ é aditiva.

Equivalência entre definições de objeto zero

Esta seção não é necessária para as demais e pode ser pulada com segurança.

Verifiquemos que as duas definições de objeto zero são equivalentes em categorias monoidais $\mathbb{K}$-lineares. Para categorias em geral (não precisam ser monoidais ou lineares) temos as seguintes definições:

Definição 3.17. Dada uma categoria $\mathbf{C}$, um objeto inicial, se existir, é um objeto I tal que $\mathrm{Hom}(I, X)$ é não-vazio e possui um único elemento, ou seja, $\#\mathrm{Hom}(I, X) = 1$, para todo objeto X de $\mathbf{C}$. Um objeto terminal é o dual de um inicial, ou seja, é um objeto que é inicial na categoria dual, em outras palavras, se tal objeto existir, ele é um objeto T de $\mathbf{C}$ tal que $\#\mathrm{Hom}(X, T) = 1$, para todo objeto X de $\mathbf{C}$. Um objeto zero é um objeto que é inicial e terminal.

Fixemos uma categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear $\mathbf{C}$.

Seja $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ um objeto zero no sentido de ser inicial e terminal, como $\mathbf{C}$ é categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear então para todo objeto X os conjuntos $\mathrm{Hom}(Z, X)$ e $\mathrm{Hom}(X, Z)$ são espaços vetoriais, como Z é inicial e terminal então esses espaços vetoriais têm um único elemento, que necessariamente é o vetor nulo, logo $\mathrm{Hom}(Z, X) = \{0_{Z,X}\}$ e $\mathrm{Hom}(X, Z) = \{0_{X,Z}\}$, em particular temos que $\mathrm{End}(Z) = \{0_{Z,Z}\}$.

Agora seja $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ um objeto tal que $\mathrm{End}(Z) = \{0_{Z,Z}\}$, como $\mathbf{C}$ é categoria então temos a flecha $\mathrm{id}_Z \in \mathrm{End}(Z)$, logo $\mathrm{id}_Z = 0_{Z,Z}$. Como $\mathbf{C}$ é categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear então $\mathrm{Hom}(Z, X)$ e $\mathrm{Hom}(X, Z)$ são espaços vetoriais, para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, em particular $0_{Z,X} \in \mathrm{Hom}(Z, X)$ e $0_{X,Z} \in \mathrm{Hom}(X, Z)$, logo eles possuem pelo menos um elemento. Seja $f\colon Z \to X$ uma flecha de $\mathrm{Hom}(Z, X)$, como id_Z é flecha identidade então $f = f \circ \mathrm{id}_Z$, mas $\mathrm{id}_Z = 0_{Z,Z}$, logo $f = f \circ 0_{Z,Z} = 0_{Z,X}$, o que conclui que

$\mathrm{Hom}(Z, X) = \{0_{Z,X}\}$, como X é arbitrário então isso implica que Z é objeto inicial, analogamente podemos mostrar que Z é objeto terminal.

Com isto podemos concluir que um objeto $Z \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ é inicial e terminal se, e somente se, $\mathrm{End}(Z) = \{0_{Z,Z}\}$.

3.4.3 Categorias Pre-Fusion

Primeiro precisamos definir o que são objetos simples.

Definição 3.18. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear, um objeto simples é um objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ tal que $\dim(\mathrm{End}(X)) = 1$.

Para alguns autores isso é chamado de objeto absolutamente simples ou objeto escalar.

Para X objeto simples, considere a transformação linear

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\to \mathrm{End}(X) \\ k &\mapsto k\mathrm{id}_X \end{aligned}$$

ela é isomorfismo, de fato, como $\dim \mathrm{End}(X) = 1$ então $\mathrm{End}(X) \neq 0$, como $\mathbf{C}$ é categoria então há a flecha $\mathrm{id}_X \in \mathrm{End}(X)$, se $\mathrm{id}_X = 0_{X,X}$ então $\mathrm{End}(X) = 0$, mas este não é o caso, logo $\mathrm{id}_X \neq 0_{X,X}$ e então o subespaço $\langle \mathrm{id}_X \rangle$ de $\mathrm{End}(X)$ gerado por id_X tem dimensão 1, portanto, $\mathrm{End}(X) = \langle \mathrm{id}_X \rangle = \mathbb{K}\{\mathrm{id}_X\}$, assim a transformação linear anterior é sobrejetora. Ela é injetora pois se $k\mathrm{id}_X = 0_{X,X}$ então $k = 0$, pois se $k \neq 0$ então é inversível, pois $\mathbb{K}$ é corpo, logo $\mathrm{id}_X = k^{-1}k\mathrm{id}_X = k^{-1}0_{X,X} = 0_{X,X}$, absurdo, logo $k = 0$ e a transformação tem kernel $\{0\}$, de onde segue que é injetora. Isso conclui que ela é bijetora, e, portanto, isomorfismo.

Com isto podemos definir o que são categorias pre-fusion.

Definição 3.19. Uma categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear $\mathbf{C}$ é pre-fusion se há um conjunto I de objetos simples de $\mathbf{C}$ satisfazendo às seguintes condições:

(a) $\mathbb{1} \in I$;

(b) $\mathrm{Hom}(i, j) = 0$ para distintos $i, j \in I$;

(c) para todo $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ existe um conjunto finito Λ e uma família $(i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, com $i_\alpha \in I, \forall \alpha \in \Lambda$, tal que X é soma direta dessa família de objetos simples, ou seja, existe uma família $(p_\alpha \colon X \to i_\alpha, q_\alpha \colon i_\alpha \to X)_{\alpha\in\Lambda}$ de flechas em $\mathbf{C}$ que é soma direta de $(i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$.

Note que, em (c), pode ocorrer que $i_\alpha = i_\beta$ para $\alpha \neq \beta$. Segue desta definição o seguinte lema.

Lema 3.20. *Dado um objeto simples de uma categoria* $\mathbf{C}$ *pre-fusion, ele é isomorfo a um único elemento de* I.

Demonstração. Seja $j \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ um objeto simples, por (c) existe uma família $(i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ de objetos de I da qual j é soma direta. Essa família não é vazia pois, como $\dim(\mathrm{End}(j)) =$

1, então j não é objeto zero. Dados quaisquer $\alpha, \beta \in \Lambda$, temos que $q_\alpha p_\alpha \in \mathrm{End}(j)$, como j é simples então $\exists! k_\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $q_\alpha p_\alpha = k_\alpha \mathrm{id}_j$, compondo com p_β e q_β temos que

$$\begin{aligned} p_\beta q_\alpha p_\alpha q_\beta &= p_\beta (k_\alpha \mathrm{id}_j) q_\beta \\ &= k_\alpha p_\beta q_\beta \\ &= k_\alpha \mathrm{id}_{i_\beta}, \end{aligned}$$

mas, por outro lado,

$$\begin{aligned} p_\beta q_\alpha p_\alpha q_\beta &= (\delta_{\beta,\alpha} \mathrm{id}_{i_\alpha})(\delta_{\alpha,\beta} \mathrm{id}_{i_\beta}) \\ &= \delta_{\alpha,\beta} \mathrm{id}_{i_\beta}, \end{aligned}$$

logo $k_\alpha \mathrm{id}_{i_\beta} = \delta_{\alpha,\beta} \mathrm{id}_{i_\beta}$, como i_β é objeto simples então $k_\alpha = \delta_{\alpha,\beta}$, esta equação deve valer para quaisquer $\alpha, \beta \in \Lambda$, o que só é possível se Λ é unitário, digamos que $\Lambda = \{\alpha\}$, e $k_\alpha = 1$. Como só há um α, convém abandonar o índice α da notação. Dessa forma, a soma direta é um par de flechas $(p\colon j \to i, q\colon i \to j)$, para algum $i \in I$. As condições de ser soma direta se tornam neste caso em $qp = \mathrm{id}_j$ e $pq = \mathrm{id}_i$, ou seja, p e q são isomorfismos, com $p^{-1} = q$, daí j é isomorfo ao objeto $i \in I$. Este i é único, suponhamos que exista um objeto $i' \in I$, $i' \neq i$, tal que j é isomorfo a i', e seja $f\colon j \to i'$ um isomorfismo, então $fq\colon i \to i'$ é flecha de $\mathrm{Hom}(i, i') = \{0_{i,i'}\}$, logo $fq = 0_{i,i'} \implies f = fqq^{-1} = 0_{i,i'}q^{-1} = 0_{j,i'}$, e então $\mathrm{id}_j = f^{-1}f = f^{-1}0_{j,i'} = 0_{j,j}$, absurdo, pois j é objeto simples. Isto conclui que para todo objeto simples $j \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ $\exists! i \in I$ tal que j é isomorfo i. $\square$

Devido a esta propriedade o conjunto I é chamado de conjunto representativo de objetos simples. O lema a seguir mostra que podemos enfraquecer a condição $\mathbb{1} \in I$ para $\mathbb{1}$ é objeto simples. Isto será utilizado no final do capítulo 4.

Lema 3.21. *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, $\mathbf{C}$ uma categoria monoidal $\mathbb{K}$-linear aditiva e I um conjunto representativo de objetos simples de $\mathbf{C}$, satisfazendo às seguintes propriedades:*

- *$\mathbb{1}$ é simples;*
- *para quaisquer $i, j \in I$ com $i \neq j$ vale que $\mathrm{Hom}(i, j) = 0$;*
- *todo objeto de $\mathbf{C}$ é isomorfo à soma direta de uma família finita $(i_\alpha)_{\alpha \in A}$ de objetos de I.*

Então podemos trocar por $\mathbb{1}$ o único objeto $i_0 \in I$ isomorfo a $\mathbb{1}$, obtendo assim um conjunto I' de forma que para I' são satisfeitos todos axiomas de categoria pre-fusion.

Demonstração. Como $\mathbb{1}$ é objeto simples então é isomorfo a um único objeto de I, sejam i_0 este objeto, $\varphi\colon i_0 \to \mathbb{1}$ um isomorfismo e $I' = (I \setminus \{i_0\}) \cup \{\mathbb{1}\}$. Sejam $i, j \in I'$ com $i \neq j$, se ambos são distintos de $\mathbb{1}$ já sabemos que $\mathrm{Hom}(i, j) = 0$, se $i = \mathbb{1}$ e $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, j)$, então $f\varphi \in \mathrm{Hom}(i_0, j) = 0$, logo $f = (f\varphi)\varphi^{-1} = 0 \circ \varphi^{-1} = 0$, logo $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, j) = 0$, analogamente segue que $\mathrm{Hom}(i, \mathbb{1}) = 0$ para qualquer $i \in I'$ com $i \neq \mathbb{1}$, logo $\mathrm{Hom}(i, j) = 0$ para quaisquer $i, j \in I'$ com $i \neq j$.

Agora seja X um objeto de $\mathbf{C}$, suponhamos que X não é objeto zero, então existe uma família $(i_\alpha)_{\alpha \in A}$, onde $i_\alpha \in I$ e A é um conjunto finito não vazio, tal que X é isomorfo a $\oplus_{\alpha \in A} i_\alpha$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $0 \notin A$, evitando assim

ambiguidades. Seja $(p_\alpha\colon \oplus_{\alpha\in A} i_\alpha \to i_\alpha, q_\alpha\colon i_\alpha \to \oplus_{\alpha\in A} i_\alpha)_{\alpha\in A}$ a soma direta da família $(i_\alpha)_{\alpha\in A}$, de forma que $p_\alpha q_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}$ e $\sum_{\alpha\in A} q_\alpha p_\alpha = \mathrm{id}$. Seja $A' = \{\alpha \in A : i_\alpha = i_0\}$, seja $f_\alpha = \mathrm{id}_{i_\alpha}$ se $\alpha \notin A'$ e $f_\alpha = \varphi$ se $\alpha \in A'$, e seja $i'_\alpha = \mathrm{cod}(f_\alpha)$, isso define uma família de isomorfismos $(f_\alpha\colon i_\alpha \to i'_\alpha)_{\alpha\in A}$, então isso dá uma soma direta $(p'_\alpha, q'_\alpha)_{\alpha\in A}$ para a família $(i'_\alpha)_{\alpha\in A}$ com $i'_\alpha \in I'$, em que $p'_\alpha = f_\alpha p_\alpha$ e $q'_\alpha = q_\alpha f_\alpha^{-1}$, de fato, temos que

$$\begin{aligned} p'_\alpha q'_\beta &= f_\alpha p_\alpha q_\beta f_\beta^{-1} \\ &= \delta_{\alpha,\beta} f_\alpha f_\alpha^{-1} \\ &= \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\in A} q'_\alpha p'_\alpha &= \sum_{\alpha\in A} q_\alpha f_\alpha^{-1} f_\alpha p_\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in A} q_\alpha p_\alpha \\ &= \mathrm{id}. \end{aligned}$$

Observe que $\mathrm{dom}(p_\alpha) = \oplus_{\alpha\in A} i_\alpha = \mathrm{dom}(p'_\alpha)$, então podemos escrever $\oplus_{\alpha\in A} i'_\alpha = \oplus_{\alpha\in A} i_\alpha$, logo $X \cong \oplus_{\alpha\in A} i'_\alpha$. Isso conclui que $\mathbf{C}$ satisfaz aos axiomas de categoria pre-fusion. □

Exemplo

A categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ é pre-fusion, em que $I = \{\mathbb{K}\}$, assim $I = \{\mathbb{1}\}$, de forma que as condições (a) e (b) de ser pre-fusion são triviais. A condição (c) segue de todo espaço vetorial ser caracterizado por sua dimensão, assim se X é espaço vetorial de dimensão n então X é isomorfo a uma soma direta de n cópias de $\mathbb{K}$.

3.4.4 Categorias monoidais lineares não-degeneradas

Numa categoria $\mathbf{C}$ com $\mathbb{1}$ simples temos que $\mathrm{End}(\mathbb{1}) \cong \mathbb{K}$, então dado um pareamento $\omega\colon X \otimes Y \to \mathbb{1}$ ele induz uma transformação linear $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, Y) \to \mathrm{End}(\mathbb{1})$ em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$, dada por $f \otimes g \mapsto \omega \circ (f \otimes g)$, $\forall f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X)$ e $\forall g \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, Y)$. Compondo com o isomorfismo anterior isso resulta em um pareamento $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, Y) \to \mathbb{K}$ em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$. Se ω é não-degenerado, não necessariamente o pareamento induzido em $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ é não-degenerado, porém, se isso vale para qualquer $\omega\colon X \otimes Y \to \mathbb{1}$ não-degenerado então a categoria $\mathbf{C}$ é dita não-degenerada. É uma propriedade de categorias pre-fusion que elas são não-degeneradas, para maiores detalhes veja o livro [21].

3.4.5 Categorias Fusion Pivotais

Como não foi discutido com detalhe o que são categorias rígidas, nos restringiremos a definir o que são categorias fusion pivotais.

Definição 3.22. Uma categoria fusion pivotal é uma categoria $\mathbf{C}$ pre-fusion e pivotal tal que o conjunto representativo de objetos simples I é finito.

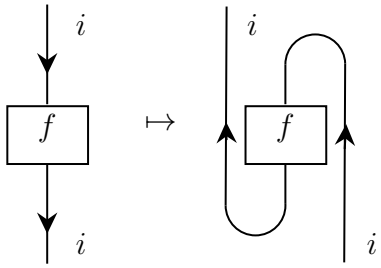
Exemplo

Como $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{K}}$ é categoria esférica e pre-fusion, com $I = \{\mathbb{K}\}$, então ela é categoria fusion esférica.

Lema 3.23. *Dada uma categoria fusion pivotal* $\mathbf{C}$ *e um objeto simples* $i \in I$*, o dual* i^* *não é necessariamente um elemento de* I*, porém ele é simples e existe um único objeto simples* $i^\circ \in I$ *tal que* $i^* \cong i^\circ$*. Além disso,* $i \mapsto i^\circ$ *é involução, ou seja,* $(i^\circ)^\circ = i$*.*

Demonstração. Basta mostrar que i^* é simples, pois a existência e unicidade de i° segue então do lema 3.20. Por definição, $\mathrm{End}(i^*) = \mathrm{Hom}(i^*, i^*)$, e temos o isomorfismo $\mathrm{Hom}(i^*, i^*) \cong \mathrm{Hom}(i, i)$ dado por

$$Hom\,(i^*, i^*) \quad \to \quad Hom(i, i)$$



logo $\mathrm{End}(i^*) \cong \mathrm{End}(i) \cong \mathbb{K}$, daí i^* é simples. Além disso, como $i^{**} \cong i$ então $(i^\circ)^\circ = i$. $\square$

3.4.6 Partições por Objetos Simples

Seja $\mathbf{C}$ uma categoria pre-fusion. Dado um objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, pela propriedade (c) de categoria pre-fusion, existe um conjunto finito Λ e uma família $(i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, com $i_\alpha \in I$, tal que X é isomorfo à soma direta de $(i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, no sentido de que temos uma soma direta $(p_\alpha\colon \oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha \to i_\alpha, q_\alpha\colon i_\alpha \to \oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ e $X \cong \oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha$.

Para cada $j \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ objeto simples, seja $\Lambda_j = \{\alpha \in \Lambda : i_\alpha \cong j\}$. Enfatizo que pode ocorrer que $i_\alpha = i_\beta$ para $\alpha \neq \beta$, logo Λ_j pode não ser conjunto unitário. Então, para $i \in I$, $(p_\alpha\colon \oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha \to i)_{\alpha\in\Lambda_i}$ é uma base de $\mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha, i)$ e $(q_\alpha\colon i \to \oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_i}$ é uma base de $\mathrm{Hom}(i, \oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha)$. De fato, seja $f \in \mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha, i)$, então

$$\begin{aligned} f &= f \sum_{\alpha\in\Lambda} q_\alpha p_\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in\Lambda} f q_\alpha p_\alpha, \end{aligned}$$

mas $f q_\alpha \in \mathrm{Hom}(i_\alpha, i) = \delta_{i_\alpha, i}\mathbb{K}\mathrm{id}_i$, logo $f q_\alpha = 0$ se $\alpha \notin \Lambda_i$ e para cada $\alpha \in \Lambda_i$ $!\exists k_\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $f q_\alpha = k_\alpha \mathrm{id}_i$, portanto,

$$f = \sum_{\alpha\in\Lambda_i} k_\alpha p_\alpha,$$

isso conclui que $(p_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_i}$ gera $\mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha\in\Lambda} i_\alpha, i)$. Mostremos que esse conjunto é l.i., dada uma família $(k_\alpha)_{\alpha\in\Lambda_i}$ com $k_\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\sum_{\alpha\in\Lambda_i} k_\alpha p_\alpha = 0$, temos que, para qualquer

$\beta \in \Lambda_i$,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha \in \Lambda_i} k_\alpha p_\alpha q_\beta \\ &= \sum_{\alpha \in \Lambda_i} k_\alpha \delta_{\alpha,\beta} \mathrm{id}_i \\ &= k_\beta \mathrm{id}_i, \end{aligned}$$

como i é objeto simples então $k_\beta = 0$, $\forall \beta \in \Lambda_i$, com isto temos que $(p_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_i}$ é base de $\mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha, i)$, analogamente podemos mostrar que $(q_\alpha)_{\alpha \in \Lambda_i}$ é base de $\mathrm{Hom}(i, \oplus_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha)$.

Agora seja $j \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ um objeto simples, então existe um único objeto $i \in I$ isomorfo a j, sejam $\psi \colon i \to j$ e $\varphi \colon X \to \oplus_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha$ isomorfismos, então segue que $(\psi p_\alpha \varphi)_{\alpha \in \Lambda_i}$ é base de $\mathrm{Hom}(X, i)$ e $(\varphi^{-1} q_\alpha \psi^{-1})_{\alpha \in \Lambda_i}$ é base de $\mathrm{Hom}(i, X)$. Seja $N_j^X = \dim \mathrm{Hom}(X, j)$, dos resultados anteriores temos que

$$N_j^X = \dim \mathrm{Hom}(X, j) = \dim \mathrm{Hom}(j, X) = \#\Lambda_j.$$

Dado $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, uma I-partição de X é uma família $(p_\alpha \colon X \to i_\alpha, q_\alpha \colon i_\alpha \to X)_{\alpha \in \Lambda}$ que é uma soma direta de uma família $(i_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, com $i_\alpha \in I$. Conforme a propriedade (c) de categoria pre-fusion, temos uma soma direta $(p_\alpha \colon \oplus_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha \to i_\alpha, q_\alpha \colon i_\alpha \to \oplus_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ e um isomorfismo $\varphi \colon X \to \oplus_{\alpha \in \Lambda} i_\alpha$, segue que $(p_\alpha \varphi, \varphi^{-1} q_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ é uma I-partição de X.

Para $j \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ objeto simples e $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$, uma família $(p_\alpha \colon X \to j, q_\alpha \colon j \to X)_{\alpha \in A}$ tal que $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ é base de $\mathrm{Hom}(X, i)$, $(q_\alpha)_{\alpha \in A}$ é base de $\mathrm{Hom}(i, X)$ e $p_\alpha q_\beta = \delta_{\alpha,\beta} \mathrm{id}$ é dita uma j-partição de X. Os resultados anteriores mostram que podemos obter j-partições a partir de I-partições. Vale também a recíproca, no sentido de que a união das i-partições de X, para cada $i \in I$, forma uma I-partição de X. Antes de mostrar isso convém provar o seguinte resultado:

Lema 3.24. *Dada uma categoria pre-fusion* $\mathbf{C}$ *com conjunto representativo de objetos simples* I *e objetos* $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$*, vale que*

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \bigoplus_{i \in I} \mathrm{Hom}(X, i) \otimes \mathrm{Hom}(i, Y),$$

em particular, a dimensão de $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *é*

$$\dim \mathrm{Hom}(X, Y) = \sum_{i \in I} N_i^X N_i^Y.$$

Demonstração. Pela propriedade (c) de categoria pre-fusion temos duas famílias $(i_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(j_\beta)_{\beta \in B}$, com $i_\alpha, j_\beta \in I$ e A e B conjuntos finitos, somas diretas $(p_\alpha \colon \oplus_{\alpha \in A} i_\alpha \to i_\alpha, q_\alpha \colon i_\alpha \to \oplus_{\alpha \in A} i_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(p'_\beta \colon \oplus_{\beta \in B} j_\beta \to j_\beta, q_\beta \colon j_\beta \to \oplus_{\beta \in B} j_\beta)_{\beta \in B}$ tais que $X \cong \oplus_{\alpha \in A} i_\alpha$ e $Y \cong \oplus_{\beta \in B} j_\beta$. Com isto,

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}\left(\bigoplus_{\alpha \in A} i_\alpha, \bigoplus_{\beta \in B} j_\beta \right)$$

$$
\begin{aligned}
&\cong \bigoplus_{\alpha\in A}\bigoplus_{\beta\in B}\mathrm{Hom}(i_\alpha, j_\beta)\\
&\cong \bigoplus_{\alpha\in A}\bigoplus_{\beta\in B}\delta_{i_\alpha,j_\beta}\mathbb{K}\\
&\cong \bigoplus_{\alpha\in A}\bigoplus_{\beta\in B}\bigoplus_{i\in I}\delta_{i_\alpha,i}\delta_{j_\beta,i}\mathbb{K}\\
&\cong \bigoplus_{\alpha\in A}\bigoplus_{\beta\in B}\bigoplus_{i\in I}((\delta_{i_\alpha,i}\mathbb{K})\otimes(\delta_{j_\beta,i}\mathbb{K}))\\
&\cong \bigoplus_{i\in I}\left(\bigoplus_{\alpha\in A}\delta_{i_\alpha,i}\mathbb{K}\right)\otimes\left(\bigoplus_{\beta\in B}\delta_{j_\beta,i}\mathbb{K}\right)\\
&\cong \bigoplus_{i\in I}\mathrm{Hom}(X,i)\otimes\mathrm{Hom}(i,Y),
\end{aligned}
$$

e como $\dim\mathrm{Hom}(X,i) = N_i^X$ e $\dim\mathrm{Hom}(i,Y) = N_i^Y$ então

$$\dim\mathrm{Hom}(X,Y) = \sum_{i\in I} N_i^X N_i^Y.$$

□

Corolário 3.25. *Seja* $\mathbf{C}$ *uma categoria pre-fusion com conjunto representativo de objetos simples* I*. Dados objetos* $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ *e* I*-partições* $(p_\alpha^i\colon X\to i, q_\alpha^i\colon i\to X)_{i\in I,\alpha\in A_i}$ *de* X *e* $(p_\beta'^i\colon Y\to i, q_\beta'^i\colon i\to Y)_{i\in I,\beta\in B_i}$*, então* $(q_\alpha'^i p_\beta^i)_{i\in I,\alpha\in A_i,\beta\in B_i}$ *é base de* $\mathrm{Hom}(X,Y)$*.*

Demonstração. Primeiro mostremos que esse conjunto é l.i. Seja $(k_{\alpha,\beta}^i)_{i\in I,\alpha\in A_i,\beta\in B_i}$ uma família de elementos de $\mathbb{K}$ tal que

$$\sum_{i\in I,\alpha\in A_i,\beta\in B_i} k_{\alpha,\beta}^i q_\alpha'^i p_\beta^i = 0,$$

então para quaisquer $j\in I$, $\gamma\in A_i$ e $\eta\in B_i$ temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i\in I,\alpha\in A_i,\beta\in B_i} k_{\alpha,\beta}^i p_\gamma'^j q_\alpha'^i p_\beta^i q_\eta^j\\
&= \sum_{i\in I,\alpha\in A_i,\beta\in B_i} k_{\alpha,\beta}^i \delta_{i,j}\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{i,j}\delta_{\beta,\eta}\mathrm{id}_j\\
&= k_{\gamma,\eta}^j \mathrm{id}_j,
\end{aligned}
$$

como j é objeto simples, então $k_{\gamma,\eta}^j = 0$. Isso conclui que $(q_\alpha'^i p_\beta^i)_{i\in I,\alpha\in A_i,\beta\in B_i}$ é l.i., além disto, essa família tem tamanho

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in I}(\#A_i)(\#B_i) &= \sum_{i\in I} N_i^X N_i^Y\\
&= \dim\mathrm{Hom}(X,Y),
\end{aligned}
$$

logo é base de $\mathrm{Hom}(X,Y)$. □

Agora mostremos que a união de i-partições, para cada $i \in I$, forma uma I-partição. Seja $\mathbf{C}$ uma categoria pre-fusion, $X \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ e para cada $i \in I$ seja $(p^i_\alpha \colon X \to i, q^i_\alpha \colon i \to X)_{\alpha \in A_i}$ uma i-partição de X, queremos mostrar que a família $(p^i_\alpha \colon X \to i, q^i_\alpha \colon i \to X)_{i \in I, \alpha \in A_i}$ é uma I-partição de X. Temos que $p^i_\alpha q^j_\beta \colon j \to i$, se $i \neq j$ então $\mathrm{Hom}(i,j) = 0$, e se $i = j$ então usando que é i-partição temos que $p^i_\alpha q^i_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}$, logo

$$p^i_\alpha q^j_\beta = \delta_{i,j}\delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}.$$

Por fim, pelo corolário temos a base $(q^i_\alpha p^i_\beta)_{i \in I, \alpha, \beta \in A_i}$, então podemos escrever id_X como

$$\mathrm{id}_X = \sum_{i \in I, \alpha, \beta \in A_i} k^i_{\alpha,\beta} q^i_\alpha p^i_\beta,$$

então, para quaisquer $j \in I$, $\gamma, \eta \in A_i$,

$$\begin{aligned} p^j_\gamma q^j_\eta &= \sum_{i \in I, \alpha, \beta \in A_i} k^i_{\alpha,\beta} p^j_\gamma q^i_\alpha p^i_\beta q^j_\eta \\ &= \sum_{i \in I, \alpha, \beta \in A_i} k^i_{\alpha,\beta} \delta_{i,j}\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{\beta,\eta}\mathrm{id}_j \\ &= k^j_{\gamma,\eta}, \end{aligned}$$

mas $p^j_\gamma q^j_\eta = \delta_{\gamma,\eta}$, logo $k^j_{\gamma,\eta} = \delta_{\gamma,\eta}$, com isto,

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_X &= \sum_{i \in I, \alpha, \beta \in A_i} \delta_{\alpha,\beta} q^i_\alpha p^i_\beta \\ &= \sum_{i \in I, \alpha \in A_i} q^i_\alpha p^i_\alpha, \end{aligned}$$

isso conclui que $(p^i_\alpha \colon X \to i, q^i_\alpha \colon i \to X)_{i \in I, \alpha \in A_i}$ é uma I-partição de X.

3.4.7 Cálculo Gráfico para Categorias Pre-fusion Pivotais

Fixemos uma categoria pre-fusion pivotal $\mathbf{C}$. O cálculo gráfico para essas categorias pre-fusion é uma forma de representar graficamente somas envolvendo i-partições para algum $i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ objeto simples. Sejam $X, i \in \mathrm{Ob}(\mathbf{C})$ objetos em que i é simples. Dada uma i-partição $(p_\alpha \colon X \to i, q_\alpha \colon i \to X)_{\alpha \in A}$ de X, denotemos por $[p_\alpha, q_\alpha]$ um diagrama que contém um p_α e um q_α, em duas partes específicas do diagrama, e que só depende de α por meio destes p_α e q_α. Em particular a ordem é importante, não podemos esperar que valha $[p_\alpha, q_\alpha] = [q_\alpha, p_\alpha]$. Mostremos que a soma

$$\sum_{\alpha \in A} [p_\alpha, q_\alpha]$$

não depende da i-partição. Seja $(p'_\alpha \colon X \to i, q'_\alpha \colon i \to X)_{\alpha \in A}$ outra i-partição de X, como $(p_\alpha)_{\alpha \in A}$ é base de $\mathrm{Hom}(X, i)$ e $(q_\alpha)_{\alpha \in A}$ é base de $\mathrm{Hom}(i, X)$ então podemos escrever p'_α e q'_α como

$$p'_\alpha = \sum_{\beta \in A} \lambda_{\alpha,\beta} p_\beta$$

e

$$q'_\alpha = \sum_{\beta \in A} \mu_{\alpha,\beta} q_\beta.$$

Por outro lado, $(p'_\alpha)_{\alpha \in A}$ e $(q'_\alpha)_{\alpha \in A}$ também são bases de $\mathrm{Hom}(X, i)$ e $\mathrm{Hom}(i, X)$, respectivamente, então podemos escrever p_α e q_α como

$$p_\alpha = \sum_{\beta \in A} \lambda'_{\alpha,\beta} p'_\beta$$

e

$$q_\alpha = \sum_{\beta \in A} \mu'_{\alpha,\beta} q'_\beta,$$

então

$$\begin{aligned} p_\alpha &= \sum_{\beta \in A} \lambda'_{\alpha,\beta} p'_\beta \\ &= \sum_{\beta \in A} \lambda'_{\alpha,\beta} \sum_{\gamma \in A} \lambda_{\beta,\gamma} p_\gamma \\ &= \sum_{\gamma \in A} \left(\sum_{\beta \in A} \lambda'_{\alpha,\beta} \lambda_{\beta,\gamma} \right) p_\gamma, \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{\beta \in A} \lambda'_{\alpha,\beta} \lambda_{\beta,\gamma} = \delta_{\alpha,\gamma},$$

analogamente temos que

$$\sum_{\beta \in A} \lambda_{\alpha,\beta} \lambda'_{\beta,\gamma} = \delta_{\alpha,\gamma},$$

ou seja, $\Lambda' = [\lambda'_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta \in A}$ é matriz inversa de $\Lambda = [\lambda_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta \in A}$, e da mesma forma segue que $M' = [\mu'_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta \in A}$ é matriz inversa de $M = [\mu_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta \in A}$.

Pela propriedade $p'_\alpha q'_\beta = \delta_{\alpha,\beta} \mathrm{id}_i$ temos que

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha,\beta} \mathrm{id}_i &= \left(\sum_{\gamma \in A} \lambda_{\alpha,\gamma} p_\gamma \right) \left(\sum_{\eta \in A} \mu_{\beta,\eta} q_\eta \right) \\ &= \sum_{\gamma,\eta \in A} \lambda_{\alpha,\gamma} \mu_{\beta,\eta} p_\gamma q_\eta \\ &= \sum_{\gamma,\eta \in A} \lambda_{\alpha,\gamma} \mu_{\beta,\eta} \delta_{\gamma,\eta} \mathrm{id}_i \\ &= \sum_{\gamma \in A} \lambda_{\alpha,\gamma} \mu_{\beta,\gamma} \mathrm{id}_i, \end{aligned}$$

como i é simples então

$$\sum_{\gamma \in A} \lambda_{\alpha,\gamma} \mu_{\beta,\gamma} = \delta_{\alpha,\beta}.$$

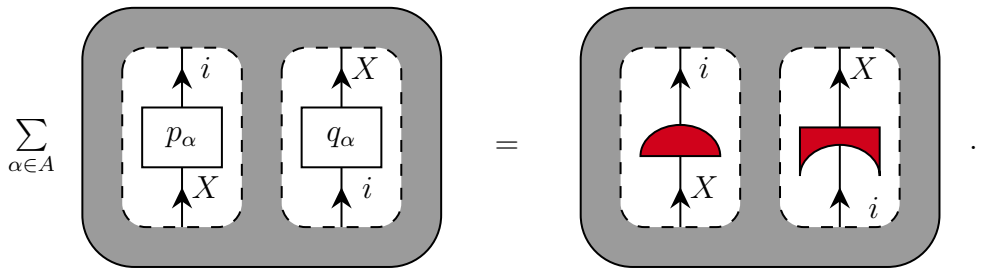
Utilizando que $p_\alpha q_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}_i$ obtemos a identidade

$$\sum_{\gamma\in A} \lambda'_{\alpha,\gamma}\mu'_{\beta,\gamma} = \delta_{\alpha,\beta},$$

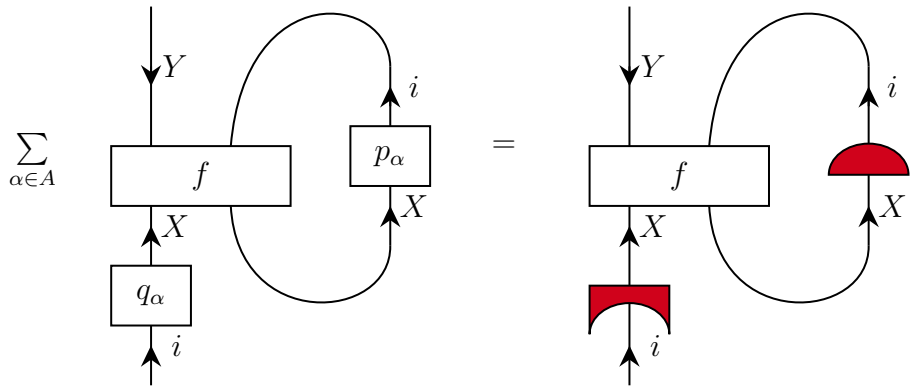
Essa duas últimas equações podem ser escritas em notação matricial como $\Lambda M^\intercal = \mathrm{Id}$ e $\Lambda' M'^\intercal = \mathrm{Id}$, em que $\mathrm{Id} = [\delta_{\alpha,\beta}]_{\alpha,\beta\in A}$ é a matriz identidade. A equação $\Lambda' M'^\intercal = \mathrm{Id}$ é equivalente a $M^\intercal\Lambda = \mathrm{Id}$, portanto, $M^\intercal = \Lambda^{-1}$. Com isto temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha\in A}[p'_\alpha, q'_\alpha] &= \sum_{\alpha\in A}\left[\sum_{\beta\in A}\lambda_{\alpha,\beta}p_\beta, \sum_{\gamma\in A}\mu_{\alpha,\gamma}q_\gamma\right] \\
&= \sum_{\beta\in A}\sum_{\gamma\in A}\left(\sum_{\alpha\in A}\lambda_{\alpha,\beta}\mu_{\alpha,\gamma}\right)[p_\beta, q_\gamma] \\
&= \sum_{\beta\in A}\sum_{\gamma\in A}(\Lambda^\intercal M)_{\beta,\gamma}[p_\beta, q_\gamma] \\
&= \sum_{\beta\in A}\sum_{\gamma\in A}(\mathrm{Id})_{\beta,\gamma}[p_\beta, q_\gamma] \\
&= \sum_{\beta\in A}\sum_{\gamma\in A}\delta_{\beta,\gamma}[p_\beta, q_\gamma] \\
&= \sum_{\beta\in A}[p_\beta, q_\beta] \\
&= \sum_{\alpha\in A}[p_\alpha, q_\alpha].
\end{aligned}$$

Com este resultado podemos introduzir o cálculo gráfico para categorias pre-fusion. Uma soma de diagramas $\sum_{\alpha\in A}[p_\alpha, q_\alpha]$ será representada por



A parte em cinza é todo o resto de diagrama, que não depende de α. No diagrama da direita não se escreve a soma em A e não se faz referência a uma i-partição, pois o resultado não depende da i-partição utilizada para calculá-lo. Um exemplo da forma que esses diagramas podem assumir é dado abaixo.



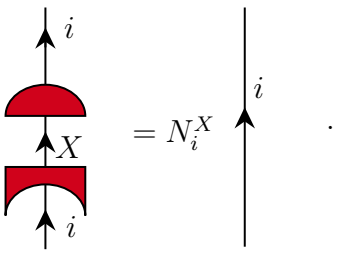
A seguir serão dadas algumas propriedades elementares desse cálculo gráfico, para mais resultados veja o livro [21].

Propriedades

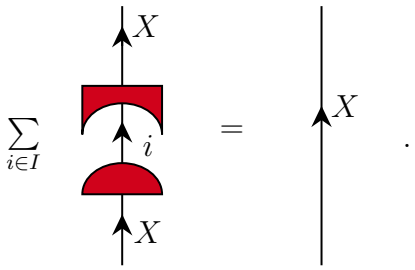
Fixemos objetos $X, i \in I$, com i simples, e uma i-partição $(p^i_\alpha \colon X \to i, q^i_\alpha \colon i \to X)_{\alpha\in A_i}$ para cada $i \in I$. Pela propriedade $p^i_\alpha q^i_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}_i$, em particular temos que $p^i_\alpha q^i_\alpha = \mathrm{id}_i$, logo

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in A_i} p^i_\alpha q^i_\alpha &= \sum_{\alpha\in A_i} \mathrm{id}_i \\ &= (\#A_i)\mathrm{id}_i \\ &= N^X_i \mathrm{id}_i,\end{aligned}$$

no cálculo gráfico isso é expressado como



Também vimos que $\mathrm{id}_X = \sum_{i\in I}\sum_{\alpha\in A_i} q^i_\alpha p^i_\alpha$, logo

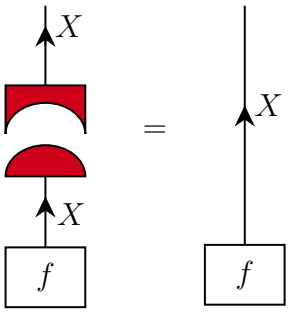


Sabemos que se $i \in I \setminus \{\mathbb{1}\}$ então $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}, i) = 0$ e $\mathrm{Hom}(i, \mathbb{1}) = 0$, para $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, X)$ e $g \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{1})$ temos então que $p^i_\alpha f = 0$ e $g q^i_\alpha = 0$, logo

$$f = \mathrm{id}_X f$$

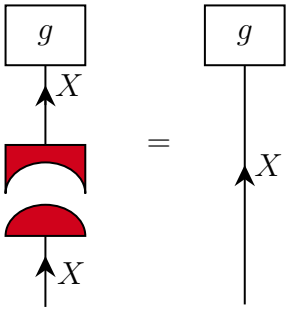
$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I} \sum_{\alpha \in A_i} q^i_\alpha p^i_\alpha f \\
&= \sum_{\alpha \in A_{\mathbb{1}}} q^{\mathbb{1}}_\alpha p^{\mathbb{1}}_\alpha f,
\end{aligned}
$$

o que graficamente se escreve como



,

e analogamente temos que



.

Capítulo 4

Categoria de Representações de uma Álgebra de Hopf

Neste capítulo será definida a categoria de representações de uma álgebra de Hopf e será mostrado que para o Drinfeld Quantum Double sua categoria de representações é uma categoria fusion esférica. Algumas referências para este assunto são [13], [14], [9], [7] e [16], porém muitos resultados foram baseados nas notas Modular Tensor Categories from Quantum Doubles of Finite Groups de Ulrich Pennig [19].

Primeiro precisamos de algumas definições e resultados sobre representações de grupos e de álgebras. Somente estaremos interessados em representações de dimensão finita, muitas vezes isso estará implícito.

4.1 Representações

Definição 4.1. Seja G um grupo finito. Uma representação de G é um par (V, ρ) em que V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e $\rho\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$ é um homomorfismo de grupos.

Definição 4.2. Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{C}$. Uma representação de A é um par (V, π) em que V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial e $\pi\colon A \to \mathrm{End}(V)$ é um homomorfismo de álgebras.

As duas definições são bastante semelhantes. Note que na definição de representação de grupos, se temos um $\rho\colon G \to \mathrm{End}(V)$ que é homomorfismo de monóides, segue então que $\mathrm{Im}\,\rho \subseteq \mathrm{Aut}(V)$, neste sentido poderíamos ter escrito $\mathrm{End}(V)$ no lugar de $\mathrm{Aut}(V)$. Temos também que toda representação de grupo está em correspondência com uma representação de álgebra.

Lema 4.3. *Seja G um grupo finito, as representações do grupo G estão em correspondência com as representações da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$.*

Demonstração. Seja (V, ρ) uma representação do grupo G, isso permite construir um homomorfismo de álgebra $\pi_\rho\colon \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V)$, para isso basta definir π_ρ sobre G, que é uma base de $\mathbb{C}G$, então tomamos $\pi_\rho(g) = \rho(g) \in \mathrm{End}(V)$. É simples verificar que isso define um homomorfismos de álgebra, pois π_ρ é linear e preserva o produto em $\mathbb{C}G$ devido a ρ ser homomorfismo de grupos.

Por outro lado, dada uma representação (V, π) da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$, também podemos construir um homomorfismo de grupos $\rho_\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$. Para cada $g \in G$ temos

um endomorfismo $\pi(g)\colon V \to V$, este é além disso um automorfismo, pois como π é homomorfismo de álgebra então $\pi(g)\pi(g^{-1}) = \pi(gg^{-1}) = \pi(e) = \mathrm{id}_V$ e, da mesma forma, $\pi(g^{-1})\pi(g) = \mathrm{id}_V$, logo $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$. Logo, podemos tomar $\rho_\pi(g) = \pi(g)$, como π preserva o produto em $\mathbb{C}G$ então isso define um homomorfismo de grupos $\rho_\pi\colon G \to \mathrm{Aut}(V)$.

Temos que $\rho = \rho_{\pi_\rho}$ e $\pi = \pi_{\rho_\pi}$, ou seja, essas construções estabelecem uma correspondência biunívoca entre representações do grupo G e representações da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$. $\square$

Além dessa relação entre representações de grupos e de álgebras, uma álgebra é, em particular, um anel e podemos entender representações de álgebras como módulos. Em particular, toda representação de um grupo G corresponde a uma representação da álgebra $\mathbb{C}G$ e, portanto, a um $\mathbb{C}G$-módulo.

Lema 4.4. *Seja A uma álgebra e (V, π) uma representação de A, então o homomorfismo $\pi\colon A \to \mathrm{End}(V)$ determina uma estrutura de A-módulo à esquerda em V.*

Demonstração. Seja A uma álgebra e (V, π) uma representação dessa álgebra. O homomorfismo de álgebra π permite dar a V uma estrutura de A-módulo à esquerda. Como V é um espaço vetorial, em particular é um grupo abeliano $(V, +, 0)$, para torná-lo um A-módulo à esquerda resta construir um produto por escalar $\cdot\colon A \times V \to V$. Dado $a \in A$, temos um endomorfismo $\pi(a)\colon V \to V$, então tomemos $a \cdot v := \pi(a)(v) \in V$, isso define o produto por escalar. Verifiquemos que com este produto V tem estrutura de A-módulo à esquerda, temos que:

- $a \cdot (v + v') = \pi(a)(v + v') = \pi(a)(v) + \pi(a)(v') = a \cdot v + a \cdot v'$;
- $(a+a') \cdot v = \pi(a+a')(v) = (\pi(a)+\pi(a'))(v) = \pi(a)(v)+\pi(a')(v) = a \cdot v + a' \cdot v$;
- $(aa') \cdot v = \pi(aa')(v) = (\pi(a) \circ \pi(a'))(v) = a \cdot (a' \cdot v)$;
- $e \cdot v = \pi(e)(v) = \mathrm{id}_V(v) = v$.

$\square$

4.1.1 Intertwiners

Um intertwiner é um morfismo entre representações.

Definição 4.5. (intertwiners para representações de grupos) Dado um grupo G, um intertwiner $T\colon (V, \rho) \to (V', \rho')$ entre duas representações (V, ρ) e (V', ρ') do grupo G é uma transformação linear tal que $\forall g \in G$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "T"] & V \arrow[d, "T"] \\ V' \arrow[r, "\rho'(g)"] & V' \end{tikzcd}$$

ou seja, $T\rho(g) = \rho'(g)T$.

Definição 4.6. (intertwiners para representações de álgebras) Dada uma álgebra A, um intertwiner $T\colon (V,\pi) \to (V',\pi')$ entre duas representações (V,π) e (V',π') de A é uma transformação linear $T\colon V \to V'$ tal que $\forall a \in A$ o siguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\pi(a)"] \arrow[d, "T"] & V \arrow[d, "T"] \\ V' \arrow[r, "\pi'(a)"] & V' \end{tikzcd}$$

ou seja, $T\pi(a) = \pi'(a)T$.

4.1.2 Irredutibilidade e Subrepresentações

Definição 4.7. Dado um grupo G e uma representação (V,ρ) desse grupo, um subespaço $W \subseteq V$ é dito ρ-invariante se $\rho(g)(w) \in W, \forall g \in G, \forall w \in W$. A representação (V,ρ) é dita irredutível se os únicos subespaços ρ-invariantes são 0 e V.

Definição 4.8. Dada uma álgebra A e uma representação (V,π) de A, um subespaço $W \subseteq V$ é dito π-invariante se $\pi(a)(w) \in W, \forall a \in A, \forall w \in W$. A representação (V,π) é dita irredutível se os únicos subespaços π-invariantes são 0 e V.

Note que uma representação (V,ρ) de um grupo G é irredutível se e somente se a representação (V,π_ρ) da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ é irredutível.

Dada uma representação e um subespaço invariante podemos restringir a representação original a esse subespaço. Mais precisamente, dado um grupo G, uma representação (V,ρ) e um subespaço ρ-invariante $W \subseteq V$, temos a subrepresentação (W,ρ') em que $\rho'\colon G \to \mathrm{Aut}(W)$ é o homomorfismo em que $\rho'(g)\colon W \to W$ é o automorfismo dado por $\rho'(g)(w) = \rho(g)(w)$. Da mesma forma, dada uma álgebra A, uma representação (V,π) de A e um subespaço π-invariante $W \subseteq V$, temos a subrepresentação (W,π') em que $\pi'\colon A \to \mathrm{End}(W)$ é o homomorfismo de álgebra dado por $\pi'(a)(w) = \pi(a)(w)$.

Há também a noção de representação indecomponível, que não deve ser confundida com representação irredutível. Para grupos finitos temos que uma representação é irredutível se e somente se é indecomponível.

4.1.3 Somas diretas

A partir de duas representações é possível obter uma terceira que é a soma direta dessas representações. Por outro lado, podemos utilizar somas diretas para decompor representações em representações mais simples.

Definição 4.9. Seja G um grupo e $(V_i,\rho_i)_{i\in I}$ uma família de representações de G em que I é um conjunto finito não vazio. Definimos a soma direta dessa família, denotada por $\oplus_{i\in I}(V_i,\rho_i)$, como sendo a representação $(\oplus_{i\in I}V_i,\rho')$ em que $\rho'\colon G \to \mathrm{Aut}(\oplus_{i\in I}V_i)$ é o homomorfismo de grupos dado por $\rho'(g) = \oplus_{i\in I}\rho_i(g)$, que é o automorfismo dado por $\rho'(g)((v_i)_{i\in I}) = (\rho_i(g)(v_i))_{i\in I}$.

Definição 4.10. Seja A uma álgebra e $(V_i,\pi_i)_{i\in I}$ uma família de representações de A em que I é um conjunto finito não vazio. Definimos a soma direta dessa família, denotada

por $\oplus_{i\in I}(V_i, \pi_i)$, como sendo a representação $(\oplus_{i\in I}V_i, \pi')$ em que $\pi'\colon A \to \mathrm{End}(\oplus_{i\in I}V_i)$ é o homomorfismo de álgebras dado por $\pi'(a) = \oplus_{i\in I}\pi_i(a)$, que é o endomorfismo dado por $\pi'(a)((v_i)_{i\in I}) = (\pi_i(a)(v_i))_{i\in I}$.

Um grupo G em que toda representação (V, ρ) de G é isomorfa a uma soma direta finita de representações irredutíveis é dito um grupo semi-simples. Semelhantemente, uma álgebra A é dita semi-simples se toda representação (V, π) de A é isomorfa a uma soma direta finita de representações irredutíveis de A. Ao invés de dizer "isomorfa a uma soma direta ..."utilizaremos comumente a expressão "se decompõe como soma direta ...", com o mesmo significado. O teorema de Maschke diz que todo grupo finito é semi-simples.

Teorema 4.11 (Teorema de Maschke)**.** *Seja G um grupo finito, então toda representação de G se decompõe como soma direta de representações irredutíveis.*

Demonstração. Seja (V, ρ) uma representação de G. Se a representação é irredutível não há o que mostrar, suponhamos que a representação não é irredutível, então existe um subespaço $W \subseteq V$ ρ-invariante com $W \neq 0$ e $W \neq V$. Então temos uma subrepresentação não trivial (W, ρ'), em que $\rho'\colon G \to \mathrm{Aut}(W)$ é dado por $\rho'(g)(w) = \rho(g)(w)$.

Agora queremos uma subrepresentação que complemente a (W, ρ'). Seja $P\colon V \to V$ uma projeção de V em W. Por exemplo, dada uma base $\{w_i\}_{i=1}^{\dim W}$ de W, ela pode ser estendida a uma base $\{v_i\}_{i=1}^{\dim V}$ com $v_i = w_i$ para $1 \leq i \leq \dim W$, então podemos definir a projeção P por $P(w_i) = w_i$ se $1 \leq i \leq \dim W$ e $P(v_i) = 0$ se $i > \dim W$. É verdade que $V \cong W \oplus \ker P$, como espaços vetoriais, porém queremos uma soma direta de representações. Mas a transformação linear P pode não ser um intertwiner, devido a isto, considere a projeção $P'\colon V \to V$ dada por

$$P'(v) = \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)P\rho(h^{-1})(v),$$

esta é uma projeção sobre W, pois P é projeção sobre W e este é um subespaço ρ-invariante. Esta projeção é um intertwiner: seja $g \in G$, queremos mostrar a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\rho(g)"] \arrow[d, "P'"] & V \arrow[d, "P'"] \\ V \arrow[r, "\rho(g)"] & V \end{tikzcd}$$

dado $v \in V$, temos que

$$\begin{aligned} P'\rho(g)(v) &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)P\rho(h^{-1})\rho(g)(v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G}\rho(h)P\rho(h^{-1}g)(v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h'\in G}\rho(gh')P\rho(h'^{-1})(v) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h'\in G}\rho(g)\rho(h')P\rho(h'^{-1})(v) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \rho(g)\frac{1}{|G|}\sum_{h'\in G}\rho(h')P\rho(h'^{-1})(v)\\
&= \rho(g)P'(v).
\end{aligned}
$$

Sendo $P'\colon (V,\rho) \to (V,\rho)$ um intertwiner, $\ker P'$ é um subespaço ρ-invariante: seja $z \in \ker P'$ e $g \in G$, então $P'\rho(g)(z) = \rho(g)P'(z) = \rho(g)(0) = 0$, logo $\rho(g)(z) \in \ker P'$. Portanto, temos uma subrepresentação $(\ker P', \rho'')$ onde $\rho''\colon G \to \mathrm{Aut}(\ker P')$ é dado por $\rho''(g)(z) = \rho(g)(z)$. Além disso, $V = W \oplus \ker P'$ (soma direta interna): dado $v \in V$, podemos escrever $v = P'(v) + (v - P'(v))$, como P' é projeção sobre W então $P'(v) \in W$, também $v - P'(v) \in \ker P'$, pois

$$
\begin{aligned}
P'(v - P'(v)) &= P'(v) - P'(P'(v))\\
&= P'(v) - P'(v)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

logo $V = W + \ker P'$, além disso a soma é direta, pois se $v \in W \cap \ker P'$ então, como P' é projeção sobre W e $v \in W$, $P'(v) = v$, mas $v \in \ker P'$, logo $P'(v) = 0$, assim $v = 0$. Por fim, temos um isomorfismo de representações $\varphi\colon (V,\rho) \to (W,\rho') \oplus (\ker P', \rho'')$ (soma direta externa), dado por

$$
\varphi(v) = (P'(v), v - P'(v)),
$$

é simples mostrar que isto é uma transformação linear, e pelas considerações anteriores φ é uma bijeção, logo é isomorfismo de espaços vetorias. Também é simples verificar que é um intertwiner, assim φ é isomorfismo de representações.

Note que $\dim P' < \dim V$, então podemos aplicar os mesmos argumentos a $(\ker P', \rho'')$ e por indução finita concluir que (V,ρ) é isomorfo a uma soma direta finita de representações irredutíveis de G. $\square$

Corolário 4.12. *Seja G um grupo finito, então toda representação de $\mathbb{C}G$ se decompõe em soma direta de representações irredutíveis.*

Demonstração. Pelo Teorema de Maschke G é semi-simples, também as representações de $\mathbb{C}G$ estão em correspondência com as representações de G. Seja (V,ρ) uma representação de G, então temos a representação correspondente (V,π_ρ) de $\mathbb{C}G$. Digamos que (V,ρ) seja irredutível, então (V,π_ρ) também é irredutível, de fato se $W \subseteq V$ é um espaço π_ρ-invariante então para quaisquer $w \in W$ e $g \in G$ vale que $\pi_\rho(g)(w) \in W$, mas $\pi_\rho(g)(w) = \rho(g)(w)$, logo W é ρ-invariante, como (V,ρ) é irredutível então $W = 0$ ou $W = V$, logo (V,π_ρ) é irredutível.

Agora, sem supor irredutibilidade de qualquer representação, digamos que haja um isomorfismo $\varphi\colon (V,\rho) \to \oplus_{i\in I}(V_i,\rho_i)$, para I conjunto finito não vazio e (V_i,ρ_i) representação de G, isto é também um isomorfismo $\varphi\colon (V,\pi_\rho) \to \oplus_{i\in I}(V_i,\pi_{\rho_i})$, de fato é um isomorfismo de espaço vetoriais $\varphi\colon V \to \oplus_{i\in I}V_i$ e também é um intertwiner pois como $\pi_\rho(g) = \rho(g)$ e $\pi_{\rho_i}(g) = \rho_i(g)$, para todo $g \in G$, então temos a comutatividade do seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\pi_\rho(a)"] \arrow[d, "\varphi"] & V \arrow[d, "\varphi"] \\
\oplus_{i\in I}V_i \arrow[r, "\oplus_{i\in I}\pi_{\rho_i}(a)"] & \oplus_{i\in I}V_i
\end{tikzcd}
$$

para $a \in G$. Denotemos por π' o homomorfismo de álgebra da representação

$$\oplus_{i\in I}(V_i, \pi_{\rho_i}) = (\oplus_{i\in I} V_i, \pi'),$$

pela linearidade dos homomorfismos de álgebra π_ρ e π' segue que o mesmo diagrama comuta para qualquer $a \in \mathbb{C}G$.

Dada uma representação (V, π) de $\mathbb{C}G$ esta corresponde a uma representação (V, ρ_π) de G, pelo teorema de Maschke temos que (V, ρ_π) se decompõe como soma direta de representações irredutíveis de G, digamos que $(V, \rho_\pi) \cong \oplus_{i\in I}(V_i, \rho_i)$, as representações (V_i, ρ_i) correspondem a representações irredutíveis (V_i, π_{ρ_i}) de $\mathbb{C}G$, logo

$$(V, \pi) \cong \oplus_{i\in I}(V_i, \pi_{\rho_i}).$$

Portanto, $\mathbb{C}G$ é semi-simples. $\square$

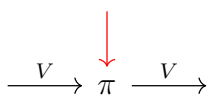
4.2 A categoria de representações de uma álgebra de Hopf

Seja $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$ uma álgebra de Hopf. A categoria $\mathrm{Rep}(A)$ de representações de dimensão finita de A é a categoria cujos objetos são as representações (V, π) de A de dimensão finita, ou seja, em que V tem dimensão finita, e cujas flechas são os intertwiners entre representações de A. A composição de intertwiners $T\colon (V, \pi) \to (V', \pi')$ e $T'\colon (V', \pi') \to (V'', \pi'')$ é o intertwiner $T'T\colon (V, \pi) \to (V'', \pi'')$ dado pela composição de T e T' como transformações lineares. A associatividade da composição e a existência de identidades são imediatas, de onde temos que isso forma uma categoria.

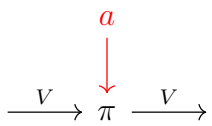
Essa categoria é também monoidal, como veremos adiante se assumirmos que A é quase-triangular então $\mathrm{Rep}(A)$ é braided e se a antípoda S for involutiva, ou seja, se $SS = \mathrm{id}_A$ então $\mathrm{Rep}(A)$ é esférica. Posteriormente será estudado o caso em que A é o Drinfeld Quantum Double $D(G)$ de um grupo finito G.

4.2.1 Notação diagramática

Diversas demonstrações se tornam mais simples utilizando os diagramas de Kuperberg, de álgebras de Hopf, então introduziremos uma notação diagramática para as representações. Dada uma representação (V, π) de A, o homomorfismo de álgebras $\pi\colon A \to \mathrm{End}(V)$ será representado diagramaticamente por

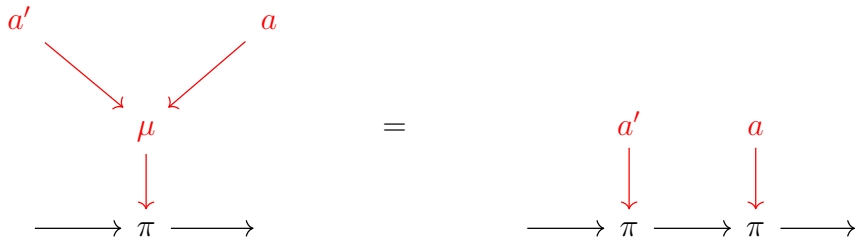


em que a flecha vertical (em vermelho) diz respeito a calcular π em algum $a \in A$, resultando em um endomorfismo $\pi(a)\colon V \to V$, que é representado por

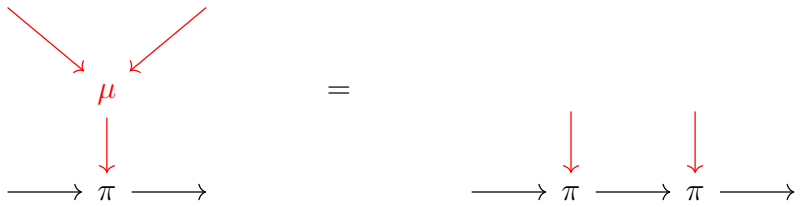


Para facilitar a leitura dos diagramas, a parte que diz respeito à álgebra de Hopf A será escrita em vermelho. Também o V será muitas vezes omitido nos diagramas. Essa notação para representações será misturada com a notação diagramática de álgebras de Hopf e a notação diagramática de categorias pivotais braided, já que a categoria dos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita é categoria pivotal. Note que há uma rotação de $90°$ dos diagramas de categorias pivotais braided e dos diagramas de Kuperberg, se comparado com os diagramas que foram apresentados nos capítulos anteriores.

O fato de $\pi\colon A \to \mathrm{End}(V)$ ser um homomorfismo de álgebras tem uma representação nesta linguagem diagramática. π preservar o produto significa que $\pi(a \cdot a') = \pi(a) \circ \pi(a')$, $\forall a, a' \in A$, mas o produto em A é $a \cdot a' = \mu(a \otimes a')$, então isso equivale a $\pi(\mu(a \otimes a')) = \pi(a) \circ \pi(a')$, o que diagramaticamente se escreve como



como isso vale para quaisquer $a, a' \in A$, podemos escrever simplesmente



π preservar a unidade significa que $\pi(e) = \mathrm{id}_V$, em que $e \in A$ é a unidade de A, e esta é $e = \eta(1)$, então isto se representa diagramaticamente por

em que fica subentendido que η deve ser calculado em 1.

Também, dado um intertwiner $T\colon (V, \pi) \to (V', \pi')$, a condição $T\pi(a) = \pi'(a)T$, $\forall a \in A$, é representada diagramaticamente por

4.2.2 Estrutura monoidal

Mostremos que $\mathrm{Rep}(A)$ tem estrutura de categoria monoidal. Para isso precisamos construir um produto monoidal $\otimes\colon \mathrm{Rep}(A) \times \mathrm{Rep}(A) \to \mathrm{Rep}(A)$ e um objeto unidade $\mathbb{1}$ de forma a haverem os isomorfismos que associatividade e unitalidade correspondentes e

satisfazendo os axiomas de categoria monoidal. Como os objetos de $\mathrm{Rep}(A)$ são pares (V, π) em que V é um $\mathbb{C}$-espaço vetorial, é natural utilizar o produto monoidal da categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ para construir o produto monoidal de $\mathrm{Rep}(A)$. Dadas representações (V, π) e (V', π'), queremos uma representação produto $(V, \pi) \otimes (V', \pi')$, o espaço vetorial dessa representação tomamos como sendo $V \otimes V'$, porém não basta tomar o produto dos homomorfismos de álgebras, pois $\pi \otimes \pi' \colon A \otimes A \to \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V')$, mas queremos um homomorfismo $A \to \mathrm{End}(V \otimes V')$. Como A é coálgebra, temos a transformação linear $\Delta \colon A \to A \otimes A$, isso corrige o domínio, para o contradomínio note que há uma transformação linear $\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V') \to \mathrm{End}(V \otimes V')$ dada por $f \otimes g \mapsto f \otimes g$, onde $f \in \mathrm{End}(V)$ e $g \in \mathrm{End}(V')$. Apesar de isto não ser aparente na notação, o primeiro $f \otimes g$ é o produto tensorial dos elementos f e g dos espaços vetoriais $\mathrm{End}(V)$ e $\mathrm{End}(V')$ e o segundo $f \otimes g$ é o produto tensorial das transformações lineares f e g. A existência dessa transformação linear vem de termos o mapa bilinear $\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V') \to \mathrm{End}(V \otimes V')$ dado por $(f, g) \mapsto f \otimes g$ e de aplicar a propriedade universal do produto tensorial, conforme o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(V') \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr] & \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V') \arrow[d, dashed] \\
& \mathrm{End}(V \otimes V')
\end{tikzcd}$$

Como o mapa $\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V')$ é dado por $f \otimes g \mapsto f \otimes g$, podemos deixar tal mapa implícito. Então compondo esse mapa com $\pi \otimes \pi'$ e Δ temos um mapa com o domínio e contradomínio desejados, por isso definimos o produto de representações $(V, \pi) \otimes (V', \pi')$ como a representação $(V \otimes V', \pi * \pi')$, em que $\pi * \pi' \colon A \to \mathrm{End}(V \otimes V')$ é a composição dos mapas $\mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V') \to \mathrm{End}(V \otimes V')$, $\pi \otimes \pi' \colon A \otimes A \to \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V')$ e $\Delta \colon A \to A \otimes A$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\pi * \pi'"] \arrow[d, "\Delta"] & \mathrm{End}(V \otimes V') \\
A \otimes A \arrow[r, "\pi \otimes \pi'"] & \mathrm{End}(V) \otimes \mathrm{End}(V') \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Porém, é necessário verificar que $\pi * \pi' \colon A \to \mathrm{End}(V \otimes V')$ é homomorfismo de álgebras, isto é, que é uma transformação linear que preserva a unidade e o produto. Que é uma transformação linear é imediato, pois $\pi * \pi'$ é composição de transformações lineares. Mostremos que preserva a unidade, primeiro o cálculo será feito da forma tradicional e em seguida diagramaticamente, temos que

$$\begin{aligned}
(\pi * \pi')(\eta(1)) &= (\pi \otimes \pi')(\Delta(\eta(1))) \\
&= (\pi \otimes \pi')(\eta(1) \otimes \eta(1)) \\
&= (\pi(\eta(1))) \otimes (\pi'(\eta(1))) \\
&= \mathrm{id}_V \otimes \mathrm{id}_{V'} \\
&= \mathrm{id}_{V \otimes V'},
\end{aligned}$$

diagramaticamente isto se escreve como

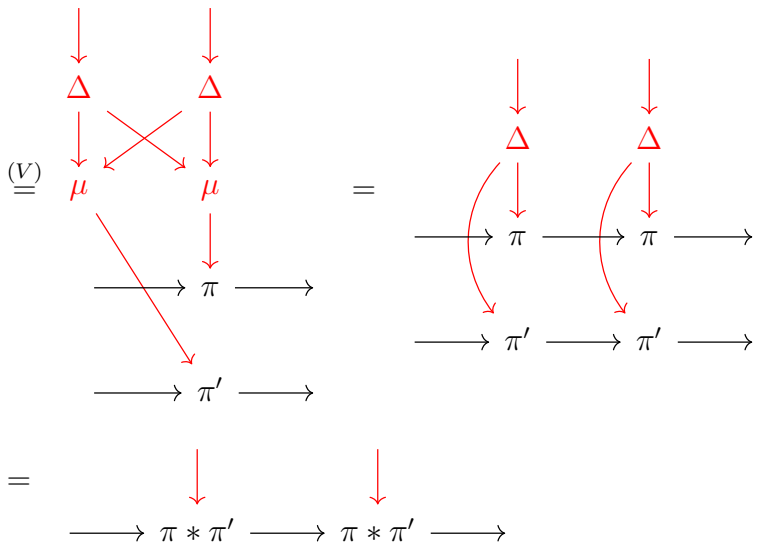
$$\begin{tikzcd}
 & \eta \arrow[d] & \\
\arrow[r] & \pi * \pi' \arrow[r] & \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \eta \arrow[d] & \\
 & \Delta \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \\
\arrow[r] & \pi \otimes \pi' \arrow[r] & \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \eta \arrow[d] & \\
 & \Delta \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & \\
\arrow[r] & \pi \arrow[r] & \\
\arrow[r] & \pi' \arrow[r] & \end{tikzcd}$$

$$\overset{(VII)}{=} \quad
\begin{tikzcd}
 & \eta \; \eta \arrow[d] & \\
\arrow[r] \arrow[dr, bend right] & \pi \arrow[r] & \\
\arrow[r] & \pi' \arrow[r] & \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \eta \arrow[d] & \\
\arrow[r] & \pi \arrow[r] & \\
 & \eta \arrow[d] & \\
\arrow[r] & \pi' \arrow[r] & \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\arrow[r, "V"] \\
\arrow[r, "V'"]
\end{tikzcd}$$

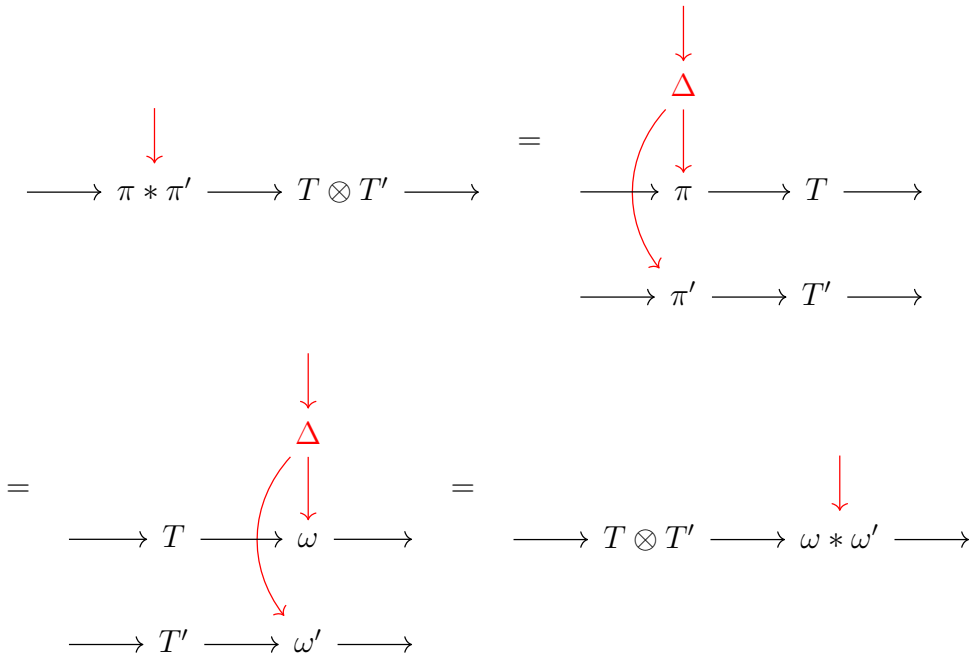
$$= \quad \xrightarrow{V \otimes V'}$$

Agora mostremos que o produto é preservado por $\pi * \pi'$, este cálculo será feito diagramaticamente, temos que

$$\begin{tikzcd}
 & \mu \arrow[d] & \\
\arrow[r] & \pi * \pi' \arrow[r] & \end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \mu \arrow[d] & \\
 & \Delta \arrow[d] \arrow[dd, bend right] & \\
\arrow[r] & \pi \arrow[r] & \\
\arrow[r] & \pi' \arrow[r] & \end{tikzcd}$$



Desta forma temos o produto tensorial de representações, para obter um funtor $\otimes\colon \mathrm{Rep}(A) \times \mathrm{Rep}(A) \to \mathrm{Rep}(A)$ resta definí-lo sobre as flechas, neste caso basta tomar o produto tensorial de transformações lineares, mas é necessário verificar que isto resulta em um intertwiner. Temos que, dados $T\colon (V,\pi) \to (W,\omega)$ e $T'\colon (V',\pi') \to (W',\omega')$ intertwiners entre representações de A, o produto tensorial de ambos é uma transformação linear $T \otimes T'\colon V \otimes V' \to W \otimes W'$, que isso é um intertwiner $T \otimes T'\colon (V,\pi) \otimes (V',\pi') \to (W,\omega) \otimes (W',\omega')$ é mais fácil de mostrar diagramaticamente, temos que



Isso conclui a definição do produto monoidal de $\mathrm{Rep}(A)$. Para obter um objeto unidade em $\mathrm{Rep}(A)$ é natural esperar que ele tenha alguma relação com o objeto unidade da categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, que é o corpo $\mathbb{C}$. Então queremos uma representação que é dada por um homomorfismo de álgebras $A \to \mathrm{End}(\mathbb{C})$, mas note que há o isomorfismo

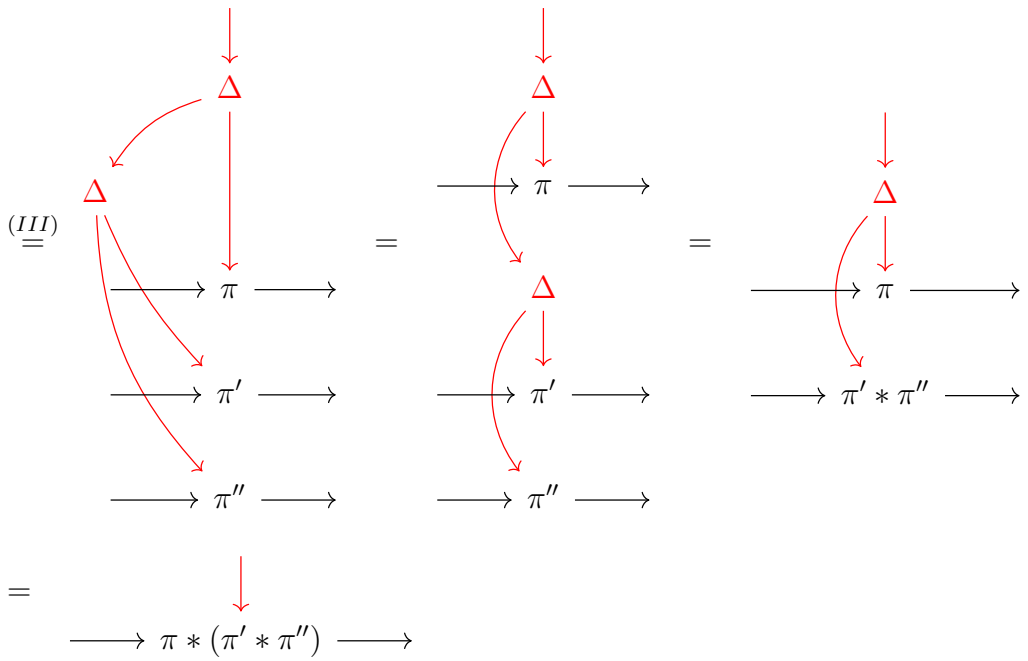
de álgebras

$$\begin{aligned} \varphi\colon \mathbb{C} &\longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}) \\ \lambda &\longmapsto \lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

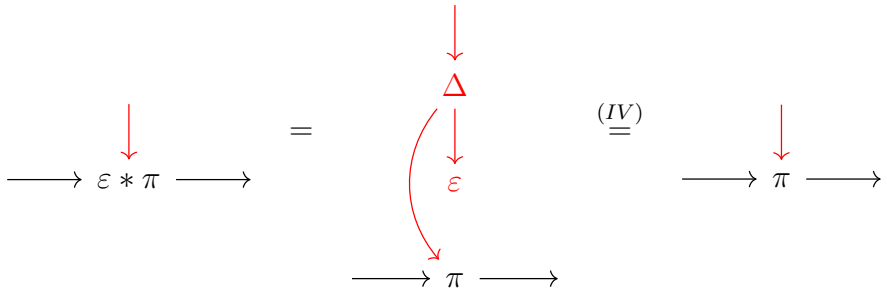
então basta termos um homomorfismo de álgebras $A \to \mathbb{C}$, mas A é coálgebra, logo temos uma transformação linear $\varepsilon\colon A \to \mathbb{C}$. Verifiquemos que isto é um homomorfismo de álgebras, isto segue diretamente das propriedades de biálgebra, temos que dados $a, a' \in A$ quaisquer, $\varepsilon(a \cdot a') = \varepsilon\mu(a \otimes a') = (\varepsilon \otimes \varepsilon)(a \otimes a') = \varepsilon(a) \otimes \varepsilon(a') = \varepsilon(a) \cdot \varepsilon(a')$, onde a última igualdade se deve a podermos identificar o produto tensorial de números complexos com o produto, devido ao isomorfismo de unitalidade $l_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Com isto, temos uma representação $\mathbb{1} := (\mathbb{C}, \varphi\varepsilon)$. Em diante o isomorfismo φ estará implícito e escreveremos $\mathbb{1} = (\mathbb{C}, \varepsilon)$. Para concluir que temos uma estrutura de categoria monoidal restam os isomorfismos de associatividade e unitalidade de $\mathrm{Rep}(A)$, os quais tomamos como os isomorfismos de associatividade provenientes da categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais. Porém, é necessário verificar que eles são intertwiners entre as representações correspondentes, mais especificamente precisamos mostrar que para quaisquer representações (V, π), (V', π') e (V'', π'') o isomorfismo de associatividade $a_{V,V',V''}\colon (V \otimes V') \otimes V'' \to V \otimes (V' \otimes V'')$ e os isomorfismos de unitalidade $l_V\colon \mathbb{C} \otimes V \to V$ e $r_V\colon V \otimes \mathbb{C} \to V$ são intertwiners, ou seja, são morfismos $a_{V,V',V''}\colon ((V, \pi) \otimes (V', \pi')) \otimes (V'', \pi'') \to (V, \pi) \otimes ((V', \pi') \otimes (V'', \pi''))$, $l_V\colon (\mathbb{C}, \varepsilon) \otimes (V, \pi) \to (V, \pi)$ e $r_V\colon (V, \pi) \otimes (\mathbb{C}, \varepsilon) \to (\mathbb{C}, \varepsilon)$ em $\mathrm{Rep}(A)$. Devido à categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais ser monoidal e ao Teorema de Coerência de Mac Lane, podemos deixar implícitos nos cálculos os isomorfismos de associatividade e unitalidade, dessa forma a condição de os isomorfismos de associatividade serem intertwiners se escreve como $(\pi * \pi') * \pi'' = \pi * (\pi' * \pi'')$, para todas representações (V, π), (V', π') e (V'', π''), enquanto que para os isomorfismos de unitalidade a condição de serem intertwiners se escreve como $\varepsilon * \pi = \pi$ e $\pi * \varepsilon = \pi$, para toda representação (V, π). Verifiquemos isto diagramaticamente, no primeiro caso temos que

$$\begin{tikzcd}
 & \\
\longrightarrow (\pi * \pi') * \pi'' \arrow[u] \longrightarrow
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \\
 & \Delta \arrow[u] \arrow[d] \arrow[dd, bend right] \\
\longrightarrow \pi * \pi' \longrightarrow & \\
\longrightarrow \pi'' \longrightarrow &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \\
 & \Delta \arrow[u] \arrow[d] \arrow[ddd, bend right] \\
 & \Delta \arrow[d] \arrow[dd, bend right] \\
\longrightarrow \pi \longrightarrow & \\
\longrightarrow \pi' \longrightarrow & \\
\longrightarrow \pi'' \longrightarrow &
\end{tikzcd}$$



e no segundo caso,



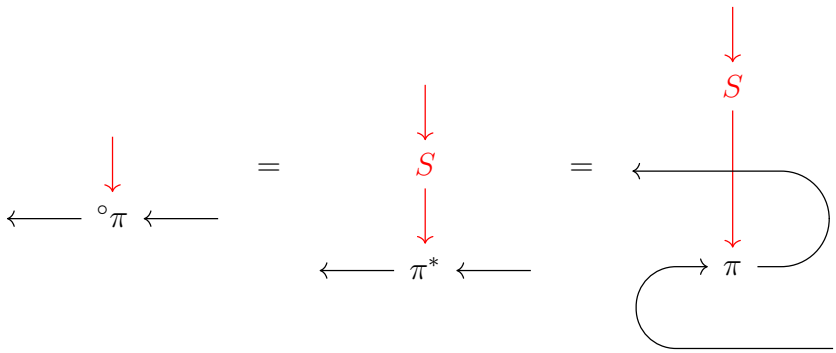
e analogamente para $\pi * \varepsilon = \pi$. Isso conclui que os isomorfismos de associatividade $a_{V,V',V''}\colon (V \otimes V') \otimes V'' \to V \otimes (V' \otimes V'')$ e os isomorfismos de unitalidade $l_V\colon \mathbb{C} \otimes V \to V$ e $r_V\colon V \otimes \mathbb{C} \to V$ são todos intertwiners. Que eles formam transformações naturais e que satisfazem às identidades do pentágono e do triângulo, isso segue imediatamente de tal fato valer na categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais.

4.2.3 Dualidades, Pivotalidade e Esfericidade

Queremos mostrar que a categoria $\mathrm{Rep}(A)$ é rígida à esquerda e à direita, ou seja, que possui uma dualidade à esquerda e uma dualidade à direita. Os duais à esquerda e à direita que construiremos não são necessariamente iguais, porém é suficiente que a antípoda $S\colon A \to A$ seja involutiva, ou seja, que $S^2 = S \circ S = \mathrm{id}_A$ para que os duais à esquerda e à direita sejam iguais. Seguirá imediatamente que se A é álgebra de Hopf involutiva então não somente $\mathrm{Rep}(A)$ é categoria rígida à esquerda e à direita, mas é também pivotal e esférica.

Não assumindo que A seja involutiva, construamos dualidades à esquerda e à direita. Seja (V, π) uma representação de A, queremos um objeto dual à esquerda ${}^*(V, \pi)$, como

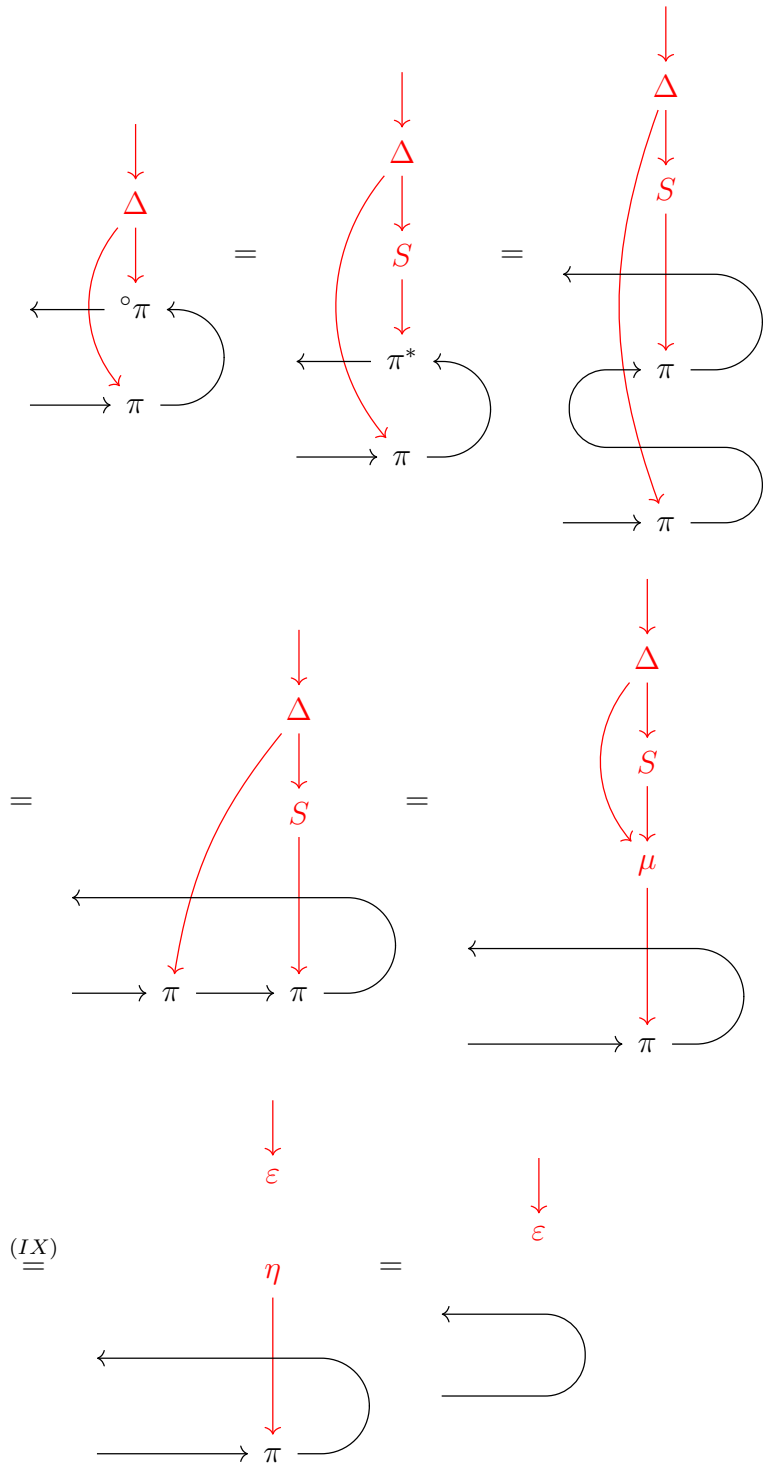
a categoria dos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ é pivotal podemos utilizar essa estrutura para construir o dual ${}^*(V,\pi)$, é natural construir essa representação utilizando o dual V^*, porém não podemos simplesmente tomar $\pi^*\colon \mathrm{End}(V)^* \to A^*$ como candidato ao homomorfismo de álgebra, pois não possui os domínio e contradomínio corretos, mas dado um $a \in A$ temos a transformação linear $\pi(a)^*\colon V^* \to V^*$, este poderia dar o homomorfismo de álgebra para formar a representação dual, porém como o funtor dual é contravariante, pois é da forma $?^*\colon \mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}^{rev} \to \mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$, então $\pi(a)^*\pi(a')^* = (\pi(a')\pi(a))^* = \pi(a' \cdot a)^*$, para corrigir isso podemos utilizar a antípoda, que é um anti-homomorfismo de álgebras, então temos que $\pi(S(a))^*\pi(S(a'))^* = (\pi(S(a'))\pi(S(a)))^* = \pi(S(a') \cdot S(a))^* = \pi(S(a \cdot a'))^*$. Com isto, definiremos o dual à esquerda de (V,π) como sendo a representação ${}^*(V,\pi) = (V^*, {}^\circ\pi)$, em que ${}^\circ\pi\colon A \to \mathrm{End}(V^*)$ é o homomorfismo de álgebras dado por ${}^\circ\pi(a) = \pi(S(a))^*$, $\forall a \in A$, o que diagramaticamente é representado por



pelas considerações anteriores já mostramos que ${}^\circ\pi$ preserva o produto, que é transformação linear isso segue de π e S serem transformações lineares, e que preserva a unidade isso se deve a S ser anti-homomorfismo de álgebras e π ser homomorfismo de álgebras, de onde temos que ambos preservam a unidade, assim ${}^\circ\pi(\eta(1)) = (\pi(S(\eta(1))))^* = (\pi(\eta(1)))^* = (\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$, isso conclui que ${}^\circ\pi$ é, de fato, homomorfismo de álgebras.

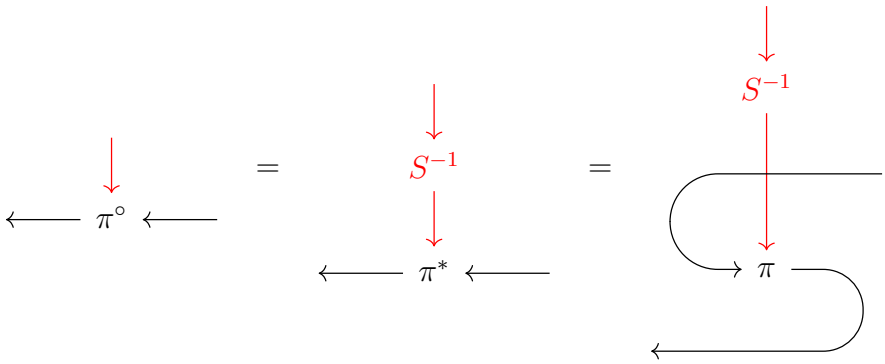
Para formar uma dualidade à esquerda é necessária uma família de pareamentos não-degenerados $({}^*(V,\pi), \overleftarrow{ev}_{(V,\pi)})_{(V,\pi)\in \mathrm{ObRep}(A)}$. Novamente, como a categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ dos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita é pivotal é natural escolher o pareamento $\overleftarrow{ev}_{(V,\pi)}\colon {}^*(V,\pi) \otimes (V,\pi) \to (\mathbb{C},\varepsilon)$ como sendo o $\overleftarrow{ev}_V\colon V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ da categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$, porém é necessário verificar que este e a inversa $\overleftarrow{coev}_V\colon \mathbb{C} \to V \otimes V^*$ são

ambos intertwiners. A demonstração diagramática de que $\overleftarrow{ev}_V$ é intertwiner é

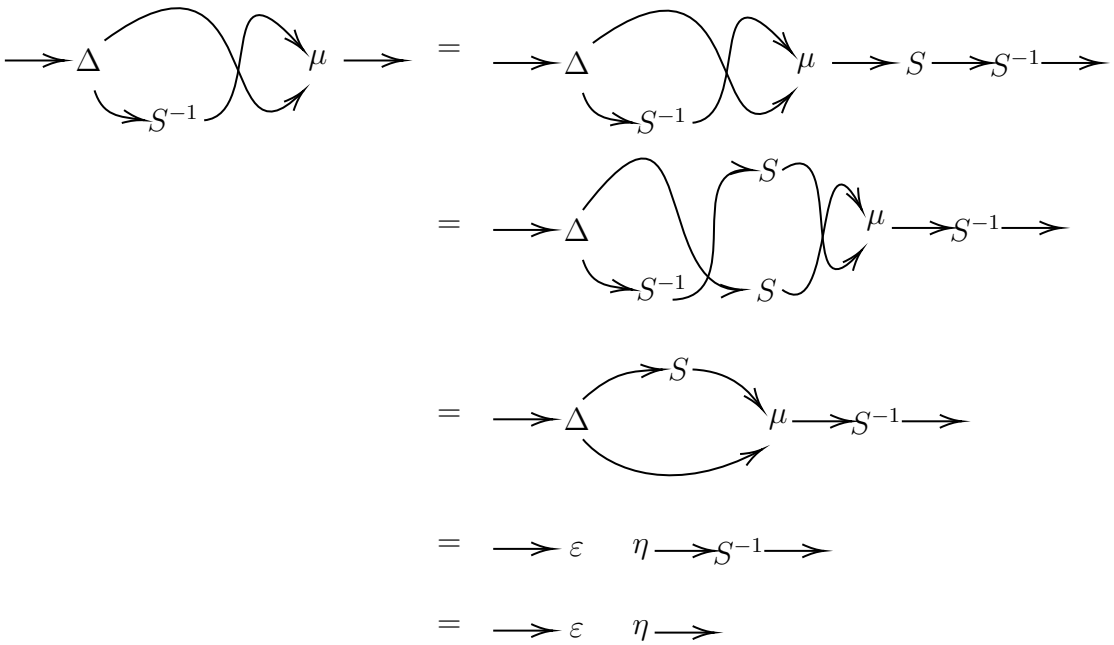


Analogamente podemos mostrar que $\overleftarrow{coev}_V : \mathbb{C} \to V \otimes V^*$ é um intertwiner $\overleftarrow{coev}_V : (\mathbb{C}, \varepsilon) \to (V, \pi) \otimes^* (V, \otimes)$. Como $\overleftarrow{ev}_V$ é, na categoria dos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita, um pareamento não-degenerado com inversa $\overleftarrow{coev}_V$, o mesmo continua valendo quando entendemos essas transformações lineares como flechas de $\mathrm{Rep}(A)$, ou seja, intertwiners, logo isso define uma dualidade à esquerda em $\mathrm{Rep}(A)$.

Semelhantemente, temos uma dualidade à direita em $\mathrm{Rep}(A)$, porém neste caso o dual à direita de uma representação (V, π) é definido como a representação $(V, \pi)^* := (V^*, \pi^\circ)$, em que $\pi^\circ \colon A \to \mathrm{End}(V^*)$ é o homomorfismo de álgebra dado por $\pi^\circ(a) = \pi^*(S^{-1}(a))$, ou seja, π° difere de ${}^\circ\pi$ somente por ter S^{-1} ao invés de S. Diagramaticamente π° se escreve como



Os pareamentos não-degenerados $\overrightarrow{ev}_V \colon V \otimes V^* \to \mathbb{C}$ e suas inversas $\overrightarrow{coev}_V \colon \mathbb{C} \to V^* \otimes V$ são intertwiners, ou seja, são flechas $\overrightarrow{ev}_V \colon (V, \pi) \otimes (V, \pi)^* \to (\mathbb{C}, \varepsilon)$ e $\overrightarrow{coev}_V \colon (\mathbb{C}, \varepsilon) \to (V, \pi)^* \otimes (V, \pi)$ em $\mathrm{Rep}(A)$, e estes formam uma dualidade à direita em $\mathrm{Rep}(A)$. A demonstração desses fatos é análoga a da dualidade à esquerda, com a diferença que neste caso o diagrama necessário dos axiomas da antípoda não aparece de forma imediata, neste caso basta utilizar a seguinte manipulação:



Essa manipulação de diagramas de Kuperberg consiste em utilizar que S e S^{-1} são antihomomorfismos de álgebras. Que S^{-1} é antihomomorfismo, isso é consequência direta de S ser antihomomorfismo.

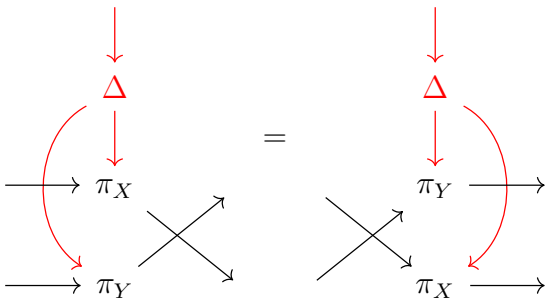
Como a única diferença entre ${}^{\circ}(V,\pi)$ e $(V,\pi)^{\circ}$ é a troca de S por S^{-1}, é imediato que se A é álgebra de Hopf involutiva então os objetos duais à esquerda coincidem com os objetos duais à direita. Além disso, segue imediatamente que $\mathrm{Rep}(A)$ é categoria pivotal, pois a estrutura monoidal e os pareamentos $\overleftarrow{ev}_V$ e $\overrightarrow{ev}_V$ são provenientes da categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita, de onde segue que os funtores duais ${}^{\vee}?, ?^{\vee}\colon \mathrm{Rep}(A)^{rev} \to \mathrm{Rep}(A)$ coincidem como funtores monoidais, e, portanto, $\mathrm{Rep}(A)$ é categoria pivotal. Ainda mais, como a categoria dos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita é esférica segue imediatamente que $\mathrm{Rep}(A)$ é também esférica.

4.2.4 Braiding

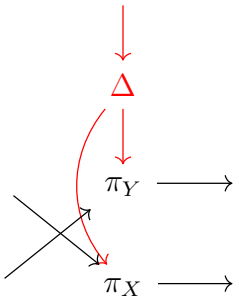
A categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais é braided, ainda mais que isso ela é simétrica, ou seja, o braiding τ é tal que $\tau_{Y,X} = \tau_{X,Y}^{-1}$. Como as flechas de $\mathrm{Rep}(A)$ são, em particular, transformações lineres entre $\mathbb{C}$-espaços vetoriais, poderíamos suspeitar que $\mathrm{Rep}(A)$ é categoria simétrica, com o braiding sendo dado pelo τ da categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais. Como ocorreu no caso dos duais à esquerda e à direita, a dificuldade encontrada é que essas flechas herdadas da categoria de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais devem ser intertwiners de $\mathrm{Rep}(A)$. Para que $\tau_{X,Y}$ seja um interrwiner $\tau_{X,Y}\colon (X,\pi_X)\otimes(Y,\pi_Y) \to (Y,\pi_Y)\otimes(X,\pi_X)$, devemos ter que, $\forall a \in A$, vale a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
X\otimes Y \arrow[r, "\pi_X * \pi_Y(a)"] \arrow[d, "\tau_{X,Y}"] & X\otimes Y \arrow[d, "\tau_{X,Y}"] \\
Y\otimes X \arrow[r, "\pi_Y * \pi_X(a)"] & Y\otimes X
\end{tikzcd}$$

porém,



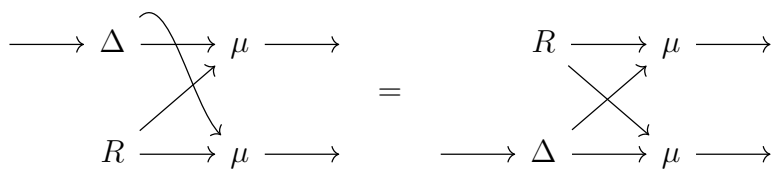
o que deveria ser igual a



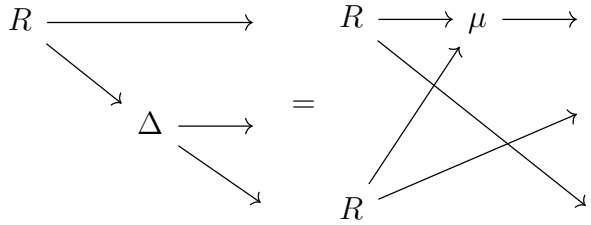
assim bastaria ter $\tau_{A,A} \circ \Delta = \Delta$, ou seja, que A fosse álgebra de Hopf cocomutativa. Também a categoria dos $\mathbb{C}$-espaços vetoriais pode ser munida de infinitos braidings distintos, então a condição anterior é uma condição suficiente para que o braiding τ dado por $\tau_{X,Y}(x \otimes y) = y \otimes x$ forneça uma braiding em $\mathrm{Rep}(A)$, mas não uma condição para conseguir construir algum braiding em $\mathrm{Rep}(A)$. Uma condição suficiente para que $\mathrm{Rep}(A)$ tenha um braiding é que A seja uma biálgebra quase-triangular.

Definição 4.13. Uma $(A, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon)$ biálgebra quase-triangular com matriz universal R é uma biálgebra munida de um $R \in A \otimes A$ invertível que satisfaz às seguintes propriedades:

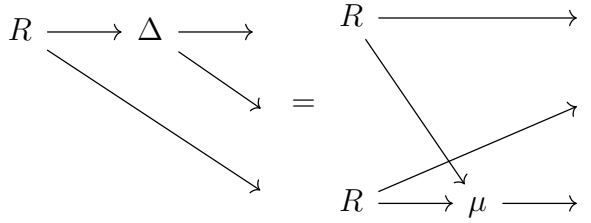
(a)



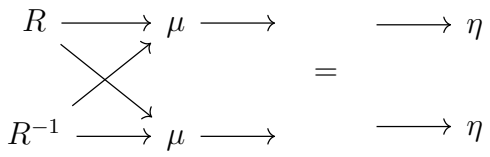
(b)



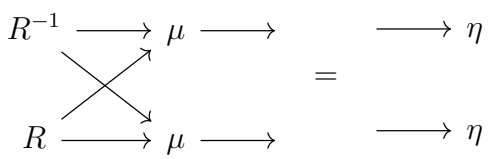
(c)



em que $R \rightrightarrows$ é a transformação linear $R\colon \mathbb{C} \to A \otimes A$ dada por $R(1) = R$ (o primeiro R é uma função, o segundo um elemento de $A \otimes A$). R ser invertível significa que existe um elemento $R^{-1} \in A \otimes A$ tal que



e



Como $R \rightrightarrows$ somente possui setas saindo, há uma possível ambiguidade nos diagramas sobre qual a primeira flecha. Nos diagramas acima a primeira flecha é a que está mais acima com relação a R.

As propriedades anteriores, que foram escritas por meio de diagramas, podem ser reescritas de forma álgebrica da maneira tradicional. Para isto, seja $R_{i,j} \in A \otimes A \otimes A$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$ e $i < j$, o elemento de $A \otimes A \otimes A$ obtido da seguinte forma: sendo $R = \sum_{k \in K} r_k \otimes r'_k$, para K um conjunto finito e $r_k, r'_k \in A$, então $R_{i,j}$ é obtido inserindo $\eta(1)$ na posição que resta em $\{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}$, ou seja, se $i = 1$ e $j = 3$ então $R_{1,3} = \sum_{k \in K} r_k \otimes \eta(1) \otimes r'_k$, e analogamente para outras escolhas de i e j. Então as condições (a), (b) e (c) podem ser escritas como:

(a) $(\tau_{A,A} \circ \Delta)(a) \cdot R = R \cdot \Delta(a)$;

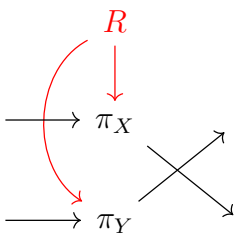
(b) $(\mathrm{id}_A \otimes \Delta)(R) = R_{1,3} \cdot R_{1,2}$;

(c) $(\Delta \otimes \mathrm{id}_A)(R) = R_{1,3} \cdot R_{2,3}$.

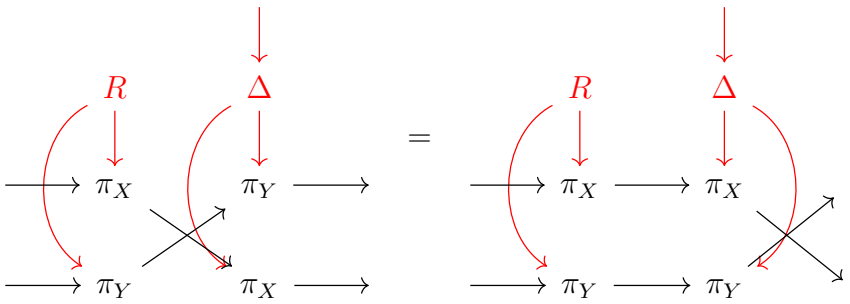
Os produtos em $A \otimes A$ e em $A \otimes A \otimes A$ são componente a componente, conforme mostrado nos preliminares sobre Álgebra de Hopf.

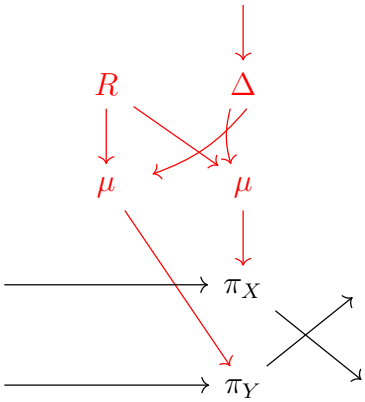
Seja A uma álgebra de Hopf quase-triangular com matriz universal $R \in A \otimes A$ fixada, temos então um braiding σ em $\mathrm{Rep}(A)$ em que $\sigma_{(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)} \colon (X, \pi_X) \otimes (Y, \pi_Y) \to (Y, \pi_Y) \otimes (X, \pi_X)$ é o isomorfismo dado por $\sigma_{(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)} = \tau_{X,Y} \circ \pi_X \otimes \pi_Y(R)$

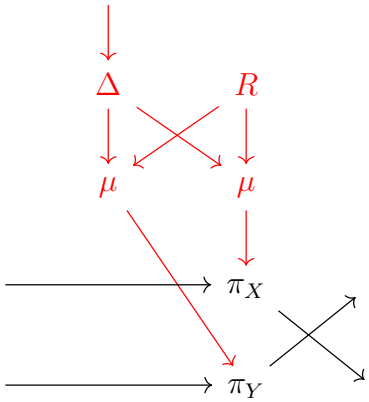
$\sigma_{(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)} =$

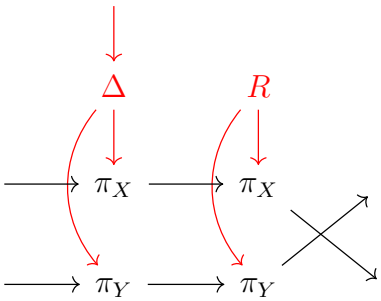


Verifiquemos que isso é um braiding. Primeiramente, $\sigma_{(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)}$ deve ser um intertwiner, temos que

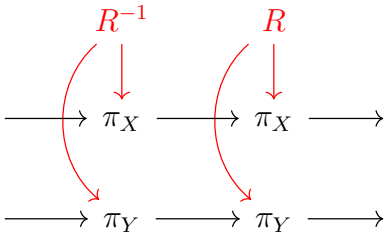


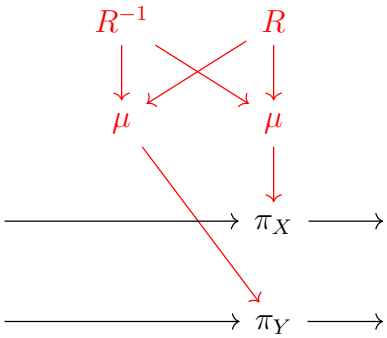
$=$ 

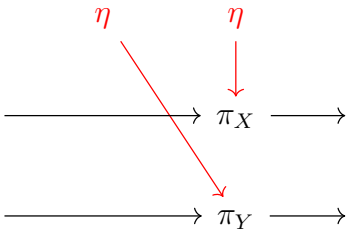
$\overset{(a)}{=}$ 

$=$ 

Além disso deve ser um isomorfismo, mas isso segue de $\tau_{X,Y}$ ser isomorfismo, R ser invertível e $\pi_X \otimes \pi_Y$ preservar o produto em $A \otimes A$, de forma que $(\pi_X \otimes \pi_Y(R))^{-1} = \pi_X \otimes \pi_Y(R^{-1})$. Por clareza, segue a demonstração desta última afirmação.

$\pi_X \otimes \pi_Y(R) \circ \pi_X \otimes \pi_Y(R^{-1})$ $=$ 

$=$ 

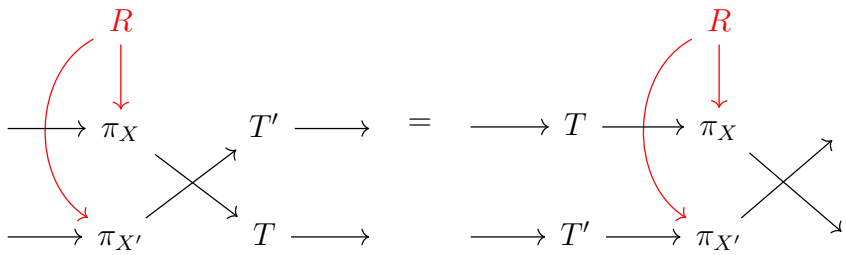
$=$ 

$=$

$= \mathrm{id}_{X \otimes Y}$

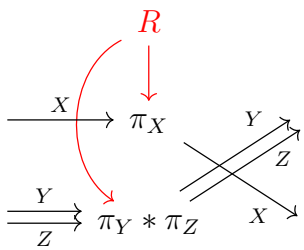
e analogamente temos que $\pi_X \otimes \pi_Y(R^{-1}) \circ \pi_X \otimes \pi_Y(R) = \mathrm{id}_{X\otimes Y}$, logo $\pi_X \otimes \pi_Y(R^{-1}) = (\pi_X \otimes \pi_Y(R))^{-1}$.

Além disso, isso deve satisfazer a naturalidade e os axiomas do hexágono, conforme a definição de braiding. Verifiquemos a naturalidade, dados intertwiners $T\colon (X, \pi_X) \to (Y, \pi_Y)$ e $T'\colon (X', \pi'_X) \to (Y', \pi_{Y'})$, temos que

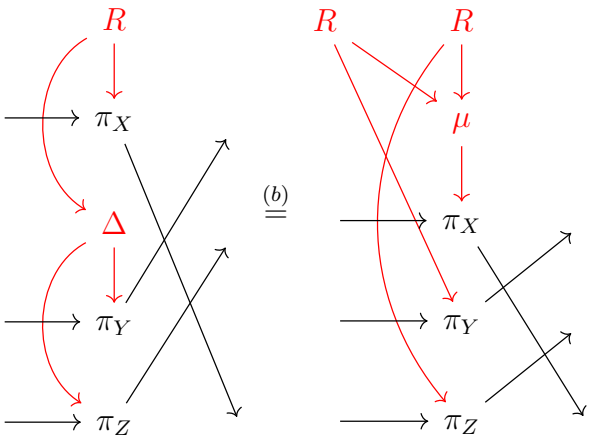


Por fim os axiomas do hexágono (ou $\otimes$-multiplicidade do braiding), dadas representações (X, π_X), (Y, π_Y) e (Z, π_Z), temos que

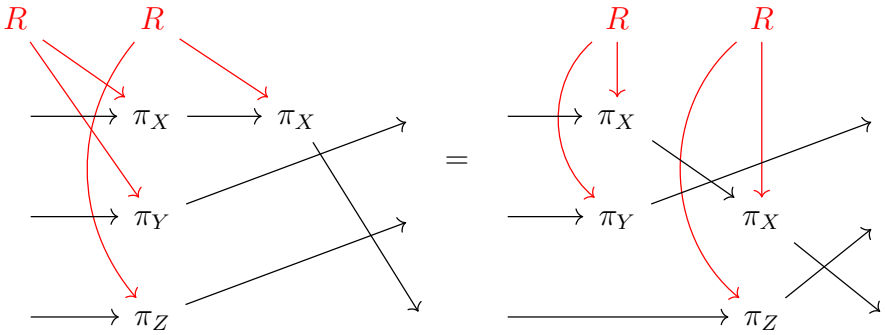
$\sigma_{(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)\otimes(Z,\pi_Z)} =$



$=$



$=$



$= (\mathrm{id}_Y \otimes \sigma_{(X,\pi_X),(Z,\pi_Z)})(\sigma_{(X,\pi_X),(Y,\pi_Y)} \otimes \mathrm{id}_Z),$

e analogamente, utilizando o axioma (c) de biálgebra quase-triangular, segue o outro axi-

oma do hexágono, de forma que

$$\sigma_{(X,\pi_X)\otimes(Y,\pi_Y),(Z,\pi_Z)} = (\sigma_{(X,\pi_X),(Z,\pi_Z)} \otimes \mathrm{id}_Y)(\mathrm{id}_X \otimes \sigma_{(Y,\pi_Y),(Z,\pi_Z)}),$$

o que conclui que σ é um braiding em $\mathrm{Rep}(A)$.

4.2.5 Linearidade e Aditividade

A categoria $\mathrm{Rep}(A)$ tem por flechas os intertwiners, que são, dentre outras coisas, transformações lineares entre $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita, e a categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$ é monoidal $\mathbb{C}$-linear e aditiva. É simples mostrar que a soma de intertwiners e o produto por escalar, ambos herdados de $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$, tornam $\mathrm{Rep}(A)$ categoria monoidal $\mathbb{C}$-linear.

Também $\mathrm{Rep}(A)$ é aditiva. O objeto zero é a representação nula $(0,0)$, em que o homomorfismo de álgebras é a função nula $0\colon A \to \mathrm{End}(0)$. Dado um conjunto não-vazio Λ e uma família de representações (V_α, π_α), a soma direta dessa família é a família $(p_\alpha, q_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ em que $p_\alpha\colon \oplus_{\beta\in A}(V_\beta,\pi_\beta) \to (V_\alpha,\pi_\alpha)$ e $q_\alpha\colon (V_\alpha,\pi_\alpha) \to \oplus_{\beta\in A}(V_\beta,\pi_\beta)$ herdadas da categoria $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$. Mostremos que estes são intertwiners, seja $a \in A$ e considere o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{\beta\in\Lambda} V_\beta \arrow[r, "\oplus_{\beta\in\Lambda}\pi_\beta(a)"] \arrow[d, "p_\alpha"] & \oplus_{\beta\in\Lambda} V_\beta \arrow[d, "p_\alpha"] \\
V_\alpha \arrow[r, "\pi_\alpha(a)"] & V_\alpha
\end{tikzcd}$$

Dado $(v_\beta)_{\beta\in\Lambda} \in \oplus_{\beta\in\Lambda} V_\beta$, temos que

$$\begin{aligned}
p_\alpha(\oplus_{\beta\in\Lambda}\pi_\beta(a)(v_\beta)_{\beta\in\Lambda}) &= p_\alpha(\pi_\beta(a)(v_\beta))_{\beta\in\Lambda} \\
&= \pi_\alpha(a)(v_\alpha) \\
&= \pi_\alpha(a)(p_\alpha(v_\beta)_{\beta\in\Lambda}),
\end{aligned}$$

logo o diagrama comuta e p_α é intertwiner, analogamente segue que q_α é intertwiner. Que são satisfeitas as equações $\sum_{\alpha\in\Lambda} q_\alpha p_\alpha = \mathrm{id}$ e $p_\alpha q_\beta = \delta_{\alpha,\beta}\mathrm{id}$, isto é imediato pois o mesmo já valia em $\mathbf{FinVect}_{\mathbb{C}}$.

4.3 Categoria de Representações do Drinfeld Quantum Double

Analisemos o caso particular da álgebra de Hopf $D(G)$, o Drinfeld Quantum Double de um grupo finito G.

4.3.1 Drinfeld Quantum Double

O quantum double $D(G)$ é a álgebra de Hopf $(A \otimes A^*, \mu, \eta, \Delta, \varepsilon, S)$, em que

- $A = \mathbb{C}G$;
- $\mu\colon D(G)\otimes D(G) \to D(G)$ é dado por $\mu((g_1\otimes\delta_{h_1})\otimes(g_2\otimes\delta_{h_2})) = g_1g_2\otimes\delta_{g_2^{-1}h_1g_2}\delta_{h_2}$;

- $\eta\colon \mathbb{C} \to D(G)$ é dado por $\eta(1) = e \otimes \sum_{g\in G} \delta_g$;
- $\Delta\colon D(G) \to D(G) \otimes D(G)$ é dado por $\Delta(g \otimes \delta_h) = \sum_{l\in G}(g \otimes \delta_{l^{-1}h}) \otimes (g \otimes \delta_l)$;
- $\varepsilon\colon D(G) \to \mathbb{C}$ é dado por $\varepsilon(g \otimes \delta_h) = \delta(h, e)$;
- $S\colon D(G) \to D(G)$ é dado por $S(g \otimes \delta_h) = g^{-1} \otimes \delta_{gh^{-1}g^{-1}}$.

Verificar que $D(G)$ é álgebra de Hopf é simples, porém trabalhoso. Para exemplificar, será demonstrada a propriedade $(\mu \otimes \mu)(\mathrm{id}_{D(G)} \otimes \tau_{D(G),D(G)} \otimes \mathrm{id}_{D(G)})(\Delta \otimes \Delta) = \Delta\mu$, dos axiomas de biálgebra. Basta verificar que a igualdade vale sobre um elemento genérico de uma base de $D(G) \otimes D(G)$, temos que dados $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$,

$$
\begin{aligned}
&(\mu \otimes \mu)(\mathrm{id}_{D(G)} \otimes \tau_{D(G),D(G)} \otimes \mathrm{id}_{D(G)})(\Delta \otimes \Delta)(g_1 \otimes \delta_{h_1} \otimes g_2 \otimes \delta_{h_2}) = \\
&= (\mu \otimes \mu)(\mathrm{id} \otimes \tau \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{l,l'\in G} g_1 \otimes \delta_{l^{-1}h_1} \otimes g_1 \otimes \delta_l \otimes g_2 \otimes \delta_{l'^{-1}h_2} \otimes g_2 \otimes \delta_{l'} \right) \\
&= \sum_{l,l'\in G} (\mu \otimes \mu)(g_1 \otimes \delta_{l^{-1}h_1} \otimes g_2 \otimes \delta_{l'^{-1}h_2} \otimes g_1 \otimes \delta_l \otimes g_2 \otimes \delta_{l'}) \\
&= \sum_{l,l'\in G} g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}l^{-1}h_1g_2}\delta_{l'^{-1}h_2} \otimes g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}lg_2}\delta_{l'} \\
&= \sum_{l,l'\in G} \delta(l', g_2^{-1}lg_2)\ \ g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}l^{-1}h_1g_2}\delta_{l'^{-1}h_2} \otimes g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}lg_2}\delta_{l'} \\
&= \sum_{l\in G} g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}l^{-1}h_1g_2}\delta_{(g_2^{-1}l^{-1}g_2)h_2} \otimes g_1g_2 \otimes \delta^2_{g_2^{-1}lg_2} \\
&= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2) \sum_{l\in G} g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}l^{-1}h_1g_2} \otimes g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}lg_2} \\
&= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2) \sum_{l'\in G} g_1g_2 \otimes \delta_{l'^{-1}g_2^{-1}h_1g_2} \otimes g_1g_2 \otimes \delta_{l'},
\end{aligned}
$$

por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\Delta\mu(g_1 \otimes \delta_{h_1} \otimes g_2 \otimes \delta_{h_2}) &= \Delta(g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}h_1g_2}\delta_{h_2}) \\
&= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2)\Delta(g_1g_2 \otimes \delta_{g_2^{-1}h_1g_2}) \\
&= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2) \sum_{l\in G} g_1g_2 \otimes \delta_{l^{-1}g_2^{-1}h_1g_2} \otimes g_1g_2 \otimes \delta_l.
\end{aligned}
$$

A álgebra de Hopf $D(G)$ é, além disso, involutiva e quase-triangular. De fato, $S^{-1} = S$, pois $S^2(g \otimes \delta_h) = S(g^{-1} \otimes \delta_{gh^{-1}g^{-1}}) = g \otimes \delta_{g^{-1}ghg^{-1}g} = g \otimes \delta_h$. Uma matriz universal $R \in D(G) \otimes D(G)$ que torna $D(G)$ quase-triangular é $R = \sum_{g,h\in G} g \otimes \delta_h \otimes e \otimes \delta_g$, com inversa $R^{-1} = \sum_{g,h\in G} g^{-1} \otimes \delta_h \otimes e \otimes \delta_g$. É uma verificação simples, porém trabalhosa, que $D(G)$ é quase-triangular, como as técnicas de cálculo são as mesmas dos cálculos feitos anteriormente, essa verificação não será explicitada aqui. Com isto segue que $\mathrm{Rep}(D(G))$ é categoria esférica braided.

4.3.2 Estrutura Fusion

Por fim, queremos mostrar que $\mathrm{Rep}(D(G))$ é categoria fusion, sendo, portanto, fusion esférica, que é o tipo de categoria utilizada na construção de Turaev-Viro para uma TQFT 3D.

Teorema 4.14. *A álgebra $D(G)$ é semi-simples, ou seja, toda representação de $D(G)$ se decompõe como soma direta de representações irredutíveis.*

Demonstração. Esta prova é muito semelhante à do Teorema de Maschke, que é o teorema 4.11. Seja (V, π) uma representação de $D(G)$, suponhamos que não seja irredutível, então existe um subespaço não trivial π-invariante $W \subseteq V$, então temos uma subrepresentação (W, ω) em que $\omega\colon D(G) \to \mathrm{End}(W)$ é o homomorfismo de álgebras dado por $\omega(a)(w) = \pi(a)(w)$. Seja $P\colon V \to V$ uma projeção sobre W, como no teorema 4.11, esta é uma transformação linear com a propriedade de que $P(w) = w$ se $w \in W$ e $P(v) \in W, \forall v \in V$. Esta projeção pode não ser um intertwiner, então seja $P'\colon V \to V$ o operador dado por

$$P'(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(x \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}})(v),$$

como P é uma projeção sobre W e W é π-invariante então P' também é uma projeção sobre W, de forma que $P'(w) = w$ se $w \in W$ e $P'(v) \in W, \forall v \in V$, além disso P' é um intertwiner $P'\colon (V, \pi) \to (V, \pi)$: sejam $g, h \in G$, temos que

$$\begin{aligned}
P'\pi(g \otimes \delta_h)(v) &= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(x \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}}) \pi(g \otimes \delta_h)(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(x \otimes \delta_y) P \pi((x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}}) \cdot (g \otimes \delta_h))(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(x \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} g \otimes \delta_{xyx^{-1}})(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(x \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} g \otimes \delta_{g^{-1}xyx^{-1}g} \delta_h)(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(gx \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}} \delta_h)(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \delta(h, xyx^{-1}) \pi(gx \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}})(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \delta(y, x^{-1}hx) \pi(gx \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}})(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(gx \otimes \delta_{x^{-1}hx} \delta_y) P \pi(x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}})(v) \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{x,y \in G} \pi(g \otimes \delta_h) \pi(x \otimes \delta_y) P \pi(x^{-1} \otimes \delta_{xyx^{-1}})(v)
\end{aligned}$$

$$= \pi(g \otimes \delta_h)\frac{1}{|G|}\sum_{x,y\in G}\pi(x\otimes\delta_y)P\pi(x^{-1}\otimes\delta_{xyx^{-1}})(v)$$
$$= \pi(g\otimes\delta_h)P'(v),$$

pela linearidade de π segue então que $P'\pi(a)(v) = \pi(a)P'(v)$ para todo $a \in D(G)$ e $v \in V$. Com isto, $\ker P'$ é subespaço π-invariante, de fato, dado $z \in \ker P'$ e $a \in D(G)$ temos que $P'\pi(a)(z) = \pi(a)P'(z) = \pi(a)(0) = 0$, logo $\pi(a)(z) \in \ker P'$. Então temos uma subrepresentação $(\ker P', k)$, em que $k\colon D(G) \to \mathrm{End}(\ker P')$ é dado por $k(a)(z) = \pi(a)(z)$. Como na demonstração do teorema 4.11 temos que $V = W \oplus \ker P'$ (soma direta interna) e o isomorfismo $\varphi\colon V \to W \oplus \ker P'$ (neste caso soma direta externa) dado por $\varphi(v) = (P'(v), v - P'(v))$ é um intertwiner $\varphi\colon (V,\pi) \to (W,\omega) \oplus (\ker P', k)$, logo um isomorfismo de representações. Por indução finita segue que (V,π) é isomorfo a uma soma direta finita de representações irredutíveis de $D(G)$. □

A seguir obteremos resultados para a categoria $\mathrm{Rep}(D(G))$ a partir de resultados de representações de grupos. Isso será feito construindo representações de $D(G)$ a partir de representações de centralizadores de elementos de G.

A classe de conjugação $C(g)$ de um elemento $g \in G$ é o conjunto $C(g) = \{xgx^{-1} : x \in G\}$, as classes de conjugação formam uma partição de G, ou seja, $G = \cup_{g\in G} C(g)$ e $C(g) \cap C(h) \neq \varnothing \iff C(g) = C(h)$, em particular g e h são conjugado, ou seja, existe $x \in G$ tal que $h = xgx^{-1}$. O centralizador $Z(g)$ de um elemento $g \in G$ é o subgrupo de G formado pelos elemento que comutam com g, ou seja, $Z(g) = \{z \in G : zg = gz\}$. Classes de conjugação e centralizadores estão relacionados por meio do Teorema do Estabilizador e da ação de conjugação.

Uma ação (à esquerda) $A\colon G \times X \to X$ de G sobre um conjunto X é um mapa, para o qual utilizamos a notação $A(g,x) = g \cdot x$, satisfazendo às seguintes propriedades:

- $e \cdot x = x, \forall x \in X$, em que e é o elemento neutro de G;
- $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x, \forall g, h \in G$.

Dada uma ação $A\colon G \times X \to X$, a órbita de um elemento $x \in X$ é o conjunto $\mathcal{O}_x = \{g \cdot x : g \in G\}$ e o estabilizador de x é o subgrupo $G_x = \{g \in G : g \cdot x = x\}$.

Teorema 4.15 (Teorema da Órbita e do Estabilizador)**.** *Seja X um conjunto, G um grupo finito e $A\colon G \times X \to X$ uma ação (à esquerda) de G sobre o conjunto X. Então, para cada $x \in X$, há uma bijeção $g \cdot x \leftrightarrow gG_x$ entre os elementos da órbita $\mathcal{O}_x$ e as classes laterais de G_x. Se G é finito então segue que $|G| = |G_x||\mathcal{O}_x|$.*

Demonstração. Fixe um elemento $x \in X$, temos que responder à seguinte questão: quando dois elementos $g, h \in G$ são tais que $g \cdot x = h \cdot x$? Pelas propriedades de ação segue que isso ocorre se e somente se $(g^{-1}h) \cdot x = x \iff g^{-1}h \in G_x \iff gG_x = hG_x$, logo $g \cdot x = h \cdot x \iff gG_x = hG_x$. Como g e h são quaisquer, isso estabelece uma bijeção entre os elementos de $\mathcal{O}_x$ e as classes laterais de G_x. Se G é finito, então o número de classes laterais de G_x é seu índice $[G : G_x] = |G|/|G_x|$, então pela bijeção anterior temos que $[G : G_x] = |\mathcal{O}_x|$, logo $|G| = |G_x||\mathcal{O}_x|$. □

A ação de conjugação é $A\colon G \times G \to G$ dada por $g \cdot x = gxg^{-1}$, então dado um elemento $x \in X$ sua órbita e estabilizador são $\mathcal{O}_x = \{gxg^{-1} : g \in G\} = C(x)$ e $G_x = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} = \{g \in G : gx = xg\} = Z(x)$.

Como G é grupo finito então há finitas classes de conjugação, seja n o número de classes de conjugação e chamemos essas classes de C_k, com $1 \leq k \leq n$, e tomemos $C_1 = C(e) = \{e\}$. As classes de conjugação formam uma partição de G, então $G = \sqcup_{k=1}^{n} C_k$ ($\sqcup$ significa união disjunta). Para cada k fixemos um elemento $g_k \in C_k$, todo elemento de C_k é da forma hg_kh^{-1}, para cada $s \in C_k$ fixemos um $\tau_s \in G$ tal que $s = \tau_s g_k \tau_s^{-1}$. Para $s = g_k$ tomemos $\tau_{g_k} = e$. Isso dá uma forma única de representar os elementos de G. Denotemos $Z(g_k)$ por Z_k.

Fixemos um $k \in \{1, ..., n\}$, como $Z_k \leq G$ ($\leq$ significa "é subgrupo de") então G é união das classes laterais de Z_k, pelo Teorema da Órbita e do Estabilizador temos uma bijeção $hg_kh^{-1} \leftrightarrow hZ_k$ entre os elementos de C_k e as classes lateriais de Z_k. Em particular, dados $r, s \in C_k$, $\tau_r Z_k = \tau_s Z_k \iff \tau_r g_k \tau_r^{-1} = \tau_s g_k \tau_s^{-1} \iff r = s$, este último $\iff$ segue da definição de τ_r e τ_s. Logo $\cup_{s \in C_k} \tau_s Z_k$ é união disjunta, então $|\cup_{s \in C_k} \tau_s Z_k| = \sum_{s \in C_k} |\tau_s Z_k| = \sum_{s \in C_k} |Z_k| = |C_k||Z_k| = |G|$, esta última igualdade segue do Teorema da Órbita e do Estabilizador. Mas $\cup_{s \in C_k} \tau_s Z_k \subseteq G$ e tem o mesmo número de elementos que G, logo $G = \cup_{s \in C_k} \tau_s Z_k$. Isso prova o seguinte lema:

Lema 4.16. *G é união disjunta $G = \sqcup_{s \in C_k} \tau_s Z_k$.*

Isto nos dá uma bijeção

$$\begin{aligned} C_k \times Z_k &\longrightarrow G \\ (s, z) &\longmapsto \tau_s z \end{aligned}$$

Agora construamos representações de $D(G)$ a partir de representações dos centralizadores Z_k.

Seja $(V_\alpha^k, \rho_\alpha^k)_{\alpha \in \Lambda_k}$ uma família de representações irredutíveis de Z_k com as representações $(V_\alpha^k, \rho_\alpha^k)$ correspondendo biunivocamente às classes de isomorfismo (assim duas representações $(V_\alpha^k, \rho_\alpha^k)$ e $(V_\beta^k, \rho_\beta^k)$ são isomorfas se e somente se são iguais). Fixemos uma base $\{v_{\alpha,i}^k\}_{i=1}^{\dim V_\alpha^k}$ para cada espaço V_α^k. Cada representação $(V_\alpha^k, \rho_\alpha^k)$ do grupo Z_k permite construir uma representação $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ da álgebra $D(G)$. O $\mathbb{C}$-espaço vetorial W_α^k é o produto tensorial $W_\alpha^k = \mathbb{C}G \otimes_{A_k} V_\alpha^k$ em que $A_k = \mathbb{C}Z_k$, neste produto a álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ e o espaço V_α^k são entendidos, respectivamente, como um A_k-módulo à direita e um A_k-módulo à esquerda, a estrutura de $\mathbb{C}$-espaço vetorial de W_α^k vem de $\mathbb{C}G$ e V_α^k serem $\mathbb{C}$-espaços vetoriais. Mais precisamente, o produto em G dá um produto por escalar $\mathbb{C}G \times A_k \to \mathbb{C}G$, que para quaisquer elementos $g \in G$ e $z \in Z_k$ é dado por $g \cdot z = gz$, que é o produto em G, e para os demais elementos de $\mathbb{C}G$ e $\mathbb{C}Z_k$ é obtido estendendo linearmente, ou seja, $\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) \cdot \left(\sum_{z \in Z_k} \mu_z z\right) = \sum_{g \in G} \sum_{z \in Z_k} \lambda_g \mu_z gz$. Também temos um homomorfismo $\rho_\alpha^k \colon Z_k \to \mathrm{Aut}(V_\alpha^k)$, do qual temos um produto por escalar $A_k \times V_\alpha^k \to V_\alpha^k$, em que para $z \in Z_k$ e $v \in V_\alpha^k$ é dado por $z \cdot v = \rho_\alpha^k(z)(v)$ e para outros elementos de A_k é obtido estendendo linearmente, esse produto por escalar torna o grupo abeliano $(V_\alpha^k, +, 0)$ um A_k-módulo à esquerda.

Um elemento genérico de W_α^k é uma combinação linear de tensores elementares $c \otimes v$ em que $c \in \mathbb{C}G$ e $v \in V_\alpha^k$. O elemento $c \in \mathbb{C}G$ é combinação linear de elementos de $G = \cup_{s \in C_k} \tau_s Z_k$, logo todo elemento de W_α^k é combinação linear de tensores elementares da forma $\tau_s z \otimes v$, para $s \in C_k$, $z \in Z_k$, mas como o produto tensorial é sobre o anel A_k e $\otimes$ é A_k-balanceado então $\tau_s z \otimes v = \tau_s \otimes z \cdot v$, e também $z \cdot v$ é da forma $z \cdot v = \sum_{i=1}^{\dim V_\alpha^k} \lambda_i v_i$,

pela estrutura de $\mathbb{C}$-$\mathbb{C}$-bimódulo temos que

$$\begin{aligned}
\tau_s \otimes z \cdot v = \tau_s \otimes \left(\sum_{i=1}^{\dim V_\alpha^k} \lambda_i v_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^{\dim V_\alpha^k} (\tau_s \otimes v_i)\lambda_i \\
&= \sum_{i=1}^{\dim V_\alpha^k} \lambda_i (\tau_s \otimes v_i),
\end{aligned}$$

logo $\{\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k : s \in C_k, 1 \leq i \leq \dim V_\alpha^k\}$ gera o $\mathbb{C}$-espaço vetorial W_α^k. Além disso, esse conjunto é uma base, isso se deve primeiramente a $\mathbb{C}G$ ser A_k-módulo livre com base $\{\tau_s : s \in C_k\}$, de fato, se temos elementos $a_s \in A_k$, para $s \in C_k$, tais que $\sum_{s \in C_k} \tau_s a_s = 0$, então como $A_k = \mathbb{C}Z_k$ segue que $a_s = \sum_{z \in Z_k} \lambda_{s,z} z$, para $\lambda_{s,z} \in \mathbb{C}$, então

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{s \in C_k} \tau_s a_s \\
&= \sum_{s \in C_k} \tau_s \left(\sum_{z \in Z_k} \lambda_{s,z} z \right) \\
&= \sum_{s \in C_k} \sum_{z \in Z_k} \lambda_{s,z} \tau_s z,
\end{aligned}$$

mas como G é base de $\mathbb{C}G$ e todo elemento de G se escreve se forma única como $\tau_s z$ então $\lambda_{s,z} = 0, \forall s \in C_k, z \in Z_k$, logo $a_s = 0, \forall s \in C_k$. Como $\mathbb{C}G$ é A_k-módulo à direita livre sobre $\{\tau_s : s \in C_k\}$ então $\mathbb{C}G \cong \oplus_{s \in C_k} A_k$, e portanto

$$\begin{aligned}
W_\alpha^k &= \mathbb{C}G \otimes_{A_k} V_\alpha^k \\
&\cong (\oplus_{s \in C_k} A_k) \otimes_{A_k} V_\alpha^k \\
&\cong \oplus_{s \in C_k} (A_k \otimes_{A_k} V_\alpha^k) \\
&\cong \oplus_{s \in C_k} V_\alpha^k,
\end{aligned}$$

logo $\dim W_\alpha^k = \dim(\oplus_{s \in C_k} V_\alpha^k) = \sum_{s \in C_k} \dim V_\alpha^k = |C_k| \dim V_\alpha^k$, que é o número de elementos de $\{\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k : s \in C_k, 1 \leq i \leq \dim V_\alpha^k\}$, portanto este conjunto é base de W_α^k.

Antes de construir uma representação de $D(G) = (\mathbb{C}G) \otimes (\mathbb{C}G)^*$, podemos construir uma representação de $\mathbb{C}G$. Para isto precisamos do seguinte lema:

Lema 4.17. *Dado $s \in C_k$ e $g \in G$, para $t = gsg^{-1}$ vale que $\tau_t^{-1} g \tau_s \in Z_k$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\tau_t^{-1} g \tau_s \in Z_k &\iff \tau_t^{-1} g \tau_s g_k = g_k \tau_t^{-1} g \tau_s \\
&\iff g \tau_s g_k \tau_s^{-1} = \tau_t g_k \tau_t^{-1} g \\
&\iff gs = tg \\
&\iff t = gsg^{-1}.
\end{aligned}$$

□

Com este lema podemos construir uma representação de $\mathbb{C}G$, dada pelo par $(W_\alpha^k, \bar{\pi}_\alpha^k)$ em que $\bar{\pi}_\alpha^k \colon \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(W_\alpha^k)$ é definido da seguinte forma: para $g \in G$, $\bar{\pi}_\alpha^k(g) \colon \mathbb{C}G \otimes_{A_k} V_\alpha^k \to \mathbb{C}G \otimes_{A_k} V_\alpha^k$ é o homomorfismo de álgebras dado por

$$\bar{\pi}_\alpha^k(g)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) = \tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{gsg^{-1}}^{-1} g\tau_s)(v_{\alpha,i}^k).$$

Isso define $\bar{\pi}_\alpha^k$ sobre a base G de $\mathbb{C}G$, então $\bar{\pi}_\alpha^k$ é obtido estendendo linearmente. Por construção $\bar{\pi}_\alpha^k \colon \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(W_\alpha^k)$ é uma transformação linear, verifiquemos que é um homomorfismo de álgebras, ou seja, que ele preserva a unidade de $\mathbb{C}G$ e o produto. A unidade de $\mathbb{C}G$ é e, o elemento neutro de G, temos que

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_\alpha^k(e)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) &= \tau_{ese^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{ese^{-1}}^{-1} e\tau_s)(v_{\alpha,i}^k) \\
&= \tau_s \otimes \rho_\alpha^k(e)(v_{\alpha,i}^k) \\
&= \tau_s \otimes \mathrm{id}_{V_\alpha^k}(v_{\alpha,i}^k) \\
&= \tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k,
\end{aligned}$$

logo $\bar{\pi}_\alpha^k(e) = \mathrm{id}_{W_\alpha^k}$. Para mostrar que o produto é preservado, basta calcular para elementos de G, pois o caso geral segue por linearidade, temos que, para quaisquer $g, h \in G$,

$$\begin{aligned}
\bar{\pi}_\alpha^k(gh)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) &= \tau_{ghsh^{-1}g^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{ghsh^{-1}g^{-1}}^{-1} gh\tau_s)(v_{\alpha,i}^k) \\
&= \tau_{ghsh^{-1}g^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{ghsh^{-1}g^{-1}}^{-1} g\tau_{hsh^{-1}}\tau_{hsh^{-1}}^{-1} h\tau_s)(v_{\alpha,i}^k) \\
&= \tau_{ghsh^{-1}g^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{ghsh^{-1}g^{-1}}^{-1} g\tau_{hsh^{-1}}) \circ \rho_\alpha^k(\tau_{hsh^{-1}}^{-1} h\tau_s)(v_{\alpha,i}^k) \\
&= \bar{\pi}_\alpha^k(g)(\tau_{hsh^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{hsh^{-1}}^{-1} h\tau_s)(v_{\alpha,i}^k)) \\
&= \bar{\pi}_\alpha^k(g) \circ \bar{\pi}_\alpha^k(h)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k),
\end{aligned}$$

logo $\bar{\pi}_\alpha^k(gh) = \bar{\pi}_\alpha^k(g) \circ \bar{\pi}_\alpha^k(h)$.

Essa representação de $\mathbb{C}G$ pode ser estendida a uma representação $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ de $D(G) = (\mathbb{C}G) \otimes (\mathbb{C}G)^*$, isso é feito de forma que o vetor $\delta_s \in (\mathbb{C}G)^*$, para $s \in C_k$, aja projetando no subespaço $W_\alpha^k(s) \subseteq W_\alpha^k$ que tem por base $\{\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k : 1 \leq i \leq \dim V_\alpha^k\}$. Para uso posterior, note que $W_\alpha^k = \oplus_{s \in C_k} W_\alpha^k(s)$ (soma direta interna). O homomofismo de álgebras π_α^k é definido da seguinte forma: dados $g, h \in G$, $\pi_\alpha^k(g \otimes \delta_h) \colon W_\alpha^k \to W_\alpha^k$ é o operador dado por

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha^k(g \otimes \delta_h)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) &= \delta(h,s)\bar{\pi}_\alpha^k(g)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) \\
&= \delta(h,s)\tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{gsg^{-1}}^{-1} g\tau_s)(v_{\alpha,i}^k).
\end{aligned}$$

Note que se $h \notin C_k$ então $\delta(h,s) = 0 \implies \pi_\alpha^k(g \otimes \delta_h) \equiv 0$. Verifiquemos que π_α^k é homomorfismo de álgebras. A unidade de $D(G)$ é $\eta(1) = \sum_{h \in G} e \otimes \delta_h$, então

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha^k\left(\sum_{h \in G} e \otimes \delta_h\right)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) &= \sum_{h \in G} \pi_\alpha^k(e \otimes \delta_h)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) \\
&= \sum_{h \in G} \delta(h,s)\bar{\pi}_\alpha^k(e)(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k) \\
&= \mathrm{id}_{W_\alpha^k}(\tau_s \otimes v_{\alpha,i}^k),
\end{aligned}$$

logo $\pi_\alpha^k\left(\sum_{h\in G} e\otimes\delta_h\right) = \mathrm{id}_{W_\alpha^k}$. Agora verifiquemos que o produto é preservado, para quaisquer $g_1, g_2, h_1, h_2 \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha^k((g_1\otimes\delta_{h_1})\cdot(g_2\otimes\delta_{h_2})) &= \pi_\alpha^k(g_1g_2\otimes\delta_{g_2^{-1}h_1g_2}\delta_{h_2})(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k)\\
&= \pi_\alpha^k(g_1g_2\otimes\delta_{g_2^{-1}h_1g_2}\delta_{h_2})(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k)\\
&= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2)\pi_\alpha^k(g_1g_2\otimes\delta_{h_2})(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k)\\
&= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2)\delta(h_2, s)\bar{\pi}_\alpha^k(g_1g_2)(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k)\\
&= \delta(h_2, g_2^{-1}h_1g_2)\delta(h_2, s)\bar{\pi}_\alpha^k(g_1)\bar{\pi}_\alpha^k(g_2)(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k)\\
&= \delta(h_1, g_2sg_2^{-1})\delta(h_2, s)\bar{\pi}_\alpha^k(g_1)\bar{\pi}_\alpha^k(g_2)(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k)\\
&= \delta(h_1, g_2sg_2^{-1})\bar{\pi}_\alpha^k(g_1)\pi_\alpha^k(g_2\otimes\delta_{h_2})(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k)\\
&= \pi_\alpha^k(g_1\otimes\delta_{h_1})\pi_\alpha^k(g_2\otimes\delta_{h_2})(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k),
\end{aligned}$$

em que a última igualdade vale pois $\pi_\alpha^k(g_2\otimes\delta_{h_2})(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k) = \tau_{g_2sg_2^{-1}}\otimes\rho_\alpha^k(\tau_{gsg^{-1}}^{-1}g\tau_s)(v_{\alpha,i}^k)$, logo $\pi_\alpha^k((g_1\otimes\delta_{h_1})\cdot(g_2\otimes\delta_{h_2})) = \pi_\alpha^k(g_1\otimes\delta_{h_1})\pi_\alpha^k(g_2\otimes\delta_{h_2})$.

A seguir queremos mostrar que as representações $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ de $D(G)$ são irredutíveis e cada classe de isomorfismo de representações irredutíveis tem exatamente um $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ como representante. Primeiro convém obter a partir de $(V_\alpha^k, \rho_\alpha^k)$ uma representação de $\tau_sZ_k\tau_s^{-1}$ e mostrar que esta é irredutível. Essa representação é $(W_\alpha^k(s), \omega_s)$, em que $\omega_s\colon \tau_sZ_k\tau_s^{-1} \to \mathrm{Aut}(W_\alpha^k(s))$ é o homomorfismo de grupos dado por

$$\omega_s(\tau_sz\tau_s^{-1})(\tau_s\otimes v_{\alpha,i}^k) = \tau_s\otimes\rho_\alpha^k(z)(v_{\alpha,i}^k),$$

para $z \in Z_k$ e $1 \le i \le \dim V_\alpha^k$. Essa representação somente será utilizada brevemente para provar alguns resultados, por isso, a menos que se mostre necessário, não será colocado em ω outros índices além de s, mas claro que há dependência em k e α. A demonstração de que ω_s é homomorfismo de grupos é simples e semelhante às anteriores, então não será feita aqui.

Lema 4.18. *A representação $(W_\alpha^k(s), \omega_s)$ é irredutível.*

Demonstração. Seja $X \subseteq W_\alpha^k(s)$ um $\mathbb{C}$-subespaço ω_s-invariante, suponhamos que $X \neq 0$, então existe $v \in V_\alpha^k \setminus \{0\}$ tal que $\tau_s\otimes v \in X$, e claro que $\tau_s\otimes v \neq 0$. Como X é ω_s-invariante então ele contém o subespaço Y gerado por $\{\omega_s(\tau_sz\tau_s^{-1})(\tau_s\otimes v) : z \in Z_k\} = \{\tau_s\otimes\rho_\alpha^k(z)(v) : z \in Z_k\}$, seja T o subespaço de V_α^k gerado por $\{\rho_\alpha^k(z)(v) : z \in Z_k\}$, então $Y = \{\tau_s\otimes t : t \in T\}$. Temos que $v = \rho_\alpha^k(e)(v) \in T$, logo $T \neq 0$, também T é subespaço ρ_α^k-invariante de V_α^k, como $(V_\alpha^k, \rho_\alpha^k)$ é representação irredutível e $T \neq 0$ então $T = V_\alpha^k$, logo $Y = W_\alpha^k(s)$, porém $Y \subseteq X \subseteq W_\alpha^k(s)$, portanto, $X = W_\alpha^k(s)$ e a representação $(W_\alpha^k(s), \omega_s)$ é irredutível. □

Lema 4.19. *A representação $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ de $D(G)$ é irredutível.*

Demonstração. Seja $X \subseteq W_\alpha^k$ um $\mathbb{C}$-subespaço π_α^k invariante. Suponha que $X \neq 0$, e seja $x \in X$ um elemento não nulo, a unidade de $D(G)$ é $\sum_{h\in G} e\otimes\delta_h$ e vale que $x = \pi_\alpha^k(\sum_{h\in G} e\otimes\delta_h)(x) = \sum_{h\in G}\pi_\alpha^k(e\otimes\delta_h)(x)$, note, porém, que se $h \notin C_k$ então $\pi_\alpha^k(e\otimes\delta_h)(x) = 0$, com isto $\sum_{h\in C_k}\pi_\alpha^k(e\otimes\delta_h)(x) = x \neq 0$, logo existe $s \in C_k$ tal que $\pi_\alpha^k(e\otimes\delta_s)(x) \neq 0$, seja então $x' := \pi_\alpha^k(e\otimes\delta_s)(x) \in W_\alpha^k(s)$. Note que, como X é π_α^k invariante,

então $x' \in X$. Agora, como o subespaço Y de $W_\alpha^k(s)$ gerado por $\{\omega_s(\tau_s z \tau_s^{-1})(x') : z \in Z_k\}$ é não nulo, pois contém $x' \neq 0$, e é ω_s-invariante e $(W_\alpha^k(s), \omega_s)$ é representação irredutível, então $Y = W_\alpha^k(s)$, também $\omega_s(\tau_s z \tau_s^{-1})(x') = \bar{\pi}_\alpha^k(\tau_s z \tau_s^{-1})(x') = \pi_\alpha^k(\tau_s z \tau_s^{-1} \otimes \delta_s)(x')$ e X é π_α^k-invariante então $Y \subseteq X \implies W_\alpha^k(s) \subseteq X$.

Agora, para $g \in G$, considere o subespaço $\pi_\alpha^k(g \otimes \delta_s)(W_\alpha^k(s)) = \bar{\pi}_\alpha^k(g)(W_\alpha^k(s)) = \{\tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(\tau_{gsg^{-1}}^{-1} g \tau_s)(v) : v \in V_\alpha^k\} \subseteq W_\alpha^k(gsg^{-1})$, ele é um subespaço $\omega_{gsg^{-1}}$-invariante, mostremos isto. Para simplificar a notação seja $h := \tau_{gsg^{-1}}^{-1} g \tau_s$, ser $\omega_{gsg^{-1}}$-invariante significa que para qualquer $z \in Z_k$ vale que $\omega_{gsg^{-1}}(\tau_{gsg^{-1}} z \tau_{gsg^{-1}}^{-1})(\tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(h)(v)) \in \pi_\alpha^k(g \otimes \delta_s)(W_\alpha^k(s))$, temos que

$$\begin{aligned}\omega_{gsg^{-1}}(\tau_{gsg^{-1}} z \tau_{gsg^{-1}}^{-1})(\tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(h)(v)) &= \tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(z)(\rho_\alpha^k(h)(v)) \\ &= \tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(zh)(v),\end{aligned}$$

para estar no espaço o vetor deve ser da forma $\tau_{gsg^{-1}} \otimes \rho_\alpha^k(h)(v')$, isto é alcançado utilizando que ρ_α^k é homomorfismo, considere o vetor $v' = \rho_\alpha^k(h^{-1} z h)(v)$, temos que

$$\begin{aligned}\rho_\alpha^k(h)(v') &= \rho_\alpha^k(h)(\rho_\alpha^k(h^{-1} z h)(v)) \\ &= \rho_\alpha^k(h h^{-1} z h)(v) \\ &= \rho_\alpha^k(zh)(v),\end{aligned}$$

isto conclui que o subespaço é $\omega_{gsg^{-1}}$-invariante, como $(W_\alpha^k(gsg^{-1}), \omega_{gsg-1})$ é representação irredutível então $\pi_\alpha^k(g \otimes \delta_s)(W_\alpha^k(s)) = W_\alpha^k(gsg^{-1})$, por outro lado $W_\alpha^k(s) \subseteq X$ e X é π_α^k-invariante, logo $\pi_\alpha^k(g \otimes \delta_s)(W_\alpha^k(s)) \subseteq X \implies W_\alpha^k(gsg^{-1}) \subseteq X$. Como isto vale para qualquer $g \in G$ e todos elementos de C_k são da forma gsg^{-1}, isso implica que $W_\alpha^k(r) \subseteq X, \forall r \in C_k$, como $W_\alpha^k = \oplus_{r \in C_k} W_\alpha^k(r)$ podemos concluir que $X = W_\alpha^k$, logo $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ é representação irredutível. □

Agora mostremos que cada representação irredutível $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ pertence a uma classe de isomorfismo distinta.

Lema 4.20. *As representações $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ e (W_β^l, π_β^l) são isomorfas se, e somente se, $k = l$ e $\alpha = \beta$.*

Demonstração. ($\Longleftarrow$) é óbvio, pois vale a igualdade.

($\Longrightarrow$) Seja $\varphi\colon (W_\alpha^k, \pi_\alpha^k) \to (W_\beta^l, \pi_\beta^l)$ um isomorfismo de representações, que é um intertwiner invertível. Primeiro devemos queremos mostrar que $k = l$, isso ocorre se, e somente se, $C_k = C_l$. O fato de φ ser intertwiner nos dá um diagrama comutativo para cada $a \in D(G)$, em particular podemos tomar $a = e \otimes \delta_s$, para $s \in C_k$, que é uma escolha interessante pois $\pi_\alpha^k(e \otimes \delta_s)$ e $\pi_\beta^l(e \otimes \delta_s)$ são projeções. Então temos o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} W_\alpha^k \arrow[r, "\pi_\alpha^k(e\otimes\delta_s)"] \arrow[d, "\varphi"'] & W_\alpha^k \arrow[d, "\varphi"] \\ W_\beta^l \arrow[r, "\pi_\beta^l(e\otimes\delta_s)"] & W_\beta^l \end{tikzcd}$$

Se $s \notin C_l$ então $\pi^l_\beta(e \otimes \delta_s) \equiv 0$, por outro lado, para qualquer $v \in V^k_\alpha \setminus \{0\}$ temos que $\pi^k_\alpha(e \otimes \delta_s)(\tau_s \otimes v) = \tau_s \otimes v \neq 0$, como φ é isomorfismo de espaços vetoriais então $\varphi(\tau_s \otimes v) \neq 0$, portanto a comutatividade do diagrama implica que $\pi^l_\beta(e \otimes \delta_s) \not\equiv 0$, logo $\forall s \in C_k$ vale que $s \in C_l$, com isto $C_k \subseteq C_l$, como as classes de conjugação formam uma partição de G isso só é possível se $C_k = C_l$, logo $k = l$.

Agora mostremos que $\alpha = \beta$, faremos isso obtendo um isomorfismo de representações $\psi_s \colon (V^k_\alpha, \rho^k_\alpha) \to (V^k_\beta, \rho^k_\beta)$ a partir de φ. Seja $s \in C_k$, sabemos que para todo $v \in V^k_\alpha$ vale que $\pi^k_\alpha(e \otimes \delta_s)(\tau_s \otimes v) = \tau_s \otimes v$, pelo diagrama anterior segue que $\varphi(\tau_s \otimes v) = \pi^k_\beta(e \otimes \delta_s)(\varphi(\tau_s \otimes v))$, mas $\operatorname{Im} \pi^k_\beta(e \otimes \delta_s) = W^k_\beta(s)$, logo $\varphi(W^k_\alpha(s)) \subseteq W^k_\beta(s)$. Como φ é isomorfismo, então $W^k_\beta = \varphi(W^k_\alpha) = \varphi(\oplus_{s \in C_k} W^k_\alpha(s)) = \oplus_{s \in C_k} \varphi(W^k_\alpha(s))$ (ambas somas diretas são internas), como $\varphi(W^k_\alpha(s)) \subseteq W^k_\beta(s)$ isto só é possível se $\varphi(W^k_\alpha(s)) = W^k_\beta(s)$, $\forall s \in C_k$. Com isto, para cada $s \in C_k$ o isomorfismo $\varphi \colon W^k_\alpha \to W^k_\beta$ se restringe a um isomorfismo $\varphi \colon W^k_\alpha(s) \to W^k_\beta(s)$. Este é claramente um isomorfismo de espaços vetoriais, além disso queremos mostrar que é um isomorfismo de representações. Para qualquer $v \in V^k_\alpha$ temos que $\varphi(\tau_s \otimes v) \in V^k_\beta$, logo existe $v' \in V^k_\beta$ tal que $\varphi(\tau_s \otimes v) = \tau_s \otimes v'$, escrevendo v' na base $\{v^k_{\beta,i} : 1 \leq i \leq \dim V^k_\beta\}$ de V^k_β temos que $v' = \sum_{i=1}^{\dim V^k_\beta} \lambda_i v^k_{\beta,i}$, daí $\varphi(\tau_s \otimes v) = \sum_{i=1}^{\dim V^k_\beta} \lambda_i \tau_s \otimes v^k_{\beta,i}$, como $\{\tau_s \otimes v^k_{\beta,i} : 1 \leq i \leq \dim V^k_\beta\}$ é base de $W^k_\beta(s)$ então os coeficientes λ_i são determinados por essa equação, logo v' é único. Isso determina uma função $\psi_s \colon V^k_\alpha \to V^k_\beta$ tal que, para qualquer $v \in V^k_\alpha$, $\psi_s(v)$ é o único vetor tal que $\varphi(\tau \otimes v) = \tau_s \otimes \psi_s(v)$, da linearidade de φ segue então que ψ_s é transformação linear, além disso φ é bijeção implica que ψ_s é bijeção, logo ψ_s é isomorfismo de espaços vetoriais. Tomemos $s = g_k$, assim $\tau_s = e$, queremos mostrar que ψ_{g_k} é intertwiner $\psi_{g_k} \colon V^k_\alpha \to V^k_\beta$, isso é verdade se para qualquer $z \in Z_k$ o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd}
V^k_\alpha \arrow[r, "\rho^k_\alpha(z)"] \arrow[d, "\psi_{g_k}"] & V^k_\alpha \arrow[d, "\psi_{g_k}"] \\
V^k_\beta \arrow[r, "\rho^k_\beta(z)"] & V^k_\beta
\end{tikzcd}$$

Seja $v \in V^k_\alpha$, deve valer que $\psi_{g_k}(\rho^k_\alpha(z)(v)) = \rho^k_\beta(z)(\psi_{g_k}(v))$, para mostrar isso passamos para $W^k_\alpha(s)$ e $W^k_\beta(s)$. Note que $\tau_{zg_kz^{-1}} = \tau_{g_kzz^{-1}} = \tau_{g_k} = e$, de forma que $\pi^k_\alpha(z)(e \otimes v) = e \otimes \rho^k_\alpha(z)(v)$ e $\pi^k_\beta(z)(e \otimes \psi_{g_k}(v)) = e \otimes \rho^k_\beta(z)(\psi_{g_k}(v))$, com isto temos que

$$\begin{aligned}
e \otimes \psi_{g_k}(\rho^k_\alpha(z)(v)) &= \varphi(e \otimes \rho^k_\alpha(z)(v)) \\
&= \varphi(\pi^k_\alpha(z)(e \otimes v)) \\
&= \pi^k_\beta(z)(\varphi(e \otimes v)) \\
&= \pi^k_\beta(z)(e \otimes \psi_{g_k}(v)) \\
&= e \otimes \rho^k_\beta(z)(\psi_{g_k}(v)),
\end{aligned}$$

logo $\psi_{g_k}(\rho^k_\alpha(z)(v)) = \rho^k_\beta(z)(\psi_{g_k}(v))$, o que conclui que $\psi_{g_k} \colon (V^k_\alpha, \rho^k_\alpha) \to (V^k_\beta, \rho^k_\beta)$ é isomorfismo de representações, mas essas representações foram escolhidas de forma a pertencerem a classes de isomorfismo distintas para $\alpha \neq \beta$, como são isomorfas então $\alpha = \beta$. $\square$

O Teorema a seguir não será provado. Conforme explicado nas notas de Ulrich Pennig [19], esse teorema é consequência do teorema 3.5 de [16], o teorema de Wedderburn-Artin.

Teorema 4.21. *Seja A um álgebra semi-simples e de dimensão finita. Então A possui finitas classes de isomorfismo de representações irredutíveis. Seja $(V_i, \rho_i)_{i\in I}$ uma família de representações irredutíveis de A com cada (V_i, ρ_i) pertencente a uma classe de isomorfismo e com uma representação para cada classe de isomorfismo (em particular I é finito). Então*

$$A \cong \bigoplus_{i\in I} \bigoplus_{j=1}^{\dim V_i} V_i,$$

como representações de A, em particular $\dim A = \sum_{i\in I}(\dim V_i)^2$.

Este teorema nos permite verificar se uma família de representações irredutíveis não isomorfas é completa.

Lema 4.22. *A família de representações irredutíveis $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)_{1\leq k\leq n,\, \alpha\in A_k}$ é completa.*

Demonstração. Como G é grupo finito então Z_k também é finito, pelo corolário 4.12 segue que $\mathbb{C}Z_k$ é álgebra semi-simples. Também mostramos que $D(G)$ é álgebra semi-simples, então o teorema anterior se aplica a ambas álgebras. Aplicando o teorema a $\mathbb{C}Z_k$ temos que

$$\begin{aligned} |Z_k| &= \dim \mathbb{C}Z_k \\ &= \sum_{\alpha\in A_k} (\dim V_\alpha^k)^2, \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \dim D(G) &= \dim(\mathbb{C}G) \otimes (\mathbb{C}G)^* \\ &= |G|^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{1\leq k\leq n} \sum_{\alpha\in A_k} (\dim W_\alpha^k)^2 &= \sum_{1\leq k\leq n} \sum_{\alpha\in A_k} (|C_k| \dim V_\alpha^k)^2 \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} |C_k|^2 \sum_{\alpha\in A_k} (\dim V_\alpha^k)^2 \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} |C_k|^2 |Z_k| \\ &= \sum_{1\leq k\leq n} |C_k||G| \\ &= |G| \sum_{1\leq k\leq n} |C_k| \\ &= |G|^2, \end{aligned}$$

logo $\dim D(G) = \sum_{1\leq k\leq n} \sum_{\alpha\in A_k} (\dim W_\alpha^k)^2$, então não pode haver alguma representação irredutível de $D(G)$ que não seja isomorfa a alguma representação $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$. $\square$

Lema 4.23 (Lema de Schur). *Seja* $T\colon (W_\alpha^k, \pi_\alpha^k) \to (W_\beta^l, \pi_\beta^l)$ *um intertwiner, então* $T \equiv 0$ *se* $(k,\alpha) \neq (l,\beta)$ *e* $T = \lambda \mathrm{id}$ *para algum* $\lambda \in \mathbb{C}$ *se* $(k,\alpha) = (l,\beta)$.

Demonstração. Como T é intertwiner então $\ker T \subseteq W_\alpha^k$ e $\operatorname{Im} T \subseteq W_\beta^l$ são subespaços invariantes, com respeito às respectivas representações. De fato, dado $a \in D(G)$ e $z \in kerT$ temos que

$$\begin{aligned} T\pi_\alpha^k(a)(z) &= \pi_\beta^l(a)T(z) \\ &= \pi_\beta^l(a)(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $\pi_\alpha^k(a)(z) \in \ker T$. Também, para qualquer $w \in W_\alpha^k$ e $a \in D(G)$ temos que $\pi_\beta^l(a)T(w) = T\pi_\alpha^k(a)(w)$, logo $\pi_\beta^l(a)T(w) \in \operatorname{Im} T$. Como as representações $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$ e (W_β^l, π_β^l) são irredutíveis então $\ker T = 0$ ou $\ker T = W_\alpha^k$ e também $\operatorname{Im} T = 0$ e $\operatorname{Im} T = W_\beta^l$, também $W_\alpha^k \neq 0$ e $W_\beta^l \neq 0$, então $\ker T = 0 \implies \operatorname{Im} T \neq 0 \implies \operatorname{Im} T = W_\beta^l$, da mesma forma $\ker T = W_\alpha^k \implies \operatorname{Im} T = 0$. Se $(k,\alpha) \neq (l,\beta)$ então as representações não são isomorfas, logo devemos ter $\operatorname{Im} T = 0$, assim $T \equiv 0$. Se $(k,\alpha) = (l,\beta)$ não temos essa restrição, podendo T ser um isomorfismo ou ser nulo. Suponhamos que T seja um isomorfismo, T é um operador entre $\mathbb{C}$-espaços vetoriais de dimensão finita não nulos e a equação característica $\det(T - \lambda \mathrm{id}) = 0$ é uma equação polinomial de grau ≥ 1 com coeficientes em $\mathbb{C}$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra essa equação possui pelo menos uma solução $\lambda \in \mathbb{C}$, que é um autovetor de T. Seja $T' = T - \lambda \mathrm{id}$, este também é um intertwiner $T'\colon (W_\alpha^k, \pi_\alpha^k) \to (W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$, pois T é intertwiner, id também e combinação linear de intertwiners é intertwiner, então podemos aplicar os mesmos argumentos anteriores para T', como λ é autovalor de T então existe $w \in W_\alpha^k$, $w \neq 0$, tal que $T(w) = \lambda w$, logo $T'(w) = 0$ e $\ker T' \neq 0$, pelos argumentos anteriores temos que $\ker T' = W_\alpha^k$ e $\operatorname{Im} T' = 0$, logo $T' \equiv 0$ e $T = \lambda \mathrm{id}$. Se não supomos que T é isomorfismo ainda assim temos $T = \lambda \mathrm{id}$ para $\lambda = 0$, logo, em todo caso, se $(k,\alpha) = (l,\beta)$ então existe um $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $T = \lambda \mathrm{id}$. □

Corolário 4.24. $\operatorname{Hom}((W_\alpha^k, \pi_\alpha^k), (W_\beta^l, \pi_\beta^l)) = 0$ *se* $(k,\alpha) \neq (l,\beta)$ *e* $\operatorname{End}(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k) = \mathbb{C}\mathrm{id}$.

Demonstração. A prova é imediata, basta notar que para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ o operador $\lambda \mathrm{id}$ é um intertwiner. □

Já sabemos que $\operatorname{Rep}(D(G))$ é categoria esférica braided $\mathbb{C}$-linear aditiva, os resultados anteriores nos permitem concluir que ela é também fusion. Se tomamos o conjunto representativo de objeto simples I como sendo $I = (W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)_{1 \leq k \leq n,\, \alpha \in \Lambda_k}$ então pelos resultados anteriores $\operatorname{Rep}(D(G))$ satisfaz a todos os axiomas de categoria fusion exceto um, que é o fato de o objeto unidade $\mathbb{1} = (\mathbb{C}, \varepsilon)$ não pertencer a I. Porém $(\mathbb{C}, \varepsilon)$ é representação irredutível e, portanto, é isomorfa a uma das representações $(W_\alpha^k, \pi_\alpha^k)$, na verdade podemos mostrar que é uma representação para $k = 1$. Isto, porém, não é uma grande dificuldade, podemos trocar essa representação por $(\mathbb{C}, \varepsilon)$ e todas as propriedades de categoria fusion que haviam sido provadas continuam sendo satisfeitas, e além disso passa a valer que $\mathbb{1} \in I$, o que conclui que $\operatorname{Rep}(D(G))$ é categoria fusion esférica braided. Isto é consequência do lema 3.21.

Capítulo 5

Conclusão

Nos capítulos anteriores foram desenvolvidos alguns aspectos gerais de categorias fusion esféricas e foi dado um exemplo de tal categoria, que é a categoria de representações de uma álgebra de Hopf, também foi estudado com mais detalhe essa categoria para o caso em que a álgebra de Hopf é o Quantum Double de um grupo finito G. Isto fornece um exemplo de categoria utilizada na construção de Turaev-Viro de uma TQFT tridimensional. Conforme [12] o modelo de *string-net* é equivalente ao invariante de Turaev-Viro, este invariante é dado pela TQFT de Turaev-Viro.

Porém o modelo de *string-net*, apesar de bastante geral, não abrange todos modelos teóricos de ordem topológica conhecidos, logo não é suficiente para uma classificação de modelos com ordem topológica. É necessário, portanto, utilizar outros métodos para buscar uma classificação dos modelos com ordem topológica, uma proposta para isto é utilizar uma *Homotopical Quantum Field Theory*, que é uma generalização de TQFT, para obter uma classe maior de modelos.

Capítulo 6

Apêndice: Módulos, Bimódulos e Produto Tensorial

Aqui será tratado o caso de módulos sobre anéis que não precisam ser comutativos. Neste caso é importante fazer distinção entre módulos à direita e módulos à esquerda. Nesta dissertação módulos sobre aneis não-comutativos e bimódulos somente são importantes no capítulo 4. Este apêndice é baseado no livro [10] do Jacobson e nas notas [4] e [5] de Keith Conrad, porém é em grande parte fruto de poucas discussões com o colega Daniel E. N. Kawai.

Seja R um anel com unidade, a definição de R-módulo à esquerda é a mesma definição 2.4, e para R-módulo à direita a definição é semelhante, com a diferença de o produto por escalar ser à direita. No que diz respeito ao produto tensorial de dois módulos, devido a R poder ser não-comutativo convém que um deles seja R-módulo à direita e o outro um R-módulo à esquerda. Um motivo para isso é o seguinte, digamos que queiramos definir o produto tensorial de dois R-módulos à esquerda M e N, seguindo as mesma ideias do caso comutativo isso seria um par $(M \otimes N, \otimes)$ em que $\otimes\colon M \times N \to M \otimes N$ é um mapa R-bilinear, então deve valer, para quaisquer $r, s \in R$ e quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, que $(rm) \otimes (sn) = r(m \otimes (sn)) = rs(m \otimes n)$ e também que $(rm) \otimes (sn) = s((rm) \otimes n) = sr(m \otimes n)$, logo $(rs - sr)(m \otimes n) = 0$, porém se R não é comutativo então podemos ter $rs - sr \neq 0$, de forma que a equação $(rs - sr)(m \otimes n) = 0$ poder ser não trivial, mas não queremos isto. Isto ocorreu porque tanto o r como o s podem ser passados para a esquerda de $m \otimes n$ pela propriedade de bilinearidade, para que isto não ocorra fazemos a troca de mapas bilineares por produtos balanceados.

Definição 6.1. Seja R um anel com unidade, M um R-módulo à direita, N um R-módulo à esquerda e $(A, +, 0)$ um grupo abeliano. Um produto R-balanceado é um mapa $\varphi\colon M \times N \to A$ com as seguintes propriedades:

- $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$;
- $\varphi(x, y + y') = \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$;
- $\varphi(xr, y) = \varphi(x, ry)$.

O produto tensorial é então definido em termos de um grupo abeliano e um produto balanceado.

Definição 6.2. Sejam R um anel com unidade, M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda. O produto tensorial de M por N é um par (A, φ) em que $(A, +, 0)$ é um grupo abeliano e $\varphi\colon M \times N \to A$ é um produto R-balanceado, satisfazendo à seguinte propriedade universal: dado um par (A', φ'), em que A' é um grupo abeliano e $\varphi'\colon M \times N \to A'$ é um produto R-balanceado, existe um único homomorfismo de grupos $u\colon A \to A'$ tal que $u \circ \varphi = \varphi'$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & A \arrow[d, dashed, "u"] \\ & A' \end{tikzcd}$$

Essa definição deveria ser equivalente à definição que foi dada para anéis comutativos, porém neste caso o (A, φ) é formado por um grupo abeliano e um produto balanceado, enquanto que para anéis comutativos tínhamos definido o produto tensorial como um par formado por um R-módulo e um mapa bilinear. Ocorre que se R é anel comutativo com unidade então M e N são R-bimódulos, dessa forma podemos utilizar a propriedade universal de módulos, para anéis que não precisam ser comutativos, para dar ao grupo abeliano $M \otimes N$ uma estrutura de R-módulo de forma que $\otimes\colon M \times N \to M \otimes N$ é mapa R-bilinear e é satisfeita a propriedade universal do produto tensorial para anéis comutativos. Os detalhes dessa construção serão feitos adiante.

Como para qualquer propriedade universal, o produto tensorial de módulos é único a menos de isomorfismo. A prova disto derá omitida pois é muito semelhante à prova feita no caso de aneis comutativos. Porém é necessário provar que ele sempre existe.

Teorema 6.3. *Seja R um anel com unidade, M um R-módulo à direita e N um R-módulo à esquerda, então existe um produto tensorial $(M \otimes N, \otimes)$ de M e N.*

Demonstração. Tomamos $M \otimes N$ como sendo o grupo abeliano $F(M \times N)/D$ em que $F(M \times N)$ é o grupo abeliano livre sobre o conjunto $M \times N$ e D é o subgrupo de $F(M \times N)$ gerado pelos elementos da forma

- $(m + m', n) - (m, n) - (m', n)$;
- $(m, n + n') - (m, n) - (m, n')$;
- $(m \cdot r, n) - (m, r \cdot n)$;

em que $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $r \in R$ são elementos arbitrários. Essa escolha de D é justamente para obtermos um mapa R-balanceado, que é o mapa $\otimes\colon M \times N \to M \otimes N$ dado pela composição da "inclusão" $i\colon M \times N \to F(M \times N)$, dada por $i(m, n) = (m, n)$, com a projeção canônica $\pi\colon F(M \times N) \to F(M \times N)/D$. Segue que $(M \otimes N, \otimes)$ é um par que satisfaz à propriedade universal do produto tensorial. Provemos isto, seja então (A, φ) um par em que A é um grupo abeliano e $\varphi\colon M \times N \to A$ é um mapa R-balanceado. Como $F(M \times N)$ é livre, o mapa φ se fatora unicamente por um homomorfismo $q\colon F(M \times N) \to A$ tal que $q \circ i = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\varphi"'] & F(M \times N) \arrow[d, dashed, "q"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Suponha que exista um homomorfismo $u\colon M \otimes N \to A$ tal que $u \circ \otimes = \varphi$, então $u \circ \pi \circ i = q \circ i$, como $\operatorname{Im} i$ gera $F(M \times N)$ então segue que $u \circ \pi = q$, também π é sobrejetor, logo se tal u existe ele é único. Para que a equação $u \circ \pi = q$ defina um homomorfismo $u\colon M \otimes N \to A$ basta ter que $\ker \pi \subseteq \ker q$, mas $\ker \pi = D$, então basta que os três tipos de elementos que geram D pertençam também a $\ker q$. Para o primeiro tipo, temos que

$$\begin{aligned} q((x+x',y)-(x,y)-(x',y)) &= q(x+x',y)-q(x,y)-q(x',y) \\ &= qi(x+x',y)-qi(x,y)-qi(x',y) \\ &= \varphi(x+x',y)-\varphi(x,y)-\varphi(x',y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

de onde $(x+x',y)-(x,y)-(x',y) \in \ker \varphi$, semelhantemente podemos mostrar que $(x,y+y')-(x,y)-(x,y') \in \ker \varphi$, e para o terceiro tipo

$$\begin{aligned} q((xr,y)-(x,ry)) &= qi(xr,y)-qi(x,ry) \\ &= \varphi(xr,y)-\varphi(x,ry) \\ &= 0, \end{aligned}$$

logo $(xr,y)-(x,ry) \in \ker \varphi$. Isso conclui que existe único homomorfismo $u\colon M \otimes N \to A$ tal que $u \circ \otimes = \varphi$. $\square$

Algumas Propriedades

Anteriormente foram provadas diversas propriedades no caso de aneis comutativos. Algumas dessas propriedades serão provadas novamente no contexto mais geral de aneis que não precisam ser comutativos, com as devidas adaptações. Note que as provas a seguir são muito semelhantes às já feitas no caso de aneis comutativos.

Teorema 6.4. *(O produto tensorial é gerado pelos tensores elementares) Sejam X um R-módulo à direita, Y um R-módulo à esquerda e $(X \otimes Y, \otimes)$ um produto tensorial deles. Então $\operatorname{Im} \otimes$, o conjunto dos tensores elementares de $X \otimes Y$, gera $X \otimes Y$.*

Demonstração. $X \otimes Y$ é gerado pelos tensores elementares se $\langle \operatorname{Im} \otimes \rangle = X \otimes Y$, ou equivalentemenete $X \otimes Y / \langle \operatorname{Im} \otimes \rangle = \{0\}$. Considere a projeção canônica $\pi\colon X \otimes Y \to X \otimes Y / \langle \operatorname{Im} \otimes \rangle$, como π é homorfismo e $\otimes$ é R-balanceado então $\pi \circ \otimes$ é R-balanceado, considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\pi\circ\otimes"'] & X \otimes Y \arrow[d, shift right, "\pi"'] \arrow[d, shift left, "0"] \\ & X \otimes Y / \langle \operatorname{Im} \otimes \rangle \end{tikzcd}$$

pela definição de π é imediato que $\pi \circ \otimes(x,y) = 0$, logo o homomorfismo $0\colon X \otimes Y \to X \otimes Y / \langle \operatorname{Im} \otimes \rangle$ faz o triângulo comutar, ou seja, $0 \circ \otimes = \pi \circ \otimes$, por outro lado π também faz esse triângulo comutar, trivialmente, então pela propriedade universal do produto tensorial tal homomorfismo é único, portanto $\pi = 0$, ou seja, $X \otimes Y = \langle \operatorname{Im} \otimes \rangle$. $\square$

Teorema 6.5 (Unitalidade)**.** *Dado um R-módulo à esquerda X, existe um único isomorfismo de grupo abeliano $l_X\colon R \otimes X \to X$ tal que $l_X(1 \otimes x) = x$. Também, dado um R-módulo à direita X, existe um único isomorfismo de grupo abeliano $r_X\colon X \otimes R \to X$ tal que $r_X(x \otimes 1) = x$.*

Demonstração. Será demonstrada somente a existência e unicidade de l_X, para r_X é análogo. Considere o mapa $\mu\colon R \times X \to X$ dado pelo produto por escalar, ou seja, $\mu(r, x) = rx$. Este mapa é R-balanceado, então pela propriedade universal do produto tensorial $!\exists l_X\colon R \otimes X \to X$ homomorfismo tal que $l_X \circ \otimes = \mu$,

$$\begin{tikzcd} R \times X \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\mu"'] & R \otimes X \arrow[d, dashed, "l_X"] \\ & X \end{tikzcd}$$

calculando em $(1, x) \in R \times X$ temos que $l_X(1 \otimes x) = x$. Resta mostrar que l_X é isomorfismo, para isto considere o homomorfismo $l'\colon X \to R \otimes X$ dado por $l'(x) = 1 \otimes x$, é imediato que $l' \circ l_X = \mathrm{id}$, por outro lado $l_X \circ l'(1 \otimes x) = 1 \otimes x$. Note que todo elemento de $R \otimes X$ pode ser escrito na forma $1 \otimes x$, isso se deve primeiramente ao fato de $R \otimes X$ ser gerado pelos tensores elementares, assim um elemento de $R \otimes X$ é da forma $z = \sum_{i=1}^{n} r_n \otimes x_n$, em que $n \geq 1$, $r_n \in R$ e $x_n \in X$, mas como $\otimes$ é R-balanceado então $z = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes r_n x_n = 1 \otimes (\sum_{i=1}^{n} r_n x_n)$. Portanto, $l_X \circ l' = \mathrm{id}$, o que conclui que $l' = l_X^{-1}$, ou seja, l_X é isomorfismo. $\square$

Teorema 6.6 (Distributividade)**.** *Seja $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de R-módulos à direita indexada por um conjunto A, que pode ser infinito, e seja Y um R-módulo à esquerda. Então $(\oplus_{\alpha \in A} X_\alpha) \otimes Y \cong \oplus_{\alpha \in A}(X_\alpha \otimes Y)$, como grupos abelianos. Seja $(X'_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de R-módulos à esquerda, e seja Y' um R-módulo à direita. Então $Y' \otimes (\oplus_{\alpha \in A} X'_\alpha) \cong \oplus_{\alpha \in A}(Y' \otimes X'_\alpha)$, como grupos abelianos.*

Demonstração. Por brevidade o conjunto A estará implícito na notação. Sejam $p_\alpha\colon \oplus_\beta X_\beta \to X_\alpha$ e $p'_\alpha\colon \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y) \to X_\alpha \otimes Y$ as projeções, dadas por $p_\alpha((x_\beta)_\beta) = x_\alpha$ e $p'_\alpha((x_\beta \otimes y_\beta)_\beta) = x_\alpha \otimes y_\alpha$, e sejam $q_\alpha\colon X_\alpha \to \oplus_\beta X_\beta$ e $q'_\alpha\colon X_\alpha \otimes Y \to \oplus_\beta(X_\beta \otimes Y)$ as "inclusões", dadas por $q_\alpha(x_\alpha) = (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta$ e $q'_\alpha(x_\alpha \otimes y) = (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y)_\beta$, em que é utilizado o abuso de notação $\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha$, que é $\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha = x_\alpha \in X_\alpha$ se $\alpha = \beta$ e $\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha = 0 \in X_\beta$ se $\alpha \neq \beta$.

Considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} (\oplus_\beta X_\beta) \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "p_\alpha \times \mathrm{id}"] & (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \arrow[d, dashed, "u_\alpha"] \\ X_\alpha \times Y \arrow[r, "\otimes"] & X_\alpha \otimes Y \end{tikzcd}$$

Como $\otimes\colon X_\alpha \times Y \to X_\alpha \otimes Y$ é R-balanceado e p_α e id são R-lineares, então a composta $\otimes(p_\alpha \times \mathrm{id})$ é R-balanceada, de fato, para $x \in \oplus_\beta X_\beta$, $y \in Y$ e $r \in R$,

$$\begin{aligned} \otimes(p_\alpha \times \mathrm{id})(xr, y) &= \otimes(p_\alpha(xr), y) \\ &= p_\alpha(xr) \otimes y \\ &= (p_\alpha(x)r) \otimes y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= p_\alpha(x) \otimes (ry) \\
&= \otimes(p_\alpha \times \mathrm{id})(x, ry),
\end{aligned}
$$

portanto, pela propriedade universal do produto tensorial $!\exists u_\alpha \colon (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \to X_\alpha \otimes Y$ homomorfismo de grupo abeliano que faz esse diagrama comutar. Compondo com q'_α temos um homomorfismo $q'_\alpha u_\alpha \colon (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \to \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y)$, não é de se esperar que este seja um isomorfismo, uma possibilidade seria somar todos esses mapas, mas A pode ser um conjunto infinito e não temos aqui uma noção de soma de infinitos elementos. Portanto, só faz sentido fazer tal soma se ela sempre resulta em uma soma finita, o que de fato ocorre. Um elemento $z \in (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$ é da forma $z = \sum_{i=1}^n (x_{i,\beta})_\beta \otimes y_i$, $n \geq 1$, então

$$
\begin{aligned}
u_\alpha(z) &= u_\alpha \left(\sum_{i=1}^n (x_{i,\beta})_\beta \otimes y_i \right) \\
&= \sum_{i=1}^n u_\alpha((x_{i,\beta})_\beta \otimes y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n u_\alpha \otimes ((x_{i,\beta})_\beta, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \otimes(p_\alpha \times \mathrm{id})((x_{i,\beta})_\beta, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \otimes(x_{i,\alpha}, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^n x_{i,\alpha} \otimes y_i,
\end{aligned}
$$

mas, pela definição de soma direta, para cada i há finitos β's tais que $x_{i,\beta} \neq 0$, porém os i's são finitos, logo há finitos índices (i, β) tais que $x_{i,\beta} \neq 0$, portanto, $u_\alpha(z) \neq 0$ para finitos α's e então $\sum_\alpha q'_\alpha u_\alpha(z)$ é uma soma finita para qualquer $z \in (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$. Isto permite definir o homomorfismo de grupo abeliano $f := \sum_\alpha q'_\alpha u_\alpha \colon (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y \to \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y)$, provemos que este é um isomorfismo.

Para obter a inversa de f, considere agora o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
X_\alpha \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "q_\alpha \times \mathrm{id}"] & X_\alpha \otimes Y \arrow[d, dashed, "v_\alpha"] \\
(\oplus_\beta X_\beta) \times Y \arrow[r, "\otimes"] & (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y
\end{tikzcd}
$$

Como $\otimes$ é R-balanceado e q_α e id são R-lineares, então $\otimes(q_\alpha \times \mathrm{id})$ é R-balanceado, logo pela propriedade universal do produto tensorial $!\exists v_\alpha \colon X_\alpha \otimes Y \to (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$ homomorfismo que faz esse diagrama comutar. Podemos então construir o homomorfismo $g \colon \oplus_\beta (X_\beta \otimes Y) \to (\oplus_\beta X_\beta) \otimes Y$, dado por $g((z_\beta)_\beta) = \sum_\beta v_\beta(z_\beta)$, este mapa é a inversa de f. Antes de mostrar isso, calculemos f e g sobre geradores de seus domínios. Temos que

$$
f((x_\alpha)_\alpha \otimes y) = \sum_\beta q'_\beta u_\beta((x_\alpha)_\alpha \otimes y)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_\beta q'_\beta u_\beta \otimes ((x_\alpha)_\alpha, y) \\
&= \sum_\beta q'_\beta \otimes (p_\beta \times \mathrm{id})((x_\alpha)_\alpha, y) \\
&= \sum_\beta q'_\beta \otimes (x_\beta, y) \\
&= \sum_\beta q'_\beta (x_\beta \otimes y) \\
&= (x_\beta \otimes y)_\beta \\
&= (x_\alpha \otimes y)_\alpha
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
g((x_\alpha \otimes y_\alpha)_\alpha) &= \sum_\alpha v_\alpha (x_\alpha \otimes y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha v_\alpha \otimes (x_\alpha, y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \otimes (q_\alpha \times \mathrm{id})(x_\alpha, y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha \otimes ((\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta, y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta x_\alpha})_\beta \otimes y_\alpha.
\end{aligned}
$$

Com isto, temos então que

$$
\begin{aligned}
gf((x_\alpha)_\alpha \otimes y) &= g((x_\alpha \otimes y)_\alpha) \\
&= \sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y \\
&= (\sum_\alpha \delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y \\
&= (x_\beta)_\beta \otimes y \\
&= (x_\alpha)_\alpha \otimes y,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
fg((x_\alpha \otimes y_\alpha)_\alpha) &= f\left(\sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y_\alpha\right) \\
&= \sum_\alpha f((\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha)_\beta \otimes y_\alpha) \\
&= \sum_\alpha (\delta_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\alpha)_\beta \\
&= \left(\sum_\alpha \delta_{\alpha,\beta} x_\alpha \otimes y_\alpha\right)_\beta
\end{aligned}
$$

$$= (x_\beta \otimes y_\beta)_\beta$$
$$= (x_\alpha \otimes y_\alpha)_\alpha.$$

Como gf e fg agem como identidade sobre elementos que geram seus domínios, então $gf = \mathrm{id}$ e $fg = \mathrm{id}$, isto conclui que $g = f^{-1}$, de onde temos que $(\oplus_{\alpha\in A} X_\alpha) \otimes Y \cong \oplus_{\alpha\in A}(X_\alpha \otimes Y)$, como grupos abelianos.

Agora se $(X'_\alpha)_{\alpha\in A}$ é família de R-módulos à esquerda e Y' é um R-módulo à direita, podemos de forma análoga provar que $Y' \otimes (\oplus_{\alpha\in A} X'_\alpha) \cong \oplus_{\alpha\in A}(Y' \otimes X'_\alpha)$. $\square$

6.1 Produto tensorial de bimódulos

Definição 6.7. Sejam R e S anéis com unidade. Um R-S-bimódulo é um grupo abeliano $(X, +, 0)$ que é um R-módulo à esquerda, um S-módulo à direita e os produtos à esquerda e à direita são compatíveis, no sentido de que $(r \cdot x) \cdot s = r \cdot (x \cdot s)$, para quaisquer $x \in X$, $r \in R$ e $s \in S$. Indicamos que X é um R-S-bimódulo pela notação ${}_RX_S$. Dados bimódulos ${}_RX_S$ e ${}_RY_S$, um homomorfismo de R-S-bimódulos $f\colon X \to Y$ é um mapa tal que

- $f(x + x') = f(x) + f(x'), \forall x, x' \in X$;
- $f(rxs) = rf(x)s, \forall x \in X, r \in R$ e $s \in S$.

Como um $\mathbb{Z}$-módulo à esquerda ou à direita é simplesmente um grupo abeliano, podemos entender um R-módulo à esquerda como um R-$\mathbb{Z}$-bimódulo e um R-módulo à direita como um $\mathbb{Z}$-R-bimódulo. A mesma definição anterior de produto tensorial se aplica a um par de bimódulos ${}_RX_S$ e ${}_SY_T$, em princípio isto seria um par $(X \otimes Y, \otimes)$ em que $X \otimes Y$ é um grupo abeliano $(X \otimes Y, +, 0)$ e $\otimes\colon X \times Y \to X \otimes Y$ é um produto S-balanceado. A seguir mostraremos que é possível dar mais estrutura ao produto tensorial, de forma que $X \otimes Y$ é um R-T-bimódulo e $\otimes\colon X \times Y \to X \otimes Y$ é um homomorfismo de R-T-bimódulos.

Por conveniência introduziremos a seguinte definição:

Definição 6.8. Um produto R-S-T-balanceado é um produto S-balanceado $\varphi\colon X \times Y \to B$, em que ${}_RX_S$, ${}_SY_T$ e ${}_RB_T$ são bimódulos e φ satisfaz à propriedade de que $\varphi(rx, yt) = r\varphi(x, y)t$, para quaisquer $x \in X$, $y \in Y$, $r \in R$ e $t \in T$.

Lema 6.9. *Sejam ${}_RX_S$ e ${}_SY_T$ bimódulos e $(X \otimes Y, \otimes)$ um produto tensorial desses bimódulos, então $X \otimes Y$ é um R-T-bimódulo com produtos à esquerda e à direita dados por $(rx) \otimes (yt) = r(x \otimes y)t$, $\otimes\colon X \times Y \to X \otimes Y$ é um produto R-S-T-balanceado e $(X \otimes Y, \otimes)$ satisfaz à seguinte propriedade universal: dado um par (B, φ) em que ${}_RB_T$ é um bimódulo e $\varphi\colon X \times Y \to B$ é um produto R-S-T-balanceado, $!\exists u\colon X \otimes Y \to B$ homomorfismo de R-T-bimódulos tal que $u \circ \otimes = \varphi$.*

$$\begin{tikzcd}
X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "\varphi"'] & X \otimes Y \arrow[d, dashed, "u"] \\
& B
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Precisamos definir em $X \otimes Y$ produtos à esquerda e à direita, tornado-o um R-T-bimódulo. Isto é feito a partir da propriedade universal do produto tensorial. Dados $r \in R$ e $t \in T$, considere o produto S-balanceado

$$\begin{aligned} \varphi_{r,t} \colon X \times Y &\longrightarrow X \otimes Y \\ (x, y) &\longmapsto (rx) \otimes (yt) \end{aligned}$$

pela propriedade universal do produto tensorial existe um único homomorfismo de grupos $\bar{\varphi}_{r,t} \colon X \otimes Y \to X \otimes Y$ tal que $\bar{\varphi}(x \otimes y) = (rx) \otimes (yt)$. Isso define os produtos à esquerda e à direita, mais precisamente definimos

$$\begin{aligned} R \times (X \otimes Y) &\longrightarrow X \otimes Y \\ (r, z) &\longmapsto r \cdot z = \bar{\varphi}_{r,1}(z) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (X \otimes Y) \times T &\longrightarrow X \otimes Y \\ (z, t) &\longmapsto z \cdot t = \bar{\varphi}_{1,t}(z) \end{aligned}$$

Precisamos verificar que são satisfeitos os axiomas de R-T-bimódulo. Como $\bar{\varphi}_{r,1}$ é R-linear então

$$\begin{aligned} r \cdot (z + z') &= \bar{\varphi}_{r,1}(z + z') \\ &= \bar{\varphi}_{r,1}(z) + \bar{\varphi}_{r,1}(z') \\ &= r \cdot z + r \cdot z', \end{aligned}$$

também, como $\varphi_{1,1} = \otimes$ então $\bar{\varphi}_{1,1} = \mathrm{id}$, logo $1 \cdot z = z$. Agora, dados $r, r' \in R$, $x \in X$ e $y \in Y$, temos que

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{r+r',1}(x \otimes y) &= ((r + r')x) \otimes y \\ &= (rx + r'x) \otimes y \\ &= (rx) \otimes y + (r'x) \otimes y \\ &= (\bar{\varphi}_{r,1} + \bar{\varphi}_{r',1})(x \otimes y), \end{aligned}$$

como a igualdade vale para qualquer tensor elementar $x \otimes y$ então $\bar{\varphi}_{r+r',1} = \bar{\varphi}_{r,1} + \bar{\varphi}_{r',1}$, logo, para qualquer $z \in X \otimes Y$,

$$(r + r') \cdot z = rz + r'z.$$

Também temos que

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{rr',1}(x \otimes y) &= ((rr')x) \otimes y \\ &= \bar{\varphi}_{r,1}((rx) \otimes y) \\ &= \bar{\varphi}_{r,1}\bar{\varphi}_{r',1}(x \otimes y), \end{aligned}$$

logo $\bar{\varphi}_{rr',1} = \bar{\varphi}_{r,1}\bar{\varphi}_{r',1}$ e, portanto, para qualquer $z \in X \otimes Y$,

$$(rr')z = r(r'z).$$

Isso conclui que $X \otimes Y$ é R-módulo à esquerda, de forma análoga podemos mostrar que $X \otimes Y$ é T-módulo à direita, e como $(r(x \otimes y))t = (rx) \otimes (yt) = r((x \otimes y)t)$, então $\bar{\varphi}_{r,t} = \bar{\varphi}_{r,1}\bar{\varphi}_{1,t} = \bar{\varphi}_{1,t}\bar{\varphi}_{r,1}$ e assim $(rz)t = r(zt)$, para qualquer $z \in X \otimes Y$. Isso conclui que $X \otimes Y$ é R-T-bimódulo. Pelas definições dos produtos em $X \otimes Y$ é imediato que $(rx) \otimes (yt) = r(x \otimes y)t$, de forma que $\otimes \colon X \times Y \to X \otimes Y$ é produto R-S-T-balanceado.

Por fim, verifiquemos que vale a propriedade universal. Seja $(B, p) \colon X \times Y \to B$ um produto R-S-T-balanceado, em particular é um produto S-balanceado, então pela propriedade universal do produto tensorial existe um único homomorfismo de grupos $u \colon X \otimes Y \to B$ tal que $u \circ \otimes = p$.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "p"'] & X \otimes Y \arrow[d, dashed, "u"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Devemos mostrar que u é homomorfismo de R-T-bimódulos. Temos que

$$\begin{aligned} u(r(x \otimes y)t) &= u((rx) \otimes (yt)) \\ &= u \otimes (rx, yt) \\ &= p(rx, yt) \\ &= rp(x, y)t \\ &= ru(x \otimes y)t, \end{aligned}$$

como a igualdade vale para qualquer tensor elementar $x \otimes y$, então para qualquer $z \in X \otimes Y$ temos que $u(rzt) = ru(z)t$, logo u é homomorfismo de R-T-bimódulos. Que o homomorfismo de bimódulos (não somente de grupos) u é único, isso é imediato, pois em particular ele é homomorfismo de grupos e este é único pela propriedade universal do produto tensorial. $\square$

Deste lema podemos recuperar a definição do produto tensorial no caso de aneis comutativos, notando que se R é anel comutativo então qualquer R-módulo à esquerda ${}_RX$ pode ser entendido como um R-R-bimódulo em que o produto à direta $X \times R \to R$ é dado por $x \cdot r := r \cdot x$, e semelhantemente R-módulos à direita podem ser entendidos como R-R-bimódulos.

6.1.1 Produto Tensorial de Homomorfismos de Bimódulos

Sejam $f \colon {}_RX_S \to {}_RX'_S$ e $g \colon {}_SY_T \to {}_SY'_T$ homomorfismos de bimódulos, temos então o mapa $f \times g \colon X \times Y \to X' \times Y'$ dado por $f \times g(x, y) = (f(x), g(y))$, agora considere o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f \times g"'] & X \otimes Y \\ X' \times Y' \arrow[r, "\otimes"] & X' \otimes Y' \end{tikzcd}$$

como a composta $\otimes(f \times g)$ é um produto R-S-T-balanceado, então existe um único homomorfismo de R-T-bimódulos $f \otimes g \colon X \otimes Y \to X' \otimes Y'$ tal que $(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$, o mapa $f \otimes g$ é o produto tensorial dos homomorfismos de bimódulos f e g.

$$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "f\times g"'] & X \otimes Y \arrow[d, dashed, "f\otimes g"] \\ X' \times Y' \arrow[r, "\otimes"] & X' \otimes Y' \end{tikzcd}$$

6.1.2 O funtor produto tensorial

Como feito no caso de aneis comutativos, podemos definir um funtor $\otimes$. Para R um anel comutativo, o funtor era da forma $\otimes \times \mathrm{Mod}_R \times \mathrm{Mod}_R \to \mathrm{Mod}_R$, em que Mod_R é a categoria de R-módulos. Não se fazia distinção entre R-módulos à direita ou à esquerda, pois, como vimos anteriormente, ambos podem ser entendidos como R-R-bimódulos em que os produtos à esquerda e à direita são equivalentes, no sentido de que $r \cdot x = x \cdot r$. Para aneis com unidade que podem não ser comutativos, o produto tensorial é definido tomando um módulo à direita e um módulo à esquerda, de forma mais geral se temos bimódulos ${}_RX_S$ e ${}_SY_T$ então o produto tensorial resulta em um bimódulo R-T-bimódulo $X \otimes Y$, logo devemos ter um funtor $\otimes\colon {}_R\mathrm{Mod}_S \times {}_S\mathrm{Mod}_T \to {}_R\mathrm{Mod}_T$, em que ${}_R\mathrm{Mod}_S$ é a categoria de R-S-bimódulos e homomorfismos de R-S-bimódulos.

Como no caso de aneis comutativos, o produto tensorial de bimódulos é único a menos de isomorfismo, para definir o funtor $\otimes\colon {}_R\mathrm{Mod}_S \times {}_S\mathrm{Mod}_T \to {}_R\mathrm{Mod}_T$ devemos então fixar um produto tensorial para cada par de bimódulos. Como antes, adotamos a notação $\otimes(X, Y) = X \otimes Y$ e $\otimes(f, g) = f \otimes g$, para bimódulos X e Y e homomorfismos f e g. A mesma demonstração feita no caso de aneis comutativos, com pequenas adaptações, mostra que temos realmente um funtor, de forma que valem as seguintes propriedades:

- $(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = (f' \circ f) \otimes (g' \circ g)$, para quaisquer homomorfismos $f\colon X \to X'$, $f'\colon X' \to X''$, $g\colon Y \to Y'$, $g'\colon Y' \to Y''$, e bimódulos X, X', Y, Y';

- $\mathrm{id}_{X\otimes Y} = \mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_Y$, para quaisquer bimódulos X e Y.

Mostramos anteriormente que, para R anel comutativo com unidade, Mod_R é categoria monoidal, em que o produto monoidal é o produto tensorial. Para a categoria ${}_R\mathrm{Mod}_S$ com R e S aneis distintos não faz sentido esperar que esta seja uma categoria monoidal. Ocorre que podemos organizar as categorias ${}_R\mathrm{Mod}_S$ em uma bicategoria cujos objetos são aneis com unidade (R, S, etc.) e cujos 1-morfismos (entre dois objetos) são as categorias ${}_R\mathrm{Mod}_S\colon R \to S$, dessa forma podemos entender $\otimes\colon {}_R\mathrm{Mod}_S \times {}_S\mathrm{Mod}_T \to {}_R\mathrm{Mod}_T$ como uma operação de composição nessa bicategoria.

Referências bibliográficas

[1] S. Awodey. *Category Theory*. Oxford University Press, 2006.

[2] B. Balsam and A. K. Jr. Kitaev's lattice model and turaev-viro tqfts, 2012.

[3] O. Buerschaper and M. Aguado. Mapping kitaev's quantum double lattice models to levin and wen's string-net models. *Physical Review B*, 80(15), Oct 2009.

[4] K. Conrad. Tensor products I. `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/tensorprod.pdf`. Acessado: 21-01-2010.

[5] K. Conrad. Tensor products II. `https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/linmultialg/tensorprod2.pdf`. Acessado: 21-01-2010.

[6] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, and S. Raianu. *Hopf Algebras: An introduction*. Marcel Dekker, 1st edition, 2001.

[7] P. Etingof, O. Golberg, S. Hensel, T. Liu, A. Schwendner, D. Vaintrob, and E. Yudovina. Introduction to representation theory, 2009.

[8] M. J. B. Ferreira, P. Padmanabhan, and P. Teotonio-Sobrinho. 2D Quantum Double Models From a 3D Perspective. *J. Phys.*, A47(37):375204, 2014.

[9] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory: A First Course*. Springer, 2004.

[10] N. Jacobson. *Basic Algebra II*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, USA, 2nd edition, 2009.

[11] J. P. I. Jimenez. Campos de gauge e matéria na rede - generalizando o toric code. *Dissertação de Mestrado*, 2015.

[12] A. K. Jr. String-net model of turaev-viro invariants, 2011.

[13] A. K. Jr. and B. Bakalov. Lectures on tensor categories and modular functors. `https://www.math.stonybrook.edu/~kirillov/tensor/tensor.html`. Acessado: 21-01-2010.

[14] C. Kassel. *Quantum Groups*. Springer, 1995.

[15] A. Yu. Kitaev. Fault tolerant quantum computation by anyons. *Annals Phys.*, 303:2–30, 2003.

[16] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer, 2001.

[17] M. A. Levin and X.-G. Wen. String-net condensation: a physical mechanism for topological phases. *Physical Review B*, 71(4), Jan 2005.

[18] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, 1971.

[19] U. Pennig. Modular tensor categories from quantum doubles of finite groups. `https://upennig.weebly.com/publications.html`. Acessado: 21-01-2010.

[20] P. Selinger. A survey of graphical languages for monoidal categories. *Lecture Notes in Physics*, page 289–355, 2010.

[21] V. Turaev and A. Virelizier. *Monoidal Categories and Topological Field Theory*. Birkhäuser, 2017.

[22] V. G. Turaev. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. De Gruyter, 2010.

[23] B. Zeng, X. Chen, D.-L. Zhou, and X.-G. Wen. Quantum information meets quantum matter – from quantum entanglement to topological phase in many-body systems, 2015.