



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
Instituto de Física

*Determinação da razão de ramificação e dos fatores de forma  
do decaimento semi-leptônico  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$*

**Edivaldo Moura Santos**

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: T4374

Tese apresentada ao Instituto de Física  
da Universidade de São Paulo para  
a obtenção do título de Doutor em  
Ciências.

Orientadora:

**Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal**

Comissão Examinadora:

**Profa. Dra. Ivone Freire Mota Albuquerque - IFUSP**

**Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal - IFUSP**

**Prof. Dr. Rogério Rosenfeld - IFT/UNESP**

**Prof. Dr. Ronald Cintra Shellard - CBPF**

**Prof. Dr. Sérgio Ferraz Novaes - IFT/UNESP**

SBI-IFUSP



305M810T4374

São Paulo  
2005

**Prof. Armando Corbani Ferraz**  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

*def. 24/08/05.*

539.72

S237d

D

Ex. 1

sysno 1468893

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Santos, Edivaldo Moura

Determinação da razão de ramificação e dos fatores de forma do decaimento semi-leptônico "K IND.L-> ""pi" POT.0" ""pi" POT.+/-" "e POT. -/+ "nü" . São Paulo 2005.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo  
Instituto de Física – Depto. de Física Matemática

Orientador: Profa. Dra. Renata Zukanovich Funchal  
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Física de partículas;
2. Física experimental;
3. Teoria de campos;

USP/IF/SBI-063/2005

## Agradecimentos

Ao final de qualquer tarefa, as dívidas em geral são muitas. E amiúde a tentativa de enumerar aqueles que merecem uma fatia do bolo incorre no deslize da omissão. Não obstante, o pecado se torna ainda mais grave se a alguns nomes, que não escapariam sequer à mente mais relapsa, não for permitido ao menos o direito à citação.

Agradeço a S.M. Bianchi pelo companheirismo e paciência. A M. Hase por manter sempre acesa em mim a chama do escárnio, das poucas fantasias originais nesses tempos em que as vestes da hipocrisia são trajadas com tanta naturalidade. As imensuráveis habilidades computacionais de P. Gouffon foram de fundamental importância na execução desse trabalho. A diplomacia de C.O. Escobar tornou possível o estágio no Fermilab e sua amizade é uma grande honra pra mim. Agradecimentos profundos a R. Zukanovich Funchal pela orientação e a R. Tschirhart pela proposição do tema. A W.J.C. Teves pela ajuda na preparação do texto. Por todo o apoio durante esses anos sou profundamente grato à minha família.

Meu sincero reconhecimento àqueles que tornaram a estadia nos EUA uma experiência assaz prazerosa: A. Jenkins, P. Perea, A. Evdokimov, N. Kouropatkine, P. Saria, R.A. Gomes e muitos outros. Pelas amizades preciosas agradeço a: W.J.C. Teves, O. Bokhonok, S.G. dos Santos, E. Z. Alvarenga, A. G. Medina, F.A. Souza, N. Yokomizo e M. F. Cornélio.

O trabalho aqui apresentado não teria sido possível sem o apoio financeiro da Fapesp e do Fermilab.



## RESUMO

Mediu-se a razão de ramificação do decaimento semi-leptônico  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$  ( $\text{BR}_{K_{e4}^0} = [5.19 \pm 0.09_{\text{estat}} \pm 0.13_{\text{sist}}] \times 10^{-5}$ ), baseado numa amostra de 4000 eventos sobre um fundo residual a ser subtraído de 143 (3.6%) eventos. Os dados foram coletados pelo experimento KTeV no Fermilab. A contaminação residual é compatível com  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  ou  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu \gamma$  na presença de um ou dois fótons acidentais, respectivamente. A contribuição dominante ao erro sistemático advém de uma discrepância observada entre dados/Monte Carlo com respeito à eficiência de detecção ao longo da direção do feixe de káons. O modo de normalização utilizado na medida da razão de ramificação foi  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ . Correções radiativas eletromagnéticas de ordem  $\alpha_{\text{QED}}$  foram incluídas no Monte Carlo de simulação, tendo a fração radiativa sido conferida por meio de um cálculo analítico, incluindo *bremstrahlung* interno e correções virtuais, das quais a correção de vértice fornece uma contribuição finita após o processo de renormalização. Por meio de um ajuste ao espectro reconstruído do decaimento, três dos fatores de forma que parametrizam o elemento de matriz hadrônica também foram medidos, cujos valores indicam uma violação da regra empírica  $\Delta I = 1/2$  de cerca de 2%. A dependência, em primeira ordem, de um dos fatores de forma com o momento transferido aos léptons  $q^2$  também foi obtida, possibilitando a resolução da ambiguidade quadrática entre  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  e a constante de acoplamento  $L_3$  em Teoria de Perturbação Quiral e permitindo uma medida direta dessa constante ( $L_3 = [-4.0 \pm 0.3] \times 10^{-3}$ ).



## ABSTRACT

We have measured the branching fraction of the  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$  decay ( $\text{BR}_{K_{e4}} = [5.19 \pm 0.09_{\text{stat}} \pm 0.13_{\text{syst}}] \times 10^{-5}$ ), based on a 4000 candidates sample over a residual background of 143 (3.6%) events. The data was collected by the KTeV experiment at Fermilab. The remaining contamination is consistent with  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu \gamma$  or  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  plus one or two accidental photons, respectively. The leading contribution to the systematic error comes from an observed discrepancy between data/Monte Carlo for the detection efficiency along the kaon beam direction. The  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  decay was used as normalization mode for the purpose of branching fraction measurement. Radiative corrections of order  $\alpha_{\text{QED}}$  were included into the Monte Carlo, the radiative fraction being crosschecked through an analytical calculation, which included internal bremsstrahlung and virtual corrections, of which the vertex correction gives a finite contribution after renormalization. Through a fit to the reconstructed decay spectrum, three form factors appearing in the parametrization of the hadronic matrix element were measured, whose values allow for a violation of the empirical  $\Delta I = 1/2$  rule of about 2%. We have also measured the first order dependence on the transferred momentum to the leptons of one of the form factors, solving the quadratic ambiguity between  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  and the low energy coupling constant  $L_3$  from Chiral Perturbation Theory, allowing for a direct measurement of this constant ( $L_3 = [-4.0 \pm 0.3] \times 10^{-3}$ ).





# Sumário

Introdução	1
<b>1 Teoria de perturbação quiral</b>	<b>7</b>
1.1 A lagrangeana da QCD e o grupo quiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$	7
1.2 Quebra espontânea da simetria quiral	11
1.3 A lagrangeana efetiva até ordem $E^4$ para o setor mesônico	12
1.3.1 Contagem de potências de Weinberg	13
1.3.2 Forma explícita de $\mathcal{L}_4$	14
1.4 Amplitude invariante do decaimento $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$	16
1.4.1 Um modelo fenomenológico	17
1.4.2 Previsões quirais para os fatores de forma	22
1.4.3 Dependência funcional de $\Gamma_{K_{e4}^0}$ com $L_3$	25
<b>2 Correções radiativas de ordem <math>\alpha_{\text{QED}}</math></b>	<b>27</b>
2.1 Correções virtuais	27
2.1.1 Auto-energia do elétron	28
2.1.2 Auto-energia do pión	29
2.1.3 Correção de vértice	30
2.2 Radiação de <i>bremstrahlung</i>	34
2.3 Cancelamento de divergências no infravermelho	36
2.4 Determinação da fração radiativa	38
<b>3 <math>K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu</math> no experimento KTeV</b>	<b>41</b>
3.1 O aparato experimental	41
3.1.1 A linha de feixe do experimento KTeV	42
3.1.2 O regenerador	45
3.1.3 O espectrômetro	45
3.1.4 O calorímetro de iodeto de célio (CsI)	49
3.1.5 Elementos dos sistemas de veto e de <i>trigger</i>	50
3.1.6 Contadores de múons e o HA (Hadron-Anti)	55
3.1.7 O <i>trigger</i> do KTeV	55
3.2 Aquisição e redução dos dados	57
3.3 Assinatura e contaminação esperadas	58

<b>4</b>	<b>O Monte Carlo de simulação</b>	<b>63</b>
4.1	Produção do feixe de káons e propagação até o ponto de decaimento . . . . .	63
4.2	Geração do decaimento . . . . .	66
4.2.1	O decaimento $K_{e4}^0$ no nível de árvore . . . . .	66
4.2.2	Implementação das correções radiativas . . . . .	67
4.2.3	O processo secundário $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	68
4.2.4	Geração do modo de normalização $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ . . . . .	69
4.3	Propagação dos produtos e simulação da resposta dos detectores . . . . .	71
4.3.1	DCs . . . . .	71
4.3.2	Calorímetro . . . . .	72
4.3.3	Hodoscópios de trigger e vetos de fótons . . . . .	72
4.3.4	Digitalização dos sinais . . . . .	72
4.4	Atividade acidental . . . . .	73
<b>5</b>	<b>Análise dos dados</b>	<b>75</b>
5.1	Separação da amostra inicial ( <i>crunch</i> ) . . . . .	75
5.2	Principais algoritmos de reconstrução . . . . .	76
5.2.1	Identificação de trajetórias e determinação do vértice carregado . . . . .	76
5.2.2	Reconstrução do pión neutro . . . . .	78
5.3	Critérios de seleção de $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ . . . . .	79
5.3.1	O <i>trigger</i> utilizado . . . . .	79
5.3.2	Identificação de partículas . . . . .	79
5.3.3	Cortes cinemáticos . . . . .	81
5.3.4	Melhora da qualidade da amostra . . . . .	85
5.3.5	Exigências sobre os elementos de veto . . . . .	85
5.3.6	Outros cortes . . . . .	86
5.4	Análise do modo de normalização $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ . . . . .	88
5.5	Contaminações piônica e muônica . . . . .	90
5.6	Subtração da contaminação residual final . . . . .	92
5.7	Determinação do erro sistemático na razão de ramificação . . . . .	95
5.7.1	Variação dos cortes de análise . . . . .	95
5.7.2	Eficiência absoluta para detecção de $\pi^0$ s . . . . .	96
5.7.3	Correções radiativas . . . . .	96
5.7.4	Outros . . . . .	97
5.8	Ajuste dos fatores de forma . . . . .	98
<b>6</b>	<b>Resultados finais</b>	<b>105</b>
	<b>Conclusões</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>111</b>
	<b>A Notação</b>	<b>115</b>

<b>B</b>	<b>Parametrização dos espaços de fase de <math>K_{e4}^0</math> e <math>K_{e4\gamma}^0</math></b>	<b>117</b>
B.1	$K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ . . . . .	117
B.2	$K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu \gamma$ . . . . .	119
B.3	Reconstruindo $K_{e4\gamma}^0$ a partir das variáveis cinemáticas . . . . .	120
<b>C</b>	<b>Realização não linear de uma simetria</b>	<b>123</b>
<b>D</b>	<b>O condensado escalar de quarks <math>\langle \bar{q}q \rangle</math> e a quebra espontânea da simetria quiral</b>	<b>127</b>
<b>E</b>	<b>Correções de 1-loop para os fatores de forma de <math>K_{e4}^0</math></b>	<b>129</b>



# Lista de Figuras

1	Diagrama de estranheza $S$ versus a terceira componente do isospin $I_3$ para o octeto mesônico pseudo-escalar observado experimentalmente, formado por píons, káons e eta, e interpretados como os bósons de Goldstone da teoria de perturbação quiral. . . . .	3
1.1	Esquema da geometria do decaimento $K_{e4}^0$ mostrando a orientação dos planos no espaço e os ângulos $\theta_\pi$ , $\theta_l$ e $\Phi$ . . . . .	20
2.1	Diagrama de Feynman para a auto-energia do elétron em $K_{e4}^0$ . . . . .	28
2.2	Diagrama de Feynman para a auto-energia do pión em $K_{e4}^0$ . . . . .	30
2.3	Diagrama de Feynman para a correção eletromagnética do vértice elétron-pión. . . . .	31
2.4	Diagramas de Feynman de ordem mais baixa para a emissão de radiação de <i>bremsstrahlung</i> em $K_{e4}^0$ . . . . .	35
2.5	Comparação entre o cálculo analítico e o pacote PHOTOS para a fração radiativa em $K_{e4}^0$ como função do limiar experimental para detecção de fótons. . . . .	39
3.1	Visão esquemática (superior) do experimento KTeV configurado para E832. O plano da figura é o $xz$ . . . . .	42
3.2	Visão do topo da linha de feixe do KTeV, apresentando o alvo de BeO, absorvedores, sistema de colimação, Mask Anti e o regenerador. Atenção para a diferença entre as escalas horizontal e vertical. . . . .	44
3.3	(a) Diagrama do regenerador. (b) Visão expandida da parte final do regenerador. PMTs não são mostradas. Os káons entram pela esquerda. As setas verticais acima do Pb e do cintilador indicam a extremidade efetiva de detecção para $K_L \rightarrow \pi^0\pi^0$ e $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$ , e suas larguras as respectivas incertezas. . . . .	46
3.4	Esquema dos fios sensíveis ( $\bullet$ ) e dos fios de campo ( $\circ$ ) que formam as células das câmaras de arrasto do KTeV. A distância de arrasto de 6.35 mm do arranjo é mostrada na figura. . . . .	47
3.5	Desvio da soma de distância das câmaras de arrasto (SOD) com relação ao tamanho nominal das células de 6.35 mm, medida para visão $y$ e usando uma amostra de $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$ . As setas indicam a exigência de $\pm 1$ mm para um bom par de pulsos. Os pontos são dados reais e o histograma representa a previsão do Monte Carlo. . . . .	48

- 3.6 Visão frontal do calorímetro de CsI do KTeV, mostrando os 868 cristais externos maiores e os 2232 cristais internos menores. Cada buraco de feixe tem  $(15 \times 15)$   $\text{cm}^2$  e seus centros estão separados por 0.3 m. . . . . 50
- 3.7 (a) Distribuição de  $E/p$  baseada em elétrons do decaimento  $K_L \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu$ , onde  $E$  é a energia medida no calorímetro e  $p$  é o momento medido no espectrômetro; (b) Resolução em energia do elétron em função do momento (pontos) obtida subtraindo-se a resolução da medida de momento, mostrada pela curva contínua, da resolução de  $E/p$ ; (c)  $E/p$  versus momento antes da correção de linearidade ser aplicada. . . . . 51
- 3.8 (a) Visão frontal do RC6, localizado no interior da região de vácuo. (b) SA4 visto de frente. Cada SA e CIA tinham dimensões diferentes (ver tabela 3.1) e número de módulos diferentes. . . . . 52
- 3.9 Visão frontal do Collar Anti (CA) localizado logo antes do calorímetro e envolvendo os buracos de feixe. As dimensões desse elemento de veto podem ser inferidas a partir do tamanho dos cristais menores do CsI que é  $2.5 \text{ cm} \times 2.5 \text{ cm}$ . 53
- 3.10 Configuração do BA. (a) A visão frontal a partir da linha de feixe. O BA encontra-se segmentado nas seções  $+x$  e  $-x$ . (b) Visão lateral do BA segmentado em três partes: BA1, BA2 e BA3. . . . . 53
- 3.11 Geometria dos planos dos hodoscópios VV'. As caixas pretas representam os buracos de feixe. . . . . 54
- 3.12 Divisão das tomadas de dados dos experimentos E832 e E799 de KTeV durante os anos de 1996, 1997 e 1999. . . . . 58
- 3.13 Assinatura esperada do decaimento  $K_{e4}^0$  no detector KTeV. A figura no topo mostra os clusters identificados pelo calorímetro, enquanto a figura na parte inferior mostra as trajetórias carregadas detectadas pelo espectrômetro. Note que o evento originou-se no feixe de vácuo. Os clusters associados a trajetórias são identificados por círculos concêntricos. Evento gerado por Monte Carlo. . . . 61
- 3.14 Visão tridimensional do detector KTeV configurado para o experimento E832. . . 62
- 4.1 Espectro de momento dos káons neutros segundo a parametrização de Malensek para as seções de choque de produção de káons carregados. As correções  $\xi(p)$  e  $\zeta(\theta)$  para sintonização com os dados de  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$  em 1997 já foram incluídas. O intervalo de integração em  $\theta$  é mostrado no gráfico e representa a janela angular definida pelo sistema de colimação. . . . . 65
- 4.2 Distribuição das variáveis cinemáticas de  $K_{e4}^0$ . Essas são grandezas geradas e não reconstruídas. . . . . 67
- 4.3 Contribuição individual dos fatores de forma  $f$  e  $g$  para a massa invariante dos píons em  $K_{e4}^0$ . . . . . 68
- 4.4 Espectro em energia do fóton irradiado por *bremsstrahlung* em  $K_{e4}^0$  por meio do pacote PHOTOS. Nenhum efeito do detector é incluído nesse gráfico. . . . . 69
- 4.5 Distribuição do ângulo entre o fóton de *bremsstrahlung* e o lépton carregado em  $K_{e4}^0$ . Nenhum efeito do detector é incluído nesse gráfico. . . . . 70

5.1	(a) distribuição de $E/p$ para o candidato a $e^\pm$ em $K_{e4}^0$ . (b) distribuição de $E/p$ para o candidato a $\pi^\pm$ em $K_{e4}^0$ . Os cortes são indicados pelas setas verticais. Nenhuma subtração de fundo residual foi realizada. . . . .	80
5.2	(a) $\chi_{shape}^2$ para o candidato a $e^\pm$ . (b) $\chi_{shape}^2$ para o candidato a $\pi^0$ . Os cortes de análise são leves e não aparecem na figura. . . . .	81
5.3	Comparação DADOS/MC da massa invariante reconstruída após cortes de análise do par de fótons relacionados ao decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Nenhuma subtração de fundo residual foi realizada. . . . .	82
5.4	(a) Massa visível $M_{\pi e\gamma\gamma}$ sem o corte $\Delta \geq 0$ . (b) Massa visível para eventos satisfazendo $\Delta \geq 0$ . A região de sinal encontra-se à esquerda da seta vertical. . .	83
5.5	Comparação DADOS/MC para o distribuição de momentos do káon quando se assume a solução de menor momento. . . . .	84
5.6	Esquerda: Figura esquemática mostrando o perfil temporal típico de um pulso nas DPMTs que lêem o sinal de carga a cada 19 ns durante um intervalo de 6 fatias temporais. Direita: Sobreposição das distribuições de $\chi_{time}^2$ para dados reais e de Monte Carlo para o modo $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ . . . . .	87
5.7	(a) Massa visível sem a exigência de que os <i>clusters</i> não associados a trajetórias sejam HCC, e sem corte em $\chi_{time}^2$ . (b) Massa visível para eventos com <i>clusters</i> não associados a trajetórias do tipo HCC. (c) Massa visível com corte $\chi_{time}^2 < 20$ para <i>clusters</i> não associados a trajetórias. . . . .	88
5.8	Topo: Sobreposição DADOS/MC para a razão $E/p$ de $e^\pm$ em $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ . Em baixo: Mesma variável para $\pi^\pm$ . . . . .	89
5.9	Comparação DADOS/MC para a distribuição do momento quadrado de um possível pión neutro ausente ao se assumir que o decaimento é $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ . .	91
5.10	Iluminação das trajetórias carregadas ao longo do eixo $y$ quando vistas pelas câmaras de arrasto DC1-DC4. Distribuições referentes ao modo de normalização.	92
5.11	Iluminação ao longo do eixo $x$ para os <i>clusters</i> do modo de normalização. . . . .	93
5.12	(a) Comparação DADOS/MC de $E/p$ para o candidato a elétron em $K_{e4}^0$ antes da contaminação piônica ser eliminada. (b) Comparação DADOS/MC de $E/p$ após contaminação piônica ser eliminada. . . . .	94
5.13	Massa invariante $M_{\pi^+\pi^-\gamma\gamma}$ da amostra de $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ obtida a partir dos dados. A contaminação residual é inferior a 0.1%. Na identificação de $K_{e4}^0$ , a região delimitada pelas setas é excluída. . . . .	95
5.14	Em cima: $E/p$ para o candidato a elétron em $K_{e4}^0$ . Em baixo: massa invariante do par de fótons mostrando o nível final do ruído intrínseco a ser subtraído. A região de sinal é delimitada pelas setas verticais. . . . .	96
5.15	Superposição de dados reais e do Monte Carlo para a distribuição da posição ao longo de $z$ do vértice carregado, tanto para $K_{e4}^0$ (esquerda) quanto para o modo de normalização $K_{e3}^0$ (direita). . . . .	98
5.16	Correlação entre as variáveis geradas por Monte Carlo e reconstruídas. As variáveis correspondem à solução de menor energia para o káon. . . . .	99
5.17	Curvas de nível de confiança a 90% e 99% para o ajuste dos fatores de forma $f_S/g$ , $f_P/g$ e $h/g$ . . . . .	101

- 5.18 Projeção de  $\ln \mathcal{L}$  com respeito a  $\lambda_g$ . Os demais fatores de forma estão fixados nos valores de *best fit* (ver tabela 6.1). A região a  $1\sigma$  está hachurada. . . . . 103
- 5.19 Sobreposição DADOS/MC para as cinco variáveis cinemáticas descrevendo o espectro de  $K_{e4}^0$ , utilizando-se os valores de *best-fit* obtidos para os fatores de forma. O histograma mais escuro representa a contaminação residual subtraída dos dados. . . . . 104
- 6.1 Medidas da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  até os dias de hoje, incluindo o valor obtido nessa análise, NA48[1], E731[2] e a primeira observação do decaimento em [3]. . . . . 105
- 6.2 Razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  como função da constante de baixa energia  $L_3^r$ , de acordo com a teoria de perturbação quiral. A região de  $1\sigma$  do valor de  $\tau_{K_L} \Gamma_{K_{e4}^0}$  obtido nessa análise é representada pelas linhas horizontais pontilhadas. A região da parábola representada é aquela compatível com o valor experimental de  $\lambda_g$ . . 106
- B.1 Visão esquemática da geometria de  $K_{e4\gamma}^0$ . . . . . 122



# Lista de Tabelas

1.1	Constantes de acoplamento em baixa energia renormalizadas $L_i^r$ , na escala $\mu = M_\rho$ e coeficientes $\Gamma_i$ para o <i>running</i> dos $L_i^r$ , de acordo com a referência [4]. O método de extração das constantes é indicado na coluna fonte. . . . .	25
3.1	Posições e dimensões dos vários elementos que compõem o detector do KTeV configurado para o E832. Unidades em metros. . . . .	43
4.1	Coefficientes da correção polinomial $\xi(p)$ à parametrização de Malensek do espectro de produção de káons neutros. . . . .	65
5.1	Exigências sobre as principais variáveis que constituem o sistema de veto para a análise de $K_{e4}^0$ . Todos os cortes são referentes à energia medida dentro da janela de tempo <i>in time</i> . . . . .	86
5.2	Número de eventos detectados, fundo residual subtraído e fluxos absolutos tanto para $K_{e4}^0$ quanto para o modo de normalização $K_{e3}^0$ . . . . .	94
5.3	Resumo das contribuições ao erro sistemático na razão de ramificação de $K_{e4}^0$ consideradas nessa análise. Os traços — indicam contribuição desprezível. Os valores são tomados como correspondendo a um desvio padrão. . . . .	102
6.1	Valores dos fatores de forma obtidos nessa análise e um resumo de resultados anteriores: NA48 2004 [1], E731 [2]. . . . .	107
A.1	Valores não nulos (a menos de permutações cíclicas) das constantes de estrutura totalmente anti-simétricas $f_{abc}$ de $SU(3)$ . . . . .	116



# Introdução

A formulação da Cromodinâmica Quântica (QCD) como a teoria de gauge das interações fortes[5, 6], mostra-se bastante apropriada para a descrição de processos no regime de médias e altas energias tais como: espalhamento inelástico profundo lépton-hádron, hadroprodução em aniquilação elétron-pósitron e produção de pares  $l^+l^-$  leptônicos em processos de Drell-Yan. O grupo de gauge  $SU(3)$ , no espaço de cores, da QCD é não-abeliano, enquadrando-a na classe de teorias de Yang-Mills[7]. Os campos de matéria são representados pelos quarks de spin 1/2, presentes em três cores diferentes, ao passo que os campos de gauge, quando quantizados, dão origem aos chamados glúons, em número de oito, correspondentes cada qual a um gerador do grupo de gauge  $SU(3)_C$ . A estrutura não-abeliana desse grupo implica no transporte de “cargas” de cor pelos próprios glúons, gerando interações entre esses na forma de vértices triplos e quárticos, os quais, por sua vez, tornam a teoria bem mais complexa que, por exemplo, a QED, construída a partir do grupo de gauge abeliano  $U(1)$ .

A propriedade de liberdade assintótica apresentada pela QCD, ou seja, o fato da constante de acoplamento forte diminuir à medida que o momento transferido aumenta, é de grande importância, no sentido de que propicia uma justificativa aproximada para o fenômeno de *scaling* de Bjorken e resultados de espalhamento inelástico profundo. No regime de altas energias é possível, dessa forma, realizar cálculos perturbativos, e a teoria mostra um poder notável de predição nessa região.

Não obstante, uma grande variedade de propriedades associadas a fenômenos ocorrendo no regime de baixas energias não são explicados pela QCD como, por exemplo: os valores das massas dos quarks, ou como os graus de liberdade representados pelos quarks e glúons da QCD dão origem à diversidade de estados hadrônicos observada experimentalmente. No intuito de suprir tal deficiência preditiva da QCD, os teóricos têm se engajado na formulação das chamadas teorias efetivas, como uma alternativa à QCD no limite de baixas energias. Espera-se, naturalmente que, sendo a QCD a legítima teoria de gauge das interações fortes, tais teorias possam um dia ser identificadas como limites genuínos da Cromodinâmica Quântica.

Os quarks e glúons não são observados como estados assintóticos livres na natureza, de forma que assume-se que todos os estados assintóticos da teoria encontram-se na forma dos chamados singletos de cor. As interações mediadas pelos glúons preservam o sabor dos quarks, propriedade que se manifesta na teoria por meio de uma invariância global da lagrangeana sob transformações do grupo  $U(1)$  para cada sabor. Percebe-se claramente a

existência de duas escalas distintas de massas para os quarks, os de sabores  $u, d, s$  sendo bem mais leves que os de sabores  $c, b, t$ . O espectro de hádrons observado experimentalmente apresenta igualmente um *gap* de massas entre estados onde apenas os quarks mais leves estão presentes e os demais estados onde pelo menos um quark de sabor  $c, b, t$  está presente.

Observa-se também que, no limite de massa nula dos quarks, a lagrangeana da QCD se fatoriza em uma parte contendo apenas campos de mão-direita (quiralidade positiva) e mão-esquerda (quiralidade negativa). Como consequência, se nos restringirmos somente ao setor dos três quarks mais leves ( $u, d, s$ ), a teoria apresenta também, no nível clássico, uma simetria global do tipo  $U(3)_L \times U(3)_R$ . No nível quântico, entretanto, a corrente axial associada à  $U(1)_A$  possui uma anomalia [8, 9, 10, 11], de modo que o grupo de simetria reduz-se a  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$ , em que a invariância sob o grupo  $U(1)_V$  leva à conservação do número bariônico e permite a classificação dos estados hadrônicos em bárions e mésons. O subgrupo  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  é denominado grupo quiral e forma a base da teoria efetiva conhecida como Teoria de Perturbação Quiral (ChPT do inglês *Chiral Perturbation Theory*).

É natural se perguntar, então, se tal simetria é de fato realizada na natureza e a resposta é negativa. Em [12], mostrou-se que o vácuo da QCD, no limite quiral, é invariante sob o subgrupo vetorial  $SU(3)_V$  do grupo quiral. Além disso, se esse mesmo vácuo fosse invariante sob  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  como um todo, esperaria-se que o espectro de baixa energia da teoria fosse formado por pares de estados de paridade oposta, o que não ocorre. Conjectura-se, assim, que apesar da lagrangeana da teoria ser invariante sob o grupo quiral, o estado de vácuo é invariante somente em relação ao subgrupo vetorial  $SU(3)_V$ . Tal teoria satisfaz, precisamente, as condições do teorema de Goldstone[13] que, por sua vez, garante a existência, no espectro, de bósons de massa nula denominados bósons de Goldstone. O octeto mesônico pseudoescalar (ver figura 1), observado experimentalmente, com estados de paridade negativa e número bariônico nulo, é interpretado então como o conjunto dos bósons de Goldstone da ChPT. As pequenas massas desses bósons, entretanto, são atribuídas, por sua vez, às massas não nulas dos quarks  $u, d, s$  que quebram a simetria quiral de forma explícita.

Em teoria de perturbação quiral, sendo uma teoria efetiva, a expansão perturbativa, antes feita na constante de acoplamento em teorias “fundamentais”, agora é realizada nos momentos externos aos diagramas e nas massas dos quarks. A lagrangeana efetiva é construída ordem a ordem em teoria de perturbação, usando como vínculos a preservação da simetria quiral, unitariedade e renormalização. De fato, a teoria, à medida que a ordem na expansão perturbativa aumenta, conterà um número arbitrário de termos, exigindo um método sistemático de classificação dos diagramas mais importantes num certo regime de energia. Esse método, criado por Weinberg[14], é capaz de estabelecer uma ligação entre a expansão no momento com uma expansão no número de *loops* internos aos diagramas. O método analisa o comportamento de um determinado diagrama ao se fazer um escalonamento linear dos momentos externos ( $p_i \rightarrow tp_i$ ) acompanhado de um respectivo escalonamento quadrático das massas ( $m_i \rightarrow t^2 m_i$ ).

O conteúdo do setor eletrofraco (léptons, fótons e os bósons vetoriais massivos) são

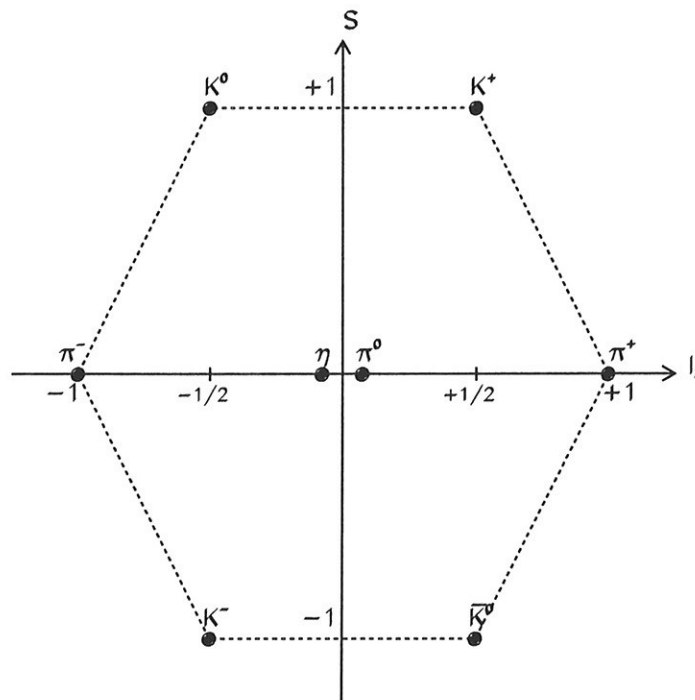


Figura 1: Diagrama de estranheza  $S$  versus a terceira componente do isospin  $I_3$  para o octeto mesônico pseudo-escalar observado experimentalmente, formado por píons, káons e eta, e interpretados como os bósons de Goldstone da teoria de perturbação quiral.

introduzidos na teoria como campos externos não quantizados. Por meio desse processo de construção, a lagrangeana final é mais simétrica do que a natureza, pois é simétrica sob transformações de paridade, descrevendo assim apenas fenômenos com um número par de bósons de Goldstone. O setor de paridade negativa da teoria é construído então por meio do método de Wess-Zumino-Witten (WZW)[15, 16].

O processo de renormalização em teorias efetivas é um tanto distinto do usual adotado, por exemplo, na QED. Os infinitos são identificados ordem a ordem na expansão e absorvidos pelos coeficientes ou constantes de acoplamento da teoria que, dessa forma, aumentam em número de forma bastante rápida à medida que a expansão progride. Em ordem  $E^2$ , a lagrangeana possui apenas 2 parâmetros livres, a chamada constante de decaimento do pión  $F_\pi$  e o condensado escalar de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$ . Em ordem  $E^4$  a teoria possui 10 constantes de acoplamento mais 2 termos adicionais contendo apenas campos externos (10+2), atingindo 90+4 em ordem  $E^6$ , e isso somente no setor de paridade positiva! A teoria não é capaz de prever o valor de tais constantes de acoplamento, de modo que esses devem ser obtidos experimentalmente. Em princípio, elas poderiam ser calculadas utilizando-se QCD na rede, mas os métodos atuais fornecem valores com erros muito grandes.

Uma vez que os káons fazem parte do octeto mesônico pseudo-escalar, aparecendo na forma dos dubletos de isospin ( $K^0, \bar{K}^0$ ) e ( $K^+, K^-$ ), é bem clara a importância desses mésons para a física descrita pela ChPT. Descobertos em 1949[17], tais mésons têm se

mostrado desde então uma das fontes mais ricas em termos de física fundamental. Em particular, levaram Gell-Mann e Pais[18, 19] à hipótese de estranheza para explicar o tempo de vida demasiado longo de certos decaimentos. A física contida nos káons neutros mostrou-se ainda mais interessante, quando descobriu-se que as interações fracas não conservam o produto  $CP$  das operações discretas de conjugação de carga  $C$  e paridade  $P$  [20, 21]. Os autoestados da hamiltoniana total observados na natureza não são assim aqueles de  $CP$  paridade bem definida

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle), \quad (1)$$

mas sim estados  $|K_S\rangle$  e  $|K_L\rangle$ , assim representados por seus tempos de vida diferentes, sendo um de curta e outro de longa vida, e dados por

$$|K_S\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\tilde{\epsilon}|^2}} (|K_1\rangle + \tilde{\epsilon}|K_2\rangle), \quad |K_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\tilde{\epsilon}|^2}} (|K_2\rangle + \tilde{\epsilon}|K_1\rangle), \quad (2)$$

o parâmetro complexo  $\tilde{\epsilon}$  quantificando a chamada violação de  $CP$  indireta, como ficou conhecido esse processo em que parte dos decaimentos  $K_L \rightarrow 2\pi$  observados experimentalmente, pela primeira vez, em 1964 por Cronin, Fitch e Turlay[22] são explicados pelo fato de que o estado  $|K_L\rangle$  possui uma pequena mistura do estado  $|K_1\rangle$ . Existe, no entanto, um outro processo de violação de  $CP$  denominado de direta, em que a quebra de simetria não pode mais ser explicada recorrendo-se à decomposição dos estados de longa e curta vida no espaço de auto-estados de  $CP$  paridade, mas assumindo que existe violação diretamente na amplitude de decaimento. O novo parâmetro para essa violação é denotado  $\epsilon'$  e sua relação com  $\tilde{\epsilon}$  é dada por

$$\eta_{+-} \equiv \frac{\langle \pi^+\pi^- | \hat{H}_w | K_L \rangle}{\langle \pi^+\pi^- | \hat{H}_w | K_S \rangle} \approx \epsilon + \epsilon', \quad \eta_{00} \equiv \frac{\langle \pi^0\pi^0 | \hat{H}_w | K_L \rangle}{\langle \pi^0\pi^0 | \hat{H}_w | K_S \rangle} \approx \epsilon - 2\epsilon', \quad (3)$$

com  $\epsilon = \tilde{\epsilon} + i\Im(A_0)/\Re(A_0)$ , onde  $A_0$  é a amplitude de transição para um estado de dois píons com isospin 0 ( $\langle \pi\pi, I=0 | \hat{H}_w | K^0 \rangle$ ) e  $\hat{H}_w$  representa a hamiltoniana fraca do processo.

Nosso interesse nessa tese, no entanto, não é estudar o sistema de káons neutros do ponto de vista de violação de  $CP$ , mas sim no contexto de teoria de perturbação quirial. Na realidade, nos restringeremos ao decaimento  $K_L \rightarrow \pi^0\pi^\pm e^\mp\nu$ , conhecido pela sigla  $K_{e4}^0$ , para distinguí-lo do seus parceiros carregados  $K^\pm \rightarrow \pi^+\pi^- e^\pm\nu$  ( $K_{e4}^\pm$ ). Há muito se percebeu que, como um decaimento em quatro corpos, a geometria é bastante rica, possibilitando extrair informação do espectro de diversas formas. Cabibbo e Maksymovics[23] introduziram uma parametrização bastante elegante para a largura diferencial de decaimento em termos de duas massas invariantes e três ângulos. Talvez a característica mais atraente nesse decaimento seja o fato de que o par de píons no estado final são as únicas partículas de natureza hadrônica, propiciando um ambiente favorável para o estudo de espalhamento  $\pi\pi$ , na ausência completa de interações com outros hádrons. A baixas energias, como é o caso de  $K_{e4}$ , o decaimento pode ser tomado como pontual, e as correntes

hadrônica e leptônica se fatorizam, possuindo, cada qual, correntes vetoriais e axiais em suas estruturas. Tais correntes podem, por sua vez, ser escritas em termos dos quadrimomentos do káon e dos píons, analisando o comportamento das correntes sob *boosts* de Lorentz, e de certos fatores de forma representando nossa “ignorância” a cerca do acoplamento no vértice. No contexto da ChPT, tais fatores de forma e, conseqüentemente, a própria largura  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  devem ser funções das constantes de acoplamento da teoria. Em particular, até ordem  $E^4$  na expansão em energia,  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  depende de três das 12 constantes presentes em  $\mathcal{L}_4$ , mostrando uma forte dependência em apenas umas delas, denotada  $L_3$ . Uma medida da razão de ramificação é capaz de fornecer informação acerca dessa constante. De fato, mostra-se que apenas com o valor de  $\tau_{K_L} \Gamma_{K_{e4}^0}$ , existe ainda uma ambigüidade no valor de  $L_3$ , dado que a largura é quadrática nessa constante de acoplamento, a ambigüidade sendo eliminada medindo-se a dependência de um dos fatores de forma em relação ao momento transferido.

O histórico de medidas experimentais de  $K_{e4}^0$  teve início com a primeira observação do decaimento no Brookhaven National Laboratory (BNL) em 1980[3], onde apenas 16 eventos de  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$  foram observados. Em 1993, o experimento E731 no Fermi National Accelerator Laboratory (Fermilab) relatou a observação de 729 eventos, sendo possível medir também, além da razão de ramificação, os fatores de forma[2]. E finalmente, ano passado, o experimento NA48 do Centre Européen de Recherches Nucléaires (CERN) anunciou a observação de 5464 candidatos sobre um fundo estimado de 62 eventos, e medindo também os fatores de forma associados[1].

A estatística aumentou significativamente desde a primeira observação do decaimento em 1980. A amostra final obtida nessa análise possui 4000 eventos. Com tal estatística, efeitos mais finos como aqueles associados a correções radiativas eletromagnéticas começam a ter importância e o programa de Monte Carlo utilizado para se obter a eficiência de detecção do decaimento deve incluir também processos em que o pión ou o elétron no estado final de  $K_{e4}^0$  sofrem *bremstrahlung* interno. A biblioteca de pacotes da Cernlib[24] possui o programa PHOTOS[25] de uso geral para a inclusão de correções radiativas, mas devem sempre ser utilizados com certa cautela. Nossa preocupação nessa análise está primariamente ligada à quantidade total de radiação de *bremstrahlung* produzida, pois essa radiação afeta a eficiência de detecção, alterando, por exemplo, a taxa de disparo do sistema de veto. Essa é a razão pela qual decidiu-se por conferir, por meio de um cálculo analítico, a fração radiativa fornecida pelo programa utilizado na análise para inclusão de correções radiativas.

Os objetivos da análise apresentada nessa tese são: identificar uma amostra suficientemente limpa do decaimento  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ , obtendo-se uma medida da sua razão de ramificação; medir três dos fatores de forma parametrizando o elemento de matriz hadrônico do decaimento, bem como a dependência de um dos fatores de forma com o momento transferido. Com isso, foi possível extrair um valor para a constante de acoplamento  $L_3$  presente na lagrangeana quiral em ordem  $E^4$  na expansão em energia. Como já dito anteriormente, correções radiativas estão incluídas em nosso Monte Carlo. Infelizmente, dada a estatística atual nas medidas de  $K_{e4}^0$ , efeitos mais finos acerca do

espalhamento píon-píon no estado final ainda não podem ser resolvidos. Esse tipo de informação tem sido extraído apenas da versão carregada  $K^+ \rightarrow \pi^+\pi^-e^+\nu$ [26], onde a melhor medida foi capaz de separar  $\sim 400\,000$  candidatos.

A organização geral da tese é a seguinte: o primeiro capítulo é dedicado a um apanhado geral acerca das idéias principais em teoria de perturbação quiral, bem como sua relação com o modo de decaimento  $K_{e4}$ . Em particular, apresenta-se, no final desse capítulo, a dependência funcional de  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  com  $L_3$ . No segundo capítulo, apresentamos os cálculos de correções radiativas eletromagnéticas, realizados para se comparar a fração radiativa final com aquela fornecida pelo pacote PHOTOS. O capítulo 3 contém uma descrição do aparato do KTeV, experimento do Fermilab de onde os dados dessa tese foram extraídos, e uma discussão sobre a assinatura esperada nos detectores para o decaimento estudado. A descrição dos programas de simulação da física bem como dos detectores do KTeV é apresentada no capítulo 4. A análise de dados propriamente dita é discutida então no capítulo 5, incluindo a descrição dos critérios de análise utilizados, comparações entre a previsão do Monte Carlo com os dados reais, tanto para  $K_{e4}^0$  quanto para o modo de normalização utilizado para a extração da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$ . O capítulo contém também uma discussão sobre a determinação do erro sistemático na razão de ramificação e a descrição do método de ajustes dos fatores de forma. Os resultados finais são resumidos no capítulo 6, sendo as conclusões apresentadas ao final da tese.



# Capítulo 1

## Teoria de perturbação quiral

Neste capítulo, abordaremos os principais conceitos envolvidos na construção da teoria de perturbação quiral, começando com a forma especial da lagrangeana da QCD, quando tomada no limite de massa nula para os quarks e sua relação com o grupo quiral. O processo de quebra espontânea da simetria quiral e as consequências previstas pelo teorema de Goldstone são também apresentados. No intuito de se construir a lagrangeana da teoria até ordem  $E^4$  na expansão em energia, os conceitos de realização não linear de uma simetria e do esquema de contagem de potências de Weinberg são expostos ao longo do capítulo. Por fim, discute-se as previsões da teoria para o caso particular do decaimento  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ , em especial, estuda-se a dependência funcional da largura de  $K_{e4}^0$  com uma das constantes de acoplamento da teoria efetiva<sup>1</sup>.

### 1.1 A lagrangeana da QCD e o grupo quiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$

Quando imposta à lagrangeana das interações fortes, a invariância sob transformações locais (ou de segunda espécie)<sup>2</sup> do grupo  $SU(3)$  no espaço de cores dos campos dos quarks, leva à seguinte forma da lagrangeana da QCD

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \sum_f \bar{q}_f (i\not{D} - m_f) q_f - \frac{1}{2} \text{Tr}_c (G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}), \quad (1.1)$$

onde o índice  $f$  percorre os sabores dos quarks ( $f = u, d, c, s, t, b$ ) e o índice  $c$  subscrito ao sinal de traço indica que a operação deve ser realizada no espaço de cores. A derivada covariante  $D_\mu$  envolve os campos dos oito bósons de gauge, correspondentes aos oito

---

<sup>1</sup>Os símbolos não definidos explicitamente ao longo do texto desse capítulo e do próximo podem ser encontrados no apêndice A.

<sup>2</sup>Invariância de gauge ou de calibre.

geradores do grupo  $SU(3)$  ( $\mathcal{A}_{\mu,a}$ ,  $a = 1, \dots, 8$ ), e sua ação no espaço de cores é dada por

$$D_\mu q_f = D_\mu \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^g \\ q_f^b \end{pmatrix} = \partial_\mu \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^g \\ q_f^b \end{pmatrix} - ig_s \sum_{a=1}^8 \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{A}_{\mu,a} \begin{pmatrix} q_f^r \\ q_f^g \\ q_f^b \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

em que os índices  $r, g, b$  indicam, em inglês, as iniciais das “cores” dos quarks vermelho, verde e azul, respectivamente, e  $g_s$  denota a constante de acoplamento forte. O termo cinético envolvendo o traço fornece aos glúons uma dinâmica e o tensor  $G_{\mu\nu}$  é dado por

$$G_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^8 G_{\mu\nu,a} \frac{\lambda_a}{2}, \quad G_{\mu\nu,a} = \partial_\mu \mathcal{A}_{\nu,a} - \partial_\nu \mathcal{A}_{\mu,a} + gf_{abc} \mathcal{A}_{\mu,b} \mathcal{A}_{\nu,c}. \quad (1.3)$$

Para assegurar a desejada invariância de calibre, se os campos fermiônicos se transformam de acordo com

$$q_f \rightarrow q'_f = U[\Theta(x)]q_f = \exp \left[ -i \sum_{a=1}^8 \Theta_a(x) \frac{\lambda_a}{2} \right] q_f, \quad (1.4)$$

os campos de gauge  $\mathcal{A}_{\mu,a}$  devem se transformar de acordo com

$$\frac{\lambda_a}{2} \mathcal{A}_{\mu,a}(x) \rightarrow U[\Theta(x)] \frac{\lambda_a}{2} \mathcal{A}_{\mu,a}(x) U^\dagger[\Theta(x)] - \frac{i}{g} \partial_\mu U[\Theta(x)] U^\dagger[\Theta(x)]. \quad (1.5)$$

Uma vez que os quarks não são observados na natureza como estados assintóticos livres da QCD, a atribuição de massas para essas partículas deixa de ser natural como no caso dos demais férmions do Modelo Padrão, e torna-se, na realidade, extremamente dependente tanto da teoria quanto da técnica experimental utilizada para extraí-las. Como veremos mais adiante, as massas dos quarks em teoria de perturbação quiral podem ser tomadas simplesmente como uma medida da intensidade com que a simetria quiral é quebrada. De qualquer forma, é possível observar claramente a existência de duas escalas distintas de massa, isto é,  $m_{u,d,s} \ll 1$  GeV e  $m_{c,b,t} \geq 1$  GeV.

Ao nos restringirmos a processos de baixa energia (abaixo de 1 GeV), esperamos que apenas os efeitos gerados pelos 3 quarks mais leves devam ser importantes. Chegamos então ao ponto de partida da teoria de perturbação quiral, isto é, a lagrangeana da QCD restrita aos três quarks mais leves, tomada no chamado limite quiral, ou seja, no limite  $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$ , levando a

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f i \not{D} q_f - \frac{1}{2} \text{Tr}_C(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}). \quad (1.6)$$

Em termos dos campos de mão direita,  $q_R = P_R q = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q$ , e de mão esquerda,  $q_L = P_L q = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q$ , a lagrangeana  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$  assume uma forma fatorada com relação a

esses campos de quiralidade (que no limite de massa nula é equivalente à helicidade) bem definida, de modo que

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0 = \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_{R,f} i \not{D} q_{R,f} + \bar{q}_{L,f} i \not{D} q_{L,f} - \frac{1}{2} \text{Tr}_C(G_{\mu\nu} G^{\mu\nu}). \quad (1.7)$$

Dessa forma, levando-se em conta que a derivada covariante age no espaço de *cores*, conclui-se que  $\mathcal{L}_{\text{QCD}}^0$  possui uma simetria global  $U(3)_L \times U(3)_R$  no espaço de *sabores*, ou seja, a lagrangeana se mantém invariante quando os campos fermiônicos se transformam de acordo com

$$\begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix} \rightarrow \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^L \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-i\Theta^L} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \\ s_L \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

$$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix} \rightarrow \exp\left(-i \sum_{a=1}^8 \Theta_a^R \frac{\lambda_a}{2}\right) e^{-i\Theta^R} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \\ s_R \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

É importante notar que a simetria global acima se mantém apenas no nível clássico, já que uma das correntes conservadas nesse nível desenvolve uma anomalia quando passamos ao processo de quantização.

Podemos dar um passo além e estudar o comportamento da lagrangeana (1.7) sob transformações infinitesimais e locais do grupo  $U(3)_L \times U(3)_R$ . Na situação geral, a dinâmica do sistema deve ser determinada por uma lagrangeana escrita em termos de  $n$  campos independentes e de suas derivadas parciais de primeira ordem

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Phi_i, \partial_\mu \Phi_i), \quad (1.10)$$

e o princípio de mínima ação leva às equações de movimento de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Aplicando quantização canônica por exemplo, os campos  $\Phi_i$  passam a ser operadores agindo num espaço de Hilbert, assim como os momentos conjugados  $\Pi_i = \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_0 \Phi_i)$ , e satisfazem relações de comutação<sup>3</sup> em tempos iguais. As transformações lineares infinitesimais sobre os campos

$$\Phi_i(x) \rightarrow \Phi'_i(x) = \Phi_i(x) - i\epsilon_a t_{ij}^a \Phi_j(x), \quad (1.12)$$

estão associadas às correntes de Noether

$$J^{\mu,a} = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \epsilon_a} = -i t_{ij}^a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Phi_i} \Phi_j. \quad (1.13)$$

<sup>3</sup>Estaremos interessados aqui em campos bosônicos.

Aplicando então a versão infinitesimal das transformações (1.8) e (1.9) na lagrangeana (1.7) obtém-se as seguintes correntes associadas às tranformações dos quarks de mão direita e esquerda por elementos de  $SU(3)_L \times SU(3)_R$

$$L^{\mu,a} = \bar{q}_L \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_L, \quad \partial_\mu L^{\mu,a} = 0, \quad e \quad R^{\mu,a} = \bar{q}_R \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q_R, \quad \partial_\mu R^{\mu,a} = 0, \quad (1.14)$$

mas em vez dessas chamadas correntes quirais, em geral utiliza-se as correntes vetoriais ( $V^{\mu,a}$ ) e axiais ( $A^{\mu,a}$ )

$$V^{\mu,a} = R^{\mu,a} + L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} q, \quad A^{\mu,a} = R^{\mu,a} - L^{\mu,a} = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2} q, \quad (1.15)$$

devido suas propriedades de transformação bem definidas com respeito à operação de paridade ( $PV^{\mu,a}(\mathbf{x}, t)P^{-1} = V^{\mu,a}(-\mathbf{x}, t)$  e  $PA^{\mu,a}(\mathbf{x}, t)P^{-1} = -A^{\mu,a}(-\mathbf{x}, t)$ ). Além das oito correntes quirais acima, é possível construir ainda duas outras, quando transformamos os campos de mão direita e esquerda pela mesma fase, ou em linguagem mais formal, por elementos do grupo  $U(1)_L \times U(1)_R$ . Surgem assim duas novas correntes (referidas como correntes de singlete), que podem ser novamente agrupadas nas formas vetorial e axial

$$V^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R + \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \gamma^\mu q, \quad (1.16)$$

$$A^\mu = \bar{q}_R \gamma^\mu q_R - \bar{q}_L \gamma^\mu q_L = \bar{q} \gamma^\mu \gamma_5 q. \quad (1.17)$$

A quadri-divergência nula das correntes  $L^{\mu,a}$  e  $R^{\mu,a}$  implica imediatamente na mesma propriedade para as correntes vetoriais  $V^{\mu,a}$  e  $A^{\mu,a}$ , e conseqüentemente, na conservação das mesmas. Tal conservação também é verificada para  $V^\mu$  e essa propriedade se mantém tanto no nível clássico (nível de árvore) quanto no nível quântico (quando se inclui processos com *loops*). A corrente de singlete axial  $A^\mu$ , no entanto, só se conserva no nível clássico, já que após o processo de quantização a corrente apresenta uma certa anomalia, isto é, sua quadri-divergência deixa de ser nula, para certos processos envolvendo diagramas com *loops* como estudado nas referências [8, 9, 10, 11].

Assim, chegamos finalmente ao grupo de simetria (global) da lagrangeana da QCD restrita ao setor de quarks leves e tomada no limite quiral. Dizemos que (1.7) possui uma simetria global  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V$  e o subgrupo  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  é denominado *grupo quiral*.

A introdução de massa para os quarks claramente quebra *explicitamente* a simetria quiral  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ . De maneira mais específica, se adicionássemos à lagrangeana (1.7) um termo de massa do tipo

$$\mathcal{L}_M = -\bar{q} M q = -(\bar{q}_R M q_R + \bar{q}_L M q_L), \quad (1.18)$$

onde  $M$  representa a matriz de massa dos quarks leves

$$M = \begin{pmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

as correntes discutidas acima, com excessão da corrente de singleto vetorial  $V^\mu$ , não mais se conservariam, e a corrente axial adquiriria uma quadri-divergência não nula já no nível de árvore, além da anomalia quântica mencionada acima, de forma que <sup>4</sup>

$$\partial_\mu V^{\mu,a} = i\bar{q} \left[ M, \frac{\lambda_a}{2} \right] q, \quad (1.20)$$

$$\partial_\mu A^{\mu,a} = i\bar{q} \left\{ \frac{\lambda_a}{2}, M \right\} \gamma_5 q, \quad (1.21)$$

$$\partial_\mu V^\mu = 0, \quad (1.22)$$

$$\partial_\mu A^\mu = 2i\bar{q} M \gamma_5 q + \frac{3g_s^2}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} G_a^{\mu\nu} G_a^{\rho\sigma}. \quad (1.23)$$

A invariância sob  $U(1)_V$  se mantém mesmo na presença de massa para os quarks e está ligada à conservação do número bariônico  $B$ , permitindo a classificação dos estados hadrônicos em mésons ( $B = 0$ ) e bárions ( $B = 1$ ).

## 1.2 Quebra espontânea da simetria quiral

Na seção anterior, vimos que a lagrangeana, e conseqüentemente a hamiltoniana quiral, são invariantes sob transformações globais do grupo quiral  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ . Como dito anteriormente, se nos restringirmos a processos de baixa energia, ou seja, a processos que envolvam apenas o octeto mesônico pseudoescalar, parece razoável desprezar os quarks mais pesados ( $c, t, b$ ) na lagrangiana da QCD. Além disso, ao analisarmos as massas dos componentes do octeto, também somos levados a crer que a aproximação de massa nula para os quarks mais leves não é absurda. Dito isso, é natural se perguntar se a simetria do grupo quiral é pelo menos aproximadamente realizada pelo espectro observado na natureza, ou seja, se tal espectro pode ser descrito analisando-se as representações irredutíveis de  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ .

A resposta é claramente não, pois em caso afirmativo, esperaríamos a existência de multipletos aproximadamente degenerados em massa e organizados em grupos cujos números de elementos se ajustariam às dimensões irredutíveis do grupo quiral. O octeto mesônico pseudoescalar observado experimentalmente sugere um grupo de simetria com oito geradores, ao invés dos dezesseis previstos no caso da simetria quiral. Essa grande discrepância entre as previsões teóricas e as observações experimentais aponta para uma quebra da simetria  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  distinta daquela explicitamente ocasionada pela atribuição de pequenas massas aos quarks leves, e discutida na seção anterior.

Ao contrário do cenário clássico, em que as simetrias da hamiltoniana se manifestam diretamente nas equações de movimento, o estudo de simetrias e leis de invariância requer atenção maior ao se abordar sistemas quânticos. Um dos resultados mais conhecidos a respeito dessas sutilezas das simetrias quânticas é expresso pelo teorema de Goldstone.

<sup>4</sup>O segundo termo na quadri-divergência de  $A^\mu$  corresponde à anomalia e o primeiro à contribuição vinda do termo de massa[27].

Quando a lagrangeana de um sistema possui uma simetria global que, no entanto, não é respeitada pelo estado fundamental, ou vácuo no caso de teorias quânticas de campos (diz-se que a simetria é *espontaneamente* quebrada), o mencionado teorema prevê a existência no espectro da teoria de bósons de massa nula, denominados *bósons de Goldstone*.

Em [28], Coleman demonstrou que as simetrias obedecidas simultaneamente pelo estado fundamental e pela hamiltoniana devem necessariamente aparecer também no espectro da teoria. Para explicar então o espectro dos mésons observados em processos de baixa energia, recorre-se à idéia de que o estado fundamental da teoria, cuja lagrangeana é simétrica em relação a  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , não é invariante sob o grupo quiral como um todo, mas apenas sob um subgrupo desse. De fato, demonstrou-se em [12] que no limite quiral, o vácuo da QCD é necessariamente invariante sob transformações do subgrupo vetorial  $H = SU(3)_V \times U(1)_V$

$$Q_V^a |0\rangle = Q_V |0\rangle = 0, \quad (1.24)$$

ou seja, tanto as oito cargas vetoriais  $Q_V^a$  quanto o operador número bariônico  $Q_V/3$  aniquilam o vácuo<sup>5</sup>.

É claro que o mecanismo de quebra espontânea  $SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \rightarrow SU(3)_V \times U(1)_V$  é apenas uma conjectura, dado que tal quebra ainda não é entendida teoricamente de maneira completa tanto em teorias de Yang-Mills [29] quanto em teoria de perturbação quiral. Apesar do importante resultado demonstrado em [12] acerca da invariância do estado fundamental sob  $H$ , ainda é necessário demonstrar a quebra da invariância com respeito aos elementos restantes do grupo. Levando-se em conta (1.24), isso equivale a demonstrar

$$Q_A^a |0\rangle \neq 0. \quad (1.25)$$

O fato de  $SU(3)_V$ , ao invés de  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , ser aproximadamente realizado pelo espectro na forma do octeto mesônico pseudoescalar, cujos elementos são interpretados como os bósons do teorema de Goldstone, é um indício favorável à conjectura. Apesar do teorema de Goldstone afirmar que os bósons gerados pelo processo de quebra espontânea de simetria terem massa nula, as massas finitas dos mésons pseudo-escalares são atribuídas às massas não nulas dos quarks leves e que quebram explicitamente a simetria quiral.

### 1.3 A lagrangeana efetiva até ordem $E^4$ para o setor mesônico

Nesta seção construiremos a lagrangeana efetiva da teoria de perturbação quiral até  $\mathcal{O}(E^4)$  na chamada expansão em energia. Para isso será necessário, em primeiro lugar, introduzir o conceito de representação não linear de um grupo de simetria, em contrapartida à noção amplamente utilizada em Física de representação linear. Um outro ingrediente

<sup>5</sup>As cargas  $Q = \int d^3x J_0(\mathbf{x}, t)$  são os geradores de transformações infinitesimais no espaço de Hilbert da teoria.

importante é o esquema de contagem de potências de Weinberg, que nos permite determinar a importância de cada um dos infinitos termos que aparecem na lagrangeana de uma teoria efetiva.

O detalhes envolvidos na construção da representação não linear da simetria quiral são apresentados no apêndice C. Por ora, é suficiente observar que em ChPT, os graus de liberdade da teoria, representados pelos campos dos bósons do octeto mesônico pseudo-escalar, podem ser apropriadamente agrupadas na forma matricial

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^+ & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}, \quad (1.26)$$

e dado um elemento do  $g = (L, R) \in SU(3)_L \times SU(3)_R$ , a transformação induzida por tal elemento é dada por

$$U(x) \rightarrow RU(x)L^\dagger, \quad U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_\pi}\right), \quad (1.27)$$

e a constante  $F_\pi$  será definida mais adiante.

### 1.3.1 Contagem de potências de Weinberg

O último ingrediente necessário para sermos capazes de construir a lagrangeana efetiva em teoria de perturbação quiral é o chamado esquema de contagem de potências de Weinberg. Como já mencionado, uma tal lagrangeana conterá um número arbitrário de termos, de modo que torna-se indispensável um método sistemático, tanto para se organizar os termos na lagrangeana quanto para, dado um determinado diagrama, atribuir-lhe um peso que nos faça capazes de comparar a importância de dois diagramas. No caso da teoria de perturbação quiral, a função de Lagrange é organizada de acordo com o número de derivadas e termos de massa. Por outro lado, das regras de Feynman, sabemos que uma derivada  $\partial_\mu$  na lagrangeana produz um fator  $p_\mu$  na amplitude invariante, e duas derivações equivalem a um termo de massa<sup>6</sup>.

Com base nessas considerações, Weinberg analisou o comportamento de um diagrama arbitrário sob um reescalonamento dos momentos externos por um fator  $t$ , isto é  $p_i \rightarrow tp_i$ , acompanhado de um reescalonamento quadrático das massas dos quarks leves,  $m_q \rightarrow t^2 m_q$ . A chamada dimensão quiral  $D$  de um diagrama de amplitude  $\mathcal{M}(p_i, m_q)$  é definida por

$$\mathcal{M}(tp_i, t^2 m_q) = t^D \mathcal{M}(p_i, m_q), \quad (1.28)$$

e tem-se então que

$$D = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} 2(n-1)N_{2n} + 2N_L, \quad (1.29)$$

<sup>6</sup>A razão para essa equivalência pode ser entendida observando-se as relações de Gell-Mann, Oakes e Reiner (ver equação (1.44) adiante), e a condição  $p^2 = M^2$  para uma partícula na camada de massa.

em que  $N_{2n}$  é o número de vértices contidos em  $\mathcal{L}_{2n}$  e  $N_L$  é o número de loops independentes. Conclui-se assim que para momentos e massas pequenos, diagramas com dimensão quiral baixa são os dominantes.

### 1.3.2 Forma explícita de $\mathcal{L}_4$

Baseados na discussão anterior sobre a realização não-linear de uma simetria, e o método de Weinberg para a contagem de potências de um diagrama particular, podemos finalmente dar início à construção da lagrangeana efetiva em teoria de perturbação quiral. Essa lagrangeana deve ser tal que o operador de Hamilton do sistema seja invariante sob o grupo quiral  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  (invariância *global*), mas cujo estado de vácuo é invariante somente sob  $SU(3)_V$ , de modo que a teoria apresenta quebra espontânea de simetria

$$SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V, \quad (1.30)$$

dando origem, de acordo com o teorema de Goldstone, a oito bósons de massa nula. Os campos desses bósons devem ser tomados como os graus de liberdade fundamentais da teoria.

Dessa forma, a lagrangeana *efetiva* mais geral, invariante por transformações de quiralidade e contendo o número mínimo de derivadas, é dada por

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger), \quad (1.31)$$

em que  $F_\pi \approx 93$  MeV é a constante de decaimento do pión, pois pode ser extraída do decaimento  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ , que aqui tem a função de gerar a forma padrão do termo cinético, isto é,  $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a$ , que pode ser confirmado expandindo-se a exponencial contida em  $U$ , bem como sua derivada  $\partial_\mu U$

$$U(x) = \exp \left( i \frac{\phi(x)}{F_\pi} \right) = 1 + i \frac{\phi(x)}{F_\pi} + \dots, \quad (1.32)$$

$$\partial_\mu U = i \frac{\partial_\mu \phi}{F_\pi} + \dots, \quad (1.33)$$

de modo que

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \frac{F_\pi^2}{4} \text{Tr} \left[ i \frac{\partial_\mu \phi}{F_\pi} \left( -i \frac{\partial^\mu \phi}{F_\pi} \right) \right] + \dots = \frac{1}{4} \text{Tr} (\lambda_a \partial_\mu \phi_a \lambda_b \partial^\mu \phi_b) + \dots = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a + \dots, \quad (1.34)$$

com o termo cinético correto como desejava-se. Como não existem termos adicionais contendo o produto de dois campos, conclui-se que a lagrangeana de interação,  $\mathcal{L}_{\text{int}}$ , tem no mínimo produtos envolvendo quatro campos.

A lagrangeana  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  ainda não pode ser considerada como aquela de ordem mais baixa em teoria de perturbação, pois não descreve muitos dos processos básicos envolvendo os léptons, juntamente com os bósons de gauge da teoria eletro-frac, por exemplo. Tais



campos são introduzidos na teoria como campos externos (não quantizados), fazendo-se uso de um resultado poderoso[30] afirmando que ao se promover a simetria  $SU(3)_L \times SU(3)_R$  para o nível local, na ausência de anomalias, as identidades de Ward obedecidas pelas correntes são equivalentes a uma invariância do funcional gerador da teoria, com relação a transformações locais dos campos externos. A invariância da lagrangeana é assegurada impondo-se leis de transformação bem definidas para os campos externos, de forma que esses se comportem como se fossem “campos de calibre”.

Assim, como  $U$  se transforma como  $RUL^\dagger$ , para garantir a mencionada invariância, introduz-se campos externos de mão esquerda  $l_\mu^a$  e mão direita  $r_\mu^a$ , e a derivada  $\partial_\mu$  deve ser substituída por uma derivada covariante  $D_\mu$

$$D_\mu U \equiv \partial_\mu U - ir_\mu U + il_\mu U \rightarrow R(D_\mu U)L^\dagger, \quad (1.35)$$

devendo-se introduzir também tensores de campo de traço nulo

$$f_{\mu\nu}^R \equiv \partial_\mu r_\nu - \partial_\nu r_\mu - i[r_\mu, r_\nu], \quad (1.36)$$

$$f_{\mu\nu}^L \equiv \partial_\mu l_\nu - \partial_\nu l_\mu - i[l_\mu, l_\nu]. \quad (1.37)$$

Dessa forma, por exemplo, as correntes fracas carregadas (associadas aos campos dos bósons vetoriais massivos  $W_\mu^+$  e  $W_\mu^-$ ) e eletromagnéticas (campo  $A_\mu$ ) são incluídas na teoria identificando-se  $l_\mu$  e  $r_\mu$  com

$$l_\mu = -eQA_\mu - \frac{g_W}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & V_{ud}W_\mu^+ & V_{us}W_\mu^+ \\ V_{ud}^*W_\mu^- & 0 & 0 \\ V_{us}^*W_\mu^- & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad r_\mu = -eA_\mu Q, \quad (1.38)$$

em que  $Q = \text{diag}(2/3, -1/3, -1/3)$ . Com a presença dos campos externos, precisamos atribuir potências aos termos que os contém, de modo a identificar aqueles de maior peso na expansão. A atribuição é a seguinte

$$\begin{aligned} U &= \mathcal{O}(p^0), \\ D_\mu &= \mathcal{O}(p), \\ r_\mu, l_\mu &= \mathcal{O}(p), \\ f_{\mu\nu}^{R,L} &= \mathcal{O}(p^2), \\ \chi &= \mathcal{O}(p^2), \end{aligned} \quad (1.39)$$

onde definiu-se  $\chi = 2B_0(s + ip)$ , com  $s$  e  $p$  representando campos escalares e pseudo-escalares, respectivamente, e a constante  $B_0$  relaciona-se com  $F_\pi$  (definida em 1.31) e com o condensado escalar de quarks  $\langle \bar{q}q \rangle$  por<sup>7</sup>

$$3F_\pi^2 B_0 = -\langle \bar{q}q \rangle, \quad q = u, d, s, \quad (1.41)$$

<sup>7</sup>Essa relação pode ser obtida introduzindo-se na  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  um termo de massa

$$\mathcal{L}_M = \frac{F_\pi^2 B_0}{2} \text{Tr} (MU^\dagger + UM^\dagger), \quad (1.40)$$

que mantém  $\mathcal{L}_{\text{eff}}$  invariante, desde que a matriz  $M$  se transforme como  $RML^\dagger$  sob  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ .

e a potência de  $\chi$  foi determinada levando-se em consideração as relações de Gell-Mann, Oakes e Renner [31] (no limite  $m_u = m_d = m$ )

$$M_\pi^2 = 2B_0m, \quad (1.42)$$

$$M_K^2 = B_0(m + m_s), \quad (1.43)$$

$$M_\eta^2 = \frac{2}{3}B_0(m + 2m_s). \quad (1.44)$$

Podemos então escrever a lagrangeana quiral mais geral até  $\mathcal{O}(E^2)$ , já com o acoplamento aos campos do setor eletrofraco, como

$$\mathcal{L}_2 = \frac{F_\pi^2}{4} \left\{ \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] + \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \right\}, \quad (1.45)$$

e que possui dois parâmetros livres,  $F_\pi$  e  $B_0$ , esse último presente na definição de  $\chi$ .

O mesmo procedimento de contagem de potências e exigência de invariância quiral nos leva à lagrangeana de ordem  $\mathcal{O}(E^4)$  mais geral e construída por Gasser e Leutwyler [4]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 = & L_1 \left\{ \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \right\}^2 + L_2 \text{Tr} [D_\mu U (D_\nu U)^\dagger] \text{Tr} [D^\mu U (D^\nu U)^\dagger] \\ & + L_3 \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger D_\nu U (D^\nu U)^\dagger] + L_4 \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger] \text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger) \\ & + L_5 \text{Tr} [D_\mu U (D^\mu U)^\dagger (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)] + L_6 [\text{Tr} (\chi U^\dagger + U \chi^\dagger)]^2 \\ & + L_7 [\text{Tr} (\chi U^\dagger - U \chi^\dagger)]^2 + L_8 \text{Tr} (U \chi^\dagger U \chi^\dagger + \chi U^\dagger \chi U^\dagger) \\ & - iL_9 \text{Tr} [f_{\mu\nu}^R D^\mu U (D^\nu U)^\dagger + f_{\mu\nu}^L (D^\mu U)^\dagger D^\nu U] + L_{10} \text{Tr} (U f_{\mu\nu}^L U^\dagger f_{\mu\nu}^R) \\ & + H_1 \text{Tr} (f_{\mu\nu}^R f_R^{\mu\nu} + f_{\mu\nu}^L f_L^{\mu\nu}) + H_2 \text{Tr} (\chi \chi^\dagger). \end{aligned} \quad (1.46)$$

As constantes de acoplamento  $L_1, \dots, L_{10}, H_1, H_2$  não podem ser obtidas da teoria e devem ser extraídas experimentalmente ou de cálculos de QCD na rede. O número de parâmetros livres cresce rapidamente à medida que avançamos com a expansão em energia. Em ordem  $E^6$  defrontamo-nos com 90 parâmetros. Esse é o preço a pagar quando se opta por trabalhar com uma teoria efetiva, construída apenas a partir de princípios de invariância bastante gerais.

## 1.4 Amplitude invariante do decaimento $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$

Apresentaremos agora uma parametrização fenomenológica para a amplitude invariante do decaimento  $K_{e4}^0$ , baseada em argumentos de simetria bem gerais. Fatores de forma parametrizando o elemento de matriz hadrônico aparecerão. As previsões de teoria de perturbação quiral para tais fatores são apresentadas logo em seguida.

### 1.4.1 Um modelo fenomenológico

O decaimento  $K_{e4}^0$ , faz parte de uma família de decaimentos do tipo  $K_{e4}$  que contém também as versões carregadas desse processo. Se assumirmos a validade da regra  $\Delta S = \Delta Q$ , onde  $S$  representa o número quântico estranheza e  $Q$  é a carga elétrica hadrônica, temos

$$K^0 \rightarrow \pi^- \pi^0 e^+ \nu_e, \quad (1.47)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^- e^+ \nu_e, \quad (1.48)$$

$$K^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0 e^+ \nu_e, \quad (1.49)$$

e seus respectivos modos conjugados de carga.

A simetria de Bose e as propriedades de isospin implicam em diferenças bem definidas no espectro do decaimento dos káons neutros com relação àquele do seu parceiro carregado  $K^+$ . Sabemos que a função de onda de um sistema de partículas de spin inteiro deve ser totalmente simétrica com respeito à troca de partículas. Como os píons são partículas de spin nulo, a função de onda de um par desses bósons possui uma parte dependente do momento angular orbital  $L$ , e representada por um harmônico esférico  $Y_l^m(\theta, \varphi)$ , e uma parte dependente do spin isotópico (isospin)  $I$ . Assim, de acordo com a simetria de Bose, o fator gerado por uma troca de partículas deve ser igual a

$$+1 = (-1)^L (-1)^I. \quad (1.50)$$

Os píons formam um tripleto de isospin, e nesse espaço podem ser representados pelos *kets*

$$|\pi^+\rangle = |1, 1\rangle, \quad |\pi^-\rangle = |1, -1\rangle, \quad |\pi^0\rangle = |1, 0\rangle, \quad (1.51)$$

de modo que, de acordo com as regras de soma de isospin, o par de píons no estado final de um decaimento  $K_{e4}$  pode assumir  $I = 0, 1, 2$ . No entanto, levando-se em consideração a componente  $I_3$ , os pares  $\pi^\pm \pi^0$  têm necessariamente  $I_3 = \pm 1$ , não podendo ocupar o estado  $I = 0$ , enquanto os pares  $\pi^+ \pi^-$  e  $\pi^0 \pi^0$  podem em princípio assumir os três valores.

Além disso, de acordo com a regra de seleção empírica para decaimentos semi-leptônicos  $\Delta I = 1/2$ , na versão neutra de  $K_{e4}$ , o par de píons só pode ocupar, na realidade, o estado correspondente a  $I = 1$ , o que os força, devido à simetria de Bose, a ocupar um estado com momento angular orbital ímpar. Nas versões carregadas de  $K_{e4}$ , no entanto, os píons podem ocupar os estados com  $I = 0, 1$  e possuir momento angular orbital par ou ímpar. É claro que, por considerações de balanço energético, o estado de momento angular mais baixo é cinematicamente favorecido.

Concluimos então, finalmente, que os espectros dos decaimentos neutro e carregado possuem diferenças bem acentuadas pois:

*Enquanto no decaimento neutro, os píons se encontram predominantemente num estado de onda P, o estado de onda S, em princípio, cinematicamente favorecido, é suprimido ao se considerar  $\Delta I = 1/2$  e a simetria de Bose; no decaimento carregado os píons estarão predominantemente no estado de onda S por razões cinemáticas.*

Assumindo a forma vetor-axial usual para a corrente leptônica em  $K_{e4}^0$ , a energias suficientemente baixas, a amplitude em ordem mais baixa de teoria de perturbação pode ser fatorada num produto das correntes hadrônica e leptônica, e escrita como

$$\mathcal{M}_0 = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* \langle \pi\pi | V^\mu + A^\mu | K^0 \rangle \bar{u}(p_\nu) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(p_e), \quad (1.52)$$

onde  $G_F$  é a constante de Fermi,  $V_{us}$  é um elemento da matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) e a corrente hadrônica possui contribuições vetorial  $V^\mu$  e axial  $A^\mu$ . Para obter uma parametrização conveniente dessas correntes, podemos analisar as propriedades de transformação dos seus elementos de matriz sob a operação de paridade  $P$ .

Mais especificamente, sabemos que  $V^\mu$  e  $A^\mu$ , por definição, transformam-se de acordo com

$$\begin{aligned} V^\mu &\rightarrow PV^\mu P^{-1} = V_\mu, \\ A^\mu &\rightarrow PA^\mu P^{-1} = -A_\mu, \end{aligned} \quad (1.53)$$

enquanto os estados  $|K\rangle$  e  $|\pi\pi\rangle$  têm paridades intrínsecas opostas. Logo, o elemento de matriz  $\langle \pi\pi | V^\mu | K \rangle$  se transforma na verdade como um vetor-axial sob paridade, e  $\langle \pi\pi | A^\mu | K \rangle$  se transforma como um vetor. Levando-se em conta os quadri-vetores disponíveis, podemos escrever a seguinte parametrização para esses elementos de matriz

$$\langle \pi\pi | A^\mu | K \rangle = -\frac{i}{M} (fP^\mu + gQ^\mu + r(K^\mu - P^\mu)), \quad \langle \pi\pi | V^\mu | K \rangle = -\frac{h}{M^3} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} K_\nu P_\rho Q_\sigma, \quad (1.54)$$

onde  $P = p + q$  e  $Q = p - q$  são a soma e a diferença dos quadri-momentos dos píons, respectivamente,  $K$  é o quadri-momento do káon,  $M$  a massa do káon, e  $f, g, h, r$  são fatores de forma complexos.  $M^{-1}$  e  $M^{-3}$  nas expressões acima têm apenas o objetivo de tornar os fatores de forma adimensionais. A contribuição dada pelo fator de forma  $r$  é desprezível, pois sempre aparece multiplicada por um fator  $m_e^2$  (massa do elétron) ao se calcular a razão de decaimento, de forma que a omitiremos doravante.

Dessa forma, o módulo quadrado da amplitude invariante é dado por

$$|\mathcal{M}_0|^2 = \frac{G_F^2}{2} |V_{us}|^2 \bar{u}(p_\nu) \not{J} (1 + \gamma_5) v(p_e) \bar{v}(p_e) (1 - \gamma_5) \not{J}^\dagger u(p_\nu), \quad (1.55)$$

em que usamos a notação abreviada  $J^\mu = \langle \pi\pi | V^\mu + A^\mu | K^0 \rangle$ . Somando-se então sobre os spins dos léptons<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} \sum_{spins} |\mathcal{M}_0|^2 &= \frac{G_F^2}{2} |V_{us}|^2 \text{Tr} [\not{p}_\nu \not{J} (1 + \gamma_5) (\not{p}_e - m_e) (1 - \gamma_5) \not{J}^\dagger] \\ &= G_F^2 |V_{us}|^2 (\text{Tr} [\not{p}_\nu \not{J} \not{p}_e \not{J}^\dagger] - \text{Tr} [\not{p}_\nu \not{J} \not{p}_e \gamma_5 \not{J}^\dagger]), \end{aligned}$$

<sup>8</sup>E desprezando-se a massa do neutrino.

onde usamos  $\gamma_5 \gamma_5 = 1$  e  $\gamma_5 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \gamma_5$ . Um pouco de álgebra mostra que

$$\text{Tr} [\not{p}_\nu \not{J} \not{p}_e \not{J}^\dagger] = 4 [2\Re[(p_\nu \cdot J)(p_e \cdot J^*)] - |J|^2(p_\nu \cdot p_e)], \quad (1.56)$$

$$\text{Tr} [\not{p}_\nu \not{J} \not{p}_e \gamma_5 \not{J}^\dagger] = 4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{\nu\mu} J_\nu p_{e\rho} J_\sigma^* = -4\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{\nu\mu} p_{e\rho} \Im(J_\nu J_\sigma^*), \quad (1.57)$$

de modo que o valor médio de  $|\mathcal{M}_0|^2$  pode ser escrito na forma

$$\overline{|\mathcal{M}_0|^2} = 4G_F^2 |V_{us}|^2 [2\Re[(p_\nu \cdot J)(p_e \cdot J^*)] - |J|^2(p_\nu \cdot p_e) + \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} p_{\nu\mu} p_{e\rho} \Im(J_\nu J_\sigma^*)]. \quad (1.58)$$

O objetivo agora é escrever  $\overline{|\mathcal{M}_0|^2}$  em termos de escalares invariantes formados a partir dos quadri-vetores  $P$ ,  $Q$ ,  $L$  e  $N$ , com

$$L = p_e + p_\nu, \quad N = p_e - p_\nu, \quad (1.59)$$

e por fim expressar esses escalares em termos de variáveis cinemáticas, que no caso de  $K_{e4}^0$  são cinco, a saber: as massas invariantes  $\sqrt{s_\pi}$  e  $\sqrt{s_l}$  dos sistemas  $\pi\pi$  e  $e\nu$ , respectivamente; o ângulo  $\theta_\pi$  entre o momento do pión carregado no sistema do centro de massa dos píons e o momento total dos píons no sistema de repouso do káon; o ângulo  $\theta_l$  entre o momento do lépton carregado no sistema do centro de massa dos léptons e o momento total dos léptons no sistema de repouso do káon; o ângulo  $\Phi$  entre o plano de decaimento dos píons e o plano de decaimento dos léptons, medido no sistema de repouso do káon. No apêndice B, demonstra-se que essas cinco variáveis geram o espaço de fase inteiro de  $K_{e4}^0$ . Como a definição dos ângulos parece bastante peculiar, eles estão representados na figura 1.1 para um melhor entendimento da geometria desse decaimento em quatro corpos. Na aproximação  $m_e = 0$ , a dependência dos escalares invariantes com as variáveis cinemáticas pode ser encontrada em [32], onde os decaimentos  $Bl4$  ( $B \rightarrow \pi\pi l\nu$  e  $B \rightarrow D\pi l\nu$ ) e  $Dl4$  ( $D \rightarrow K\pi l\nu$  e  $D \rightarrow \pi\pi l\nu$ ) dos mésons  $B$  e  $D$ <sup>9</sup> são estudados<sup>10</sup>. Entretanto, quando correções radiativas eletromagnéticas são incluídas, e abordadas no capítulo 2, por razões de precisão numérica do Monte Carlo, percebe-se que a massa do elétron se torna importante para pontos do espaço de fase correspondentes à situação em que o lépton e o pión carregados são produzidos quase em repouso. Assim, deduziu-se as expressões gerais, válidas para um valor finito de  $m_e$ , bem como para uma diferença de massa não nula entre os píons

$$Q^2 = 2(m_\pi^2 + m_{\pi^0}^2) - s_\pi, \quad (1.60)$$

$$N^2 = 2m_e^2 - s_l, \quad (1.61)$$

$$P \cdot L = \frac{M^2 - s_\pi - s_l}{2}, \quad (1.62)$$

$$Q \cdot L = \frac{\Delta m_\pi^2}{s_\pi} (P \cdot L) + \beta X \cos \theta_\pi, \quad (1.63)$$

<sup>9</sup>Mésons em que um dos quarks do par é de sabor  $b$  ou  $d$ , respectivamente.

<sup>10</sup>As fórmulas apresentadas na referência [33] são válidas apenas para o caso em que os píons são degenerados em massa, que é o caso da versão carregada de  $K_{e4}^0$ , mas não para o caso neutro.

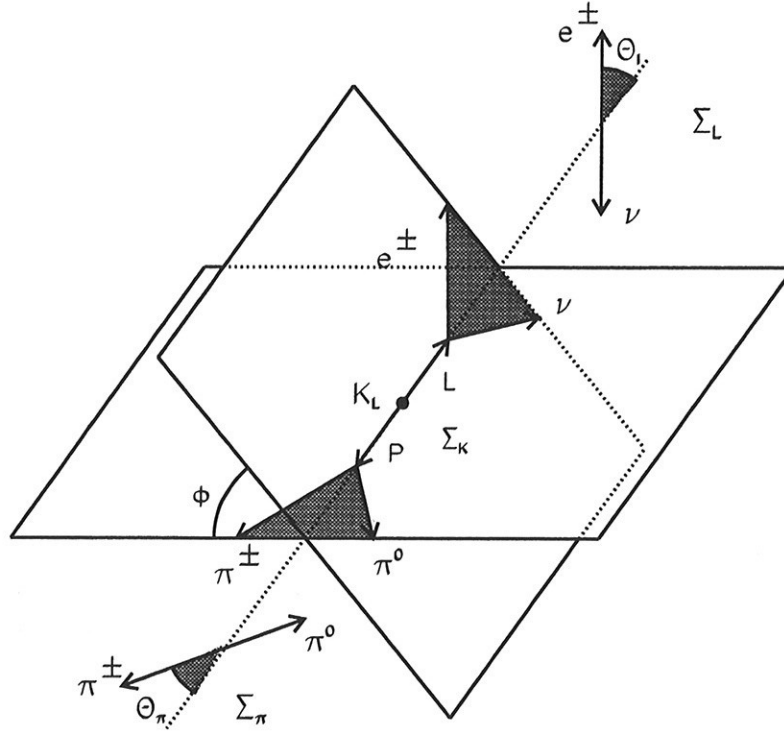
Geometria de  $K_{e4}$ 

Figura 1.1: Esquema da geometria do decaimento  $K_{e4}^0$  mostrando a orientação dos planos no espaço e os ângulos  $\theta_\pi$ ,  $\theta_l$  e  $\Phi$ .

$$P \cdot N = X \cos \theta_l + \frac{m_e^2}{s_l} (P \cdot L - X \cos \theta_l), \quad (1.64)$$

$$Q \cdot N = \left[ \left( \frac{s_l - m_e^2}{s_l} \right) \beta \cos \theta_\pi \cos \theta_l + \frac{m_e^2 \Delta m_\pi^2}{s_l s_\pi} \right] (P \cdot L) \\ - \left( \frac{s_l - m_e^2}{s_l} \right) \left[ \beta \sqrt{s_\pi s_l} \sin \theta_\pi \sin \theta_l \cos \Phi - \frac{\Delta m_\pi^2}{s_\pi} X \cos \theta_l \right] \\ + \frac{m_e^2}{s_l} \beta X \cos \theta_\pi, \quad (1.65)$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} Q_\mu P_\nu N_\rho L_\sigma = -\beta X \sqrt{s_\pi s_l} \sin \theta_\pi \sin \theta_l \sin \Phi, \quad (1.66)$$

onde  $\beta$  é definido no apêndice B (equação B.11), e corresponde fisicamente à velocidade do pión carregado, medida no sistema do centro de massa do par  $\pi\pi$ ,

$$X = \sqrt{(P \cdot L)^2 - s_\pi s_l}. \quad (1.67)$$

e é proporcional ao momento total dos píons no sistema de repouso do káon, sendo a constante de proporcionalidade a massa do káon.

A largura diferencial é dada então por<sup>11</sup>

$$d\Gamma = \frac{1}{2M} |\overline{\mathcal{M}_0}|^2 d\Omega = \frac{G_F^2}{(4\pi)^6 M^5} |V_{us}|^2 \beta X I(s_\pi, s_l, \theta_\pi, \theta_l, \Phi) ds_\pi ds_l d\cos\theta_\pi d\cos\theta_l d\Phi, \quad (1.68)$$

onde a função  $I(s_\pi, s_l, \theta_\pi, \theta_l, \Phi)$  contém toda a dependência nos fatores de forma  $f$ ,  $g$  e  $h$ , e pode ser convenientemente escrita de tal maneira que a dependência funcional nas variáveis  $\theta_l$  e  $\Phi$  se fatoriza. De maneira explícita, temos

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \cos 2\theta_l + I_3 \sin^2 \theta_l \cos 2\Phi + I_4 \sin 2\theta_l \cos \Phi + I_5 \sin \theta_l \cos \Phi \\ &+ I_6 \cos \theta_l + I_7 \sin \theta_l \sin \Phi + I_8 \sin 2\theta_l \sin \Phi + I_9 \sin^2 \theta_l \sin 2\Phi. \end{aligned} \quad (1.69)$$

Para mostrar a estrutura de  $I$  em mais detalhes, é conveniente introduzir as seguintes três novas variáveis

$$F_1 = Xf + \left[ \beta P \cdot L \cos \theta_\pi + \frac{\Delta m_\pi^2}{s_\pi} X \right] g, \quad (1.70)$$

$$F_2 = g\beta\sqrt{s_\pi s_l}, \quad (1.71)$$

$$F_3 = \frac{h}{M^2} \beta X \sqrt{s_\pi s_l}, \quad (1.72)$$

e então é possível escrever

$$I_1 = \frac{1}{4} \left[ |F_1|^2 + \frac{3}{2} \sin^2 \theta_\pi (|F_2|^2 + |F_3|^2) \right], \quad (1.73)$$

$$I_2 = -\frac{1}{4} \left[ |F_1|^2 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta_\pi (|F_2|^2 + |F_3|^2) \right], \quad (1.74)$$

$$I_3 = -\frac{1}{4} (|F_2|^2 - |F_3|^2) \sin^2 \theta_\pi, \quad (1.75)$$

$$I_4 = \frac{1}{2} \Re(F_1^* F_2) \sin \theta_\pi, \quad (1.76)$$

$$I_5 = \Re(F_1^* F_3) \sin \theta_\pi, \quad (1.77)$$

$$I_6 = \Re(F_2^* F_3) \sin^2 \theta_\pi, \quad (1.78)$$

$$I_7 = \Im(F_1 F_2^*) \sin \theta_\pi, \quad (1.79)$$

$$I_8 = \frac{1}{2} \Im(F_1 F_3^*) \sin \theta_\pi, \quad (1.80)$$

$$I_9 = -\frac{1}{2} \Im(F_2 F_3^*) \sin^2 \theta_\pi. \quad (1.81)$$

Se formos para o sistema do centro de massa dos píons ( $\Sigma_\pi$ ), os fatores de forma podem ser expandidos em ondas parciais num sistema de referência cujo ângulo polar é dado por  $\theta_\pi$ , de modo que é possível escrever

$$\begin{aligned} f &= f_s e^{i\delta_s} + f_p \cos \theta_\pi e^{i\delta_p} + \dots, \\ g &= g_p e^{i\delta_p} + \dots, \\ h &= h_p e^{i\delta_p} + \dots, \end{aligned} \quad (1.82)$$

<sup>11</sup> Ver apêndice B.

as reticências indicam ondas parciais de momento angular mais alto (ondas  $D$ , etc). Note que os fatores de forma  $g$  e  $h$  não possuem o termo correspondente à onda  $S$ , uma vez que os termos cinemáticos aos quais esses fatores aparecem associados na amplitude invariante são anti-simétricos com respeito à troca dos píons. Ao levar em conta a energia cinética disponível no estado final de  $K_{e4}^0$  ( $\approx 200$  MeV), concluímos que as ondas  $S$  e  $P$  na expansão (1.82) acima devem formar a contribuição dominante para os fatores de forma.

Além da dependência em  $\theta_\pi$ , leva-se em conta também uma dependência de  $g$  com  $s_\pi$ <sup>12</sup> por meio de uma expansão de Taylor até primeira ordem no quadrado momento transferido  $q$

$$g(q^2) = g(0) (1 + \lambda_g q^2), \quad q^2 = \frac{s_\pi - 4m_\pi^2}{4m_\pi^2}. \quad (1.83)$$

### 1.4.2 Previsões quirais para os fatores de forma

Por meio das lagrangeanas (1.45) e (1.46) e de resultados deduzidos a partir da hipótese de *Conservação Parcial da Corrente Axial* (CPCA) podemos obter previsões teóricas para os fatores de forma do elemento de matriz  $\langle \pi\pi | V^\mu + A^\mu | K \rangle$  até  $\mathcal{O}(E^4)$ . Em [34], Weinberg usou o formalismo LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmerman)[35] para calcular pela primeira vez os fatores de forma de  $K_{e4}$  em nível de árvore. Os elementos de matriz por ele considerado foram

$$\langle \pi_a(q)\pi_b(p) | A_n^\lambda(0) | K_m(k) \rangle = \frac{1}{M} [fP^\lambda + gQ^\lambda + r(k-P)^\lambda], \quad (1.84)$$

$$\langle \pi_a(q)\pi_b(p) | V_n^\lambda(0) | K_m(k) \rangle = \frac{h}{M^3} \epsilon^{\lambda\nu\rho\sigma} K_\nu P_\rho Q_\sigma, \quad (1.85)$$

em que o índice  $m$  corresponde à componente  $I_3$  do spin isotópico do káon ( $m = \pm 1/2$ ),  $a, b$  são índices iso-vetoriais para os píons ( $a, b = 1, 2, 3$ ),  $A_n^\lambda$  é a corrente vetor-axial, associada a  $\Delta S = -1$  e  $\Delta I_3 = -n$ , e  $V_n^\lambda$  a correspondente corrente vetorial<sup>13</sup>. De acordo com o cálculo de Weinberg, os fatores de forma em ordem 0 na expansão em energia são dados por

$$f^{(0)} = \frac{M}{\sqrt{2}F_\pi} \delta_{ab} \delta_{nm}, \quad (1.86)$$

$$g^{(0)} = -i \frac{M}{\sqrt{2}F_\pi} \epsilon_{abc} (\tau_c)_{nm}, \quad (1.87)$$

$$r^{(0)} = \frac{M}{2\sqrt{2}F_\pi} [\delta_{ab} \delta_{nm} + i \epsilon_{abc} (\tau_c)_{nm} \kappa], \quad (1.88)$$

$$h^{(0)} = 0, \quad (1.89)$$

<sup>12</sup>Daqui por diante usaremos  $g(0)$ , omitindo o índice subscripto  $p$ .

<sup>13</sup>Essas correntes são as mesmas já introduzidas na expressão (1.54), e só foram melhor especificadas aqui com o auxílio do índice  $n$ .



onde  $\kappa = k \cdot Q / k \cdot P$ . Dessa forma, obtem-se para  $K_{e4}^0$

$$f^{(0)} = 0, \quad g^{(0)} = \frac{M}{\sqrt{2}F_\pi} = 3.808 \pm 0.011, \quad e \quad h^{(0)} = 0. \quad (1.90)$$

O índice sobrescrito (0) nos fatores de forma acima indicam que o cálculo foi baseado apenas na lagrangeana quiral de ordem mais baixa na expansão em energia, isto é,  $\mathcal{L}_2$ . O fator de forma  $f$  se anula em ordem mais baixa devido à simetria de Bose e de isospin, já discutidas na seção 1.4.1, e que implicam na anti-simetrização de  $f$  e na simetrização de  $g$  e  $h$  com respeito à troca dos píons, isto é,

$$f \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [f(\pi^\pm, \pi^0) - f(\pi^0, \pi^\pm)], \quad (1.91)$$

$$g \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [g(\pi^\pm, \pi^0) + g(\pi^0, \pi^\pm)], \quad (1.92)$$

$$h \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [h(\pi^\pm, \pi^0) + h(\pi^0, \pi^\pm)]. \quad (1.93)$$

Ao se incluir as correções de um loop nos fatores de forma, obtemos para  $f$  o resultado [36, 37, 38]

$$f(s_\pi, t, u) = \frac{M}{\sqrt{2}F_\pi} \left[ 1 + \frac{1}{F_\pi^2} (U_f + P_f + C_f) \right], \quad (1.94)$$

em que  $U_f$  denota a correção de unitariedade gerada pelos gráficos de 1-loop que aparecem em ordem  $E^4$  na expansão em energia, e sua forma explícita encontra-se no apêndice E. A contribuição  $P_f$  é obtida dos gráficos em nível de árvore e ordem  $E^4$

$$P_f(s_\pi, t, u) = \sum_{i=1}^9 p_{i,f}^r L_i^r, \quad (1.95)$$

onde os  $L_i^r$  são as dez constantes de baixa energia (já renormalizadas) presentes em  $\mathcal{L}_4$ , e os  $p_{i,f}$  são dados por

$$\begin{aligned} p_{1,f} &= 32(s_\pi - 2m_\pi^2), \\ p_{2,f} &= 8(M^2 + s_\pi - s_l), \\ p_{3,f} &= 4(M^2 - 3m_\pi^2 + 2s_\pi - t), \\ p_{4,f} &= 32m_\pi^2, \\ p_{5,f} &= 4m_\pi^2, \\ p_{9,f} &= 2s_l, \end{aligned}$$

sendo que os coeficientes restantes são nulos. A constante  $C_f$  contém a dependência na escala de renormalização  $\mu$  e é independente das variáveis de Mandelstam  $s_\pi, t, u$ .

$$C_f = \frac{1}{28\pi^2} \left[ 5m_\pi^2 \ln \frac{m_\pi^2}{\mu^2} - 2M^2 \ln \frac{M^2}{\mu^2} - 3m_\eta^2 \ln \frac{m_\eta^2}{\mu^2} \right]. \quad (1.96)$$

A correspondente expressão para o fator de forma  $g$  é

$$g(s_\pi, t, u) = \frac{M}{\sqrt{2}F_\pi} \left[ 1 + \frac{1}{F_\pi^2} (U_g + P_g + C_g) \right], \quad (1.97)$$

com uma expressão análoga a (1.95) para  $P_g$  com os coeficientes

$$\begin{aligned} p_{2,g} &= 8(t - u), \\ p_{3,g} &= 4(t - M^2 - m_\pi^2), \\ p_{5,g} &= 4m_\pi^2, \\ p_{9,g} &= 2s_l, \end{aligned}$$

a expressão para  $U_g$  é fornecida no apêndice E e  $C_g = -C_f$ . Os termos  $P_{f(g)}$  e  $C_{f(g)}$  são claramente reais e, portanto, as partes imaginárias de  $f$  e  $g$  originam-se das correções de unitariedade  $U_{f(g)}$  (ver apêndice E). A primeira contribuição não nula para o fator de forma  $h$  é devida à denominada anomalia quiral[15, 16, 39]<sup>14</sup>

$$h = -\frac{M^3}{4\sqrt{2}F_\pi^3} = -2.797 \pm 0.024. \quad (1.98)$$

A previsão quiral para o coeficiente  $\lambda_g$  em (1.83) é

$$\lambda_g = \frac{1}{g(0)} \left. \frac{dg}{dq^2} \right|_{q^2=0} = -\frac{8Mm_\pi^2}{\sqrt{2}F_\pi^3 g(0)} L_3 + U_{\lambda_g}, \quad (1.99)$$

onde  $U_{\lambda_g}$  representa as correções de unitariedade. Baseado em medidas anteriores de  $L_3$  (vide tabela 1.1), o valor previsto é  $\lambda_g = 0.08 \pm 0.02$ .

A dependência com a escala de renormalização  $\mu$  presente em  $C_{f(g)}$  é cancelada pela contribuição que advém das constantes de baixa energia  $L_i^r$  renormalizadas, de modo que observáveis físicos são independentes da escala  $\mu$ . Dadas duas escalas de renormalização  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , a evolução dos  $L_i^r$ s de uma escala a outra é dada por

$$L_i^r(\mu_2) = L_i^r(\mu_1) + \frac{\Gamma_i}{(4\pi)^2} \ln \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \right), \quad (1.100)$$

onde os valores dos  $L_i^r$ s, medidos na escala  $\mu = M_\rho$ [40], bem como os valores dos coeficientes  $\Gamma_i$  podem ser vistos na tabela 1.1. Note que as constantes  $H_1$  e  $H_2$  em (1.46) não são acessíveis experimentalmente. Note também que, até ordem  $E^4$ ,  $L_3$  e  $L_7$ , de fato, não dependem da escala de renormalização.

<sup>14</sup>A lagrangeana (1.46) não é capaz de prever o fator de forma  $h$ , esse último sendo obtido apenas por meio um termo adicional (Wess-Zumino) relacionado à chamada anomalia quiral  $\mathcal{L}_{WZ} = -\frac{N_c}{48\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} (U \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \partial_\alpha U^\dagger \partial_\beta U)$ .

$i$	$L_i^r(M_\rho) \times 10^3$	fonte	$\Gamma_i$
1	$0.4 \pm 0.3$	$\pi\pi$ D-waves, Zweig rule	3/32
2	$1.35 \pm 0.3$	$\pi\pi$ D-waves	3/16
3	$-3.5 \pm 1.1$	$\pi\pi$ D-waves, Zweig rule	0
4	$-0.3 \pm 0.5$	Zweig rule	1/8
5	$1.4 \pm 0.5$	$F_K : F_\pi$	3/8
6	$-0.2 \pm 0.3$	Zweig rule	11/144
7	$-0.4 \pm 0.2$	Gell-Mann-Okubo, $L_5, L_8$	0
8	$0.9 \pm 0.3$	$M_{K^0} - M_{K^+}, L_5,$ $(2m_s - m_u - m_d) : (m_d - m_u)$	5/48
9	$6.9 \pm 0.7$	$\langle r^2 \rangle_{em}^\pi$	1/4
10	$-5.5 \pm 0.7$	$\pi \rightarrow e\nu\gamma$	1/4

Tabela 1.1: Constantes de acoplamento em baixa energia renormalizadas  $L_i^r$ , na escala  $\mu = M_\rho$  e coeficientes  $\Gamma_i$  para o *running* dos  $L_i^r$ , de acordo com a referência [4]. O método de extração das constantes é indicado na coluna fonte.

### 1.4.3 Dependência funcional de $\Gamma_{K_{e4}^0}$ com $L_3$

O processo de simetrização e anti-simetrização dos fatores de forma de acordo com as expressões (1.93), faz com que a largura de  $K_{e4}^0$  dependa somente das constantes  $L_3^r, L_5^r$  e  $L_9^r$  (a dependência com os  $L_i$ s aparece através dos termos  $P_{i,f(g)}$ , sendo que  $P_{1,f}, P_{2,f}, P_{4,f}, P_{5,f}, P_{9,f}$  são todos simétricos em relação à troca  $u \leftrightarrow t$ , ao passo que  $P_{2,g}$  é anti-simétrico). De fato, a dependência com  $L_5^r$  e  $L_9^r$  mostra-se bastante fraca, de modo que uma medida de  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  fornece uma medida **quase** imediata de  $L_3^r$ , pois demonstramos a seguir o seguinte resultado:

*A forma funcional de  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  é quadrática em  $L_3^r$ , tal que, a princípio, há um par de valores possíveis dessa constante para um dado valor da largura. A ambiguidade é resolvida por meio da medida, por exemplo, do coeficiente  $\lambda_g$ .*

A demonstração é simples e começamos integrando a razão diferencial de decaimento em (1.68) nas variáveis  $\theta_l$  e  $\Phi$ , dado que os fatores de forma não dependem dessas variáveis. Após a integração, temos

$$d\Gamma_3(s_\pi, s_l, \theta_\pi) = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2}{(4\pi)^6 M^5} \beta X \left( I_1 - \frac{1}{3} I_2 \right) ds_\pi ds_l d \cos \theta_\pi. \quad (1.101)$$

A dependência em  $L_3$  é dada por  $P_{f(g)}$ , e esses contribuem somente para a parte real de  $f$  e  $g$ . Portanto, é possível isolar  $L_3$  por meio das partes reais  $\Re F_1$  e  $\Re F_2$  na forma

$$\frac{d\Gamma_3(s_\pi, s_l, \theta_\pi)}{ds_\pi ds_l d \cos \theta_\pi} = N \beta X \left[ (\Re F_1)^2 + \sin^2 \theta_\pi (\Re F_2)^2 + \underbrace{(\Im F_1)^2 + \sin^2 \theta_\pi [(\Im F_2)^2 + |F_3|^2]}_{D_3} \right], \quad (1.102)$$

em que a constante de normalização  $N = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2}{3(4\pi)^6 M^5}$  foi introduzida para simplificar a notação, e  $D_3$  independe de  $L_3$ . As partes reais de  $F_1$  e  $F_2$  dependem das correspondentes partes reais de  $f$  e  $g$  de acordo com (1.70-1.71), e por sua vez

$$\Re f = 4\beta X \cos \theta_\pi L_3 + D_1, \quad \Re g = -4\beta X \cos \theta_\pi L_3 + D_2, \quad (1.103)$$

em que  $D_1$  e  $D_2$  são também independentes de  $L_3$  e podem ser facilmente obtidas das partes reais de  $f$  e  $g$ . Integrando então nas variáveis cinemáticas restantes obtém-se

$$\Gamma = AL_3^2 + BL_3 + C, \quad (1.104)$$

com

$$\begin{aligned} A &= 16N \int ds_\pi ds_l d \cos \theta_\pi \beta^3 X^3 \cos^2 \theta_\pi [(X - Y)^2 + \beta^2 s_\pi s_l \sin^2 \theta_\pi] \\ B &= 8N \int ds_\pi ds_l d \cos \theta_\pi \beta^2 X^2 \cos \theta_\pi [(X - Y)(XD_1 + YD_2) - \beta^2 s_\pi s_l D_2 \sin^2 \theta_\pi] \\ C &= N \int ds_\pi ds_l d \cos \theta_\pi \beta X [(XD_1 + YD_2)^2 + \sin^2 \theta_\pi \beta^2 s_\pi s_l D_2^2 + D_3], \end{aligned}$$

onde introduziu-se a variável  $Y = \beta(P \cdot L) \cos \theta_\pi$ , e a demonstração está concluída.

# Capítulo 2

## Correções radiativas de ordem $\alpha_{\text{QED}}$

A presença de partículas carregadas, em especial do lépton carregado ( $e^\pm$ ), no estado final de  $K_{e4}^0$  e o tamanho da amostra identificada nessa análise ( $\approx 4000$  eventos) não nos permitem desprezar os efeitos de correções radiativas eletromagnéticas. O lépton deve ser responsável por grande parte da radiação de *bremsstrahlung* interno emitida, o restante vindo do pión carregado. Além da emissão de fótons reais, é preciso levar em conta também as correções de natureza virtual. O resultado final é uma competição entre esses dois processos, em que os fótons reais alteram a eficiência de detecção do decaimento, pois em geral aumentam a quantidade total de radiação que atravessa o aparato experimental, modificando, por exemplo, a frequência de disparo do sistema de veto ou incrementando a probabilidade de fusão de *clusters* no calorímetro. As correções virtuais, por sua vez, determinam a chamada largura não-radiativa, e como ficará claro mais adiante, tais correções são negativas e atuam de modo a aumentar a probabilidade de emissão de fótons reais. Dessa forma, a determinação do tamanho das correções virtuais torna-se tão importante quanto a das reais e deve ser estudada com cuidado.

O objetivo principal desse capítulo é a obtenção da fração radiativa de  $K_{e4}^0$ , levando-se em conta os processos de *bremsstrahlung* interno do lépton e do pión carregado e possíveis contribuições finitas geradas por correções virtuais. Essa fração pode então ser comparada com aquela fornecida pelo pacote PHOTOS, utilizado nessa análise para a inclusão de correções radiativas.

### 2.1 Correções virtuais

Uma lagrangeana fenomenológica descrevendo o decaimento  $K_{e4}^0$  pode ser escrita na forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I, \quad (2.1)$$

onde  $\mathcal{L}_0$  é a lagrangeana de campos livres, e que na representação de interação rege a evolução dos operadores, enquanto  $\mathcal{L}_I$  é a parte de interação e governa a evolução dos estados quânticos. A parte livre tem a forma

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial^\mu \Phi^T \partial_\mu \Phi - \Phi^T \mathbf{M}^2 \Phi) + \bar{\psi}_e (i\cancel{\partial} - m_0) \psi_e + \bar{\psi}_\nu (i\cancel{\partial} - m_\nu) \psi_\nu + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{M} = \text{diag}(m, m_{\pi^0}, m)$ ,  $\Phi^T = (\phi_{\pi^+}, \phi_{\pi^0}, \phi_{\pi^-})$ , e

$$\mathcal{L}_I = \mathbf{J}^\mu \mathbf{j}_\mu, \quad (2.3)$$

com as correntes hadrônica e leptônica satisfazendo as condições

$$\langle \pi\pi | \mathbf{J}^\mu | K^0 \rangle = J^\mu, \quad \langle e\nu | \mathbf{j}_\mu | 0 \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* \bar{u}(p_\nu) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) v(p_e). \quad (2.4)$$

Para incluir as correções radiativas, um acoplamento entre os campos dos férmions e dos bósons carregados precisa ser introduzido, este sendo facilmente obtido por meio da chamada substituição mínima  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$ .

### 2.1.1 Auto-energia do elétron

Uma das correções radiativas eletromagnéticas em  $K_{e4}^0$  é naturalmente a auto-energia do elétron, cujo diagrama de Feynman de ordem mais baixa é apresentado na figura 2.1. Este diagrama é bem conhecido em Eletrodinâmica Quântica e dá origem à chamada *função de auto energia do elétron*[41, 42]

$$-i\Sigma_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{i(\not{p}_e - \not{k} + m_0)}{(p_e - k)^2 - m_0^2} \gamma_\mu \frac{-i}{k^2 - \mu^2}. \quad (2.5)$$

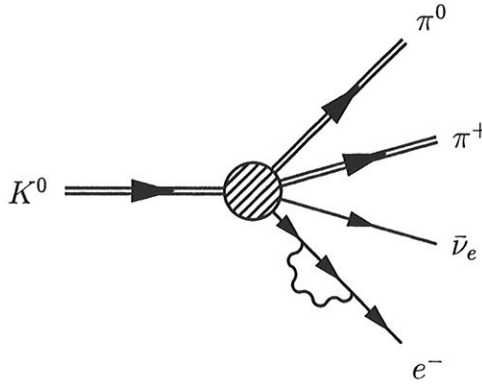


Figura 2.1: Diagrama de Feynman para a auto-energia do elétron em  $K_{e4}^0$ .

Sabe-se que  $\Sigma_2(p)$  é divergente no ultravioleta. Entretanto, as inserções de auto-energia afetam todo e qualquer elétron na natureza, isto é, não é possível observar um elétron “nu”, uma vez que este sempre se encontra rodeado de uma nuvem de quanta virtuais. Tal nuvem nos força a redefinir as noções de massa e carga elétrica dos férmions carregados.

No caso da função de auto-energia do elétron na equação (2.5), podemos expandir  $\Sigma_2(p_e)$  em série de potências em torno de  $\not{p}_e = m_e$

$$\Sigma_2(p_e) = A + B(\not{p}_e - m_e) + C(\not{p}_e - m_e)^2, \quad (2.6)$$

onde  $C$  vai linearmente a zero no limite  $\not{p}_e \rightarrow m_e$ , de forma que é possível escrever para os coeficientes  $A$  e  $B$

$$A = \Sigma_2(\not{p}_e = m_e), \quad B = \left[ \frac{\partial \Sigma_2}{\partial \not{p}} \right]_{\not{p}_e = m_e}. \quad (2.7)$$

Dessa forma, de acordo com a QED renormalizada, até ordem  $\alpha_{\text{QED}}$ , o efeito da inclusão de todos os diagramas de auto energia 1PI (do inglês 1-particle irreducible) pode ser totalmente levado em conta definindo-se uma massa física  $m_e$ , e renormalizando-se a função de onda  $u(\mathbf{p})$  dessa partícula da seguinte forma

$$m_e = m_0 + \delta m = m_0 - e^2 A, \quad u(\mathbf{p}) \rightarrow \sqrt{Z_2} u(\mathbf{p}) = \left( 1 - \frac{e^2}{2} B \right) u(\mathbf{p}). \quad (2.8)$$

Embora  $A$  e  $B$  sejam ambos divergentes no ultravioleta, essas quantidades não são fisicamente mensuráveis, e apenas relacionam as quantidades físicas acessíveis experimentalmente com as quantidades “nuas” (e divergentes). Usando o procedimento de regularização de Pauli-Villars [43, 41], por exemplo, o comportamento ultravioleta de  $A$  e  $B$  pode ser parametrizado usando-se um corte  $\Lambda$  na energia dos fótons virtuais [43, 41]

$$A = \frac{3m_0}{(4\pi)^2} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right), \quad B = -\frac{\alpha_{\text{QED}}}{2\pi} \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m_0^2} \right) + \ln \left( \frac{\mu^2}{m_0^2} \right) + \frac{9}{4} \right], \quad (2.9)$$

de forma que as divergências podem ser evitadas, tão logo trabalhemos com a massa física e os campos renormalizados  $\psi_{er} = Z_2^{-1/2} \psi_e$ . Reescrevendo a equação (2.1) em termos dessas novas quantidades tem-se

$$\mathcal{L}^{\text{Ren}} = \mathcal{L}(\psi_{er}) + \bar{\psi}_{er} (i\delta_2 \not{\partial} - \delta m) \psi_{er}, \quad (2.10)$$

onde  $\mathcal{L}(\psi_{er})$  é a lagrangeana da equação (2.1) após as substituições  $\psi_e \rightarrow \psi_{er}$  e  $m_0 \rightarrow m_e$ ,  $\delta m = m_e - m_0$  e  $\delta_2 = Z_2 - 1$ .

### 2.1.2 Auto-energia do pión

De maneira análoga ao caso da auto-energia do elétron, o diagrama da figura 2.2 dá origem à *função de auto-energia do pión*

$$-i\Omega_2(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i(2p-k)^2}{(p-k)^2 - m^2} \frac{-i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (2.11)$$

e novamente, a prescrição para incluir os efeitos de ordem mais baixa originados por esse diagrama é: substituir a massa “nua” do pión no propagador e redefinir a função de onda do mesmo, isto é,

$$m_\pi^2 = m^2 + \delta m_\pi^2 = m^2 - e^2 A_\pi, \quad \phi_\pi(\mathbf{p}) \rightarrow \sqrt{Z_2^\pi} \phi_\pi(\mathbf{p}) = \left( 1 - \frac{e^2}{2} B_\pi \right) \phi_\pi(\mathbf{p}), \quad (2.12)$$

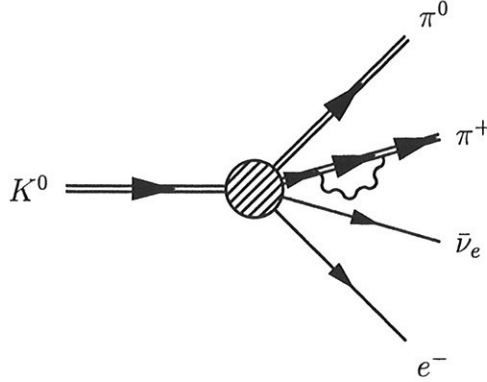


Figura 2.2: Diagrama de Feynman para a auto-energia do pión em  $K_{e4}^0$ .

onde

$$A_\pi = \Omega_2(p^2 = m_\pi^2), \quad B_\pi = \left[ \frac{\partial \Omega_2}{\partial (p^2)} \right]_{p^2=m_\pi^2} \quad (2.13)$$

De acordo com o procedimento de regularização de Pauli-Villars, temos[44]

$$B_\pi = \frac{\alpha_{\text{QED}}}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{m^2} \right) + \ln \left( \frac{m^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{4} \right], \quad (2.14)$$

e pode-se evitar as divergências mais uma vez trabalhando com a massa física do pión e um campo de Klein-Gordon renormalizado  $\phi_{\pi r} = Z_\pi^{-1/2} \phi_\pi$ . Em termos dessas variáveis podemos escrever

$$\mathcal{L}^{\text{Ren}} = \mathcal{L}(\psi_{e r}, \phi_{\pi r}) + \bar{\psi}_{e r} (i\delta_2 \not{\partial} - \delta m) \psi_{e r} + \frac{1}{2} (\delta_2^\pi \partial^\mu \Phi^T \partial_\mu \Phi - \Phi^T \delta \mathbf{M}^2 \Phi), \quad (2.15)$$

com  $\delta \mathbf{M}^2 = \text{diag}(\delta m_\pi^2, 0, \delta m_\pi^2)$ , e  $\delta_2^\pi = Z_\pi^\pi - 1$ .

### 2.1.3 Correção de vértice

Vimos até agora que correções virtuais dadas pelos diagramas de auto-energia são completamente absorvidas por meio de uma redefinição das massas e funções de onda. Entretanto, além desses diagramas, correções de ordem  $\alpha_{\text{QED}}^2$  (em  $\mathcal{M}$ ), devem incluir também correções de vértice, como aquela representada pelo diagrama de Feynman da figura 2.3. De fato, esse diagrama originará uma contribuição finita para a largura de decaimento, após um procedimento de renormalização apropriado para eliminar as divergências ultravioleta. As regras de Feynman aplicadas ao processo em questão implicam na amplitude

$$\mathcal{M}_{e\pi}^{VC} = \langle \pi\pi | V^\mu + A^\mu | K^0 \rangle \bar{u}(p_\nu) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \Gamma_2(p_e, p) v(p_e), \quad (2.16)$$

com

$$\Gamma_2(p_e, p) = -i(-ie)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p-k)^\alpha}{(p-k)^2 - m_\pi^2} \frac{i(-\not{p}_e + \not{k} + m_e)}{(p_e-k)^2 - m_e^2} \gamma^\alpha \frac{-i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon}, \quad (2.17)$$



onde foram usadas as massas físicas nos propagadores do elétron e do pión, assim como funções de onda renormalizadas. Separando o numerador em potências de  $k$ , a função  $\Gamma_2(p_e, p)$  divide-se em três pedaços convenientes

$$\Gamma_2(p_e, p) = -i(-ie)^2 \left[ C_1 J_{e\pi}^{(1)} - C_2^\mu J_{e\pi \mu}^{(2)} + J_{e\pi}^{(3)} \right], \quad (2.18)$$

onde

$$J_{e\pi}^{(1)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m_\pi^2][(p_e-k)^2 - m_e^2][k^2 - \mu^2]}, \quad (2.19)$$

$$J_{e\pi \mu}^{(2)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_\mu}{[(p-k)^2 - m_\pi^2][(p_e-k)^2 - m_e^2][k^2 - \mu^2]}, \quad (2.20)$$

$$J_{e\pi}^{(3)} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p-k)^2 - m_\pi^2][(p_e-k)^2 - m_e^2]}, \quad (2.21)$$

e os coeficientes  $C_i$ 's são dados por

$$C_1 = -2(\not{p}_e - m_e)\not{p}, \quad C_2^\mu = (-\not{p}_e + m_e - 2\not{p})\gamma^\mu + 4p^\mu. \quad (2.22)$$

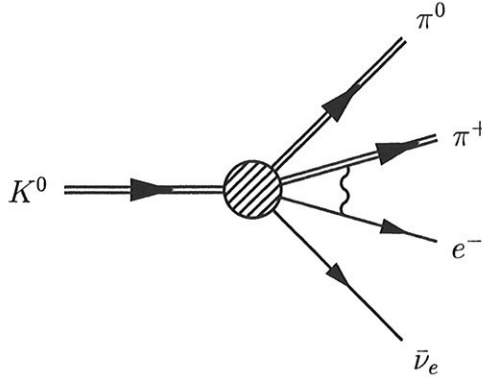


Figura 2.3: Diagrama de Feynman para a correção eletromagnética do vértice elétron-pión.

No conjunto de integrais acima,  $J_{e\pi}^{(3)}$  é divergente no ultravioleta, mas  $J_{e\pi}^{(1)}$  e  $J_{e\pi}^{(2)}$  são finitas nesse mesmo limite. Introduzindo-se um parâmetro de Feynman  $x$ , temos

$$J_{e\pi}^{(3)} = \int_0^1 dx \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 - \Delta_3)^2} \quad (2.23)$$

com as definições

$$q = \frac{1}{m_\pi} [k - x(p + p_e) - p_e], \quad \Delta_3 = \frac{1}{m_\pi^2} [x^2(p + p_e)^2 + 2x(p + p_e) \cdot p_e + m_e^2]. \quad (2.24)$$

Uma vez que  $J_{e\pi}^{(3)}$  é divergente, precisamos regularizá-la. Embora tenhamos feito uso do método de Pauli-Villars anteriormente, a introdução do corte  $\Lambda$  na energia do fóton

quebra explicitamente a invariância de Lorentz da função de auto-energia. Para diagramas de auto-energia isso não tem conseqüências mais sérias, devido ao fato de que as correções dessa natureza são totalmente absorvidas na renormalização. Para correções de vértice, no entanto, mesmo após o procedimento de renormalização, uma parte finita sobrevive e o processo mais adequado nessa situação é o de regularização dimensional.

Dessa forma, mantendo apenas os termos que divergem no limite  $d \rightarrow 4$ , e os que são independentes da dimensão  $d$  do espaço-tempo, temos

$$J_{e\pi}^{(3)} = \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln \Delta_3 \right], \quad (2.25)$$

onde  $\epsilon = d - 4$  e  $\gamma = 0.5772\dots$  é a constante de Euler-Mascherone. Introduzindo os parâmetros

$$\xi = \frac{2p_e \cdot p}{m_\pi^2}, \quad \lambda = \frac{m_e^2}{m_\pi^2}, \quad x_\pm = \frac{-(\xi + 2\lambda) \pm \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}}{2(1 + \lambda + \xi)}, \quad (2.26)$$

pode-se escrever finalmente [45]

$$\begin{aligned} J_{e\pi}^{(3)} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \left[ \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - 2 + \ln(1 + \lambda + \xi) \right. \\ &\quad + (1 - x_+) \ln(1 - x_+) + x_+ \ln(-x_+) \\ &\quad \left. + (1 - x_-) \ln(1 - x_-) + x_- \ln(-x_-) \right]. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Agora, usando-se dois parâmetros de Feynman  $x$  e  $y$ , podemos escrever

$$J_{e\pi}^{(2)} = 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int \frac{d^4 \tilde{k}}{(2\pi)^4} \frac{\tilde{k} + (xp + yp_e)}{(\tilde{k}^2 - \Delta_2)^3}, \quad (2.28)$$

onde fizemos a substituição  $\tilde{k} = k - (xp + yp_e)$  e definimos  $\Delta_2 = (xp + yp_e)^2 + (1 - x - y)\mu^2$ . A primeira integral é nula, uma vez que o integrando é uma função ímpar de  $k$ . Assim, a integral sobre  $\tilde{k}$  restante é perfeitamente finita e o limite  $\mu \rightarrow 0$  pode ser tomado sem maiores problemas, de modo que

$$\begin{aligned} J_{e\pi}^{(2)} &= -\frac{i}{(4\pi)^2} \left[ p \int_0^1 dx x \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(xp + yp_e)^2} + p_e \int_0^1 dy y \int_0^{1-y} dx \frac{1}{(xp + yp_e)^2} \right] \\ &= -\frac{i}{(4\pi)^2} [K_\pi p + K_e p_e]. \end{aligned}$$

Escrevendo  $\Delta_2$  explicitamente (atenção para os sinais!)

$$\Delta_2 = m_\pi^2 \lambda (y - \beta_+)(y - \beta_-), \quad \beta_\pm = -x \left( \frac{\xi \mp \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}}{2\lambda} \right) = -x \alpha_\mp, \quad (2.29)$$

e realizando a integração sobre  $x$  e  $y$  obtém-se [45]

$$K_\pi = \frac{1}{m_\pi^2 \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} \left[ \frac{\alpha_-}{\alpha_- - 1} \ln \alpha_- - \frac{\alpha_+}{\alpha_+ - 1} \ln \alpha_+ + \ln \left( \frac{\alpha_+}{\alpha_-} \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\xi^2 \rightarrow 4\lambda} \frac{1}{m_\pi^2 (\sqrt{\lambda} - 1)}, \quad (2.30)$$

$$K_e = \frac{1}{m_\pi^2 \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} \left[ \frac{2\lambda\alpha_-}{2\lambda\alpha_- - 1} \ln 2\lambda\alpha_- - \frac{2\lambda\alpha_+}{2\lambda\alpha_+ - 1} \ln 2\lambda\alpha_+ + \ln \left( \frac{\alpha_+}{\alpha_-} \right) \right]$$

$$\xrightarrow{\xi^2 \rightarrow 4\lambda} \frac{1}{m_\pi^2 \sqrt{\lambda} (1 - 2\sqrt{\lambda})}. \quad (2.31)$$

Finalmente, chegamos à integral  $J_{e\pi}^{(1)}$ . Com a ajuda de dois parâmetros de Feynman temos

$$J_{e\pi}^{(1)} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{(xp + yp_e)^2 + (1-x-y)\mu^2}. \quad (2.32)$$

Essa integral pertence a uma classe bem conhecida de integrais escalares (a das funções escalares de 3 pontos), representadas pela forma geral

$$C = \int_0^1 dx \int_0^x dy \frac{1}{ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f}, \quad (2.33)$$

e uma dedução muito detalhada de sua solução pode ser encontrada em [46]. O resultado final pode ser escrito na forma

$$J_{e\pi}^{(1)} = \frac{N}{m_\pi^2 \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} \left\{ \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - \alpha \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}}{\alpha (1 + \lambda - \xi)} \right] - \text{Li}_2 \left[ \frac{(1 - \alpha) \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}}{1 + \lambda - \xi} \right] \right.$$

$$\left. + \ln \alpha \ln \left[ \frac{1 + \lambda - \xi}{\lambda(\alpha - 1)^2} \right] + \frac{1}{4} \ln(\alpha^2 \lambda) \left[ 1 - 2 \ln \left( \frac{\mu^2}{m_\pi^2} \right) \right] - \frac{1}{2} \ln \alpha^2 \ln \lambda \right\}, \quad (2.34)$$

em que  $N = -i/(4\pi)^2$ ,  $\alpha = (\alpha_\pm)$  foi definido na equação (2.29) e  $\text{Li}_2(x)$  é a função dilogarítmica (ou função de Spence) [47]

$$\text{Li}_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \quad (2.35)$$

Analisando  $J_{e\pi}^{(1)}$  com cuidado, vemos que há uma singularidade de natureza cinemática em  $\xi^2 = 4\lambda$ , isto é, no valor mínimo de  $\xi$ , dado que o último termo entre chaves tende a  $-\ln^2 \lambda/2$ , enquanto o fator de multiplicação global fora das chaves diverge. Esse ponto do espaço de fases corresponde fisicamente à situação em que o pión e o férmion carregados são ambos produzidos em repouso, no referencial de repouso do káon. Por analogia com o caso do espalhamento de um elétron por um potencial eletromagnético externo, onde uma correção de vértice também está presente e propicia a única contribuição radiativa finita

até ordem  $\alpha_{\text{QED}}$  na seção de choque, uma singularidade cinemática também está presente, mas nesse caso a divergência ocorre no limite da troca de um fóton infinitamente mole com o campo externo, isto é,  $q^2 \rightarrow 0$ [48]. A correção de vértice para o espalhamento do elétron também possui uma divergência ultravioleta que é eliminada por meio de renormalização. Mais precisamente, a renormalização é feita de tal maneira a eliminar, de uma única vez, a divergência ultravioleta e a singularidade cinemática.

Adotando o mesmo procedimento aqui, vamos aplicar o processo de renormalização de modo a eliminar a divergência ultravioleta presente em  $J_{e\pi}^{(3)}$ , e ao mesmo tempo tornar  $\Gamma_2(\xi)$  regular em  $\Gamma_2(\xi^2 = 4\lambda)$ . A nova função de vértice renormalizada é dada por

$$\Gamma_2^R(\xi) = \Gamma_2(\xi) - \Gamma_2(\xi^2 = 4\lambda). \quad (2.36)$$

Tomando o limite  $\xi^2 \rightarrow 4\lambda$  com cuidado, e escolhendo  $\alpha = \alpha_+$ ,  $J_{e\pi}^{(1)}(\xi^2 = 4\lambda)$  é dada por[45]

$$J_{e\pi}^{(1)}(\xi^2 = 4\lambda) = \frac{N}{m_\pi^2} \left\{ \frac{1}{4\sqrt{\lambda}} \left[ 1 - 2 \ln \left( \frac{\mu^2}{m_\pi^2} \right) \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{\ln \lambda}{\sqrt{\lambda}(\sqrt{\lambda} - 1)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\ln^2 \lambda}{\sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} \right\}. \quad (2.37)$$

Assim, adicionando mais um termo em (2.15), ou seja, um “contra-termo de vértice”  $\delta_V$

$$\mathcal{L}^{\text{Ren}} = \mathcal{L}(\psi_{er}, \phi_{\pi r}) + \bar{\psi}_{er}(i\delta_2 \not{\partial} - \delta m)\psi_{er} + \frac{1}{2} (\delta_2^\pi \partial^\mu \Phi^T \partial_\mu \Phi - \Phi^T \delta \mathbf{M}^2 \Phi) - \delta_V \mathbf{J}^\mu \mathbf{j}_\mu, \quad (2.38)$$

onde

$$\delta_V = \Gamma_2(\xi^2 = 4\lambda) = -i(-ie)^2 \left[ C_1 J_{e\pi}^{(1)} - C_2^\mu J_{e\pi \mu}^{(2)} + J_{e\pi}^{(3)} \right]_{\xi^2=4\lambda}, \quad (2.39)$$

o programa de renormalização até ordem  $\alpha_{\text{QED}}$  está completo! Mais adiante, depois de discutir a radiação de *bremsstrahlung*, ver-se-á que esse procedimento particular de renormalização torna a razão de decaimento não-radiativa **inclusiva** finita, ou seja, remove as divergências logarítmicas que aparecem separadamente nas razões de decaimento elástica e de *soft bremsstrahlung*.

## 2.2 Radiação de *bremsstrahlung*

Nessa seção, abordaremos as correções de ordem mais baixa nas quais fótons reais estão presentes no estado final. A figura 2.4 mostra os diagramas de Feynman em que o elétron ou o pión emitem radiação de *bremsstrahlung*.

De acordo com esses diagramas, a amplitude de Feynman associada com a emissão por parte do elétron é dada por

$$\mathcal{M}_e^B = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* \langle \pi\pi | V^\mu + A^\mu | K^0 \rangle \bar{u}(p_\nu) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) S(-p_e - k) (-ie\gamma^\alpha) \epsilon_\alpha(k) v(p_e). \quad (2.40)$$

Usando as relações de anticomutação das matrizes  $\gamma^1$ , a condição  $(\not{p}_e + m)v(p_e) = 0$  e o

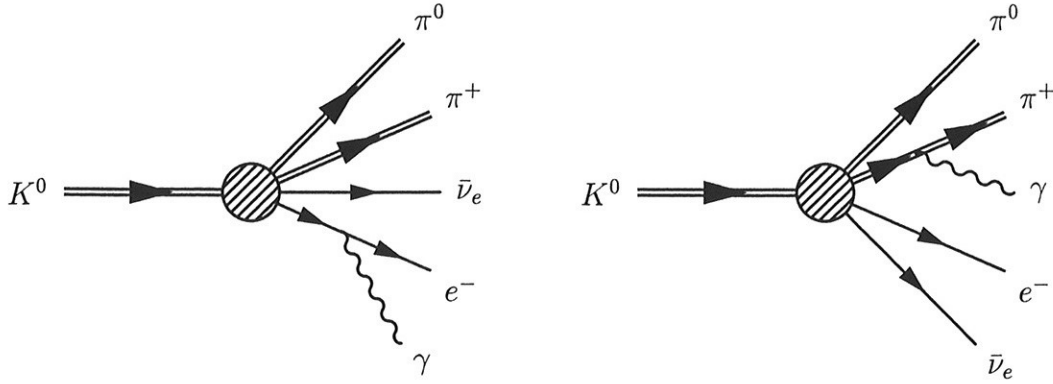


Figura 2.4: Diagramas de Feynman de ordem mais baixa para a emissão de radiação de *bremsstrahlung* em  $K_{e4}^0$ .

fato de que o fóton irradiado está na camada de massa, a amplitude total pode ser escrita na forma

$$\mathcal{M}^B = -e \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* \langle \pi\pi | V^\mu + A^\mu | K^0 \rangle \bar{u}(p_\nu) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \left[ \frac{2p_e \cdot \epsilon + \not{k} \not{\epsilon}}{2p_e \cdot k} - \frac{p \cdot \epsilon}{p \cdot k} \right] v(p_e). \quad (2.41)$$

Tomando o modulo quadrado da amplitude acima, somando sobre os spins dos férmions e sobre as polarizações dos fótons, chegamos a

$$|\overline{\mathcal{M}^B}|^2 = 4\pi\alpha_{\text{QED}} \left[ \sigma_0 |\overline{\mathcal{M}_0}|^2 + \dots \right], \quad (2.42)$$

onde  $\mathcal{M}_0$  é a amplitude de  $K_{e4}^0$  no nível de árvore (ver equação (1.52)), o coeficiente  $\sigma_0$  tem a forma

$$\sigma_0 = \frac{2p_e \cdot p}{(p_e \cdot k)(p \cdot k)} - \frac{m_e^2}{(p_e \cdot k)^2} - \frac{m_\pi^2}{(p \cdot k)^2}, \quad (2.43)$$

e as reticências em (2.42) indicam a presença de termos de *hard bremsstrahlung*, ou seja, termos importantes apenas quando a energia do fóton irradiado é alta. Já o primeiro termo entre colchetes corresponde à amplitude de *soft bremsstrahlung*. Ela é amplamente usada na literatura como a própria amplitude total de *bremsstrahlung* devido a sua forma simples, mas é sempre importante ter em mente que ela é apenas uma aproximação para a amplitude total. Para o propósito desse trabalho, é válido desprezar as correções de *hard bremsstrahlung*.

O espaço de fase do decaimento radiativo  $K_{e4\gamma}^0$  pode ser descrito por um conjunto de oito variáveis cinemáticas, a saber

$$s_\pi, \quad s_l, \quad E_\gamma, \quad \cos \theta_\pi, \quad \cos \theta_l, \quad \Phi_\pi, \quad \Phi_l, \quad \cos \theta_\gamma, \quad (2.44)$$

onde  $s_\pi, s_l, \cos \theta_\pi, \cos \theta_l$  já são conhecidas da parametrização do processo no nível de árvore,  $E_\gamma$  é a energia do fóton irradiado medida no referencial de repouso do káon,

<sup>1</sup> $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$\Phi_\pi$  é o ângulo entre o plano dos píons e o plano de decaimento do káon,  $\Phi_l$  o ângulo entre o plano dos léptons e o plano de decaimento do káon e  $\theta_\gamma$  é o ângulo entre o fóton irradiado e o momento total dos léptons. No Apêndice B.2 demonstra-se que essas oito variáveis geram todo o espaço de fase de  $K_{e4\gamma}^0$ . Apresenta-se também o procedimento para se reconstruir os 4-momentos das partículas em  $K_{e4\gamma}^0$  a partir das oito variáveis cinemáticas. A geometria do decaimento, com os ângulos e planos de interesse, pode ser vista na figura B.1.

## 2.3 Cancelamento de divergências no infravermelho

É de amplo conhecimento que ao se medir a parte “não-radiativa” de uma largura de decaimento, além dos eventos associados ao processo no nível de árvore, mede-se também, inevitavelmente, devido a uma limitação de caráter experimental, eventos de *soft bremsstrahlung*, em que a energia do fóton irradiado encontra-se abaixo do limiar experimental para detecção desse tipo de radiação. Com efeito, a quantidade experimentalmente acessível no laboratório é uma soma de larguras de decaimento, a denominada largura inclusiva

$$\left(\frac{d\Gamma}{d\Omega}\right)_{\text{inclus}} = \left(\frac{d\Gamma}{d\Omega}\right)_{\text{elast}} + \int_{|\mathbf{k}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \frac{d\Gamma_\gamma}{d\Omega}, \quad (2.45)$$

onde  $\omega$  é o já mencionado limiar de energia para detecção de fótons, e  $d\Omega$  é o elemento de volume do espaço de fase para  $K_{e4}^0$ . O objetivo principal dessa seção é demonstrar que, embora, separadamente cada uma das larguras em (2.45) são divergentes no infravermelho, a razão inclusiva é finita.

É razoável assumir que  $\omega$  é pequeno comparado às demais energias envolvidas, de modo que podemos usar a amplitude de *soft bremsstrahlung* como uma boa aproximação para o segundo termo em (2.45), e a integral a ser avaliada é então

$$\int_{|\mathbf{k}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{k}}{2k_0} \sigma_0 = \int_{|\mathbf{k}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{k}}{2k_0} \left[ \frac{2p_e \cdot p}{(p_e \cdot k)(p \cdot k)} - \frac{m_e^2}{(p_e \cdot k)^2} - \frac{m_\pi^2}{(p \cdot k)^2} \right]. \quad (2.46)$$

O procedimento de cálculo da integral acima pode ser encontrado na seção 7 da referência [46], sendo dada por

$$\int_{|\mathbf{k}| < \omega} \frac{d^3\mathbf{k}}{2k_0} \sigma_0 = C_{IV} + C_{\text{finito}}, \quad (2.47)$$

com

$$C_{IV} = \pi \left[ \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} \ln(\alpha^2 \lambda) - 2 \right] \ln \left( \frac{2\omega}{\mu} \right)^2, \quad (2.48)$$

e definindo

$$v = \frac{m_\pi^2(\alpha^2 \lambda - 1)}{2(\alpha E_e - E_\pi)}, \quad (2.49)$$

tem-se

$$\begin{aligned}
C_{\text{finito}} &= \pi \left[ \frac{E_e}{|\mathbf{p}_e|} \ln \left( \frac{E_e + |\mathbf{p}_e|}{E_e - |\mathbf{p}_e|} \right) + \frac{E_\pi}{|\mathbf{p}|} \ln \left( \frac{E_\pi + |\mathbf{p}|}{E_\pi - |\mathbf{p}|} \right) \right] \\
&+ 4\pi \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} \left[ \frac{1}{4} \ln^2 \left( \frac{E_e + |\mathbf{p}_e|}{E_e - |\mathbf{p}_e|} \right) - \frac{1}{4} \ln^2 \left( \frac{E_\pi + |\mathbf{p}|}{E_\pi - |\mathbf{p}|} \right) \right] \\
&+ \text{Li}_2 \left( \frac{v + \alpha(E_e + |\mathbf{p}_e|)}{v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{v + E_\pi + |\mathbf{p}|}{v} \right) \\
&+ \text{Li}_2 \left( \frac{v + \alpha(E_e - |\mathbf{p}_e|)}{v} \right) - \text{Li}_2 \left( \frac{v + E_\pi - |\mathbf{p}|}{v} \right) \Big], \quad (2.50)
\end{aligned}$$

em que  $\alpha (= \alpha_\pm)$  já foi definido em (2.29). Dessa forma, é direto ver que a parte infravermelha da integral em questão é dada por

$$\left( \int_{|\mathbf{k}| < \omega} \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2k_0} \frac{d\Gamma_\gamma}{d\Omega} \right)_{IV} = \left( \frac{\alpha_{\text{QED}}}{2\pi} \right) |\mathcal{M}_0|^2 \left[ \frac{\xi \ln(\alpha^2 \lambda)}{\sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} - 2 \right] \ln \left( \frac{2\omega}{\mu} \right)^2. \quad (2.51)$$

Voltando agora para a parte elástica da razão inclusiva, pode-se partir da equação (2.16), usar algumas propriedades das matrizes gama e escrever, após o procedimento de renormalização

$$\mathcal{M}_{e\pi}^{VC} = S_0^R \mathcal{M}_0 + S_1^R \mathcal{M}_1, \quad (2.52)$$

onde

$$S_0^R = S_0(\xi) - S_0(\xi^2 = 4\lambda), \quad S_1^R = S_1(\xi) - S_1(\xi^2 = 4\lambda). \quad (2.53)$$

As funções  $S_0(\xi)$  e  $S_1(\xi)$  são dadas por

$$S_0(\xi) = - \left( \frac{\alpha_{\text{QED}}}{2\pi} \right) \left\{ \xi \left[ \bar{C}_1(\xi) - \bar{K}_e(\xi) + \frac{1}{2} \bar{K}_\pi(\xi) \right] + \lambda \bar{K}_e(\xi) - \bar{K}_\pi(\xi) + \frac{1}{2} \bar{C}_3(\xi) \right\}, \quad (2.54)$$

$$S_1(\xi) = - \left( \frac{\alpha_{\text{QED}}}{2\pi} \right) \lambda \bar{K}_e(\xi) \quad (2.55)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{C}_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - 4\lambda}} \left\{ \text{Li}_2 \left[ \frac{1 - \alpha \sqrt{\xi^2 - 4\lambda}}{\alpha(1 + \lambda - \xi)} \right] - \text{Li}_2 \left[ (1 - \alpha) \frac{\sqrt{\xi^2 - 4\lambda}}{1 + \lambda - \xi} \right] \right. \\
&+ \left. \ln \alpha \ln \left( \frac{1 + \lambda - \xi}{\lambda(\alpha - 1)^2} \right) - \ln \alpha \ln \lambda + \frac{1}{4} \ln(\alpha^2 \lambda) \left[ 1 - 2 \ln \left( \frac{\mu^2}{m_\pi^2} \right) \right] \right\} \quad (2.56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{C}_3(\xi) &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - 2 + \ln(1 + \lambda + \xi) \\
&+ (1 - x_+) \ln(1 - x_+) + x_+ \ln(-x_+) \\
&+ (1 - x_-) \ln(1 - x_-) + x_- \ln(-x_-) \quad (2.57)
\end{aligned}$$

e nas expressões acima, fizemos uso da notação  $\bar{K}_a = m_a^2 K_a$ ,  $x_\pm$  são dadas por (2.26) e surge uma amplitude adicional  $\mathcal{M}_1 = \frac{1}{m_e} \bar{u}(p_\nu) \not{A}(1 + \gamma_5) \not{p}_\pi v(p_e)$ . No entanto, devido ao

fator  $\lambda$  em  $S_1$ , espera-se que tal termo seja pequeno comparado com  $S_0$ . Finalmente, até ordem  $\alpha_{\text{QED}}$ , uma boa aproximação para a largura de decaimento elástica é

$$\left(\frac{d\Gamma}{d\Omega}\right)_{\text{elast}} = (1 + 2\Re(S_0)) \overline{|\mathcal{M}_0|^2} + \dots, \quad (2.58)$$

em que o termo de ordem  $\alpha_{\text{QED}}$  surge da interferência entre a amplitude no nível de Bohr e a amplitude  $\mathcal{M}_{e\pi}^{VC}$ . Das expressões acima vê-se claramente que a razão inclusiva é finita no infravermelho.

## 2.4 Determinação da fração radiativa

Seja  $N$  um certo número de decaimentos do tipo  $K_{e4}^0$  ou  $K_{e4\gamma}^0$  dos quais  $f_{\text{rad}}N$  são radiativos, e conseqüentemente,  $(1 - f_{\text{rad}})N$  são não-radiativos. Assim, pode-se definir a fração radiativa como uma função de  $\omega$  como<sup>2</sup>

$$f_{\text{rad}}(\omega) = \frac{R(\omega)}{1 + R(\omega)}, \quad R(\omega) = \frac{\Gamma_{\text{rad}}(E_\gamma > \omega)}{\Gamma_{\text{elast}} + \Gamma_{\text{rad}}(E_\gamma < \omega)}. \quad (2.59)$$

A figura 2.5 mostra o comportamento da fração radiativa em função do limiar  $\omega$ , comparando o resultado do cálculo analítico apresentado nesse capítulo com aquele obtido com o pacote PHOTOS. Ambas as curvas correspondem à aproximação de *soft bremsstrahlung*<sup>3</sup>. O pacote PHOTOS baseia-se em propriedades gerais de correções radiativas em QED como a fatorização da seção de choque, no limite de *soft bremsstrahlung*, como um produto da amplitude no nível de Bohr pelo *kernel* de *bremsstrahlung*, como observamos na equação (2.42). O pacote reconstrói as correções virtuais numericamente, fazendo uso do teorema de Lee-Nauenberg-Kinoshita [49, 50] de que divergências logarítmicas devem se cancelar nas quantidades inclusivas. Nossa principal preocupação era testar a confiabilidade dessa reconstrução numérica das correções virtuais, quando aplicada ao decaimento  $K_{e4}^0$ . Os gráficos da figura 2.5 mostram uma concordância razoável entre o cálculo analítico e o pacote, dado que a documentação do programa [25] relata diferenças da mesma magnitude em comparações com cálculos analíticos em outros modos<sup>4</sup>.

Não tratamos aqui do termo de emissão direta, em que o fóton, real ou virtual, é emitido direto vértice do decaimento. A emissão direta de um fóton real foi detectada com sucesso pelo experimento KTeV através do modo  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\gamma$ [53]. Entretanto, o mesmo processo em  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  mostrou-se completamente desprezível frente à radiação de *bremsstrahlung* interno emitida pelo elétron. Como  $K_{e4}^0$  também apresenta um elétron no estado final, acredita-se que o processo de emissão direta nesse modo também pode ser desprezado com segurança.

<sup>2</sup> $\Gamma_{\text{elast}} \propto |\mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_{\text{virt}}|^2$ .

<sup>3</sup>Ver a documentação de PHOTOS em [25] para os detalhes do algoritmo do pacote.

<sup>4</sup>Para integração da largura diferencial de decaimento no caso do cálculo analítico usamos o pacote de integração multi-dimensional VEGAS[51, 52].



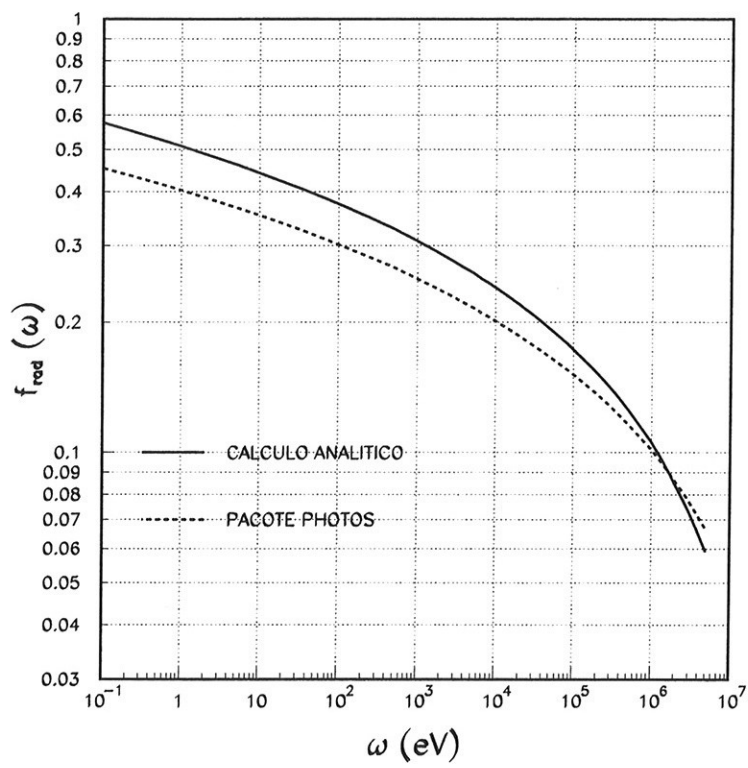


Figura 2.5: Comparação entre o cálculo analítico e o pacote PHOTOS para a fração radiativa em  $K_{e4}^0$  como função do limiar experimental para detecção de fótons.



## Capítulo 3

# $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ no experimento KTeV

Este capítulo está voltado para a descrição de todo o aparato experimental do KTeV, incluindo a linha de feixe para a produção dos káons neutros. Os sistemas de veto e de *trigger* também são discutidos com certo detalhe. Uma descrição da tomada dos dados utilizados na análise é apresentada. Por fim, discute-se quais sinais são esperados nos detectores como assinatura do decaimento  $K_{e4}^0$  e também quais são as principais fontes de contaminação esperadas.

### 3.1 O aparato experimental

O experimento KTeV[54] foi concebido com o propósito principal de estudar o fenômeno de violação de  $CP$  no sistema  $K^0 - \bar{K}^0$ . Mais precisamente, medir a grandeza  $\Re(\epsilon'/\epsilon)$  com uma precisão da ordem de  $10^{-4}$ . A mesma técnica básica usada no experimento E731 [55] foi adotada, porém dispondo agora de uma nova linha de feixe assim como detectores mais precisos.

Dividiu-se KTeV em dois sub-experimentos, denominados E832 e E799, o primeiro voltado à medida de  $\Re(\epsilon'/\epsilon)$ , propriamente dita, e o segundo direcionado ao estudo dos decaimentos raros tanto de káons quanto de híperons. Decaimentos raros também podem ser estudados com dados do E832, como é o caso da análise apresentada nessa tese.

Antes de iniciar a descrição em detalhe do arranjo experimental, é preciso especificar o sistema de coordenadas do KTeV. Usa-se um sistema cartesiano de orientação positiva, cujo eixo  $z$  acompanha a direção do feixe de káons, possuindo o mesmo sentido desse, isto é, do alvo de produção ao detector. O eixo  $y$  é vertical e aponta para cima, ficando o eixo  $x$  automaticamente determinado por meio da orientação positiva. A figura 3.1 apresenta uma visão do plano-superior dos detectores do KTeV, a partir de  $z = 110$  m e configurado para o experimento E832<sup>1</sup>. Uma visão tridimensional do aparato pode ser encontrada na figura 3.14.

---

<sup>1</sup>No E799, um TRD (*Transition Radiation Detector*) era usado para a distinção entre elétrons e píons e não é mostrado nessa figura.

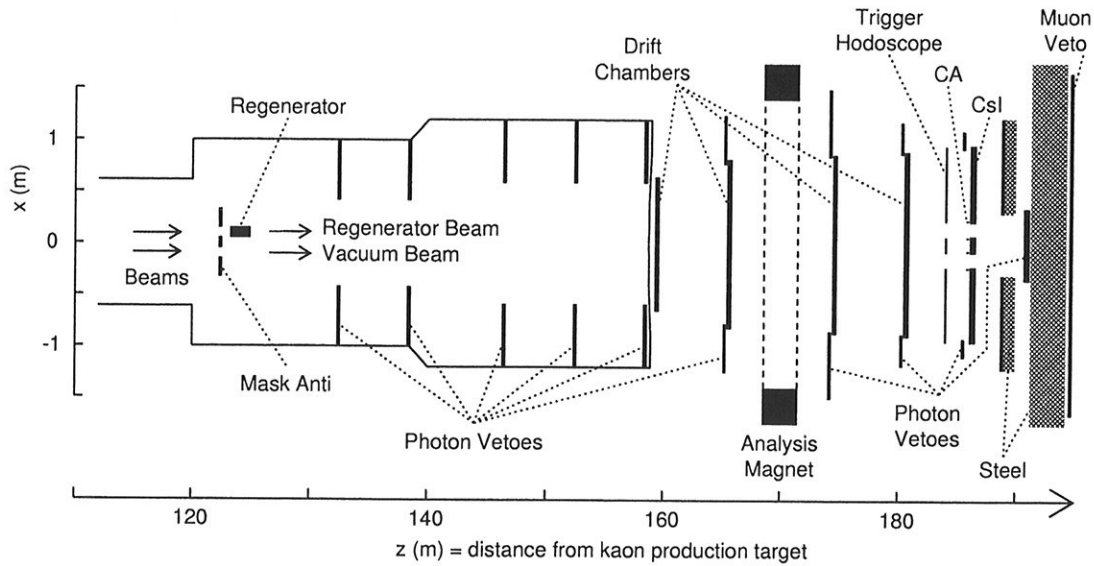


Figura 3.1: Visão esquemática (superior) do experimento KTeV configurado para E832. O plano da figura é o  $xz$ .

As posições bem como as dimensões transversais dos vários elementos apresentados na figura 3.1 podem ser encontradas na tabela 3.1.

### 3.1.1 A linha de feixe do experimento KTeV

O feixe de mésons do KTeV era produzido a partir da incidência de um feixe primário de prótons com momento de  $800 \text{ GeV}/c$ , produzido pelo Tevatron do Fermilab, sobre um alvo de óxido de berílio ( $\text{BeO}$ ). Os prótons do feixe primário eram lançados sobre o alvo de  $\text{BeO}$  a cada minuto, aproximadamente, perdurando tal incidência por 20 s e sendo denominada de *spill*. Cada *spill*, por sua vez, subdividia-se em “pacotes” com duração de 19 ns cada, e uma frequência de incidência de 53 MHz. Esse sinal de rádio frequência (RF) de 53 MHz, dos pacotes de um *spill*, era usado como principal meio de sincronização dos detectores do KTeV, como veremos mais adiante. O intervalo de um minuto entre dois *spills* consecutivos era formado então por  $\sim 40$  s, compreendendo a transferência dos prótons do anel de acumulação para o Tevatron e sua aceleração, mais  $\sim 20$  s de duração do próprio *spill*. Entre  $(3.5 - 5.0) \times 10^{12}$  prótons eram descarregados sobre o alvo a cada *spill*.

O alvo de  $\text{BeO}$  do KTeV possuía 30.5 cm de comprimento (0.9 comprimentos de interação nuclear<sup>2</sup>), com uma seção transversal de  $3 \text{ mm} \times 3 \text{ mm}$ . Tendo o feixe quanto o alvo encontravam-se inclinados para baixo cerca de 4.8 mrad, de modo a minimizar a

<sup>2</sup>Um comprimento de interação é o livre caminho médio de uma partícula antes de sofrer uma interação inelástica, isto é, uma interação que não é elástica nem quase-elástica (difrativa).

Elemento	Distância do alvo (face dianteira do elemento)	Seção transversal
RC6	132.596	int.: 0.84×0.84 raio ext.: 1.00
RC7	138.598	int.: 0.84×0.84 raio ext.: 1.00
RC8	146.598	int.:1.18×1.18 raio ext.: 1.44
RC9	152.600	int.:1.18×1.18 raio ext.: 1.44
RC10	158.599	int.:1.18×1.18 raio ext.: 1.44
Janela de vácuo	158.890	
DC1(plano $x$ )	159.419	1.30×1.30
SA2	165.116	int.: 1.540×1.366 ext.: 2.500×2.500
DC2 (plano $x$ )	165.565	1.69×1.44
Imã analisador	170.008	2.9×2.0
SA3	173.985	int.: 1.692×1.600 ext.: 3.000×2.400
DC3 (plano $x$ )	174.589	1.74×1.64
SA4	180.018	int.: 1.754×1.754 ext.: 2.372×2.372
DC4 (plano $x$ )	180.486	1.90×1.90
banco V	183.903	1.900×1.900
banco V'	183.953	1.900×1.900
CIA	185.191	int.: 1.842×1.842 ext.: 2.200×2.200
CA	185.913	int.: 0.150×0.150 ext.: 0.180×0.180
CsI	186.013	1.900×1.900
HA	188.966	2.24×2.24
BA	191.087	0.60×0.60
Mu2	194.827	3.93×3.93

Tabela 3.1: Posições e dimensões dos vários elementos que compõem o detector do KTeV configurado para o E832. Unidades em metros.

razão neutron/káon do feixe secundário. Ao atingir o alvo, o feixe primário apresentava uma seção transversal de  $250 \mu\text{m} \times 250 \mu\text{m}$  ( $\pm 1\sigma$ ).

Colimadores, absorvedores e imãs foram posicionados logo após o alvo para a obtenção de dois feixes paralelos e eliminação de partículas carregadas, fótons e neutrons do feixe secundário. Um absorvedor de chumbo de 7.6 cm de espessura localizava-se a 18.5 m do alvo de BeO, cujo objetivo era converter fótons em pares elétron-pósitron, esses últimos sendo varridos pelo campo magnético de um imã de varredura. A 19.8 m encontrava-se o colimador primário, feito de uma liga de aço e latão, com 1.5 m de espessura e dois buracos de feixe, cujos centros eram separados por 3.19 cm e de seção  $1.09 \text{ cm} \times 1.09 \text{ cm}$ . Esse colimador era imediatamente seguido pela região de campo magnético do imã de varredura. Para evitar o cruzamento de hádrons, espalhados tanto no absorvedor de

chumbo quanto no colimador primário, de um feixe ao outro, outro absorvedor (*slab*), esse feito de aço, foi posicionado a 38.8 m entre os dois feixes. Um segundo colimador, o chamado colimador de definição, situava-se a 85 m do alvo com buracos de feixe de  $4.25 \text{ cm} \times 4.25 \text{ cm}$ . Esse colimador de aço também era seguido por uma região de campo magnético para eliminar partículas carregadas residuais. Além dos dois absorvedores fixos citados, o de chumbo e o *slab*, um colimador móvel, imediatamente antes do primeiro absorvedor de chumbo (ver figura 3.2) reduzia o fluxo sobre o regenerador (descrito na próxima subseção). Tal absorvedor móvel possuía 45.7 cm e era feito de berílio. O arranjo todo da linha de feixe do KTeV pode ser observado no desenho esquemático da figura 3.2.

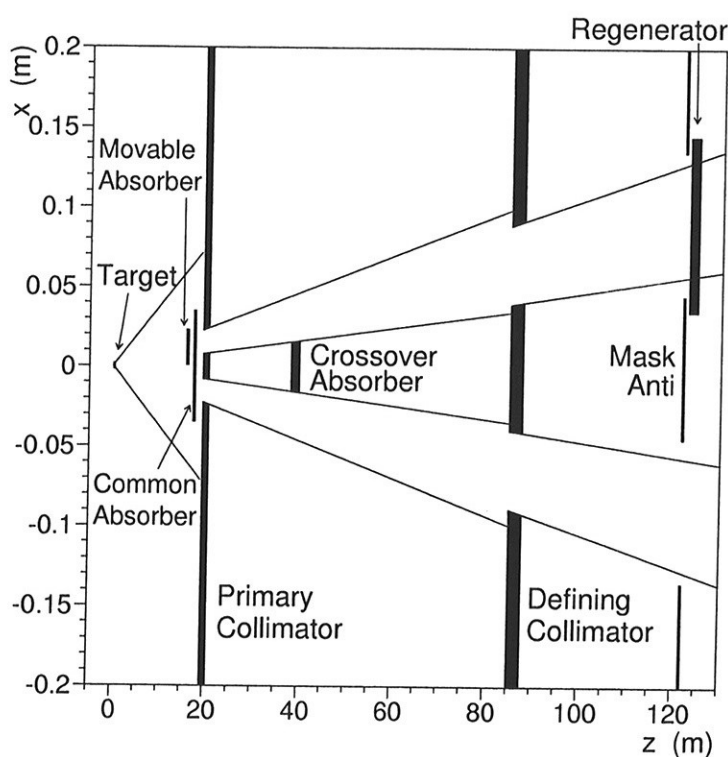


Figura 3.2: Visão do topo da linha de feixe do KTeV, apresentando o alvo de BeO, absorvedores, sistema de colimação, Mask Anti e o regenerador. Atenção para a diferença entre as escalas horizontal e vertical.

A energia média do feixe secundário de káons era de aproximadamente 70 GeV. Para reduzir a probabilidade de interações do feixe com materiais, mantinha-se em vácuo de  $\sim 10^{-9}$  atm uma região que estendia-se de 28 m-159 m. A extremidade final da região de vácuo era selada pela denominada janela de vácuo, feita de Kevlar (para dar rigidez) e mylar aluminizado (para a vedação), tinha diâmetro de 0.9 m, espessura de 7.6 mm e capaz de suportar uma força de 222 kN. Uma força de tal intensidade ocasionava uma deformação de até 15 cm da janela entre sua extremidade externa e a parte central!!!

O espalhamento múltiplo na janela de vácuo deve ser muito bem entendido quando se analisa modos carregados.

### 3.1.2 O regenerador

Uma vez que o conteúdo de quarks de um  $K^0$  ( $d\bar{s}$ ) é diferente daquele de um  $\bar{K}^0$  ( $\bar{d}s$ ), esses mésons interagem de maneira diferente com a matéria, ou seja, possuem seções de choque de interação distintas. O dispositivo do KTeV denominado de regenerador<sup>3</sup> toma proveito desse fato para obter uma componente de  $K_S$ , a partir de um feixe de  $K_L$ , através do fenômeno de regeneração (ver [56]).

Nas análises de modos como  $\pi^+\pi^-$  e  $\pi^0\pi^0$ , por exemplo, o objetivo era utilizar apenas aqueles káons que sofreram espalhamento elástico no interior do regenerador. Após o regenerador, o estado quântico do sistema pode ser muito bem descrito por  $|K_L\rangle + \rho|K_S\rangle$ , onde  $\rho$ , a amplitude regenerada, é um número complexo de magnitude  $\sim 0.03$ . A maioria dos káons, naturalmente, sofre interação de natureza inelástica, onde os káons emergem com um grande momento transversal. Para rejeitar tais eventos, o regenerador é constituído de blocos de cintiladores plásticos, monitorados por fotomultiplicadoras (PMTs do inglês *PhotoMultiplier Tubes*). Os sinais das PMTs são integrados e digitalizados por ADCs (*Analog to Digital Converters*), sendo alguns deles utilizados no *trigger*. O objetivo é detectar os produtos gerados pelas interações inelásticas dentro do regenerador. Existem, no entanto, eventos chamados de difrativos, em que há uma grande transferência de momento transversal, porém nenhum produto do espalhamento. Tais eventos constituem um ruído intrínseco e devem ser subtraídos posteriormente. A extensão de aproximadamente dois comprimentos de interação do regenerador foi escolhida com o propósito de minimizar a ocorrência de eventos difrativos.

Por fim, muitos káons decaem dentro do próprio regenerador, sendo esses eventos também indesejáveis. Para eliminá-los, o último módulo do regenerador é formado por duas camadas de chumbo (5.6 cm de espessura = 1 comprimento de radiação  $X_0$ <sup>4</sup>), cada qual seguida por uma fatia de cintilador plástico (4.4 mm de espessura) monitoradas por PMTs (ver figura 3.3b). O regenerador mudava de lado entre os ciclos de extração de feixe do Tevatron, de cerca de um minuto, para minimizar efeitos de assimetria esquerda-direita tanto do feixe quanto do próprio detector.

### 3.1.3 O espectrômetro

O elemento do experimento KTeV conhecido como espectrômetro é formado por dois dispositivos principais, as câmaras de arrasto (DCs do inglês *Drift Chambers*) e o imã analisador. A função do espectrômetro é acusar a passagem de partículas carregadas,

<sup>3</sup>Apesar de termos utilizado, nessa análise, apenas eventos originários do feixe de vácuo, e não do regenerador, é preciso entender a influência desse último, no que diz respeito à contaminação existente de partículas produzidas no regenerador e que atravessam para o feixe de vácuo.

<sup>4</sup>Um comprimento de radiação é definido como a distância percorrida por uma partícula até que sua energia inicial tenha diminuído por um fator  $1/e$ [57].

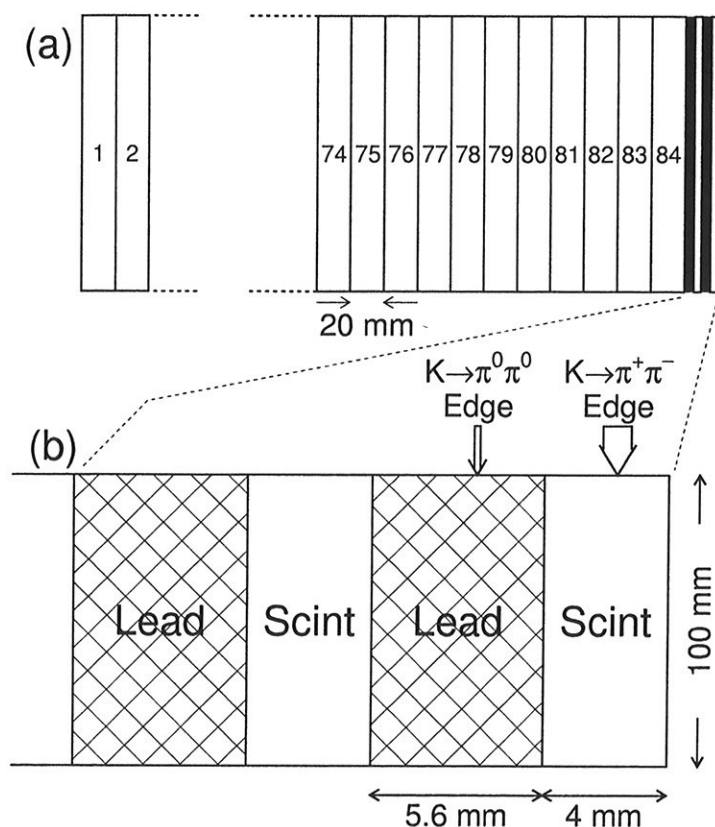


Figura 3.3: (a) Diagrama do regenerador. (b) Visão expandida da parte final do regenerador. PMTs não são mostradas. Os  $K$ ons entram pela esquerda. As setas verticais acima do Pb e do cintilador indicam a extremidade efetiva de detecção para  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0$  e  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$ , e suas larguras as respectivas incertezas.

medir os momentos de tais partículas e determinar o vértice carregado do decaimento. O espectrômetro pode ser visto na figura 3.1, mostrada anteriormente.

Para minimizar o espalhamento múltiplo das partículas, o espaço entre as câmaras foi preenchido com bolsas de gás He. Dois tipos de fios foram utilizados nas quatro câmaras de arrasto (DC1-DC4): os chamados fios sensíveis (*sense wires*) e os fios de campo (*field wires*). Cada DC possui duas camadas ou planos: uma com fios na horizontal (plano  $x$ ) e a outra na vertical (plano  $y$ ). Em cada uma dessas camadas, a disposição dos fios sensíveis, responsáveis pela drenagem da corrente de uma descarga gerada pela passagem de uma partícula carregada, é tal que esses se encontram no centro de um hexágono formado por fios de campo. A figura 3.4 mostra a disposição descrita. Além disso, em cada camada há dois planos de fios sensíveis, sendo a distância entre fios adjacentes, num mesmo plano, de 12.7 mm.

Os fios de campo eram feitos de alumínio, recobertos com ouro e com 100  $\mu\text{m}$  de espessura, ao passo que os sensíveis eram compostos de tungstênio, recobertos com ouro e de 25



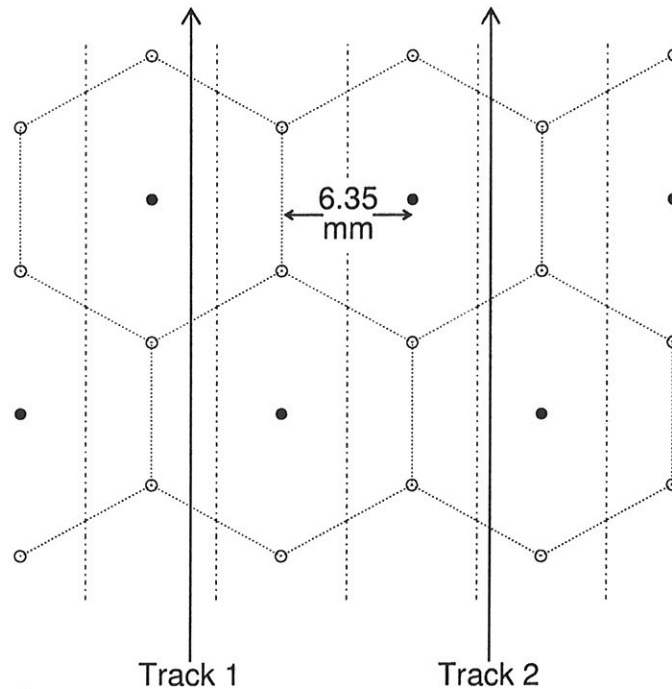


Figura 3.4: Esquema dos fios sensíveis (•) e dos fios de campo (◦) que formam as células das câmaras de arrasto do KTeV. A distância de arrasto de 6.35 mm do arranjo é mostrada na figura.

$\mu\text{m}$  de espessura. O resultado é uma distância de arrasto de 6.35 mm na direção perpendicular a cada fio. As câmaras foram preenchidas com uma mistura de aproximadamente 50%-50% de argônio e metano borbulhada com álcool isopropil. A voltagem aplicada aos fios era de -2500 V, implicando numa velocidade de arrasto típica de 50  $\mu\text{m}/\text{ns}$ .

Os pulsos coletados pelos fios sensíveis eram amplificados em dois estágios e discriminados, com o tempo medido por TDCs (*Time to Digital Converters*) e uma precisão de 0.5 ns. As contagens nos TDCs eram então convertidas num valor de distância entre o fio sensível e o ponto mais próximo da trajetória carregada. A resolução em posição de cada DC foi determinada medindo-se a soma de duas distâncias de arrasto<sup>5</sup> (um par de fios adjacentes no meio do qual uma trajetória passou) em cada um dos dois planos das DCs. Espera-se que a soma seja igual a 6.35 mm, como pode ser visto na figura 3.4. A largura à meia altura do histograma com a distribuição de SODs, dividida por  $\sqrt{2}$ , para levar em conta as medidas independentes em cada um dos planos de fios, foi tomada como a resolução das câmaras, o resultado sendo  $150 \mu\text{m}/\sqrt{2} \sim 110 \mu\text{m}$ .

A figura 3.5 mostra a distribuição de soma de distâncias subtraída do pedestal de 6.35 mm. Um dos problemas descobertos durante a tomada de dados, no período de 1996-1997,

<sup>5</sup>No KTeV, o jargão SOD (*Sum of Distances*) é utilizado.

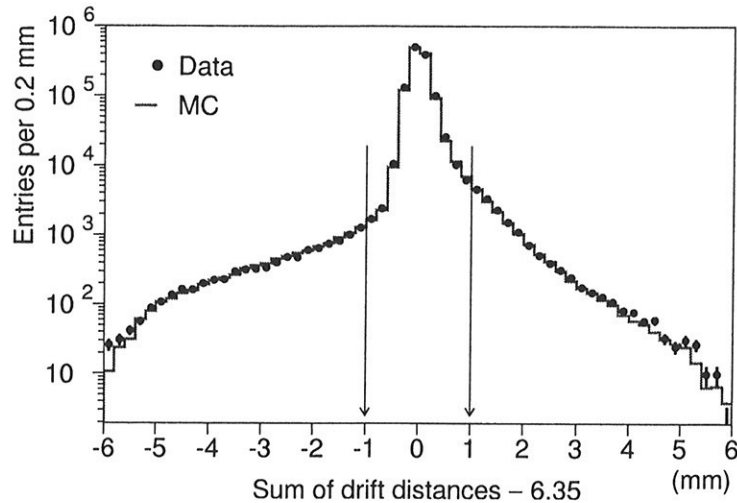


Figura 3.5: Desvio da soma de distância das câmaras de arrasto (SOD) com relação ao tamanho nominal das células de 6.35 mm, medida para visão  $y$  e usando uma amostra de  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$ . As setas indicam a exigência de  $\pm 1$  mm para um bom par de pulsos. Os pontos são dados reais e o histograma representa a previsão do Monte Carlo.

foi aquele denominado de “SOD alto”. Quando comparada com a distribuição de SOD do experimento predecessor do KTeV, isto é, o E773, a distribuição de SODs do KTeV apresentava uma quantidade acentuada de eventos com valor de SOD alto, de fato, muito além da janela de 1 mm, em torno de 6.35 mm, imposta inicialmente como corte pelo nível 3 do *trigger*<sup>6</sup> durante a reconstrução de trajetórias. Ao perceber o problema, o nível 3 do *trigger* foi imediatamente relaxado para permitir que eventos com SOD alto fossem aceitos e pudessem ser posteriormente estudados e entendidos, de modo a poderem ser reproduzidos pelo Monte Carlo. Um estudo detalhado desse problema pode ser encontrado na referência [58] e observaremos apenas aqui que descobriu-se posteriormente que, em tais eventos, uma das trajetórias possuía um tempo de arrasto do sinal elétrico medido por um dos fios sensíveis anômala mente alto. Na realidade, o sinal com tempo alto era quase sempre daquele fio em que a trajetória havia passado mais próxima. O modelo para se explicar o fenômeno foi o seguinte: quando um elétron passa longe de um fio sensível, diversos elétrons de arrasto chegam ao fio aproximadamente ao mesmo tempo, pois a diferença entre o comprimento de suas trajetórias é pequena. Assim, os diversos elétrons produzem um pulso de altura suficiente quando comparada ao limiar do discriminador. No caso de um elétron muito próximo de um fio, as diferenças nos tempos de chegada são maiores, pois além das diferenças relativas entre os comprimentos de trajetória serem mais acentuadas, os efeitos do movimento aleatório tornam-se mais pronunciados quando se tomam distâncias de arrasto menor. O resultado é a chegada esparsa de elétrons ao fio sensível produzindo um pulso mais demorado, o que por sua vez gera um valor de

<sup>6</sup>Ver descrição do sistema de *trigger* do KTeV na seção 3.1.7.

distância de arrasto errôneo. O sucesso dessa hipótese pode ser observado na figura 3.5 onde superpôs-se a previsão do Monte Carlo quando as correções a esse efeito são incluídas (ver referência [58] para os detalhes).

Entre a DC2 e a DC3 havia um imã analisador, produzindo um campo magnético da ordem de 2 kG e uma transferência de momento transversal típica de 412 MeV/c. As dimensões do volume preenchido pelo campo magnético eram 2.9 m×2.0 m× 3.1m. A polaridade do campo era mudada à frequência de aproximadamente uma vez a cada dois ou três dias, para evitar parcialidade dos dados na análise de modos de decaimento como  $K_L \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu$  ( $K_{e3}^0$ ). A uniformidade do campo foi monitorada e mostrou variações menores que 0.25% ao longo da maior parte da região entre os pólos. Uma pequena “franja” de campo foi detectada estendendo-se para dentro das câmaras DC2 e DC3, de modo a provocar pequenos deslocamentos de trajetória nessas câmaras. A magnitude desse campo de franja bem como sua correção foi feita durante a reconstrução dos dados.

### 3.1.4 O calorímetro de iodeto de céσιο (CsI)

A 186 m do alvo encontrava-se o calorímetro de iodeto de céσιο (CsI), cuja principal tarefa era medir a energia e a posição de fótons bem como partículas carregadas, além de ser usado na identificação de partículas, como na discriminação  $\pi/e$ , por meio da razão  $E/p$ , isto é, a razão entre a energia depositada no calorímetro pelo momento medido no espectrômetro. O calorímetro também mostra-se bastante útil na resolução de ambiguidades nos algoritmos de reconstrução de trajetórias.

O dispositivo é formado por 3100 cristais de CsI puro com aproximadamente 50 cm de comprimento cada um, o que equivale a  $27X_0$  (comprimentos de radiação). Os cristais utilizados possuíam duas seções transversais diferentes: os menores de 2.5 cm×2.5 cm e os maiores de 5 cm×5 cm. Os 2232 cristais menores foram arranjados num quadrado interno de 120 cm×120 cm e os 868 blocos maiores foram arranjados em torno desse quadrado interno como pode ser visto no desenho esquemático da figura 3.6. O formato do calorímetro, quando observado de frente é o de um grande quadrado de 1.9 m×1.9 m. No centro do quadrado interno de cristais menores havia dois buracos, também quadrados de dimensões 15 cm×15 cm. A descrição completa desse dispositivo do KTeV pode ser encontrada em [59, 60]. A fim de isolar opticamente cada cristal e tornar a medida de energia independente do formato do chuveiro, cada cristal foi envolvido por folhas de mylar com 13  $\mu\text{m}$  de espessura. Cada cristal produzia aproximadamente 20 fotoelétrons/MeV, implicando que, para energias acima de 3 GeV, a contribuição da foto-estatística para a resolução em energia fica em torno de 0.4%. Observou-se a existência de duas componentes bem definidas na luz de cintilação: uma componente “rápida”, caracterizada por um pico em torno de 305 nm e um tempo de emergência de  $\sim 25$  ns; e uma componente “lenta”, com pico no comprimento de onda em torno de 480 nm e tempo característico de 1  $\mu\text{s}$ .

A luz de cintilação era então coletada por tubos fotomultiplicadores, amplificada por esses e posteriormente digitalizada por dispositivos batizados de DPMTs (*Digital Photomultiplier Tubes*). O sistema era operado a 53 MHz, ou seja, à mesma frequência do Tevatron. O ganho por canal do sistema de digitalização foi determinado utilizando-se

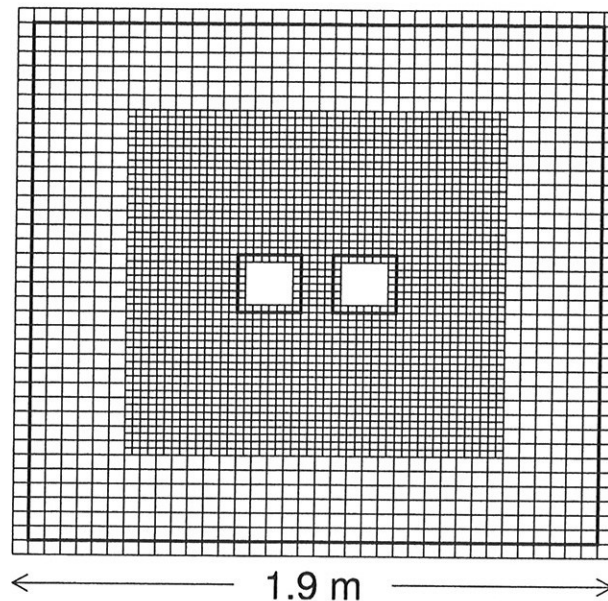


Figura 3.6: Visão frontal do calorímetro de CsI do KTeV, mostrando os 868 cristais externos maiores e os 2232 cristais internos menores. Cada buraco de feixe tem  $(15 \times 15) \text{ cm}^2$  e seus centros estão separados por 0.3 m.

elétrons provenientes do decaimento  $K_{e3}^0$ . Os  $27X_0$  do calorímetro são suficientes para deter, praticamente por completo, um chuveiro gerado por elétrons, o que implica que a razão  $E/p$  para essa partícula deve ser muito próxima de 1, dado que a energia de repouso do elétron é desprezível em relação à sua energia cinética típica no KTeV.

A figura 3.7a mostra a distribuição de  $E/p$  para elétrons de  $K_{e3}^0$ . A amostra usou um total de  $1.9 \times 10^8$  decaimentos  $K_{e3}^0$  coletados em 1996. O gráfico da figura 3.7b mostra a resolução relativa em energia do calorímetro como função do momento do elétron, sendo a dependência funcional observada descrita por

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{2\%}{\sqrt{E}} + 0.4\%. \quad (3.1)$$

Para obter a resolução em energia foi necessário subtrair quadraticamente a contribuição da resolução em momento do espectrômetro, essa última sendo mostrada no mesmo gráfico da figura 3.7b. Na figura 3.7c, temos um gráfico de  $E/p$  versus o momento do elétron, antes que a resolução do espectrômetro fosse subtraída.

### 3.1.5 Elementos dos sistemas de veto e de *trigger*

O sistema de veto tem a função, no experimento KTeV, de acusar a passagem de partículas fora do “volume ativo” do detector, isto é, não percebidas pelo espectrômetro nem pelo calorímetro. O sistema de *trigger* ou disparo é responsável por decidir se um evento deve

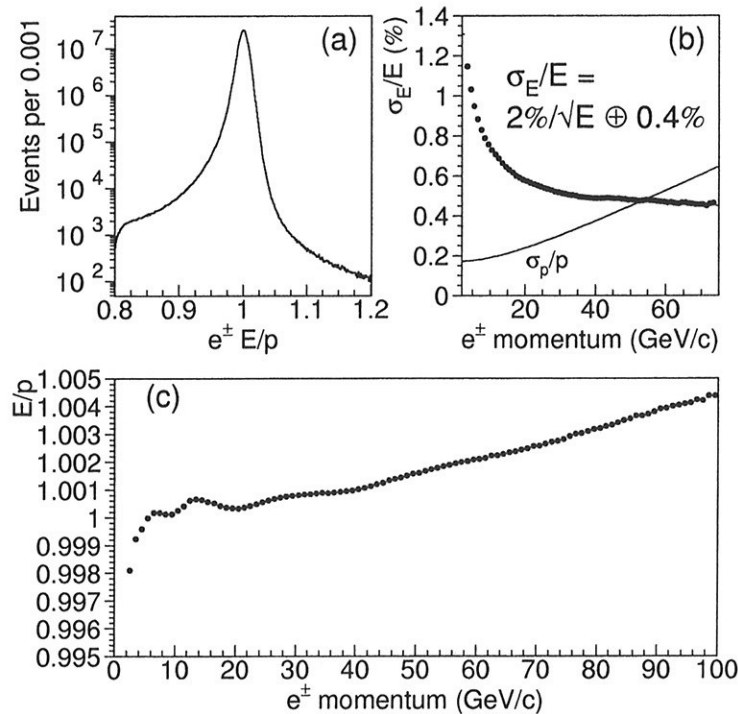


Figura 3.7: (a) Distribuição de  $E/p$  baseada em elétrons do decaimento  $K_L \rightarrow \pi^\pm e^\mp \nu$ , onde  $E$  é a energia medida no calorímetro e  $p$  é o momento medido no espectrômetro; (b) Resolução em energia do elétron em função do momento (pontos) obtida subtraindo-se a resolução da medida de momento, mostrada pela curva contínua, da resolução de  $E/p$ ; (c)  $E/p$  versus momento antes da correção de linearidade ser aplicada.

ou não ser aceito para gravação em fita. Um dado dispositivo físico pode fazer parte de ambos os sistemas.

### RC6-10, SA2-4 e CIA

Os chamados RCs (*Ring Counters*) foram projetados para a detecção de fótons fora do volume ativo e emitidos em ângulos altos com respeito à linha de feixe. Esses localizavam-se dentro da região evacuada como pode ser visto na figura 3.1. Os cinco RCs (RC6-RC10) tinham o formato externo circular, para se adaptar ao formato do tanque de vácuo e, internamente, tinham o formato de um quadrado (ver figura 3.8 para os detalhes da geometria). Cada RC era formado por 24 camadas de chumbo, intercaladas por fatias de material cintilador de 2.5 mm cada uma. As 16 primeiras camadas de chumbo possuíam a espessura de  $0.5X_0$  cada, enquanto as 8 restantes tinham  $1X_0$  cada, num total de  $16X_0$  para o RC todo. Olhando a partir da linha de feixe, ve-se também que cada RC encontra-se fatiado em 16 pedaços, possuindo a extremidade externa de cada fatia uma

fotomultiplicadora acoplada, como mostra a figura 3.8a.

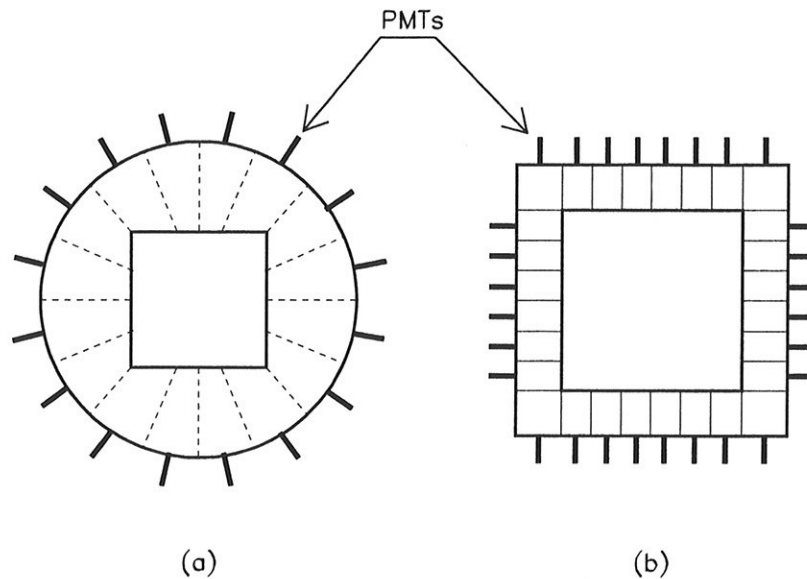


Figura 3.8: (a) Visão frontal do RC6, localizado no interior da região de vácuo. (b) SA4 visto de frente. Cada SA e CIA tinham dimensões diferentes (ver tabela 3.1) e número de módulos diferentes.

Fora da região evacuada e posicionados bem próximos à face das câmaras de arrasto DC2, DC3 e DC4, estavam os SAs (*Spectrometer-Antis*). Cobrindo a parte externa da face frontal do calorímetro foi montado também um dispositivo de veto, muito semelhante aos SAs, denominado CIA (*CsI-Anti*). A geometria do SA4, semelhante àquela do CsI, pode ser observada na figura 3.8b. Seu formato tanto externo quanto interno era quadrado. Assim como os RCs, os SAs e o CIA também possuíam uma estrutura de *sandwich*, com camadas de chumbo intercaladas por fatias de cintilador de 2.5 mm. O arranjo todo possuía 32 camadas de chumbo com  $0.5X_0$  cada, num total de  $16X_0$ .

### O Collar-Anti (CA)

A região imediatamente anterior aos buracos de feixe do calorímetro era envolta pelo chamado CA (*Collar-Anti*). Esse dispositivo tinha a função de vetar eventos em que um fóton atinge o calorímetro não de maneira frontal, mas vindo através do buraco de feixe e entrando no calorímetro de baixo para cima ou de cima para baixo. Em eventos desse tipo, o chuveiro quase sempre sofre vazamento, sendo assim mal reconstruído pelo calorímetro. A figura 3.9 mostra um desenho esquemático desse dispositivo de veto

Sua estrutura longitudinal consistia de três camadas de cintilador de 1 cm, cada qual seguida por uma fatia de tungstênio de  $2.9X_0$ .

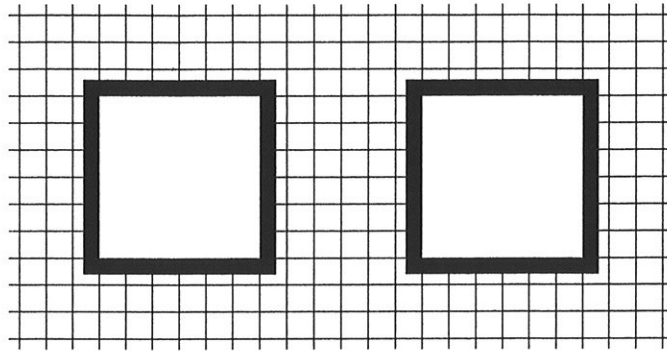


Figura 3.9: Visão frontal do Collar Anti (CA) localizado logo antes do calorímetro e envolvendo os buracos de feixe. As dimensões desse elemento de veto podem ser inferidas a partir do tamanho dos cristais menores do CsI que é  $2.5\text{ cm} \times 2.5\text{ cm}$ .

### O Back-Anti (BA)

Para a detecção de partículas emitidas em ângulos muito baixos de modo a viajarem pelos buracos de feixe, utilizou-se o chamado BA (*Back-Anti*). Esse dispositivo localizava-se após o calorímetro, na região central dos buracos de feixe, como pode ser visto na figura 3.1. Sua estrutura longitudinal possuía 60 camadas de chumbo/cintilador num total de

#### BA (BACK-ANTI)

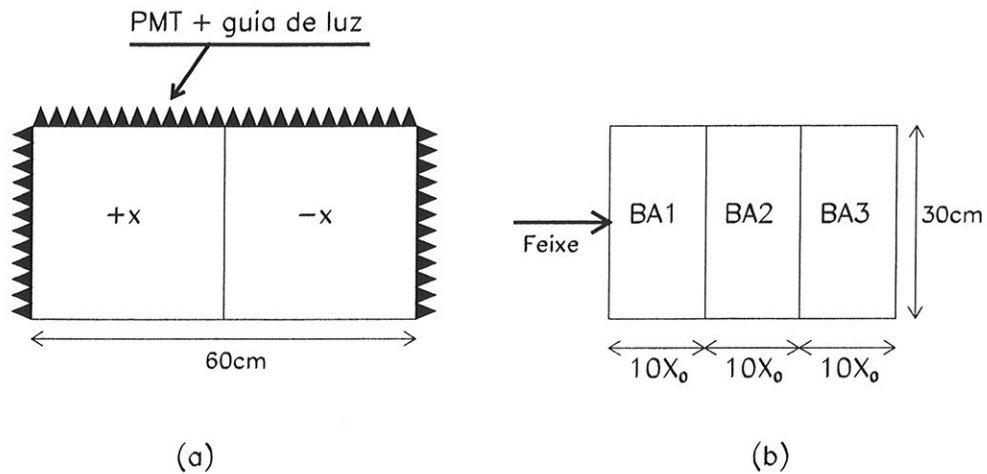


Figura 3.10: Configuração do BA. (a) A visão frontal a partir da linha de feixe. O BA encontra-se segmentado nas seções  $+x$  e  $-x$ . (b) Visão lateral do BA segmentado em três partes: BA1, BA2 e BA3.

$30X_0$ , com uma segmentação de  $0.5X_0$ . As camadas de cintilador possuíam  $2.5\text{ mm}$  cada. Para a distinção entre chuviscos eletromagnéticos e hadrônicos, três divisões maiores foram adotadas longitudinalmente para o BA, formando as sub-estruturas conhecidas como BA1,

BA2 e BA3, cada uma tendo  $10X_0$  de comprimento. Sendo mais contidos, espera-se que os chuveiros de natureza eletromagnética disparem, no máximo, o BA1 e o BA2. Os chuveiros de origem hadrônica, mais dispersos, disparam até o BA3. A figura 3.10 contém visões frontal e lateral do BA.

### O dispositivo de disparo VV'

A componente primária do *trigger* no modo carregado era o banco de hodoscópios VV', formado por dois conjuntos de cintiladores plásticos posicionados em frente ao calorímetro (ver figura 3.1). A espessura dos bancos, em cada plano, era de 1 cm. Viajando no sentido do feixe, o primeiro banco é denominado V e o seguinte V'. As dimensões transversais dos bancos são  $1.9 \text{ m} \times 1.9 \text{ m}$  e a largura das tiras de cintiladores variava de 9.9 cm até 17.8 cm, tendo 5 larguras diferentes (ver figura 3.11). Em ambas as extremidades de cada hodoscópio uma fotomultiplicadora encontrava-se conectada a um guia de luz de lucite. Os bancos VV' possuíam ainda dois buracos de feixe para evitar dano do CsI por exposição à radiação, dado que grande parte da deterioração sofrida pelo calorímetro de chumbo/plástico em E731 deveu-se a interações hadrônicas ocorridas nos hodoscópios [55, 54]. Por fim, a posição das divisórias entre os hodoscópios não coincidiam em cada banco, de modo que uma partícula carregada não pudesse passar por meio de duas divisórias, sem disparar assim ao menos um banco. Esse sistema de hodoscópios fornece um sinal bastante rápido para se fazer a lógica de *trigger*, além de propiciar uma contagem rápida do número de trajetórias carregadas.

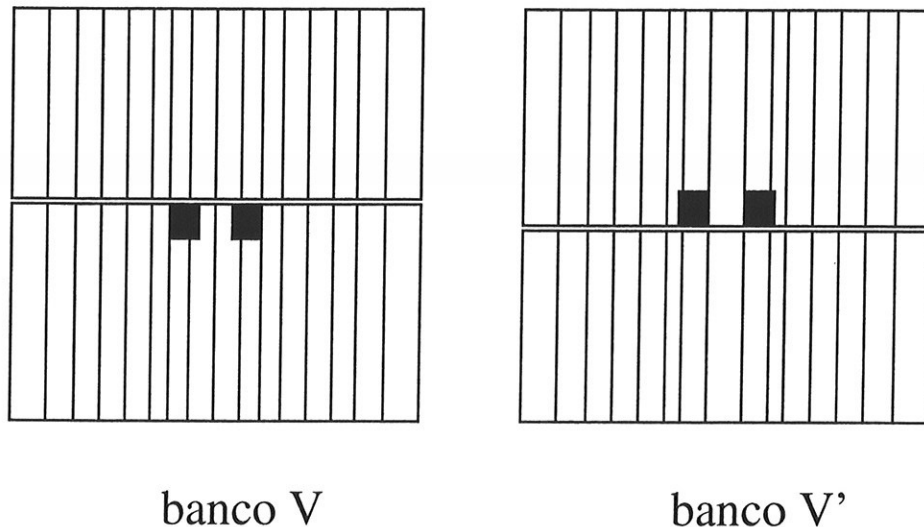


Figura 3.11: Geometria dos planos dos hodoscópios VV'. As caixas pretas representam os buracos de feixe.



### 3.1.6 Contadores de múons e o HA (Hadron-Anti)

Os contadores de múons localizavam-se atrás do CsI. Logo de início, apresentam uma camada de 10 cm de chumbo, utilizada com o propósito de absorver chuviros eletromagnéticos não totalmente contidos pelo calorímetro, além de induzir a geração de chuviros hadrônicos por partículas que não o fizeram no CsI. Tais chuviros eram então detectados pelo denominado HA (*Hadron-Anti*), um conjunto de 28 contadores de cintilação distribuídos transversalmente ao feixe e apresentando certa sobreposição para evitar a passagem de partículas pelas divisões entre os hodoscópios. O HA, juntamente com o restante do sistema de múons, foi utilizado nessa análise apenas para a rejeição de fundo, mais precisamente, eventos contendo múons. O HA era seguido, então, por uma camada de ferro de 1 m de espessura, conhecida como MF1, ou filtro de múons 1. A camada de chumbo, o HA e o MF1, todos possuíam um buraco de feixe, de modo a evitar que partículas viajando pelo buraco de feixe fossem paradas antes do BA (ver figura 3.1). Após o BA encontrava-se o MF2 (filtro de múons 2), uma parede de ferro de 3 m de espessura, seguida do MU2, um conjunto de 56 hodoscópios transversalmente (em relação ao feixe) dispostos e com alguma sobreposição. Existia ainda o MF2 (1 m de ferro) e o MU3. O comprimento total da camada de chumbo mais os três filtros de múons somava 31 comprimentos de interação, o que implica num limiar de 7 GeV para se atingir MU3 e 0.5% de chance de um chuviro hadrônico gerado por um pión de 20 GeV de atingí-lo.

### 3.1.7 O *trigger* do KTeV

Descreveremos nessa seção a estrutura do sistema de *trigger* do experimento KTeV. A cada 19 ns o Tevatron entrega um “pacote” com aproximadamente 3000 prótons no alvo de BeO do KTeV, sendo que desses apenas 1/100000 gera um káon e, além disso, somente uma fração dos káons produzidos vence o sistema de colimação e decai de maneira proveitosa. Assim, o sistema de *trigger* tem a função de acusar a ocorrência de um evento útil, bem como ordenar a leitura e gravação das informações disponíveis no detector. O sistema de *trigger* do KTeV está dividido em três níveis (1, 2 e 3), dependendo da fonte de informação utilizada e apresentando cada qual um tempo de resposta característico. Ele encontra-se descrito em detalhes na referência [61].

#### Nível 1 (L1)

Estava baseado em sinais rápidos e sincronizado com o ciclo de RF do acelerador, isto é, não possuía tempo-morto. Usava para suas decisões algumas dúzias de fontes “booleanas”. Quando disparado, iniciava-se a digitalização dos sinais do detector (ADCs, TDCs, etc), além de se enviar ao *buffer* a informação do calorímetro. A taxa média de disparo desse nível do *trigger* era de aproximadamente 60 kHz. As fontes do nível 1 eram inseridas numa série de PLUs (*Programmable Lookup Units*) e PL (*Programmable Logic*) e a RF do Tevatron propiciava o sinal de sincronização dessas unidades, cujas saídas eram, por sua vez, usadas como entrada para o nível 2.

## Nível 2 (L2)

Esse nível do *trigger* usava basicamente como fonte para tomada de decisões os sinais das câmaras de arrasto e do calorímetro. No caso das DCs, apenas os sinais dos fios na orientação  $y$  eram utilizados, de forma que o sinal de um fio era usado para ambos os feixes (vácuo ou regenerador). A razão para tal procedimento era uma preocupação acerca da simetria entre os dois feixes, pois interações hadrônicas no regenerador, por exemplo, podiam causar mais atividade em um lado do detector que no outro. Os sinais das DCs eram submetidos a dois algoritmos. O chamado sistema de contagem de pulsos<sup>7</sup>, usado no modo carregado, e que fornecia uma resposta após cerca de 800 ns. E o YTC (*Y Track Finder*) que procurava por uma configuração de pulsos nas DCs compatíveis com duas trajetórias carregadas, curvando-se em sentidos contrários após o imã analisador<sup>8</sup>. A resposta desse algoritmo era fornecida cerca de algumas centenas de nanosegundos antes do sistema de contagem de pulsos.

O sinal do CsI era analisado pelo denominado HCC (*Hardware Cluster Counter*)[62] para a contagem do número de *hardware clusters*, esses últimos definidos como qualquer conjunto de cristais contíguos<sup>9</sup>, todos com energia de no mínimo 1 GeV. O tempo de resposta típico do HCC era de 1.5  $\mu$ s, o mais longo do nível 2. A taxa de disparo do nível 2 era tipicamente de 10 kHz.

## Nível 3 (L3)

Enquanto L1 e L2 eram *hardware triggers*, o terceiro nível (L3) era um *software* rodando sobre plataforma UNIX por meio de processamento em paralelo realizado por 24 CPUs de 200 MHz cada. A maioria dos programas utilizados no L3, em tempo real, eram os mesmos utilizados nas análises *offline*, mas adaptados para minimizar o tempo de processamento. Cabia ao nível 3 do *trigger* a decisão final para a gravação dos dados do detector em fita. Como as informações eram, num primeiro momento, armazenadas em memórias com capacidade para guardar os dados de um *spill* de até 20 s, L3 tinha quase um minuto inteiro para a tomada de decisão. É importante lembrar também que, como a máscara de L2 era usada como entrada de L3, nesse estágio toda a digitalização da informação dos detectores já tinha sido finalizada.

No nível 3, cortes cinemáticos e de identificação de partículas mínimos eram aplicados, correspondentes aos vários modos de decaimento. Por exemplo, no modo carregado  $\pi^+ \pi^-$ , a massa invariante dos candidatos a vértice eram determinadas e esta devia ser de no mínimo 450 MeV/ $c^2$ <sup>10</sup>. Satisfeita tal condição, a informação do CsI era descomprimida e o programa tentava corresponder os *clusters* encontrados com as trajetórias nas câmaras de arrasto. A leitura da informação do calorímetro estava condicionada ao sucesso do algoritmo de trajetória, porque não havia tempo suficiente de fazê-la para todos os eventos,

<sup>7</sup>Pulsos nos fios da câmara de arrasto.

<sup>8</sup>Esse algoritmo fora planejado para o modo carregado  $K \rightarrow \pi^+ \pi^-$ .

<sup>9</sup>Um cristal que toca num dos cantos do calorímetro **não** é considerado contíguo.

<sup>10</sup>A tarefa de determinação do melhor candidato a vértice é deixada para a análise *offline*.

já que o algoritmo de *clustering* era bem mais lento. Depois disso, a razão  $E/p$  era calculada para cada trajetória e ambas deveriam ser menores que 0.9.

No caso do modo neutro  $\pi^0\pi^0$ , o programa de identificação de *clusters* devia encontrar quatro deles, correspondentes àqueles já identificados pelo HCC do L2. Assumindo-se então que cada par de *clusters* advém de um  $\pi^0$ , determinava-se o vértice de decaimento da partícula mãe (supostamente um káon). Com a posição do vértice em mãos era possível calcular então a massa invariante do par de píons e exigir que essa seja de no mínimo 450 MeV/c<sup>2</sup>.

Outros decaimentos como  $K_{e3}^0$  e  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  ( $K_{3\pi}$ ), por exemplo, também eram identificados e gravados em fita por meio de *triggers* dedicados. A amostra utilizada para o estudo do decaimento  $K_{e4}^0$  nessa tese foi obtida como uma sub-amostra de decaimentos que passaram por um *trigger* L3 direcionado para a identificação de decaimentos  $K_{e3}$ , isto é, não era um *trigger* dedicado. No entanto, como os cortes do L3 eram bastante leves, o vício sofrido pela amostra, no caso desses dois decaimentos em específico, é mínimo. Deixaremos para a seção 5.3.1, que discute os detalhes da análise, informações mais específicas sobre o *trigger* utilizado no nível 3 para os dados dessa tese.

Além dos vários modos de interesse físico direto, eventos aleatórios e independentes do resultado de L3 também foram salvos em fita para um estudo posterior do impacto dos cortes gerados pelo *trigger* L3. Sob intensidade nominal de feixe na época,  $(3.5-5.0) \times 10^{12}$  pot, aproximadamente 40 000 eventos eram gravados em fita a cada *spill* do Tevatron.

## 3.2 Aquisição e redução dos dados

A quantidade de dados coletados durante os anos de 1996, 1997 e 1999 pelo KTeV foi imensa. Somente o sub-experimento E832 atingiu um total de cinco bilhões de eventos gravados em 3000 fitas DLTs, cada uma com capacidade para 10 Gb, sem compressão dos dados, somando cerca de 35 Tb (terabytes) de dados. A distribuição temporal das tomadas de dados dos experimentos E799 e E832 está esquematizada na figura 3.12. Os dados utilizados na presente análise foram coletados durante a tomada de dados do experimento E832 no ano de 1997 (ver figura 3.12).

Uma tal quantidade de dados tornava inviável a leitura direta, varrendo todas essas 3000 fitas, de modo que decidiu-se por um processo de divisão dos dados baseada nas “etiquetas” geradas pelo nível 3 do *trigger*. Assim, por exemplo, eventos do tipo  $\pi^+\pi^-$ ,  $\pi^0\pi^0$ ,  $\pi^+\pi^-\pi^0$ ,  $\pi^\mp e^\pm\nu$ , etc, deram origem a sub-amostras menores. Nesse processo de divisão, a informação bruta do HCC (ver seção 3.1.7) foi comprimida usando-se um formato apropriado<sup>11</sup>, levando a uma redução de 40% do espaço de gravação, sem qualquer perda de informação. Ainda assim, uma compressão adicional foi aplicada sobre a amostra, posterior à divisão, por meio de um processo batizado de “esmagamento” (*crunch*), onde cortes de análise bastante leves foram aplicados. E, finalmente, os dados desse processo de esmagamento foram processados e quantidades reconstruídas por *software* foram

<sup>11</sup>Mais especificamente, utilizou-se a calibração do calorímetro para converter as contagens, em cada um dos canais dos ADCs do CsI, em valores de energia para cada *cluster* desse último.

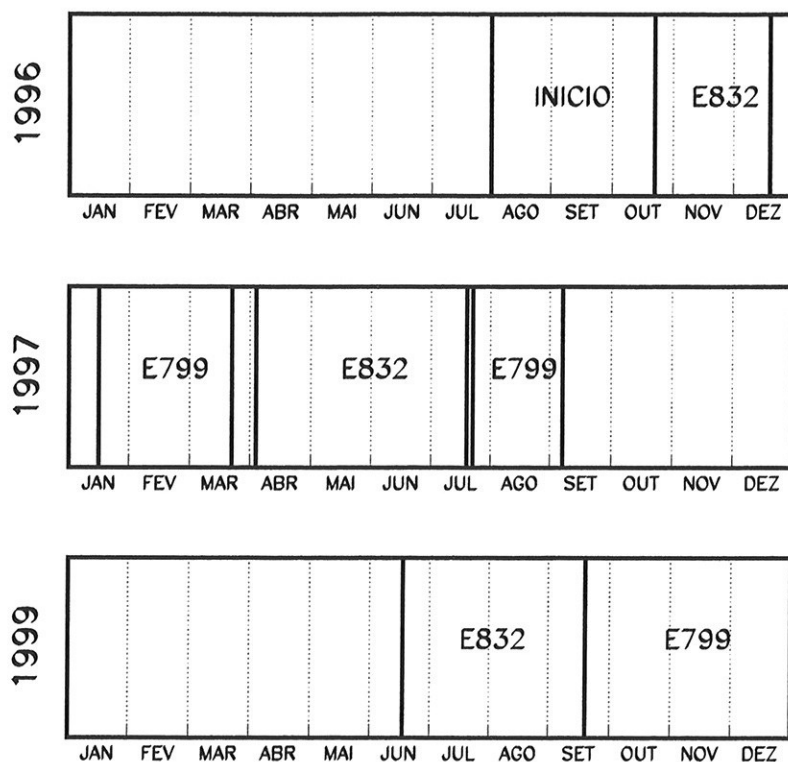


Figura 3.12: Divisão das tomadas de dados dos experimentos E832 e E799 de KTeV durante os anos de 1996, 1997 e 1999.

gravadas em fitas DSTs (*Data Summary Tapes*). As amostras finais contidas nas DSTs podiam agora ser submetidas aos programas de análise *offline* em questão de horas. Se necessário, como, por exemplo, no caso de atualização de programas de análise, o processo de esmagamento podia ser repetido em alguns dias.

Vários problemas foram encontrados durante a aquisição de dados, um dos quais, o problema do “SOD alto” já foi descrito anteriormente. Outros como: problemas de leitura e de *trigger* do calorímetro e manutenção de vácuo também foram enfrentados. Não descreveremos tais problemas aqui, pois encontram-se discutidos plenamente em [58, 63].

### 3.3 Assinatura e contaminação esperadas

Tendo descrito o aparato experimental do KTeV, estamos aptos agora a discutir qual a assinatura esperada no detector para o decaimento  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ , assim como prever quais decaimentos constituirão as contaminações mais prováveis na amostra analisada.

Naturalmente, dada a presença de duas partículas carregadas no estado final, espera-se, igualmente, a existência de duas trajetórias carregadas no espectrômetro. Mais do que isso, ao se projetar tais trajetórias a partir das DCs em direção ao CsI, espera-se também

que elas correspondam a dois *clusters* no calorímetro. A razão  $E/p$  de uma das trajetórias deve ser menor que 0.9, isto é, deve ser compatível com um pión e a razão da outra deve ser maior que 0.9, compatível com um elétron.

Considerando o tempo de vida extremamente curto do  $\pi^0$ ,  $\tau = (8.4 \pm 0.6) \times 10^{-17} s$  [64], mesmo quando levamos em conta o fator de Lorentz para energias típicas de píons neutros no KTeV, eles decaem quase que de imediato, e aos detectores é possível apenas acusar a passagem dos produtos do decaimento. O modo de decaimento dominante desse méson é  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , com uma razão de ramificação  $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow 2\gamma} / \Gamma_{\pi^0 \rightarrow \text{all}} = (98.798 \pm 0.032)\%$  [64]. Nessa análise, dada a ordem de grandeza da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$ , optamos por usar o modo de decaimento mais provável do  $\pi^0$ , de modo a aumentar a estatística de eventos detectados e, por sua vez, diminuir o erro estatístico associado. Dessa forma, dois *clusters* adicionais devem ser encontrados no calorímetro, esses últimos não correspondendo a nenhuma trajetória carregada detectada pelo espectômetro. E quando impomos que esses dois *clusters* tenham se originado no vértice carregado (aquele obtido a partir das duas trajetórias carregadas), sua massa invariante deve encontrar-se no intervalo  $0.12 < M_{\gamma\gamma} < 0.15$  ( $\text{GeV}/c^2$ ), ou seja, compatível com um pión neutro ( $m_{\pi^0} = 134.9766 \pm 0.0006 \text{ MeV}/c^2$ ) [64].

Na figura 3.13 pode-se ver a topologia típica de um evento  $K_{e4}^0$  gerado pelo programa de Monte Carlo do KTeV. Observa-se a presença dos quatro *clusters* descritos acima: dois deles correspondentes a duas trajetórias no espectômetro e dois outros livres, associados ao decaimento em dois fótons do  $\pi^0$ . Um dos *clusters* possui energia de 20.44 GeV e está associado a uma trajetória de momento 20.60 GeV, ou seja, corresponde ao elétron, enquanto o de energia 2.79 GeV está associado a uma trajetória de momento -12.37 GeV, o sinal indicando que a curvatura no campo magnético é contrária à outra trajetória, ou seja, corresponde ao pión carregado. Na parte inferior da figura, temos as duas visões ( $x$  e  $y$ ) do espectrômetro, mostrando as trajetórias carregadas mencionadas e também o prolongamento da linhas unindo os *clusters* do candidato a  $\pi^0$  ao vértice carregado. Observe na visão  $x$  (figura do meio) a curvatura das trajetórias ao passar pelo imã entre as câmaras DC2 e DC3.

Com a assinatura típica descrita acima para  $K_{e4}^0$ , as principais contaminações advêm dos decaimentos  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  ( $K_{3\pi}$ ) e  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  ( $K_{e3}^0$ ), esse último combinado com dois fótons acidentais. Para se tornar uma contaminação de  $K_{e4}^0$ , um dos píons carregados em  $K_{3\pi}$  deve apresentar uma elevada razão  $E/p$ , de modo a ser erroneamente identificado como um elétron. Já um evento  $K_{e3}^0$ , combinado com dois fótons acidentais, pode tornar-se uma contaminação se os fótons acidentais, quando vinculados ao vértice carregado, produzirem uma massa invariante compatível com um  $\pi^0$ .

Além dessas contaminações dominantes, outros decaimentos de káons, ainda que bastante suprimidos pelos cortes de análise, podem mostrar-se indesejáveis. Listamo-los a seguir, indicando a razão de ramificação do modo de decaimento respectivo, além das condições adicionais para que se torne uma contaminação em potencial<sup>12</sup>:

- $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  (12.59±0.19)%;

<sup>12</sup>Os valores das razões de ramificação apresentados foram extraídos da referência [64].

- $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  ( $38.81 \pm 0.27$ )% + 2 fótons acidentais;
- $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu \gamma$  ( $3.53 \pm 0.06$ ) $\times 10^{-3}$  + 1 fóton acidental;
- $K_L \rightarrow \pi^\mp \mu^\pm \nu$  ( $27.19 \pm 0.25$ )% + 2 fótons acidentais;
- $K_L \rightarrow \pi^\mp \mu^\pm \nu \gamma$  ( $5.7^{+0.6}_{-0.7}$ ) $\times 10^{-4}$  + 1 fóton acidental.
- $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm \mu^\mp \nu$  ( $< 2 \times 10^{-5}$ ).

Os decaimentos radiativos acima são suprimidos adicionalmente por suas razões de ramificação, já que o vínculo da massa invariante sobre os fótons acidentais, por si só, é bastante restritivo. Apesar da exigência feita na análise de se vetar qualquer evento que disparasse o sistema de múons, eventos do tipo contento essas partículas sobreviveram após quase todos os cortes de análise, exigindo cortes específicos para sua supressão. Por fim, temos ainda possíveis contaminações vinda dos decaimentos de híperons presentes no feixe. Espera-se que essa contribuição seja muito menor que qualquer uma daquelas listadas até agora, uma vez que o fluxo de híperons no feixe é pequeno comparado ao de káons<sup>13</sup>:

- $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0$  ( $99.522 \pm 0.032$ )% seguido de  $\Lambda^0 \rightarrow p^+ \pi^-$  ( $63.9 \pm 0.5$ )%;
- $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ e^- \bar{\nu}_e$  ( $2.7 \pm 0.4$ ) $\times 10^{-4}$  seguido de  $\Sigma^+ \rightarrow p^+ \pi^0$  ( $51.57 \pm 0.30$ )%;
- $\Xi^0 \rightarrow \Lambda^0 \pi^0$  ( $99.522 \pm 0.032$ )% seguido de  $\Lambda^0 \rightarrow p^+ e^- \bar{\nu}_e$  ( $8.32 \pm 0.14$ ) $\times 10^{-4}$ .

---

<sup>13</sup>Na tomada de dados do E799, ocorrida no verão de 1997, logo após E832 ter coletado os dados utilizados nessa tese (ver figura 3.12), registou-se  $N_{\Xi^0}/N_{K_L} \sim 1/500$ .

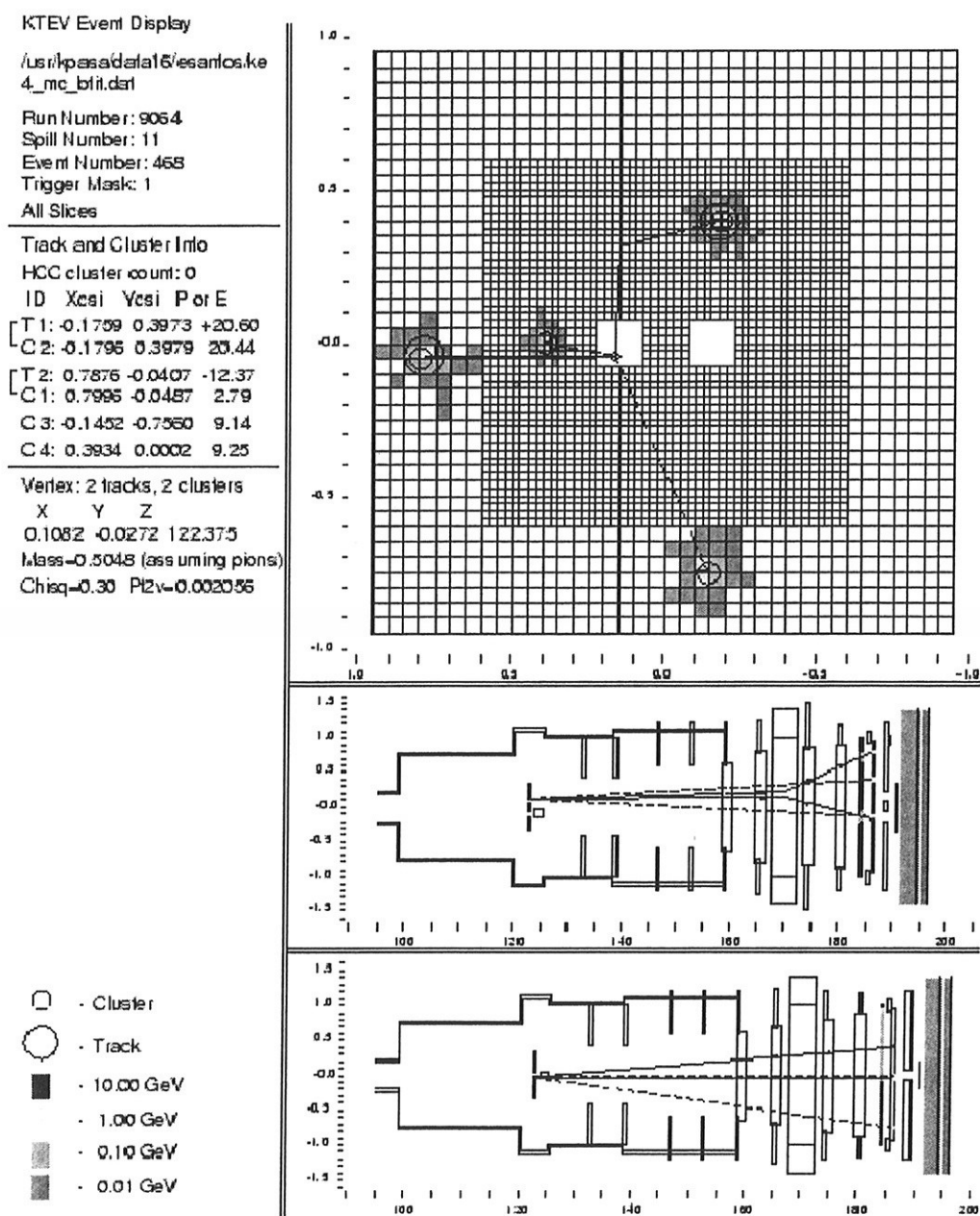


Figura 3.13: Assinatura esperada do decaimento  $K_{e4}^0$  no detector KTeV. A figura no topo mostra os clusters identificados pelo calorímetro, enquanto a figura na parte inferior mostra as trajetórias carregadas detectadas pelo espectrômetro. Note que o evento originou-se no feixe de vácuo. Os clusters associados a trajetórias são identificados por círculos concêntricos. Evento gerado por Monte Carlo.

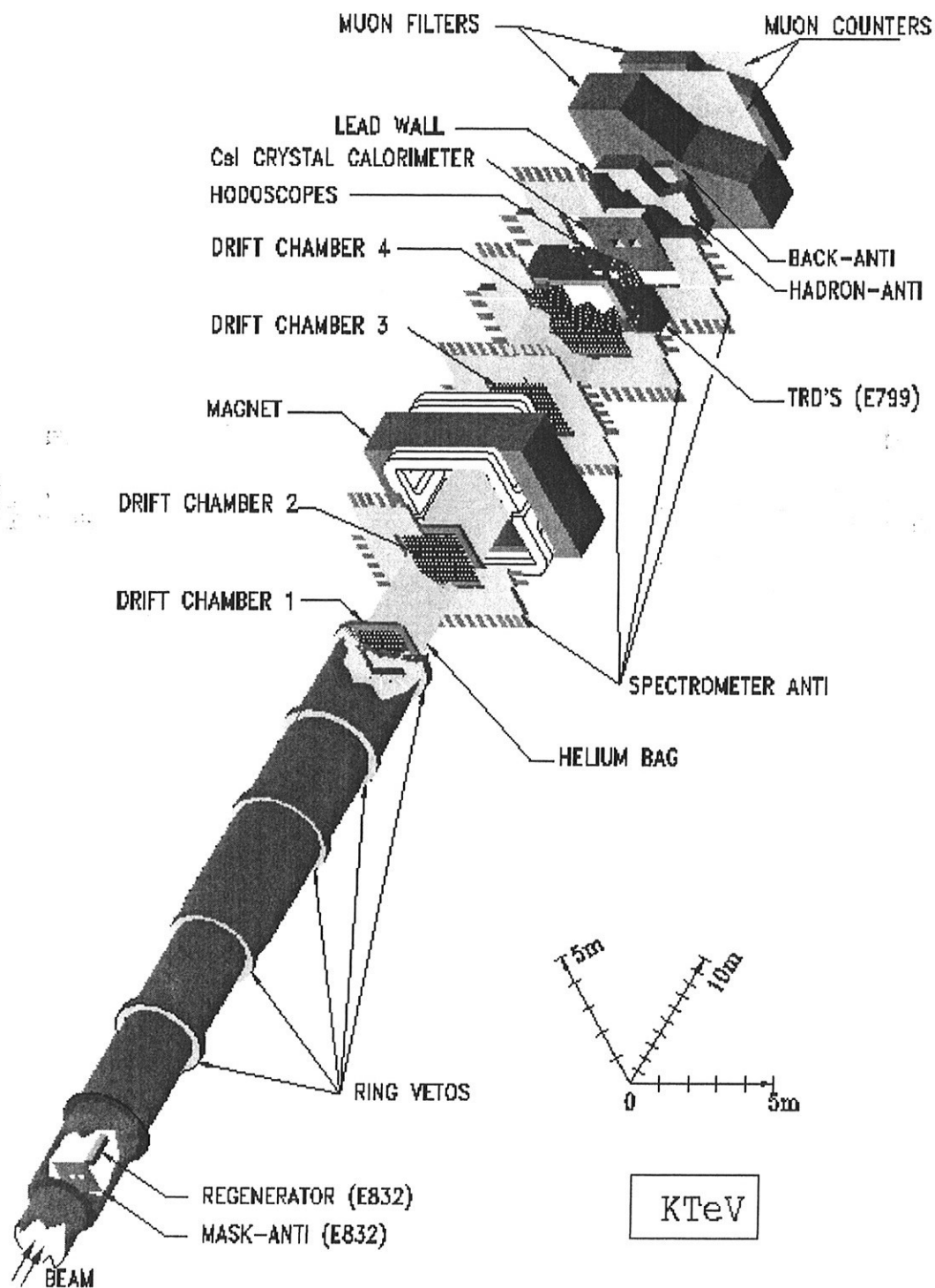


Figura 3.14: Visão tridimensional do detector KTeV configurado para o experimento E832.



## Capítulo 4

# O Monte Carlo de simulação

O programa de Monte Carlo do KTeV (KTEVMC) é usado para reproduzir, da maneira mais fiel possível, tanto a física intrínseca presente em cada modo de decaimento de káons e híperons quanto a resposta dos detectores gerada pela passagem de partículas. A função primária do Monte Carlo no KTeV é a determinação da aceitação ou eficiência de detecção<sup>1</sup> de um dado decaimento, já que essa quantidade é utilizada na medida da razão de ramificação. O programa de simulação também ajuda no entendimento do *bias* causado nas amostras pelos algoritmos de reconstrução. O estudo de algumas contribuições ao erro sistemático pode ser feito via Monte Carlo, como será visto no próximo capítulo. E, além disso, esse programa é capaz de ajudar na estimativa da contaminação presente numa certa amostra.

No KTeV, o Monte Carlo é responsável pela produção das partículas-mães (káons ou híperons) presentes no feixe secundário; propagação dessas partículas até o ponto de decaimento; propagação dos produtos do decaimento e, se necessário, simulação de transmutações secundárias; simulação da resposta dos detectores à passagem das partículas; e, por fim, a digitalização dos sinais bem como a gravação desses no mesmo formato em que os dados reais foram armazenados. Essa última característica, permite que dados reais e eventos de Monte Carlo sejam analisados por meio dos mesmos programas.

### 4.1 Produção do feixe de káons e propagação até o ponto de decaimento

O espectro de káons neutros utilizados na simulação foi determinado a partir de medidas da seção choque de produção de káons carregados originados por um feixe de prótons com momento de 450 GeV/*c* incidente sobre um alvo de berílio. O número *N* de káons carregados com momento no intervalo  $p + dp$  e emitidos no ângulo sólido  $\theta + d\theta$  com

---

<sup>1</sup>Isto é, a fração de decaimentos ocorrendo no volume ativo do detector que são reconstruídos com sucesso (L1, L2 e L3) e passam por todos os cortes adicionais na análise *offline*.

relação ao feixe incidente foi parametrizado por Malensek[65] como

$$\frac{d^2N}{dpd\theta} = \frac{B}{400} x \sin \theta \frac{(1-x)^A (1+5e^{-Dx})}{\left(1 + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{M^2}\right)^4}, \quad x = \frac{p}{E_B} \quad (4.1)$$

onde  $E_B$  é a energia do feixe de prótons e o ajuste aos dados experimentais forneceu os seguintes valores para os parâmetros  $A$ ,  $B$ ,  $D$  e  $M^2$  para  $K^+$  ( $K^-$ ):  $A = 2.924$  (6.107),  $B = 14.15$  (12.33),  $D = 19.89$  (17.78) e  $M^2 = 1.164$  (1.098). O momento é medido em GeV/c.

Baseado no conteúdo de quarks dos nucleons, é possível relacionar as seções de choque de produção de káons carregados e neutros. Definindo-se a probabilidade de produção de um par de quarks  $u\bar{u}$  ou  $d\bar{d}$  como sendo  $\sigma$  e a correspondente probabilidade de criação de um par  $s\bar{s}$  por  $\sigma_s$ , a probabilidade  $\sigma(K^+)$  de produção de um  $K^+(u\bar{s})$ , numa reação próton-próton é proporcional a  $2\sigma_s + \sigma\sigma_s$ , dado que o káon pode ser tanto produzido de quarks de valência quanto do mar<sup>2</sup>. Por meio de um raciocínio semelhante, obtém-se as seguintes relações

$$\sigma(K^+) \sim 2\sigma_s + \sigma\sigma_s, \quad (4.2)$$

$$\sigma(K^-) \sim \sigma\sigma_s, \quad (4.3)$$

$$\sigma(K^0) \sim \sigma_s + \sigma\sigma_s = \frac{\sigma(K^+) + \sigma(K^-)}{2}, \quad (4.4)$$

$$\sigma(\bar{K}^0) \sim \sigma\sigma_s = \sigma(K^-). \quad (4.5)$$

Assim, por meio das expressões acima e do espectro de produção de káons carregados (4.1), obteve-se o correspondente espectro de produção para káons neutros. Tal espectro foi adicionalmente sintonizado, de forma a reproduzir a taxa correta, observada experimentalmente, do decaimento  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$  no feixe de vácuo para a amostra de 1997. O resultado foram duas correções multiplicativas polinomiais,  $\xi(p)$  e  $\zeta(\theta)$ , determinadas de acordo com três intervalos diferentes para o momento  $p$  do káon

$$\xi(p) = 1 + C_1y + C_2y^2 + C_3y^3 + C_4y^4 \quad \text{e} \quad \zeta(\theta) = 1 + (\theta - \theta_0) \times A_\theta \times B_\theta, \quad (4.6)$$

onde  $A_\theta = 2325$ ,  $B_\theta = -1.670 \times 10^{-2}$ ,  $\theta_0 = 0.0048$ , os coeficientes  $C_i$  e a definição de  $y$ , de acordo com  $p$ , são mostrados na tabela 4.1. O resultado final é tal que

$$\frac{d^2N}{dpd\theta}(K^0) = \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2N}{dpd\theta}(K^+) + \frac{d^2N}{dpd\theta}(K^-) \right] \xi(p)\zeta(\theta), \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2N}{dpd\theta}(\bar{K}^0) = \frac{d^2N}{dpd\theta}(K^-)\xi(p)\zeta(\theta). \quad (4.8)$$

<sup>2</sup>O termo  $\sigma\sigma_s$  corresponde ao processo em que ambos os quarks do par  $u\bar{s}$  originaram-se no mar. Quando o  $K^+$  forma-se a partir de um quark de valência de um dos prótons e um quark do mar, obtém-se o termo  $2\sigma_s$ . O fator 2 leva em conta o fato de que existem dois quarks  $u$  num próton capazes de formar o  $K^+$ .

$p(\text{GeV}/c)$	$y$	$C_1 \times 10^{-3}$	$C_2 \times 10^{-5}$	$C_3 \times 10^{-7}$	$C_4 \times 10^{-9}$
< 70	$p - 70$	2.652	-0.4968	0.2581	5.641
70-200	$p - 70$	2.652	-1.804	-1.500	1.270
> 200	$200 - 70$	2.652	-1.804	-1.500	1.270

Tabela 4.1: Coeficientes da correção polinomial  $\xi(p)$  à parametrização de Malensek do espectro de produção de káons neutros.

O espectro em momento do káon (após integrar em  $\theta$ ) é mostrado na figura 4.1. O intervalo em  $\theta$  ao longo do qual a integração foi realizada representa a janela de ângulo sólido definida pelo sistema de colimação.

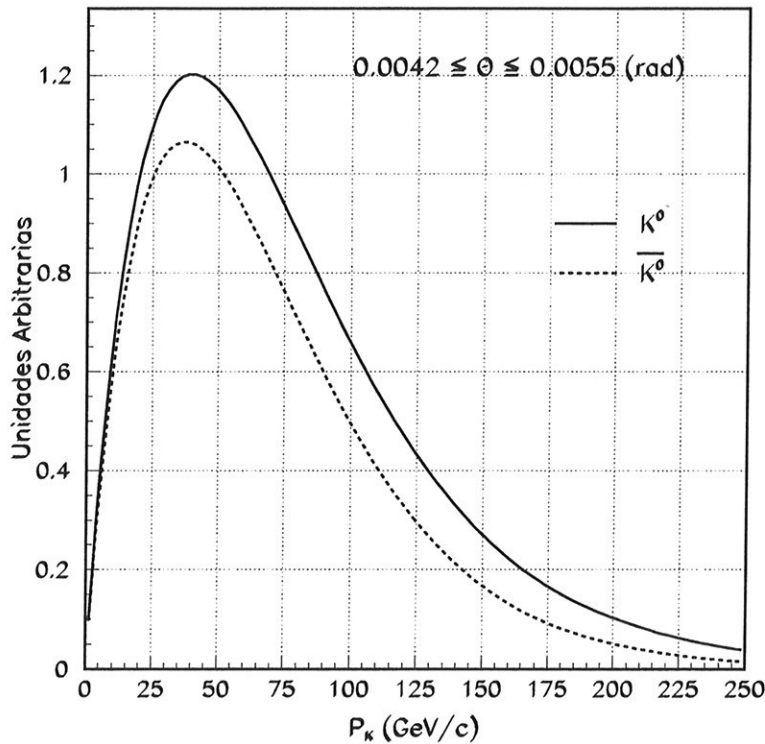


Figura 4.1: Espectro de momento dos káons neutros segundo a parametrização de Malensek para as seções de choque de produção de káons carregados. As correções  $\xi(p)$  e  $\zeta(\theta)$  para sintonização com os dados de  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$  em 1997 já foram incluídas. O intervalo de integração em  $\theta$  é mostrado no gráfico e representa a janela angular definida pelo sistema de colimação.

A posição transversal do káon gerado no interior do alvo é escolhida de acordo com o tamanho do feixe de prótons, ao passo que a posição longitudinal foi tomada como decaindo exponencialmente, de acordo com as seções de choque de interação de prótons e de káons com berílio. Uma vez deixado o alvo, o káon pode sofrer espalhamento nos absorvedores descritos no capítulo anterior (ver seção 3.1.1). Quando isso acontece, a partícula ganha um certo momento transversal  $p_T$ . Com exceção do colimador de definição, os

demais colimadores são tratados como totalmente absorventes. Para espalhamento no colimador de definição, há uma certa chance da partícula voltar para a linha de feixe.

Tanto o regenerador quanto o absorvedor móvel atenuam o fluxo de partículas. Essa atenuação foi calibrada usando-se dados dos decaimentos em três píons (tanto o modo neutro quanto o carregado) medidos nos dois feixes. A transmissão nesses elementos diminui à medida que a energia do káon aumenta ( $\sim 5 \times 10^{-4}/\text{GeV}$ ).

Uma vez gerado um  $K^0$  ou  $\bar{K}^0$ , de acordo com os espectros (4.7) e (4.8), é preciso propagar o káon até o ponto de decaimento. A evolução do estado quântico durante a propagação é mais apropriadamente feita na base de auto-estados  $K_L$  e  $K_S$  (ver 2), não esquecendo de incluir a interferência entre tais estados, já que na região após o regenerador, ambas as componentes coexistem. A amplitude do fator de regeneração  $|\rho|$  foi medida com dados reais e ajustada como uma lei de potência na energia do káon, enquanto a fase  $\phi_\rho$  foi determinada a partir da analiticidade da amplitude de espalhamento[66, 67]. O chumbo contido nos últimos módulos do regenerador contribui bastante para a amplitude de regeneração e os parâmetros usados nesse caso foram obtidos a partir de medidas realizadas por experimentos anteriores[68].

Para que o tempo de CPU seja usado de maneira eficiente, força-se que o káon decaia dentro de uma região mais limitada do detector (decaimentos fora dessa região seriam descartados de qualquer forma), região essa um pouco maior que aquela selecionada durante a análise final. O preço a pagar por isso é que pesos apropriados devem ser calculados de antemão para garantir as proporções corretas entre decaimentos dos feixes de vácuo e do regenerador, eventos difrativos e inelástico no regenerador e espalhamento inelástico nos colimadores do sistema de produção de feixe.

## 4.2 Geração do decaimento

### 4.2.1 O decaimento $K_{e4}^0$ no nível de árvore

Usando o programa GENBOD da Cernlib[24], gera-se um decaimento em quatro corpos, no referencial de repouso do káon, respeitando apenas conservação de energia-momento. De posse dos quadri-momentos das partículas “filhas” ( $\pi^\mp, \pi^0, e^\pm, \nu$ ), obtém-se então as cinco variáveis cinemáticas de interesse ( $s_\pi, s_l, \cos \theta_\pi, \cos \theta_l$  e  $\Phi$ ) e, por conseguinte, o peso do evento, já apresentado na equação (1.68) da seção 1.4.1. Aplica-se então o método de aceitação-rejeição para decidir se o evento é aceito ou não. Se a resposta é positiva todas as partículas sofrem um *boost* para o sistema do laboratório. O espectro de cada uma das cinco variáveis cinemáticas, gerado de acordo com a razão diferencial de decaimento (1.68), pode ser visto na figura 4.2. As contribuições individuais dos fatores de forma  $f$  e  $g$  para a distribuição de massa invariante dos píons são mostradas nos histogramas da figura 4.3, onde observamos claramente o papel dominante de  $g$ .

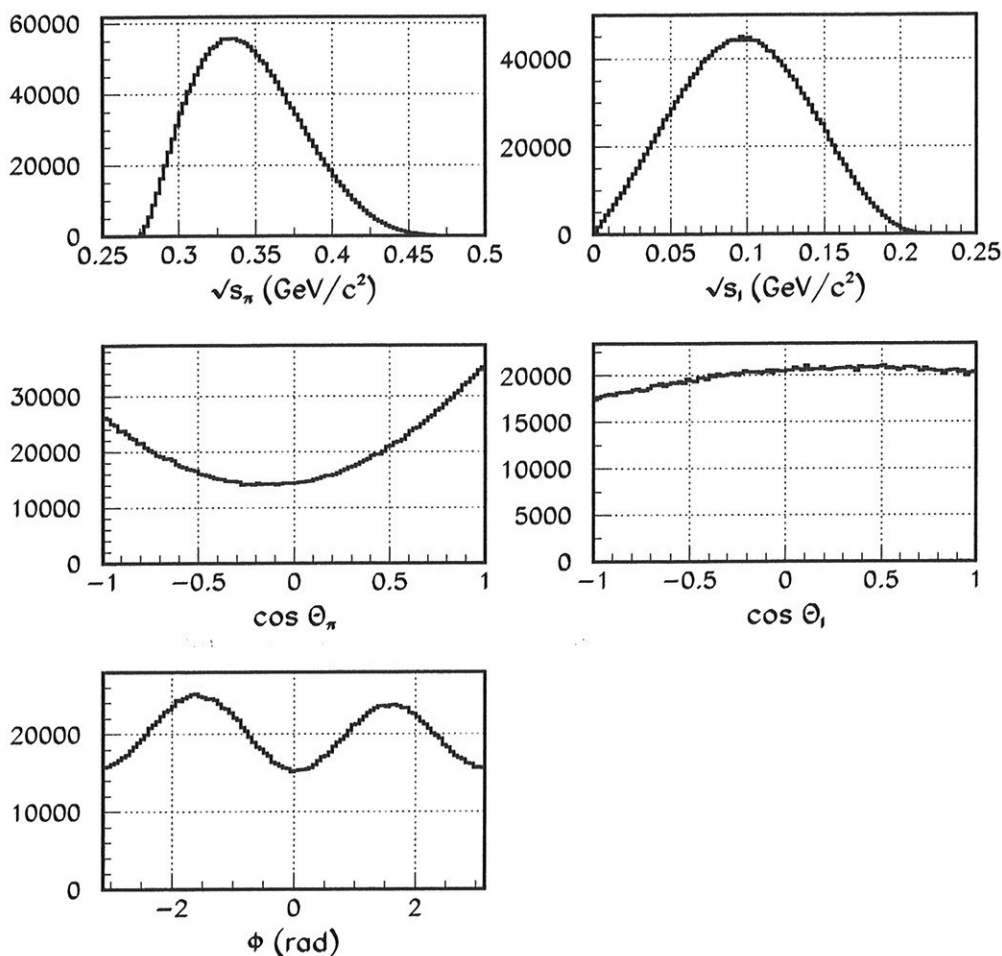


Figura 4.2: Distribuição das variáveis cinemáticas de  $K_{e4}^0$ . Essas são grandezas geradas e não reconstruídas.

### 4.2.2 Implementação das correções radiativas

As correções radiativas eletromagnéticas são incluídas por meio do pacote PHOTOS. Após a geração do evento em nível de árvore, PHOTOS, baseado na configuração cinemática do evento, decide se algumas partículas no estado final emitirão um fóton real de *bremstrahlung*. Em caso afirmativo, o fóton é gerado e os quadri-momentos de todas as partículas são corrigidos para garantir conservação de energia-momento.

O algoritmo utilizado por PHOTOS faz uso de propriedades das correções radiativas como: fatorização do kernel de *bremstrahlung* na aproximação em que o fóton emitido é mole ou colinear com a partícula carregada emissora [25]; e no cancelamento de divergências no infravermelho entre as correções virtuais e reais. Da última propriedade, em vez de calcular as correções virtuais analiticamente, o programa apenas as reconstrói numericamente.

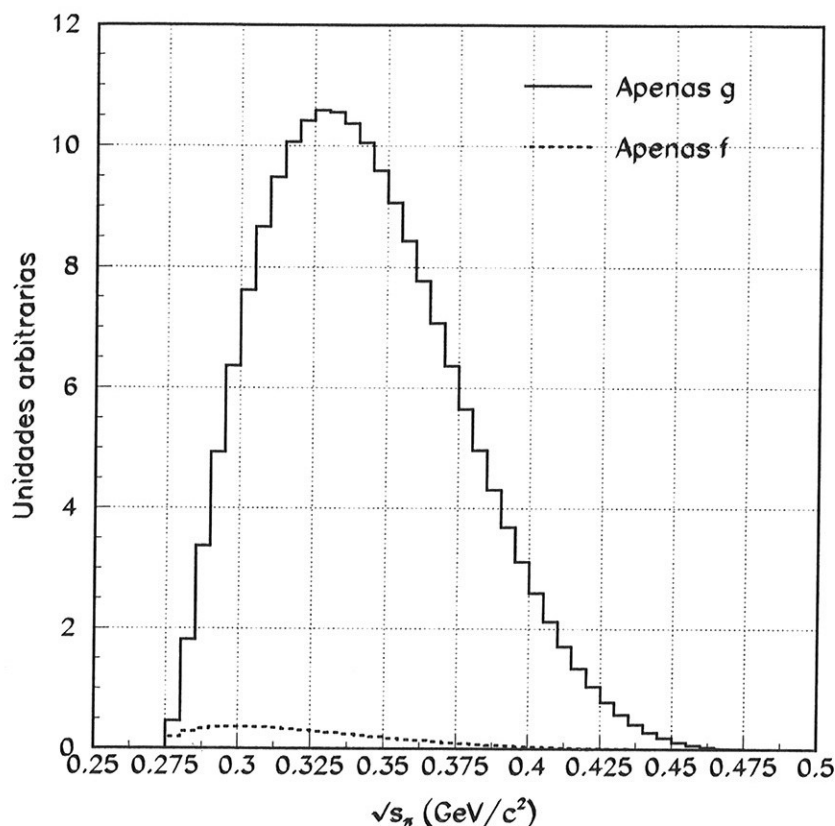


Figura 4.3: Contribuição individual dos fatores de forma  $f$  e  $g$  para a massa invariante dos píons em  $K_{e4}^0$ .

O algoritmo é de fácil implementação e permite que efeitos específicos do decaimento sejam implementados no elemento de matriz em nível de árvore. As figuras 4.4 e 4.5 mostram o espectro de energia do fóton de *bremsstrahlung* gerado por PHOTOS e a distribuição angular desse fóton com respeito à direção do lépton carregado em  $K_{e4}^0$ . É possível observar a comportamento  $1/E_\gamma$  no espectro de energia característico do processo de *bremsstrahlung*. Note que o pión carregado também pode irradiar, mas o espectro é dominado pela radiação emitida pelo lépton carregado.

### 4.2.3 O processo secundário $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

Como dito anteriormente, o modo de decaimento do  $\pi^0$  escolhido para essa análise foi aquele em dois fótons. Como é bem sabido, num decaimento em dois corpos, as leis de conservação de energia-momento fixam, sem ambiguidades, as energias e magnitudes dos momentos dos produtos do decaimento<sup>3</sup>. Quando as partículas no estado final são

<sup>3</sup>A previsão da razão de ramificação desse decaimento é um triunfo da chamada ação efetiva de Wess-Zumino-Witten (WZW)[15, 16, 39] dentro da teoria de perturbação quiral. A ação foi criada para suprir a falha das lagrangeanas  $\mathcal{L}_2$  e  $\mathcal{L}_4$  em explicar processos com número ímpar de bósons de Goldstone, como,

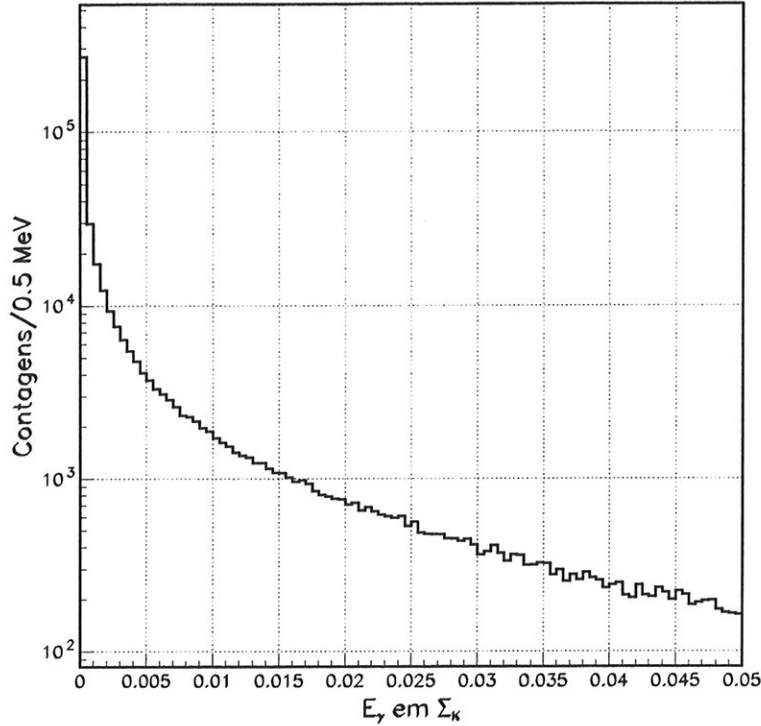


Figura 4.4: Espectro em energia do fóton irradiado por *bremsstrahlung* em  $K_{e4}^0$  por meio do pacote PHOTOS. Nenhum efeito do detector é incluído nesse gráfico.

idênticas, o processo torna-se ainda mais simples. Dessa forma, na simulação de  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , geram-se dois fótons com energia  $m_{\pi^0}/2$  e um 3-vetor, cuja direção é isotrópica no espaço. Faz-se então um *boost* de Lorentz desses fótons para o referencial do laboratório.

#### 4.2.4 Geração do modo de normalização $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$

O modo de normalização adotado para a medida da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  foi o decaimento  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  (ver discussão na seção 5.4). Esse decaimento também é de grande interesse em Teoria de Perturbação Quiral, dado que envolve a transição  $K - \pi$ . Sob a hipótese de forma  $V - A$  para a corrente hadrônica, como no caso de  $K_{e4}$ , a amplitude invariante para  $K_{e3}^0$  em nível de árvore pode ser escrita como

$$\mathcal{M}_0 = \frac{G_F}{2\sqrt{2}} \sin \theta_C \bar{u}(p_\nu)(1 + \gamma_5) [f_+(K + p_\pi)_\mu + f_-(K - p_\pi)_\mu] \gamma^\mu v(p_l), \quad (4.9)$$

em que  $f_+$  e  $f_-$  são fatores de forma e dependem do momento  $q^2 = (K - p_\pi)^2$  transferido ao par de léptons. Previsões de Teoria de Perturbação Quiral para esses fatores podem

---

por exemplo,  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . A previsão a partir da ação WZW é  $\Gamma_{\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma} = \frac{\alpha^2 m_{\pi^0}^2 n^2}{576 \pi^3 F_\pi^2} = 7.6 \text{ eV} \left(\frac{n}{3}\right)^2$ , em boa concordância com o valor experimental de  $7.7 \pm 0.6 \text{ eV}$ [64] quando  $n$  é identificado com o número de cores  $n = N_c = 3$ , como sugerido por Witten[16].

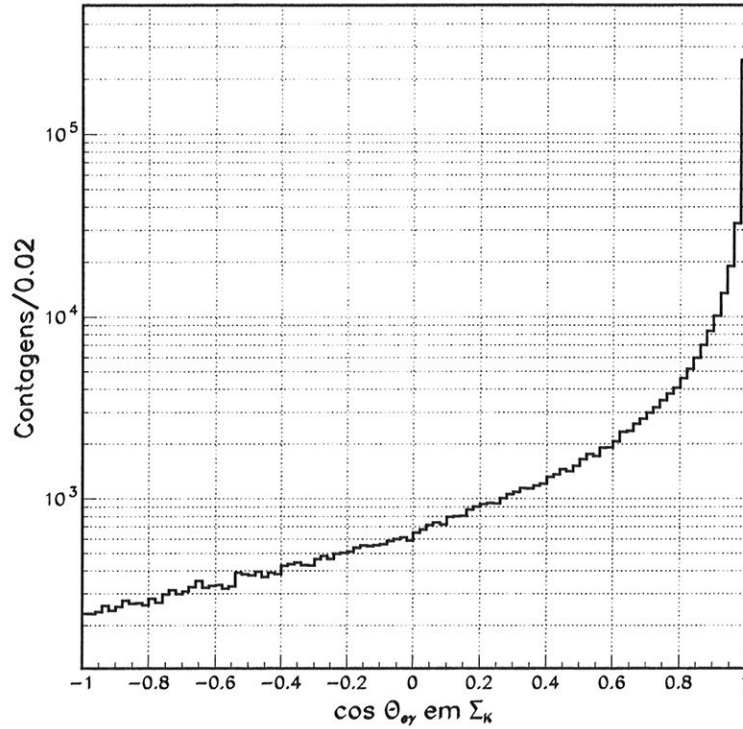


Figura 4.5: Distribuição do ângulo entre o fóton de *bremsstrahlung* e o lépton carregado em  $K_{e4}^0$ . Nenhum efeito do detector é incluído nesse gráfico.

ser encontradas em [69] e medidas de sua dependência com  $q^2$  podem ser obtidas em [70]. A respectiva taxa de decaimento, já somada sobre os spins do léptons, pode ser escrita então em função das energias  $E_\pi$  e  $E_l$  do pión e do lépton carregado, respectivamente

$$\Gamma_{K_{e3}}(E_\pi, E_l) = \frac{|f_+|^2}{(2\pi)^3 2M} \left\{ [M^2 + m_l^2 - H^2 - m_l^2 \Re(1 - \xi)] (H^2 - m_\pi^2 + q^2 - m_l^2) - \left( M^2 - \frac{1}{4} m_l^2 |1 - \xi|^2 \right) (q^2 - m_l^2) \right\}, \quad (4.10)$$

onde  $H^2 = (K - p_l)^2$  e  $\xi = f_-/f_+$ .

No Monte Carlo de KTeV, a geração de  $K_{e3}^0$  inclui também correções radiativas até ordem  $\alpha_{\text{QED}}$  na taxa de decaimento. Cálculos de correções radiativas eletromagnéticas para esse modo de decaimento existem há bastante tempo [71], porém tais cálculos não utilizam renormalização e os resultados são dependentes de um *cutoff* ultravioleta na energia do fóton que aparece nas integrais de *loop* dos diagramas de auto-energia e correções de vértice. Só recentemente cálculos renormalizáveis surgiram no âmbito da ChPT [69]. As correções radiativas para  $K_{e3}^0$  no Monte Carlo utilizado nesta análise foram feitas, como no caso de  $K_{e4}^0$ , por meio do pacote PHOTOS.



### 4.3 Propagação dos produtos e simulação da resposta dos detectores

As partículas são seguidas até saírem do detector, atingirem os vetos de fótons ou o calorímetro, etc. Apenas os neutrinos não são acompanhados durante a simulação. Partículas carregadas no espaço entre a janela de vácuo e o calorímetro podem sofrer desvios de direção, além daqueles gerados pelo espectrômetro, via espalhamento de Coulomb múltiplo, cujo ângulo foi modelado pela teoria de Molière[72], e raios- $\delta$ <sup>4</sup> também podem ser gerados, com probabilidade de emissão dada por

$$P_{\delta} = 154(\text{keV}) \frac{Z}{A} d(\text{g/cm}^3) L(\text{cm}) \frac{1}{E}, \quad (4.11)$$

onde  $Z$  e  $A$  são, respectivamente, o número atômico e a massa atômica do material sendo atravessado,  $d$  a densidade do meio,  $L$  a espessura de material atravessada pela partícula emissora e  $E$  a energia dessa última. Raios- $\delta$  podem induzir pulsos adicionais nas câmaras de arrasto. Radiação de *bremstrahlung* também pode ser emitida por partículas carregadas ao sofrerem qualquer tipo de aceleração. A seção de choque para emissão de fótons de *bremstrahlung* é a de Bethe-Heitler [57]. KTEVMC também é capaz de tratar das conversões de fótons na matéria, desde que estivessem acima do limiar de 0.1 GeV. A probabilidade de conversão é dada por  $P_{e^+e^-} = 1 - e^{-\frac{7}{9}X}$ , onde  $X$  é a distância medida em  $X_0$  e o espectro dos pares  $e^+e^-$  dados pela fórmula de Bethe-Heitler.

#### 4.3.1 DCs

O momento transversal fornecido pelo imã do espectrômetro foi determinado mapeando-se o campo magnético como função da posição transversal no centro do imã. Para uma melhor reprodução do processo discreto que é a ionização, usou-se os dados para determinar a densidade de ionização efetiva em algumas regiões das câmaras e em cada plano dessas. Para simular o problema do SOD alto (ver seção 3.1.3), mapas de probabilidade (espacial e temporal) de uma medida defeituosa do tempo de arrasto foram criados a partir de dados do decaimento  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Quando a simulação decide que um pulso será mal medido, a distância de arrasto é dilatada de acordo com uma distribuição exponencial, cuja forma foi medida a partir dos dados reais. Uma melhora significativa na concordância entre dados e Monte Carlo foi observada ao implementar-se tal algoritmo[58, 63].

A conversão da distância de arrasto gerada para um valor de tempo de arrasto foi feita mediante um fator de conversão calibrado anteriormente por meio dos dados reais, de forma a se obter o valor médio de SOD=6.35 mm, como já discutido na seção 3.1.3. A distribuição do tempo de arrasto era modelada na forma de uma gaussiana com largura determinada pela distribuição de SOD da figura 3.5.

<sup>4</sup>Elétrons bastante energéticos extraídos de seus respectivos átomos por meio de colisões com uma partícula carregada atravessando o meio.

### 4.3.2 Calorímetro

Uma vez que o processo de desenvolvimento de um chuveiro de partículas, de natureza qualquer, envolve um número elevado de partículas, a simulação desse tipo de evento exige um tempo de CPU elevado. Assim, para efeitos práticos, torna-se impossível simular chuveiro por chuveiro quando da execução de uma determinada análise. A solução encontrada no KTeV foi a utilização das denominadas bibliotecas de chuveiros. Um banco de dados contendo a fração de energia depositada em cada cristal como função da identidade da partícula incidente ( $\gamma$ ,  $e^\pm$ ,  $\pi^\pm$ ,  $\mu^\pm$ , etc), energia dessa última e direção do chuveiro. As bibliotecas estavam, dessa forma, segmentadas em  $z$  (25 bins), em energia (2, 4, 8, 16, 32 e 64 GeV) e continham também 325 diferentes pontos de incidência sobre a face do CsI. A quantidade de chuveiros diferentes numa dada biblioteca é de cerca de alguns milhares. Os chuveiros nas bibliotecas foram todos gerados usando o programa GEANT[73] da Cernlib[24].

Dada uma partícula, com energia  $E$ , incidente na posição  $(x, y)$  na face do calorímetro, a direção do chuveiro era determinada prolongando-se a direção inicial da partícula até a profundidade média do chuveiro, essa última sendo essencialmente proporcional a  $\ln E$ . Com a informação acima, escolhe-se um chuveiro na biblioteca. O próximo passo é aplicar um fator multiplicativo às frações de energia depositada, tal fator sendo a razão entre a energia da partícula incidente e a energia do chuveiro da biblioteca ( $f = E/E_{biblio}$ ).

### 4.3.3 Hodoscópios de trigger e vetos de fótons

Baseados na energia depositada nos bancos VV' dos hodoscópios de *trigger*, os *latch bits* dos contadores passavam de 0 para 1 de acordo com a eficiência do contador, medida a partir de dados reais.

A energia depositada por elétrons e fótons nos RCs, no MA, no SA foi simulada com uma resolução gaussiana e dependia da energia também parametrizada a partir dos dados. As demais partículas carregadas foram todas tratadas como MIPs<sup>5</sup> e a energia depositada por essas foi igualmente modelada por uma distribuição gaussiana.

### 4.3.4 Digitalização dos sinais

A etapa de digitalização durante a simulação é muito importante, pois é nela que se define o formato final a ser gravado em disco e que deve ser igual àquele utilizado para os dados.

A energia depositada tanto nos vetos de fóton quanto nos hodoscópios é convertida em contagens de ADCs, cujo ganho já foi determinado a partir dos dados de calibração. Já o tempo de arrasto medido pelas DCs é transformado em contagens de TDCs. No caso de eventos com múltiplos pulsos nas câmaras dentro da mesma janela temporal de 235

---

<sup>5</sup> *Minimum Ionizing Particles* é a denominação geral outorgada a partículas cuja perda de energia por unidade de distância percorrida é bem pequena, cerca de alguns MeVs por centímetro. Os exemplos mais comuns de MIPs são os múons e os píons.

ns<sup>6</sup>, apenas o primeiro pulso é registrado.

Agora que a energia depositada nos cristais do calorímetro já está determinada, o passo seguinte é conversão dessa energia numa correspondente quantidade de luz de cintilação, conversão dessa quantidade luminosa em carga elétrica e posterior digitalização da carga. As DPMTs operavam sincronizadas com o sinal de RF do acelerador, de modo que a energia total num cristal era primeiro dividida em fatias (já mencionadas anteriormente e correspondente cada uma a um ciclo de 19 ns da RF). O padrão temporal da luz de cintilação foi modelado por três decaimentos exponenciais com tempos característicos de 10 ns, 40 ns e 1  $\mu$ s. A partir do número  $N_{fe}$  de foto-elétrons por GeV na saída das PMTs, a distribuição em energia de cada fatia era modelada com resolução gaussiana baseada na foto-estatística, de modo que

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{E}{N_{fe}}}, \quad (4.12)$$

em que  $N_{fe}$  foi medido com o auxílio de um laser, cuja intensidade luminosa podia ser monitorada com precisão. Uma vez convertida em contagens de ADC, ou seja, digitalizada, o limiar de leitura é aplicado, nesse caso, exige-se que a soma de contagens em quatro fatias consecutivas seja maior que seis.

## 4.4 Atividade acidental

Além dos sinais gerados pelos decaimentos de interesse nos detectores do KTeV, sabemos que partículas espalhadas a partir do feixe neutro podem igualmente atingir o detector, influenciando a resposta do sistema de *trigger* bem como as variáveis reconstruídas do evento. Há também o ruído intrínseco introduzido por toda a eletrônica e que pode, da mesma forma, alterar a decisão do *trigger* e a topologia de um evento. Trajetórias ou *clusters* podem ser corrompidos por tal atividade subjacente, denominada aqui de atividade acidental.

Durante a tomada de dados, havia um *trigger* dedicado à monitoração da atividade acidental no detector. Como acredita-se que essa esteja diretamente relacionada à intensidade do feixe primário de prótons (excluindo-se é claro aquela gerado por ruído eletrônico), as fontes para tomada de decisão desse *trigger* eram fornecidas pelos contadores acidentais. Esses últimos faziam parte de um conjunto de três contadores de cintilação de HF (ácido fluorídrico), acoplados a PMTs. Estavam posicionados a 90° com relação ao feixe e a 1.8 m do alvo de BeO. A coincidência de sinais nesses três contadores formavam o chamado *trigger* acidental. Assim, a atividade acidental no detector podia ser monitorada como função da intensidade do feixe de prótons. Ao ser disparado esse *trigger*, o sinal dos detectores eram gravados separadamente como eventos acidentais.

Esse dados eram então superpostos, durante a simulação de Monte Carlo, aos dados gerados. De fato, a superposição ocorria após a digitalização dos dados. Por exemplo,

<sup>6</sup>Essa foi a janela definida como *in time* para a análise e baseou-se na observação da distribuição temporal dos pulsos contidos em amostras de dados reais.

contagens de ADC eram simplesmente somadas e a operação lógica OR era aplicada aos *latch bits*. Uma vez superposta a atividade acidental, o *trigger* era novamente testado com os dados resultantes.

# Capítulo 5

## Análise dos dados

Uma vez descrito todo o aparato experimental do KTeV e o programa de simulação KTEVMC, podemos finalmente discutir os detalhes da análise realizada para se obter uma amostra do decaimento  $K_{e4}^0$ , tentando-se reduzir ao mínimo possível o ruído intrínseco. Os critérios de seleção aplicados na separação da amostra correspondente ao modo de normalização também são descritos nesse capítulo. Discute-se também as várias contribuições ao erro sistemático associado à razão de ramificação de  $K_{e4}^0$ . Por fim, descreve-se o procedimento de extração dos fatores de forma que parametrizam o elemento de matriz hadrônica desse decaimento.

### 5.1 Separação da amostra inicial (*crunch*)

A amostra com a qual trabalhamos nessa análise foi extraída de um conjunto inicial de 363 fitas, as quais foram submetidas ao processo de “esmagamento” ou *crunch*. Nesse estágio, os dados foram processados com o trigger E832 B01, sintonizado para separar decaimentos  $K_{e3}^0$ , e divididos em duas sub-amostras etiquetadas como  $K_{e4}^0$  e  $K_{e3}^0$ . As exigências comuns de ambas sub-amostras eram

- O evento deve originar-se de um “bom spill”. Num spill ruim, em geral, ocorreu erro na operação ou na leitura de algum elemento do detector como: oscilações na alta tensão das DCs, picos de intensidade do feixe, etc...
- Pelo menos duas trajetórias carregadas devem ser reconstruídas com sucesso;
- Uma das trajetórias deve satisfazer  $0.9 < E/p < 1.1$  (compatível com um elétron) e a outra  $E/p < 0.9$  (compatível com um píon),

enquanto para receber o rótulo  $K_{e4}^0$  dois *clusters* adicionais, não associados a trajetórias, deveriam ser encontrados satisfazendo:

- A energia de ambos os clusters é superior a 1.8 GeV;

- $\chi_{shape}^2 < 100$ , onde  $\chi_{shape}^2$  é uma medida da qualidade da forma do *cluster* e definida como

$$\chi_{shape}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{E_i - \bar{E}_i}{\sigma_i} \right)^2, \quad (5.1)$$

onde  $N$  é o número de blocos do *cluster*,  $E_i$  é a energia medida no  $i$ -ésimo bloco compondo o *cluster*,  $\bar{E}_i$  e  $\sigma_i$  são a energia e o desvio padrão esperados nesse bloco, no caso de um chuveiro eletromagnético, respectivamente, obtidos a partir das bibliotecas de chuveiro. Esse corte em  $\chi_{shape}^2 < 100$  é, na realidade, bastante fraco e, tinha somente a função de eliminar eventos com *clusters* de forma bastante atípica. Como veremos mais adiante, o corte em  $\chi_{shape}^2$  pode ser utilizado para distinguir entre chuveiros eletromagnéticos e hadrônicos.

- ambos os *clusters* encontram-se a pelo menos 15 cm daqueles associados a trajetórias. Esse corte visa minimizar a probabilidade de fusão de *clusters* vizinhos, o que deteriora o processo de determinação de suas formas e energias;
- A massa invariante dos *clusters* deve ser compatível com um  $\pi^0$ , isto é,  $0.12 \text{ GeV}/c^2 < M_{\gamma\gamma} < 0.15 \text{ GeV}/c^2$ .

Dada a elevada estatística da amostra de  $K_{e3}$ , essa era gravada em fita a uma taxa 1000 vezes menor que a real. Dessa forma, o conjunto final foi gravado em apenas duas fitas DLTs, contendo cerca de 22 Gb de dados.

## 5.2 Principais algoritmos de reconstrução

Dentre os vários algoritmos utilizados durante a reconstrução de eventos nessa análise, dois deles são particularmente importantes para os denominados modos híbridos, isto é, modos contendo tanto partículas neutras quanto carregadas: o primeiro deles é aquele responsável pela determinação do vértice carregado e o outro encarrega-se da reconstrução do candidato a  $\pi^0$ . Esses dois procedimentos ilustram bem o trabalho conjunto do espectômetro e do calorímetro do KTeV na reconstrução de eventos, assim como as várias correções aplicadas aos dados durante a análise *offline*.

### 5.2.1 Identificação de trajetórias e determinação do vértice carregado

Como o leitor já deve ter percebido, a identificação de trajetórias já foi realizada *online* pelo nível 3 do *trigger*, mas é repetida totalmente durante a análise *offline*, quando os dados de calibração do detector estão disponíveis e são usados para melhorar em muito o processo de reconstrução.

O primeiro passo é ler a informação dos TDCs das câmaras de arrasto, convertendo os valores de tempo de arrasto em distância. Os eventos são então classificados de acordo com

a existência ou não de pulsos em planos adjacentes de fios sensíveis e, em caso afirmativo, calcula-se o valor de SOD associado, sendo que um evento é considerado bom quando  $SOD = 6.35 \pm 1$  (mm). Apenas o primeiro dos pulsos dentro da janela *in-time* é registrado, pois os pulsos adicionais originam-se em sua maioria da própria corrente de ionização gerada pela partícula e, além disso, tal efeito não é modelado pelo Monte Carlo.

Num evento típico, com duas trajetórias carregadas, espera-se observar um total de 32 pulsos nas câmaras de arrasto:

$$2(\text{trajetórias}) \times 4(\text{DCs}) \times 2(\text{planos}) \times 2(\text{pulsos}) = 32(\text{pulsos}), \quad (5.2)$$

mas alguns casos contribuem para alterar esse número. A emissão de raios- $\delta$ , por exemplo, pode levar a pulsos adicionais capazes de atingir os fios sensíveis antes mesmo do pulso de ionização primário, ocasionando assim uma medida subestimada da distância de arrasto. O problema do SOD alto já foi descrito na seção 3.1.3. Observou-se também uma ineficiência intrínseca dos fios.

Uma vez analisados os pulsos, cria-se um mapa correspondente de pontos espaciais separados nas visões X e Y da câmara. Os pontos associados à visão X possuem, é claro, uma curvatura imposta pelo campo magnético, mas os segmentos anteriores (DC1-2) e posteriores (DC3-4), quando prolongados, devem se encontrar no meio do imã (dentro de uma janela de 6 mm). Todo candidato à trajetória na direção Y deve possuir, no mínimo, dois bons pares de SOD. E dado que as câmaras de arrasto só possuem duas visões, é impossível fazer a associação X-Y, mesmo quando há apenas dois candidatos em cada visão. Tal ambiguidade é resolvida com a ajuda do calorímetro, impondo-se que os candidatos a trajetória apontem para *clusters* identificados pelo calorímetro (dentro de uma janela de 7 mm com respeito ao centro do *cluster*).

Nesse ponto uma lista de candidatos a vértice de duas trajetórias já foi elaborada, possibilitando a inclusão das correções. Por exemplo, os valores de SOD são recalculados e pares de pulso com baixo SOD, mais especificamente, com correção superior a 0.6 mm, são considerados como afetados por raios-delta e escolhe-se apenas o pulso mais compatível com a extrapolação obtida a partir das demais câmaras. Na direção X, aplica-se uma correção (dependente do momento) devido à franja de campo presente no interior das câmaras DC2 e DC3. As trajetórias na direção Y são novamente fitadas, agora separadamente, pois há inevitavelmente um deslocamento na direção Y, devido à forma tridimensional do campo magnético. Entretanto, tal deslocamento era quantificado por meio do chamado  $\chi_{offmag}^2$ , definido como

$$\chi_{offmag}^2 = \frac{x_{off}^2}{\sigma_x^2} + \frac{y_{off}^2}{\sigma_y^2}, \quad \text{onde} \quad \sigma_{x(y)}^2 = \sigma_{scat}^2 + \sum_{i=1}^4 \sigma_{i_{x(y)}}^2, \quad (5.3)$$

em que  $\sigma_{scat}^2$  é a incerteza causada pelo processo de espalhamento múltiplo no gás das câmaras DC2 e DC3<sup>1</sup> e  $\sigma_{i_{x(y)}}^2$  é a resolução intrínseca do plano  $x(y)$  da  $i$ -ésima câmara e leva em conta inclusive se os pontos espaciais se originaram de um par de pulsos em

<sup>1</sup>Há também uma pequena contribuição vinda do gás He entre essas câmaras, mas é desprezível.

planos adjacentes de fios sensíveis ou de apenas um pulso. Finalmente, o momento era recalculado a partir da curvatura corrigida entre as câmaras DC2 e DC3.

### 5.2.2 Reconstrução do pión neutro

A tarefa primária do algoritmo de reconstrução do pión neutro é a determinação da energia depositada em cada um dos blocos do calorímetro. As contagens em cada fatia dos ADCs é convertida linearmente em energia, aplicando-se em seguida uma correção não-linear (tipicamente menor que 1%) e observada durante o procedimento de calibração posterior à tomada de dados utilizando-se amostras muito puras e de alta estatística de elétrons.

A energia total depositada por bloco é determinada somando-se as contribuições de seis fatias das DPMTs. O próximo passo é encontrar os chamados blocos-sementes, definidos como aqueles em que nenhum dos seus blocos adjacentes possuem o bit HCC *on* ou que possui energia superior a qualquer outro bloco adjacente com bit HCC *on*. Uma vez encontrados os blocos-sementes, os *clusters* são definidos como grupos de blocos em arranjos de  $7 \times 7$ , no caso de blocos grandes, ou  $3 \times 3$  para blocos pequenos. A energia de um *cluster* é simplesmente a soma das energias brutas de seus blocos componentes.

A posição transversal do *cluster* é determinada da seguinte forma: o valor de  $x$  é determinado somando-se as energias da coluna de blocos que contém o bloco-semente e das duas colunas adjacentes. A razão entre as energias dessas colunas é então comparada com chuveiros da biblioteca. Um procedimento análogo é realizado para a determinação da posição  $y$ . Correções à energia e posição do *cluster* são incluídas quando esse possui o bloco-semente tocando os buracos de feixe ou a extremidade externa do calorímetro. A partir de chuveiros da biblioteca estima-se a energia presente nos blocos que faltam. A biblioteca também é utilizada para correções de *clusters* que se fundem, determinando a contribuição individual de cada *cluster* à energia dos blocos onde ocorreu a fusão.

Outra correção que se mostrou necessária durante a calibração *offline* foi aquela à resposta de cintilação como função da posição transversal no interior do cristal de CsI. A calibração foi feita com elétrons reais, mostrando a resposta ser poucos por cento menor nas bordas do que no centro do cristal. A inclusão dessa correção melhorou em muito a resolução em energia do calorímetro.

Com a posição e energia dos *clusters* não associados a trajetórias, o corte na massa invariante do par de supostos fótons podia agora ser aplicado, pois sendo  $E_1$  e  $E_2$  suas energias,  $z_{\text{CsI}}$  e  $z_{\text{vtx}}$  a posição, ao longo do eixo  $z$ , do calorímetro e do vértice carregado (determinada pelo espectômetro), respectivamente, e  $d_{12}$  a separação dos *clusters* ao longo da face do CsI, temos

$$M_{\gamma\gamma}^2 = 2E_1E_2(1 - \cos\theta_{12}) \approx E_1E_2\theta_{12}^2 \approx E_1E_2 \left( \frac{d_{12}}{z_{\text{CsI}} - z_{\text{vtx}}} \right)^2, \quad (5.4)$$

onde usou-se os seguintes fatos: 1) o vértice de decaimento do  $\pi^0$  é praticamente aquele do vértice carregado, dado o tempo de vida extremamente curto desse pión; 2) o ângulo de abertura entre os fótons é bem pequeno, de modo que podemos usar as aproximações  $\cos\theta_{12} \approx 1 - \theta_{12}^2/2$  e  $\theta_{12} \approx d_{12}/(z_{\text{CsI}} - z_{\text{vtx}})$ .



## 5.3 Critérios de seleção de $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$

Descreveremos nessa seção os diversos cortes utilizados na identificação do decaimento  $K_{e4}^0$ . Como o káon inicial é o de longa vida, selecionamos apenas eventos originados no feixe de vácuo, já que aquele do regenerador contém também mésons K de vida curta  $K_S$ . Selecionou-se também apenas eventos cujos vértices de decaimento reconstruído se encontrasse, ao longo do eixo  $z$ , na região  $110 < z_{vtx} < 158$  (m). E somente eventos com exatamente duas trajetórias carregadas foram mantidos na amostra.

### 5.3.1 O *trigger* utilizado

Ao ser aceito pelo *trigger* utilizado, o evento (de dados reais ou de simulação):

- fazia parte de um bom *spill*;
- apresentava no mínimo duas colisões num plano e uma colisão no outro plano do sistema VV';
- apresentava pelo menos uma colisão no lado leste (oeste) do sistema VV'; pelo menos uma colisão no hemisfério sul (norte) do sistema VV';
- nas câmaras DC1 e DC2, pelo menos uma devia registrar pulsos em ambas as visões ( $x$  e  $y$ ) podendo a outra registrar pulsos em uma única visão;
- podia haver um pulso não registrado, na visão  $y$ , em uma das quatro DCs;
- os três SA1-3 deviam estar silenciosos, juntamente com o CIA, o regenerador e o contador de múons MU2.

### 5.3.2 Identificação de partículas

A principal variável utilizada na distinção entre elétrons (ou pósitrons) e píons carregados para dados coletados por E832 é a razão  $E/p$ <sup>2</sup>. Como já observado, durante o *crunch* exigiu-se que uma das trajetórias carregadas identificadas pelo espectrômetro e associadas aos *clusters* no CsI devia possuir  $E/p < 0.9$  e a outra  $E/p > 0.9$ . Durante a análise *offline*, a exigência sobre a trajetória compatível com um  $\pi^\pm$  foi mantida, ao passo que aquela sobre a trajetória compatível com  $e^\pm$  foi tornada mais rígida ( $0.975 < E/p < 1.025$ ). As distribuições de  $E/p(e^\pm)$  e  $E/p(\pi^\pm)$  podem ser vistas na figura 5.1<sup>3</sup> com a

<sup>2</sup>Em E799, essa discriminação  $\pi/e$  é feita de maneira mais eficiente utilizando-se um TRD (*Transition Radiation Detector*). Mesmo não sendo muito provável, um pión é capaz de depositar mais de 90% de sua energia no calorímetro, confundindo-se com um elétron.

<sup>3</sup>Daqui em diante, a menos que explicitamente indicado, as distribuições apresentam a variável em questão após todos os cortes de análise serem aplicados, exceto o corte na própria variável. Sempre que possível ou apropriado, a previsão feita pelo Monte Carlo será superposta. A convenção no KTeV é usar pontos para representar os dados e um histograma para o MC.

previsão do Monte Carlo superposta. Note que a distribuição de dados reais para o pión apresenta um corte abrupto, sem mostrar eventos além do corte, devido ao fato de que tal corte foi aplicado durante o *crunch*. Observa-se também o pico bem próximo da origem, característico de uma MIP.

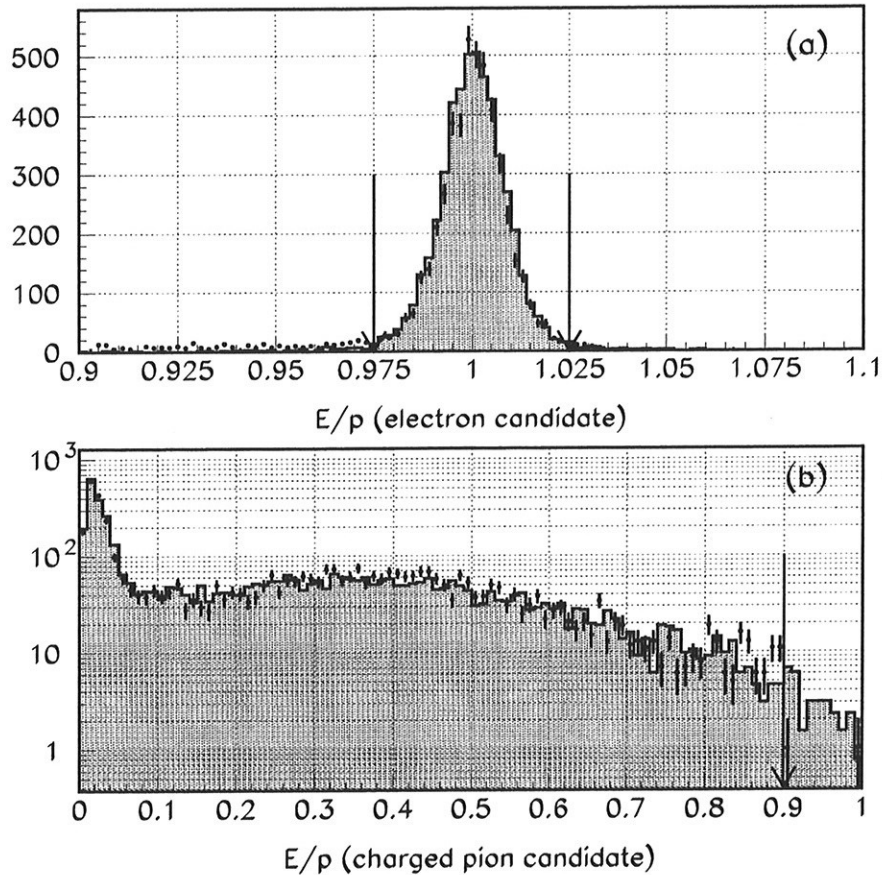


Figura 5.1: (a) distribuição de  $E/p$  para o candidato a  $e^\pm$  em  $K_{e4}^0$ . (b) distribuição de  $E/p$  para o candidato a  $\pi^\pm$  em  $K_{e4}^0$ . Os cortes são indicados pelas setas verticais. Nenhuma subtração de fundo residual foi realizada.

Outra variável utilizada na identificação de partículas é o  $\chi_{shape}^2$ . Como chuviscos de natureza eletromagnética têm forma bastante característica, pode-se usar o  $\chi_{shape}^2$  para verificar se um determinado *cluster* é compatível com um fóton ou elétron. A figura 5.2 mostra as distribuições para  $\chi_{shape}^2(e^\pm)$  e  $\chi_{shape}^2(\pi^0)$ , com todos os cortes de análise aplicados. O  $\chi_{shape}^2(\pi^0)$  é definido como a soma dos  $\chi^2$ s de ambos os fótons.

O corte na massa invariante  $M_{\gamma\gamma}$  do par de fótons adicionais, já aplicado durante o *crunch* também é tornado mais rígido na análise *offline*, exigindo-se que  $131.6 \text{ MeV}/c^2 < M_{\gamma\gamma} < 139.0 \text{ MeV}/c^2$  e corresponde a uma região de  $3\sigma$  em torno do valor central ( $\overline{M}_{\gamma\gamma} \pm 3\sigma$ ). A distribuição de  $M_{\gamma\gamma}$  pode ser vista na figura 5.3, onde podem ser vistos tanto o

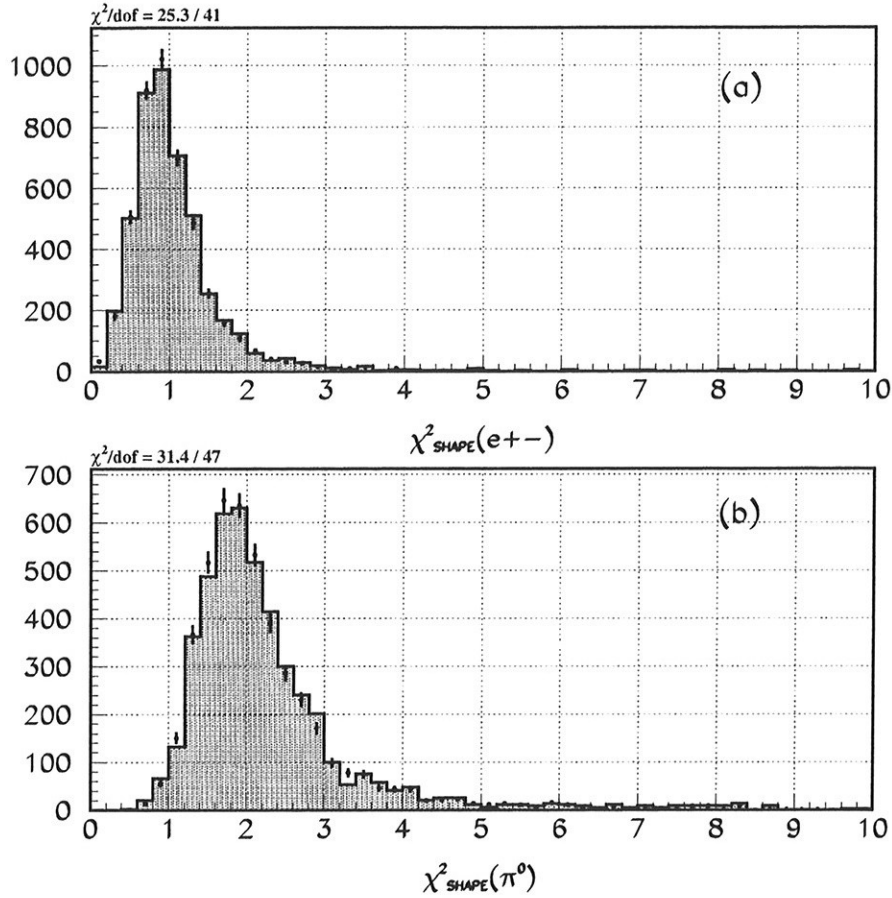


Figura 5.2: (a)  $\chi^2_{shape}$  para o candidato a  $e^\pm$ . (b)  $\chi^2_{shape}$  para o candidato a  $\pi^0$ . Os cortes de análise são leves e não aparecem na figura.

corte aplicado no *crunch* quanto o de análise. Pode-se ver também sem dificuldade que após todos os cortes de análise, a distribuição ainda apresenta uma contaminação residual aproximadamente constante e da ordem de 10 eventos/0.5 MeV/c<sup>2</sup> ao longo de todo o intervalo. Discutir-se-á mais adiante a hipótese adotada para a provável fonte desse ruído e a estratégia de subtração adotada.

### 5.3.3 Cortes cinemáticos

Para reduzir a influência de atividade acidental no calorímetro, a energia mínima dos *clusters* adicionais foi fixada em 2 GeV, pois observou-se quando da tomada de dados que grande parte da atividade de natureza acidental registrada no calorímetro era caracterizada por *clusters* de baixa energia. Os momentos mínimos para as trajetórias carregadas eram de 5 GeV/c e 8 GeV/c para os candidatos a elétron e pión, respectivamente. O corte mais alto para  $|\mathbf{P}_{\pi^\pm}|$  tinha o objetivo de diminuir ainda mais a possível contaminação por múons. Como também são MIPS, múons podem se confundir com píons ao se analisar a

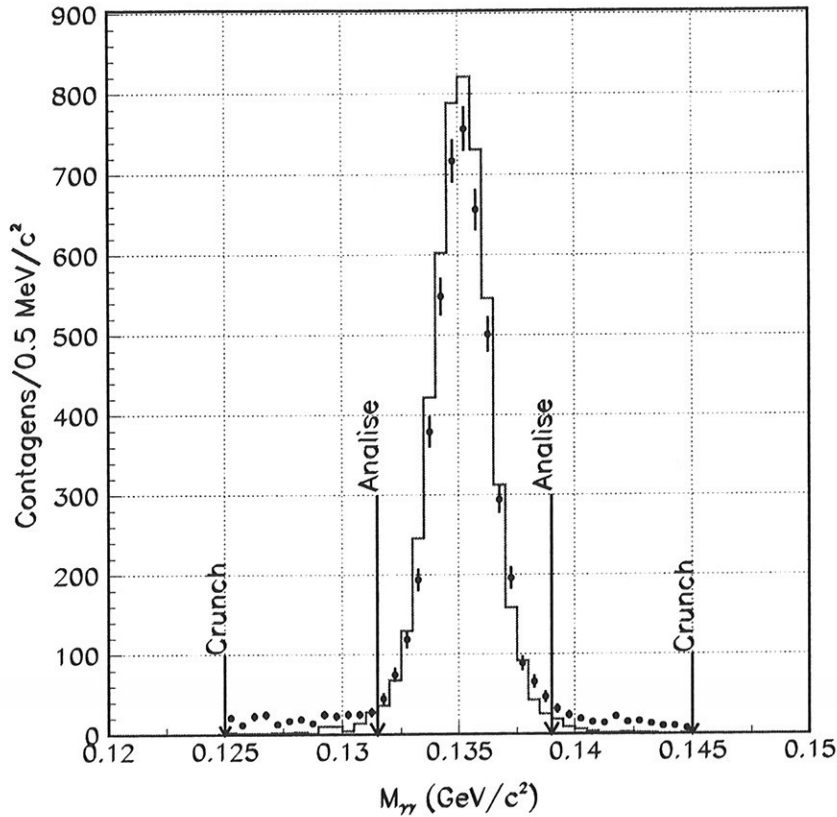


Figura 5.3: Comparação DADOS/MC da massa invariante reconstruída após cortes de análise do par de fótons relacionados ao decaimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Nenhuma subtração de fundo residual foi realizada.

razão  $E/p$ . Entretanto, nessa análise, o sistema de múon encontrava-se em veto, e 8 GeV está acima até do limiar de 7 GeV para que múons atinjam o MU3. Por outro lado, como já mencionado, um chuva piônica de 20 GeV tem cerca de 0.5% de chance de atingir MU3.

Apesar de sua alta estatística, grande parte da contaminação vinda de  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  pode ser eliminada por meio de um corte na massa invariante das partículas detectadas. Assumindo que ambas as trajetórias são píons carregados, eliminou-se todos os eventos satisfazendo  $0.485 \text{ GeV}/c^2 < M_{\pi^+\pi^-\gamma\gamma} < 0.510 \text{ GeV}/c^2$ .

No decaimento  $K_{e4}^0$ , a massa invariante das partículas visíveis ao detector, e que denominaremos aqui de massa visível, deve, obviamente, ser menor que a massa  $M$  do káon. A figura 5.4b mostra a distribuição de  $M_{\pi e \gamma \gamma}$ , onde percebe-se a existência de certa quantidade de eventos com massa invariante maior que  $M$ . Tais eventos parecem não estar presentes na região de sinal. Em um decaimento  $K_{e4}^0$  legítimo, se assumirmos que todo o momento transversal ausente  $P_{\perp}$  é transportado por um neutrino de massa nula, o

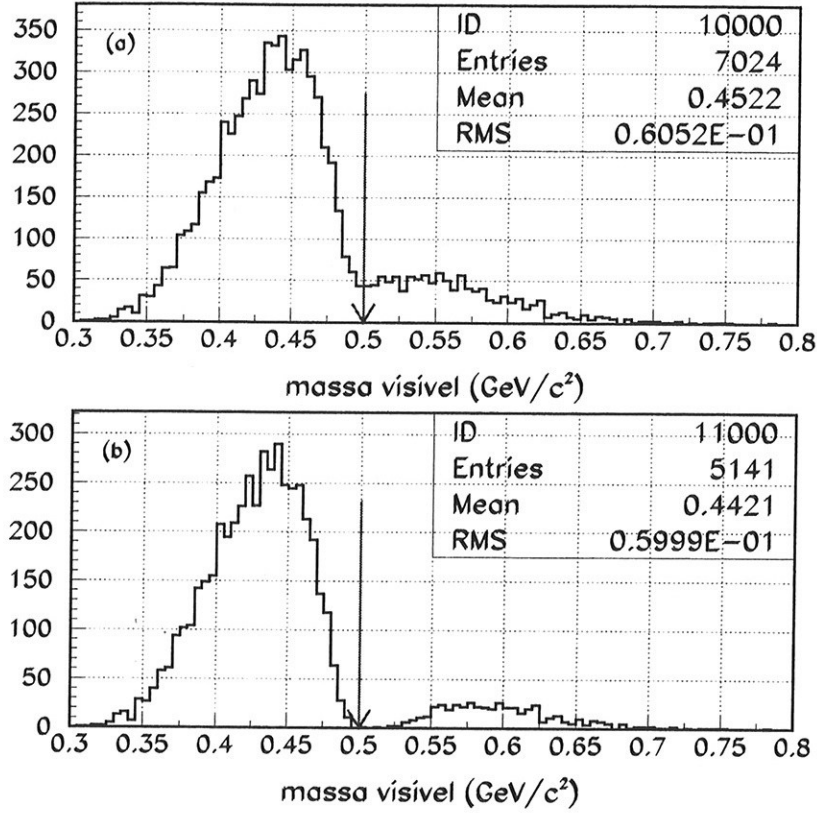


Figura 5.4: (a) Massa visível  $M_{\pi e \gamma \gamma}$  sem o corte  $\Delta \geq 0$ . (b) Massa visível para eventos satisfazendo  $\Delta \geq 0$ . A região de sinal encontra-se à esquerda da seta vertical.

momento  $P_K$  do káon é dado por uma das soluções da equação de segundo grau em  $P_K$ :

$$(E_{vis}^2 - P_{//}^2)P_K^2 - 4P_{//}(E_{vis}^2 + M^2 - P_{vis}^2)P_K + E_{vis}^2 P_{vis}^2 - \frac{1}{4}(M^2 - E_{vis}^2 - P_{vis}^2) = 0, \quad (5.5)$$

onde  $E_{vis}$  é a energia visível ao detector,  $P_{//}$  é o momento total medido e paralelo à linha de vôo do káon<sup>4</sup> e  $P_{vis}$  o momento total visível. Nessa análise, exigimos dos candidatos a  $K_{e4}^0$  que fornecessem sempre pelo menos uma solução à equação (5.5), ou seja, que

$$\Delta = E_{vis}^2 [(E_{vis}^2 - P_{vis}^2 - M^2)^2 - 4M^2 P_{\perp}^2] \geq 0, \quad (5.6)$$

e para o ajuste dos fatores de forma que discutiremos na seção 5.8, escolhemos sempre a solução de menor momento reconstruída pelo detector, baseado em estudos de Monte Carlo mostrando que essa solução é a correta numa frequência um pouco maior que a de momento superior ( $58\% \times 42\%$ ). As soluções  $P_+$  e  $P_-$  de (5.5) correspondem fisicamente às situações em que a componente do momento do neutrino na direção da linha de vôo

<sup>4</sup>A linha de vôo do káon é tomada como aquela que une o alvo de BeO ao vértice carregado reconstruído pelo espectrômetro.

do káon ora aponta no sentido do momento total visível ora no sentido oposto. A figura 5.5 mostra uma comparação entre dados reais e eventos de Monte Carlo para a o espectro de energia do káon (correspondente a  $P_-$ ). A concordância entre dados e MC parece razoável.

Observou-se também que a exigência de se encontrar uma solução para o momento do káon causa uma redução significativa de contaminação caracterizada por valores de massa visível alta. Essa redução pode ser vista na figura 5.4, que mostra a distribuição de massa visível com e sem o corte  $\Delta \geq 0$ .

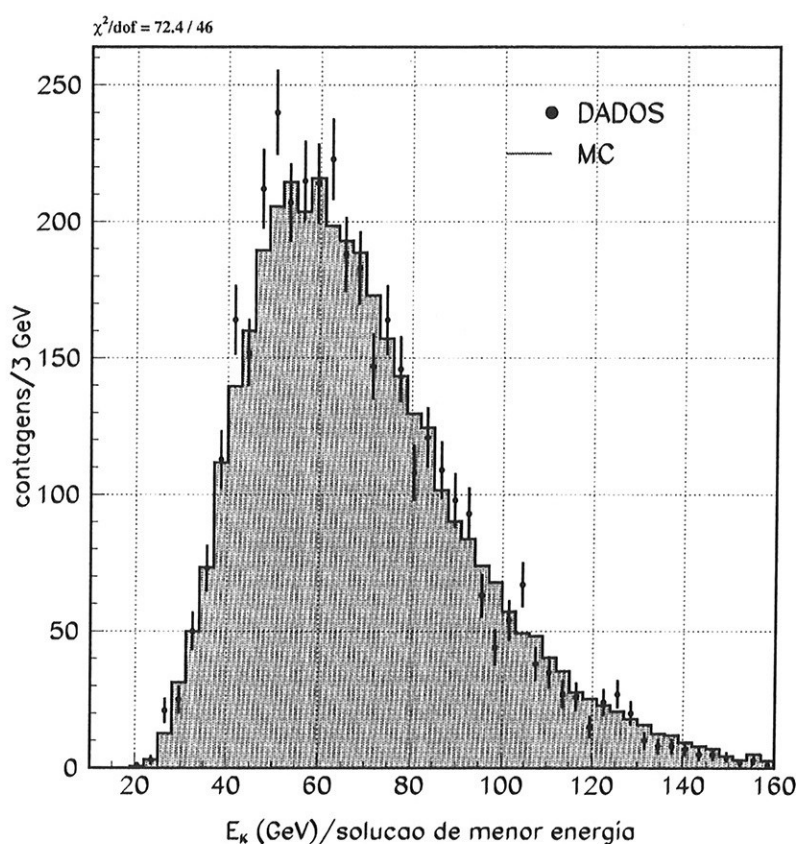


Figura 5.5: Comparação DADOS/MC para o distribuição de momentos do káon quando se assume a solução de menor momento.

Para determinar de qual feixe originou-se um certo decaimento, compara-se a coordenada  $x$  do vértice carregado reconstruído pelo espectrômetro com a correspondente coordenada do regenerador<sup>5</sup>. Entretanto, existem eventos nos quais o káon sofre espalhamento no regenerador, ganha um grande momento transversal, cruza para o feixe de vácuo onde decai. Para eliminar eventos desse tipo, calcula-se o momento transversal  $P_t$  com relação à linha de vôo do káon, essa última definida como aquela que liga o alvo de

<sup>5</sup>Lembre-se que o regenerador se move de um lado para o outro ao longo do eixo  $x$  entre os ciclos de extração de feixe do Tevatron.

BeO ao vértice carregado. Naturalmente, esse corte mostra-se bem mais efetivo quando aplicado em decaimentos onde todas as partículas podem ser detectadas, o que não é o caso de  $K_{e4}^0$ , onde o neutrino é sempre invisível ao detector. Para decaimentos do primeiro tipo, o corte em  $P_t$  pode ser tomado bastante pequeno. Na separação de  $K_{e4}^0$ , exigiu-se que  $P_t^2 < 0.02 \text{ GeV}^2/c^2$ . Também impomos que a área do quadrado, centrado no buraco de feixe e contendo o vértice carregado sobre um dos seus lados, quando projetado de volta ao longo do eixo  $z$  até a posição do regenerador, não fosse superior a  $75 \text{ cm}^2$ <sup>6</sup>.

### 5.3.4 Melhora da qualidade da amostra

Apesar dos algoritmos de *clustering* serem capazes de detectar e corrigir a fusão de *clusters* no calorímetro, é desejável que esse tipo de situação não ocorra, de modo que a determinação da estrutura do chuveiro seja mais confiável e independente de correções. Durante a análise, exigiu-se separações mínimas entre os *clusters* associados a trajetórias ( $\Delta d > 10 \text{ cm}$ ). A distância entre os *clusters* adicionais e os anteriores também não podia ser menor que um certo valor mínimo, nem se aproximar demais dos buracos de feixe ( $\Delta d_{\gamma-bf} > 3 \text{ cm}$ ). Como chuveiros hadrônicos apresentam estrutura mais irregular que os de natureza eletromagnética, tendendo a espalhar-se bem mais tanto longitudinal quanto transversalmente, a separação mínima entre o *cluster* correspondente à trajetória do pión e os *clusters* adicionais foi fixada em  $20 \text{ cm}$ , enquanto o elétron era permitido aproximar-se mais ( $\Delta d_{\gamma-e} > 10 \text{ cm}$ ). A distância entre os *clusters* adicionais e a extremidade externa do calorímetro era controlada exigindo-se que o bloco HCC mais afastado do centro do calorímetro estivesse no mínimo um bloco distante da borda externa do CsI.

### 5.3.5 Exigências sobre os elementos de veto

O sistema de veto é particularmente importante nessa análise, na eliminação de ruídos. Atividade accidental, bem como decaimentos de káons, capazes de fornecer fótons tornam-se indesejáveis, uma vez que alguns desses fótons podem atingir o calorímetro e, numa combinação favorável, serem confundidos com aqueles provenientes do decaimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Decaimentos  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0$ , por exemplo, fornecendo grande quantidade de fótons, podem ocorrer num *bucket* anterior, mas ainda assim influenciar a medida *in-time*. Interações no regenerador também podem ser fontes de partículas indesejadas no detector.

Dessa forma, exige-se que todos os módulos do regenerador apresentem uma energia depositada menor que aquela equivalente a duas MIPS. Os últimos módulos, contendo chumbo e responsáveis pela maior atividade no regenerador, devem ter, cada um, menos de  $0.7 \text{ MIPS}$  de energia depositada. Além disso, como já mencionado na descrição do *trigger* utilizado, as fontes de disparo do nível 1 do regenerador devem estar silenciosas durante um intervalo equivalente a três *buckets*: *pre-bucket*, *in-time*, *pos-bucket*, num total de  $57 \text{ ns}$ .

<sup>6</sup>O fator de escala usado na projeção é dado pela razão  $z_{reg}/z_{vtx}$ .

Dentre os vetos de fótons, o MA possui a maior taxa de interações. Aplica-se um corte restritivo de 100 MeV na energia depositada nesse elemento. O objetivo é alcançar uma alta eficiência de veto para eventos em que um pión passa pelo MA, uma situação não muito bem simulada pelo Monte Carlo. Como uma MIP, o pión deposita muito pouco de sua energia ao passar pelo MA, o que explica a necessidade de um corte mais forte na energia depositada.

Os cortes aplicados às energias medidas no sistema de veto são listadas na tabela 5.1. Note que todos os cortes referem-se à energia dentro da janela *in-time*.

Elemento	Descrição	Corte
RC6-10	Ring Counters	sem corte
SA2-4	Spectrometer Anti	< 0.30 GeV
MA	Mask-Anti	< 0.10 GeV
CA	Collar-Anti	sem corte
BA1	Back-Anti 1	sem corte
BA3	Back-Anti 3	sem corte
HA	Hadron-Anti	sem corte
EXCLUS	energia extra	< 1 GeV
REG_ALL	Regen. (todos os módulos)	< 2.0 MIPS
REG_PB	Regen. (módulos de Pb)	< 0.7 MIPS

Tabela 5.1: Exigências sobre as principais variáveis que constituem o sistema de veto para a análise de  $K_{e4}^0$ . Todos os cortes são referentes à energia medida dentro da janela de tempo *in-time*.

### 5.3.6 Outros cortes

A energia de um *hardware cluster* é resultado da integração de carga das DPMTs contida nas seis primeiras fatias de tempo como pode ser visto esquematicamente na figura 5.6 (esquerda), onde mostra-se o perfil temporal de um pulso típico nas DPMTs. Isso garante que a energia do *cluster* seja *in-time*. O padrão temporal da energia depositada pode então ser usado na eliminação de atividade acidental no detector que, na maioria das vezes, apresenta distribuição temporal irregular. A figura 5.7 mostra a distribuição de massa visível para candidatos a  $K_{e4}^0$  em três situações distintas: no topo, não exige-se que os *clusters* adicionais tenham bit HCC on; em baixo à esquerda, exige-se que ambos esses *clusters* sejam do tipo *hardware*; e finalmente em baixo à direita, impõem-se um corte sobre o chamado  $\chi_{time}^2$ , definido como

$$\chi_{time}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{6} \sum_{j=1}^6 \left( \frac{R_j - \bar{R}_j}{\sigma_j} \right)^2 \quad (5.7)$$



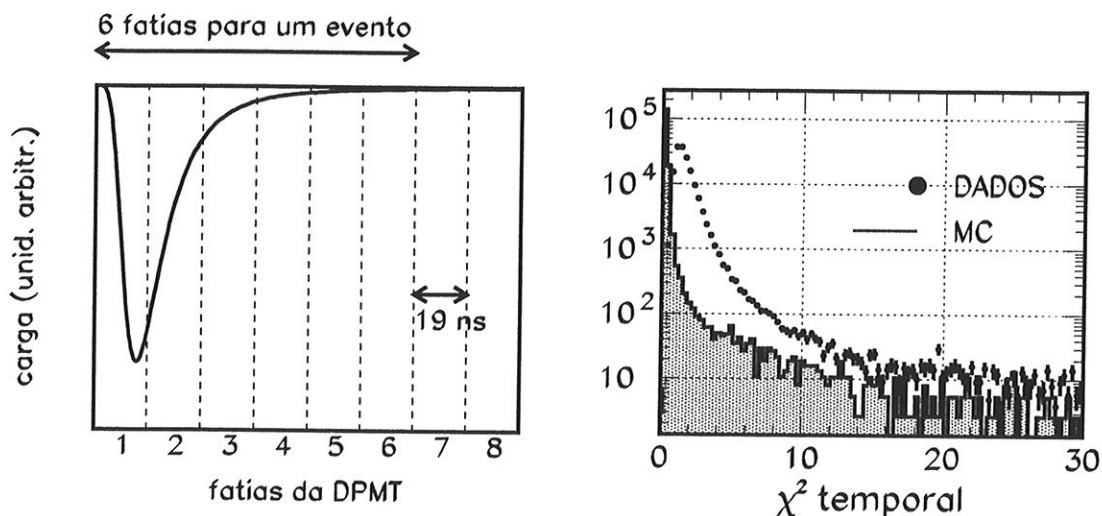


Figura 5.6: Esquerda: Figura esquemática mostrando o perfil temporal típico de um pulso nas DPMTs que lêem o sinal de carga a cada 19 ns durante um intervalo de 6 fatias temporais. Direita: Sobreposição das distribuições de  $\chi_{time}^2$  para dados reais e de Monte Carlo para o modo  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ .

onde  $N$  é o número de blocos do *cluster* em questão,  $R_j$  é a razão de carga medida na  $j$ -ésima das seis fatias da DPMT sobre as quais a integração é feita e  $\bar{R}_j$  e  $\sigma_j$  são a razão e o desvio padrão previstos e medidos com dados reais. Definido dessa forma,  $\chi_{time}^2$  mede o quão próximo do perfil temporal típico de um evento *in-time* está um determinado *cluster*. De acordo com a figura 5.7, um corte do tipo  $\chi_{time}^2 < 20$  é praticamente equivalente à exigência de que os *clusters* adicionais sejam do tipo *hardware*. Entretanto, quando comparamos dados reais e de simulação para  $\chi_{time}^2$  (figura 5.6 à direita) vemos que a concordância é ruim, de modo que optamos pela exigência de *clusters* do tipo *hardware*<sup>7</sup>.

De fato, vê-se que a utilização de *hardware clusters* na análise é bastante efetiva na eliminação de ruído, como ilustrado na figura 5.7 em que se observa uma grande quantidade de eventos com massa visível maior que a massa do káon, o que corrobora com a hipótese de que tais eventos são afetados por fótons acidentais não sincronizados produzindo um valor de massa visível incompatível com um decaimento  $K_{e4}^0$ .

Ainda tentando reduzir a influência de atividade acidental e de eventos radiativos, todo evento possuindo um *software cluster* adicional (o que já exclui os quatro que são esperados como parte do sinal) com as seguintes características:

- distância até qualquer trajetória superior a 20 cm;

<sup>7</sup>Na análise de  $K_{e4}^0$ , exigiu-se que o *cluster* associado à trajetória do elétron fosse sempre do tipo *hardware*. Píons, por se comportarem muitas vezes como MIPs no calorímetro, não depositando energia suficiente para formar um *hardware cluster*, não foram submetidos a tal exigência.

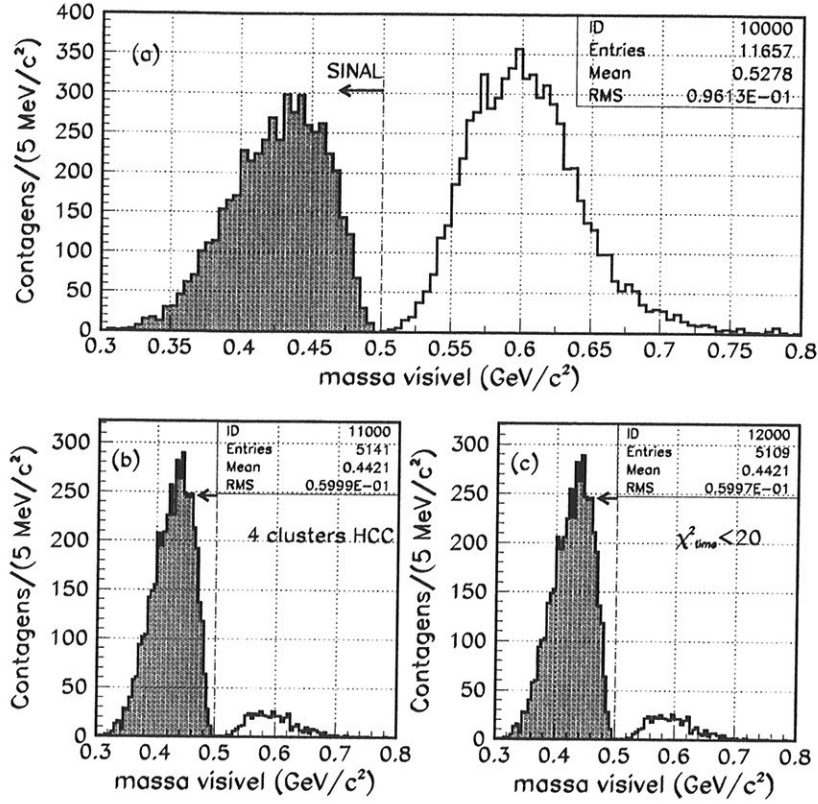


Figura 5.7: (a) Massa visível sem a exigência de que os *clusters* não associados a trajetórias sejam HCC, e sem corte em  $\chi^2_{time}$ . (b) Massa visível para eventos com *clusters* não associados a trajetórias do tipo HCC. (c) Massa visível com corte  $\chi^2_{time} < 20$  para *clusters* não associados a trajetórias.

- distância até qualquer outro *software cluster* superior a 10 cm;
- distância até os buracos de feixe superior a 5 cm;
- $\chi^2_{shape} < 20$ ,

também era removido da amostra. Além de todos os cortes mencionados aqui, diversos outros de natureza geométrica foram aplicados para garantir a qualidade dos eventos reconstruídos [74]. Durante a análise *offline*, testou-se novamente o nível 1 do *trigger* para eliminar-se possíveis falhas de *hardware* durante a análise em tempo real.

## 5.4 Análise do modo de normalização $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$

Para a obtenção da razão de ramificação de  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$  utilizamos como modo de normalização o decaimento  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ . O erro percentual em sua razão de ramificação ( $0.3878 \pm 0.0028$ ) [64] de 0.7% é menor que aquele na razão de  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$

( $0.1255 \pm 0.0020$ )[64] de 1.6%. Além disso, o corte na razão  $E/p$  aplicado durante o processo de *crunch*, para separação da amostra inicial dessa análise, exigindo que uma das trajetórias tenha  $E/p > 0.9$  seleciona decaimentos  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$  difíceis de serem simulados pelo Monte Carlo. Mais precisamente, esses são eventos em que um dos píons gera um chuva hadrônica no CsI e deposita mais de 90% de sua energia no calorímetro.

A identificação do elétron e do pión carregado é feita de maneira análoga àquela usada em  $K_{e4}^0$ , isto é, por meio da razão  $E/p$ . Se  $E/p > 0.92$ , a partícula é identificada como um elétron. A simulação de Monte Carlo indica que tal corte retém 99.8% dos elétrons, eliminando 99.5% dos píons. No caso de  $E/p < 0.85$ , a partícula é identificada como um pión carregado. Aqui, o corte retém 99.1% dos píons e elimina 99.93% dos elétrons. Exige-se que o momento associado à trajetória do pión seja superior a 8 GeV, para se evitar contaminação muônica, como já discutido anteriormente, ao passo que o momento do elétron pode ser tão baixo quanto 5 GeV. A figura 5.8 mostra as distribuições de  $E/p$  para  $e^\pm$  e  $\pi^\pm$ , após os cortes de análise, mostrando uma ótima concordância entre os dados e o Monte Carlo de simulação.

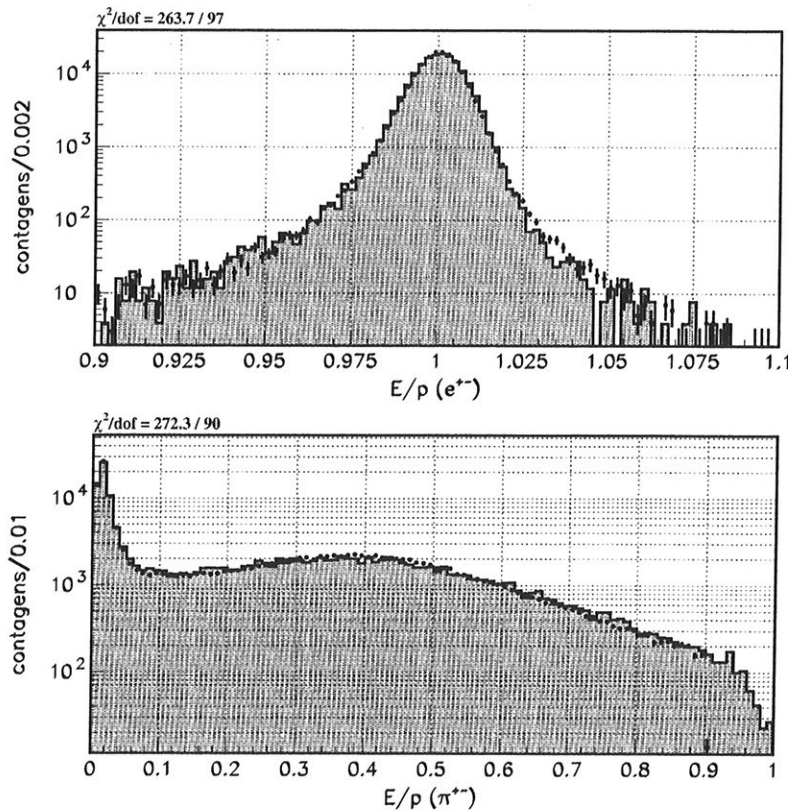


Figura 5.8: Topo: Sobreposição DADOS/MC para a razão  $E/p$  de  $e^\pm$  em  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$ . Em baixo: Mesma variável para  $\pi^\pm$

Logo após a identificação das partículas, há um fundo residual ( $\sim 0.1\%$ ) devido a  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ , nos quais um ou ambos os fótons de  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  não atinge o CsI tampouco

dispara o sistema de veto, e um dos píons carregados ou decai ( $\pi^\pm \rightarrow e^\pm \nu$ ) ou deposita energia suficiente no calorímetro de modo a imitar um elétron. Para suprimir essa contaminação, um corte cinemático é aplicado, capaz de distinguir de forma bastante efetiva entre decaimentos com um  $\pi^0$  ausente daqueles com um neutrino ausente. Num decaimento onde as partículas carregadas têm massa invariante  $m_c$ , e há uma partícula neutra de massa finita  $m_n$  não detectada, o quadrado do momento longitudinal da partícula ausente, no referencial em que o momento total das partículas carregadas é ortogonal ao momento do káon, é dado por

$$|\mathbf{k}|^2 = \frac{(M^2 - m_c^2 - m_n^2)^2 - 4m_c^2 m_n^2 - 4P_T^2 M^2}{4M^2(m_c^2 + P_T^2)}, \quad (5.8)$$

onde  $M$  é a massa da partícula-mãe e  $P_T$  o momento transversal das partículas carregadas. Dessa forma, para  $K_L \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ , essa variável deve ser positiva. Um corte do tipo  $|\mathbf{k}|^2 < -0.06$  elimina grande parte da contaminação residual de  $K_{3\pi}$ . A distribuição para a variável  $|\mathbf{k}|^2$  em  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  é mostrada na figura 5.9, juntamente com a previsão de Monte Carlo. É possível observar um suave aumento da razão DADOS/MC para valores positivos de  $|\mathbf{k}|^2$ , provavelmente oriundos da contaminação por  $K_{3\pi}$  nos dados.

Assim como em  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ , a impossibilidade de detectar o neutrino introduz uma ambiguidade na determinação da energia do káon. Novamente, retemos apenas eventos em que a equação quadrática no momento do káon possuía solução real, e que ambas as soluções se encontrassem no intervalo 40 GeV - 160 GeV, onde o espectro do káon inicial é melhor entendido.

Após todos os cortes de análise, o número absoluto, isto é, já corrigido pela aceitação medida por Monte Carlo, de decaimentos  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  coletados em 1997 por E832 é  $2.970 \times 10^9$ .

Um modo de alta estatística como  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  tem a vantagem de poder ser utilizado para testar o desempenho do detector como um todo, bem como a qualidade dos algoritmos de reconstrução. As figuras 5.10 e 5.11 mostram a bela concordância entre os dados e o Monte Carlo no modo de normalização quanto às distribuições, denominadas de iluminações, das posições ao longo de  $y$  das trajetórias carregadas ao passar por DC1-DC4, e das posições ao longo de  $x$  dos *clusters* no calorímetro.

## 5.5 Contaminações piônica e muônica

Após os cortes de seleção apresentados terem sido aplicados, ainda é possível observar a presença de contaminação residual. A figura 5.12a mostra a distribuição de dados reais (pontos) e de simulação (histograma hachurado) da razão  $E/p$  para o candidato a elétron em  $K_{e4}^0$ . Os dados apresentam uma cauda que se estende para a esquerda. Esse excesso nos dados reais na região de baixo  $E/p$  é atribuído à contaminação residual proveniente de píons, quando esses não se comportam como MIPs, gerando chuva no calorímetro.

Identificou-se como fontes desses píons os seguintes decaimentos

$$K_L \rightarrow \pi^\mp \mu^\pm \pi^0 \nu \quad (K_{\mu 4}^0),$$

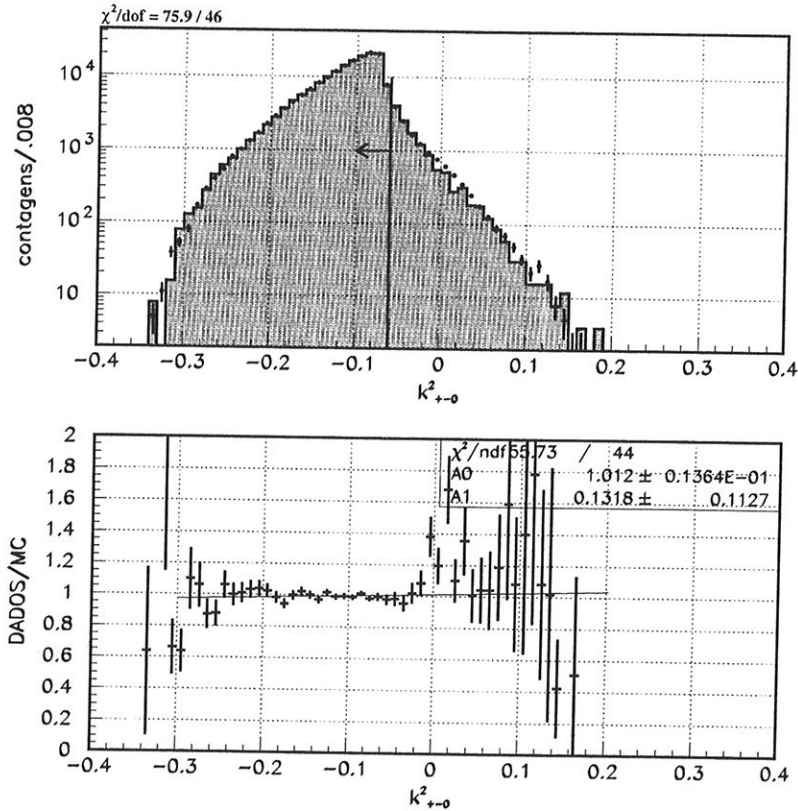


Figura 5.9: Comparação DADOS/MC para a distribuição do momento quadrado de um possível pión neutro ausente ao se assumir que o decaimento é  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$ .

$$K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0, \quad \text{seguido de } \pi^\pm \rightarrow \mu^\pm\nu,$$

em que o múon é erroneamente identificado como pión<sup>8</sup> e esse último como um elétron. Na identificação desses decaimentos, assumiu-se que a trajetória de menor  $E/p$  era um múon e a outra um pión, vetando eventos em que ambas as soluções para a energia do káon estivesse na região  $40 \text{ GeV} < E_K < 160 \text{ GeV}$ . Apenas eventos do segundo tipo em que o pión decai muito próximo ao vértice primário são provavelmente identificados por esse critério, entretanto, eventos em que a separação entre os vértices primário e de decaimento do pión estejam muito afastados devem ser eliminados pela exigência de qualidade sobre o vértice reconstruído ( $\chi^2_{\text{vtx}}$ ). A contribuição dominante muito provavelmente deve vir do decaimento em três píons, já que o limite superior na razão de ramificação de  $K_{\mu 4}^0$  é  $2 \times 10^{-5}$  (90% CL), ao passo que  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  é facilmente identificado em nossa amostra inicial como atesta a distribuição de massa invariante  $M_{\pi^+\pi^-\gamma\gamma}$  na figura 5.13<sup>9</sup>. A superposição DADOS/MC após a eliminação de eventos compatíveis com a presença

<sup>8</sup>A probabilidade de um múon apresentar razão  $E/p > 0.9$  é desprezível.

<sup>9</sup>Esses eventos têm momento transversal muito pequeno ( $P_T^2 < 0.001 \text{ GeV}^2/c^2$ ) e são compatíveis com os limites impostos pelo contorno de Dalitz de um decaimento em três corpos [64].

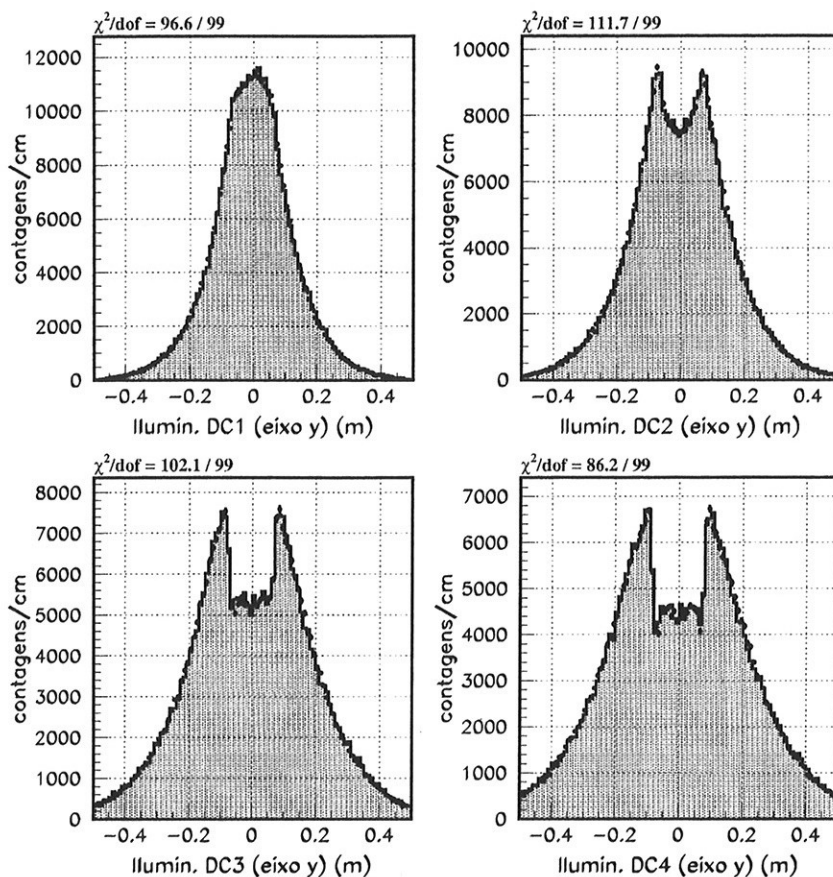


Figura 5.10: Iluminação das trajetórias carregadas ao longo do eixo  $y$  quando vistas pelas câmaras de arrasto DC1-DC4. Distribuições referentes ao modo de normalização.

de um múon é mostrada na figura 5.12b, onde observa-se a eliminação da cauda de baixo  $E/p$  nos dados.

## 5.6 Subtração da contaminação residual final

Após os cortes de análise, a distribuição de massa do par de fótons encontra-se sobre um fundo aproximadamente constante de cerca de 10 eventos/ $0.6 \text{ MeV}/c^2$  ao longo de todo o intervalo de massas. Essa contaminação é compatível com  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  mais dois fótons acidentais ou  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu \gamma$  mais um fóton acidental. Em ambos os casos espera-se uma massa invariante  $M_{\gamma\gamma}$  não correlacionada com aquela do  $\pi^0$ . Ao contrário do ruído residual em  $E/p$  em que foi possível recorrer aos próprios dados e identificar os decaimentos espúrios, aqui esse processo mostrou-se ineficaz. De qualquer forma, para a obtenção da razão de ramificação, basta determinar a quantidade de eventos sobre a qual o pico em  $M_{\gamma\gamma}$  está posicionado. Como pode ser visto na figura 5.14b, o ruído final sob

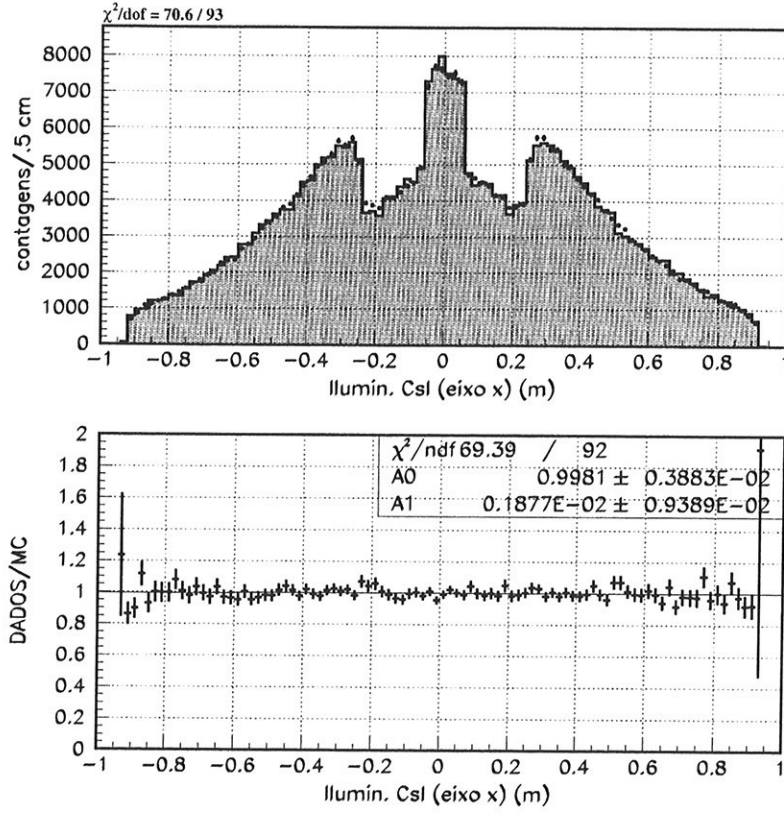


Figura 5.11: Iluminação ao longo do eixo  $x$  para os *clusters* do modo de normalização.

a distribuição de massa  $M_{\gamma\gamma}$  é de 143 (3.6%) eventos, de um total de 4000, e foi obtido ajustando-se aos dados uma gaussiana sobre um fundo linear.

Seja o número de  $K_L$  dado por  $N_{K_L}$ ,  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  a largura de  $K_{e4}^0$ ,  $\epsilon_{K_{e4}^0}$  a eficiência de detecção desse decaimento (aceitação) no KTeV, e variáveis respectivas para o modo de normalização. Os números de eventos de  $K_L \rightarrow \pi^0\pi^\pm e^\mp\nu$  e  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm\nu$ , respectivamente, detectados após todos os cortes de análise e após a subtração de fundo são dados por

$$N_{K_{e4}^0} = N_{K_L} \times \tau_{K_L} \Gamma_{K_{e4}^0} \times \epsilon_{K_{e4}^0}, \quad N_{K_{e3}^0} = N_{K_L} \times \tau_{K_L} \Gamma_{K_{e3}^0} \times \epsilon_{K_{e3}^0}, \quad (5.9)$$

de modo que a razão de ramificação  $\text{BR}_{K_{e4}^0}$ , ou seja, a largura de  $K_{e4}^0$  normalizada pela largura total de  $K_L$ , escreve-se

$$\text{BR}_{K_{e4}^0} = \frac{\Gamma_{K_{e4}^0}}{\Gamma_{\text{total}}} = \tau_{K_L} \Gamma_{K_{e4}^0} = \left( \frac{N_{K_{e4}^0}}{N_{K_{e3}^0}} \right) \times \left( \frac{\epsilon_{K_{e3}^0}}{\epsilon_{K_{e4}^0}} \right) \times \text{BR}_{K_{e3}^0}. \quad (5.10)$$

O valor central de  $\text{BR}_{K_{e4}^0}$  nessa análise é tomado como aquele em que a aceitação de  $K_{e4}^0$  (ver tabela 5.2) é obtida com o Monte Carlo com as correções radiativas tratadas pelo pacote PHOTOS. O número absoluto de eventos  $K_{e4}^0$ , ou seja, já corrigido pela

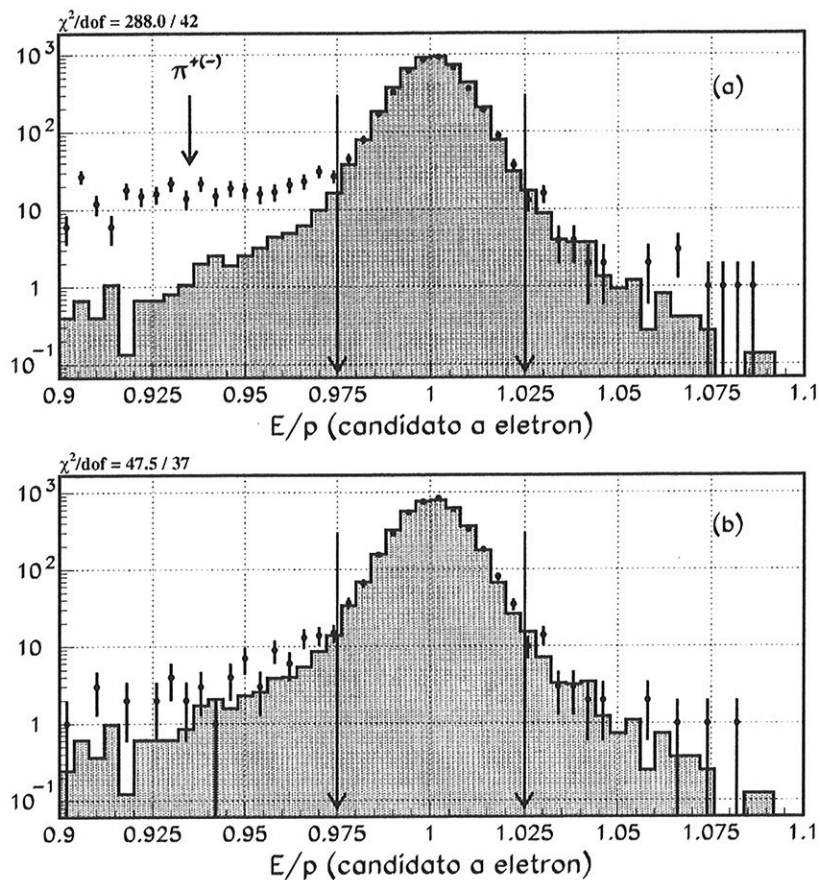


Figura 5.12: (a) Comparação DADOS/MC de  $E/p$  para o candidato a elétron em  $K_{e4}^0$  antes da contaminação píônica ser eliminada. (b) Comparação DADOS/MC de  $E/p$  após contaminação píônica ser eliminada.

aceitação, é 550982. Dessa forma, obtemos para a razão de ramificação o valor  $\tau_{KL} \Gamma_{K_{e4}^0} = [5.19 \pm 0.09_{\text{estat.}}] \times 10^{-5}$ .

$N_{K_{e4}^0}$	Fundo	$\epsilon_{K_{e4}^0}$	fluxo $_{K_{e4}^0}$	$N_{K_{e3}^0}$	$\epsilon_{K_{e3}^0}$	fluxo $_{K_{e3}^0}$
4000	143	0.0070	550982	$2.286 \times 10^8$	0.055	$2.970 \times 10^9$

Tabela 5.2: Número de eventos detectados, fundo residual subtraído e fluxos absolutos tanto para  $K_{e4}^0$  quanto para o modo de normalização  $K_{e3}^0$ .



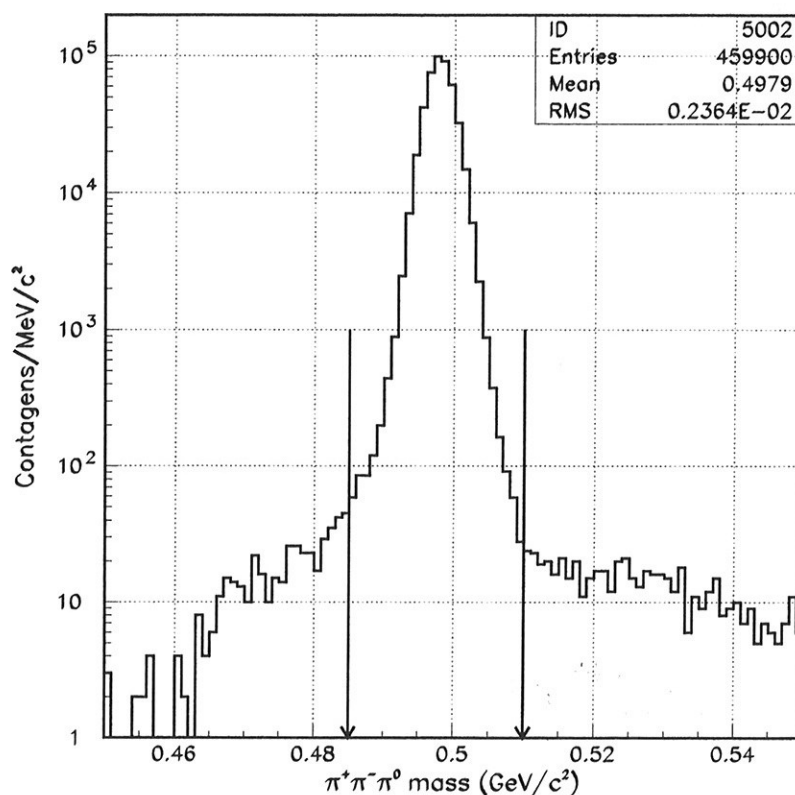


Figura 5.13: Massa invariante  $M_{\pi^+\pi^-\pi^0}$  da amostra de  $K_L \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0$  obtida a partir dos dados. A contaminação residual é inferior a 0.1%. Na identificação de  $K_{e4}^0$ , a região delimitada pelas setas é excluída.

## 5.7 Determinação do erro sistemático na razão de ramificação

A tarefa agora é determinar o erro sistemático associado à razão de ramificação obtida na seção anterior. As seguintes contribuições foram consideradas: estabilidade da razão de ramificação sob variação dos cortes de análise, modelagem da aceitação ao longo da direção  $z$ , incertezas nas dimensões de partes do detector, influência da atividade acidental modelada pelo Monte Carlo, eficiência absoluta de detecção do  $\pi^0$ , correções radiativas e, é claro, o erro externo na medida da razão de ramificação do modo de normalização  $K_{e3}^0$ .

### 5.7.1 Variação dos cortes de análise

Na situação ideal de ausência de contaminação na amostra dos dados reais e posse de um Monte Carlo que reproduza os processos de decaimento e detecção com fidelidade, a razão de ramificação deve ser estável sob variação dos cortes de análise. Pode-se, dessa forma, incorporar as mudanças observadas em  $BR_{K_{e4}^0}$  ao variar os critérios de seleção à incerteza sistemática.

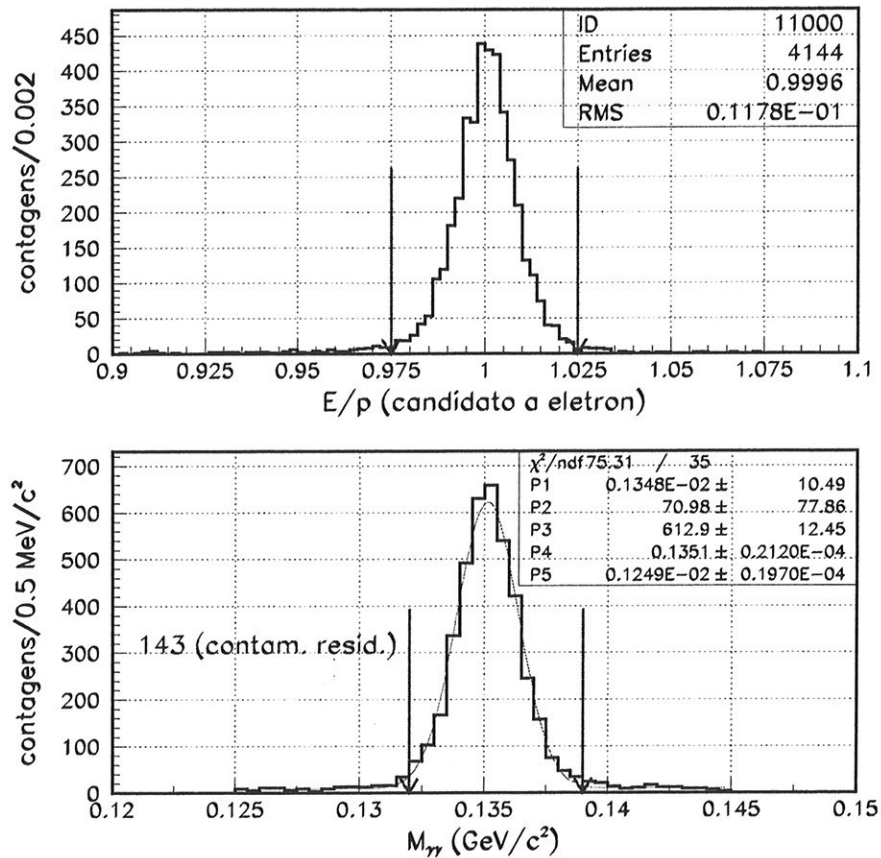


Figura 5.14: Em cima:  $E/p$  para o candidato a elétron em  $K_{e4}^0$ . Em baixo: massa invariante do par de fótons mostrando o nível final do ruído intrínseco a ser subtraído. A região de sinal é delimitada pelas setas verticais.

### 5.7.2 Eficiência absoluta para detecção de $\pi^0$ s

Uma vez que a assinatura esperada de  $K_{e4}^0$  possui dois *clusters* não presentes no modo de normalização, é preciso um entendimento detalhado da eficiência de detecção desse par de fótons. Efeitos causados por ineficiência na identificação do  $\pi^0$  não se cancelam no cálculo da razão de ramificação. Análises anteriores no KTeV[75], utilizando modos de alta estatística ( $K_L \rightarrow \pi^0\pi^0$  e  $K_L \rightarrow \pi^0\pi^0\pi^0$ ) identificaram como fontes mais importantes de ineficiência na detecção de  $\pi^0$ s: falhas de leitura nas PMTs, separação entre os blocos de CsI, perdas devido à incidência muito próxima dos buracos de feixe ou das extremidades externas do calorímetro.

### 5.7.3 Correções radiativas

O erro sistemático associado às correções radiativas foi determinado por meio do Monte Carlo, obtendo-se a fração de eventos radiativos sobreviventes após todos os cortes de análise. Dado o limiar de energia para a detecção de *soft clusters* no KTeV de 250 MeV,

uma fração  $\epsilon_{Ke4\gamma}=0.08\%$  de eventos radiativos estão presentes na amostra final. Levando-se em conta o número de káons no KTeV ( $N_{K_L}=1.06\times 10^{10}$  em 1997),  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  e a fração radiativa, o correspondente número de eventos radiativos esperados nos dados é

$$N_{Ke4\gamma} = N_{K_L} \times \tau_{K_L} \Gamma_{K_{e4}^0} \times \left( \frac{f_{rad}}{1 - f_{rad}} \right) \times \epsilon_{Ke4\gamma} = 132. \quad (5.11)$$

A incerteza sistemática associada foi estimada então como  $\pm 25\%$  (ver tabela 5.3) dessa contaminação máxima de acordo com a literatura [1].

#### 5.7.4 Outros

A distribuição da posição ao longo de eixo  $z$  do vértice carregado pode ser usada na determinação do erro sistemático uma vez que é uma variável apropriada para se testar o quão bem a eficiência de detecção é modelada ao longo da direção do feixe de káons. Se ajustarmos uma reta à razão DADOS/MC para essa variável (figura 5.15) em  $K_{e4}^0$ , vemos que há uma inclinação não nula. Dado que a razão entre as densidades de eventos ao longo do eixo  $z$  é  $\rho_{dados}(z)/\rho_{mc}(z) = az + b$ , tal inclinação gera uma variação percentual  $\delta_z$  na razão de ramificação dada por

$$\delta_z = \frac{\int (az + b)\rho_{mc}(z)dz}{\int \rho_{mc}(z)dz} - 1 = 1.3\%. \quad (5.12)$$

A figura 5.15 também mostra a distribuição do vértice carregado para o modo de normalização, onde a inclinação da reta ajustada à razão DADOS/MC é compatível com zero.

A maneira como a atividade acidental é simulada pelo Monte Carlo também pode ser considerada como fonte de incerteza sistemática. Essa atividade afeta diversos elementos do detector, mas acredita-se que a principal contribuição venha de energia acidental depositada no calorímetro. Assim, obteve-se a aceitação do sinal e do modo de normalização sem a superposição de atividade acidental no CsI. A variação na razão de ramificação observada nesse caso foi adotada como erro sistemático.

Incertezas nas dimensões de alguns elementos do sistema de veto (o CA e o MA) foram incorporadas ao erro total. Uma maneira de se estimar a magnitude desse erro é introduzir uma pequena diferença entre os valores dos cortes geométricos aplicados aos dados reais e aqueles impostos ao Monte Carlo. Para o caso do CA, simulou-se uma incerteza de 100  $\mu\text{m}$  em suas dimensões transversais e para o MA 100  $\mu\text{m}$ .

A tabela 5.3 resume todas as fontes de erro sistemático consideradas no cálculo da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$ , de modo que o valor final obtido nessa análise é:

$$\tau_{K_L} \Gamma_{K_{e4}^0} = [5.19 \pm 0.09_{\text{estat.}} \pm 0.13_{\text{sist.}}] \times 10^{-5}. \quad (5.13)$$

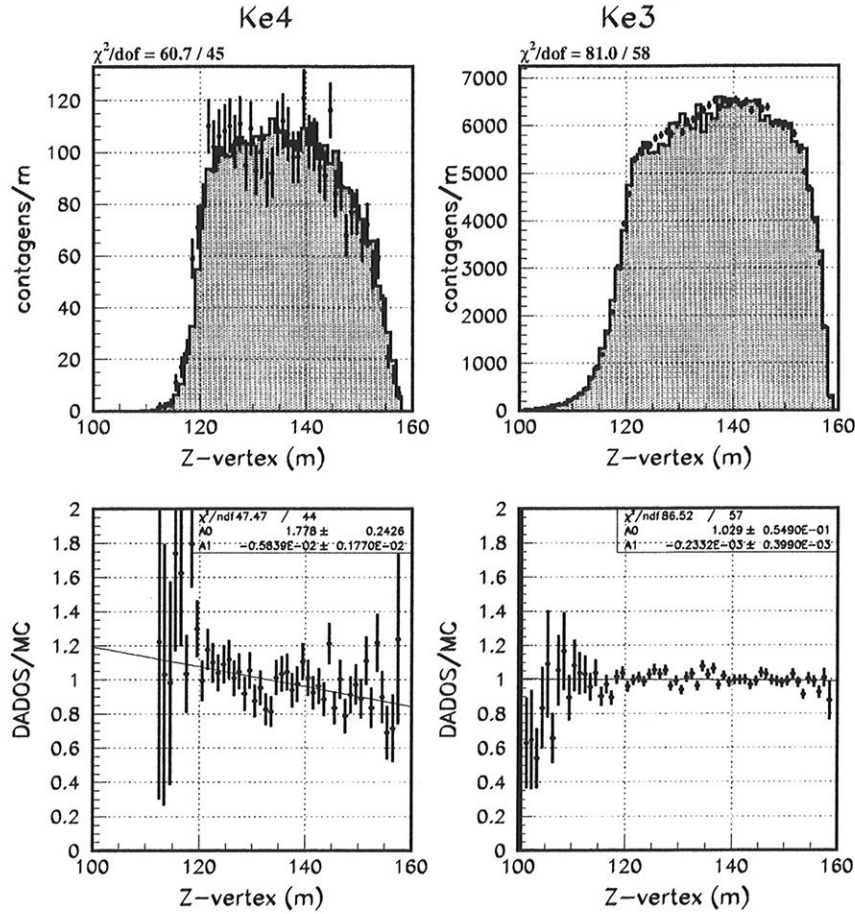


Figura 5.15: Superposição de dados reais e do Monte Carlo para a distribuição da posição ao longo de  $z$  do vértice carregado, tanto para  $K_{e4}^0$  (esquerda) quanto para o modo de normalização  $K_{e3}^0$  (direita).

## 5.8 Ajuste dos fatores de forma

Os fatores de forma parametrizando o elemento de matriz hadrônico em  $K_{e4}^0$  considerados aqui foram:  $f_S$ ,  $f_P$ ,  $g$  e  $h$ . É evidente que tais fatores devem depender somente das variáveis  $s_\pi$ ,  $s_l$  e  $\cos\theta_\pi$ , sendo  $\cos\theta_l$  e  $\Phi$  relacionadas somente à corrente eletrofraca que se acopla ao vértice de decaimento. Dada a estatística não muito alta dos dados, o ajuste simultâneo de quatro variáveis torna-se bastante difícil, de modo que eliminamos uma das variáveis acima, ajustando apenas os valores das razões  $f_S/g$ ,  $f_P/g$ , e  $h/g$ . A diferença de fase  $\delta_S - \delta_P$  entre os termos de onda  $S$  e  $P$  dos fatores de forma também não foi ajustada e fixou-se seu valor naquele medido em [76], por meio da versão carregada de  $K_{e4}$ :

$$\delta_S - \delta_P = 0.37 \pm 0.07. \quad (5.14)$$

O ajuste depende fortemente do quão bem os algoritmos de reconstrução recuperam os valores das cinco variáveis cinemáticas. A figura 5.16 mostra a correlação entre o conjunto de variáveis gerado pelo Monte Carlo (abscissa) e aquele reconstruído após todo

o processo de simulação de resposta do detector e dos cortes de análise (ordenada). As variáveis apresentadas nesse gráfico correspondem à solução de menor energia para o káon. De fato, o processo de reconstrução mostra-se confiável, em especial o das massas invariantes<sup>10</sup>.

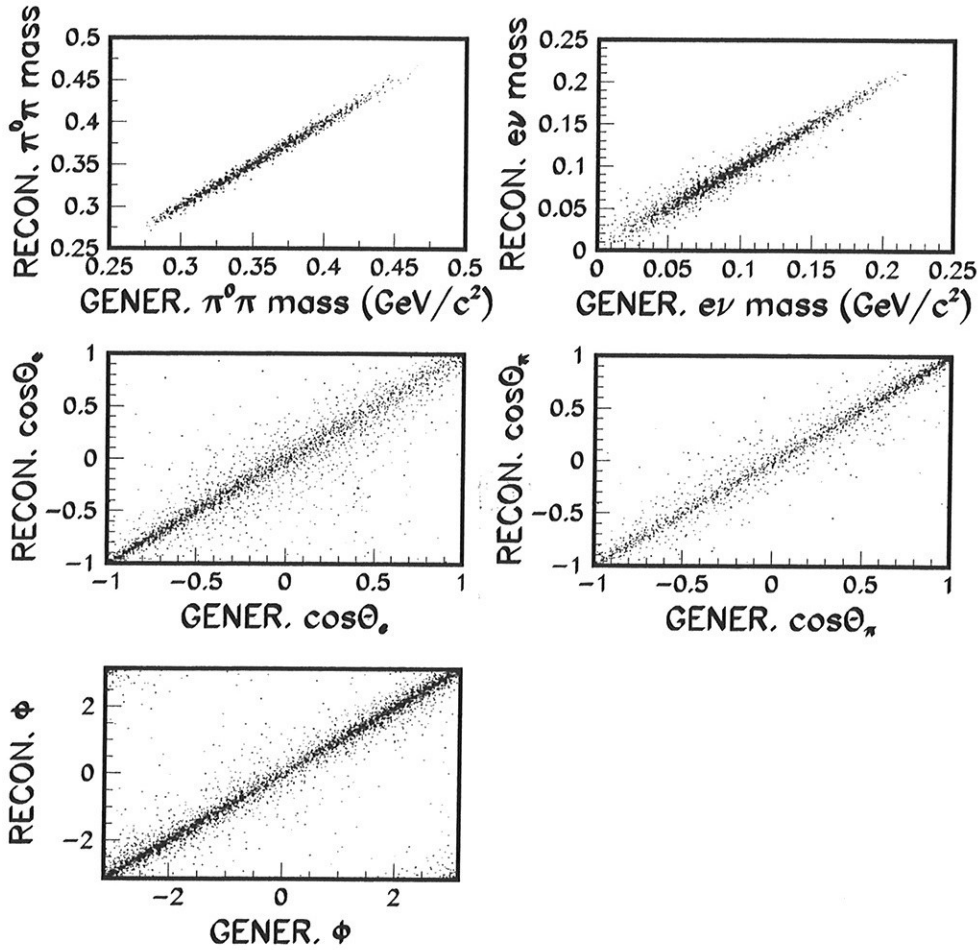


Figura 5.16: Correlação entre as variáveis geradas por Monte Carlo e reconstruídas. As variáveis correspondem à solução de menor energia para o káon.

No ajuste dos fatores de forma, de modo a levar em consideração simultaneamente as correlações existente entre as variáveis cinemáticas, minimizamos, no espaço de fatores de forma, a seguinte função de verossimilhança (mais precisamente, o logaritmo dessa função)

$$\mathcal{L} = \prod_{i,j,k=1}^5 P(i, j, k), \quad P(i, j, k) = \frac{e^{-m} m^n}{n!}, \quad (5.15)$$

<sup>10</sup>Note que, com exceção de  $\sqrt{s_\pi}$ , todas as outras quatro variáveis cinemáticas dependem do fato de que uma solução para a energia do káon seja encontrada.

onde  $m$  é o número esperado de eventos (Monte Carlo) no bin  $(i, j, k)$  e  $n$  é o número observado de eventos (dados) nesse bin. A tripla  $(i, j, k)$  representa um ponto no espaço de fase 3D formado por  $\sqrt{s_\pi}$ ,  $\sqrt{s_l}$  e  $\cos \theta_\pi$ . O estimador de Poisson  $P(i, j, k)$  leva em conta a baixa estatística de dados: com cinco bins em cada variável cinemática, temos um total de 125 bins, o que leva, em média, a  $\sim 4000/125 = 30$  contagens/bin. O espaço de fatores de forma também era 3D ( $f_S/g \times f_P/g \times h/g$ ) e dividido em  $6 \times 6 \times 6 = 216$  bins. O processo de ajuste foi bastante demorado, envolvendo a geração e análise de 216 amostras de Monte Carlo, cada uma contendo inicialmente (logo após passagem pelo sistema de colimação)  $10^6$  decaimentos.

Como já discutido anteriormente, após os cortes de análise ainda há contaminação residual a ser subtraída, de modo que  $m$  em (5.15) é o número de eventos após a subtração dos 143 eventos do fundo linear sob a distribuição  $M_{\gamma\gamma}$ . Para a subtração dessa contaminação do espectro, selecionou-se eventos na distribuição  $M_{\gamma\gamma}$  afastados o suficiente do pico de massa (além de  $5\sigma$ ) e aplicou-se um fator multiplicativo, de modo que o número total de eventos fosse igual aos 143 eventos estimados anteriormente. Uma vez ajustados os três fatores de forma relativos, fixou-se seus valores no ponto de *best-fit* e fez-se um ajuste do parâmetro  $\lambda_g$  (eq. (1.83)).

Para a determinação do mínimo da função de verossimilhança, tomou-se os fatores de forma aos pares e ajustou-se um parabolóide do tipo <sup>11</sup>

$$f(x, y) = A + B(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2. \quad (5.16)$$

A figura 5.17 mostra as curvas de nível de confiança a 90% e 99% para os ajustes simultâneos  $f_S/g \times f_P/g$  e  $f_S/g \times h/g$  ( $x \times y$ ), bem como os valores de melhor ajuste em cada um deles  $(x_0, y_0)$ . Fixando-se esses três fatores de forma, variou-se o coeficiente  $\lambda_g$  (ver figura 5.18), ajustando-se uma parábola para extração do valor de mínimo. O erro sistemático nos fatores de forma (ver tabela 6.1 no próximo capítulo) foi determinado repetindo-se o ajuste com um conjunto modificado de cortes e um Monte Carlo sem correções radiativas. As superposições DADOS/MC para as cinco variáveis cinemáticas obtidas com os valores de *best-fit* dos fatores de forma podem ser vistas na figura 5.19. A contaminação subtraída em cada variável é mostrada na forma do histograma mais escuro. Vale sempre lembrar que as variáveis utilizadas no processo de ajuste correspondem sempre à solução de menor energia para o káon.

<sup>11</sup>Espera-se que no limite de erros gaussianos,  $\mathcal{L}$  seja uma gaussiana, isto é,  $\ln \mathcal{L}$  é um parabolóide multi-dimensional.

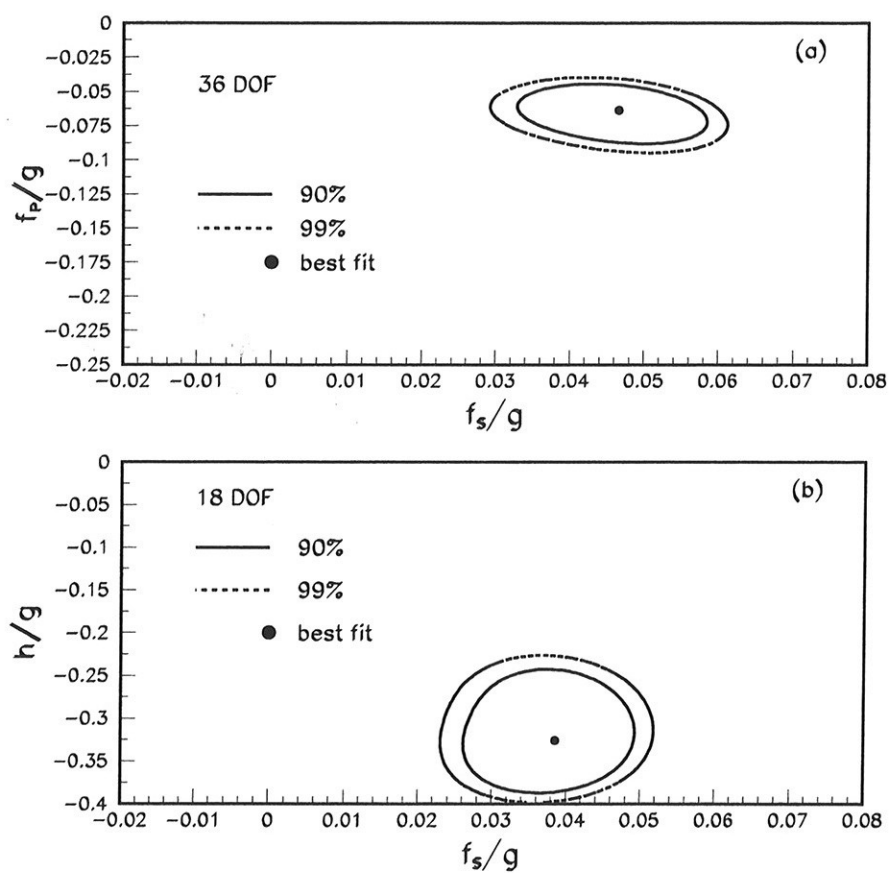


Figura 5.17: Curvas de nível de confiança a 90% e 99% para o ajuste dos fatores de forma  $f_s/g$ ,  $f_P/g$  e  $h/g$ .

FONTE		erro ( $\times 10^5$ )	erro (%)
Variação de cortes	$M_{\gamma\gamma}$	0.036	0.6
	$\Delta d_{\pi-\gamma}$	0.023	0.4
	$\Delta d_{e-\gamma}$	0.044	0.8
	$E_{\gamma}^{min}$	0.053	1.0
	$E_{\gamma}^{max}$	—	—
	$\Delta d_{\gamma-hole}$	0.070	1.3
	$\Delta d_{\gamma-edge}$	0.044	0.8
	$\chi_{shape}^2(\pi^0)$	0.046	0.9
	$N_{xclus}$	0.027	0.5
	$\chi_{TIME}^2$	0.007	0.1
	$E_{extra}$	0.02	0.4
	$\chi_{vtx}^2$	0.033	0.6
	$ P_e $	0.022	0.4
	$ P_{\pi} $	—	—
Aceitação ( $z$ )		0.06	1.0
Aberturas	CA (300 $\mu\text{m}$ )	0.010	0.2
	MA (100 $\mu\text{m}$ )	0.015	0.3
Atividade acidental	CsI	0.035	0.7
Eficiência absoluta p/ detecção do $\pi^0$	PMT/readout	—	—
	cracks/shims	—	—
	$\Delta d_{\gamma-hole}$	0.016	0.3
	$\Delta d_{\gamma-edge}$	—	—
Correções radiativas		0.04	0.7
BR $K_{e3}^0$		0.04	0.7
<b>TOTAL</b>		<b>0.13</b>	<b>2.5</b>

Tabela 5.3: Resumo das contribuições ao erro sistemático na razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  consideradas nessa análise. Os traços — indicam contribuição desprezível. Os valores são tomados como correspondendo a um desvio padrão.



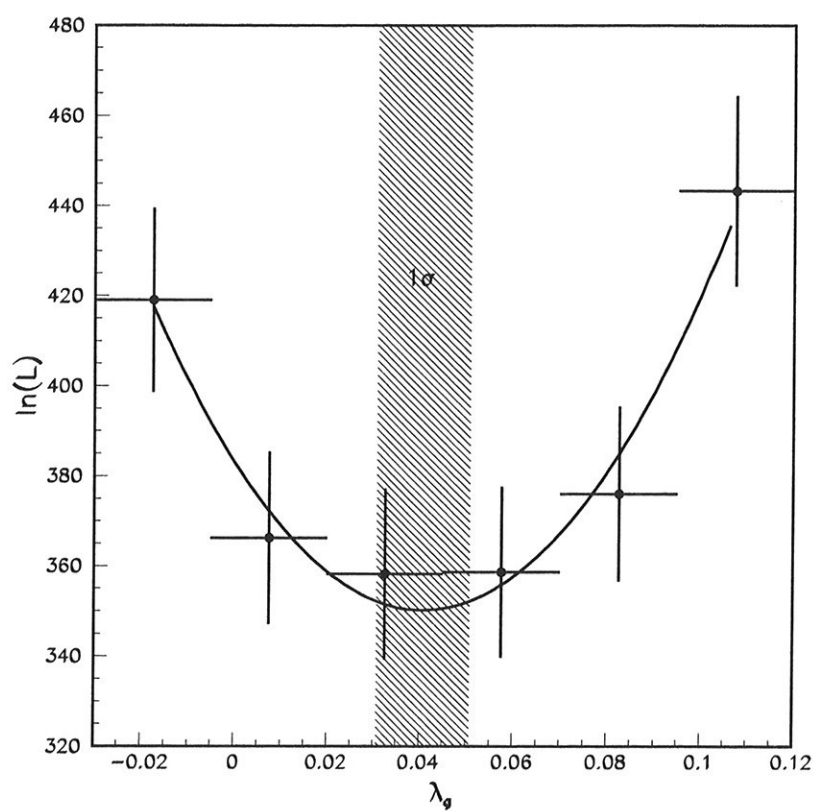


Figura 5.18: Projeção de  $\ln \mathcal{L}$  com respeito a  $\lambda_g$ . Os demais fatores de forma estão fixados nos valores de *best fit* (ver tabela 6.1). A região a  $1\sigma$  está hachurada.

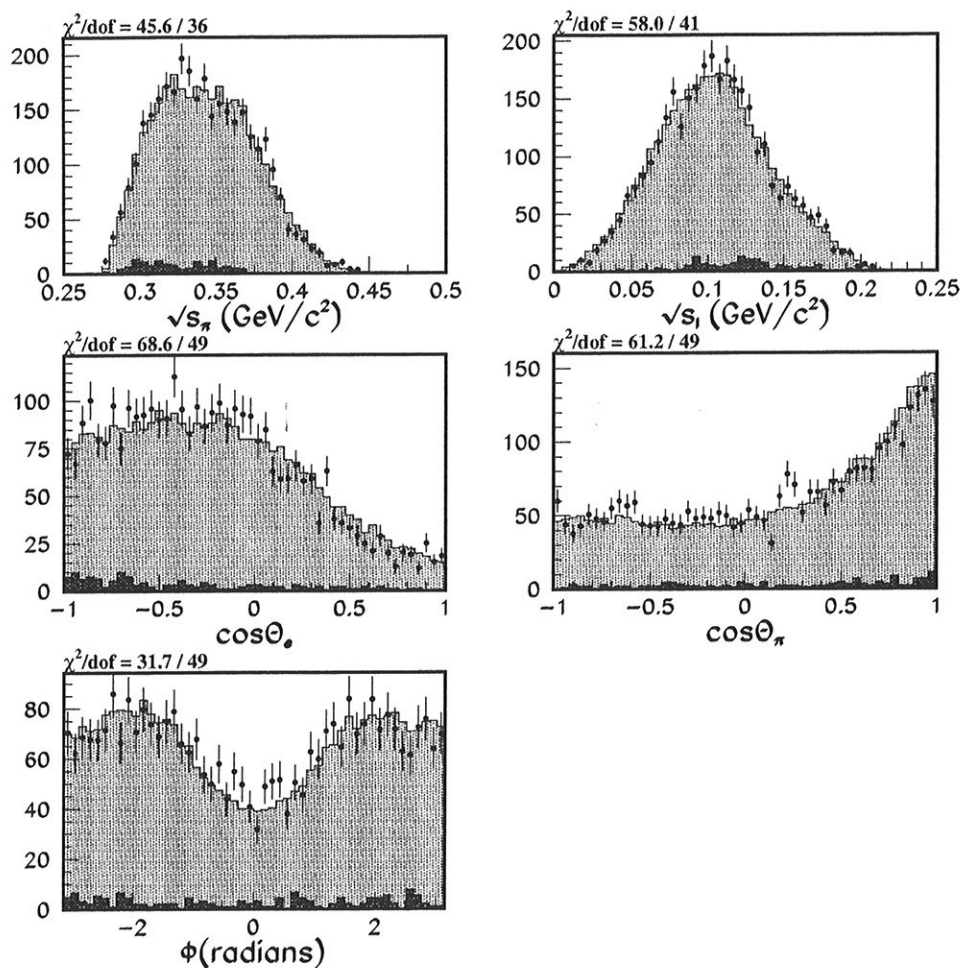


Figura 5.19: Sobreposição DADOS/MC para as cinco variáveis cinemáticas descrevendo o espectro de  $K_{e4}^0$ , utilizando-se os valores de *best-fit* obtidos para os fatores de forma. O histograma mais escuro representa a contaminação residual subtraída dos dados.

## Capítulo 6

### Resultados finais

Nesse capítulo, agrupamos os resultados finais obtidos por meio da análise dos dados de  $K_{e4}^0$  descrita no capítulo anterior, comparando-os com resultados anteriores obtidos para esse mesmo decaimento.

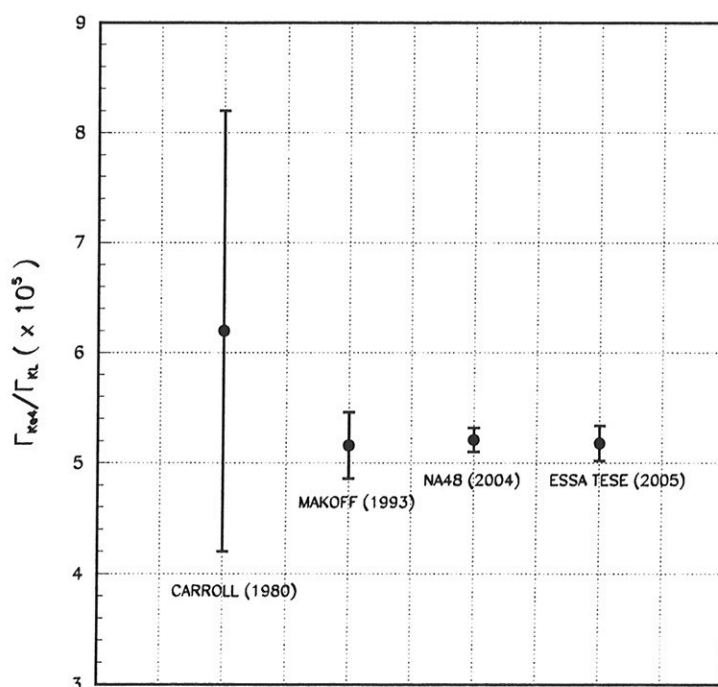


Figura 6.1: Medidas da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  até os dias de hoje, incluindo o valor obtido nessa análise, NA48[1], E731[2] e a primeira observação do decaimento em [3].

A figura 6.2 mostra a dependência quadrática da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  em relação a  $L_3$ , na região compatível com o valor experimental do coeficiente  $\lambda_g$ .

A partir do valor final da razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  obtido e do valor medido de  $\lambda_g$ , podemos extrair um valor para a constante de acoplamento  $L_3$  em ChPT

$$L_3 = (-4.0 \pm 0.3) \times 10^{-3} \quad (\text{Essa tese}), \quad (6.1)$$

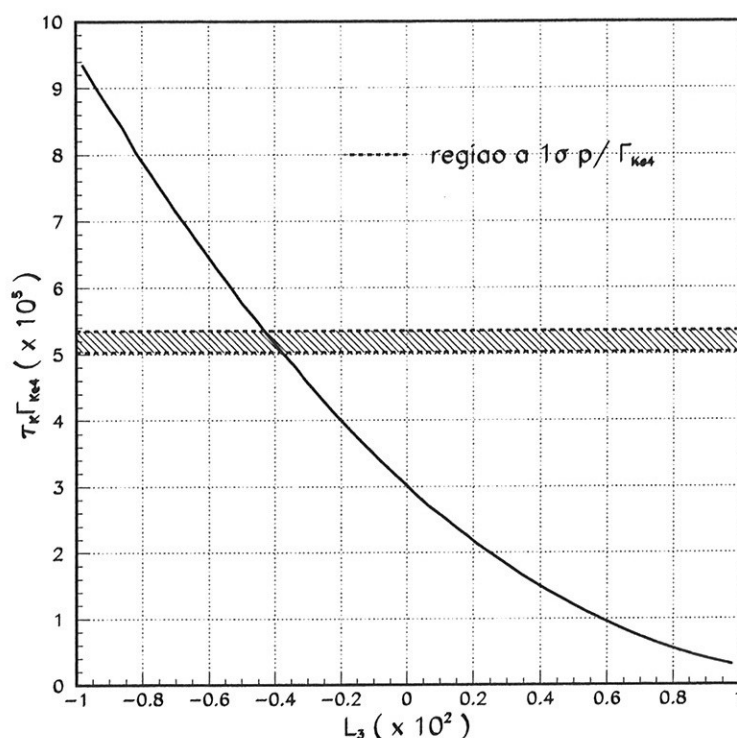


Figura 6.2: Razão de ramificação de  $K_{e4}^0$  como função da constante de baixa energia  $L_3$ , de acordo com a teoria de perturbação quiral. A região de  $1\sigma$  do valor de  $\tau_{KL}\Gamma_{K_{e4}^0}$  obtido nessa análise é representada pelas linhas horizontais pontilhadas. A região da parábola representada é aquela compatível com o valor experimental de  $\lambda_g$ .

e para efeito de comparação os resultados anteriores para  $L_3$  utilizando o modo  $K_{e4}^0$  são

$$L_3 = (-4.1 \pm 0.2) \times 10^{-3} \quad (\text{NA48})$$

$$L_3 = (-3.4 \pm 0.4) \times 10^{-3} \quad (\text{E731})$$

Na tabela 6.1 apresentamos o valor dos fatores de forma relativos obtidos nessa análise, juntamente com um resumo de outros resultados experimentais. Sabe-se que um valor não-nulo do fator de forma  $f_S$  está diretamente relacionado a uma violação da regra de seleção empírica  $\Delta I = 1/2$ . A intensidade da violação foi estimada como a razão entre a largura do decaimento com todos os demais fatores de forma nulos e a mesma largura com  $f_S = 0$ . O resultado é uma violação de  $\Delta I = 1/2$  de 2%.

Talvez seja importante ressaltar aqui algumas diferenças entre os procedimentos de ajuste dos fatores de forma da análise presente nessa tese e aquela realizada em [1]. Não assumimos qualquer fatorização da aceitação total em um produto da eficiência de detecção do aparato pela distribuição de probabilidade gerada pelos fatores de forma. Essa é a razão pela qual optamos por gerar uma quantidade acentuada de amostras de Monte Carlo (216) durante o processo de ajuste, para cada valor distinto de um dos fatores de forma. Em [1], a eficiência de detecção do aparato experimental é obtida gerando-se amostras com distribuição isotrópica no espaço de fase (isto é, sem qualquer efeito

	ESSA TESE	NA48 2004	E731
$\frac{f_S}{g}$	$0.046 \pm 0.008 \pm 0.003$	$0.052 \pm 0.006 \pm 0.002$	$0.010 \pm 0.016 \pm 0.014$
$\frac{f_P}{g}$	$-0.065 \pm 0.019 \pm 0.007$	$-0.051 \pm 0.011 \pm 0.005$	$-0.079 \pm 0.049 \pm 0.020$
$\frac{h}{g}$	$-0.36 \pm 0.16 \pm 0.08$	$-0.32 \pm 0.12 \pm 0.07$	$-0.07 \pm 0.30 \pm 0.31$
$\lambda_g$	$0.041 \pm 0.010 \pm 0.015$	$0.087 \pm 0.019 \pm 0.006$	$0.014 \pm 0.087 \pm 0.070$

Tabela 6.1: Valores dos fatores de forma obtidos nessa análise e um resumo de resultados anteriores: NA48 2004 [1], E731 [2].

de fator de forma), multiplicando-se essa eficiência pela razão diferencial de decaimento (aqui entram os fatores de forma). Essa fatorização é totalmente dependente do aparato experimental e da forma do elemento de matriz do decaimento e deve ser verificada de antemão. Não observou-se qualquer evidência de uma tal fatorização no KTeV.

Outra diferença diz respeito à função a ser minimizada durante o ajuste. Optamos por um ajuste multi-dimensional que levasse em conta as possíveis correlações entre as variáveis, de modo que o processo de minimização foi realizado num espaço 3D ( $s_\pi, s_l, \theta_\pi$ ). Em [1], a função minimizada foi uma soma de cinco  $\chi^2$ s, obtidos a partir de histogramas unidimensionais como aqueles apresentados na figura 5.19. Comparando-se o tamanho das respectivas amostras, espera-se que, em média, os erros estatísticos de [1] sejam 16% menores que os obtidos nessa tese, no entanto, acreditamos que a diferença maior observada deve-se ao fato de termos utilizado um procedimento de ajuste mais completo, onde as correlações entre os fatores de forma são levados em conta de maneira consistente.



## Conclusões

Foi possível identificar uma amostra do decaimento semi-leptônico  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$  com 4000 eventos após todos os cortes de análise sobre um fundo residual a ser subtraído de 143 (3.6%) eventos. A razão de ramificação obtida foi  $[5.19 \pm 0.09_{\text{estat}} \pm 0.13_{\text{sist}}] \times 10^{-5}$ . A principal contribuição ao erro sistemático de uma discrepância observada entre dados e Monte Carlo quanto à aceitação ao longo de eixo  $z$ , evidenciada através da posição do vértice carregado ao longo desse eixo. A contaminação residual é compatível com  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  na presença de dois fótons acidentais ou  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu \gamma$  mais um fóton acidental, manifestando-se na distribuição da massa invariante do par de fótons tomados como candidatos ao decaimento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ . Esse nível de ruído não pôde ser reproduzido via Monte Carlo devido principalmente a aceitação muito baixa dos modos quando submetidos aos cortes de análise de  $K_{e4}^0$ , ficando limitado também pela quantidade finita de eventos de atividade acidental coletados durante 1997 e disponíveis para superposição aos eventos de simulação. Dentre as tarefas mais importantes da análise, estava a discriminação  $\pi/e$ , que no caso do experimento E832 é feita, basicamente, por meio da razão entre a energia depositada no calorímetro pelo momento medido do espectrômetro. O TRD presente no E799 facilita e torna essa discriminação mais precisa. Dessa forma, foi preciso apelar para cortes específicos da contaminação que se desejava eliminar, como no caso de eventos contendo múons, por exemplo, mas que naturalmente acabam por eliminar certa fração do próprio sinal e reduz a estatística final. A contaminação no modo de normalização  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  selecionado nesta análise aparenta estar sob controle como mostra as comparações DADOS/MC apresentadas.

O valor da razão de ramificação obtido é compatível com medidas anteriores [1, 2, 3] do mesmo decaimento, e a evolução dessas medidas ao longo dos anos (ver figura 6.1) mostra uma melhora bastante significativa, tanto em termos de estatística quanto de controle do erro sistemático. Mediu-se também três dos fatores de forma ( $f_S$ ,  $f_P$  e  $h$ ) presentes na parametrização do elemento de matriz hadrônica do decaimento, com respeito ao fator de forma dominante  $g$ . Em particular, obteve-se a dependência de um dos fatores de forma com respeito ao momento transferido  $q^2$ , em primeira ordem na expansão de Taylor ( $g(q^2) = g(0)(1 + \lambda_g q^2)$ ). Os valores dos fatores de forma ajustados concordam todos (dentro de  $3\sigma$ ) com aqueles obtidos em [1]. Um valor não nulo do fator de forma  $f_S$  em  $K_{e4}^0$  indica uma violação da regra empírica  $\Delta I = 1/2$ . O valor obtido nessa análise indica uma violação dessa regra (2%), da mesma ordem daquela obtida em [1] de alguns por cento. O espectro reconstruído das cinco variáveis cinemáticas, após os cortes de

análise, concorda bem com o Monte Carlo, indicando que qualquer possível ruído residual é desprezível para esse tamanho de amostra. Optou-se por um ajuste multi-dimensional, de modo a levar em conta possíveis correlações entre os fatores de forma. Nenhuma fatorização da eficiência de detecção foi assumida, de modo que para cada valor distinto de um fator de forma sendo ajustado uma amostra de Monte Carlo foi gerada.

Um ponto nunca observado na literatura é a dependência quadrática de  $\Gamma_{K_{e4}^0}$  com a constante de acoplamento  $L_3$ , de modo que a determinação dessa constante por meio da razão de ramificação só é possível mediante a medida de  $\lambda_g$ , por exemplo. As medidas de  $L_3$  sempre indicam um valor negativo para a constante [4], em detrimento ao valor positivo da outra solução possível. O interesse na constante de acoplamento  $L_3$  estende-se além de ChPT, por sua relação direta com o condensado de glúons e com as massas dos quarks[77, 78, 79]. Os cálculos no âmbito da ChPT para  $K_{e4}^0$  foram realizados até ordem  $E^6$  na expansão perturbativa[38, 77]. Tanto as correções de 1-loop quanto aquelas além de 1-loop não são pequenas, de modo que as previsões teóricas para o decaimento devem sempre ser interpretadas com certa cautela.

Um cuidado especial foi tomado com relação às correções radiativas de natureza eletromagnética. A presença de um par de partículas carregadas no estado final, em especial um elétron, e um número de eventos com erro estatístico menor que 2% justificam tal preocupação. As simulações de Monte Carlo, de fato, mostraram uma mudança não desprezível na aceitação ( $\sim 5\%$ ) quando tais correções são incluídas. Na ausência de medidas experimentais da fração radiativa para esse decaimento, cálculos analíticos foram realizados no intuito de se verificar a quantidade de radiação gerada pelo pacote de simulação de correções radiativas utilizado pelo programa de Monte Carlo. Para um limiar experimental de detecção de fótons de 1 keV (no referencial de repouso do káon), o método analítico e o pacote concordam dentro de um fator  $\sim 1.5$ . O resultado analítico usa o método de renormalização para eliminar qualquer dependência da fração radiativa com cortes ultravioleta presentes em cálculos iniciais de correções radiativas em decaimentos semi-leptônicos [71]. O termo de emissão direta do vértice não foi incluído no cálculo analítico, mas espera-se que seja desprezível na presença do elétron, cuja radiação de *bremsstrahlung* domina o espectro, e tentativas anteriores de medi-lo no KTeV no modo  $K_L \rightarrow \pi^\mp e^\pm \nu$  confirmam essa hipótese.

Apesar do claro progresso na medida do decaimento  $K_{e4}^0$ , é também evidente a necessidade de aumento adicional na estatística, assim como aquela obtida na versão carregada[26], possibilitando dessa forma uma medida da dependência dos fatores de forma com as variáveis cinemáticas  $s_\pi$ ,  $s_l$  e  $\cos \theta_\pi$ . A fase de espalhamento entre os píons no estado final é de fundamental importância em ChPT, já que é possível relacioná-la com o condensado escalar de quarks e testar a hipótese de ser este último o parâmetro dominante no processo de quebra espontânea da simetria quiral[80]. Análises com o modo carregado de  $K_{e4}$  [26] têm corroborado para essa hipótese.



## Referências Bibliográficas

- [1] NA48, J.R. Batley, et al. *Phys. Lett.*, B595:75, 2004.
- [2] G. Makoff et al. *Phys. Rev. Lett.*, 70:1591, 1993.
- [3] A. S. Carrol et al. *Phys. Lett. B*, 96:407, 1980.
- [4] J. Gasser and H. Leutwyler. *Nucl. Phys.*, B250:465, 1985.
- [5] D.J. Gross and F. Wilczek. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343, 1973.
- [6] H.D. Politzer. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346, 1973.
- [7] C.N. Yang and R. Mills. *Phys. Rev.*, 96:191, 1954.
- [8] S.L. Adler. *Phys. Rev.*, 177:2426, 1969.
- [9] S.L. Adler and W.A. Bardeen. *Phys. Rev.*, 182:1517, 1969.
- [10] W.A. Bardeen. *Phys. Rev.*, 184:1848, 1969.
- [11] J.S. Bell and R. Jackiw. *Nuovo Cimento A*, 60:47, 1969.
- [12] C. Vafa and E. Witten. *Nucl. Phys.*, B234:173, 1984.
- [13] J. Goldstone. *Nuovo Cimento*, 19:154, 1961.
- [14] S. Weinberg. *Physica A*, 96:327, 1979.
- [15] J. Wess e B. Zumino. *Phys. Lett.*, 37B:95, 1971.
- [16] E. Witten. *Nucl. Phys.*, B223:422, 1983.
- [17] R. Brown et al. *Nature*, 163:82, 1949.
- [18] M. Gell-Mann. *Phys. Rev.*, 92:833, 1953.
- [19] A. Pais. *Phys. Rev.*, 94:663, 1952.
- [20] P. Kabir. *The CP Puzzle*. Academic Press, New York, 1968.

- [21] K. Kleinknecht. CP violation. page 41, Singapore, 1989. World Scientific.
- [22] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay. *Phys. Rev. Lett.*, 13:138, 1964.
- [23] N. Cabibbo and A. Maksymovicz. *Phys. Rev.*, 137:B438, 1965.
- [24] *CERN Program Library*. Geneva, 1996.
- [25] E. Barberio, B. van Eijk, and Z. Was. *Comput. Phys. Commun.*, 66:115, 1991.
- [26] S. Pislak et al. *Phys. Rev. D*, 67:072004, 2003.
- [27] S. Scherer. *Adv. Nucl. Phys.*, 27:277–538, 2002.
- [28] S. Coleman. *J. Math. Phys.*, 7:787, 1966.
- [29] A. Jaffe and E. Witten. Millenium problems: Quantum Yang-Mills Theory. <http://www.claymath.org/prizeproblems/yangmills.htm>.
- [30] H. Leutwyler. *Annals Phys.*, 235:165, 1994.
- [31] M. Gell-Mann, R.J. Oakes, and B. Renner. *Phys. Rev.*, 175:2195, 1968.
- [32] C.L.Y. Lee, M. Lu, and M.B. Wise. *Phys. Rev. D*, 46:5040, 1992.
- [33] A. Pais and S. B. Treiman. *Phys. Rev.*, 168:1858, 1968.
- [34] S. Weinberg. *Phys. Rev. Lett.*, 17:336, 1966.
- [35] H. Lehmann, K. Symanzik, and W. Zimmermann. *Nuovo Cimento*, 1:205, 1955.
- [36] C. Riggensbach et al. *Phys. Rev. D*, 43:127, 1991.
- [37] J. Bijnens. *Nucl. Phys.*, B337:635, 1990.
- [38] J. Bijnens, G. Colangelo, and J. Gasser. *Nucl. Phys.*, B427:427, 1994.
- [39] N. K. Pak and P. Rossi. *Nucl. Phys.*, B250:279, 1985.
- [40] L. Maiani, G. Pancheri, N. Paver, et al. *The Second DaΦne Physics Handbook*. INFN, 1995.
- [41] M. Peskin and D. Schroder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Perseus Book, Cambridge, 1995.
- [42] F. Mandl and G. Shaw. *Quantum Field Theory*. John Wiley & Sons, Chichester, 1995.

- [43] W. Greiner and J. Reinhardt. *Quantum Electrodynamics*. Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [44] N. Chang. *Phys. Rev.*, 131:1272, 1963.
- [45] E.M. Santos and R. Zukanovich Funchal. Radiative corrections to  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$ . KTeV Internal Note, 2004.
- [46] G. t'Hooft and M. Veltman. *Nucl. Phys.*, B153:365, 1979.
- [47] L. Lewin. *Dilogarithms and Associated Functions*. MacDonald, London, 1958.
- [48] C. Itzykson and J. B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGrawHill, New York, 1980.
- [49] T.D. Lee and M. Nauenberg. *Phys. Rev.*, 133:B1549, 1964.
- [50] T. Kinoshita. *J. Math. Phys.*, 3:650, 1962.
- [51] G.P. Lepage. *J. Comp. Phys.*, 27:192, 1978.
- [52] G.P. Lepage. Cornell Preprint CLNS-80/447, março 1980.
- [53] A. Alavi-Harati et al. *Phys. Rev. Lett.*, 86:761, 2001.
- [54] K. Arisaka et al. KTeV Design Report FN-580, 1992.
- [55] L. K. Gibbons et al. *Phys. Rev. D*, 55:6625, 1997.
- [56] R. Belušević. *Neutral Kaons*. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [57] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1975.
- [58] P. S. Shawhan. PhD thesis, University of Chicago, Chicago, dezembro 1999.
- [59] A. Roodman. Conference Record of ICHEP 96. julho 1996.
- [60] E. Cheu et al., editor. *Proceedings of the Seventh International Conference on Calorimetry in High Energy Physics*. World Scientific, 1998.
- [61] E. D. Zimmerman. PhD thesis, University of Chicago, Chicago, março 1999.
- [62] C. Bown et al. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. A*, 369:248, 1996.
- [63] J. A. Graham. PhD thesis, University of Chicago, Chicago, dezembro 2001.
- [64] D. E. Groom et al. *The European Physical Journal*, C15:1, 2000.
- [65] A. J. Malensek. FERMILAB Preprint FN-341, outubro 1981.
- [66] J. Roehrig et al. *Phys. Rev. Lett.*, 38:1116, 1977.

- [67] R. Briere and B. Winstein. *Phys. Rev. Lett.*, 75:402, 1995.
- [68] W. R. Molzon. PhD thesis, University of Chicago, março 1979.
- [69] V. Cirigliano et al. *The Eur. Phys. J. C*, 23:121, 2002.
- [70] (The KTeV Experiment), T. Alexopoulos, et al. *Phys. Rev. Lett.*, 93:181802, 2004.
- [71] E. Ginsberg. *Phys. Rev.*, 171:1675, 1968. *ibid* 162:1570, 1967; *ibid* 142:1035, 1966.
- [72] W. T. Scott. *Rev. Mod. Phys.*, 35:231, 1963.
- [73] R. Brun et al. *Computer Code GEANT*. Geneva, 1994.
- [74] E.M. Santos and R. Tschirhart. An analysis of the  $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$  decay. KTeV Internal Note, 2005.
- [75] R. Kessler. Measurement of  $\Gamma(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0)/\Gamma(K_L \rightarrow \pi^0 \pi^0 \pi^0)$ . KTeV Internal Note, 2003.
- [76] P. Basile et al. *Phys. Lett.*, 36B:619, 1971.
- [77] G. Amorós, J. Bijnens, and P. Talavera. *Nucl. Phys.*, B585:293, 2000. Erratum-*ibid.*, B598:665-666,2001.
- [78] D. Espriu, E. de Rafael, and J. Taron. *Nucl. Phys.*, B345:22, 1990.
- [79] J. Bijnens, C. Bruno, and E. de Rafael. *Nucl. Phys.*, B390:501, 1993.
- [80] G. Colangelo, J. Gasser, and H. Leutwyler. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5008, 2001.
- [81] J.D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistic Quantum Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1964.
- [82] J.D. Bjorken and S.D. Drell. *Relativistic Quantum Fields*. McGraw-Hill, New York, 1965.
- [83] S. Coleman, J. Wess, and B. Zumino. *Phys. Rev.*, 177:2239, 1969. *ibid* 177:2247, 1969.

# Apêndice A

## Notação

O tensor métrico utilizado nessa tese segue a convenção de Bjorken e Drell [81, 82]

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

O tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita é definido como

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{se } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ é permutação par de } \{0,1,2,3\} \\ -1 & \text{se } \{\mu, \nu, \rho, \sigma\} \text{ é permutação ímpar de } \{0,1,2,3\} \\ 0 & \text{quaisquer dois índices repetidos} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

As matrizes de Gell-Mann, representadas pelo conjunto  $\lambda_a$ , ( $a = 1, \dots, 8$ ), são dadas por

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \sqrt{\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

abc	123	147	156	246	257	345	367	458	678
$f_{abc}$	1	1/2	-1/2	1/2	1/2	1/2	-1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$

Tabela A.1: Valores não nulos (a menos de permutações cíclicas) das constantes de estrutura totalmente anti-simétricas  $f_{abc}$  de  $SU(3)$ .

e satisfazem as seguintes propriedades

$$\lambda_a = \lambda_a^\dagger, \quad (\text{A.8})$$

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab}, \quad (\text{A.9})$$

$$\text{Tr}(\lambda_a) = 0, \quad (\text{A.10})$$

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c, \quad (\text{A.11})$$

em que os valores não-nulos das constantes de estrutura  $f_{abc}$  de  $SU(3)$  são dados na tabela A.1, a menos de permutações cíclicas.

A constante de Fermi  $G_F$  está relacionada com a constante de acoplamento de gauge  $g_W$  e a massa do bóson  $W$  por

$$G_F = \sqrt{2} \frac{g_W^2}{8M_W^2} = 1.16639(1) \times 10^{-5} \text{GeV}^2, \quad (\text{A.12})$$

enquanto a constante de acoplamento da QED  $\alpha_{\text{QED}}$  relaciona-se com a carga  $e$  do elétron,  $\hbar$  e  $c$  por

$$\alpha_{\text{QED}} = \frac{e^2}{4\pi\hbar c} \approx \frac{1}{137}. \quad (\text{A.13})$$

## Apêndice B

### Parametrização dos espaços de fase de $K_{e4}^0$ e $K_{e4\gamma}^0$

Deduziremos aqui a parametrização para o espaço de fase dos decaimentos  $K_{e4}^0$  e  $K_{e4\gamma}^0$ .

#### B.1 $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu$

A largura de decaimento  $\Gamma$  é obtida integrando-se a largura diferencial para  $K_{e4}^0$ , e esta última pode ser fatorada num produto do módulo quadrado da amplitude invariante pelo diferencial de volume  $d\Omega$  do espaço de fase

$$\Gamma = \int d\Gamma = \int \frac{1}{2M} |\mathcal{M}|^2 d\Omega, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$d\Omega = (2\pi)^4 \delta^4(K - p - q - p_e - p_\nu) \prod_{i=1}^4 \frac{d^3\mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i}}. \quad (\text{B.2})$$

Não é difícil verificar que as seguintes relações são válidas

$$\int ds_\pi \int \frac{d^3\mathbf{P}}{2E_{\mathbf{P}}} \delta^4(P - p - q) = \int ds_\pi \int d^4P \delta(P^2 - s_\pi) \delta^4(P - p - q) = 1, \quad (\text{B.3})$$

$$\int ds_l \int \frac{d^3\mathbf{L}}{2E_{\mathbf{L}}} \delta^4(L - p_e - p_\nu) = \int ds_l \int d^4L \delta(L^2 - s_l) \delta^4(L - p_e - p_\nu) = 1. \quad (\text{B.4})$$

Dessa forma, inserindo as identidades acima em (B.1), temos

$$d\Omega = \frac{1}{(2\pi)^8} ds_\pi ds_l I_\pi I_l I_M, \quad (\text{B.5})$$

em que

$$I_\pi = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{2E_{\mathbf{q}}} \delta^4(P - p - q), \quad (\text{B.6})$$

$$I_l = \int \frac{d^3\mathbf{p}_e}{2E_{\mathbf{p}_e}} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\nu}{2E_{\mathbf{p}_\nu}} \delta^4(L - p_e - p_\nu), \quad (\text{B.7})$$

$$I_M = \int \frac{d^3\mathbf{P}}{2E_{\mathbf{P}}} \int \frac{d^3\mathbf{L}}{2E_{\mathbf{L}}} \delta^4(K - P - L). \quad (\text{B.8})$$

Começando por  $I_\pi$ , tem-se que

$$\begin{aligned} I_\pi &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} \int d^4q \delta(q^2 - m_{\pi^0}^2) \delta^4(P - p - q), \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} \delta((P - p)^2 - m_{\pi^0}^2), \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} \delta(s_\pi + m_\pi^2 - 2P \cdot p - m_{\pi^0}^2), \end{aligned}$$

e o produto escalar no argumento da função delta pode ser calculado no referencial do centro de massa dos píons onde  $P = (\sqrt{s_\pi}, \mathbf{0})$ . Além disso, calculando a integral em coordenadas esféricas, e tomando-se o ângulo polar como aquele entre o momento  $\mathbf{p}$  do pión carregado e o momento total  $\mathbf{P}$  do sistema de píons no sistema de repouso do káon, temos

$$\begin{aligned} I_\pi &= 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_\pi \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2E_{\mathbf{p}}} \delta \left( s_\pi + m_\pi^2 - m_{\pi^0}^2 - 2\sqrt{s_\pi} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_\pi^2} \right) \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_\pi \int \frac{d|\mathbf{p}|^2}{2E_{\mathbf{p}}} |\mathbf{p}|^2 \delta \left( s_\pi + m_\pi^2 - m_{\pi^0}^2 - 2\sqrt{s_\pi} \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m_\pi^2} \right) \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_\pi \left[ \frac{|\mathbf{p}|}{4\sqrt{s_\pi}} \right]_{|\mathbf{p}|\delta(0)} = \frac{\pi}{4} \beta \int_{-1}^1 d \cos \theta_\pi, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

onde  $|\mathbf{p}|_{\delta(0)}$  denota o valor de  $|\mathbf{p}|$  para o qual o argumento de  $\delta$  é zero, e corresponde à magnitude do momento do pión carregado no referencial do centro de massa dos píons. Suprimindo o índice subscrito  $\delta(0)$ , para tornar a notação mais limpa, podemos escrever

$$|\mathbf{p}| = \sqrt{\frac{(s_\pi + m_\pi^2 - m_{\pi^0}^2)^2}{4s_\pi} - m_\pi^2}, \quad (\text{B.10})$$

e

$$\beta = \frac{1}{s_\pi} \sqrt{s_\pi^2 - 2s_\pi(m_\pi^2 + m_{\pi^0}^2) + (m_\pi^2 - m_{\pi^0}^2)^2}. \quad (\text{B.11})$$

O mesmo procedimento pode ser aplicado a  $I_l$ , onde o ângulo polar agora é aquele entre o momento do elétron  $\mathbf{p}_e$  no referencial do centro de massa dos léptons e o momento



total  $\mathbf{L}$  dos léptons no sistema de repouso dos káons. Entretanto, o ângulo azimutal, que pode ser tomado como aquele entre os planos dos píons e dos léptons, não deve ser integrado, uma vez que vimos na seção 1.4.1 que  $\mathcal{M}$  depende dele. Um fator similar a  $\beta$  aparecerá mediante a substituição  $s_\pi \rightarrow s_l$  e das massas correspondentes, tal que desprezando termos da ordem  $m_e^2$  e a massa do neutrino, temos  $\beta = 1$ , de forma que

$$I_l = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 d \cos \theta_l \int_0^{2\pi} d\Phi. \quad (\text{B.12})$$

Agora nos voltamos para  $I_M$

$$I_M = \int \frac{d^3 \mathbf{P}}{2E_{\mathbf{P}}} \delta((K - P)^2 - s_l) = \int \frac{d^3 \mathbf{P}}{2E_{\mathbf{P}}} \delta(M^2 + s_\pi - s_l - 2K \cdot P), \quad (\text{B.13})$$

que no sistema de repouso do káon é dada por

$$I_M = \frac{\pi}{M^2} \sqrt{\left(\frac{M^2 + s_\pi - s_l}{2}\right)^2 - M^2 s_\pi} = \frac{\pi X}{M^2}, \quad (\text{B.14})$$

Assim, o elemento de volume do espaço de fase de  $K_{e4}^0$  pode ser escrito na sua forma final como

$$d\Omega = \frac{1}{2(4\pi)^6 M^2} \beta X ds_\pi ds_l d \cos \theta_\pi d \cos \theta_l d\Phi. \quad (\text{B.15})$$

## B.2 $K_L \rightarrow \pi^0 \pi^\pm e^\mp \nu \gamma$

O elemento de volume do espaço de fase para esse decaimento em cinco corpos pode ser escrito genericamente como

$$d\Omega = (2\pi)^4 \delta^4(K - p - q - p_e - p_\nu - k) \prod_{i=1}^5 \frac{d^3 \mathbf{p}_i}{(2\pi)^3 2E_{\mathbf{p}_i}}, \quad (\text{B.16})$$

e aqui novamente introduziremos as mesmas identidades das equações (B.3) e (B.4). No entanto, ao calcular  $I_\pi$ , a integração sobre o ângulo azimutal  $\Phi_\pi$  entre o plano de decaimento dos píons e o plano de decaimento do káon não deve ser realizada, pois a amplitude  $\mathcal{M}$  tem uma dependência nesse ângulo. De maneira similar,  $I_l$  agora é escrita como uma função de  $\Phi_l$ , isto é, o ângulo entre o plano de decaimento dos léptons e o plano de decaimento do káon. Mais explicitamente

$$I_\pi = \frac{1}{8} \beta \int_0^{2\pi} d\Phi_\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_\pi, \quad I_l = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\Phi_l \int_{-1}^1 d \cos \theta_l. \quad (\text{B.17})$$

A integral  $I_M$  é dada por

$$I_M = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3 \mathbf{P}}{2E_{\mathbf{P}}} \int \frac{d^3 \mathbf{L}}{2E_{\mathbf{L}}} \delta^4(K - P - L - k)$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d^3\mathbf{L}}{2E_{\mathbf{L}}} \delta(M^2 + s_l + 2L \cdot k - 2K \cdot (L + k) - s_\pi) \\
&= 2\pi \int_{-1}^1 d \cos \theta_\gamma \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2E_{\mathbf{k}}} \int \frac{d|\mathbf{L}|}{2E_{\mathbf{L}}} |\mathbf{L}|^2 \delta(f(|\mathbf{L}|)),
\end{aligned}$$

onde  $\theta_\gamma$  é ângulo entre o fóton irradiado e o momento total  $\mathbf{L}$  dos léptons no sistema de repouso do káon. A função  $f$  é dada por

$$f(|\mathbf{L}|) = M^2 + s_l - s_\pi + 2E_\gamma \left( \sqrt{s_l + |\mathbf{L}|^2} - |\mathbf{L}| \cos \theta_\gamma \right) - 2M \left( \sqrt{s_l + |\mathbf{L}|^2} + E_\gamma \right), \quad (\text{B.18})$$

tal que o valor de  $|\mathbf{p}_l|$  para o qual  $f(|\mathbf{L}| = |\mathbf{p}_l|) = 0$  corresponde a uma das soluções da equação de segundo grau  $a|\mathbf{L}|^2 + b|\mathbf{L}| + c = 0$ , com os seguintes coeficientes

$$\begin{aligned}
a &= 4 [E_\gamma^2 \cos^2 \theta_\gamma - (E_\gamma - M)^2], \\
b &= 4 [2ME_\gamma - (M^2 + s_l - s_\pi)] E_\gamma \cos \theta_\gamma, \\
c &= [2ME_\gamma - (M^2 + s_l - s_\pi)]^2 - 4(E_\gamma - M)^2 s_l,
\end{aligned}$$

e podemos finalmente escrever para  $I_M$

$$\begin{aligned}
I_M &= \pi^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta_\gamma \int_{\omega}^{E_\gamma^{max}} dE_\gamma \frac{|\mathbf{p}_l|^2 E_\gamma}{(M - E_\gamma)|\mathbf{p}_l| + E_\gamma \sqrt{s_l + |\mathbf{p}_l|^2} \cos \theta_\gamma} \\
&= \pi^2 \int_{-1}^1 d \cos \theta_\gamma \int_{\omega}^{E_\gamma^{max}} dE_\gamma Z.
\end{aligned}$$

Assim, o elemento de volume para o espaço de fase de  $K_{e4\gamma}^0$  é dado por

$$d\Omega = \frac{1}{2^{17}\pi^9} \beta Z ds_\pi ds_l dE_\gamma d \cos \theta_\pi d \cos \theta_l d \cos \theta_\gamma d\Phi_\pi d\Phi_l. \quad (\text{B.19})$$

### B.3 Reconstruindo $K_{e4\gamma}^0$ a partir das variáveis cinemáticas

Adotamos como orientação dos eixos no sistema de repouso do káon  $\Sigma_K$  aquela em que o eixo  $z$  é dado por  $\mathbf{L}$  (3-momento total dos léptons) e  $x$  está contido no plano de decaimento do káon. No sistema de centro de massa dos píons  $\Sigma_\pi$ , se tomarmos o eixo  $z$  ao longo do 3-momento total  $\mathbf{P}$  dos píons, seus 4-momenta são dados por

$$p^{(\Sigma_\pi)} = (E_p^{\Sigma_\pi}, |\mathbf{p}| \sin \theta_\pi, 0, |\mathbf{p}| \cos \theta_\pi), \quad q^{(\Sigma_\pi)} = (E_q^{\Sigma_\pi}, -|\mathbf{p}| \sin \theta_\pi, 0, -|\mathbf{p}| \cos \theta_\pi). \quad (\text{B.20})$$

com  $|\mathbf{p}|$  dado por (B.10) e as energias têm a forma

$$E_p^{(\Sigma_\pi)} = \frac{s_\pi + m_\pi^2 - m_{\pi^0}^2}{2\sqrt{s_\pi}}, \quad E_q^{(\Sigma_\pi)} = \frac{s_\pi - m_\pi^2 + m_{\pi^0}^2}{2\sqrt{s_\pi}}. \quad (\text{B.21})$$

Agora podemos fazer um *boost* de  $p$  e  $q$  para o referencial de repouso do káon que se move com velocidade  $-\beta_\pi$  ao longo de  $\mathbf{P}$ , de modo que a matriz de *boost* é dada por

$$\begin{pmatrix} \gamma_\pi & 0 & 0 & \beta_\pi \gamma_\pi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta_\pi \gamma_\pi & 0 & 0 & \gamma_\pi \end{pmatrix}, \quad \gamma_\pi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_\pi^2}}, \quad \beta_\pi = \frac{|\mathbf{P}|}{\sqrt{s_\pi + |\mathbf{P}|^2}}. \quad (\text{B.22})$$

Os 4-momenta resultante podem então ser escritos na forma

$$p = \begin{pmatrix} \gamma_\pi \frac{s_\pi + \Delta m_\pi^2}{2\sqrt{s_\pi}} + \frac{1}{2}\beta_\pi \gamma_\pi \sqrt{s_\pi} \beta \cos \theta_\pi \\ \frac{1}{2}\sqrt{s_\pi} \beta \sin \theta_\pi \\ 0 \\ \beta_\pi \gamma_\pi \frac{s_\pi + \Delta m_\pi^2}{2\sqrt{s_\pi}} + \frac{1}{2}\gamma_\pi \sqrt{s_\pi} \beta \cos \theta_\pi \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \gamma_\pi \frac{s_\pi - \Delta m_\pi^2}{2\sqrt{s_\pi}} - \frac{1}{2}\beta_\pi \gamma_\pi \sqrt{s_\pi} \beta \cos \theta_\pi \\ -\frac{1}{2}\sqrt{s_\pi} \beta \sin \theta_\pi \\ 0 \\ \beta_\pi \gamma_\pi \frac{s_\pi - \Delta m_\pi^2}{2\sqrt{s_\pi}} - \frac{1}{2}\gamma_\pi \sqrt{s_\pi} \beta \cos \theta_\pi \end{pmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Note, entretanto, que as componentes de  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  ainda estão escritas com respeito aos eixos orientados de  $\Sigma_\pi$ . Para obtê-los com as componentes correspondentes a  $\Sigma_K$  é preciso fazer uma rotação em torno de  $\mathbf{P}$  de um ângulo  $\Phi_\pi$  e uma outra rotação em torno de  $\mathbf{P} \times \mathbf{L}$  de um ângulo  $\varphi$ , isto é, o ângulo entre  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{L}$  medido em  $\Sigma_K$  e dado por

$$\cos \varphi = \frac{1}{|\mathbf{P}||\mathbf{L}|} \left[ \sqrt{s_\pi + |\mathbf{P}|^2} \sqrt{s_l + |\mathbf{L}|^2} - \frac{1}{2}(M^2 - s_\pi - s_l - 2ME_\gamma) \right], \quad (\text{B.24})$$

onde  $|\mathbf{L}|$  é dado no apêndice B.2 e, por conservação de energia-momento

$$|\mathbf{P}| = \sqrt{(M - \sqrt{s_l + |\mathbf{L}|^2} - E_\gamma)^2 - s_\pi}. \quad (\text{B.25})$$

Um procedimento análogo é aplicado para obter os 4-momentos dos léptons em  $\Sigma_K$ , exceto que a última rotação em torno de  $\mathbf{P} \times \mathbf{L}$  não é necessária uma vez que escolhemos o eixo  $z$  de  $\Sigma_K$  como apontando na direção e sentido de  $\mathbf{L}$ .

A largura diferencial de decaimento para  $K_{e4\gamma}^0$  é dada então por

$$d\Gamma = \frac{1}{(4\pi)^9 M} |\overline{\mathcal{M}^B}|^2 \beta Z ds_\pi ds_l dE_\gamma d\cos \theta_\pi d\cos \theta_l d\cos \theta_\gamma d\Phi_\pi d\Phi_l, \quad (\text{B.26})$$

com  $\beta$  dado por (B.11). Para escrever a equação (B.26) como função das variáveis cinemáticas, é necessário expressar o seguinte conjunto de produtos escalares como função das variáveis em (2.44)

$$\{P^2, Q^2, L^2, N^2, P \cdot Q, P \cdot L, P \cdot N, Q \cdot L, Q \cdot N, L \cdot N, k \cdot P, k \cdot Q, k \cdot L, k \cdot N\}, \quad (\text{B.27})$$

assim como os seguintes produtos anti-simétricos<sup>1</sup>

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu L_\rho P_\nu Q_\sigma = M \vec{L} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) \quad \text{calculado em } \Sigma_K, \quad (\text{B.28})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} K_\mu N_\rho P_\nu Q_\sigma = M \vec{N} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) \quad \text{calculado em } \Sigma_K, \quad (\text{B.29})$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} L_\mu N_\rho P_\nu Q_\sigma = \sqrt{s_l} \vec{N} \cdot (\vec{P} \times \vec{Q}) \quad \text{calculado em } \Sigma_L. \quad (\text{B.30})$$

<sup>1</sup>Cada uma das igualdades abaixo só é válida no particular referencial indicado à direita.

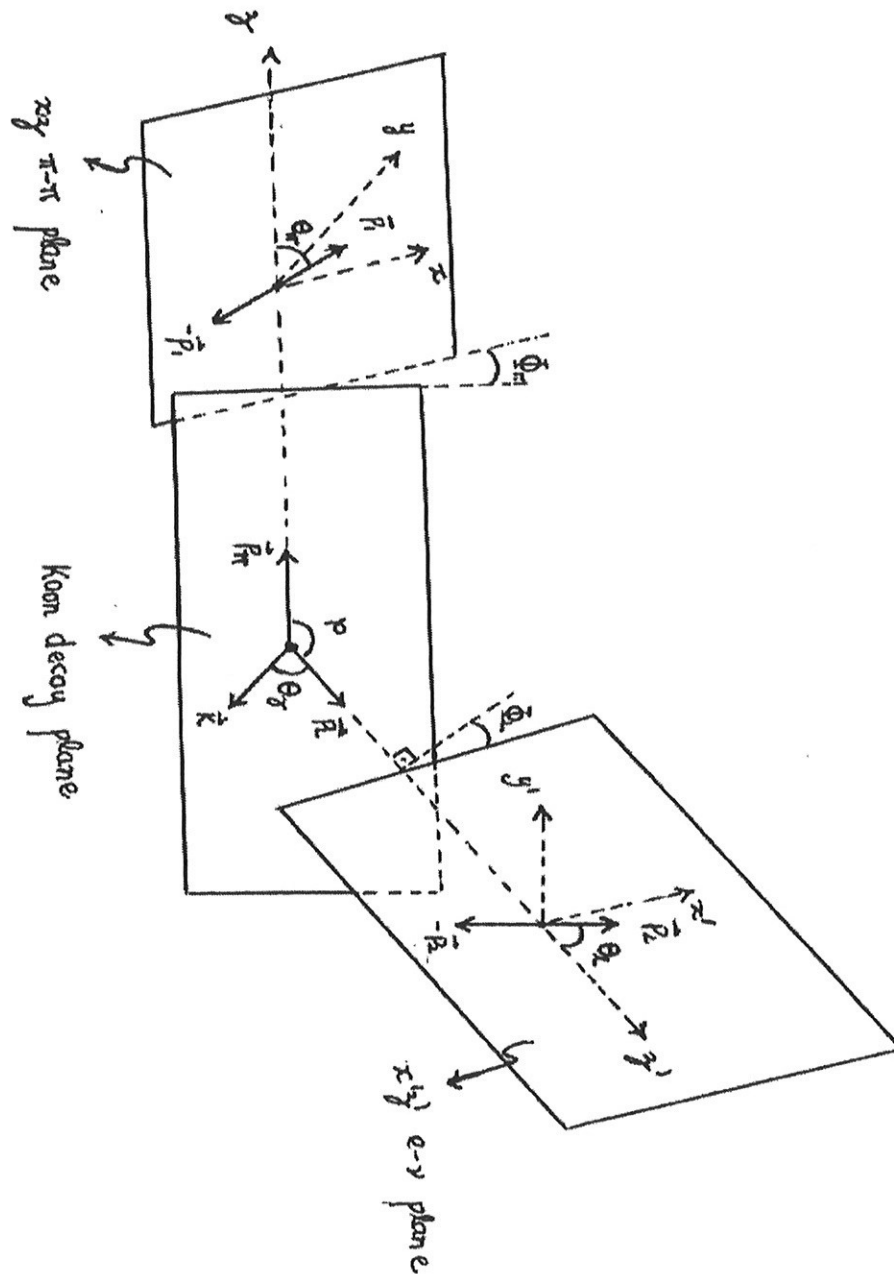


Figura B.1: Visão esquemática da geometria de  $K_{e4\gamma}^0$ .

## Apêndice C

# Realização não linear de uma simetria

Considere um sistema quântico cuja hamiltoniana  $\hat{H}$  é invariante sob transformações de um grupo de Lie compacto  $G$ , mas que o estado de vácuo de tal sistema seja invariante somente sob elementos de um subgrupo  $H$  de  $G$ . Nessas condições, o teorema de Goldstone garante a existência de  $n = n_G - n_H$  bósons de massa nula, onde  $n_G$  e  $n_H$  representam o número de geradores de  $G$  e de  $H$ , respectivamente, por meio do processo de quebra espontânea de simetria.<sup>1</sup>

Os  $n$  campos dos bósons de Goldstone  $\phi_i$  são funções reais e contínuas definidas sobre o espaço de Minkowski  $M^4$ , e podem então ser organizados na forma de vetores  $\Phi$  de  $n$  componentes para formar um espaço vetorial

$$C_1 = \{\Phi : M^4 \rightarrow R^n | \phi_i \text{ cont\u00ednua}\}. \quad (\text{C.1})$$

O pr\u00f3ximo passo \u00e9 definir uma *opera\u00e7\u00e3o* do grupo  $G$  sobre  $C_1$ , isto \u00e9, um mapa  $\varphi: G \times C_1 \rightarrow C_1$ , satisfazendo:

- $\varphi(e, \Phi) = \Phi, \quad \forall \Phi \in C_1;$
- $\varphi(g_1, \varphi(g_2, \Phi)) = \varphi(g_1 g_2, \Phi) \quad \forall g_1, g_2 \in G, \forall \Phi \in C_1,$

em que  $e$  \u00e9 a identidade de  $G$ . O espa\u00e7o vetorial  $C_1$  possui um elemento especial,  $\Phi = 0$  [83], e que numa teoria de bósons de Goldstone corresponde, sem muito rigor, ao estado de vácuo. Como nessa teoria, o vácuo \u00e9 invariante sob  $H$ , imp\u00f5e-se que a opera\u00e7\u00e3o  $\varphi$  deve ser tal que  $H$  mapeia  $\Phi = 0$  nele mesmo, isto \u00e9,

$$\varphi(h, 0) = 0 \quad \forall h \in H. \quad (\text{C.2})$$

Com a defini\u00e7\u00e3o de  $\varphi$  apresentada acima, \u00e9 poss\u00edvel estabelecer uma conex\u00e3o profunda entre o grupo quociente  $G/H$ , formado pelos cosets \u00e0 esquerda (ou \u00e0 direita)  $gH^2$

$$G/H = \{gH, \quad \forall g \in G\}, \quad (\text{C.3})$$

<sup>1</sup>A discuss\u00e3o aqui apresentada segue de perto a refer\u00eancia [27].

<sup>2</sup>Um resultado importante em teoria de grupos \u00e9 que os cosets \u00e0 esquerda, ou \u00e0 direita, s\u00e3o classes de equival\u00eancia de  $G/H$ , de forma que s\u00e3o conjuntos totalmente disjuntos.

e os campos dos bósons de Goldstone de  $C_1$ . Em primeiro lugar,  $\varphi$  mapeia a origem, através do coset  $gH$ , no mesmo elemento, pois dado um elemento qualquer  $gh \in gH$

$$\varphi(gh, 0) = \varphi(g, \varphi(h, 0)) = \varphi(g, 0). \quad (\text{C.4})$$

Além disso, demonstra-se que  $\varphi$  é uma aplicação injetora com respeito aos cosets, ou seja, dados elementos  $g$  e  $g'$  não equivalentes de  $G$  ( $g \notin g'H$ ), então  $\varphi(gh, 0) \neq \varphi(g'h, 0)$ . A prova segue por absurdo. Assuma que  $\varphi(gh, 0) = \varphi(g'h, 0)$ , então

$$0 = \varphi(e, 0) = \varphi(g^{-1}g, 0) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g, 0)) = \varphi(g^{-1}, \varphi(g', 0)) = \varphi(g^{-1}g', 0), \quad (\text{C.5})$$

o que implica que  $g^{-1}g' \in H$ , isto é  $g' \in gH$ , o que é um absurdo! Logo  $\varphi$  é um *isomorfismo* de  $G/H$  em  $C_1$ . Dessa forma, é possível estudar as transformações dos campos  $\Phi$  de  $C_1$  analisando apenas a ação de  $\varphi$  sobre os elementos do grupo quociente  $G/H$ . Mais precisamente, dado um elemento  $\Phi \in C_1$ , correspondente ao coset  $gH \in G/H$  (isto é  $\varphi(gh, 0) = \Phi$ ), a ação gerada por um coset  $g'H$  é

$$\varphi(g', \Phi) = \varphi(g', \varphi(g, 0)) = \varphi(g'g, 0) = \Phi', \quad (\text{C.6})$$

em outras palavras, o campo transformado  $\Phi'$  é obtido multiplicando-se o coset  $gH$  pelo elemento  $g'$  e tomando o resultado da ação desse novo coset sobre a origem.

No caso específico da QCD no limite quiral, os grupos de interesse são  $G = SU(N) \times SU(N) = \{(L, R) | L, R \in SU(N)\}$  e  $H = SU(N) = \{(V, V) | V \in SU(N)\}$ . O coset de um elemento de  $g' = (L', R') \in G$  nesse caso, fica completamente especificado por meio da matriz  $U = R'L^\dagger$  de  $SU(N)$ , pois

$$g'h = (L'V, R'V) = (L'V, R'L'^\dagger L'V) = (1, R'L'^\dagger) \underbrace{(L'V, L'V)}_{\in H} = (1, R'L'^\dagger)h', \quad (\text{C.7})$$

de modo que a transformação dos campos  $\Phi$  obtida por meio de uma operação sobre os cosets, como acabamos de demonstrar, pode agora ser, na realidade, analisada como uma ação sobre  $U$ . O comportamento de  $U$  sobre a ação de um elemento  $g = (L, R) \in G$  é dada por

$$gg'H = (L, RR'L'^\dagger)H = (1, RR'L'^\dagger L'^\dagger)(L, L)H = (1, R(R'L'^\dagger)L'^\dagger)H, \quad (\text{C.8})$$

e se permitirmos que a matriz  $U$  seja definida localmente, adicionando-se uma dependência nos pontos  $x$  do espaço tempo, temos

$$U(x) = R'L^\dagger \rightarrow U' = RU(x)L^\dagger. \quad (\text{C.9})$$

O último passo para estabelecer a chamada realização não linear do grupo  $G$  é definir o espaço vetorial  $C_2$  de matrizes  $\phi(x)$  (que também é uma álgebra), cujos elementos são os operadores  $\phi_i \in C_1$ , e dados explicitamente, no caso em que  $G = SU(3) \times SU(3)$ , por

$$\phi(x) = \sum_{a=1}^8 \lambda_a \phi_a(x) = \begin{pmatrix} \phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_1 - i\phi_2 & \phi_4 - i\phi_5 \\ \phi_1 + i\phi_2 & -\phi_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_8 & \phi_6 - i\phi_7 \\ \phi_4 + i\phi_5 & \phi_6 + i\phi_7 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\phi_8 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.10})$$

e interpretando-se os oito campos  $\phi_i$  como os membros do octeto mesônico pseudo-escalar, podemos escrever

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}\pi^+ & \sqrt{2}K^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 + \frac{1}{\sqrt{3}}\eta & \sqrt{2}K^0 \\ \sqrt{2}K^+ & \sqrt{2}K^0 & -\frac{2}{\sqrt{3}}\eta \end{pmatrix}. \quad (\text{C.11})$$

Finalmente, define-se, por exponenciação dos elementos da álgebra  $C_2$ , o conjunto

$$C_3 = \left\{ U : M^4 \rightarrow SU(N) \mid U(x) = \exp\left(i\frac{\phi(x)}{F_0}\right), \quad \phi(x) \in C_2, \right\}, \quad (\text{C.12})$$

de modo que a realização não linear de  $G = SU(N) \times SU(N)$  sobre  $C_3$  é dada pelo homomorfismo  $\varphi$

$$\varphi : G \times C_3 \rightarrow C_3, \quad \varphi[(L, R), U](x) \equiv RU(x)L^\dagger. \quad (\text{C.13})$$

A realização é dita não linear, porque  $C_3$  não constitui um espaço vetorial. Dessa forma, foi possível definir a ação do grupo  $G$  sobre um grupo de matrizes unitárias e unimodulares  $U(x)$ .





## Apêndice D

# O condensado escalar de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$ e a quebra espontânea da simetria quiral

Conforme discutido na seção 1.2, o processo de quebra espontânea da simetria quiral em teorias de Yang-Mills ainda não é entendido de maneira satisfatória. Para a QCD no limite quiral, por exemplo, o passo fundamental é demonstrar que a teoria satisfaz as condições do teorema de Goldstone, faltando provar portanto que

$$Q_A^a|0\rangle \neq 0, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (\text{D.1})$$

uma vez que o resultado  $Q_V^a|0\rangle = 0$  já foi demonstrado em [12]. Apresentaremos nesse apêndice a demonstração do seguinte teorema:

**TEOREMA D.1** *Uma condição suficiente (mas não necessária) para a quebra espontânea da simetria quiral da QCD, no limite quiral, é que o chamado condensado escalar de quarks*

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle 0|\bar{q}q|0\rangle = \langle \bar{u}u + \bar{d}d + \bar{s}s \rangle, \quad (\text{D.2})$$

seja não nulo. Ou seja,  $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0 \implies Q_A^a|0\rangle \neq 0$ .

### Prova

Além das correntes vetoriais e axiais definidas em (1.15), (1.16) e (1.17), podemos definir também as correntes escalares e pseudo-escalares

$$S_a(x) = \bar{q}(x)\lambda_a q(x), \quad P_a(x) = i\bar{q}(x)\gamma_5\lambda_a q(x), \quad a = 0, \dots, 8, \quad (\text{D.3})$$

por meio das quais contrói-se as cargas associadas

$$Q_V^a(t) = \int d^3x q^\dagger(x)\frac{\lambda_a}{2}q(x), \quad Q_A^a(t) = \int d^3x q^\dagger(x)\gamma_5\frac{\lambda_a}{2}q(x). \quad (\text{D.4})$$

As relações de comutação em tempos iguais dos campos dos quarks nos leva à seguinte relação de comutação

$$[Q_V^a(t), S_a(x)] = i \sum_{c=1}^8 f_{abc} S_c(x), \quad a = 1, \dots, 8, \quad (\text{D.5})$$

que pode ser facilmente invertida<sup>1</sup>, de forma que

$$S_a(x) = -\frac{i}{3} \sum_{b,c=1}^8 f_{abc} [Q_V^b(t), S_c(x)]. \quad (\text{D.6})$$

No limite quiral,  $Q_V^a|0\rangle = 0$ , de modo que obtemos imediatamente

$$\langle 0|S_a(x)|0\rangle = \langle 0|S_a(x)|0\rangle \equiv \langle S_a \rangle, \quad a = 1, \dots, 8, \quad (\text{D.7})$$

onde usou-se  $S_a(x) = e^{-iHt} S_a(0) e^{iHt}$  e a propriedade de invariância translacional do vácuo. Tomando então  $a = 3$ , a expressão (D.3) nos diz que  $\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle$ , e juntamente com  $a = 8$  temos finalmente

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle. \quad (\text{D.8})$$

Assim, é possível avaliar o seguinte comutador

$$i[Q_A^a(t), P_a(x)] = (i)^2 \int d^3x \delta^3(x-y) q^\dagger(x) \underbrace{\left[ \gamma_5 \frac{\lambda_a}{2}, \gamma_0 \gamma_5 \lambda_a \right]}_{-\lambda_a^2 \gamma_0} q(x) = \bar{q}(x) \lambda_a^2 q(x), \quad (\text{D.9})$$

de forma que

$$i[Q_A^a(t), P_a(x)] = \begin{cases} \bar{u}u + \bar{d}d & , \quad a = 1, 2, 3 \\ \bar{u}u + \bar{s}s & , \quad a = 4, 5 \\ \frac{1}{3}(\bar{u}u + \bar{d}d + 4\bar{s}s) & , \quad a = 8 \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

ou seja,

$$\langle 0|i[Q_A^a(t), P_a(x)]|0\rangle = \frac{2}{3} \langle \bar{q}q \rangle \quad (\text{D.11})$$

e o teorema está estabelecido, pois um valor não nulo de  $\langle \bar{q}q \rangle$  implica simultaneamente em  $P_A^a|0\rangle \neq 0$  e  $Q_A^a|0\rangle \neq 0$ . ■

<sup>1</sup>Fazendo uso de  $\sum_{a,b=1}^8 f_{abc} f_{abd} = 3\delta_{cd}$ .

## Apêndice E

### Correções de 1-loop para os fatores de forma de $K_{e4}^0$

Fornecemos aqui as expressões das chamadas correções de unitariedade para os fatores de forma  $f$  e  $g$  [36, 37, 38].

Lembrando-se que  $t = (p - K)^2$  e  $u = (q - K)^2$ , temos

$$U_f(s_\pi, t, u) = \Delta_0(s_\pi) + A_f(t) + B(t, u), \quad (\text{E.1})$$

com

$$\begin{aligned} \Delta_0(s_\pi) &= \frac{1}{2} (2s_\pi - m_\pi^2) J_{\pi\pi}^r(s_\pi) + \frac{3}{4} s_\pi J_{KK}^r(s_\pi) + \frac{m_\pi^2}{2} J_{\eta\eta}^r(s_\pi) \\ A_f(t) &= \frac{1}{16} [(14M^2 + 14m_\pi^2 - 19t) J_{K\pi}^r(t) + (2M^2 + 2m_\pi^2 - 3t) J_{\eta K}^r(t)] \\ &\quad + \frac{1}{8} [(3M^2 - 7m_\pi^2 + 5t) K_{K\pi}(t) + (M^2 - 5m_\pi^2 + 3t) K_{\eta K}(t)] \\ &\quad - \frac{1}{4} [9(L_{K\pi}(t) + L_{\eta K}(t)) + (3M^2 - 3m_\pi^2 - 9t)(M_{K\pi}^r(t) + M_{\eta K}^r(t))] \\ B(t, u) &= -\frac{1}{2} (M^2 + m_\pi^2 - t) J_{K\pi}^r(t) - (t \leftrightarrow u). \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Todas as funções acima originam-se em integrais escalares

$$J_{\alpha\beta}(t) = -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{((p+k)^2 - m_\alpha^2)(p^2 - m_\beta^2)}, \quad (\text{E.3})$$

com  $t = k^2$ .  $\bar{J}_{\alpha\beta}(t) = J_{\alpha\beta}(t) - J(0)$  e  $J_{\alpha\beta}^r(t) = \bar{J}_{\alpha\beta}(t) - 2k$ , de modo que

$$\begin{aligned} \bar{J}_{\alpha\beta}(t) &= \frac{1}{32\pi^2} \left[ 2 + \frac{\Delta}{t} \ln \frac{m_\beta^2}{m_\alpha^2} - \frac{\Sigma}{\Delta} \ln \frac{m_\beta^2}{m_\alpha^2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{t} \ln \frac{(t + \sqrt{\lambda})^2 - \Delta^2}{(t - \sqrt{\lambda})^2 - \Delta^2} \right], \quad (\text{E.4}) \\ M_{\alpha\beta}^r(t) &= \frac{1}{12t} (t - 2\Sigma) \bar{J}_{\alpha\beta}(t) + \frac{\Delta^2}{3t^2} \bar{J}_{\alpha\beta}(t) + \frac{1}{288\pi^2} - \frac{k}{6} \end{aligned}$$

$$- \frac{1}{96\pi^2 t} \left[ \Sigma + 2 \frac{m_\alpha^2 m_\beta^2}{\Delta} \ln \frac{m_\beta^2}{m_\alpha^2} \right], \quad (\text{E.5})$$

$$L_{\alpha\beta}(t) = \frac{\Delta^2}{4t} \bar{J}_{\alpha\beta}(t), \quad (\text{E.6})$$

$$K_{\alpha\beta}(t) = \frac{\Delta}{2t} \bar{J}_{\alpha\beta}(t), \quad (\text{E.7})$$

e as seguintes variáveis foram introduzidas

$$\Delta = m_\alpha^2 - m_\beta^2, \quad (\text{E.8})$$

$$\Sigma = m_\alpha^2 + m_\beta^2, \quad (\text{E.9})$$

$$\lambda = (t + \Delta)^2 - 4tm_\alpha^2. \quad (\text{E.10})$$

A dependência com a escala de renormalização  $\mu$  está contida em  $k$

$$k = \frac{1}{32\pi^2} \frac{m_\alpha^2 \ln \left( \frac{m_\alpha^2}{\mu^2} \right) - m_\beta^2 \ln \left( \frac{m_\beta^2}{\mu^2} \right)}{\Delta}. \quad (\text{E.11})$$

Para o fator de forma  $g$ , tem-se de maneira similar

$$U_g(s_\pi, t, u) = \Delta_1(s_\pi) + A_g(t) + B(t, u), \quad (\text{E.12})$$

onde

$$\Delta_1(s_\pi) = 2s_\pi \left[ M_{\pi\pi}^r(s_\pi) + \frac{1}{2} M_{KK}^r(s_\pi) \right] \quad (\text{E.13})$$

$$\begin{aligned} A_g(t) &= \frac{1}{16} [(2M^2 + 2m_\pi^2 + 3t)J_{K\pi}^r(t) - (2M^2 + 2m_\pi^2 - 3t)J_{\eta K}^r(t)] \\ &+ \frac{1}{8} [-(3M^2 - 7m_\pi^2 + 5t)K_{K\pi}(t) - (M^2 - 5m_\pi^2 + 3t)K_{\eta K}(t)] \\ &- \frac{3}{4} [L_{K\pi}(t) + L_{\eta K}(t) - (M^2 - m_\pi^2 + t)(M_{K\pi}^r(t) + M_{\eta K}^r(t))]. \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

O leitor deve estar se perguntando a respeito das partes imaginárias de  $U_{f(g)}$ . Na verdade, para determiná-las é preciso um pouco mais de cuidado, pois essas se originam do corte da função  $\ln(z)$  ao longo do eixo  $x$  negativo. Uma análise criteriosa mostra que a parte imaginária de  $F_\pi^{-2}\Delta_0(s_\pi)$  contém uma fase correspondente a um estado de onda  $S$ ,  $I = 0$  para o par  $\pi\pi^1$

$$\delta_0^0(s_\pi) = \frac{1}{32\pi F_\pi^2} (2s_\pi - m_\pi^2) \beta + O(E^4), \quad (\text{E.15})$$

assim como contribuições de estados intermediários  $K\bar{K}$  e  $\eta\eta$ . De maneira análoga,  $F_\pi^{-2}\Delta_1(s_\pi)$  contém uma fase correspondente a um estado de onda  $P$ ,  $I = 1$  para o par  $\pi\pi$

$$\delta_1^1(s_\pi) = \frac{1}{96\pi F_\pi^2} s_\pi \beta^3 + O(E^4), \quad (\text{E.16})$$

<sup>1</sup>Na notação  $\delta_l^I$ ,  $l$  indica o momento angular  $l$  o isospin.

e contribuições de estados intermediários  $K\bar{K}$  e  $\eta\eta$ . No caso particular de  $K_{e4}^0$ , em que  $f$  deve ser anti-simetrizado e  $g$  simetrizado com respeito à troca de píons, apenas a parte imaginária de  $g$  sobrevive, enquanto  $f$  é puramente real.