Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Estudo de propriedades quânticas dos feixes sonda e de bombeio na transparência induzida por laser

Carlos Leonardo Garrido Alzar

Tese apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo como parte
dos requisitos para a obtenção do título de
Doutor em Ciências

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alberto Nussenzveig

Paulo Nussenzveig

Banca examinadora:

Prof. Dr. Antonio F. R. de Toledo Piza
Prof. Dr. Arturo Lezama
Prof. Dr. Miled H. Y. Moussa
Prof. Dr. Nicim Zagury

São Paulo, 15 de Março 2002

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP
305M810T3646

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3646
ex. 1

535
G241e
D
ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Garrido Alzar, Carlos Leonardo

Estudo de Propriedades Quânticas dos Feixes Sonda e de Bombeio na Transparência Induzida por Laser.
São Paulo 2002.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo
Instituto de Física – Departamento de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alberto Nussenzveig
Área de Concentração: Ótica Quântica

Unitermos: 1. Transparência Induzida por Laser;
2. Flutuações Quânticas do Campo Eletromagnético;
3. Equações de Heisenberg-Langevin;
4. Correlações Quânticas;
5. Efeitos Coerentes em Meios Atômicos.

USP/IF/SBI-012/2002

Conteúdo

1 Introdução **1**

2 Flutuações Quânticas do Campo Eletromagnético **5**
2.1 Quantização do Campo Eletromagnético 5
2.2 Operadores de Quadratura 12
2.2.1 Espectro de ruído dos operadores de quadratura 14
2.2.2 Estados coerente e comprimido 16
2.3 Medida das Propriedades Estatísticas do Campo Eletromagnético 18
2.3.1 Detecção homodina 19

3 Analogia Clássica da Transparência Induzida por Laser **23**
3.1 O Fenômeno da Transparência Induzida por Laser 24
3.2 Modelo Teórico 24
3.2.1 Analogia utilizando massas e molas 26
3.3 Simulação Experimental da Transparência Induzida Utilizando Circuitos *RLC* 30

4 Tratamento Teórico da Transparência Induzida por Laser **37**
4.1 Equações Quânticas de Langevin 38
4.1.1 Hamiltoniano do sistema 40
4.1.2 Equações quânticas de Langevin para os campos 49
4.1.3 Equações quânticas de Langevin para as variáveis atômicas 54
4.1.4 Equações quânticas de Langevin para o sistema átomo-campo 61
4.2 Previsões Teóricas I: Estado Estacionário 63
4.2.1 Equações para o estado estacionário 63
4.2.2 Resposta do meio atômico ao feixe sonda 67
4.3 Previsões Teóricas II: Ruído Quântico 77
4.3.1 Equações para o estudo das flutuações 77

4.3.2 Matriz de difusão do sistema 81
4.3.3 Flutuações quânticas dos campos 83
4.3.4 Correlação entre os feixes sonda e de bombeio 92
4.3.5 Influência da freqüência de análise 105

5 Estudo Experimental das Flutuações dos Campos na Condição de Transparência Induzida 111
5.1 Dispositivos e Técnicas de Medição 112
5.1.1 Lasers 112
5.1.2 Sistema de detecção balanceada 114
5.1.3 Meio atômico 115
5.2 Resultados 117
5.3 Proposta para Estudo Experimental do Caráter da Correlação Sonda-Bombeio 127

6 Conclusões 131

A Espectro de Ruído de uma Variável Estocástica 135

B Equação Quântica de Langevin para um Sistema Geral 137

C Cálculo das Constantes de Acoplamento 139

D Cálculo da Matriz de Difusão das Variáveis Atômicas 145

BIBLIOGRAFIA 147

Lista de Figuras

2.1 Distribuição espectral da intensidade de um laser. 12
2.2 Representação de um estado coerente no espaço de fase. 17
2.3 Esquema de detecção homodina. 20

3.1 Diagrama de energia para um átomo de três níveis na configuração Λ. O nome da configuração deve-se ao fato de que ao conectar cada estado fundamental com o estado excitado, forma-se a letra grega Λ. 25
3.2 Modelo mecânico empregado para simular a transparência induzida eletromagneticamente. 26
3.3 Dependência com a freqüência da potência da força sonda absorvida pela partícula que simula o átomo. Os valores de Ω_r são (a) 0,0 , (b) 0,1 , (c) 0,2 , (d) 0,3 , (e) 0,4 , e (f) 0,5 em unidades de freqüência. 28
3.4 Respostas dispersiva (a) e absortiva (b) da potência da força sonda transmitida à partícula 1 para $\Omega_r = 0,1$ em unidades de freqüência. 29
3.5 Circuito elétrico utilizado para investigar a transparência induzida. 31
3.6 Potência transferida ao circuito ressonante $R_2L_2C_{e2}$ como função da freqüência ω_s para diferentes valores do capacitor de acoplamento C. Para cada curva os valores de C são (a) $C = 0,196\ \mu F$, correspondente à freqüência de ressonância $f_{Res} = \omega_2/2\pi = 20,0\ kHz$, (b) $C = 0,150\ \mu F$, $f_{Res} = 19,5\ kHz$, (c) $C = 0,096\ \mu F$, $f_{Res} = 21,5\ kHz$, (d) $C = 0,050\ \mu F$, $f_{Res} = 26,5\ kHz$. 34

4.1 Configuração lambda para um átomo de três níveis. 40
4.2 Esquema geral de um laser com cavidade Fabry-Pérot. A cavidade laser está formada pelos espelhos de saída $M1$ e $M2$, este último de refletividade igual a 100 %, entre os quais está localizado o meio encarregado de gerar a radiação laser. 42

4.3 Modelo de interação para o sistema total. 44

4.4 Diagrama do processo de colisão. O átomo que interage com os lasers encontra-se inicialmente no estado $|1, \hbar\vec{K} = 0\rangle$ e, como resultado da colisão com o átomo da espécie X inicialmente no estado $|\phi_i, \hbar\vec{K}_X\rangle$, passa ao estado $|2, \hbar\vec{K} = 0\rangle$. O processo físico (neste caso a colisão) é representado pelo simbolo "o". . 47

4.5 Processos físicos levados em conta na formulação do problema da transparência induzida. 48

4.6 Níveis de energia da transição D_2 do ^{85}Rb. O valor em MHz indica a separação em freqüência entre os diferentes níveis de momento angular total F. 67

4.7 Resposta do meio atômico ao feixe sonda para um número de átomos $N = 5,0 \times 10^8$. Para uma intensidade do sonda igual a 10,9 $\mu W/cm^2$, os valores da intensidade do bombeio em $\mu W/cm^2$ são: (a) 4,9$\times 10^{-4}$, (b) 4,9 , (c) 30,4 , (d) 486,5 , (e) 1945,8 69

4.8 A absorção do feixe sonda depende da separação em energia dos níveis vestidos $|3+\rangle$ e $|3-\rangle$. O ângulo θ é definido pela taxa de Rabi e a dessintonia do feixe de bombeio. 71

4.9 Curvas de biestabilidade dos feixes sonda e de bombeio. A curva do bombeio foi obtida para uma intensidade fixa do sonda igual a 10,9 $\mu W/cm^2$ ($\alpha_2 = 15$). 73

4.10 Processo de colisão acompanhado por uma transferência de população como mecanismo de retroalimentação responsável pelo comportamento biestável do campo de bombeio. A flecha tracejada representa o trânsito por um estado virtual, nesse caso, o estado excitado $|0\rangle$. 74

4.11 Curva de biestabilidade do feixe de bombeio para $\Gamma_{1\to 2} = \Gamma_{2\to 1} = 1,3 \times 10^{-4}\ \Gamma$. 75

4.12 Absorção do sonda para intensidades comparáveis com a intensidade de saturação $I_{SAT} = 1,6\ mW/cm^2$. Intensidade do feixe sonda $I_2 = 2,80\ mW/cm^2$ ($\alpha_2 = 240$), intensidade do bombeio (a) $I_1 = 3,89 \times 10^{-1}\ mW/cm^2$ ($\alpha_1 = 89$), (b) $I_1 = 9,73\ mW/cm^2$ ($\alpha_1 = 447$). 76

4.13 Flutuações quânticas da quadratura da amplitude dos feixes sonda $V_{2S}(\Omega, \phi = 0)$ e de bombeio $V_{1S}(\Omega, \theta = 0)$ na condição de transparência mostrada na Fig. 4.12(a), para uma freqüência de análise $\Omega = \Gamma/6 = 6,28\ MHz$. O ruído foi normalizado ao shot noise (0 dB). 86

4.14 Correlação entre as quadraturas da amplitude dos feixes sonda e de bombeio $c_{\theta=0,\phi=0}(\Omega = \Gamma/6)$, correspondente à situação mostrada na Fig. 4.13. 88
4.15 Curva de biestabilidade do bombeio para uma intensidade fixa do sonda: 2,80 mW/cm^2 ($\alpha_2 = 240$). Os círculos apontam os dois possíveis valores de α_1 correspondentes a uma dada intensidade da fonte do bombeio. 89
4.16 Curva de biestabilidade do bombeio para uma intensidade maior da fonte. Intensidade do sonda: 2,80 mW/cm^2 ($\alpha_2 = 240$). Novamente, os círculos apontam os dois possíveis valores da amplitude média do bombeio α_1. 90
4.17 Flutuações quânticas e correlação das quadraturas da amplitude. Intensidade do sonda: 2,80 mW/cm^2, intensidade do bombeio: 9,73 mW/cm^2. $\Omega = \Gamma/6$. 91
4.18 Ruído e correlação das quadraturas da amplitude do sonda (círculo aberto) e do bombeio (quadrado aberto) versus intensidade do bombeio para uma dessintonia nula do sonda $\delta_{L2} = 0$ e freqüência de análise $\Omega = \Gamma/6$. (Linhas sólidas utilizadas para mostrar o comportamento.) 92
4.19 Flutuações quânticas das quadraturas da amplitude e da fase dos feixes sonda e de bombeio, tomados com iguais intensidades, $I_1 = I_2 = 2,80\ mW/cm^2$. Freqüência de análise Ω igual a $\Gamma/6$. 93
4.20 Correlação entre as quadraturas da amplitude $c_{\theta=0,\phi=0}(\Omega = \Gamma/6)$ e da fase $c_{\theta=\pi/2,\phi=\pi/2}(\Omega = \Gamma/6)$ de cada campo para a situação correspondente à Fig. 4.19. 94
4.21 Produto das variâncias inferidas do feixe sonda para uma freqüência de análise $\Omega = \Gamma/6$. A correspondente correlação entre as quadraturas é mostrada na Fig. 4.20. 99
4.22 Aplicação do critério DGCZ na determinação do caráter da correlação entre os feixes sonda e de bombeio. Freqüência de análise Ω igual a $\Gamma/6$. 103
4.23 Dependência da correlação sonda-bombeio, e das flutuações quânticas das quadraturas da amplitude e da fase do feixe de bombeio, com a freqüência de análise para $\delta_{L2} = 0$. 105
4.24 Influência da freqüência de análise sobre o caráter quântico da correlação entre os feixes sonda e de bombeio. Dessintonia do sonda, $\delta_{L2} = 0$. 106

5.1 Esquema da montagem do diodo laser na configuração Littrow. 113

5.2 Potência do laser sonda vs. corrente de alimentação. A linha sólida representa um ajuste linear dos dados experimentais (símbolos quadrados). 114

5.3 Esquema da experiência da absorção saturada. IO: isolador ótico; LV: lâmina de vidro; E: espelho; D: fotodetector; OSC.: osciloscópio. 116

5.4 Espectro de absorção saturada do ^{85}Rb correspondente às transições $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 1, 2, 3\rangle$. O fundo sobre o qual estão localizados os picos deve sua origem ao alargamento Doppler. Potência do laser: 6,3$\times 10^{-1}$ mW. 118

5.5 Esquema da montagem experimental. DL1 e DL2: diodos laser em cavidade estendida; IO: isolador ótico; LV: lâmina de vidro; PBS: cubo divisor de feixes polarizador; $\lambda/2$: lâmina de meia onda; E: espelho; Rb: célula com rubídio; D1 e D2: fotodetectores; "+/-": circuito misturador; A.S.: analisador de espectros. 119

5.6 Curva de transparência induzida do feixe sonda. As potências incidentes dos feixes sonda e de bombeio são, respectivamente, 6,3$\times 10^{-1}$ mW e 9,9$\times 10^{-1}$ mW. 120

5.7 Espectro de ruído do feixe sonda na entrada da célula com vapor de rubídio. Potência da luz: 3,0 mW. 121

5.8 Espectro de ruído do feixe de bombeio na entrada da célula com vapor de rubídio para uma potência do feixe incidente igual a 3,0 mW. 122

5.9 Espectros de ruído da intensidade dos feixes sonda (a) e de bombeio (b) como função da dessintonia do sonda. O ruído eletrônico (traços inferiores) é menor que o shot noise (traço cinza) em aproximadamente 10 dB. Os fatores de Fano, (c) e (d), foram deduzidos a partir de (a) e (b). 123

5.10 Espectro de ruído (a) de intensidade do feixe sonda e fator de Fano (b) para um feixe de bombeio pouco intenso. Intensidade incidente do sonda: 13,3 mW/cm^2; intensidade incidente do bombeio: 4,4 $\times 10^{-1}$ mW/cm^2. 124

5.11 Fotovoltagem proporcional à intensidade do feixe sonda para valores diferentes da transmissão do filtro de densidade neutra, colocado na entrada da detecção homodina. Durante a medida, a intensidade do bombeio foi mantida constante. . . . 125

5.12 (a) Medida do ruído da soma (em preto) e da diferença (em cinza) das intensidades dos feixes sonda e de bombeio. A diferença observada entre as curvas é uma evidência da correlação entre as intensidades dos feixes (b). Intensidade incidente do feixe sonda: 7,5 mW/cm^2; intensidade incidente do feixe de bombeio: 7,8 mW/cm^2. 126
5.13 Esquema da montagem experimental para estudar as variâncias inferidas do feixe sonda. OL1(θ) e OL2(ϕ): osciladores locais para os feixes de bombeio e sonda, respectivamente; $\eta_0(\eta_{\pi/2})$: amplificador de ganho variável para a quadratura da amplitude (fase). 128

Lista de Tabelas

3.1 Correspondência entre os parâmetros dos modelos mecânico e elétrico. 32
3.2 Especificação dos componentes eletrônicos utilizados no experimento. 33

4.1 Parâmetros utilizados para calcular a resposta do meio atômico mostrada na Fig. 4.7. 70

C.1 $Q(J = 3/2, I = 5/2, F; J' = 1/2, I = 5/2, F')$ 143
C.2 $Q(J = 1/2, I = 5/2, F; J' = 1/2, I = 5/2, F')$ 143

Agradecimentos

A realização do presente trabalho foi possível graças à colaboração de muitas pessoas. Em primeiro lugar, gostaria de agradecer a ajuda e a confiança de meu orientador, Prof. Paulo A. Nussenzveig. A sua visão sobre a física, o seu conhecimento e entusiasmo mostrados durante as discussões sobre os problemas que estávamos tratando foram decisivos para a realização deste trabalho. A sua empolgação a cada resultado obtido também merece destaque.

Agradeço ao meu antigo orientador, Prof. Ricardo J. Horowicz por me oferecer a oportunidade de entrar nesse mundo fascinante que é a Ótica Quântica.

Agradeço aos Profs. Drs. Antonio F. R. de Toledo Piza, Arturo Lezama, Miled H. Y. Moussa e Nicim Zagury por aceitar o convite para formar parte da banca examinadora deste trabalho de tese.

O Prof. Geraldo Alexandre Barbosa foi sem dúvida uma pessoa marcante na minha formação. As experiências pessoal e profissional que adquiri durante o período que estivemos juntos no laboratório foram muito valiosas.

Gostaria de agradecer ao Prof. Antônio Zelaquett Khoury, da Universidade Federal Fluminense, por sua colaboração, disponibilidade e bom humor nos momentos difíceis do meu primeiro ano de doutoramento.

A colaboração estreita com a Profa. Maria Aparecida G. Martinez, da Universidade Presbiteriana Mackenzie de São Paulo, permitiu obter um dos resultados mais bonitos deste trabalho: o análogo clássico da transparência induzida por laser. Obrigado Cida pela alegria que você trazia ao nosso laboratório e porque sua participação foi muito valiosa para compreender vários aspectos importantes da transparência induzida.

A colaboração e as discusões com Marcelo França durante o pouco tempo que passou no nosso grupo foram de grande utilidade na conclusão e aprimoramento da teoria deste trabalho. Sua experiência e criticismo ajudaram a ressaltar a importância dos resultados obtidos. Obrigado Marcelo.

Agradeço aos colegas de laboratório pelos bons e não tão bons momentos que passamos juntos. Em particular, gostaria agredecer a Jacinto Esteves e Marcelo Martinelli por terem participado ativamente na minha iniciação nas

experiências do laboratório.

Durante minha primeira experiência de ótica quântica conheci a Silvia M. de Paula, pessoa que merece um agradecimento especial, por sua amizade sincera e seu apoio moral, que foram muito importantes para mim.

Agradeço a Luciano S. da Cruz e José G. Aguirre Gómez pela participação decisiva no estudo experimental deste projeto de pesquisa. Meus agradecimentos a S. Simionatto pelo suporte técnico.

Igualmente agradeço a Srta. Ednéia A. Rezende pelo carinho e disposição sempre que precisei dela. Agradeço a colaboração das pessoas da oficina mecânica, principalmente quero agradecer a assistência do Sr. Donato e de Márcio.

Agredeço o apoio dos membros da Comissão de Pós-graduação do Instituto.

Agradeço o apoio de toda minha familia, de meus avós Leonardo e Dulce Maria e, em particular, agradeço a minha filha e esposa pela solidaridade, compreensão e por saberem suportar pacientemente meu distanciamento durante a realização deste trabalho.

Finalmente, gostaria de agradecer o auxílio financiero da CAPES, do CNPq e da FAPESP. Este trabalho de tese foi realizado integralmente no Instituto de Física da Universidade de São Paulo.

A todos aqueles que esqueci involuntariamente, obrigado.

A minha filha Lucille

Resumo

Este trabalho apresenta uma contribuição ao estudo das flutuações quânticas dos feixes sonda e de bombeio na condição de transparência induzida por laser. Com esse estudo conseguimos observar nas flutuações dos campos uma manifestação do caráter coerente da interação dos átomos com os feixes. Para alcançar nosso objetivo, derivamos a teoria do fenômeno da transparência induzida tratando ambos feixes dentro do formalismo quântico. Com tal formulação, encontramos que a condição de transparência induzida corresponde a um estado de equilibrio dinâmico do sistema átomo – campo de bombeio – campo sonda onde, os átomos redistribuem os fótons entre os campos, correlacionando os mesmos e alterando, ao mesmo tempo, as propriedades estatísticas desses feixes. Utilizando dois critérios diferentes, mostramos que a correlação entre os feixes sonda e de bombeio é de natureza quântica, o que possibilita a aplicação desse sistema, por exemplo, na informação e computação quânticas.

Os resultados experimentais obtidos confirmaram as previsões teóricas em relação às flutuações quânticas dos campos, e à existência de uma correlação entre eles. Trata-se da primeira investigação experimental de propriedades estatísticas dos campos em transparência induzida. A correlação de intensidade medida é o primeiro passo para a observação de emaranhamento entre os feixes sonda e de bombeio na condição de transparência induzida.

Abstract

In this work we present a contribution to the study of quantum fluctuations of pump and probe fields in the Electromagnetically Induced Transparency (EIT) condition. We observed in the field's fluctuations evidence of the coherent character of the interaction between the atoms and the fields. To reach our purpose, the fields were treated quantum-mechanically in deriving the theory of the EIT phenomenon. Using this formulation, we concluded that the EIT condition corresponds to a state of dynamical equilibrium of the system atom – pump field – probe field, where the atoms redistribute the photons between both fields, correlating them and, at the same time, affecting their statistical properties. By means of two different criteria we showed that such a correlation is of quantum nature, making possible the application of this system in, for example, quantum information and quantum computation.

The theoretical predictions were corroborated by our experimental results regarding the quantum fluctuations and the existence of a correlation between the pump and probe fields. This is the first experiment to investigate statistical properties of the fields in EIT. The intensity correlation measured is the first step towards the observation of entanglement between the fields.

Capítulo 1

Introdução

A luz e suas propriedades têm chamado a atenção do Homem desde a antigüidade e o Sol, como fonte primária de luz, teve um papel importante, sendo uma prova de sua influência o culto a esse astro fundado pelo faraó Amenofis IV no ano 1370 (a.c.).

Esse interesse do ser humano pela luz começou a transformar-se em estudo sistemático na Grécia antiga, onde apareceram os "primeiros postulados" da ótica: a identidade entre a visão e a luz, e o caráter material da luz; idéias que encontramos desenvolvidas nos diálogos naturalistas de Platão.

A ótica clássica, como ela é conhecida hoje, tem seus fundamentos nos trabalhos de eminentes pensadores como Newton, Leibnitz, e Huygens que, em seu "Tratado sobre a Luz", criou a base da ótica geométrica.

No começo do século XX, as idéias revolucionárias de Planck mudaram a concepção do mundo material, e precisamente a luz (ou campo de radiação) e suas propriedades provocaram essa revolução na Física. Começava assim a era da Mecânica Quântica, e outras disciplinas entre as quais encontramos a Ótica Quântica.

O desenvolvimento da Ótica Quântica, além de permitir o estudo de propriedades intrínsecas da natureza da luz, possibilitou consolidar os conhecimentos sobre as novas fontes emissoras de luz, tais como os lasers e os diodos emissores de luz (LED). Por um lado, esses dispositivos permitiram o desenvolvimento de novas e interessantes aplicações tecnológicas que cobrem uma faixa ampla que vai desde a área médica, com a tomografia axial computarizada, até as telecomunicações empregando fibras óticas. Por outro lado, com o surgimento dos lasers, novas experiências foram possíveis e, em particular, na física atômica o impacto causado por esse dispositivo optoeletrônico é considerável.

O presente trabalho tem por objetivo o estudo das propriedades quânticas de dois feixes de luz laser que interagem com um meio atômico na condição de

transparência induzida. O fenômeno da transparência induzida, conhecido na literatura pela sigla EIT (Electromagnetically Induced Transparency), consiste na anulação da absorção de um feixe de luz laser (chamado habitualmente feixe sonda) por um meio atômico, quando sobre os átomos fazemos incidir outro feixe de luz laser (denominado feixe de bombeio).

O efeito físico que constitui a essência da transparência induzida é denominado aprisionamento coerente de população, e foi descoberto em 1976 por Gerardo Alzetta e colaboradores na Universidade de Pisa na Itália [1]. Esse experimento consistiu em observar a fluorescência emitida por átomos de sódio que interagem com um laser multimodo. Dez anos mais tarde, foi descoberta a possibilidade de observar o mesmo efeito em meios densos, empregando dois lasers monocromáticos com freqüências diferentes. Desta vez, os autores da experiência foram os cientistas russos Olga Kocharovskaya e Yakov Khanin do Instituto Politécnico de Leningrado [2]. Outro trabalho pioneiro sobre a transparência induzida foi reportado por Stephen Harris e colaboradores [3].

Desde então, as experiências realizadas de transparência induzida têm como objetivo principal o estudo da modificação das propriedades do meio atômico, o qual é feito analisando a intensidade média transmitida do feixe sonda. A nossa proposta consiste em estudar, teórica e experimentalmente, as flutuações quânticas, não só do feixe sonda, mas também do feixe de bombeio, cujas propriedades consideram-se inalteradas nesse tipo de experiências, pela grande maioria dos autores.

Primeiramente, no capítulo 2, começaremos introduzindo os conceitos fundamentais relacionados com as flutuações quânticas do campo eletromagnético. Como veremos neste capítulo, importantes propriedades do campo de radiação podem ser derivadas a partir do tratamento quântico do campo, tendo destaque a existência de flutuações de origem quântica, para um campo em estado de vácuo. Também no capítulo 2, apresentaremos um modelo para um feixe de luz laser propagante descrito quanticamente, que considera algumas propriedades reais da luz emitida por um dispositivo laser. Finalizando o capítulo, será apresentada a técnica experimental comumente utilizada para estudar as flutuações de um feixe de luz.

O capítulo seguinte será dedicado à apresentação de um análogo clássico da transparência induzida. Analisando os resultados obtidos com um tratamento totalmente quântico da interação coerente entre um átomo de três níveis e dois campos quantizados, fomos motivados a procurar uma analogia clássica da transparência induzida. Esse tratamento completamente clássico do problema permite entender a essência física do fenômeno da transparência induzida. O resultado teórico, obtido em um sistema físico formado por massas e molas, reproduz fielmente os resultados obtidos aplicando uma teoria

semiclássica (tratamento clássico dos campos) ao problema da interação entre os feixes sonda e de bombeio com o meio atômico. No final desse capítulo são mostrados os resultados experimentais obtidos com outro sistema, também clássico, neste caso dois circuitos osciladores elétricos RLC acoplados.

No capítulo 4 será desenvolvida a teoria quântica da transparência induzida em um meio atômico. Essa teoria será formulada empregando as equações quânticas de Langevin, ou equações de Heisenberg-Langevin, como também são conhecidas na literatura. O tratamento quântico dos campos possibilitará estudar suas flutuações e as implicações que podem ser derivadas a partir dessa consideração. Neste capítulo, o modelo de laser propagante introduzido no capítulo 2 será modificado para incluir outras propriedades da fonte do feixe. Essa modificação é necessária, pois de forma geral, o problema da interação de um meio atômico com feixes propagantes é tratado considerando que essa interação acontece no interior de uma cavidade e, no tratamento que será apresentado essa consideração não é utilizada.

Os primeiros resultados da teoria serão apresentados na seção das previsões teóricas do capítulo 4. Vários resultados originais importantes foram obtidos com o tratamento quântico dos feixes sonda e de bombeio. Em primeiro lugar, devemos mencionar a existência de excesso de ruído no espectro dos dois feixes, como uma manifestação explícita da coerência induzida no meio atômico por *ambos* feixes, na condição de transparência induzida. Outro lugar de destaque ocupa a correlação entre os feixes sonda e de bombeio, correlação que existe *unicamente* na situação correspondente à transparência induzida.

Utilizando os critérios das variâncias inferidas e de Duan-Giedke-Cirac-Zoller, mostramos que a correlação sonda-bombeio é de natureza quântica, o que possibilita a utilização desse sistema físico para aplicações tais como a teleportação, criptografia quântica, medidas quânticas não destrutivas (medidas QND), informação e computação quânticas. Dessa forma, a nossa abordagem do fenômeno da transparência induzida estabelece condições para as potenciais aplicações mencionadas, em um sistema que não é puro, ou seja, um sistema físico que está submetido à ação de um reservatório. Por outro lado, a alteração das propriedades estatísticas dos feixes na situação de transparência induzida coloca em xeque vários esquemas de teleportação propostos na literatura, baseados nesse fenômeno.

A comprovação experimental de algumas previsões teóricas é apresentada no capítulo 5. Esse estudo foi realizado em um vapor atômico do isótopo ^{85}Rb (rubídio), utilizando como feixes sonda e de bombeio duas fontes de luz laser independentes. Os resultados experimentais mostraram que, na condição de transparência induzida, os feixes sonda e de bombeio, além de apresentarem excesso de ruído na intensidade, estavam correlacionados. Esses resultados

estão de acordo com as previsões da teoria desenvolvida no capítulo 4.

Na última seção do capítulo 5 apresentamos o esquema de uma montagem experimental que pode ser empregada no estudo da correlação entre os feixes sonda e de bombeio. Essa montagem experimental necessitará dois lasers Ti:Sa, atualmente em preparação. Esses lasers serão utilizados como osciladores locais pois, em determinadas condições, eles são capazes de gerar um feixe de luz em estado coerente.

Capítulo 2

Flutuações Quânticas do Campo Eletromagnético

Introdução

Neste capítulo faremos uma revisão dos principais conceitos associados à descrição quântica do campo eletromagnético e suas flutuações. Também apresentaremos um modelo para um feixe laser expressando seu operador de campo elétrico em termos das envolventes lentamente variáveis do campo, definidas a partir dos operadores de aniquilação e criação de fótons.

Na seção 2.2 introduziremos os operadores de quadratura, e estudaremos a aplicação dos mesmos à análise das flutuações quânticas dos campos. Como casos particulares, veremos os estados de vácuo e coerente do campo de radiação e, brevemente, apresentaremos o estado comprimido e algumas de suas propriedades.

Por último, será apresentado o esquema de detecção homodina, método amplamente utilizado no estudo das flutuações quânticas dos campos.

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

No contexto da ótica clássica, um modo monocromático do campo eletromagnético, em um ponto $\vec{r}$ do espaço e no instante de tempo t, pode ser representado pelo vetor do campo elétrico

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{\mathcal{E}}_o(\vec{r})\ cos[\omega t + \varphi(\vec{r})]\ , \tag{2.1}$$

onde o vetor $\vec{\mathcal{E}}_o(\vec{r})$ determina a amplitude e a polarização do campo no ponto $\vec{r}$, ω define a freqüência ângular do modo e $\varphi(\vec{r})$ a fase.

Utilizando a identidade trigonométrica

$$cos(x+y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y) \ ,$$

a Eq.(2.1) pode ser reescrita introduzindo as variáveis de quadratura $\vec{E}_q(\vec{r})$ e $\vec{E}_p(\vec{r})$, definidas com relação a uma fase de referência

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_q(\vec{r})\ cos(\omega t) + \vec{E}_p(\vec{r})\ sen(\omega t) \ . \tag{2.2}$$

Essas variáveis são chamadas de quadraturas porque por meio delas o vetor do campo elétrico pode ser decomposto na base formada pelas funções ortogonais $cos(\omega t)$ e $sen(\omega t)$, como pode ser visto da Eq.(2.2).

Vários esquemas de quantização que permitem obter os operadores correspondentes às diferentes variáveis dinâmicas do campo eletromagnético.

De um modo geral, a quantização do campo eletromagnético tem como ponto de partida as equações de Maxwell da eletrodinâmica clássica. Resolvendo essas equações no espaço recíproco (espaço dos vetores de onda $\vec{k}$), a solução para a componente transversa do vetor do campo elétrico no "gauge" de Coulomb [4] pode ser escrita como[1]:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i\int d^3\vec{k}\sum_{\bar{\epsilon}\perp\vec{k}} \mathcal{E}_\omega\bar{\epsilon}\left(\alpha_\epsilon(\vec{k},t)\ e^{i\vec{k}\vec{r}} - \alpha^*_\epsilon(\vec{k},t)\ e^{-i\vec{k}\vec{r}}\right) \ , \tag{2.3}$$

onde $d^3\vec{k} = dk_x dk_y dk_z$, $\mathcal{E}_\omega$ e $\bar{\epsilon}$ são a amplitude do modo de freqüência ângular ω e o versor de polarização, respectivamente

O vetor $\vec{E}(\vec{r},t)$ representa a componente transversa do campo elétrico no espaço livre, caracterizado pelas relações

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r},t) &= 0 \ , \\ i\vec{k}\cdot\vec{\mathbb{E}}(\vec{k},t) &= 0 \ , \end{aligned} \tag{2.4}$$

válidas para qualquer $\vec{r}$ e $\vec{k}$, onde os vetores $\vec{E}(\vec{r},t)$ e $\vec{\mathbb{E}}(\vec{k},t)$ estão relacionados mediante a transformada de Fourier espacial

$$\vec{\mathbb{E}}(\vec{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int d^3\vec{r}\ \vec{E}(\vec{r},t)\ e^{-i\vec{k}\vec{r}} \ . \tag{2.5}$$

A Eq.(2.3) descreve um campo multimodo no espaço livre com uma variação contínua do vetor de onda $\vec{k}$.

[1] Aquelas expressões matemáticas onde não sejam especificados os limites de integração, deve supor-se que essa operação é realizada no intervalo $(-\infty,\ +\infty)$.

As variáveis

$$\vec{\alpha}(\vec{k},t) = \sum_{\epsilon} \bar{\epsilon}\, \alpha_{\epsilon}(\vec{k},t) \ ,$$

definidas pela relação[2]

$$\vec{\alpha}(\vec{k},t) \equiv -i\frac{1}{2\,\mathcal{N}(|\vec{k}|)}\left[\vec{\mathbb{E}}(\vec{k},t) - \frac{c\vec{k}}{|\vec{k}|} \times \vec{\mathbb{B}}(\vec{k},t)\right] \ , \tag{2.6}$$

recebem a denominação de *variáveis normais*, e por meio delas é possível expressar qualquer variável dinâmica do campo eletromagnético.

Na definição da variável normal, $\mathcal{N}(|\vec{k}|)$ é um coeficiente de normalização igual a

$$\mathcal{N}(|\vec{k}|) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \ ,$$

onde ϵ_0 e $\hbar$ são a permissividade dielétrica do vácuo e a constante de Planck, respectivamente.

Apesar da importância das variáveis normais, existem algumas dificuldades relacionadas com a definição de suas grandezas quânticas correspondentes. Em particular, o intento de interpretar $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$ como a "função de onda" de uma partícula no espaço recíproco, e neste caso estamos falando do fóton, entra em contradição com a impossibilidade de construir um operador de posição para o fóton, que daria a idéia de localização dessa partícula. Por outro lado, na presença de partículas carregadas (termo de fonte diferente de zero na equação de evolução temporal de $\vec{\alpha}(\vec{k},t)$), obteríamos para essa variável uma equação de Schrödinger inomogênea. De fato, esses problemas são resolvidos quantizando o próprio campo eletromagnético, e introduzindo os fótons como excitações elementares do campo quantizado.

É comum considerar que o campo eletromagnético está contido no interior de um cubo de volume V e que satisfaz condições de fronteira periódicas sobre os lados do cubo. Nessa situação, a integral sobre os vetores de onda $\vec{k}$ se reduz a uma somatória sobre todos seus possíveis valores, determinados pelas condições de contorno. Dessa forma, para uma função qualquer $f(\vec{k},\bar{\epsilon})$ teremos a correspondência

$$\int d^3\vec{k} \sum_{\bar{\epsilon}\perp\vec{k}} f(\vec{k},\bar{\epsilon}) \leftrightarrow \sum_{i} \frac{(2\pi)^3}{V} f(\vec{k}_i,\bar{\epsilon}_i) \ , \tag{2.7}$$

[2] $\vec{\mathbb{B}}(\vec{k},t)$ é a variável do espaço recíproco associada ao campo magnético.

que aplicada ao vetor do campo elétrico dado por (2.3) permite encontrar

$$\vec{E}(\vec{r},t) = i\sum_i \mathcal{E}_{\omega_i}\bar{\epsilon}_i \left(\alpha_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t)\ e^{i\vec{k}_i\vec{r}} - \alpha^*_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t)\ e^{-i\vec{k}_i\vec{r}}\right) , \tag{2.8}$$

com a amplitude $\mathcal{E}_{\omega_i}$ dada por

$$\mathcal{E}_{\omega_i} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_i}{2\epsilon_0 V}} . \tag{2.9}$$

Associando à variável normal $\alpha_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}$ ($\alpha^*_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}$) o operador $\hat{a}_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}$ ($\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}$), todas as funções que dependem das variáveis normais se transformam em operadores e, em particular para a componente transversa do vetor do campo elétrico, teremos

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = i\sum_i \mathcal{E}_{\omega_i}\bar{\epsilon}_i \left(\hat{a}_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t)\ e^{i\vec{k}_i\vec{r}} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t)\ e^{-i\vec{k}_i\vec{r}}\right) . \tag{2.10}$$

Para os operadores $\hat{a}_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t)$ e $\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t)$, chamados de aniquilação e criação de fótons respectivamente, as seguintes relações de comutação são válidas

$$[\hat{a}_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t),\ \hat{a}_{\vec{k}_j\bar{\epsilon}_j}(t)] = [\hat{a}^\dagger_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t),\ \hat{a}^\dagger_{\vec{k}_j\bar{\epsilon}_j}(t)] = 0 , \tag{2.11}$$

$$[\hat{a}_{\vec{k}_i\bar{\epsilon}_i}(t),\ \hat{a}^\dagger_{\vec{k}_j\bar{\epsilon}_j}(t)] = \delta_{ij} , \tag{2.12}$$

de maneira que, para um estado $|\Psi\rangle$ do modo $\vec{k}\bar{\epsilon}$ do campo eletromagnético, a quantidade

$$\langle\Psi|\hat{a}^\dagger_{\vec{k}\bar{\epsilon}}(t)\ \hat{a}_{\vec{k}\bar{\epsilon}}(t)|\Psi\rangle , \tag{2.13}$$

representa o número médio de fótons, no volume V, do referido modo no instante de tempo t.

Aproximação de onda quase-monocromática para um feixe laser

As relações (2.10) - (2.12) definem a quantização do campo eletromagnético no interior de um certo volume V (chamado volume de quantização), e descrevem apropriadamente as experiências de ótica quântica em cavidades ocupadas por modos estacionários do campo. No entanto, a grande maioria das experiências realizadas em ótica quântica utiliza lasers, cuja descrição teórica apropriada é dada por modos propagantes do campo eletromagnético.

Para o caso em que não existem partículas carregadas (campo livre), um feixe laser pode ser representado pelo operador do campo elétrico $\widehat{\vec{E}}(\vec{r},t)$ dado pela expressão

$$\widehat{\vec{E}}(\vec{r},t) = i\mathcal{E}_\omega \bar{\epsilon}\left(\hat{a}_{\vec{k}\bar{\epsilon}}(0)\ e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - \hat{a}^\dagger_{\vec{k}\bar{\epsilon}}(0)\ e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) , \tag{2.14}$$

que descreve o laser como uma onda plana viajante monocromática[3], e a constante $\mathcal{E}_\omega$ define o campo elétrico por fóton.

No entanto, um modelo realista do laser deve considerar que o feixe de luz emitido por esse dispositivo tem uma seção transversal finita $\mathcal{S}$, e não é perfeitamente monocromático. De maneira que, se nós considerarmos que o campo elétrico associado ao feixe de luz laser possui uma largura espectral finita, digamos γ, em torno de uma freqüência central ω_L, poderemos escrever o operador do campo elétrico como uma superposição de ondas planas da forma

$$\widehat{\vec{E}}(\vec{r},t) = i\int \frac{d\omega}{2\pi}\mathcal{E}_\omega \bar{\epsilon}\left(F(\omega)\ \hat{a}_\omega\ e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)} - F^*(\omega)\ \hat{a}^\dagger_\omega\ e^{-i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}\right) , \tag{2.15}$$

onde, através da função normalizada $F(\omega)$, levamos em conta a não-monocromaticidade perfeita do feixe de luz emitido pelo laser e, o índice discreto $\vec{k}\bar{\epsilon}$ dos operadores de aniquilação e criação na Eq.(2.14), que especifica o modo do campo de radiação, é substituído pelo índice de variação contínua ω. Os operadores de aniquilação $\hat{a}_\omega$ e criação $\hat{a}^\dagger_\omega$ que, conjuntamente com a função $F(\omega)$, definem o coeficiente da expansão do campo em ondas planas, obedecem as relações de comutação

$$[\hat{a}_\omega,\ \hat{a}_{\omega'}] = [\hat{a}^\dagger_\omega,\ \hat{a}^\dagger_{\omega'}] = 0 , \tag{2.16}$$

$$[\hat{a}_\omega,\ \hat{a}^\dagger_{\omega'}] = 2\pi\ \delta(\omega-\omega') . \tag{2.17}$$

Considerando apenas a dependência temporal do campo, suficiente para o estudo das flutuações no estado estacionário, a Eq.(2.15) pode ser reescrita como

$$\widehat{\vec{E}}(t) = i\int \frac{d\omega}{2\pi}\mathcal{E}_\omega \bar{\epsilon}\left(F(\omega)\ \hat{a}_\omega\ e^{-i\omega t} - F^*(\omega)\ \hat{a}^\dagger_\omega\ e^{i\omega t}\right) . \tag{2.18}$$

Os efeitos da propagação do feixe são levados em conta na dependência temporal e, conforme veremos mais adiante, eles podem ser considerados

[3]Os efeitos associados à estrutura transversa do feixe não serão estudados neste trabalho. Para uma descrição mais realista do laser ver, por exemplo, [5].

expressando as soluções das equações diferenciais com relação ao tempo em função das condições iniciais ou finais do problema.

Assumindo que $\mathcal{E}_\omega$ varia pouco no intervalo de freqüências $[\omega_L - \frac{\gamma}{2},\ \omega_L + \frac{\gamma}{2}]$, podemos tomar $\mathcal{E}_\omega \approx \mathcal{E}_{\omega=\omega_L} = \mathcal{E}_{0\omega_L}$, de forma tal que

$$\widehat{\vec{E}}(t) = \mathcal{E}_{0\omega_L}\bar{\epsilon}\Big(e^{-i\omega_L t}\int \frac{d\Omega}{2\pi} iF(\omega_L+\Omega)\ \hat{a}_{\omega_L+\Omega}\ e^{-i\Omega t} - \\ - e^{i\omega_L t}\int \frac{d\Omega}{2\pi} iF^*(\omega_L+\Omega)\ \hat{a}^\dagger_{\omega_L+\Omega}\ e^{i\Omega t}\Big)\ , \tag{2.19}$$

onde $\Omega = \omega - \omega_L$. É importante destacar que, como as freqüências ω e ω_L estão no domínio ótico, o valor de Ω corresponde ao domínio das radiofreqüências ($\Omega \ll \omega,\ \omega_L$).

Levando em conta que:

$$\int \frac{d\Omega}{2\pi} iF^*(\omega_L+\Omega)\ \hat{a}^\dagger_{\omega_L+\Omega}\ e^{i\Omega t} = \{\Omega \to -\Omega\} = \\ = -\int_{+\infty}^{-\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} iF^*(\omega_L-\Omega)\ \hat{a}^\dagger_{\omega_L-\Omega}\ e^{-i\Omega t} = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} iF^*(\omega_L-\Omega)\ \hat{a}^\dagger_{\omega_L-\Omega}\ e^{-i\Omega t}\ , \tag{2.20}$$

a Eq.(2.19) pode ser escrita da forma seguinte

$$\widehat{\vec{E}}(t) = \mathcal{E}_{0\omega_L}\bar{\epsilon}\Big(e^{-i\omega_L t}\int \frac{d\Omega}{2\pi} iF(\omega_L+\Omega)\ \hat{a}_{\omega_L+\Omega}\ e^{-i\Omega t} + \\ + e^{i\omega_L t}\int \frac{d\Omega}{2\pi}\Big(-iF^*(\omega_L-\Omega)\ \hat{a}^\dagger_{\omega_L-\Omega}\Big)\ e^{-i\Omega t}\Big)\ . \tag{2.21}$$

Definindo as envolventes lentamente variáveis do campo por meio das transformadas inversas de Fourier

$$\hat{A}(t) \equiv \int \frac{d\Omega}{2\pi}\hat{A}(\Omega)e^{-i\Omega t} \tag{2.22}$$

e

$$\hat{A}^\dagger(t) \equiv \int \frac{d\Omega}{2\pi}\hat{A}^\dagger(\Omega)e^{-i\Omega t}\ , \tag{2.23}$$

onde[4]

$$\hat{A}(\Omega) \equiv iF(\omega_L+\Omega)\ \hat{a}_{\omega_L+\Omega}\ ,\ \hat{A}^\dagger(\Omega) \equiv -iF^*(\omega_L-\Omega)\ \hat{a}^\dagger_{\omega_L-\Omega}\ , \tag{2.24}$$

[4]Notemos que, a partir das definições (2.24), teremos: $\left(\hat{A}(\Omega)\right)^\dagger = \hat{A}^\dagger(-\Omega)$.

encontramos finalmente para o operador do campo elétrico a expressão

$$\widehat{\vec{E}}(t) = \mathcal{E}_{0\omega_L}\bar{\epsilon}\left(e^{-i\omega_L t}\hat{A}(t) + e^{i\omega_L t}\hat{A}^\dagger(t)\right) . \tag{2.25}$$

Em termos dos operadores $\hat{A}(t)$ e $\hat{A}^\dagger(t)$, para um estado arbitrário do campo $|\Psi\rangle$, a grandeza $\langle\Psi|\hat{A}^\dagger(t)\ \hat{A}(t)|\Psi\rangle$ determina o número médio de fótons no volume $V = \mathcal{S}c\tau$, onde c, $\mathcal{S}$ e τ são a velocidade da luz, a seção tranversal e o comprimento temporal do feixe (extensão espacial do feixe dividido pela velocidade da luz), respectivamente.

Relação de comutação

Calculemos então a relação de comutação que devem obedecer os operadores $\hat{A}(t)$ e $\hat{A}^\dagger(t)$, definidos pelas relações (2.22) e (2.23). Nesse caso, o comutador de dois tempos será

$$\begin{aligned}[\hat{A}(t),\ \hat{A}^\dagger(t')] &= [\int \frac{d\Omega}{2\pi}e^{-i\Omega t}\hat{A}(\Omega),\ \int \frac{d\Omega'}{2\pi}e^{-i\Omega' t'}\hat{A}^\dagger(\Omega')] = \\ &= \int \frac{d\Omega}{2\pi}\int \frac{d\Omega'}{2\pi}e^{-i(\Omega t+\Omega' t')}F(\omega_L+\Omega)F^*(\omega_L-\Omega')\times \\ &\qquad \times[\hat{a}_{\omega_L+\Omega},\ \hat{a}^\dagger_{\omega_L-\Omega'}] ,\end{aligned} \tag{2.26}$$

que, utilizando o comutador (2.17), toma a forma

$$[\hat{A}(t),\ \hat{A}^\dagger(t')] = \int \frac{d\Omega}{2\pi}e^{-i\Omega(t-t')}|F(\omega_L+\Omega)|^2 . \tag{2.27}$$

Levando em conta que os estudos teóricos e experimentais sobre os lasers têm mostrado que a distribuição espectral da intensidade dos mesmos tem um perfil lorentziano [6], similar ao mostrado na Fig. 2.1, uma escolha natural para a função $F(\omega)$ é

$$|F(\omega)|^2 = \frac{\gamma}{(\omega_L-\omega)^2+(\frac{1}{2}\gamma)^2} , \tag{2.28}$$

o que nos permite encontrar a seguinte expressão para o comutador

$$[\hat{A}(t),\ \hat{A}^\dagger(t')] = e^{-\frac{\gamma}{2}|t-t'|} . \tag{2.29}$$

A relação (2.29), além de expressar o fato do campo não ser perfeitamente monocromático, indica que dois valores da amplitude do campo tomados em instantes de tempo diferentes, t e t', estarão correlacionados se o intervalo de tempo $|t-t'|$ for da ordem de $1/\gamma$. Em particular, para qualquer instante de tempo t

$$[\hat{A}(t),\ \hat{A}^\dagger(t)] = 1 . \tag{2.30}$$

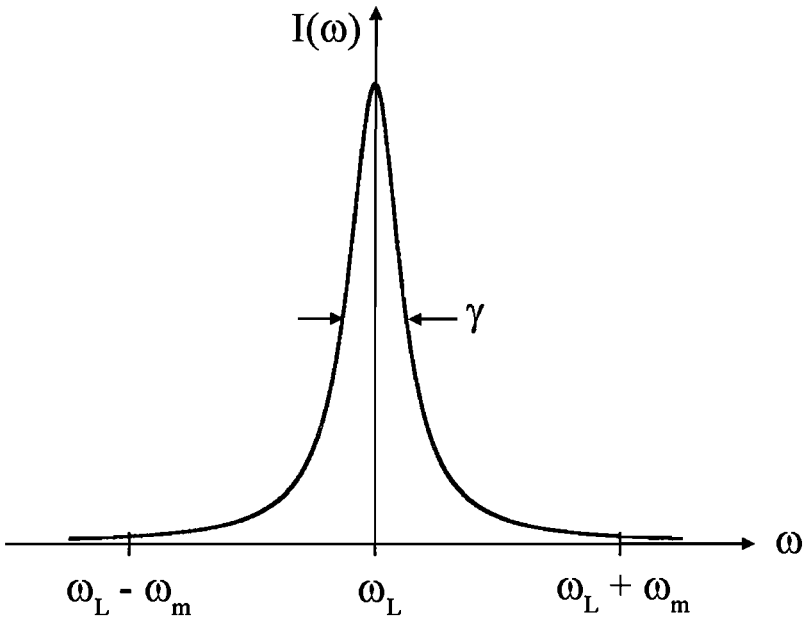

Figura 2.1: Distribuição espectral da intensidade de um laser.

2.2 Operadores de Quadratura

Uma vez definida a relação de comutação para os operadores $\hat{A}(t)$ e $\hat{A}^{\dagger}(t)$, estamos em condições de estudar diferentes propriedades do modo laser descrito pelo operador (2.25). Em particular, de maneira análoga à definição das variáveis de quadratura $\vec{E}_q$ e $\vec{E}_p$, na seção 2.1, utilizando a fórmula de Euler para as funções exponenciais que aparecem na Eq.(2.25), encontramos

$$\widehat{\vec{E}}(t) = \mathcal{E}_{0\omega_L}\bar{\epsilon}\Big[\left(\hat{A}^{\dagger}(t) + \hat{A}(t)\right) cos(\omega_L t) + i\left(\hat{A}^{\dagger}(t) - \hat{A}(t)\right) sen(\omega_L t)\Big] . \tag{2.31}$$

Definindo o operador de quadratura generalizado:

$$\hat{Y}_{\theta}(t) \equiv \hat{A}(t)e^{-i\theta} + \hat{A}^{\dagger}(t)e^{i\theta} , \tag{2.32}$$

a Eq.(2.31) pode ser escrita da seguinte forma

$$\widehat{\vec{E}}(t) = \mathcal{E}_{0\omega_L}\bar{\epsilon}\left(\hat{Y}_0(t)\ cos(\omega_L t) + \hat{Y}_{\pi/2}(t)\ sen(\omega_L t)\right) , \tag{2.33}$$

onde os operadores

$$\hat{Y}_0(t) \equiv \hat{A}^{\dagger}(t) + \hat{A}(t) \tag{2.34}$$

e

$$\hat{Y}_{\pi/2}(t) \equiv i\left(\hat{A}^{\dagger}(t) - \hat{A}(t)\right) , \tag{2.35}$$

corresponentes às variáveis de quadratura clássicas $\vec{E}_q$ e $\vec{E}_p$, são denominados *operador da quadratura amplitude* e *operador da quadratura fase*, respectivamente.

Relação de comutação para os operadores de quadratura

Esses operadores de quadratura devem satisfazer a seguinte relação de comutação, derivada a partir da relação (2.30) e das definições (2.34) e (2.35)

$$[\hat{Y}_0(t),\ \hat{Y}_{\pi/2}(t)] = 2i\ . \tag{2.36}$$

Analisando as definições desses operadores e o comutador (2.36), vemos que os operadores de quadratura são operadores hermitianos que representam duas grandezas físicas canonicamente conjugadas.

Apesar desses operadores serem hermitianos, o fato do comutador (2.36) ser diferente de zero impossibilita uma medida simultânea deles com precisão absoluta.

Por outro lado, a não-comutatividade dos operadores de quadratura $\hat{Y}_0(t)$ e $\hat{Y}_{\pi/2}(t)$ é uma conseqüência direta da não-comutatividade dos operadores $\hat{A}(t)$ e $\hat{A}^{\dagger}(t)$.

Relação de incerteza para os operadores de quadratura

Utilizando o resultado conhecido da mecânica quântica que determina o produto das dispersões de dois operadores hermitianos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, em um estado quântico dado [7],

$$\Delta B \Delta C \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{B},\ \hat{C}]\rangle| , \tag{2.37}$$

encontramos para os operadores de quadratura a seguinte desigualdade ou princípio de incerteza de Heisenberg

$$\Delta Y_0 \Delta Y_{\pi/2} \geq 1 , \tag{2.38}$$

onde a dispersão ΔB de uma grandeza física B, que tem associada o operador $\hat{B}$, é definida como

$$\Delta B = \sqrt{\langle\left(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle\right)^2\rangle} . \tag{2.39}$$

2.2.1 Espectro de ruído dos operadores de quadratura

Uma das principais conseqüências do fato dos operadores de quadratura não comutarem é a existência de flutuações de origem quântica nas quadraturas do campo no estado de vácuo $|0\rangle$. Nesse caso, para o operador da quadratura da amplitude teremos

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{Y}_0^2|0\rangle &= \langle 0|\hat{A}^2 + \hat{A}^{\dagger 2} + 2\hat{A}^\dagger\hat{A} + 1|0\rangle = 1 \ , \\ \langle 0|\hat{Y}_0|0\rangle &= \langle 0|\hat{A} + \hat{A}^\dagger|0\rangle = 0 \ , \end{aligned} \tag{2.40}$$

e portanto a variância desse operador será

$$\langle 0|(\Delta\hat{Y}_0)^2|0\rangle = \langle 0|\hat{Y}_0^2|0\rangle - \langle 0|\hat{Y}_0|0\rangle^2 = 1 \ . \tag{2.41}$$

De forma análoga, para o operador da quadratura da fase encontramos

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{Y}_{\pi/2}^2|0\rangle &= -\langle 0|(\hat{A}^2 + \hat{A}^{\dagger 2} - 2\hat{A}^\dagger\hat{A} - 1)|0\rangle = 1 \ , \\ \langle 0|\hat{Y}_{\pi/2}|0\rangle &= i\langle 0|\hat{A}^\dagger - \hat{A}|0\rangle = 0 \ , \end{aligned} \tag{2.42}$$

dando como resultado a variância

$$\langle 0|(\Delta\hat{Y}_{\pi/2})^2|0\rangle = \langle 0|\hat{Y}_{\pi/2}^2|0\rangle - \langle 0|\hat{Y}_{\pi/2}|0\rangle^2 = 1 \ . \tag{2.43}$$

De modo que, um campo no estado de vácuo possui uma intensidade média nula, e iguais flutuações, diferentes de zero, nas quadraturas. Essa flutuação, ou ruído quântico do campo no estado de vácuo, é conhecida na literatura como *shot noise* ou *limite quântico padrão.*

Além das propriedades do vácuo acima mencionadas, esse estado do campo eletromagnético é um estado de incerteza mínima pois, a partir de (2.41) e (2.43), verificamos a igualdade

$$\Delta Y_0 \Delta Y_{\pi/2} = 1 \ .$$

Estudemos agora o espectro de ruído do campo definindo o operador de flutuação da quadratura generalizada no espaço das freqüências $\delta\hat{Y}_\theta(\Omega)$ da forma seguinte[5]

$$\delta\hat{Y}_\theta(\Omega) = \hat{Y}_\theta(\Omega) - \langle\hat{Y}_\theta(\Omega)\rangle \ . \tag{2.44}$$

A função de autocorrelação associada a essa grandeza é

$$\langle\delta\hat{Y}_\theta(\Omega)\ \delta\hat{Y}_\theta(\Omega')\rangle = \langle\left(\delta\hat{A}(\Omega)e^{-i\theta} + \delta\hat{A}^\dagger(\Omega)e^{i\theta}\right)\left(\delta\hat{A}(\Omega')e^{-i\theta} + \delta\hat{A}^\dagger(\Omega')e^{i\theta}\right)\rangle \ . \tag{2.45}$$

[5]Para qualquer operador $\hat{O}$ definiremos o correspondente operador de flutuação como: $\delta\hat{O} = \hat{O} - \langle\hat{O}\rangle$.

Efetuando o produto indicado em (2.45) encontramos

$$\langle \delta\hat{Y}_\theta(\Omega)\ \delta\hat{Y}_\theta(\Omega')\rangle = \langle \delta\hat{A}(\Omega)\delta\hat{A}(\Omega')\rangle e^{-2i\theta} + \langle \delta\hat{A}(\Omega)\delta\hat{A}^\dagger(\Omega')\rangle + \\ + \langle \delta\hat{A}^\dagger(\Omega)\delta\hat{A}(\Omega')\rangle + \langle \delta\hat{A}^\dagger(\Omega)\delta\hat{A}^\dagger(\Omega')\rangle e^{2i\theta} \ . \tag{2.46}$$

A função de autocorrelação do operador de quadratura generalizado (2.46) pode ser reescrita introduzindo a representação matricial do campo. Primeiramente, vamos definir o vetor coluna

$$\widehat{\mathbf{A}}(\Omega) \equiv \left(\hat{A}(\Omega),\ \hat{A}^\dagger(\Omega)\right)^T \ , \tag{2.47}$$

onde a operação $(\dots)^T$ representa o cálculo do transposto de $(\dots)$, e o vetor adjunto de $\widehat{\mathbf{A}}(\Omega)$ é dado por

$$(\widehat{\mathbf{A}}(\Omega))^\dagger = \left(\hat{A}^\dagger(-\Omega),\ \hat{A}(-\Omega)\right) \ . \tag{2.48}$$

Empregando as expressões anteriores, podemos definir a matriz de covariância do campo $\mathbf{C}(\Omega)$ por meio da relação [8]

$$\langle \delta\widehat{\mathbf{A}}(\Omega)\ \delta\widehat{\mathbf{A}}^\dagger(\Omega')\rangle = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')\ \mathbf{C}(\Omega) \ . \tag{2.49}$$

De maneira explícita, a matriz de covariância tem a forma

$$\mathbf{C}(\Omega) = \begin{pmatrix} \langle \delta\hat{A}(\Omega)\delta\hat{A}^\dagger(-\Omega)\rangle & \langle \delta\hat{A}(\Omega)\delta\hat{A}(-\Omega)\rangle \\ \langle \delta\hat{A}^\dagger(\Omega)\delta\hat{A}^\dagger(-\Omega)\rangle & \langle \delta\hat{A}^\dagger(\Omega)\delta\hat{A}(-\Omega)\rangle \end{pmatrix} \ ,$$

onde os valores médios $\langle\dots\rangle$ são calculados no estado específico do campo. A matriz de covariância fornece uma forma compacta de representar o estado do campo eletromagnético.

Finalmente, fazendo uso da representação matricial, a função de autocorrelação (2.46), que determina as flutuações do operador de quadratura generalizado do campo, é expressada como

$$\langle \delta\hat{Y}_\theta(\Omega)\ \delta\hat{Y}_\theta(\Omega')\rangle = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')\Big([\mathbf{C}(\Omega)]_{11} + [\mathbf{C}(\Omega)]_{22} + \\ +2\ \Re e\{[\mathbf{C}(\Omega)]_{12}\ e^{-i2\theta}\}\Big) \ , \tag{2.50}$$

e portanto a densidade espectral do ruído do operador $\hat{Y}_\theta(t)$, definida como a transformada de Fourier da função de autocorrelação, é (ver apêndice A)

$$S(\Omega) = [\mathbf{C}(\Omega)]_{11} + [\mathbf{C}(\Omega)]_{22} + 2\ \Re e\{[\mathbf{C}(\Omega)]_{12}\ e^{-i2\theta}\} \ . \tag{2.51}$$

As grandezas $[\mathbf{C}(\Omega)]_{nm}$, onde, n e m tomam os valores 1 e 2, são os elementos n m da matriz de covariância.

Em particular, para um campo em estado de vácuo

$$\mathbf{C}_{vácuo}(\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

de modo que sua variância ou espectro de ruído será

$$V_{vácuo}(\Omega) = \int \frac{d\Omega'}{2\pi} \langle \delta\hat{Y}_\theta(\Omega)\ \delta\hat{Y}_\theta(\Omega')\rangle = 1 \ . \tag{2.52}$$

A partir desse resultado, vemos que um campo em estado de vácuo possui um espectro de ruído plano, independente da freqüência de análise Ω, e igual para todas as quadraturas.

2.2.2 Estados coerente e comprimido

Outra classe interessante de estados do campo eletromagnético são os chamados estados coerentes, introduzidos na ótica quântica por Glauber [9]. Esses estados são definidos como autoestados do operador de aniquilação

$$\hat{A}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \ , \tag{2.53}$$

onde α é um número complexo, e a importância deles deve-se ao fato de serem os estados quânticos que melhor descrevem um feixe de luz emitido por um laser trabalhando muito acima do limiar de oscilação.

Para uma discussão detalhada sobre os estados coerentes pode consultar-se a Ref. [10], onde são analisadas algumas propriedades e é discutida a representação gráfica desses estados no espaço de fase. Dessa forma, alguns dos resultados que seguem serão apresentados sem demonstração.

Utilizando a definição (2.53), encontramos que a matriz de covariância para um estado coerente é

$$\mathbf{C}_{coerente}(\Omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

de modo que

$$V_{coerente}(\Omega) = 1 \ . \tag{2.54}$$

Por conseguinte, os estados coerentes também são estados de incerteza mínima e possuem as mesmas flutuações em todas as quadraturas.

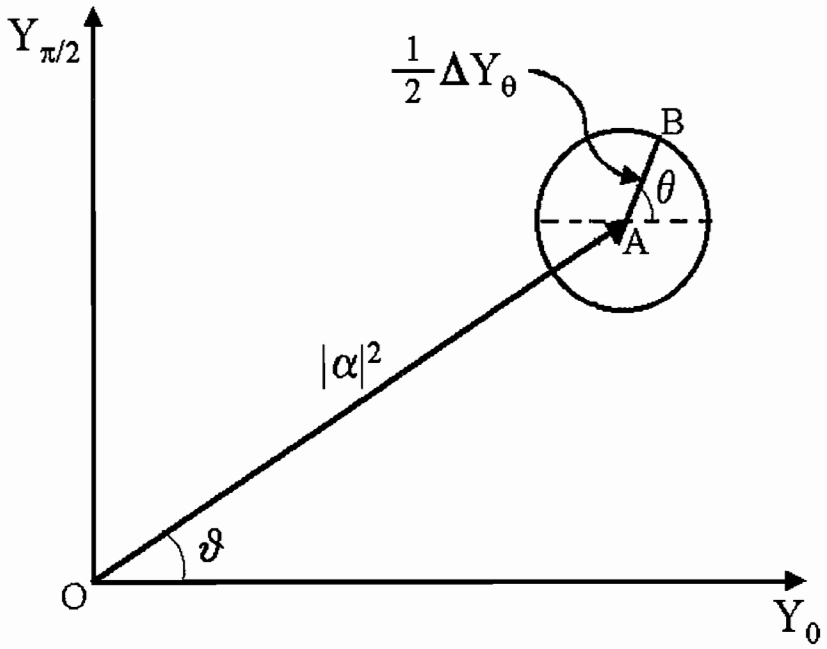

Figura 2.2: Representação de um estado coerente no espaço de fase.

Na Fig. 2.2 é mostrada a representação de um estado coerente $|\alpha = |\alpha|e^{i\vartheta}\rangle$ no espaço de fase $\{Y_0,\ Y_{\pi/2}\}$.

O comprimento do segmento $\overline{OA}$ está determinado pela intensidade do campo, que em termos do número médio de fótons no estado coerente é $|\alpha|^2$. A dispersão da quadratura generalizada Y_θ é representada pelo segmento $\overline{AB}$, e ela é igual para qualquer ângulo θ. O valor 1 é conseqüência da Eq.(2.54).

Uma aplicação prática e direta do resultado (2.54) é a utilização do espectro de ruído gerado por um feixe de luz laser em estado coerente, para calibrar o espectro de ruído da luz emitida por uma outra fonte. Suponhamos que $V_f(\Omega)$ é a variância da quadratura que precisa ser caracterizada. Então, se

$$V_f(\Omega) > 1\ , \tag{2.55}$$

fala-se que a quadratura apresenta excesso de ruído na freqüência Ω e se

$$V_f(\Omega) < 1\ , \tag{2.56}$$

então estamos em presença de uma fonte de luz com compressão de ruído na quadratura estudada.

A diferença dos estados coerentes, existem alguns estados da radiação do campo eletromagnético que possuem ruído em uma quadratura inferior

ao limite quântico padrão (2.52), sendo que a quadratura canonicamente conjugada apresenta excesso de ruído na mesma freqüência. Se o produto das incertezas de cada quadratura for igual a 1, então teremos um estado comprimido de incerteza mínima. Se a compressão de ruído acontece, por exemplo, na quadratura da amplitude, então o estado do campo chama-se subpoissoniano.

Matematicamente, um estado comprimido $|\alpha, \xi\rangle$ é o resultado da ação do operador de deslocamento [9]

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{A}^\dagger - \alpha^* \hat{A}) \ , \tag{2.57}$$

sobre o estado de vácuo seguido da ação do operador de compressão [10]

$$\hat{S}(\xi) = \exp(\frac{1}{2}\xi^* \hat{A}^2 - \frac{1}{2}\xi \hat{A}^{\dagger 2}) \ , \tag{2.58}$$

onde $\xi = r \exp(i\phi)$. Assim,

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)|0\rangle \ . \tag{2.59}$$

Utilizando as propriedades dos operadores de deslocamento e compressão, a matriz de covariância para um campo no estado comprimido tem a forma

$$\mathbf{C}_{comp.}(\Omega) = \begin{pmatrix} cosh^2(r) & \frac{1}{2}senh(2r)\ e^{i\phi} \\ \frac{1}{2}senh(2r)\ e^{-i\phi} & senh^2(r) \end{pmatrix} \ ,$$

onde os parâmetros r e ϕ determinam o grau e a quadratura de compressão, respectivamente. A matriz de covariância anterior descreve um campo comprimido de banda larga, visto que ela não depende da freqüência Ω.

2.3 Medida das Propriedades Estatísticas do Campo Eletromagnético

Como vimos, uma forma de caracterizar o estado do campo eletromagnético basea-se no estudo das flutuações do operador de quadratura generalizado do campo $\hat{Y}_\theta(t)$. Do ponto de vista experimental, nós temos acesso às flutuações do campo mediante o uso do analisador de espectros [11, 12], equipamento de alta complexidade, cujo funcionamento está fundamentado no batimento do sinal de fotocorrente gerado pelo feixe de luz incidente no detector, com o sinal de seu oscilador local interno.

A operação de batimento, conhecida na literatura técnica como detecção heterodina (no caso do analisador) leva o sinal a ser estudado, do domínio

temporal ao domínio da freqüência, realizando assim a transformada de Fourier do mesmo e permitindo obter de maneira direta a densidade espectral do ruído $S(\Omega)$ [13].

De maneira similar, o operador de quadratura generalizado do campo é obtido mediante o batimento ótico do feixe de luz a ser analisado com um feixe de luz intenso em estado coerente, que realiza a função de oscilador local, e que tem a mesma freqüência ou comprimento de onda que o feixe de luz estudado. Essa técnica experimental, chamada detecção homodina [14], é comumente empregada no estudo do ruído de quadratura do campo em ótica quântica.

2.3.1 Detecção homodina

Basicamente, o esquema de detecção homodina é formado por um cubo divisor de feixes caracterizado pelos coeficientes de transmissão e reflexão t e r, respectivamente, tais que

$$|r|^2 + |t|^2 = 1 \ . \tag{2.60}$$

Como pode ser observado na Fig. 2.3, os feixes após serem combinados no divisor de feixes DF, são detectados pelos fotodetectores $D1$ e $D2$, cujas fotocorrentes são subtraidas uma da outra por meio do misturador Mx[6], e o sinal elétrico assim gerado é conectado na entrada do analisador de espectros AS.

A análise seguinte mostra a sensibilidade da detecção homodina para o estudo das flutuações das quadraturas do campo.

Suponhamos que os campos incidentes sobre o divisor de feixes são representados pelos respectivos operadores de aniquilação $\hat{A}(t)$ e $\hat{b}$, onde mediante o operador $\hat{b}$ consideraremos o oscilador local. Então, desprezando as perdas, os campos na saída do divisor de feixes serão

$$\hat{c}(t) = t\hat{A}(t) + r\hat{b} \ , \tag{2.61}$$

$$\hat{d}(t) = t\hat{b} - r\hat{A}(t) \ , \tag{2.62}$$

onde o sinal negativo da segunda equação leva em consideração a conservação da energia.

No caso da detecção balanceada, $t = r = 1/\sqrt{2}$, de modo que

$$\hat{c}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{A}(t) + \hat{b}\Big) \ , \tag{2.63}$$

$$\hat{d}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\hat{b} - \hat{A}(t)\Big) \ , \tag{2.64}$$

[6]O misturador possui uma chave que permite escolher entre a soma e a diferença das fotocorrentes.

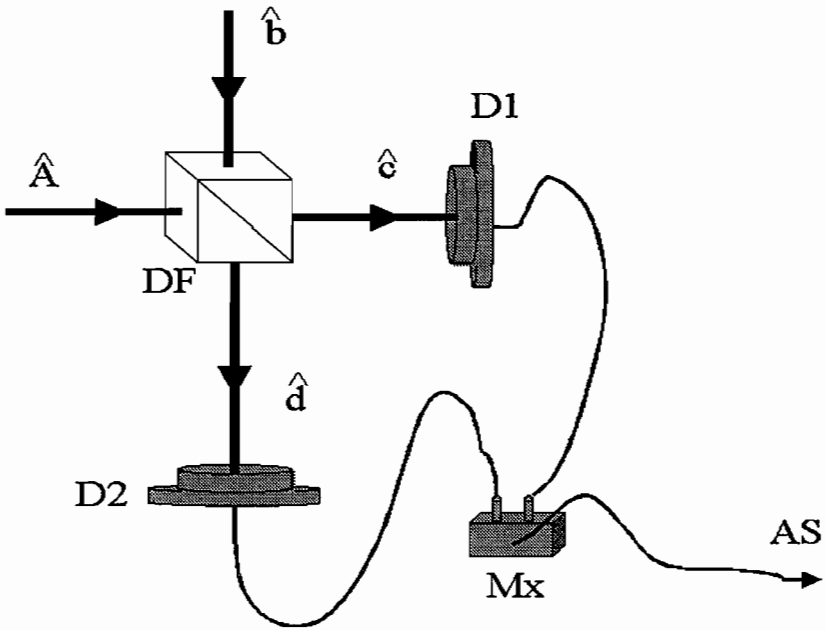

Figura 2.3: Esquema de detecção homodina.

e por conseguinte o operador $\hat{n}_-(t)$, cujo valor médio determina a diferença entre os números de fótons de cada campo de saída, será:

$$\hat{n}_-(t) = \hat{c}^\dagger(t)\hat{c}(t) - \hat{d}^\dagger(t)\hat{d}(t) = \hat{b}^\dagger\hat{A}(t) + \hat{A}^\dagger(t)\hat{b} \ . \tag{2.65}$$

Lembrando que o oscilador local deve ser um campo laser de alta intensidade em estado coerente, o operador $\hat{b}$ pode ser substituído por sua variável clássica correspondente, digamos $\beta = |\beta|e^{i\theta}$, e por conseguinte

$$\hat{n}_-(t) = |\beta|\left(\hat{A}(t)e^{-i\theta} + \hat{A}^\dagger(t)e^{i\theta}\right) \ , \tag{2.66}$$

ou utilizando a definição (2.32) do operador de quadratura generalizado

$$\hat{n}_-(t) = |\beta|\hat{Y}_\theta(t) \ . \tag{2.67}$$

Dessa forma, o esquema de detecção homodina nos permite definir, e medir, uma grandeza física que é diretamente proporcional ao operador de quadratura generalizado. Em outras palavras, esse esquema de medida permite o acesso direto ao valor médio e às flutuações das quadraturas do campo a ser estudado.

Medida do ruído de intensidade de um feixe

O esquema de detecção homodina também pode ser empregado para realizar a medida do ruído de intensidade de um feixe de luz. Nesse caso devemos colocar a chave do misturador na posição da soma das fotocorrentes, o que nos permite obter o operador correspondente à soma dos números de fótons de cada campo de saída

$$\hat{n}_+(t) = \hat{A}^\dagger(t)\hat{A}(t) + \hat{b}^\dagger\hat{b} \,. \tag{2.68}$$

Tomando o oscilador local em estado de vácuo, a Eq.(2.68) permite estudar as flutuações quânticas da intensidade (número de fótons) do feixe de luz incidente. O nível de referência para o ruído é determinado a partir de (2.65), onde o campo incidente $\hat{A}(t)$ realiza a função de oscilador local para o vácuo que entra pela outra porta de entrada do cubo divisor de feixes.

Conclusões

Neste capítulo apresentamos uma revisão dos conceitos fundamentais sobre as flutuações quânticas do campo eletromagnético, começando pela quantização do mesmo. Levando em consideração a distribuição espectral da intensidade da luz emitida por um laser, introduzimos um modelo para um campo propagante que descreve o operador do campo elétrico em termos das envolventes lentamente variáveis do campo, definidas a partir dos operadores de aniquilação e criação de fótons.

Para o estudo das flutuações do campo, utilizamos os operadores de quadratura expressados através das envolventes lentamente variáveis do campo. Como uma das primeiras conseqüências do tratamento quântico das variáveis de quadratura, observamos a existência de flutuações para um campo em estado de vácuo.

Também neste capítulo introduzimos a matriz de covariância. Empregando essa matriz podemos determinar a densidade espectral do ruído do operador de quadratura. Como veremos nos próximos capítulos, essa representação resulta de grande utilidade no estudo das flutuações de um sistema com muitos graus de liberdade.

Finalmente, discutimos o esquema de detecção homodina, largamente utilizado no estudo experimental das flutuações do campo eletromagnético.

Capítulo 3

Analogia Clássica da Transparência Induzida por Laser

Introdução

Os primeiros resultados originais deste trabalho serão apresentados no presente capítulo. Ele será dedicado ao estudo de dois sistemas clássicos capazes de reproduzir a fenomenologia observada na transparência induzida eletromagneticamente.

O primeiro sistema físico que será estudado é formado pos dois osciladores mecânicos acoplados. A análise teórica desse sistema permitirá desenvolver uma imagem física que será útil na compreensão do fenômeno da transparência induzida em sistemas atômicos. A concordância entre os resultados derivados com o modelo mecânico e os resultados obtidos no sistema quântico é realmente surpreendente.

Para o estudo experimental da analogia clássica da transparência induzida utilizaremos outro sistema físico, desta vez, formado por dois circuitos elétricos RLC acoplados. As curvas experimentais que serão apresentadas serão ajustadas empregando expressões teóricas derivadas a partir da análise do problema. Esta abordagem experimental da analogia clássica da transparência induzida é extremamente importante, pois ela permite a implementação dessa experiência como parte do curso de formação de estudantes de física e engenharia elétrica, permitindo assim a compreensão da essência física de um fenômeno que acontece em um sistema quântico.

Por uma questão de consistência, preferimos conservar a notação utilizada na Ref. [15], de modo que ela será exclusiva do presente capítulo.

3.1 O Fenômeno da Transparência Induzida por Laser

O fenômeno da transparência induzida eletromagneticamente (em inglês, Electromagnetically Induced Transparency, ou de forma abreviada EIT) consiste na anulação da absorção de um feixe de luz que interage com um meio atômico quando sobre esse meio fazemos incidir outro feixe de luz [16]. Frequentemente, é possível observar esse fenômeno em vapores atômicos, em geral de metais alcalinos tais como o rubídio e o césio, em uma configuração formada por três níveis de energia dos átomos. Os feixes de luz utilizados provêm de lasers, que são acoplados a duas transições atômicas diferentes que compartilham um dos níveis atômicos. A maioria dos autores que têm trabalhado sobre o tema atribuem o fenômeno observado à existência de uma interferência quântica destrutiva que envolve dois caminhos indistinguíveis, e que levam ao estado comum para cada uma das transições.

Além do fenômeno da transparência induzida, que manifesta-se por uma modificação da intensidade média do feixe, as propriedades dispersivas do meio são alteradas significativamente e, como foi mostrado recentemente, essa alteração é a causa da redução drástica da velocidade de grupo de um pulso de luz que se propaga nesse tipo de meio atômico [17]-[19], e também do "congelamento" de um pulso de luz como foi apresentado nas Refs. [20] e [21].

3.2 Modelo Teórico

Na presente seção desenvolveremos um modelo clássico da transparência induzida eletromagneticamente utilizando um sistema formado por massas e molas. O efeito Raman ressonante já foi modelado classicamente por Hemmer e Prentiss [22] empregando um sistema de três pêndulos acoplados. Mesmo assim, vários aspectos da transparência induzida que estão presentes no efeito Raman, não foram apresentados nesse trabalho, e o comportamento dispersivo não foi considerado.

O modelo clássico que apresentaremos utiliza apenas dois osciladores mecânicos acoplados linearmente. Nossa atenção será focalizada na simulação da transparência induzida por laser em meios atômicos formados por átomos de três níveis na configuração Λ que interagem com dois feixes de luz como mostrado na Fig. 3.1. Os estados quânticos $|1\rangle$ e $|2\rangle$ representam os estados fundamentais do átomo, e $|0\rangle$ é o estado excitado atômico.

O feixe laser acoplado à transição atômica entre os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, será denominado "laser de bombeio" (ou simplesmente "bombeio"), e chamare-

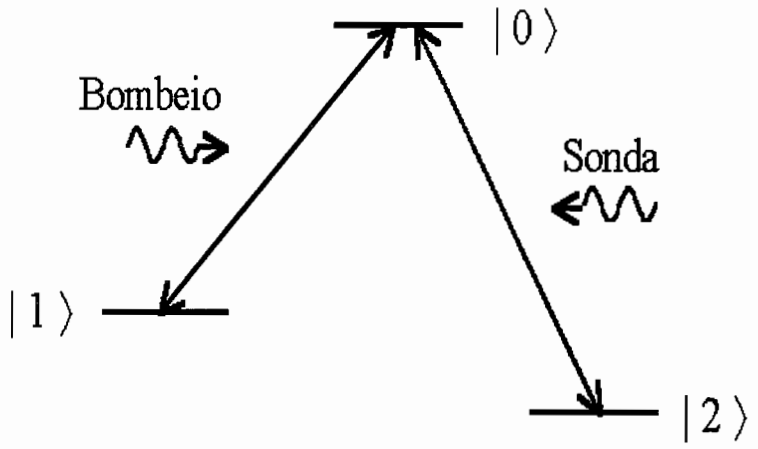

Figura 3.1: Diagrama de energia para um átomo de três níveis na configuração Λ. O nome da configuração deve-se ao fato de que ao conectar cada estado fundamental com o estado excitado, forma-se a letra grega Λ.

mos "laser sonda" (ou "sonda") o laser acoplado à transição $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$. Uma experiência típica consiste em varrer a freqüência do laser sonda e medir a intensidade transmitida do mesmo. Na ausência do bombeio, é possível observar o perfil padrão correspondente à absorção de um feixe de luz. No entanto, em determinadas circunstâncias, a adição do feixe de bombeio evita a absorção do sonda em uma região estreita do perfil de absorção, e a intensidade transmitida como função da freqüência apresenta um pico estreito de transparência induzida.

O efeito anterior depende fortemente da intensidade do bombeio. Tipicamente, o bombeio deve ter uma intensidade tal que sua taxa de Rabi Ω_1 seja superior à taxa de decaimento da coerência entre os estados fundamentais. Um dos efeitos do feixe de bombeio é a indução de um desdobramento do estado atômico excitado, motivado por um efeito Stark dinâmico. Nessa situação, o feixe sonda acopla o estado fundamental $|2\rangle$, a dois estados excitados em lugar de um. Se a diferença de energia entre os dois estados excitados (que varia linearmente com Ω_1) é indistinguível, no perfil de absorção do sonda espera-se uma manifestação da interferência quântica entre as duas amplitudes de probabilidades de absorção. Na medida em que a taxa de Rabi Ω_1 é incrementada, a separação entre os níveis excitados é cada vez mais pronunciada, e a indistinguibilidade desaparece. O espectro de absorção transforma-se em um dubleto denominado de Autler-Townes [23]. Essa imagem física será conservada, e revista, à medida que discutiremos o análogo

clássico com o mesmo comportamento.

3.2.1 Analogia utilizando massas e molas

Comecemos a analogia mecânica da transparência induzida eletromagneticamente apresentando as componentes do modelo. O átomo será modelado por um oscilador harmônico, formado pela partícula 1 de massa m_1, unida a duas molas de constantes elásticas k_1 e K (ver Fig. 3.2). A mola de constante elástica k_1 é prendida na parede, enquanto que a outra mola é unida a uma segunda partícula de massa m_2 que inicialmente é mantida fixa. A partícula 1 também é submetida à ação de uma força harmônica (força sonda) $\mathcal{F}_s(t) = Fe^{-i\,(\omega_s t+\phi_s)}$.

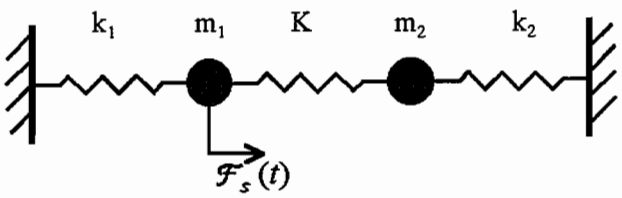

Figura 3.2: Modelo mecânico empregado para simular a transparência induzida eletromagneticamente.

Se analisamos a potência transferida pela força harmônica à partícula 1 como função da freqüência ω_s, então observaremos um perfil de absorção padrão, centrado na freqüência $\omega_1^2 = (k_1 + K)/m$. Suponhamos agora que a partícula 2, submetida unicamente a forças elásticas devido a seu acoplamento com as molas K e k_2, seja liberada. Nessa situação, o perfil de absorção é modificado e nós podemos observar que a potência transferida pela força harmônica à partícula 1 evidencia um comportamento similar à transparência induzida eletromagneticamente, que muda à medida que alteramos o valor de K, até o surgimento de um dubleto análogo ao dubleto Autler-Townes. De fato, esse dubleto é uma manifestação da separação dos modos normais de vibração. Por simplicidade, consideremos o caso em que $k_1 = k_2 = k$ e $m_1 = m_2$.

A analogia física entre nosso modelo mecânico e o sistema de átomos de três níveis é como segue. O átomo é modelado pelo oscilador 1 (partícula 1) com uma freqüência de ressonância ω_1. Como escolhemos $k_1 = k_2 = k$ e $m_1 = m_2$, então estamos tratando com o análogo da configuração Λ degenerada (os estados fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$ têm a mesma energia). O feixe de bombeio é simulado pelo acoplamento do oscilador 1 com o segundo oscilador (partícula

2) via a mola de constante elástica K (lembremos que a descrição quântica do campo eletromagnético é dada em termos de osciladores harmônicos). O feixe sonda é modelado pela força harmônica que age sobre a partícula 1.

Para descrever quantitativamente o sistema, utilizamos as equações de movimento das partículas 1 e 2, escritas em termos dos respectivos deslocamentos x_1 e x_2, com relação à posição de equilíbrio:

$$\ddot{x}_1(t) + \gamma_1 \dot{x}_1(t) + \omega^2 x_1(t) - \Omega_r^2 x_2(t) = \frac{F}{m} e^{-i\,\omega_s t} \,, \tag{3.1}$$

$$\ddot{x}_2(t) + \gamma_2 \dot{x}_2(t) + \omega^2 x_2(t) - \Omega_r^2 x_1(t) = 0 \,, \tag{3.2}$$

onde tomamos $\phi_s = 0$ para a força sonda, $\Omega_r^2 = K/m$ designa a freqüência associada ao acoplamento coerente entre o oscilador de bombeio e o oscilador que modela o átomo, γ_1 representa o atrito vinculado à força dissipativa que age sobre a partícula 1 (simula a emissão espontânea a partir do estado atômico excitado), e γ_2 é a taxa associada à dissipação de energia na transição do bombeio (simula a perda de coerência entre os estados fundamentais).

Como nosso interesse consiste em estudar o comportamento da potência da força sonda absorvida pela partícula 1, então procuraremos uma solução para $x_1(t)$. Suponhamos que essa solução seja da forma

$$x_1(t) = N e^{-i\,\omega_s t} \,, \tag{3.3}$$

onde N é uma constante. Assumindo uma solução similar para $x_2(t)$, e substituindo ambas relações nas Eqs.(3.1) e (3.2), encontramos

$$x_1(t) = \frac{(\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_2\omega_s) F e^{-i\,\omega_s t}}{m[(\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_1\omega_s)(\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_2\omega_s) - \Omega_r^4]} \,. \tag{3.4}$$

A expressão anterior de $x_1(t)$ nos permite calcular a potência $P(t)$ da força sonda $\mathcal{F}_s(t)$ absorvida pela partícula 1,

$$P(t) = F e^{-i\,\omega_s t} \dot{x}_1(t) \,. \tag{3.5}$$

Utilizando as Eqs.(3.4) e (3.5) podemos calcular a potência absorvida durante um período de oscilação $P_s(\omega_s)$ da força sonda

$$P_s(\omega_s) = -\frac{2\pi i F^2 \omega_s (\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_2\omega_s)}{m[(\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_1\omega_s)(\omega^2 - \omega_s^2 - i\gamma_2\omega_s) - \Omega_r^4]} \,. \tag{3.6}$$

Na Fig. 3.3 mostramos a parte real de $P_s(\omega_s)$ para seis valores diferentes da freqüência de acoplamento Ω_r, todos expressados em unidades de freqüência. Essas curvas foram obtidas empregando os valores seguintes:

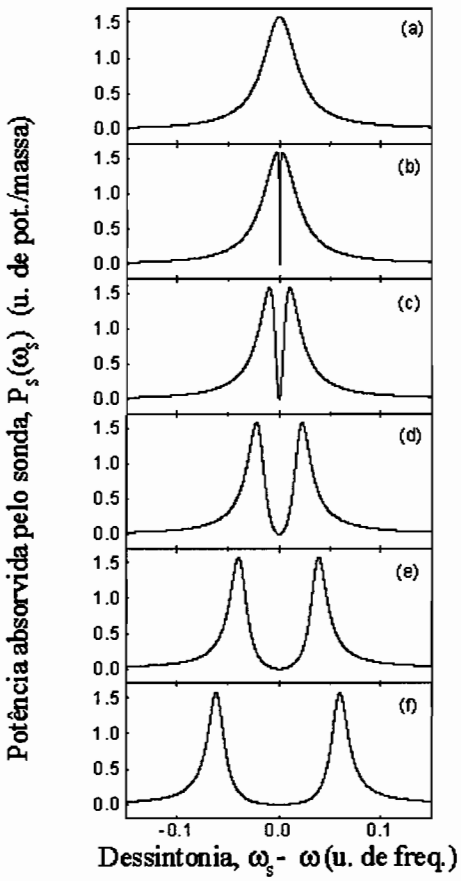

Figura 3.3: Dependência com a freqüência da potência da força sonda absorvida pela partícula que simula o átomo. Os valores de Ω_r são (a) 0,0 , (b) 0,1 , (c) 0,2 , (d) 0,3 , (e) 0,4 , e (f) 0,5 em unidades de freqüência.

$\gamma_1 = 4,0 \times 10^{-2}$, $\gamma_2 = 1,0 \times 10^{-7}$, e $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 2,0$, todos expressados na mesma unidade de freqüência. A amplitude F/m foi tomada igual a $0,1$ unidades de força/massa.

Para $\Omega_r = 0$, temos um perfil típico de absorção, com uma absorção máxima para $\delta = 0$, onde $\delta = \omega_s - \omega$ é a dessintonia entre a freqüência da força sonda e a freqüência do oscilador 1 ($\omega = \omega_1$). Quando a taxa Ω_r é incrementada até um valor igual a $0,1$, observamos o surgimento de um sinal muito estreito de transparência no perfil de absorção da potência $P_s(\omega_s)$. Essa ausência de absorção para $\delta = 0$ é o resultado de uma interferência destrutiva entre os modos normais de vibração do sistema [24]. Um aumento posterior da freqüência de acoplamento leva ao surgimento de dois picos no perfil de absorção, que são claramente observáveis para $\Omega_r = 0,5$. Em um

sistema atômico esse efeito é chamado de efeito Autler-Townes.

É importante ressaltar que a taxa dissipativa γ_2, associada ao oscilador de bombeio, deve ser muito menor que γ_1 para poder estabelecer um regime coerente de oscilação da partícula 1. Em outras palavras, a adição do oscilador de bombeio não deve alterar de maneira significativa a dissipação já presente no sistema. No caso da transparência induzida eletromagneticamente [25], considerar desprezível a taxa de transferência de população do estado $|1\rangle$ para o estado $|2\rangle$, é uma condição análoga à suposição $\gamma_2 \ll \gamma_1$ no nosso modelo mecânico. Em ambas situações, a violação de tal condição inibe a observação da transparência induzida.

Outro resultado importante reproduzido pelo modelo mecânico é dado pelo comportamento dispersivo do oscilador empregado para simular o átomo. Essa resposta dispersiva é contida na parte real da dependência com a freqüência da amplitude $x_1(t)$ [Eq.(3.4)]. Na Fig. 3.4 graficamos essa dependência para $\Omega_r = 0,1$. Esse valor de Ω_r corresponde à situação na qual a transparência induzida é mais pronunciada, e como pode ser visto na Fig. 3.4, a dispersão observada na faixa de freqüências onde acontece a transparência induzida é normal e possui um coeficiente angular abrupto.

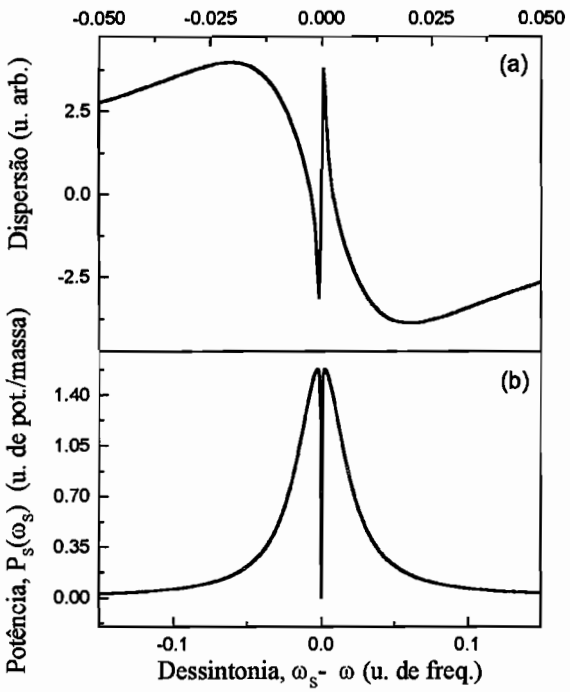

Figura 3.4: Respostas dispersiva (a) e absortiva (b) da potência da força sonda transmitida à partícula 1 para $\Omega_r = 0,1$ em unidades de freqüência.

Este resultado coincide com as observações experimentais realizadas em meios atômicos [26]. Por outro lado, o caráter normal e acentuado da dispersão na região de transparência induzida é o responsável pelas observações recentes da propagação de luz lenta [17]-[19], e o "congelamento" de pulsos de luz [20] e [21]. Por conseguinte, também seria possível observar tais efeitos em um sistema mecânico formado por uma série de osciladores "análogos-atômicos".

Nosso modelo mecânico não é o único modelo clássico a poder simular o fenômeno da transparência induzida eletromagneticamente. Como mencionado anteriormente, o laser de bombeio é substituído por um oscilador harmônico que simula a descrição quântica do campo. Na maioria das descrições teóricas da transparência induzida em meios atômicos, os campos sonda e de bombeio são tratados classicamente. Em tal situação, o sistema mecânico análogo do sistema de átomos e lasers é formado por um oscilador só (uma única partícula), e nesse modelo, a transparência induzida pode ser interpretada como o resultado de uma interferência destrutiva entre as forças que atuam sobre a única partícula do sistema.

3.3 Simulação Experimental da Transparência Induzida Utilizando Circuitos *RLC*

A comprovação experimental da teoria desenvolvida na seção 3.2, utilizando um sistema mecânico, mesmo que possível, não resulta ser de fácil implementação. No seu lugar, nós utilizaremos a analogia, bem conhecida, entre osciladores mecânicos e circuitos elétricos, o que permitirá desenhar um experimento prático e simples de implementar.

O circuito elétrico análogo do modelo mecânico da Fig. 3.2 é mostrado na Fig. 3.5. O oscilador de bombeio é simulado pela malha formada pelo indutor L_1 e os capacitores C_1 e C, e o resistor R_1 determina as perdas associadas a esse oscilador. O átomo é modelado pelo circuito ressonante composto pelo indutor L_2, os capacitores C_2 e C, e R_2 respresenta as perdas por emissão espontânea do átomo a partir do estado excitado. O capacitor C, que pertence a ambas malhas do circuito, modela o acoplamento entre o átomo e o feixe de bombeio, e determina dessa forma a freqüência de Rabi da transição à qual está acoplado o bombeio. Nesse modelo, o feixe sonda é simulado pela fonte de voltagem de freqüência regulável V_S.

A malha do circuito empregada para simular o átomo possui uma única freqüência de ressonância que representa a energia do estado atômico excitado. Isto é, a probabilidade de excitação desse circuito será máxima quando

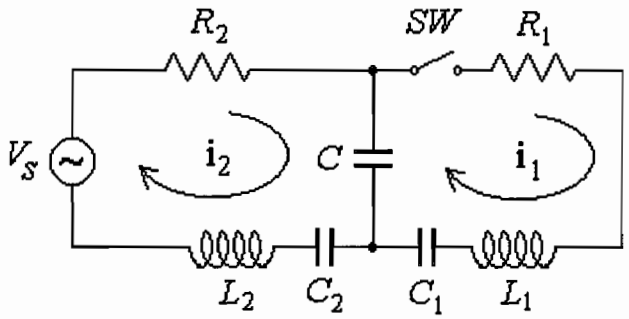

Figura 3.5: Circuito elétrico utilizado para investigar a transparência induzida.

a força harmônica aplicada for ressonante com essa freqüência. Como nessa situação nós temos dois possíveis caminhos de excitação desse circuito, então ele é análogo a um átomo de três níveis na configuração Λ. Em outras palavras, o oscilador que representa o átomo pode ser excitado diretamente pela força V_S, ou através de seu acoplamento (capacitor C) com o oscilador de bombeio.

Aqui novamente, a transparência induzida é investigada analisando a dependência em freqüência da potência transferida $P_2(\omega_s)$ pela fonte de voltagem V_S, ao circuito ressonante $R_2L_2C_{e2}$,

$$P_2(\omega_s) = \Re\{\mathcal{V}_S\mathcal{I}_2^*\} \ , \tag{3.7}$$

onde $\mathcal{V}_S$ e $\mathcal{I}_2$ são, respectivamente, a representação complexa de V_S e $i_2(t)$, e o capacitor equivalente C_{e2} é o resultado da combinação em série de C e C_2:

$$C_{e2} = \frac{CC_2}{C + C_2} \ . \tag{3.8}$$

Tomando $L_1 = L_2 = L$ ($m_1 = m_2 = m$ no modelo mecânico) e escrevendo as equações para as correntes $i_1(t) = \dot{q}_1(t)$ e $i_2(t) = \dot{q}_2(t)$ mostradas na Fig. 3.5, encontramos para as cargas $q_1(t)$ e $q_2(t)$ o seguinte sistema de equações diferenciais acopladas:

$$\ddot{q}_1(t) + \gamma_1\dot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) - \Omega_r^2 q_2(t) = 0 \ , \tag{3.9}$$

$$\ddot{q}_2(t) + \gamma_2\dot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) - \Omega_r^2 q_1(t) = \frac{V_S(t)}{L_2} \ , \tag{3.10}$$

onde $\gamma_i = R_i/L_i$ ($i = 1, 2$), $\omega_i^2 = 1/(L_iC_{ei})$, e $\Omega_r^2 = 1/(L_2C)$ (C_{e1} é o capacitor equivalente dado pela combinação em série de C e C_1). As equações

anteriores coincidem com as Eqs.(3.1) e (3.2) utilizando a analogia apresentada na Tab. 3.1 com $\omega_1 = \omega_2$, e portanto elas descrevem o mesmo fenômeno físico.

Modelo macânico	Modelo elétrico
γ_2 (γ_1)	R_1/L_1 (R_2/L_2)
m_2 (m_1)	L_1 (L_2)
k_2 (k_1)	$1/C_1$ ($1/C_2$)
K	$1/C$
x_2 (x_1)	q_1 (q_2)
$(F/m)\, e^{-i\,\omega_s t}$	$\mathcal{V}_S(t)/L_2$

Tabela 3.1: Correspondência entre os parâmetros dos modelos mecânico e elétrico.

Uma vez que a corrente $i_2(t)$ (ou $\mathcal{I}_2$) é encontrada, a expressão que determina a dependência de $P_2(\omega_s)$ com a freqüência ω_s da fonte de voltagem, quando a chave SW na Fig. 3.5 está fechada, é

$$P_2(\omega_s) = \frac{p1(\omega_s)}{p1(\omega_s)^2 + p2(\omega_s)^2}|A_S|^2 \,, \tag{3.11}$$

onde

$$p1(\omega_s) = R_2 + \frac{R_1/(\omega_s C)^2}{R_1^2 + [\omega_s L_1 - 1/(\omega_s C_{e1})]^2} \,, \tag{3.12}$$

$$p2(\omega_s) = [\omega_s L_2 - 1/(\omega_s C_{e2})] - \frac{[1/(\omega_s C)^2][\omega_s L_1 - 1/(\omega_s C_{e1})]}{R_1^2 + [\omega_s L_1 - 1/(\omega_s C_{e1})]^2} \,, \tag{3.13}$$

e A_S é a amplitude da voltagem aplicada ao circuito.

Por outro lado, quando a chave SW está aberta, nós temos a seguinte expressão para a potência

$$P_2(\omega_s) = \frac{R_2}{R_2^2 + [\omega_s L_2 - 1/(\omega_s C_{e2})]^2}|A_S|^2 \,. \tag{3.14}$$

A potência $P_2(\omega_s)$ pode ser medida de diversas maneiras. Nós decidimos medir a corrente que passa pelo indutor L_2, a qual tem uma dependência com a freqüência igual à dependência de $P_2(\omega_s)$. Na realidade, nós medimos a queda de voltagem através do indutor L_2, e logo integramos essa grandeza para obter assim a corrente que passa pelo indutor. Essa voltagem é um

sinal oscilatório de freqüência ω_s, e nós estamos interessado no valor de sua amplitude, o qual pode ser medido utilizando um osciloscópio.

Na Fig. 3.6 apresentamos o resultado da medida da amplitude da voltagem no indutor L_2, para quatro valores diferentes do capacitor de acoplamento C. Para cada valor de C uma medida é realizada com a chave SW aberta (ver Fig. 3.5) (quadrados abertos), situação equivalente à ausência do bombeio. Já os círculos abertos correspondem às medidas realizadas com a chave fechada. As linhas sólidas representam o ajuste visual[1] dos dados experimentais empregando as Eqs.(3.11) e (3.14). A evolução do regime de transparência até o regime análogo ao Autler-Townes pode ser claramente observada. Na Tab. 3.2 é mostrada a especificação dos componentes eletrônicos empregados no experimento.

Componente	Valor
R_1	$0\ Ohms$
R_2	$51,7\ Ohms$
L_1	$1000\ \mu H$
L_2	$1000\ \mu H$
C_1	$0,1\ \mu F$
C_2	$0,1\ \mu F$

Tabela 3.2: Especificação dos componentes eletrônicos utilizados no experimento.

Como pode ser visto a partir da Fig. 3.6, na configuração correspondente à ausência de bombeio (chave aberta), a potência da fonte de voltagem V_S transferida ao circuito ressonante $R_2L_2C_{e2}$, é máxima quando a dessintonia é nula. Por outro lado, quando a chave é fechada, isto é, quando o circuito de bombeio (força do bombeio) age sobre o circuito ressonante $R_2L_2C_{e2}$, a absorção da potência elétrica da fonte de voltagem experimenta uma depressão para a dessintonia igual a zero. Este fato corresponde à condição de transparência, e é mais pronunciado na medida em que o valor do capacitor de acoplamento é reduzido, o qual equivale a um incremento da freqüência de Rabi do campo de bombeio no caso da transparência induzida eletromagneticamente em sistemas atômicos.

Na presente experiência , assim como na experiência realizada com átomos e lasers, a transparência observada pode ser interpretada como uma interferência destrutiva. Neste caso, a interferência acontece entre a potência fornecida pela fonte de voltagem ao circuito ressonante $R_2L_2C_{e2}$, e a potência

[1]Não foi utilizado um algoritmo específico de ajuste.

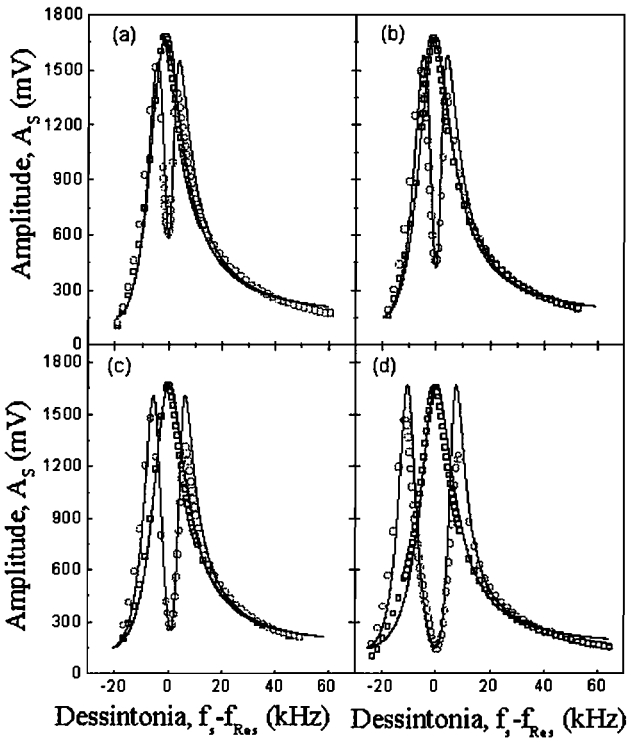

Figura 3.6: Potência transferida ao circuito ressonante $R_2L_2C_{e2}$ como função da freqüência ω_s para diferentes valores do capacitor de acoplamento C. Para cada curva os valores de C são (a) $C = 0,196\ \mu F$, correspondente à freqüência de ressonância $f_{Res} = \omega_2/2\pi = 20,0\ kHz$, (b) $C = 0,150\ \mu F$, $f_{Res} = 19,5\ kHz$, (c) $C = 0,096\ \mu F$, $f_{Res} = 21,5\ kHz$, (d) $C = 0,050\ \mu F$, $f_{Res} = 26,5\ kHz$.

que ele recebe por parte do oscilador elétrico que representa a força do bombeio. Como explicamos na seção 3.2, o fenômeno observado também pode ser visto como uma interferência entre os dois possíveis caminhos de excitação do circuito $R_2L_2C_{e2}$, correspondentes aos modos normais de vibração dos osciladores acoplados. Para o menor valor de C utilizado no experimento [Fig. 3.6(d)], podemos observar dois picos de absorção que representam o análogo clássico do dubleto Autler-Townes. Para o menor valor do capacitor de acoplamento [Fig. 3.6(a)] o pico de transparência não é suficientemente estreito como esperaríamos do valor $R_1 = 0$. Provavelmente, esse comportamento deve-se à existência de uma resistência interna residual em série dos componentes eletrônicos utilizados.

As curvas sólidas não ajustam exatamente os dados experimentais devido à resposta em freqüência do circuito integrador empregado para obter

a voltagem proporcional à corrente que passa pelo indutor L_2.

A resposta dispersiva do circuito também pode ser medida. Nesse caso, devemos analisar a relação entre a fase da corrente oscilatória que passa pelo indutor L_2, e a fase da voltagem da fonte V_S. A melhor forma de realizar essa medida é utilizando um amplificador lock-in[2]. Como esse equipamento não está sempre disponível nos laboratórios de graduação, nós preferimos descrever um procedimento que permite observar qualitativamente o comportamento apresentado na Fig. 3.4.

O procedimento consiste em observar no osciloscópio o sinal correspondente à voltagem proporcional à corrente que passa pelo indutor L_2, empregando como gatilho (*trigger*) o sinal V_S. À medida que a freqüência ω_s é alterada, e precisamente, cada vez que ela passa pelo valor correspondente à freqüência de ressonância na região de transparência, é possível observar "pulos" na fase do sinal medido. Quando a freqüência ω_s aumenta, três mudanças abruptas da fase são perceptíveis, sendo a variação intermediaria oposta às duas restantes. É exatamente esse o comportamento esperado a partir da Fig. 3.4.

Conclusões

Neste capítulo, utilizando dois sistemas totalmente clássicos, modelamos o fenômeno da transparência induzida por laser observado em vapores atômicos. O primeiro dos sistemas é formado unicamente por dois osciladores mecânicos acoplados. Empregando apenas massas e molas, os resultados teóricos obtidos nesse sistema físico reproduzem fielmente o comportamento observado em sistemas compostos por átomos de três níveis que interagem com feixes lasers. Esse sistema clássico também permitiu simular a resposta dispersiva do sistema atômico.

Baseados na equivalência entre osciladores mecânicos e elétricos, desenhamos e realizamos uma experiência que utiliza dois circuitos ressonantes *RLC* acoplados. Com esse circuito conseguimos medir curvas experimentais análogas às curvas de transparência induzida eletromagneticamente e, observamos também, o análogo clássico do dubleto Autler-Townes.

A experiência realizada pode ser implementada no curso de graduação de física, permitindo dessa forma, o desenvolvimento de uma intuição física com relação a um fenômeno coerente que acontece em vapores atômicos.

Em função dessa analogia clássica, nos interessamos por buscar efeitos exclusivamente quânticos no processo de transparência induzida. Nossa atenção

[2]Também poderia ser empregado um osciloscópio trabalhando em modo x–y.

se voltou, então, para propriedades quânticas dos campos. Os estudos teóricos e experimentais que realizamos são apresentados a seguir.

Capítulo 4

Tratamento Teórico da Transparência Induzida por Laser

Introdução

De um modo geral, o fenômeno da transparência induzida é estudado empregando as equações óticas de Bloch. Esse tratamento semiclássico do problema impede a análise de propriedades importantes dos campos que interagem com o sistema atômico. Trata-se das flutuações quânticas, às quais só teremos acesso tratando os campos explicitamente.

A abordagem teórica da transparência induzida que será apresentada neste capítulo está baseada nas equações quânticas de Langevin, ou equações de Heisenberg-Langevin, como também são conhecidas na literatura.

Com o intuito de derivar as equações quânticas de Langevin para o sistema composto pelos átomos e os dois campos, sonda e de bombeio, formularemos primeiramente o hamiltoniano do sistema. Esse hamiltoniano terá várias contribuições, correspondendo a primeira delas à parte atômica.

Em seguida, será apresentado o hamiltoniano que descreve a fonte de cada feixe laser. Esse hamiltoniano forma parte do tratamento quântico dos campos propagantes, os quais estão acoplados às suas respectivas fontes via um hamiltoniano de acoplamento que será introduzido na mesma seção. Utilizando os hamiltonianos de acoplamento e da fonte do laser, derivaremos um modelo de campo propagante sem a necessidade de incluir uma cavidade para tratar o problema da interação com os átomos.

O reservatório dos modos do vácuo será introduzido no nosso formalismo na sequência, empregando um hamiltoniano bem estabelecido na literatura,

e consideraremos linear o acoplamento entre as variáveis do sistema e as variáveis do reservatório. As colisões que experimentam os átomos e que também provocam uma evolução incoerente do sistema serão introduzidas fenomenologicamente.

A interação entre os campos propagantes e os átomos será considerada utilizando a aproximação dipolar elétrica.

Uma vez definido o hamiltoniano total do sistema, passaremos à derivação das equações quânticas de Langevin para os feixes sonda e de bombeio. As equações obtidas serão analisadas para comprovar as suposições realizadas no momento de definir o modelo de campo propagante. Na continuação, formularemos as equações quânticas de Langevin para as variáveis atômicas, começando pela obtenção de uma equação geral, aplicável a qualquer dos operadores atômicos considerados.

A última parte do presente capítulo será dedicada às previsões teóricas obtidas utilizando o método da linearização das flutuações em torno do estado estacionário. Como meio atômico, estudaremos um vapor composto por átomos de ^{85}Rb. Primeiramente, apresentaremos os resultados correspondentes ao comportamento dos valores médios das variáveis do sistema no estado estacionário. Esse estudo será realizado no regime de baixas intensidades dos feixes sonda e de bombeio.

Para estudarmos as flutuações quânticas dos campos, as intensidades dos feixes sonda e de bombeio serão tomadas comparáveis ao valor da intensidade de saturação para o rubídio. Os resultados obtidos indicam a existência de excesso de ruído na quadratura amplitude de ambos feixes, como conseqüência da coerência induzida no meio atômico. Também veremos que, na condição de transparência induzida, existe uma correlação entre os feixes, a qual foi caracterizada empregando os critérios das variâncias inferidas e de Duan-Giedke-Cirac-Zoller. A correlação encontrada é de natureza quântica, o que indica que os campos estão emaranhados. A relevância deste resultado está associada ao fato de que ele representa o primeiro estudo realizado que verifica a viabilidade da transparência induzida para aplicações tais como a informação e a computação quânticas, a teleportação, entre outras.

4.1 Equações Quânticas de Langevin

Apesar da existência de uma ampla categoria de problemas físicos onde os sistemas podem ser considerados isolados, existem alguns sistemas físicos que não podem ser tratados ou estudados sem considerar a ação proveniente do exterior. Em particular, quando o sistema forma parte de um sistema maior, a influência da parte restante desse sistema composto deve ser levada em

conta.

O exemplo mais antigo dessa classe de problemas baseia-se no estudo do movimento de uma partícula Browniana em um fluido viscoso. A interação dessa partícula com o conjunto de moléculas que a rodeam, e que formam parte de um sistema maior e com muitos graus de liberdade, conhecido na literatura como *banho térmico* ou *reservatório*, leva ao surgimento de forças estocásticas e dissipativas que agem sobre a partícula. Realizando várias considerações sobre a natureza da interação da partícula Browniana com o meio, é possível derivar a equação que descreve sua evolução no tempo, e que recebe o nome de equação de Langevin.

Na ótica quântica e na física atômica, onde os sistemas a serem estudados são um ou vários modos do campo eletromagnético e os átomos, respectivamente, considera-se que o reservatório é formado por um ensemble de osciladores harmônicos que, de fato, são os modos não populados do campo eletromagnético.

Esse ensemble de modos não populados do campo, ou em outras palavras, conjunto de modos do campo em estado de vácuo, deve satisfazer algumas propriedades para ser considerado como um reservatório [27]. Em particular:

- As freqüências dos osciladores devem formar um espectro contínuo e denso.

- O acoplamento dos operadores do sistema com os operadores do reservatório deve ser linear nos operadores dos osciladores harmônicos que formam o reservatório.

- As constantes de acoplamento entre os operadores do sistema e os operadores do reservatório devem ser uma função suave da freqüência.

Para um campo eletromagnético quantizado no interior de um volume grande ou infinito em comparação com as distâncias características do sistema, essas propriedades são cumpridas praticamente de forma natural.

A partir das considerações que podem ser realizadas empregando as propriedades acima mencionadas, é possível derivar as equações que descrevem a evolução dos campos e dos átomos que formam um sistema submetido à ação de um reservatório. Pelo fato desses sistemas serem descrito por variáveis quânticas, no caso operadores, as equações de evolução temporal recebem o nome de equações quânticas de Langevin. Tratando os operadores do sistema e do reservatório como sendo dependentes do tempo, as equações de evolução temporal de ambos subsistemas são dadas na representação de Heisenberg, e incluem termos que refletem o caráter estocástico e dissipativo da evolução, e que estão determinados pela ação do reservatório.

Além da influência dos modos do vácuo, existem outros processos físicos que levam a uma evolução incoerente do sistema átomo-campo. Em vapores atômicos, processos tais como colisões entre os átomos, e com átomos de outras espécies, também são fontes de dissipação e flutuações das variáveis que caracterizam o sistema. Na presente formulação da transparência induzida por laser, esses processos serão levados em conta, mesmo que as principais características do referido fenômeno possam ser obtidas na ausência desses outros mecanismos de interação incoerente.

4.1.1 Hamiltoniano do sistema

Passemos a estudar agora a formulação quântica do problema da transparência induzida por laser empregando as equações quânticas de Langevin[1].

Hamiltoniano atômico

Consideremos que o sistema atômico que interage com dois feixes lasers é um vapor composto por átomos de três níveis na configuração lambda fechada, como aparece indicado na Fig. 4.1, onde os estados atômicos, em ausência de qualquer radiação, são designados por $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$.

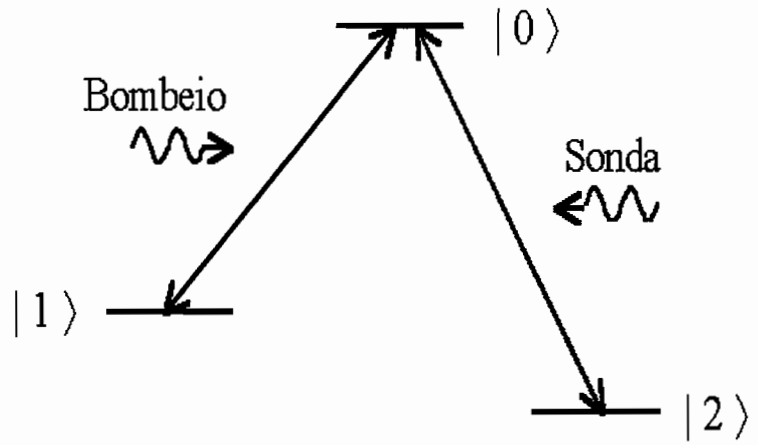

Figura 4.1: Configuração lambda para um átomo de três níveis.

Os feixes que agem sobre o sistema atômico são escolhidos de forma tal que cada um deles age sobre uma única transição dipolar. Sendo assim, o

[1]Também é usual chamar essas equações de equações de Heisenberg-Langevin.

laser que acopla coerentemente os estados atômicos $|0\rangle$ e $|1\rangle$ será chamado feixe de bombeio e o laser que acopla os estados $|0\rangle$ e $|2\rangle$, também de forma coerente, será chamado feixe sonda. O momento de dipolo entre os estados $|1\rangle$ e $|2\rangle$ será considerado nulo, de forma tal que não existe transição radiativa entre esses estados.

Vamos supor também que os átomos estão imóveis e interagem com os campos nas posições onde eles estão localizados. Dessa forma, estamos supondo que os átomos interagem de maneira local e cada transição está acoplada independentemente com os campos eletromagnéticos. Esta consideração tem como conseqüência a ausência da largura Doppler no espectro de absorção atômico, devida às diferentes velocidades dos átomos [28]. Faremos uso desta aproximação para simplificar a formulação do problema. A validade da mesma é justificada quando estudamos um sistema de átomos frios e em presença de estruturas sub-Doppler que aparecem na configuração de feixes co-propagantes no caso da transparência induzida. Outra conseqüência desta suposição é que as colisões que experimentam os átomos devem sua origem aos choques com átomos de outra(s) espécie(s) e, no processo de colisão, é apenas modificado o estado dos graus de liberdade internos dos átomos, de modo que os graus de liberdade externos dos átomos que interagem com os lasers não são alterados.

Do ponto de vista do movimento, os átomos serão tratados como partículas clássicas.

Nessa situação, o hamiltoniano do sistema atômico, levando em conta só os graus de liberdade internos, pode ser escrito da forma

$$\hat{H}_A = \sum_{j=1}^{N} (E_0|0\rangle\langle 0|_j + E_1|1\rangle\langle 1|_j + E_2|2\rangle\langle 2|_j) \ , \tag{4.1}$$

onde N representa o número de átomos do sistema, e E_i é a energia do estado atômico i ($i = 0, 1, 2$), com $E_0 > E_1, E_2$.

Tomando como referência a energia do estado excitado $|0\rangle$, a Eq.(4.1) pode ser escrita como

$$\hat{H}_A = \sum_{j=1}^{N} \Big(- \hbar\omega_1 \hat{\sigma}_{1j}(t) - \hbar\omega_2 \hat{\sigma}_{2j}(t) \Big) \ . \tag{4.2}$$

Na equação anterior, $\omega_1(\omega_2)$ é a freqüência da transição atômica $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ ($|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$) e os operadores $\hat{\sigma}_{ij}(t)$, que determinam a população atômica de cada estado, são definidos da maneira seguinte

$$\hat{\sigma}_{ij}(t) \equiv |i\rangle\langle i|_j, \quad i = 0, 1, 2 \quad , \ j = 1, \ldots, N \ . \tag{4.3}$$

Hamiltoniano dos campos

De forma geral, o problema da interação de modos propagantes do campo eletromagnético com sistemas atômicos é tratado na literatura considerando que esses sistemas (átomos e campos) interagem no interior de uma cavidade em anel que suporta modos propagantes [29]. A necessidade de incluir a cavidade no tratamento do problema está associada à dificuldade na quantização do campo no espaço livre.

Neste capítulo, vamos introduzir um modelo do campo propagante quantizado, sem utilizar a cavidade em anel, baseado em algumas hipóteses que serão verificadas a partir da análise das equações de evolução temporal das variáveis do campo e, analisando as previsões derivadas da teoria.

Consideremos o esquema do laser apresentado na Fig. 4.2, onde o campo no interior da cavidade laser será representado pelo operador de aniquilação $\hat{a}_1(t)$.

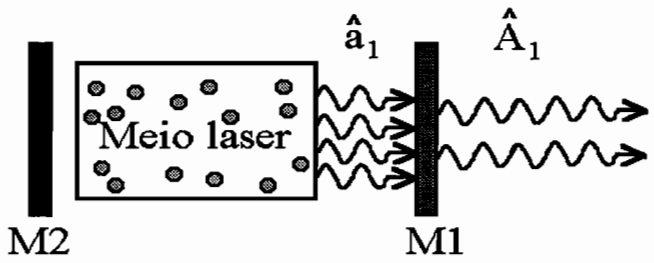

Figura 4.2: Esquema geral de um laser com cavidade Fabry-Pérot. A cavidade laser está formada pelos espelhos de saída $M1$ e $M2$, este último de refletividade igual a 100 %, entre os quais está localizado o meio encarregado de gerar a radiação laser.

Como vimos na seção 2.1, um feixe laser de largura espectral finita pode ser expressado através das envolventes lentamente variáveis do campo. Por tal razão, vamos supor que o modo laser que sai da cavidade, e que interage com os átomos, é representado pelo operador do campo elétrico[2], para o campo 1 (bombeio),

$$\widehat{\vec{E}}_1(t) = \mathcal{E}_{0\omega_{L1}}\bar{\epsilon}_1 \left(e^{-i\omega_{L1}t}\hat{A}_1(t) + e^{i\omega_{L1}t}\hat{A}_1^\dagger(t)\right) , \tag{4.4}$$

[2]Para o campo 2 (sonda) o tratamento é análogo.

de freqüência angular ω_{L1}, igual à freqüência central do modo laser no interior da cavidade.

Levando em conta que, a distribuição espectral da intensidade do laser possui um perfil lorentziano, tomaremos o hamiltoniano do modo livre da cavidade[3] na forma

$$\hat{H}_{L1} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; |G_1(\omega)|^2 \hbar\omega \; \hat{a}^\dagger_{1\omega}\hat{a}_{1\omega} \; , \tag{4.5}$$

onde os operadores $\hat{a}_{1\omega}$ e $\hat{a}^\dagger_{1\omega}$ obedecem a relação de comutação

$$[\hat{a}_{i\omega}, \; \hat{a}^\dagger_{j\omega'}] = \delta_{ij}\delta(\omega - \omega') \; , \tag{4.6}$$

e a função adimensional $G_1(\omega)$ caracteriza a largura espectral finita da radiação laser no interior da cavidade. Essa largura deve sua origem à interação entre o modo da cavidade e os modos do vácuo, externos à mesma. Na Eq.(4.5) tomamos os limites de integração no intervalo $(-\infty, +\infty)$ porque a função $G_1(\omega)$ é diferente de zero apenas numa faixa de freqüências em torno da freqüência central do laser.

Na presente formulação, a largura espectral do campo $\widehat{\vec{E}}_1(t)$ é introduzida mediante o acoplamento entre esse campo e o campo intracavidade $\hat{a}_{1\omega}$, e que será considerado através do seguinte hamiltoniano linear

$$\hat{H}_{L1-c1} = i\hbar\kappa_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \left(\hat{a}^\dagger_{1\omega}\hat{A}_1(t) - \hat{A}^\dagger_1(t)\hat{a}_{1\omega}\right) \; . \tag{4.7}$$

A constante de acoplamento κ_1 será tomada igual a $\sqrt{\gamma_1/2\pi}$ que, como veremos a seguir, fornece o valor correto da largura do campo $\widehat{\vec{E}}_1(t)$ na região de interação com os átomos. Do ponto de vista experimental, o valor de κ_1 está definido pelo coeficiente de transmissão do espelho de saída $M1$ e o comprimento da cavidade laser na Fig. 4.2.

De maneira análoga, para o laser 2 (sonda), de freqüência angular ω_{L2}, definido pelo operador

$$\widehat{\vec{E}}_2(t) = \mathcal{E}_{0\omega_{L2}}\vec{\epsilon}_2 \left(e^{-i\omega_{L2}t}\hat{A}_2(t) + e^{i\omega_{L2}t}\hat{A}^\dagger_2(t)\right) \; , \tag{4.8}$$

teremos o hamiltoniano de acoplamento

$$\hat{H}_{L2-c2} = i\hbar\kappa_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \left(\hat{a}^\dagger_{2\omega}\hat{A}_2(t) - \hat{A}^\dagger_2(t)\hat{a}_{2\omega}\right) \; , \tag{4.9}$$

[3]Campo incidente sobre o espelho de saída $M1$ da cavidade laser.

com $\kappa_2 = \sqrt{\gamma_2/2\pi}$ e, o hamiltoniano da fonte desse laser é

$$\hat{H}_{L2} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; |G_2(\omega)|^2 \hbar\omega \; \hat{a}^\dagger_{2\omega}\hat{a}_{2\omega} \; , \tag{4.10}$$

tendo $G_2(\omega)$ uma interpretação análoga à definição de $G_1(\omega)$.

Um ponto importante a destacar está relacionado com a ação do reservatório sobre o laser na região de interação com os átomos. Para isto, vamos considerar a imagem física derivada a partir da Fig. 4.3.

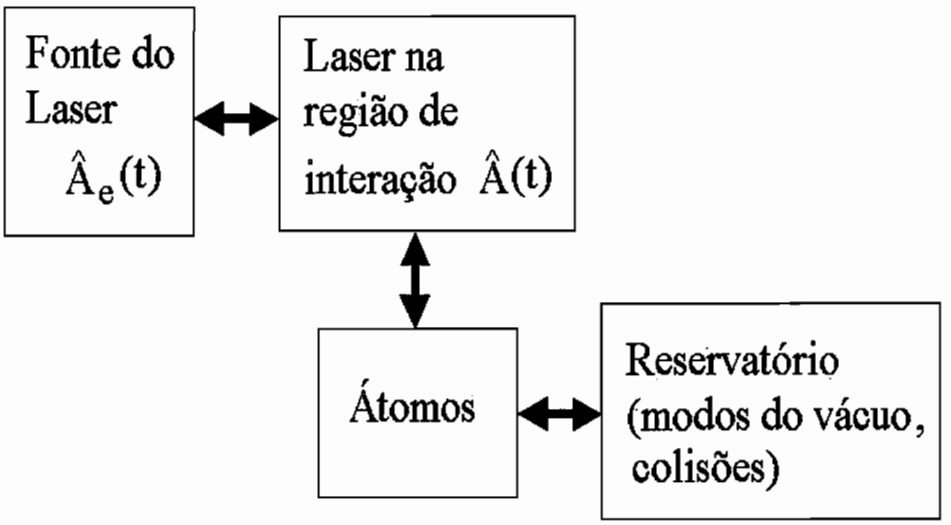

Figura 4.3: Modelo de interação para o sistema total.

Na ausência dos átomos, o feixe de luz laser se propagaria sem perdas pelo espaço, sofrendo apenas espalhamento nas partículas do ar. No caso de um laser intenso, esse espalhamento não afeta de maneira significativa a intensidade média do feixe, ou dito de outra forma, o número médio de fótons no volume espaço-temporal ocupado pelo laser é constante. Dessa maneira, a interação entre o modo propagante do campo e o reservatório formado pelos modos do vácuo é completamente desprezível ou inexistente.

Agora, quando o feixe de luz interage com os átomos, a desexcitação destes emitindo fótons espontaneamente para os modos não populados do campo é um processo que leva a uma diminuição do número de fótons do modo laser, introduzindo assim uma interação *efetiva* entre o reservatório e o laser.

A energia dos campos $\widehat{\vec{E}}_1(t)$ e $\widehat{\vec{E}}_2(t)$ na região de interação provêm das respectivas fontes descritas pelos hamiltonianos $\hat{H}_{L1}$ e $\hat{H}_{L2}$. Através das funções $G_1(\omega)$ e $G_2(\omega)$, por meio das quais consideramos a interação entre o modo da cavidade laser e os modos de vácuo externos à mesma, os hamiltonianos $\hat{H}_{L1}$ e $\hat{H}_{L2}$ representam uma diagonalização do hamiltoniano de um laser [27].

Hamiltoniano do reservatório

Para o reservatório, considerado como um conjunto de osciladores harmônicos de freqüências muito próximas, o hamiltoniano será tomado na forma habitual [27]

$$\hat{H}_R = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hbar\omega \; \hat{b}_\omega^\dagger \hat{b}_\omega \; , \tag{4.11}$$

onde, os operadores de aniquilação e criação $\hat{b}_\omega$ e $\hat{b}_\omega^\dagger$, representam os modos do reservatório, e satisfazem a seguinte relação de comutação

$$[\hat{b}_\omega, \; \hat{b}_{\omega'}^\dagger] = \delta(\omega - \omega') \; . \tag{4.12}$$

Hamiltoniano de interação átomo-campo

No ponto de vista dipolar elétrico, o hamiltoniano de interação entre os átomos e o campo é [29]

$$\hat{H}_{A-C} = -\sum_{j=1}^{N} \widehat{\vec{d}}_{1j}(t).\widehat{\vec{E}}_1(t) - \sum_{j=1}^{N} \widehat{\vec{d}}_{2j}(t).\widehat{\vec{E}}_2(t) \; , \tag{4.13}$$

onde $\widehat{\vec{d}}_{1j}(t)$ e $\widehat{\vec{d}}_{2j}(t)$ são os operadores do momento dipolar atômico das transições $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$ e $|0\rangle \leftrightarrow |2\rangle$, respectivamente, para o átomo j. Esses operadores são definidos pela relação

$$\widehat{\vec{d}}_{ij}(t) = \vec{\mathcal{D}}_i \left(\hat{\sigma}_{ij}^+(t) + \hat{\sigma}_{ij}^-(t)\right) \; , \; i = 1, 2 \; , \; j = 1, \ldots, N \; , \tag{4.14}$$

sendo $\vec{\mathcal{D}}_i$ o dipolo elétrico associado aos estados $|0\rangle$ e $|i\rangle$ e os operadores de levantamento e rebaixamento atômico $\hat{\sigma}_{ij}^+(t)$ e $\hat{\sigma}_{ij}^-(t)$ são definidos como

$$\hat{\sigma}_{ij}^+(t) \equiv |0\rangle\langle i|_j \; , \tag{4.15}$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^-(t) \equiv \left(\hat{\sigma}_{ij}^+(t)\right)^\dagger \; . \tag{4.16}$$

Utilizando a aproximação de onda girante[4], que consiste em desprezar os termos não ressonantes na Eq.(4.13), o hamiltoniano de interação entre os átomos e os campos toma a forma

$$\hat{H}_{A-C} = \hbar g_1 \sum_{j=1}^{N} \left(\hat{\sigma}_{1j}^{+}(t) e^{-i\omega_{L1}t} \hat{A}_1(t) + \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t) e^{i\omega_{L1}t} \hat{A}_1^{\dagger}(t) \right) + \\ + \hbar g_2 \sum_{j=1}^{N} \left(\hat{\sigma}_{2j}^{+}(t) e^{-i\omega_{L2}t} \hat{A}_2(t) + \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t) e^{i\omega_{L2}t} \hat{A}_2^{\dagger}(t) \right) , \tag{4.17}$$

onde as constantes de acoplamento, ou taxas de Rabi por fóton g_1 e g_2, estão determinadas pelas expressões

$$g_1 = -\frac{\mathcal{E}_{0\omega_{L1}} \vec{\mathcal{D}}_1 \bar{\epsilon}_1}{\hbar} , \tag{4.18}$$

e

$$g_2 = -\frac{\mathcal{E}_{0\omega_{L2}} \vec{\mathcal{D}}_2 \bar{\epsilon}_2}{\hbar} . \tag{4.19}$$

Hamiltoniano de interação átomo-reservatório

Por último, tomaremos o hamiltoniano de interação entre os átomos e o reservatório formado pelos modos do vácuo na forma

$$\hat{H}_{A-R} = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sum_{j=1}^{N} \left\{ \kappa_{A1}(\omega) \left(\hat{b}_{\omega}^{\dagger} \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t) - \hat{\sigma}_{1j}^{+}(t) \hat{b}_{\omega} \right) + \right. \\ \left. + \kappa_{A2}(\omega) \left(\hat{b}_{\omega}^{\dagger} \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t) - \hat{\sigma}_{2j}^{+}(t) \hat{b}_{\omega} \right) \right\} , \tag{4.20}$$

com o acoplamento radiativo de cada transição atômica dado pelas funções $\kappa_{A1}(\omega)$ e $\kappa_{A2}(\omega)$. O fato de considerar duas funções de acoplamento diferentes indica que cada uma das transições atômicas está acoplada ao reservatório de maneira independente. Como temos suposto uma configuração lambda fechada, após a emissão espontânea o átomo encontra-se necessariamente em um de seus dois estados fundamentais.

O hamiltoniano (4.20) descreve só o acoplamento dos átomos com os modos do vácuo e, portanto, não é suficiente quando considera-se a evolução das variáveis atômicas em presença de outros mecanismos de interação incoerente, tais como as colisões, que afetam tanto a coerência entre os estados fundamentais como a população dos mesmos.

[4]Conhecida na literatura pela sigla RWA (Rotating Wave Approximation).

Os parâmetros que determinam a evolução temporal das variáveis atômicas em presença de colisões, mesmo podendo ser calculados a partir de primeiros princípios, serão introduzidos fenomenologicamente, o que, do ponto de vista prático, torna mais simples a formulação do problema.

Uma possível representação do processo de colisão é mostrada na Fig. 4.4 onde, o átomo do tipo X, com uma energia média da ordem de kT e momento linear $\hbar\vec{K}_X$, colide com um átomo que interage com os feixes sonda e de bombeio, experimentando este último uma mudança de estado fundamental. A energia dos átomos X é considerada apenas suficiente para provocar a transferência de população entre os estados atômicos fundamentais $|1\rangle$ e $|2\rangle$, de modo que não existe liberação de energia de maneira radiativa durante o processo de colisão. Em outras palavras, a energia trocada em um processo de colisão é muito inferior à energia correspondente a uma transição ótica.

A duração temporal de uma colisão será considerada desprezível em comparação com as constantes temporais do sistema e, em particular, em comparação com o intervalo de tempo entre duas colisões sucessivas. Por outro lado, vamos supor também que a energia do primeiro estado excitado dos átomos X é grande em comparação com as energias das transições atômicas $\hbar\omega_1$ e $\hbar\omega_2$, de forma tal que o átomo que interage com os lasers não pode desexcitar-se transferindo sua energia aos átomos da espécie X.

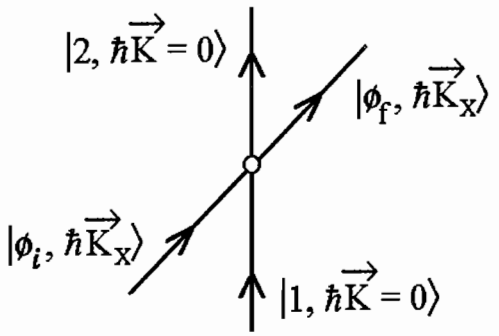

Figura 4.4: Diagrama do processo de colisão. O átomo que interage com os lasers encontra-se inicialmente no estado $|1, \hbar\vec{K} = 0\rangle$ e, como resultado da colisão com o átomo da espécie X inicialmente no estado $|\phi_i, \hbar\vec{K}_X\rangle$, passa ao estado $|2, \hbar\vec{K} = 0\rangle$. O processo físico (neste caso a colisão) é representado pelo simbolo "$\circ$".

Hamiltoniano total

O hamiltoniano total do sistema é, portanto,

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_{L1} + \hat{H}_{L2} + \hat{H}_{L1-c1} + \hat{H}_{L2-c2} + \hat{H}_{A-C} + \hat{H}_R + \hat{H}_{A-R} \ , \quad (4.21)$$

onde os hamiltonianos que aparecem no membro direito da Eq.(4.21) estão determinados pelas Eqs.(4.2), (4.5), (4.10), (4.7), (4.9), (4.17), (4.11), e (4.20), respectivamente.

Na Fig. 4.5 é apresentado o esquema dos processos físicos considerados na atual formulação da transparência induzida por laser, onde utilizamos a base dos estados desacoplados, para as diferentes multiplicidades do sistema átomo-campo.

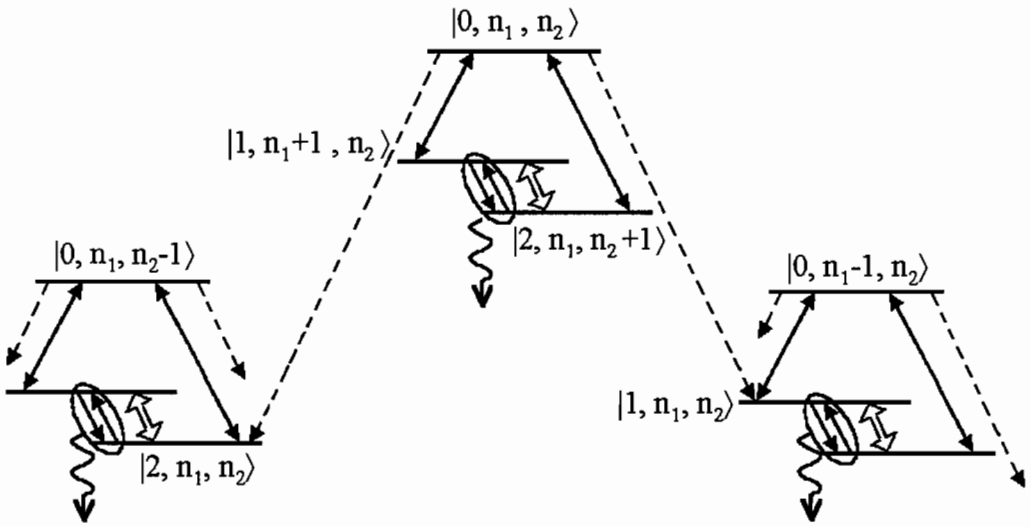

Figura 4.5: Processos físicos levados em conta na formulação do problema da transparência induzida.

Levando em consideração o número de fótons de cada campo, a evolução coerente do sistema pode ser descrita numa base formada por três vetores. Esses vetores agrupam-se formando multiplicidades e, em particular, uma determinada multiplicidade $\mathcal{M}(n_1, n_2)$ é definida pelos estados desacoplados $\{|0,\ n_1,\ n_2\rangle\ ,\ |1,\ n_1+1,\ n_2\rangle\ ,\ |2,\ n_1,\ n_2+1\rangle\}$ onde, no estado $|0,\ n_1,\ n_2\rangle$ o átomo encontra-se em seu estado excitado com n_1 (n_2) fótons no campo 1 (2). A flecha sólida de sentido duplo entre os estados $|0,\ n_1,\ n_2\rangle$ e $|1,\ n_1+1,\ n_2\rangle$ ($|2,\ n_1,\ n_2+1\rangle$) representa o acoplamento coerente dos respectivos estados atômicos, criado pelo campo de bombeio (sonda). Note-se que todos os estados desacoplados de uma mesma multiplicidade têm a mesma energia.

No entanto, para facilitar a representação dos diferentes processos físicos, eles foram esquematizados separadamente.

Os processos de emissão espontânea, que vinculam duas multiplicidades diferentes devido à perda de energia causada pelo vácuo, são representados pelas flechas tracejadas partindo do estado $|0,\ n_1,\ n_2\rangle$. Por outro lado, a coerência entre os estados fundamentais do átomo é representada pelas flechas contornadas pela elipse e o processo de transferência de população, por colisões, entre os estados fundamentais é representado pela flecha aberta de sentido duplo entre os estados $|1,\ n_1+1,\ n_2\rangle$ e $|2,\ n_1,\ n_2+1\rangle$, para a multiplicidade $\mathcal{M}(n_1, n_2)$. As colisões encontram-se em uma faixa de energias tal que não induzem transferência de população entre estados de diferentes multiplicidades. Por último, a flecha ondulada representa o decaimento da coerência dos estados fundamentais[5].

Finalmente, gostaríamos ressaltar que o intento de fazer uma analogia direta com a teoria dos lasers, pode levar a uma formulação incorreta do hamiltoniano do sistema. Em particular, um ponto importante é a natureza dos reservatórios, tanto para o modo laser quanto para os átomos. Na derivação do hamiltoniano do sistema na teoria dos lasers, o reservatório para o modo laser está formado pelos modos externos à cavidade laser. Já para os átomos do meio laser, aqueles que geram por emissão estimulada a radiação laser no interior da cavidade, o reservatório deve sua existência aos fônons da rede cristalina, processos de colisões atômicas quando o meio laser é um gás, às flutuações do bombeio externo que cria a inversão de população, modos do vácuo, etc.

4.1.2 Equações quânticas de Langevin para os campos

Uma vez definido o hamiltoniano total do sistema, estamos em condições de derivar as equações quânticas de Langevin para os operadores dos campos e os operadores atômicos.

Equação de Langevin para o campo de bombeio

Comecemos derivando em primeiro lugar a equação de evolução temporal do campo de bombeio na região de interação com os átomos, $\hat{A}_1(t)$. A equação de Heisenberg desse operador é

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_1(t),\ \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_1(t),\ \hat{H}_{L1-cl}] + \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}_1(t),\ \hat{H}_{A-C}]\ . \quad (4.22)$$

[5]Uma análise similar pode ser realizada para as multiplicidades restantes.

Empregando as definições dos hamiltonianos que aparecem na Eq.(4.22), encontramos a equação

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = -ig_1 \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t) e^{i\omega_{L1}t} - \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{a}_{1\omega} \; , \tag{4.23}$$

que, definindo a envolvente lentamente variável $\hat{\tilde{\sigma}}_{1j}^{-}(t)$ do operador de rebaixamento atômico

$$\hat{\tilde{\sigma}}_{1j}^{-}(t) = \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t) e^{i\omega_{L1}t} \; , \tag{4.24}$$

toma a forma

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = -ig_1 \sum_{j=1}^{N} \hat{\tilde{\sigma}}_{1j}^{-}(t) - \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{a}_{1\omega} \; . \tag{4.25}$$

De forma análoga, para o operador de aniquilação $\hat{a}_{1\omega}$ do modo laser da fonte, achamos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}_{1\omega}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_{1\omega}, \; \hat{H}] = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_{1\omega}, \; \hat{H}_{L1}] + \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}_{1\omega}, \; \hat{H}_{L1-c1}] = \\ &= -i\omega \; \hat{a}_{1\omega} |G_1(\omega)|^2 + \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \hat{A}_1(t) \; . \end{aligned} \tag{4.26}$$

Integrando formalmente a equação anterior obtemos a solução seguinte para $\hat{a}_{1\omega}(t)$, como função das condições iniciais

$$\hat{a}_{1\omega}(t) = \hat{a}_{1\omega}(t_0) |G_1(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_0)} + \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \int_{t_0}^{t} dt' \, \hat{A}_1(t') e^{-i\omega(t-t')} \; , \; t > t_0 \; , \tag{4.27}$$

ou, em termos das condições finais

$$\hat{a}_{1\omega}(t) = \hat{a}_{1\omega}(t_1) |G_1(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_1)} - \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \int_{t}^{t_1} dt' \, \hat{A}_1(t') e^{-i\omega(t-t')} \; , \; t < t_1 \; . \tag{4.28}$$

Equação de evolução para $t > t_0$

Substituindo agora a Eq.(4.27) em (4.25), teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = -ig_1 \sum_{j=1}^{N} \hat{\tilde{\sigma}}_{1j}^{-}(t) - \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{a}_{1\omega}(t_0) |G_1(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_0)} - \\ - \frac{\gamma_1}{2\pi} \int_{t_0}^{t} dt' \, \hat{A}_1(t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; e^{-i\omega(t-t')} \; . \end{aligned} \tag{4.29}$$

Utilizando as propriedades seguintes da função delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi \; \delta(t-t') \; , \tag{4.30}$$

e

$$\int_{t_0}^{t} dt' \; f(t')\delta(t-t') = \frac{1}{2} f(t) \; , \tag{4.31}$$

achamos para a evolução temporal de $\hat{A}_1(t)$ a equação

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} &= -\frac{\gamma_1}{2}\hat{A}_1(t) - ig_1 \sum_{j=1}^{N} \hat{\tilde{\sigma}}_{1j}^{-}(t) - \\ &- \sqrt{\frac{\gamma_1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{a}_{1\omega}(t_0)|G_1(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_0)} \; . \end{aligned} \tag{4.32}$$

Na equação anterior, t_0 é uma constante de tempo arbitrária que deve obedecer a relação $t_0 < t$ e, em particular, tomando seu valor anterior ao instante de tempo em que começa a interação entre o laser e os átomos, podemos definir o campo que serve de fonte para o laser que interage com os átomos como sendo[6]

$$\hat{A}_{1e}(t) \equiv -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{a}_{1\omega}(t_0)|G_1(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_0)} \; . \tag{4.33}$$

Dessa forma, a evolução temporal do campo que interage com os átomos é descrita pela equação

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}\hat{A}_1(t) - ig_1\hat{S}_1^{-}(t) + \sqrt{\gamma_1}\hat{A}_{1e}(t) \; , \tag{4.34}$$

onde introduzimos o operador de polarização macroscópica $\hat{S}_1^{-}(t)$, definido pela relação

$$\hat{S}_1^{-}(t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{\tilde{\sigma}}_{1j}^{-}(t) \; . \tag{4.35}$$

[6]Note que $\hat{A}_{1e}(t)$ tem dimensão de raiz quadrada de freqüência.

Equação de evolução para $t < t_1$

Se tivéssemos empregado a solução (4.28) na Eq.(4.25), teríamos chegado à equação de evolução

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = \frac{\gamma_1}{2}\hat{A}_1(t) - ig_1\hat{S}_1^-(t) + \sqrt{\gamma_1}\hat{A}_{1s}(t) \ , \tag{4.36}$$

onde o campo na "saída" da região de interação (campo "visto" pelos fotodetectores), é definido por

$$\hat{A}_{1s}(t) \equiv -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ \hat{a}_{1\omega}(t_1)|G_1(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_1)} \ , \tag{4.37}$$

sendo t_1 um instante de tempo posterior à interação.

Relação de "entrada-saída"

Como nosso interesse reside em estudar as propriedades do campo $\hat{A}_{1s}(t)$ após a interação com o meio atômico, então é necessário determinar a relação do mesmo com os campos $\hat{A}_{1e}(t)$ e na região de interação $\hat{A}_1(t)$.

Essa relação é obtida a partir das Eqs.(4.34) e (4.36), subtraindo uma equação da outra. Nesse caso, encontramos

$$0 = \gamma_1\hat{A}_1(t) + \sqrt{\gamma_1}\left(\hat{A}_{1s}(t) - \hat{A}_{1e}(t)\right) \ , \tag{4.38}$$

e finalmente, para $\gamma_1 \neq 0$, a relação entre esses campos é

$$\hat{A}_{1s}(t) = \hat{A}_{1e}(t) - \sqrt{\gamma_1}\hat{A}_1(t) \ , \tag{4.39}$$

a qual permite estudar as propriedades do feixe laser após interação com os átomos, como função das propriedades do feixe incidente.

Equação de Langevin para o campo sonda

Todo o procedimento anterior pode ser utilizado para derivar a equação de evolução temporal do campo sonda (campo 2) que, em termos do campo de sua fonte laser, tem a forma

$$\frac{d\hat{A}_2(t)}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\hat{A}_2(t) - ig_2\hat{S}_2^-(t) + \sqrt{\gamma_2}\hat{A}_{2e}(t) \ , \tag{4.40}$$

onde o operador de polarização macroscópica é definido pela expressão

$$\hat{S}_2^-(t) = \sum_{j=1}^{N}\hat{\tilde{\sigma}}_{2j}^-(t) \ , \tag{4.41}$$

e o campo da fonte é dado por

$$\hat{A}_{2e}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{a}_{2\omega}(t_0)|G_2(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_0)} \; . \tag{4.42}$$

A relação de "entrada-saída" para esse campo é

$$\hat{A}_{2s}(t) = \hat{A}_{2e}(t) - \sqrt{\gamma_2}\hat{A}_2(t) \; , \tag{4.43}$$

estando o campo $\hat{A}_{2s}(t)$ determinado a partir da equação

$$\hat{A}_{2s}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \; \hat{a}_{2\omega}(t_1)|G_2(\omega)|^2 e^{-i\omega(t-t_1)} \; . \tag{4.44}$$

Finalmente, devemos notar que a partir das definições do campo da fonte Eq.(4.33) e do campo detectado Eq.(4.37), a quantidade

$$\langle\Psi|\hat{A}^{\dagger}_{1(2)e}(t) \; \hat{A}_{1(2)e}(t)|\Psi\rangle \; , \tag{4.45}$$

determina o fluxo de fótons, no estado $|\Psi\rangle$, emitidos pela fonte pois, como o operador $\hat{A}_{1(2)e}(t)$ tem unidades de raiz quadrada de freqüência, então o valor médio do operador $\hat{A}^{\dagger}_{1(2)e}(t) \; \hat{A}_{1(2)e}(t)$ permite saber qual é o número médio de fótons que na unidade de tempo atravessa a seção transversal do feixe.

De maneira análoga, a grandeza

$$\langle\Psi|\hat{A}^{\dagger}_{1(2)s}(t) \; \hat{A}_{1(2)s}(t)|\Psi\rangle \; , \tag{4.46}$$

permite calcular o fluxo de fótons que deixa a região de interação com os átomos.

Linearização do campo da fonte do laser

Por último, as equações definitivas da evolução temporal dos operadores dos campos de bombeio $\hat{A}_1(t)$ e sonda $\hat{A}_2(t)$ são obtidas linearizando as flutuações dos operadores de aniquilação correspondentes à fonte de cada laser, $\hat{A}_{1e}(t)$ e $\hat{A}_{2e}(t)$, em torno de seus valores médios, $\alpha_{1e}(t)$ e $\alpha_{2e}(t)$, respectivamente.

Definindo a linearização através das relações

$$\hat{A}_{1e}(t) = \alpha_{1e}(t) + \delta\hat{A}_{1e}(t) \; , \tag{4.47}$$

e

$$\hat{A}_{2e}(t) = \alpha_{2e}(t) + \delta\hat{A}_{2e}(t) \; , \tag{4.48}$$

para a evolução dos operadores dos campos de bombeio e sonda encontramos

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}\hat{A}_1(t) - ig_1\hat{S}_1^-(t) + \sqrt{\gamma_1}\alpha_{1e}(t) + \sqrt{\gamma_1}\delta\hat{A}_{1e}(t) \ , \tag{4.49}$$

$$\frac{d\hat{A}_2(t)}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\hat{A}_2(t) - ig_2\hat{S}_2^-(t) + \sqrt{\gamma_2}\alpha_{2e}(t) + \sqrt{\gamma_2}\delta\hat{A}_{2e}(t) \ . \tag{4.50}$$

Na Eq.(4.49), o primeiro termo do membro direito da equação determina a largura do laser que interage com os átomos. Já o segundo termo é o resultado da interação entre o feixe laser e o meio atômico e, como veremos nas próximas seções, esse termo é responsável pelo acoplamento entre os feixes sonda e de bombeio, através da coerência entre os estados fundamentais dos átomos. A seguir, temos o termo que designa a fonte que alimenta o feixe laser que interage com os átomos, com as respectivas flutuações representadas pelo operador $\delta\hat{A}_{1e}(t)$. Esse operador atua como força de Langevin para o operador do campo de bombeio $\hat{A}_1(t)$ e, apesar de ter a propriedade de possuir um valor médio nulo, $\langle\delta\hat{A}_{1e}(t)\rangle = 0$, sua variância é diferente de zero como conseqüência da relação de comutação entre os operadores $\hat{A}_{1e}(t)$ e $\hat{A}_{1e}^\dagger(t)$.

Na ausência do meio atômico, a Eq.(4.49) descreve a evolução de um campo livre de largura espectral γ_1, alimentado por uma fonte caracterizada pelo operador $\hat{A}_{1e}(t)$.

Devido à estreita analogia entre as Eqs.(4.49) e (4.50), uma análise desta última equação nos leva às mesmas conclusões derivadas para o campo $\hat{A}_1(t)$.

4.1.3 Equações quânticas de Langevin para as variáveis atômicas

Primeiramente derivaremos uma equação de evolução temporal geral, válida para qualquer operador atômico.

Suponhamos que $\hat{o}_k(t)$, com $k = 1, \ldots, N$, represente um operador atômico qualquer, correspondente ao átomo k. Então, a sua equação de Heisenberg-Langevin é

$$\frac{d\hat{o}_k(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{o}_k(t),\ \hat{H}_A] + \frac{1}{i\hbar}[\hat{o}_k(t),\ \hat{H}_{A-C}] + \frac{1}{i\hbar}[\hat{o}_k(t),\ \hat{H}_{A-R}] \ , \tag{4.51}$$

que, utilizando as definições dos hamiltonianos $\hat{H}_A$, $\hat{H}_{A-C}$ e $\hat{H}_{A-R}$, toma a

forma

$$\frac{d\hat{o}_k(t)}{dt} = i\omega_1 \sum_{j=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}(t)] + i\omega_2 \sum_{j=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}(t)] -$$
$$- ig_1 \sum_{j=1}^{N}\left([\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{+}(t)]e^{-i\omega_{L1}t}\hat{A}_1(t) + \hat{A}_1^{\dagger}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t)]e^{i\omega_{L1}t}\right) -$$
$$- ig_2 \sum_{j=1}^{N}\left([\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{+}(t)]e^{-i\omega_{L2}t}\hat{A}_2(t) + \hat{A}_2^{\dagger}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t)]e^{i\omega_{L2}t}\right) +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \sum_{j=1}^{N}\Big\{\kappa_{A1}(\omega)\left(\hat{b}_\omega^{\dagger}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t)] - [\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{+}(t)]\hat{b}_\omega\right) +$$
$$+ \kappa_{A2}(\omega)\left(\hat{b}_\omega^{\dagger}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t)] - [\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{+}(t)]\hat{b}_\omega\right)\Big\}\ . \qquad (4.52)$$

Para o operador do reservatório $\hat{b}_\omega$, a equação de evolução em função do tempo é

$$\frac{d\hat{b}_\omega}{dt} = -i\omega\hat{b}_\omega + \sum_{j=1}^{N}\kappa_{A1}(\omega)\hat{\sigma}_{1j}^{-}(t) + \sum_{j=1}^{N}\kappa_{A2}(\omega)\hat{\sigma}_{2j}^{-}(t)\ , \qquad (4.53)$$

cuja solução formal após integração tem a forma

$$\hat{b}_\omega(t) = \hat{b}_\omega(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} + \kappa_{A1}(\omega)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{\sigma}_{1j}^{-}(t')e^{-i\omega(t-t')} +$$
$$+ \kappa_{A2}(\omega)\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{\sigma}_{2j}^{-}(t')e^{-i\omega(t-t')}\ . \qquad (4.54)$$

Substituindo (4.54) na Eq.(4.52) e, empregando a primeira hipótese de Markov, encontramos a seguinte equação quântica de Langevin geral (ver

apêndice B)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\hat{o}_k(t)}{dt} &= i\omega_1 \sum_{j=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}(t)] + i\omega_2 \sum_{j=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}(t)] - \\
&- ig_1 \sum_{j=1}^{N}\Big([\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{+}(t)]e^{-i\omega_{L1}t}\hat{A}_1(t) + \hat{A}_1^{\dagger}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t)]e^{i\omega_{L1}t}\Big) - \\
&- ig_2 \sum_{j=1}^{N}\Big([\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{+}(t)]e^{-i\omega_{L2}t}\hat{A}_2(t) + \hat{A}_2^{\dagger}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t)]e^{i\omega_{L2}t}\Big) + \\
&+ \sum_{j=1}^{N}\Big\{\sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{b}_{\omega}^{\dagger}(t_0)e^{i\omega(t-t_0)}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t)] + \\
&+\pi\sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}\hat{\sigma}_{1l}^{+}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t)] + \pi\sqrt{\frac{\Gamma_2}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}\hat{\sigma}_{2l}^{+}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{-}(t)] - \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ [\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{+}(t)]\hat{b}_{\omega}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} - \\
&-\pi\sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{+}(t)]\hat{\sigma}_{1l}^{-}(t) - \pi\sqrt{\frac{\Gamma_2}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{1j}^{+}(t)]\hat{\sigma}_{2l}^{-}(t)\Big) + \\
&+ \sqrt{\frac{\Gamma_2}{2\pi}}\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{b}_{\omega}^{\dagger}(t_0)e^{i\omega(t-t_0)}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t)] + \\
&+\pi\sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}\hat{\sigma}_{1l}^{+}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t)] + \pi\sqrt{\frac{\Gamma_2}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}\hat{\sigma}_{2l}^{+}(t)[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{-}(t)] - \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ [\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{+}(t)]\hat{b}_{\omega}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} - \\
&-\pi\sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{+}(t)]\hat{\sigma}_{1l}^{-}(t) - \pi\sqrt{\frac{\Gamma_2}{2\pi}}\sum_{l=1}^{N}[\hat{o}_k(t),\ \hat{\sigma}_{2j}^{+}(t)]\hat{\sigma}_{2l}^{-}(t)\Big)\Big\}\ , \qquad (4.55)
\end{aligned}
$$

onde as funções de acoplamento foram tomadas da forma

$$\kappa_{A1}(\omega) = \sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}}\ , \qquad (4.56)$$

$$\kappa_{A2}(\omega) = \sqrt{\frac{\Gamma_2}{2\pi}}\ , \qquad (4.57)$$

e os parâmetros Γ_1 e Γ_2 representam as taxas de decaimento do átomo por emissão espontânea em cada uma das transições $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ e $|0\rangle \rightarrow |2\rangle$, respectivamente.

Como exemplo, derivemos a equação de evolução temporal do operador $\hat{\sigma}_{1j}(t)$ que determina a população do estado fundamental atômico $|1\rangle$, sendo que as equações de Heisenberg-Langevin para os restantes operadores atômicos são derivadas de maneira similar.

Começaremos calculando os comutadores que aparecem na Eq.(4.55), tomando como operador atômico geral $\hat{o}_k(t) = \hat{\sigma}_{1k}(t)$. Nesse caso, omitindo a dependência temporal dos operadores para simplificar a escrita, encontramos

$$\begin{aligned}[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}_{1j}] &= |1\rangle\langle 1|_k|1\rangle\langle 1|_j - |1\rangle\langle 1|_j|1\rangle\langle 1|_k = \\ &= |1\rangle\langle 1|_k(|1\rangle\langle 1|_k\delta_{jk}) - (|1\rangle\langle 1|_k\delta_{jk})|1\rangle\langle 1|_k = \\ &= |1\rangle\langle 1|_k\delta_{jk} - |1\rangle\langle 1|_k\delta_{jk} = 0\ ,\end{aligned} \tag{4.58}$$

onde temos usado a definição dos operadores em termos dos estados atômicos.

Realizando um cálculo similar, encontramos

$$[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}_{2j}] = 0\ . \tag{4.59}$$

Por outro lado, a partir das definições dos operadores de levantamento e rebaixamento atômico de cada uma das transições, obtemos os seguintes resultados para os comutadores que envolvem esses operadores

$$[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^+_{1j}] = |1\rangle\langle 1|_k|0\rangle\langle 1|_j - |0\rangle\langle 1|_j|1\rangle\langle 1|_k = -\hat{\sigma}^+_{1k}\delta_{jk}\ , \tag{4.60}$$

$$[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^-_{1j}] = |1\rangle\langle 1|_k|1\rangle\langle 0|_j - |1\rangle\langle 0|_j|1\rangle\langle 1|_k = \hat{\sigma}^-_{1k}\delta_{jk}\ , \tag{4.61}$$

$$[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^+_{2j}] = |1\rangle\langle 1|_k|0\rangle\langle 2|_j - |0\rangle\langle 2|_j|1\rangle\langle 1|_k = 0\ , \tag{4.62}$$

$$[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^-_{2j}] = |1\rangle\langle 1|_k|2\rangle\langle 0|_j - |2\rangle\langle 0|_j|1\rangle\langle 1|_k = 0\ . \tag{4.63}$$

Com as relações anteriores podemos calcular os seguintes produtos entre operadores e comutadores, presentes na Eq.(4.55)

$$\hat{\sigma}^+_{1l}[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^-_{1j}] = |0\rangle\langle 1|_l|1\rangle\langle 0|_k\delta_{jk} = |0\rangle\langle 0|_l\delta_{kl}\delta_{jk} = \hat{\sigma}_{0l}\delta_{kl}\delta_{jk}\ , \tag{4.64}$$

$$\hat{\sigma}^+_{2l}[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^-_{1j}] = |0\rangle\langle 2|_l|1\rangle\langle 0|_k\delta_{jk} = 0\ , \tag{4.65}$$

$$[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^+_{1j}]\hat{\sigma}^-_{1l} = -|0\rangle\langle 1|_k\delta_{jk}|1\rangle\langle 0|_l = -|0\rangle\langle 0|_l\delta_{kl}\delta_{jk} = -\hat{\sigma}_{0l}\delta_{kl}\delta_{jk}\ , \tag{4.66}$$

$$[\hat{\sigma}_{1k},\ \hat{\sigma}^+_{1j}]\hat{\sigma}^-_{2l} = -|0\rangle\langle 1|_k\delta_{jk}|2\rangle\langle 0|_l = 0\ . \tag{4.67}$$

As expressões (4.58) - (4.67) são suficientes para encontrar a equação da evolução temporal de $\hat{\sigma}_{1k}(t)$

$$\frac{d\hat{\sigma}_{1k}(t)}{dt} = -ig_1 \sum_{j=1}^{N} \left(-\hat{\sigma}_{1k}^{+}\delta_{jk}e^{-i\omega_{L1}t}\hat{A}_1(t) + \hat{A}_1^{\dagger}(t)\hat{\sigma}_{1k}^{-}\delta_{jk}e^{i\omega_{L1}t} \right) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N} \left\{ \sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{b}_{\omega}^{\dagger}(t_0)e^{i\omega(t-t_0)}\hat{\sigma}_{1k}^{-}\delta_{jk} + \pi\sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}} \sum_{l=1}^{N} \hat{\sigma}_{0l}\delta_{kl}\delta_{jk} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{\sigma}_{1k}^{+}\delta_{jk}\hat{b}_{\omega}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} + \pi\sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}} \sum_{l=1}^{N} \hat{\sigma}_{0l}\delta_{kl}\delta_{jk} \right) \right\} . \quad (4.68)$$

Efetuando as somas indicadas em (4.68), encontramos

$$\frac{d\hat{\sigma}_{1k}(t)}{dt} = ig_1\hat{\sigma}_{1k}^{+}(t)e^{-i\omega_{L1}t}\hat{A}_1(t) - ig_1\hat{A}_1^{\dagger}(t)\hat{\sigma}_{1k}^{-}(t)e^{i\omega_{L1}t} +$$
$$+ \sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{b}_{\omega}^{\dagger}(t_0)e^{i\omega(t-t_0)}\hat{\sigma}_{1k}^{-}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{\sigma}_{1k}^{+}(t)\hat{b}_{\omega}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} \right) +$$
$$+\Gamma_1\hat{\sigma}_{0k}(t) \quad , \quad (4.69)$$

que, definindo a força de Langevin

$$\hat{f}_{\hat{\sigma}_{1k}}(t) \equiv \sqrt{\frac{\Gamma_1}{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{b}_{\omega}^{\dagger}(t_0)e^{i\omega(t-t_0)}\hat{\sigma}_{1k}^{-}(t) + \right.$$
$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \hat{\sigma}_{1k}^{+}(t)\hat{b}_{\omega}(t_0)e^{-i\omega(t-t_0)} \right) , \quad (4.70)$$

e utilizando os operadores lentamente variáveis

$$\hat{\tilde{\sigma}}_{1k}^{+}(t) = \hat{\sigma}_{1k}^{+}(t)e^{-i\omega_{L1}t} \quad , \quad \hat{\tilde{\sigma}}_{1k}^{-}(t) = \hat{\sigma}_{1k}^{-}(t)e^{i\omega_{L1}t} , \quad (4.71)$$

toma a forma

$$\frac{d\hat{\sigma}_{1k}(t)}{dt} = ig_1\hat{\tilde{\sigma}}_{1k}^{+}(t)\hat{A}_1(t) - ig_1\hat{A}_1^{\dagger}(t)\hat{\tilde{\sigma}}_{1k}^{-}(t) + \Gamma_1\hat{\sigma}_{0k}(t) + \hat{f}_{\hat{\sigma}_{1k}}(t) . \quad (4.72)$$

Finalmente, considerando as colisões, a equação que descreve a evolução temporal da população macroscópica $\hat{P}_1(t)$ do estado fundamental $|1\rangle$ é

$$\frac{d\hat{P}_1(t)}{dt} = \Gamma_1\hat{P}_0(t) + \Gamma_{2\to1}\hat{P}_2(t) - \Gamma_{1\to2}\hat{P}_1(t) +$$
$$+ ig_1\hat{S}_1^{+}(t)\hat{A}_1(t) - ig_1\hat{A}_1^{\dagger}(t)\hat{S}_1^{-}(t) + \hat{F}_{\hat{P}_1}(t) , \quad (4.73)$$

onde

$$\hat{P}_i(t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_{ij}(t) \quad i = 0, 1, 2 \ , \tag{4.74}$$

$\hat{F}_{\hat{P}_1}(t)$ é a resultante das forças de Langevin, $\hat{S}_1^+(t) = (\hat{S}_1^-(t))^\dagger$ e $\Gamma_{1\to 2}$ ($\Gamma_{2\to 1}$) representa a taxa de transferência de população do estado atômico $|1\rangle$ ($|2\rangle$) para o estado $|2\rangle$ ($|1\rangle$), como resultado do processo de colisão.

A força de Langevin $\hat{F}_{\hat{P}_1}(t)$ tem um valor médio nulo, o que pode ser comprovado facilmente a partir da definição (4.70). Para a função de correlação de dois tempos dessa força, tomaremos uma distribuição do tipo delta de Dirac

$$\langle \hat{F}_{\hat{P}_1}(t)\ \hat{F}^\dagger_{\hat{P}_1}(t')\rangle = D_{\hat{P}_1}\delta(t - t') \ , \tag{4.75}$$

onde, $D_{\hat{P}_1}$ é o coeficiente de difusão que caracteriza as flutuações de $\hat{F}_{\hat{P}_1}(t)$. A aproximação (4.75) é aplicável quando a situação física é tal que a "memoria" do reservatório é muito curta em comparação com as constantes temporais do sistema. Dito de outra forma, a força $\hat{F}_{\hat{P}_1}(t)$ descreve um processo estocástico Markoviano.

De maneira análoga, as equações que determinam a evolução temporal das variáveis atômicas macroscópicas $\hat{P}_0(t)$, $\hat{P}_2(t)$, $\hat{S}_1^-(t)$, $\hat{S}_2^-(t)$ e $\hat{S}_{12}^-(t)$ são obtidas utilizando o procedimento anterior. Essas equações têm a forma

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{P}_0(t)}{dt} = &-(\Gamma_1 + \Gamma_2)\hat{P}_0(t) - ig_1\hat{S}_1^+(t)\hat{A}_1(t) + ig_1\hat{A}_1^\dagger(t)\hat{S}_1^-(t) - \\ &- ig_2\hat{S}_2^+(t)\hat{A}_2(t) + ig_2\hat{A}_2^\dagger(t)\hat{S}_2^-(t) + \hat{F}_{\hat{P}_0}(t) \ ,\end{aligned} \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{P}_2(t)}{dt} = &\ \Gamma_2\hat{P}_0(t) + \Gamma_{1\to 2}\hat{P}_1(t) - \Gamma_{2\to 1}\hat{P}_2(t) + \\ &+ ig_2\hat{S}_2^+(t)\hat{A}_2(t) - ig_2\hat{A}_2^\dagger(t)\hat{S}_2^-(t) + \hat{F}_{\hat{P}_2}(t) \ ,\end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{S}_1^-(t)}{dt} = &-\left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L1}\right)\hat{S}_1^-(t) + ig_1\left(\hat{P}_0(t) - \hat{P}_1(t)\right)\hat{A}_1(t) - \\ &- ig_2\hat{S}_{12}^+(t)\hat{A}_2(t) + \hat{F}_{\hat{S}_1}(t) \ ,\end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{S}_2^-(t)}{dt} = &-\left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L2}\right)\hat{S}_2^-(t) + ig_2\left(\hat{P}_0(t) - \hat{P}_2(t)\right)\hat{A}_2(t) - \\ &- ig_1\hat{S}_{12}^-(t)\hat{A}_1(t) + \hat{F}_{\hat{S}_2}(t) \ ,\end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\frac{d\hat{S}_{12}^{-}(t)}{dt} = -\left(\Gamma_{12} + i\,\delta_R\right)\hat{S}_{12}^{-}(t) - ig_1\hat{S}_2^{-}(t)\hat{A}_1^{\dagger}(t) + ig_2\hat{S}_1^{+}(t)\hat{A}_2(t) + \\ + \hat{F}_{\hat{S}_{12}}(t)\ . \qquad (4.80)$$

Na derivação das equações anteriores introduzimos as dessintonias com relação às freqüências atômicas $\delta_{L1} = \omega_{L1} - \omega_1$ e $\delta_{L2} = \omega_{L2} - \omega_2$, a dessintonia Raman $\delta_R = \delta_{L1} - \delta_{L2}$, a taxa Γ_{12} que representa a perda de coerência por colisões e, além das definições anteriores, utilizamos a condição de normalização

$$\hat{P}_0(t) + \hat{P}_1(t) + \hat{P}_2(t) = N\ , \qquad (4.81)$$

relacionada ao fato de que a probabilidade de encontrar um átomo em algum de seus estados deve ser igual à unidade, o que é uma conseqüência de estarmos tratando uma configuração fechada dos níveis atômicos.

A coerência macroscópica entre os estados fundamentais $\hat{S}_{12}^{-}(t)$ é definida da forma seguinte

$$\hat{S}_{12}^{-}(t) = \sum_{j=1}^{N} \hat{\tilde{\sigma}}_{12j}^{-}(t)\ , \qquad (4.82)$$

onde

$$\hat{\tilde{\sigma}}_{12j}^{-}(t) = |2\rangle\langle 1|_j\ e^{i(\omega_{L2}-\omega_{L1})t}\ . \qquad (4.83)$$

Para finalizar a derivação das equações que determinam a evolução das variáveis atômicas, vamos introduzir as inversões $\hat{W}_1(t)$ e $\hat{W}_2(t)$, definidas através das relações

$$\hat{W}_1(t) = \hat{P}_0(t) - \hat{P}_1(t)\ , \qquad (4.84)$$
$$\hat{W}_2(t) = \hat{P}_0(t) - \hat{P}_2(t)\ . \qquad (4.85)$$

As equações que satisfazem essas variáveis são determinadas a partir de (4.73), (4.76) e (4.77), e têm a forma

$$\frac{d\hat{W}_1(t)}{dt} = \Gamma_1^{(1)}\hat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(1)}\hat{W}_2(t) + 2ig_1\hat{A}_1^{\dagger}(t)\hat{S}_1^{-}(t) - 2ig_1\hat{S}_1^{+}(t)\hat{A}_1(t) + \\ + ig_2\hat{A}_2^{\dagger}(t)\hat{S}_2^{-}(t) - ig_2\hat{S}_2^{+}(t)\hat{A}_2(t) + \Gamma_3^{(1)}N + \hat{F}_{\hat{W}_1}(t)\ , \qquad (4.86)$$

$$\frac{d\hat{W}_2(t)}{dt} = \Gamma_1^{(2)}\hat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(2)}\hat{W}_2(t) + ig_1\hat{A}_1^{\dagger}(t)\hat{S}_1^{-}(t) - ig_1\hat{S}_1^{+}(t)\hat{A}_1(t) + \\ + 2ig_2\hat{A}_2^{\dagger}(t)\hat{S}_2^{-}(t) - 2ig_2\hat{S}_2^{+}(t)\hat{A}_2(t) + \Gamma_3^{(2)}N + \hat{F}_{\hat{W}_2}(t)\ , \qquad (4.87)$$

onde, os parâmetros dissipativos são dados pelas expressões

$$\Gamma_1^{(1)} = -\frac{1}{3}(2\Gamma_1 + \Gamma_2) - \frac{2}{3}\Gamma_{1\to 2} - \frac{1}{3}\Gamma_{2\to 1} \ , \tag{4.88}$$

$$\Gamma_2^{(1)} = -\frac{1}{3}(2\Gamma_1 + \Gamma_2) + \frac{1}{3}\Gamma_{1\to 2} + \frac{2}{3}\Gamma_{2\to 1} \ , \tag{4.89}$$

$$\Gamma_3^{(1)} = -\frac{1}{3}(2\Gamma_1 + \Gamma_2) + \frac{1}{3}\Gamma_{1\to 2} - \frac{1}{3}\Gamma_{2\to 1} \ , \tag{4.90}$$

$$\Gamma_1^{(2)} = -\frac{1}{3}(\Gamma_1 + 2\Gamma_2) + \frac{2}{3}\Gamma_{1\to 2} + \frac{1}{3}\Gamma_{2\to 1} \ , \tag{4.91}$$

$$\Gamma_2^{(2)} = -\frac{1}{3}(\Gamma_1 + 2\Gamma_2) - \frac{1}{3}\Gamma_{1\to 2} - \frac{2}{3}\Gamma_{2\to 1} \ , \tag{4.92}$$

$$\Gamma_3^{(2)} = -\frac{1}{3}(\Gamma_1 + 2\Gamma_2) - \frac{1}{3}\Gamma_{1\to 2} + \frac{1}{3}\Gamma_{2\to 1} \ . \tag{4.93}$$

4.1.4 Equações quânticas de Langevin para o sistema átomo-campo

Para resumir os resultados desta seção, reescreveremos o conjunto das 12 equações que sintetizam a formulação atual do problema da transparência induzida por laser, levando sempre em consideração que o limite de validade dessas equações está determinado pelas condições e suposições utilizadas para sua derivação.

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{W}_1(t)}{dt} &= \Gamma_1^{(1)}\hat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(1)}\hat{W}_2(t) + 2ig_1\hat{A}_1^\dagger(t)\hat{S}_1^-(t) - 2ig_1\hat{S}_1^+(t)\hat{A}_1(t) + \\ &+ ig_2\hat{A}_2^\dagger(t)\hat{S}_2^-(t) - ig_2\hat{S}_2^+(t)\hat{A}_2(t) + \Gamma_3^{(1)}N + \hat{F}_{\hat{W}_1}(t) \ ,\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{W}_2(t)}{dt} &= \Gamma_1^{(2)}\hat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(2)}\hat{W}_2(t) + ig_1\hat{A}_1^\dagger(t)\hat{S}_1^-(t) - ig_1\hat{S}_1^+(t)\hat{A}_1(t) + \\ &+ 2ig_2\hat{A}_2^\dagger(t)\hat{S}_2^-(t) - 2ig_2\hat{S}_2^+(t)\hat{A}_2(t) + \Gamma_3^{(2)}N + \hat{F}_{\hat{W}_2}(t) \ ,\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{S}_1^-(t)}{dt} &= -\left(\frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L1}\right)\hat{S}_1^-(t) + ig_1\hat{W}_1(t)\hat{A}_1(t) - \\ &- ig_2\hat{S}_{12}^+(t)\hat{A}_2(t) + \hat{F}_{\hat{S}_1}(t) \ ,\end{aligned} \tag{4.96}$$

$$\frac{d\hat{S}_1^+(t)}{dt} = -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\,\delta_{L1}\right)\hat{S}_1^+(t) - ig_1\hat{W}_1(t)\hat{A}_1^\dagger(t) + \\ + ig_2\hat{A}_2^\dagger(t)\hat{S}_{12}^-(t) + \hat{F}_{\hat{S}_1}^\dagger(t)\ , \tag{4.97}$$

$$\frac{d\hat{S}_2^-(t)}{dt} = -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\,\delta_{L2}\right)\hat{S}_2^-(t) + ig_2\hat{W}_2(t)\hat{A}_2(t) - \\ - ig_1\hat{S}_{12}^-(t)\hat{A}_1(t) + \hat{F}_{\hat{S}_2}(t)\ , \tag{4.98}$$

$$\frac{d\hat{S}_2^+(t)}{dt} = -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\,\delta_{L2}\right)\hat{S}_2^+(t) - ig_2\hat{W}_2(t)\hat{A}_2^\dagger(t) + \\ + ig_1\hat{A}_1^\dagger(t)\hat{S}_{12}^+(t) + \hat{F}_{\hat{S}_2}^\dagger(t)\ , \tag{4.99}$$

$$\frac{d\hat{S}_{12}^-(t)}{dt} = -\left(\Gamma_{12} + i\,\delta_R\right)\hat{S}_{12}^-(t) - ig_1\hat{S}_2^-(t)\hat{A}_1^\dagger(t) + ig_2\hat{S}_1^+(t)\hat{A}_2(t) + \\ + \hat{F}_{\hat{S}_{12}}(t)\ , \tag{4.100}$$

$$\frac{d\hat{S}_{12}^+(t)}{dt} = -\left(\Gamma_{12} - i\,\delta_R\right)\hat{S}_{12}^+(t) + ig_1\hat{S}_2^+(t)\hat{A}_1(t) - ig_2\hat{A}_2^\dagger(t)\hat{S}_1^-(t) + \\ + \hat{F}_{\hat{S}_{12}}^\dagger(t)\ , \tag{4.101}$$

$$\frac{d\hat{A}_1(t)}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}\hat{A}_1(t) - ig_1\hat{S}_1^-(t) + \sqrt{\gamma_1}\alpha_{1e}(t) + \hat{F}_{\hat{A}_1}(t)\ , \tag{4.102}$$

$$\frac{d\hat{A}_1^\dagger(t)}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}\hat{A}_1^\dagger(t) + ig_1\hat{S}_1^+(t) + \sqrt{\gamma_1}\alpha_{1e}^*(t) + \hat{F}_{\hat{A}_1}^\dagger(t)\ , \tag{4.103}$$

$$\frac{d\hat{A}_2(t)}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\hat{A}_2(t) - ig_2\hat{S}_2^-(t) + \sqrt{\gamma_2}\alpha_{2e}(t) + \hat{F}_{\hat{A}_2}(t)\ , \tag{4.104}$$

$$\frac{d\hat{A}_2^\dagger(t)}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\hat{A}_2^\dagger(t) + ig_2\hat{S}_2^+(t) + \sqrt{\gamma_2}\alpha_{2e}^*(t) + \hat{F}_{\hat{A}_2}^\dagger(t)\ . \tag{4.105}$$

As forças de Langevin para os campos estão dadas pelas relações

$$\hat{F}_{\hat{A}_1}(t) = \sqrt{\gamma_1}\delta\hat{A}_{1e}(t)\ , \tag{4.106}$$

$$\hat{F}_{\hat{A}_2}(t) = \sqrt{\gamma_2}\delta\hat{A}_{2e}(t)\ . \tag{4.107}$$

A seguir, passaremos ao estudo de algumas previsões teóricas obtidas a partir dessas equações.

4.2 Previsões Teóricas I: Estado Estacionário

Os primeiros resultados da teoria que acabamos de expor, e que constituem parte dos objetivos propostos no presente trabalho, estão relacionados ao estudo do estado estacionário do sistema e, em particular, à resposta do meio atômico ao feixe sonda. Estes resultados devem reproduzir as principais características da transparência induzida por laser, evidenciadas em vários trabalhos tanto teóricos como experimentais, sendo o artigo de revisão de Arimondo [30] uma excelente referência sobre o tema.

Também, no regime estacionário, será estudado o comportamento biestável dos campos sonda e de bombeio, o que permitirá estabelecer e determinar as situações nas quais as flutuações dos campos apresentam um comportamento de grande interesse, como veremos mais adiante.

A seguir, serão apresentados alguns dos resultados teóricos originais deste trabalho e que estão relacionados ao estudo das flutuações quânticas dos campos. Por último, finalizando a seção, apresentaremos os resultados referentes ao estudo da correlação entre os campos sonda e de bombeio, que é uma conseqüência da transparência induzida no meio atômico.

4.2.1 Equações para o estado estacionário

Tanto o estado estacionário do sistema como as flutuações quânticas dos campos, serão estudados a partir da linearização das flutuações dos operadores em torno de seus valores médios no estado estacionário. Esse método consiste em substituir cada operador $\hat{O}(t)$, seja atômico ou do campo, por uma expressão do tipo

$$o + \delta\hat{O}(t) \ , \tag{4.108}$$

onde $o = \langle\hat{O}(t)\rangle_{EE}$ ("EE" quer dizer estado estacionário), e as flutuações são consideradas através do operador $\delta\hat{O}(t)$, considerado como um operador estocástico de valor médio nulo.

Na derivação das equações que permitem o estudo das flutuações no estado estacionário, tal aproximação linear é justificada quando as flutuações são desprezíveis a partir da segunda ordem, ao serem comparadas com os valores médios correspondentes. Já para os valores médios, como veremos a seguir, as equações permanecem válidas mesmo quando as flutuações são comparáveis aos valores médios, e elas têm a forma das equações óticas de Bloch [29].

Dessa forma, vamos considerar a seguinte linearização dos operadores do

sistema:

$$\hat{W}_1(t) = w_1 + \delta\hat{W}_1(t) \ , \tag{4.109}$$
$$\hat{W}_2(t) = w_2 + \delta\hat{W}_2(t) \ , \tag{4.110}$$
$$\hat{S}_1^-(t) = s_1 + \delta\hat{S}_1^-(t) \ , \tag{4.111}$$
$$\hat{S}_2^-(t) = s_2 + \delta\hat{S}_2^-(t) \ , \tag{4.112}$$
$$\hat{S}_{12}^-(t) = s_{12} + \delta\hat{S}_{12}^-(t) \ , \tag{4.113}$$
$$\hat{A}_1(t) = \alpha_1 + \delta\hat{A}_1(t) \ , \tag{4.114}$$
$$\hat{A}_2(t) = \alpha_2 + \delta\hat{A}_2(t) \ . \tag{4.115}$$

Substituindo a linearização anterior nas Eqs.(4.94)- (4.105), desprezando os termos de segunda ordem nas flutuações, e considerando que os valores médios das forças de Langevin que aparecem nessas equações são nulos[7], encontramos o seguinte sistema de equações para os valores médios dos operadores no estado estacionário

$$\Gamma_1^{(1)}w_1 + \Gamma_2^{(1)}w_2 + 2ig_1\alpha_1^*s_1 - 2ig_1s_1^*\alpha_1 + ig_2\alpha_2^*s_2 - ig_2s_2^*\alpha_2 + \\ + \Gamma_3^{(1)}N = 0 \ , \tag{4.116}$$

$$\Gamma_1^{(2)}w_1 + \Gamma_2^{(2)}w_2 + ig_1\alpha_1^*s_1 - ig_1s_1^*\alpha_1 + 2ig_2\alpha_2^*s_2 - 2ig_2s_2^*\alpha_2 + \\ + \Gamma_3^{(2)}N = 0 \ , \tag{4.117}$$

$$-\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L1}\right)s_1 + ig_1w_1\alpha_1 - ig_2s_{12}^*\alpha_2 = 0 \ , \tag{4.118}$$

$$-\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\ \delta_{L1}\right)s_1^* - ig_1w_1\alpha_1^* + ig_2\alpha_2^*s_{12} = 0 \ , \tag{4.119}$$

$$-\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L2}\right)s_2 + ig_2w_2\alpha_2 - ig_1s_{12}\alpha_1 = 0 \ , \tag{4.120}$$

$$-\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\ \delta_{L2}\right)s_2^* - ig_2w_2\alpha_2^* + ig_1\alpha_1^*s_{12}^* = 0 \ , \tag{4.121}$$

$$-\left(\Gamma_{12} + i\ \delta_R\right)s_{12} - ig_1s_2\alpha_1^* + ig_2s_1^*\alpha_2 = 0 \ , \tag{4.122}$$

[7]Para cada variável atômica existe uma expressão da força de Langevin similar à Eq.(4.70).

$$-\left(\Gamma_{12} - i\ \delta_R\right) s_{12}^* + i g_1 s_2^* \alpha_1 - i g_2 \alpha_2^* s_1 = 0\ , \tag{4.123}$$

$$-\frac{\gamma_1}{2}\alpha_1 - i g_1 s_1 + \sqrt{\gamma_1}\alpha_{1e} = 0\ , \tag{4.124}$$

$$-\frac{\gamma_1}{2}\alpha_1^* + i g_1 s_1^* + \sqrt{\gamma_1}\alpha_{1e}^* = 0\ , \tag{4.125}$$

$$-\frac{\gamma_2}{2}\alpha_2 - i g_2 s_2 + \sqrt{\gamma_2}\alpha_{2e} = 0\ , \tag{4.126}$$

$$-\frac{\gamma_2}{2}\alpha_2^* + i g_2 s_2^* + \sqrt{\gamma_2}\alpha_{2e}^* = 0\ . \tag{4.127}$$

Na obtenção do conjunto de equações anteriores aparecem termos do tipo $2ig_1\delta\hat{A}_1^\dagger(t)\delta\hat{S}_1^-(t)$, por exemplo na equação (4.94), que são desprezados por serem de segunda ordem nas flutuações e pequenos quando comparados com valores médios, tais como $2ig_1\alpha_1^* s_1$, que também aparece na mesma equação, após a linearização.

As Eqs.(4.116) - (4.127) evidenciam uma depêndencia não linear entre as diferentes variáveis do sistema, o que, unido à quantidade delas, dificulta encontrar a solução das mesmas de maneira direta. Por tal motivo, empregaremos um procedimento que consiste em supor que as variáveis dos campos são parâmetros de valores conhecidos e, dessa forma, poderemos resolver as equações (4.116) - (4.123) para as variáveis atômicas [31]. Logo, será necessário investigar a estabilidade da solução obtida estudando o comportamento dos campos, o que será realizado na próxima subseção.

Por conseguinte, considerando conhecidos os valores das amplitudes dos campos, os valores médios das variáveis atômicas no estado estacionário obedecem o seguinte sistema de equações, escrito de forma matricial,

$$\mathbf{A}_{At}.\mathbf{x}_{At} = \mathbf{V}\ , \tag{4.128}$$

onde, o vetor das variáveis atômicas $\mathbf{x}_{At}$, a matriz $\mathbf{A}_{At}$, e o vetor dos termos independentes $\mathbf{V}$, são dados pelas expressões

$$\mathbf{x}_{At} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ s_1 \\ s_1^* \\ s_2 \\ s_2^* \\ s_{12} \\ s_{12}^* \end{pmatrix}\ ,$$

$$\mathbf{A}_{At} = \begin{pmatrix} \Gamma_1^{(1)} & \Gamma_2^{(1)} & 2ig_1\alpha_1^* & -2ig_1\alpha_1 & ig_2\alpha_2^* & -ig_2\alpha_2 & 0 & 0 \\ \Gamma_1^{(2)} & \Gamma_2^{(2)} & ig_1\alpha_1^* & -ig_1\alpha_1 & 2ig_2\alpha_2^* & -2ig_2\alpha_2 & 0 & 0 \\ ig_1\alpha_1 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L1}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -ig_2\alpha_2 \\ -ig_1\alpha_1^* & 0 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\ \delta_{L1}\right) & 0 & 0 & ig_2\alpha_2^* & 0 \\ 0 & ig_2\alpha_2 & 0 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L2}\right) & 0 & -ig_1\alpha_1 & 0 \\ 0 & -ig_2\alpha_2^* & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\ \delta_{L2}\right) & 0 & ig_1\alpha_1^* \\ 0 & 0 & 0 & ig_2\alpha_2 & -ig_1\alpha_1^* & 0 & -(\Gamma_{12} + i\ \delta_R) & 0 \\ 0 & 0 & -ig_2\alpha_2^* & 0 & 0 & ig_1\alpha_1 & 0 & -(\Gamma_{12} - i\ \delta_R) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -\Gamma_3^{(1)}N \\ -\Gamma_3^{(2)}N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A solução da Eq.(4.128) é direta, basta invertir a matriz $\mathbf{A}_{At}$, o que permite encontrar

$$\mathbf{x}_{At} = \mathbf{A}_{At}^{-1}.\mathbf{V}\ . \tag{4.129}$$

Dessa forma, através da solução (4.129), os valores médios das variáveis atômicas no estado estacionário são expressos em função dos parâmetros que caracterizam o sistema (taxas de relaxação, dessintonias, etc.), e das amplitudes médias dos campos α_1 e α_2.

4.2.2 Resposta do meio atômico ao feixe sonda

Configuração do sistema

Para obter as previsões da teoria escolheremos os parâmetros que correspondem a um sistema físico real. Neste caso, estudaremos a transparência induzida por laser em um vapor atômico de rubídio, cujo diagrama dos níveis de energia associado à linha espectral ou transição ótica D_2 [33], para o isótopo ^{85}Rb, é apresentado na Fig. 4.6.

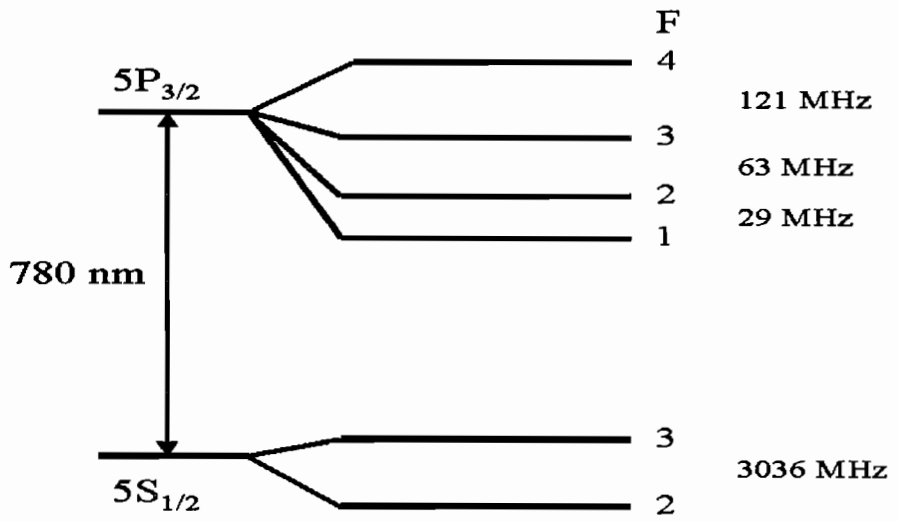

Figura 4.6: Níveis de energia da transição D_2 do ^{85}Rb. O valor em MHz indica a separação em freqüência entre os diferentes níveis de momento angular total F.

A escolha do ^{85}Rb como material de estudo deve-se, por um lado, à disponibilidade desse material comercialmente e, por outro lado, à existência no mercado de diodos lasers que emitem luz cujo comprimento de onda está na faixa dos 780 nm, o que possibilita realizar um estudo experimental sobre esse isótopo do rubídio.

A identificação dos níveis de energia da estrutura hiperfina do ^{85}Rb com os níveis da configuração Λ utilizados na derivação da teoria é a seguinte

$$
\begin{aligned}
|0\rangle &= |5P_{3/2}, F' = 3\rangle \ , \\
|1\rangle &= |5S_{1/2}, F = 3\rangle \ , \\
|2\rangle &= |5S_{1/2}, F = 2\rangle \ ,
\end{aligned}
$$

e, como pode ser visto da Fig. 4.6, formam a letra grega Λ. O uso desses níveis de energia é permitido pela regra de seleção para o momento angular

total F

$$\Delta F = 0, \pm 1 \ .$$

Como unidade de freqüência para os cálculos tomaremos a largura natural do estado excitado do Rb, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2\pi\ 6\ MHz$. Os níveis $|5S_{1/2}, F = 3\rangle$ e $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$ correspondem ao estado fundamental do ^{85}Rb e portanto são radiativamente estáveis.

I. Regime de TIE

Usualmente, os estudos teóricos e experimentais da transparência induzida por laser em vapores atômicos [25, 26, 34, 35] são realizados em uma situação na qual o feixe sonda é muito fraco em intensidade, o que significa que sua intensidade é muito pequena em comparação com a intensidade do bombeio, e com relação à intensidade de saturação da transição que ele excita, igual a 1,6 mW/cm^2 no caso do Rb. Essa relação entre as intensidades caracteriza a situação física que chamaremos de regime de TIE (Transparência Induzida Eletromagneticamente).

Os resultados análogos aos apresentados na seção 3.2 são mostrados na Fig. 4.7 para o feixe de bombeio ressonante com a transição que ele excita ($\delta_{L1} = 0$), assumindo valores reais para as amplitudes α_1 e α_2. A resposta estacionária dos átomos ao feixe sonda é contida na variável da polarização s_2, que está determinada pelo quinto elemento do vetor $\mathbf{A}_{At}^{-1}.\mathbf{V}$. Nessa figura, a susceptibilidade χ_2 da transição entre os estados atômicos $|0\rangle$ e $|2\rangle$ é definida pela relação

$$\chi_2 = \frac{s_2}{\alpha_2} \ . \tag{4.130}$$

A parte imaginária da susceptibilidade (absorção) apresenta uma região estreita de transparência induzida [Fig. 4.7(b)] para a dessintonia nula do sonda, que se acentua na medida em que a intensidade do bombeio é incrementada. A resposta dispersiva do meio (parte real da susceptibilidade) evidencia uma mudança abrupta do índice de refração na região da transparência.

O cálculo da dependência da intensidade média detectada do sonda com a dessintonia δ_{L2}, fornece um resultado similar ao mostrado na Fig. 4.7.

Os dados utilizados para obter numericamente o resultado mostrado na Fig. 4.7 são apresentados na tabela 4.1. O número de átomos N foi tomado igual a $5,0 \times 10^8$, e será o mesmo em todos os resultados teóricos a serem apresentados neste capítulo.

As larguras dos lasers γ_1 e γ_2 foram escolhidas próximas dos valores experimentais correspondentes aos diodos laser. Essas larguras espectrais têm

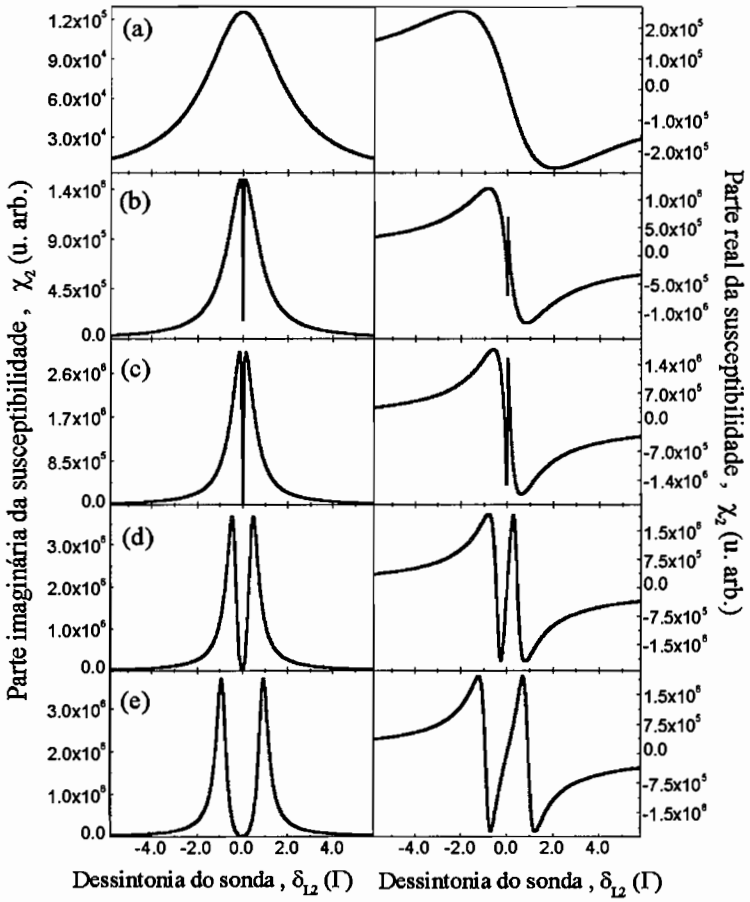

Figura 4.7: Resposta do meio atômico ao feixe sonda para um número de átomos $N = 5,0 \times 10^8$. Para uma intensidade do sonda igual a 10,9 $\mu W/cm^2$, os valores da intensidade do bombeio em $\mu W/cm^2$ são: (a) 4,9$\times 10^{-4}$, (b) 4,9 , (c) 30,4 , (d) 486,5 , (e) 1945,8 .

como limite inferior a largura de Schawlow-Townes, que é determinada pela relação [36]

$$\gamma = \frac{N_2}{N_2 - N_1} \frac{2\pi \; h\nu_L \; \Delta\nu_{cav}^2}{P_L} \; , \tag{4.131}$$

onde, N_1 (N_2) determina a população do estado fundamental (excitado) da transição laser, ν_L e P_L são a freqüência e a potência de saída do laser, respectivamente, e $\Delta\nu_{cav}$ é a largura da cavidade laser. O modelo de difusão de fase utilizado para a obtenção da relação (4.131) implica a existência de excesso de ruído de fase em relação ao ruído de intensidade do laser. Excesso de ruído este que é proporcional ao quadrado da largura da cavidade do laser

Parâmetro	Valor	
	Γ	MHz
g_1	$-4,63 \times 10^{-3}$	$-1,75 \times 10^{-1}$
g_2	$-4,14 \times 10^{-3}$	$-1,56 \times 10^{-1}$
Γ_1	$5,00 \times 10^{-1}$	$1,88 \times 10^{1}$
Γ_2	$5,00 \times 10^{-1}$	$1,88 \times 10^{1}$
Γ_{12}	$1,00 \times 10^{-4}$	$3,77 \times 10^{-3}$
$\Gamma_{1\to2}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$9,42 \times 10^{-3}$
$\Gamma_{2\to1}$	$2,50 \times 10^{-4}$	$9,42 \times 10^{-3}$
γ_1	$1,67 \times 10^{-1}$	$6,29$
γ_2	$1,67 \times 10^{-1}$	$6,29$

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados para calcular a resposta do meio atômico mostrada na Fig. 4.7.

$\Delta\nu_{cav}$, e inversamente proporcional à freqüência de análise do ruído [37].

Para os diodos lasers com cavidade externa, de potência igual a 20 mW, em média, e uma largura de cavidade da ordem de dezenas de GHz, as larguras espectrais γ_1 e γ_2 são da ordem de dezenas de MHz, para um laser trabalhando muito acima do limiar de oscilação.

As constantes de acoplamento por fóton g_1 e g_2 foram calculadas para cada uma das transições (ver apêndice C) considerando que os feixes sonda e de bombeio estão linearmente polarizados, têm 1 mm de diâmetro e interagem com um vapor atômico de ^{85}Rb contido no interior de uma célula de vidro de 5 cm de comprimento. As taxas Γ_{12}, $\Gamma_{1\to2}$ e $\Gamma_{2\to1}$ foram escolhidas de forma tal que fosse possível observar o sinal de transparência induzida. Em uma experiência, os valores dessas taxas de relaxação dependem da temperatura do vapor atômico, das características da parede da célula que contem o vapor, do tempo de vôo dos átomos através da seção transversa do feixe, entre outros fatores. Posteriormente estudaremos a influência destes últimos parâmetros sobre o comportamento mostrado na Fig. 4.7.

A essência física do fenômeno da transparência induzida por laser pode ser entendida a partir da analogia desenvolvida na seção 3.2. Porém, existe uma imagen física baseada no modelo do átomo "vestido" [25, 29], que ajuda a comprender o fenômeno em um sistema quântico. De fato, a transparência induzida que experimenta o feixe sonda pode ser vista como o resultado da interação de um feixe fraco em intensidade com um meio atômico vestido pelos fótons do feixe de bombeio, onde o termo vestido significa que na ausência do sonda o sistema encontra-se em um estado quântico que é autoestado dos

operadores atômicos e do campo de bombeio. Nessa situação, o feixe sonda é tratado como uma perturbação sobre o sistema acoplado átomo-laser de bombeio.

Na Fig. 4.8 é representada essa imagem física. A diferença de energia entre os níveis vestidos $|3+\rangle$ e $|3-\rangle$ depende da taxa de Rabi ou intensidade (número de fótons) do campo de bombeio.

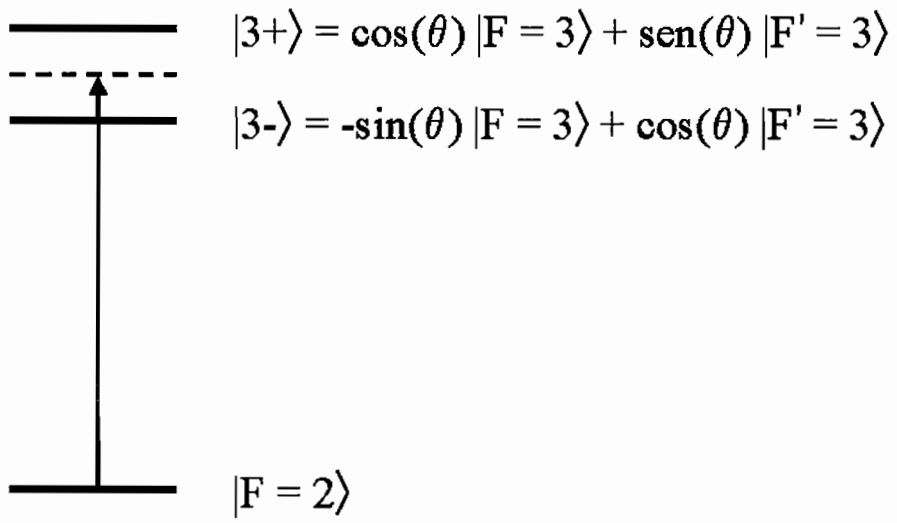

Figura 4.8: A absorção do feixe sonda depende da separação em energia dos níveis vestidos $|3+\rangle$ e $|3-\rangle$. O ângulo θ é definido pela taxa de Rabi e a dessintonia do feixe de bombeio.

Quando a intensidade do bombeio é tal que a separação energética dos níveis vestidos é pequena, o feixe sonda não consegue distinguir os dois níveis de energia e, nesse caso, não é absorvido pelo átomo. Nessa situação fala-se que a transparência que experimenta o feixe sonda deve-se a uma interferência quântica destrutiva. Em outras palavras, o feixe sonda não distingue os caminhos de absorção $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |3-\rangle$ e $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |3+\rangle$. Essa indistinguibilidade de caminhos é a base da interferência quântica destrutiva, expressada de forma analítica nas Refs. [10, 25].

À medida em que a intensidade do feixe de bombeio aumenta, a separação em energia dos níveis vestidos aumenta também, levando ao surgimento de um dubleto de absorção, manifestação do efeito Autler-Townes ou efeito Stark dinâmico. Contudo, a absorção nula do sonda para $\delta_{L2} = 0$ observada na Fig. 4.7(e), é uma evidência da persistência da interferência quântica destrutiva.

Um incremento posterior da intensidade do bombeio separa completamente os dois níveis vestidos e, nessa situação, a absorção nula do feixe

sonda para $\delta_{L2} = 0$ é causada pela ausência de nível de energia para o qual o átomo possa transitar a partir do estado fundamental $|5S_{1/2}, F = 2\rangle$.

O fenômeno da transparência induzida também pode ser visto ou interpretado como um processo ressonante de dois fótons ou transição Raman [30, 38], onde um fóton é absorvido pelo átomo na transição correspondente ao feixe de bombeio e é emitido de maneira estimulada na transição associada ao feixe sonda, sendo o processo contrário igualmente provável. De fato, na condição de transparência induzida existe uma dinâmica coerente de troca de fótons entre os campos, onde o estado excitado atômico participa de maneira virtual, pois a população estacionária desse estado na situação de transparência induzida é nula, o que indica que em média a probabilibade de encontrar o átomo no estado excitado é zero. Nesse caso, a coerência atômica entre os estados fundamentais têm um papel importante no equilíbrio dinâmico do sistema.

O acoplamento entre os campos via a coerência atômica s_{12} entre os estados fundamentais pode ser visto a partir das Eqs.(4.124) e (4.126), que mostram a relação entre as amplitudes médias dos campos α_1 e α_2 e as polarizações médias s_1 e s_2, correspondentes às transições atômicas que cada um deles excita. Por sua vez, a Eq.(4.118) [(4.120)] para a polarização média s_1 (s_2) evidencia uma dependência explícita desta variável com o campo α_2 (α_1) através da coerência s_{12}.

Comportamento biestável dos campos

Na Fig. 4.7 mostramos a forma em que o comportamento do meio atômico é alterado pela presença dos campos sonda e de bombeio. No entanto, existe a influência contrária, isto é, a alteração do comportamento dos campos pelos átomos, que se manifesta por um regime biestável para cada um deles, dependendo de determinadas condições.

A modo de exemplo, na Fig. 4.9 apresentamos as curvas de biestabilidade dos feixes sonda e de bombeio para $\delta_{L2} = \delta_{L1} = 0$. A curva do feixe sonda, para uma intensidade fixa do bombeio igual a 486,5 $\mu W/cm^2$ ($\alpha_1 = 100$), é obtida pelo procedimento comumente utilizado no estudo da biestabilidade [31, 32], que consiste em resolver a equação (4.126) para encontrar a depêndencia da amplitude da fonte α_{2e} com a amplitude α_2, e graficar a relação inversa.

O comportamento biestável observado na Fig. 4.9 pode parecer inesperado, pois os estudos de biestabilidade são realizados utilizando cavidades e em momento algum nosso tratamento da transparência induzida inclui esse dispositivo ótico. Os átomos que interagem com os lasers não estão no interior de uma cavidade. Contudo, devemos lembrar que a existência da biestabili-

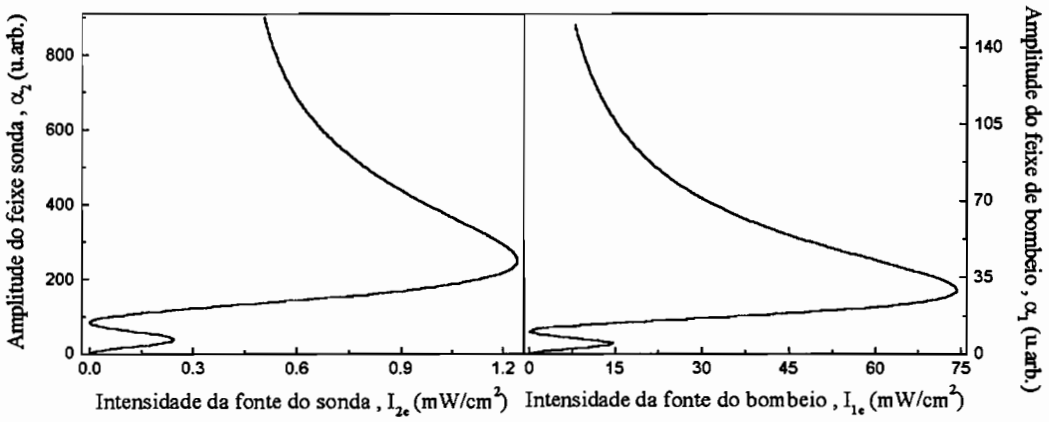

Figura 4.9: Curvas de biestabilidade dos feixes sonda e de bombeio. A curva do bombeio foi obtida para uma intensidade fixa do sonda igual a 10,9 $\mu W/cm^2$ ($\alpha_2 = 15$).

dade reside na retroalimentação que experimenta o campo que, no caso de uma cavidade, é garantida pelos espelhos da mesma.

No nosso meio atômico de três níveis na configuração Λ, existem dois mecanismos de retroalimentação responsáveis pela biestabilidade observada na Fig. 4.9. O primeiro deles baseia-se no processo de transferência de população entre os estados fundamentais, como produto das colisões, e pode ser entendido a partir da Fig. 4.10.

Suponhamos que inicialmente o átomo esteja no estado fundamental $|1\rangle$. Após experimentar uma colisão com um átomo da espécie X ele é transferido para o estado fundamental $|2\rangle$, a partir do qual absorve um fóton do feixe sonda, de freqüência angular ω_{L2} , produzindo-se uma transição Raman (delimitada pelas linhas horizontais tracejadas na Fig. 4.10), ao final da qual o átomo retorna ao estado inicial, tendo emitido um fóton de freqüência angular ω_{L1} , na transição correspondente ao feixe de bombeio. Nesse caso, o número de fótons do feixe de bombeio é incrementado como resultado de uma transição Raman assistida por um processo de colisão, o que constitui um mecanismo de alimentação para esse feixe[8].

A essência do mecanismo de alimentação dos feixes por colisões é a transição Raman. Por essa razão é de esperar-se que a biestabilidade dos campos exista, mesmo em ausência das colisões que alteram a população dos estados fundamentais. E de fato, cada vez que um fóton é absorvido em uma

[8]Um mecanismo análogo de retroalimentação é a base da biestabilidade observada do feixe sonda.

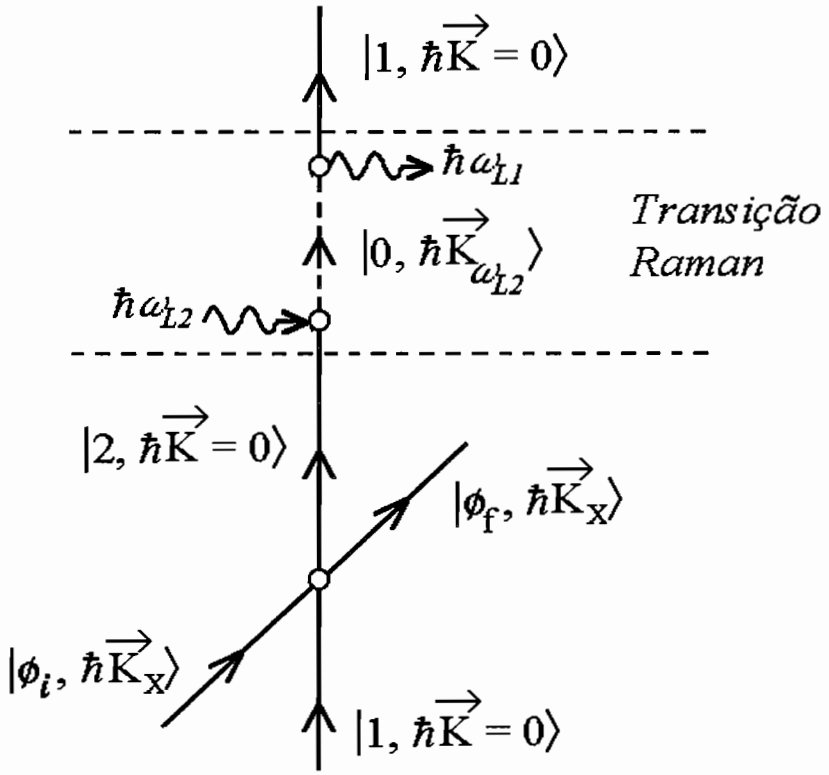

Figura 4.10: Processo de colisão acompanhado por uma transferência de população como mecanismo de retroalimentação responsável pelo comportamento biestável do campo de bombeio. A flecha tracejada representa o trânsito por um estado virtual, nesse caso, o estado excitado $|0\rangle$.

das transições e reemitido na outra, o campo acoplado à transição final do processo Raman ganha um fóton, cuja energia provêm da transição de partida do processo. Por tal motivo, o mecanismo de retroalimentação dos campos baseado na transição Raman assistida pela transferência de população entre os estados fundamentais produto das colisões deve ser o responsável pela região de biestabilidade observada na Fig. 4.10, para baixas intensidades do campo da fonte laser. Já a região de biestabilidade observada para altas intensidades da fonte deve sua existência à própria transição Raman, originada pela coerência entre os estados fundamentais.

Na Fig. 4.11 é mostrada a curva de biestabilidade para o campo de bombeio, utilizando as mesmas condições que as empregadas para obter a Fig. 4.9, à diferença das taxas de transferência de população entre os estados fundamentais $\Gamma_{1\to 2}$ e $\Gamma_{2\to 1}$, reduzidas ao valor $1,3 \times 10^{-4}\ \Gamma$.

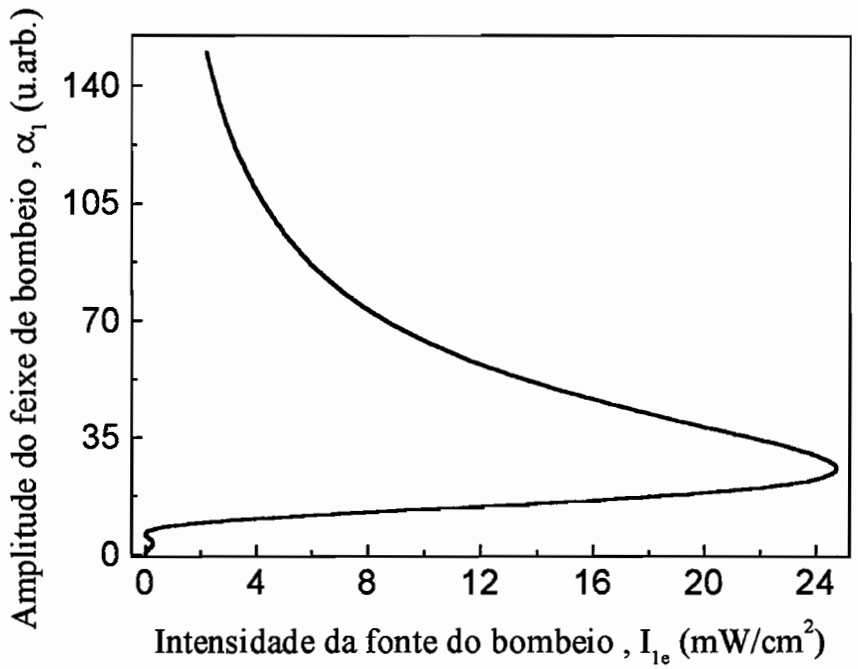

Figura 4.11: Curva de biestabilidade do feixe de bombeio para $\Gamma_{1\to 2} = \Gamma_{2\to 1} = 1,3 \times 10^{-4}\ \Gamma$.

Quando as taxas $\Gamma_{1\to 2}$ e $\Gamma_{2\to 1}$ são nulas, o processo de colisão chama-se defasante pois, nessa situação, as colisões são responsáveis pela defasagem da coerência s_{12} através da taxa[9] Γ_{12}.

II. Regime de alta intensidade

Devido à diferença de intensidades entre os feixes sonda e de bombeio, existem vários autores que consideram que a transparência que experimenta o feixe sonda deve-se à coerência induzida no meio por parte do feixe de bombeio, pois o fato da população do estado excitado ser nula revela a ausência de emissão espontânea na situação de transparência induzida, o que caracteriza um regime coerente limitado por outros mecanismos de relaxação.

Se é certo que o feixe mais intenso (em geral o bombeio) tem uma contribuição importante na coerência atômica, em verdade ela é o resultado da ação conjunta de ambos feixes e, por conseguinte, existe a possibilidade de observar o fenômeno da transparência quando as intensidades dos feixes,

[9]Existem outros mecanismos de relaxação cuja contribuição é levada em conta na taxa Γ_{12} [30].

além de ser da ordem de grandeza da intensidade de saturação da transição atômica, são comparáveis. Nesse caso, estamos no regime de aprisionamento coerente de população, caracterizado por um estado estacionário do sistema que é uma superposição dos estados fundamentais, criada por campos com taxas de Rabi similares, o que também permite observar a transparência induzida na susceptibilidade que representa a resposta dos átomos ao feixe de bombeio.

Na Fig. 4.12 são mostradas as curvas de absorção (parte imaginária da susceptibilidade χ_2) do feixe sonda de intensidade igual a 2,80 mW/cm^2, para dois valores diferentes da intensidade do bombeio, $3,89 \times 10^{-1}$ mW/cm^2 e 9,73 mW/cm^2, ressonante com a transição que ele excita.

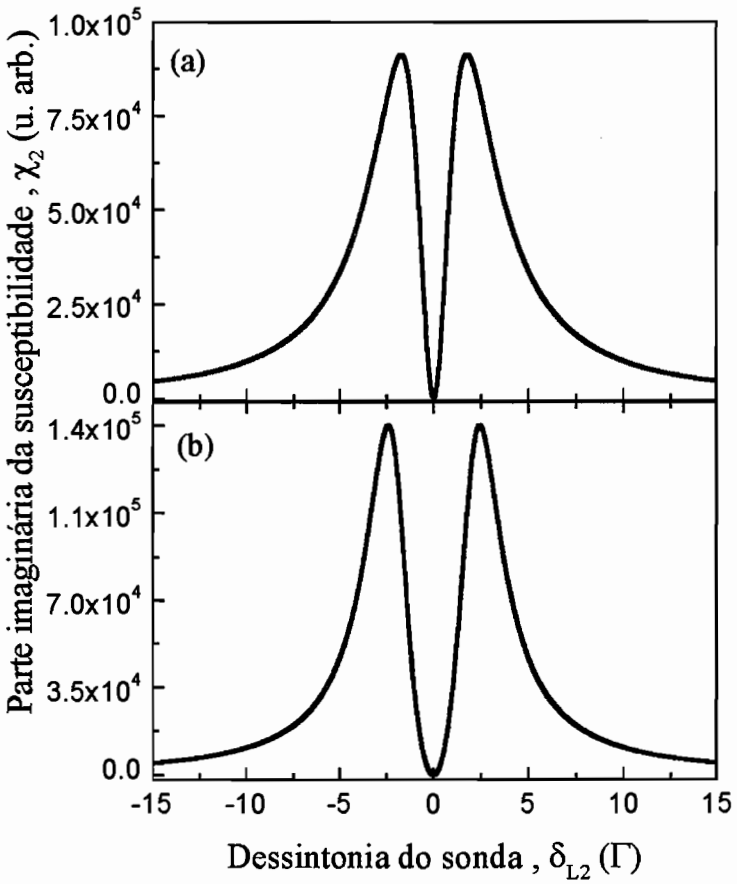

Figura 4.12: Absorção do sonda para intensidades comparáveis com a intensidade de saturação $I_{SAT} = 1,6$ mW/cm^2. Intensidade do feixe sonda $I_2 = 2,80$ mW/cm^2 ($\alpha_2 = 240$), intensidade do bombeio (a) $I_1 = 3,89 \times 10^{-1}$ mW/cm^2 ($\alpha_1 = 89$), (b) $I_1 = 9,73$ mW/cm^2 ($\alpha_1 = 447$).

Além da absorção nula do sonda quando ressonante com a transição que ele excita, as curvas da Fig. 4.12 apresentam um alargamento em comparação com a Fig. 4.7, como conseqüência da potência dos feixes sonda e de bombeio (efeito conhecido como alargamento por potência).

Nesse regime de intensidades dos feixes comparáveis ou superiores à intensidade de saturação da transição, é possível realizar o estudo do ruído quântico dos campos empregando o método de linearização das flutuações.

Como sabemos, na condição de transparência induzida a intensidade média dos feixes não é alterada. No entanto, na situação de transparência o estado do sistema é um equilíbrio dinâmico baseado na troca de fótons pelos campos via um processo Raman e, portanto, é de esperar-se que as propriedades estatísticas dos feixes experimentem uma alteração apreciável. Por tal motivo, o estudo das flutuações quânticas dos feixes sonda e de bombeio resulta de grande interesse em um meio atômico caracterizado por um regime de transparência induzida.

4.3 Previsões Teóricas II: Ruído Quântico

4.3.1 Equações para o estudo das flutuações

Para estudar as propriedades estatísticas das variáveis do sistema, as equações que descrevem a evolução temporal dos operadores de flutuação são obtidas através da linearização das flutuações em torno dos valores médios das variáveis no estado estacionário.

Ao substituir a linearização (4.109) - (4.115) nas Eqs.(4.94) - (4.105), obtemos o seguinte conjunto de equações para os operadores de flutuação:

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\hat{W}_1(t)}{dt} &= \Gamma_1^{(1)}\delta\hat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(1)}\delta\hat{W}_2(t) + 2ig_1\alpha_1^*\delta\hat{S}_1^-(t) + 2ig_1 s_1\delta\hat{A}_1^\dagger(t) - \\ &-2ig_1 s_1^*\delta\hat{A}_1(t) - 2ig_1\alpha_1\delta\hat{S}_1^+(t) + ig_2\alpha_2^*\delta\hat{S}_2^-(t) + ig_2 s_2\delta\hat{A}_2^\dagger(t) - \\ &-ig_2 s_2^*\delta\hat{A}_2(t) - ig_2\alpha_2\delta\hat{S}_2^+(t) + \hat{F}_{\hat{W}_1}(t)\ ,\end{aligned} \tag{4.132}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\hat{W}_2(t)}{dt} &= \Gamma_1^{(2)}\delta\hat{W}_1(t) + \Gamma_2^{(2)}\delta\hat{W}_2(t) + ig_1\alpha_1^*\delta\hat{S}_1^-(t) + ig_1 s_1\delta\hat{A}_1^\dagger(t) - \\ &-ig_1 s_1^*\delta\hat{A}_1(t) - ig_1\alpha_1\delta\hat{S}_1^+(t) + 2ig_2\alpha_2^*\delta\hat{S}_2^-(t) + 2ig_2 s_2\delta\hat{A}_2^\dagger(t) \\ &-2ig_2 s_2^*\delta\hat{A}_2(t) - 2ig_2\alpha_2\delta\hat{S}_2^+(t) + \hat{F}_{\hat{W}_2}(t)\ ,\end{aligned} \tag{4.133}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\delta\hat{S}_1^-(t)}{dt} &= -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L1}\right)\delta\hat{S}_1^-(t) + ig_1 w_1\delta\hat{A}_1(t) + ig_1\alpha_1\delta\hat{W}_1(t) - \\ &- ig_2 s_{12}^*\delta\hat{A}_2(t) - ig_2\alpha_2\delta\hat{S}_{12}^+(t) + \hat{F}_{\hat{S}_1}(t)\ ,\end{aligned} \tag{4.134}$$

$$\frac{d\delta\hat{S}_1^+(t)}{dt} = -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\,\delta_{L1}\right)\delta\hat{S}_1^+(t) - ig_1w_1\delta\hat{A}_1^\dagger(t) - ig_1\alpha_1^*\delta\hat{W}_1(t) + \\ + ig_2\alpha_2^*\delta\hat{S}_{12}^-(t) + ig_2s_{12}\delta\hat{A}_2^\dagger(t) + \hat{F}_{\hat{S}_1}^\dagger(t)\ , \quad (4.135)$$

$$\frac{d\delta\hat{S}_2^-(t)}{dt} = -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\,\delta_{L2}\right)\delta\hat{S}_2^-(t) + ig_2w_2\delta\hat{A}_2(t) + ig_2\alpha_2\delta\hat{W}_2(t) - \\ - ig_1s_{12}\delta\hat{A}_1(t) - ig_1\alpha_1\delta\hat{S}_{12}^-(t) + \hat{F}_{\hat{S}_2}(t)\ , \quad (4.136)$$

$$\frac{d\delta\hat{S}_2^+(t)}{dt} = -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\,\delta_{L2}\right)\delta\hat{S}_2^+(t) - ig_2w_2\delta\hat{A}_2^\dagger(t) - ig_2\alpha_2^*\delta\hat{W}_2(t) + \\ + ig_1\alpha_1^*\delta\hat{S}_{12}^+(t) + ig_1s_{12}^*\delta\hat{A}_1^\dagger(t) + \hat{F}_{\hat{S}_2}^\dagger(t)\ , \quad (4.137)$$

$$\frac{d\delta\hat{S}_{12}^-(t)}{dt} = -\left(\Gamma_{12} + i\,\delta_R\right)\delta\hat{S}_{12}^-(t) - ig_1s_2\delta\hat{A}_1^\dagger(t) - ig_1\alpha_1^*\delta\hat{S}_2^-(t) + \\ + ig_2s_1^*\delta\hat{A}_2(t) + ig_2\alpha_2\delta\hat{S}_1^+(t) + \hat{F}_{\hat{S}_{12}}(t)\ , \quad (4.138)$$

$$\frac{d\delta\hat{S}_{12}^+(t)}{dt} = -\left(\Gamma_{12} - i\,\delta_R\right)\delta\hat{S}_{12}^+(t) + ig_1s_2^*\delta\hat{A}_1(t) + ig_1\alpha_1\delta\hat{S}_2^+(t) - \\ - ig_2\alpha_2^*\delta\hat{S}_1^-(t) - ig_2s_1\delta\hat{A}_2^\dagger(t) + \hat{F}_{\hat{S}_{12}}^\dagger(t)\ , \quad (4.139)$$

$$\frac{d\delta\hat{A}_1(t)}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}\delta\hat{A}_1(t) - ig_1\delta\hat{S}_1^-(t) + \hat{F}_{\hat{A}_1}(t)\ , \quad (4.140)$$

$$\frac{d\delta\hat{A}_1^\dagger(t)}{dt} = -\frac{\gamma_1}{2}\delta\hat{A}_1^\dagger(t) + ig_1\delta\hat{S}_1^+(t) + \hat{F}_{\hat{A}_1}^\dagger(t)\ , \quad (4.141)$$

$$\frac{d\delta\hat{A}_2(t)}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\delta\hat{A}_2(t) - ig_2\delta\hat{S}_2^-(t) + \hat{F}_{\hat{A}_2}(t)\ , \quad (4.142)$$

$$\frac{d\delta\hat{A}_2^\dagger(t)}{dt} = -\frac{\gamma_2}{2}\delta\hat{A}_2^\dagger(t) + ig_2\delta\hat{S}_2^+(t) + \hat{F}_{\hat{A}_2}^\dagger(t)\ . \quad (4.143)$$

O sistema de equações anterior pode ser escrito de maneira simplificada introduzindo o operador vetor de flutuação $\delta\hat{\mathbf{Z}}(t)$, definido da forma seguinte

$$\delta\hat{\mathbf{Z}}(t) \equiv \Big(\delta\hat{W}_1(t), \delta\hat{W}_2(t), \delta\hat{S}_1^-(t), \delta\hat{S}_1^+(t), \delta\hat{S}_2^-(t), \delta\hat{S}_2^+(t), \\ \delta\hat{S}_{12}^-(t), \delta\hat{S}_{12}^+(t), \delta\hat{A}_1(t), \delta\hat{A}_1^\dagger(t), \delta\hat{A}_2(t), \delta\hat{A}_2^\dagger(t)\Big)^T\ . \quad (4.144)$$

Nesse caso, a dinâmica das flutuações é descrita pela equação matricial

$$\frac{d\delta\hat{\mathbf{Z}}(t)}{dt} = \mathbf{A}_S\ \delta\hat{\mathbf{Z}}(t) + \hat{\mathcal{F}}(t)\ , \tag{4.145}$$

onde, $\hat{\mathcal{F}}(t)$ é o operador vetor das forças de Langevin

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{F}}(t) = \Big(&\hat{F}_{\hat{W}_1}(t), \hat{F}_{\hat{W}_2}(t), \hat{F}_{\hat{S}_1}(t), \hat{F}^\dagger_{\hat{S}_1}(t), \hat{F}_{\hat{S}_2}(t), \hat{F}^\dagger_{\hat{S}_2}(t),\\ &\hat{F}_{\hat{S}_{12}}(t), \hat{F}^\dagger_{\hat{S}_{12}}(t), \hat{F}_{\hat{A}_1}(t), \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_1}(t), \hat{F}_{\hat{A}_2}(t), \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_2}(t)\Big)^T\ ,\end{aligned} \tag{4.146}$$

e a matriz $\mathbf{A}_S$ é composta pelos valores médios das variáveis do sistema no estado estacionário

$$\mathbf{A}_S = \begin{pmatrix}
\Gamma_1^{(1)} & \Gamma_2^{(1)} & 2ig_1\alpha_1^* & -2ig_1\alpha_1 & ig_2\alpha_2^* & -ig_2\alpha_2 & 0 & 0\\
\Gamma_1^{(2)} & \Gamma_2^{(2)} & ig_1\alpha_1^* & -ig_1\alpha_1 & 2ig_2\alpha_2^* & -2ig_2\alpha_2 & 0 & 0\\
ig_1\alpha_1 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L1}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & -ig_2\alpha_2\\
-ig_1\alpha_1^* & 0 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\ \delta_{L1}\right) & 0 & ig_2\alpha_2^* & 0 & 0\\
0 & ig_2\alpha_2 & 0 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} - i\ \delta_{L2}\right) & 0 & -ig_1\alpha_1 & 0\\
0 & -ig_2\alpha_2^* & 0 & 0 & 0 & -\left(\frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2} + i\ \delta_{L2}\right) & 0 & ig_1\alpha_1^*\\
0 & 0 & 0 & ig_2\alpha_2 & -ig_1\alpha_1^* & 0 & -(\Gamma_{12} + i\ \delta_R) & 0\\
0 & 0 & -ig_2\alpha_2^* & 0 & 0 & ig_1\alpha_1 & 0 & -(\Gamma_{12} - i\ \delta_R)\\
0 & 0 & -ig_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & ig_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -ig_2 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ig_2 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2ig_1s_1^* & 2ig_1s_1 & -ig_2s_2^* & ig_2s_2 \\ -ig_1s_1^* & ig_1s_1 & -2ig_2s_2^* & 2ig_2s_2 \\ ig_1w_1 & 0 & -ig_2s_{12}^* & 0 \\ 0 & -ig_1w_1 & 0 & ig_2s_{12} \\ -ig_1s_{12} & 0 & ig_2w_2 & 0 \\ 0 & ig_1s_{12}^* & 0 & -ig_2w_2 \\ 0 & -ig_1s_2 & ig_2s_1^* & 0 \\ ig_1s_2^* & 0 & 0 & -ig_2s_1 \\ -\frac{\gamma_1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\gamma_1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\gamma_2}{2} \end{pmatrix} .$$

Matriz da densidade espectral do ruído

A partir da solução da equação diferencial (4.145) é possível realizar o estudo das flutuações do sistema considerando que os operadores de flutuação descrevem um processo estocástico estacionário. Contudo, em lugar de procurar a solução dessa equação no espaço temporal, o que em geral torna-se um problema complexo, passaremos ao espaço das freqüências onde, por um lado, a solução pode ser achada sem muito esforço (detalhe importante), e por outro lado, podemos definir expressões de grandezas mensuráveis experimentalmente.

De maneira que, calculando a transformada de Fourier da Eq.(4.145), encontramos

$$-i\Omega\ \delta\hat{\mathbf{Z}}(\Omega) = \mathbf{A}_S\ \delta\hat{\mathbf{Z}}(\Omega) + \hat{\mathcal{F}}(\Omega)\ , \tag{4.147}$$

e, por conseguinte

$$\delta\hat{\mathbf{Z}}(\Omega) = -(\mathbf{A}_S + i\Omega\ \mathbf{1})^{-1}\ \hat{\mathcal{F}}(\Omega)\ , \tag{4.148}$$

onde Ω e $\mathbf{1}$ são a freqüência de análise e a matriz unidade, respectivamente.

Utilizando a expressão (4.148), a função de autocorrelação do operador vetor de flutuação $\delta\hat{\mathbf{Z}}(\Omega)$ tem a forma seguinte

$$\langle\delta\hat{\mathbf{Z}}(\Omega)\ \delta\hat{\mathbf{Z}}^\dagger(\Omega')\rangle = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')(\mathbf{A}_S + i\Omega\ \mathbf{1})^{-1}.\mathbf{D}_S.(\mathbf{A}_S^\dagger - i\Omega\ \mathbf{1})^{-1}\ , \tag{4.149}$$

onde a matriz de difusão do sistema $\mathbf{D}_S$ é definida pela relação

$$\langle\hat{\mathcal{F}}(\Omega)\ \hat{\mathcal{F}}^\dagger(\Omega')\rangle = 2\pi\ \mathbf{D}_S\ \delta(\Omega+\Omega')\ , \tag{4.150}$$

como conseqüência da definição (4.75).

Lembrando que a densidade espectral do ruído é definida como a transformada de Fourier da função de autocorrelação do operador de flutuação então, utilizando a Eq.(4.149) e os resultados do apêndice A, encontramos a seguinte expressão para a matriz da densidade espectral do ruído do sistema

$$\mathbf{S}(\Omega) = (\mathbf{A}_S + i\Omega\ \mathbf{1})^{-1}.\mathbf{D}_S.(\mathbf{A}_S^\dagger - i\Omega\ \mathbf{1})^{-1}\ . \tag{4.151}$$

4.3.2 Matriz de difusão do sistema

Notemos que, as forças de Langevin que aparecem nas equações dos operadores de flutuação dos campos[10] são independentes das forças de Langevin que agem sobre as variáveis atômicas e, portanto, a matriz de difusão do sistema é uma matriz diagonal por blocos da forma

$$\mathbf{D}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{At} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{Campos} \end{pmatrix} ,$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz estritamente nula e $\mathbf{D}_{At}$ e $\mathbf{D}_{Campos}$ são as matrizes de difusão das variáveis atômicas e dos campos, respectivamente.

Matriz de difusão dos campos

Considerando que os feixes lasers provêm de fontes independentes, a matriz de difusão dos campos $\mathbf{D}_{Campos}$ é definida a partir da relação

$$\begin{pmatrix} \langle \hat{F}_{\hat{A}_1}(t)\ \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_1}(t')\rangle & \langle \hat{F}_{\hat{A}_1}(t)\ \hat{F}_{\hat{A}_1}(t')\rangle & 0 & 0 \\ \langle \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_1}(t)\ \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_1}(t')\rangle & \langle \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_1}(t)\ \hat{F}_{\hat{A}_1}(t')\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle \hat{F}_{\hat{A}_2}(t)\ \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_2}(t')\rangle & \langle \hat{F}_{\hat{A}_2}(t)\ \hat{F}_{\hat{A}_2}(t')\rangle \\ 0 & 0 & \langle \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_2}(t)\ \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_2}(t')\rangle & \langle \hat{F}^\dagger_{\hat{A}_2}(t)\ \hat{F}_{\hat{A}_2}(t')\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{Campos}\ \delta(t-t')\ ,$$

[10] As forças de Langevin dos campos estão determinadas pela estatística das respectivas fontes. Ver, por exemplo, a Eq.(4.107).

que, levando em consideração a definição das forças $\hat{F}_{\hat{A}_1}(t)$ e $\hat{F}_{\hat{A}_2}(t)$ toma a forma

$$\begin{pmatrix} \gamma_1\langle\delta\hat{A}_{1e}(t)\ \delta\hat{A}^\dagger_{1e}(t')\rangle & \gamma_1\langle\delta\hat{A}_{1e}(t)\ \delta\hat{A}_{1e}(t')\rangle & 0 & 0 \\ \gamma_1\langle\delta\hat{A}^\dagger_{1e}(t)\ \delta\hat{A}^\dagger_{1e}(t')\rangle & \gamma_1\langle\delta\hat{A}^\dagger_{1e}(t)\ \delta\hat{A}_{1e}(t')\rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2\langle\delta\hat{A}_{2e}(t)\ \delta\hat{A}^\dagger_{2e}(t')\rangle & \gamma_2\langle\delta\hat{A}_{2e}(t)\ \delta\hat{A}_{2e}(t')\rangle \\ 0 & 0 & \gamma_2\langle\delta\hat{A}^\dagger_{2e}(t)\ \delta\hat{A}^\dagger_{2e}(t')\rangle & \gamma_2\langle\delta\hat{A}^\dagger_{2e}(t)\ \delta\hat{A}_{2e}(t')\rangle \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{Campos}\ \delta(t-t')\ .$$

Lembrando a definição da matriz de covariância de um campo, apresentada na seção 2.2.1, é possível estabelecer a seguinte relação com a matriz de difusão do campo

$$\mathbf{D}_{Campos} = \begin{pmatrix} \gamma_1\mathbf{C}_{1e} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \gamma_2\mathbf{C}_{2e} \end{pmatrix}\ ,$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz nula de dimensão 4×4 e $\mathbf{C}_{1e}$ ($\mathbf{C}_{2e}$) é a matriz de covariância do campo da fonte do laser 1 (2).

No caso em que, por exemplo, ambas fontes emitem um feixe em estado coerente, a matriz de difusão dos campos toma a forma

$$\mathbf{D}_{Campos} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

Matriz de difusão das variáveis atômicas

Para as variáveis atômicas, a matriz de difusão é determinada a partir da relação generalizada de Einstein [29], calculando os valores médios no estado estacionário, e ela é dada pela expressão (ver derivação no apêndice D)

$$\mathbf{D}_{At} = -\mathbf{A}_{At}.\mathbf{x}_{At}\mathbf{x}^\dagger_{At} - \mathbf{x}_{At}\mathbf{x}^\dagger_{At}.\mathbf{A}^\dagger_{At} + \mathbf{V}.\mathbf{x}^\dagger_{At} + \mathbf{x}_{At}.\mathbf{V}^\dagger\ , \tag{4.152}$$

onde empregamos as definições introduzidas na seção 4.2.1.

4.3.3 Flutuações quânticas dos campos

Uma vez definida a matriz de difusão do sistema, o que permite calcular a matriz da densidade espectral do ruído (4.151), estamos em condições de passar ao estudo das flutuações quânticas dos campos. Em particular, para o campo detectado i ($i = 1, 2$), a função de autocorrelação do operador de flutuação da quadratura generalizada $\delta\hat{Y}_{is,\,\theta}(\Omega)$ é (ver seção 2.2.1)

$$\langle\delta\hat{Y}_{is,\,\theta}(\Omega)\ \delta\hat{Y}_{is,\,\theta}(\Omega')\rangle = \langle\delta\hat{A}_{is}(\Omega)\delta\hat{A}_{is}(\Omega')\rangle e^{-2i\theta} + \langle\delta\hat{A}_{is}(\Omega)\delta\hat{A}^{\dagger}_{is}(\Omega')\rangle + \\ + \langle\delta\hat{A}^{\dagger}_{is}(\Omega)\delta\hat{A}_{is}(\Omega')\rangle + \langle\delta\hat{A}^{\dagger}_{is}(\Omega)\delta\hat{A}^{\dagger}_{is}(\Omega')\rangle e^{2i\theta}\ . \tag{4.153}$$

A matriz da densidade espectral do ruído $\mathbf{S}(\Omega)$ depende de maneira direta das variáveis dos campos $\delta\hat{A}_1(\Omega)$ e $\delta\hat{A}_2(\Omega)$, e não dos campos detectados. Por esse motivo, para estabelecer a relação entre a equação anterior e a matriz $\mathbf{S}(\Omega)$, utilizamos as equações (4.39), (4.43) e (4.140) - (4.143) para eliminar as variáveis que representam os campos da fonte e obter assim o vínculo entre os campos detectados e aqueles que interagem com os átomos. Como resultado desse procedimento encontramos as equações

$$\delta\hat{A}_{is}(\Omega) = \zeta_i(\Omega)\ \delta\hat{A}_i + i\frac{g_i}{\sqrt{\gamma_i}}\delta\hat{S}^{-}_i(\Omega)\ , \tag{4.154}$$

$$\delta\hat{A}^{\dagger}_{is}(\Omega) = \zeta_i(\Omega)\ \delta\hat{A}^{\dagger}_i - i\frac{g_i}{\sqrt{\gamma_i}}\delta\hat{S}^{+}_i(\Omega)\ , \tag{4.155}$$

onde $i = 1, 2$ e o coeficiente $\zeta_i(\Omega)$ é definido da forma seguinte

$$\zeta_i(\Omega) = -\frac{\sqrt{\gamma_i}}{2} - i\frac{\Omega}{\sqrt{\gamma_i}}\ . \tag{4.156}$$

Empregando as relações (4.154) e (4.155) encontramos, por exemplo, a seguinte expressão para a função de autocorrelação do bombeio ($i = 1$) após interação com os átomos

$$\langle\delta\hat{Y}_{1s,\,\theta}(\Omega)\ \delta\hat{Y}_{1s,\,\theta}(\Omega')\rangle = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')\ \times \\ \times\Big\{\zeta_1(\Omega)\zeta_1(\Omega')[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,9} - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,3} + i\frac{\zeta_1(\Omega')g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,9} + \\ + \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,3} + \zeta_1(\Omega)\zeta_1(\Omega')[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,10} + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,4} - \\ -i\frac{\zeta_1(\Omega')g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,10} + \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,4} + 2\ \Re e\Big[\Big(\zeta_1(\Omega)\zeta_1(\Omega')[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,10} + \\ +i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,4} + i\frac{\zeta_1(\Omega')g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,10} - \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,4}\Big)e^{-2i\theta}\Big]\Big\}\ , \tag{4.157}$$

a partir da qual a variância do bombeio é dada pela expressão:

$$
\begin{aligned}
V_{1s}(\Omega,\theta) = {} & \zeta_1(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,9} - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,3} + \\
& + i\frac{\zeta_1(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,9} + \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,3} + \zeta_1(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,10} + \\
& + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,4} - i\frac{\zeta_1(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,10} + \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,4} + \\
& + 2\,\Re e\Big[\Big(\zeta_1(\Omega)\zeta_1(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,10} + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,4} + \\
& + i\frac{\zeta_1(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,10} - \frac{g_1^2}{\gamma_1}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,4}\Big)e^{-2i\theta}\Big] \,.
\end{aligned}
\tag{4.158}
$$

De maneira análoga, é possível determinar a variância do campo sonda ($i = 2$) detectado. A expressão correspondente a essa grandeza é da forma seguinte

$$
\begin{aligned}
V_{2s}(\Omega,\phi) = {} & \zeta_2(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,11} - i\frac{\zeta_2(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,5} + \\
& + i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,11} + \frac{g_2^2}{\gamma_2}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,5} + \zeta_2(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{12,12} + \\
& + i\frac{\zeta_2(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{12,6} - i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{6,12} + \frac{g_2^2}{\gamma_2}[\mathbf{S}(\Omega)]_{6,6} + \\
& + 2\,\Re e\Big[\Big(\zeta_2(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,12} + i\frac{\zeta_2(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{11,6} + \\
& + i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,12} - \frac{g_2^2}{\gamma_2}[\mathbf{S}(\Omega)]_{5,6}\Big)e^{-2i\phi}\Big] \,.
\end{aligned}
\tag{4.159}
$$

Covariância e coeficiente de correlação

Outra grandeza de interesse que é conveniente definir é a covariância entre os campos sonda e de bombeio. Como já sabemos, na condição de transparência induzida existe um equilíbrio dinâmico baseado na troca de fótons entre os campos via um processo Raman, que não afeta as intensidades médias dos mesmos. Contudo, é de esperar-se que as propriedades estatísticas dos campos sejam sensíveis a essa troca de fótons e, em particular, que esse

processo seja a origem de uma possível correlação entre os feixes sonda e de bombeio.

Introduzindo a função de correlação $\langle \delta\hat{Y}_{1s,\,\theta}(\Omega)\ \delta\hat{Y}_{2s,\,\phi}(\Omega')\rangle$ e utilizando um procedimento análogo ao empregado na derivação das relações (4.158) e (4.159), encontramos a seguinte função que determina a covariância dos campos

$$\begin{aligned}
V_{12s}(\Omega,\theta,\phi) = \Big\{&\zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,11} - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,5} + \\
&+i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,11} + \frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,5}\Big\}e^{-i(\theta-\phi)} + \\
+\Big\{&\zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,12} + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,6} - i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,12} + \\
&+\frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,6}\Big\}e^{i(\theta-\phi)} + \\
+\Big\{&\zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,12} + i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{9,6} + i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,12} - \\
&-\frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{3,6}\Big\}e^{-i(\theta+\phi)} + \\
+\Big\{&\zeta_1(\Omega)\zeta_2(-\Omega)[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,11} - i\frac{\zeta_1(\Omega)g_2}{\sqrt{\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{10,5} - i\frac{\zeta_2(-\Omega)g_1}{\sqrt{\gamma_1}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,11} - \\
&-\frac{g_1g_2}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2}}[\mathbf{S}(\Omega)]_{4,5}\Big\}e^{i(\theta+\phi)}\ ,
\end{aligned} \tag{4.160}$$

e que permite calcular o coeficiente que define o grau de correlação entre os feixes sonda e de bombeio

$$c_{\theta,\phi}(\Omega) \equiv \frac{V_{12s}(\Omega,\theta,\phi)}{\sqrt{V_{1s}(\Omega,\theta)V_{2s}(\Omega,\phi)}}\ , \tag{4.161}$$

cujos valores estão limitados ao intervalo $[-1;1]$.

Finalmente, os primeiros resultados da formulação teórica das flutuações quânticas dos campos são apresentados na Fig. 4.13, que mostra a dependência do ruído dos feixes sonda e de bombeio com a dessintonia do sonda δ_{L2}, calculada a partir das Eqs.(4.158) e (4.159).

Para obter o resultado apresentado na Fig. 4.13, foram empregados os valores dos parâmetros[11] que aparecem na Tab. 4.1 e as intensidades dos feixes

[11]Serão utilizados os mesmos valores nos restantes resultados teóricos que serão apresentados.

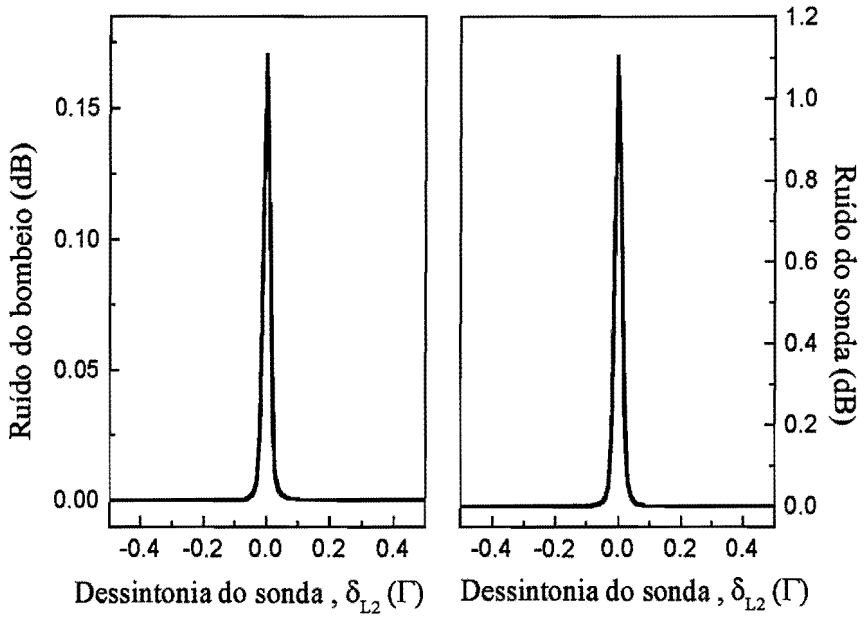

Figura 4.13: Flutuações quânticas da quadratura da amplitude dos feixes sonda $V_{2S}(\Omega, \phi = 0)$ e de bombeio $V_{1S}(\Omega, \theta = 0)$ na condição de transparência mostrada na Fig. 4.12(a), para uma freqüência de análise $\Omega = \Gamma/6 = 6,28\ MHz$. O ruído foi normalizado ao shot noise (0 dB).

sonda e de bombeio, considerados inicialmente em estado coerente, foram tomadas iguais a 2,80 mW/cm^2 ($\alpha_2 = 240$) e $3,89 \times 10^{-1}\ mW/cm^2$ ($\alpha_1 = 89$), respectivamente.

O primeiro fato interessante que pode ser constatado a partir da Fig. 4.13 é a existência de excesso de ruído em ambos feixes para uma dessintonia nula do sonda e um comportamento que corresponde a um estado coerente para $\delta_{L2} \neq 0$. Para dessintonias do sonda muito diferentes de zero o comportamento das flutuações é um tanto, digamos, "evidente" pois, quando a freqüência do feixe (sonda ou bombeio) é diferente da freqüência da transição atômica à qual ele está acoplado, o meio atômico não absorve sua energia (os fótons), ou em outras palavras, os átomos não interagem com o feixe e, por conseguinte, tanto a intensidade média do feixe como suas propriedades estatísticas permanecem inalteradas.

Quando a dessintonia δ_{L2} é próxima de zero, existe uma absorção não nula dos feixes, o que pode ser comprovado a partir das curvas da susceptibilidade apresentadas anteriormente. No entanto, por causa dessa absorção diferente de zero, há uma probabilidade não nula de encontrar o átomo no

estado excitado e, portanto, existe também uma possibilidade concreta de emissão espontânea por parte do meio atômico. Sendo a emissão espontânea um processo completamente aleatório, a intensidade do feixe é alterada de maneira aleatória, dando origem a uma estatística poissoniana da distribuição do número de fótons, que manifesta-se através de uma variância da quadratura da amplitude igual à unidade (0 dB).

Já o excesso de ruído observado da quadratura amplitude é algo realmente menos evidente pela seguinte razão. Tudo bem que na condição de transparência induzida a estatística dos feixes seja alterada, afinal esse estado corresponde a uma situação de equilíbrio dinâmico, mantido pela troca de fótons entre os feixes sonda e de bombeio. Mesmo assim, se essa troca de fótons se realizasse de forma aleatória, a intensidade dos feixes variaria *também* de forma aleatória, e por conseguinte, não seria possível observar o excesso de ruído mostrado na Fig. 4.13 para $\delta_{L2} = 0$! Isto indica que o processo de troca de fótons entre os campos é de uma natureza complexa, onde os átomos participam de maneira ativa distribuindo os fótons entre os feixes de forma coerente e até criando uma possível correlação entre eles, inexistente antes da interação com o meio atômico, pois cada feixe possui sua própria fonte.

De fato, a única forma em que as intensidades médias dos feixes sonda e de bombeio, na condição de transparência induzida, permanecem inalteradas é considerando que, ao mesmo tempo (em média) que um átomo participa de um processo Raman no qual um fóton é transferido do sonda para o bombeio, existe outro átomo que realiza o processo contrário, isto é, transfere um fóton do bombeio para o feixe sonda, via outra transição Raman. Essa imagem física indica que o meio atômico age como um *correlacionador* para os feixes sonda e de bombeio, na situação em que existe uma transparência induzida no meio, e a Fig. 4.14 mostra esse papel dos átomos.

Na Fig. 4.14 observamos uma correlação discreta entre os feixes, que deve-se à diferença entre os valores das intensidades dos mesmos, 2,80 mW/cm^2 para o sonda, e $3,89 \times 10^{-1}$ mW/cm^2 para o bombeio. Outro detalhe importante a ressaltar é que, para a dessintonia do sonda δ_{L2} diferente de zero, a correlação é completamente nula, os feixes são totalmente independentes fora da condição de transparência.

Comportamento biestável do campo de bombeio

Para tentar entender melhor o comportamento das flutuações dos campos, analisemos por exemplo a curva de biestabilidade do feixe de bombeio, apresentada na Fig. 4.15.

Na Fig. 4.15, o círculo inferior sinaliza o valor do bombeio ($\alpha_1 = 89$) cor-

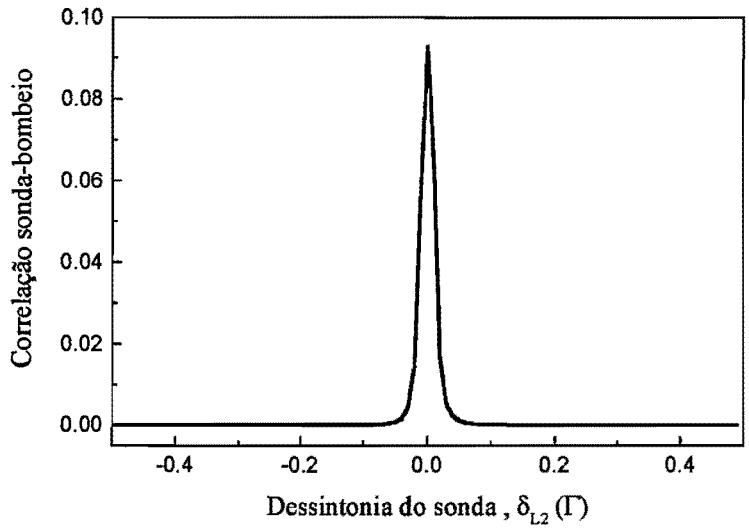

Figura 4.14: Correlação entre as quadraturas da amplitude dos feixes sonda e de bombeio $c_{\theta=0,\phi=0}(\Omega = \Gamma/6)$, correspondente à situação mostrada na Fig. 4.13.

respondente à intensidade utilizada para obter as curvas das Figs. 4.13 e 4.14. Como pode ser apreciado na Fig. 4.15, esse valor da amplitude do campo de bombeio encontra-se em uma das fronteiras da região de biestabilidade do campo, o que significa que, para o valor da intensidade da fonte do bombeio existem dois possíveis valores da intensidade do campo em interação com os átomos.

A fonte do bombeio emite um feixe de intensidade única, no entanto, após a interação com o meio atômico, é possível detectar dois valores para a intensidade do bombeio, na região de biestabilidade, que correspondem à solução da equação do valor médio (4.124), onde vemos que os átomos através da polarização s_1, também agem como fonte para o valor médio da amplitude α_1 no estado estacionário.

Se a existência dessas duas soluções, cuja diferença em amplitude é aproximadamente igual a 120, está relacionada com o excesso de ruído observado, então, seria possível amplificar esse efeito incrementando a diferença entre os dois possíveis valores da amplitude α_1. Na Fig. 4.16 é mostrada a curva de biestabilidade do bombeio para uma intensidade maior da fonte, correspondente à curva de absorção da Fig. 4.12(b).

Do ponto de vista da localização das possíveis soluções para a amplitude média do bombeio α_1, a Fig. 4.16 corresponde a uma situação similar

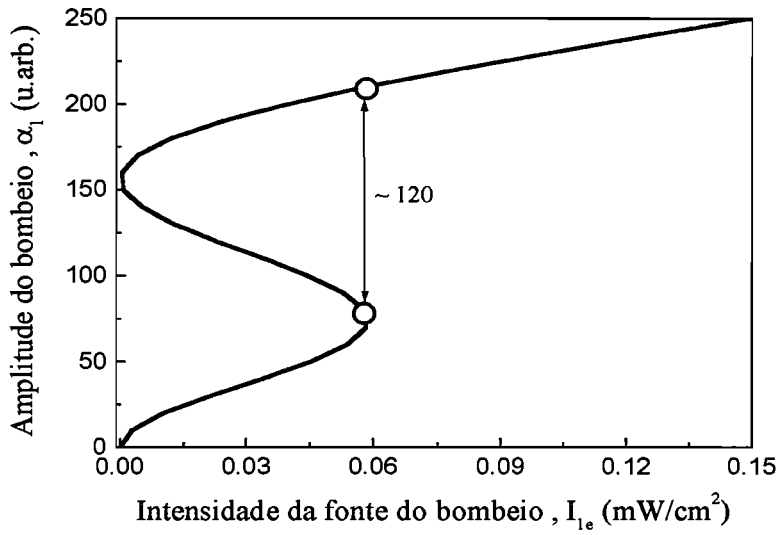

Figura 4.15: Curva de biestabilidade do bombeio para uma intensidade fixa do sonda: 2,80 mW/cm^2 ($\alpha_2 = 240$). Os círculos apontam os dois possíveis valores de α_1 correspondentes a uma dada intensidade da fonte do bombeio.

à apresentada na Fig. 4.15. O círculo inferior assinala a solução empregada na obtenção da Fig. 4.12(b), $\alpha_1 = 447$, equivalente a uma intensidade do bombeio $I_1 = 9,73\ mW/cm^2$. Agora a diferença entre os dois valores que pode tomar a amplitude do bombeio é aproximadamente igual a 550, praticamente 5 vezes a diferença mostrada na Fig. 4.15.

Voltemos agora para as flutuações dos campos. Na Fig. 4.17 são apresentadas as curvas do ruído quântico da quadratura da amplitude dos feixes sonda e de bombeio, assim como também a respectiva correlação, para as intensidades do sonda e do bombeio iguais a 2,80 mW/cm^2 ($\alpha_2 = 240$) e 9,73 mW/cm^2 ($\alpha_1 = 447$), respectivamente.

Diferentemente das Figs. 4.13 e 4.14, o excesso de ruído do feixe de bombeio passou de aproximadamente 0,18 dB para 3,4 dB, e a correlação de um valor discreto de 0,09 (9 %), incrementou-se até 0,35 (35 %).

Tudo parece indicar que, em determinadas condições, o regime biestável é a causa do excesso de ruído da quadratura amplitude observado nas Figs. 4.13 e 4.17, o que é verdade a menos de um pequeno detalhe: a biestabilidade é uma conseqüência da coerência s_{12} entre os estados fundamentais atômicos e, por conseguinte, é essa última a grande responsável pelo comportamento das flutuações dos campos, e da correlação entre eles.

Os primeiros trabalhos teóricos direcionados ao estudo das flutuações dos

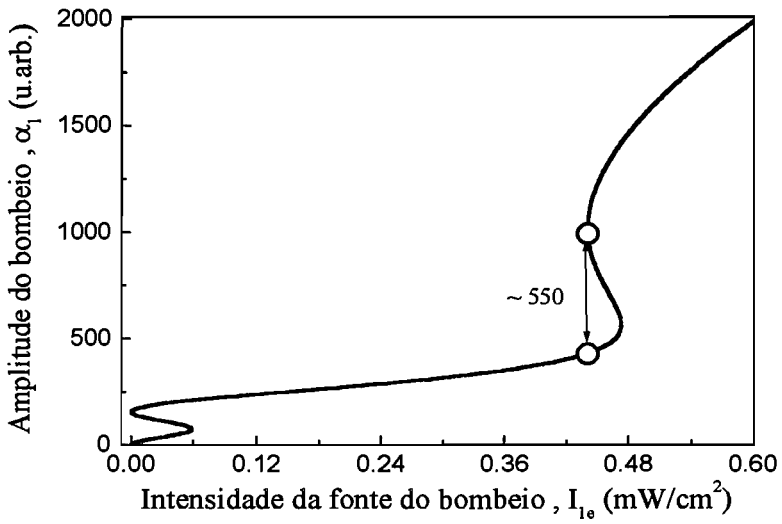

Figura 4.16: Curva de biestabilidade do bombeio para uma intensidade maior da fonte. Intensidade do sonda: 2,80 mW/cm^2 ($\alpha_2 = 240$). Novamente, os círculos apontam os dois possíveis valores da amplitude média do bombeio α_1.

campos foram realizados por Agarwal [39] e Jain [40]. Agarwal investigou as propriedades estatísticas de dois campos quantizados, gerados por átomos de três níveis na configuração Λ, na situação de aprisionamento coerente de população. Jain estendeu o trabalho de Agarwal e encontrou uma correlação no excesso de ruído dos campos.

Apesar de prever a existência de uma estatística de fótons acoplada entre os campos quantizados, o trabalho de Agarwal apresenta alguns problemas. Em primeiro lugar, existem 4 campos envolvidos no tratamento: dois campos clássicos e dois campos quantizados. Ele considera que os campos clássicos (campos de flutuação nula) são os responsáveis pelo estado estacionário que corresponde à situação de aprisionamento coerente de população. Essa consideração está errada, pois as flutuações dos campos que criam a coerência no meio atômico são modificadas porque o estado estacionário é um estado de equilíbrio dinâmico, no qual existe uma troca constante de fótons entre os campos.

Em segundo lugar, os campos tratados quanticamente são considerados independentes dos campos clássicos, e afirma-se que a estatística dos mesmos só é alterada quando as dessintonias desses campos quantizados são iguais, mesmo sendo diferentes de zero. Essa afirmação não é totalmente certa já que

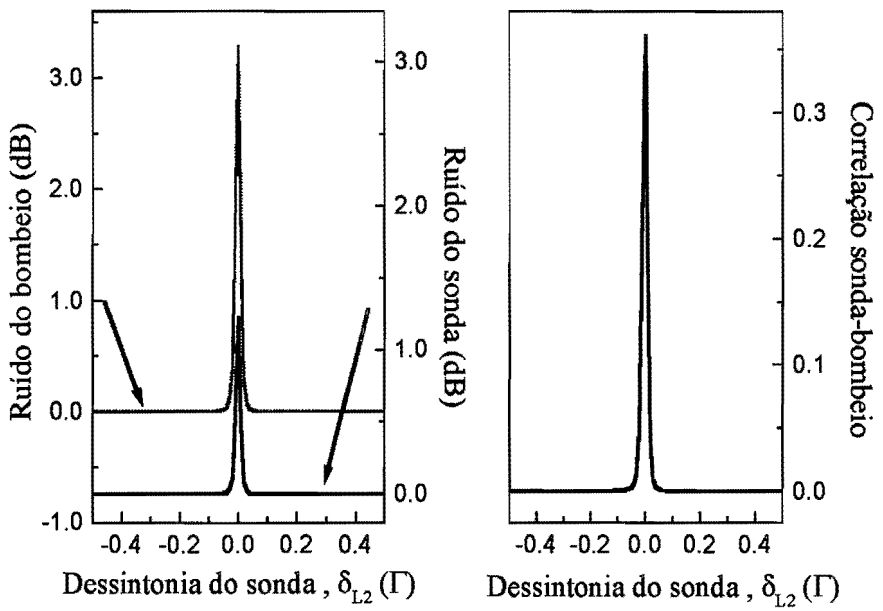

Figura 4.17: Flutuações quânticas e correlação das quadraturas da amplitude. Intensidade do sonda: 2,80 mW/cm^2, intensidade do bombeio: 9,73 mW/cm^2. $\Omega = \Gamma/6$.

o efeito coerente que existe no meio atômico manifesta-se unicamente quando a dessintonia Raman δ_R é nula. Fora da ressonância, os campos devem ter uma distribuição poissoniana do número de fótons, causada pela absorção do meio atômico, que também destroi qualquer correlação de intensidade que possa existir em outras condições.

Para finalizar a seção, a Fig. 4.18 mostra a dependência da correlação e das flutuações quânticas da quadratura amplitude dos feixes sonda e de bombeio com a intensidade deste último, para $\delta_{L2} = 0$. Como pode ser observado nesta figura, à medida que aumenta a intensidade do bombeio o ruído de cada um dos feixes aumenta, o que pode ser explicado a partir da curva de biestabilidade da cada campo como foi feito anteriormente[12].

Contudo, as flutuações do feixe sonda aumentam até um determinado valor e logo começam a diminuir. Esse comportamento pode ser explicado lembrando que o incremento da intensidade do bombeio provoca a separação dos picos de absorção do sonda, conduzindo à formação do dubleto Autler-Townes. Nessa situação, quando os picos estão bem separados, a freqüência

[12]O regime biestável será estudado profundamente na tese de J. G. Aguirre.

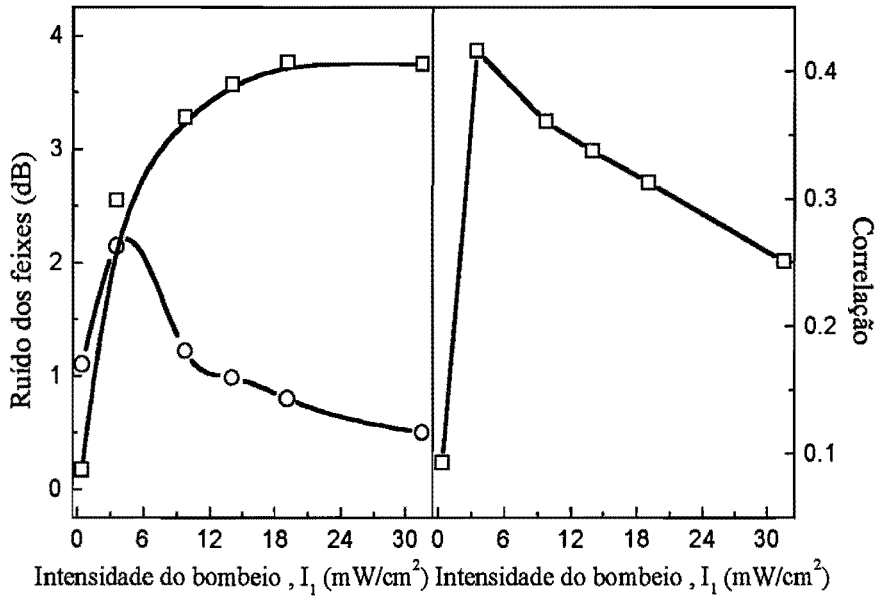

Figura 4.18: Ruído e correlação das quadraturas da amplitude do sonda (círculo aberto) e do bombeio (quadrado aberto) versus intensidade do bombeio para uma dessintonia nula do sonda $\delta_{L2} = 0$ e freqüência de análise $\Omega = \Gamma/6$. (Linhas sólidas utilizadas para mostrar o comportamento.)

de absorção do sonda não corresponde mais ao valor $\delta_{L2} = 0$ e, por conseguinte, a estatística do sonda após atravessar o meio atômico, deve coincidir com a estatística que ele tinha antes de interagir com os átomos, no caso, a variância correspondente a um estado coerente. Por essa mesma razão, o ruído do feixe de bombeio experimenta uma saturação, a partir da qual começa a diminuir conforme a intensidade do bombeio é incrementada.

No que se refere à correlação entre as quadraturas da amplitude dos feixe, ela aumenta até que o valor da intensidade do bombeio coincide com o valor da intensidade do sonda, situação na qual ela é máxima. Um incremento posterior da intensidade do bombeio e, portanto, um aumento da diferença entre esta e a intensidade do sonda, leva a uma diminuição da correlação entre os campos.

4.3.4 Correlação entre os feixes sonda e de bombeio

Tendo mostrado que existe correlação entre as quadraturas da amplitude dos feixes sonda e de bombeio na condição de transparência $\delta_{L2} = 0$, só resta

saber qual o caráter da mesma. Concretamente, procuremos a resposta à pergunta: a correlação entre os feixes sonda e de bombeio na condição de transparência induzida, é ela quântica ou clássica?

Pensando que na situação de transparência induzida os feixes não são absorvidos e, portanto, quando a freqüência do sonda é varrida passando pelo valor $\delta_{L2} = 0$, para o qual ambas intensidades aumentam, poderíamos chegar à conclusão de que a correlação observada é de natureza clássica, pois esse comportamento claramente pode ser observado em sistemas clássicos, tais como nosso modelo de massas e molas, apresentado na seção 3.2.

Por outro lado, quando se analisa o comportamento das flutuações dos campos, e não aquele de seus valores médios, a resposta pode ser bem diferente.

Para começar a procura pela resposta da questão formulada no primeiro parágrafo desta seção, na Fig. 4.19 apresentamos o comportamento das flutuações quânticas das quadraturas da amplitude e da fase para cada um dos feixes.

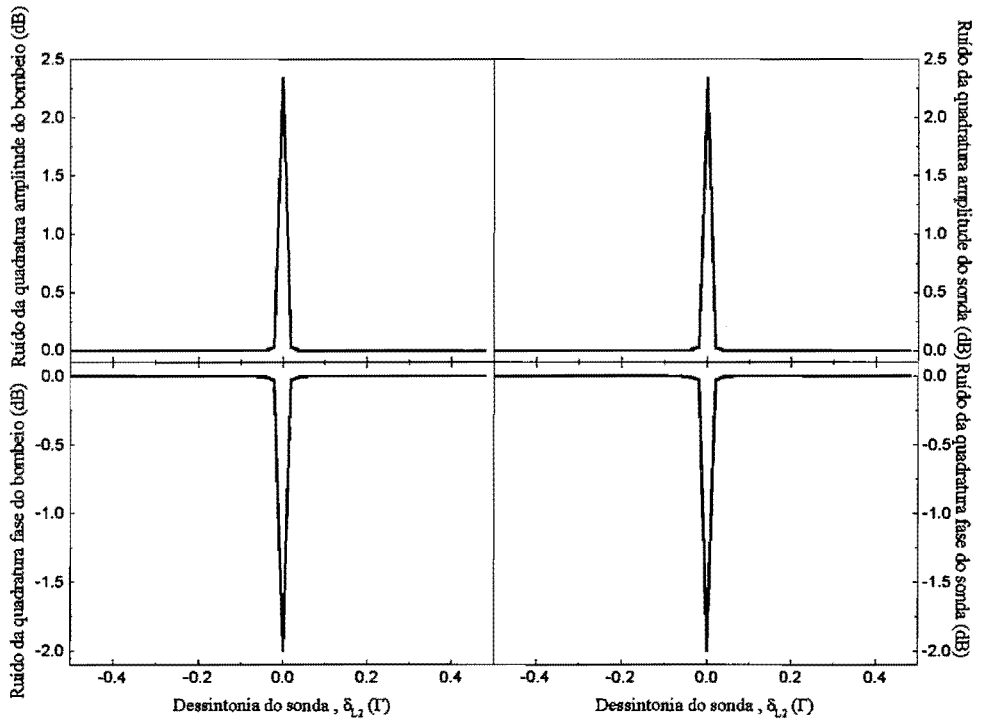

Figura 4.19: Flutuações quânticas das quadraturas da amplitude e da fase dos feixes sonda e de bombeio, tomados com iguais intensidades, $I_1 = I_2 = 2,80\ mW/cm^2$. Freqüência de análise Ω igual a $\Gamma/6$.

As flutuações da quadratura da fase, até aqui ignorada por nós, evidenciam uma redução significativa do ruído (~2,0 dB) precisamente ali onde ele é máximo (~2,3 dB) para a quadratura da amplitude. Por seu lado, a Fig. 4.20 mostra a existência de uma correlação entre a quadratura da fase do bombeio $\hat{Y}_{1S,\pi/2}(\Omega)$, e "menos" a quadratura da fase do sonda, $-\hat{Y}_{2S,\pi/2}(\Omega)$.

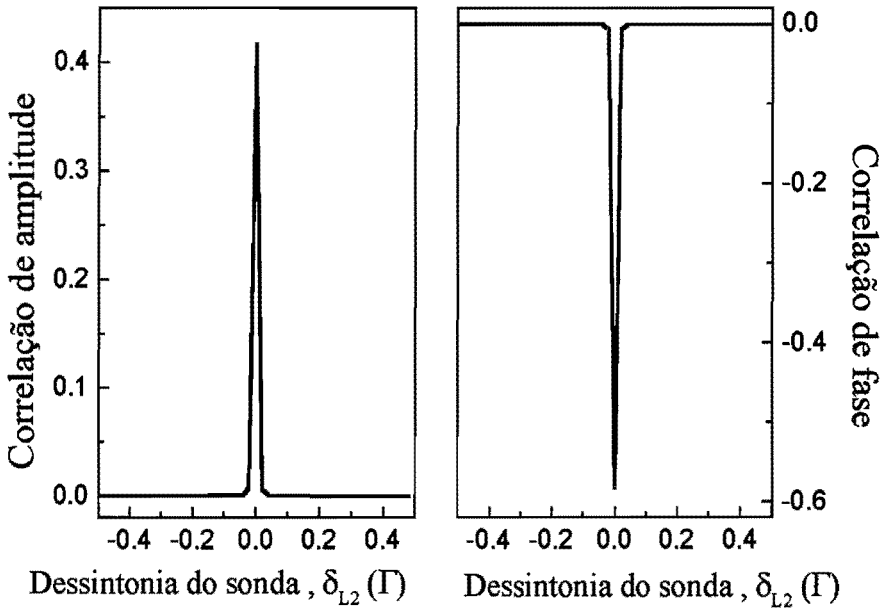

Figura 4.20: Correlação entre as quadraturas da amplitude $c_{\theta=0,\phi=0}(\Omega = \Gamma/6)$ e da fase $c_{\theta=\pi/2,\phi=\pi/2}(\Omega = \Gamma/6)$ de cada campo para a situação correspondente à Fig. 4.19.

A compressão de ruído na quadratura da fase é um resultado até certo ponto inesperado, após observarmos primeiramente o excesso de ruído na quadratura da amplitude. Baseados no conceito de estado comprimido, poderíamos ser induzidos a pensar que o ruído da quadratura da fase deveria corresponder a um estado comprimido. Errado!

Se a quadratura da amplitude apresentasse compressão de ruído, então necessariamente a quadratura da fase deveria estar com excesso. O contrário não é certo. Quando a quadratura da amplitude apresenta excesso de ruído, a quadratura da fase pode ter, por exemplo, ruído padrão [standard quantum limited (SQL) noise], ou até pode também apresentar excesso de ruído. Estas duas últimas situações obedecem o princípio de incerteza de Heisenberg e, portanto, são permitidas.

A existência de compressão de ruído de fase na condição de transparência induzida foi estudada por Fleischhauer e colaboradores [41]. Eles estudaram o ruído de fase de campos quantizados gerados pelo meio atômico formado por átomos de três níveis no interior de uma cavidade. No entanto, os campos responsáveis pelo fenômeno da transparência induzida são tratados classicamente, o que impossibilita analisar a influência das flutuações desses campos sobre os campos quantizados gerados pelos átomos. No que se refere à correlação, Fleischhauer [42] prevê correlação de fase de alta freqüência na situação de transparência induzida para dois campos propagantes tratados semi-classicamente.

Resumindo os resultados apresentados nas Figs. 4.19 e 4.20, nós temos que na condição de transparência induzida existe a seguinte correlação entre as quadraturas dos campos:

$$\hat{Y}_{1s,0}(\Omega) \longleftrightarrow \hat{Y}_{2s,0}(\Omega) \ , \tag{4.162}$$

$$\hat{Y}_{1s,\pi/2}(\Omega) \longleftrightarrow -\hat{Y}_{2s,\pi/2}(\Omega) \ . \tag{4.163}$$

O paradoxo EPR

A questão sobre o caráter quântico de uma correlação entre dois sistemas físicos tem sua origem no famoso paradoxo de Einstein, Podolsky e Rosen [43], fundamentado no seguinte critério de realidade física formulado por esses autores:

"If, without in any way disturbing a system, we can predict with certainty (i.e., with probability equal to unity) the value of a physical quantity, then there exists an element of physical reality corresponding to this physical quantity".

Examinemos o seguinte exemplo para ilustrar o paradoxo. Suponhamos que um sistema físico seja composto por duas partículas espacialmente separadas e perfeitamente correlacionadas, caracterizadas pelas coordenadas $\hat{x}_1$ e $\hat{x}_2$, e seus respectivos momentos $\hat{p}_1$ e $\hat{p}_2$. Dada a correlação perfeita entre as partículas, mediante uma medida em um estado quântico dado, digamos, da posição da partícula 2, podemos predizer com certeza o valor correspondente à posição da partícula 1 sem perturbá-la, assumindo que não existe ação à distância. Agora, se em lugar de medir a posição tivéssemos medido o momento da partícula 2, então poderíamos no mesmo estado quântico, predizer com certeza o valor do momento da partícula 1. Porém, como os operadores $\hat{x}_1$ e $\hat{p}_1$ não comutam, então estaríamos atribuindo valores precisos a duas grandezas que não possuem uma realidade física simultânea, pois elas não são mensuráveis simultaneamente.

A essência do paradoxo, e a aparente contradição com a mecânica quântica,

está em que as partículas foram consideradas, cada uma, como um subsistema físico constituinte de um sistema ainda maior quando, na realidade, as duas partículas são um *único* sistema físico, ou em outras palavras, elas são inseparáveis.

Baseado no trabalho de Einstein, Podolsky e Rosen, J. S. Bell formulou uma teoria, denominada teoria de variáveis ocultas [44, 45, 46], cujo resultado principal foi a derivação de uma desigualdade que permite determinar se uma dada correlação é de natureza clássica ou quântica. De fato, ele estabeleceu um critério prático, aplicável em determinadas condições, especificamente, quando o sistema estudado é caracterizado por variáveis dicotômicas, ou seja, discretas.

Na literatura podemos encontrar várias desigualdades do tipo Bell derivadas para sistemas específicos, que têm possibilitado o estudo experimental de correlações nos mais diversos sistemas físicos [47]. Em particular, a ótica quântica tem possibilitado a comprovação experimental das desigualdades de Bell e suas implicações, sendo o primeiro trabalho experimental realizado por Freedman e Clauser [48]. Aspect e colaboradores [49] também apresetaram outro trabalho pioneiro nesse tipo de pesquisa. Esses autores estudaram a correlação de polarização entre um par de fótons gerados pelo decaimento radiativo do estado excitado de átomos de cálcio, Ca. Outro trabalho importante, no mesmo sentido, foi o estudo da correlação, também de polarização entre um par de fótons, desta vez gerados por conversão paramétrica. Esse trabalho foi realizado por Ou e Mandel [50].

Além da comprovação da desigualdade de Bell, os trabalhos anteriores [51] têm outro ponto em comum, não menos relevante. Eles foram realizados em um regime denominado de contagem de fótons, o que significa que as intensidades utilizadas são extremamente pequenas.

Ao mesmo tempo que a desigualdade de Bell é útil para caracterizar a correlação em sistemas descritos por variáveis dicotômicas, ela resulta diretamente inaplicável no caso de variáveis contínuas. Por essa razão, esse critério não é muito apropriado para a análise da correlação mostrada nos resultados anteriores.

Dessa forma, é preciso recorrer a outros critérios que possibilitem discernir a natureza de uma correlação entre variáveis contínuas e macroscópicas, como é o caso das quadraturas de nossos feixes. É assim que chegamos ao critério das variâncias inferidas.

Variâncias inferidas

As experiências realizadas para testar a desigualdade de Bell e, portanto, para comprovar a incompleteza da mecânica quântica segundo EPR, uti-

lizam sistemas cuja descripção é dada em termos de variáveis discretas, o que representa uma certa modificação do problema originalmente formulado por Einstein, Podolsky e Rosen, expressado em termos da posição e do momento de uma partícula que, como sabemos, são grandezas que variam de maneira contínua.

Nesse sentido, o critério das variâncias inferidas [52], expressado em termos das variáveis de quadratura do campo, permite uma formulação completamente equivalente ao problema que dá origem ao paradoxo EPR, pois os operadores das quadraturas da fase $\hat{Y}_{\pi/2}(t)$ e da amplitude $\hat{Y}_0(t)$ representam grandezas contínuas canonicamente conjugadas, tais como a posição $\hat{x}$ e o momento $\hat{p}$ de uma partícula quântica.

Uma das primeiras comprovações experimentais da existência de uma correlação quântica entre dois feixes macroscópicos supostos inicialmente "independentes", utilizando o critério das variâncias inferidas, foi reportada pelo grupo do Prof. Kimble [53], empregando a amplificação paramétrica em cristais caracterizados por uma não linearidade ótica do tipo $\chi^{(2)}$. O esquema experimental é baseado na detecção homodina, que permite o acesso às flutuações quânticas das quadraturas de um campo.

De que forma é implementado o critério das variâncias inferidas?

A resposta a essa questão, no nosso caso particular, é a seguinte. Como sabemos, a partir dos resultados apresentados nas Figs. 4.19 e 4.20, existe uma correlação, cuja natureza determinaremos a seguir, entre a quadratura da amplitude do sonda $\hat{Y}_{2s,0}(t)$ e a quadratura da amplitude do bombeio $\hat{Y}_{1s,0}(t)$; e entre a quadratura da fase do bombeio $\hat{Y}_{1s,\pi/2}(t)$ e a quadratura da fase do sonda -$\hat{Y}_{2s,\pi/2}(t)$. A existência de tal correlação permite inferir o valor médio da quadratura da amplitude do sonda, por exemplo, a partir de uma medida do valor médio da quadratura da amplitude do bombeio. Por seu lado, o valor médio da quadratura da fase do sonda pode ser inferido realizando uma medida sobre a quadratura da fase do bombeio. O erro cometido na inferência desses valores, ou a precisão com a qual pode ser atribuido um valor às quadraturas do sonda, é quantificado pelas variâncias inferidas, definidas pelas expressões seguintes:

$$V_{2,0}^{inf}(t) = \Delta_{inf}^2 Y_{2,0}(t) \equiv \langle \left(\hat{Y}'_{2s,0}(t) - \eta_0 \, \hat{Y}'_{1s,0}(t) \right)^2 \rangle \, , \tag{4.164}$$

$$V_{2,\pi/2}^{inf}(t) = \Delta_{inf}^2 Y_{2,\pi/2}(t) \equiv \langle \left(\hat{Y}'_{2s,\pi/2}(t) + \eta_{\pi/2} \, \hat{Y}'_{1s,\pi/2}(t) \right)^2 \rangle \, , \tag{4.165}$$

onde, através dos parâmetros η_0 e $\eta_{\pi/2}$, levamos em consideração que a correlação entre as respectivas quadraturas pode não ser perfeita e, por outro

lado, o próprio processo de medição pode introduzir erros na inferência. De fato, esses parâmetros, cujos valores podem ser escolhidos livremente, caracterizam o que seria um "estimador" linear para os valores médios das grandezas $\hat{Y}'_{2s,0}(t)$ e $\hat{Y}'_{2s,\pi/2}(t)$ [54], definidas pelas relações

$$\hat{Y}'_{is,0}(t) = \hat{Y}_{is,0}(t) - \langle \hat{Y}_{is,0}(t) \rangle \ , \tag{4.166}$$

$$\hat{Y}'_{is,\pi/2}(t) = \hat{Y}_{is,\pi/2}(t) - \langle \hat{Y}_{is,\pi/2}(t) \rangle \ , \tag{4.167}$$

com $i = 1, 2$.

Substituindo as relações (4.166) e (4.167) nas Eqs.(4.164) e (4.165), podemos reescrever as variâncias inferidas em termos das variâncias de cada campo [Eqs.(4.158) e (4.159)] e da covariância [Eq.(4.160)] entre eles

$$\Delta^2_{inf} Y_{2,0}(\Omega) = V_{2s}(\Omega, 0) + \eta_0^2 \ V_{1s}(\Omega, 0) - 2\eta_0 \ V_{12s}(\Omega, 0, 0) \ , \tag{4.168}$$

$$\Delta^2_{inf} Y_{2,\pi/2}(\Omega) = V_{2s}(\Omega, \pi/2) + \eta^2_{\pi/2} \ V_{1s}(\Omega, \pi/2) + 2\eta_{\pi/2} \ V_{12s}(\Omega, \pi/2, \pi/2) \ , \tag{4.169}$$

onde passamos ao espaço das freqüências para realizar a análise espectral dessas grandezas.

O critério empregado para a escolha dos parâmetros η_0 e $\eta_{\pi/2}$ está baseado no fato seguinte. No caso de uma correlação perfeita, as variâncias inferidas são nulas. Por essa razão, os valores de η_0 e $\eta_{\pi/2}$ são escolhidos com a intenção de minimizar as relações (4.168) e (4.169). Essas variâncias inferidas mínimas, obtidas utilizando o conceito de otimização de uma grandeza qualquer, são dadas pelas equações seguintes

$$[\Delta^2_{inf} Y_{2,0}(\Omega)]_{mín} = V_{2s}(\Omega, 0) - \frac{V^2_{12s}(\Omega, 0, 0)}{V_{1s}(\Omega, 0)} \ , \tag{4.170}$$

$$[\Delta^2_{inf} Y_{2,\pi/2}(\Omega)]_{mín} = V_{2s}(\Omega, \pi/2) - \frac{V^2_{12s}(\Omega, \pi/2, \pi/2)}{V_{1s}(\Omega, \pi/2)} \ . \tag{4.171}$$

Finalmente, utilizando as Eqs.(4.170) e (4.171), o critério que nos permite determinar se a correlação entre os feixes sonda e de bombeio é clássica ou quântica é o seguinte:

Se:

$$[\Delta^2_{inf} Y_{2,0}(\Omega)]_{mín} [\Delta^2_{inf} Y_{2,\pi/2}(\Omega)]_{mín} < 1 \ , \tag{4.172}$$

então a correlação entre os feixes sonda e de bombeio, na condição de transparência induzida, é de natureza quântica.

À primeira vista, a Eq.(4.172) pode parecer uma violação da desigualdade de Heisenberg pois, ela é formulada a partir do produto de duas grandezas canonicamente conjugadas. Essa confusão aparente desaparece se notamos que as variâncias inferidas do feixe sonda são calculadas em um estado condicional e, por conseguinte, ela é diferente da variância calculada sobre uma distribuição incondicional de suas quadraturas, como seria no caso de uma desigualdade de Heisenberg.

A aplicação do critério anterior é apresentada em forma de resultado gráfico na Fig. 4.21, onde mostramos o produto das variâncias inferidas mínimas do sonda, como função da dessintonia desse feixe.

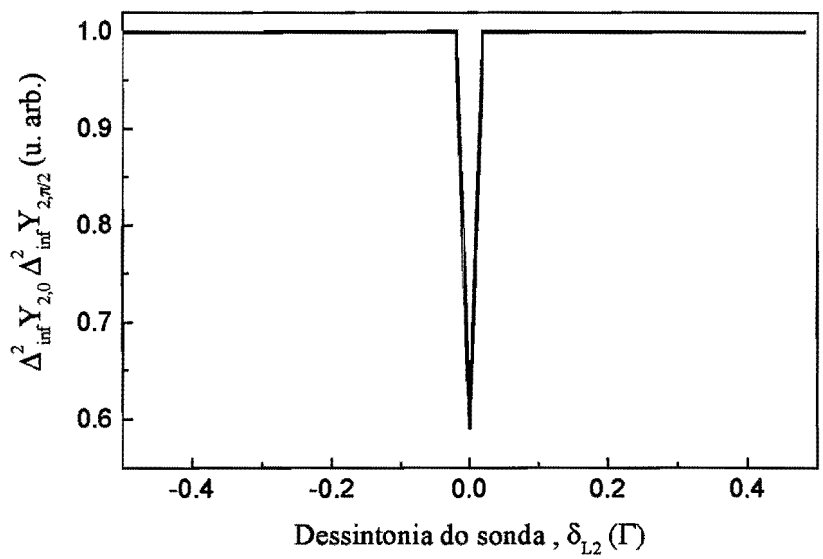

Figura 4.21: Produto das variâncias inferidas do feixe sonda para uma freqüência de análise $\Omega = \Gamma/6$. A correspondente correlação entre as quadraturas é mostrada na Fig. 4.20.

Como podemos apreciar na Fig. 4.21, fora da ressonância ($\delta_{L2} = 0$), o produto das variâncias inferidas é igual à unidade. Essa igualdade à unidade está justificada pelo fato de que o estado dos feixes sonda e de bombeio antes da interação com o meio atômico é coerente e eles não estão correlacionados.

Já para a condição de ressonância $\delta_{L2} = 0$ que, como sabemos, corresponde à situação de transparência induzida, o caráter da correlação sonda-

bombeio é bem diferente, pois a desigualdade (4.172) é aproximadamente 40% satisfeita.

A implementação experimental do critério das variâncias inferidas é discutida na seção 5.3. O esquema proposto permite o acesso às flutuações quânticas das quadraturas dos feixes sonda e de bombeio, e está fundamentado no uso da detecção homodina. A experiência proposta dá um sentido prático ao critério das variâncias inferidas, ressaltando a importância do mesmo na caracterização da correlação entre feixes macroscópicos.

Para uma melhor compreensão do resultado mostrado na Fig. 4.21, analisemos o seguinte teorema sobre a inseparabilidade em um sistema de variáveis contínuas.

Critério de Duan-Giedke-Cirac-Zoller

Recentemente, Duan e colaboradores publicaram um critério de inseparabilidade para sistemas descritos por variáveis contínuas [55], formulado como teorema e que apresentaremos a seguir brevemente, começando pela definição[13] de um estado separável.

Definição 1. *Um estado quântico ρ de dois modos 1 e 2 é separável se, e só se, ele pode ser expressado na forma:*

$$\rho = \sum_i p_i \, \rho_i = \sum_i p_i \, \rho_i^1 \otimes \rho_i^2 \, , \tag{4.173}$$

onde ρ_i^1 e ρ_i^2 são estados normalizados dos modos 1 e 2, respectivamente, e as probabilidades p_i obedecem às relações: $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$. □

A próxima definição está relacionada com os operadores EPR. Para os operadores x_1, x_2, p_1 e p_2, cujas relações de comutação serão dadas a seguir, temos a seguinte definição de par de operadores EPR.

Definição 2. *Dois operadores $\hat{u}$ e $\hat{v}$, dados pelas relações*

$$\hat{u} = |a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2 \, , \tag{4.174}$$

$$\hat{v} = |a|\hat{p}_1 - \frac{1}{a}\hat{p}_2 \, , \tag{4.175}$$

onde a é um número real arbitrário diferente de zero, definem um par de operadores EPR. □

A segunda definição está associada ao fato de que um estado quântico completamente inseparável ou totalmente emaranhado pode ser expressado como um autoestado comum dos operadores $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$ e $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$, utilizados na

[13] O símbolo □ será empregado para indicar o fim de uma definição ou teorema.

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3646
ex. 1

formulação do paradoxo EPR [43]. Por outro lado, a variância de um par de operadores EPR, calculada em um autoestado comum dos mesmos, é nula.

Teorema 1. *Suponhamos que os operadores $\hat{x}_j$ e $\hat{p}_j$ $(j = 1, 2)$ da definição 2 satisfazem a relação de comutação:*

$$[\hat{x}_j, \hat{p}_{j'}] = 2\, i\, \delta_{jj'} \ . \tag{4.176}$$

Se ρ é um estado quântico qualquer separável, então a variância total do par de operadores EPR (4.174) e (4.175) satisfaz a desigualdade

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho \geq 2\,(a^2 + \frac{1}{a^2}) \ . \tag{4.177}$$

Demonstração. A variância do operador $\hat{u}$ no estado ρ é dada pela expressão

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho = \sum_i p_i \langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_i} \ . \tag{4.178}$$

Utilizando a definição 2, teremos

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_i} = \langle\Big(|a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2\Big)^2\rangle_{\rho_i} - \langle|a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2\rangle^2_{\rho_i} =$$
$$a^2\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_{\rho_i} + \frac{1}{a^2}\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_{\rho_i} + 2\frac{|a|}{a}\Big(\langle\hat{x}_1\hat{x}_2\rangle_{\rho_i} - \langle\hat{x}_1\rangle_{\rho_i}\,\langle\hat{x}_2\rangle_{\rho_i}\Big) \ , \tag{4.179}$$

onde

$$\langle(\Delta\hat{x}_j)^2\rangle_{\rho_i} = \langle\hat{x}_j^2\rangle_{\rho_i} - \langle\hat{x}_j\rangle^2_{\rho_i} \quad , \quad j = 1, 2 \ . \tag{4.180}$$

De maneira análoga, para a variância do operador $\hat{v}$ encontramos

$$\langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho_i} = a^2\langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_{\rho_i} + \frac{1}{a^2}\langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_{\rho_i} -$$
$$-2\frac{|a|}{a}\Big(\langle\hat{p}_1\hat{p}_2\rangle_{\rho_i} - \langle\hat{p}_1\rangle_{\rho_i}\,\langle\hat{p}_2\rangle_{\rho_i}\Big) \ , \tag{4.181}$$

com

$$\langle(\Delta\hat{p}_j)^2\rangle_{\rho_i} = \langle\hat{p}_j^2\rangle_{\rho_i} - \langle\hat{p}_j\rangle^2_{\rho_i} \quad , \quad j = 1, 2 \ . \tag{4.182}$$

Segundo a hipótese do teorema, ρ é um estado quântico separável. Portanto, ele é da forma (4.173) e, consequentemente, as correlações que aparecem nas Eqs.(4.179) e (4.181) são nulas. Dessa forma,

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_i} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho_i} = a^2\Big(\langle(\Delta\hat{x}_1)^2\rangle_{\rho_i} + \langle(\Delta\hat{p}_1)^2\rangle_{\rho_i}\Big) +$$
$$+\frac{1}{a^2}\Big(\langle(\Delta\hat{x}_2)^2\rangle_{\rho_i} + \langle(\Delta\hat{p}_2)^2\rangle_{\rho_i}\Big) \ . \tag{4.183}$$

Utilizando a relação

$$\langle(\Delta\hat{x}_j)^2\rangle_{\rho_i} + \langle(\Delta\hat{p}_j)^2\rangle_{\rho_i} \geq 2\ \Delta x_j \Delta p_j\ , \tag{4.184}$$

o princípio de incerteza de Heisenberg, e a relação de comutação entre os operadores $\hat{x}_j$ e $\hat{p}_j$,

$$\Delta x_j \Delta p_j \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{x}_j, \hat{p}_j]\rangle_{\rho_i}| = 1\ , \tag{4.185}$$

encontramos

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_i} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho_i} \geq 2\ \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\ , \tag{4.186}$$

e, finalmente,

$$\begin{aligned}\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho} = \sum_i p_i \Big\{\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_i} + \langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_i}\Big\} \geq \\ \sum_i p_i\ 2\ \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) = 2\ \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\ .\end{aligned} \tag{4.187}$$

Ou seja, obtemos o seguinte *critério de separabilidade*

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho} \geq 2\ \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\ .\ \square \tag{4.188}$$

Uma vez estabelecido o que chamaremos de critério DGCZ (Duan-Giedke-Cirac-Zoller), passemos à aplicação do mesmo a nosso caso particular.

Tomando $a = 1$ e a seguinte equivalência entre os operadores

$$\hat{x}_1 \Leftrightarrow \hat{Y}_{1s,0}\ , \tag{4.189}$$

$$\hat{p}_1 \Leftrightarrow \hat{Y}_{1s,\pi/2}\ , \tag{4.190}$$

$$\hat{x}_2 \Leftrightarrow \hat{Y}_{2s,0}\ , \tag{4.191}$$

$$\hat{p}_2 \Leftrightarrow \hat{Y}_{2s,\pi/2}\ , \tag{4.192}$$

encontramos o seguinte critério DGCZ para os feixes sonda e de bombeio

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho} \geq 4\ , \tag{4.193}$$

válido quando os campos são *separáveis.*

Notemos alguns pontos importantes, resumindo o resultado anterior:

- Como o teorema 1 nos fornece uma condição necesária para a separabilidade de um estado quântico, então a violação da desigualdade (4.193) é *suficiente* para provar que os campos sonda e de bombeio são *inseparáveis* e, portanto, estão correlacionados em nível quântico. Dito de outra forma, estão *emaranhados*.

- Os operadores $\hat{u}$ e $\hat{v}$ comutam, o que pode ser comprovado facilmente a partir da definição dos mesmos e, por conseguinte, eles estão associados a grandezas que podem ser medidas simultaneamente.

- A equivalência (4.189) - (4.192) permite establecer uma relação direta entre as variâncias inferidas das quadraturas do sonda e as variâncias dos operadores $\hat{u}$ e $\hat{v}$.

Finalmente, na Fig. 4.22 apresentamos a dependência do membro esquerdo da desigualdade (4.193), calculada no espaço das freqüências. Os valores das intensidades dos feixes foram tomados iguais aos empregados na derivação das curvas mostradas nas Figs. 4.19 - 4.21.

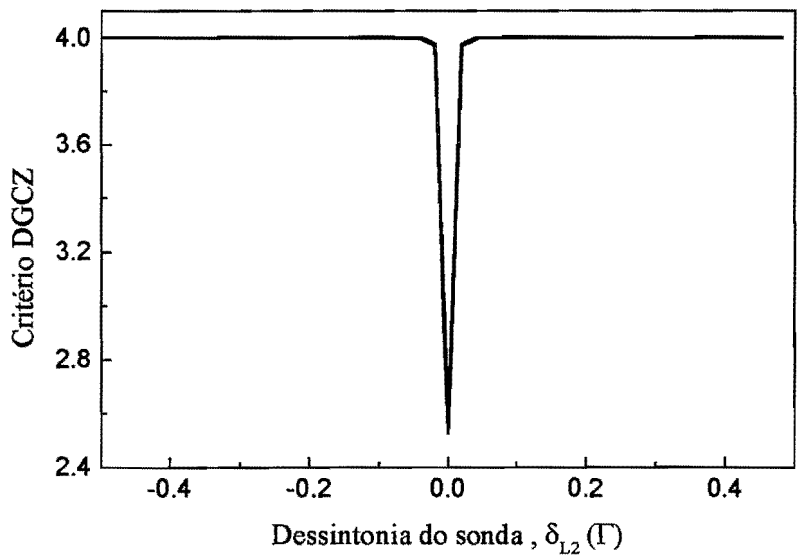

Figura 4.22: Aplicação do critério DGCZ na determinação do caráter da correlação entre os feixes sonda e de bombeio. Freqüência de análise Ω igual a $\Gamma/6$.

A primeira conclusão que derivamos da Fig. 4.22, e que achamos interessante, é a violação apreciável da desigualdade (4.193) na condição de

transparência induzida $\delta_{L2} = 0$, o que indica que, nessa situação, os campos sonda e de bombeio estão emaranhados. Por outro lado, fora da ressonância os feixes não estão correlacionados.

A outra conclusão que, à primeira vista, podemos achar "surpreendente" está relacionada ao fato de que a desigualdade (4.193) é violada aproximadamente em 40% quando o feixe sonda está ressonante com a transição que ele excita. Nessa condição ($\delta_{L2} = 0$), o critério das variâncias inferidas (ver Fig. 4.21) e o critério DGCZ (ver Fig. 4.22), reportam a existência de uma correlação de natureza quântica entre os feixes sonda e de bombeio, exatamente na mesma proporção!

A surpresa não dura muito tempo se voltamos alguns parágrafos e, em particular, prestamos atenção ao terceiro ponto, logo após a relação (4.193). No nosso caso particular, ambos critérios são equivalentes, e só um estudo mais profundo sobre o tema poderá dizer se eles são equivalentes de forma geral.

A relevância do resultado anterior é algo que deve ser ressaltado, sobretudo quando levamos em conta o estado atual das pesquisas em ótica quântica. O elevado interesse em sistemas físicos nos quais existe uma correlação quântica está motivado pela utilização dessa correlação em potenciais aplicações, entre as quais temos a computação e a comunicação quânticas [56], esquemas de criptografia [57] baseados na teleportação [58], medidas QND [59], para citar algumas.

Em geral, os sistemas propostos, ou até utilizados, exigem condições experimentais que, quando possíveis, são de implementação altamente complexa, sem considerar o custo bastante elevado na maioria dos casos. Existem esquemas propostos que, no momento, são completamente ideais e mal conseguem sair do papel.

Nesse aspecto, a existência de uma correlação de natureza quântica no sistema que apresentamos, torna a implementação de algumas das aplicações dessa correlação algo completamente factível e o mais surpreendente é que o sistema não precisa ser "limpo". Mesmo na presença de um reservatório capaz de degradar o caráter quântico da correlação, podemos implementar algumas das potenciais e interessantes aplicações mencionadas anteriormente. Por último, devemos destacar que a correlação quântica observada refere-se apenas aos feixes sonda e de bombeio e, por conseguinte, a natureza quântica do sistema átomo – feixe sonda – feixe de bombeio é ainda mais forte.

Para finalizar a apresentação das previsões da teoria, passaremos ao estudo de um ponto que, mesmo sendo o último do capítulo, não é por isso menos importante, pois ele é decisivo para levar nosso estudo teórico ao plano experimental.

4.3.5 Influência da freqüência de análise

Até o momento, todos os resultados relativos às flutuações quânticas dos feixes sonda e de bombeio, e à correlação entre eles, foram apresentados para uma freqüência de análise fixa, no caso, $\Omega = \Gamma/6$, que corresponde a um valor de 6,28 MHz.

O que acontence quando essa freqüência é alterada?

A resposta à pergunta anterior é ilustrada na Fig. 4.23, onde apresentamos a dependência do ruído quântico das quadraturas do feixe de bombeio (comportamento análogo para o feixe sonda) e da correlação entre os campos com a freqüência de análise,. Os critérios do produto das variâncias inferidas e DGCZ são apresentados na Fig. 4.24. As intensidades foram tomadas iguais às utilizadas nos resultados apresentados nas figuras anteriores e, as linhas sólidas indicam apenas o comportamento das grandezas estudadas.

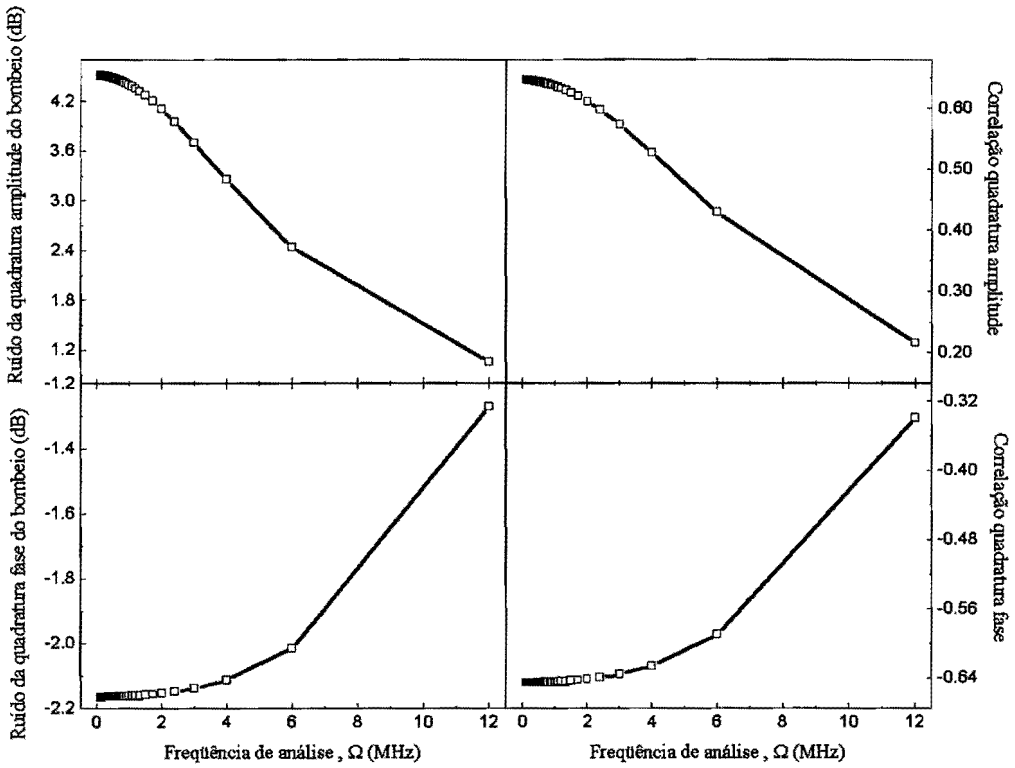

Figura 4.23: Dependência da correlação sonda-bombeio, e das flutuações quânticas das quadraturas da amplitude e da fase do feixe de bombeio, com a freqüência de análise para $\delta_{L2} = 0$.

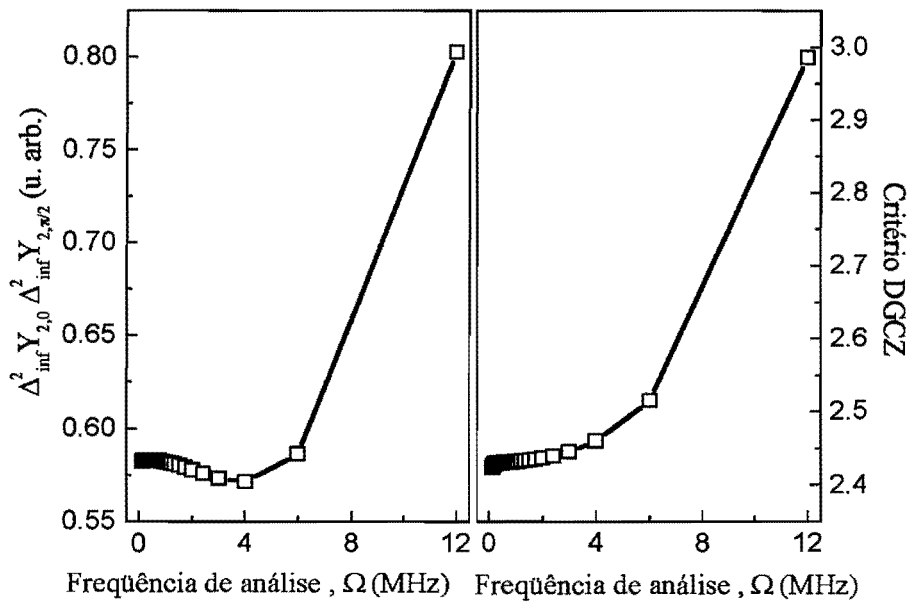

Figura 4.24: Influência da freqüência de análise sobre o caráter quântico da correlação entre os feixes sonda e de bombeio. Dessintonia do sonda, $\delta_{L2} = 0$.

Para analisar, e entender, os resultados mostrados nas Figs. 4.23 e 4.24, é suficiente recorrer à definição da freqüência de análise (ver apêndice A) e lembrar que ela é inversamente proporcional ao tempo de detecção t_d do dispositivo de medida, o analisador de espectros. Dessa forma, valores grandes de Ω implicam um tempo de detecção que pode ser muito pequeno em comparação com os tempos característicos do sistema estudado.

Em particular, quando se estuda a correlação temporal entre valores de um sinal, tomados em instantes de tempo diferentes, t_1 e t_2, se o tempo de detecção é maior ou da ordem do intervalo de tempo $|t_1 - t_2|$, então podemos observar alguma manifestação da correlação entre os dois valores do sinal (se ela existe). Porém, se o tempo de detecção é muito menor que o intervalo de tempo $|t_1 - t_2|$, então é impossível observar qualquer correlação entre os valores medidos.

Por essa razão, experimentalmente observamos que para valores grandes da freqüência de análise, em geral da ordem de centenas de MHz, o ruído medido da grande maioria dos sinais de fotocorrente tem um caráter poissoniano, que corresponde à ausência de correlação ou distribuição aleatória dos valores do sinal medido.

Teoricamente a situação não poderia ser muito diferente, e é por isso que,

à medida que a freqüência de análise aumenta, as flutuações quânticas das quadraturas do bombeio diminuem, tendo como valor limite (não mostrado nas figuras) 0 dB, valor que corresponde a uma variância igual à unidade, como no caso de um estado coerente, ou poissoniano, quando é analisado o ruído de intensidade.

Por outro lado, à medida que diminuímos a freqüência de análise, o tempo de detecção aumenta e, portanto, a probabilidade de detectar um par de fótons sonda-bombeio correlacionados aumenta também. Lembremos que os fótons correlacionados não chegam a seus respectivos detectores no mesmo instante de tempo e, por esse motivo, pode existir um certo retardo ou intervalo de tempo entre a detecção de um fóton e aquele ao qual ele está correlacionado. As causas para essa diferença nos tempos de chegada são as mais diversas e vão desde a diferença entre os caminhos percorridos pelos fótons em direção aos detectores, até os processos de reabsorção pelo meio atômico de um fóton correlacionado, quando seu par correspondente pode estar a caminho da detecção.

Os critérios que definem o caráter da correlação entre os feixes sonda e de bombeio são determinados pelas flutuações das quadraturas desses campos e, consequentemente, têm um comportamento que pode ser compreendido a partir da explicação anterior.

Além dos resultados apresentados ao longo deste capítulo, foram obtidos outros resultados gráficos, não apresentados com a intenção de evitar tornar pesada a leitura do capítulo. Contudo, nosso último comentário será dedicado a esses resultados.

Quando inicialmente os feixes sonda e/ou de bombeio estão em um estado quântico com excesso de ruído na quadratura da amplitude, esse excesso de ruído continua presente em todas as curvas que mostram o comportamento das flutuações da quadratura da amplitude e, em particular, o excesso de ruído observado na condição de transparência induzida é mais pronunciado. No entanto, nessa situação, o caráter quântico da correlação entre os feixes é degradado, pois a compressão de ruído observada na quadratura da fase, não resulta suficiente para reverter o caráter clássico da correlação.

Também foi estudada a influência da taxa de relaxação Γ_{12} da coerência s_{12} entre os estados fundamentais sobre as flutuações dos campos e sobre a correlação entre eles. Esse estudo indicou que, à medida que Γ_{12} é incrementada, o excesso de ruído da quadratura da amplitude tende a diminuir, a compressão observada na quadratura conjugada também, e a correlação entre os feixes desaparece. Esse resultado é uma comprovação a mais de que o comportamento das flutuações dos campos, e a existência de uma correlação entre eles, têm sua origem na coerência induzida no meio atômico. Dessa forma, a introdução no sistema de algum mecanismo que permita controlar

a coerência do meio[14] abre a possibilidade de realizar outra classe de experiências utilizando o esquema de tranparência induzida. Nos referimos às experiências de "apagadores quânticos" [60], fundamentadas na possibilidade de modificar a interferência quântica que experimenta um particular sistema físico.

Conclusões

O presente capítulo foi dedicado à formulação teórica da transparência induzida por laser. O tratamento do problema foi baseado nas equações quânticas de Langevin, ou equações de Heisenberg-Langevin, como também são conhecidas na literatura.

A partir do hamiltoniano do sistema derivamos as equações de evolução temporal dos operadores correspondentes às variáveis atômicas e dos campos. Para os campos sonda e de bombeio, tratados quanticamente, consideramos de maneira explícita o hamiltoniano das respectivas fontes laser, o que possibilitou desenvolver um modelo de campo propagante sem a necessidade de incluir uma cavidade em anel para tratar o problema da interação com os átomos.

Uma vez formulado o problema, as equações encontradas foram aplicadas ao estudo da transparência induzida por laser em um vapor formado por átomos do isótopo ^{85}Rb (rubídio). Os resultados foram apresentados em duas partes. Na primeira delas, estudamos o comportamento dos valores médios das variáveis do sistema no estado estacionário. A resposta do meio atômico ao feixe sonda mostrou a curva de transparência induzida, comportamento observado experimentalmente e nos estudos realizados utilizando a teoria semi-clássica. Também investigamos a resposta dispersiva dos átomos, comprovando a existência de uma mudança abrupta do índice de refração na região de transparência induzida.

Como sabemos, a largura natural do sinal de transparência induzida é definida pela taxa Γ_{12}. Nosso estudo da taxa de relaxação Γ_{12} mostrou que a largura do pico observado no espectro de ruído das quadraturas do campo fornece diretamente o valor da largura natural do sinal de transparência induzida. Determinar essa largura a partir da intensidade transmitida do feixe sonda é algo subjetivo, pois é difícil saber qual é exatamente a condição correspondente à transparência perfeita.

A segunda parte das previsões teóricas foi dedicada ao estudo das flutuações quânticas dos campos no estado estacionário. Esse estudo mostrou a

[14]Por exemplo, alterar a população estacionária de um ou dos dois estados fundamentais atômicos por bombeamento ótico.

existência de excesso de ruído na quadratura amplitude de ambos feixes na condição de transparência induzida, como uma manifestação da coerência induzida no meio atômico. Contrariamente ao que muitos acreditam, a coerência observada é o resultado da ação conjunta de ambos feixes e, no estado estacionário correspondente à situação de transparência induzida, o meio atômico age como um "beam splitter" distribuindo os fótons entre ambos feixes, criando uma correlação entre eles.

Para determinar a natureza dessa correlação utilizamos dois critérios. O primeiro deles, o critério das variâncias inferidas, indicou que a correlação entre os feixes sonda e de bombeio na condição de transparência induzida é de caráter quântico. Esse resultado foi estabelecido investigando as flutuações quânticas da quadratura da fase de ambos feixes, as quais apresentaram compressão de ruído suficiente para criar o emaranhamento entre os campos.

O segundo critério empregado foi o teorema recentemente apresentado por Duan, Giedke, Cirac e Zoller, sobre a inseparabilidade em um sistema de variáveis contínuas. Novamente, ficou estabelecido por esse critério (que denominamos critério DGCZ) que, na situação de transparência induzida a correlação entre os feixes sonda e de bombeio é quântica e, quantitativamente, o caráter quântico encontrado coincidiu com o resultado reportado pelo critério das variâncias inferidas.

Os resultados teóricos que apresentamos neste capítulo são muito interessantes. No entanto, uma comprovação experimental dos mesmos é de vital importância. Como veremos no próximo capítulo, já foi possível observar experimentalmente algums dos efeitos previstos. Em particular, medimos excesso de ruído de intensidade dos feixes sonda e de bombeio e também a correlação de intensidades prevista.

Capítulo 5

Estudo Experimental das Flutuações dos Campos na Condição de Transparência Induzida

"A mecânica quântica acontece no laboratório e não no espaço de Hilbert".

A. Peres

Introdução

Neste capítulo apresentaremos a comprovação experimental de algumas das previsões teóricas do capítulo anterior. Primeiramente, descreveremos os dispositivos e técnicas de medição que foram empregados nas experiências, começando pelos diodos lasers. Em seguida, descreveremos o meio atômico utilizado e as condições nas quais serão realizadas as medidas. A identificação dos níveis de energia da configuração Λ foi realizada, como é habitual, empregando a técnica de absorção saturada.

Uma vez obtido o espectro de absorção saturada, observamos o fenômeno da transparência induzida analisando a intensidade média transmitida do feixe sonda. Esse primeiro estudo experimental permitiu identificar as condições experimentais nas quais deve ser realizada a análise das flutuações quânticas dos feixes sonda e de bombeio.

Para o estudo das flutuações foi utilizado o esquema de detecção homodina apresentado na seção 2.3. Em primeiro lugar, medimos o espectro de ruído de intensidade de ambos feixes para determinar a freqüência de análise a ser utilizada nas medidas das flutuações dos campos, na condição

de transparência induzida. Na condição de transparência, o ruído de intensidade dos campos deve apresentar um comportamento similar ao ruído da quadratura amplitude, mostrado nas previsões teóricas do capítulo 4.

Na última seção deste capítulo, apresentaremos um esquema de uma montagem experimental que pode ser utilizada para implementar a medida das variâncias inferidas e do critério DGCZ. As condições que devem ser observadas para realizar esse tipo de medida também serão comentadas nessa seção. Atualmente no laboratório estamos preparando dois lasers que serão utilizados como oscilador local. Eles permitirão realizar as medidas das flutuações quânticas das quadraturas dos feixes e, consequentemente, será possível conferir a natureza da corrrelação entre os feixe sonda e de bombeio, na condição de transparência induzida.

5.1 Dispositivos e Técnicas de Medição

5.1.1 Lasers

Na experiência utilizamos diodos laser SDL-5400C cuja potência de saída pode chegar aos 50 mW. A corrente nominal de operação é de 100 mA. Trabalhando na configuração livre o limiar de oscilação é de 35 mA. O comprimento de onda λ da luz emitida por esses dispositivos é de 776$\pm$4 nm a temperatura ambiente, e pode ser controlado mudando vários parâmetros tais como a temperatura de trabalho do diodo, a corrente de alimentação e, no caso de injeção ótica, modificando o comprimento de onda da luz injetada.

Os diodos disponíveis no nosso laboratório são colocados em uma montagem mecânica que permite controlar a temperatura de trabalho, assim como empregar uma rede de difração para melhorar as propriedades espectrais do laser. Essa montagem de cavidade estendida (ver Fig. 5.1) na configuração Littrow[1] é comumente utilizada para diminuir o limiar de oscilação do laser, controlar seu comprimento de onda e largura espectral. Dessa forma é possível obter um feixe monomodo (TEM_{00}), linearmente polarizado e de intensidade estável [61]. Para uma descrição detalhada sobre os lasers utilizados e a caracterização dos mesmos o leitor pode consultar a Ref. [62].

O feixe emitido pelo laser DL apresenta uma divergência que é corrigida empregando uma lente colimadora Melles Griot 06-GLC-002 denotada pela letra L na Fig. 5.1. As distâncias focal e de trabalho dessa lente são iguais a 8 e 1,5 mm, respectivamente. A grade de difração G, de 1800 linhas/mm,

[1] A primeira ordem da difração é injetada de volta no diodo, e a ordem zero é refletida para fora da caixa que contém o laser.

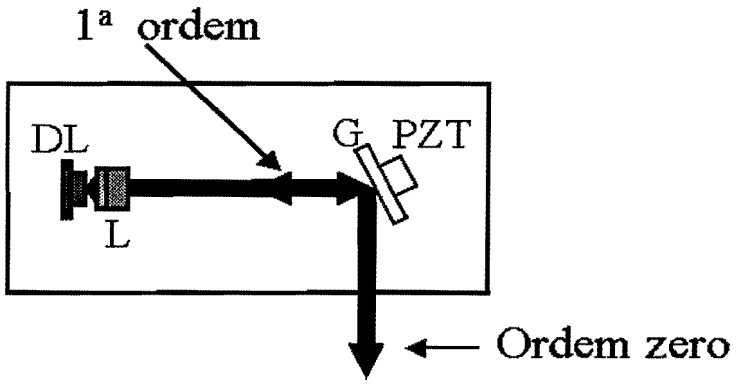

Figura 5.1: Esquema da montagem do diodo laser na configuração Littrow.

é colada sobre um transladador piezo elétrico (PZT) que permite varrer o comprimento de onda do feixe em uma faixa de 10 nm aproximadamente.

A fonte de corrente utilizada para alimentar o laser é regulada em corrente, o que permite alimentar o diodo com uma corrente estável capaz de evitar as flutuações que originam mudanças no índice de refração do meio laser semicondutor alterando, dessa maneira, o comprimento de onda da luz emitida. Por outro lado, o próprio diodo laser é instalado em um suporte metálico em contato com um dispositivo Peltier utilizado para regular e controlar a temperatura de trabalho do laser com uma precisão de aproximadamente 0.1 ^oC.

Dois diodos laser foram utilizados na experiência realizada, um para obter o feixe de bombeio e o outro para o feixe sonda. O valor medido da corrente do limiar de oscilação foi de aproximadamente 33 mA para cada laser. Medindo a potência da luz para diferentes valores da corrente de alimentação do diodo podemos determinar a eficiência quântica de conversão η de corrente elétrica em luz, definida como a relação entre a potência da luz emitida pelo laser e a potência elétrica da alimentação. O resultado dessa medida para o laser sonda é apresentado na Fig. 5.2.

Para uma corrente de alimentação do diodo I, a potência P da luz emitida é dada pela relação

$$P(I) = \eta \frac{hc}{q\lambda} I \ , \tag{5.1}$$

onde q, h, e c são a carga do elétron, a constante de Planck e a velocidade da luz, respectivamente. A partir do coeficiente angular do ajuste linear dos dados experimentais da Fig. 5.2 podemos determinar o valor de η, igual a 53,2±0,8 % e 54,8±0,2 % para os lasers de bombeio e sonda, respectivamente.

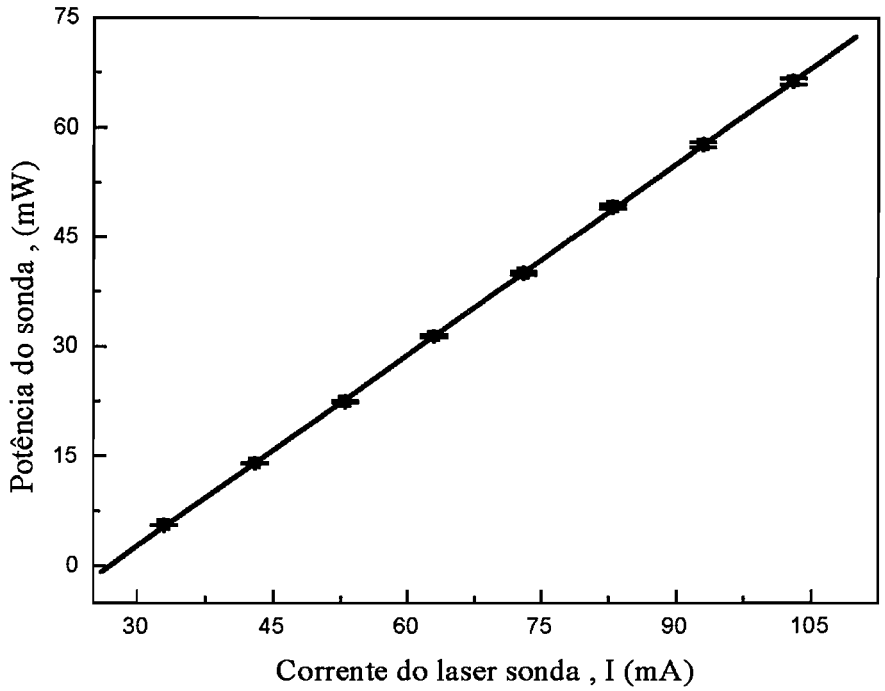

Figura 5.2: Potência do laser sonda vs. corrente de alimentação. A linha sólida representa um ajuste linear dos dados experimentais (símbolos quadrados).

5.1.2 Sistema de detecção balanceada

As propriedades estatísticas dos feixes foram estudas empregando o sistema de detecção homodina (ver Fig. 2.3), formado por um cubo divisor de feixes 50/50, dois fotodetectores, e um circuito misturador para combinar as fotocorrentes.

Na maioria dos casos, no lugar do cubo divisor de feixes 50/50, emprega-se uma lâmina de meia onda ($\lambda/2$) seguida por um cubo divisor de feixes polarizador. Nessa situação, como o feixe laser está linearmente polarizado, girando a lâmina $\lambda/2$ é possível obter na saída do cubo dois feixes de intensidades praticamente iguais. Dessa forma podemos corrigir qualquer diferença entre as intensidades detectadas, causada pelas flutuações da polarização do feixe incidente.

Fotodetectores

Na experiência foram empregados fotodetectores de silício, modelo FND-100 fabricados por EG&G, alimentados com uma tensão de 15 V. Esses de-

tectores possuem uma eficiência quântica de conversão de aproximadamente 70 %, uma largura de banda de 350 MHz e uma capacitância interna que varia entre 8 e 10 pF.

A corrente gerada pelos fotodetectores é amplificada em duas etapas independentes. Uma dedicada à componente de alta freqüência da fotocorrente, e a outra amplifica a parte contínua. A saída de alta freqüência HF do amplificador é conectada na entrada do misturador, e a saída DC é utilizada para determinar o valor médio da fotocorrente e balancear o esquema de detecção homodina.

Circuito de soma/subtração

O misturador, ou circuito de soma/subtração, é um amplificador de ganho unitário que possui uma chave que permite escolher entre a adição (posição "+" da chave) ou a subtração (posição "–" da chave) dos sinais de fotocorrente conectados na sua entrada. Na ausência do oscilador local, a posição "+" da chave permite realizar a medida do ruído de intensidade do feixe incidente. Quando a chave está na posição "–", o feixe incidente serve de oscilador local para o campo em estado de vácuo que entra pela porta não usada do divisor de feixes e, nessa situação, é possível medir o espectro de ruído correspondente ao *shot noise* ou ruído quântico padrão.

O circuito misturador disponível no laboratório possui uma banda passante que varia de 1 a 200 MHz, e a impedância de saída é de 50 $Ohms$, igual à impedância na entrada do analisador de espectros.

Para uma descrição detalhada sobre o sistema de detecção utilizado nas experiências pode consultar-se a Ref. [63]

5.1.3 Meio atômico

Um vapor de ^{85}Rb, contido em uma célula de vidro a temperatura ambiente e de 5 cm de comprimento, foi utilizado como meio atômico. Na realidade, a composição do vapor de rubídio é de 72,2 % do isótopo ^{85}Rb, e de 27,8 % do isótopo ^{87}Rb. Os lasers sonda e de bombeio foram escolhidos segundo a configuração dos níveis atômicos mostrada na seção 4.2.2.

Espectroscopia de absorção saturada

A técnica de espectroscopia de absorção saturada [28, 61, 64] foi empregada para identificar os níveis de energia e poder sintonizar corretamente os

lasers. Primeiramente, com a ajuda de um monocromador[2], a corrente de alimentação do diodo e sua temperatura são ajustadas até que o comprimento de onda da luz emitida seja aproximadamente igual a 780 nm. Logo, varrendo a tensão do PZT e empregando uma montagem similar à da Fig. 5.3 é possível observar o espectro correspondente à estrutura hiperfina do rubídio.

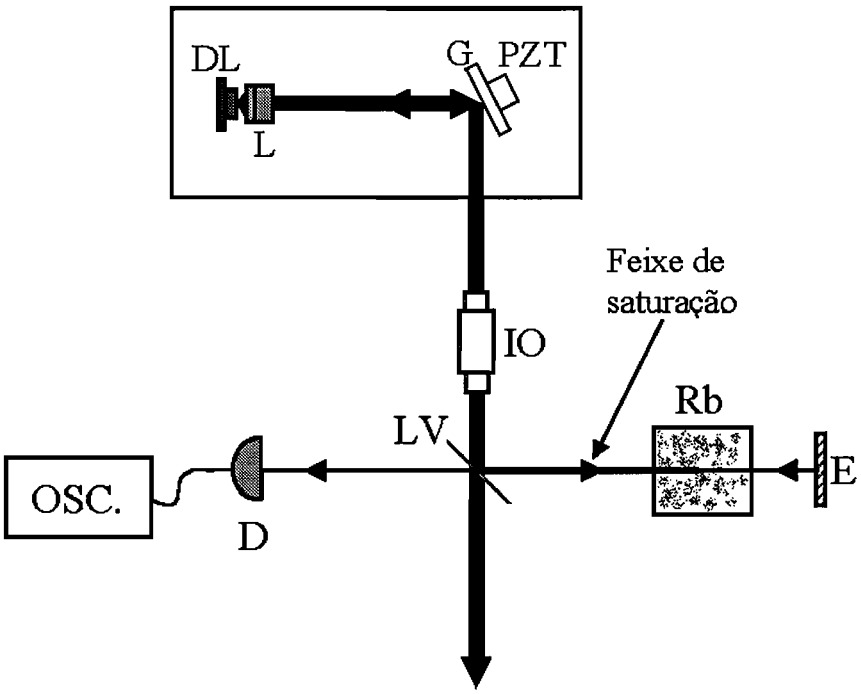

Figura 5.3: Esquema da experiência da absorção saturada. IO: isolador ótico; LV: lâmina de vidro; E: espelho; D: fotodetector; OSC.: osciloscópio.

O princípio de funcionamento da experiência apresentada na Fig. 5.3 é o seguinte. Os átomos na célula de vidro possuem uma distribuição Maxwell-Boltzmann de velocidades, determinada pela temperatura da célula.

Suponhamos que o feixe se propague na direção do eixo Ox. Se designamos a freqüência central da transição atômica por ν_{at}, então os átomos que se movem na mesma direção que o feixe com velocidades

$$v_x = c\left(1 - \frac{\nu_{at}}{\nu_L}\right) , \tag{5.2}$$

[2]Quando o comprimento de onda da luz está próximo dos 780 nm, empregando um visor infravermelho podemos observar na célula a luz fluorescente emitida pelos átomos.

vão interagir com o feixe laser de freqüência ν_L, pois o deslocamento Doppler é dado por

$$\nu_L' = \nu_L \left(1 - \frac{v_x}{c}\right) . \tag{5.3}$$

Por outro lado, os átomos que se movem em direção contrária ao feixe com velocidades

$$v_x = c \left(\frac{\nu_{at}}{\nu_L} - 1\right) , \tag{5.4}$$

também absorverão a luz, já que o deslocamento Doppler nesse caso é

$$\nu_L' = \nu_L \left(1 + \frac{v_x}{c}\right) . \tag{5.5}$$

Dessa forma, existem duas classes diferentes de velocidades atômicas para as quais o feixe laser é absorvido. Utilizando esse resultado, temos que os feixes na experiência de absorção saturada interagem com duas classes diferentes de velocidades pois, eles se propagam em sentidos opostos. No entanto, quando a freqüência do feixe ν_L coincide com a freqüência central da transição atômica ν_{at}, ambos feixes interagem com a mesma classe de velocidades dos átomos. Nessa situação, o feixe menos intenso é pouco absorvido porque a transição atômica é saturada pelo feixe mais intenso (feixe de saturação).

Na Fig. 5.4 é mostrada uma curva típica de absorçào saturada. Esse espectro foi obtido varrendo o comprimento de onda do laser sonda aplicando ao PZT que sustenta a grade de difração uma tensão triangular de amplitude e freqüência iguais a 1 V e 11 Hz, respectivamente. Nessa figura podemos ver que a intensidade da luz transmitida pela célula que contém o vapor atômico apresenta os picos correspondentes às transições entre os níveis hiperfinos $F = 2 \rightarrow F' = 1, 2, 3$ do ^{85}Rb. A identificação de cada linha observada no espectro é realizada a partir dos resultados de espectroscopia reportados na literatura (ver, por exemplo, a Ref. [61]).

Os picos não identificados que aparecem na Fig. 5.4 são denominados "cross-over" e a existência deles se deve à riqueza da estrutura de níveis do estado excitado já que, para uma mesma classe de velocidades dos átomos, os lasers podem estar ressonantes com duas transições distintas (ver, por exemplo, a Ref. [62]).

5.2 Resultados

Montagem experimental

O esquema da experiência realizada é apresentado na Fig. 5.5. Uma pequena porção de cada feixe é desviada pela lâmina de vidro LV para uma montagem

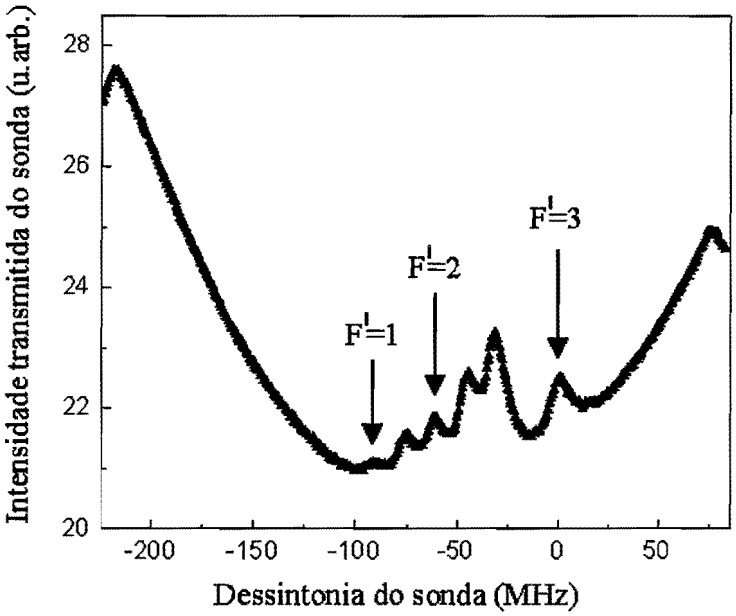

Figura 5.4: Espectro de absorção saturada do ^{85}Rb correspondente às transições $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 1, 2, 3\rangle$. O fundo sobre o qual estão localizados os picos deve sua origem ao alargamento Doppler. Potência do laser: 6,3$\times 10^{-1}$ mW.

de absorção saturada, utilizada para monitorar o comprimento de onda dos feixes. O feixe de bombeio é sintonizado na transição $|5S_{1/2}, F = 3\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$. Com ajuda do PZT, o comprimento de onda do laser sonda é varrido, passando pelas transições $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 1, 2, 3\rangle$.

Os feixes têm polarizações ortogonais e na entrada da célula com vapor de rubídio eles são combinados empregando um cubo divisor de feixes polarizador. Na saída da célula os feixes são separados por meio de outro cubo divisor de feixes polarizador, o que nos permite estudar cada feixe separadamente ou bem, estudar a correlação entre eles escolhendo apropriadamente a orientação das lâminas de meia onda localizadas na entrada da detecção balanceada.

Curva de transparência induzida

Utilizando o canal de saída DC dos fotodetectores é possível medir o valor médio da intensidade transmitida pelo vapor atômico. O sinal de transparência induzida para o feixe sonda é medido bloqueando o feixe de bombeio na entrada da região de detecção. Como pode ser visto na Fig. 5.6, a inten-

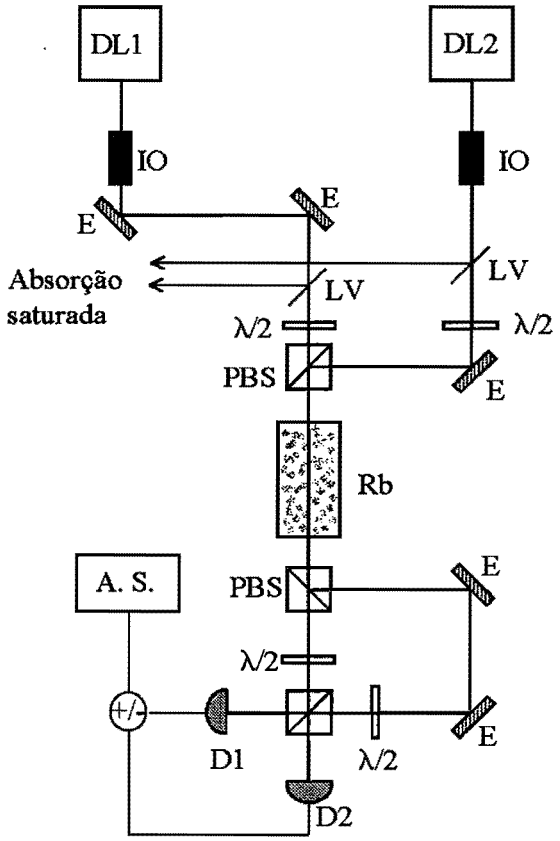

Figura 5.5: Esquema da montagem experimental. DL1 e DL2: diodos laser em cavidade estendida; IO: isolador ótico; LV: lâmina de vidro; PBS: cubo divisor de feixes polarizador; $\lambda/2$: lâmina de meia onda; E: espelho; Rb: célula com rubídio; D1 e D2: fotodetectores; "+/-": circuito misturador; A.S.: analisador de espectros.

sidade transmitida como função da dessintonia do sonda apresenta um pico estreito de transparência induzida, de largura muito inferior ao alargamento Doppler, o qual é uma manifestação da interferência quântica destructiva que experimenta o feixe sonda.

Na Fig. 5.6, o pico de transparência induzida aparece unicamente quando o feixe sonda está acoplado à transição $|5S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$, pois só o estado atômico $|5P_{3/2}, F' = 3\rangle$ é compartilhado com o feixe de bombeio, acoplado à transição $|5S_{1/2}, F = 3\rangle \rightarrow |5P_{3/2}, F' = 3\rangle$.

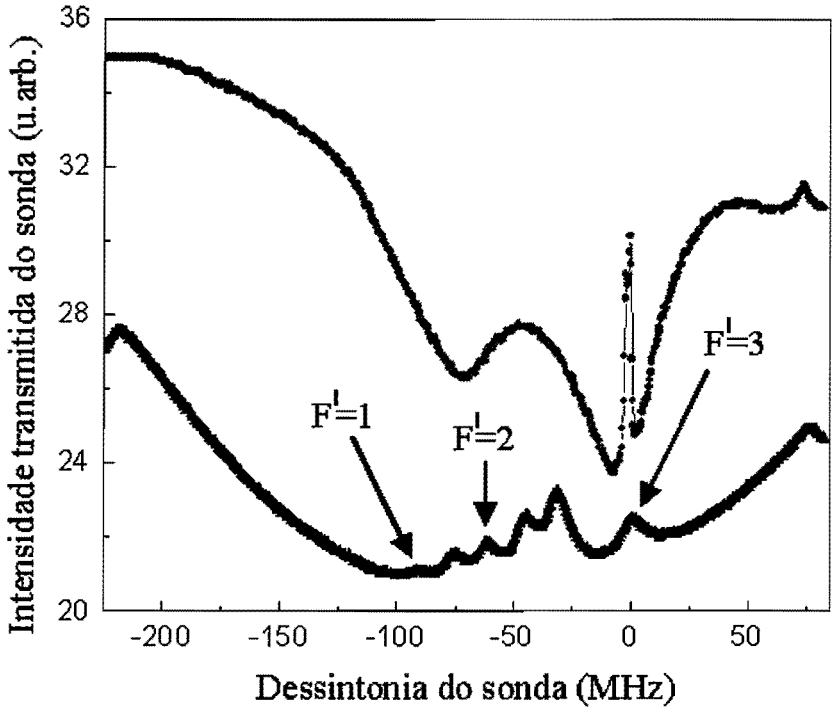

Figura 5.6: Curva de transparência induzida do feixe sonda. As potências incidentes dos feixes sonda e de bombeio são, respectivamente, $6{,}3\times10^{-1}\ mW$ e $9{,}9\times10^{-1}\ mW$.

Espectros de ruído de cada feixe sem célula

Antes de começar o estudo das flutuações quânticas dos feixes sonda e de bombeio na condição de transparência induzida, é importante conhecer as propriedades estatísticas desses feixes na entrada da célula que contém o vapor atômico de rubídio. Nas Figs. 5.7 e 5.8 mostramos os espectros do ruído da intensidade dos feixes sonda e de bombeio, respectivamente, medidos em ausência do meio atômico utilizando um analisador de espectros modelo HP 8560E.

A freqüência de análise Ω foi varrida entre 0 e 50 MHz para escolher a região na qual podem ser estudadas as flutuações dos campos na condição de transparência induzida. O ruído da intensidade do feixe sonda (traço preto) coincide com o shot noise (traço cinza mais forte) em uma faixa ampla de valores de Ω, contudo, ele é essencialmente limitado ao shot noise até 10 MHz aproximadamente, e portanto, é nessa faixa que devemos escolher o valor da freqüência de análise. Entre 13 e 20 MHz, o feixe sonda é super-

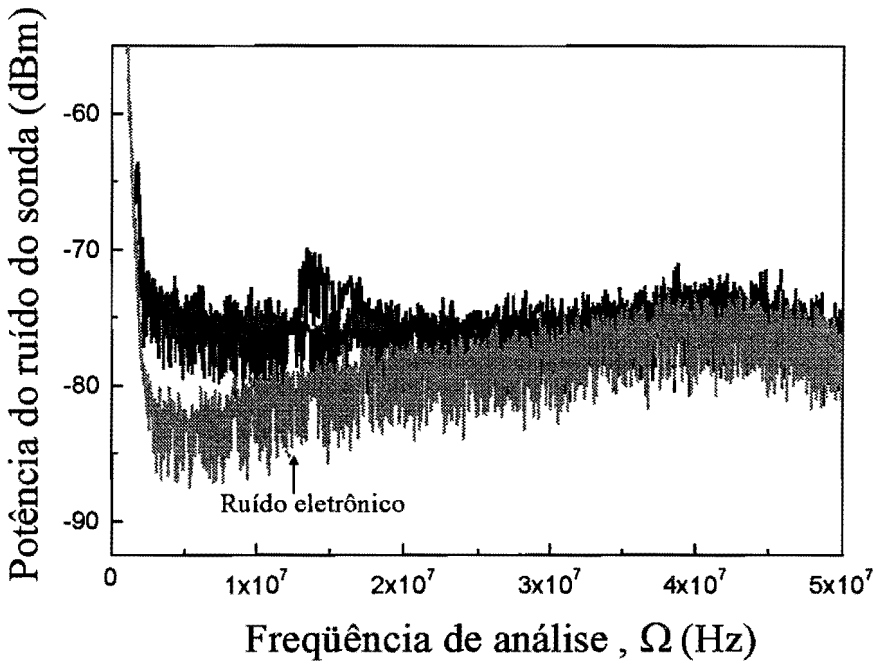

Figura 5.7: Espectro de ruído do feixe sonda na entrada da célula com vapor de rubídio. Potência da luz: 3,0 mW.

poissoniano e, para freqüências superiores aos 20 MHz, o ruído eletrônico tem uma influência considerável na medida.

Ambas medidas foram repetidas para outros valores de potência da luz dos feixes e o comportamento observado foi similar ao mostrado nas Figs. 5.7 e 5.8. Como o feixe de bombeio é super-poissoniano para qualquer valor de Ω, a freqüência de análise ($\Omega = 2\ MHz$) foi escolhida a partir do espectro de ruído da intensidade do feixe sonda. Para essa freqüência, o ruído eletrônico é inferior ao ruído padrão (shot) dos feixes em aproximadamente 12 dB.

Espectro do ruído dos feixes sonda e de bombeio na condição de transparência induzida

Na Fig. 5.9 apresentamos os espectros de ruído da intensidade dos feixes sonda e de bombeio, medidos no modo *zero span* do analisador de espectros, utilizando como *trigger* o sinal empregado para varrer a freqüência do feixe sonda. As curvas foram suavizadas escolhendo a largura da banda de vídeo do analisador (VBW) igual 3 kHz. A largura da banda de resolução (RBW) foi tomada igual a 300 kHz.

Os resultados da Fig. 5.9 correspondem a intensidades dos feixes sonda

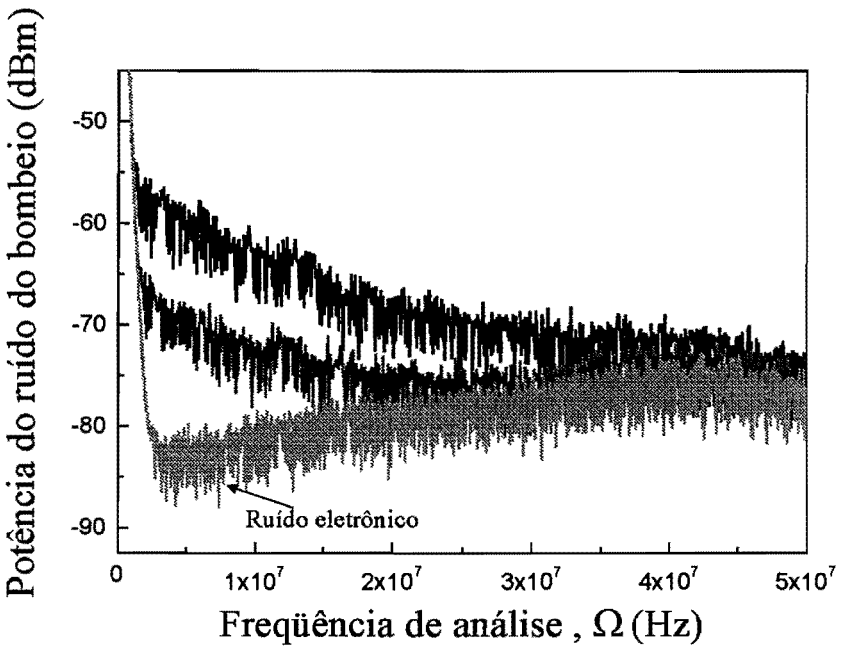

Figura 5.8: Espectro de ruído do feixe de bombeio na entrada da célula com vapor de rubídio para uma potência do feixe incidente igual a 3,0 mW.

e de bombeio iguais a 14,5 mW/cm^2 e 63,8 mW/cm^2, respectivamente. Em toda a faixa de freqüências do sonda, ambos feixes apresentam uma estatística super-poissoniana, no entanto, para a dessintonia nula do sonda, ou seja, na situação de transparência induzida, nos espectros de ruído dos feixes existe um pico estreito de excesso de ruído de aproximadamente 20 dB. Esse comportamento coincide com as previsões teóricas apresentadas na Fig. 4.13, e é uma manifestação de que a coerência induzida no meio atômico por ambos feixes, altera as propriedades estatísticas dos mesmos.

No resultado experimental apresentado na Fig. 5.9, a intensidade do feixe de bombeio é ~4 vezes superior à intensidade do feixe sonda. Mesmo assim, as flutuações quânticas desse campo são alteradas de forma significativa, e o excesso de ruído observado na situação de transparência induzida mostra que as propriedades estatísticas desse feixe não podem ser desprezadas como é feito habitualmente [39, 40, 41].

O fator de Fano apresentado nas Figs. 5.9(c) e (d) é definido pela relação

$$Fator\ de\ Fano = \frac{P_+ - P_{e+}}{P_- - P_{e-}}\ , \tag{5.6}$$

onde P_+ é o ruído da intensidade do feixe, medido quando a chave do mistu-

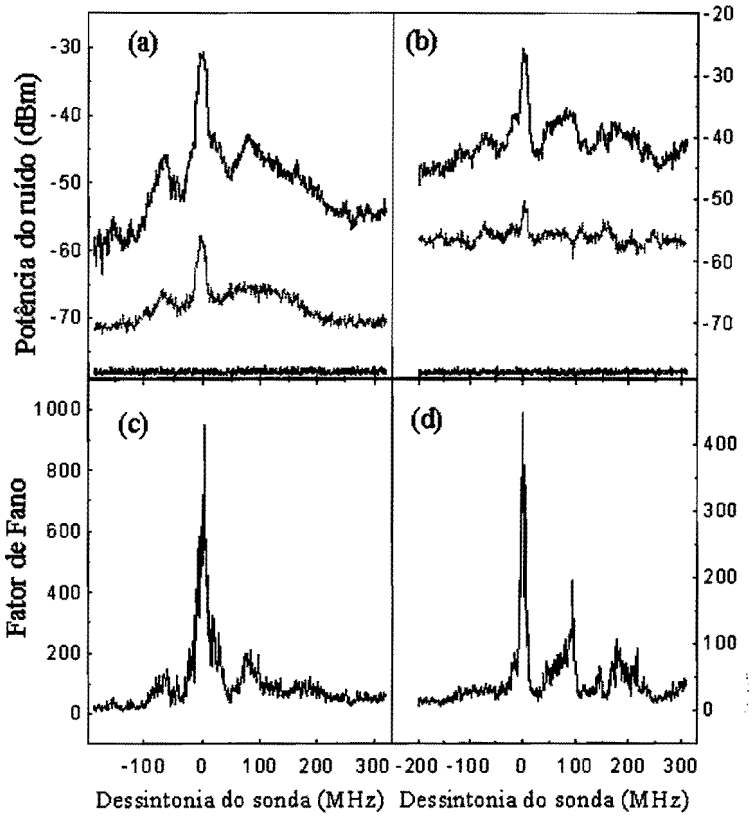

Figura 5.9: Espectros de ruído da intensidade dos feixes sonda (a) e de bombeio (b) como função da dessintonia do sonda. O ruído eletrônico (traços inferiores) é menor que o shot noise (traço cinza) em aproximadamente 10 dB. Os fatores de Fano, (c) e (d), foram deduzidos a partir de (a) e (b).

rador está na posição "+"; P_- é o ruído correspondente ao shot noise, medido com a chave do misturador na posição "–"; P_{e+} e P_{e-} são os ruídos eletrônicos para a chave do misturador nas posições "+" e "–", respectivamente.

Em termos do fator de Fano, um campo eletromagnético apresenta uma estatística poissoniana quando ele é igual à unidade. Se o fator de Fano é maior que 1, então o campo está em um estado super-poissoniano e, finalmente, quando o fator de Fano é menor que 1, fala-se que o campo é subpoissoniano ou apresenta compressão de ruído na intensidade.

Sensibilidade da medida

Na condição de transparência induzida, o espectro de ruído do shot noise apresenta um pico [Figs. 5.9(a) e 5.9(b)] que é uma manifestação do aumento

da intensidade transmitida pelo meio atômico, observado na Fig. 5.6. Esse resultado permite conhecer a viabilidade do estudo das flutuações quânticas dos feixes sonda e de bombeio para detectar a presença de efeitos coerentes no meio atômico.

O limite de sensibilidade dessa técnica é obtido quando na curva da intensidade média do feixe não é mais possível observar o sinal de transparência induzida. Na Fig. 5.10 mostramos essa situação.

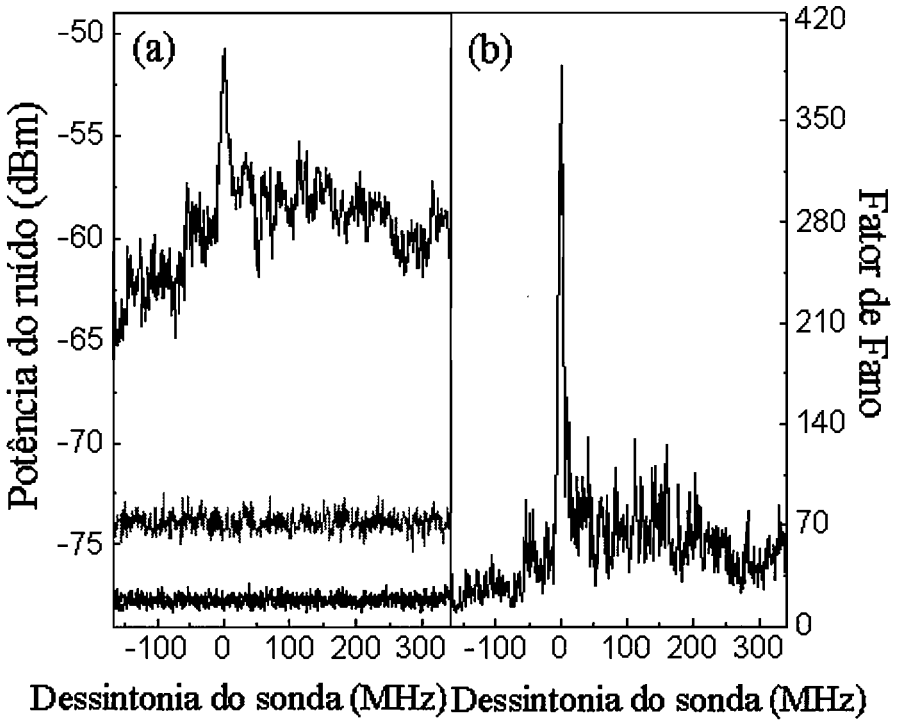

Figura 5.10: Espectro de ruído (a) de intensidade do feixe sonda e fator de Fano (b) para um feixe de bombeio pouco intenso. Intensidade incidente do sonda: 13,3 mW/cm^2; intensidade incidente do bombeio: 4,4 $\times 10^{-1}$ mW/cm^2.

O espectro de ruído correspondente ao shot noise não apresenta pico algum para a dessintonia nula do sonda [traço cinza na Fig. 5.10(a)]. No entanto, o ruído da intensidade do feixe sonda apresenta claramente um pico que indica a presença residual de efeitos coerentes da interação dos feixes com o meio atômico.

Teste de saturação dos detectores

O espectro de ruído e a intensidade média do feixe sonda foram medidos atenuando gradativamente a intensidade desse feixe utilizando filtros de densidade neutra (ver Fig. 5.11). Dessa forma é possível conferir se o efeito observado no espectro de ruído deve-se a um funcionamento incorreto da eletrônica de detecção.

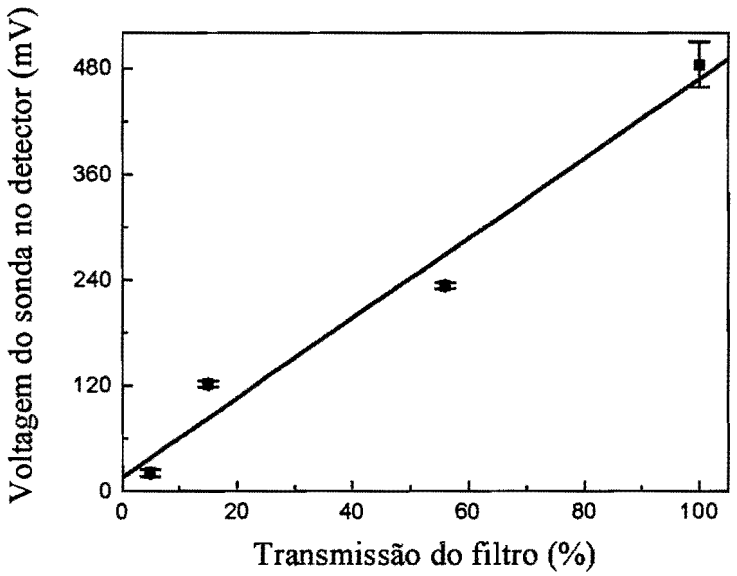

Figura 5.11: Fotovoltagem proporcional à intensidade do feixe sonda para valores diferentes da transmissão do filtro de densidade neutra, colocado na entrada da detecção homodina. Durante a medida, a intensidade do bombeio foi mantida constante.

O comportamento linear observado na Fig. 5.11 revela que a intensidade máxima do sonda nas medidas anteriores não causa a saturação dos fotodetectores. Um resultado similar foi obtido para a medida realizada com o feixe de bombeio.

Correlação

Na Fig. 5.12 mostramos o resultado da medida da correlação de intensidade entre os feixes sonda e de bombeio, realizada da seguinte maneira.

As lâminas de meia onda $\lambda/2$ que estão antes do cubo divisor de feixes da detecção homodina (ver Fig. 5.5) são orientadas de forma tal que no fotodetector $D1$ detectamos, digamos, o feixe sonda apenas, e no fotodetector

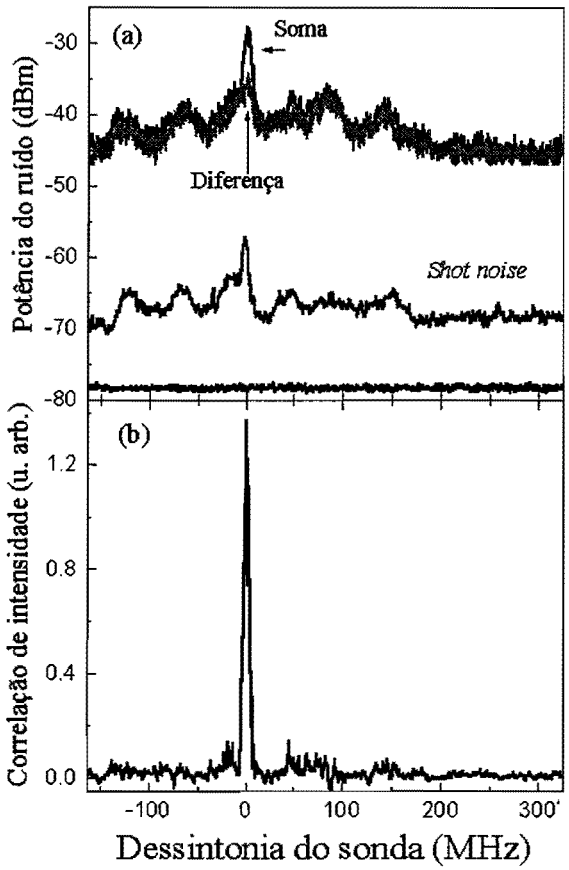

Figura 5.12: (a) Medida do ruído da soma (em preto) e da diferença (em cinza) das intensidades dos feixes sonda e de bombeio. A diferença observada entre as curvas é uma evidência da correlação entre as intensidades dos feixes (b). Intensidade incidente do feixe sonda: 7,5 mW/cm^2; intensidade incidente do feixe de bombeio: 7,8 mW/cm^2.

$D2$ detectamos unicamente o feixe de bombeio. Colocando a chave do misturador na posição "+", no analisador de espectro medimos o ruído da soma das intensidades de cada feixe [traço "Soma" da Fig. 5.12(a)], que em termos do número de fótons (n_1 para o bombeio e n_2 para o sonda) é dado pela expressão

$$\langle[\Delta(n_1+n_2)]^2\rangle = \langle(\Delta n_1)^2\rangle + \langle(\Delta n_2)^2\rangle + 2(\langle n_1 n_2\rangle - \langle n_1\rangle\langle n_2\rangle) \ , \qquad (5.7)$$

com

$$\langle(\Delta n_i)^2\rangle = \langle(n_i - \langle n_i\rangle)^2\rangle \quad , \quad i = 1,2 \ . \qquad (5.8)$$

Quando a chave do misturador é colocada na posição "–", no analisador de espectro medimos o ruído da diferença entre as intensidades dos feixes [traço "Diferença" da Fig. 5.12(a)]

$$\langle[\Delta(n_1 - n_2)]^2\rangle = \langle(\Delta n_1)^2\rangle + \langle(\Delta n_2)^2\rangle - 2(\langle n_1 n_2\rangle - \langle n_1\rangle\langle n_2\rangle) \tag{5.9}$$

que, ao ser subtraído do ruído da soma das intensidades [Eq.(5.7)], nos permite encontrar o termo de correlação

$$2C = 4(\langle n_1 n_2\rangle - \langle n_1\rangle\langle n_2\rangle) \ , \tag{5.10}$$

mostrado na Fig. 5.12(b). Esse resultado experimental está de acordo com a previsão teórica apresentada nas Figs. 4.14 e 4.17.

A diferença de $\sim$7 dB, observada entre os traços "Soma" e "Diferença" na Fig. 5.12(a), na condição de transparência induzida, é uma manifestação da correlação entre as intensidades dos feixes sonda e de bombeio. O nível de shot noise é medido misturando as intensidades dos feixes de maneira tal que cada fotedetector $D1$ e $D2$ recebe metade da intensidade de cada feixe.

5.3 Proposta para Estudo Experimental do Caráter da Correlação Sonda-Bombeio

Na seção 4.3.4 foi apresentado o critério das variâncias inferidas como um dos possíveis métodos a utilizar para estabelecer se a correlação observada entre os feixes sonda e de bombeio é de natureza quântica ou clássica. Como vimos na referida seção, esse critério está baseado na existência de uma correlação entre as quadraturas dos campos. Por essa razão, a montagem experimental necessária para estudar a correlação entre os feixes sonda e de bombeio deve ser sensível ao ruído de quadraturas. Em outras palavras, a utilização de osciladores locais é imprescindível nesse tipo de medida.

Na Fig. 5.13 é mostrado o esquema de uma montagem experimental que pode ser empregada para implementar o critério das variâncias inferidas e determinar dessa forma o caráter da correlação sonda-bombeio.

O princípio de funcionamento dessa montagem é o seguinte. Após atravessar a célula com vapor de rubídio, os feixes sonda e de bombeio são separados pelo cubo divisor de feixes polarizador, pois eles têm polarizações ortogonais. O feixe sonda é enviado para a região de detecção denominada "Sonda", demarcada pelo quadrado tracejado na Fig. 5.13, e por outro lado, o feixe de bombeio é enviado para a região de detecção denominada "Bombeio".

Suponhamos que estejamos interessados na variância inferida da quadratura da amplitude do feixe sonda $\Delta^2_{inf} Y_{2,0}(t)$. Nesse caso, os ângulos dos

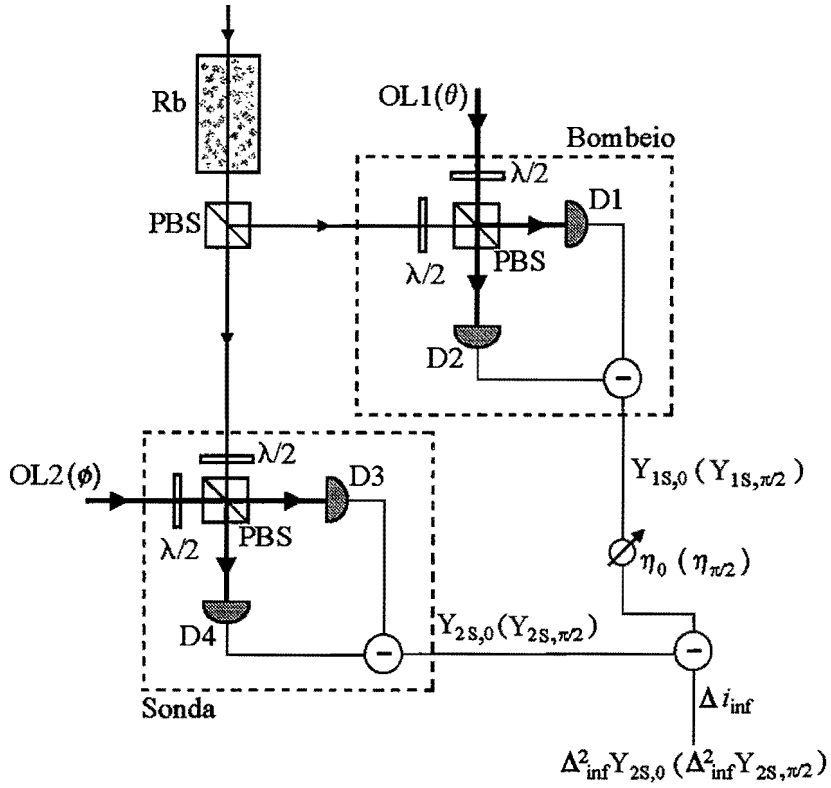

Figura 5.13: Esquema da montagem experimental para estudar as variâncias inferidas do feixe sonda. OL1(θ) e OL2(ϕ): osciladores locais para os feixes de bombeio e sonda, respectivamente; $\eta_0(\eta_{\pi/2})$: amplificador de ganho variável para a quadratura da amplitude (fase).

osciladores locais devem ser tomados iguais a $\theta = 0$ e $\phi = 0$, o que nos permite selecionar os operadores de quadratura $\hat{Y}'_{1S,0}(t)$ e $\hat{Y}'_{2S,0}(t)$, nas respectivas regiões de detecção. Logo, passando a fotocorrente proporcional a $\hat{Y}'_{1S,0}(t)$ pelo amplificador de ganho variável obtemos a grandeza $\eta_0\ \hat{Y}'_{1S,0}(t)$ que, combinada com a fotocorrente proporcional a $\hat{Y}'_{2S,0}(t)$ no último misturador, nos permite encontrar o operador de fotocorrente da variância inferida

$$\Delta\hat{i}_{inf}(t) \sim \hat{Y}'_{2S,0}(t) - \eta_0\ \hat{Y}'_{1S,0}(t)\ . \tag{5.11}$$

As flutuações do operador $\Delta\hat{i}_{inf}(t)$ são diretamente proporcionais à variância inferida $\Delta^2_{inf}Y_{2,0}(t)$, estando o coeficiente de proporcionalidade determinado pelas amplitudes dos osciladores locais que devem ser tomadas iguais.

A variância inferida da quadratura da fase do feixe sonda $\Delta^2_{inf}Y_{2,\pi/2}(t)$ é determinada de maneira análoga. Os ângulos dos osciladores locais devem

ser escolhidos iguais a $\theta = \pi/2$ e $\phi = \pi/2$, e o ganho do amplificador deve ser igual a $-\eta_{\pi/2}$. Nesse caso, o operador de fotocorrente da variância inferida é dado pela equação

$$\Delta\hat{i}_{inf}(t) \sim \hat{Y}'_{2s,\pi/2}(t) + \eta_{\pi/2}\, \hat{Y}'_{1s,\pi/2}(t) \ , \tag{5.12}$$

e suas flutuações são diretamente proporcionais à variância inferida da quadratura da fase do sonda $\Delta^2_{inf} Y_{2,\pi/2}(t)$.

Aparentemente, o estudo experimental das variâncias inferidas não apresenta grandes complexidades. No entanto, analisando o princípio de funcionamento do esquema mostrado na Fig. 5.13, vemos que as fases dos osciladores locais devem estar amarradas e cada uma delas deve mostrar uma elevada estabilidade. Esse ponto é vital na realização da experiência e requer o desenvolvimento de uma eletrônica de controle de alta precisão, que pode levar até um ano de trabalho para ficar disponível. Por outro lado, os osciladores locais, em si, devem ser feixes intensos em estado coerente, o que indica que o ruído intrínseco de fase que eles possuem deve ser limitado ao ruído quântico padrão ou shot noise. Em geral, é possível obter tais feixes empregandos lasers de Titânio:safira estabilizados em freqüência.

Outro detalhe importante é o amplificador de ganho variável. Esse amplificador deve ser de ultra-baixo ruído com uma banda passante da ordem de centenas de megahertz. Dessa forma podemos evitar a modificação das flutuações da quadratura a ser medida. Com relação aos fotodetectores, eles devem ser escolhidos com uma eficiência quântica de conversão que deve ser praticamente a mesma para todos eles. A resposta em freqüência desses fotodetectores também deve satisfazer a mesma condição.

Dada a correspondência entre os critérios das variâncias inferidas e DGCZ (ver seção 4.3.4), essa mesma montagem pode ser empregada para a implementação experimental deste último critério.

Conclusões

Neste capítulo apresentamos o estudo experimental do ruído de intensidade dos feixes sonda e de bombeio, realizado em um vapor atômico de ^{85}Rb. Na condição de transparência induzida, ambos feixes apresentaram excesso de ruído. Essa estatística super-poissoniana do número de fótons mostrou que a utilização do esquema de detecção homodina aumenta a sensibilidade na observação de efeitos coerentes em meios atômicos.

A correlação de intensidade entre os feixes também foi medida, observando-se que os feixes são totalmente independentes, exceto na situação correspondente à transparência induzida, onde a correlação entre eles é mensurável.

A importância da correlação prevista e observada é dupla. Em primeiro lugar, ela indica que quando são investigadas as propriedades quânticas de um dos feixes numa situação em que existe coerência no meio atômico (como no caso da transparência induzida), não podemos tratar nenhum dos campos como clássico, como é feito por vários autores. Em particular, na situação de transparência induzida, a redistribuição coerente dos fótons entre os campos pelos átomos introduz uma correlação entre as flutuações dos feixes sonda e de bombeio. Por outro lado, é possível observar correlações quânticas entre esses feixes, o que pode ser utilizado no contexto da informação quântica.

Os resultados experimentais obtidos corroboraram as previsões teóricas apresentadas no capítulo anterior.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho de tese apresentamos o estudo teórico e experimental das flutuações quânticas dos feixes sonda e de bombeio na condição de transparência induzida por laser. Primeiramente, estudamos os conceitos fundamentais relacionados com as flutuações quânticas do campo eletromagnético. Introduzimos os operadores de quadratura do campo e estudamos como casos particulares os estados de vácuo, coerente e comprimido do campo de radiação.

Em seguida, foi apresentado nosso primeiro resultado original. Um análogo clássico da transparência induzida por laser, desenvolvido com a intenção de criar uma intuição física do fenômeno da transparência induzida. Com os sistemas clássicos utilizados conseguimos reproduzir toda a fenomenologia da transparência induzida observada em meios atômicos. O estudo teórico realizado com o sistema mecânico formado por massas e molas, além de mostrar a mesma resposta da absorção dos átomos ao feixe sonda, também reproduziu o comportamento dispersivo do meio atômico. Para a investigação experimental da analogia clássica da transparência induzida por laser, empregamos dois circuitos ressonantes RLC acoplados. As curvas experimentais obtidas com esse sistema mostraram um sinal análogo ao sinal de transparência observado em sistemas quânticos. Com esse circuito elétrico também foi possível simular o dubleto Autler-Townes.

Dada a existência de um análogo clássico, a procura de efeitos intrinsecamente quânticos na situação de transparência induzida por laser tornou-se uma questão relevante.

Neste trabalho foi apresentada a formulação teórica do fenômeno da transparência induzida utilizando as equações quânticas de Langevin. Os campos sonda e de bombeio foram tratados quanticamente, o que permitiu estudar suas flutuações. Considerando explicitamente o hamiltoniano da fonte de cada laser, foi desenvolvido um modelo para o campo propagante

que não precisa de uma cavidade em anel para tratar o problema da interação com os átomos. As equações de evolução temporal, derivadas para os operadores dos campos, confirmaram a validade desse modelo. Considerar uma cavidade em anel para estudar a interação entre os átomos e modos propagantes do campo é conceitualmente mais simples do que utilizar o modelo proposto neste trabalho. Contudo, as experiências realizadas em ausência de cavidade são diretamente descritas através de nossa formulação.

Nossa descrição teórica da transparência induzida por laser resumiu-se por um conjunto de doze equações quânticas de Langevin. A partir dessas equações, e utilizando o método de linearização das flutuações em torno do estado estacionário, apresentamos nossas previsões teóricas para duas situações diferentes. Na primeira delas, investigamos a resposta do meio atômico ao feixe sonda, como parte do estudo dos valores médios das variáveis do sistema. Essa pesquisa, realizada no regime de intensidades no qual usualmente é observada a transparência induzida por laser em vapores atômicos, mostrou exatamente o mesmo comportamento reportado anteriormente na literatura. Por outro lado, observamos um comportamento biestável dos campos sonda e de bombeio quando a intensidade de suas respectivas fontes era mudada. A causa dessa biestabilidade está na coerência entre os estados fundamentais atômicos, que acaba criando uma interdependência entre as amplitudes dos campos.

Na segunda parte das previsões teóricas, foi apresentado o estudo da correlação e das flutuações quânticas dos campos no estado estacionário. Na condição de transparência induzida, observamos a existência de excesso de ruído na quadratura amplitude dos feixes sonda e de bombeio, considerados inicialmente em estado coerente. Como mostrou nossa análise, esse excesso de ruído é uma conseqüência da coerência gerada no meio atômico por ambos feixes. No estado correspondente à situação de transparência induzida, existe um equilíbrio dinâmico de troca de fótons entre os campos via átomo, que não afeta o valor médio da intensidade dos mesmos. No entanto, suas propriedades estatísticas são alteradas de maneira significativa. Nossos resultados mostraram que os átomos, ao redistribuírem os fótons entre os campos, acabam criando uma correlação entre os feixes, que só existe na situação de transparência induzida.

Para determinarmos se a correlação observada era de natureza clássica ou quântica, foram utilizados os critérios das variâncias inferidas e o teorema de Duan, Giedke, Cirac e Zoller (critério DGCZ). Primeiramente, tomando iguais as intensidades dos campos, foram estudadas as flutuações da quadratura da fase dos campos, observando-se a existência de compressão de ruído em ambas. Esse estudo também mostrou que elas estavam correlacionadas. O passo seguinte consistiu na aplicação do critério das variâncias inferidas,

que indicou que os feixes sonda e de bombeio estavam correlacionados no nível quântico. Este último resultado foi corroborado pelo critério DGCZ.

Considerando a tendência atual das pequisas na ótica quântica, o fato de termos encontrado emaranhamento (*entanglement*) entre os feixes sonda e de bombeio, na situação correspondente à transparência induzida, é um resultado de marcada relevância. Em primeiro lugar, o emaranhamento pode ser utilizado na computação e informação quânticas. Aplicações tais como a criptografia e a teleportação também são possíveis, graças à existência de uma correlação quântica em um determinado sistema físico. Em segundo lugar, as propostas da maioria dessas aplicações consideram sistemas descritos por variáveis dicotômicas como, por exemplo, um par de fótons correlacionados em polarização e gerados por conversão paramétrica, ou decaimento radiativo de uma molécula excitada. O fato dos feixes sonda e de bombeio, de intensidades macroscópicas, estarem emaranhados permite a implementação prática de algumas das aplicações acima mencionadas.

Outro ponto a destacar é que a correlação quântica prevista acontece em um sistema que está submetido à ação de um reservatório e, portanto, não é, digamos assim, "limpo", requerimento praticamente necessário quando queremos utilizar o emaranhamento entre um par de fótons.

Um estudo preliminar sobre a função de Wigner conjunta dos campos foi realizado. Os resultados obtidos mostraram que na situação em que os campos estavam emaranhados essa função apresentava valores negativos. Dado o caráter incipiente dessa pesquisa, preferimos não apresentar esses resultados neste trabalho.

O excesso de ruído da quadratura amplitude previsto pela nossa teoria foi confirmado pelos nossos resultados experimentais. Na realidade, foi medido o ruído de intensidade ou número de fótons dos campos que é diretamente proporcional à variância da quadratura amplitude. A correlação de intensidade entre os feixes também foi medida e vimos que ela é diferente de zero apenas na condição correspondente à transparência induzida, confirmando uma vez mais nossas previsões teóricas.

A modo de perspectiva futura deste trabalho, finalizando a apresentação dos resultados experimentais, foi proposta uma montagem experimental que pode ser utilizada para investigar a natureza da correlação entre os feixes sonda e de bombeio. Atualmente, estamos preparando dois lasers de titânio safira, além da eletrônica necessária à realização dessa experiência, que deve ser feita usando um meio de átomos frios de Rb.

Apêndice A

Espectro de Ruído de uma Variável Estocástica

Suponhamos que $z(t)$ é uma variável estocástica real com média nula, $\langle z(t) \rangle = 0$. Nesse caso, a função de autocorrelação dessa variável é definida como

$$C_z(t,t') \equiv \langle z(t),\ z(t') \rangle = \langle z(t)\ z(t') \rangle - \langle z(t) \rangle \langle z(t') \rangle = \langle z(t)\ z(t') \rangle \ . \quad \text{(A.1)}$$

Se a variável $z(t)$ representa um processo estocástico estacionário, então a função de autocorrelação não depende do instante em que começou o processo, e sim da diferença entre os tempos t e t'. De modo que, fazendo

$$\tau \equiv t - t' \ , \quad \text{(A.2)}$$

teremos

$$C_z(\tau) = \langle z(t)\ z(t-\tau) \rangle \ . \quad \text{(A.3)}$$

Sendo o processo estacionário, a densidade espectral do ruído $S(\Omega)$ [8] de $z(t)$ é definida como a transformada de Fourier de (A.3)

$$S(\Omega) = \int d\tau e^{i\Omega\tau} C_z(\tau) \ , \quad \text{(A.4)}$$

e portanto, utilizando a transformada de Fourier inversa encontramos

$$C_z(t,t') = C_z(\tau) = \int \frac{d\Omega}{2\pi} e^{-i\Omega\tau} S(\Omega) \ . \quad \text{(A.5)}$$

Introduzindo a transformada de Fourier $z(\Omega)$ de $z(t)$

$$z(\Omega) = \int dt\ e^{i\Omega t} z(t) \ , \quad \text{(A.6)}$$

a função de autocorrelação no espaço das freqüências será

$$C_z(\Omega,\Omega') \equiv \langle z(\Omega),\ z(\Omega')\rangle = \langle z(\Omega)\ z(\Omega')\rangle\ , \tag{A.7}$$

que utilizando (A.6) toma a forma

$$\begin{aligned} C_z(\Omega,\Omega') &= \langle \int\int dt\ dt'\ e^{i\Omega t+i\Omega' t'} z(t)\ z(t')\rangle = \\ &= \int\int dt\ dt'\ e^{i\Omega t+i\Omega' t'} \langle z(\Omega)\ z(\Omega')\rangle\ , \end{aligned} \tag{A.8}$$

ou

$$C_z(\Omega,\Omega') = \int\int dt\ dt'\ e^{i\Omega t+i\Omega' t'} C_z(t,t')\ , \tag{A.9}$$

de onde achamos por tranformada inversa

$$C_z(t,t') = \int\int \frac{d\Omega}{2\pi}\frac{d\Omega'}{2\pi}\ e^{-i\Omega t-i\Omega' t'} C_z(\Omega,\Omega')\ . \tag{A.10}$$

Comparando (A.10) com (A.5) vemos que $C_z(\Omega,\Omega')$ deve ser da forma

$$C_z(\Omega,\Omega') = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')S(\Omega)\ , \tag{A.11}$$

ou

$$\langle z(\Omega)\ z(\Omega')\rangle = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')S(\Omega)\ . \tag{A.12}$$

Para uma variável estocástica complexa, teríamos

$$\langle z(\Omega)\ z^*(\Omega')\rangle = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')S(\Omega)\ , \tag{A.13}$$

e no caso de um operador vetor $\delta\widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$

$$\langle \delta\widehat{\mathbf{X}}(\Omega)\ \delta\widehat{\mathbf{X}}^\dagger(\Omega')\rangle = 2\pi\ \delta(\Omega+\Omega')\mathbf{S}(\Omega)\ , \tag{A.14}$$

onde agora $\mathbf{S}(\Omega)$ é a matriz de densidade espectral do ruído.

Apêndice B

Equação Quântica de Langevin para um Sistema Geral

Vamos supor que o hamiltoniano total de um sistema submetido à ação de um reservatório tenha a forma [27]

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_{S-R} \ , \tag{B.1}$$

com os hamiltonianos do reservatório e de interação dados pelas expressões

$$\hat{H}_R = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ \hbar\omega \hat{b}^\dagger(\omega)\hat{b}(\omega) \ , \tag{B.2}$$

$$\hat{H}_{S-R} = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ \kappa(\omega) \left(\hat{b}^\dagger(\omega)\hat{c}(t) - \hat{c}^\dagger(t)\hat{b}(\omega)\right) \ , \tag{B.3}$$

onde $\hat{c}(t)$ na Eq. (B.3) representa um operador do sistema, e os operadores do reservatório satisfazem a relação de comutação

$$[\hat{b}(\omega), \ \hat{b}^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega') \ . \tag{B.4}$$

As equações de Heisenberg para um operador qualquer do sistema $\hat{a}(t)$, e para os operadores do reservatório têm a forma

$$\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}(t), \ \hat{H}_S] + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \ \kappa(\omega)(\hat{b}^\dagger(\omega)[\hat{a}(t), \ \hat{c}(t)] - \\ - [\hat{a}(t), \ \hat{c}^\dagger(t)]\hat{b}(\omega)) \ , \tag{B.5}$$

$$\frac{d\hat{b}(\omega)}{dt} = -i\omega\hat{b}(\omega) + \kappa(\omega)\hat{c}(t) \ . \tag{B.6}$$

Integrando formalmente a Eq. (B.6) achamos

$$\hat{b}(\omega) = \hat{b}_0(\omega)e^{-i\omega(t-t_0)} + \kappa(\omega)\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{c}(t')e^{-i\omega(t-t')}\ , \tag{B.7}$$

onde $\hat{b}_0(\omega)$ é o valor de $\hat{b}(\omega)$ no instante de tempo $t_0 < t$.

Colocando o resultado anterior em (B.5) encontramos

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}(t),\ \hat{H}_S] + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \kappa(\omega)\{e^{i\omega(t-t_0)}\hat{b}_0^\dagger(\omega)[\hat{a}(t),\ \hat{c}(t)] - \\ - [\hat{a}(t),\ \hat{c}^\dagger(t)]e^{-i\omega(t-t_0)}\hat{b}_0(\omega)\} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ \kappa(\omega)^2 \int_{t_0}^{t} dt'\{e^{i\omega(t-t')}\hat{c}^\dagger(t')[\hat{a}(t),\ \hat{c}(t)] - \\ -[\hat{a}(t),\ \hat{c}^\dagger(t)]e^{-i\omega(t-t')}\hat{c}(t')\}\ .\end{aligned} \tag{B.8}$$

Introduzindo a primeira aproximação de Markov, que supõe $\kappa(\omega)$ constante

$$\kappa(\omega) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}\ , \tag{B.9}$$

e utilizando as seguintes propriedades da função delta de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ e^{-i\omega(t-t')} = 2\pi\ \delta(t-t')\ , \tag{B.10}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt'\,\hat{c}(t')\delta(t-t') = \frac{1}{2}\hat{c}(t)\ , \tag{B.11}$$

encontramos finalmente a seguinte equação quântica de Langevin para o operador $\hat{a}(t)$

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{a}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{a}(t),\ \hat{H}_S] - [\hat{a}(t),\ \hat{c}^\dagger(t)]\left(\frac{\gamma}{2}\hat{c}(t) + \sqrt{\gamma}\hat{b}_{in}(t)\right) + \\ + \left(\frac{\gamma}{2}\hat{c}^\dagger(t) + \sqrt{\gamma}\hat{b}_{in}^\dagger(t)\right)[\hat{a}(t),\ \hat{c}(t)]\ ,\end{aligned} \tag{B.12}$$

onde o operador $\hat{b}_{in}(t)$ está definido pela equação

$$\hat{b}_{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\ e^{-i\omega(t-t_0)}\hat{b}_0(\omega)\ , \tag{B.13}$$

e obedece a relação de comutação

$$[\hat{b}_{in}(t),\ \hat{b}_{in}^\dagger(t')] = \delta(t-t')\ . \tag{B.14}$$

Apêndice C

Cálculo das Constantes de Acoplamento

A partir das definições da amplitude $\mathcal{E}_{0\omega_L}$ do campo elétrico [ver Eq.(2.9)] e da constante de acoplamento por fóton (4.18), encontramos

$$g = -\mathcal{D}\sqrt{\frac{\pi\, c}{\hbar\epsilon_0 S L \lambda}}\,, \tag{C.1}$$

onde $\mathcal{D}$, c, ϵ_0, S, L, e λ são o momento dipolar da transição atômica em questão, a velocidade da luz, a permissividade dielétrica do vácuo, a área da seção transversal do feixe, o comprimento da célula que contém os átomos e o comprimento de onda da luz, respectivamente. Para obter a relação C.1 assumimos que a densidade de fótons no volume ocupado pelo modo do campo é uniforme.

Suponhamos $\lambda = 780\ nm$, um feixe de 1 mm de diâmetro e uma célula de 5 cm de comprimento.

A seguir apresentaremos três métodos diferentes para calcular o momento dipolar da transição atômica e a constante de acoplamento por fóton.

Cálculo estimado

Supondo que, para o átomo de Rb, o momento dipolar da transição atômica entre os estados $|5s_{1/2}, F = 3\rangle$ ($|5s_{1/2}, F = 2\rangle$) e $|5p_{3/2}, F' = 3\rangle$ seja da ordem de $3qa_0$, onde q e a_0 são respectivamente a carga do elétron e o raio da primeira órbita de Bohr, encontramos para a constante de acoplamento por fóton o valor

$$g = -1,56 \times 10^{-1}\ MHz\ . \tag{C.2}$$

Cálculo utilizando a largura natural do estado excitado

A partir do cálculo quântico do tempo de vida de um estado atômico excitado [29], encontramos a seguinte expressão para a taxa de emissão espontânea

$$\Gamma = \frac{1}{3\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi)^3}{\hbar\lambda^3}\mathcal{D}^2 \ , \tag{C.3}$$

de onde o momento dipolar da transição atômica é dado pela expressão seguinte

$$\mathcal{D} = \sqrt{\Gamma\frac{3\epsilon_0\hbar}{8\pi^2}\lambda^3} \ . \tag{C.4}$$

Colocando a largura natural do estado excitado do Rb ($\Gamma = 2\pi\ 6\ MHz$) na Eq.(C.4), obtemos para g o valor

$$g = -1,45 \times 10^{-1}\ MHz \ . \tag{C.5}$$

Cálculo utilizando a intensidade das linhas espectrais

A taxa de emissão espontânea entre um estado excitado w vezes degenerado e um estado fundamental w' vezes degenerado é dada pela expressão

$$\Gamma(e,f) = \frac{1}{3\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi)^3}{\hbar\lambda^3}\frac{1}{w}\sum_{i,f}|\langle f|\vec{\mathcal{D}}|i\rangle|^2 \ . \tag{C.6}$$

No caso do rubídio teremos

$$\Gamma(5p,5s) = \frac{1}{3\pi\epsilon_0}\frac{(2\pi)^3}{\hbar\lambda^3}\frac{1}{w_{5p}}S_0 \ , \tag{C.7}$$

onde a força da linha espectral S_0 é definida pela relação [65]

$$S_0 = S(5p,5s) = \sum_{m_l,m_l'}|\langle 5s\ m_l'|\vec{\mathcal{D}}|5p\ m_l\rangle|^2 \ . \tag{C.8}$$

Considerando o acoplamento LS, o estado de um átomo é descrito pelo conjunto de números quânticos $nLSJM$, e a força de uma linha espectral é definida como:

$$S(nLSJ;n'L'SJ') = |\langle nLSJ||\mathcal{D}||n'L'SJ'\rangle|^2 \ , \tag{C.9}$$

onde o elemento de matriz reduzido é dado por

$$|\langle nLSJ||\mathcal{D}||n'L'SJ'\rangle|^2 = \sum_{m_L,m'_L} |\langle nLSJm_L|\vec{\mathcal{D}}|n'L'SJ'm'_L\rangle|^2 \ , \qquad \text{(C.10)}$$

que, utilizando os símbolos $6j$ de Wigner, toma a forma

$$|\langle nLSJ||\mathcal{D}||n'L'SJ'\rangle|^2 = (2J+1)(2J'+1)\left\{ \begin{array}{ccc} L & J & S \\ J' & L' & 1 \end{array} \right\}^2 |\langle nL||\mathcal{D}||n'L'\rangle|^2 \ . \qquad \text{(C.11)}$$

Considerando que os símbolos $6j$ de Wigner satisfazem as seguintes regras de adição:

$$\sum_{J'}(2J'+1)\left\{ \begin{array}{ccc} L & J & S \\ J' & L' & 1 \end{array} \right\}^2 = \frac{1}{2L+1} \ , \qquad \text{(C.12)}$$

$$\sum_{J}(2J+1) = (2L+1)(2S+1) \ , \qquad \text{(C.13)}$$

encontramos finalmente

$$S(nLS;n'L'S) = (2S+1)|\langle nL||\mathcal{D}||n'L'\rangle|^2 \ , \qquad \text{(C.14)}$$

e

$$S(nLSJ;n'L'SJ') = S(nLS;n'L'S)Q(LSJ;L'SJ') \ , \qquad \text{(C.15)}$$

onde a força total de uma linha múltipla (linha formada por várias emissões) $S(nLS;n'L'S)$ e as intensidades relativas de cada linha $Q(LSJ;L'SJ')$ são definidas pelas relações

$$S(nLS;n'L'S) = \sum_{J,J'} S(nLSJ;n'L'SJ') \ , \qquad \text{(C.16)}$$

$$Q(LSJ;L'SJ') = \frac{(2J+1)(2J'+1)}{2S+1}\left\{ \begin{array}{ccc} L & J & S \\ J' & L' & 1 \end{array} \right\}^2 \ . \qquad \text{(C.17)}$$

Para as intensidades relativas as seguintes regras de adição são válidas

$$\sum_{J'} Q(LSJ;L'SJ') = \frac{2J+1}{(2L+1)(2S+1)} \ , \qquad \text{(C.18)}$$

$$\sum_{J,J'} Q(LSJ;L'SJ') = 1 \ . \qquad \text{(C.19)}$$

A Eq.(C.18) implica que a soma das forças das linhas que partem de um nível J é proporcional à degenerescência do nível, e isto permite conhecer a força de uma linha espectral sem calcular necessariamente o valor dos símbolos $6j$.

Quando consideramos a estrutura hiperfina, as intensidades relativas são dadas pela relação

$$Q(JIF;J'IF') = \frac{(2F+1)(2F'+1)}{2I+1} \left\{ \begin{array}{ccc} J & F & I \\ F' & J' & 1 \end{array} \right\}^2 , \tag{C.20}$$

a partir da qual a força das linhas espectrais da estrutura hiperfina calcula-se como:

$$S(nLSJIF;n'L'SJ'IF') = S(nLSJI;n'L'SJ'I)Q(JIF;J'IF') . \tag{C.21}$$

Considerando a degenerescência do spin nuclear I encontramos

$$S(nLSJI;n'L'SJ'I) = (2I+1)S(nLSJ;n'L'SJ') , \tag{C.22}$$

de modo que a Eq.(C.21) toma finalmente a forma

$$S(nLSJIF;n'L'SJ'IF') = (2I+1)S(nLSJ;n'L'SJ')Q(JIF;J'IF') . \tag{C.23}$$

Levando em conta as relações anteriores, o momento dipolar de uma transição entre dois níveis hiperfinos F e F' pode ser calculado empregando a equação

$$\langle F'|\mathcal{D}|F\rangle = \sqrt{S(nLSJI;n'L'SJ'I)Q(JIF;J'IF')} . \tag{C.24}$$

No caso particular do ^{85}Rb temos

$$\begin{aligned} S(n=5, L=1, S=1/2, J=3/2, I=5/2; \\ n=5, L=0, S=1/2, J=1/2, I=5/2) = \frac{24}{3}S_0 , \\ S(n=5, L=1, S=1/2, J=1/2, I=5/2; \\ n=5, L=0, S=1/2, J=1/2, I=5/2) = \frac{12}{3}S_0 , \end{aligned} \tag{C.25}$$

e as intensidades relativas $Q(JIF;J'IF')$, calculadas para a transição $F \to F'$, são apresentadas nas Tabs. C.1 e C.2

F	1	2	3	4
F'				
2	27/216	35/216	28/216	0
3	0	10/216	35/216	81/216

Tabela C.1: $Q(J = 3/2, I = 5/2, F; J' = 1/2, I = 5/2, F')$

F	2	3
F'		
2	10/108	35/108
3	35/108	28/108

Tabela C.2: $Q(J = 1/2, I = 5/2, F; J' = 1/2, I = 5/2, F')$

Utilizando a Eq.(C.24) encontramos os seguintes valores para os momentos dipolares das transições $|5p_{3/2}, F = 3\rangle \rightarrow |5s_{1/2}, F' = 3\rangle$ e $|5p_{3/2}, F = 3\rangle \rightarrow |5s_{1/2}, F' = 2\rangle$

$$\begin{aligned} \langle 5p_{3/2}, F = 3|\mathcal{D}_1|5s_{1/2}, F' = 3\rangle &= 3,04 \times 10^{-29}\ C.m.\ , \\ \langle 5p_{3/2}, F = 3|\mathcal{D}_2|5s_{1/2}, F' = 2\rangle &= 2,72 \times 10^{-29}\ C.m.\ , \end{aligned} \tag{C.26}$$

e finalmente, as constantes de acoplamento por fóton para o feixes de bombeio g_1 e sonda g_2 são

$$g_1 = -1,75 \times 10^{-1}\ MHz\ \ ,\ \ g_2 = -1,56 \times 10^{-1}\ MHz\ . \tag{C.27}$$

Apêndice D

Cálculo da Matriz de Difusão das Variáveis Atômicas

Consideremos que um vetor hipotético $\bar{S}$ formado pela variável atômica S e sua variável adjunta[1]

$$\bar{S} = \begin{pmatrix} S \\ S^{+} \end{pmatrix} ,$$

obedece a equação de evolução (a dependência das variáveis tem sido omita para simplificar a escrita)

$$\frac{d\bar{S}}{dt} = -\mathbf{A}.\bar{S} + \bar{\lambda} + \bar{f} , \tag{D.1}$$

onde a matriz hipotética $\mathbf{A}$, e os vetores dos termos independentes $\bar{\lambda}$ e das forças de Langevin $\bar{f}$ são definidos da forma seguinte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^{*} & b \\ b^{*} & a \end{pmatrix} ,$$

$$\bar{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda^{*} \end{pmatrix} ,$$

$$\bar{f} = \begin{pmatrix} F \\ F^{*} \end{pmatrix} .$$

[1] As notações empregadas neste apêndice são exclusivas deste apêndice.

Reescrevendo a Eq.(D.1) utilizando as definições anteriores teremos

$$\frac{dS}{dt} = -a^*S - bS^+ + \lambda + F \ , \tag{D.2}$$

$$\frac{dS^+}{dt} = -aS^+ - b^*S + \lambda^* + F^\dagger \ . \tag{D.3}$$

A partir das Eqs.(D.2) e (D.3), as velocidades de deriva das variáveis S e S^+, definidas pelos termos da equação de evolução que não contem as forças de Langevin, são dadas pelas expressões

$$\mathcal{D}(S) = -a^*S - bS^+ + \lambda \ , \tag{D.4}$$

$$\mathcal{D}(S^+) = -aS^+ - b^*S + \lambda^* \ , \tag{D.5}$$

as quais permitem calcular o coeficiente de difusão das forças de Langevin utilizando a relação generalizada de Einstein [29]

$$D_{qq'} = \langle \mathcal{D}(B_q B_{q'}^\dagger) - \mathcal{D}(B_q) B_{q'}^\dagger - B_q \mathcal{D}(B_{q'}^\dagger) \rangle \ , \tag{D.6}$$

onde todas as grandezas são tomadas no mesmo instante de tempo.

Na nossa situação particular, o índice q toma os valores 1 e 2, $B_1 = S$ e $B_2 = S^+$. Agora bem, calculando os valores médios no estado estacionário, o termo $\langle \mathcal{D}(B_q B_{q'}^\dagger) \rangle$ é nulo, pois o produto de duas variáveis atômicas também é uma variável atômica. Dessa forma, deveremos calcular os seguintes coeficientes de difusão

$$D_{11} = -\langle \mathcal{D}(S) S^+ \rangle - \langle S \mathcal{D}(S^+) \rangle \tag{D.7}$$

$$D_{12} = -\langle \mathcal{D}(S) S \rangle - \langle S \mathcal{D}(S) \rangle \tag{D.8}$$

$$D_{21} = -\langle \mathcal{D}(S^+) S^+ \rangle - \langle S^+ \mathcal{D}(S^+) \rangle \tag{D.9}$$

$$D_{22} = -\langle \mathcal{D}(S^+) S \rangle - \langle S^+ \mathcal{D}(S) \rangle \ . \tag{D.10}$$

Calculemos, a modo de exemplo, os coeficientes D_{11} e D_{12}. Utilizando as velocidades de deriva (D.4), (D.5) e as relações (D.7)–(D.10) encontramos

$$D_{11} = a^* \langle SS^+ \rangle + b \langle S^+ S^+ \rangle - \lambda \langle S^+ \rangle + \langle SS^+ \rangle a + \langle SS \rangle b^* - \langle S \rangle \lambda^* \tag{D.11}$$

$$D_{12} = a^* \langle SS \rangle + b \langle S^+ S \rangle - \lambda \langle S \rangle + \langle SS \rangle a^* + \langle SS^+ \rangle b - \langle S \rangle \lambda \ . \tag{D.12}$$

De maneira análoga podemos calcular os restantes coeficientes e agrupar o resultado retornando à notação matricial. Introduzindo a matriz $\bar{S}\bar{S}^\dagger$

$$\bar{S}\bar{S}^\dagger = \begin{pmatrix} SS^+ & SS \\ S^+S^+ & S^+S \end{pmatrix} \ ,$$

a matriz de difusão da variável $\bar{S}$ é dada pela expressão

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}.\langle \bar{S}\bar{S}^\dagger \rangle + \langle \bar{S}\bar{S}^\dagger \rangle.\mathbf{A}^\dagger - \bar{\lambda} \langle \bar{S}^\dagger \rangle - \langle \bar{S} \rangle \bar{\lambda}^\dagger \ . \tag{D.13}$$

Bibliografia

[1] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, "An experimental method for the observation of R.F. transitions and laser beat resonances in oriented Na vapour", Nuovo Cimento B **36**, 5-20 (1976).

[2] O. A. Kocharovskaya, Ya. I, Khanin, "Population trapping and coherent bleaching of a three-level medium by a periodic train of ultrashort pulses", Sov. Phys. JETP **63**, 945-950 (1986).

[3] K.-J. Boller, A. Imamoğlu, and S. E. Harris, "Observation of electromagnetically induced transparency", Phys. Rev. Lett. **66**, 2593-2596 (1991).

[4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Photons & Atoms* (John Wiley & Sons, 1989).

[5] A. Yariv, *Quantum Electronics* (John Wiley & Sons, 1989).

[6] ver, por exemplo, H. Haken, *Laser Theory* (Springer-Verlag, 1984).

[7] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics* (Pergamon Press, 1976).

[8] S. Reynaud, "Introduction à la reduction du bruit quantique", Ann. Phys. Fr. **15**, 63-162 (1990); S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino and C. Fabre, "Quantum fluctuations in optical systems", *Progress in Optics XXX*, 1-84, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1992).

[9] R. J. Glauber, "Coherent and incoherent states of the radiation field", Phys. Rev. **131**, 2766-2788 (1963).

[10] M. O. Scully and M. S. Zubairy, *Quantum Optics* (Cambridge University Press, 1997).

[11] ver, por exemplo, o manual do analisador de espectros Hewlett-Packard 8560 E; "Spectrum Analysis Basics", application note 150, Hewlett-Packard Company.

[12] "The Fundamentals of Signal Analysis", application note 243, Agilent Technologies; "Spectrum Analyzer Measurement and Noise", application note 1303, Agilent Technologies.

[13] H.-A. Bachor, *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (John Wiley & Sons, 1998).

[14] ver, por exemplo, B. L. Schumaker, "Noise in homodyne detection", Opt. Lett. **9**, 189-191 (1984).

[15] C. L. Garrido Alzar, M. A. G. Martinez, and P. Nussenzveig, "Classical analog of eletromagnetically induced transparency", Am. J. Phys. **70**, 37-41 (2002).

[16] ver, por exemplo, S. E. Harris, "Electromagnetically induced transparency", Phys. Today **50** (7), 36-42 (1997).

[17] L. V. Hau, S. E. Harris, Z. Dutton, and C. H. Behroozi, "Light speed reduction to 17 metres per second in an ultracold atomic gas", Nature (London) **397**, 594-598 (1999).

[18] M. M. Kash, V. A. Sautenko, A. S. Zibrov, L. Hollberg, G. R. Welch M. D. Lukin, Y. Rostovtsev, E. S. Fry, and M. O. Scully, "Ultraslow group velocity and enhanced nonlinear optical effects in a coherently driven hot atomic gas", Phys. Rev. Lett. **82**, 5229-5232 (1999).

[19] D. Budker, D. F. Kimball, S. M. Rochester, and V. V. Yashchuk, "Nonlinear magneto-optics and reduced group velocity of light in atomic vapor with slow ground state relaxation", Phys. Rev. Lett. **83**, 1767-1770 (1999).

[20] C. Liu, Z. Dutton, C. H. Behroozi, and L. V. Hau, "Observation of coherent optical information storage in an atomic medium using halted light pulses", Nature (London) **409**, 490-493 (2001).

[21] D. F. Phillips, A. Fleischhauer, A. Mair, R. L. Walsworth, and M. D. Lukin, "Storage of light in atomic vapor", Phys. Rev. Lett. **86**, 783-786 (2001).

[22] P. R. Hemmer and M. G. Prentiss, "Coupled-pendulum model of the stimulated resonance Raman effect", J. Opt. Soc. Am. B **5**, 1613-1623 (1988).

[23] S. H. Autler and C. H. Townes, "Stark effect in rapidly varying fields", Phys. Rev. **100**, 703-722 (1955).

[24] Como explicado anteriormente, a transparência induzida é o resultado da existência de dois possíveis caminhos de absorção da energia do sonda para excitar as oscilações da partícula 1. Esses caminhos de absorção podem ser obtidos reescrevendo a Eq.(3.6) como uma superposição dos modos normais de vibração dos osciladores acoplados.

[25] Y.-Q. Li, and M. Xiao. "Observation of quantum interference between dressed states in an electromagnetically induced transparency", Phys. Rev. A **51**, 4959-4962 (1995).

[26] M. Xiao, Y.-Q. Li, S.-Z. Jin, and J. Gea-Banacloche, "Measurement of dispersive properties of electromagnetically induced transparency in rubidium atoms", Phys. Rev. Lett. **74**, 666-669 (1995).

[27] C. W. Gardiner, *Quantum Noise* (Springer-Verlag, 1991).

[28] G. Grynberg, A. Aspect, C. Fabre, *Introduction aux Lasers et à l'Optique Quantique* (Ellipses, 1997).

[29] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'Interaction entre Photons et Atoms* (InterEditions du CNRS, 1988).

[30] E. Arimondo, "Coherent population trapping in laser spectroscopy", *Progress in Optics XXXV*, 257-354, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1996).

[31] L. A. Lugiato, "Theory of optical bistability", *Progress in Optics XXI*, 69-216, ed. E. Wolf (North-Holland, Amsterdam, 1984).

[32] L. Vernac, "Etude expérimentale et théorique des fluctuations quantiques de champs et d'atomes couplés en cavité", Tese de doutorado da Universidade Paris VI (2001).

[33] S. Nakayama, "Theoretical analysis of Rb and Cs D_2 lines in saturation spectroscopy with optical pumping", Jpn. J. Appl. Phys. **23**, 879-883 (1984).

[34] Y.-Q. Li, and M. Xiao, "Electromagnetically induced transparency in a three-level Lambda-type system in rubidium atoms", Phys. Rev. A **51**, R2703-R2706 (1995).

[35] S. A. Hopkins, E. Usadi, H. X. Chen and A. V. Durrant, "Electromagnetically induced transparency of laser-cooled rubidium atoms in three-level Lambda-type systems", Opt. Comm. **138**, 185-192 (1997).

[36] A. E. Siegman, *Lasers* (University Science Books, Mill Valley, 1986).

[37] T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, P. Grelu, J.-F. Roch, P. Grangier, F. Marin, A. Bramati, V. Jost, M. D. Levenson, and E. Giacobino, "Quantum noise of free-running and externally-stabilized laser diodes", Quantum Semiclass. Opt. **7**, 601-613 (1995).

[38] P. L. Kelley, P. J. Harshman, O. Blum, and T. K. Gustafson, "Radiative renormalization analysis of optical double resonance", J. Opt. Soc. Am. B **11**, 2298-2302 (1994); H. Y. Ling, Y.-Q. Li, and M. Xiao, "Coherent population trapping and electromagnetically induced transparency in multi-Zeeman-sublevel atoms", Phys. Rev. A **53**, 1014-1026 (1996).

[39] G. S. Agarwal, "Coherent population trapping states of a system interacting with quantized fields and the production of the photon statistics matched fields", Phys. Rev. Lett. **71**, 1351-1354 (1993).

[40] M. Jain, "Excess noise correlation using population-trapped atoms", Phys. Rev. A **50**, 1899-1902 (1994).

[41] M. Fleischhauer, U. Rathe, and M. O. Scully, "Phase-noise squeezing in electromagnetically induced transparency", Phys. Rev. A **46**, 5856-5859 (1992).

[42] M. Fleischhauer, "Correlation of high-frequency phase fluctuations in electromagnetically induced transparency", Phys. Rev. Lett. **72**, 989-992 (1994).

[43] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?", Phys. Rev. **47**, 777-780 (1935).

[44] J. S. Bell, "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", Physics **1**, 195-200 (1964).

[45] J. S. Bell, "On the problem of hidden variables in quantum mechanics", Rev. Mod. Phys. **38**, 447-452 (1966); reimpresso no livro *Quantum Theory of Measurement*, ed. J. A. Wheeler and W. H. Zurek (Princenton U.P., Princenton, 1983).

[46] D. F. Walls and G. J. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, 1994).

[47] J. F. Clauser and A. Shimony, "Bell's theorem: Experimental tests and implications", Rep. Prog. Phys. **41**, 1881-1927 (1978).

[48] S. J. Freedman and J. F. Clauser, "Experimental test of local hidden-variale theories", Phys. Rev. Lett. **28**, 938-941 (1972).

[49] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, "Experimental tests of Bell's inequalities using time-varying analyzers", Phys. Rev. Lett. **49**, 1804-1907 (1982).

[50] Z. Y. Ou and L. Mandel, "Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment", Phys. Rev. Lett. **61**, 50-53 (1988).

[51] O leitor interessado nesse tema pode consultar o artigo de discussão (e as referências nele citadas): F. Laloë, "Do we really understand quantum mechanics? Strange correlations, paradoxes, and theorems", Am. J. Phys. **69**, 655-701 (2001).

[52] M. D. Reid and P. D. Drummond, "Quantum correlations of phase in nondegenerate parametric oscillation", Phys. Rev. Lett. **60**, 2731-2733 (1988); M. D. Reid, "Demonstration of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using nondegenerate parametric amplification", Phys. Rev. A **40**, 913-923 (1989); P. D. Drummond and M. D. Reid, "Correlations in nondegenerate parametric oscillation. II. Below threshold results", Phys. Rev. A **41**, 3930-3949 (1990).

[53] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng, "Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables", Phys. Rev. Lett. **68**, 3663-3666 (1992); A. Furusawa, J. L. Sørensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik, "Unconditional quantum teleportation", Science **282**, 706-709 (1998).

[54] W. Bryc, "Classical versions of q-Gaussian processes: Conditional moments and Bell's inequality", Commun. Math. Phys. **219**, 259-270 (2001); M. Bożejko, B. Kümmerer, and R. Speicher,"q-Gaussian processes: Non-commutative and classical aspects", Commun. Math. Phys. **185**, 129-154 (1997); J. Wesołowski,"Stochastic processes with linear conditional expectation and quadratic conditional variance", Probab. Math. Statist. **14**, 33-44 (1993).

[55] L.-M. Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, "Inseparability criterion for continuos variable systems", Phys. Rev. Lett. **84**, 2722-2725 (2000).

[56] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000); L.-M. Duan, J. I.

Cirac, P. Zoller, and E. S. Polzik, "Quantum communication between atomic ensembles using coherent light", Phys. Rev. Lett. **85**, 5643-5646 (2000); S. F. Pereira, Z. Y. Ou, and H. J. Kimble, "Quantum communication with correlated nonclassical states", Phys. Rev. A **62**, 042311 (2000).

[57] ver, por exemplo, W. Tittel, J. Brendel, H. Zbinden, and N. Gisin, "Quantum cryptography using entangled photons in energy-time Bell states", Phys. Rev. Lett. **84**, 4737-4740 (2000).

[58] D. Bouwmeester, J.-W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter, and A. Zeilinger, "Experimental quantum teleportation", Nature (London) **390**, 575-579 (1997); C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres, and W. K. Wootters, "Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels", Phys. Rev. Lett. **70**, 1895-1899 (1993); A. Kuzmich and E. S. Polzik, "Atomic quantum state teleportation and swapping", Phys. Rev. Lett. **85**, 5639-5642 (2000); S. L. Braunstein and H. J. Kimble, "Teleportation of continous quantum variables", Phys. Rev. Lett. **80**, 869-872 (1998); S. M. Tan, "Confirming entanglement in continous variable quantum teleportation", Phys. Rev. A **60**, 2752-2758 (1999).

[59] A. Sinatra, J. F. Roch, K. Vigneron, Ph. Grelu, J.-Ph. Poizat, K. Wang, and P. Grangier, "Quantum-nondemolition measurements using cold trapped atoms: Comparison between theory and experiment", Phys. Rev. A **57**, 2980-2995 (1998); M. Genovese and C. Novero, "Quantum-nondemolition modulation of quantum interference", Phys. Rev. A **61**, 032102 (2000); A. Levenson and K. Bencheik, "Repeated quantum-nondemolition measurements", Appl. Phys. B **64**, 193-201 (1997).

[60] ver, por exemplo, B.-G. Englert, M. O. Scully, and H. Walther, "Quantum erasure in double-slit interferometers with which-way detectors", Am. J. Phys. **67**, 325-329 (1999).

[61] K. B. MacAdam, A. Steinbach, and C. Wieman, "A narrow-band tunable diode laser system with grating feedback, and a saturated absorption spectrometer for Cs and Rb", Am. J. Phys. **60**, 1098-1111 (1992).

[62] F. E. Rosa Campolim, "Resfriamento e Aprisionamento Magneto-Ótico de Átomos de Rubídio", Dissertação de mestrado do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (2001).

[63] S. M. de Paula, "Estudo dos modos transversos em um diodo laser com compressão de ruído na intensidade", Dissertação de mestrado do Instituto de Física da Universidade de São Paulo (2000); Carlos L. Garrido Alzar, Silvia M. de Paula, Marcelo Martinelli, Antonio Z. Khoury, Ricardo J. Horowicz and Geraldo A. Barbosa, "Transverse Fourier analysis of squeezed light in diode lasers", J. Opt. Soc. Am. B **18**, 1189-1195 (2001).

[64] K. Razdan and D. A. Van Baak, "Demonstrating optical saturation and velocity selection in rubidium vapor", Am. J. Phys. **67**, 832-836 (1999); D. Budker, D. J. Orlando, and V. Yashchuk, "Nonlinear laser spectroscopy and magneto-optics", Am. J. Phys. **67**, 584-592 (1999).

[65] I. I. Sobel'man, *Introduction to the Theory of Atomic Spectra* (Pergamon Press, 1972).