Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Comportamentos caóticos induzidos por cargas elétricas no experimento da torneira gotejante

Thiago Nascimento Nogueira

Orientador: Prof. Dr. José Carlos Sartorelli

Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, para obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Aos meus pais ...

... e à Renata.

“O primeiro grito ainda foi o da incredulidade, mas com o segundo, e o terceiro, e quantos mais, foi crescendo a evidência, Vejo, vejo, (...)”

José Saramago, em “Ensaio sobre a Cegueira”.

Resumo

Aprimoramos o aparato do Experimento da Torneira Gotejante e estudamos a dinâmica de formação de gotas d'água aplicando um potencial elétrico em torno do bico da torneira. Analisamos os resultados através da reconstrução dos atratores, diagramas de bifurcações e do espaço de parâmetros.

Para algumas faixas de valores dos parâmetros, os comportamentos obtidos alterando o potencial são semelhantes aos observados com a variação da abertura da torneira.

Verificamos que a aplicação do potencial leva a uma diminuição da massa média das gotas, sem que haja alteração no fluxo de água na torneira, e concluímos que o aumento do potencial gera um decréscimo na tensão superficial da água.

Abstract

We improved the Dripping Faucet Experiment apparatus to study the water dripping formation applying an electrical voltage to the region around the faucet nozzle. We analyzed the results by reconstructing the attractors, bifurcation diagrams, and the parameter space.

For some ranges of the control parameters, either changing the potential and keeping the faucet aperture constant or changing the aperture without applying the potential, we observed the same behavior.

We have found that the average drop mass decreases when we increase the potential, however the total flow rate is kept constant. We conclude that the water surface tension decreases due to the potential.

Agradecimentos.

Ao prof. Sartorelli pela orientação e amizade, que tornaram este trabalho extremamente instigante e prazeroso.

Aos meus pais por darem tamanha importância aos meus estudos e pelo incentivo incondicional às minhas decisões.

À Renata, minha "*irmãe científica*", por fazer despertar as minhas primeiras curiosidades para a física. Agradeço também ao Saulo pelo inenarrável esforço em sua "campanha de vacinação".

À Regina pelo apoio e total compreensão nos momentos mais difíceis.

Ao Eloy, irmão, pela grande amizade e alegria irradiada.

À Vó, por estar sempre pronta a acolher.

Aos meus colegas do grupo Marcelo, Tufaile, Reynaldo, Adriana, Viviane, Juliano e Ciro pelas importantes sugestões e, principalmente, por tornar o ambiente de trabalho tão agradável. Agradeço especialmente ao Juliano pela paciência ao ajudar na obtenção de alguns dados.

Ao prof. Procópio pelas dicas dadas ao longo do trabalho.

Ao Rubão e ao Marcelino pela prontidão em ajudar.

Pelas incansáveis revisões, agradeço à Renata, à Regina e ao Marcelo.

Aos amigos Maurício e Sanches, grandes companheiros.

Ao pessoal do Caindo no Choro (Vitor, Tupi, Roberta e Flora) por compreender minhas inúmeras ausências e a importância deste trabalho.

Ao CNPq e à FAPESP pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos aqueles que, sabe-se lá por quais cargas d'água, contribuíram para este trabalho.

Índice

1. Introdução 1
2. Aspectos Teóricos..... 4
2.1. Sistemas Dinâmicos..... 4
2.1.1. Sistemas dinâmicos dissipativos..... 5
2.2. Espaço de fases e mapas..... 5
2.2.1. Mapas..... 7
2.3. Reconstrução do espaço de fases..... 9
2.3.1. Reconstrução a partir de séries de dados..... 9
2.3.2. Reconstrução a partir de séries de eventos..... 10
2.4. Descrição Topológica de sistemas dinâmicos..... 11
2.4.1. Pontos fixos e estabilidades lineares em mapas..... 12
2.4.2. Bifurcações..... 16
2.4.3. Crises..... 18
2.4.3.1. Crise de fronteira..... 18
2.4.3.2. Crise interior..... 18
2.4.3.3. Crise de mistura de atratores..... 20
2.4.4. Expoentes de Lyapunov..... 21
2.4.4.1. Cálculo do expoente de Lyapunov a partir de séries de dados... 22
3. Aparato Experimental..... 24
3.1. Sistema hidráulico..... 24
3.1.1. Controle de nível do reservatório intermediário..... 27
3.2. A torneira..... 27
3.3. Sistema de detecção..... 29
3.4. Aplicação de campo elétrico na região de formação das gotas..... 30
3.5. Programa de controle e aquisição..... 31
4. Resultados obtidos e análise de dados..... 33
4.1. Abertura da torneira como parâmetro de controle..... 33
4.2. Tensão elétrica como parâmetro de controle..... 37
4.2.1. Verificação da conservação do fluxo d'água..... 47
4.3. Espaço de parâmetros..... 49
4.3.1. Crises em diferentes regiões do espaço de parâmetros..... 53
5. Conclusões..... 56
6. Referências..... 58

1. Introdução

Ao longo do século XX, muitos questionamentos foram feitos em relação aos limites de previsibilidade da Física. Temos, como maior exemplo, o nascimento da Física Quântica que, através do Princípio da Incerteza, nos revelou um mundo intrinsecamente probabilístico para o limite das pequenas distâncias.

Por outro lado, a constatação da presença de movimentos irregulares em sistemas dinâmicos de baixa dimensionalidade trouxe à tona uma nova questão em relação à previsibilidade de sistemas físicos. Movimentos irregulares estão muitas vezes relacionados com a ocorrência de divergência exponencial entre órbitas, fazendo com que, apesar de serem determinísticos, alguns sistemas tenham seus erros amplificados de maneira exponencial conforme sua evolução temporal. Conseqüentemente, a previsibilidade de um fenômeno, para este caso, fica limitada a curtos intervalos de tempo.

Com as dificuldades em se estudar a evolução das órbitas, uma nova abordagem passou a ser feita para estes sistemas, a qual se baseia em propriedades globais de seus comportamentos. Esta nova abordagem é denominada Teoria do Caos.

Sabemos hoje que movimentos caóticos são observados em um grande número de sistemas dinâmicos, e, cada vez mais, nos é revelado que "a natureza insiste em ser não linear" (Marion, 1995). Comportamentos caóticos podem aparecer em sistemas que são aparentemente muito simples, como no caso do pêndulo duplo ou no problema de três corpos.

A proposta de que o gotejamento de uma torneira apresenta regimes caóticos foi feita por Rössler (1977) e, em 1984, foi construído por Shaw (1984) o primeiro aparato para o estudo da formação de gotas d'água.

1 Introdução.

Em 1992, foi montado, no Laboratório de Fenômenos não Lineares da Universidade de São Paulo, um aparato experimental para o estudo da formação de gotas que possibilita a obtenção de dados de alta qualidade. Com isto, puderam ser observadas uma série de características importantes do sistema, como bifurcações de Hopf (Pinto et al. 1995), intermitências (Sartorelli et al., 1994) e crises (Pinto et al., 1998; Pinto et al., 2000). Outros estudos revelaram fortes influências exercidas pela geometria do bico (Gonçalves,1996; Tufaile et al., 1999) e pela inclinação da torneira (Pinto, 1999; Reyes, 2001) na dinâmica de formação de gotas.

Na tentativa de uma explicação teórica para a dinâmica de formação de gotas foram criados uma série de modelos que não têm se mostrado satisfatórios na reprodução dos resultados obtidos experimentalmente. Num modelo bastante simplificado as equações hidrodinâmicas são substituídas pelas de um sistema massa-mola de massa variável, no qual a coluna oscilante de água presa ao bico vai aumentando com o tempo até chegar num ponto crítico, arbitrariamente escolhido, em que há o rompimento da gota. Este modelo, apesar de conseguir reproduzir alguns aspectos da dinâmica de formação de gotas, possuivalidade para intervalos muito limitados do parâmetro de controle. (Tufaile, 1999).

Outros modelos mais elaborados utilizam aproximações das equações de Navier-Stokes para simular a formação de gotas d'água, como o de Ambravaneswaran et al. (2000). Neste trabalho foi verificada uma rota para o caos via duplicação de períodos, já observada em alguns trabalhos experimentais. Entretanto, além de o número de gotas obtidas para cada valor do parâmetro de controle ser muito reduzido, devido ao elevado tempo de computação exigido, características importantes, como a geometria do bico, não são levadas em conta.

O parâmetro de controle geralmente utilizado nos estudos de formação de gotas é o fluxo de água, mas a introdução de novos parâmetros é muitas vezes de grande interesse, seja pela possibilidade de se gerar novas dinâmicas ou, nos casos experimentais, por permitir um melhor controle do experimento, no caso de os

parâmetros serem equivalentes. No experimento da torneira gotejante, por exemplo, o controle do fluxo da água pode ser feito através do nível de água no reservatório ou da abertura da torneira, sendo o segundo mais adequado. (Gonçalves, 1996).

Reyes (2001) realizou um estudo detalhado utilizando como parâmetro de controle a inclinação da torneira, além de sua abertura. Os resultados deste trabalho mostraram que a crise caracterizada por Pinto (2000) como uma "*blue sky catastrophe*", ocorrida ao fechar a torneira, não é mais observada quando as medidas são efetuadas com o bico inclinado.

Até o início deste trabalho, o efeito da presença de campo elétrico na interface de líquidos permanecia em aberto, apesar da suspeita de que no caso de líquidos polares pudesse haver uma alteração em sua tensão superficial. Em artigo recente, Warshavsky et al. (2001) demonstraram, utilizando uma abordagem da mecânica estatística, que a presença de um campo elétrico constante leva a uma alteração na tensão superficial de líquidos polares.

Fornés et al. (1996) montaram um aparato experimental que permite o controle da carga elétrica presente nas gotas d'água através da aplicação de um potencial elétrico constante na região de formação das gotas. Efetuando algumas modificações no aparato utilizado para o estudo de formação de gotas d'água, estudamos os efeitos gerados pela aplicação de alta tensão na dinâmica de formação de gotas, verificando que é possível utilizar a tensão aplicada ao bico como um parâmetro de controle do experimento. Os resultados foram comparados com os que obtivemos utilizando a abertura da torneira como parâmetro de controle.

Apresentaremos, no capítulo 2, alguns aspectos da Teoria do Caos mais relevantes, e que serão utilizados na análise dos resultados. No capítulo 3 faremos uma descrição do aparato experimental utilizado para o estudo da dinâmica de formação de gotas d'água. Os resultados obtidos e análises serão apresentados no capítulo 4 e as conclusões no capítulo 5.

2. Aspectos Teóricos.

Neste capítulo discutiremos alguns aspectos da teoria de sistemas dinâmicos, iniciando por sua definição na seção 2.1. Nas seções 2.2 e 2.3 introduziremos o conceito de espaço de fases e métodos de reconstrução. Na seção 2.4 analisaremos alguns conceitos da descrição topológica de sistemas dinâmicos.

2.1. Sistemas Dinâmicos.

Um sistema dinâmico consiste num conjunto de possíveis estados de um sistema que são gerados por regras que determinam de forma única o seu estado atual em termos dos anteriores. (Alligood, 1996).

Na maioria dos casos é possível modelar um sistema dinâmico através de um sistema de equações diferenciais ordinárias escritas sob a forma $\frac{\mathbf{dx}}{\mathrm{dt}} = \mathbf{F}[\mathbf{x}(\mathrm{t}); \mathbf{c}]$, onde $\mathbf{x}$ é um vetor d−dimensional que representa o estado do sistema e $\mathbf{F}$ é o conjunto das funções que representam as regras. As constantes $\mathbf{c}$ são denominadas parâmetros de controle. A solução das equações para uma determinada condição inicial $\mathbf{x}(0)$ é chamada de **trajetória** (ou **órbita**) e o conjunto das trajetórias geradas por todas as condições iniciais é chamado de **fluxo**.

Os sistemas dinâmicos não lineares apresentam, tipicamente, sensibilidade às condições iniciais, possuindo trajetórias que divergem exponencialmente umas das outras. Nestes casos, as incertezas em uma condição inicial crescem exponencialmente com a evolução do sistema fazendo com que sua previsibilidade fique comprometida para tempos muito grandes. O comportamento desses sistemas é fortemente influenciado pelos parâmetros de controle. Com sua alteração é possível modificar de maneira global o **tipo de movimento** do sistema, desde fluxos constantes até movimentos caóticos.

Os **tipos de movimento** de um sistema dinâmico podem ser classificados em ordem de complexidade como:

1. Pontos de equilíbrio: são caracterizados por trajetórias constantes, nos quais não há dependência temporal do estado do sistema.
2. Soluções periódicas: trajetórias caracterizadas pela existência de um período T de retorno do sistema a qualquer um de seus estados.
3. Soluções quase–periódicas: formadas pela soma de soluções periódicas incomensuráveis.
4. Caos: movimento que apresenta sensibilidade às condições iniciais, apresentando trajetórias que divergem exponencialmente e permanecem em uma região limitada do espaço de fases.

2.1.1. Sistemas dinâmicos dissipativos.

Sistemas dinâmicos dissipativos necessitam de fornecimento de energia através do tempo para que não apresentem comportamento trivial. Estes sistemas são caracterizados por apresentarem contração do volume inicial no espaço de fases dado pelas diferentes condições iniciais. Deste modo, um grande conjunto de condições iniciais é levado a um mesmo conjunto de órbitas limite após a espera de um tempo suficientemente grande. A esse conjunto dá-se o nome de atrator e o tempo que o sistema leva para atingi-lo é chamado de transiente.

2.2. Espaço de fases e mapas.

Podemos representar as trajetórias de um sistema através de um gráfico no espaço de fases, onde cada coordenada representa uma das variáveis dinâmicas. Nele, é possível observarmos características globais do sistema como periodicidades, confinamentos, atração ou repulsão de determinadas regiões, etc. A

representação do fluxo no espaço de fases é chamada retrato de fases. (Jackson,1989)

Para a construção adequada do espaço de fases, é necessário que o sistema seja autônomo, garantindo que cada ponto do espaço represente uma condição única e, conseqüentemente, que não haja cruzamentos de trajetórias no espaço de fases. Se houver, entretanto, dependência temporal explícita no conjunto de equações diferenciais, é possível transformá-lo num sistema autônomo d+1-dimensional, considerando $\dot{x}_{(d+1)} = 1$.

Apresentamos na Figura 2-1 parte de uma trajetória do atrator de Lorenz que é regido pelas equações (2.1), para um determinado conjunto de parâmetros de controle σ, b e r. Este resultado foi obtido através de integrações numéricas.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= -bz + xy \end{aligned} \qquad (2.1)$$

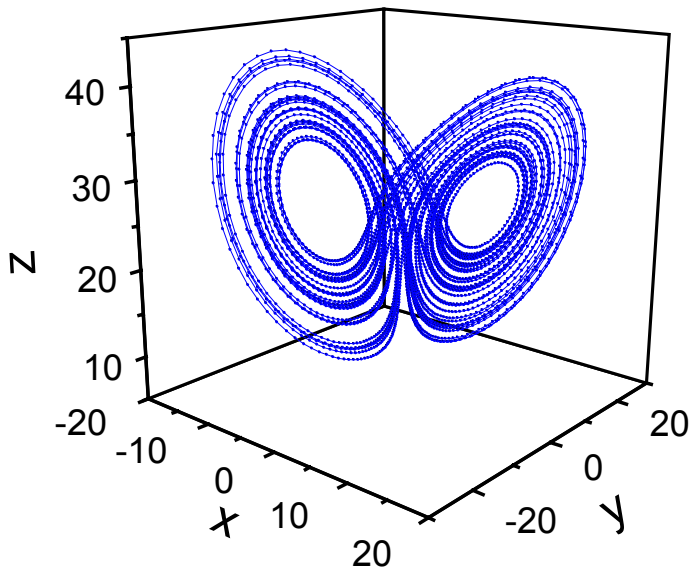


Figura 2-1: 5000 pontos de uma órbita do sistema de Lorenz obtidos por integração numérica (Runge Kutta de 4ª ordem), para os parâmetros σ=10, b=8/3 e r=28.

2.2.1. Mapas.

Poincaré observou, em 1890 (apud Mira, 1997), que é possível tornar discretos sistemas d–dimensionais que são contínuos no tempo. Para isto é traçada uma seção (d-1)–dimensional no espaço de fases, escolhida adequadamente, e observam-se os cruzamentos das órbitas com a superfície. Desta forma, as equações diferenciais são substituídas por relações de recorrência do tipo $\mathbf{x}_n=\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-2},...)$, conhecidas como mapa de Poincaré. Mostramos na Figura 2-2 uma seção de Poincaré para o sistema de Lorenz.

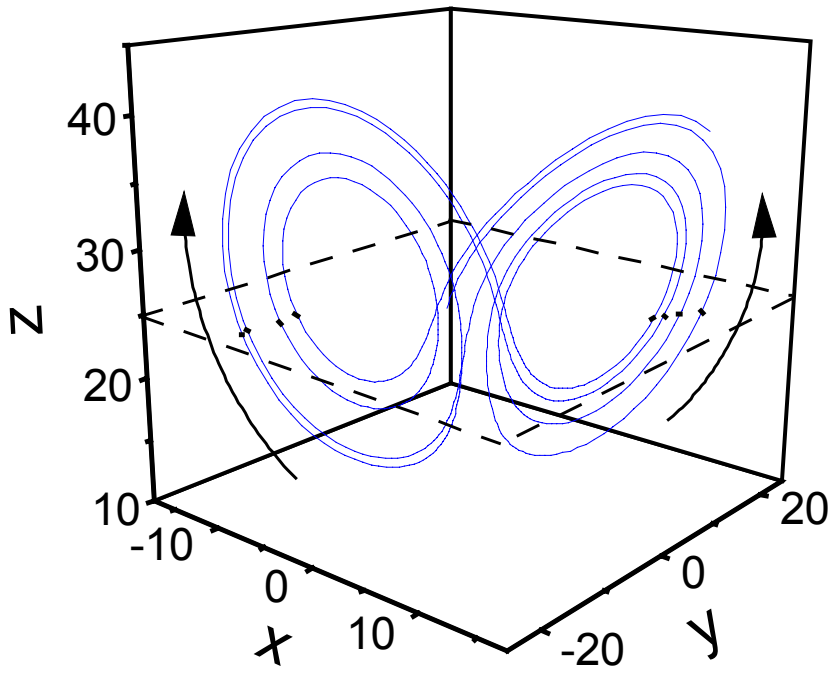


Figura 2-2: Exemplo de construção do mapa de Poincaré para o sistema de Lorenz das eqs. 2.1.

Outra maneira de representarmos um fluxo contínuo através de mapas é construindo regras de evolução discreta no tempo. Hénon (Hénon,1976) introduziu um mapa discreto no tempo para modelar alguns aspectos da dinâmica do sistema de Lorenz:

$$x_{n+1} = a - x_n^2 - by_n$$
$$y_{n+1} = x_n, \qquad (2.2)$$

onde a e b são os parâmetros de controle e x_{n+1} e y_{n+1} são os valores das variáveis dinâmicas obtidos a partir de x_n e y_n após um determinado tempo (iterada). Com os pares (x,y) obtêm-se o gráfico mostrado na Figura 2-3.

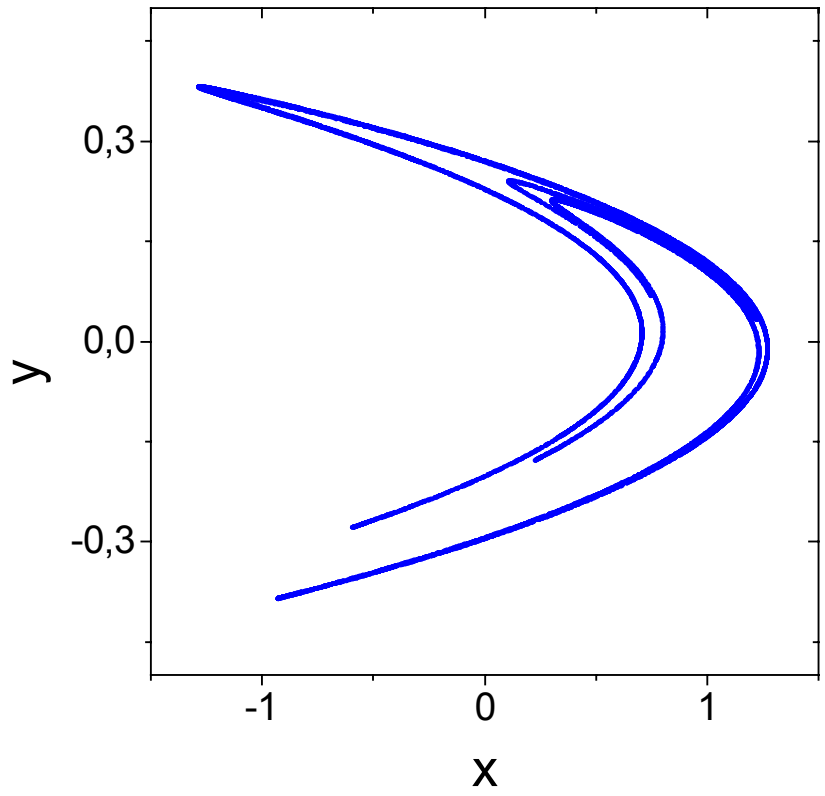


Figura 2-3: Gráfico obtido através das iteradas do Mapa de Hénon, onde a=1,4 e b=0,3.

Na substituição do estudo de fluxos pelo de mapas, as características topológicas do sistema são preservadas, sendo possível a identificação das características do sistema original. Do ponto de vista numérico, o estudo de mapas é interessante por exigir tempo de computação relativamente reduzido.

2.3. Reconstrução do espaço de fases.

Ao estudarmos experimentalmente sistemas dinâmicos não temos, na maior parte dos casos, acesso a todas as variáveis do sistema, sendo impossível a construção do espaço de fases. Entretanto, é possível efetuarmos reconstruções do espaço de fases através de apenas uma de suas variáveis, mantendo as características originais do sistema. A reconstrução pode ser feita a partir de séries de dados e de eventos, como veremos a seguir.

2.3.1. Reconstrução a partir de séries de dados.

A primeira idéia de reconstrução do espaço de fases, a partir de medidas da série temporal de uma única variável dinâmica x, foi sugerida por Packard, em 1980, ao mostrar que no sistema de Rössler, o espaço de fases gerado por x, $\dot{x}$, $\ddot{x}$ leva a resultados equivalentes ao espaço x, y, z das variáveis originais do modelo. O cálculo das derivadas possui o inconveniente de amplificar os erros, tornando pouco prática a utilização deste método.

Takens, também em 1980, demonstrou que é possível reconstruir um espaço de fases d−dimensional a partir de uma série de dados de apenas uma das variáveis dinâmicas do sistema, amostrada a intervalos constantes adequados de valor τ (denominado passo de reconstrução). O espaço é reconstruído através dos vetores

$$\xi(t)=\{x(t), x(t+\tau),...,x(t+(m-1)\tau)\},$$

onde a dimensão de imersão m, utilizada para a reconstrução, deve ser maior ou igual a d. No caso de $m<d$ as trajetórias podem apresentar cruzamentos no espaço de fases projetado e no reconstruído, mas mesmo nesses casos é possível obtermos informações importantes do sistema.

Em particular, é muito utilizada a reconstrução bidimensional de sistemas que são tridimensionais. Na Figura 2-4(a) apresentamos a projeção bidimensional

de um atrator caótico do circuito de Matsumoto – que é um sistema tridimensional – obtido experimentalmente a partir de duas variáveis (V_{C1} e V_{C2}). Em (b) apresentamos a reconstrução bidimensional do atrator realizada a partir da variável V_{C1}, com passo de reconstrução τ=24μs.

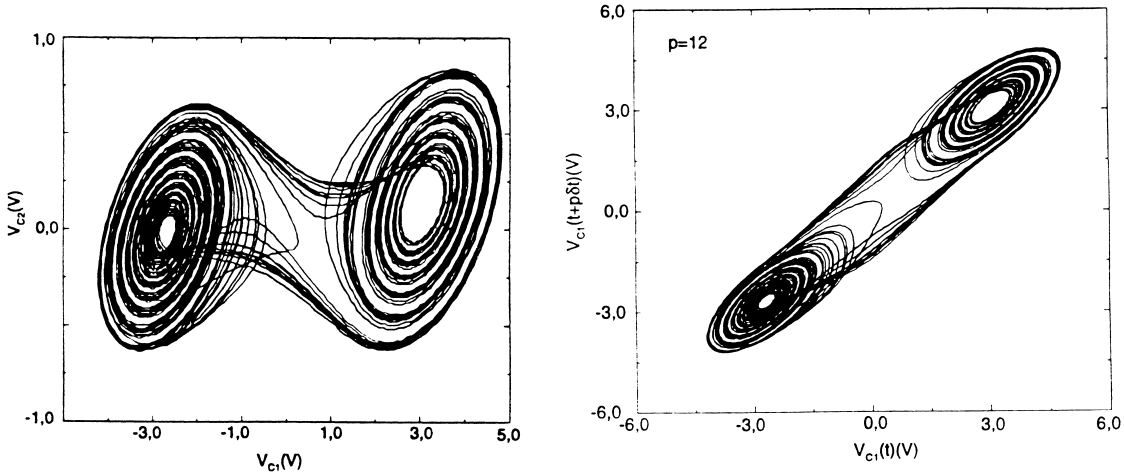


Figura 2-4: (a) Representação bidimensional do circuito de Matsumoto e (b) reconstrução obtida a partir da variável V_{C1}, com τ=24μs. Extraído de Baptista (1996).

2.3.2. Reconstrução a partir de séries de eventos.

Em muitos sistemas dinâmicos, as variáveis de interesse são obtidas a partir de séries de eventos e, nestes casos, não é possível sequer a escolha de um tempo de amostragem da variável. Podemos utilizar como exemplos deste tipo de sistema, que são chamados de "integra e dispara", os tempos entre batidas do coração, disparos de neurônios, ou ainda, o tempo entre gotas de uma torneira pingando.

Sauer (1994) generalizou o teorema de Takens mostrando que é possível reconstruir o espaço de fases de um sistema, mantendo suas características topológicas, através dos vetores

$$\xi_i=(t_i, t_{i+1},...,t_{i+(m-1)}),$$

onde t_i é o tempo entre eventos consecutivos.

Na Figura 2-5 (a) mostramos uma série temporal de disparos para o sistema de Lorenz, obtida através das equações 2.3. O atrator reconstruído a partir da série de disparos é apresentado na Figura 2-5.

$$S(t) = (x(t) + 2)^2$$
$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t)\,dt = \Theta, \qquad (2.3)$$

onde a constante Θ=60 é o limiar de disparo nos cálculos. Desta forma, os tempos $t_i=T_{i+1}-T_i$ ficam definidos em cada ocorrência em que a integral atinge um valor igual a Θ. Neste instante, a integral é zerada e reinicia-se o processo em tendo como limite inferior da integral o valor de T_{i+1}.

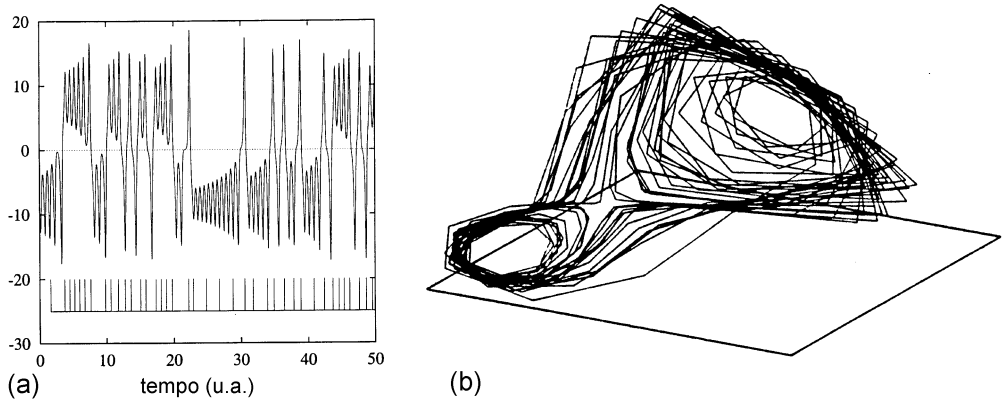


Figura 2-5: (a) Na parte superior é mostrada uma série temporal da variável x do sistema de Lorenz e, na parte inferior, a série de disparos adquirida através das equações 2.3. (b) Reconstrução do atrator de Lorenz a partir da série de disparos. Extraído de Sauer (1997).

2.4. Descrição Topológica de sistemas dinâmicos.

Com a falta de soluções analíticas para a maioria dos sistemas dinâmicos dissipativos e até de modelos adequados nos casos experimentais, foram desenvolvidas uma série de ferramentas de análise baseadas nas propriedades geométricas de atratores. Trataremos nesta seção de alguns aspectos da descrição topológica de sistemas dinâmicos, como o estudo de pontos fixos e órbitas

periódicas em mapas, suas estabilidades e bifurcações ocorridas com a variação de parâmetros de controle. Discutiremos também os conceitos de crises e expoente de Lyapunov, mostrando a possibilidade de identificação dos tipos de movimento através de seus valores.

2.4.1. Pontos fixos e estabilidades lineares em mapas.

Pontos de equilíbrio de mapas d−dimensionais podem ser calculados a partir da relação

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n). \qquad (2.4)$$

Neste caso, o ponto $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n$ ... é chamado de ponto fixo e sua estabilidade é analisada através do estudo do comportamento do sistema nas proximidades do ponto. Para isto, vamos considerar o sistema perturbado

$$\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_n), \qquad (2.5)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}_n << \mathbf{1}$. Linearizando o sistema **F** em torno do ponto fixo $\mathbf{x}^*$ temos:

$$\mathbf{x}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^*) + \mathbf{M}\boldsymbol{\varepsilon}_n + O(\boldsymbol{\varepsilon}_n{}^2), \quad \text{onde}$$

$$\mathbf{M} = \left[\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}. \qquad (2.6)$$

A matriz **M** é denominada matriz de Floquet e é o análogo do Jacobiano para mapas. A estabilidade do ponto fixo é obtida através do estudo dos autovalores λ_i de (2.7), obtida diretamente de (2.6):

$$\varepsilon_{n+1} = M\varepsilon_n \qquad (2.7)$$

Se $|\lambda_i| < 1, \forall \lambda_i$, então $\mathbf{x}^*$ é um ponto fixo estável. No caso de $|\lambda_i| > 1, \forall \lambda_i$, $\mathbf{x}^*$ é um ponto instável (repulsor ou fonte). Quando existem valores de $|\lambda_i|$ maiores e menores do que 1, $\mathbf{x}^*$ é um ponto de sela instável. Se existir algum λ_i=1 e F for uma

função não linear, é necessária uma análise com os termos de ordem superiores da expansão efetuada na equação (2.6).

Para uma melhor ilustração dos resultados, vamos analisar detalhadamente os casos unidimensionais e bidimensionais. Nos casos unidimensionais temos apenas 1 autovalor para a equação (2.7) com $\lambda = \left.\frac{\partial F(x)}{\partial x}\right|_{x=x^*}$. Desta forma temos que $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ se $|\lambda|<1$ e o ponto fixo é assintoticamente estável. Caso contrário ($|\lambda|>1$), o ponto fixo é assintoticamente instável.

O sinal de λ nos dá a informação de como o sistema se aproxima ou afasta do ponto fixo. Para $\lambda>0$ a aproximação é feita de forma monotônica e no caso de $\lambda<0$, de forma oscilante. Apresentamos na Figura 2-6, duas situações de um sistema se aproximando de um ponto fixo estável onde, em (a), λ é positivo e, em (b), negativo.

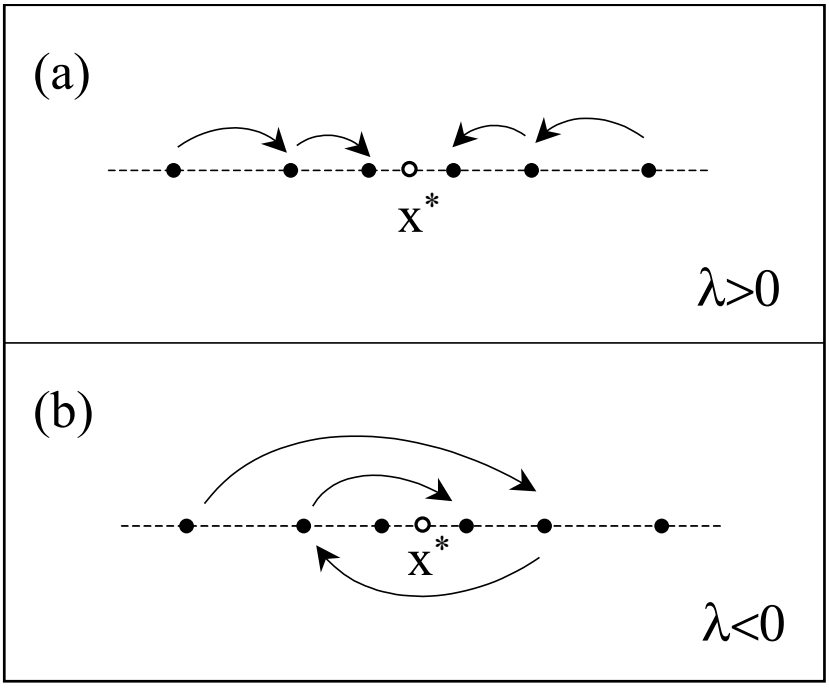


Figura 2-6: Duas situações de ponto fixo estável ($|\lambda| < 1$) com (a) $\lambda>0$ e (b) $\lambda<0$.

Em mapas bidimensionais os autovalores podem ser reais ou complexos conjugados. Quando os autovalores são reais, a análise da estabilidade é feita considerando-se o conjunto dos dois autovalores. Quando $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|<1$, o ponto fixo é estável (atrator), conforme mostrado na Figura 2-7(a). No caso de $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|>0$, o ponto fixo é instável (repulsor), mostrado na Figura 2-7(b). Se obtivermos um autovalor com módulo maior e outro menor do que 1 o ponto fixo (ponto de sela) possui uma direção de atração e outra de repulsão sendo, portanto, instável. Este comportamento é mostrado na Figura 2-7(c). As direções de atração e repulsão nas proximidades do ponto podem ser obtidas a partir dos autovetores da equação (2.6).

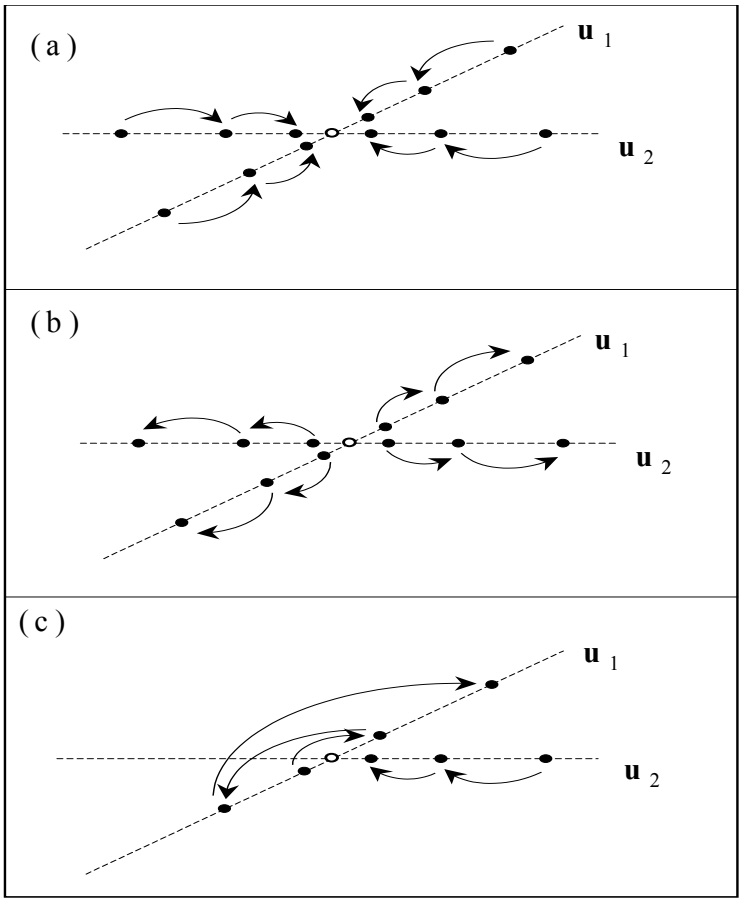


Figura 2-7: Estabilidades possíveis para os pontos fixos de um sistema bidimensional. (a) Atrator: $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|<1$, utilizando λ_1, $\lambda_2>0$. (b) Repulsor: $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|>1$, com λ_1, $\lambda_2>0$. (c) Ponto de sela: $|\lambda_1|>1$ e $|\lambda_2|<1$. Neste caso utilizamos $\lambda_1<0$ e $\lambda_2>0$.

Considerando agora o caso em que os autovalores são complexos conjugados, a aproximação (ou afastamento) do ponto é feita em espiral, conforme a Figura 2-8. A estabilidade depende da parte real dos autovalores e se $|Re(\lambda)|<1$, o ponto fixo é estável (foco). Se $|Re(\lambda)|>1$ o ponto é instável (fonte).

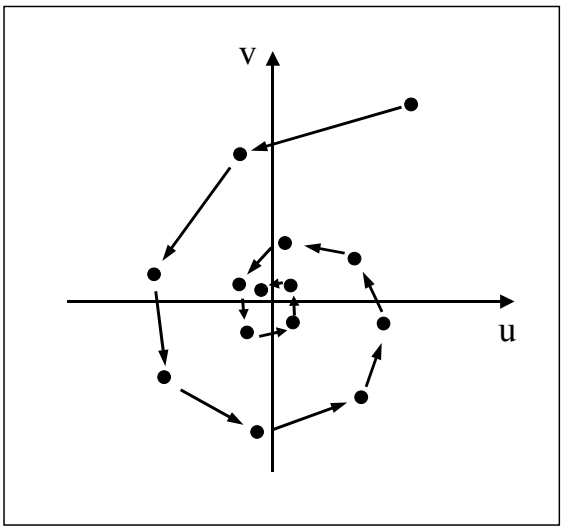


Figura 2-8: Iteradas do sistema nas proximidades de um foco, cujos auto-valores são complexos conjugados e $|Re(\lambda)|<1$.

Os mesmos métodos descritos acima podem ser utilizados para o estudo de órbitas periódicas de período maior do que 1. Neste caso, para encontrarmos uma órbita de período p, devemos impor a condição de retorno do sistema a $\mathbf{x}_n$ após p aplicações de **F**. Para p=3, por exemplo,

$$\mathbf{x}_{n+3} = \mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{F}(\mathbf{x}_n))) . \qquad (2.8)$$

A notação normalmente utilizada para descrever p aplicações de **F** é $\mathbf{F}^p$ e uma órbita de período p é encontrada através da relação

$$\mathbf{x}_{n+p} = \mathbf{F}^p(\mathbf{x}_n) . \qquad (2.9)$$

Encontrada a órbita periódica, os mesmos critérios de estabilidade discutidos para pontos fixos valem para este caso.

2.4.2. Bifurcações.

Bifurcações são observadas quando a alteração de um parâmetro de controle leva à mudança da estabilidade de pontos fixos ou órbitas periódicas. Como observamos na seção anterior, a estabilidade está relacionada aos autovalores das matrizes de Floquet.

Considerando-se um círculo unitário no plano complexo, o ponto fixo muda sua estabilidade quando um ou mais autovalores atravessam-no, causando a bifurcação do sistema. O cruzamento do círculo pode se dar de três maneiras diferentes, podendo ocorrer em +1, -1, ou ainda, através do cruzamento simultâneo de dois autovalores complexos conjugados. Na Figura 2-9 são apresentadas as três maneiras pela qual um ponto fixo pode perder sua estabilidade. Para cada caso é observado um tipo de bifurcação diferente.

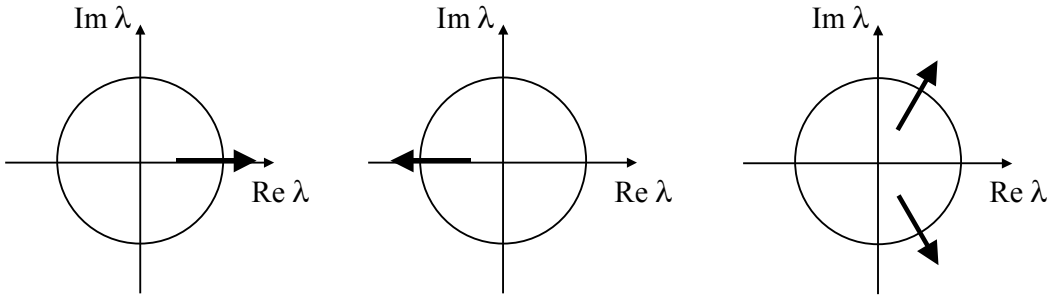


Figura 2-9: Três maneiras possíveis de como os autovalores podem atravessar o círculo unitário.(a) λ_i atravessa o círculo em +1, (b) em –1 e (c) dois autovalores complexos conjugados atravessam simultaneamente.

Se o cruzamento acontecer em +1, a bifurcação é do tipo sela-nó, onde um ponto de sela e um nó estável são gerados simultaneamente, como mostrado na Figura 2-10.

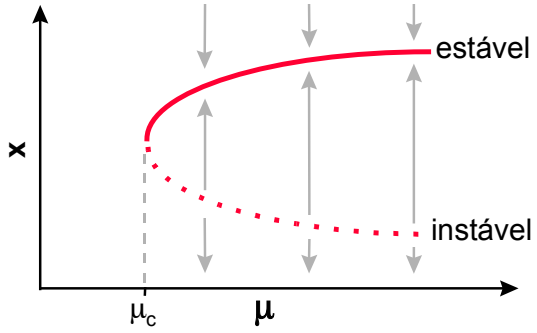


Figura 2-10: Diagrama de uma bifurcação sela-nó.

O cruzamento em –1 leva a uma bifurcação do tipo "*flip*", que pode ser supercrítica (duplicação de períodos) ou subcrítica, conforme mostrado na Figura 2-11.

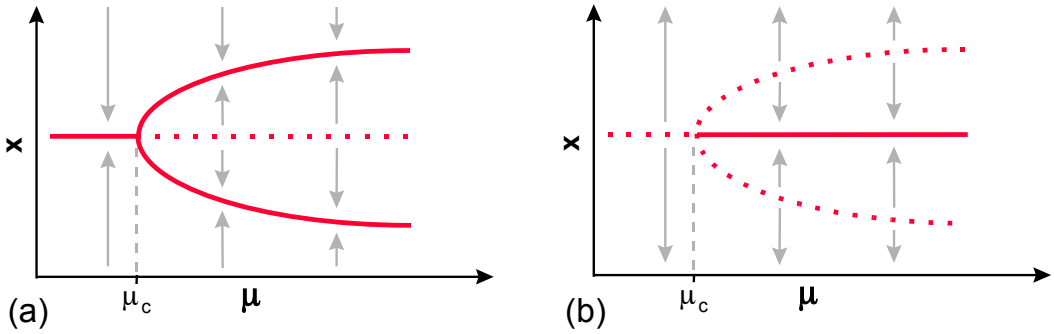


Figura 2-11: (a) Bifurcação "*flip*" supercrítica. (b) Bifurcação "*flip*" subcrítica.

O cruzamento de dois autovalores complexos conjugados caracteriza uma bifurcação de Hopf que pode ser supercrítica (com o aparecimento de um ciclo limite) ou subcrítica, conforme mostrado na Figura 2-12.

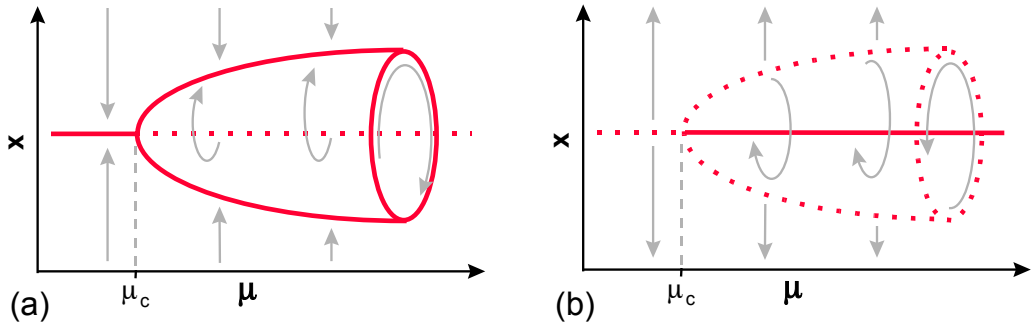


Figura 2-12: Bifurcação de Hopf: (a) supercrítica e (b) subcrítica.

2.4.3. Crises.

O termo crise foi utilizado pela primeira vez por Grebogi et al. (1982) para designar mudanças qualitativas abruptas em atratores caóticos quando da variação de algum parâmetro de controle. Estas mudanças ocorrem pela colisão de um atrator caótico com uma órbita periódica instável. Três tipos de crise podem ser definidas (Grebogi, 1987), de acordo com a natureza da mudança induzida pela crise no atrator caótico: no primeiro caso, chamado crise de fronteira, há uma destruição abrupta do atrator quando o parâmetro atinge um valor crítico p_c. No segundo, chamado de crise interior, o atrator aumenta abruptamente de tamanho no espaço de fases. O terceiro caso ocorre em sistemas com simetria e dois atratores coexistentes que se misturam formando um único atrator.

2.4.3.1. Crise de fronteira.

A crise de fronteira ocorre quando um atrator toca uma órbita periódica instável presente no contorno de sua bacia de atração. Neste encontro o atrator é destruído mas, para valores do parâmetro p somente um pouco maior do que p_c, é observado um transiente caótico antes de o sistema abandonar esta região.

Apresentamos na Figura 2-13 a ocorrência de uma crise de fronteira no mapa de Ikeda. A seta em vermelho indica a região onde a órbita deixa o transiente caótico.

2.4.3.2. Crise interior.

Nas crises interiores, o encontro do atrator caótico com uma órbita periódica instável gera um aumento repentino no tamanho do atrator. Neste caso, há uma dependência temporal caracterizada pela existência de comportamentos intermitentes. Para valores de p um pouco maiores do que p_c, o atrator permanece a maior parte do tempo confinado na região anterior à crise havendo rápidas visitas à nova região. A Figura 2-14 mostra a ocorrência de uma crise interior no mapa de Ikeda devido à colisão do atrator caótico com uma órbita instável de período 5.

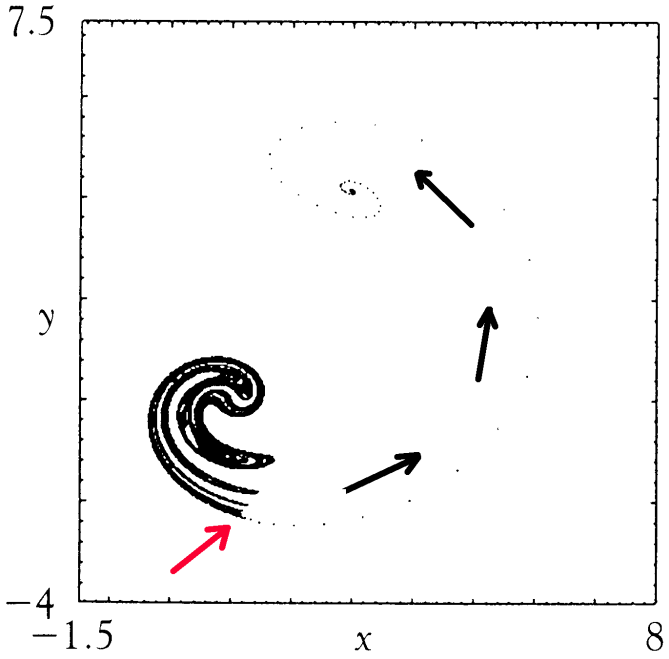


Figura 2-13: Crise de fronteira e transiente caótico no mapa de Ikeda. Adaptada de Alligood et al. (1997).

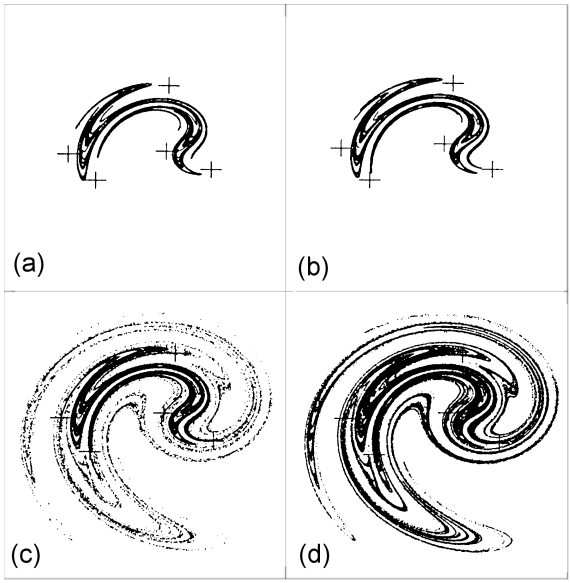


Figura 2-14: Crise interior observada no mapa de Ikeda quando o parâmetro é aumentado. Entre (b) e (c) ocorre a colisão entre o atrator e uma órbita de período 5, resultando nos atratores expandidos.

Um outro tipo de crise interior é observada, por exemplo, no mapa de Hénon e ocorre devido ao encontro de dois ramos de um atrator num ponto de sela,

conforme a Figura 2-15. Para $p<p_c$ podem ser observados dois ramos distintos no atrator caótico que são visitados alternadamente. Quando o parâmetro p atinge p_c , ocorre a colisão entre os dois ramos, causando a perda da característica de alternância. Neste caso, apesar de não haver um aumento abrupto no tamanho do atrator, podemos entender que há um aumento no tamanho de cada ramo. A ocorrência desta crise leva o sistema a apresentar comportamentos intermitentes e, para valores de p um pouco maiores do que p_c, o número de vezes em que ocorrem as perdas de fase é muito pequeno.

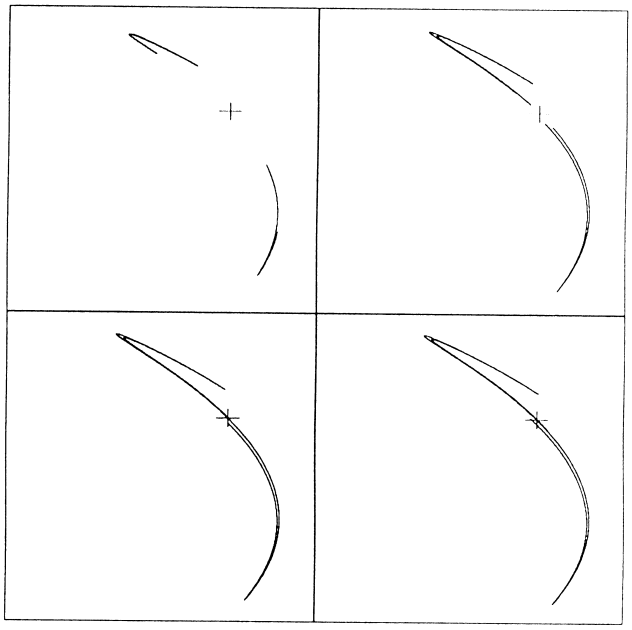


Figura 2-15: Crise interior presente no mapa de Hénon na qual dois ramos que são visitados alternadamente se juntam num ponto de sela. Extraído de Alligood et al..

2.4.3.3. Crise de mistura de atratores.

Como dissemos anteriormente, a crise de mistura de atratores é observada em sistemas que possuem simetria. Sua ocorrência se dá quando dois atratores coexistentes atingem simultaneamente a fronteira de suas bacias de atração formando um único atrator.

Assim como nas crises interiores, para valores de p um pouco maiores do que p_c, o sistema se comporta de maneira intermitente. Neste caso, há a permanência em

cada um dos atratores existentes para $p<p_c$ durante um longo período de tempo. Apresentamos na Figura 2-16 uma crise de mistura de atratores no sistema de Duffing forçado, dado por

$$\ddot{x}+\nu\dot{x}+\frac{\partial V}{\partial x}=p\,\mathrm{sen}(\omega t)\,, \qquad (2.11)$$

onde $V=a\frac{x^4}{4}-\beta\frac{x^2}{2}$.

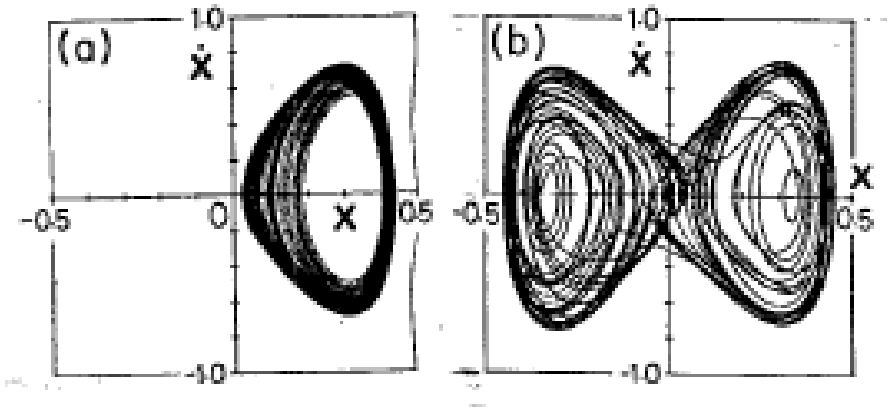


Figura 2-16: Crise de mistura de atratores no atrator de Duffing. Em (a) existe um atrator simétrico ao da figura para x<0. (b) Atrator após a crise, ocorrida com a colisão simultânea dos dois atratores com o ponto de sela $(x,\dot{x})=(0,0)$. **Extraído de Grebogi et al.(1987).**

2.4.4. Expoentes de Lyapunov.

Uma das maneiras de se caracterizar quantitativamente o tipo de movimento de um sistema é através dos expoentes de Lyapunov, sendo possível distinguir movimentos periódicos, quase-periódicos e caóticos através de seus valores. Vamos apresentar adiante uma forma de se chegar à sua definição para um mapa unidimensional.

Tomando-se um mapa

$$x_{n+1}=f(x_n;\mu), \qquad (2.12)$$

temos que a distância entre dois pontos arbitrariamente próximos será, após N iterações, dada por:

$$x_N - x_N^{'} = f^{(N)}(x_0) - f^{(N)}(x_0^{'}) \approx \frac{d}{dx} f^{(N)}(x_0)(x_0 - x_0^{'}) . \qquad (2.13)$$

Portanto,

$$\frac{x_N - x_N^{'}}{(x_0 - x_0^{'})} \approx \frac{d}{dx} f^{(N)}(x_0) \propto e^{\lambda N} \qquad (2.14)$$

e o expoente de Lyapunov λ fica definido como

$$\lambda = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \log \frac{d}{dx} f^{(N)}(x_0) . \qquad (2.15)$$

Desta forma, um expoente de Lyapunov $\lambda>0$ caracteriza divergência exponencial entre duas órbitas e, conseqüentemente, um movimento caótico. Um sistema d−dimensional apresenta d expoentes de Lyapunov e através da combinação de seus sinais podemos caracterizar o tipo de movimento como, por exemplo (Hao 1989), para d=4:

λ				Tipo de movimento estável
1	2	3	4	
-	-	-	-	ponto fixo
0	-	-	-	movimento periódico
0	0	0	-	movimento quase-periódico
+	0	-	-	caos

2.4.4.1. Cálculo do expoente de Lyapunov a partir de séries de dados.

Diversos algoritmos já foram desenvolvidos para o cálculo do expoente de Lyapunov a partir de séries temporais, sendo alguns deles desenvolvidos especialmente para a utilização com dados experimentais, sendo portanto robustos à presença de ruídos.

Podemos citar como exemplo o algoritmo LENNS (Ellner et al., 1992) que calcula o maior expoente de Lyapunov ajustando redes neurais não lineares para reproduzir os dados experimentais. Este método, apesar de ser bastante robusto a ruídos, possui o inconveniente de exigir elevado tempo de computação, tornando

inviável sua utilização para o cálculo do expoente de Lyapunov de um grande número de séries.

Pinto (1999) observou que a utilização de métodos simplificados, baseados na evolução temporal das distâncias entre órbitas, podem gerar valores muito próximos ao de algoritmos sofisticados quando utilizados em séries temporais longas.

O cálculo do expoente de Lyapunov através do método das distâncias é feito sorteando-se pontos próximos no espaço de fases reconstruído e calculando as distâncias entre as órbitas ao longo das iteradas de cada ponto. O expoente de Lyapunov é obtido através do ajuste exponencial dos valores das distâncias.

3. Aparato Experimental.

Estudamos a dinâmica de formação de gotas d'água utilizando o aparato experimental já existente no Laboratório de Fenômenos não Lineares e que foi desenvolvido por Gonçalves (1996) e Pinto (1999). Este aparato é formado por um sistema hidráulico, uma torneira e um sistema de detecção de gotas. Nas seções 3.1 a 3.3 descreveremos cada uma de suas partes. Para efetuarmos a indução de carga nas gotas, foi necessário que efetuássemos alguns ajustes no aparato, que serão descritos na seção 3.4. Na seção 3.5 descreveremos o software utilizado para aquisição de dados e controle do experimento. O diagrama do aparato é apresentado na Figura 3-1.

3.1. Sistema hidráulico.

A obtenção de dados de boa qualidade depende, em grande parte, da utilização de um sistema hidráulico de boa qualidade. Desta forma, é necessária a utilização de um sistema que seja suficientemente isolado de ruídos externos, os quais deterioram a qualidade dos dados, e que garanta estabilidade com relação aos parâmetros de controle.

O sistema hidráulico foi montado numa sala exclusiva para minimizar ruídos devidos às movimentações do ar. Ele consiste de três reservatórios: superior, intermediário e inferior, sendo que o intermediário é aquele no qual a torneira está conectada e os outros dois reservatórios são utilizados para controlar as condições do experimento. Descreveremos cada um dos reservatórios a seguir:

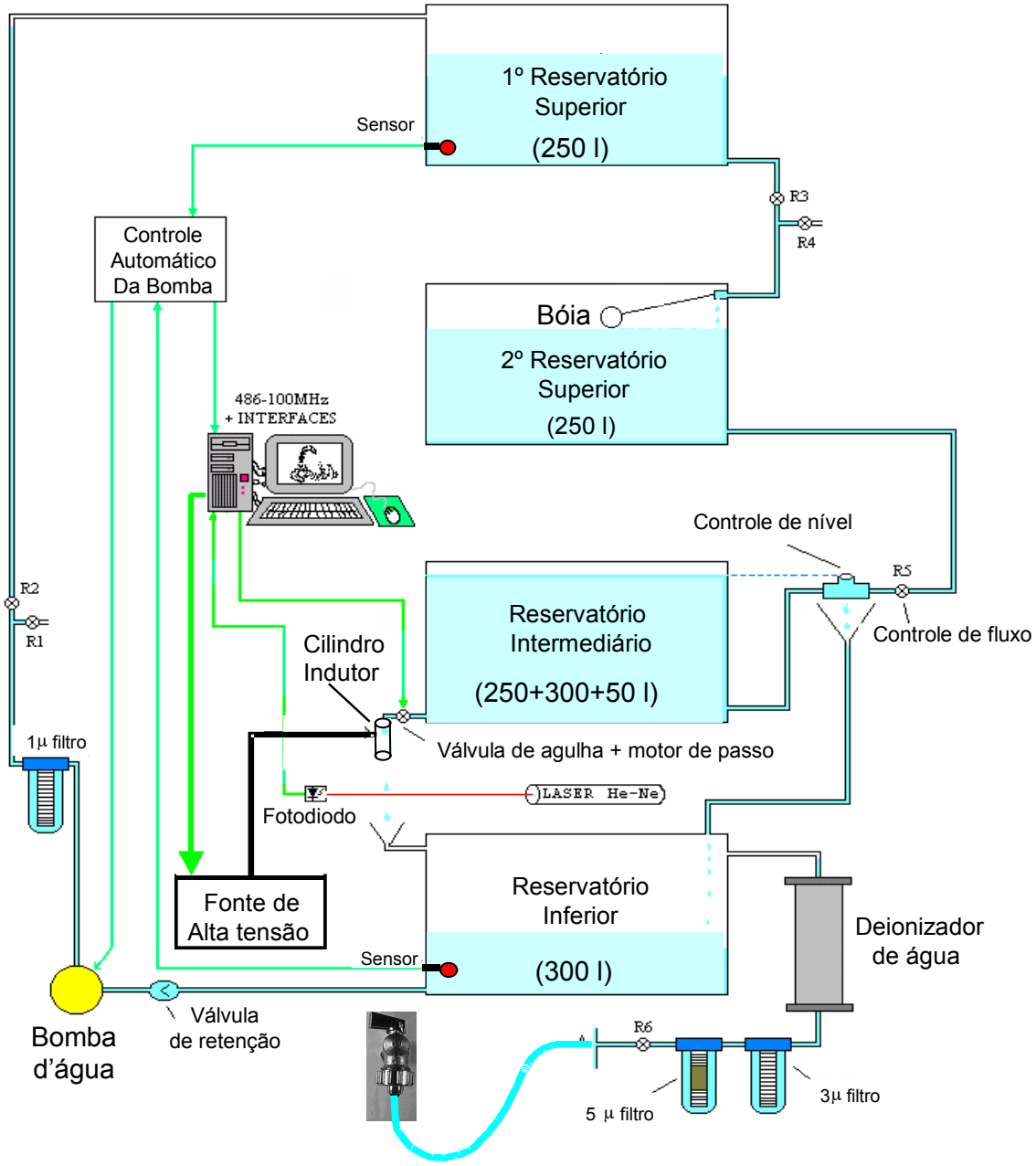


Figura 3-1: Diagrama do aparato experimental.

- Reservatório intermediário – Este reservatório é constituído de três caixas d'água, com capacidades para 500, 250 e 50l e, como dissemos acima, é nele que se encontra conectada a torneira. É importante, portanto, que esteja livre de ruídos externos. Para isto, ele encontra-se apoiado numa plataforma de concreto suspensa por quatro cabos de aço. A utilização de três caixas d'águas, ao invés de uma, é feita para aumentar a área da superfície de água no reservatório garantindo que eventuais flutuações no volume do reservatório não causem mudanças significativas no nível de água. Alterações no nível do reservatório são indesejadas, pois, como observou Gonçalves (1996), elas funcionam como um parâmetro de controle semelhante à abertura da torneira.

- Reservatório superior – O reservatório superior é utilizado para alimentar o intermediário. Ele é composto de duas caixas d'água: a primeira alimenta a segunda, que é mantida em nível de água constante com auxílio de uma bóia. Esta segunda, por sua vez, alimenta o reservatório intermediário com um fluxo constante de água, por ser mantida em nível constante. Ao explicarmos adiante o sistema de controle de nível do reservatório intermediário, tornaremos mais clara a necessidade de se manter o fluxo de alimentação constante.

- Reservatório inferior – Para garantirmos um maior controle sobre as condições da experiência e, conseqüentemente, uma maior reprodutibilidade dos resultados, utilizamos água filtrada e deionizada. Esta, entretanto, possui um alto custo, fazendo com que tenhamos que reaproveitá-la. Desta forma, a água é coletada pelo reservatório inferior e enviada, com o auxílio de uma bomba, à primeira caixa d'água do reservatório superior.

3.1.1. Controle de nível do reservatório intermediário.

Para garantir que o nível de água do reservatório intermediário seja mantido constante, utilizamos um sistema de controle por transbordamento, conforme a Figura 3-2. Neste caso, o fluxo de água proveniente do reservatório superior deve ser superior ao perdido no intermediário devido ao gotejamento da torneira. Temos então que, da água que chega ao controle de nível, apenas uma parcela é enviada ao reservatório intermediário e o excedente, por transbordamento, vai diretamente para o reservatório inferior.

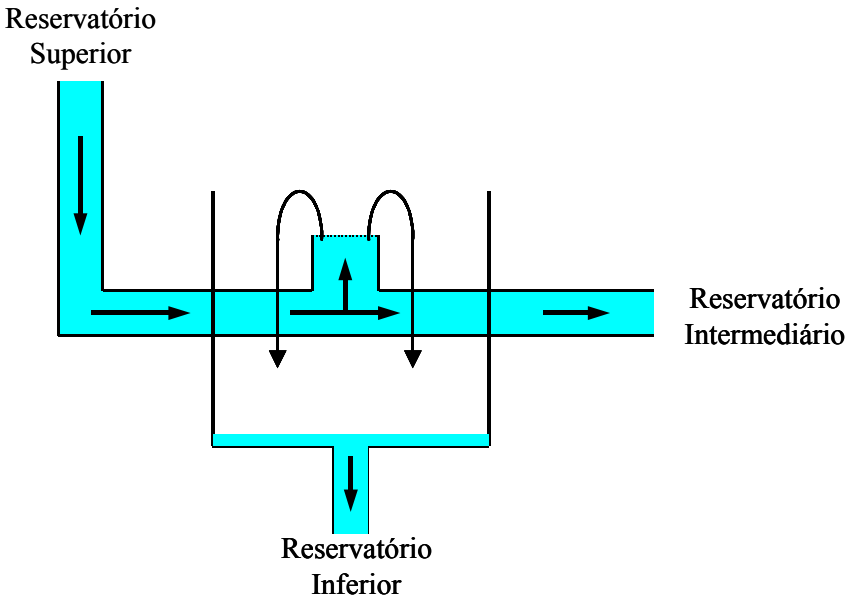


Figura 3-2: Sistema de controle de nível do reservatório intermediário.

3.2. A torneira.

A torneira é composta por uma válvula de agulha para gás, um tubo de vidro em L e um bico metálico, conforme a Figura 3-3. A polia é conectada a um motor de passo de 400 passos/volta através de uma correia, de forma que a abertura da torneira pode ser controlada de forma precisa via computador. O bico da torneira foi fabricado em aço inox e possui uma chanfradura de 45º. A foto em detalhe do bico é mostrada na Figura 3-4.

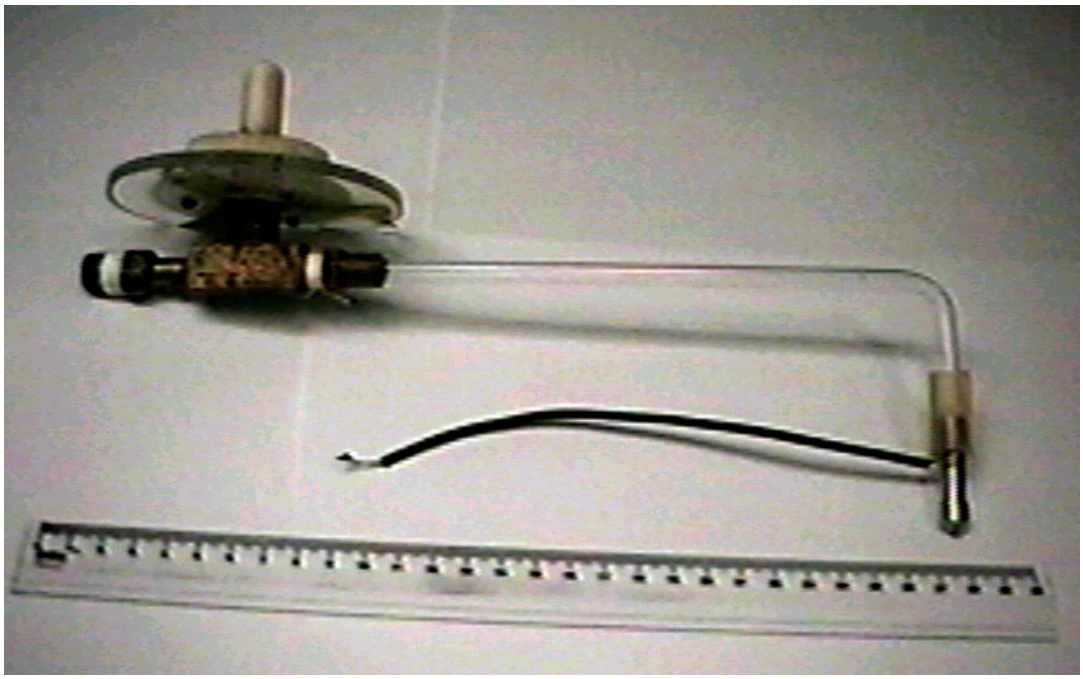


Figura 3-3: Foto da torneira.

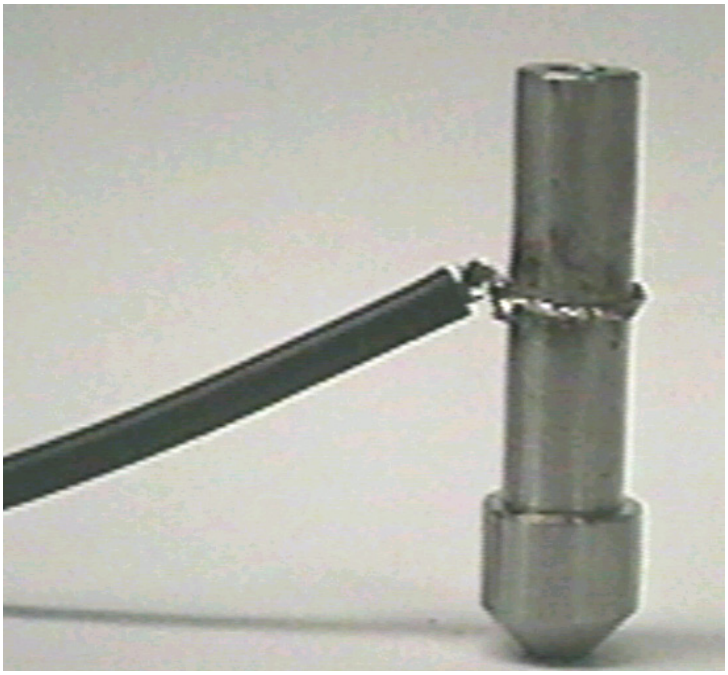


Figura 3-4: Detalhe do bico da torneira.

3.3. Sistema de detecção.

A variável dinâmica de interesse no experimento é o tempo entre a passagem de duas gotas consecutivas (T_n) em uma determinada posição do caminho de queda das gotas. Para efetuarmos a detecção utilizamos um conjunto laser−fotodiodo posicionado no caminho das gotas, a cerca de 9 cm do bico. O par é posicionado de forma que o feixe de laser incida diretamente no fotodiodo. Com a passagem das gotas, o feixe de laser é espalhado e o fotodiodo pára de conduzir. Um sinal típico da saída do fotodiodo obtido pela passagem de duas gotas é apresentado na Figura 3-5. Conforme a figura, δt_n é definido como o tempo de passagem da n-ésima gota pelo feixe de laser e, t_n como o tempo entre o final da passagem da n-ésima gota e o início da n+1-ésima. O tempo entre gotas é definido de acordo com a fórmula $T_n = \frac{1}{2}(\delta t_n + \delta t_{n+1}) + t_n$, e também está indicado na figura.

A contagem do tempo entre gotas é feita através de uma placa de aquisição que, a cada mudança na tensão de entrada (0 ou 5 V), grava o valor de tempo atual numa memória e zera novamente a cronometragem. Uma explicação mais detalhada do funcionamento desta placa pode ser encontrada em (Pinto,1999). Os tempos δt_n e t_n são lidos através de um programa que será descrito adiante.

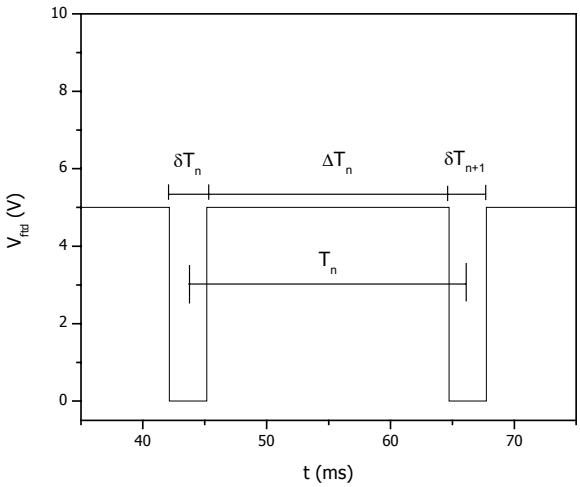


Figura 3-5: Sinal no fotodiodo indicando a passagem de duas gotas.

3.4. Aplicação de campo elétrico na região de formação das gotas.

A aplicação do campo elétrico foi efetuada com a utilização de uma fonte DC de alta tensão, conectada a uma casca cilíndrica que foi posicionada em torno do bico da torneira. O controle do campo é feito alterando-se a tensão na fonte. Aterramos o bico da torneira para que a indução de cargas elétricas, provocada pela presença do campo, não o carregue eletrostaticamente. Utilizamos um motor de passo para alterarmos a tensão, de forma que cada passo equivale a 25V.

A casca cilíndrica deve estar posicionada de forma que o seu eixo e o do bico coincidam, para que não haja desvios laterais das gotas causados pelas variações do campo elétrico na borda da casca. Este, entretanto, mostrou ser um ajuste crítico do experimento e, para diminuirmos a probabilidade de não detecção das gotas, o comprimento do cilindro utilizado é tal que seu final esteja próximo ao feixe de laser. Mostramos um desenho esquemático do detalhe da casca cilíndrica com o bico e o feixe de laser na Figura 3-6.

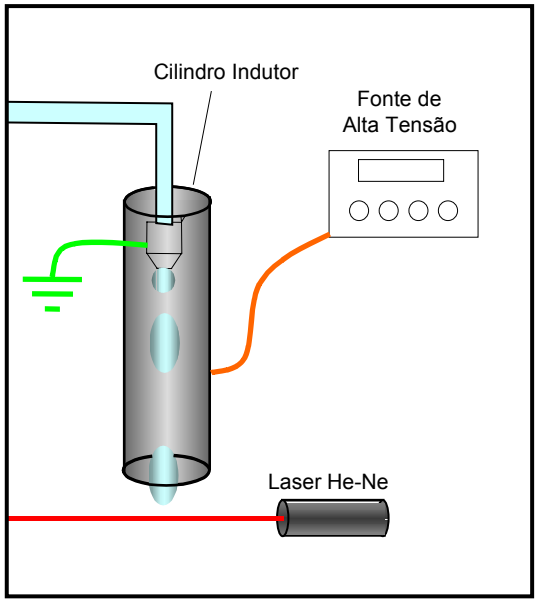


Figura 3-6: Detalhe do aparato com o bico, o laser e o cilindro indutor.

3.5. Programa de controle e aquisição.

O programa utilizado para controle do experimento e aquisição de dados foi desenvolvido por Pinto (1999) em linguagem C. Em sua forma original, ele permite a aquisição de dados em tempo real, assim como o controle da torneira. Efetuamos algumas modificações para que também fosse possível modificar a tensão na fonte.

Os dados são adquiridos medindo-se o tempo entre gotas consecutivas (T_n), de um determinado número de gotas, mantendo-se fixos os parâmetros de controle. A **série temporal** de dados gerada pela aquisição é salva em um arquivo. As aquisições geralmente são feitas na forma de **sequências** de arquivos onde, entre uma **série temporal** e outra, é variado um dos parâmetros de controle.

Neste caso, terminada a aquisição de uma série temporal, o parâmetro em questão é variado em n passos, sendo que, o sentido de variação do parâmetro de controle é dado pelo sinal do número de passos entre aquisições. Ou seja, valores positivos de n indicam que a abertura da torneira ou a tensão serão aumentadas entre as sequências. Entre a mudança do parâmetro e o início da aquisição da próxima série temporal, o programa espera a formação de um determinado número de gotas (transiente) para que o sistema se estabilize. O procedimento descrito acima é repetido até que o parâmetro atinja a posição final desejada.

Podemos ainda, em uma sequência de aquisições, variar os dois parâmetros de controle da seguinte forma: partindo-se de uma determinada abertura da torneira e valor de tensão, são obtidas séries variando a tensão, até a chegada a seu valor final. Volta-se então a fonte à sua posição inicial, altera-se a abertura da torneira e reiniciam-se as aquisições com variação da tensão. Este processo é repetido até que a torneira chegue à sua posição final.

Apresentamos na Figura 3-7 o diagrama do programa, onde os parâmetros de inicialização possuem os seguintes significados:

- ngotas: é o número de tempos entre gotas (T_n) que devem ser adquiridos por arquivo.
- raiz: nome da sequência de aquisições.
- narqiniT (narqiniF) e narqfinT (narqfinF): são os números do primeiro e do último arquivo relativos à abertura da torneira (tensão da fonte), respectivamente.
- npassosT (npassosF): número de passos dados pelo motor que controla a torneira (fonte) a cada modificação no parâmetro.
- ntransT (ntransF): número de gotas de espera entre a modificação na abertura da torneira (tensão da fonte) e o início da nova aquisição.

Os significados das outras variáveis são: nomearq é o nome do arquivo em que serão salvos os dados; posT (posF) é a posição atual da torneira (fonte), em passos; posiniF é a posição inicial da fonte.

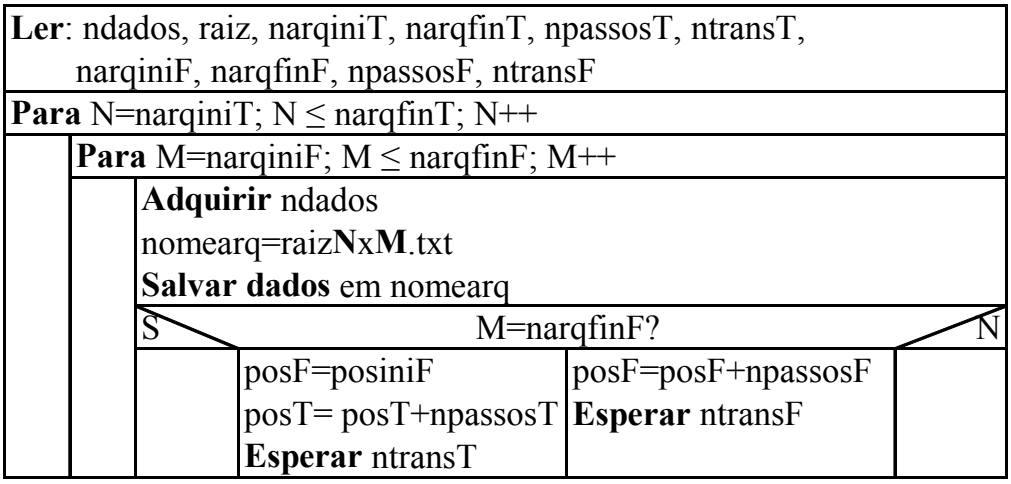


Figura 3-7: Diagrama da rotina de aquisição.

4. Resultados obtidos e análise de dados.

Os primeiros resultados foram obtidos tendo como parâmetro de controle a abertura da torneira. Efetuamos, posteriormente, os estudos que utilizam como parâmetro de controle a tensão aplicada ao bico da torneira, e pudemos comparar os comportamentos gerados devido à utilização de cada um dos dois parâmetros. Os últimos resultados foram obtidos combinando-se a variação dos dois parâmetros de controle, no qual efetuamos a construção diagrama do espaço de parâmetros calculando o expoente de Lyapunov das séries temporais.

Para uma maior clareza na nomenclatura utilizada, cabe ressaltar que o termo **série temporal** (ou simplesmente **série**) refere-se a um conjunto de dados adquiridos continuamente e sem a alteração de nenhum parâmetro de controle. Estas séries são salvas em um arquivo. Designamos por **sequência** um conjunto de **séries temporais** com variação constante do parâmetro de controle entre elas. São constantes também a quantidade de dados adquiridos por série e o transiente entre elas.

4.1. Abertura da torneira como parâmetro de controle.

Utilizando como parâmetro de controle do experimento a abertura da torneira, obtivemos duas sequências de dados, sendo uma abrindo e outra fechando a torneira em 1 passo entre a aquisição das séries temporais. Obtivemos 20.000 valores de tempos entre gotas sucessivas (T_n) por série, com espera de 15.000 entre elas.

4 Resultados obtidos e análise de dados.

A Figura 4-1 mostra os dois diagramas de bifurcações, sendo que, em (a) a torneira foi aberta e em (b) fechada ao longo da sequência. O eixo das abscissas corresponde à abertura da torneira em passos. Convencionamos que valores positivos indicam um aumento na abertura e negativos uma diminuição. O zero das abscissas é tomado, arbitrariamente, como a posição da torneira no início de cada sequência e, portanto, não coincide para as duas sequências.

Podemos identificar comportamentos periódicos, duplicação de período e indícios de comportamentos caóticos. A constatação da presença de caos, assim como a caracterização rigorosa de algumas regiões dos diagramas – principalmente a região de altas taxas de gotejamento (C1) e a transição para as regiões de médias taxas de gotejamento (C2) – já foram efetuadas em outros estudos. (Reyes,2001; Pinto,1999; Gonçalves, 1996). Desta forma não iremos analisar em detalhes os resultados aqui obtidos.

Cabe ressaltar, entretanto, a existência de uma região central no diagrama em que os resultados são diferentes para cada sentido em que foi efetuada a aquisição, indicando a presença de histerese no sistema. Em particular, efetuamos a reconstrução bidimensional dos atratores anteriores e posteriores à transição entre as regiões C2 e C1, que são apresentado na Figura 4-2. Podemos notar que, de fato, os atratores envolvidos em cada caso são topologicamente diferentes.

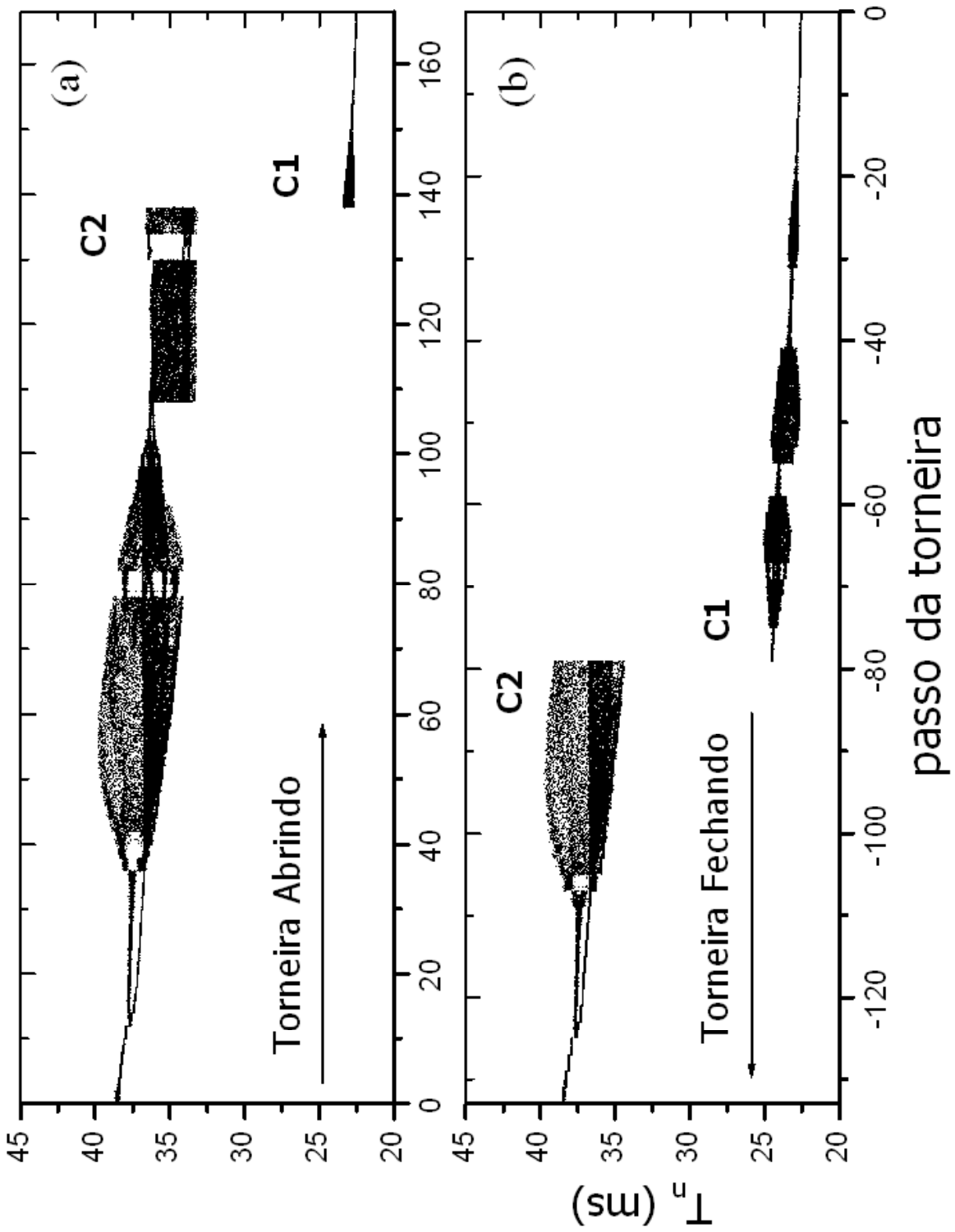


Figura 4-1: Digramas de bifurcações obtidos (a) abrindo a torneira e (b) fechando a torneira.

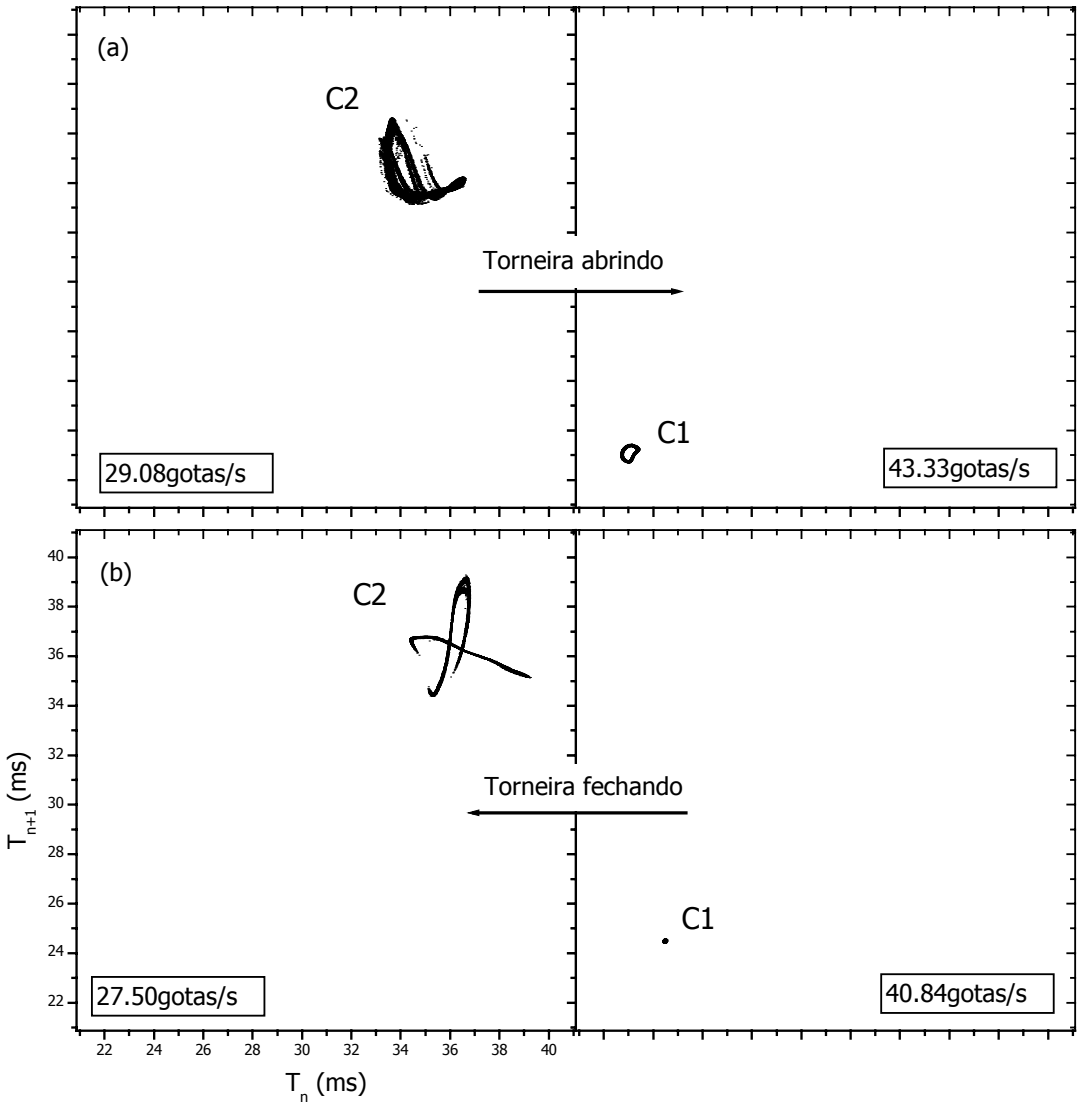


Figura 4-2: Reconstrução bidimensional dos atratores imediatamente anteriores e posteriores à crise que separa a região de média da de alta taxa de gotejamento, (a) abrindo e (b) fechando a torneira entre a aquisição das séries temporais.

4.2. Tensão elétrica como parâmetro de controle.

As primeiras tentativas de alteração na dinâmica de formação de gotas d'água, através da aplicação de um potencial elétrico constante na região do bico da torneira, foram efetuadas com uma fonte com capacidade máxima de 60V. Apesar de obtermos evidências de alteração para alguns casos específicos, os resultados obtidos não foram conclusivos. Fomos, com isto, motivados a substituir a fonte para uma de alta tensão, cuja tensão máxima é de ~10kV. Apresentaremos nesta seção os resultados obtidos utilizando a tensão como parâmetro de controle.

Efetuamos uma sequência de medidas iniciada sem a aplicação de tensão e finalizada com aplicação de uma tensão de 3,5kV, aumentando 25V entre as séries. Foram adquiridos 8.192 dados por série, com espera de 2048 entre cada uma delas. O diagrama de bifurcações é apresentado na Figura 4-3 (a), em vermelho. Adicionamos à Figura 4-3 (b), em azul, o diagrama obtido abrindo-se a torneira. Os pontos marcados de T1 até T8 do diagrama, obtido com o aumento da tensão, e de A1 até A8, obtido com abertura da torneira, indicam as posições em que serão efetuadas as reconstruções dos atratores para análise.

O diagrama de bifurcações obtido com a alteração da tensão aplicada ao bico indica alterações significativas no comportamento do sistema, mostrando que a tensão elétrica pode ser utilizada de forma eficiente na dinâmica de formação de gotas d'água. Além disso, o aumento da tensão leva a uma diminuição no tempo médio entre gotas, assim como o aumento na abertura da torneira. Podemos observar também que as regiões iniciais dos dois diagramas possuem semelhanças quanto às estruturas, apresentando estruturas diferentes para valores maiores dos parâmetros de controle.

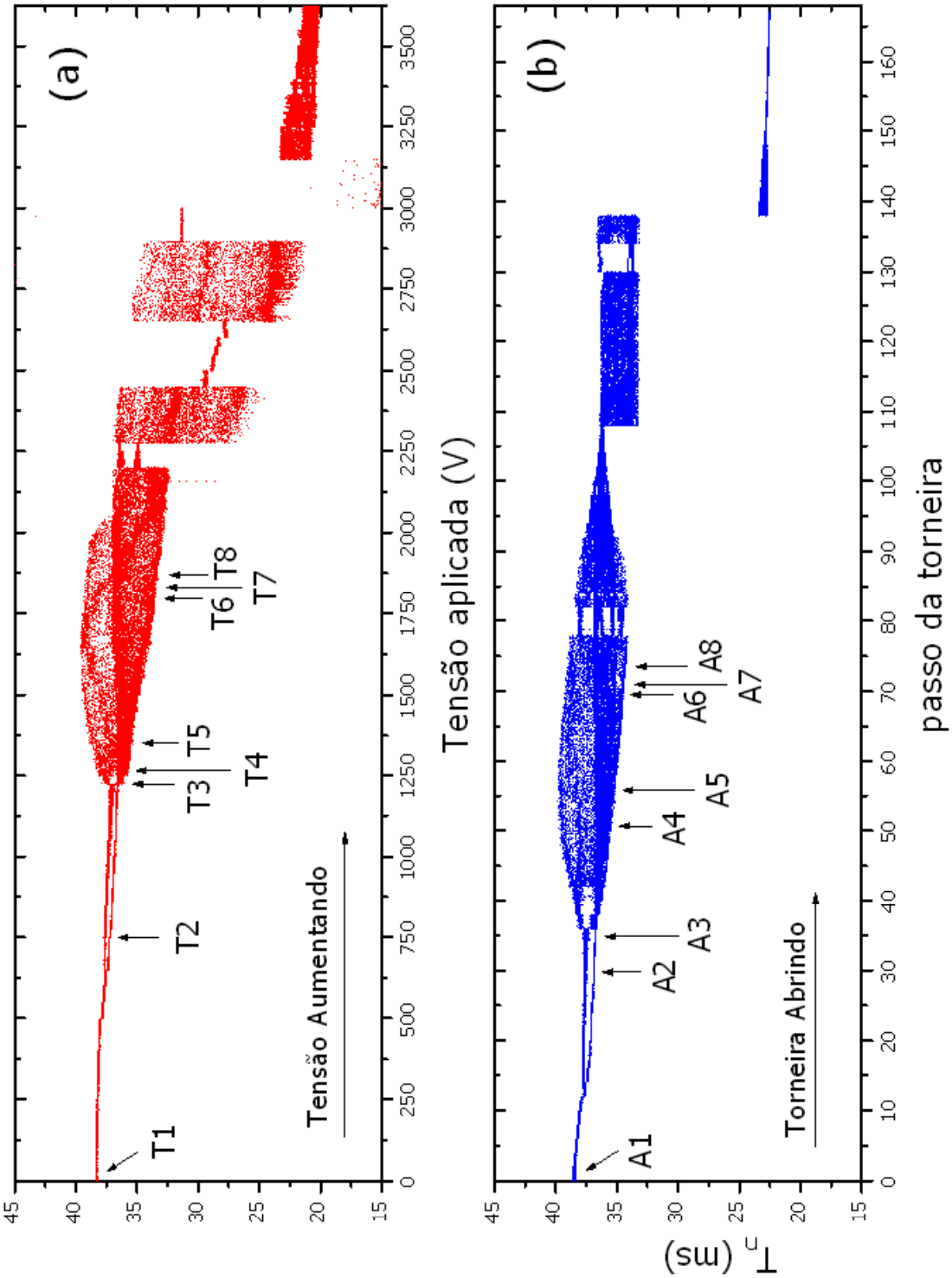


Figura 4-3: Diagramas de bifurcações obtidos (a) aumentando a tensão (vermelho) e (b) abrindo a torneira (azul).

O gráfico da Figura 4-4 mostra a taxa média de gotejamento das séries temporais em função do parâmetro de controle. A sequência na qual a tensão foi aumentada é representada em vermelho e a sequência na qual a torneira foi aberta, em azul. Inicialmente, as duas sequências apresentam valores próximos de taxa de gotejamento, que aumenta suavemente com a alteração dos parâmetros. Entretanto, a partir do ponto indicado por PA, os valores obtidos em cada caso passam a ser significativamente diferentes. É possível notar também que, apesar de algumas quebras, a utilização da tensão como parâmetro de controle faz com que a transição para a região de altas taxas de gotejamento ocorra mais suavemente do que com a utilização da abertura da torneira.

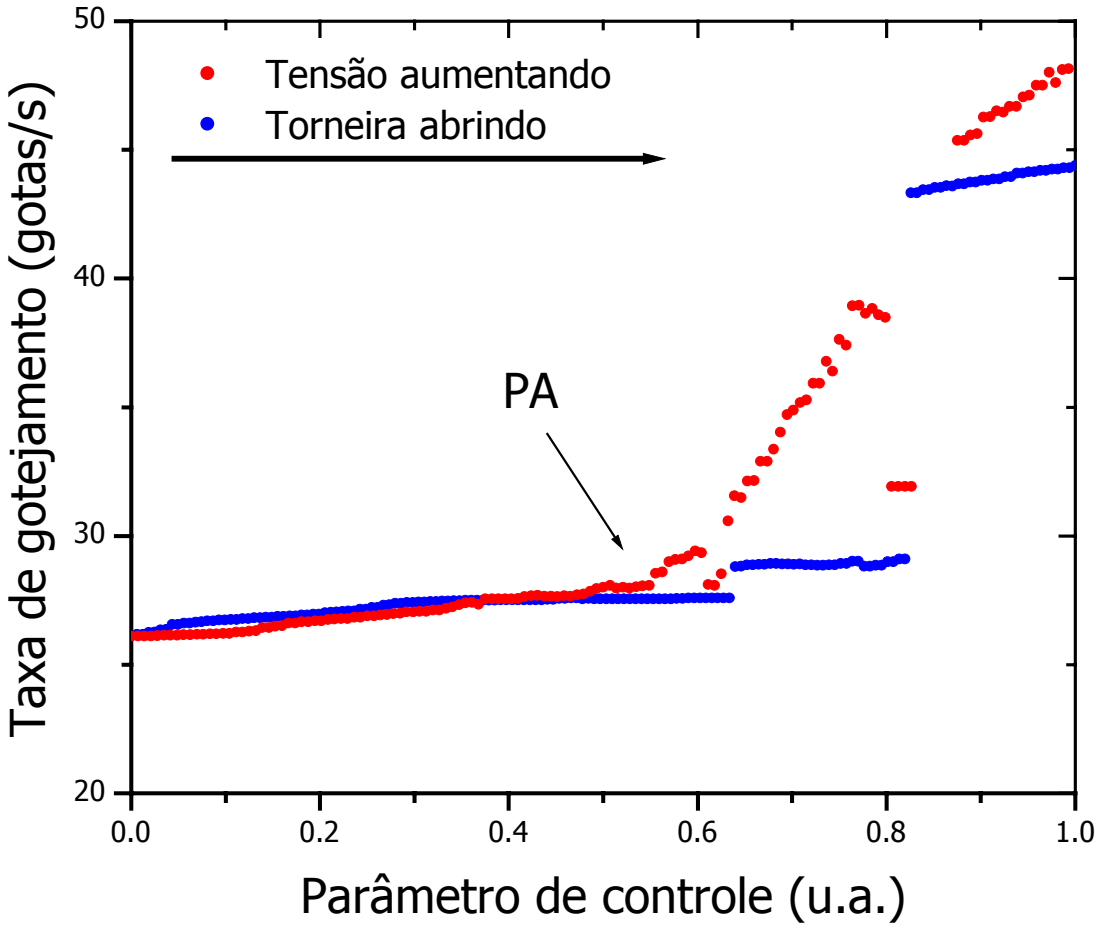


Figura 4-4: Gráfico das taxas de gotejamento média das séries de dados em função da tensão aplicada (vermelho) e da abertura da torneira (azul).

Comparando os resultados obtidos com cada um dos parâmetros, tanto no diagrama de bifurcações quanto no de taxas de gotejamento, obtivemos evidências de que os comportamentos observados no início de cada sequência são semelhantes. Desta forma, escolhemos algumas séries temporais do início de cada uma das sequências para efetuarmos a comparação de seus atratores. Estas séries foram indicadas nos diagramas de bifurcações de T1 até T6 no diagrama da tensão, e de A1 até A6 no diagrama de bifurcações da abertura da torneira. Apresentamos na Figura 4-5 os atratores das séries T1 até T3, obtidas alterando a tensão (em vermelho) e das séries A1 até A3, obtidas abrindo a torneira (em azul). As séries T4 até T6 assim como as A4 até A6 são apresentadas na Figura 4-6.

Através destas duas figuras podemos verificar a equivalência topológica dos atratores de mesmo número (T1 e A1, por exemplo) e concluir que a rota inicial para o caos gerada pelo aumento de cada um dos parâmetros é a mesma. Na Figura 4-5 observamos que esta rota, iniciada em período 1 (T1 e A1), envolve uma duplicação de período (T2 e A2) seguida pelo alargamento de cada um dos pontos para dois ramos aparentemente caóticos (T3 e A3). Na Figura 4-6, observamos que estes dois ramos passam a apresentar um maior número de dobras (T4 e A4) ao mesmo tempo em que vão se aproximando, até que, em T5 e A5, ocorre a colisão entre os ramos. Em T6 e A6 encontramos o último caso em que os atratores são topologicamente equivalentes.

A colisão entre os ramos - observada entre T4 e T5 ao aumentarmos a tensão (ou entre A4 e A5 ao abrirmos a torneira) - caracteriza a ocorrência de uma crise interior semelhante à do atrator de Hénon – discutida na seção 1.4.4.2 – em que o encontro dos dois ramos ocorre em um ponto de sela. Para uma melhor observação da crise, escolhemos a série anterior e a posterior à crise da sequência em que foi alterada a tensão (T4 e T5). Efetuamos então a reconstrução tridimensional dos atratores, apresentadas na Figura 4-7 (a) e Figura 4-7 (b), respectivamente . Os pontos foram adicionados no gráfico de forma que os pontos ímpares de cada série

são representados em vermelho e os pontos pares em preto, facilitando a observação da ocorrência ou não de separação do atrator em dois ramos. Podemos, através da figura, verificar facilmente a ocorrência da crise. O ponto PS indicado na Figura 4-7 (b) mostra o ponto de sela onde ocorre a colisão entre os dois ramos. Para identificá-lo, foi utilizado o algoritmo TISEAN (Hegger, 1999).

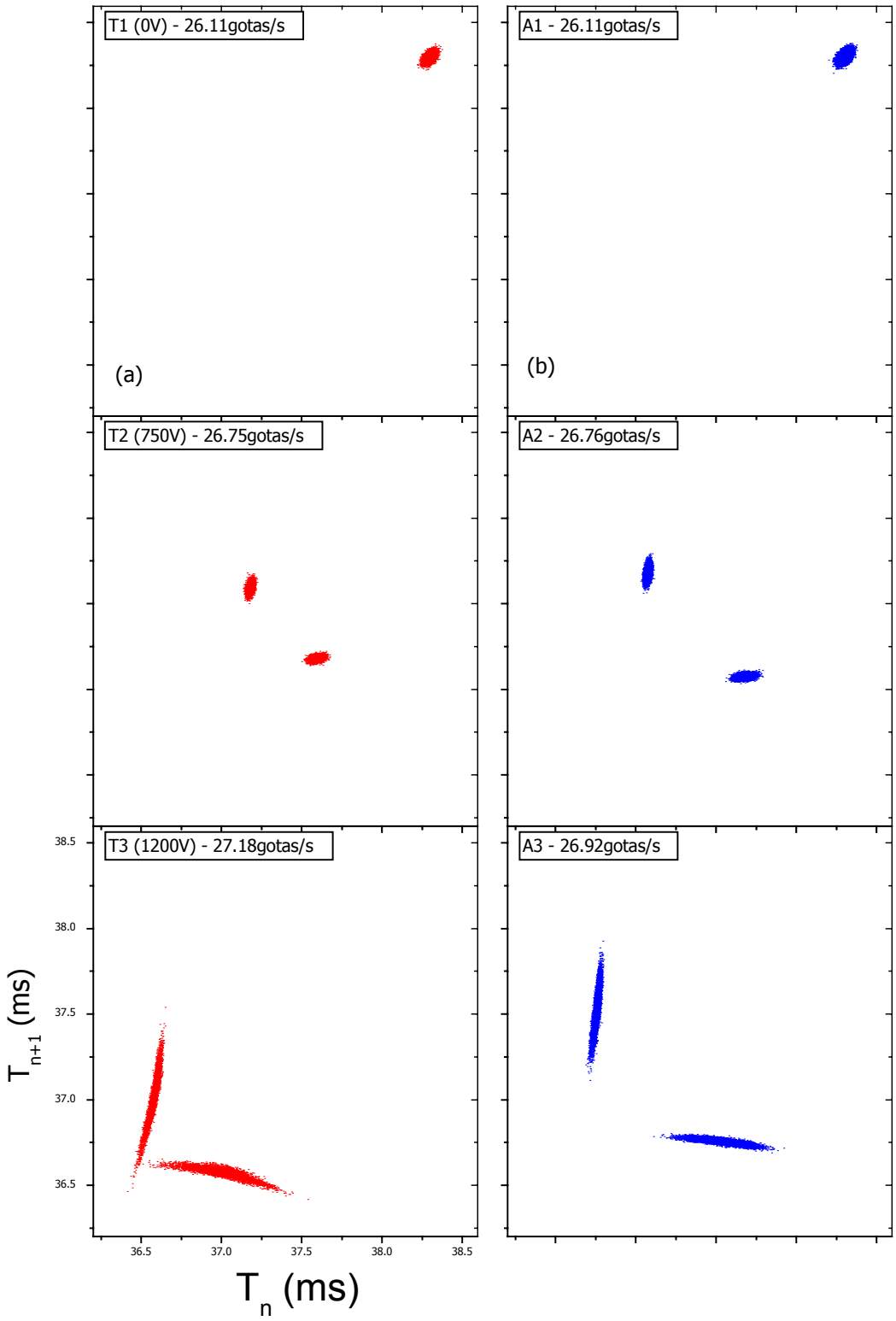


Figura 4-5: Atratores comparativos entre os resultados obtidos (a) aumentando a tensão (vermelho, T1-T3) e (b) abrindo a torneira (azul, A1-A3).

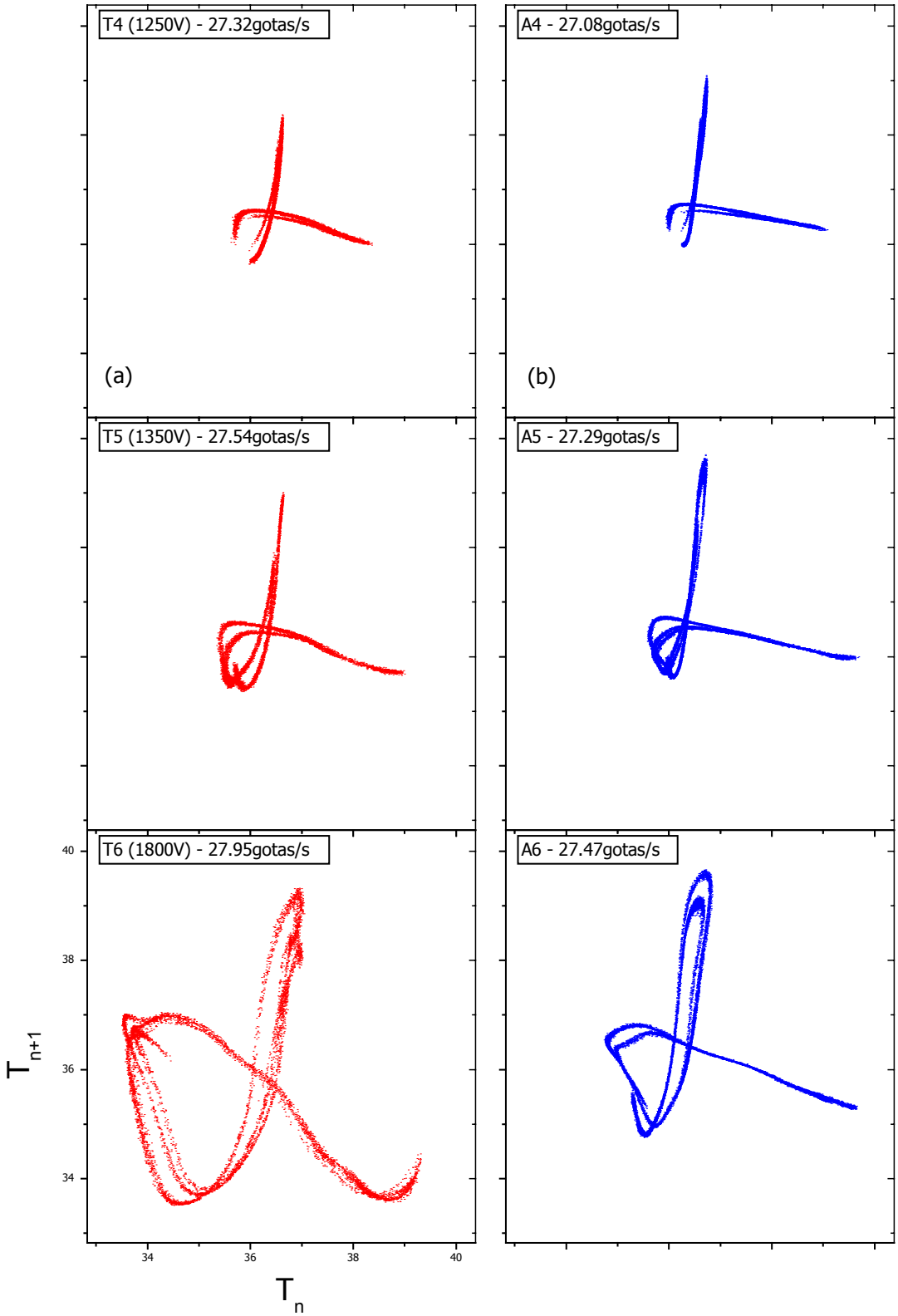


Figura 4-6: Atratores comparativos entre os resultados obtidos (a) aumentando a tensão (vermelho, T4-T6) e (b) abrindo a torneira (azul, T4-T6).

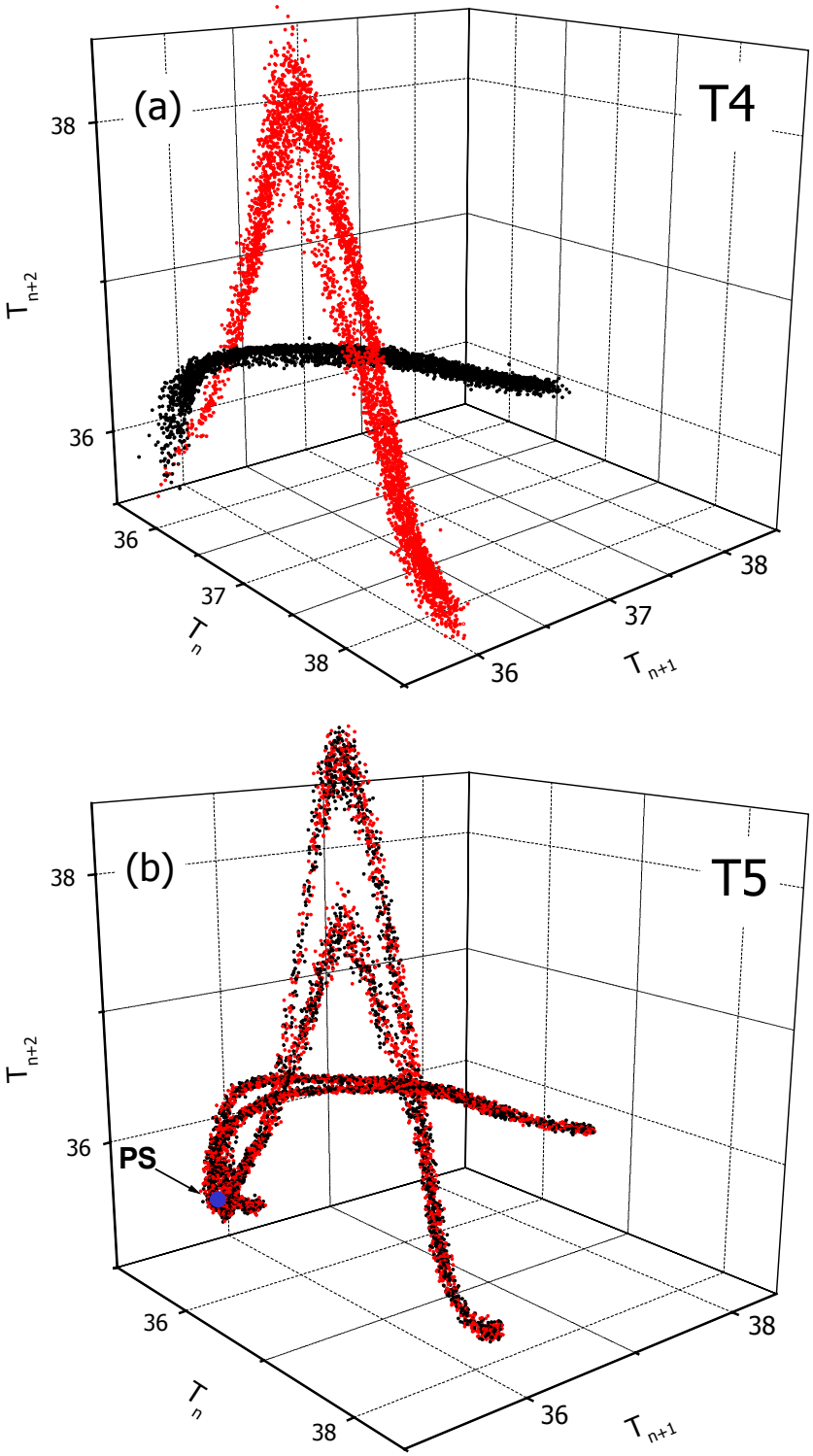


Figura 4-7: Reconstrução tridimensional das séries (a) anterior e (b) posterior à crise interior em que dois ramos se encontram, gerada com o aumento da tensão. O ponto PS em (b) indica o ponto de sela onde há o encontro.

Analisaremos a seguir a transição na qual os comportamentos observados devido ao aumento de cada um dos parâmetros passam a ser diferentes.

Ao aumentarmos a tensão, observamos a ocorrência de duas crises consecutivas, com intervalo de 50V entre elas. As séries temporais envolvidas nestas duas crises foram indicados no diagrama de bifurcações como T6, T7 e T8.

A Figura 4-8 (a) mostra a primeira das duas crises através da reconstrução bidimensional do atrator anterior (T6, em preto) e posterior à crise (T7, em vermelho). Podemos notar que, após a crise, uma nova região do espaço de fases passa a ser visitada sem que haja um abandono da região visitada anteriormente. Este aumento abrupto no tamanho do atrator caracteriza uma crise interior.

A segunda crise é representada na Figura 4-8 (b) onde temos o atrator anterior a crise (T7) em vermelho e o posterior (T8) em preto. Neste caso, o sistema abandona a região visitada antes da primeira crise e passa a visitar exclusivamente a região gerada após a primeira crise, caracterizando também uma crise interior.

Desta maneira, a sequência das duas crises leva o sistema a uma nova região do espaço de fases, com a existência de um atrator intermediário que mescla o comportamento anterior à primeira crise – apresentado na Figura 4-8 (a), em preto – com o comportamento posterior à segunda crise – apresentado na Figura 4-8 (b), em preto.

Ao abrirmos a torneira, também observamos a ocorrência de uma crise interior subseqüente à transição que leva à distinção dos resultados. Neste caso, os atratores voltam a se dividir em dois ramos caóticos, conforme a Figura 4-9, em que efetuamos a reconstrução bidimensional dos atratores. Os atratores envolvidos na crise foram indicados como A7 e A8 no diagrama de bifurcações (Figura 4-3b).

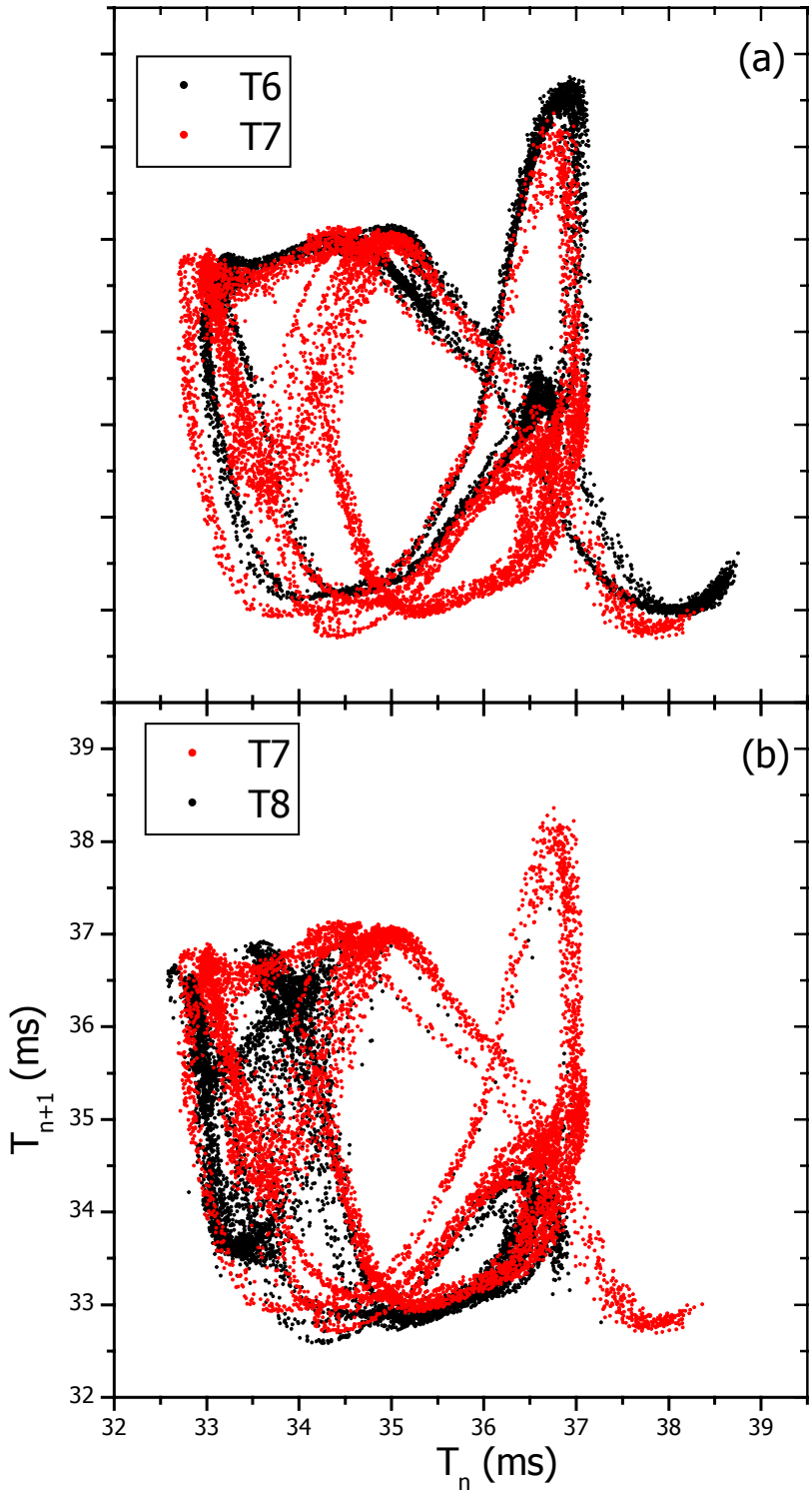


Figura 4-8: Sequência de duas crises interiores que levam a uma mudança global nas características topológicas dos atratores. Em (a) o atrator anterior à crise (T6) é representado em preto e o posterior (T7) em vermelho. Em (b) temos o anterior (T7) em vermelho e o posterior (T8) em preto.

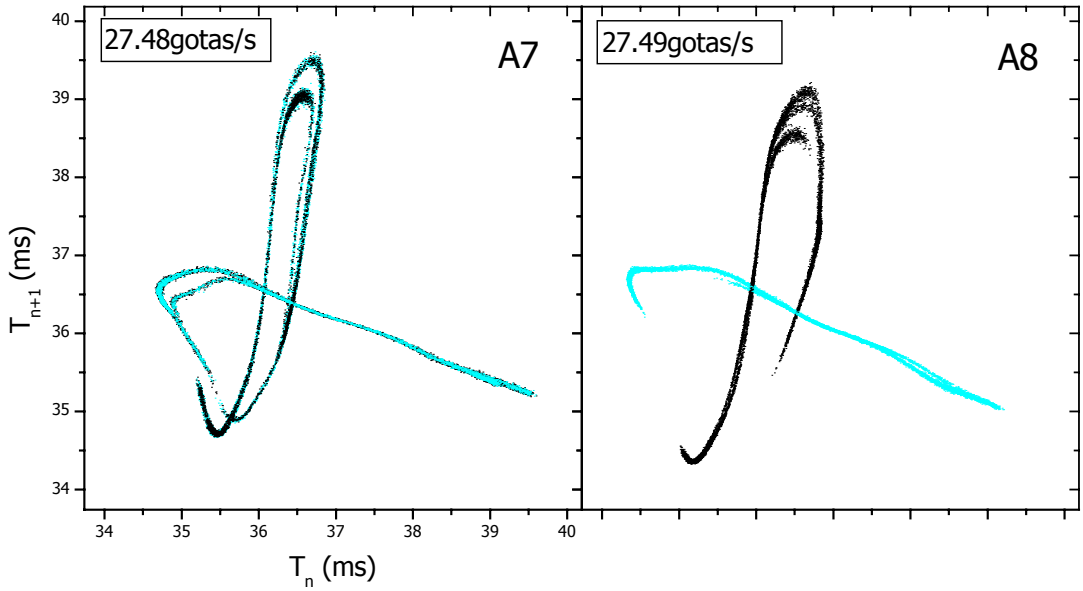


Figura 4-9: Atratores obtidos abrindo a torneira após a ocorrência da transição em que a alteração de cada um dos parâmetros leva a comportamentos distintos. Podemos notar a ocorrência de uma crise de separação de ramos entre A7 e A8.

4.2.1. Verificação da conservação do fluxo d'água.

Na seção anterior observamos que a aplicação de um campo elétrico na região do bico da torneira é um parâmetro de controle eficiente no experimento da torneira gotejante. Além disso, o aumento da tensão gerou alguns comportamentos semelhantes ao aumento da abertura da torneira, como o crescimento da taxa média de gotejamento (em gotas/s), além de características topológicas em determinadas regiões. A obtenção destes resultados nos motivou ao estudo do fluxo médio de água na torneira em função da tensão aplicada ao bico, dado que o aumento na abertura da torneira, em passos, gera um aumento linear no fluxo.

Para este estudo, efetuamos uma sequência de aquisições variando a tensão de 0 até 5,65kV, nas quais foram medidas as massas médias de 5.000 gotas (<m>) e calculados os tempos médios entre gotas (<T>) para cada valor de tensão. A Figura 4-10 mostra o gráfico de <m> em função do tempo médio entre gotas <T>. Lembrando que a massa média das gotas é dada por $\langle m\rangle = m_0 + \phi\langle T\rangle$, concluímos,

ao observarmos um comportamento linear, que o fluxo (ϕ) não é alterado com a aplicação de tensão.

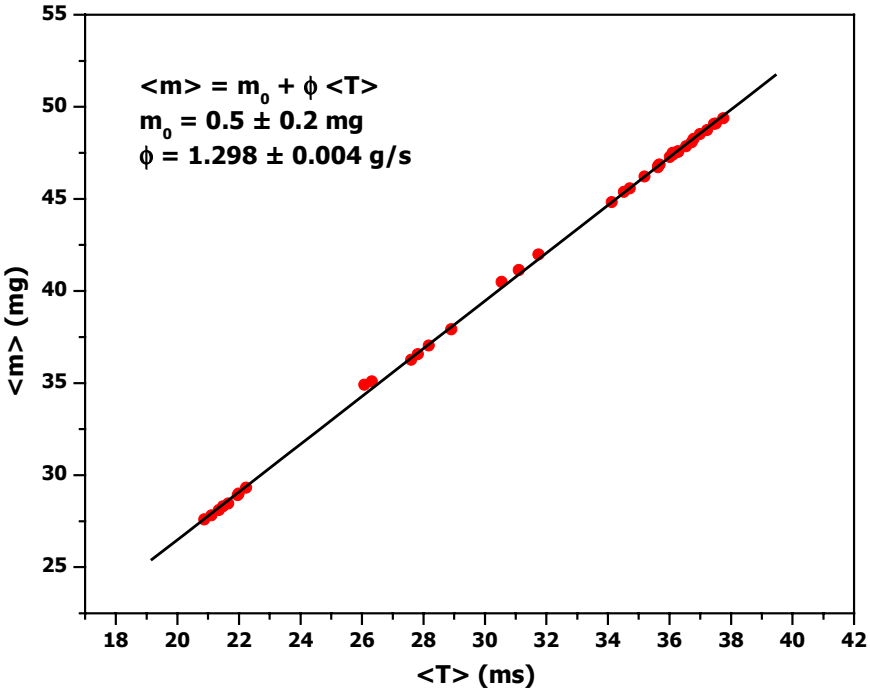


Figura 4-10: Gráfico da massa média <m> em função do tempo médio entre gotas <T>. O comportamento linear mostra que o fluxo é constante.

A verificação da conservação do fluxo quando utilizamos como parâmetro de controle a tensão, nos mostra que cada parâmetro atua de forma diferente no experimento. Além disso, sabendo que o fluxo de um fluido possui grande dependência da viscosidade, podemos inferir que a aplicação de tensão não altera significativamente a viscosidade da água

Na aproximação de regimes quasi-estásticos da equação de Navier-Stokes, ou até mesmo considerando correções de ordem superiores (Tufaile, 1996), a diminuição da tensão superficial de um líquido acarreta na diminuição do volume das gotas, sendo uma relação direta para o primeiro caso. Desta forma, ao observarmos que o aumento da tensão leva a uma diminuição na massa média das gotas (Figura 4-11), podemos concluir que a presença de um campo elétrico leva a

uma diminuição na tensão superficial efetiva da água. Este resultado corrobora estudos estatísticos recentes que apontam para a alteração da tensão superficial de líquidos dipolares na presença de campos elétricos constantes. (Warhsavsky et al., 2001)

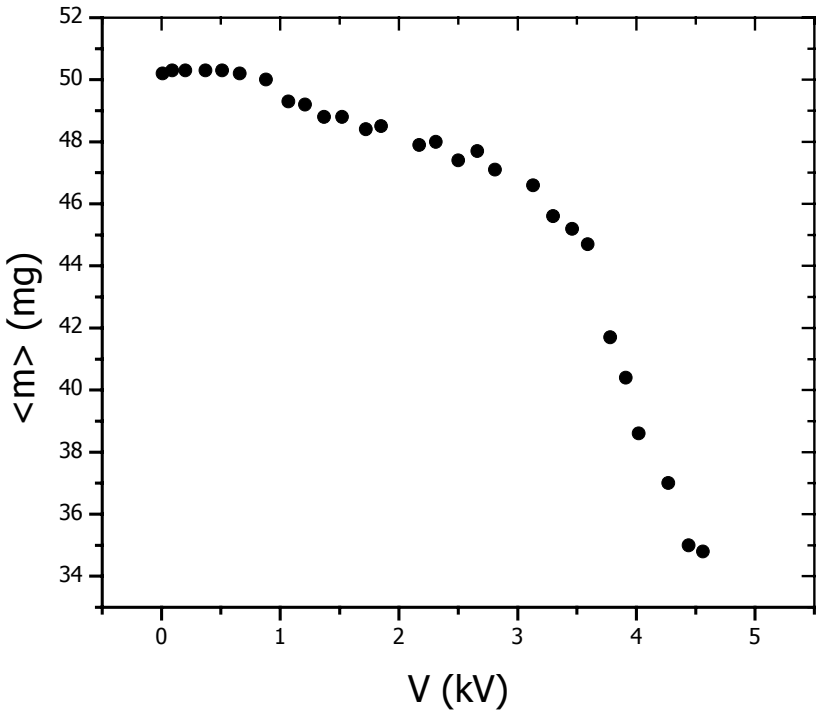


Figura 4-11: Gráfico da massa média das gotas <m> em função da tensão (V) aplicada ao bico.

4.3. Espaço de parâmetros.

A construção do diagrama do espaço de parâmetros é uma ferramenta muito utilizada em sistemas que possuem mais de um parâmetro de controle por permitir a caracterização geral do sistema, para diferentes combinações dos parâmetros. Em nosso caso, construímos o diagrama utilizando como parâmetros de controle a abertura da torneira (A) e a tensão (V) e calculando os expoentes de Lyapunov das séries temporais para os diferentes pares (V, A).

4 Resultados obtidos e análise de dados.

A aquisição de dados foi efetuada de forma a gerar um diagrama 20x20 com 5.000 dados para cada par de parâmetros. A variação dos parâmetros entre duas posições vizinhas é de 125V para a tensão e 5 passos para a abertura da torneira. Descrevemos a seguir o processo de aquisição de dados:

a) Colocamos o sistema em sua posição inicial, definido por uma abertura inicial (A_0) e uma tensão inicial (V_0=0).

b) Adquirimos 20 séries com 5.000 dados aumentando-se a tensão em 125V entre elas. O tempo de espera foi de 8.000 gotas.

c) Retornamos a tensão ao seu valor inicial V_0=0.

d) Abrimos a torneira de 5 passos e esperamos 30.000 gotas.

O processo de b) a d) é repetido 20 vezes, de forma que ao final da aquisição foram obtidos os dados necessários para a construção de um diagrama 20x20.

O expoente de Lyapunov das séries temporais foi calculado através do algoritmo das distâncias, escrito por Pinto (1999) e o diagrama gerado pelos expoentes para as diferentes combinações dos parâmetros é apresentado na Figura 4-12. As regiões representadas pela cor branca indicam comportamentos periódico ou quase-periódico e as representadas por cinza indicam regimes caóticos, sendo mais caóticos quanto mais escuro for o tom de cinza.

Adicionamos ao diagrama uma reta, em azul, na qual é possível observarmos a presença de simetria para os valores iniciais de abertura e tensão. Esta simetria é facilmente observada no canto inferior esquerdo para a cor branca e para o tom de cinza mais claro. Na região do diagrama onde se dá início o segundo tom de cinza também é possível encontrarmos simetria. Pudemos notar a presença de duas ilhas periódicas (marcadas como P1 e P2) simétricas em relação à reta azul, apesar da presença de duas regiões mais escuras na parte inferior à reta azul (indicadas por A1 e A2) que não são encontradas na parte superior. Demarcamos, finalmente, com uma linha vermelha, a separatriz da região em que o diagrama é simétrico da que

não há simetria. Desta forma o diagrama é simétrico na região inferior esquerda à linha vermelha e não simétrico nas outras partes.

As eventuais faltas de simetria deverão ser analisadas em trabalhos futuros através da construção de um diagrama com maior resolução e utilizando algoritmos mais precisos para a determinação dos expoentes de Lyapunov das séries. Devemos salientar que, apesar de não termos encontrado as ilhas simétricas a A1 e A2, na região em que definimos como simétrica, as características topológicas dos atratores na posição simétrica às ilhas são semelhantes, como apresentado na Figura 4-13. As posições utilizadas para a construção dos dois atratores foram indicadas no diagrama através de dois pontos verdes (S1 e S2).

A observação de simetrias em diagramas do espaço de fases é um indício de que os comportamentos do sistema nas posições simétricas sejam semelhantes. Pudemos observar na seção 4.2, ao compararmos os resultados obtidos variando a abertura da torneira (sem aplicar tensão) com os obtidos variando a tensão (mantendo a torneira na posição 0), que para determinados valores dos parâmetros de controle os resultados são de fato semelhantes. Os resultados obtidos com a construção do espaço de parâmetros generalizam os resultados obtidos naquela seção.

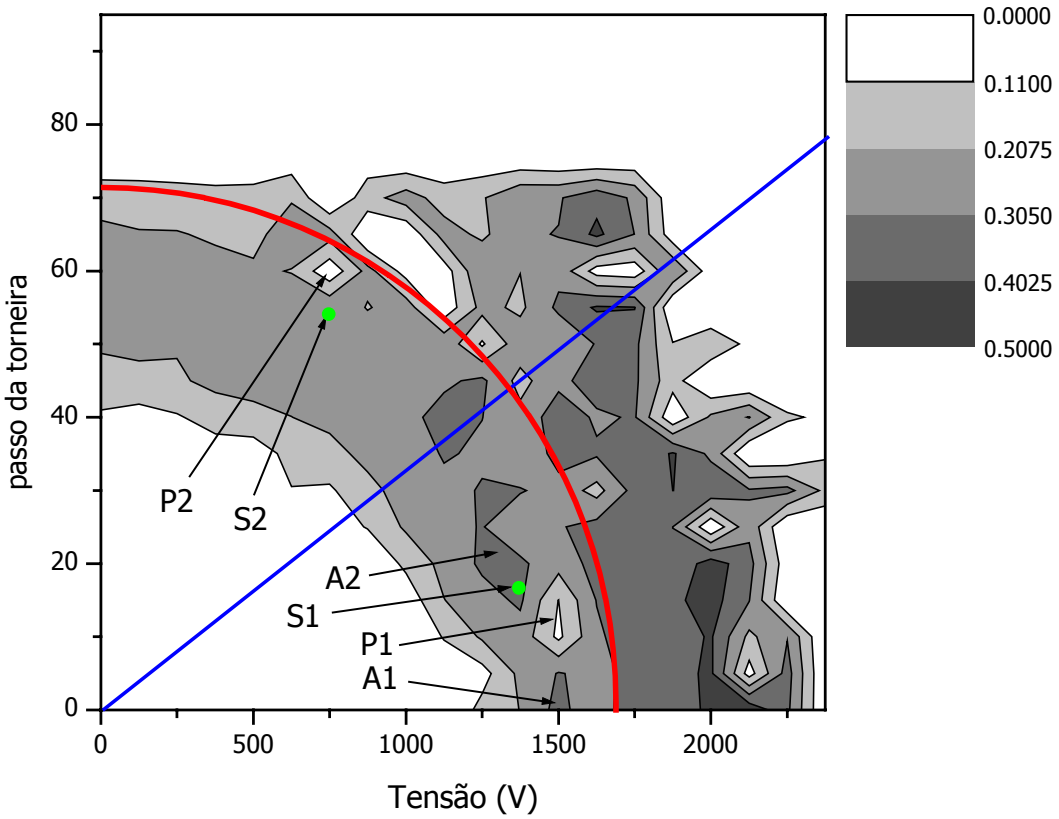


Figura 4-12: Espaço de parâmetros construído através do cálculo do expoente de Lyapunov das séries temporais. Os comportamentos periódicos e quase-periódicos São indicados pela cor branca e os caóticos por cinza.

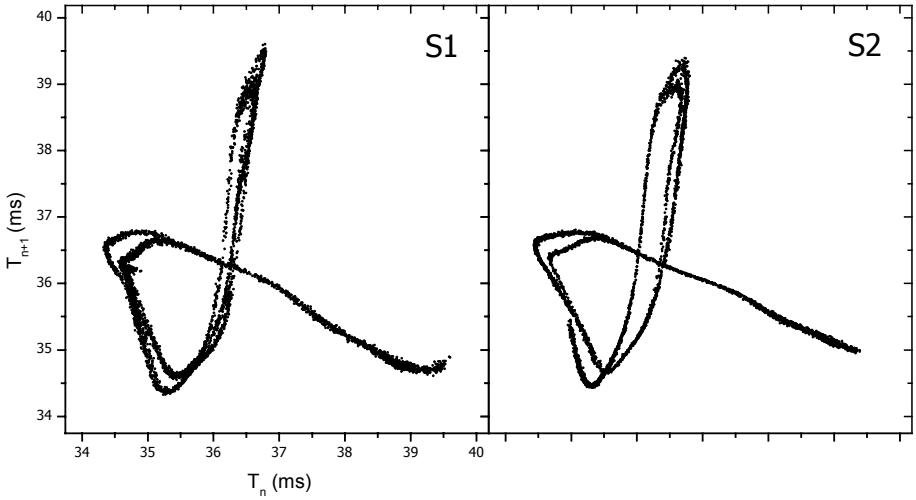


Figura 4-13: Reconstrução bidimensional de dois atratores em posições simétricas no diagrama do espaço de fases (S1 e S2) em que os expoentes de Lyapunov calculados são diferentes.

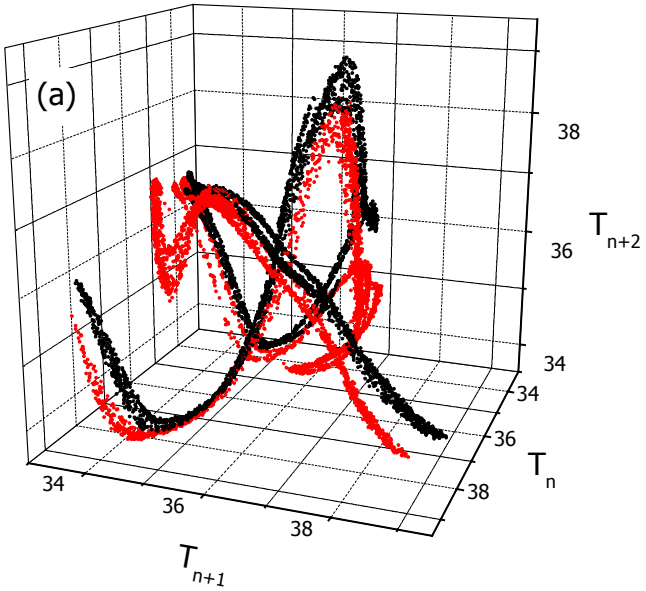
4.3.1. Crises em diferentes regiões do espaço de parâmetros.

Observamos na seção 3.2, ao aumentarmos a tensão aplicada ao bico, a existência de grande mudança na topologia dos atratores gerada pela ocorrência de duas crises interiores consecutivas, na qual o atrator intermediário mescla os comportamentos apresentados anteriormente à primeira crise com o posteriormente à segunda. Pudemos constatar a ocorrência de transições semelhantes em outras regiões do espaço de parâmetros, como mostrado na Figura 4-14. Os resultados foram obtidos no intervalo de tensão entre 325 e 400V mantendo a torneira fixa na posição 50.

Para outras regiões do espaço de parâmetros, esta transição, apesar de envolver comportamentos iniciais e finais semelhantes aos observados anteriormente, possui um atrator intermediário com características distintas do caso anterior. Apresentamos este resultado na Figura 4-15, onde a tensão foi variada no intervalo de 200 a 250V e a torneira foi mantida fixa na posição 65.

A ocorrência da primeira crise não leva mais a um aumento abrupto no tamanho do atrator, mas sim, a uma transferência da região visitada anteriormente para outra antes não visitada, caracterizando a crise como uma crise de fronteira. Já a segunda crise é uma crise interior na qual ocorre um aumento abrupto no tamanho do atrator, ao contrario do que observamos no outro caso onde a crise é marcada pela diminuição do atrator.

As duas transições analisadas possuem comportamentos iniciais e finais semelhantes. Observamos que os comportamentos intermediários e o tipo de crise pela qual a transição é feita, podem ser diferentes a depender da região do espaço de parâmetros.



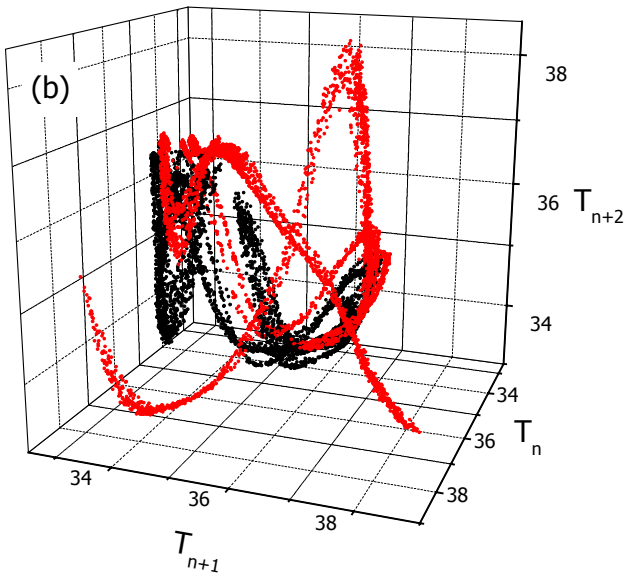


Figura 4-14: Sequência de duas crises interiores que levam a uma mudança profunda nas características topológicas dos atratores. Em (a) o atrator anterior à crise é representado em preto e o posterior em vermelho. Em (b) temos o anterior em vermelho e o posterior em preto.

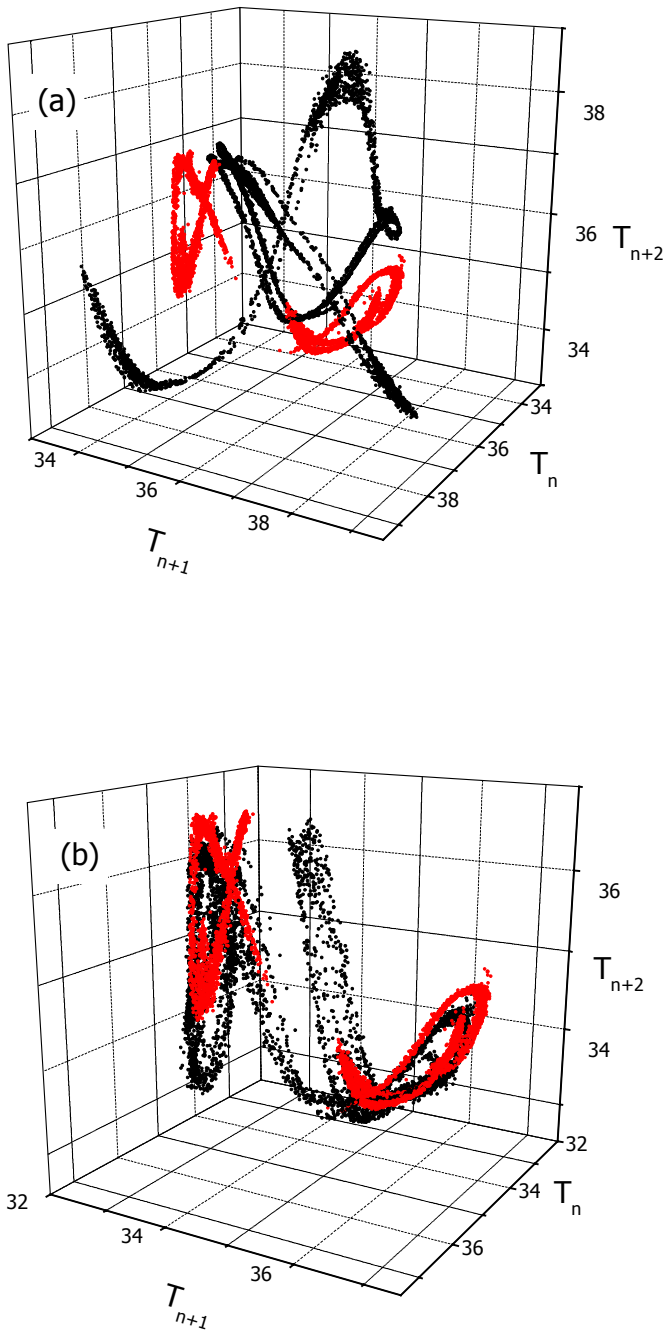


Figura 4-15: Transição gerada pela ocorrência de duas crises, sendo a primeira (a) de fronteira e a segunda (b) interior . Em outras regiões do espaço de parâmetros a mesma transição é observada através de duas crises interiores.

5. Conclusões.

Constatamos que a aplicação de alta tensão na região do bico da torneira pode ser utilizada como um parâmetro de controle tão eficiente quanto a abertura da torneira no Experimento da Torneira Gotejante.

Comparando os resultados obtidos com o aumento da tensão e da abertura da torneira observamos, através da reconstrução dos atratores no espaço de fases, rotas inicialmente equivalentes para o caos que passam a se diferenciar a partir de certos valores dos parâmetros de controle. Com a construção do diagrama do espaço de parâmetros, através dos expoentes de Lyapunov das séries temporais, foi possível uma determinação mais adequada das regiões em que os parâmetros atuam de forma semelhante ou diferente no experimento.

Verificamos que a aplicação de tensão altera a taxa de gotejamento sem que o fluxo de água na torneira seja alterado. A partir desta constatação presumimos que a presença de um potencial elétrico pode alterar a tensão superficial da água, sem alterar sua viscosidade. Este resultado corrobora alguns estudos estatísticos sobre propriedades interfaciais de líquidos dipolares na presença de campos elétricos.

Analisamos, em duas regiões do espaço de parâmetros, a transição gerada pela ocorrência de duas crises consecutivas, e observamos que, apesar de os comportamentos iniciais e finais serem semelhantes nos dois casos, em um dos casos a transição é feita com a ocorrência de duas crises interiores e no outro, de uma crise de fronteira seguida por outra interior. Concluímos que, o modo pelo qual algumas transições ocorrem, possui dependência com relação à região do espaço de parâmetros.

Com a observação da presença de histerese em uma grande região do diagrama de bifurcações, quando utilizamos como parâmetro de controle a abertura da torneira, estamos verificando a possibilidade de que este fenômeno seja

ocasionado pela coexistência de atratores. Acreditamos que, caso a coexistência seja comprovada, a utilização da tensão pode ser extremamente útil na definição das bacias de atração.

Devido à rápida resposta do sistema às alterações de tensão e a não perturbação mecânica do sistema quando ela é alterada, estamos estudando a viabilidade em se aplicar técnicas de controle de caos no experimento.

6. Referências.

- Ambravaneswaran B., Phillips S.D. e Basaran O. S., *Theoretical analysis of a dripping faucet*, Phys. Rev. Let. **85**, 5332 (2000).
- Alligood K.T., Sauer T.D. e Yorke J.A., *Chaos: an introduction to dynamical system*, Springer-Verlag, New York (1996).
- Baptista M. S., *Perturbando sistemas não–lineares, uma abordagem ao controle de caos*, Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências (1996).
- Ellner S., Nychka D.W., Galant A.R., *LENNS, a program to estimate the dominant Lyapunov exponent of noisy nonlinear systems from times series data*, Institute of Statistics Mimeo Series #2235 (BMA Series #39), Statistics Department, North Carolina State University, Raleigh NC 27695 (1992).
- Fornés J. A., Procópio J., Sartorelli J. C., *Evidence for multipolar charge distribution in falling water drops*, J. Appl. Phys. **80**, 6021 (1996).
- Gonçalves W., *A experiência da torneira gotejante*, Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências (1996).
- Grebogi C., Ott E., Yorke J.A., *Chaotic attractors in crisis*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1507 (1982).
- Grebogi C., Ott E., Romeiras F., Yorke J.A., *Critical exponents for crisis-induced intermittency*, Phys. Rev. A **36**, 5365 (1987).
- Hegger R., Kantz H., and Schreiber T., *Practical implementation of nonlinear time series methods: The TISEAN package*, CHAOS **9**, 413 (1999).

- Hénon, M., *A two dimensional map with a strange attractor*, Commun. Math. Phys. **50**, 69 (1976).
- Jackson, E.A., *Perspectives of non-linear dynamics*, Cambridge, New York (1989).
- Marion J. B., Thornton S. T., *Classical dynamics*, Harcourt Brace & Company, Orlando (1995).
- Mira C., Some historical aspects of non-linear dynamics: possible trends for the future, Int. J. Bif. Chaos **7**, 2145 (1997).
- Pinto R.D., Gonçalves W.M., Sartorelli J.C., *Hopf Bifurcation in a leaky-faucet experiment*, Phys. Rev. E **52**, 6896 (1995).
- Pinto R.D., Gonçalves W.M., Sartorelli J.C., Caldas I.L., Baptista M.S., *Interior crisis in a dripping faucet experiment*, Phys. Rev. E **58**, 4009 (1998).
- Pinto R.D., *Comportamento complexo na experiência da torneira gotejante*, Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Doutor em Ciências (1999).
- Pinto R.D. e Sartorelli J.C., Homoclinic tangency and chaotic attractor disappearance in a dripping faucet experiment, Phys. Rev. E **61**, 342 (2000)
- Reyes M.B., *Análise topológica da dinâmica de formação de gotas d'água*, Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências (2001).
- Rösler O., *Synergetics: a workshop*, Haken H., Springer Verlag, Berlin, 174-183 (1977).
- Sartorelli J.C., Gonçalves W.M. e Pinto R.D., *Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment*, Phys. Rev. E **49**, 3963 (1994).

- Sauer T., Reconstruction of dynamical systems from interspike intervals, Phys. Rev. Lett. **72**, 3811 (1994).
- Sauer T., *Reconstruction of integrate-and-fire dynamics*, Fields Inst. Comm. **11**, 63 (1997).
- Shaw R, The dripping faucet as a model chaotic system, Aerial Press: Santa Cruz (1984).
- Tufaile A., *Mapas combinados e o experimento da torneira gotejante*, Dissertação apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências (1996).
- Tufaile A., Pinto R.D., Gonçalves W.M., Sartorelli J.C., *Simulations in a dripping faucet experiment*, Phys. Lett. A **255**, 58 (1999).