Universidade de São Paulo
Instituto de Física

A Matriz S em Teoria Quântica de Campos em Espaços Curvos

F. A. Villaverde

Orientador:
Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Banca Examinadora:
Prof. Dr. João Carlos Alves Barata
Prof. Dr. Luiz Raul Weber Abramo
Prof. Dr. George Emanuel Avraam Matsas

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física
para a obtenção do título de Mestre em Ciências

São Paulo, 13 de abril de 2012

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Villaverde Custodio, Felipe Augusto

A matriz S em teoria quântica de campos em espaços curvos. – São Paulo, 2012

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física, Departamento de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Física teórica; 2. Física Matemática; 3. Teoria Quântica de Campo; 4. Relatividade (Física); 5. Teoria Quântica Relativística.

USP/IF/SBI-019/2012

Resumo

O objeto de estudo desta dissertação é o efeito de criação de partículas pela curvatura sob o escopo de uma teoria de espalhamento, discutindo quando que a interpretação a partir de uma matriz S é tangível e obtendo sua expressão nesses casos. O capítulo de introdução aborda superficialmente conceitos de relatividade geral e de teoria quântica de campos em espaços planos e curvos, necessários para a construção da matriz S. O conteúdo deste capítulo segue as apresentações feitas em [1, 2, 3] em geral, tendo como guia [4, 5, 6] no que se trata especificamente de relatividade geral, e [7] no que se trata da estrutura espinorial. A construção da matriz S se dá no capítulo 2, tendo como guia o trabalho de Wald [8]. O capítulo 3 apresenta exemplos que permitem a contextualização da criação de partículas em casos específicos de espaços-tempos em expansão.

Este estudo nos permite verificar que as condições que precisam ser satisfeitas em um espaço-tempo globalmente hiperbólico e assintoticamente estacionário para que a formulação da matriz S possa ser feita são que as teorias no passado e futuro distantes devem ser unitariamente equivalentes, que a relação entre as regiões se dá através de transformações de Bogolyubov dadas por operadores limitados definidos em toda a parte e que tais operadores satisfaçam a condição de Hilbert-Schmidt. Nestes casos obtemos uma expressão para a matriz S que descreve a criação de partículas pela curvatura do espaço-tempo para o campo de Klein-Gordon e de Dirac, além de outras relações úteis, como número médio de partículas criadas e probabilidade de se encontrar partículas em determinado modo, o que permite uma analogia com a radiação de corpo negro, passo fundamental para se entender fenômenos de grande interesse na física, como a radiação de Hawking [9] e a criação de partículas no período inflacionário.

Abtract

This master's thesis deals with the effect of particle creation by the curvature of space-time according to the point of view of scattering theory, discussing when such interpretation is possible by means of an S-matrix and obtaining its expression in those cases. The first chapter treats, superficially, some concepts of general relativity and quantum field theory in plane and curved space-times that are imperative to understand the construction of the S-matrix. The subject of this chapter is covered in [1, 2, 3], and follows closely [4, 5, 6], when treats concepts specifically from general relativity, and [7], when talking about the spinor structure of space-time. The construction of the S-matrix is made in the second chapter, along the lines of the work of Wald [8]. The third chapter presents some examples that bring some light on the creation of particles in specific cases of expanding space-times.

This study let us verify that an S-matrix formulation is tenable, on globally hyperbolic asymptotic stationary curved space-times, if both quantum theories in the distant past and distant future are unitary equivalent, the relation of both regions is made by Bogolyubov transformations by means of everywhere defined bounded operators and that those operators satisfy the Hilbert-Schmidt condition. In those cases we derive the expression of the S-matrix for the Klein-Gordon and Dirac fields. Also we obtain the number of particles created and the probability of find particles in a particular mode, with let one make an analogy with the black body radiation, which is a fundamental step in the direction of understanding interesting phenomena in quantum field theory in curved space-times, like the Hawking radiation [9] and particle creation in the early universe.

Índice

Prefácio **9**

Agradecimentos **11**

1 Introdução **13**

1.1 Hiperbolicidade Global, Orientação Temporal e Outras Definições 14

1.2 Construção de uma Teoria Quântica de Campos em Espaços de Minkowski 25

1.3 O Produto Energético 31

1.4 Construção de uma Teoria Quântica de Campo em Espaços Estacionários 34

1.5 Estrutura Espinorial do Espaço Tempo 43

2 Construção da Matriz S **57**

2.1 Construção da Teoria e Verificação de Equivalência Unitária para o Campo Escalar 57

2.2 Obtenção da Matriz S para o Campo Escalar 59

2.3 Obtenção da Matriz S para Campos de Dirac 70

2.4 Propriedades e Consequências das Transformações de Bogolyubov 78

2.4.1 Spin e Estatística pela Dinâmica 80

2.4.2 Distribuição de Probabilidades das Partículas Criadas 82

3 Exemplos e Outras Aplicações **85**

3.1 Exemplo de universo 2-dimensional em expansão 85

3.2 Exemplo 4-dimensional sem massa 93

3.3 Outras aplicações 97

Conclusão **99**

Glossário **101**

Referências Bibliográficas **109**

Prefácio

Dentre as interações conhecidas, a força gravitacional é talvez a que há mais tempo é estudada. Seus efeitos sempre foram observados, e não é exagero dizer que ela tem papel fundamental no desenvolvimento da física, sendo uma das pedras fundamentais da mecânica clássica, que se propõem a explicar tanto a força gravitacional, como a natureza das entidades (massas) com as quais essa força interage. Com a relatividade geral, o modo como se encarava essa força mudou, e com o surgimento da mecânica quântica, e posteriormente da teoria quântica de campos, as entidades com as quais essa força interage também passaram a ser vistas de maneira diferente. Porém, uma interpretação quântica da gravidade que leve a uma teoria única, que abranja essas duas formas de ver o mundo, ainda não foi alcançada, e é um dos objetos de estudo centrais da física teórica hoje. Entender como essa interação se dá, nos limites onde a mecânica clássica não fornece resultados precisos, é de fundamental importância para se explicar problemas em cosmologia, principalmente relacionados à fase inflacionária, efeitos na vizinhança de buracos negros, ou até problemas ligados ao período de expansão em que se acredita que o universo esteja.

Enquanto tal teoria não é apresentada, resta-nos trabalhar com as que temos. Deste modo, nos deparamos com o problema de unir de forma consistente o modo como um campo gravitacional, descrito por uma métrica clássica, interage com campos tratados quanticamente. Mais do que apenas o choque entre duas interpretações de mundo diferentes, as duas teorias se apoiam em ideias matemáticas distintas. Historicamente, a relatividade geral se associa à geometria diferencial, que nos induz a interpretar um campo clássico como uma função de variáveis da variedade que representa o espaço-tempo tratado, mas a teoria quântica de campos faz uso da análise funcional, onde interpretamos um campo como um operador agindo em um espaço de funções, dependendo do tempo como um parâmetro. Muito esforço foi feito nessa direção nos últimos 50 anos para unir essas duas "culturas" distintas, o que permitiu um esquema consistente para descrever campos quânticos se propagando em espaços-tempos curvos, embora se suponha que isto seja uma boa aproximação, apenas para energias abaixo da escala de Planck, de uma possível teoria mais profunda (ainda a ser encontrada) em que o espaço-tempo seja quantizado.

Historicamente, o entendimento mais profundo da relação entre gravidade e teoria quântica de campos foi motivado pelo estudo de criação de partículas no período inflacionário. Embora existissem investigações mais antigas sobre o efeito gravitacional em campos quânticos (Schrödinger tratou do assunto em 1932 por exemplo), o estudo focado na criação de partículas pela curvatura se iniciou com os trabalhos de Parker no final da década de 1960 no contexto de universos em expansão (vide [10]), seguido por Zel'dovich e outros. Apesar de suas limitações, esse modelo semi-clássico já mostra uma série de efeitos intrigantes acerca da relação entre teorias quânticas de campos e relatividade geral, talvez o mais fascinante de todos sendo a radiação de Hawking [9], onde a gravidade de um buraco negro é capaz de gerar partículas que se propagam para longe do mesmo, e com um espectro correspondente ao de um corpo negro (abrindo as portas para uma nova área de estudo, a termodinâmica de buracos negros). O trabalho de Hawking trouxe a atenção de diversos físicos para esta questão na segunda metade da década de 1970, dentre os avanços feitos nesse tempo, surgem os trabalhos de Ashekar e Magnon [11], e Kay [12], sobre teorias quânticas de campos em espaços-tempos estacionários, e os de Wald [8], sobre a existência da matriz S em teoria quântica de campos

em espaços curvos.

O objeto de estudo desta dissertação é o efeito de criação de partículas pela curvatura[1] sob o escopo de uma teoria de espalhamento, discutindo quando que a interpretação a partir de uma matriz S é tangível e obtendo sua expressão nesses casos. O capítulo de introdução aborda superficialmente conceitos de relatividade geral e de teoria quântica de campos em espaços planos e curvos, necessários para a construção da matriz S. O conteúdo deste capítulo segue as apresentações feitas em [1, 2, 3] em geral, tendo como guia [4, 5, 6] no que se trata especificamente de relatividade geral, e [7] no que se trata da estrutura espinorial. A construção da matriz S se dá no capítulo 2, tendo como guia o já citado trabalho de Wald [8]. O capítulo 3 apresenta exemplos que permitem a contextualização da criação de partículas em casos específicos de espaços-tempos em expansão.

[1]Embora nem sempre haja a criação de partículas para uma determinada curvatura, como por exemplo para a curvatura de um espaço-tempo estático com uma "estrela eterna" (embora o espaço seja curvo, a métrica é a mesma durante todo o tempo), diremos ao longo da dissertação que a matriz S nos dá a criação de partículas pela curvatura, quando na verdade, ela o faz apenas quando há o processo de criação. De qualquer maneira, quando as condições necessárias para sua existência forem satisfeitas, a matriz S pode existir de forma "trivial", ou seja, fazendo o estado final ser igual o inicial, nos casos em que não há criação de partículas.

Agradecimentos

A muitas pessoas eu devo minha gratidão pelas contribuições a essa dissertação. Primeiramente gostaria de agradecer ao meu orientador, o Professor João Barata, pelo voto de confiança em mim (o que me deu confiança para encarar o projeto) e pela paciência com meu ritmo e limitações, além das horas dedicadas às conversas, leitura, correções e discussões consequentes deste mestrado, sem contar os diversos cursos por ele ministrados que, por sua excelência, são os grandes responsáveis pelo meu interesse em física matemática.

Além do meu orientador, outras pessoas contribuíram, nos bastidores, a essa dissertação. Devo grandes agradecimentos a Bruno Lima de Souza, Daniel Velasques Paulino, Nelson Yokomizo e Yul Otani que sempre estiveram disponíveis e dispostos para conversas sobre temas diretamente relacionados a esse trabalho e muitas vezes abriram meus olhos para erros ou confusões que eu estava cometendo. Não são menos importantes as contribuições de Fabrício do Carmo e Cedrick Mello, que me aturaram respectivamente como companheiro e vizinho de sala e que ajudaram muito em momentos de loucura no quadro branco, além de servirem de "cobaias" para explicações e ensaios de apresentações de seminários. Seminários estes que foram apresentados nas reuniões de grupo de alunos do Prof. Barata, aos quais eu também sou grato pela troca de conhecimento proveniente desses encontros. Outras contribuições, porém mais de caráter filosófico, foram dadas por Juliano Neves, Roberto Parra e Walney Fernandes, cujo pontos de vistas (muitas vezes distintos e contraditórios) mudaram minha forma de encarar o mestrado. Não posso deixar de agradecer também a Fabíola Xavier e a Maria Fernanda Resende pelas trocas de experiências, estudos e anotações.

Porém, nada disso seria possível sem a ajuda de minha família. Agradeço profundamente a Ana Carla Borges pela paciência, sensibilidade e pelo carinho que tornaram essa jornada mais agradável, a minha mãe Maria Francisca que aguentou muito por minha causa, e que, nos momentos difíceis, me deu forças, motivação e o consolo que só uma mãe sabe dar, ao meu irmão e amigo, Victor José, que segurou as pontas e me substituiu em diversas obrigações familiares, e sobretudo, ao meu pai, Manolo Villaverde, que, por seu sacrifício imensurável, tornou possível que eu tenha chegado onde cheguei, sempre priorizando meu estudo e formação acima de tudo, e é a ele que eu dedico este trabalho.

Capítulo 1

Introdução

Este capítulo tem como objetivo introduzir de forma simples os conceitos necessários para a obtenção da matriz S para teoria quântica de campos em espaços curvos que permitam sua formulação (com características a serem apresentadas). Iniciamos pela introdução de conceitos em relatividade geral importantes, com enfoque na estrutura causal de uma variedade e na hiperbolicidade global da mesma, o que permite que a dinâmica dada pelas equações de campo seja formulada a partir de condições iniciais. Sem essa propriedade, nada nos garante que as equações de campos (como a de Klein-Gordon) tenham solução e que dadas as condições iniciais em uma superfície tipo-tempo, essa solução seja única. A presença de uma singularidade, por exemplo, já faria com que a unicidade das soluções não valesse, visto que as equações de campo não levam em consideração o que poderia emergir da singularidade.

Embora existam formulações de teorias quânticas de campos em espaços-tempos que não admitem dependência única das soluções em relação às condições iniciais (como os trabalhos de Kay em espaços-tempos que não são globalmente hiperbólicos [13]), vamos nos restringir a espaços-tempos "bem comportados", onde a dinâmica das equações de campos pode ser governada unicamente por condições iniciais e assim podemos construir estruturas básicas semelhantes às que temos em espaços de Minkowski.

Em seguida, partimos para a construção de uma teoria quântica de campos escalares livres em espaços planos. Geralmente, teorias quânticas de campos livres são construídas em espaços de Minkowski, onde tomamos como base das soluções para o operador de campo uma expansão de ondas planas e o campo assume a forma de um sistema de infinitos osciladores harmônicos desacoplados independentes do tempo. Para tanto, formamos um espaço de Hilbert com soluções de frequências positivas das equações que regem a dinâmica desse sistema, que chamaremos de $\mathscr{H}$. Em espaços de Minkowski essa escolha é justificada por ser a escolha natural que surge da invariância de Poincaré. Deste modo, a simetria de Poincaré é usada para se escolher como representaremos o campo, e consequentemente para a escolha do estado correspondente ao vácuo e, inclusive, à noção de partícula. Porém, em espaços-tempos curvos, em geral, não temos invariância de Poincaré, e portanto, não temos como escolher de antemão uma representação especial para $\mathscr{H}$ (sendo assim, não temos uma noção única e preferencial de vácuo e de partículas), e como o teorema de Stone-von Neumann não vale para sistemas com infinitos graus de liberdade, diferentes escolhas de $\mathscr{H}$ podem levar a teorias que não sejam unitariamente equivalentes. Sendo assim, precisamos de uma abordagem que não seja dependente de uma base de ondas planas, de modo a identificar quais são os fatores essenciais da teoria (como a escolha de $\mathscr{H}$) daqueles que são consequência da simetria por Poincaré, e assim generalizarmos nossa teoria para espaços-tempos curvos. Na segunda seção então, tratamos de como se dá essa construção de uma teoria quântica de campos para espaços-tempos de Minkowski, e como essa nova abordagem pode ser feita.

Para generalizar essas ideias para espaços-tempos curvos, apresentamos na seção 1.3 uma proposta para

se escolher o espaço de Hilbert que corresponderá ao espaços das soluções de "frequência positiva", que faz uso de um produto chamado de "produto energético" na construção de $\mathscr{H}$, e com isso tratamos da generalização da construção para o caso de espaços tempo estacionários, onde a presença de simetrias e o uso do "produto energético" nos fornece uma escolha preferencial para o espaço de Hilbert que representa as soluções de frequência positiva.

Por fim, tratamos de mostrar como se dá a construção de uma estrutura espinorial, com o objetivo de tratar a construção de uma matriz S para campos de Dirac no próximo capítulo.

É importante ressaltar que não é nossa pretensão explicar esses assuntos (principalmente o da seção 1.5) em detalhe, visto que este capítulo é apenas uma introdução aos temas que não poderiam deixar de ser falados para que a discussão acerca da matriz S possa ser feita no próximo capítulo, e explicações mais rigorosas se estenderiam demasiadamente por algo fora do escopo desta dissertação. Os textos das seções 1.2, 1.3 e 1.4 seguem os de [1, 3, 14, 2], que servem como referências para mais informações sobre o assunto. Estas referências são para leitores já habituados com teorias quânticas de campos, embora tenham capítulos com o intuito de fazer revisões sobre isso. Para o leitor que procura um texto mais introdutório sobre teoria quântica de campos em espaços curvos, veja [15]. A seção 1.5 se baseia fortemente nos textos de [7, 16], servindo esses como referência para o leitor que tenha interesse em conhecer o assunto a fundo.

1.1 Hiperbolicidade Global, Orientação Temporal e Outras Definições

Neste estudo sobre efeitos gravitacionais em campos quânticos, trataremos o campo gravitacional classicamente como sendo uma curvatura no espaço onde construiremos nossa teoria quântica de campos. Sendo assim a interação será análoga à que temos quando tratamos uma partícula carregada quanticamente, interagindo com um campo eletromagnético clássico (como um elétron interagindo com o campo elétrico gerado por um núcleo). Neste tratamento, não consideraremos efeitos de "back-reaction", ou seja, não levaremos em consideração o efeito que o campo quântico (e as partículas que venham a ser criadas) têm sobre a curvatura do espaço tempo[1].Vamos introduzir alguns conceitos necessários para este tratamento.

Para se estudar a estrutura de um espaço-tempo, é necessário o uso da noção de variedade. A grosso modo, uma variedade é uma generalização da noção de superfície para n dimensões que, localmente, se assemelha ao $\mathbb{R}^n$, ou seja, é feita de "pedaços" que se parecem com abertos em $\mathbb{R}^n$, e esses "pedaços" se "colam" suavemente. Formalmente:

Definição 1 *Uma variedade $\mathscr{M}$ n-dimensional C^∞ é um conjunto, junto com uma coleção de subconjuntos $\{O_\alpha\}$ tal que:*

1. *$\forall p \in \mathscr{M}$, p pertence a pelo menos um O_α, sendo assim $\{O_\alpha\}$ é um recobrimento de $\mathscr{M}$.*
2. *$\forall \alpha$, $\exists f_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, com f_α bijetora, onde U_α é um aberto em $\mathbb{R}^n$.*
3. *se $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, então $\exists f_\beta \circ f_\alpha^{-1} : f_\alpha [O_\alpha \cap O_\beta] \to f_\beta [O_\alpha \cap O_\beta]$ tal que $f_\alpha [O_\alpha \cap O_\beta]$ e $f_\beta [O_\alpha \cap O_\beta]$ sejam abertos em $\mathbb{R}^n$ e que $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$ seja C^∞. Os mapas $\{f_\alpha\}$ são chamados de cartas, ou coordenadas.*
4. *$\{O_\alpha\}$ e $\{f_\alpha\}$ são atlas maximais[2].*

[1]Em outras palavras, tomaremos como verdade apenas a primeira parte da famosa frase proferida por John Wheeler: "O espaço tempo diz como a matéria deve ser mover; a matéria diz como o espaço tempo deve curvar".

[2]Para a definição de cartas, atlas e outros termos presentes ao longo do texto, consulte o glossário no final deste.

Definimos uma topologia em $\mathscr{M}$ ao exigir que $\{f_\alpha\}$ sejam homeomorfismos. Sendo assim, $f_\alpha^{-1}[U_\alpha]$ é um aberto em $\mathscr{M}$.

Estamos interessados em variedades que sejam Lorentzianas, para tanto, vamos definir o produto de Lorentz.

Definição 2 *Seja $\mathscr{V}$ um espaço vetorial real n-dimensional. Definimos um produto escalar de Lorentz em $\mathscr{V}$ como sendo uma forma bilinear simétrica não degenerada $\langle , \rangle$ de índice 1.Com uso desse produto escalar, definimos que um vetor v é tipo-tempo se $\langle v, v\rangle > 0$, tipo-espaço se $\langle v, v\rangle < 0$ e tipo-luz se $\langle v, v\rangle = 0$ com $v \neq 0$ (considerando que nossa métrica tem assinatura (+,-,...,-)).*

O conjunto de vetores *tipo-tempo* em um ponto O é conhecido como "cone de luz". tal conjunto é dividido em duas regiões conectadas apenas no ponto 0. O caso mais simples de espaço Lorentziano é espaço de Minkowski, obtido a partir do $\mathbb{R}^n$ munido do produto de Minkowski $\langle x, y\rangle = x_0y_0 - x_1y_1 - x_2y_2 - ... - x_{n-1}y_{n-1}$ (cabe dizer que qualquer espaço vetorial n-dimensional com um produto escalar de Lorentz é isométrico ao espaço de Minkowski). Para um espaço de Minkowski, o "cone de luz" pode ser representado como se vê na figura 1.1. Escolhemos uma orientação temporal em $\mathscr{V}$ ao definir uma dessas regiões como sendo a de vetores orientados ao "futuro" e a outra como sendo a de vetores orientados ao "passado".

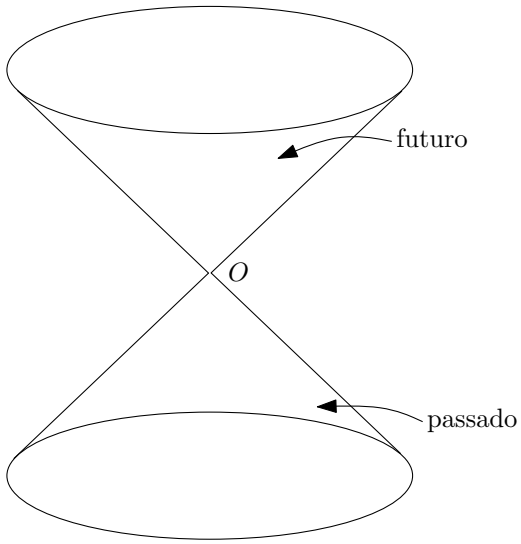

Figura 1.1: "Cone de luz" para um espaço de Minkowski e um exemplo de escolha que define uma orientação temporal.

Quando trabalhamos com geometrias curvas a estrutura vetorial, em geral, é perdida globalmente, porém podemos recuperá-la localmente com a noção de "deslocamentos infinitesimais" ao redor de um ponto. Para tanto, temos que definir a noção de espaço tangente a um ponto p em $\mathscr{M}$ (tal espaço será denominado de $T_p\mathscr{M}$). Intuitivamente, a noção de espaço tangente é simples. Tome uma superfície S diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e para cada ponto p nessa superfície, pegue um plano T_pS que, na vizinhança V_p de p, interseccione a superfície em p ($V_p \cap S \cap T_pS = p$ conforme figura 1.2). Para uma variedade $\mathscr{M}$ de dimensão n, podemos usar a mesma ideia se mergulharmos ela em $\mathbb{R}^{n+1}$, porém isso nem sempre é possível. Para tanto se faz necessário definir o espaço tangente de uma maneira que dependa apenas da estrutura de $\mathscr{M}$. O plano tangente a um ponto p será o espaço que contém todos os vetores tangentes a $\mathscr{M}$ em p. Vamos definir esses vetores como derivadas direcionais.

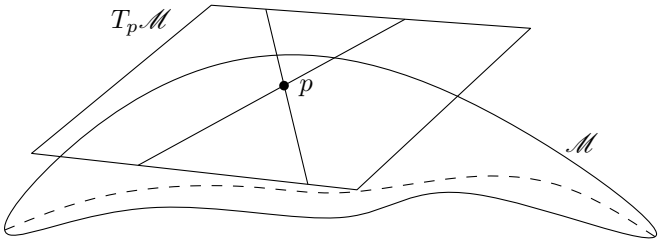

Figura 1.2: Representação do espaço tangente a uma variedade $\mathscr{M}$ como sendo a superfície que tangencia tal variedade no ponto p. Note o "Cone de luz" em $T_p\mathscr{M}$.

Definição 3 *Seja $\mathscr{F}$ a coleção de funções C^∞ de $\mathscr{M}$ em $\mathbb{R}$. Definimos um vetor v_p tangente a $p \in \mathscr{M}$ como sendo o mapa $v_p : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ tal que v_p seja linear e obedeça a regra de Leibniz:*

$\forall f, g \in \mathscr{F}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ temos:

1. $v_p(af + bg) = av_p(f) + bv_p(g)$.
2. $v_p(fg) = f(p)\, v_p(g) = g(p)\, v_p(f)$.

Chamamos a coleção de todos os vetores v_p tangentes em p de $T_p\mathscr{M}$.

Impondo a lei de adição $(v_p + u_p)(f) = v_p(f) + u_p(f)$ e a multiplicação por um escalar $a \in \mathbb{R}$, $(av_p)(f) = av_p(f)$, onde v_p,$u_p \in T_p\mathscr{M}$, fazemos com que $T_p\mathscr{M}$ seja um espaço vetorial. Pode-se provar também que se a dimensão de $\mathscr{M}$ é n, a de $T_p\mathscr{M}$ também é n.

Frequentemente se utiliza uma base em $T_p\mathscr{M}$ chamada de base de coordenadas. Tal base é construída da seguinte maneira: Seja f_α uma carta e $p \in O_\alpha$. Para $g \in \mathscr{F}$, temos que $g \circ f_\alpha^{-1} : U_\alpha \to \mathbb{R}$ é C^∞. Definimos uma base em $T_p\mathscr{M}$ como sendo o conjunto $\{\partial/\partial x^\mu\}$ formado por

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}(g) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(g \circ f_\alpha^{-1}\right)\Big|_{f_\alpha(p)}, \tag{1.1}$$

onde $\mu = 1, ..., n$. Tal base é frequentemente denominada apenas por ∂x_μ.

Dito isso, definimos uma variedade Lorentziana como sendo um par $(\mathscr{M}, g)$ onde $\mathscr{M}$ é uma variedade n dimensional suave e g é uma métrica Lorentziana, ou seja, g associa a cada ponto $p \in \mathscr{M}$ um produto escalar Lorentziano em $T_p\mathscr{M}$.

Definição 4 *Dizemos que uma variedade Lorentziana $\mathscr{M}$ é uma variedade orientável temporalmente quando uma escolha de "futuro" e "passado" pode ser feita em $T_p\mathscr{M}$ de maneira contínua quando variamos p em $\mathscr{M}$[3], ou seja, para dois pontos quaisquer p e q em $\mathscr{M}$, a escolha de "futuro" e passado para p coincide com a de q quando aproximamos p de q.*

Diversos exemplos de variedades Lorentzianas e de casos em que temos ou não orientação temporal podem ser encontrados em [4, 6]. No que segue, estaremos considerando todos os espaços-tempos como sendo orientáveis temporalmente.

Uma curva diferenciável $\gamma(t)$ em $\mathscr{M}$ é um mapa C^1 de $\mathbb{R}$ em $\mathscr{M}$. Podemos associar em cada ponto $p \in \gamma(t)$ um vetor $T \in T_p\mathscr{M}$ tangente à curva em p onde T é dado por $T(f) = \frac{d(f\circ\gamma(t))}{dt}\Big|_p$ para $f \in \mathscr{F}$.

[3] É importante lembrar que os "cones de luz" são subconjuntos de $T_p\mathscr{M}$ e não de $\mathscr{M}$ (vide figura 1.2).

Para o que segue, será necessária a definição de alguns conjuntos em $\mathscr{M}$. Uma curva $\gamma(t)$ é dita como sendo tipo tempo e orientada ao futuro se, para cada $p \in \gamma(t)$, o vetor tangente a essa curva (orientado na direção em que t cresce) seja tipo tempo e pertença ao futuro do cone de luz em $T_p\mathscr{M}$. Analogamente definimos as curvas tipo tempo orientadas ao passado e as curvas tipo luz orientadas ao futuro e ao passado. Fisicamente, essas curvas representam a propagação de informação no espaço tempo. Qualquer curva tipo tempo ou tipo luz é chamada de curva causal (orientada ao futuro ou ao passado)[4]. Se 2 pontos p,$q \in \mathscr{M}$ e $p \neq q$ estão contidos em uma mesma curva causal $\gamma(t)$ de modo que $p = \gamma(t')$ e $q = \gamma(t'')$ para $t'' > t'$, cairemos sempre em (pelo menos[5]) um destes casos:

1. $\gamma(t)$ é tipo tempo e orientada ao futuro.
2. $\gamma(t)$ é tipo tempo e orientada ao passado.
3. $\gamma(t)$ é causal e orientada ao futuro.
4. $\gamma(t)$ é causal e orientada ao passado.

Quando temos o caso 1, dizemos que q pertence ao futuro cronológico de p ($I^+(p)$), onde o futuro cronológico $I^+(p)$ consiste em todos os pontos q que estejam contidos em uma curva tipo tempo que recaia no caso 1. Em outras palavras, o caso 1 implica que $q \in I^+(p)$. Analogamente definimos o passado cronológico de p por $I^-(p)$, que consiste em todos os pontos q contidos em curvas que estejam no caso 2 (o que implica que $q \in I^-(p)$). Definimos o futuro causal de p ($J^+(p)$) como sendo todos os pontos q que estejam em uma curva para a qual o caso 3 é satisfeito, o que implica que $q \in J^+(p)$. Analogamente definimos o passado causal de p como sendo o conjunto de todos os pontos para os quais existe uma curva que recaia no caso 4 (o que implica que $q \in J^-(p)$). Formalmente definimos o futuro cronológico da seguinte maneira: $I^+(p) = \{q \in \mathscr{M} \mid \exists\gamma(t) \supset p, q, \text{ e 1 é satisfeito}\}$. Analogamente definimos os outros conjuntos supra citados. Cabe dizer que quando o caso 3 (4) é satisfeito, o caso 1 (2) também o é, de modo que $I^\pm(p) \subset J^\pm(p)$. Tomando como exemplo o espaço de Minkowski, tais conjuntos podem ser representados como na figura 1.3.

A interpretação física que se dá para o futuro causal de um ponto p é de que $I^+(p)$ é o conjunto de todos os pontos de $\mathscr{M}$ que podem receber algum tipo de informação proveniente de p. Note que esses pontos podem receber informações de outras regiões de $\mathscr{M}$ além de p também.

Um ponto p é dito ser um ponto final ao futuro de uma curva causal γ em $\mathscr{M}$ se existe uma vizinhança $\mathscr{V}$ de p para a qual $\exists t | \forall t' \geq t$, $\gamma(t') \in \mathscr{V}$. Analogamente definimos um ponto final ao passado de uma curva causal ao trocarmos t' por $t'' \leq t$. Uma curva γ diferenciável em $\mathscr{M}$ é dita de p a q quando esses pontos são respectivamente o ponto final ao passado e ao futuro da curva. Uma curva γ diferenciável em $\mathscr{M}$ é dita inextensível se ela não possuir pontos finais nem ao passado nem ao futuro.

Tomemos um conjunto de pontos quaisquer Σ. Se desejarmos obter o conjunto de pontos para os quais, qualquer curva tipo tempo ao passado que comece em um deles tenha que obrigatoriamente ter passado por um dos pontos em Σ, então temos que definir o conceito de domínio de dependência de Σ. Em outras palavras (seguindo [17]):

Definição 5 *O domínio de dependência ao futuro de Σ ($D^+(\Sigma)$) é a coleção de todos os pontos $p \in \mathscr{M}$ tais que todas as curvas $\gamma(t)$ tipo tempo[6] direcionadas ao passado, tal que $\gamma(t') = p$ e que não tenham um ponto final, interseccionam pelo menos um ponto de Σ em $t'' > t'$. Analogamente se define o domínio de*

[4] Outra maneira de se definir (e entender) curvas causais é como sendo curvas que não são tipo espaço

[5] Visto que curvas tipo tempo também são causais.

[6] Alguns autores utilizam curvas causais (ou seja, incluem as tipo luz) na definição. A única mudança em se definir dessa maneira é a eliminação de alguns pontos da fronteira de $D(\Sigma)$

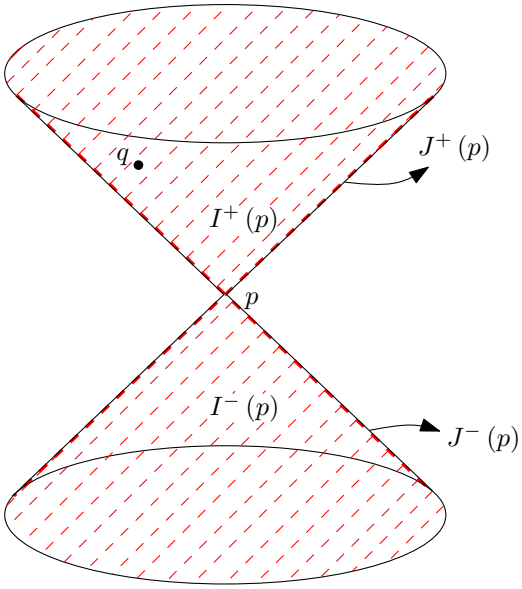

Figura 1.3: Futuro e passado causal e cronológico em um espaço de Minkowski. Note que $I^{\pm}$ é apenas o interior do "cone", e $J^{\pm}$ inclui a borda (é a parte pintada mais a borda). Neste exemplo, $q \in I^+(p)$.

dependência ao passado, $D^-(\Sigma)$, ao se definir γ como sendo direcionada ao futuro. Definimos a união de ambos os conjuntos como sendo o domínio de dependência de Σ, $D(\Sigma) = D^+(\Sigma) \cup D^-(\Sigma)$ (vide figura 1.4).

Pela definição, é fácil concluir que, se Σ não for uma hiper-superfície, então $D(\Sigma) = \Sigma$ (se Σ for um ponto, ou um objeto de dimensão $n-2$, então para qualquer ponto q fora de Σ temos curvas tipo tempo inextensíveis tanto ao futuro, quando ao passado que não passam por Σ). Diversos exemplos de domínios de dependência podem ser encontrados em [17, 5], assim como diversas propriedades dos mesmos.

Uma variedade orientável temporalmente é dita causal se não existirem curvas causais fechadas. A existência de tais curvas levaria a diversos paradoxos, permitindo por exemplo que um sinal volte ao seu próprio passado infinitas vezes ao longo de uma curva causal. Embora existam diversos estudos em espaços tempo que permitem tais curvas, nos restringiremos aos casos em que isso não ocorre. Mais do que isso, exigiremos uma condição um pouco mais restritiva, a saber, que a variedade seja "fortemente causal". Por fortemente causal, se entende que não existem curvas causais que possam chegar arbitrariamente perto de um ponto ao seu passado, ou seja, não existem curvas "quase fechadas". Formalmente definimos assim:

Definição 6 *Uma variedade $\mathscr{M}$ é dita fortemente causal quando, dado um ponto $p \in \mathscr{M}$ existe uma vizinhança O_p de p pela qual todas as curvas causais que interseccionam O_p o fazem apenas uma única vez.*

Um exemplo de variedade que não contem curvas causais fechadas, mas não é fortemente causal ([6]), pode ser visto na figura 1.5. Nesta figura, uma curva causal pode passar tão perto quanto eu queira de p tanto pela sua esquerda quanto pela sua direita, sendo assim, para qualquer vizinhança O_p, sempre se encontra uma curva causal que a intersecciona duas vezes.

Em poder destas definições, podemos tratar agora do assunto da hiperbolicidade global de $\mathscr{M}$. O conceito de hiperbolicidade global foi introduzido pela primeira vez por Leray em 1952 no tratamento de equações diferenciais hiperbólicas em variedades.

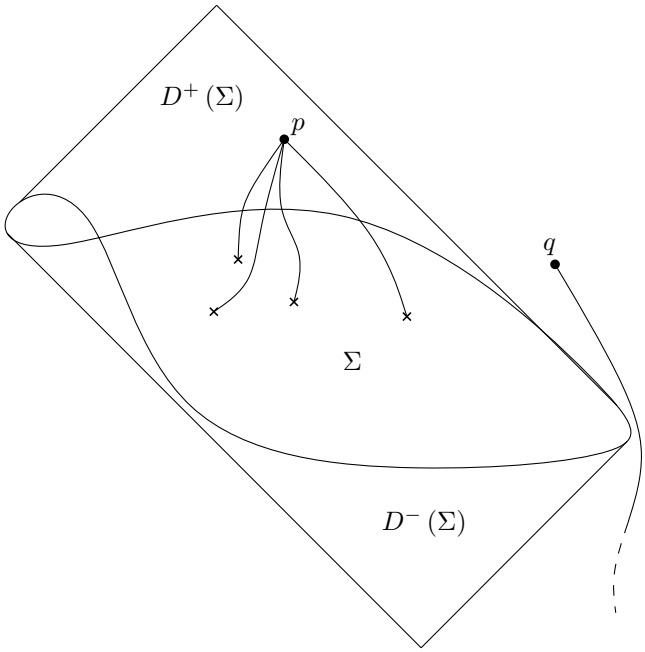

Figura 1.4: Domínio de dependência ao futuro e ao passado de um conjunto Σ. Note que as curvas tipo tempo orientadas ao passado e iniciadas em $p \in D^+(\Sigma)$ interseccionam Σ em algum momento, já pelo ponto $q \notin D^+(\Sigma)$ passam curvas tipo tempo orientadas ao passado que não interseccionam Σ.

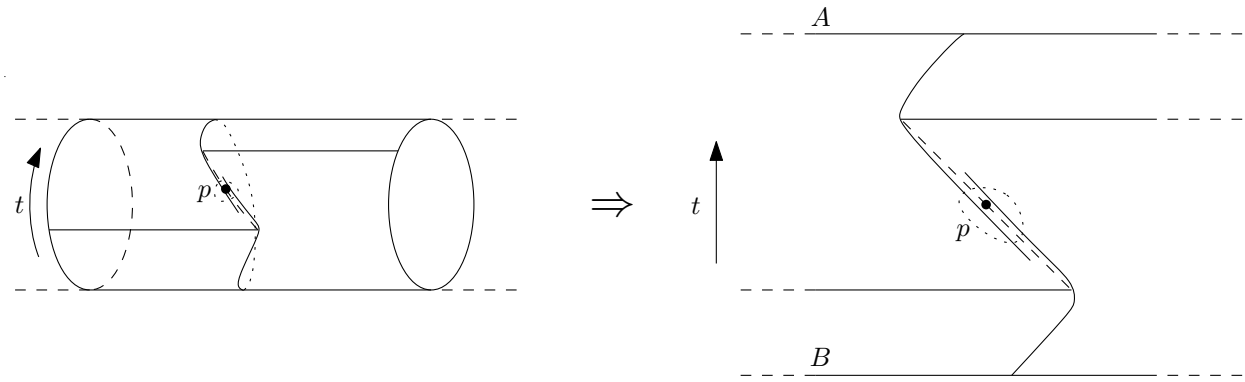

Figura 1.5: Variedade que não é fortemente causal. Tal variedade é um cilindro com duas linhas horizontais removidas de modo que os extremos das linhas seja unido por uma curva tipo luz (linha pontilhada). A figura da esquerda é uma representação do cilindro pela identificação de A com B.

Para darmos a definição original de hiperbolicidade global, precisamos definir o conjunto $C(p,q)$ de todas as curvas causais γ que ligam p a q (vide figura 1.6) e precisamos definir uma topologia $\mathscr{C}$ em $C(p,q)$.

Sejam O_α abertos em $\mathscr{M}$, e seja $\{\gamma(O_\alpha)\} = \{\gamma \subset C(p,q) \,|\, \gamma \subset O_\alpha\}$ (vide figura 1.7). Um conjunto de curvas $\{\gamma\}$ é dito aberto se $\{\gamma\} = \cup\{\gamma(O_\alpha)\}$. Além disso, $\{\gamma(O_\alpha)\}$ é uma base de $(\mathscr{C}, C(p,q))$. Sendo assim uma sequencia γ_i se aproxima de γ se para $j > I$, todos os abertos que contem γ também contem γ_j, para I suficientemente grande.

Deste modo se γ e $\gamma' \in \mathscr{C}$ são distintos, então $\gamma \cap \gamma' = \emptyset$, e como γ e γ' são curvas contidas em abertos O e O' respectivamente, se definirmos estes como sendo a vizinhança de γ e γ', temos que $\mathscr{C}$ é Hausdorff.

Agora sim podemos dar a definição original de Leray para hiperbolicidade global:

Definição 7 *Uma variedade $\mathscr{M}$ é globalmente hiperbólica se, para o conjunto $C(p,q)$ de curvas causais γ (vide figura 1.6) que ligam p a q temos que $C(p,q)$ é um conjunto compacto em $\mathscr{C}$ $\forall p,\ q \in \mathscr{M}$, e $\mathscr{M}$ é fortemente causal.*

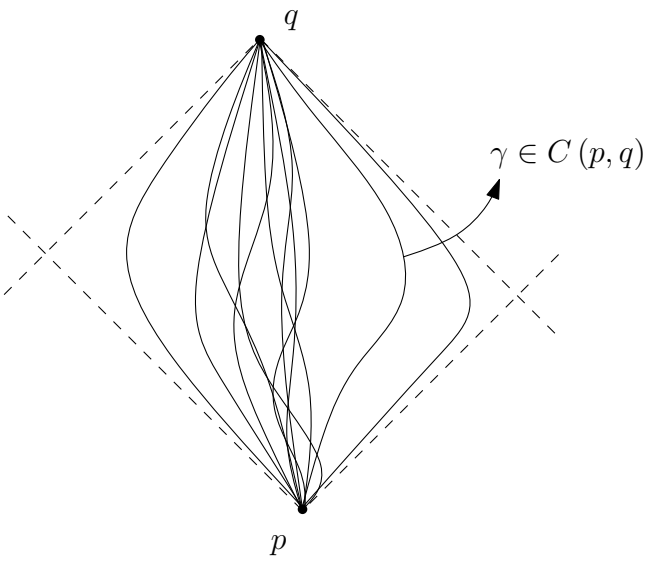

Figura 1.6: Coleção de curvas causais $C(p,q)$ que ligam p a q.

Intuitivamente, essa definição nos garante que não existem "buracos", "singularidades" ou regiões assintóticas entre dois pontos de $\mathscr{M}$. Do ponto de vista de relatividade geral existe outra definição mais elucidativa dada por Geroch [17] que utiliza o conceito de superfície de Cauchy.

Uma superfície de Cauchy é um conjunto acronal[7] de pontos Σ tal que $D(\Sigma) = \mathscr{M}$. A definição dada por Geroch é enunciada no seguinte teorema:

Teorema 8 *Uma variedade $\mathscr{M}$ é globalmente hiperbólica se existir uma superfície de Cauchy $\Sigma \subset \mathscr{M}$.*

Intuitivamente, esse teorema nos diz que se uma variedade for globalmente hiperbólica, dado um conjunto de condições iniciais em uma superfície tipo espaço definida em todos os pontos para um tempo fixo, podemos determinar todos os acontecimentos futuros ou revisitar os acontecimentos passados.

Para provar o Teorema 8, precisamos mostrar que $\mathscr{M}$ é globalmente hiperbólica (de acordo com Leray) se e somente se existir uma superfície de Cauchy em $\mathscr{M}$.

Vamos relembrar que, como $\mathscr{M}$ é um espaço métrico, $\mathscr{M}$ tem a propriedade de Hausdorff (proposição 28.1 de [18]) e, pelo teorema de A. H. Stone, é paracompacta (vide [19] para uma prova extremamente curta, ou [20, 21] e apêndice de [22]).

[7] Por acronal, queremos dizer que nenhuma curva causal intersecciona Σ mais de uma vez, deste modo, informações em Σ não poderiam "influenciar" o próprio conjunto Σ.

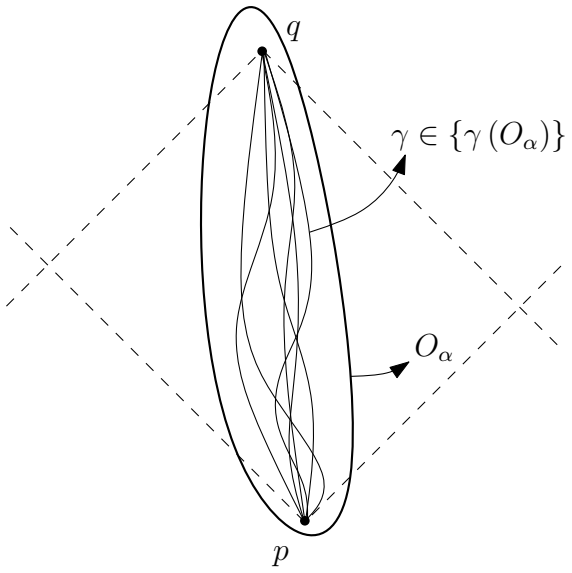

Figura 1.7: $\{\gamma(O_\alpha)\}$.

Como $\mathscr{M}$ é conectada e Hausdorff, $\mathscr{M}$ tem base contável, sendo assim, seja $\{p_i\}$ um conjunto denso e contável de pontos em $\mathscr{M}$ com p e q inclusos. Escolhemos $\gamma \in C(p,q)$ de modo que cada uma das curvas será uma $\gamma_{p_{ijk\ldots q}}$ construída como a união dos seguimentos de curvas λ_{ij} que unem a vizinhança dos pontos p_i e de p_j, conforme figura 1.8.

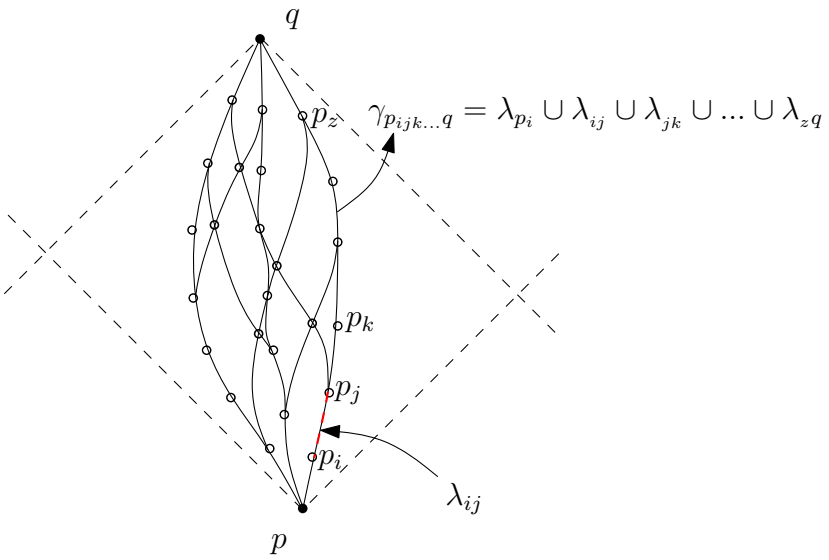

Figura 1.8: Construção de uma base contável em $(\mathscr{C}, C(p,q))$.

Temos então um conjunto contável de curvas γ_i (onde i é uma combinação de índices $p_{ijk\ldots}q$). Como o conjunto de pontos $\{p_i\}$ é denso, $\forall\gamma \in C(p,q)$ é igual, ou se aproxima, de algum γ_i escrito dessa forma. Suponha que não. Então $\exists p \in \gamma | p \notin \{p_i\}$, neste caso eu estendo $\{p_i\}$ para $\{p_i\} \cup p$ e então passo a ter um

conjunto novo e denso de pontos que satisfaz a hipótese. Caso eu não possa fazer isso, então $\{p_i\}$ não é denso. Sendo assim, $\{\gamma_i\}$ define uma base contável para $(\mathscr{C}, C(p,q))$ e portanto, $(\mathscr{C}, C(p,q))$ é segundo-contável. Podemos então utilizar o seguinte teorema:

Teorema 9 *(Teorema de Bolzano-Weierstrass) Se $(\mathscr{C}, C(p,q))$ é segundo-contável, então $C(p,q)$ é compacto se e somente se toda sequência em $C(p,q)$ tiver um ponto de acumulação em $C(p,q)$.*

Vamos verificar se essa condição para compacidade é satisfeita quando temos uma superfície de Cauchy. Para tanto, temos que provar o seguinte:

Lema 10 *Para todo conjunto $\{\gamma_n\}$ de infinitas curvas causais inextensíveis ao futuro (ou passado), com um ponto limite p, existe uma curva limite γ de $\{\gamma_n\}$ que passa por p e é inextensível ao futuro (passado).*

Demonstração. (Veja lema 6.2.1 em [6]). Seja U uma vizinhança de p, e $\mathscr{B}(p,b)$ a bola aberta de raio $b > 0$ centrada em p, tal que $\mathscr{B}(p,b) \subset U$. Seja $\{\gamma(1,0)_n\}$ uma subsequência de $\{\gamma_n\} \cap U$.

Como $\bar{\mathscr{B}}(p,b)$ é compacto, pelo teorema 9, tem pontos de acumulação da sequência $\{x_{10_n}\}$, onde x_{10_n} é o ponto onde $\gamma(1,0)_n$ intersecciona $\bar{\mathscr{B}}(p,b)$. Chamemos esse ponto de acumulação de x_{11}. Tal ponto deve pertencer a $J^-(p)$ ou a $J^+(p)$, caso o contrario, então existem vizinhanças V_p e V_x tal que $\nexists \gamma_n | \gamma_n \cap V_p \neq \emptyset$ e $\gamma_n \cap V_x \neq \emptyset$ ao mesmo tempo, e então γ_n não é uma das curvas de nossa hipótese. Suponha então que $x_{11} \in J^+(p)$ (vide figura 1.9).

Chamamos de $\{\gamma(1,1)_n\} \subset \{\gamma(1,0)_n\} \subset \{\gamma_n\}$ o subconjunto de curvas do segmento de $\gamma(1,0)_n$ dentro de $\mathscr{B}(p,b)$ $(\{\gamma(1,0)_n\} \cap \mathscr{B}(p,b))$ que converge a x_{11}. Agora definimos uma bola de raio menor centrada em p que também terá um ponto de acumulação obtido pelo mesmo processo, formalmente defino $x_{ij} \in J^+(p) \cap \bar{\mathscr{B}}\left(p, i^{-1}jb\right)$ como sendo o ponto limite de $\gamma(i,j-1)_n$, $i \geq j \geq 1$. Temos assim uma sequência de pontos que ligam x_{11} a $p = x_{10}$, e como nenhum dos pontos x_{ij} estão separados por curvas tipo-espaço, o fecho da união de todos esses pontos x_{ij} é uma curva causal de p a x_{11}, que chamaremos de γ. Como γ foi construída com pontos limites de subsequências de curvas em $\{\gamma_n\}$, podemos escolher uma sequência $\{\gamma'_n\}$ tal que $\forall q \in \gamma$, $\{\gamma'_n\}$ convirja a q, e assim γ é uma curva limite de $\{\gamma'_n\}$ entre p e x_{11}. Agora tomamos uma vizinhança de x_{11} e uma bola aberta centrada neste ponto e repetimos o processo com as curvas $\{\gamma'_n\}$ para estender γ a outro ponto dentro de $J^+(x_{11})$. Podemos estender a curva γ indefinidamente, de modo que γ é uma curva inextensível e limite de $\{\gamma_n\}$. ■

Seja $\{\gamma_n\}$ um conjunto de infinitas curvas em $C(p,q)$, seja Σ uma superfície de Cauchy e sejam p, $q \in D^-(\Sigma)$, de modo que q esteja no futuro causal de p (vide figura 1.10). Se removermos q de $\mathscr{M}$, temos que $\{\gamma_n\}$ passam a ser inextensíveis em $\mathscr{M}$. Pelo lema 10, $\{\gamma_n\}$ tem uma curva limite γ em $\mathscr{M} - q$ iniciando em p e orientada ao futuro. Como $\gamma_n \cap I^+(\Sigma) = \emptyset$, $\gamma \cap I^+(\Sigma) = \emptyset$. Colocando q novamente em $\mathscr{M}$, definimos $\Gamma = \gamma \cup q$, e está é uma curva limite de $\{\gamma_n\}$ satisfazendo $\Gamma \in C(p,q)$.

Quando p e $q \in D^+(\Sigma)$, a construção é análoga, nos restando apenas o caso em que um ponto se encontra em $D^-(\Sigma)$ e o outro em $D^+(\Sigma)$. Suponha que $p \in D^-(\Sigma)$ e $q \in D^+(\Sigma)$. Seja γ a curva limite do conjunto $\{\gamma_n\}$ iniciada em p. Seja $r \in \gamma \cap D^+(\Sigma) \cap I^-(q)$. Como $r \in \gamma$, existe um sub conjunto $\{\gamma'_n\}$ tal que o segmento de γ que liga p a r (vamos chamar esse segmento de γ') é uma curva limite do subconjunto $\{\gamma'_n\}$, e como r e q pertencem a $D^+(\Sigma)$ já vimos que existe uma curva limite λ que liga r a q. A curva limite Γ que liga p a q é obtida por $\Gamma = \gamma' \cup \lambda \in C(p,q)$. Portanto, na existência de uma superfície de Cauchy, toda sequência de curvas em $C(p,q)$ tem uma curva de acumulação que também pertence a $C(p,q)$, então, pelo teorema 9, $C(p,q)$ é compacto.

Mostramos que a existência de uma superfície de Cauchy implica na hiperbolicidade global, falta mostrar a volta.

Escolhemos um elemento de volume dV em $\mathscr{M}$[8] tal que

[8]Tal volume sempre existe, e pode, por exemplo, ser escolhido da seguinte maneira: Como $\mathscr{M}$ é um espaço métrico e

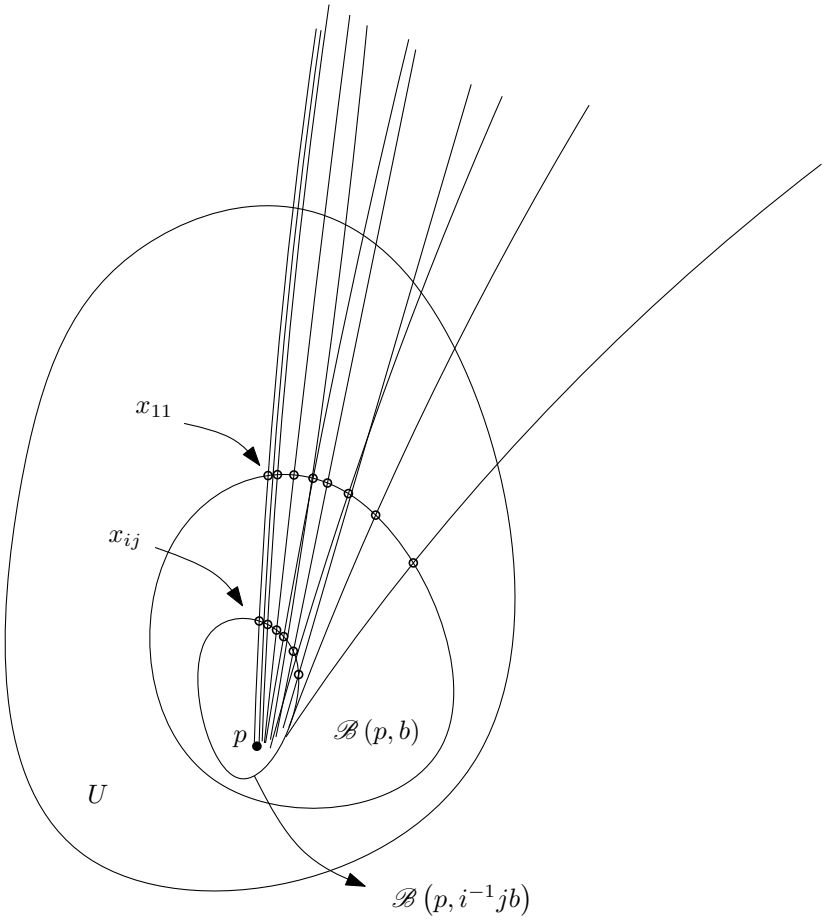

Figura 1.9: Construção da curva limite γ usada na prova de 10.

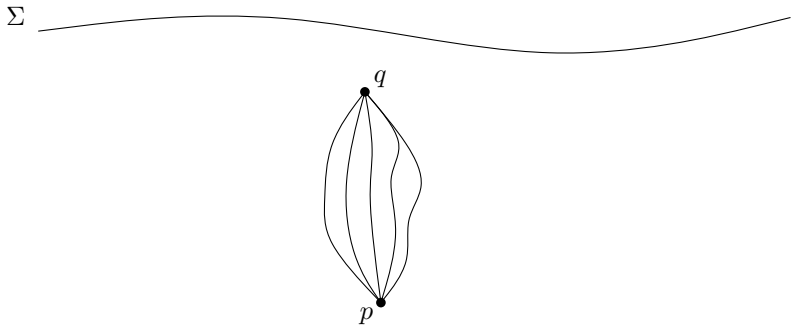

Figura 1.10: conjunto de curvas $C(p,q)$ para p, $q \in D^{-}(\Sigma)$.

paracompacto, $\mathscr{M}$ pode ser triangularizada (teorema 7, 8 e seção 4 de [23]). Em cada n-simplex podemos escolher um elemento de volume de modo que o volume total do primeiro simplex seja 1/2, o do segundo seja 1/4, e assim por diante [17, 22].

$$\int_{\mathscr{M}} dV = 1. \tag{1.2}$$

Definimos o volume ao passado de p, $V^{-}(p)$ e ao futuro $V^{+}(p)$ como

$$V^{\pm}(p) = \int_{I^{\pm}(p)} dV = 1. \tag{1.3}$$

Na ausência de curvas causais fechadas, $V^{-}(p)$ é crescente ao longe de curvas ao futuro.

Demonstração. Sem curvas fechadas, se $p \in I^{-}(q) \Rightarrow I^{-}(p) \subset I^{-}(q) \therefore V^{-}(p) < V^{-}(q)$. ■

Em geral V^{+} e V^{-} não são contínuos, mas se $\mathscr{M}$ for globalmente hiperbólica, então estes conjuntos são contínuos em toda a parte.

Demonstração. Seja p_i uma sequência de pontos em $\mathscr{M}$ e p é o ponto limite dessa sequência. Seja $\Delta V \subset \mathscr{M} | \Delta V \subset I^{-}(q)$ para $q \in I^{-}(p)$. Como p_i se aproxima de p, $\exists N | q \in I^{-}(p_i)$ para $i > N$. Então $I^{-}(p_i)$ em algum momento passará a conter q e portanto também passará a conter ΔV (e talvez algo mais). Como $I^{-}(p)$ pode ser escrito como uma união de ΔV's, temos que $\lim V^{-}(p_i) \geq V^{-}(p)$.

Seja agora $\Delta V \subset I^{+}(q)$ e $q \notin I^{-}(p)$. vamos mostrar que ΔV passará a estar fora de $I^{-}(p)$ em algum momento.

Suponha que não, e que $I^{-}(p) \supset \Delta V$ para infinitos p_i. Então $q \in I^{-}(p_i)$ para infinitos p_i. Escolho um q' ao futuro de p e como p_i se aproxima de p, a partir de algum momento $p_i \in I^{-}(q')$. Para os p_i tal que $p_i \in I^{+}(q) \cap I^{-}(q')$, trace uma curva causal γ_i de q' a q passando por p_i. Como p_i se aproxima de p, então existe uma curva limite γ de $\{\gamma_i\}$ que contem p (já que estamos assumindo que $\mathscr{M}$ é globalmente hiperbólica). Tal curva γ liga p a q, porém temos como hipótese que $q \notin I^{-}(p)$! Sendo assim, por absurdo temos que ΔV (e alguns pontos a mais) estarão fora de $I^{-}(p_i)$ para i suficientemente grande.

O interior de $\mathscr{M} - I^{-}(p)$ é uma união de ΔV's, e pelo que vimos, a partir de algum momento o interior de $\mathscr{M} - I^{-}(p_i)$ passará a conter pelo menos $\mathscr{M} - I^{-}(p)$, sendo assim $\lim V^{-}(p_i) \leq V^{-}(p)$, e assim concluímos que $V^{-}(p)$ é contínuo em $\mathscr{M}$ quando esta é globalmente hiperbólica (a hipótese de hiperbolicidade global foi necessária para se obter o limite superior de $V^{-}(p)$).

A prova para a continuidade de $V^{+}(p)$ é análoga. ■

Definimos a função $\lambda(p) = V^{-}(p)/V^{+}(p)$. Como $\mathscr{M}$ é globalmente hiperbólica, é fácil ver que $\lambda(p)$ é continua e decrescente ao longo de curvas orientadas ao passado. Seja Σ o conjuntos de pontos s para os quais $\lambda(s) = 1$. Como $\lambda(p)$ é decrescente ao longo de uma curva causal orientada ao passado (e crescente ao longo de uma curva orientada ao futuro), Σ é acronal. Seja $p | \lambda(p) > 1$, e seja γ uma curva causal inextensível e orientada ao passado que se inicia em p. Como λ é contínua, γ terá que interseccionar Σ se λ puder assumir valores arbitrariamente pequenos ao longo de γ.

Seja $q \in \mathscr{M}$ e $\Delta V \subset I^{+}(q)$, então $\Delta V \not\subset I^{-}(r)$ para todo $r \in \gamma$ (ou seja, existirão pontos em γ que não podem ser ligados por curvas causais a pontos em ΔV). Suponha o contrario, então $q \in \cap_{r \in \gamma} I^{-}(r)$. Escolho uma sequência de pontos $p_i | p_{i+1} \in I^{-}(p_i)$ e $p_i \in \gamma$, e escolho essa sequência de modo que $r \in I^{-}(p_i)$ para algum i. Para cada p_i, desenhe uma curva causal ν_i de p_i a q e desenhe γ_i como sendo a união do trecho da curva γ que vai de p a p_i com λ_i (γ_i é uma curva causal de p a q passando por p_i). Como $\mathscr{M}$ é globalmente hiperbólica, essa sequência de curvas terá uma curva limite Γ de p a q que contém γ (já que Γ é o limite de curvas γ_i que no limite em que $i \to \infty$ se aproximam de γ), porém γ é uma curva inextensível ao passado e não pode estar contida em um conjunto compacto de curvas $C(p, q)$.

Por absurdo então, vemos que existe r a partir do qual $\Delta V \not\subset I^{-}(r)$. Como $\mathscr{M}$ pode ser escrito como uma união destes ΔV's, então $V^{-}(r)$ vai a zero e portanto, para algum r, $\lambda(r) < 1$ e γ obrigatoriamente passa por Σ, como γ foi escolhido de forma geral, podemos fazer a mesma construção para toda curva

causal inextensível orientada ao passado e iniciada em p, portanto $p \in D^{+}(\Sigma)$, analogamente poderíamos ter escolhido p de modo a $\lambda p < 1$ e assim concluiríamos que $p \in D^{-}(\Sigma)$. Como p pode ser escolhido de forma genérica, concluímos que $\mathscr{M} = D(\Sigma)$ e portanto Σ é uma superfície de Cauchy.

Essa forma de se expressar a hiperbolicidade global é muito mais útil no contexto de relatividade geral. Existe uma outra maneira equivalente às duas mostradas (a de Leray e a de Geroch) que é muito utilizada na literatura, a saber: Diz-se que uma variedade é globalmente hiperbólica se $J^{+}(p) \cap J^{-}(q)$ for compacto[9].

A função $\lambda(p)$ pode ser utilizada para folearmos $\mathscr{M}$ com superfícies de Cauchy. Seja Σ_{λ} o conjunto de pontos para λ constante, então Σ_{λ} é acronal, e apenas uma dessas superfícies pode passar por cada ponto de $\mathscr{M}$ como pode ser facilmente concluído a partir das propriedades de $\lambda(p)$. Frequentemente se assume que tais superfícies de Cauchy podem ser suavizadas, porém a prova formal deste fato só se deu recentemente e pode ser contemplada em [24].

1.2 Construção de uma Teoria Quântica de Campos em Espaços de Minkowski

Em teorias quânticas de campos, geralmente estamos interessados em campos ϕ que satisfazem a equação 1.4 a seguir

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \mathscr{K}\phi, \tag{1.4}$$

onde $\mathscr{K}$ é um operador diferencial linear elíptico de segunda ordem ao longo de Σ_t, onde Σ_t é a hipersuperfície de nosso espaço-tempo dada por $x^0 = t$, e $\mathscr{K}$, sob condições de contorno adequadas, é um operador estritamente positivo e auto adjunto em um espaço de Hilbert a ser construído mais adiante. Também desejamos que $\mathscr{K}$ não tenha dependência temporal[10].

Nessa seção, trataremos de um caso mais simples, que será o de um campo escalar real em um espaço-tempo de Minkowski, onde o tensor métrico $\eta^{\mu\nu}$ é dado por

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{cases} \eta^{00} = 1 & \\ \eta^{aa} = -1, & a \neq 0 \\ \eta^{\mu\nu} = 0, & \mu \neq \nu \end{cases}. \tag{1.5}$$

Ao definirmos o valor de ϕ e de sua derivada normal em uma superfície de Cauchy, ou seja $\phi(0, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ e $\frac{\partial \phi}{\partial t}(0, \mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ (onde $\mathbf{x}$ é um vetor nas coordenadas espaciais), estamos fornecendo as condições iniciais em Σ_0, o que caracteriza o chamado "*problema de Cauchy*". A solução geral para este problema é dada na forma:

$$\phi(\cdot, t) = \cos\left(t\sqrt{\mathscr{K}}\right) f + \frac{\sin\left(t\sqrt{\mathscr{K}}\right)}{\sqrt{\mathscr{K}}} g. \tag{1.6}$$

Note que, sendo $\mathscr{K}$ um operador auto adjunto e estritamente positivo, a existência de $\sqrt{\mathscr{K}}$, $\sin\left(t\sqrt{\mathscr{K}}\right)$

[9] Que esta definição é equivalente às duas aqui apresentadas pode ser visto no teorema 8.3.9 e 8.3.10 de [5] e na proposição 6.6.2 de [6]

[10] Estamos seguindo aqui a analise feita no capítulo 2 de [14], sobre operadores diferenciais elípticos e expansão em autofunções.

e $\cos\left(t\sqrt{\mathscr{K}}\right)$ é garantida pelo teorema espectral. Assumir isso é essencial para garantir que $\sqrt{\mathscr{K}}$ está definido.

O importante aqui é notar que esta solução não estará completamente definida até que sejam dadas as condições de contorno para a mesma (por exemplo, as condições de contorno de Dirichlet, ou condições de contorno periódicas, que é o que se costuma fazer quando fazemos teoria quântica de campos em uma caixa). Dadas condições de contorno adequadas para f e g na parte espacial, obtemos geralmente um espectro discreto de soluções, nas quais podemos expandir qualquer solução. Outra ramificação deste problema é o caso do espectro contínuo. Neste caso expandimos qualquer vetor como uma integral sobre as autofunções obtidas por uma transformação de Fourier (e assim evitamos o artifício de "colocar o campo em uma caixa"). Nesta seção gostaríamos de tratar ambos os casos, para tanto, abdicaremos um pouco do rigor matemático e passaremos livremente de um caso para o outro, visto que este capítulo não tem a pretensão de ser formalmente rigoroso e sim de apenas dar algumas ideias gerais necessárias para o desenvolvimento do próximo. Um tratamento mais formal do assunto pode ser encontrado em [25].

Um caso particular para o operador $\mathscr{K}$ é quando este é o laplaciano somado ao quadrado da massa (ou seja, $\mathscr{K} = -\nabla^2 + m^2$), este é o caso que nos fornece a equação de Klein-Gordon. A ação de um campo escalar real de Klein-Gordon $\phi(\mathbf{x}, t)$ no espaço-tempo de Minkowski é dada por

$$S = \int \mathscr{L}(\mathbf{x}) d^n x, \tag{1.7}$$

onde $\mathscr{L}$ é a densidade Lagrangeana dada por

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi(\mathbf{x})\nabla_\nu\phi(\mathbf{x}) - m^2\phi(\mathbf{x})\right), \tag{1.8}$$

onde ∇_μ é a derivada covariante, que por sua vez é dada por

$$\nabla_\mu A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l} = \partial_\mu A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l} + \sum_{i=1}^{k}\Gamma^{\alpha_i}{}_{\mu\rho}A^{\alpha_1\ldots\rho\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\beta_l} - \sum_{i=1}^{l}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\beta_i}A^{\alpha_1\ldots\alpha_k}{}_{\beta_1\ldots\rho\ldots\beta_l},$$

com $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ representando os símbolos de Christoffel[11] (note que para o caso de Minkowski, os símbolos de Christoffel são nulos, e $\nabla_\mu = \partial_\mu$, porém estamos aproveitando agora para definir alguns conceitos gerais que serão úteis nas próximas seções, de modo que a passagem para espaços-tempos curvos se dê da maneira mais natural possível).

A equação de movimento gerada por esta ação é

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = 0, \tag{1.10}$$

onde[12]

$$\Box\phi = \eta^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \frac{1}{\sqrt{|\eta|}}\partial_\mu\left[\eta^{\mu\nu}\sqrt{|\eta|}\partial_\nu\phi\right], \tag{1.11}$$

[11] Os símbolos de Christoffel (também conhecido como conexão afim) são dados por

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\left(g_{\mu\beta,\nu} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\nu,\beta}\right), \tag{1.9}$$

onde $g_{\mu\nu}$ é a métrica e o índice após a virgula significa diferenciação em relação a essa coordenada.

[12] Aproveitaremos também para escrever o d'Alembertiano de forma geral já que necessitaremos desta forma mais adiante quando deixarmos de tratar o caso de Minkowski.

com $\eta = \det(\eta_{\mu\nu})$ (que é igual a -1 no caso de Minkowski).

A equação 1.10 pode ser escrita em termos do operador $\mathscr{K} = -\nabla^2 + m^2$, que é temporalmente independente, ficando na forma de 1.4. Assim separamos a dependência temporal da espacial.

A densidade de momento π do campo de Klein-Gordon em Σ_0 é dada por

$$\pi = \left.\frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}}\right|_{\Sigma_0} = \left.\dot{\phi}\right|_0, \tag{1.12}$$

onde "$\dot{}$" significa derivação em relação a t.

Vemos que $\mathscr{K}$ é um operador elíptico linear, isso implica que a parte espacial da solução é suave, visto que seus coeficientes o são, ou seja, se nos restringindo a Σ_0 e definindo $\phi(\mathbf{x},t)|_{\Sigma_0} \equiv \varphi_0$ e $\pi(\mathbf{x},t)|_{\Sigma_0} \equiv \pi_0$, temos $\varphi_0, \pi_0 \in C^\infty(\Sigma_0)$. O operador $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ também é elíptico, e assim a mesma propriedade vale para a parte temporal das soluções de 1.4. Nosso objetivo é encontrar campos ϕ que em Σ_0 sejam operadores hermitianos em um espaço de Hilbert e satisfaçam as seguintes relações de comutação canônicas para φ_0 e π_0:

$$[\varphi_0(\mathbf{x}), \pi_0(\mathbf{x}')] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{1.13}$$

$$[\varphi_0(\mathbf{x}), \varphi_0(\mathbf{x}')] = [\pi_0(\mathbf{x}), \pi_0(\mathbf{x}')] = 0 \quad . \tag{1.14}$$

Na construção que se segue, estaremos utilizando principalmente a notação e sequência de raciocínio encontrada em [1]. Definimos o espaço de fase $\mathfrak{M}$ como sendo o espaço das condições iniciais para ϕ da seguinte maneira: $\mathfrak{M} \equiv \{[\varphi_0, \pi_0] \,|\, \varphi_0 : \Sigma_0 \to \mathbb{R}, \pi_0 : \Sigma_0 \to \mathbb{R}; \varphi_0, \pi_0 \in C_0^\infty(\Sigma_0)\}$. Deste modo, um elemento em $\mathfrak{M}$ é um par $\boldsymbol{\phi}_0 = [\varphi_0, \pi_0]$ (um vetor no espaço de fase) que corresponde a se determinar as condições iniciais para 1.4. Definimos $\mathfrak{S}$ como sendo o espaço das soluções de 1.10 provenientes de condições iniciais em $\mathfrak{M}$. Cada elemento em $\mathfrak{M}$ determina unicamente uma solução em $\mathfrak{S}$. Como $\mathscr{K}$ não tem dependência em t, podemos olhar separadamente a dependência de $\phi(\mathbf{x},t)$ para t e para x. Estendendo a ação de $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ para $\mathfrak{S}$ e impondo as condições iniciais, caímos no já citado "*problema de Cauchy*". Deste modo, a solução 1.6 para a parte dependente de t pode ser escrita como:

$$\phi(\cdot, t) = \cos\left(t\sqrt{\mathscr{K}}\right)\varphi_0 + \frac{\sin\left(t\sqrt{\mathscr{K}}\right)}{\sqrt{\mathscr{K}}}\pi_0. \tag{1.15}$$

Definimos as auto-funções de $\mathscr{K}$ como sendo $\phi_{\mathbf{j}}$ e seus auto valores como sendo $\lambda_{\mathbf{j}}$. Note que ao considerarmos a dependência temporal de ϕ, pela equação 1.4, temos que $\phi_{\mathbf{k}}(\cdot, t) \propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$, com $\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\lambda_{\mathbf{k}}}$, o que implica em $\mathscr{K}\phi_{\mathbf{j}} = \omega_{\mathbf{j}}^2\phi_{\mathbf{j}}$, por outro lado, o operador $\mathscr{K} = -\nabla^2 + m^2$, indica que $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \cdot) \propto e^{i\mathbf{kx}}$, com $\omega_{\mathbf{k}}^2 = \mathbf{k}^2 + m^2$ (sendo assim, $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \propto e^{i\mathbf{kx} - i\omega_{\mathbf{k}}t}$). Definimos então o produto interno de Klein-Gordon como sendo

$$(\phi_{\mathbf{j}}, \phi_{\mathbf{j}'})_{KG} = i\int_\Sigma \left[\overline{\phi_{\mathbf{j}}}\nabla_\mu\phi_{\mathbf{j}'} - \phi_{\mathbf{j}'}\nabla_\mu\overline{\phi_{\mathbf{j}}}\right] d\Sigma^\mu, \tag{1.16}$$

onde $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, com n^μ sendo o vetor normal à superfície e $d\Sigma$ um elemento de volume da (hiper-) superfície Σ. Sendo assim, os modos $\phi_{\mathbf{j}}$ são ortogonais por 1.16. Além disso, 1.16 não depende da superfície Σ escolhida [25]. Com 1.16 completamos o sub-espaço de $\mathfrak{S}$ corresponde às soluções de frequência positiva ($\propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$) obtendo assim nosso espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ correspondente a uma partícula, para o qual definimos uma base ortogonal $\psi_{\mathbf{j}}$. Sendo assim, $\mathscr{K}$ é então um operador auto-adjunto em $\mathscr{H}$, porém as soluções $\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, \cdot) \propto e^{i\mathbf{kx} - i\omega_{\mathbf{k}}t}$ não pertencem a $\mathscr{H}$ para qualquer autovalor λ_j, ou seja, não há auto-vetores para

todos os auto-valores. Mesmo assim podemos expandir formalmente qualquer vetor nas auto-funções $\phi_{\mathbf{j}}$ por Fourier. Vemos que expandir ϕ em Fourier, equivale a expandir nos modos $\phi_{\mathbf{j}}$. Tomando a transformada de Fourier, temos:

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},t) &= \int\left[\cos(\omega_{\mathbf{k}}t)\,\phi_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{\sin(\omega_{\mathbf{k}}t)}{\omega_{\mathbf{k}}}\phi_{\mathbf{k}}\pi_{\mathbf{k}}\right]d^{n-1}k = \\
&= \int\left(\frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}+e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{2}\phi_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}} + \frac{e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}-e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{2i\omega_{\mathbf{k}}}\phi_{\mathbf{k}}\pi_{\mathbf{k}}\right)d^{n-1}k = \\
&= \int\frac{1}{2\omega_{\mathbf{k}}}\left[\phi_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}(\omega_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}+i\pi_{\mathbf{k}}) + \phi_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}(\omega_{\mathbf{k}}\varphi_{\mathbf{k}}-i\pi_{\mathbf{k}})\right]d^{n-1}k = \\
&= \int\left[\frac{\phi_{\mathbf{k}}e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}\left(\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}\varphi_{\mathbf{k}} + i\frac{\pi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{j}}}}\right) + \frac{\phi_{\mathbf{k}}e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}}{2\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}}\left(\sqrt{\omega_{\mathbf{k}}}\varphi_{\mathbf{k}} - i\frac{\pi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{\omega_{\mathbf{j}}}}\right)\right]d^{n-1}k. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Agora atentemos para o seguinte: como $\mathscr{K}$ é um operador real, temos $\overline{\mathscr{K}\phi_{\mathbf{j}}} = \mathscr{K}\overline{\phi_{\mathbf{j}}}$, deste modo, vemos que $\overline{\phi_{\mathbf{j}}}$ também é auto-função de $\mathscr{K}$ com o mesmo auto-valor $\omega_{\mathbf{j}}$. Podemos então identificar $\overline{\phi_{\mathbf{j}}}$ com alguma outra auto-função de modo a termos $\overline{\phi_j} \equiv \phi_{j'}$, com $\omega_{\mathbf{j}} \equiv \omega_{\mathbf{j}'}$ (essa relação entre $\phi_{\mathbf{j}}$ e $\overline{\phi_{\mathbf{j}}}$ mostra que os modos também são ortogonais aos seus adjuntos). Como ambos os modos $\mathbf{j}$ e $\mathbf{j}'$ tem o mesmo $\omega_{\mathbf{j}}$, e tendo em vista que $\omega_{\mathbf{j}}^2 = \mathbf{j}^2 + m^2$, concluímos que $\phi_{\mathbf{j}'} = \phi_{-\mathbf{j}}$[13].

Até então estamos tratando de um caso clássico. Desejamos relacionar ϕ com um operador quântico Φ agindo sob elementos de um espaço de Hilbert. Para tanto, vamos introduzir operadores atuando em um espaço de Fock (que logo será definido) que nos permitam re-escrever 1.17. Reescrevemos os coeficientes da expansão de Fourier ao definirmos a e $a^\dagger$ como[14]:

$$a_{\mathbf{j}'} = \tfrac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{j}}}}\left(\omega_{\mathbf{j}}\varphi_{\mathbf{j}} + i\pi_{\mathbf{j}}\right) \qquad (1.18)$$

$$a_{\mathbf{j}}^\dagger = \tfrac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{j}}}}\left(\omega_{\mathbf{j}}\varphi_{\mathbf{j}} - i\pi_{\mathbf{j}}\right) \quad . \qquad (1.19)$$

Desejamos poder fazer uma relação de nossa teoria com a ideia de partículas, para tanto precisamos e uma representação de Fock $\mathscr{F}$ das soluções para o campo com a utilização do espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ de uma partícula munido do produto escalar 1.16. Construímos nosso espaço de Fock simétrico $\mathscr{F}_s$ a partir de $\mathscr{H}$ da seguinte forma:

$$\mathscr{F}_s(\mathscr{H}) \equiv \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty}\left(\overset{n}{\otimes}_s \mathscr{H}\right) \equiv \mathbb{C} \oplus \mathscr{H} \oplus (\mathscr{H} \otimes_s \mathscr{H}) \oplus \ldots, \qquad (1.20)$$

[13] Uma outra maneira de se fazer essa expansão em Fourier é se considerarmos os modos $\mathbf{j}$ como "índices" j não degenerados para nomear os modos, como se o operador $\mathscr{K}$ fosse um operador de outro operador $\mathscr{J}$ com espectro simples, e a construção é feita na representação espectral de $\mathscr{J}$, neste caso, supondo que os modos são escolhidos ortogonalmente, os diferenciais $d^{n-1}k$ seriam substituídos por um $d\mu(k)$, onde $\mu(k)$ é uma medida em $\sigma(\mathscr{J})$. Como em diversas situações de interesse (inclusiva a que trataremos) $\mathscr{J}$ representa um conjunto completo de operadores que comutam (como o vetor momento $\mathbf{p}$), optamos por representar os índices j já na forma vetorial.

[14] O motivo pelo qual utilizamos $\varphi_{\mathbf{j}}$ na definição de $a_{\mathbf{j}'}$ é que, pela transformada de Fourier temos $\varphi_{\mathbf{j}} = \int d^{n-1}x\overline{\phi_{\mathbf{j}}}\phi(\mathbf{x},t)$, portanto, podemos escrever $\varphi_{\mathbf{j}} = \varphi\left(\phi_{\mathbf{j}}\right)$ (ou seja, a condição inicial para o modo $\phi_{\mathbf{j}}$), que pela identificação $\phi_{\mathbf{j}} \equiv \overline{\phi_{\mathbf{j}'}}$ fica $\varphi\left(\overline{\phi_{\mathbf{j}'}}\right)$, e como veremos a seguir, quando promovermos a para um operador de aniquilação, a estará sendo fatorado justamente por $\overline{\phi_{\mathbf{j}'}}$, ou seja, $a_{\mathbf{j}}$ será o operador de aniquilação associado com $\overline{\phi_{\mathbf{j}}}$.

onde $\otimes_s$ denota um produto tensorial simétrico. Nesta representação, o vetor do estado de vácuo é

$$|0\rangle \equiv (1, 0, 0, \cdots), \tag{1.21}$$

e promovemos a e $a^\dagger$ para operadores de aniquilação e criação, respectivamente, agindo em $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ da seguinte forma[15]: Seja $\eta_n \in \overset{n}{\otimes}_s \mathscr{H}$ e $\sigma_1 \in \mathscr{H}$. Então

$$\begin{aligned} a(\overline{\sigma}_1)|\eta\rangle &= \left(\overline{\sigma}_1 \cdot \eta_1, \sqrt{2}\overline{\sigma}_1 \cdot \eta_2, \sqrt{3}\overline{\sigma}_1 \cdot \eta_3, \ldots\right) \\ a^\dagger(\sigma_1)|\eta\rangle &= \left(0, c\sigma_1, \sqrt{2}\sigma_1 \otimes_s \eta_1, \sqrt{3}\sigma_1 \otimes_s \eta_2, \ldots\right), \end{aligned} \tag{1.22}$$

onde $\overline{\sigma}_1$ é um elemento do dual de $\mathscr{H}$, representado por $\bar{\mathscr{H}}$, e um vetor qualquer em $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ é escrito como

$$|\eta\rangle = (c, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots), \tag{1.23}$$

e pode ser obtido por sucessivas aplicações de $a^\dagger(\sigma)$ para σ's convenientes.

Substituindo 1.18 e 1.19 em 1.17 e usando as equivalências já constatadas, podemos escrever o operador Φ associado a ϕ e π em função dos operadores de aniquilação e criação como segue:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}} \left(\phi_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} + \overline{\phi_{\mathbf{k}'}} a^\dagger_{\mathbf{k}'} e^{i\omega_{\mathbf{k}'} t}\right) d^{n-1}k = \\ &= \int \left(\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) a_{\mathbf{k}} + \overline{\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t)} a^\dagger_{\mathbf{k}}\right) d^{n-1}k, \end{aligned} \tag{1.24}$$

onde, na segunda integral, substituímos os índices $\mathbf{k}$ por $\mathbf{k}'$ e definimos

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\phi_{\mathbf{k}} e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}}{\sqrt{2\omega_{\mathbf{k}}}}. \tag{1.25}$$

E por fim, impomos as relações de comutação canônicas para os operadores Φ_1 e Φ_2 em função da estrutura simplética $\Omega(,)$ em $\mathfrak{S}$[16] da seguinte maneira:

$$[\Phi_1, \Phi_2] = i\Omega([\varphi_1, \pi_1], [\varphi_2, \pi_2]) = i\int_\Sigma (\pi_1\varphi_2 - \varphi_1\pi_2)\, d\Sigma. \tag{1.26}$$

E com o uso dessa estrutura simplética e de 1.12 vemos que 1.16 pode ser escrito como

$$(\phi_1, \phi_2)_{KG} = -i\Omega\left(\overline{[\varphi_1, \pi_1]}, [\varphi_2, \pi_2]\right). \tag{1.27}$$

[15] Estamos assim promovendo os coeficientes da expansão de Fourier a operadores, consequentemente $\varphi_{\mathbf{j}}$ e $\pi_{\mathbf{j}}$ passam a ser operadores também, e sendo operadores, desejamos que estes satisfaçam as relações de comutação canônica 1.13, que serão mais adiante expressas em função de a e $a^\dagger$.

[16] A estrutura simplética é definida no espaço de fase $\mathfrak{M}$ pela segunda igualdade da equação 1.26. Sua ação pode ser estendida para $\mathfrak{S}$ da seguinte forma: Em cada superfície Σ_t, um elemento $\phi \in \mathfrak{S}$ pode ser associado a um vetor $\boldsymbol{\phi}_t = [\varphi_t, \pi_t]$ em um espaço de fase $\mathfrak{M}$ em Σ_t (como a variedade é globalmente hiperbólica, a estrutura de $\mathfrak{M}$ em Σ_0 pode ser transportada para qualquer outra superfície e Cauchy) e como a integral é independente da superfície escolhida [25], a estrutura simplética se mantém para qualquer t e assim pode ser estendida a $\mathfrak{S}$.

Com o uso de 1.24 podemos escrever as relações de comutação canônica na forma

$$\left[a_{\mathbf{j}}^{\dagger}, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \left[a_{\mathbf{j}}, a_{\mathbf{k}}\right] = 0 \tag{1.28}$$

$$\left[a_{\mathbf{j}}, a_{\mathbf{k}}^{\dagger}\right] = \delta\left(\mathbf{j}-\mathbf{k}\right). \tag{1.29}$$

Note que é a distribuição δ de Dirac aparece no comutador de a com $a^{\dagger}$, já que os índices $\mathbf{k}$ são contínuos. Existem maneiras de se obter um índice discreto, o que nos forneceria um delta de Kronecker nos comutadores. Uma das maneiras de se fazer isso é utilizar as soluções ϕ_j para se formar um conjunto completo ortonormal de pacotes de onda nos quais podemos expandir qualquer modo ϕ, fazendo com que o índice j passe a ser discreto. Outra maneira é assumir que $\mathscr{K}$ tenha um espectro positivo, forçando os autovalores ω_j a serem positivos. Neste caso, não precisamos expandir os modos em Fourier, e podemos expandir a solução diretamente nos modos ϕ_j. Ainda há o caso em que impomos a condição periódica $\phi\left(\mathbf{x}+nL,t\right)=\phi\left(\mathbf{x},t\right)$, e após feito os cálculos de interesse, se calcula o limite em que $L\to\infty$, essa prática é conhecida como "*colocar o campo em uma caixa*". Neste caso, a expansão em ψ_k fica na forma

$$\Phi\left(\mathbf{x},t\right)=\sum_{k}\left(\phi_k\left(\mathbf{x},t\right)a_k+\overline{\phi_k\left(\mathbf{x},t\right)}a_k^{\dagger}\right). \tag{1.30}$$

Usaremos essa forma quando for conveniente.

Os modos $\phi_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x},t\right)$ que definem o espaço de Hilbert de uma partícula são chamados de soluções de frequência positiva. Note que essa escolha é feita com base no fato de que a equação de onda 1.4 pode ser escrita na forma

$$i\frac{\partial\phi}{\partial t}=\sqrt{\mathscr{K}}\phi, \tag{1.31}$$

de modo que ao derivarmos $\phi_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{x},t\right)\propto e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}$, vemos que o auto-valor de $\sqrt{\mathscr{K}}$ é $+\omega_{\mathbf{k}}$.

Outra maneira de se representar os estados em $\mathscr{F}$ pode ser obtida como segue. Tomamos o estado $|0\rangle$ como sendo o estado de vácuo, ou seja, o estado que quando aniquilado resulta em zero ($a_{\mathbf{k}}|0\rangle=0,\forall\mathbf{k}$). A partir de $|0\rangle$, construímos o estado de uma partícula no modo $\mathbf{k}$ pela aplicação de $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$. Definimos então $|1_{\mathbf{k}}\rangle=a_{\mathbf{k}}^{\dagger}|0\rangle$ como o estado que representa uma partícula no modo $\mathbf{k}$. Aplicando n vezes $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ no estado de vácuo, teremos um vetor proporcional a $|n_{\mathbf{k}}\rangle$, que representa um estado de n partículas no modo $\mathbf{k}$. Aplicando o operador de criação para outro modo $\mathbf{k}'\neq\mathbf{k}$ em $|n_{\mathbf{k}}\rangle$, teremos o vetor $|n_{\mathbf{k}},1_{\mathbf{k}'}\rangle$ que representa n partículas no modo $\mathbf{k}$ e 1 no modo $\mathbf{k}'$. Determinamos a ação dos operadores de criação e aniquilação em vetores de $\mathscr{F}$ da seguinte maneira:

$$a_{\mathbf{k}}^{\dagger}|n_{\mathbf{k}}\rangle = \left(n+1\right)^{1/2}|(n+1)_{\mathbf{k}}\rangle \tag{1.32}$$

$$a_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = n^{1/2}|(n-1)_{\mathbf{k}}\rangle. \tag{1.33}$$

Deste modo, um vetor representante de um estado qualquer é escrito como

$$\left|n_{\mathbf{k}_1}^{(1)},n_{\mathbf{k}_2}^{(2)},\ldots,n_{\mathbf{k}_j}^{(j)}\right\rangle=\left(n^{(1)}!\cdot n^{(2)}!\ldots n^{(j)}\right)^{-1/2}a_{\mathbf{k}_1}^{\dagger}a_{\mathbf{k}_2}^{\dagger}\ldots a_{\mathbf{k}_j}^{\dagger}|0\rangle. \tag{1.34}$$

A segunda construção é mais conveniente quando temos uma base de modos de frequência positiva escolhida para trabalhar, porém em espaços curvos não temos em geral uma base preferencial para ser a base dos modos de frequência positiva, exceto em alguns casos especiais como veremos na próxima seção, para os casos onde tratamos de espaços mais gerais, a primeira construção se mostra mais eficiente e requer menos imposições e hipóteses. Estaremos utilizando as duas construções de acordo com a conveniência.

1.3 O Produto Energético

Mostramos então como se constrói uma teoria quântica de campos em espaços de Minkowski da maneira usual, porém tal construção se baseia na escolha de um espaço para ser o de frequências positivas e um para ser o de frequências negativas. Essa escolha é uma consequência da estrutura plana da nossa variedade, que permite que façamos essa construção matemática. Ao tentarmos passar essa construção para o caso de espaços mais gerais, nos deparamos com diversas dificuldades e ambiguidades ao tentarmos definir os critérios matemáticos utilizados para escolher qual é o nosso espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Dai surge a motivação para se entender quais os conceitos físicos que possibilitam (e que fazem dar certo) essa escolha, e tendo conhecimento deles, tentar generalizá-los para espaços mais gerais, tentando assim encontrar as construções matemáticas que os representem. Seguindo essa linha, Ashtekar e Magnon propuseram critérios físicos que restringem as possibilidades de escolha para essa construção matemática. Essas ideias foram introduzidas em [11], e posteriormente trabalhadas e formalizadas em [12], [26] e [1], entre outros, as quais passaremos a apresentar aqui.

Anteriormente, na construção de nossa teoria quântica de campos, iniciamos por definir qual era o nosso espaço de Hilbert, e depois construímos uma álgebra de operadores. A ideia agora será iniciar por uma abordagem algébrica, onde construiremos uma álgebra de forma abstrata obtendo assim o espaço de Hilbert pela escolha de uma representação apropriada da álgebra. A física por traz dessa escolha é tal que a escolha só é conveniente se, após feita, o valor médio da energia de cada partícula (na noção que essa representação me der de partículas) deve ser igual à energia do campo clássico correspondente. A ideia é usar essa "condição energética" para se escolher uma representação da álgebra em espaços curvos mais gerais. Vamos ver como isso funciona para o caso de um campo escalar.

Seja $\mathfrak{S}$ o espaço vetorial das soluções da equação de Klein-Gordon, e sejam tais soluções suaves e provenientes de condições iniciais com suporte compacto em alguma superfície de Cauchy. A cada $\phi \in \mathfrak{S}$, associamos um operador abstrato Φ que serão os operadores de campo. Considere a álgebra gerada por esses operadores e imponha:

1. $\Phi = \Phi^*$,
2. $\Phi(\phi_1 + a\phi_2) = \Phi(\phi) + a\Phi(\phi)$, para $a \in \mathbb{R}$,
3. $[\Phi(\phi_1), \Phi(\phi_2)] = i \int_{\Sigma_0} (\phi_2 n^\mu \nabla_\mu \phi_1 - \phi_1 n^\mu \nabla_\mu \phi_2) \sqrt{h} d^{n-1}x$,

onde h é o determinante da métrica Riemanniana induzida em Σ_0.

Essa última condição é apenas para que os comutadores sejam iguais aos colchetes de Poisson das soluções clássicas multiplicados por i[17]. Nesta álgebra temos que cada elemento $\phi \in \mathfrak{S}$ é um par de funções (φ_t, π_t) em uma superfície de Cauchy Σ onde

[17] Note que a integral no item 3 é linear e antissimétrica em ϕ_1 e ϕ_2. Ela define um tensor de segunda ordem antissimétrico em $\mathfrak{S}$ (que chamaremos de Ω):

$$\Omega(\phi_1, \phi_2) = \int_{\Sigma_0} (\phi_2 n^\mu \nabla_\mu \phi_1 - \phi_1 n^\mu \nabla_\mu \phi_2) \sqrt{h} d^{n-1}x,$$

que é o tensor induzido em $\mathfrak{S}$ pela estrutura simplética no espaço de fase clássico.

$$\varphi_t = \phi|_{\Sigma_t},\ \pi_t = n^a \nabla_a \phi|_{\Sigma_t}. \tag{1.35}$$

Seja $\Phi(\pi_t)$ o operador associado a $\phi = (0, \pi_t)$ e $\Pi(\varphi_t)$ o operador associado a $\pi = (\varphi_t, 0)$.

Da condição 3, temos

$$[\Phi(\pi), \Phi'(\pi)] = i \int_{\Sigma_t} \Big(\underbrace{\phi'}_{\varphi'_t = 0} \nabla\phi - \underbrace{\phi}_{\varphi_t = 0} \nabla\phi' \Big) d\Sigma_t = 0 \tag{1.36}$$

$$[\Pi(\phi), \Pi'(\phi)] = i \int_{\Sigma_t} \Big(\pi' \underbrace{\nabla\pi}_{\pi_t = 0} - \pi \underbrace{\nabla\pi'}_{\pi'_t = 0} \Big) d\Sigma_t = 0 \tag{1.37}$$

$$[\Phi(\pi), \Pi(\phi)] = i \int_{\Sigma_t} \Big(\pi\nabla\phi - \underbrace{\phi}_{\varphi_t = 0} \underbrace{\nabla\pi}_{\pi_t = 0} \Big) d\Sigma_t = i \int_{\Sigma_t} \varphi_t \pi_t dV. \tag{1.38}$$

Estas são as relações de comutação canônicas. Entendido como se dá a construção da álgebra abstrata, o próximo passo é a escolha do espaço de Hilbert apropriado. Devido à existência de infinitos graus de liberdade da equação de Klein Gordon, existem diversas representações da álgebra inequivalentes. Precisamos então de algumas imposições físicas para restringi-las, a saber:

1. Queremos que o espaço de todos os estados quânticos puros seja um espaço de Fock simétrico (como consequência, teremos uma interpretação de partículas e $\mathscr{H}$ será o espaço de uma só partícula).
2. Temos uma condição para o "tamanho" do espaço de uma partícula $\mathscr{H}$. $\mathscr{H}$, como um espaço vetorial real, seria uma cópia de $\mathfrak{S}$.
3. A representação escolhida deve ser tal que o operador de campo possa ser mapeado na soma usual de operadores de criação e aniquilação (o que nos dá a ideia de que o campo quântico é um sistema de osciladores harmônicos).

Com essas imposições, devemos poder restringir as representações. O segundo requerimento nos diz que $\mathscr{H}$, como um espaço real, deve ser uma cópia de $\mathfrak{S}$, porém $\mathscr{H}$ representa estados quânticos, e portanto deve ter a estrutura de um espaço de Hilbert complexo. Deste modo, devemos introduzir em $\mathfrak{S}$ uma estrutura complexa J[18] e definir um produto interno hermitiano $\langle .,. \rangle$, e assim escolhemos $\mathscr{H}$ como sendo o completamento de Cauchy de $(\mathfrak{S}, J, \langle .,. \rangle)$.

O primeiro requerimento diz que o espaço de todos os estados deve ser $\mathscr{F}_s(\mathscr{H}) \equiv \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\overset{n}{\otimes}_s \mathscr{H} \right)$. Escrevemos agora um elemento de uma combinação de n produtos simétricos entre espaços de Hilbert como $\eta_n \in \overset{n}{\otimes}_s \mathscr{H}$ (sendo assim, $\phi_1 \in \mathscr{H}$). Em $\mathscr{F}$ existe uma definição "natural" para os operadores de aniquilação e criação (vide 1.22). Esses operadores têm as seguintes propriedades: a é o adjunto de $a^\dagger$, $a^\dagger$ é linear e a é anti-linear nos elementos de $\mathscr{F}$ e as relações de comutação canônicas podem ser escritas em função deles na forma:

$$\left[a^\dagger, a^\dagger\right] = [a, a] = 0 \ e \ \left[a(.), a^\dagger(.)\right] = \langle .,. \rangle \mathbb{1}, \tag{1.39}$$

onde $\mathbb{1}$ é a identidade e $\langle .,. \rangle$ é o produto interno em $\mathscr{H}$.

[18] Uma estrutura complexa J em um espaço vetorial real é um operador linear nesse espaço vetorial satisfazendo $J^2 = -\mathbb{1}$.

Pelo terceiro requerimento, $\Phi(\phi_1)$ pode ser escrito como uma soma de $a(\phi_1)$ com $a^\dagger(\phi_1)$. Usando isto e o comutador entre $\Phi(\phi_1)$ e $\Phi\left(\widetilde{\phi}_1\right)$ (escrevendo $a\left(\widetilde{\phi}_1\right) = \widetilde{a}$ e $a^\dagger\left(\widetilde{\phi}_1\right) = \widetilde{a}^\dagger$) temos:

$$\begin{aligned}
\left[a(\phi_1) + a^\dagger(\phi_1), a\left(\widetilde{\phi}_1\right) + a^\dagger\left(\widetilde{\phi}_1\right)\right] &= \left(a + a^\dagger\right)\left(\widetilde{a} + \widetilde{a}^\dagger\right) - \left(\widetilde{a} + \widetilde{a}^\dagger\right)\left(a + a^\dagger\right) = \\
&= a\widetilde{a} - \widetilde{a}a + a\widetilde{a}^\dagger - \widetilde{a}^\dagger a + a^\dagger\widetilde{a} - \widetilde{a}a^\dagger + a^\dagger\widetilde{a}^\dagger - \widetilde{a}^\dagger a^\dagger = \\
&= \cancelto{0}{\left[a, \widetilde{a}\right]} + \left[a, \widetilde{a}^\dagger\right] + \left[a^\dagger, \widetilde{a}\right] + \cancelto{0}{\left[a^\dagger, \widetilde{a}^\dagger\right]} = \\
&= \left\langle \phi_1, \widetilde{\phi}_1 \right\rangle - \left\langle \widetilde{\phi}_1, \phi_1 \right\rangle = \left\langle \phi_1, \widetilde{\phi}_1 \right\rangle - \overline{\left\langle \phi_1, \widetilde{\phi}_1 \right\rangle} = \\
&= i\Omega\left(\phi_1, \widetilde{\phi}_1\right)\mathbb{1} \Rightarrow 2\,Im\left\langle \phi_1, \widetilde{\phi}_1 \right\rangle = \Omega\left(\phi_1, \widetilde{\phi}_1\right),
\end{aligned} \tag{1.40}$$

onde foi utilizado 1.24, 1.26, 1.39 e o fato de que $\langle ., . \rangle$ é hermitiano.

A condição 1.40 para a parte imaginária de $\left\langle \phi_1, \widetilde{\phi}_1 \right\rangle$ restringe a escolha de J. Essa restrição pode ser entendida da seguinte maneira: Seja μ a métrica positiva definida em $\mathfrak{S}$ dada pela contração de Ω com J, de modo a termos $\mu\left(\phi_1, \tilde{\phi}_1\right) \equiv \frac{1}{2}\Omega(\phi_1, J\phi_1)$. Como $\langle ., . \rangle$ é hermitiano em $(\mathfrak{S}, J)$, ele pode ser escrito como

$$\left\langle \phi_1, \widetilde{\phi}_1 \right\rangle = \mu\left(\phi_1, \widetilde{\phi}_1\right) + \frac{i}{2}\Omega\left(\phi_1, \widetilde{\phi}_1\right) = \frac{1}{2}\Omega(\phi_1, J\phi_1) + \frac{i}{2}\Omega\left(\phi_1, \widetilde{\phi}_1\right), \tag{1.41}$$

de modo que agora J pode ser vista como a estrutura complexa que faz com que $\Omega\left(\phi_1, J\widetilde{\phi}_1\right)$ seja positiva definida em $\mathfrak{S}$ (diremos neste caso que a estrutura complexa é compatível com a estrutura simplética). Vamos ver agora como que esta restrição nos permite escolher a estrutura complexa no caso de um espaço de Minkowski, quando impomos a condição energética.

Como já dito, a condição energética é uma imposição com embasamento físico que diz que a energia de ϕ, quando visto como um campo clássico no nosso espaço tempo, deve ser igual à de ϕ_1 (ao valor médio), quando visto como um elemento do espaço de Hilbert de uma partícula. No primeiro caso, o cálculo da energia é feito com uso do tensor de energia momento $T_{\mu\nu}(\phi)$, de modo à energia associada a ϕ ser $E_{clássico} = \int_{\Sigma_0} T_{\mu\nu}(\phi)\, t^\mu d\Sigma^\nu$, onde $t^\mu = (\partial/\partial t)^\mu$ é um campo vetorial de Killing ortogonal à hipersuperfície Σ_0. No caso em que consideramos ϕ_1 como uma partícula em $\mathscr{H}$, o valor médio de sua energia nos é dado por $\langle \phi_1, \mathcal{H}\phi_1 \rangle$, onde $\mathcal{H}$ é o hamiltoniano que nos dá os deslocamentos ao longo de t^a, e pode ser escrito na forma $\mathcal{H}\phi_1 = -J\left(\mathfrak{L}_{t^a}\phi_1\right)$ ($\mathfrak{L}_{t^a}$ é a derivada de Lie em relação a t^a). A condição energética nada mais é que a imposição que $E_{clássico} = \langle \phi_1, \mathcal{H}\phi_1 \rangle$. Como a parte imaginária de $E_{clássico}$ deve ser zero, a condição energética nos fornece a seguinte equação:

$$\Omega\left(\phi, J\mathfrak{L}_{t^a}\phi\right) = 0. \tag{1.42}$$

Essa equação junto com a condição de que J tem que ser compatível com a estrutura simplética restringem as escolhas de J para um pequeno grupo de escolhas equivalentes.

1.4 Construção de uma Teoria Quântica de Campo em Espaços Estacionários

Na construção em espaços-tempo de Minkowski, escolhemos como modos de frequência positiva, aqueles que são auto-funções de $\frac{\partial}{\partial t}$. Essa escolha em Minkowski é "natural" (em espaços de Minkowski, $\frac{\partial}{\partial t}$ é um vetor de Killing) devido ao sistema de coordenadas retangulares que implica em invariância temporal e espacial da ação, o que é uma consequência do grupo de simetria de Poincaré. Porém, em espaços curvos gerais, o grupo de Poincaré sequer está definido, e não existe um motivo "natural" para escolhermos um conjunto de modos para serem os de frequência positiva. Em alguns casos especiais podemos ter outros grupos de simetria que nos permitam ter uma escolha preferencial associada a um vetor de Killing, como simetrias de rotações e translações ou o grupo de de Sitter, mas em espaços curvos gerais, nem sempre teremos vetores de Killing tipo-tempo para escolhermos os modos de frequência positiva. Sendo assim, se nos restringirmos a casos específicos de espaços curvos, é possível que exista uma escolha única preferencial para o papel de modos de frequência positiva. Esse é o caso dos espaços-tempos estacionários.

Nosso espaço-tempo é representado por uma variedade Lorentziana (Pseudo-Riemanniana) $\mathscr{M}$ munida de uma métrica $g_{\mu\nu}$. Um espaço métrico é chamado de estacionário se sua métrica $g_{\mu\nu}(x)$ não tiver dependência em t, ou seja, existe um campo vetorial global de Killing tipo-tempo. Nestes espaços podemos definir um campo vetorial t^μ para a evolução temporal da seguinte forma: $t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$, satisfazendo $t^\mu \nabla_\mu t = 1$, onde N é chamada de "*lapse function*" e N^μ de "*shift vector*"[19]. Definido t^μ, folheamos $(\mathscr{M}, g_{\mu\nu})$ com superfícies Σ_t.

Podemos escolher $\mathscr{H}$ como sendo o espaço das soluções com frequência positiva em relação a t, ou seja, temos uma escolha natural para definir os modos de frequência positiva, porém nem sempre temos um algoritmo geral para encontrar-los, exceto se nos restringirmos mais ainda para os casos em que temos uma métrica estática onde, além da condição de independência de t, temos que $g_{oj}(x) = 0$, ou seja, não temos "*shift vector*". Neste caso podemos encontrar superfícies para tempos iguais que sejam ortogonais às trajetórias de Killing.

Assim como no caso de Minkowski, iniciaremos com a construção clássica para o campo de Klein-Gordon real. Vamos trabalhar com a suposição de que $\mathscr{M}$ é globalmente hiperbólica, sendo assim nossa construção segue de forma semelhante à feita em Minkowski. A densidade Lagrangeana de um campo escalar neutro neste caso é dada por:

$$\mathscr{L}(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{-g}}{2}\left[g^{\mu\nu}(\mathbf{x})\nabla_\mu\phi(\mathbf{x})\nabla_\nu\phi(\mathbf{x}) - m^2\phi(\mathbf{x}) - \xi R(\mathbf{x})\phi^2(\mathbf{x})\right], \tag{1.43}$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$, $\phi(\mathbf{x})$ é o campo escalar clássico, m a massa do "quanta" deste campo e $R(\mathbf{x})$ o escalar de Ricci. O termo $\xi R(\mathbf{x})$ representa um acoplamento do campo com a curvatura (do campo escalar com o campo gravitacional). Poderíamos incluir termos de ordens mais elevadas em $R(\mathbf{x})$ para representar esse acoplamento (até termos como $R^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi$, onde $R^{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci), porém, desejamos construir nossa teoria da maneira mais simples possível de se generalizar a teoria em relatividade restrita para espaços curvos, de modo a não se incluir termos que não se justifiquem fisicamente (tecnicamente ou filosoficamente). No caso o termo $\xi R(x)$ mostra-se útil para determinados valores de ξ: Além do caso em que $\xi = 0$ (caso chamado de acoplamento mínimo), quando $m = 0$ temos que para $\xi = (n-2)/[4(n-1)]$, onde n é a dimensão da variedade, a ação

[19] A "*lapse function*" é dada por $\left(g^{00}\right)^{-1/2}$ em espaços estáticos, onde $\left(g^{00}\right)^{-1/2}\Delta t$ mede a distancia entre duas superfícies Σ_t e $\Sigma_{t+\Delta t}$. Já o "*shift vector*" é definido pelo campo vetorial $-g_{oj}(\mathbf{x})$ e é 0 em espaços estáticos. A "*lapse function*" em espaços estacionários é mais bem identificada com a métrica $g_{\mu\nu}$ quando escrevemos esta na forma $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} N^2 - N^\mu N_\mu & -N_\mu \\ -N_\mu & -h_{ij} \end{pmatrix}$, onde h_{ij} é a métrica Riemanniana induzida em Σ_t obtida por $g^{ij} = -h^{ij} + \frac{N^i N^j}{N^2}$. Temos também $\sqrt{-g} = N\sqrt{h}$. [12, 27, 14, 1].

$$S = \int \mathscr{L}(x) d^n x \tag{1.44}$$

se mantém constante por transformações conformes. Neste caso, ξ é chamado de acoplamento conforme (além disto uma outra justificativa apresentada em [14] (página 117) e [2] para manter esse termo é que na renormalização de uma teoria de campos interagindo em espaços tempo curvos, teremos contra termos proporcionais a $R\phi$[20]).

A equação de Klein-Gordon é então a equação de Euler-Lagrange associada à Lagrangeana 1.43, dada por:

$$\Box\phi + \left(m^2 + \xi R\right)\phi = 0, \tag{1.45}$$

onde

$$\Box\phi = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left[g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\partial_\nu\phi\right]. \tag{1.46}$$

Utilizando o campo vetorial t^μ, e introduzindo coordenadas locais t,x^a,$a = 1, 2, ..., n-1$ em Σ_t, escrevemos nesta superfície:

$$L = \int_{\Sigma_t} \mathscr{L} d^{n-1}x = \int_{\Sigma_t} \left[(n^\mu\nabla_\mu\phi)^2 - h^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi - \left(m^2 + \xi R\right)\phi^2\right] N\sqrt{h}d^{n-1}x, \tag{1.47}$$

onde h_{ab} é a métrica Riemanniana induzida em Σ_t e h seu determinante. Com uso da relação $n^\mu\nabla_\mu\phi = \frac{1}{N}\left(t^\mu - N^\mu\right)\nabla_\mu\phi = \frac{1}{N}\dot{\phi} - \frac{1}{N}N^\mu\nabla_\mu\phi$ na expressão 1.47 e 1.44, vemos que o momento π_t em Σ_t é dado por

$$\pi_t = \left.\frac{\delta S}{\delta\dot{\phi}}\right|_{\Sigma_t} = \left(n^\mu\nabla_\mu\phi\right)\sqrt{h} = \sqrt{-g}g^{0\nu}\partial_\nu\phi, \tag{1.48}$$

onde $\pi_t = \pi(., t)$ para um determinado t. Assim como em um espaço-tempo de Minkowski, para construir nossa teoria quântica de campos, procuramos por operadores $\phi(x, t)$ e $\pi(x', t)$ que satisfaçam as relações de comutação canônicas

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)\right] = i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \tag{1.49}$$

$$\left[\phi(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}', t)\right] = \left[\pi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)\right] = 0 \tag{1.50}$$

quando calculadas em uma superfície tipo tempo Σ_t com t constante (a função δ de Dirac também satisfaz $\int_{\Sigma_t}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')f(\mathbf{x})d^{n-1}x = f(\mathbf{x}')$ apenas quando calculada na hiper-superfície Σ_t).

Para exemplificar a quantização, vamos considerar brevemente o caso de uma métrica estática. Com esta suposição temos expressões muito mais simples e semelhantes às que obtivemos em espaços de Minkowski. Neste caso a equação 1.4 é escrita na forma:

$$-g^{00}(\mathbf{x})\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \mathscr{K}\phi. \tag{1.51}$$

Para que o lado esquerdo de 1.51 não tenha dependência em x, definimos uma nova métrica $\widetilde{g} = g_{00}^{-1}g$ conhecida como métrica óptica, e assim temos a mesma equação 1.4 para $\widetilde{\phi} = g_{00}^{(2-n)/4}\phi$ (no caso de $g_{00} = 1$,

[20] Ver [28] e [29], onde também é tratado um exemplo que veremos mais adiante.

$\widetilde{\phi} = \phi$, esse caso é chamado de ultra-estático). A construção se segue de maneira análoga à da seção anterior. Definimos o momento $\widetilde{\pi}$ como fizemos em 1.12, calculamos $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\pi}$ em Σ_0 e impomos as condições canônicas de comutação a $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\pi}$. O espaço de fase $\mathfrak{M}$ e o das soluções $\mathfrak{S}$ são definidos da mesma forma.

Escolhemos os modos $\widetilde{\phi_k}$ como sendo os auto estados do operador $\mathscr{K}$ com auto valor ω_k (que agora têm somado a m^2 um termo igual a ξR). Escrevendo $\widetilde{\phi_k}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\widetilde{\phi_k} e^{-i\omega_k t}}{\sqrt{2\omega_k}}$, chegamos analogamente à expressão 1.30 (ou 1.24) para nosso operador quântico $\widetilde{\Phi}$, o que nos leva a

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= g_{00}^{-(2-n)/4} \sum_k \left(\widetilde{\phi_k}(\mathbf{x}, t)\, a_k + \overline{\widetilde{\phi_k}(\mathbf{x}, t)} a_k^\dagger \right) \\ &= \sum_k \left(\phi_k(\mathbf{x}, t)\, a_k + \overline{\phi_k(\mathbf{x}, t)} a_k^\dagger \right), \end{aligned} \tag{1.52}$$

e assim encontramos uma representação para o operador Φ no caso de uma métrica estática. Voltando para o caso de métricas estacionárias, embora os modos ψ_k existam, não temos em geral um algoritmo para encontrar-los, mas podemos construir $\mathscr{H}$ a partir das soluções ψ_k caso estas sejam conhecidas, e assim poderemos escrever Φ na base dos modos ψ_k exatamente como em 1.52.

A solução obtida em 1.52 ainda utiliza uma expansão de osciladores harmônicos independentes. Com o intuito de se definir um campo quântico livre em espaços curvos em geral, vamos precisar de uma construção que não dependa de tal expansão. Antes de iniciarmos isso, para se evitar dificuldades[21] que surgem ao se considerar a ação de um campo Φ em um ponto exato x e t, vamos fazer um "*smearing*" de Φ com funções de teste f, onde, ao invés de considerarmos campos em um ponto consideraremos campos que estarão "*smeared*"[22] na vizinhança deste ponto, utilizando funções de teste f, re-interpretando assim o operador de campo como uma "média" no espaço-tempo do operador que representa o valor do campo. Isso nos permite ver o operador como uma distribuição $\Phi(f)$ (em geral, campos quantizados devem ser distribuições no espaço tempo mas não necessariamente distribuições no espaço para cada valor de t).

Definimos o espaço vetorial $\mathscr{T} \equiv C_0^\infty(\mathscr{M})$ como sendo o espaço das funções de teste em $\mathscr{M}$. Multiplicando 1.45 por $f \in \mathscr{T}$ e integrando em Σ temos a versão "*smeared*" da equação de Klein-Gordon. Φ é escrito como uma distribuição da seguinte forma:

$$\Phi(f) = \int_\Sigma \Phi(\mathbf{x})\, f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.53}$$

e assim, integrando por partes a versão "*smeared*" de 1.45, temos que $\Phi(f)$ satisfaz:

$$\Phi\left(\Box f + \left(m^2 + \xi R\right) f\right) = 0, \tag{1.54}$$

para toda f.

De modo a simplificar a leitura, frequentemente utilizaremos P para representar o operador de Klein-Gordon $\Box + \left(m^2 + \xi R\right)$, fazendo com que 1.54 fique apenas $\Phi(Pf) = 0$. Deste modo, podemos definir mapas[23] $E^- : \mathscr{T} \to C^\infty(\mathscr{M})$ e $E^+ : \mathscr{T} \to C^\infty(\mathscr{M})$ tais que para $f \in \mathscr{T}$, $\psi = E^- f$ (ou $\psi = E^+ f$)

[21] Em [30] e [31], esses problemas são apontados e discutidos para o caso de QED. As dificuldades estão relacionadas com a ideia de que teorias quânticas de campos tratam de valores de campos em pontos do espaço-tempo, porém matematicamente um campo em um ponto específico $\Phi(x, t)$ não é um operador em um espaço de Hilbert. Fisicamente esse problema se manifesta pelo fato de que seria necessária uma quantia infinita de energia para se medir um campo em um ponto do espaço-tempo [32].

[22] Não encontramos uma tradução que deixe claro em uma palavra o que queremos dizer por "*smear*". A grosso modo seria como tomar medidas em uma "mancha" ou "borrão" ao redor de um ponto do espaço tempo, e não no ponto em si.

[23] Estamos usando a notação encontrada em [33] e não a de [1], onde a métrica adotada tem assinatura $(-+++)$, sendo assim, o operador A que aparece em [1] é o nosso $-E^-$.

resolve o problema inomogêneo $P\psi = f$, com $\sup E^- f \subset J^-(f)$ e $\sup E^+ f \subset J^+(f)$ e com a intersecção $\sup E^- f \cap \sup E^+ f$ compacta. $E^- f$ e $E^+ f$ são respectivamente chamadas de soluções avançadas e soluções retardadas da equação de Klein-Gordon (a existência de $E^\pm$ é discutida mais a fundo em [25]). Definimos o mapa E como sendo:

$$Ef = E^- f - E^+ f. \tag{1.55}$$

E como $P(E^- f) = f$ e $P(E^+ f) = f$, é fácil verificar que $Ef \in \mathfrak{S}$ com $E : \mathscr{T} \to \mathfrak{S}$. Sendo assim, as soluções ψ podem ser escritas como $\psi = Ef$, que também serão encontradas no que segue na forma $\psi(f)$ ou ψ_f.

Os mapas E^+ e E^- são respectivamente as funções de Green avançadas e retardas. É importante notar que estas são determinadas apenas pelas propriedades de seus suportes no espaço tempo[24] e não dependem em nada da representação espectral (dai vem a independência em relação a alguma expansão em auto-valores e auto-funções que buscamos com essa construção). Funções de Green deste tipo[25] são bem definidas em teorias quânticas de campos em espaços-tempos globalmente hiperbólicos, o que garante que o problema de Cauchy é bem posto e que suas soluções podem ser definidas unicamente por suas condições iniciais (para mais informações e demonstrações disto, vide o apêndice de [25]).

Vamos formular nossa construção com termos de $\mathfrak{S}$. Para tanto, munimos $\mathfrak{M}$ de uma estrutura simplética $\Omega : \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} \to \mathbb{R}$, que é explicitamente dada por:

$$\begin{aligned} \Omega([\varphi_0, \pi_0], [\varphi_0', \pi_0']) &= \int_{\Sigma_0} (\pi_0 \varphi_0' - \pi_0' \varphi_0)\, d^{n-1}x \\ &= \int_{\Sigma_0} (\phi' n^\mu \nabla_\mu \phi - \phi n^\mu \nabla_\mu \phi') \sqrt{h} d^3x, \end{aligned} \tag{1.56}$$

onde utilizamos 1.48 na segunda passagem. Ω se conserva para as soluções (a integral em 1.56 não depende da superfície Σ escolhida), deste modo, podemos ver Ω como um mapa bi-linear em $\mathfrak{S}$, ou seja $\Omega : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$. O próximo passo é complexificar $\mathfrak{S}$, obtendo assim um espaço vetorial complexo $2n$-dimensional $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$, e estendemos a ação de Ω para $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$[26].

$\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ será o sub-espaço gerado pelas soluções de frequência positiva em relação ao "tempo de Killing", doravante denominadas ψ^+. Definimos o produto de Klein-Gordon em $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ como:

$$\left(\psi^+, \chi^+\right)_{KG} = -i\Omega\left(\overline{\psi}^+, \chi^+\right), \tag{1.57}$$

onde a barra $^-$ denota conjugação complexa.

Completamos $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ pela norma 1.57 de modo a tornar-lo um espaço de Cauchy e obtemos assim um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ complexo. O espaço dual $\bar{\mathscr{H}}$ será o espaço conjugado complexo de $\mathscr{H}$ e corresponderá ao sub-espaço das soluções de frequência negativa. Definimos o operador

[24] A função de Green retardada (avançada), vista como função de $f(\mathbf{x})$, tem suporte no cone de luz ao futuro (passado) do ponto $\mathbf{x}$ (vide capítulo 4 de [14]).

[25] Existem outras funções de Green (por exemplo, funções de Wightman G_+, funções de Hadamard $G^{(1)}$ ou o propagador de Feynman G_F, vide capítulo 4 de [14] para mais detalhes) que se baseiam na decomposição em frequências positivas e negativas e que não tem uma definição natural obvia caso a dinâmica dependa do tempo, além disso, essas funções não se limitam apenas aos cones de luz como é o caso de E^+ e E^-. Para uma discussão destes assuntos vide o capítulo 4 e 6 de [14].

[26] Novamente, essa extensão da estrutura simplética para o espaço das soluções deve ser vista como uma associação de um elemento de $\mathfrak{S}$ com um par $\boldsymbol{\phi}_t = [\varphi_t, \pi_t]$ que entram no cálculo de Ω, ou, analogamente, calculada da maneira apresentada na segunda igualdade de 1.56 com elementos de $\mathfrak{S}$.

$$K : \mathfrak{S} \to \mathscr{H} \tag{1.58}$$

como o responsável pela associação de $\psi \to \psi^+ \in \mathscr{H}$. Com $\mathscr{H}$, construímos o espaço de Fock $\mathscr{F}_s(\mathscr{H})$ exatamente como em 1.20.

Repare que necessitamos escolher um produto interno em $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ para completá-lo e obter nosso espaço de Hilbert, ou seja, esse completamento usa o produto interno de $\mathscr{H}$, e portanto, faz parte da escolha de $\mathscr{H}$ (definir $\mathscr{H}$ como sendo um subespaço de $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$ completado por uma norma em $\mathscr{H}$ ainda mantém a liberdade que temos na escolha de $\mathscr{H}$). Além disso, a escolha de $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ fez uso de alguma simetria envolvendo o vetor de Killing. Outra escolha de $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ implicaria em outro espaço de Hilbert.

É importante destacar agora que o produto de Klein-Gordon 1.57 entre soluções de frequência positiva e negativa é zero, e que:

$$\left(\overline{\psi}^+, \overline{\chi}^+\right)_{KG} = -i\Omega\left(\psi^+, \overline{\chi}^+\right) = i\Omega\left(\overline{\chi}^+, \psi^+\right) = -\left(\chi^+, \psi^+\right)_{KG}. \tag{1.59}$$

Com a estrutura simplética definida, o ultimo passo para escrever a versão "*smeared*" de 1.52 é destacar e formalizar algumas propriedades do mapa 1.55, expressadas no seguinte lema:

Lema 11 *O mapa $E : \mathscr{T} \to \mathfrak{S}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Cada $\psi \in \mathfrak{S}$ pode ser escrito como $\psi = Ef$ para algum $f \in \mathscr{T}$.*
2. *$Ef = 0 \Leftrightarrow f = Pg$ para algum $g \in \mathscr{T}$.*
3. *Para todo $\psi \in \mathfrak{S}$ e todo $f \in \mathscr{T}$, nós temos $\int \psi f d^4x = \Omega(Ef, \psi)$.*

Demonstração. (Demonstração dada por Wald para o Lema 3.2.1 de [1])

Prova de 1: Seja $\psi \in \mathfrak{S}$ e seja h uma função suave qualquer em $\mathscr{M}$ tal que $h = 0$ para $t \leq 0$ e $h = 1$ para $t \geq 1$. Sendo assim, $f \equiv -P(h\psi) \in \mathscr{T}$, e temos $E^- f = (1-h)\psi$ e $E^+ f = -h\psi$ como soluções da equação não homogênea. Fazendo-se $E^- f - E^+ f = Ef$, obtemos $Ef = \psi$.

Prova de 2: Seja $f = Pg$ com $g \in \mathscr{T}$, então, pela definição de $E^- f$ e $E^+ f$, temos $E^- f = E^+ f = g$, e assim $Ef = 0$. Por outro lado, se $Ef = 0$, então $E^- f = E^+ f$ e portanto, ambas pertencem a $\mathscr{T}$. Como $f = P(E^- f)$, então temos $f = Pg$ com $g \equiv E^- f \in \mathscr{T}$.

Prova de 3: Podemos escolher um intervalo $[t_1, t_2]$ para o qual $f \neq 0$ apenas dentro dele. Sendo assim, a integral do item 3 pode ser escrita, e integrada por partes, como segue:

$$\int_{t\in[t_1,t_2]} d^n x \psi P E^- f = \int_{\Sigma_{t_1}} \left(\psi n^\mu \nabla_\mu E^- f - n^\nu \nabla_\nu E^- f n^\mu \nabla_\mu \psi\right) \sqrt{h} d^{n-1}x. \tag{1.60}$$

Como $\psi \in \mathfrak{S}$ e $f \in \mathscr{T}$, então temos que ψ satisfaz $P\psi = 0$. Podemos então fazer a seguinte integral por partes

$$\int_{t\in[t_1,t_2]} d^n x P \psi E^- f = 0 = \int_{\Sigma_{t_1}} \left(E^- f n^\mu \nabla_\mu \psi - n^\nu \nabla_\nu E^- f n^\mu \nabla_\mu \psi\right) \sqrt{h} d^{n-1}x. \tag{1.61}$$

Subtraindo 1.61 de 1.60 temos

$$\int_{t\in[t_1,t_2]} d^n x \psi P E^- f = \int_{\Sigma_{t_1}} \left(\psi n^\mu \nabla_\mu E^- f - E^- f n^\mu \nabla_\mu \psi\right), \tag{1.62}$$

e como $f = P\left(E^- f\right)$, conhecendo 1.56 e sabendo que em Σ_{t_1}, $E^+ f = 0$, o que implica em $Ef = E^- f$ nessa região, temos que

$$\int \psi f d^n x = \Omega\left(Ef, \psi\right). \tag{1.63}$$

Essa propriedade nada mais é que a versão para variedades Riemannianas da primeira identidade de Green.

■

Com uso do lema 11 e de 1.59, podemos obter uma expressão para 1.53 como um operador agindo em $\mathscr{H}$ em função dos operadores de criação e aniquilação da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Phi\left(f\right) &= \int_\Sigma \Phi\left(\mathbf{x}\right) f\left(\mathbf{x}\right) d\mathbf{x} = \int \sum_i \phi_i f a_i + \overline{\phi}_i f a_i^\dagger = \\
&= \sum_i a_i \left(\overline{\int \phi_i f}\right) + a_i^\dagger \left(\int \overline{\phi}_i f\right) = \sum_i a_i \left(\overline{\Omega\left(Ef, \phi_i\right)}\right) + a_i^\dagger \left(\Omega\left(Ef, \overline{\phi}_i\right)\right) = \\
&= \sum_i a_i \left(\overline{\Omega\left(K\left(Ef\right), \phi_i\right)}\right) + a_i \left(\overline{\Omega\left(\overline{K\left(Ef\right)}, \phi_i\right)}\right) + a_i^\dagger \left(\Omega\left(K\left(Ef\right), \overline{\phi}_i\right)\right) + a_i^\dagger \left(\Omega\left(\overline{K\left(Ef\right)}, \overline{\phi}_i\right)\right) = \\
&= \sum_i i a_i \left(\overline{\left(K\left(Ef\right), \phi_i\right)_{KG}}\right) - i a_i^\dagger \left(\left(K\left(Ef\right), \phi_i\right)_{KG}\right) = \\
&= i a \left(\overline{\sum_i \left(K\left(Ef\right), \phi_i\right)_{KG}}\right) - i a^\dagger \left(\sum_i \left(K\left(Ef\right), \phi_i\right)_{KG}\right) = \\
&= i a \left(\overline{K\left(Ef\right)}\right) - i a^\dagger \left(K\left(Ef\right)\right),
\end{aligned} \tag{1.64}$$

onde K foi definido em 1.58. Note que, por conveniência, realizamos uma decomposição da solução em modos, de modo a se simplificar as passagens intermediárias.

É importante dizer que a liberdade na escolha de $\mathscr{H}$ está limitada às seguintes condições:

1. O produto interno (1.57) deve ser positivo definido em $\mathscr{H}$.
2. $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$ tem que ser igual ao espaço composto por $\mathscr{H}$ e $\bar{\mathscr{H}}$.
3. O produto interno entre um elemento qualquer de $\mathscr{H}$ e outro de $\bar{\mathscr{H}}$ é sempre zero.

Ainda assim, essa construção parte de uma escolha para quais são os estados ditos de frequência positiva e negativa (isso é feito quando escolhemos o que é $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}+}$ e o completamos com o produto definido em 1.57), podendo ser utilizada se tivermos um motivo físico para escolher quais são esses estados.

Uma outra forma de se especificar o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ e ver a liberdade envolvida nessa escolha é possível pelo procedimento que se segue. Inicialmente especificamos um produto interno real $\mu : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ que satisfaça

$$\mu(\psi, \psi) = \frac{1}{4} \sup_{\psi' \neq 0} \frac{[\Omega(\psi, \psi')]^2}{\mu(\psi', \psi')} \tag{1.65}$$

para qualquer $\psi \in \mathfrak{S}$. Utilizando o produto interno $(\psi, \psi') \equiv 2\mu(\psi, \psi')$[27], podemos completar $\mathfrak{S}$ para um espaço de Hilbert $\mathfrak{S}_\mu$ com norma 2μ. É importante notar que 1.65 não escolhe o produto interno, sendo apenas uma condição que o produto interno escolhido (e consequentemente o espaço de Hilbert escolhido) deve satisfazer, mesmo assim, 1.65 nos permite ver que o mapa $\Omega : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ é limitado na norma 2μ, e podemos estender sua ação por continuidade para $\mathfrak{S}_\mu \times \mathfrak{S}_\mu$. Como Ω é limitado, o lema de Riesz nos garante a existência de um operador limitado $J : \mathfrak{S}_\mu \to \mathfrak{S}_\mu$ que satisfaz

$$-\Omega(\psi, \psi') = 2\mu(\psi, J\psi') = (\psi, J\psi'). \tag{1.66}$$

Da definição 1.56 vemos que Ω é anti-simétrico, o que implica que $J^\dagger = -J$. E de 1.65 e 1.66 concluímos que J preserva a métrica 2μ, o que implica em $J^\dagger J = \mathbb{1}$. Sendo assim, $J^2 = -\mathbb{1}$, o que mostra que J muni $\mathfrak{S}_\mu$ com uma estrutura complexa. Definimos por $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ a complexificação de $\mathfrak{S}_\mu$, e estendemos as ações de Ω, μ e J a $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ por linearidade. O produto interno em $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ é definido por

$$(\psi, \psi') = 2\mu\left(\overline{\psi}, \psi'\right), \tag{1.67}$$

e assim $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ passa a ser um espaço de Hilbert completo. O mapa $iJ : \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \to \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ é auto-adjunto, o que nos garante, pelo teorema espectral, que $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ pode ser dividido em dois sub-espaços de J com auto valores i e $-i$. Deste modo, o critério para se escolher o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ correspondente às soluções de frequência positiva é tomar $\mathscr{H} \subset \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ como sendo o sub-espaço com auto-valor $J = i$. Vemos que o produto interno 2μ é positivo definido em $\mathscr{H}$, $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ é igual a $\mathscr{H} \cup \bar{\mathscr{H}}$ e, por 1.65, vemos que o produto interno entre um elemento de $\mathscr{H}$ e um de $\bar{\mathscr{H}}$ é zero, o que mostra que as três condições impostas para o espaço de Hilbert escolhido são satisfeitas e assim temos uma maneira bem geral de se escolher o espaço de Hilbert que representa as soluções de frequência positiva sem a necessidade de se fazer uma expansão em ondas planas ou de se definir as soluções de frequência positiva em relação a algum t definido por um vetor de Killing ortogonal a uma superfície Σ.

Essa construção é mais vantajosa por especificar uma escolha para o espaço das "*soluções de frequência positiva*" que pode ser feita em um espaço-tempo globalmente hiperbólico qualquer (não necessariamente estacionário), porém não há uma escolha única de μ para tais espaços. A generalidade na escolha de μ está relacionada com a liberdade na escolha de $\mathscr{H}$, e está diretamente relacionada com a construção de $\mathscr{F}_{in}(\mathscr{H})$, que por sua vez permite uma descrição de "*partículas*". Portanto, a falta de algoritmo para a escolha de μ, implica na falta de algoritmo para uma descrição de partículas, e onde não temos uma escolha única para um, também não a temos para o outro. Essa é a origem na ambiguidade do conceito de "*partícula*" em teoria quântica de campos em espaços curvos gerais onde não temos alguma simetria para escolher um μ preferencial. Porem é importante ressaltar que uma noção de "*partícula*" pode ser aproximada para espaços que sejam quase planos (ou quase estáticos), onde a ambiguidade no conceito de partículas só se manifestaria para modos com frequência menor do que o inverso da escala temporal da mudança na métrica (no nosso universo por exemplo, problemas apareceriam para se definir uma noção de "*partícula*" para modos com comprimento de onda maiores que o "*raio de Hubble*"[28]).

[27] Essa definição serve apenas para não ficarmos "carregando" o fator 2 ao longo de contas com uso deste produto interno. Não confundir com $(.,.)_{KG}$.

[28] O raio comóvel de Hubble é dado por c/H_0, onde H_0 é a constante de Hubble (vide [34]).

Como em espaços tempo estacionários temos uma simetria que permite uma escolha preferencial de $\mathscr{H}$ [12, 11], é de se esperar que haja também uma escolha preferencial de μ, que sirva de guia para a construção de $\mathscr{H}$. Como vemos, μ está diretamente ligado com a escolha da estrutura complexa J (assim como a definição de quais são os estados de frequência positiva e negativa), podemos então tentar generalizar as noções da condição energética para escolher J, e assim μ pode ser obtido seguindo-se os passos descritos a seguir.

Antes notamos que t^μ é um campo vetorial de Killing, e portanto satisfaz $\mathfrak{L}_t g_{\mu\nu} = 0$, onde $\mathfrak{L}_\mathfrak{t}$ representa a derivada de Lie ao longo de t^μ. Da Lagrangeana 1.47, obtemos o tensor de energia momento $T^{\mu\nu}$ pela formula

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}, \tag{1.68}$$

o que nos fornece

$$T^{\mu\nu} = \nabla^\mu\phi\nabla^\nu\phi - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\nabla^\rho\phi\nabla_\rho\phi + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}m^2\phi^2 - \xi\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right)\phi^2 + \xi\left[g^{\mu\nu}\Box\left(\phi^2\right) - \nabla^\mu\nabla^\nu\left(\phi^2\right)\right]. \tag{1.69}$$

Com o uso de 1.45 podemos ver que $T^{\mu\nu}$ satisfaz $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$. A energia associada a um estado ϕ é dada por [35]

$$E = \int_\Sigma T_{\mu\nu}t^\mu n^\nu \sqrt{h}d^{n-1}x. \tag{1.70}$$

Esta energia deve ser igual ao valor médio da Hamiltoniana $\mathcal{H}$ calculado por $(\phi, \mathcal{H}\phi)_{KG}$.

Para tanto, faremos as seguintes suposições:

1. $\xi R > -m^2 + \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$ (esta imposição tem o objetivo de se evitar o *Paradoxo de Klein*[29], caso haja um potencial $V(x)$, a condição passa a ser $V(x) > -\left(m^2 + \xi R\right) + \varepsilon$).
2. $N > \varepsilon_1 > 0$ para algum $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno (está imposição nos garante que o vetor de Killing $t^\mu = Nn^\mu + N^\mu$ não fique arbitrariamente pequeno).
3. $N - \frac{N^\mu N_\mu}{N} > \varepsilon_2 > 0$ para algum $\varepsilon_2 > 0$ suficientemente pequeno (está ultima condição nos protege de o vetor de Killing "*inclinar*" muito e se tornar "tipo-luz" ou "tipo-tempo").

Definimos então o que chamaremos de "*produto energético*" $E(\phi, \psi)$, que é dado por 1.70 quando trocamos o segundo ϕ de cada termo de 1.69 por um ψ.

Como t^μ é um vetor de Killing e $T_{\mu\nu}$ é simétrico, temos que $\nabla^\mu\left(T_{\mu\nu}t^\nu\right) = 0$, o que nos garante que o produto energético é independente da escolha da superfície de Cauchy Σ. Sendo assim podemos definir um mapa de evolução temporal $\tau_t : \mathfrak{S}^\mathbb{C} \to \mathfrak{S}^\mathbb{C}$ que mantêm o produto energético invariável. Usamos então $E(\phi, \psi)$ para completar $\mathfrak{S}^\mathbb{C}$, obtendo $\mathfrak{S}^\mathbb{C}_E$.

A ação do mapa τ_t, quando estendido a $\mathfrak{S}^\mathbb{C}_E$ se dá pelo operador de evolução temporal $U(t) = e^{-i\hbar t}$, onde $\hbar : \mathfrak{S}^\mathbb{C}_E \to \mathfrak{S}^\mathbb{C}_E$ é o autovalor de $\mathcal{H}$.

[29] O paradoxo de Klein é geralmente entendido como a criação contínua de pares de partículas por um campo eletromagnético forte. Porém esse fenômeno também ocorre para campos gravitacionais (como por exemplo, para um campo gravitacional de um sistema em rotação). Como consequência, uma interpretação de partícula única para as soluções da equação de Klein-Gordon não é tangível. Essa imposição tem o objetivo de garantir a positividade do operador $\mathscr{K}$ definido na seção 1.2, que implica em problemas semelhantes quando falha. Para uma discussão extensa sobre o assunto, consulte o apêndice de [14], para uma discussão mais sucinta, veja a seção 2-2-2 de [36], ou as seções 3.3 e 4.4 de [37].

Pela desigualdade de Schwarz temos que

$$\| (\phi, \psi)_{KG} \| \leq C \|\phi\|_E \|\psi\|_E , \tag{1.71}$$

onde $C \in \mathbb{R}$ é uma constante (pode se verificar que $C \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$) e $\|\phi\|_E = E(\phi, \phi)$ (essa desigualdade é provada na parte $2b$ do lema 6.1 de [12], lema esse originalmente enunciado por Chernoff[30]).

E com isso estendemos a ação de Ω e de $(.,.)_{KG}$ linearmente para $\mathfrak{S}_E^{\mathbb{C}}$. Podemos agora relacionar em $\mathfrak{S}_E^{\mathbb{C}}$ a estrutura simplética com o "*produto energético*" da seguinte maneira:

$$(\phi, \hbar\psi)_{KG} = C' E(\phi, \psi) . \tag{1.72}$$

Desejamos encontrar uma estrutura complexa J que satisfaça a equação de Schrödinger dependente do tempo $\mathcal{H}\phi = -J(\mathfrak{L}_t\phi)$ conforme feito em [11] (dessa equação podemos ver que $\hbar\phi = i\mathfrak{L}_t\phi$). Além disso, J deve satisfazer:

1. $J^2 = -\mathbb{1}$.
2. $J\overline{\hbar} = \overline{\hbar}J$.
3. $\Omega\left(\overline{\phi}, J\psi\right) > 0 (\Leftrightarrow \overline{h}^{-1} J \geq 0)$.

A desigualdade 1.71 e o Lema de Riesz implicam na existência de um operador T anti-adjunto que satisfaz $(\phi, \psi)_{KG} = E(\phi, T\psi)$. Com essa relação e 1.72, temos:

$$(\phi, \hbar T\psi)_{KG} = C' E(\phi, T\psi) = C' (\phi, \psi)_{KG} \Rightarrow \exists\, \overline{\hbar}^{-1} = \frac{T}{C'}. \tag{1.73}$$

Agora observamos que $J = -i|\overline{\hbar}|^{-1}\overline{\hbar}$ satisfaz as condições necessárias para ser a estrutura complexa desejada (note que, pela relação feita entre $\hbar$ e a derivada e Lie, o efeito de J, quando aplicado a um campo ϕ em espaços-tempos estáticos é multiplicar este por $i\omega$ e dividir por $\|\omega\|$, sendo assim, o efeito de J é multiplicar o modo de frequência positiva por i e o de frequência negativa por $-i$, o que é a estrutura complexa que desejamos[31]). J também pode ser definido como $i(P^+ + P^-)$, onde P^+ e P^- são respectivamente os projetores na parte positiva e negativa do espectro de $\overline{\hbar}$. Ambas as definições são equivalentes e generalizam para espaços-tempo estacionários a decomposição em frequência positiva e negativa.

Com J podemos definir o operador $K : \mathfrak{S}_E^{\mathbb{C}} \to K\left(\mathfrak{S}_E^{\mathbb{C}}\right)$ tal que [32]:

1. $(a + ib) K(\phi) = K(a\phi) + K(bJ\phi)$ $a, b \in \mathbb{R}$.
2. $(K(\phi), K(\psi))_{\mathscr{H}} = \mu(\phi, \psi) + \frac{i}{2}\Omega(\phi, \psi)$, onde $\mu(\phi, \psi) = \frac{1}{2}E\left(K(\phi), \overline{\hbar}^{-1} K(\psi)\right)$.

   Definimos o espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ como sendo o completamento de $K\left(\mathfrak{S}_E^{\mathbb{C}}\right)$ na norma $(K(\phi), K(\psi))_{\mathscr{H}}$, e estendemos a ação de K para $\mathscr{H}$, de modo a termos $K : \mathfrak{S}_E^{\mathbb{C}} \to \mathscr{H}$ (e assim $K(\psi) = \psi^+$ em analogia à decomposição em frequências positivas e negativas).

[30] Lema 2.1 de [38].

[31] Essa é a estrutura complexa que temos em Minkowski, por exemplo, quando fazemos a decomposição usual entre soluções de frequência positiva e negativa, sendo assim a condição energética é a "condição física" por traz dessa escolha matemática.

[32] Conforme a proposição 3.1 de [39], provada no apêndice A da mesma publicação.

3. K deve ser denso em $\mathscr{H}$.
4. $U(t)\,K(\phi) = K\left(\exp\left[-\hbar t\right]\phi\right)$.

Além disso, o produto escalar no espaço de Hilbert que representa apenas uma partícula pode ser escrito em função da estrutura simplética e do produto interno em $\mathfrak{S}$ com o uso de 1.41, como fizemos no item 2 acima, o que nos fornece

$$\left(K(\phi), K(\psi)\right)_{\mathscr{H}} = \mu(\phi,\psi) + \frac{i}{2}\Omega(\phi,\psi) = \frac{1}{2}\Omega(\phi, J\psi) + \frac{i}{2}\Omega(\phi,\psi). \tag{1.74}$$

Temos assim um método para a escolha de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ preferencial em espaços-tempo estacionários que generaliza o espaço das "*soluções de frequência positivas*" em Minkowski. Podemos agora construir o nosso operador de campo $\Phi(f)$ de forma análoga à feita em 1.64.

A existência dessa construção para o espaço que corresponde a uma partícula em função de J e K é garantida em [12] (vide o teorema 4.1 dessa publicação, que faz as mesmas suposições que foram feitas aqui)[33]. Esta é a generalização apropriada da decomposição em "*frequência positiva e negativa*". Na seção 4 de [40] é mostrado que caso haja outro parâmetro de simetria (outro campo vetorial de Killing tipo-tempo global) no espaço tempo considerado, a divisão em "*frequência positiva e negativa*" tomando como base qualquer uma das duas simetrias resultará em construções equivalentes (neste sentido, a escolha preferencial é única).

1.5 Estrutura Espinorial do Espaço Tempo

No caso específico de uma variedade Lorentziana 4-dimensional, existe, além da construção baseada em cálculo tensorial usualmente utilizada em relatividade geral, uma outra construção que utiliza o formalismo espinorial (mais precisamente 2-espinorial), um conceito introduzido de forma geral por Cartan e trabalhado por van der Waerden, que se mostra mais apropriado e fundamental em diversas situações físicas (por exemplo para o estudo de campos de Dirac em variedades, que trataremos no próximo capítulo, vide [41] para um comparativo entre a notação espinorial e a tensorial). Tendo isso em mente, será introduzida uma estrutura espinorial com a intenção de tornar mais transparentes algumas propriedades do espaço-tempo que serão utilizadas no próximo capítulo.

Dada a complexidade e extensão deste tema, entrar em detalhes no mesmo foge do escopo desta dissertação. Portanto, somente as noções necessárias para este trabalho[34] serão apresentadas de maneira superficial, apenas para que o leitor saiba do que trata esse formalismo, e o aprofundamento e explicações mais formais e rigorosas ficarão por conta das referências. Seguiremos basicamente as apresentações feitas em [16, 42] e no capítulo 13 de [5]. Um texto que cobre o assunto de forma mais abrangente de modo a esclarecer algo que talvez não esteja coberto por essa seção pode ser encontrado em [7, 43].

Iniciaremos com a construção para o espaço de Minkowski 4-dimensional onde o formalismo se baseará em um isomorfismo entre o grupo $SL(2,\mathbb{C})$ [35] e o 2-recobrimento (universal) do grupo de Lorentz[36], e a noção

[33] Mais do que isso, esse teorema afirma que essa construção é única, embora o artigo apresente apenas a prova da existência (na seção §6).

[34] Basicamente o objetivo é dar um entendimento à notação de Newman-Penrose utilizada no próximo capítulo, de modo a se verificar em quais situações ela pode ser utilizada e mostrar que ela é mais do que apenas outra "forma de escrever" a equação de Dirac.

[35] Das matrizes complexas uni-modulares 2×2, que consistem em mapas lineares com determinante 1 atuando em um espaço vetorial complexo de duas dimensões $\mathfrak{W}$.

[36] Esse 2-recobrimento é um grupo de Lie, muitas vezes denominado por $Spin(p,q)$ em variedade com dimensão $d = p+q$ (por exemplo, para um espaço de Minkowski de dimensão $3+1$, o 2-recobrimento universal do grupo de Lorentz é o grupo $Spin(3,1)$).

de um campo espinorial será obtida ao designarmos vetores deste espaço vetorial complexo bi-dimensional a pontos do espaço tempo.

Vamos supor de maneira genérica que $\mathfrak{S}$[37] seja a coleção de estados de uma teoria física em um espaço tempo de Minkowski $(\mathscr{M}, \eta_{\mu\nu})$ e seja $\mathfrak{t} \in \mathfrak{S}$ um elemento desta coleção, ao qual associamos k números reais que correspondem à medidas de $\mathfrak{t}$ em um ponto $x \in \mathscr{M}$. Deste modo obtemos um mapa $f : \mathscr{M} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}^k$ que caracteriza $\mathfrak{t}$ em função de sua medida. Desejamos que as leis físicas sejam invariantes sob isometrias de $(\mathscr{M}, \eta^{\mu\nu})$, deste modo, uma medida de $\mathfrak{t}$ feita por um observador, que corresponda ao mapa f, deve poder ser uma medida possível para um outro observador que obtenha um mapa $\tilde{f}$ para $\tilde{\mathfrak{t}} \in \mathfrak{S}$. Se representarmos essas isometrias pelo mapa $t : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ que leva os elementos da base de um "observador" para os elementos da base de outro "observador", o que queremos é que $\forall x \in \mathscr{M},\ f(x, \mathfrak{t}) = \tilde{f}\left(t(x), \tilde{\mathfrak{t}}\right)$. A cada isometria t temos então um mapa $\tilde{t} : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ que leva $\mathfrak{t}$ em $\tilde{t}(\mathfrak{t}) = \tilde{\mathfrak{t}}$. As isometrias do espaço tempo formam um grupo de Lie. Denotaremos o grupo abstrato isomórfico à esse grupo por $\mathfrak{G}$, e a cada elemento $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$ é associada a isometria $t_{\mathfrak{g}}$.

Em Minkowski, o grupo de isometrias que fazem as leis físicas serem covariantes corresponde ao grupo de Poincaré próprio, que será o nosso $\mathfrak{G}$. Ao desejar que a teoria representada pelos estados de $\mathfrak{S}$ seja quântica, queremos que os elementos de $\mathfrak{S}$ sejam vetores de norma unitária em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ definidos exceto por uma fase, sendo assim, desejamos que os elementos de $\mathfrak{S}$ sejam raios unitários em $\mathscr{H}$, que passaremos a representar por σ[38]. O requerimento imposto sobre $\tilde{t}_{\mathfrak{g}}$ de levar estados de $\mathfrak{S}$ medidos por um observador para estados que tem a mesma medida para outro observador implica que as probabilidades de transições devem ser preservadas por $\tilde{t}_{\mathfrak{g}}$, deste modo, definimos um mapa unitário[39] $U_{\mathfrak{g}} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ associado a cada $\tilde{t}_{\mathfrak{g}}$ que satisfaz $|\left(U_{\mathfrak{g}}\psi_1, U_{\mathfrak{g}}\psi_2\right)| = |(\psi_1, \psi_2)|$, $\forall \psi_1.\psi_2 \in \mathscr{H}$. Os campos que representam nossa teoria correspondem às representações projetivas (para as quais $\mathscr{H}$ é o espaço das representações) que dependem continuamente dos elementos do grupo de Poincaré. Wigner [46] obteve que os mapas unitários $U_{\mathfrak{g}}$ podem ser escolhidos de modo a termos uma representação, exceto por um sinal, do grupo de Poincaré. Essas representações correspondem à representação do recobrimento universal do grupo de Poincaré [47].

O recobrimento universal de $\mathfrak{G}$ consiste no seguinte: Como $\mathfrak{G}$ é um grupo de Lie, podemos vê-lo como uma variedade (vide [48], seção 1.1 de [49] e seção 7.2 de [1]), dessa forma fixando um ponto p em $\mathfrak{G}$, definimos $\hat{\mathfrak{G}}$ como sendo a coleção das classes de equivalência (por homotopia) das curvas de p a q conforme q percorre todos os pontos de $\mathfrak{G}$. Como as curvas em $\hat{\mathfrak{G}}$ são homotópicas às curvas que ligam dois pontos de $\mathfrak{G}$, existe um mapa de $\hat{\mathfrak{G}}$ a $\mathfrak{G}$ que associa uma classe de curvas curva $\hat{q} \in \hat{\mathfrak{G}}$ ao ponto $q \in \mathfrak{G}$, esse mapa só será unívoco se $\mathfrak{G}$ for uma variedade simplesmente conexa, se esse não for o caso, sempre podemos nos limitar a uma vizinhança U de q que seja simplesmente conexa e assim obtemos um mapa unívoco para $\hat{U}$ em $\hat{\mathfrak{G}}$. Ao impor que esses mapas sejam difeomorfismos, definimos uma estrutura de variedade em $\hat{\mathfrak{G}}$. Seja e o elemento identidade de $\mathfrak{G}$, e sejam γ_1 e γ_2 duas curvas em $\mathfrak{G}$ iniciadas em e e homotópicas a $\hat{g}_1, \hat{g}_2 \in \hat{\mathfrak{G}}$ respectivamente. Definimos $\widehat{g_1 g_2} \in \mathfrak{G}$ como sendo a classe de equivalência da curva $\gamma = \gamma_1\gamma_2$ definida pelo produto em $\mathfrak{G}$, deste modo definimos a multiplicação em $\hat{\mathfrak{G}}$, e definindo a classe de curvas equivalentes à curva trivial fechada como a identidade, temos uma estrutura de grupo para $\hat{\mathfrak{G}}$, que é o recobrimento universal de $\mathfrak{G}$. Acontece que o grupo de Poincaré não é simplesmente conexo, e qualquer curva fechada é homotópica ou à curva trivial ou à classe de equivalência das rotações por 2π, deste modo o recobrimento universal $\hat{\mathfrak{G}}$ na verdade é um 2-recobrimento de $\mathfrak{G}$.

Na notação espinorial, um vetor em $T_p\mathscr{M}$ não é mais a entidade "vetorial" mais fundamental que podemos ter em nossa variedade, e passamos esse posto para vetores em um "espaço espinorial", sendo

[37] $\mathfrak{S}$ pode ser, por exemplo, a coleção de campos tensoriais em $\mathscr{M}$ com suas componentes sendo as possíveis medidas, mas como desejamos ver quais as possibilidades, vamos deixar $\mathfrak{S}$ não especificado.

[38] Manteremos a notação de representar elementos de $\mathscr{H}$ por letras gregas minúsculas

[39] Com uso do teorema de Wigner sobre unitariedade e anti-unitariedade de operadores (apêndice do capítulo 20 de [44]) e visto que todos os elementos de $\mathfrak{G}$ podem ser deformados continuamente à identidade, a dependência contínua de $\tilde{t}_{\mathfrak{g}}$ em $\mathfrak{g}$ implica que $U_{\mathfrak{g}}$ seja unitário [45].

assim, queremos (motivados pelo isomorfismo entre o grupo de Lorentz e $SL(2,\mathbb{C})$) que em cada ponto p de nossa variedade seja associado um espaço vetorial complexo 2-dimensional $\mathfrak{W}_p$, e a simetria nesse espaço será dada pelo grupo $SL(2,\mathbb{C})$. Um elemento de $\mathfrak{W}_p$ será denotado por ξ^A. Como no caso de um espaço vetorial real, podemos construir o espaço dual de $\mathfrak{W}_p$, que será denotado por $\mathfrak{W}_p^*$, composto de mapas lineares de $\mathfrak{W}_p$ em $\mathbb{C}$ e seus elementos serão denotados por ξ_A, mas como $\mathfrak{W}_p$ é complexo, podemos utilizar a conjugação complexa de $\mathfrak{W}_p$ para definir um terceiro espaço vetorial $\overline{\mathfrak{W}}_p^*$ feito de mapas anti-lineares de $\mathfrak{W}_p$ em $\mathbb{C}$. Para diferenciar estes elementos do espaço complexo conjugado dos elementos do espaço dual, utilizaremos índices com apóstrofe, de modo que um elemento de $\overline{\mathfrak{W}}_p^*$ será escrito na forma $\eta_{A'}$, e definindo o espaço dual a $\overline{\mathfrak{W}}_p^*$ por $\overline{\mathfrak{W}}_p$, seus elementos serão representados por $\eta^{A'}$. Denotamos a imagem da conjugação complexa de $\xi^A \in \mathfrak{W}_p$ por $\overline{\xi}^{A'} \in \overline{\mathfrak{W}}_p$ e analogamente definimos $\overline{\eta}^A \in \mathfrak{W}_p$ como a conjugação complexa de $\eta^{A'} \in \overline{\mathfrak{W}}_p$. Como para cada ponto $p \in \mathscr{M}$ temos um espaço $\mathfrak{W}$, frequentemente iremos omitir o sub-índice p. Generalizamos a notação tensorial em espaços reais para $\mathfrak{W}$, sendo assim, um tensor $T^{A_1\ldots A_k}{}_{B_1\ldots B_l}{}^{A'_1\ldots A'_{k'}}{}_{B'_1\ldots B'_{l'}}$ será dado por

$$T^{A_1\ldots A_k}{}_{B_1\ldots B_l}{}^{A'_1\ldots A'_{k'}}{}_{B'_1\ldots B'_{l'}} : \underbrace{\mathfrak{W}^* \times \ldots \times \mathfrak{W}^*}_{k} \times \underbrace{\mathfrak{W} \times \ldots \times \mathfrak{W}}_{l} \times \underbrace{\overline{\mathfrak{W}}^* \times \ldots \times \overline{\mathfrak{W}}^*}_{k'} \times \underbrace{\overline{\mathfrak{W}} \times \ldots \times \overline{\mathfrak{W}}}_{l'} \to \mathbb{C},$$

e esse tensor será classificado como sendo do tipo $(k,l;k',l')$.

O isomorfismo com $SL(2,\mathbb{C})$ pode agora ser exemplificado. Na notação usual, as componentes de uma linha mundo são dadas na forma de um vetor com 4 componentes na forma $\left(u^0,u^1,u^2,u^3\right)$, porém podemos dar uma representação alternativa na forma de uma matriz 2×2 da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} u^{00'} & u^{01'} \\ u^{10'} & u^{11'} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u^0+u^1 & u^2+iu^3 \\ u^2-u^3 & u^0-u^1 \end{pmatrix}. \tag{1.75}$$

Se multiplicarmos 1.75 pela esquerda por uma matriz unimodular complexa 2×2 e pela direita pela sua matriz transposta conjugada, tanto a hermicidade como o valor do determinante serão conservados. Isso equivale a uma transformação linear de $\left(u^0,u^1,u^2,u^3\right)$ que preserva a forma

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = \left(u^0\right)^2 - \left(u^1\right)^2 - \left(u^2\right)^2 - \left(u^3\right)^2,$$

que é o determinante de 1.75.

Mais especificamente podemos fazer o que segue: Sejam η_{AB} um tensor do tipo $(0,2;0,0)$ tal que $\eta_{AB} = -\eta_{BA}$, definimos o par $(\mathfrak{W},\eta_{AB})$[40] como sendo um espaço espinorial. η_{AB} é então um mapa (isomórfico) que leva um espinor em seu dual por $\xi_B = \eta_{AB}\xi^A$[41]. Definimos η^{AB} como sendo menos a inversa de η_{AB}, ou seja

$$\eta^{AB}\eta_{BC} = -\delta^A_C, \tag{1.76}$$

e, ao contrario do que ocorre com η_{AB}, a contração de η^{AB} se dá com o segundo índice, de modo a termos $\eta^{AB}\xi_B = \xi^A$. Para os índices com apóstrofe, basta tomarmos os complexos conjugados de η_{AB} e η^{AB}.

Com os tensores do tipo $(1,0;1,0)$ podemos construir uma base para um espaço vetorial de 4 dimensões da seguinte maneira: Seja ϵ^A, ι^A uma base de $\mathfrak{W}_p$ tal que $\epsilon_A\iota^A = \eta_{AB}\epsilon^A\iota^A = 1$, então

[40] Assim como em $(\mathscr{M},\eta^{\mu\nu})$, η_{AB} faz o papel de uma "métrica" em $\mathfrak{W}$.

[41] Cabe notar que, como η_{AB} é antissimétrico em relação aos seus índices, tomaremos como convenção que a contração dos índices se dará com o primeiro índice de η_{AB}.

$$
\begin{aligned}
t^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\epsilon^A\bar{\epsilon}^{A'} + \iota^A\bar{\iota}^{A'}\right) \\
x^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\epsilon^A\bar{\iota}^{A'} + \iota^A\bar{\epsilon}^{A'}\right) \\
y^{AA'} &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\epsilon^A\bar{\iota}^{A'} - \iota^A\bar{\epsilon}^{A'}\right) \\
z^{AA'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\epsilon^A\bar{\epsilon}^{A'} - \iota^A\bar{\iota}^{A'}\right).
\end{aligned}
\tag{1.77}
$$

é uma base para este espaço vetorial 4-dimensional. Note que cada um desses vetores da base são reais (o complexo conjugado de cada um desses vetores resulta neles mesmo), deste modo, os elementos reais deste espaço vetorial resultam em um espaço vetorial real $\mathfrak{V}_p$ de 4 dimensões. Além disso, o tensor $\eta_{AA'BB'} = \eta_{AA'}\overline{\eta}_{BB'}$ tem assinatura $(+,-,-,-)$ e então define uma métrica de Lorentz em $\mathfrak{V}$[42].

Essa base pode ser entendida da seguinte forma: Ao considerarmos a intersecção de um hiper-plano $t = \pm T$ com o cone de luz em um ponto o com coordenada temporal $t = 0$, temos uma esfera de Riemann dada pela equação $x^2 + y^2 + z^2 = T^2$. Quando $t = -T$, essa esfera é chamada de "esfera celestial", e pode ser interpretada como todos os pontos que representam eventos acontecidos em $-T$ que um observador em o pode observar. A "anti-esfera celestial" consiste na esfera para $t = T$, e pode ser interpretada como todos os pontos que poderão ver o observador em o após $\Delta t = T$ (vide figura 1.11).

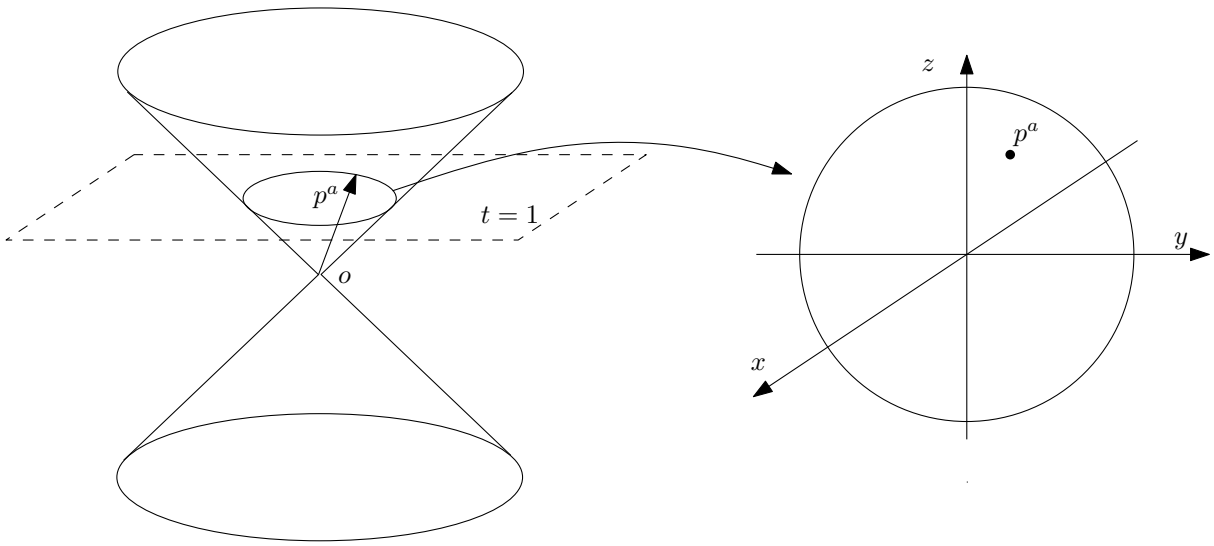

Figura 1.11: Um corte do cone de luz centrado em o pelo plano $t = 1$. A intersecção do plano com o cone corresponde à esfera celestial, e um vetor tipo luz p^a corresponde a um ponto p^a na esfera.

Tomemos então a esfera para $t = T$ e passemos um plano complexo (mais um ponto) pelo seu equador $z = 0$. Ao tomarmos as projeções de todos os pontos da esfera neste plano como sendo os pontos p' onde

[42] Pelo mesmo motivo de $\mathfrak{W}_p$, frequentemente iremos omitir o sub-índice p em $\mathfrak{V}$.

uma reta que passa pelo polo $z = (T, 0, 0, T)$ e por um ponto qualquer p da esfera intersecciona o plano complexo, temos uma projeção estereográfica da esfera no plano complexo (sendo o ponto adicionado ao plano complexo, o correspondente ao polo $(T, 0, 0, T)$ da esfera), conforme pode ser visto na figura 1.12. Fixando por exemplo $T = 1$, temos então um mapa que leva um ponto p de coordenadas $(1, x, y, z)$ em um ponto $p' = (1, X, Y, 0)$, podemos então identificar cada ponto da esfera celestial a um número complexo $\xi = X + iY$ (chamado de coordenada estereográfica). Este número pode ser representado por um par de componentes complexas (ϵ, ι) na forma $\xi = \epsilon/\iota$. ϵ e ι podem ser tratadas como componentes de um vetor espinorial, e assim as coordenadas de qualquer ponto $p' = (T, X, Y, Z)$ podem ser escritas nas formas [50]

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon\bar{\epsilon} + \iota\bar{\iota}) \to T = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\epsilon\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\epsilon} & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\iota\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \bar{\iota}\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\epsilon\bar{\epsilon} & 0\\0 & \iota\bar{\iota}\end{pmatrix}\\
X &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon\bar{\iota} + \iota\bar{\epsilon}) \to X = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\epsilon\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \bar{\iota}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\iota\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\epsilon} & 0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \epsilon\bar{\iota}\\\iota\bar{\epsilon} & 0\end{pmatrix}\\
Y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\epsilon\bar{\iota} - \iota\bar{\epsilon}) \to Y = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\epsilon\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \bar{\iota}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\\iota\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\epsilon} & 0\end{pmatrix}\right] = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \epsilon\bar{\iota}\\-\iota\bar{\epsilon} & 0\end{pmatrix}\\
Z &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon\bar{\epsilon} - \iota\bar{\iota}) \to Z = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix}\epsilon\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\epsilon} & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\\iota\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \bar{\iota}\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\epsilon\bar{\epsilon} & 0\\0 & -\iota\bar{\iota}\end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.78}
$$

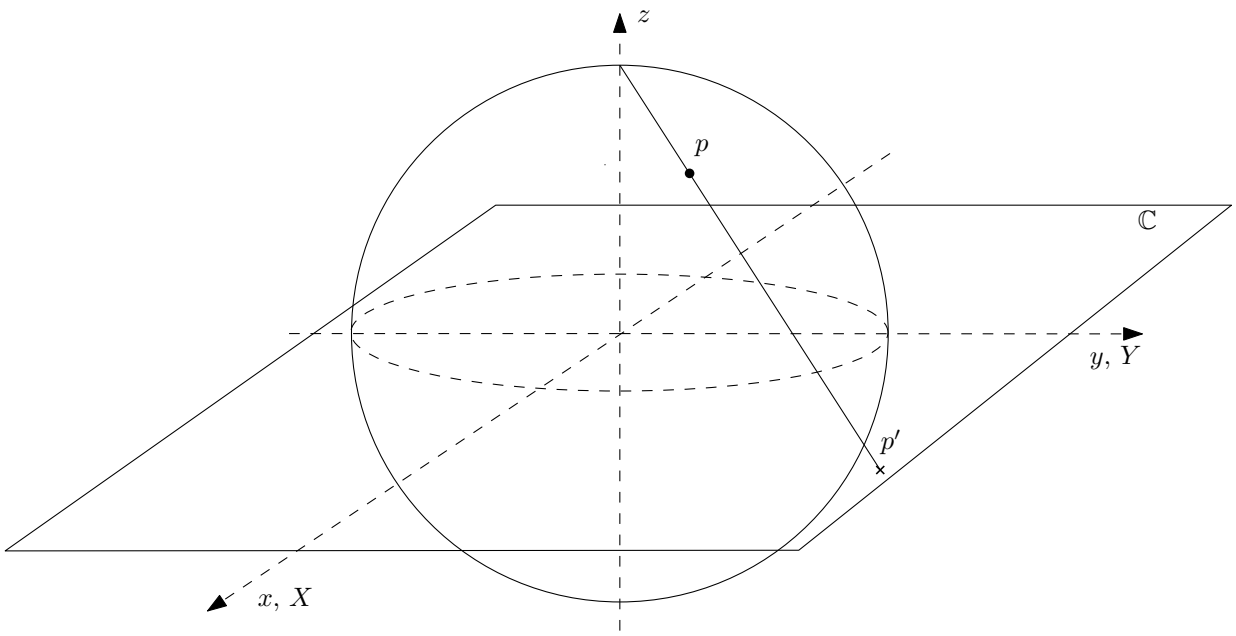

Figura 1.12: Projeção estereográfica da esfera celestial em um plano complexo. Cada ponto p na esfera define um ponto p' no plano complexo. Para definirmos o polo temos que considerar o plano complexo mais um ponto extra, visto que um vetor tangente à esfera celestial no polo nunca intersecciona o plano complexo.

E assim, a versão de coordenadas da base 1.77 previamente escrita na notação de índices abstratos é:

$$
\begin{aligned}
t^{\Gamma\Gamma'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
x^{\Gamma\Gamma'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
y^{\Gamma\Gamma'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
z^{\Gamma\Gamma'} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.79}
$$

Agora podemos ver explicitamente o isomorfismo exemplificado em 1.75. Seja $L : \mathfrak{W} \to \mathfrak{W}$ um mapa linear representado pelo tensor ${L^A}_B \in SL(2,\mathbb{C})$. O determinante de ${L^A}_B$ é dado por

$$
|L| = \frac{1}{2}\eta_{AB}\eta^{CD}{L^A}_C{L^B}_D = 1 \Leftrightarrow {L^A}_C{L^B}_D\eta_{AB} = \eta_{CD}. \tag{1.80}
$$

Podemos então, com uso de L, definir um mapa $\Lambda : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ da seguinte forma:

$$
{\Lambda^{AA'}}_{BB'} = {L^A}_B{L^{A'}}_{B'}. \tag{1.81}
$$

Por 1.80, vemos que o mapa L preserva a métrica η_{AB}, deste modo, ao aplicarmos ${\Lambda^{AA'}}_{BB'}$ em $\eta_{AA'BB'}$ e substituirmos 1.81, temos:

$$
{\Lambda^{AA'}}_{CC'}{\Lambda^{BB'}}_{DD'}\eta_{AA'BB'} = \eta_{CC'DD'}. \tag{1.82}
$$

Como o grupo estendido de Lorentz consiste dos mapas lineares que preservam a métrica em um espaço vetorial 4-dimensional, temos que ${\Lambda^{AA'}}_{BB'}$ é uma transformação de Lorentz em $\mathfrak{V}$. Assim vemos que a cada elemento de $SL(2,\mathbb{C})$, temos associado uma transformação do grupo de Lorentz próprio. Concluímos que o grupo $SL(2,\mathbb{C})$ é o recobrimento universal do grupo de Lorentz.

Voltando ao exemplo dado em 1.75, uma transformação do tipo

$$
u^a \to {\Lambda^a}_b u_b \tag{1.83}
$$

se dá através de duas matrizes uni-modulares ${L^A}_B$, sendo equivalente a

$$
u^{AA'} \to {L^A}_B{L^{A'}}_{B'}u^{BB'}, \tag{1.84}
$$

onde definimos $a = AA'$ e $b = BB'$.

Explicitamente, se definirmos

$$
L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1.85}
$$

temos que a transformação das componentes de um vetor $v^{AA'}$ escrito na base 1.77 na forma

$$
v^{AA'} = tt^{AA'} + xx^{AA'} + yy^{AA'} + zz^{AA'} \tag{1.86}
$$

é dada por

$$\begin{pmatrix} t'+z' & x'+iy' \\ x'-iy' & t'-z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}. \tag{1.87}$$

Essa relação também é válida para a matriz $-L$ e $-\overline{L}$. Vamos agora tentar dar uma interpretação para os vetores-espinores e encontrar quais as condições necessárias para que $\mathscr{M}$ admita uma estrutura espinorial. O vetor em $\mathfrak{V}$ mais simples que podemos escrever a partir de um espinor ν^A é dado por

$$v^a = \nu^A \overline{\nu}^{A'} \tag{1.88}$$

(aqui e no que segue, estaremos assumindo que um índice minúsculo corresponde a um índice maiúsculo com um índice maiúsculo com apóstrofe, ou seja, $a = AA'$).

Como $\nu^A \nu_A = -\nu_A \nu^A = 0$, segue que $v^a v_a = |\nu^A \nu_A|^2 = 0$, sendo assim, v^a é um vetor nulo. Além da da forma 1.88, um vetor nulo pode ser também da forma

$$u^a = -\nu^A \overline{\nu}^{A'}. \tag{1.89}$$

Podemos orientar temporalmente a variedade com o uso desses vetores ao considerarmos que os vetores nulos escritos na forma 1.88 apontam para o futuro e os escrito na forma 1.89 apontam para o passado. Assim temos uma primeira restrição à variedade munida da estrutura espinorial: $\mathscr{M}$ deve ser orientável temporalmente.

Note que o vetor v^a não varia se substituirmos ν^A por $e^{i\theta}\nu^A$ em 1.88, deste modo um vetor em $\mathfrak{V}$ define um vetor espinorial a menos de uma fase. Para entender melhor o que é essa fase, precisamos encontrar alguma construção geométrica em $\mathfrak{V}$ que "sinta" o efeito dela. Para tanto vamos introduzir algo que é comumente chamado na literatura de "bandeira nula"[43].

Vamos construir um tensor real em $\mathfrak{V}$ a partir de ν^A. Para tanto, tomamos o quadrado de ν^A, multiplicamos por $\eta^{A'B'}$ e somamos ao seu complexo conjugado, de modo a obtermos

$$P^{ab} = \nu^A \nu^B \eta^{A'B'} + \overline{\nu}^{A'} \overline{\nu}^{B'} \eta^{AB}. \tag{1.90}$$

Definindo $\kappa^A \in \mathfrak{W}_p | \nu_A \kappa^A = 1$, obtemos a seguinte relação:

$$\nu_A \kappa^A = 1 = \eta_{BA} \nu^B \kappa^A = -\eta_{AB} \nu^B \kappa^A \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \eta_{AB} \left(\nu^A \kappa^B - \kappa^A \nu^B \right),$$

que, ao multiplicarmos por η^{AB} resulta em

$$\eta^{AB} = \frac{1}{2} \underbrace{\eta^{AB} \eta_{AB}}_{=2} \left(\nu^A \kappa^B - \kappa^A \nu^B \right) = \nu^A \kappa^B - \kappa^A \nu^B. \tag{1.91}$$

Substituindo essa relação em 1.90, temos

$$\begin{aligned} P^{ab} &= \nu^A \nu^B \left(\overline{\nu}^{A'} \overline{\kappa}^{B'} - \overline{\kappa}^{A'} \overline{\nu}^{B'} \right) + \overline{\nu}^{A'} \overline{\nu}^{B'} \left(\nu^A \kappa^B - \kappa^A \nu^B \right) = \\ &= \nu^A \overline{\nu}^A \left(\nu^B \overline{\kappa}^{B'} + \kappa^B \overline{\nu}^{B'} \right) - \nu^B \overline{\nu}^B \left(\nu^A \overline{\kappa}^{A'} + \kappa^A \overline{\nu}^{A'} \right). \end{aligned} \tag{1.92}$$

[43] O termo "*null flag*" é frequentemente empregado nos trabalhos de Penrose. Outro texto que aborda o assunto é [51], onde a nossa "bandeira" correspondo à "*spinor blade*" da referência.

Definindo

$$k^a = \nu^A \overline{\kappa}^{A'} + \kappa^A \overline{\nu}^{A'} \in \mathscr{V}_p, \tag{1.93}$$

e substituindo 1.88 e 1.93 em 1.92, temos

$$P^{ab} = v^a k^b - k^a v^b, \tag{1.94}$$

e da definição de k^a vemos que este é um vetor real, tipo espaço ($k^a k_a = -2$) e ortogonal a v^a ($k^a v_a = 0$). Se fizermos transformações que levem $\kappa^A \to \kappa^A + \alpha\nu^A$, com $\alpha \in \mathbb{C}$, 1.94 fica inalterado e $k^a \to k^a + (\alpha + \overline{\alpha})\, v^a$ continuam sendo vetores tipo espaço que se aproximam de v^a ou de $-v^a$, dependendo do valor de α. Como não existe valor de α para o qual um vetor $k^a + (\alpha + \overline{\alpha})\, v^a$ deixe de ser tipo espaço, e como esses se aproximam de v^a conforme α cresce, todos esses vetores só podem ser tangentes ao cone de luz centrado em o. O vetor k^a, é chamado de "bandeira", e v^a é o mastro da bandeira. O plano onde os múltiplos de $k^a + (\alpha + \overline{\alpha})\, v^a$ se encontram é chamado de "plano da bandeira" (vide figura 1.13).

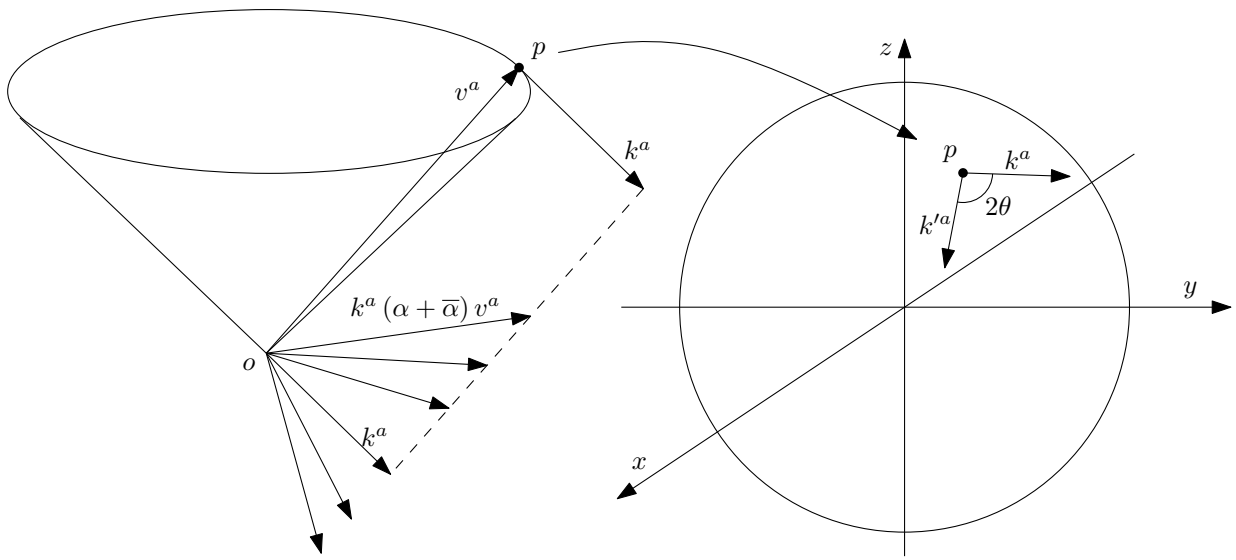

Figura 1.13: Construção da "bandeira nula". O "mastro" é representado pelo vetor v^a, a bandeira por k^a, e o plano (v^a, k^a) é o plano da bandeira. Na esfera celestial vemos o correspondente desta representação, onde o vetor k^a é um vetor em p tangente à esfera. O angulo entre duas "bandeiras" k^a e k'^a é representado também, e corresponde a 2θ.

Vamos ver agora o efeito que uma "transformação de fase" do espinor ν^A têm na bandeira nula. Ao fazermos $\nu^A \to e^{i\theta}\nu^A$, v^a não se altera, porém, definindo

$$l^a = i\nu^A \overline{\kappa}^{A'} - \kappa^A \overline{\nu}^{A'}, \tag{1.95}$$

vemos que

$$k^a \cos 2\theta + l^a \sin 2\theta = e^{i\theta}\nu^A e^{i\theta}\overline{\kappa}^{A'} + e^{i\theta}\kappa^A e^{i\theta}\overline{\nu}^{A'} \tag{1.96}$$

(visto que uma transformação $\nu^A \to e^{i\theta}\nu^A$ implica em $\kappa^A \to e^{-i\theta}\kappa^A$ para que $\nu_A\kappa^A = 1$ se preserve). Então, uma rotação de ν^A em um angulo θ implica em uma rotação de 2θ da "bandeira" k^a no plano (k^a, l^a).

Como 1.93 é tangente a v^a e ao cone de luz, ele pode ser representado por um vetor em p tangente à esfera celestial (onde p é o ponto correspondente a v^a), sendo assim, cada vetor espinorial ν^A define um ponto p na esfera celestial (correspondente à direção do mastro da bandeira) e também uma direção tangente k^a em p (correspondente ao plano da bandeira, vide figura 1.13). Se definirmos duas direções tangentes k^a e k'^a diferentes sendo dadas, respectivamente por ν^A e $e^{i\theta}\nu^A$, vemos que o angulo entre k^a e k'^a é 2θ (figura 1.13). Temos então uma definição invariante de ângulos na esfera celestial, consequentemente, podemos definir uma orientação nessa esfera e também uma orientação em $\mathscr{M}$, ao definirmos, por exemplo, que um dextrogiro se dá quando a rotação for na direção em que o plano obtido por $e^{i\theta}\nu^A$ gira conforme θ cresce. Sendo assim, além de ser orientável temporalmente, uma outra restrição é que a variedade $\mathscr{M}$ deve ser orientável espacialmente (vista como uma variedade topológica, $\mathscr{M}$ deve ser então orientável).

A transformação $\nu^A \to -\nu^A$ é equivalente a uma transformação de fase $\theta = \pi$, deste modo, o vetor k^a faz uma rotação completa e volta para seu estado inicial (faz uma rotação de 2θ), e além disso v^a e p^{ab} se mantém inalterados. Vemos então que, embora a bandeira nula permita a distinção de fases nos espinores a menos de um sinal, não existe uma estrutura geométrica local em $\mathfrak{V}$ que permite diferenciar ν^A de $-\nu^A$, porém, uma comparação não local pode permite que tal distinção seja feita. A proposta apresentada em [16] para ver essa distinção consiste em identificar cada espinor como uma classe de equivalência de "caminhos de bandeiras", e não apenas com uma única "bandeira nula" em um ponto. Para tanto, consideremos uma "bandeira nula" no ponto o em particular, que será nossa bandeira inicial. Um caminho de bandeiras é uma sequência de bandeiras em $\mathscr{M}$ iniciada em o e terminada em uma bandeira nula em um ponto $p \in \mathscr{M}$. Dois caminhos de bandeiras são equivalentes quando eles podem ser continuamente distorcidos até um ir no outro, mantendo o, p, e as bandeiras nulas nesses pontos, fixos. A existência de uma estrutura espinorial depende da existência de duas classes de equivalência para os caminhos das bandeiras, a saber a das rotações por 2π e a de nenhuma rotação (conforme figura 1.14).

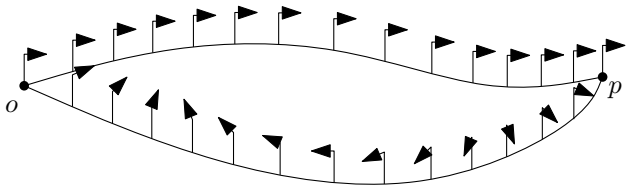

Figura 1.14: Dois "caminhos de bandeiras" diferentes em $\mathscr{M}$. O de cima consiste em bandeiras que apontam sempre para a mesma direção ao longo dos pontos da curva que unem o a p, o segundo consiste em bandeiras que sofrem uma rotação de 2π (ou seja, o espinor ao qual elas estão associadas gira π) continuamente ao longo dos pontos da curva de o a p.

Se considerarmos caminhos de bandeiras em uma curva fixa de $\mathscr{M}$, a topologia do grupo de Lorentz nos garante que existem exatamente duas classes de equivalência para os caminhos de bandeiras que podem ser associados a essa curva, mas se considerarmos que essas curvas podem ser fechadas (por exemplo, ao se fazer p coincidir com o), isso pode não acontecer e as duas curvas da figura 1.14 quando $o = p$ podem ser equivalentes. Então a terceira restrição para nossa variedade é que ela permita a existência de duas classes de equivalência para os "caminhos de bandeiras" fechados. Embora esteja muito além deste trabalho se aprofundar neste tema de maneira rigorosa, cabe dizer (mais a título de curiosidade, para indicar um caminho a um leitor com interesse em entender mais sobre esse assunto) que formalmente essas restrições estão relacionadas com um conceito de topologia algébrica conhecido por *classe de Stiefel-Whitney*. Nessa linha, essas restrições podem ser postas da seguinte forma: como $\mathscr{M}$ deve ser orientável, a primeira classe de Stiefel-Whitney w_1 deve ser nula, sendo assim pode-se mostrar [42, 16, 52, 53, 54] que os argumentos sobre a terceira restrição equivalem à imposição de que a segunda classe de Stiefel-Whitney, w_2 também seja nula[44].

[44]Bem superficialmente, a *i-ésima* classe de Stiefel-Whitney é a componente de w em $H^i(\mathscr{M}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, onde $H^i(\mathscr{M}, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ é

Recapitulando, vimos como essa estrutura espinorial se manifesta em $\mathfrak{V}$ e percebemos a existência de 3 restrições para uma variedade poder receber essa estrutura. Sendo assim, quando $\mathscr{M}$ for orientável temporalmente e espacialmente, e somente existir duas classes de equivalência para rotações de espinores ao longo de uma curva fechada, então $\mathscr{M}$ admite uma estrutura espinorial e podemos fazer a construção feita para $\mathfrak{V}$ em $T_p\mathscr{M}$ para todos os pontos $p \in \mathscr{M}$, como veremos a seguir.

Desejamos encontrar os possíveis campos que podem aparecer em uma teoria quântica em um espaço tempo com estrutura espinorial (estaremos supondo isso no que segue). Assim como temos um isomorfismo entre $SL(2,\mathbb{C})$ e o recobrimento universal do grupo de Lorentz, o grupo $ISL(2,\mathbb{C})$, dos elementos de $SL(2,\mathbb{C})$ compostos com as translações em $\mathfrak{W}$, pode ser visto como o (2-)recobrimento universal do grupo de Poincaré próprio $\hat{\mathfrak{G}}$. Desejamos então encontrar representações unitárias do grupo $ISL(2,\mathbb{C})$ em um espaço de Hilbert.

Campos espinoriais em Minkowski serão mapas de $\mathscr{M}$ em $\mathfrak{W}$. Seja t^a, x^a, y^a e z^a uma base ortonormal em Minkowski associada a um observador inercial. Para cada ponto $p \in \mathscr{M}$, definimos um mapa linear ς que leva vetores de $\mathfrak{V}$, com uma base 1.77, a vetores em $T_p\mathscr{M}$ em p ao identificar a base (t^a, x^a, y^a, z^a) com 1.77, ou seja, o mapa ς define um campo tensorial híbrido vetor-espinorial $\varsigma^a{}_{AA'} = t^a t_{AA'} - x^a x_{AA'} - y^a y_{AA'} - z^a z_{AA'}$, e assim temos um isomorfismo entre $\mathfrak{V}$ e $T_p\mathscr{M}$.

Usando $\varsigma^a{}_{AA'}$ podemos mapear campos espinoriais reais do tipo $(1,0;1,0)$ em campos vetoriais de maneira consistente. Faremos a identificação desses campos omitindo o mapa $\varsigma^a{}_{AA'}$[45].

Fisicamente, um campo espinorial ψ^A pode ser visto da seguinte maneira: A cada espinor existe uma "bandeira nula" associada (dada pela equação 1.90) que, com uso do mapa $\varsigma^a{}_{AA'}$, pode ser vista como um campo tensorial do tipo $(2,0)$ no espaço-tempo. Como campos tensoriais são objetos mensuráveis em relatividade geral, tomamos como propriedades fisicamente mensuráveis de ψ^A as quantidades determináveis a partir de p^{ab}.

Ainda temos o problema de não poder distinguir ψ^A de $-\psi^A$, porém estamos interessados na dinâmica destes campos, e como vimos, existe uma construção geométrica não local que "sente" essa diferença de sinal. Como campos espinoriais são mapas do espaço-tempo em $\mathfrak{W}$, definimos as derivadas destes em Minkowski como sendo a derivada parcial de ψ^A nas coordenadas inerciais do espaço tempo de Minkowski. Sendo assim, $\partial_{BB'}\psi^A$ é o campo espinorial do tipo $(1,1;0,1)$ cujo as componentes em relação à base $\left(\iota^A, \epsilon^A\right)$ de $\mathfrak{W}$ são

$$\partial_{\Lambda\Lambda'}\psi^\Gamma = \sum_\mu \varsigma^\mu{}_{\Lambda\Lambda'} \frac{\partial \psi^\Gamma}{\partial x^\mu}. \tag{1.97}$$

A derivada de um campo vetorial $v^{BB'}$ é dada por

$$\partial_{AA'} v^{BB'} = \varsigma^a{}_{AA'} \varsigma_b{}^{BB'} \partial_a v^b, \tag{1.98}$$

onde o índice minusculo é abaixado por η_{ab} e o índice maiúsculo é levantado por ϵ^{AB}.

um grupo de coomologia (singular) em $\mathscr{M}$ e $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ o anel cumulativo (apenas com os elementos 0 e 1). A grosso modo, isso pode ser visto como uma obstrução para a existência de $(n-i+1)$ campos vetoriais globais linearmente independentes (se for diferente de zero implicam na não existência), em particular, a primeira classe é a obstrução para orientação e a segunda para a estrutura espinoral. Isso está relacionado com a existência de duas classes de equivalência para as rotações das bandeiras ao longo de um caminho fechado, de modo que, assim como a soma dos elementos de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ é tal que $0+1=0(\text{mod } 2)$ e $0+0=1+1=1(\text{mod } 2)$, se associarmos 0 a "uma rotação" por 2π e 1 a "nenhuma rotação", temos que a soma de "uma rotação" com "nenhuma rotação" é igual a "uma rotação", que a soma de duas "nenhuma rotação" é igual a "nenhuma rotação" (obviamente), e o mais surpreendente é que a soma de "uma rotação" com "uma rotação" (que seria uma rotação por 4π) é equivalente a "nenhuma rotação", e de fato com a estrutura espinorial, os "caminhos de bandeiras" fechados associados a rotações de 4π das bandeiras são equivalente aos caminhos que podem ser deformados para o "caminho trivial".

[45] Note que já estávamos fazendo isso, por exemplo, em 1.90.

Desejamos ver como se dá a ação do grupo $ISL(2,\mathbb{C})$ nesses campos espinoriais, e obter as representações unitárias deste grupo (novamente, não é demais lembrar que não é nossa pretensão fazer isto de forma rigorosa). Wigner mostrou em [46] que as representações unitárias de $ISL(2,\mathbb{C})$ podem ser decompostas em representações irredutíveis mesmo em espaços de Hilbert com dimensão infinita. Para seguir adiante, precisamos definir o que são os operadores de Casimir da álgebra de Lie de $ISL(2,\mathbb{C})$.

A álgebra de Lie de $ISL(2,\mathbb{C})$ é isomórfica à álgebra de Lie do grupo de Poincaré (definida com uso do colchete de Poisson entre os geradores do grupo de Poincaré). Chamaremos essa álgebra de $\mathcal{L}$. A álgebra universal envelopante de $\mathcal{L}$, $\mathcal{U}(\mathcal{L})$, consiste em todos os tensores com sobre índices em $\mathcal{L}$ ($\bigoplus_{k=0}^{\infty}\mathscr{T}(k,0)$, onde $\mathscr{T}(k,0)$ é o grupo de todos os tensores do tipo $(k,0)$) junto com uma relação de equivalência que identifica dois elementos quando, em um cálculo envolvendo-os, pode-se substituir $v^a w^b - w^b v^a$ pelos colchetes de Lie $\{v,w\}$[46] (essa construção garante que qualquer álgebra de Lie pode ter uma álgebra universal envelopante, vide teorema 2.1 e corolário 2.2 de [55]). Um elemento de $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ é dito ser um elemento de Casimir se este comutar com todos os elementos de $\mathcal{L}$. As representações dos elementos de Casimir são chamadas de operadores de Casimir, e estes comutam com todas as representações da álgebra de Lie $\mathcal{L}$, e portanto com todas as representações do grupo de Lie $ISL(2,\mathbb{C})$. Como estamos interessados apenas nas representações unitárias de $ISL(2,\mathbb{C})$, o lema de Schur nos garante que todo operador de Casimir é um múltiplo do operador identidade. Os números que multiplicam o operador identidade servem como índices convenientes para as representações irredutíveis.

A álgebra universal envelopante do grupo de Poincaré possui dois elementos de Casimir independentes. Os operadores de Casimir para cada uma delas serão rotulados por m^2 e S^2, onde, ao identificarmos a álgebra de Poincaré com os campos de Killing em Minkowski, podemos interpretar m^2 como a massa ao quadrado, e S^2 como o quadrado do momento angular em torno do centro de massa [5]. As representações em relação a m^2 podem ser classificadas em quatro casos: quando $m^2 > 0$, quando $m^2 = 0$ e todas as translações são representadas pelo operador identidade, quando $m^2 = 0$ mas nem todas as translações são representadas pelo operador identidade, e quando $m^2 < 0$. Fisicamente, só nos interessam as representações em que $m^2 \geq 0$ e que, no caso de igualdade, as translações não são todas representadas pelo operador identidade. Impondo essa condição a m^2, vemos como as representações são caracterizadas em relação a S^2. Quando $m^2 > 0$, $S^2 = s(s+1)$, onde s assume os valores $s = 0, 1/2, 1, \ldots$ e é chamado de spin. Quando temos o caso $m^2 = 0$, as representações podem ser caracterizadas por um spin discreto ou contínuo, sendo que apenas o primeiro tem interesse físico, e assim os valores que s pode assumir são $s = 0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$. Essas representações foram obtidas por Wigner em [46], e descrevem todos os campos físicos em teorias quânticas. Vamos trabalhar com o caso em que $m^2 > 0$.

A equação que seleciona os tensores que representam nosso campo podem ser escritas na forma

$$\left(\Box + m^2\right)\xi^{A_1\ldots A_n} = 0, \tag{1.99}$$

onde $n = 2s$. Para $s > 0$, essa equação pode ser escrita como o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \partial_{A_1' A_1}\xi^{A_1\ldots A_n} &= \frac{m}{\sqrt{2}}\eta_{A_1'}{}^{A_2\ldots A_n} \\ \partial^{A_1' A_1}\eta_{A_1'}{}^{A_2\ldots A_n} &= -\frac{m}{\sqrt{2}}\xi^{A_1\ldots A_n}, \end{aligned} \tag{1.100}$$

onde $\eta_{A_1'}{}^{A_2\ldots A_n}$ é uma variável auxiliar. No caso particular em que $s = 1/2$, temos

[46] Mais precisamente, a álgebra universal envelopante $\mathcal{U}(\mathcal{L})$ consiste na álgebra cociente $\mathcal{L}/\mathcal{I}$, onde $\mathcal{I}$ é o menor *ideal* (à esquerda e à direita) de $\mathcal{L}$ (ou seja, essa é a álgebra das classes de equivalência $[a]$, para $a \in \mathcal{L}$, definida pela relação de equivalência $a \sim a + b$, onde $b \in \mathcal{I}$) e seus elementos são da forma $xy - yx - [x,y]$, com x, $y \in \mathcal{L}$. Para mais informação sobre álgebras de Lie e álgebras universais envelopantes de forma acessível, veja [55].

$$\begin{aligned} \partial_{A_1' A_1} \xi^{A_1} &= -\frac{m}{\sqrt{2}} \eta^{A_1'} \\ \partial_{A_1' A_1} \eta^{A_1'} &= -\frac{m}{\sqrt{2}} \xi^{A_1}, \end{aligned} \tag{1.101}$$

O caso $m^2 = 0$ é um pouco mais complicado e está bem discutido em [56]. Neste caso, quando $s = \pm 1/2$, as equações 1.101 se igualam a zero, e a representação para s negativa é obtida pelo complexo conjugado de 1.101.

Esta é a forma da equação de Dirac para um espaço-tempo de Minkowski na notação espinorial (ou notação de Newman-Penrose [57, 58, 59, 60]), e um par $\left(\xi^A, \eta^{A'}\right)$ é um espinor de Dirac.

Para duas soluções ${\xi_1}^{A_1 \ldots A_n}$ e ${\xi_2}^{A_1 \ldots A_n}$ de 1.100 com variáveis auxiliares ${\eta_{1A_1'}}^{A_2 \ldots A_n}$ e ${\eta_{2A_1'}}^{A_2 \ldots A_n}$, a corrente

$$j^{AA'} = (-i)^{n-1} \left[{\overline{\xi}_1}^{A' A_2' \ldots A_n'} \partial_{A_2' A_2} \ldots \partial_{A_n' A_n} {\xi_2}^{A A_2 \ldots A_n} + {\overline{\eta}_1}^{A A_2' \ldots A_n'} \partial_{A_2' A_2} \ldots \partial_{A_n' A_n} {\eta_2}^{A' A_2 \ldots A_n} \right] \tag{1.102}$$

é conservada (com uso de 1.100 pode-se verificar que $\partial_{AA'} j^{AA'} = 0$).

Definimos um produto interno entre ξ_1 e ξ_2 por

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_\Sigma j^{AA'} n_{AA'} d\Sigma, \tag{1.103}$$

onde Σ é uma superfície de Cauchy e $n^{AA'} = n^a$ é um vetor normal a Σ. 1.103 não depende da escolha de Σ. Não entraremos em muitos detalhes sobre este produto, mas precisamos dizer que ele é positivo definido para n impar, porém, para n par, ele é positivo definido apenas para as soluções de frequência positiva. Em ambos os casos, as soluções de frequência positiva de 1.99 com norma finita pelo produto 1.103 formam um espaço de Hilbert (quando n é par, a construção espinorial não é essencial e pode ser reformulada com uso de campos tensoriais ordinários, em especial, quando $n = 0$, 1.103 é o produto de Klein-Gordon 1.57). Nesse caso, não precisamos nos preocupar com as representações da álgebra de Lie de $ISL(2, \mathbb{C})$, ficando apenas com a álgebra de Poincaré em um espaço vetorial real $\mathscr{V}$. Porém, quando $s = 1/2$, temos que nos preocupar com essas representações. Sabemos (embora não tenha estudado o assunto a fundo) que as representações de álgebras de Lie associadas a matrizes complexas se relacionam a uma álgebra de Clifford complexa. A álgebra de $\mathscr{W}$ é a álgebra de Clifford $\mathscr{C}_2$, e os espinores são os módulos dessa álgebra. Nesse contexto, um espinor de Dirac, que é um elemento de $SL(2, \mathbb{C})$ junto com o complexo conjugado de $SL(2, \mathbb{C})$ pode ser visto, atravez da representação da álgebra de $SL(2, \mathbb{C})$ em álgebras de Clifford (mais precisamente, a álgebra de Lie de $SL(2, \mathbb{C})$ é isomorfa à álgebra de Clifford $\mathscr{C}_{3,1}(\mathbb{C})$, com o anti-comutador sendo o colchete de Lie), como um elemento da representação da álgebra de Clifford $\mathscr{C}_{3,1}(\mathbb{C})$[47]. Sendo assim, vemos que os operadores do campo de Dirac, que atuam no espaço de Hilbert das soluções de 1.99 com frequência positiva, devem anti-comutar.

A construção de uma estrutura espinorial para espaços curvos é ainda mais complexa e trabalhosa do que para espaços-tempos de Minkowski. Uma discussão detalhada sobre o assunto pode ser encontrada na seção 13.2 de [5]. Aqui nos limitaremos apenas a mostrar os resultados desta referência sobre a generalização de 1.101 para espaços curvos.

[47] Essa álgebra é exatamente a álgebra definida pelas matrizes gama de Dirac presentes na construção usual de campos de Dirac, e é frequentemente chamada de álgebra de Dirac.

Em espaços curvos em geral, não temos isometrias para reproduzir a construção feita em Minkowski, porém podemos fazer algo semelhante ao considerarmos a ação do grupo de Lorentz no espaço tangente de cada ponto de $\mathscr{M}$ ao invés de usar a ação do grupo de Poincaré na variedade. Para tanto, trabalha-se no fibrado principal de $\mathscr{M}$. Para essa construção ser válida, precisamos também impor certas exigências à nossa variedade. Desejaremos que $\mathscr{M}$ seja orientável temporalmente e espacialmente, de modo a não haver dificuldades em construir um fibrado principal de bases orientáveis. Também deseja-se que esse fibrado não seja simplesmente conexo. Mais do que isso, queremos que existam duas classes de equivalência homotópicas de curvas no fibrado. Quando temos uma estrutura espinorial na variedade, as derivadas de espinores $\nabla_{AA'}$ são definidas do mesmo modo que as derivadas covariantes e levam tensores espinoriais do tipo $(k, l; k'l')$ em tensores do tipo $(k, l+1; k'l'+1)$, de modo que $\nabla_{AA'}$ satisfaz as mesmas condições que ∇_a, e quando aplicamos essa derivada a um campo tensorial ordinário, $\nabla_{AA'}$ coincide com ∇_a. Além disso $\nabla_{AA'}$ é real e $\nabla_{AA'}\epsilon_{BC} = \nabla_{AA'}\epsilon^{BC} = 0$.

Vamos ver como fica a generalização de 1.100 em espaços curvos quando este admite uma estrutura espinorial. Para o caso de acoplamento mínimo, podemos substituir as derivadas parciais $\partial_{AA'}$ de 1.100 por $\nabla_{AA'}$ em toda a variedade. Para $m > 0$ essa substituição não garante que o problema é bem posto, exceto para o caso especial em que $s = 1/2$ (vide teorema 10.1.2 de [5]). Nesse caso, 1.101 é generalizada para espaços-tempos curvos, ficando na forma

$$\begin{aligned} \nabla_{A'_1 A_1}\xi^{A_1} &= -\frac{m}{\sqrt{2}}\eta^{A'_1} \\ \nabla_{A'_1 A_1}\eta^{A'_1} &= -\frac{m}{\sqrt{2}}\xi^{A_1}, \end{aligned} \tag{1.104}$$

e a corrente 1.102 é conservada.

Como em Minkowski $\nabla_{AA'} = \partial_{AA'}$, 1.104 também vale para espaços-tempos de Minkowski, sendo assim, usaremos essa forma também para nos referir a espaços-tempos planos.

Capítulo 2

Construção da Matriz S

Queremos estudar o processo de criação de partículas por um campo gravitacional forte. Mais especificamente vamos obter uma expressão para a matriz S que descreva a criação de partículas por um campo gravitacional em um espaço tempo globalmente hiperbólico que seja assintoticamente estacionário no passado e no futuro.

Assumiremos que na região do passado distante possamos associar estados do campo a partículas, esta região será doravante denominada de "*in*". Nesta região, os estados serão caracterizados como vetores no espaço de Fock $\mathscr{F}_{in}\,(\mathscr{H}_{in})$ construído como descrito em 1.20, para o caso do campo de Klein-Gordon, porém com $\mathscr{H}$ substituído por $\mathscr{H}_{in}$, que é o espaço de Hilbert para partículas de "*frequência positiva*" que entram na região de curvatura (por isso a denominação "*in*").

Analogamente assumimos que para a região do futuro distante (doravante denominada de "*out*"), os estados podem ser caracterizados por vetores no espaço de Fock $\mathscr{F}_{out}\,(\mathscr{H}_{out})$, onde $\mathscr{H}_{out}$ é o espaço de Hilbert que descreve partículas de frequência positiva saindo da região de curvatura. Tanto $\mathscr{H}_{in}$ como $\mathscr{H}_{out}$ são obtidos de acordo com a descrição dada na Seção 1.4.

Assumiremos também que tanto na região "*in*" quanto em "*out*", os campos podem ser tratados como livres. A matriz S nos dará a relação entre os campos em $\mathscr{F}_{in}\,(\mathscr{H}_{in})$ e $\mathscr{F}_{out}\,(\mathscr{H}_{out})$. Essa relação se dá com uso das chamadas transformações de Bogolyubov, e serão obtidas na seção 2.2 para o campo de Klein-Gordon. Cabe dizer que estas relações são possíveis apenas se certas condições forem satisfeitas. As propriedades que o espaço-tempo deve ter são assumidas como satisfeitas conforme se mostram necessárias ao longo do texto, e listadas novamente ao final da seção 2.2, servindo como um resumo das condições necessárias para que a construção feita nesse capítulo possa ser adotada. Na seção 2.3 obtemos uma expressão para a matriz S de um campo de Dirac interagindo com um campo gravitacional, onde fazemos uso da notação espinorial apresentada na seção 1.5. Finalmente apresentamos uma série de resultados interessantes que podem ser obtidos a partir dos coeficientes de Bogolyubov, como número médio de partículas criadas e probabilidade de se encontrar certo número de partículas em determinado modo.

A construção aqui exposta segue, principalmente, a feita em [8, 1, 2].

2.1 Construção da Teoria e Verificação de Equivalência Unitária para o Campo Escalar

Seja o par $(\mathfrak{S}, \Omega)$ tal que $\mathfrak{S}$ seja um espaço vetorial qualquer dotado de uma estrutura simplética Ω. O caso que trataremos nessa seção é aquele em que temos uma teoria quântica de campos livres e $\mathfrak{S}$ é o espaço das

soluções da equação de Klein-Gordon (ou de Dirac). Na teoria livre, um campo escalar $\Phi(\mathbf{x})$ deve satisfazer a equação de Klein-Gordon 1.45 (ou 1.10 no caso de acoplamento mínimo, ou seja $\xi = 0$).

Pelos motivos citados no capítulo anterior, devemos fazer um "smearing" de Φ com funções de teste f fazendo Φ se tornar um operador $\Phi(f)$.

Φ é escrito no espaço de Fock como em 1.23, onde $\eta_n \in \overset{n}{\otimes}_s \mathscr{H}_{in}$ ou $\mathscr{H}_{out}$, dependendo da região considerada, e $c \in \mathbb{C}$ (passaremos a omitir o sub-índice $_1$ para elementos do espaço de Hilbert de uma única partícula, sendo assim $\eta_1 \equiv \eta \in \mathscr{H}$). Além do espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, precisaremos de seu dual $\bar{\mathscr{H}}$. O mapa natural entre $\mathscr{H}$ e $\bar{\mathscr{H}}$ será denominado por uma barra, de modo que se $\sigma \in \mathscr{H}$, o elemento correspondente em $\bar{\mathscr{H}}$ será $\overline{\sigma}$. O espaço de Hilbert $\bar{\mathscr{H}}$ é o estado das soluções de "*frequência negativa*". Para a construção do espaço de Hilbert de soluções de "*frequência positiva*", procederemos da forma feita no final do capitulo anterior. Definimos $\mu_{in} : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ e $\mu_{out} : \mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \to \mathbb{R}$ como sendo dois mapas bilineares que satisfazem a equação 1.65 obtidos com a utilização do "*produto energético*", e com eles construímos $\mathscr{H}_{in}$ e $\mathscr{H}_{out}$ como sendo o completamento de $K\left(\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu_{in}}\right)$ e $K\left(\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu_{out}}\right)$ respectivamente na métrica $(\ ,\ )_{\mathscr{H}_{in}}$ e $(\ ,\ )_{\mathscr{H}_{out}}$ dadas por 1.74. Com $\mathscr{H}_{in}$ e $\mathscr{H}_{out}$ construímos $\mathscr{F}_{in}$ e $\mathscr{F}_{out}$ com operadores Ω_{in} e Ω_{out} respectivamente.

No caso em que $\mathscr{F}_{in}$ e $\mathscr{F}_{out}$ são unitariamente equivalentes, temos um mapa unitário $S : \mathscr{F}_{in} \to \mathscr{F}_{out}$ tal que, para todo $\psi \in \mathfrak{S}$, vale

$$S\Omega_{in}(\psi, \cdot)\, S^{-1} = \Omega_{out}(\psi, \cdot)\,. \tag{2.1}$$

Este mapa é a matriz S que desejamos obter. Portanto, para se obter S, precisamos verificar a validade da condição de equivalência unitária entre $\mathscr{F}_{in}$ e $\mathscr{F}_{out}$. A verificação da equivalência unitária entre dois espaços de Hilbert $\mathscr{H}_1$ e $\mathscr{H}_2$ pode ser feita pela verificação da validade da seguinte afirmação:

$$\exists\, C, C' > 0 \mid C\mu_1(\psi,\psi) \leq \mu_2(\psi,\psi) \leq C'\mu_1(\psi,\psi)\,, \quad \forall \psi \in \mathfrak{S}. \tag{2.2}$$

No caso em que 2.2 não é satisfeita, não existe nenhum $C > 0$ $|C\mu_1(\psi,\psi) \leq \mu_2(\psi,\psi)$ para todos $\psi \in \mathfrak{S}$. Podemos então escolher uma sequência $\{\psi_n\}$ para a qual $\mu_1(\psi_n,\psi_n) = 1$, $\forall n$ mas $\mu_2(\psi_n,\psi_n) \to 0$ (já que C pode ser tão pequeno quanto se queira). Sendo assim, uma sequência de operadores $\{\exp[i\Omega_2(\psi_2,\cdot)] - \mathbb{1}_2\}$ em $\mathscr{F}(\mathscr{H}_2)$ converge fortemente a zero quando aplicada a qualquer vetor de $\mathscr{F}(\mathscr{H}_2)$, porém, a sequência $\{\exp[i\Omega_1(\psi_1,\cdot)] - \mathbb{1}_1\}$ não converge a zero quando aplicada a um vetor de $\mathscr{F}(\mathscr{H}_1)$. Tomemos um vetor $|0\rangle_1 \in \mathscr{F}(\mathscr{H}_1)$. Se existir um mapa unitário $S : \mathscr{F}(\mathscr{H}_1) \to \mathscr{F}(\mathscr{H}_2)$, o vetor $S\,|0\rangle_1 \in \mathscr{F}(\mathscr{H}_2)$ viola a convergência forte em $\mathscr{F}(\mathscr{H}_2)$, portanto, se não existirem C e C' satisfazendo 2.2, não há equivalência unitária entre $\mathscr{F}(\mathscr{H}_1)$ e $\mathscr{F}(\mathscr{H}_2)$, e consequentemente não existe matriz S neste caso.

Quando 2.2 é satisfeita, dizemos que as normas μ_1 e μ_2 são equivalentes, e temos que uma sequência que é de Cauchy em μ_1 também é de Cauchy em μ_2. Isso nos permite identificar o completamento de $\mathfrak{S}$ em ambas as normas, que, após ser também complexificado, passaremos a chamar apenas de $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu}$. Isso mostra que, voltando ao contexto de um espaço tempo assintoticamente estacionário no passado e no futuro, $\mathscr{H}_{in}$ e $\mathscr{H}_{out}$ são sub-espaços de um mesmo espaço $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu}$.

Com $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu}$, definimos $K_{in} : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu_{in}} \to \mathscr{H}_{in}$ como a projeção ortogonal em $\mathscr{H}_{in}$, conforme feito no final do capítulo anterior, e fazemos o mesmo para definir $\overline{K_{in}} : \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu} \to \bar{\mathscr{H}}_{in}$. Como $\mathscr{H}_{in}$ e $\overline{\mathscr{H}_{in}}$ são ortogonais e geram $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu}$, temos $K_{in} + \overline{K_{in}} = \mathbb{1}$. Analogamente definimos os operadores K_{out} e $\overline{K_{out}}$ [1].

[1] As diversas notações encontradas na literatura para se especificar quais são os elementos de $\mathscr{H}$ e $\bar{\mathscr{H}}$, varias vezes diferem entre si e frequentemente não estão bem especificadas no texto. Embora esta seção e a seção a seguir estejam seguindo o tratamento apresentado em [8] e em [1], nossa notação difere das destes trabalhos (até porque elas mesmas diferem entre si) com a intenção de tornar mais claras as ideias desta construção. Sendo assim é importante frisar a ação dos mapas K e $\overline{K}$. Lembremos que estes operadores são aplicados nos elementos $Ef \in \mathfrak{S}^{\mathbb{C}}_{\mu}$. De modo a simplificar esta notação, chamaremos

O produto interno de duas soluções da equação de Klein-Gordon, ϕ_1 e ϕ_2 é dado por 1.57 (ou por 1.16 no caso da região "*in*" e "*out*" serem planas), onde Σ é uma superfície de Cauchy dentro da região estacionária (no passado ou futuro distante) e $(\phi_1, \phi_2)_{KG}$ independe de sua escolha.

Para o campo livre, podemos definir a ação do operador de aniquilação a e de criação $a^\dagger$, para o estado de uma partícula $\sigma \in \mathscr{H}$, em ϕ, dado pela equação 1.23, exatamente como em 1.22, e assim podemos escrever, para uma função de teste f, o operador Φ da seguinte forma:

$$\Phi(f) = i\left(a\left(\overline{\sigma}_f^-\right) - a^\dagger\left(\sigma_f^+\right)\right), \tag{2.3}$$

onde usamos 1.64 (ou seja, $\sigma_f^+ = K(Ef)$).

Ou então, no caso em que assumimos que $\mathscr{K}$ tem espectro positivo (como fizemos em 1.30), definindo $\{Ef_i\}$ como a base de soluções da equação de Klein-Gordon e $\{\sigma_i^+\}$ como base de $\mathscr{H}$ e $\{\overline{\sigma}_i^-\}$ como base de $\overline{\mathscr{H}}$,

$$\Phi = \sum_i \left\{Ef_i a\left(\overline{\sigma}_i^-\right) + \overline{Ef_i} a^\dagger\left(\sigma_i^+\right)\right\}. \tag{2.4}$$

Note que o + e o - que aparecem sobre σ_i em 2.4 e sobre σ_f em 2.3 denominam respectivamente "*frequência positiva*" e "*negativa*" para σ_i^+ e $\overline{\sigma}_i^-$, porem, $\overline{\sigma}_i^+$ tem frequência negativa, ou seja, é o fato de pertencer a $\mathscr{H}$ ou $\overline{\mathscr{H}}$ que define o sinal da frequência, e o sobre-índice + e - servem apenas para diferenciar $\overline{\sigma}_i^+$ de $\overline{\sigma}_i^-$ (o elemento dual de σ_f^+ não é necessariamente $\overline{\sigma}_f^-$, isso pode ser visto com a utilização do mapa K, onde teríamos que o dual de σ_f^+ é $\overline{K(Ef)} = \overline{K}\left(\overline{Ef}\right) = \overline{\sigma}_f^+$, que é diferente de $\overline{\sigma}_f^- = \overline{K}(Ef)$).

2.2 Obtenção da Matriz S para o Campo Escalar

Queremos que nas regiões "*in*" e "*out*" o operador se reduza ao da teoria livre. Deste modo, temos que a equação 2.3 fica da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Phi_{in}(p) &= i\left(a\left(\overline{\sigma}_p^{P-}\right) - a^\dagger\left(\sigma_p^{P+}\right)\right) \\ \Phi_{out}(f) &= i\left(b\left(\overline{\sigma}_f^{F-}\right) - b^\dagger\left(\sigma_f^{F+}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.5}$$

onde $p, f \in \mathscr{T}$ são funções de teste em "*in*" e em "*out*" respectivamente, a e $a^\dagger$ são os operadores de aniquilação e de criação respectivamente na região "*in*" e b e $b^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação na região "*out*". O P e o F que foram adicionados aos sobre-índices de σ, indicam que este elemento é solução no passado ("*in*") ou no futuro ("*out*") respectivamente (ou seja, σ_f^{F+} é um estado de frequência positiva em $\mathscr{H}_{out}$ e σ_p^{P+} é um estado de frequência positiva em $\mathscr{H}_{in}$). Como tanto $\mathscr{H}_{in}$ como $\mathscr{H}_{out}$ são

$Ef = \psi$. ψ pode ser decomposto em sua projeção em $\mathscr{H}$ e $\overline{\mathscr{H}}$, o que é o análogo a se decompor na parte de "*frequência positiva*" e "*frequência negativa*". Chamaremos $K(\psi) = \psi^+ \in \mathscr{H}$ e $\overline{K}(\psi) = \overline{\psi}^- \in \overline{\mathscr{H}}$. Note que o + e o − aparecem para nos lembrar da analogia feita para as partes de ψ, mas é a barra sobre o elemento que nos diz a qual subespaço de $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ o elemento pertence, embora os dois símbolos possam parecer redundantes, eles servem para diferenciar o caso em que calculamos, por exemplo, $K\left(\overline{\psi}\right) = \psi^-$ (como $\psi = \psi^+ + \overline{\psi}^-$, então $\overline{\psi} = \overline{\psi}^+ + \psi^-$). Além disso, a presença do sobre-índice + e − nos ajuda a diferenciar um elemento sem barra que já está decomposto no subespaço $\mathscr{H}$ (por exemplo, $\psi^+ = K(\psi)$) de um elemento sem a barra que pertence a $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ (como é o caso de ψ).

subespaços diferentes do mesmo $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$, definimos os mapas $K_{in} : \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \to \mathscr{H}_{in}$ e $K_{out} : \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}} \to \mathscr{H}_{out}$, com os quais podemos re-escrever 2.5 da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Phi_{in}(p) &= i\left(a\left(\overline{K_{in}}\sigma_p\right) - a^\dagger\left(K_{in}\sigma_p\right)\right) = i\left(a\left(\overline{K_{in}}Ep\right) - a^\dagger\left(K_{in}Ep\right)\right) \\ \Phi_{out}(f) &= i\left(b\left(\overline{K_{out}}\sigma_f\right) - b^\dagger\left(K_{out}\sigma_f\right)\right) = i\left(b\left(\overline{K_{out}}Ef\right) - b^\dagger\left(K_{out}Ef\right)\right), \end{aligned} \tag{2.6}$$

para $\forall\, \sigma_f, \sigma_p \in \mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$ e $f, p \in \mathscr{T}$ (ou seja, $\sigma_f = Ef$).

Definindo $\{\sigma_i^{P+}\}$ como uma base de $\mathscr{H}_{in}$, $\{\sigma_i^{F+}\}$ como uma base de $\mathscr{H}_{out}$, $\{P_i\}$[2] como uma base de soluções da equação de Klein-Gordon em "*in*" e $\{F_i\}$ como uma base de soluções da equação de Klein-Gordon em "*out*" podemos reescrever a equação 2.4 como

$$\begin{aligned} \phi_{in} &= \sum_i \left\{P_i a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \overline{P_i} a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\right\} \\ \phi_{out} &= \sum_i \left\{F_i b\left(\overline{\sigma}_i^{F-}\right) + \overline{F_i} b^\dagger\left(\sigma_i^{F+}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

A Matriz S deve relacionar ϕ_{in} com ϕ_{out}. Vamos definir S de modo que

$$S\phi_{in}S^{-1} = \phi_{out}. \tag{2.8}$$

Substituindo 2.7 em 2.8, temos:

$$S\sum_i \left\{P_i a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \overline{P_i} a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\right\} S^{-1} = \sum_i \left\{f F_i b\left(\overline{\sigma}_i^{F-}\right) + \overline{F_i} b^\dagger\left(\sigma_i^{F+}\right)\right\}. \tag{2.9}$$

Utilizando o produto 1.57 (ou 1.16 no caso em que a região "*in*" e "*out*" são planas) em 2.9, temos que o lado esquerdo de 2.9 fica

$$S\sum_i \{\underbrace{\left(P_j, P_i\right)_{KG}}_{\delta_{ij}} a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \underbrace{\left(P_j, \overline{P_i}\right)_{KG}}_{0} a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\} S^{-1} = Sa\left(\overline{\sigma}_j^{P-}\right) S^{-1}. \tag{2.10}$$

e assim reescrevemos 2.9 da seguinte forma:

$$Sa\left(\overline{\sigma}_j^{P-}\right) S^{-1} = \sum_i \left\{\left(P_j', F_i\right)_{KG} b\left(\overline{\sigma}_i^{F-}\right) + \left(P_j', \overline{F_i}\right)_{KG} b^\dagger\left(\sigma_i^{F+}\right)\right\}. \tag{2.11}$$

Onde P_j' é o elemento da base de soluções no passado escrito em função da base de soluções no futuro, ou seja, como a região "*out*" é uma superfície de Cauchy, P_j é completamente determinado pelos dados em Σ_{out}, deste modo, $P_j' = \Sigma_i\{\alpha_{ji}F_i + \beta_{ji}\overline{F_i}\}$[3]. Sendo assim, temos

[2] Onde P_i deve ser entendido como Ep_i. Poderíamos utilizar σ_{p_i} ou colocar f e p como sobre-índices (assim como fizemos com $\sigma_i^{F\pm}$), mas a notação ficaria muito carregada.

[3] Lembrando que são duas bases distintas do mesmo espaço $\mathfrak{S}_\mu^{\mathbb{C}}$. Outra maneira de se ver isso é que como ambos P_i e F_i são conjuntos completos dos modos em que expandimos o campo, podemos escrever elementos de um em função de elementos do outro.

$$
\begin{aligned}
\left(P'_j, F_i\right)_{KG} &= \left(\sum_k \{\alpha_{jk} F_k + \beta_{jk}\overline{F_k}\}, F_i\right)_{KG} = \sum_k \overline{\alpha_{jk}} \underbrace{(F_k, F_i)_{KG}}_{\delta_{ki}} = \overline{\alpha_{ji}} \\
\left(P'_j, \overline{F_i}\right)_{KG} &= \left(\sum_k \{\alpha_{jk} F_k + \beta_{jk}\overline{F_k}\}, \overline{f_i}\right)_{KG} = \sum_k \overline{\beta_{jk}} \underbrace{(F_k, F_i)_{KG}}_{-\delta_{ki}} = -\overline{\beta_{ji}}.
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Com estes resultados, modificamos 2.11 para:

$$
Sa\left(\overline{\sigma}_j^{P-}\right) S^{-1} = \sum_i \left\{\overline{\alpha_{ji}} b\left(\overline{\sigma}_i^{F-}\right) - \overline{\beta_{ji}} b^\dagger\left(\sigma_i^{F+}\right)\right\}. \tag{2.13}
$$

Como a região "*in*" também é uma superfície de Cauchy, podemos escrever $F_i = \sum_j \left\{\alpha'_{ij} P_j + \beta'_{ij}\overline{P_j}\right\}$. Chamemos de $F^+ = F_i$, $P^+ = \sum_j \alpha'_{ij} P_j$ e $\overline{P^-} = \sum_j \beta'_{ij}\overline{P_j}$. Vemos que F^+, P^+ e $\overline{P^-}$ são soluções da equação de Klein-Gordon e que $F^+ = P^+ + \overline{P^-}$. Essas relações entre F e P são chamadas de transformações de Bogolyubov, e os elementos de matriz α_{ij} e β_{ij} são os coeficientes de Bogolyubov. Tal transformação pode ser definida em termos de operadores atuando diretamente em $\mathscr{H}$ como segue: definimos os operadores A e B da seguinte maneira:

$$
A : \mathscr{H}_{out} \to \mathscr{H}_{in} | A \cdot \sigma^{F+} = \sigma^{P+}
$$

$$
B : \mathscr{H}_{out} \to \bar{\mathscr{H}}_{in} | B \cdot \sigma^{F+} = \overline{\sigma}^{P-}.
$$

Estes operadores precisam ser definidos em todo o espaço, de modo que para todos os elementos de $\mathscr{H}_{out}$ ao qual aplicarmos o operador A ou B, obtenhamos um elemento de $\mathscr{H}_{in}$ ou $\bar{\mathscr{H}}_{in}$ respectivamente com norma de Klein-Gordon finita. Deste modo, dada a curvatura, é necessário que esta propriedade seja satisfeita. Assumindo que este é o caso[4], podemos obter destes operadores as seguintes propriedades:

$$
\begin{aligned}
\left(F_1^+, F_2^+\right)_{KG} &= \left(P_1^+ + \overline{P_1^-}, P_2^+ + \overline{P_2^-}\right)_{KG} = \left(P_1^+, P_2^+\right)_{KG} + \left(\overline{P_1^-}, \overline{P_2^-}\right)_{KG} \Rightarrow \\
\left(\sigma_1^{F+}, \sigma_2^{F+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} &= \left(\sigma_1^{P+}, \sigma_2^{P+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} - \left(\overline{\sigma}_1^{P-}, \overline{\sigma}_2^{P-}\right)_{\mathscr{H}_{in}} = \\
&= \left(A\sigma_1^{F+}, A\sigma_2^{F+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} - \left(B\sigma_1^{F+}, B\sigma_2^{F+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} \Rightarrow A^\dagger A - B^\dagger B = \mathbb{1}
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{F_1^+}, F_2^+\right)_{KG} &= \left(\overline{P_1^+} + P_1^-, P_2^+ + \overline{P_2^-}\right)_{KG} = \left(P_1^-, P_2^+\right)_{KG} + \left(\overline{P_1^+}, \overline{P_2^-}\right)_{KG} = 0 \Rightarrow \\
\left(\overline{\sigma}_1^{F+}, \sigma_2^{F+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} &= \left(\sigma_1^{P-}, \sigma_2^{P+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} - \left(\overline{\sigma}_1^{P+}, \overline{\sigma}_2^{P-}\right)_{\mathscr{H}_{in}} = \\
&= \left(\overline{B}\overline{\sigma}_1^{F+}, A\sigma_2^{F+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} - \left(\overline{A}\overline{\sigma}_1^{F+}, B\sigma_2^{F+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} = 0 \Rightarrow A^\dagger\overline{B} = B^\dagger\overline{A}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

[4]Estes operadores podem ser definidos com o uso dos operadores K_{in} e K_{out}, o operador A, por exemplo, pode ser definido como sendo $A = K_{in} \circ K_{out}^{-1}$.

Usando a relação

$$P_j = \sum_i \left\{\alpha_{ji} F_i + \beta_{ji} \overline{F_i}\right\} \tag{2.16}$$

e chamando $P'^{+} = P_j$, $F'^{+} = \sum_i \alpha_{ji} F'_i$ e $\overline{F'^{-}} = \sum_i \beta_{ji} \overline{F_i}$, temos $P'^{+} = F'^{+} + \overline{F'^{-}}$.

Definimos C e D como:

$$C : \mathscr{H}_{in} \to \mathscr{H}_{out} | C \cdot \sigma^{P'+} = \sigma^{F'+}$$

$$D : \mathscr{H}_{in} \to \bar{\mathscr{H}}_{out} | D \cdot \sigma^{P'+} = \overline{\sigma}^{F'-}.$$

Assim como A e B, os operadores C e D também devem ser definidos em todo o espaço. Assumindo como valida esta condição, podemos obter destes operadores as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned}
\left(P_1'^{+}, P_2'^{+}\right)_{KG} &= \left(F_1'^{+} + \overline{F_1'^{-}}, F_2'^{+} + \overline{F_2'^{-}}\right)_{KG} = \left(F_1'^{+}, F_2'^{+}\right)_{KG} + \left(\overline{F_1'^{-}}, \overline{F_2'^{-}}\right)_{KG} \Rightarrow \\
\left(\sigma_1^{P'+}, \sigma_2^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} &= \left(\sigma_1^{F'+}, \sigma_2^{F'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} - \left(\overline{\sigma}_1^{F'-}, \overline{\sigma}_2^{F'-}\right)_{\mathscr{H}_{out}} = \\
&= \left(C\sigma_1^{P'+}, C\sigma_2^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} - \left(D\sigma_1^{P'+}, D\sigma_2^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} \Rightarrow C^\dagger C - D^\dagger D = \mathbb{1}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}
\left(\overline{P_1'^{+}}, P_2'^{+}\right)_{KG} &= \left(\overline{F_1'^{+}} + F_1'^{-}, F_2'^{+} + \overline{F_2'^{-}}\right)_{KG} = \left(F_1'^{-}, F_2'^{+}\right)_{KG} + \left(\overline{F_1'^{+}}, \overline{F_2'^{-}}\right)_{KG} = 0 \Rightarrow \\
\left(\overline{\sigma}_1^{P'+}, \sigma_2^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} &= \left(\sigma_1^{F'-}, \sigma_2^{F'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} - \left(\overline{\sigma}_1^{F'+}, \overline{\sigma}_2^{F'-}\right)_{\mathscr{H}_{out}} = \\
&= \left(\overline{D}\overline{\sigma}_1^{P'+}, C\sigma_2^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} - \left(\overline{C}\overline{\sigma}_1^{P'+}, D\sigma_2^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} = 0 \Rightarrow C^\dagger \overline{D} = D^\dagger \overline{C}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

E ainda:

$$\begin{aligned}
&\left(F^{+}, F'^{+} + \overline{F'^{-}}\right)_{KG} = \left(P^{+} + \overline{P^{-}}, P'^{+}\right)_{KG} = \left(F^{+}, F'^{+}\right)_{KG} = \left(P^{+}, P'^{+}\right)_{KG} \Rightarrow \\
&\left(\sigma^{F+}, \sigma^{F'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} = \left(\sigma^{P+}, \sigma^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} = \left(\sigma^{F+}, C\sigma^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}} = \left(A\sigma^{F+}, \sigma^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{in}} \Rightarrow \\
&A^\dagger = C
\end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\left(F^{+},\overline{F'^{+}}+F'^{-}\right)_{KG}=\left(P^{+}+\overline{P^{-}},\overline{P'^{+}}\right)_{KG}=\left(F^{+},F'^{-}\right)_{KG}=\left(\overline{P^{-}},\overline{P'^{+}}\right)_{KG}\Rightarrow$$

$$\left(\sigma^{F+},\sigma^{F'-}\right)_{\mathscr{H}_{out}}=-\left(\overline{\sigma}^{P-},\overline{\sigma}^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{in}}=\left(\sigma^{F+},\overline{D}\overline{\sigma}^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{out}}=-\left(B\sigma^{F+},\overline{\sigma}^{P'+}\right)_{\mathscr{H}_{in}}\Rightarrow$$

$$\overline{D}=-B^{\dagger}. \tag{2.20}$$

De 2.19 podemos ver que $A^{\dagger}A=CA$ é um operador definido em todo lugar (pois estamos assumindo que A e C o são) e é auto-adjunto. Assim, pelo teorema de Hellinger-Toeplitz podemos concluir que A é limitado. Analogamente podemos concluir que B, C e D são limitados. Da igualdade obtida em 2.17, podemos provar que $C\psi=0\Leftrightarrow\psi=0$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\langle C\psi|C\psi\rangle &= \langle\psi|\psi\rangle+\langle D\psi|D\psi\rangle\Rightarrow\\ \|C\psi\|^{2} &= \|\psi\|^{2}+\|D\psi\|^{2}\geq\|\psi\|^{2}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Deste modo $C\psi=0\Leftrightarrow\psi=0$ então C é bijetor e sua inversa C^{-1} existe e está definida em todo lugar. Se substituirmos $\psi=C^{-1}\phi$ em 2.21, temos que

$$\begin{aligned}\|\phi\|^{2} &= \|C^{-1}\phi\|^{2}+\|DC^{-1}\phi\|^{2}\Rightarrow\\ \|C^{-1}\phi\|^{2} &= \|\phi\|^{2}-\|DC^{-1}\phi\|^{2}\leq\|\phi\|^{2}\Rightarrow\frac{\|C^{-1}\phi\|}{\|\phi\|}\leq 1.\end{aligned} \tag{2.22}$$

E assim vemos que C^{-1} é limitado. Analogamente obtemos com o uso de 2.14 que A^{-1} existe como um operador definido em todo lugar e é limitado.

Precisamos de relações semelhantes às de F'^{+} e F'^{-} para $\sigma^{F'+}$ e $\sigma^{F'-}$, para tanto, fazemos

$$\left(\overline{F'^{+}},\overline{F_{i}}\right)_{KG}=\left(\sum_{k}\overline{\alpha_{jk}}\overline{F_{k}},\overline{F_{i}}\right)_{KG}=-\sum_{k}\alpha_{jk}\left(F_{i},F_{k}\right)_{KG}=-\alpha_{ji}.$$

Isso implica que

$$\left(\overline{\sigma}^{F'+},\overline{\sigma}_{i}^{F-}\right)_{\mathscr{H}_{out}}=\alpha_{ji}\Rightarrow\overline{\sigma}^{F'+}=\sum_{k}\overline{\alpha_{jk}}\sigma_{k}^{F-}. \tag{2.23}$$

E com

$$\left(F'^{-},F_{i}\right)_{KG}=\left(\sum_{k}\overline{\beta_{jk}}F_{k},F_{i}\right)_{KG}=\sum_{k}\overline{\beta_{jk}}\left(F_{k},F_{i}\right)_{KG}=\overline{\beta_{ji}}$$

temos

$$\left(\sigma^{F'-},\sigma_{i}^{F+}\right)_{\mathscr{H}_{out}}=\overline{\beta_{ji}}\Rightarrow\sigma^{F'-}=\sum_{k}\overline{\beta_{jk}}\sigma_{k}^{F+}. \tag{2.24}$$

Voltando à equação 2.13, temos

$$\begin{aligned} Sa\left(\overline{\sigma}_j^{P-}\right)S^{-1} &= \sum_i \left\{\overline{\alpha_{ji}}b\left(\overline{\sigma}_i^{F-}\right) - \overline{\beta_{ji}}b^\dagger\left(\sigma_i^{F+}\right)\right\} = b\left(\overline{\sigma}^{F'+}\right) - b^\dagger\left(\sigma^{F'-}\right) = \\ &= b\left(\overline{C}\overline{\sigma}^{P'+}\right) - b^\dagger\left(\overline{D}\overline{\sigma}^{P'+}\right). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Como $P'^+ = P_j$ e $\sigma^{P'+}$ é o elemento de $\mathscr{H}_{in}$ associado a P_j, então $\overline{\sigma}^{P'+}$ é o elemento de $\bar{\mathscr{H}}_{in}$ associado a $\overline{P_j}$, e portanto, $\overline{\sigma}^{P'+} = \overline{\sigma}_j^{P-}$. Deste modo, 2.25 fica

$$Sa\left(\overline{\sigma}_j^{P-}\right)S^{-1} = b\left(\overline{C}\overline{\sigma}_j^{P-}\right) - b^\dagger\left(\overline{D}\overline{\sigma}_j^{P-}\right).$$

E como podemos escrever essa relação para todos os elementos da base $\{\sigma_j\}$, temos que para um elemento geral vale

$$Sa\left(\overline{\sigma}^{P-}\right)S^{-1} = b\left(\overline{C}\overline{\sigma}^{P-}\right) - b^\dagger\left(\overline{D}\overline{\sigma}^{P-}\right). \tag{2.26}$$

O mesmo poderia ser obtido se tivéssemos escolhidos um ϕ_{in} que tivesse apenas a parte pertencente a $\mathscr{H}_{out}$ (ou seja, $\sigma^P = \overline{\sigma}^{P-} \in \mathscr{H}_{out}$). Neste caso, como Σ_{out} é uma superfície de Cauchy, $\overline{\sigma}^{P-}$ terá uma parte $\overline{C}\overline{\sigma}^{P-}$ em $\mathscr{H}_{out}$ e outra $\overline{D}\overline{\sigma}^{P-}$ em $\mathscr{H}_{out}$. A mesma expressão pode ser obtida para $\overline{\sigma}^{P+}$, portanto passaremos agora a omitir o sobre-índice $-$.

Com esta relação podemos obter uma expressão para a matriz S. Para tanto, tomemos $|0_{in}\rangle$ como o estado de vácuo em "*in*". Quando aplicarmos a matriz S em $|0_{in}\rangle$, teremos um estado $|\Psi_{out}\rangle$ em "*out*", que não necessariamente é o estado de vácuo, ou seja:

$$S\,|0_{in}\rangle = |\Psi_{out}\rangle = (c, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \ldots), \tag{2.27}$$

onde $\eta_n \in \overset{n}{\otimes}_s \mathscr{H}_{out}$. Aplicando 2.26 em 2.27, temos que $a\left(\overline{\sigma}^P\right)|0_{in}\rangle = 0$, o que implica em

$$\begin{aligned} &\left(b\left(\overline{C}\overline{\sigma}^P\right) - b^\dagger\left(\overline{D}\overline{\sigma}^P\right)\right)S\,|0_{in}\rangle = 0 \Rightarrow b\left(\overline{C}\overline{\sigma}^P\right)|\Psi_{out}\rangle = b^\dagger\left(\overline{D}\overline{\sigma}^P\right)|\Psi_{out}\rangle \Rightarrow \\ &\left(\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_1, \sqrt{2}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_2, \sqrt{3}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_3, \ldots\right) = \left(0, c\overline{D}\overline{\sigma}^P, \sqrt{2}\,\overline{D}\overline{\sigma}^P\otimes_s\eta_1, \sqrt{3}\,\overline{D}\overline{\sigma}^P\otimes_s\eta_2, \cdots\right) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Da igualdade 2.28 podemos montar o seguinte sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_1 = 0 \\ \sqrt{2}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_2 = c\overline{D}\overline{\sigma}^P \\ \sqrt{3}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_3 = \sqrt{2}\,\overline{D}\overline{\sigma}^P\otimes_s\eta_1 \\ \sqrt{4}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_4 = \sqrt{3}\,\overline{D}\overline{\sigma}^P\otimes_s\eta_2 \\ \vdots \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_1 = 0 \\ \sqrt{2}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_2 = c\overline{DC}^{-1}\overline{C}\overline{\sigma}^P \\ \sqrt{3}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_3 = \sqrt{2}\,\overline{DC}^{-1}\overline{C}\overline{\sigma}^P\otimes_s\eta_1 \\ \sqrt{4}\,\overline{C}\overline{\sigma}^P\cdot\eta_4 = \sqrt{3}\,\overline{DC}^{-1}\overline{C}\overline{\sigma}^P\otimes_s\eta_2 \\ \vdots \end{array}\right. \tag{2.29}$$

Definimos

$$E = \overline{DC}^{-1}, \tag{2.30}$$

e como $C\sigma^P = \sigma^F$, o sistema 2.29 fica:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}^F \eta_1 = 0 \Rightarrow \eta_1 = 0 \\ \sqrt{2}\overline{\sigma}^F \eta_2 = cE\overline{\sigma}^F \\ \sqrt{3}\overline{\sigma}^F \eta_3 = \sqrt{2}E\overline{\sigma}^F \otimes_s \eta_1 \Rightarrow \eta_3 = 0 \\ \sqrt{4}\overline{\sigma}^F \eta_4 = \sqrt{3}E\sigma^F \otimes_s \eta_2 \\ \vdots \end{cases} \tag{2.31}$$

Do sistema 2.31 podemos concluir que todos os η_n com n impar são nulos, o que sugere que a criação de partículas não se dá em números impares. Podemos também estabelecer uma relação entre a ação de η_2 em um elemento de $\mathscr{H}_{out}$ e o operador E. Para que está relação seja valida e o operador E possa ser visto como um vetor em $\mathscr{H}_{out} \otimes_s \mathscr{H}_{out}$ (assim como é o caso de η_2), E deve ter as seguintes propriedades: E deve ser simétrico (visto que η_2 o é) e $tr\left(E^\dagger E\right) < \infty$, já que $\|\eta_2\|^2$ é finito (esta condição é conhecida como condição de Hilbert-Schmidt). Da definição de E vemos que $\overline{E}^\dagger = C^{\dagger^{-1}} D^\dagger$. Aplicando este operador a $\overline{C}$ e usando 2.18, temos $\left(C^{\dagger^{-1}} D^\dagger\right)\overline{C} = C^{\dagger^{-1}} C^\dagger \overline{D} = \overline{D} = \left(\overline{DC}^{-1}\right)\overline{C}$, e assim concluímos que $\overline{E}^\dagger = \overline{DC}^{-1} = E$ e provamos que E é simétrico.

Para verificar que E satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt, utilizamos 2.20 para escrever $E = -B^\dagger \overline{C}^{-1}$, deste modo $tr\left(E^\dagger E\right) = tr\left(EE^\dagger\right) = tr\left(B^\dagger \overline{C}^{-1}\left(\overline{C}^{-1}\right)^\dagger B\right) = tr\left(\left(\overline{A}^{-1}B\right)^\dagger \overline{A}^{-1}B\right) \leq \|\overline{A}^{-1}\| tr\left(B^\dagger B\right)$, onde na terceira igualdade utilizamos o fato evidenciado por 2.19 que $\left(C^{-1}\right)^\dagger = A^{-1}$, deste modo, como A é um operador limitado, para provar que E satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt, basta provar que $tr\left(B^\dagger B\right) < \infty$, o que deve ser feito para a curvatura que for dada[5]. Para o que segue, assumiremos como valida esta condição.

Com estas condições verificadas, podemos ver E como um vetor em $\mathscr{H}_{out} \otimes_s \mathscr{H}_{out}$ (assim como é o caso de η_2). Vamos denotar esse vetor como ϵ. Observando o sistema 2.31 obtemos por indução que para n par vale:

$$\eta_n = c\frac{(n!)^{1/2}}{2^{n/2}(n/2)!} \overset{n/2}{\otimes}_s \epsilon. \tag{2.32}$$

Deste modo determinamos a relação entre η_n e E. Temos então que:

$$S\left|0_{in}\right\rangle = \left|\Psi_{out}\right\rangle = \left(c, 0, \frac{c}{\sqrt{2}}\epsilon, 0, \frac{c\sqrt{3!}}{2} \overset{2}{\otimes}_s \epsilon, 0, \ldots\right). \tag{2.33}$$

Para escrever a matriz S em uma notação mais sugestiva, vamos diagonalizar E em cada sub-espaço $\mathscr{H}_{out}$ de modo a poder escrever ϵ como:

$$\epsilon = \sum_i k_i \lambda_i \otimes \lambda_i. \tag{2.34}$$

Onde $\{\lambda_i\}$ é uma base ortonormal de $\mathscr{H}_{out}$. Vemos que a expressão para $S\left|0_{in}\right\rangle$ obtida em 2.33 pode ser reescrita na forma exponencial da seguinte maneira:

[5] Um pouco sobre isso é falado na seção 3.3.

$$S\left|0_{in}\right\rangle = c\exp\left[\frac{1}{2}\sum_i k_i b^\dagger\left(\lambda_i\right) b^\dagger\left(\lambda_i\right)\right]\left|0_{out}\right\rangle. \tag{2.35}$$

As equações 2.33 e 2.35 nos mostram como ocorre a criação de partículas, a partir do vácuo, pela curvatura do espaço-tempo. em 2.33 é evidenciado o fato de que a criação de partículas sempre se dá em pares. Além disso, como $E \neq 0 \Leftrightarrow D \neq 0$, fica claro que não há criação de partículas quando um modo puramente composto por elementos ditos de "*frequência positiva*" no passado (ou seja, pertencente a $\mathscr{H}_{in}$) não tem uma parte de "*frequência negativa*" no futuro (ou seja, é escrito na região *out* apenas em função de elementos de $\mathscr{H}_{out}$). Em termos dos coeficientes de Bogolyubov, isto é facilmente evidenciado da seguinte maneira. Tomemos a equação de ϕ_{in} em 2.7, quando substituímos $P_i = \sum_j \left(\alpha_{ij}F_j + \beta_{ij}\overline{F_j}\right)$ nela, temos:

$$\begin{aligned}
\phi_{out} =& S\phi_{in}S^{-1} = S\sum_i \left(P_i a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \overline{P_i}a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\right)S^{-1} = \\
=& S\sum_i\left(\sum_j\left(\alpha_{ij}F_j + \beta_{ij}\overline{F_j}\right)a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \sum_j\left(\overline{\alpha_{ij}}\overline{F_j} + \overline{\beta_{ij}}F_j\right)a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\right)S^{-1} = \\
=& S\sum_j\left(\sum_i\left(\alpha_{ij}a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \overline{\beta_{ij}}a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\right)F_j + \sum_i\left(\beta_{ij}a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \overline{\alpha_{ij}}a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\right)\overline{F_j}\right)S^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.36}$$

E comparando 2.36 com a expressão de ϕ_{out} em 2.7 vemos que podemos escrever o operador de aniquilação b e de criação $b^\dagger$ em função de a e $a^\dagger$ da seguinte maneira[6]:

$$\begin{aligned}
S^{-1}b\left(\overline{\sigma}_j^{F-}\right)S &= \sum_i\left(\alpha_{ij}a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \overline{\beta_{ij}}a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\right) \\
S^{-1}b^\dagger\left(\sigma_j^{P+}\right)S &= \sum_i\left(\beta_{ij}a\left(\overline{\sigma}_i^{P-}\right) + \overline{\alpha_{ij}}a^\dagger\left(\sigma_i^{F+}\right)\right).
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Sendo assim, ao aplicarmos b em $S\left|0_{in}\right\rangle$ (que é o estado de vácuo em *in* escrito para $t \longrightarrow \infty$), temos $b\left(\overline{\sigma}_j^{F-}\right)S\left|0_{in}\right\rangle = S\sum_i \overline{\beta_{ij}}a^\dagger\left(\sigma_i^{P+}\right)\left|0_{out}\right\rangle \neq 0 \Leftrightarrow \beta_{ij} \neq 0$, ou seja, o operador de aniquilação em $\mathscr{H}_{in}$ tem uma parte de criação em $\mathscr{H}_{out}$, porém, nenhuma partícula é criada se o coeficiente de Bogolyubov β_{ij} for igual a zero. De fato a relação entre o coeficiente β_{ij} é tal que, se calcularmos o número de partículas σ_j na região *out* criadas a partir do vácuo ($\left\langle N_j\right\rangle_{out}$), temos

$$\left\langle N_j\right\rangle_{out} = \left\langle 0_{in}\left|S^{-1}b_j^\dagger b_j S\right|0_{in}\right\rangle = \left\langle 0_{in}\left|S^{-1}b_j^\dagger S S^{-1}b_j S\right|0_{in}\right\rangle\left|\sum_i \beta_{ij}\right|^2. \tag{2.38}$$

Por fim, resta verificar se os estados obtidos são normalizáveis, ou seja se $\|\left\langle 0_{in}|S^\dagger S|0_{in}\right\rangle\| = 1$. Para tanto temos que mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty}\|\eta_n\|^2 < \infty$. Com uso de 2.32 vemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\eta_n\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(c^2\frac{n!}{2^n\left(n/2\right)!\left(n/2\right)!}\|\epsilon\|^n\right), \tag{2.39}$$

[6]Este é o *ansatz* feito em [61]

onde podemos re-arranjar os termos com fatoriais de modo a verificarmos que

$$\frac{n!}{2^n\,(n/2)!\,(n/2)!} = \frac{n!}{n!!n!!} = \frac{(n-1)!!}{n!!} < 1. \tag{2.40}$$

Substituindo isso em 2.39, temos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|\eta_n\|^2 < c^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|\epsilon\|^n. \tag{2.41}$$

Como estamos supondo que a condição de Hilbert-Schmidt é satisfeita, temos que $\|\epsilon\|^2 = trE^\dagger E < \infty$, mas isso apenas não garante a convergência da soma, já que podemos ter $1 < \|\epsilon\|^2 < \infty$. Neste caso, podemos quebrar a soma 2.34 em duas partes, de modo a termos

$$\epsilon = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} k_i \lambda_i \otimes \lambda_i}_{\epsilon - \delta} + \underbrace{\sum_{j=N+1}^{\infty} k_j \lambda_j \otimes \lambda_j}_{\delta \ | \ \|\delta\| < 1}, \tag{2.42}$$

onde $\delta \in \mathscr{H}_\delta \otimes \mathscr{H}_\delta$, e $\mathscr{H}_\delta$ tem dimensão infinita.

Seja $\kappa_1 = k_i \lambda_i \otimes \lambda_i$, $\|\kappa_i\| = \|k_i\|$ e $\kappa_i \in \mathscr{H}_i \otimes \mathscr{H}_i$, onde $\mathscr{H}_i$ tem dimensão 1. Deste modo, temos que

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_{i=1}^{N} \kappa_i + \delta \in (\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathscr{H}_N \oplus \mathscr{H}_\delta) \otimes_s (\mathscr{H}_1 \oplus \mathscr{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathscr{H}_N \oplus \mathscr{H}_\delta) = \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathscr{H}_i \oplus \mathscr{H}_\delta \right) \otimes_s \left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathscr{H}_i \oplus \mathscr{H}_\delta \right). \end{aligned} \tag{2.43}$$

Como ϵ é um elemento do produto de dois espaços de Hilbert utilizados para construir nosso espaço de Fock (ou seja, $\epsilon \in \mathscr{H}_{out} \otimes_s \mathscr{H}_{out}$), vemos que $S\,|0_{in}\rangle \in \mathscr{F}_{out}\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathscr{H}_i \oplus \mathscr{H}_\delta\right)$. Vamos utilizar agora do isomorfismo que existe entre $\mathscr{F}\left(\mathscr{H}_i \oplus \mathscr{H}_j\right)$ e $\mathscr{F}\left(\mathscr{H}_i\right) \otimes \mathscr{F}\left(\mathscr{H}_j\right)$ para escrever este espaço de Fock na forma:

$$\mathscr{F}_{out}\left(\bigoplus_{i=1}^{N} \mathscr{H}_i \oplus \mathscr{H}_\delta \right) \to \bigotimes_{i=1}^{N} \mathscr{F}\left(\mathscr{H}_i\right) \otimes \mathscr{F}\left(\mathscr{H}_\delta\right). \tag{2.44}$$

Esse isomorfismo leva $S\,|0_{in}\rangle$ em $c\prod_{i=1}^{N} \Phi\left(\kappa_i\right) \Phi\left(\delta\right)$, onde $\Phi\left(\sigma\right) = \left(c\alpha_0, 0, c\alpha_2\sigma, 0, c\alpha_4\sigma \otimes_s \sigma, \ldots\right)$, com $\alpha_n = (n-1)!!/n!!$ (ou seja, são os coeficientes do termo de n partículas de 2.32).

Deste modo temos que

$$\sum_n \|\eta_n\|^2 < c^2 \prod_{i=1}^{N} \left[\sum_n \frac{(n-1)!!}{n!!} \|k_i\|^n \right] \times \sum_n \frac{(n-1)!!}{n!!} \|\delta\|^n. \tag{2.45}$$

Como $\|\delta\|^n < 1$ por definição, a convergência de 2.45 depende apenas de $\|k_i\|^n$ ser menor que um. Para se verificar se isso é verdade, tomemos um $\sigma \in \mathscr{H}_{out}$ e façamos

$$\begin{aligned}
(E\overline{\sigma}, E\overline{\sigma}) &= \left(E^{\dagger}E\overline{\sigma}, \overline{\sigma}\right) = \left(\sigma, \overline{E}^{\dagger}\overline{E}\sigma\right) \overset{(2.30)}{=} \left(\sigma, \left(C^{\dagger}\right)^{-1} D^{\dagger}DC^{-1}\sigma\right) \overset{(2.17)}{=} \\
&= \left(\sigma, \left(C^{\dagger}\right)^{-1} \left(C^{\dagger}C - \mathbb{1}\right) C^{-1}\sigma\right) = \left(\sigma, \left(\mathbb{1} - \left(C^{\dagger}\right)^{-1} C\right)\sigma\right) = \\
&= (\sigma, \sigma) - \left(\sigma, \left(C^{\dagger}\right)^{-1} C\sigma\right) = \|\sigma\|^2 - \left(C^{-1}\sigma, C^{-1}\sigma\right) = \\
&= \|\sigma\|^2 - \|C^{-1}\sigma\|^2 < \|\sigma\|. \qquad (2.46)
\end{aligned}$$

A desigualdade 2.46 somente é satisfeita para todo $\sigma \in \mathscr{H}_{out}$ se $\|k_i\|^2 < 1 \forall i$, temos então que 2.45 converge e, portanto, existe um número finito c que pode normalizar $S\left|0_{in}\right\rangle$.

Visto como a matriz S opera com o estado de vácuo, vamos verificar sua atuação no estado de uma partícula. Para tanto, tomemos o adjunto da equação 2.26, de onde obtemos:

$$Sa^{\dagger}(\sigma) S^{-1} = b^{\dagger}(C\sigma) - b(D\sigma) \Rightarrow Sa^{\dagger}(\sigma)\left|0_{in}\right\rangle = \left(b^{\dagger}(C\sigma) - b(D\sigma)\right) S\left|0_{in}\right\rangle, \qquad (2.47)$$

onde agora $\sigma \in \mathscr{H}_{in}$.

Fazendo a conta indicada em 2.47:

$$\begin{aligned}
S(0, \sigma, 0, \ldots) &= \left(b^{\dagger}(C\sigma) - b(D\sigma)\right)\left(c, 0, c\sqrt{\frac{1}{2}}\epsilon, 0, c\sqrt{\frac{3}{4\cdot 2}} \overset{2}{\otimes}_s \epsilon, 0, c\sqrt{\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}} \overset{3}{\otimes}_s \epsilon, 0, \ldots\right) = \\
&= c\left(0, C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\left(C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon\right)\otimes_s \epsilon, 0, \sqrt{\frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}}\left(C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon\right)\otimes_s \epsilon \otimes_s \epsilon, 0, \ldots\right). \qquad (2.48)
\end{aligned}$$

De 2.47 e 2.48, obtemos por indução que para n impar vale:

$$\eta_n = c\frac{(n!)^{1/2}}{2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\left[C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon\right] \overset{\frac{n-1}{2}}{\otimes}{}_s\, \epsilon, \qquad (2.49)$$

e $\eta_n = 0$ para n par.

Para escrevermos a matriz S na forma exponencial, vamos utilizar a equação 2.35 em 2.47:

$$Sa^{\dagger}(\sigma)\left|0_{in}\right\rangle = \left(b^{\dagger}(C\sigma) - b(D\sigma)\right) S\left|0_{in}\right\rangle = c\left(b^{\dagger}(C\sigma) - b(D\sigma)\right)\exp\left[\frac{1}{2}\sum_i k_i b^{\dagger}(\lambda_i) b^{\dagger}(\lambda_i)\right]\left|0_{out}\right\rangle. \qquad (2.50)$$

Para resolver 2.50 temos que analisar os comutadores entre b e $b^{\dagger}$ e também com a exponencial destes operadores. Os operadores de aniquilação e de criação comutam da seguinte maneira:

$$\left[b(\overline{\tau}), b^{\dagger}(\sigma)\right] = \overline{\tau}\sigma\mathbb{1}. \qquad (2.51)$$

Definindo $X = -\frac{1}{2}\sum_i k_i b^{\dagger}(\lambda_i) b^{\dagger}(\lambda_i)$, temos:

$$\left[X, b^{\dagger}(\sigma)\right] = \frac{1}{2}\sum_{i}\left[b^{\dagger}(\lambda_i)\cdot b^{\dagger}(\lambda_i), b^{\dagger}(\sigma)\right] = 0. \tag{2.52}$$

Com estes comutadores podemos focar a atenção agora para o desenvolvimento de $b^{\dagger}(C\sigma)\,e^{-X}$:

$$\begin{aligned} b^{\dagger}(C\sigma)\,e^{-X} &= e^{-X}e^{X}b^{\dagger}(C\sigma)\,e^{-X} = \\ &= e^{-X}\left(b^{\dagger}(C\sigma) + \left[X, b^{\dagger}(C\sigma)\right] + \frac{1}{2!}\left[X\left[X, b^{\dagger}(C\sigma)\right]\right] + \ldots\right) \overset{(2.52)}{=} e^{-X}b^{\dagger}(C\sigma). \end{aligned} \tag{2.53}$$

Para desenvolver $b(D\sigma)\,e^{-X}$ é preciso calcular os seguintes comutadores:

$$\begin{aligned} [X, b(D\sigma)] &= -\frac{1}{2}\sum_{i}k_i\left[b^{\dagger}(\lambda_i)\,b^{\dagger}(\lambda_i), b(D\sigma)\right] = \sum_{i}k_i\lambda_i D\sigma b^{\dagger}(\lambda_i) \\ \left[X, \sum_{i}k_i\lambda_i D\sigma b^{\dagger}(\lambda_i)\right] &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}k_j\lambda_i D\sigma\left[b^{\dagger}(\lambda_j)\,b^{\dagger}(\lambda_j), b^{\dagger}(\lambda_i)\right] = 0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} b(D\sigma)\,e^{-X} &= e^{-X}e^{X}b(D\sigma)\,e^{-X} = \\ &= e^{-X}\left(b(D\sigma) + [X, b(D\sigma)] + \frac{1}{2!}\left[X\left[X, b(D\sigma)\right]\right] + \ldots\right) \overset{(2.54)}{=} e^{-X}\left(b(D\sigma) + \sum_{i}k_i\lambda_i D\sigma b^{\dagger}(\lambda_i)\right). \end{aligned} \tag{2.55}$$

Deste modo, a expressão 2.50 fica:

$$Sa^{\dagger}(\sigma)\,|0_{in}\rangle = c\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i}k_i b^{\dagger}(\lambda_i)\,b^{\dagger}(\lambda_i)\right]\cdot\left(b^{\dagger}(C\sigma) - \sum_{j}k_j\lambda_j D\sigma b^{\dagger}(\lambda_j)\right)|0_{out}\rangle. \tag{2.56}$$

Note que o termo com $b(D\sigma)$ obtido em 2.55 não aparece em 2.56 porque este, quando aplicado a $|0_{out}\rangle$, implica em aniquilar o vácuo e resulta em zero.

A expressão geral para N partículas diferentes é dada por

$$S\prod_{n=0}^{N}\left(a^{\dagger}(\sigma_n)\right)|0_{in}\rangle = c\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i}k_i b^{\dagger}(\lambda_i)\,b^{\dagger}(\lambda_i)\right]\cdot\prod_{n=0}^{N}\left(b^{\dagger}(C\sigma_n) - \sum_{j}k_j\lambda_j D\sigma_n b^{\dagger}(\lambda_j)\right)|0_{out}\rangle. \tag{2.57}$$

Que é coerente com 2.35 e 2.56.

É importante relembrar que diversas condições foram assumidas como validas nesta exposição. Tais suposições, essenciais para chegarmos na expressão da matriz S da forma em que chegamos, se resumem a:

- O espaço-tempo é globalmente hiperbólico
- A dependência temporal da curvatura cai suficientemente rápido para $t \to \pm\infty$, de modo a termos uma região *in* e uma região *out* onde possamos construir teorias quânticas de campos da forma como se faz em espaços estacionários (ou seja, da forma apresentada na seção 1.4).
- Há equivalência unitária entre $\mathscr{H}_{out}$ e $\mathscr{H}_{in}$ (conforme 2.2).
- Os operadores A, B, C e D são definidos em todo lugar e suas inversas existem como operadores limitados.
- A condição de Hilbert-Schmidt é satisfeita, ou seja $tr\left(B^{\dagger}B\right) < \infty$.

Quando estas condições forem satisfeitas, o que fizemos pode ser aplicado.

2.3 Obtenção da Matriz S para Campos de Dirac

Tendo resolvido e discutido os problemas para o caso do campo escalar, trataremos agora o mesmo problema para um caso de grande interesse que é o campo de Dirac. Embora muitas ideias podem ser diretamente trazidas para este caso, existem algumas diferenças fundamentais entre eles, as quais trataremos aqui. Estaremos novamente seguindo as ideias apresentadas em [8].

O campo de Dirac, na notação espinorial (também conhecida como notação de Newman-Penrose), foi introduzido de forma superficial na seção 1.5 e pode ser estudado com mais detalhes em [57, 7, 16, 58, 59, 60] e no capítulo 13 de [5]. Nessa notação, um campo consiste em um par de dois campos espinoriais de duas componentes cada, sendo uma delas responsável pela representação de partículas e a outra pela representação de anti-partículas[7]. Representaremos a componente de partículas por uma letra grega minúscula com sobre índice latino maiúsculo, e a componente de anti-partículas por uma letra grega com sub-índice latino maiúsculo com um apóstrofe " $'$ ".

Sendo assim, um campo de Dirac será representado pelo par de espinores $\left(\xi^{A}, \eta_{A'}\right)$. Para aumentar a abrangência do caso que trataremos, vamos incluir um campo eletromagnético externo representado pelo potencial vetor $A_{AA'}$. Deste modo as componentes espinoriais devem satisfazer as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{AA'} - ieA_{AA'}\right)\xi^{A} + \frac{m}{\sqrt{2}}\eta_{A'} &= 0 \\ \left(\nabla_{AA'} - ieA_{AA'}\right)\eta^{A'} + \frac{m}{\sqrt{2}}\xi_{A} &= 0, \end{aligned} \tag{2.58}$$

Que são as equações 1.104 com a adição de $A_{AA'}$.

[7] A grosso modo, introduzimos uma base de dois espinores normalizados e utilizamo-los para definir um *tetrad* de vetores nulos, sendo esses quatro vetores uma base para o espaço 4-dimensional complexo onde se encontram os espinores de Dirac. Um campo espinorial então é um mapa que leva do espaço tempo ao espaço espinorial.

Nesta notação então, um espinor de Dirac (como são definidos convencionalmente os espinores) ψ consiste em um par de espinores $\left(\xi^A, \eta_{A'}\right)$. Dado dois espinores de Dirac $\psi_1 = \left(\xi_1^A, \eta_{1A'}\right)$ e $\psi_2 = \left(\xi_2^A, \eta_{2A'}\right)$, o produto de Dirac entre eles é dado por 1.103 com $n = 1$, ficando

$$(\psi_1, \psi_2)_D = \int_\Sigma \left[\overline{\xi}_1^{A'} \xi_2^A + \overline{\eta}_1^A \eta_2^{A'}\right] d\Sigma_{AA'}, \tag{2.59}$$

e é independente da escolha de Σ. É importante notar que este produto é positivo definido em todo o espaço das soluções, e não apenas no espaço das soluções de frequência positiva, como é o caso do produto de Klein-Gordon.

O espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ correspondente a uma partícula é composto por $\mathscr{H} = \mathscr{H}_+ \oplus \bar{\mathscr{H}}_-$, onde $\mathscr{H}_+$ corresponde ao espaço de Hilbert das soluções de frequência positiva da equação de Dirac, e $\mathscr{H}_-$ ao das frequências negativas. Cada um desses espaços é construído a partir dos espaços das soluções nos espaços vetoriais complexos $\mathfrak{W}$ e $\mathfrak{W}^*$ respectivamente, pelo procedimento utilizado em $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}}$ na seção anterior. Ou seja se $\mathfrak{S}(\mathfrak{W})$ é o espaço das soluções ξ^A de 2.58 e $\mathfrak{S}\left(\overline{\mathfrak{W}}\right)$ o das soluções $\eta_{A'}$, então definindo o mapa $K \equiv K_+ \oplus \overline{K}_-^*$, onde $K_+ : \mathfrak{S}(\mathfrak{W}) \to \mathscr{H}_+$ e $K_-^* : \mathfrak{S}\left(\overline{\mathfrak{W}}^*\right) \to \mathscr{H}_-$, então $K : \mathfrak{S}(\mathfrak{W}) \oplus \mathfrak{S}\left(\overline{\mathfrak{W}}^*\right) \to \mathscr{H}$. O espaço de Fock construído a partir de $\mathscr{H}$ é dado por

$$\mathscr{F}(\mathscr{H}) = \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\overset{n}{\otimes}_A \mathscr{H}\right) = \mathbb{C} \oplus \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \otimes_A \mathscr{H} \oplus \mathscr{H} \otimes_A \mathscr{H} \otimes_A \mathscr{H} \oplus \dots , \tag{2.60}$$

onde $\otimes_A$ é o produto tensorial anti-simétrico.

Assim como no caso do campo escalar, introduzimos o espaço de Hilbert dual $\bar{\mathscr{H}} = \bar{\mathscr{H}}_+ \oplus \mathscr{H}_-$. Neste instante é importante salientar uma confusão da notação escolhida para se evitar duvidas. Por causa da estrutura utilizada para construir os espaços $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{W}^*$, $\overline{\mathfrak{W}}^*$ e $\overline{\mathfrak{W}}$, ao se utilizar a convenção de que a presença do sobre-índice * traria um sub-índice $_-$ ao espaço de Hilbert associado ao espaço vetorial em questão, temos que o espaço de Hilbert $\bar{\mathscr{H}}_-$ é o espaço das soluções de frequência positiva da equação de Dirac conjugada, e portanto seus elementos serão denotados por $\overline{\sigma}^- \in \bar{\mathscr{H}}_-$, mas mesmo com o sobre-índice $-$, correspondem a soluções de frequência positiva (conforme [8], uma maneira de não se confundir é pensar que a presença da barra troca o sinal do sub-índice, ou seja, tem o efeito de mais um sinal de menos).

Dado $\sigma_1 \in \mathscr{H}$ e $\eta_n \in \overset{n}{\otimes}_A \mathscr{H}$, definimos os operadores de aniquilação e criação por

$$\begin{aligned} a(\overline{\sigma}_1)|\eta\rangle &= \left(\overline{\sigma}_1 \cdot \eta_1, \sqrt{2}\overline{\sigma}_1 \cdot \eta_2, \sqrt{3}\overline{\sigma}_1 \cdot \eta_3, \dots\right) \\ a^\dagger(\sigma_1)|\eta\rangle &= \left(0, c\sigma_1, \sqrt{2}\sigma_1 \otimes_A \eta_1, \sqrt{3}\sigma_1 \otimes_A \eta_2, \dots\right), \end{aligned} \tag{2.61}$$

onde $|\eta\rangle = (c, \eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots)$, e $c \in \mathbb{C}$. Cabe dizer que, diferentemente do caso do campo escalar, as relações obtidas em 1.28 são satisfeita pelos anti-comutadores no caso do campo de Dirac.

Como os operadores de campo Ψ são espinores de Dirac, as "funções de teste" utilizadas para fazer o "*smearing*" terão que ser duais de espinores de Dirac, ou seja $f = \left(\alpha_A, \beta^{A'}\right)$. Como o produto de Dirac é positivo definido em todo o espaço das soluções, não temos a mudança de sinal que evidenciamos em 1.59, e consequentemente em 1.64. Sendo assim, ao utilizarmos o lema 11, caímos em

$$\Psi(f) = \int_\Sigma \Psi(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) = ia\left(\overline{K_+(\psi)}\right) + ia^\dagger\left(\overline{K_-^*(\psi)}\right), \tag{2.62}$$

onde ψ é o espinor de Dirac correspondente à solução avançada menos a retardada de 2.58.

Deste modo, a versão "*smeared*" do operador Ψ é dada por:

$$\Psi(f) = ia\left(\overline{\sigma}_f^+\right) + a^\dagger\left(\overline{\sigma}_f^-\right), \tag{2.63}$$

onde $\overline{\sigma}^+ \in \bar{\mathscr{H}}^+ \subset \bar{\mathscr{H}}$ e $\overline{\sigma}^- \in \bar{\mathscr{H}}^- \subset \mathscr{H}$.

Seguindo as linhas da seção anterior, vamos supor que em ambas as regiões (*in* e *out*) podemos escrever o operador de campo como em 2.63[8]. Temos então

$$\begin{aligned} \Psi_{in}(p) &= i\left(a\left(\overline{\sigma}_p^{P+}\right) + a^\dagger\left(\overline{\sigma}_p^{P-}\right)\right) \\ \Psi_{out}(f) &= i\left(b\left(\overline{\sigma}_f^{F+}\right) + b^\dagger\left(\overline{\sigma}_f^{F-}\right)\right), \end{aligned} \tag{2.64}$$

onde novamente os operadores a e $a^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação na região *in* e b e $b^\dagger$ os mesmos para a região *out*. Desejamos obter o operador S que leve os estados em *in* para seus correspondentes em *out* como em 2.8. Para tanto, temos que definir os operadores A, B, C e D como fizemos anteriormente, porém, agora estes operadores são diferentes.

Como cada espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ agora corresponde a uma soma de dois espaços de Hilbert, os operadores que relacionam esses espaços com seus duais na região *in* e *out* precisam ser divididos em duas partes. Seja $A_+ : \mathscr{H}_{+out} \to \mathscr{H}_{+in}$ o operador que leva soluções de partículas de frequência positivas da região *out* para a sua parte de frequência positiva na região *in*, e seja $A_- : \bar{\mathscr{H}}_{-out} \to \bar{\mathscr{H}}_{-in}$ o operador que faz o mesmo para anti-partículas. A soma desses operadores seria um forte candidato para ser o operador A que desejamos que leve soluções de $\mathscr{H}_{out}$ para $\mathscr{H}_{in}$, porém precisamos garantir que A_+ seja aplicado apenas nos elementos de $\mathscr{H}_{+out} \subset \mathscr{H}_{out}$ e que A_- seja aplicado apenas nos elementos de $\bar{\mathscr{H}}_{-out} \subset \mathscr{H}_{out}$, sendo assim, definimos operadores de projeção $P_+ : \mathscr{H}_{out} \to \mathscr{H}_{out}$ e $P_- : \mathscr{H}_{out} \to \mathscr{H}_{out}$ que projetam elementos de $\mathscr{H}_{out}$ em $\mathscr{H}_{+out}$ e $\bar{\mathscr{H}}_{-out}$ respectivamente. Deste modo, o operador $A : \mathscr{H}_{out} \to \mathscr{H}_{in}$ é $A = A_+P_+ + A_-P_-$. Analogamente, definindo $B_+ : \mathscr{H}_{+out} \to \mathscr{H}_{-in}$ e $B_- : \bar{\mathscr{H}}_{-out} \to \bar{\mathscr{H}}_{+in}$, temos que $B : \mathscr{H}_{out} \to \bar{\mathscr{H}}_{in}$ é definido por $B = B_+P_+ + B_-P_-$. Trocando *in* por *out* definimos os operadores C e D de forma análoga.

Novamente devido à positividade de 2.59, não temos as mudanças de sinais evidenciadas nas equações de 2.14 a 2.20, sendo assim, as relações satisfeitas pelos operadores A, B, C e D são

$$A^\dagger A + B^\dagger B = \mathbb{1}, \tag{2.65}$$

$$A^\dagger \overline{B} = -B^\dagger \overline{A}, \tag{2.66}$$

$$C^\dagger C + D^\dagger D = \mathbb{1}, \tag{2.67}$$

$$C^\dagger \overline{D} = -D^\dagger \overline{C}, \tag{2.68}$$

$$A^\dagger = C, \tag{2.69}$$

[8] Ou seja, estamos supondo que a região *in* e *out* admitem uma estrutura espinorial (satisfazem as exigências discutidas em 1.5).

$$B^{\dagger} = \overline{D}, \tag{2.70}$$

e com uso destes operadores podemos escrever o análogo de 2.26 para o caso de Dirac

$$Sa\left(\overline{\sigma}^{P+}\right) S^{-1} = b\left(\overline{C}\overline{\sigma}^{P+}\right) + b^{\dagger}\left(\overline{D}\overline{\sigma}^{P+}\right). \tag{2.71}$$

Passaremos a omitir o sobre índice + no que segue pelo mesmo motivo que o fizemos para 2.26. Escrevemos o estado $S\left|0_{in}\right\rangle = \left|\Psi_{out}\right\rangle$ de uma maneira geral, como em 2.27, ao qual aplicaremos 2.71, o que nos leva a

$$\left(b\left(\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\right) + b^{\dagger}\left(\overline{D}\overline{\sigma}^{P}\right)\right) S\left|0_{in}\right\rangle = 0 \Rightarrow b\left(\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\right)\left|\Psi_{out}\right\rangle = -b^{\dagger}\left(\overline{D}\overline{\sigma}^{P}\right)\left|\Psi_{out}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\left(\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_1, \sqrt{2}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_2, \sqrt{3}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_3, \ldots\right) = -\left(0, c\overline{D}\overline{\sigma}^{P}, \sqrt{2}\,\overline{D}\overline{\sigma}^{P}\otimes_A\eta_1, \sqrt{3}\,\overline{D}\overline{\sigma}^{P}\otimes_A\eta_2, \cdots\right). \tag{2.72}$$

Vamos assumir que o operador B satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt. Neste caso, nos deparamos com um grande problema que não ocorria no campo escalar. Devido às mudanças de sinais decorrentes da positividade de 2.59, não podemos garantir a existência de C^{-1} como um operador limitado definido em todo lugar[9]. Para resolver esse problema, temos que dividir o tratamento em dois casos a respeito do núcleo de C: 1. quando $\ker C = \{0\}$ e 2. quando $\ker C \neq \{0\}$.

1. $\ker C = \{0\}$. Neste caso precisamos utilizar a seguinte proposição:

   Proposição 12 $\ker C = \{0\} \Leftrightarrow \ker A = \{0\}$.

   Demonstração. (Seguindo a demonstração apresentada em [8])
   Suponha que existe $\gamma \neq 0$ tal que $C\gamma = 0$, então, por 2.67, $D\gamma \neq 0$. Substituindo 2.69 em 2.68, temos que $A\left(\overline{D\gamma}\right) = C^{\dagger}\left(\overline{D\gamma}\right) = -D^{\dagger}\left(\overline{C\gamma}\right) = 0$, então $\overline{D\gamma} \in \ker A$, analogamente, com uso de 2.65, 2.66 e 2.68, podemos verificar que se $\ker A$ não for trivial, então $\ker C$ também não é. ■

   Como estamos supondo que o operador B satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt, o espectro de $B^{\dagger}B$ é pontual, e pela relação 2.65 o espectro de $A^{\dagger}A$ também o é. Sendo assim, de acordo com a proposição acima, $\ker A^{\dagger}A = \{0\}$, então, como 0 não faz parte do espectro de $A^{\dagger}A$, temos que $\left(A^{\dagger}A\right)^{-1} = \left(CC^{\dagger}\right)^{-1}$ existe como um operador limitado (onde utilizamos novamente 2.69). Sendo assim, como $CC^{\dagger}\left(CC^{\dagger}\right)^{-1} = \mathbb{1}$, a inversa de C à direita existe e é $C^{-1} = C^{\dagger}\left(CC^{\dagger}\right)^{-1}$. Como $\ker C = \{0\}$, C^{-1} é também inversa a esquerda. Portanto, quando $\ker C = \{0\}$, a inversa de C existe como um operador limitado e podemos prosseguir como fizemos no caso do campo escalar.

   Procedendo do mesmo modo em que fizemos para o campo escalar, construímos, a partir de 2.72, o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_1 = 0 \\ \sqrt{2}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_2 = -c\overline{D}\overline{\sigma}^{P} \\ \sqrt{3}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_3 = -\sqrt{2}\,\overline{D}\overline{\sigma}^{P}\otimes_A\eta_1 \\ \sqrt{4}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_4 = -\sqrt{3}\,\overline{D}\overline{\sigma}^{P}\otimes_A\eta_2 \\ \vdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_1 = 0 \\ \sqrt{2}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_2 = -c\overline{DC}^{-1}\overline{C}\overline{\sigma}^{P} \\ \sqrt{3}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_3 = -\sqrt{2}\,\overline{DC}^{-1}\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\otimes_A\eta_1 \\ \sqrt{4}\,\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\cdot\eta_4 = -\sqrt{3}\,\overline{DC}^{-1}\overline{C}\overline{\sigma}^{P}\otimes_A\eta_2 \\ \vdots \end{cases} \tag{2.73}$$

[9] Pelo menos não diretamente como havíamos feito em 2.21 e 2.22, que fez uso direto da existência de um sinal negativo na igualdade obtida em 2.17.

Neste caso, definimos então o operador $E \equiv -\overline{DC}^{-1}$, que agora é um operador anti-simétrico (ou seja $E = -\overline{E}^{\dagger}$). Sendo assim, o sistema 2.73 nos fornece:

$$\begin{cases} \overline{\sigma}^F \eta_1 = 0 \Rightarrow \eta_1 = 0 \\ \sqrt{2}\overline{\sigma}^F \eta_2 = cE\overline{\sigma}^F \\ \sqrt{3}\overline{\sigma}^F \eta_3 = \sqrt{2}E\overline{\sigma}^F \otimes_A \eta_1 \Rightarrow \eta_3 = 0 \\ \sqrt{4}\overline{\sigma}^F \eta_4 = \sqrt{3}E\sigma^F \otimes_A \eta_2 \\ \vdots \end{cases}, \tag{2.74}$$

onde já é possível ver que para n impar, $\eta_n = 0$. Pela definição de E, vemos que ele é um mapa de $\bar{\mathscr{H}}_{out}$ em $\mathscr{H}_{out}$, exatamente como no caso do campo escalar. Poderíamos utilizar então as mesmas ideias utilizadas em 2.34 para ver E como um elemento $\epsilon \in \mathscr{H}_{out} \otimes_A \mathscr{H}_{out}$, porém esta fórmula não é muito conveniente para o caso do campo de Dirac, visto que ao diagonalizarmos ϵ em cada um dos sub-espaços $\mathscr{H}_{out}$, como fizemos em 2.34, os elementos correspondente aos λ_i seriam uma superposição de estados de partículas e anti-partículas (visto que $\mathscr{H}_{out} = \mathscr{H}_{+out} \oplus \bar{\mathscr{H}}_{-out}$). Para este caso, uma formulação mais relevante pode ser obtida ao se escrever o operador $E^{\dagger}E$ como uma soma de um operador que mapeie $\bar{\mathscr{H}}_{+out}$ em $\bar{\mathscr{H}}_{+out}$ com um operador que mapeie $\mathscr{H}_{-out}$ em $\mathscr{H}_{-out}$. Cada um desses operadores pode ser visto como um vetor em $\mathscr{H}_{out}$, porém o primeiro estará em $\mathscr{H}_{+out}$ e o segundo em $\bar{\mathscr{H}}_{-out}$. Seja $\{\gamma_i\}$ uma base ortonormal de $\mathscr{H}_{+out}$ e seja $\{\overline{\rho}_i\}$ uma base ortonormal de $\bar{\mathscr{H}}_{-out}$. Se definirmos k_i^2 como sendo o produto das componentes dos operadores que compõem E, podemos escrever E como um vetor $\epsilon \in \mathscr{H}_{out} \otimes_A \mathscr{H}_{out}$ da seguinte forma:

$$\epsilon = \sum_i k_i \overline{\rho}_i \otimes_A \gamma_i = \sum_i \frac{k_i}{2} \left(\overline{\rho}_i \otimes \gamma_i - \gamma_i \otimes \overline{\rho}_i \right), \tag{2.75}$$

onde a anti-simetria de E foi utilizada na segunda igualdade.

Com uso de 2.75, vemos que para n par

$$\eta_n = c \frac{(n!)^{1/2}}{2^{n/2}\,(n/2)!} \overset{n/2}{\otimes}{}_A\, \epsilon, \tag{2.76}$$

e assim

$$S\,|0_{in}\rangle = |\Psi_{out}\rangle = \left(c, 0, \frac{c}{\sqrt{2}}\epsilon, 0, \frac{c\sqrt{3!}}{2} \overset{2}{\otimes}_A \epsilon, 0, \ldots \right). \tag{2.77}$$

Note que as partículas são criadas sempre em pares de partículas e anti-partículas.

Escrevendo a matriz S na forma exponencial, temos

$$S\,|0_{in}\rangle = c \exp\left[\frac{1}{2} \sum_i k_i b^{\dagger}\left(\overline{\rho}_i\right) b^{\dagger}\left(\gamma_i\right) \right] |0_{out}\rangle. \tag{2.78}$$

E com os mesmos argumentos utilizados na discussão acerca de 2.39, vemos que existe c finito que possibilita a normalização de 2.77.

Seja $\sigma \in \mathscr{H}_{in}$. Podemos obter a forma como o estado dessa partícula é transformado pela matriz S ao aplicarmos o operador S no operador de criação $a^{\dagger}(\sigma)$, e depois aplicarmos no estado de vácuo da região in. Para tanto, tomamos o adjunto de 2.71 e aplicamos no estado $S\,|0_{in}\rangle$, obtendo

$$Sa^{\dagger}(\sigma)S^{-1} = b^{\dagger}(C\sigma) + b(D\sigma) \Rightarrow Sa^{\dagger}(\sigma)|0_{in}\rangle = \left(b^{\dagger}(C\sigma) + b(D\sigma)\right)S|0_{in}\rangle. \tag{2.79}$$

Substituindo 2.77 em 2.79 temos:

$$S(0,\sigma,0,\ldots) = \left(b^{\dagger}(C\sigma) + b(D\sigma)\right)\left(c, 0, c\sqrt{\frac{1}{2}}\epsilon, 0, c\sqrt{\frac{3}{4\cdot 2}}\overset{2}{\otimes}_A \epsilon, 0, c\sqrt{\frac{5\cdot 3}{6\cdot 4\cdot 2}}\overset{3}{\otimes}_A \epsilon, 0, \ldots\right) =$$

$$= c\left(0, C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon, 0, \sqrt{\frac{3}{2}}(C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon)\otimes_A \epsilon, 0, \sqrt{\frac{5\cdot 3}{4\cdot 2}}(C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon)\otimes_A \epsilon\otimes_A \epsilon, 0, \ldots\right). \tag{2.80}$$

De 2.79 e 2.80, obtemos por indução que para n impar vale:

$$\eta_n = c\frac{(n!)^{1/2}}{2^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\left[C\sigma - D\sigma\cdot\epsilon\right]\overset{\frac{n-1}{2}}{\otimes}_A \epsilon, \tag{2.81}$$

e $\eta_n = 0$ para n par.

A forma exponencial nesse caso não pode ser obtida da mesma forma que 2.56 foi, visto que a presença de anti-comutadores impossibilita a aplicação direta da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff. Porém podemos proceder da seguinte forma: Substituímos 2.78 em 2.79, de modo a obtermos

$$Sa^{\dagger}(\sigma)|0_{in}\rangle = c\left(b^{\dagger}(C\sigma) + b(D\sigma)\right)e^{X}|0_{out}\rangle, \tag{2.82}$$

onde $X = (1/2)\sum_i k_i b^{\dagger}(\overline{\rho}_i)b^{\dagger}(\gamma_i)$. Expandindo a exponencial, vemos que o lado direito de 2.82 pode ser escrito como

$$c\left(b^{\dagger}(C\sigma) + b(D\sigma)\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}. \tag{2.83}$$

Para resolver essa equação, precisamos dos anti-comutadores entre os operadores de criação e aniquilação. Como X é um produto de dois operadores de criação, e os operadores de criação anti-comutam entre si, vemos que

$$\begin{aligned} b^{\dagger}(C\sigma)X &= \frac{1}{2}\sum_i k_i b^{\dagger}(C\sigma)b^{\dagger}(\overline{\rho}_i)b^{\dagger}(\gamma_i) = -\frac{1}{2}\sum_i k_i b^{\dagger}(\overline{\rho}_i)b^{\dagger}(C\sigma)b^{\dagger}(\gamma_i) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_i k_i b^{\dagger}(\overline{\rho}_i)b^{\dagger}(\gamma_i)b^{\dagger}(C\sigma) = Xb^{\dagger}(C\sigma), \end{aligned} \tag{2.84}$$

e portanto $b^{\dagger}(C\sigma)$ comuta com X. Já $b(D\sigma)$ tem uma relação um pouco mais complicada:

$$
\begin{aligned}
b\left(D\sigma\right)X &= \frac{1}{2}\sum_i k_i b\left(D\sigma\right)b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)b^\dagger\left(\gamma_i\right) = \frac{1}{2}\sum_i k_i\left[\left\{b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right),b\left(D\sigma\right)\right\} - b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)b\left(D\sigma\right)\right]b^\dagger\left(\gamma_i\right) = \\
&= \frac{1}{2}\sum_i k_i\left[\left\{b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right),b\left(D\sigma\right)\right\}b^\dagger\left(\gamma_i\right) - b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)\left\{b^\dagger\left(\gamma_i\right),b\left(D\sigma\right)\right\} + b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)b^\dagger\left(\gamma_i\right)b\left(D\sigma\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2}\sum_i k_i\left[\left\{b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right),b\left(D\sigma\right)\right\}b^\dagger\left(\gamma_i\right) - b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)\left\{b^\dagger\left(\overline{\gamma}_i\right),b\left(D\sigma\right)\right\}\right] + Xb\left(D\sigma\right). \qquad (2.85)
\end{aligned}
$$

Chamando $Y = \sum_i k_i\left[\left\{b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right),b\left(D\sigma\right)\right\}b^\dagger\left(\gamma_i\right) - b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)\left\{b^\dagger\left(\gamma_i\right),b\left(D\sigma\right)\right\}\right]$, e notando que Y comuta com X vemos que

$$
\begin{aligned}
b\left(D\sigma\right)X &= Y + Xb\left(D\sigma\right)X \\
b\left(D\sigma\right)XX &= YX + Xb\left(D\sigma\right)X = XY + X\left(Y + Xb\left(D\sigma\right)X\right) = 2XY + XXb\left(D\sigma\right) \\
b\left(D\sigma\right)XXX &= \left(2XY + XXb\left(D\sigma\right)\right)X = 3XXY + XXXb\left(D\sigma\right) \\
&\vdots \\
b\left(D\sigma\right)X^n &= nX^{n-1}Y + X^n b\left(D\sigma\right) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Portanto

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} b\left(D\sigma\right)\frac{X^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{nX^{n-1}}{n!}Y + \frac{X^n}{n!}b\left(D\sigma\right)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{X^{n-1}}{(n-1)!}Y + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^n}{n!}b\left(D\sigma\right) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{X^n}{n!}Y + \frac{X^n}{n!}b\left(D\sigma\right)\right\} = e^X\left(Y + b\left(D\sigma\right)\right). \qquad (2.86)
\end{aligned}
$$

Calculando Y, vemos que

$$
Y = \sum_i k_i\left[\cancel{b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)b\left(D\sigma\right)b^\dagger\left(\gamma_i\right)} + b\left(D\sigma\right)b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)b^\dagger\left(\gamma_i\right) - b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)b^\dagger\left(\overline{\gamma}_i\right)b\left(D\sigma\right) - \cancel{b^\dagger\left(\overline{\rho}_i\right)b\left(D\sigma\right)b^\dagger\left(\gamma_i\right)}\right] \qquad (2.87)
$$

Finalmente, vemos que 2.82 fica

$$
\begin{aligned}
Sa^{\dagger}(\sigma)\left|0_{in}\right\rangle &= \left(b^{\dagger}(C\sigma)+b(D\sigma)\right)e^{X}\left|0_{out}\right\rangle = e^{X}\left[Y+b^{\dagger}(C\sigma)+\underbrace{\cancel{b(D\sigma)}}_{b\left|0_{out}\right\rangle=0}\right]\left|0_{out}\right\rangle = \\
&= ce^{X}\left\{\sum_{i}k_{i}\left[b(D\sigma)\,b^{\dagger}(\overline{\rho}_{i})\,b^{\dagger}(\gamma_{i})-b^{\dagger}(\overline{\rho}_{i})\,b^{\dagger}(\overline{\gamma}_{i})\underbrace{\cancel{b(D\sigma)}}_{b\left|0_{out}\right\rangle=0}\right]+b^{\dagger}(C\sigma)\right\}\left|0_{out}\right\rangle = \\
&= c\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i}k_{i}b^{\dagger}(\overline{\rho}_{i})\,b^{\dagger}(\gamma_{i})\right]\left[\sum_{i}k_{i}b(D\sigma)\,b^{\dagger}(\overline{\rho}_{i})\,b^{\dagger}(\gamma_{i})+b^{\dagger}(C\sigma)\right]\left|0_{out}\right\rangle, \quad (2.88)
\end{aligned}
$$

que é a forma exponencial da matriz S que atua no estado de uma partícula na região $\mathscr{H}_{in}$.

2. $\ker C \neq \{0\}$

   Este caso é um pouco mais complicado que o anterior. Como o $\ker C \neq \{0\}$, pela relação 2.67, os elementos do $\ker C$ são os auto-estados de $D^{\dagger}D$ com auto valor 1, porém, como estamos supondo que a condição de Hilbert-Schmidt é satisfeita, temos que tr $D^{\dagger}D =$tr $B^{\dagger}B < \infty$, sendo assim deve haver um número finito de auto-estados de $D^{\dagger}D$ que tenham auto valor 1, e portanto, o $\ker C$ deve ter dimensão finita. Seja $\widetilde{C}$ o operador que atua nos elementos de $(\ker C)^{\perp}$ resultando na parte da imagem de C que satisfaz ran $C = \left(\ker C^{\dagger}\right)^{\perp} = (\ker A)^{\perp}$. Então $\widetilde{C}$ é uma restrição de C que tem uma inversa limitada $\widetilde{C}^{-1}$ pelo mesmo argumento do caso anterior.

   Quando $\sigma \in \ker C$, temos que a equação 2.72 nos fornece

$$
b^{\dagger}\left(\overline{D}\overline{\sigma}\right)\left|\Psi_{out}\right\rangle = 0. \quad (2.89)
$$

   Isso implica que $\left|\Psi_{out}\right\rangle = 0$ contém o estado $\overline{D}\overline{\sigma}$ com probabilidade 1. Da relação 2.68 e 2.69, vemos que $\overline{D}\overline{\sigma} \in \ker A$. Além disso, como 2.89 vale para todos os $\sigma \in \ker C$, e, para cada $\lambda \in \ker A$, temos que (com uso de 2.65 e 2.70) $B^{\dagger}B\lambda = \lambda \Rightarrow \overline{D}B\lambda = \lambda$, vemos que os elementos $B\lambda \in \ker C$. Sendo assim, a equação 2.89 vale para todos os elementos do núcleo de A (no lugar de $\overline{D}\overline{\sigma}$), e o estado $\left|\Psi_{out}\right\rangle$ os contém com probabilidade 1.

   Como o núcleo de C tem dimensão finita, o núcleo de A também o tem, sendo assim, definimos $\alpha_1, \alpha_1 \ldots \alpha_m$ como uma base ortonormal de $\ker A$. A resolução do sistema se dá como no caso anterior, porém, como sabemos com certeza que $\left|\Psi_{out}\right\rangle$ possui m estados de partículas (todos os estados de $\ker A$), os elementos $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$ são todos nulos, e a forma mais geral de se escrever $\left|\Psi_{out}\right\rangle$ é

$$
\left|\Psi_{out}\right\rangle = (0, \ldots, 0, k\alpha_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \alpha_m, k\alpha_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \alpha_m \otimes_A \eta_1', \ldots), \quad (2.90)
$$

   onde k é o produto dos números que multiplicam as componentes da base de $\ker A$.

   Vamos definir $\eta_{m+l} = k\alpha_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \alpha_m \otimes_A \eta_l'$, deste modo, ao aplicarmos 2.71 em 2.90, obtemos

$$
\begin{aligned}
\eta_n &= 0, \; n < m \\
\eta_{m+l} &= 0, \; l = 1, 3, 5, \ldots \quad (2.91) \\
\eta_{m+l} &= k\frac{(m+l)!}{2^{l/2}\,(l/2)!}\alpha_1 \otimes_A \ldots \otimes_A \alpha_m \overset{l/2}{\otimes}_A \widetilde{\epsilon}, \; l = 0, 2, 4, \ldots,
\end{aligned}
$$

onde $\widetilde{\epsilon}$ é obtido da mesma maneira que ϵ em 2.75, porém para ser o vetor que representa $\widetilde{E} = -\overline{D}\overline{\widetilde{C}}^{-1}$ na discussão feita para o caso anterior, ou seja, apenas para os $C\sigma \in (\ker A)^{\perp}$, e não para todos os elementos de $\mathscr{H}_{out}$.

Vemos então que, além da probabilidade de criação de pares de partículas e anti-partículas, temos a criação de m partículas com certeza. Os elementos α_n da base de $\ker A$ podem ser escolhidos de modo que cada um deles será um elemento apenas de $\mathscr{H}_{+out}$ ou de $\bar{\mathscr{H}}_{-out}$. Se considerarmos a equação de Dirac sem o potencial vetor, a simetria de conjugação de carga nos garante que a dimensão do $\ker A$ em $\mathscr{H}_{+out}$ é igual à em $\bar{\mathscr{H}}_{-out}$, porém, quando esse não o caso, essa igualdade não é obvia.

Cabe dizer que é creditado a Wightman o feito de mostrar que para um potencial externo que cai suficientemente rápido, $\ker A = \{0\}$[10]. Nos últimos parágrafos de [62] e em referências ali citadas, são discutidas as situações onde não temos a igualdade de partículas e anti-partículas, e qual a realidade física delas.

2.4 Propriedades e Consequências das Transformações de Bogolyubov

Como pode-se ver, as transformações de Bogolyubov têm um papel importante no entendimento do efeito de criação de partículas pela gravidade. Com o intuito de evidenciar algumas propriedades e consequências das transformações de Bogolyubov, vamos considerar um caso particular de espaço tempo e explorar o efeito em detalhes. Considere um campo escalar em um espaço-tempo com métrica dada por

$$ds^2 = dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{2.92}$$

com

$$a(t) \approx \begin{cases} a_1, & t \to -\infty \\ a_2, & t \to +\infty \end{cases} \tag{2.93}$$

Como pode-se ver, tal espaço é assintoticamente plano. Vamos supor que $a(t)$ é suficiente bem comportado e que se aproxima dos valores constantes a_1 e a_2 suficientemente rápido de modo a podermos considerar $a(t) = a_1$ quando $t \to -\infty$ e $a(t) = a_2$ quando $t \to \infty$. A equação 1.45, neste caso, pode ser escrita como

$$a^{-3}\partial_t\left(a^3\partial_t\Phi\right) - a^{-2}\sum_i \partial_i^2\Phi + \left(m^2 + \xi R\right)\Phi = 0. \tag{2.94}$$

Expandindo Φ, como em 1.30, separamos a solução nos modos ϕ_k. Assim como no caso geral, tais modos terão uma parte espacial e outra temporal. Devido à isotropia espacial, podemos tirar de 2.94 que a parte espacial é proporcional a e^{ikx}. Chamaremos a parte temporal de ψ_k. Definindo

$$\tau = \int^t a^{-3}(t')\,dt', \tag{2.95}$$

a equação 2.94 pode ser escrita para ψ_k da forma

[10] Embora eu não tenha encontrado nenhuma referência com a prova desse fato, em [8] Wald diz que Labonté cita Wightman em [62] por ter demonstrado isso.

$$\frac{d^2\psi_k}{d\tau} + a^6\left(\frac{k^2}{a^2} + m^2 + \xi R\right)\psi_k = 0. \tag{2.96}$$

No passado distante ($t \to -\infty$), que chamaremos de região *in*, $a(t) = a_1$. Nessa região o espaço é plano. As soluções de 2.96 nessa região são dadas por $\psi_k^{in\pm}(\tau) \propto e^{\mp i\omega_{1k}{a_1}^3\tau}$, onde ${\omega_{1k}}^2 = \frac{k^2}{{a_1}^2} + m^2 + \xi R$.

Vamos obter agora as transformações de Bogolyubov de uma forma bem natural, para tanto vamos realizar a mesma conta para a região *out*, onde $a(t) = a_2$, obtendo uma solução $\psi_k^{out\pm}$ igual à da região *in* porém com a substituição de a_1 por a_2 e de ω_{1k}^2 por ${\omega_{2k}}^2 = \frac{k^2}{{a_2}^2} + m^2 + \xi R$.

Calculando o Wronskiano de 2.96 para as soluções $\psi_k^{out\pm}$, obtemos[11] $\psi_k^{out+}\partial_\tau\psi_k^{out-} - \psi_k^{out-}\partial_\tau\psi_k^{out+} = i$, sendo assim, as soluções são linearmente independentes, e devido à hiperbolicidade global do nosso espaço tempo, podemos escrever cada modo ψ_k^{in+} em uma base composta por $\psi_k^{out\pm}$ da seguinte forma

$$\psi_k^{in+} = \alpha_k\psi_k^{out+} + \beta_k\psi_k^{out-}. \tag{2.97}$$

Normalizando os modos $\psi_k^{out\pm}$ descobrimos que

$$\psi_k^{out\pm} = \frac{1}{\left(2{a_2}^3\omega_{2k}\right)^{1/2}}e^{\mp i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}. \tag{2.98}$$

O calculo do Wronskiano de 2.96 pode ser feito na região *in* também, fornecendo o mesmo resultado. Se utilizarmos ψ_k^{in} conforme escrito em 2.97 nesse cálculo, temos[12]

$$\begin{aligned}
i =& \psi_k^{in+}\partial_\tau\psi_k^{in-} - \psi_k^{in-}\partial_\tau\psi_k^{in+} = \\
=& \left(\alpha_k\psi_k^{out+} + \beta\psi_k^{out-}\right)\partial_\tau\left(\alpha_k^*\psi_k^{out-} + \beta^*\psi_k^{out+}\right) - \left(\alpha_k^*\psi_k^{out-} + \beta^*\psi_k^{out+}\right)\partial_\tau\left(\alpha_k\psi_k^{out+} + \beta\psi_k^{out-}\right) = \\
=& \frac{i}{\cancel{2{a_2}^3\omega_{2k}}}\Big[\left(\alpha_k e^{-i\omega_{2k}{a_2}^3\tau} + \beta_k e^{i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}\right)\cancel{\omega_{2k}{a_2}^3}\left(\alpha_k^* e^{i\omega_{2k}{a_2}^3\tau} - \beta_k^* e^{-i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}\right) + \\
& - \left(\alpha_k^* e^{i\omega_{2k}{a_2}^3\tau} + \beta_k^* e^{-i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}\right)\cancel{\omega_{2k}{a_2}^3}\left(-\alpha_k e^{-i\omega_{2k}{a_2}^3\tau} + \beta_k e^{i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}\right)\Big] = \\
=& \frac{i}{2}\left(|\alpha_k|^2 - \cancel{\alpha_k\beta_k^* e^{-2i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}} + \cancel{\alpha_k^*\beta_k e^{2i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}} - |\beta_k|^2 + |\alpha_k|^2 - \cancel{\alpha_k^*\beta_k e^{2i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}} + \cancel{\alpha_k\beta_k^* e^{-2i\omega_{2k}{a_2}^3\tau}}\right) = \\
=& i\left(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2\right) \Longrightarrow |\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 = 1.
\end{aligned} \tag{2.99}$$

Estes são os coeficientes de Bogolyubov. Eles diferem dos coeficientes obtidos anteriormente por terem apenas um índice. Isso é uma consequência da isotropia do espaço em questão, que faz com que tantos os modos em *in* como em *out* sejam ondas planas $\propto e^{ikx}$. Como os coeficientes de Bogolyubov são obtidos através do produto escalar $\left(\psi_k^{in+}, \psi_k^{out+}\right) = \alpha_k$ e $\left(\psi_k^{in+}, \psi_k^{out-}\right) = \beta_k$, e o produto entre dois modos é $\left(\psi_{k'}^{in+}, \psi_k^{out+}\right) \propto \delta_{k'k}$, vemos que os coeficientes de Bogolyubov são na verdade

[11] Com uso da identidade de Abel (vide *Wronskiano* no glossário) e da solução em *in*, que é da forma 1.25, já que nessa região o espaço é plano.

[12] Note que $\psi_k^{in-} = \left(\psi_k^{in+}\right)^* = \alpha_k^*\left(\psi_k^{out+}\right)^* + \beta_k^*\left(\psi_k^{out-}\right)^* = \alpha_k^*\psi_k^{out-} + \beta_k^*\psi_k^{out+}$

$$\begin{aligned}\alpha_{kk'} &= \alpha_k \delta_{kk'} \\ \beta_{kk'} &= \beta_k \delta_{-kk'},\end{aligned} \tag{2.100}$$

ou seja, a homogeneidade espacial faz com que as transformações de Bogolyubov sejam diagonais (mais sobre essa discussão pode ser encontrado em [3]).

Fazendo uso de 1.52, escrevemos $\Psi^{out} = \sum_k \psi_k^{out+} b_k + \psi_k^{out-} b_k^\dagger$, onde b_k e $b_k^\dagger$ são respectivamente os operadores de aniquilação e de criação para uma partícula no modo k na região out. O mesmo pode ser feito para a região in, nos fornecendo $\Psi^{in} = \sum_k \psi_k^{in+} a_k + \psi_k^{in-} a_k^\dagger$, onde os papeis de operadores de aniquilação e de criação são feitos por a_k e $a_k^\dagger$. Substituindo 2.97, temos

$$\begin{aligned}\Psi^{in} = \sum_k \psi_k^{in+} a_k + \psi_k^{in-} a_k^\dagger &= \sum_k \left[\left(\alpha_k \psi_k^{out+} + \beta_k \psi_k^{out-} \right) a_k + \left(\alpha_k^* \psi_k^{out-} + \beta_k^* \psi_k^{out+} \right) a_k^\dagger \right] = \\ &= \sum_k \psi_k^{out+} \left(\alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger \right) + \psi_k^{out-} \left(\beta_k a_k + \alpha_k^* a_k^\dagger \right).\end{aligned} \tag{2.101}$$

Comparando 2.101 com a expressão para Ψ^{out}, vemos que os operadores de aniquilação b_k e de criação $b_k^\dagger$ podem ser escritos como

$$\begin{aligned}b_k &= \alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger \\ b_k^\dagger &= \beta_k a_k + \alpha_k^* a_k^\dagger,\end{aligned} \tag{2.102}$$

e satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned}\left[b_k, b_{k'}^\dagger \right] &= \left[\alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger, \beta_{k'} a_{k'} + \alpha_{k'}^* a_{k'}^\dagger \right] = \alpha_k \alpha_{k'}^* \underbrace{\left[a_k, a_{k'}^\dagger \right]}_{\delta_{kk'}} + \beta_k^* \beta_{k'} \underbrace{\left[a_{k'}^\dagger, a_{k'} \right]}_{-\delta_{kk'}} = \\ &= \delta_{kk'} \underbrace{\left(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 \right)}_{\text{Eq 2.99} \Rightarrow =1} = \delta_{kk'}.\end{aligned} \tag{2.103}$$

Com isso, obtemos a relação que nos dá o número médio de partículas de modo k criadas pela curvatura fazendo

$$\langle N_k \rangle_{out} = \left\langle 0_{in} \middle| b_k^\dagger b_k \middle| 0_{in} \right\rangle = |\beta_k|^2. \tag{2.104}$$

2.4.1 Spin e Estatística pela Dinâmica

Uma das propriedades mais interessantes das transformações de Bogolyubov e do efeito de criação de partículas pela curvatura do espaço é a possibilidade de se obter uma relação entre spin e a estatística utilizada com uso apenas da dinâmica do sistema. Se tivéssemos assumido a estatística errada nas seções anteriores, teríamos encontrado uma inconsistência ao compararmos η_2 com ϵ em 2.31, pois ambos teriam simetrias diferentes. Note que a simetria (ou anti-simetria) de E vem das relações entre os operadores A, B, C e D, que são diferentes de acordo com o caso considerado (campo escalar ou de Dirac), porém, essa

diferença está ligada ao produto 1.103, que implica em certas mudanças de sinais dependendo do caso em consideração. Essas mudanças de sinais ocorrem porque, no caso do campo escalar, o produto de Klein-Gorfon 1.57 é positivo definido apenas nas soluções de frequência positiva, já o produto de Dirac 2.59 é positivo definido em todo o espaço das soluções. Tendo isso em mente, Wald enuncia, no último parágrafo da seção 2 de [8] o seguinte "teorema de spin-estatística": Não é possível ter uma teoria quântica de campos razoável em espaços-tempos curvos que satisfaça a estatística de Bose-Einstein, se o produto interno do espaço das soluções for positivo definido para todas as soluções e analogamente não existe tal teoria que satisfaça a estatística de Fermi-Dirac se o produto interno das soluções for positivo definido apenas para as soluções de frequência positiva.

Em [2] esse "teorema" é apresentado de uma forma mais diretamente relacionada com a dinâmica do sistema (utilizando as transformações de Bogolyubov). Nesse caso, supomos que já sabemos como se dá a mudanças nos estados quando vamos da região *in* para a região *out* (ou seja, já conhecemos as transformações de Bogolyubov que nos permitem escrever estados de $\mathscr{H}_{out}$ na base de $\mathscr{H}_{in}$ e vice versa). Tomando como base o caso particular de espaço tempo dado por 2.92 e 2.93 (em que temos um campo escalar de spin 0), e o que foi feito nessa seção, vamos obter tal relação.

Vamos levar em consideração todos os possíveis comutadores (ou anti-comutadores) de a_k e $a_k^\dagger$, a saber:

$$\begin{gathered}\left[a_k, a_{k'}\right]_\pm = 0\ , \qquad \left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\right]_\pm = 0, \\ \left[a_k, a_{k'}^\dagger\right]_\pm = \delta_{k,k'}.\end{gathered} \tag{2.105}$$

Onde $[\ ,\ ]_-$ é o comutador e $[\ ,\ ]_+$ é o anti-comutador. Com uso de 2.102, calculamos os comutadores de b_k e $b_k^\dagger$

$$\begin{aligned}\left[b_k, b_{k'}\right]_\pm &= \left[\alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger, \alpha_{k'} a_{k'} + \beta_{k'}^* a_{k'}^\dagger\right] = \\ &= \alpha_k\alpha_{k'} \cancelto{0}{\left[a_k, a_{k'}\right]_\pm} + \alpha_k\beta_{k'}^* \underbrace{\left[a_k, a_{k'}^\dagger\right]_\pm}_{\delta_{kk'}} + \beta_{k'}^*\alpha_k \underbrace{\left[a_k^\dagger, a_{k'}\right]_\pm}_{\pm\delta_{kk'}} + \beta_k^*\beta_{k'}^* \cancelto{0}{\left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\right]_\pm} = \left(\alpha_k\beta_k^* \pm \alpha_k\beta_k^*\right)\delta_{kk'},\end{aligned} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}\left[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger\right]_\pm &= \left[\alpha_k^* a_k^\dagger + \beta_k a_k, \alpha_{k'}^* a_{k'}^\dagger + \beta_{k'} a_{k'}\right] = \\ &= \alpha_k^*\alpha_{k'}^* \cancelto{0}{\left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\right]_\pm} + \alpha_k^*\beta_{k'} \underbrace{\left[a_k^\dagger, a_{k'}\right]_\pm}_{\pm\delta_{kk'}} + \beta_k\alpha_{k'}^* \underbrace{\left[a_k, a_{k'}^\dagger\right]_\pm}_{\delta_{kk'}} + \beta_k\beta_{k'} \cancelto{0}{\left[a_k, a_{k'}\right]_\pm} = \left(\alpha_{k'}^*\beta_k \pm \alpha_k^*\beta_k\right)\delta_{kk'},\end{aligned} \tag{2.107}$$

$$\left[b_k, b_{k'}^\dagger\right]_\pm = \left[\alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger, \alpha_{k'}^* a_{k'}^\dagger + \beta_{k'} a_{k'}\right] =$$

$$= \alpha_k \alpha_{k'}^* \underbrace{\left[a_k, a_{k'}^\dagger\right]_\pm}_{\delta_{kk'}} + \alpha_k \beta_{k'} \cancelto{0}{\left[a_k, a_{k'}\right]_\pm} + \beta_k^* \alpha_{k'}^* \cancelto{0}{\left[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger\right]_\pm} + \beta_k^* \beta_{k'} \underbrace{\left[a_k^\dagger, a_{k'}\right]_\pm}_{\pm\delta_{kk'}.} = \left(|\alpha|^2 \pm |\beta|^2\right) \delta_{kk'} \tag{2.108}$$

No caso em que temos a criação de partículas, $\beta_k \neq 0$, deste modo, vemos que as partículas na região *out* somente terão a mesma estatística das partículas em *in* se estas obedecerem a estatística de Bose-Einstein, ou seja, se as relações de comutação entre os operadores de criação e de aniquilação em ambas as regiões sejam dadas pelos comutadores $[\ ,\ ]_-$.

Se fizermos o mesmo para um campo com spin 1/2, veríamos que a estatística que se mantém tanto em *in* como em *out* é a de Fermi-Dirac, como pode ser visto em [63].

Esta relação entre spin e estatística é derivada apenas da dinâmica do campo em um espaço tempo onde temos a criação de partículas devido à curvatura. Caso esse não fosse o caso, $\beta_k = 0$ e não poderíamos concluir nada das equações 2.106, 2.107 e 2.108. Neste caso, mesmo conhecendo como se dá a relação entre as regiões *in* e *out*, não poderíamos restringir qual a estatística compatível com o campo em questão. Na seção 3 de [60] pode-se ver este método sendo adotado no processo de quantização.

2.4.2 Distribuição de Probabilidades das Partículas Criadas

Vamos obter a probabilidade de se encontrar um estado de partículas específico na região *out* criado a partir do vácuo em *in*. Tomemos como exemplo o estado em *out* $\left(0, 0, \sigma_j \otimes_s \overline{\sigma}^j, 0, \ldots\right)_{out}$, que é obtido pela aplicação do operador de aniquilação duas vezes no estado de vácuo $(b_j^\dagger b_{j'}^\dagger\, |0_{out}\rangle)$, onde j' corresponde ao estado $\sigma_{j'} = \overline{\sigma}^j$, conforme discussão feita no parágrafo que segue 1.19. Tal estado pode ser representado na notação 1.34 por $|1j, 1j'\rangle_{out}$, que é mais conveniente neste caso. A probabilidade de encontrarmos tal estado partindo do vácuo $|0_{out}\rangle$ é dada por:

$$\langle 1j, 1j'_{out}|0_{in}\rangle = \langle 0_{out}|b_j b_{j'}|0_{in}\rangle = \left\langle 0_{out}\middle|b_j \beta_j^* a_j^\dagger\middle|0_{in}\right\rangle = \left\langle 0_{out}\middle|b_j \beta_j^* \alpha_j^{*-1} b_j^\dagger\middle|0_{in}\right\rangle, \tag{2.109}$$

onde em ambas as igualdades utilizamos 2.102.

Com uso do adjunto de 1.32, temos

$$\langle 1j, 1j'_{out}|0_{in}\rangle = \beta_j^* \alpha_j^{*-1} \left\langle 0_{out}\middle|b_j b_j^\dagger\middle|0_{in}\right\rangle = \beta_j^* \alpha_j^{*-1} \left\langle 1j_{out}\middle|b_j^\dagger\middle|0_{in}\right\rangle = \beta_j^* \alpha_j^{*-1} \langle 0_{out}|0_{in}\rangle. \tag{2.110}$$

Lembrando que, de acordo com 1.18, o operador $b_{j'}$ aniquila o estado σ_j. Podemos fazer está conta para um estado mais geral, como por exemplo $|nj, nj'\rangle_{out}$.

$$\langle nj, nj'_{out}|0_{in}\rangle = (n!)^{-1} \langle 0_{out}|(b_j)^n (b_{j'})^n|0_{in}\rangle = \frac{\left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^n}{n!} \left\langle 0_{out}\middle|b_j b_j^\dagger\middle|0_{in}\right\rangle =$$

$$= \frac{\left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^n}{\sqrt{n!}} \left\langle nj_{out}\middle|b_j^\dagger\middle|0_{in}\right\rangle = \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^n \langle 0_{out}|0_{in}\rangle. \tag{2.111}$$

Note que, se o número de partículas com índice j for diferente do de partículas com índice j', teremos um operador de criação sobrando sendo aplicado em $\langle 0_{out}|$, o que resulta em 0.

Para obtermos o valor do produto $\langle 0_{out}|0_{in}\rangle$, calculamos a probabilidade de se obter uma quantia qualquer de partículas e anti-partículas em todos os estados possíveis, ou seja

$$\langle n_1 j_1, n_1 j_1', n_2 j_2, n_2 j_2', \ldots_{out} |0_{in}\rangle = \prod_j \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} \langle 0_{out}|0_{in}\rangle . \tag{2.112}$$

Definindo $\{n_k j_k\}$ como sendo uma combinação possível de pares $(n_k j_k, n_k j_k')$, e somando em todas as combinações possíveis, temos todas as possibilidades de estados que podem ser criados a partir do vácuo, podemos então considerá-los como um conjunto completo de operadores, e com a ajuda da equação anterior e impondo a normalização de $\langle 0_{in}|0_{in}\rangle = 1$, temos

$$1 = \langle 0_{in}|0_{in}\rangle = \sum_{\{n_k j_k\}} \langle 0_{in}|\{n_k j_k\}\rangle_{out} \langle \{n_k j_k\}_{out}|0_{in}\rangle = \sum_{\{n_k j_k\}} \prod_k |\beta_k \alpha_k^{-1}|^{2n_k} |\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2. \tag{2.113}$$

Como a soma se dá sobre todos os conjuntos $\{n_k j_k\}$, podemos troca-la de posição com a produtória, obtendo $\sum_{\{n_k j_k\}} \prod_k = \prod_k \sum_{n_k=0}^{\infty}$. Assumindo a convergência da série (que foi obtida da equação do produto escalar 2.113, que é igual a 1), vemos que a somatória $\prod_k \sum_{n_k=0}^{\infty} |\beta_k^* \alpha_k^{*-1}|^{2n_k}$ precisa ser a somatória de uma progressão geométrica decrescente de razão $|\beta_k \alpha_k^{-1}|^2$. Temos então que o resultado da soma é $\left(1 - |\beta_k \alpha_k^{-1}|^2\right)^{-1}$. Com uso disto e de 2.99, transformamos 2.113 em

$$1 = |\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2 \prod_k \left(1 - |\beta_k \alpha_k^{-1}|^2\right)^{-1} = |\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2 \prod_k |\alpha_k|^2 \Rightarrow |\langle 0_{out}|0_{in}\rangle|^2 = \prod_k |\alpha_k|^{-2}, \tag{2.114}$$

onde na segunda igualdade foi tirado de 2.99 que $|\alpha_k|^{-2} = 1 - |\beta_k \alpha_k^{-1}|^2$.

E assim, a probabilidade de se encontrar um modo qualquer de pares de partículas em $t \to \infty$ (Eq. 2.112) é dado por

$$\langle n_1 j_1, n_1 j_1', n_2 j_2, n_2 j_2', \ldots_{out} |0_{in}\rangle = \prod_j \left(\left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} |\alpha_j|^{-2}\right). \tag{2.115}$$

Somente para verificar a consistência desta fórmula com os resultados obtidos anteriormente, vamos definir P_{n_j} como a probabilidade de se encontrar n pares de partículas e anti-partículas no modo j. Esta probabilidade é dada por

$$P_{n_j} = \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} |\alpha_j|^{-2}. \tag{2.116}$$

A soma das probabilidades de se obter qualquer número de pares com modo j em $t \to \infty$ (incluindo a possibilidade de se obter zero partículas) deve ser 1, já que todas as possibilidades possíveis estão sendo consideradas. Fazendo essa conta com uso de 2.99, temos

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} P_{n_j} = \sum_{n_j=0} \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} |\alpha_j|^{-2} = \left(1 - |\beta_k \alpha_k^{-1}|^2\right)^{-1} |\alpha_j|^{-2} = |\alpha_j|^2 |\alpha_j|^{-2} = 1. \tag{2.117}$$

O número de partículas no modo j é dado por

$$\langle N_j \rangle_{out} = \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j P_{n_j} = |\alpha_j|^{-2} \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j}. \tag{2.118}$$

Trabalhando a soma, vemos que

$$\begin{aligned}
\sum n_j \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} \left(1 - \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^2\right) &= \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} - \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^2 \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} = \\
&= \sum_{n_j=0}^{\infty} n_j \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} - \sum_{n_j=1}^{\infty} (n_j - 1) \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} = \\
&= \sum_{n_j=1}^{\infty} \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} = \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} - 1. \qquad (2.119)
\end{aligned}$$

Isto implica em

$$\sum_{n_j=0}^{\infty} n_j \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} |\alpha_j|^{-2} = \underbrace{\left(1 - |\beta_k \alpha_k^{-1}|^2\right)^{-1} |\alpha_j|^{-2}}_{=1} \left(\sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} - 1\right). \tag{2.120}$$

Sendo assim, finalmente calculamos o número de partículas através de

$$\langle N_j \rangle_{out} = \sum_{n_j=0}^{\infty} \left(\beta_j^* \alpha_j^{*-1}\right)^{2n_j} - 1 = \sum_{n_j=0}^{\infty} P_{n_j} |\alpha_j|^2 - 1 = |\alpha_j|^2 - 1 = |\beta_j|^2, \tag{2.121}$$

o que é consistente com o resultado obtido em 2.104.

Capítulo 3

Exemplos e Outras Aplicações

Neste capítulo apresentaremos alguns exemplos simples onde podemos aplicar o que foi apresentado no capítulo anterior, com o objetivo de se ver na prática como se dá a criação de partículas por campos gravitacionais. Após os cálculos, apontaremos algumas características interessantes dos resultados, que permitem comparar o efeito de partículas emitidas com a radiação de um corpo negro, permitindo que se defina um análogo à "temperatura" para a curvatura do espaço-tempo (melhor dizendo, para o "objeto" responsável pela curvatura). Esses exemplos são importantes para se entender fenômenos em cosmologia ligados à expansão do universo e a radiação de Hawking.

O primeiro exemplo consiste em um espaço-tempo 2-dimensional de Robertson-Walker, seguindo as linhas de [29, 3]. Embora seja um caso simples, já é possível evidenciar diversos efeitos de criação de partículas para um universo em expansão[1]. O segundo exemplo se dá em espaços-tempos 4-dimensionais assintoticamente planos. Com ajustes nos termos constantes da métrica, pode-se fazer com que o resultado se aplique para espaços-tempos inicialmente planos que passaram por uma fase de expansão, contração, ou que tiveram algum tipo de perturbação e retornaram ao seu estado inicial. Esse exemplo pode ser encontrado em [2], e a equação para os modos obtida neste caso se assemelha a soluções de ondas obtidas em outros problemas, como as obtidas por Epstein, no estudo de reflexão de ondas de rádio pela ionosfera (vide equação 16 de [64]), e por Eckart, no estudo da reflexão de elétrons por uma barreira de potencial (vide equação 13 de [65]).

No final, dedicamos uma seção para mostrar em que outros casos esse formalismo pode ser aplicado, e, sem entrar em muitos detalhes, citamos, meramente a título de curiosidade, outros estudos sobre matriz S que ficaram de fora desta dissertação.

3.1 Exemplo de universo 2-dimensional em expansão

Como primeiro exemplo, trataremos de um caso bem simples de um universo em expansão com uma dimensão espacial e uma temporal, como feito em [3]. Suponha um espaço-tempo de Robertson-Walker 2-dimensional com

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\, dx^2. \tag{3.1}$$

Tal expressão pode ser reescrita em função do tempo conforme $\eta \to d\eta = dt/a$, com

[1] Por sinal, este é o espaço-tempo utilizado por Bernard e Duncan para discutir renormalização em espaços curvos (vide a seção 3 de [29]).

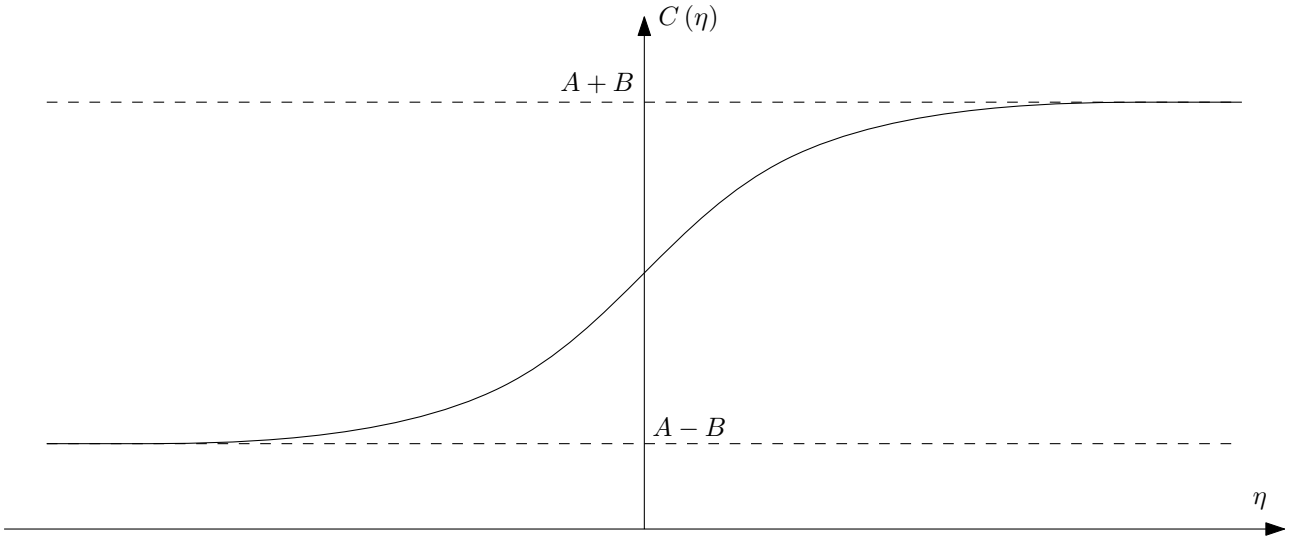

Figura 3.1: Gráfico ilustrando o comportamento assintótico de $C(\eta)$.

$$t = \int^{t} dt' = \int^{\eta} a(\eta')\, d\eta', \tag{3.2}$$

ficando na forma

$$ds^2 = a^2(\eta)\left(d\eta^2 - dx^2\right). \tag{3.3}$$

Se escolhermos

$$C(\eta) = a^2(\eta) = A + B\tanh(\rho\eta) \tag{3.4}$$

com A, B e $\rho \in \mathbb{R}$, temos que esse espaço-temo é assintoticamente plano para $t \to \pm\infty$ (note que $C(\eta) \to A \pm B$ quando $\eta \to \pm\infty$, como pode ser visto no gráfico da figura 3.1). Note também que $C(\eta)$ não depende de x.

Essa escolha faz com que nossa métrica seja $C(\eta)\,\eta_{\mu\nu}$, onde $\eta_{\mu\nu}$ é o tensor métrico de Minkowski.

O comportamento assintoticamente plano desse espaço-tempo pode ser evidenciado também pelo cálculo do escalar de curvatura R, o que nos fornece

$$R(\eta) = B\rho^2 \sinh^2(\rho\eta)\, \frac{2A\tanh(\rho\eta) + B\left(1 + \tanh^2(\rho\eta)\right)}{\left(A + B\tanh(\rho\eta)\right)^3}, \tag{3.5}$$

que para $\eta \to \pm\infty$, vai exponencialmente a zero, visto que

$$R(\eta) \overset{\eta\to\pm\infty}{\longrightarrow} \pm\frac{8B\rho^2}{A \pm B} e^{\mp 2\rho\eta}. \tag{3.6}$$

Vamos analisar o comportamento de um campo escalar nesse espaço-tempo. A equação e Klein-Gordon nesse caso é dada por

$$\left[\Box + m^2 + \xi R\right] \Phi = 0. \tag{3.7}$$

Um dos motivos para termos escolhido o caso de dimensão 2 é que o acoplamento conforme é igual ao acoplamento mínimo, já que

$$\xi = \frac{d-2}{4\,(d-1)} \overset{d=2}{=} 0. \tag{3.8}$$

Trataremos então deste caso ($\xi = 0$). Multiplicando a equação 3.7 por $C\,(\eta)$, temos

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) \Phi + m^2 C\,(\eta)\,\Phi = 0. \tag{3.9}$$

Como $C\,(\eta)$ não tem dependência em x, a translação espacial continua sendo uma simetria do sistema. Podemos resolver essa equação para a parte espacial como em Minkowski, obtendo os modos ψ_k dados por

$$\psi_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \chi_k\,(\eta)\,, \tag{3.10}$$

que são utilizados em

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left(\psi_k a_k + \overline{\psi}_k a_k^\dagger\right) dk, \tag{3.11}$$

conforme feito em 1.24, onde χ_k contém a dependência em η e será obtida mais adiante. A essas soluções impomos as relações de comutação canônicas como em 1.26 e 1.28.

Os modos 3.10 também são soluções de 3.9. Substituindo um no outro e resolvendo para x, vemos que os χ_k satisfazem

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \chi_k + \left(k^2 + C\,(\eta)\, m^2\right) \chi_k = 0. \tag{3.12}$$

Para resolver essa equação, é necessário fazer uma série de mudanças de variáveis e de redefinições de χ_k de modo a chegarmos a uma equação diferencial conhecida. Embora as contas não sejam muito complexas, elas são raramente apresentadas na literatura (vide [3] e [29] por exemplo), e por isso é justificado gastarmos um tempo para apresentá-las aqui.

Chamemos $u = -e^{2\rho\eta}$. Deste modo $d/d\eta = (du/d\eta)\, d/du = 2\rho u\, d/du$. Sob essa mudança de variável, reescrevemos 3.12 da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
3.12 \quad &= \quad 4\rho^2 u^2 \chi_k'' + 4\rho^2 u \chi_k' + \left(k^2 + Am^2 - Bm^2 \frac{1+u}{1-u}\right) \chi_k = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad (1-u)\, u\chi_k'' + (1-u)\, u\chi_k' + \frac{u^{-1}}{4\rho^2} \left(k^2 + Am^2 - Bm^2 - u\left(k^2 + Am^2 + Bm^2\right)\right) \chi_k = \\
&= (1-u)\, u\chi_k'' + (1-u)\, u\chi_k' + \frac{u^{-1}}{4\rho^2} \left(\omega_i^2 - u\,\omega_o^2\right) \chi_k = 0,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

onde $'$ denota derivada em relação a u e

$$\omega_i = \sqrt{k^2 + Am^2 - Bm^2} \tag{3.14}$$

$$\omega_o = \sqrt{k^2 + Am^2 + Bm^2}. \tag{3.15}$$

É conveniente definir também

$$\omega_+ = \frac{1}{2}\left(\omega_o + \omega_i\right) \tag{3.16}$$

$$\omega_- = \frac{1}{2}\left(\omega_o - \omega_i\right), \tag{3.17}$$

de onde vemos que $\omega_+ - \omega_- = \omega_i$.

Agora escrevemos χ_k da seguinte forma

$$\chi_k = \frac{1}{\sqrt{2\omega_t}} e^{-i\omega_i} f(u) = \frac{\left(e^{2\rho\eta}\right)^{i\frac{\omega_i}{2\rho}}}{\sqrt{2\omega_t}} f(u) = \frac{(-u)^K}{\sqrt{2\omega_t}} f(u), \tag{3.18}$$

onde $K = -i\omega_i/2\rho$. O termo $1/\sqrt{2\omega_t}$ é uma constante de normalização que é igual a ω_i quando $t \to -\infty$ e a ω_o quando $t \to \infty$. Temos então

$$\begin{aligned} \chi_k' &= \frac{-K}{\sqrt{2\omega_t}} (-u)^{K-1} f(u) + \frac{(-u)^K}{\sqrt{2\omega_t}} f'(u) \\ \chi_k'' &= \frac{K(K-1)}{\sqrt{2\omega_t}} (-u)^{K-2} f(u) - \frac{2K}{\sqrt{2\omega_t}} (-u)^{K-1} f'(u) + \frac{(-u)^K}{\sqrt{2\omega_t}} f''(u). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Substituindo 3.19 em 3.13, vemos que $f(u)$ satisfaz

$$\begin{aligned} &(1-u)\,uf'' + (1-u)(2K+1)f' - (1-u)(-u)^{-1}\left[K(K-1)+K\right]f + u^{-1}\frac{\left(\omega_i^2 - u\,\omega_o^2\right)}{4\rho^2} f = 0 = \\ &= (1-u)\,uf'' + (1-u)\left(1 - \frac{i\omega_i}{\rho}\right) f' - \frac{\omega_+}{\rho}\frac{\omega_-}{\rho} f = \\ &= u(1-u)f'' + \left[\left(1 - \frac{i\omega_i}{\rho}\right) - \left(1 - \frac{i\omega_+}{\rho} - \frac{i\omega_-}{\rho}\right)u\right] f' - \left(\frac{-i\omega_+}{\rho}\right)\left(\frac{i\omega_-}{\rho}\right) f = 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

A segunda igualdade parece ser desnecessária, visto que a equação foi escrita de uma forma menos simplificada, porém escrita dessa forma, podemos comparar 3.20 com a equação hipergeométrica. Pela definição de u, vemos que quando $t \to -\infty$, $u \to 0$. Essa é a região *in*.

Nessa região, a solução de 3.20 é a função hipergeométrica

$$\begin{aligned} f_{in}(u) &\overset{u\to 0}{=} {}_2F_1\left(\frac{-i\omega_+}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_i}{\rho}; -e^{-2\rho\eta}\right) = \\ &= \left(1 + e^{2\rho\eta}\right)^{-i\frac{\omega_i}{\rho}} {}_2F_1\left(\frac{1 + i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_i}{\rho}; \frac{-e^{-2\rho\eta}}{-e^{-2\rho\eta} - 1}\right), \end{aligned} \tag{3.21}$$

onde a segunda igualdade é possível graças a uma identidade conhecida como transformação de Pfaff.

Substituindo essa expressão na equação 3.10, vemos que os modos são escritos na forma

$$\psi_{in\,k} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\omega_i}} e^{ikx - i\omega_+\eta + i\omega_-\eta} \left(1 + e^{2\rho\eta}\right)^{\frac{-i\omega_i}{\rho}} {}_2F_1\left(\frac{1+i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_i}{\rho}; \frac{-e^{-2\rho\eta}}{-e^{-2\rho\eta}-1}\right). \tag{3.22}$$

Reescrevendo os termos

$$\frac{-e^{-2\rho\eta}}{-e^{-2\rho\eta}-1} = \frac{1}{2} + \frac{e^{2\rho\eta}-1}{2\left(e^{2\rho\eta}+1\right)} = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left(\rho\eta\right)\right)$$

e

$$\begin{aligned} e^{i\omega_-\eta}\left(1+e^{2\rho\eta}\right)^{\frac{-i\omega_i}{\rho}} &= \left[e^{-\rho\eta}\left(1+e^{2\rho\eta}\right)\right]^{\frac{-i\omega_i}{\rho}} = \left(e^{-\rho\eta}+e^{\rho\eta}\right)^{\frac{-i\omega_i}{\rho}} = \left(2\cosh\left(\rho\eta\right)\right)^{\frac{-i\omega_i}{\rho}} = \\ &= \exp\left[\frac{-i\omega_i}{\rho}\ln\left(2\cosh\rho\eta\right)\right], \end{aligned}$$

podemos rescrever 3.22 na seguinte forma

$$\psi_{in\,k} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_i}} \exp\left[ikx - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_i}{\rho}\ln\left(2\cosh\rho\eta\right)\right] {}_2F_1\left(\frac{1+i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 - \frac{i\omega_i}{\rho}; \frac{1}{2}\left(1+\tanh\left(\rho\eta\right)\right)\right). \tag{3.23}$$

Analogamente, podemos resolver a equação 3.20 na região em que $t \to \infty$ (onde $u \to \infty$), o que nos dá

$$\psi_{out\,k} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega_o}} \exp\left[ikx - i\omega_+\eta - \frac{i\omega_i}{\rho}\ln\left(2\cosh\rho\eta\right)\right] {}_2F_1\left(\frac{1+i\omega_-}{\rho}, \frac{i\omega_-}{\rho}; 1 + \frac{i\omega_o}{\rho}; \frac{1}{2}\left(1-\tanh\left(\rho\eta\right)\right)\right). \tag{3.24}$$

Se tomarmos os limites $\eta \to \pm\infty$, vemos que

$$\begin{aligned} &\lim_{\eta\to\pm\infty} \quad 1 \mp \tanh\left(\rho\eta\right) \to 0 \\ &\lim_{\eta\to\pm\infty} \quad e^{-i\omega_+\eta - \frac{i\omega_-}{\rho}\ln(2\cosh\rho\eta)} \to e^{-i\omega_+\eta \mp i\omega_-\eta} = e^{-i\omega_i^o} \\ &\lim_{\eta\to\pm\infty} \quad {}_2F_1\left(.,.;.;\frac{1}{2}\left(1\mp\tanh\left(\rho\eta\right)\right)\right) \to 1, \end{aligned}$$

o que faz com que

$$\begin{aligned} \psi_{in\,k} &\to \frac{e^{ikx - i\omega_i\eta}}{\sqrt{4\pi\omega_i}} \\ \psi_{out\,k} &\to \frac{e^{ikx - i\omega_o\eta}}{\sqrt{4\pi\omega_o}}. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Essas soluções podem ser escritas em uma base do espaço de soluções para a equação de Klein-Gordon, como foi feito no capítulo anterior. Com uso de 2.97 vemos que essas duas soluções para regiões diferentes se relacionam por

$$\psi_{in\,k} = \alpha_k \psi_{out\,k} + \beta_k \overline{\psi_{out\,k}}. \tag{3.26}$$

Existem diversas transformações lineares que permitem relacionar funções hipergeométricas, e algumas podem ser utilizadas de modo a obtermos a expressão de α_k e β_k. Com uso dessas relações podemos escrever (veja as equações 15.3.6 e 15.3.3 de [66])

$$\begin{aligned}
{}_2F_1\left(a,b;c;\frac{1}{2}\left(1+\tanh\rho\eta\right)\right) &= X\,{}_2F_1\left(a,b;a+b-c+1;\frac{1}{2}\left(1-\tanh\rho\eta\right)\right) \\
&+\left(\frac{1}{2}-\frac{\tanh\rho\eta}{2}\right)^{c-a-b} Y\,{}_2F_1\left(c-a,c-b;c-a-b+1;\frac{1}{2}\left(1-\tanh\rho\eta\right)\right) = \\
&= X\,{}_2F_1\left(a,b;a+b-c+1;\frac{1}{2}\left(1-\tanh\rho\eta\right)\right) \\
&+Y\,{}_2F_1\left(a,b;c-a-b+1;\frac{1}{2}\left(1-\tanh\rho\eta\right)\right),
\end{aligned} \tag{3.27}$$

com

$$\begin{aligned}
X &= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \\
Y &= \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

No nosso caso

$$\begin{aligned}
a &= 1+\frac{i\omega_-}{\rho},\ b=\frac{i\omega_-}{\rho}\ c=1-\frac{i\omega_i}{rho} \\
a+b-c+1 &= 1+\frac{i\omega_-}{\rho}+\frac{i\omega_-}{\rho}-\cancel{1}+\frac{i\omega_i}{\rho}+\cancel{1}=1+\frac{i\omega_o}{\rho} \\
c-a-b+1 &= \cancel{1}-\frac{i\omega_i}{\rho}-\cancel{1}-\frac{i\omega_-}{\rho}-\frac{i\omega_-}{\rho}+1=1-\frac{i\omega_o}{\rho}.
\end{aligned}$$

Com isso podemos ver que 3.27 implica em

$$\psi_{in\,k} = \sqrt{\frac{\omega_o}{\omega_i}} X \psi_{out\,k} + \sqrt{\frac{\omega_o}{\omega_i}} Y \overline{\psi}_{out\,k}. \tag{3.29}$$

Ao compararmos essa expressão com 3.26, concluímos que

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{\omega_o}{\omega_i}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_i}{\rho}\right)\Gamma\left(-\frac{i\omega_o}{\rho}\right)}{\Gamma\left(-\frac{i\omega_+}{\rho}\right)\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_+}{\rho}\right)}$$
$$\beta_k = \sqrt{\frac{\omega_o}{\omega_i}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i\omega_i}{\rho}\right)\Gamma\left(\frac{i\omega_o}{\rho}\right)}{\Gamma\left(\frac{i\omega_-}{\rho}\right)\Gamma\left(1 + \frac{i\omega_-}{\rho}\right)}, \tag{3.30}$$

que são os coeficientes de Bogolyubov. Com esses resultados em mãos, podemos realizar todos os cálculos indicados na seção 2.4. Vamos agora obter alguns dos resultados interessantes apresentados no capitulo anterior para este caso.

Usando as relações

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \overline{\Gamma(z)} = \Gamma(\overline{z}) \;\; e \;\; \sin i\theta = -i \sinh \theta \tag{3.31}$$

calculamos

$$\|\alpha_k\|^2 = \frac{\sinh^2 \frac{\pi\omega_+}{\rho}}{\sinh \frac{\pi\omega_i}{\rho} \sinh \frac{\pi\omega_o}{\rho}}$$
$$\|\beta_k\|^2 = \frac{\sinh^2 \frac{\pi\omega_-}{\rho}}{\sinh \frac{\pi\omega_i}{\rho} \sinh \frac{\pi\omega_o}{\rho}}, \tag{3.32}$$

que são coerentes com 2.99.

Escrevendo Φ_{in} e Φ_{out} com uso de 3.11, concluímos (do mesmo modo que fizemos em 2.102) que

$$b_k = \sqrt{\frac{\omega_o}{\omega_i}} \left(\alpha_k a_k + \beta_k^* a_k^\dagger\right)$$
$$b_k^\dagger = \sqrt{\frac{\omega_o}{\omega_i}} \left(\alpha_k^* a_k^\dagger + \beta_k a_k\right). \tag{3.33}$$

Com uso do que foi estudado no capítulo anterior, o estado de vácuo na região *in*, $|0_{in}\rangle$, pode ser escrito na região *out* na forma geral

$$|0_{in}\rangle = C_0 \, |0_{out}\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \int \delta\left(\sum_{i=1}^{2n} k_i\right) C_n(k_1, \ldots, k_{2n}) \, b_1^\dagger b_2^\dagger \ldots b_{2n}^\dagger \, |0_{out}\rangle \, dk_1 \ldots dk_{2n}. \tag{3.34}$$

Resta então encontrarmos os valores dos coeficientes C_n. Aplicando o estado $\langle 0_{out} \mid$ em 3.34, vemos que

$$C_0 = \langle 0_{out} | 0_{in} \rangle. \tag{3.35}$$

Aplicando o estado $\langle k, -k \mid$ em 3.34 vemos (com uso de 2.110) que

$$\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}C_0 = \langle k,-k|0_{in}\rangle = 2C_1\left(k,-k\right) \Rightarrow C_1\left(k,-k\right) = \frac{1}{2}\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}C_0. \tag{3.36}$$

Aplicando estados com mais partículas em 3.34, é fácil ver que

$$C_n\left(k_1,\ldots k_{2n-1},-\sum_{i=1}^{2n-1}k_i\right) = \frac{1}{2n\left(2n-1\right)}\sum_{j=1}^{2n-1}\frac{\beta_{k_j}^*}{\alpha_{k_j}^*}\delta\left(\sum_{i\neq j}^{2n-1}k_i\right)C_{n-1}\left(k_1,\ldots,k_{j-1},k_{k+1},\ldots,k_{2n-1}\right). \tag{3.37}$$

Podemos reescrever 3.34 utilizando 3.37, obtendo

$$\begin{aligned}
|0_{in}\rangle =& C_0\,|0_{out}\rangle + \frac{1}{2}C_0\int\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}b_k^\dagger b_{-k}^\dagger\,|0_{out}\rangle + \\
&+\frac{1}{4\cdot 3}\int\delta\left(\sum_{i=1}^{4}k_i\right)\left(\frac{\beta_{k_1}^*}{\alpha_{k_1}^*}\delta\left(k_2+k_3\right)C_1\left(k_2,k_3\right)+\frac{\beta_{k_2}^*}{\alpha_{k_2}^*}\delta\left(k_1+k_3\right)C_1\left(k_1,k_3\right)+\right. \\
&\left.+\frac{\beta_{k_3}^*}{\alpha_{k_3}^*}\delta\left(k_1+k_2\right)C_1\left(k_1,k_2\right)\right)b_{k_1}^\dagger b_{k_2}^\dagger b_{k_3}^\dagger b_{k_4}^\dagger dk_1dk_2dk_3dk_4\,|0_{out}\rangle+\ldots = \\
=& C_0\,|0_{out}\rangle + \left[\frac{1}{2}C_0\int\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}b_k^\dagger b_{-k}^\dagger + \frac{1}{2}\frac{1}{2^2}C_0\int\left(\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}b_k^\dagger b_{-k}^\dagger\right)\left(\int\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}b_k^\dagger b_{-k}^\dagger\right)+\right. \\
&\left.+\frac{1}{6}\frac{1}{2^3}C_0\left(\int\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}b_k^\dagger b_{-k}^\dagger\right)^2+\ldots\right]|0_{out}\rangle = \\
=& C_0 exp\left[\frac{1}{2}\int\frac{\beta_k^*}{\alpha_k^*}b_k^\dagger b_{-k}^\dagger\right]|0_{out}\rangle\,.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Podemos obter todos as probabilidades e número de partículas desejadas simplesmente substituindo 3.32 nas equações correspondentes obtidas na seção 2.4.2. Por exemplo, o número de partículas obtidas no modo k é dado por

$$\langle N_k\rangle_{out} = \|\beta_k\|^2 = \frac{\|\beta_k/\alpha_k\|^2}{1-\|\beta_k/\alpha_k\|^2}, \tag{3.39}$$

com

$$\left\|\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right\|^2 = \left\|\frac{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_-}{\rho}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi\omega_+}{\rho}\right)}\right\| = \left\|\frac{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2\rho}\left(\sqrt{k^2+m^2\left(A+B\right)}-\sqrt{k^2+m^2\left(A-B\right)}\right)\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi}{2\rho}\left(\sqrt{k^2+m^2\left(A+B\right)}+\sqrt{k^2+m^2\left(A-B\right)}\right)\right)}\right\|. \tag{3.40}$$

Vemos que 3.40 vai a zero quando k cresce, isso faz com que o número médio de partículas para k grande seja menor.

3.2 Exemplo 4-dimensional sem massa

Consideremos um espaço-tempo que satisfaz

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right). \tag{3.41}$$

Nesse espaço tempo, o escalar de curvatura é dado por

$$R = 6\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \left(\frac{a''}{a}\right)\right]. \tag{3.42}$$

Queremos estudar o comportamento de um campo escalar nesse espaço-tempo. Nesse caso, a equação de Klein-Gordon tem a forma

$$\Box\Phi + \left(m^2 + \xi R\right)\Phi = 0, \tag{3.43}$$

que, para a métrica de 3.41, tem a forma

$$a^{-3}\partial_t\left(a^3\partial_t\Phi\right) - a^{-2}\sum_i \partial_i^2\Phi\left(m^2 + \xi R\right)\Phi = 0. \tag{3.44}$$

Podemos simplificar 3.44 definindo o tempo conforme $\tau \,|\, \partial\tau = a^3\partial t,\ \tau = \int^t a^{-3}(t')\,dt'$. Além disso, como a não tem dependência nas componentes espaciais, podemos resolver essa parte separadamente. Desejamos que esse espaço-tempo seja assintoticamente plano (escolheremos um a que satisfaça isso),deste modo, assim como no caso anterior, escrevemos Φ na forma 1.24, e vemos que os modos $\psi_k \propto e^{ikx}\chi_k(t)$, onde χ_k tem toda a dependência de ψ_k em τ. Esses modos também satisfazem 3.44. Utilizando essas simplificações, escrevemos

$$\partial_\tau^2\psi_k - \left[a^4k^2 - a^6\left(m^2 + \xi R\right)\right]\psi_k = 0, \tag{3.45}$$

que também é satisfeita por χ_k.

Escolhemos[2]

$$a(\tau) = \left\{a_1^4 + e^{\tau/s}\frac{\left(a_2^4 - a_1^4\right)\left(e^{\tau/s}+1\right) + b}{\left(e^{\tau/s}+1\right)^2}\right\}^{1/4}, \tag{3.46}$$

com a_1, a_2, b e s sendo reais positivos.

[2]Esse é o exemplo proposto em [2]. Essa escolha se torna bem interessante, visto que ela abrange uma série de casos, por exemplo, se escolhermos $b = 0$,

$$a(\tau) = \left\{\frac{a_2^4 + a_1^4}{2} + \frac{a_2^4 - a_1^4}{2}\tanh\left(\frac{\tau}{2s}\right)\right\}^{1/4} = \left[A + B\tanh\rho\tau\right]^{1/4},$$

para A,B e ρ convenientes. Esse caso seria um análogo 4-dimensional do exemplo anterior. Podemos fazer $a_1 = a_2$, o que nos dá

$$a(\tau) = \left\{a_1^4 + \frac{b}{4\cosh^2(\tau/2s)}\right\}^{1/4}.$$

E como último exemplo, podemos tomar o limite quando $s \to \infty$. Nesse caso temos uma expansão instantânea do espaço-tempo, como a estudada na seção VI de [63].

Note que com essa escolha de a, quando $t \to -\infty$, $a \to -a_1$, e quando $t \to +\infty$, $a \to -a_2$. Além disso, em ambos os casos $R \to 0$.

Vamos estudar o caso em que $m^2 + \xi R = 0$ (caso de um campo sem massa e com acoplamento mínimo). Nesse caso, a equação 2.96 para χ_k tem a forma simples

$$\partial_\tau^2 \chi_k - a^4 k^2 \chi_k = 0. \tag{3.47}$$

Descreveremos o processo de resolução dessa equação, que em muito se assemelha ao resolvido na seção anterior. Vamos fazer a mudança de variável $u = e^\eta$, onde $\eta = \tau s^{-1}$ e $d/d\tau = us^{-1}d/du$. Substituindo 3.46 em 3.47, temos

$$\chi_k'' + u^-1\chi_k' + k^2 s^2 \left\{ u^{-2} a_1^4 + u^{-1} (1+u)^{-2} \left[\left(a_2^4 - a_1^4\right)(1+u) + b \right] \right\} \chi_k = 0, \tag{3.48}$$

onde $'$ denota a derivada em relação a u.

Essa equação tem polos em $u = 0$ e $u = -1$. Ao redor de $u = 0$ temos

$$\chi_k'' \sim -k^2 s^2 a_1^4 u^{-2} \chi_k \overset{u \to 0}{\longrightarrow} \chi_k \sim u^{\pm iksa_1^2},$$

e ao redor de $u = -1$

$$\chi_k'' \sim -k^2 s^2 b (1-u)^{-2} \chi_k = -\frac{1}{4} \underbrace{\left(1 - \sqrt{1 + 4k^2 s^2 b}\right)}_{=d} \left(1 + \sqrt{1 + 4k^2 s^2 b}\right) \chi_k \overset{u \to -1}{\longrightarrow} \chi_k \sim (1+u)^d .$$

Além da definição de d, é conveniente definir $c_1 = iksa_1^2$ e $c_2 = iksa_2^2$. Essas equações nos ajudam a ver como escrever χ_k de uma forma que permita comparar 3.48 com uma função hipergeométrica (como fizemos na seção anterior). Escrevendo[3]

$$\chi_k = \frac{1}{N_t} (1+u)^d u^{-c_1} f(u), \tag{3.49}$$

onde N_t é uma constante de normalização que será obtida posteriormente, e substituindo 3.49 em 3.48, vemos que f satisfaz

$$u(u+1) f'' + [(2d - 2c_1 + 1) u + (1 - 2c_1)] f' + (d - c_1 + c_2)(d - c_1 - c_2) f = 0. \tag{3.50}$$

Esta equação é a equação hipergeométrica, e sua solução ao redor de $u = 0$ ($t \to -\infty$) é dada por

$$f(u) = {}_2F_1 \left(d - c_1 + c_2, d - c_1 - c_2; 1 - 2c_1; -u\right). \tag{3.51}$$

Deste modo, a solução para $\psi_{in\,k}$ é dada por

$$\psi_{in\,k} = \frac{1}{N_{in}} e^{ikx - c_1 \frac{\tau}{s}} (1+u)^d {}_2F_1 \left(d - c_1 + c_2, d - c_1 - c_2; 1 - 2c_1; -u\right), \tag{3.52}$$

[3]Note que escolhemos a solução com sinal negativo do comportamento de χ_k ao redor de $u = 0$. Essa escolha se justifica pelo seguinte motivo: Quando $u \to 0$, temos que $t \to -\infty$, o que corresponde à região in. Mais adiante, definiremos $\omega_i = k/a_1$, dessa forma, a solução com sinal negativo faz com que o comportamento de ψ_k na região in corresponda a $\psi_k \propto e^{-i\omega_i t}$, que corresponde aos modos de frequência positiva. Se escolhêssemos a outra solução, estaríamos resolvendo para os modos de frequência negativa.

onde incluímos em N_{in} as constante de proporcionalidade entre ψ_k e χ_k.

Tomando o limite em que $t \to \infty$ (que equivale a $\eta \to -\infty$), vemos que $(1+u)^d \to 1$, ${}_2F_1\left(.,.;.;-u\right) \to 1$ e que $\tau \to a_1^3 t$. Sendo assim

$$\psi_{in\,k} \overset{t\to-\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{ikx-i\omega_i t}}{N_{in}}, \tag{3.53}$$

onde $\omega_{in} = k/a_1$, e descobrimos que a constante de normalização $N_{in} = \sqrt{2a_1^3\omega_i}$.

A solução de 3.50 na região em que $u \to \infty$ ($t \to \infty$) é dada por

$$f\left(u\right) = u^{c_1-c_2-d}{}_2F_1\left(d-c_1+c_2, d+c_1+c_2; 1+2c_2; -u^{-1}\right), \tag{3.54}$$

o que, pelo mesmo processo, implica em

$$\psi_{out\,k} = \frac{1}{\sqrt{2a_2^3\omega_o}} e^{ikx-i\omega_o t} u^{-d}\left(u+1\right)^d{}_2F_1\left(d-c_1+c_2, d+c_1+c_2; 1+2c_2; -u^{-1}\right), \tag{3.55}$$

onde $\omega_{out} = k/a_2$.

No limite em que $t \to \infty$, ${}_2F_1\left(.,.;.;.\right) \to 1$ e $u^{-d}\left(u+1\right)^d \to 1$, por tanto

$$\psi_{out\,k} \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{e^{ikx-i\omega_o t}}{\sqrt{2a_2^3\omega_o}}. \tag{3.56}$$

Para termos uma relação entre 3.52 e 3.55 que possamos comparar com as transformações de Bogolyubov, utilizaremos novamente das transformações lineares das funções hipergeométricas, que nos permitem escrever (vide equação 15.3.7 de [66])

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(d-c_1+c_2, d-c_1-c_2; 1-2c_1; -u\right) = Xu^{c_1-c_2-d}{}_2F_1\left(d-c_1+c_2, d+c_1+c_2; 1+2c_2; -u^{-1}\right) + \\ +Yu^{c_1+c_2-d}{}_2F_1\left(d-c_1-c_2, d+c_1-c_2; 1-2c_2; -u^{-1}\right), \end{aligned} \tag{3.57}$$

onde

$$\begin{aligned} X &= \frac{\Gamma\left(1-2c_1\right)\Gamma\left(-2c_2\right)}{\Gamma\left(d-c_1-c_2\right)\Gamma\left(1-c_1-c_2-d\right)} \\ Y &= \frac{\Gamma\left(1-2c_1\right)\Gamma\left(2c_2\right)}{\Gamma\left(d-c_1+c_2\right)\Gamma\left(1-c_1+c_2-d\right)}. \end{aligned} \tag{3.58}$$

Substituindo 3.57 em 3.52 temos

$$\begin{aligned}
\psi_{in\,k} &= \frac{1}{\sqrt{2a_1^3\omega_i}} e^{ikx-\cancel{c_1\frac{\tau}{s}}} (1+u)^d \Bigg[X u^{\cancel{c_1}-c_2-d}\, {}_2F_1\left(d-c_1+c_2, d+c_1+c_2; 1+2c_2; -u^{-1}\right) + \\
&\quad + Y u^{\cancel{c_1}+c_2-d}\, {}_2F_1\left(d-c_1-c_2, d+c_1-c_2; 1-2c_2; -u^{-1}\right) \Bigg] = \\
&= \frac{\sqrt{\cancel{2}a_2^3\omega_o}}{\sqrt{\cancel{2}a_1^3\omega_i}} \left[X\psi_{out\,k} + Y\overline{\psi}_{out\,k}\right] = \frac{a_2}{a_1}\left[X\psi_{out\,k} + Y\overline{\psi}_{out\,k}\right], \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

onde a definição de ω_i e ω_o foram utilizadas na última igualdade.

Comparando isso com 3.26, encontramos os coeficientes de Bogolyubov

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{a_2}{a_1} \frac{\Gamma(1-2c_1)\Gamma(-2c_2)}{\Gamma(d-c_1-c_2)\Gamma(1-c_1-c_2-d)} \\
\beta_k &= \frac{a_2}{a_1} \frac{\Gamma(1-2c_1)\Gamma(2c_2)}{\Gamma(d-c_1+c_2)\Gamma(1-c_1+c_2-d)},
\end{aligned} \qquad (3.60)$$

e com eles podemos calcular todas as grandezas de interesse que obtivemos na seção anterior, utilizando as mesmas fórmulas. Por exemplo, com uso de 3.39, podemos calcular o número médio de partículas em cada modo k, para tanto precisamos calcular

$$\left\|\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right\|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{1+4k^2s^2b}\right)\right) + \sinh^2\left(\pi ks\left(a_1^2-a_2^2\right)\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\sqrt{1+4k^2s^2b}\right)\right) + \sinh^2\left(\pi ks\left(a_1^2+a_2^2\right)\right)}, \qquad (3.61)$$

onde as relações 3.31 foram utilizadas.

Olhando o comportamento de 3.61 para $k >> 1$, podemos notar algo interessante:

$$\left\|\frac{\beta_k}{\alpha_k}\right\|^2 \to \frac{e^{2\pi ks\left(a_>^2-a_<^2\right)}}{e^{2\pi ks\left(a_>^2+a_<^2\right)}} = e^{-4\pi ksa_<^2}, \qquad (3.62)$$

onde $a_<$ é o menor entre a_1 e a_2 e $a_>$ o maior entre os dois.

Definindo $\mu = 4\pi sa_<^2$, temos que

$$\langle N_k\rangle_{out} = \frac{e^{-\mu k}}{1-e^{-\mu k}} = \frac{1}{e^{\mu k}-1}. \qquad (3.63)$$

3.63 se assemelha[4] à equação que dá o número médio de partículas de frequência $\nu = k/a_2$ emitidas por um corpo negro. Comparando as duas equações, vemos que as partículas emitidas para $k >> 1$ se assemelham à radiação de corpo negro de um objeto com temperatura

$$T = \frac{\nu}{k_B\mu a_2} = \frac{1}{4\pi sa_<^2 a_2 k_B}, \qquad (3.64)$$

onde k_B é a constante de Boltzmann.

[4]Importante ressaltar que a semelhança na expressão para o número de partículas emitidos em cada modo não é suficiente para se caracterizar a emissão como térmica.

3.3 Outras aplicações

Vimos aqui dois exemplos onde podemos aplicar o formalismo da matriz S, na forma como foi desenvolvido nessa dissertação, para obter as soluções de criação de partículas por campos gravitacionais. Além desses dois casos, sempre que as condições exigidas no final da seção 2.2 forem satisfeitas, podemos obter uma matriz S que represente a criação de partículas pela curvatura do espaço-tempo. Cabe então discutir quando isso é verdade.

Em qualquer situações em que temos um campo de Klein-Gordon em um espaço-tempo onde a métrica da variedade considerada se iguala à métrica de Minkowski exceto em uma região compacta (como no caso de um espaço-tempo com curvatura de suporte compacto), a equivalência unitária é garantida [5], e pode-se verificar que as transformações de Bogolyubov são bem definidas. Wald provou em [8] que o operador B definido na seção 2.2 satisfaz a condição de Hilbert-Schmidt no caso de um espaço-tempo que é plano fora de uma região de curvatura de suporte compacto. Para isso, ele fez uso dos resultados de [69], que garantem a manutenção de certas propriedades pela evolução de Cauchy[6] quando um espaço-tempo é isomorfo ao de Minkowski em algum instante. Posteriormente ao trabalho de Wald, esses resultados foram generalizados para espaços-tempos estáticos em [72], garantindo assim a existência da matriz-S para o campo de Klein-Gordon em qualquer espaço globalmente hiperbólico com regiões iniciais e finais estáticas (vide seção 6 de [72]).

Somente a título de curiosidade, cabe dizer que existem outros formalismos para a construção de matriz S para teorias quânticas de campos em espaços curvos que diferem muito do que foi feito nesta dissertação. Recentemente (vide [73]), tem-se feito uma construção da matriz S onde a região *in* e *out* não são separadas apenas temporalmente, mas podem ser também (ou apenas) separadas espacialmente, inclusive para tempos iguais. Essa construção tem sido chamada de matriz S para "formulação com fronteiras gerais" (GBF - "*general boundary formulation*"). Esse formalismo foi proposto em [74] e consiste em se associar estados a fronteiras de regiões gerais do espaço-tempo, e se determinar as amplitudes através de funções complexas para cada uma dessas regiões. Além disso, se supõem que toda a informação dentro de uma região pode ser recuperada pelos estados definidos em sua fronteira (nesse sentido a teoria é chamada de "holográfica"). Essa formulação parece permitir a obtenção de uma matriz S para diversos tipos de variedades, como para espaços tempo de Rindler [75], de de Sitter [76, 75] e, recentemente, anti-de Sitter [77]. Note que esta formulação também se aplica a espaços-tempos que não são globalmente hiperbólicos. Além dessa formulação, existem também os trabalhos de Kay (por exemplo [13]) sobre teoria quântica de campos em espaços que não são globalmente hiperbólicos. Embora essas formulações tenham ficado de fora desta dissertação, cabe cita-las como motivação de estudos futuros nessa área[7], evidenciando que muito ainda se faz e muito ainda há para se fazer em teoria de espalhamento para teoria quântica de campos em espaços curvos.

[5] Vide seção III e IV de [67], onde esse tipo de métrica é a definição de "métrica admissível", e §2d de [68].

[6] A saber, que se o valor esperado do anti-comutador entre duas soluções de campo fosse da forma de Hadamard (uma solução elementar de Hadamard, ou seja, na forma da equação 2 de [69], vide também [70] e o livro 2 de [71]), então a estrutura da singularidade de Hadamard é preservada pela evolução de Cauchy, e como em Minkowski, o anti-comutador de soluções livres é sempre da forma de Hadamard, então isso é garantido para esse tipo de espaços.

[7] Há campo para se generalizar as ideias de [72] para o caso de campos de Dirac, comparação dos resultados obtidos em [73] com a formulação desta dissertação, e a tentativa de se generalizar as construções deste trabalho para um grupo menos restrito de espaços, como os estudados em [13], entre outras coisas.

Conclusão

Neste trabalho examinamos a existência e construção da matriz S para descrever a criação de partículas em espaços curvos. A discussão feita na seção 2.2 nos permitiu verificar que tal construção é possível quando feita em um espaço-tempo globalmente hiperbólico com uma curvatura que caia suficientemente rápido no passado e no futuro e as seguintes condições forem satisfeitas (conforme lista no final da seção 2.2):

- $\mathscr{H}_{out}$ e $\mathscr{H}_{in}$ são unitariamente equivalentes.
- As transformações de Bogolyubov são bem definidas.
- $tr\left(B^{\dagger}B\right) < \infty$.

Quando esse é o caso, obtivemos (em 2.35) a expressão

$$S\left|0_{in}\right\rangle = c\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i} k_i b^{\dagger}\left(\lambda_i\right) b^{\dagger}\left(\lambda_i\right)\right]\left|0_{out}\right\rangle$$

para a criação de partículas a partir do vácuo para o campo de Klein-Gordon, e a expressão

$$S\left|0_{in}\right\rangle = c\exp\left[\frac{1}{2}\sum_{i} k_i b^{\dagger}\left(\overline{\rho}_i\right) b^{\dagger}\left(\gamma_i\right)\right]\left|0_{out}\right\rangle$$

para a criação de partículas a partir do vácuo para o campo de Dirac (obtida em 2.78). Expressões para estados de mais partículas também foram obtidas em seus respectivos capítulos.

Com esses resultados em mãos, partimos para a investigação de certas propriedades das transformações de Bogolyubov, obtendo, a partir dos coeficientes de Bogolyubov, expressões para o número médio de partículas criadas (2.104 e a probabilidade de se encontrar certo número de partículas em determinado modo (2.115).

Finalmente estudamos a aplicação do que foi feito em dois exemplos de criação de partículas pela expansão do espaço-tempo, e comparamos esses resultados com a radiação de um corpo negro, servindo como uma forma bem simplificada de se ter contato com ideias utilizadas para o estudo da radiação e Hawking e a criação de partículas no período inflacionário, ambas áreas de grande interesse da cosmologia.

Glossário

Aqui você encontrará algumas definições de termos que aparecem ao longo do texto, assim como a indicação da página onde os mesmos são usados ou explicados (quando a explicação se encontra no texto, somente o número da página é apresentado). Para definições de conceitos topológicos, utilizaremos a seguinte notação: Um espaço topológico (X, τ) é um conjunto X junto com uma coleção τ de sub-conjuntos de X satisfazendo

1. Se $O_\alpha \in \tau$ para $\forall \alpha \in X$, então $\cup O_\alpha \in \tau$.
2. Para n finito, se $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \tau$, então $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \tau$.
3. $X \in \tau$, e $\emptyset \in \tau$.

Sendo assim, neste glossário, O será um aberto em X e τ uma coleção de sub-conjuntos utilizada para se definir uma topologia em X (ou seja, uma coleção de abertos).

A

atlas, atlas maximal 14
Sejam A e B dois abertos de um espaço topológico (X, τ), e sejam $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}^n$ e $g : B \to g(B) \subset \mathbb{R}^n$ dois homeomorfismos que permitam a construção de mapas diferenciáveis satisfazendo

1. $g \circ f^{-1} : f(A \cap B) \to g(A \cap B)$
2. $f \circ g^{-1} : g(A \cap B) \to f(A \cap B)$.

Uma família de isomorfismos desse tipo tal que o domínio dessa família seja (X, τ) é um atlas de X. Cabe notar que $(A \cap B)$ e $g(A \cap B)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. Mais genericamente, um atlas é uma coleção de funções bijetivas $f_i : O_i \to U_i$, onde O_i e U_i são abertos em X, a coleção de todos U_i cobrem X e $f_i \circ f_j^{-1}$ caculada em $f_j(U_i)$ é um homeomorfismo. O atlas que contém todas as possíveis cartas é chamado de atlas maximal, e para uma dada variedade, esse atlas é único.

B

bandeira nula 49

C

carta 14, 16
Um homeomorfismo entre um aberto O e o $\mathbb{R}^n$ que seja elemento de um atlas é chamado de carta do atlas (ou de um sistema de coordenadas de O).

Cauchy, superfície de 20

causalidade, causalidade forte 18

compacto, conjunto 20
Se (X, τ) é um espaço topológico e A é um sub-conjunto de X, então $\{O_\alpha\}$ é dito ser uma cobertura aberta de A se $\bigcup_\alpha O_\alpha \supset A$. Uma sub-coleção de conjuntos de $\{O_\alpha\}$ que também contenha A é uma sub-cobertura aberta. A é dito ser compacto se para toda cobertura aberta $\{O_\alpha\}$ de A existir uma sub-cobertura finita (com um número finito de conjuntos).

completamento de Cauchy 32
Seja $\mathfrak{S}_\mu$ um espaço métrico, onde $d(\psi, \phi) = \|\psi - \phi\|$ define a distância entre dois elementos. Uma sequência $\{\psi_\alpha\}$ é dita ser de Cauchy se existe $N \in \mathbb{Z}$ tal que $d(psi_n, \psi_m) < \epsilon \ \forall n,\ m > N$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$ positivo e tão pequeno quanto se queira. Se toda sequência de Cauchy em $\mathfrak{S}_\mu$ convergir para um elemento de $\mathfrak{S}_\mu$, então esse espaço é dito ser completo (ou Cauchy). Caso $\mathfrak{S}_\mu$ não seja completo, pode-se construir seu completamento de Cauchy da seguinte forma: Seja $\psi \notin \mathfrak{S}_\mu$ e $\phi \notin \mathfrak{S}_\mu$ o limite das sequências de Cauchy $\{\psi_\alpha\}$ e $\{\phi_\alpha\}$ respectivamente. Definimos a "distância" entre as sequências de Cauchy como sendo

$$d'(\psi, \phi) = \lim_{n \to \infty} d(\psi_n, \phi_n).$$

Com uso dessa "distância", definimos uma relação de equivalência entre as sequências de Cauchy, dizendo que $\{\psi_\alpha\}$ e $\{\phi_\alpha\}$ são equivalentes de $d(\psi, \phi) = 0$. Seja ψ o ponto limite de uma classe de equivalência de sequências de Cauchy. O completamento de Cauchy $\mathfrak{S}'_\mu$ consiste em adicionarmos todos esses pontos limites de classes de equivalência a $\mathfrak{S}_\mu$, com a distância entre eles dada por $d'(\,.,\,.)$.

complexificação 37
Seja $\mathfrak{S}$ um espaço vetorial real. A complexificação $\mathfrak{S}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{S} \otimes \mathbb{C}$ consiste em um espaço vetorial complexo constituído de elementos na forma $x + iy$ (formalmente $x \otimes 1 + y \otimes i$), onde $x,\ y \in \mathfrak{S}$, e munido das seguintes operações de soma e multiplicação por um escalar:

$$(x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y),$$

onde $x,\ y,\ u,\ v \in \mathfrak{S}$ e $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

condição de Hilbert-Schmidt 65

cone de luz 15

contável, primeiro 20
(C, τ) é primeiro-contável se para cada $p \in X$ existir uma coleção contável $\{O_n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ de abertos tal que qualquer vizinhança O_p de p contenha pelo menos um membro de $\{O_n\}$.

D

denso, conjunto 20
Seja (X, τ) um espaço topológico. Um sub-conjunto A de X é dito ser denso em X se para todo ponto $p \in X$ existe uma vizinhança O_p de p que contém pelo menos um ponto de A.

difeomorfismo 44
Um difeomorfismo é um isomorfismo f entre duas variedades diferenciáveis tal que f e f^{-1} são suaves. Em outras palavras, dado uma variedade $\mathscr{M}$ com um atlas de $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}$ e uma variedade $\mathscr{N}$ com um atlas de $\mathscr{B}$ de $\mathscr{N}$, $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ é um difeomorfismo se $g \in \mathscr{B} \Leftrightarrow g \circ f \in \mathscr{A}$.

Dirac

equação de 70

produto de 70

domínio de dependência $(D(S))$ 17

E

escalar de Ricci $(R(x))$ 34
O escalar de Ricci (também conhecido por escalar de curvatura) é dado pela contração $R = R^a_a$ do tensor de Ricci, que é por sua vez dado pela contração $R_{ac} = R_{abc}{}^b$, onde $R_{abc}{}^d$ é o tensor de Riemann, que é dado por

$$\nabla_a \nabla_b w_c - \nabla_b \nabla_a w_c = R_{abc}{}^d w_d.$$

espaço de Fock $(\mathscr{F})$ 28, 71

espaço tangente $(T_p\mathscr{M})$ 15

estrutura complexa (J) 32, 42
Uma estrutura complexa J em um espaço vetorial real é um operador linear nesse espaço vetorial satisfazendo $J^2 = -\mathbb{1}$.

estrutura simplética $(\Omega(\ .,\ .))$ 29, 37, 57
Uma variedade munida de uma estrutura simplética é uma variedade suave $\mathscr{M}$ equipada com uma forma bi-linear anti-simétrica e degenerada $\Omega(\ .,\ .)$. A estrutura simplética surge naturalmente ao se modelar o conjunto de todas as configurações possíveis de um sistema como uma variedade.
Variedades simpléticas são um caso particular de variedades de Poisson. Nesse contexto, em um espaço vetorial simplético, pode-se definir o grupo de Heisenberg, e a forma simplética define os comutadores (colchetes de Poisson).
Cabe dizer que, se $\mathfrak{S}$ for um espaço vetorial em $\mathbb{C}$ com produto interno hermitiano, a parte imaginária deste produto define uma forma simplética em $\mathfrak{S}$, e vice-versa (vide exemplo 2.1.1.c e seção 2.4 de [78]).

H

Hausdorff, propriedade de 19, 20
Um espaço topológico X tem a propriedade de Hausdorff (frequentemente se diz que o espaço é Hausdorff) se para todo p, $q \in X$, $p \neq q$, $\exists O_p$, $O_q \in \tau \mid p \in O_p$, $q \in O_q$ e $\emptyset_p \cap O_q = \emptyset$.

hiperbolicidade global 20

hipergeométrica, equação/função 88, 94
Uma equação diferencial na forma

$$z\left(1-z\right)\frac{d^2 f}{dz^2} + \left[c - \left(a+b+1\right)z\right]\frac{df}{dz} - abf = 0 \tag{3.65}$$

é chamada de equação hipergeométrica. Essa equação tem 3 pontos singulares, que são $z = 0$, 1 e ∞, com pares de expoentes $\rho_{1,2}^{(0)} = 0$, $1-c$, $\rho_{1,2}^{(1)} = 0$, $c-a-b$ e $\rho_{1,2}^{(\infty)} = a$, b respectivamente (onde $\rho_i^{(n)}$ corresponde ao expoente número i do ponto singular n). As soluções dessa equação ao redor dos pontos singulares são

1. $z_{1(0)} = {}_2F_1\left(a, b; c; z\right)$
2. $z_{2(0)} = z^{1-c}{}_2F_1\left(a-c+1, b-c+1; 2-c; z\right)$
3. $z_{1(1)} = {}_2F_1\left(a, b; a+b+1-c; 1-z\right)$
4. $z_{2(1)} = \left(1-z\right)^{c-a-b}{}_2F_1\left(c-b, c-a; c-a-b+1; 1-z\right)$
5. $z_{1(\infty)} = {}_2F_1\left(a, a-c+1; a-b+1; z^{-1}\right)$
6. $z_{2(\infty)} = z^{-b}{}_2F_1\left(b, b-c+1; b-a+1; z^{-1}\right)$

onde ${}_2F_1$ é a função hipergeométrica que pode ser escrita na forma da série

$${}_2F_1\left(a, b; c; z\right) = 1 + \frac{ab}{1!c}z + \frac{a\left(a+1\right)b\left(1+b\right)}{2!c\left(c+1\right)} + \ldots,$$

que é convergente quando $\|z\| < 1$.

homeomorfismo 14
Se f é uma aplicação contínua um a um entre dois espaços topológicos e f^{-1} existe e também é contínua um a um, então f é um homeomorfismo.

homotopia 44
Sejam $f : X \to Y$ e $g : X \to Y$ duas aplicações entre dois espaços topológicos X w Y. Se existir uma aplicação $h : X \times [0,1] \to Y$ tal que $h\left(X \times 0\right) = f$ e $h\left(X \times 1\right) = g$, então h é uma homotopia (e f é homotópica a g). X w Y são ditos espaços homotopicamente equivalentes se $f \circ g$ e $g \circ f$ forem homotópicas à identidade de X e Y respectivamente.

I

$I^{\pm}$, futuro/passado cronológico 17

isomorfismo 43
Um isomorfismo é um mapa bijetor f tal que f e sua inversa f^{-1} são mapas entre duas estruturas algébricas que "preservam a estrutura", ou seja, são homomorfismos, o que quer dizer que se $f : \mathfrak{G} \to \mathfrak{H}$ e, $e_{\mathfrak{G}}$ e $e_{\mathfrak{H}}$ são suas unidades (identidades) respectivamente, então $f\left(e_{\mathfrak{G}}\right) = e_{\mathfrak{H}}$ e $f(a \cdot b) = f(a) f(b)$, para a, $b \in \mathfrak{G}$.

J

$J^{\pm}$, futuro/passado causal 17

K

Killing, vetor de 34
Um difeomorfismo $f : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ que mantém a métrica da variedade $\mathscr{M}$ é chamado de isometria. Se o grupo de difeomorfismos locais f_t gerados por um campo vetorial é também um grupo de isometrias (ou seja f_t é uma isometria para cada t), então esse campo vetorial é chamado é um campo de Killing.

Klein-Gordon

equação de 26, 35, 36

produto de 27

L

Lie

álgebra de 52–54 Para qualquer grupo de Lie $\mathfrak{G}$, definimos uma translação (ação) à esquerda $L_{\mathfrak{a}}$ (*left*) e à direita $R_{\mathfrak{a}}$ (*right*) de $\mathfrak{a} \in \mathfrak{G}$ em $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$ por

$$L_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \mathfrak{ab}$$

$$R_{\mathfrak{a}}\mathfrak{b} = \mathfrak{ba}.$$

Como todo grupo de Lie é uma variedade suave, temos um espaço tangente a cada ponto $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{G}$, como feito no capítulo 1.1. Note que $L_{\mathfrak{a}}$ e $R_{\mathfrak{a}}$ são difeomorfismos, isso implica que os mapas

$$L_{\mathfrak{a}*} : T_{\mathfrak{b}}\mathfrak{G} \to T_{\mathfrak{ab}}\mathfrak{G}$$

$$R_{\mathfrak{a}*} : T_{\mathfrak{b}}\mathfrak{G} \to T_{\mathfrak{ba}}\mathfrak{G}$$

são isomorfismos entre os espaços tangentes. Sendo assim, um campo vetorial X em $\mathfrak{G}$ é dito ser invariante à esquerda se $L_{\mathfrak{a}*}X = X$, isso quer dizer que $L_{\mathfrak{a}*}X_{\mathfrak{b}} = X_{\mathfrak{ab}}$, onde $X_{\mathfrak{b}} \in T_{\mathfrak{b}}\mathfrak{G}$ é o valor de X no espaço tangente a $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$. Sejam X e Y dois campos vetoriais invariantes à esquerda, e seja

$T_{\mathfrak{e}}\mathfrak{G}$ o espaço tangente à identidade $\mathfrak{e}$ de $\mathfrak{G}$. Então o colchete de Lie $[.,.]$ em $T_{\mathfrak{e}}\mathfrak{G}$ é uma operação que satisfaz

$$[X_{\mathfrak{e}}, Y_{\mathfrak{e}}] = [X, Y]_{\mathfrak{e}}\,.$$

Um espaço vetorial $T_{\mathfrak{e}}\mathfrak{G}$ munido da operação $[.,.]$ é chamado de álgebra de Lie de $\mathfrak{G}$.

grupo de 43, 44 Um grupo topológico $\mathfrak{G}$ é um espaço $\mathfrak{G}$ munido de uma estrutura de grupo tal que, para $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathfrak{G}$, os mapas

$$(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{ab} \in \mathfrak{G}$$

$$\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}^{-1}$$

são contínuos. Um grupo de Lie é um grupo topológico $\mathfrak{G}$ que também é uma variedade suave tal que

$$f : (x, x) \to xy$$

$$g : (x)\, x^{-1}$$

são funções infinitamente diferenciáveis.

P

paracompacto, conjunto 20
Seja (X, τ) um espaço topológico e seja $\{O_\alpha\}$ uma cobertura aberta. Uma outra cobertura $\{V_\beta\}$ é dita ser um refinamento de $\{O_\alpha\}$ se para qualquer $V_\beta \exists O_\alpha \mid V_\beta \subset O_\alpha$. $\{V_\beta\}$ é dita localmente finita se para cada $x \in X$ tenhamos uma vizinhança W de x tal que $W \cap V_\beta \neq \emptyset$ somente para um número finito de β. (X, τ) é dito paracompacto se toda cobertura aberta $\{O_\alpha\}$ de X tiver um refinamento $\{V_\beta\}$ localmente finito.

S

Schur, Lema de 53

Lema 13 *Seja f um mapa linear entre dois espaços vetoriais $f : \mathfrak{V}_1 \to \mathfrak{V}_2$ sobre um corpo K tal que existam duas representações irredutíveis ρ_1 e ρ_2, de um grupo $\mathfrak{G}$ em $\mathfrak{V}_1$ e $\mathfrak{V}_1$ respectivamente, satisfazendo $\rho_1\mathfrak{g}f = f\rho_2\mathfrak{g}$, $\forall \mathfrak{g} \in \mathfrak{G}$, então*

1. *Ou f é um isomorfismo, ou então f é o mapa nulo.*
2. *Se $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_2$ e tem dimensão finita sob um corpo algebricamente fechado K e $\rho_1 = \rho_2$ (nesse caso f comuta com as representações), então $f = \lambda\mathbb{1}$.*

segundo-contável 21
(X, τ) é segundo contável se existir uma coleção contável $\{O_n\}$ de abertos tal que todo aberto possa ser

expresso como uma união de abertos de $\{O_n\}$.

Stone, A. H., teorema de 20

Teorema 14 *Seja $\mathscr{M}$ um espaço métrico, então $\mathscr{M}$ é paracompacto.*

T

Teorema de Hellinger-Toeplitz 63

Teorema 15 *Seja A um operador simétrico definido em todo um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$. Então A é um operador limitado. Como todo operador simétrico satisfaz*

$$\langle A\psi|\phi\rangle = \langle x|Ay\rangle\,,\ \forall\psi,\phi\in\mathscr{H},$$

então A é simétrico se, e somente se, for auto-adjunto. Sendo assim o teorema pode ser redefinido para o caso em que se A é um operador auto-adjunto e definido em todo um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, então A é um operador limitado.

Transformação de Bogolyubov 61

V

variedade 14

W

Wronskiano 79
O Wronskiano entre duas funções f_1 f_2 consiste no determinante da matriz

$$W\left(f_1,f_2\right)(t)=\begin{vmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_1'(t) & f_2'(t)\end{vmatrix}=f_1(t)\,f_2'(t)-f_1'(t)\,f_2(t)$$

(o Wronskiano pode ser generalizado para mais funções, mas isso não é necessário para este trabalho). Quando o Wronskiano entre duas funções não é nulo, então essas funções são linearmente independentes (a reciproca nem sempre é verdadeira). Uma equação útil relacionada ao Wronskiano é a chamada identidade de Abel, que nos diz que o Wronskiano entre duas soluções (f_1 e f_2) de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem

$$f''+a(t)\,f'+b(t)\,f=0$$

satisfaz

$$W\left(f_1,f_2\right)(t)=W\left(f_1,f_2\right)(t_0)\exp\left[-\int_{t_0}^{t}a\left(t'\right)dt'\right].$$

Referências Bibliográficas

[1] Wald, Robert M. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics (Chicago Lectures in Physics)*. The University of Chicago Press, 1994.

[2] Parker, Leonard E. e Toms, David J. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Fields and Gravity (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 2009.

[3] Birrell, N. D. e Davies, P. C. W. *Quantum fields in curved space (Cambridge Monographs on Mathematical Physics)*. Cambridge University Press, 1982.

[4] Pfäffle, F. Lorentzian manifolds. In Bär, C. e Fredenhagen, K., editor, *Quantum field theory on curved space: Concepts and Mathematical Foundations*, volume 786 of *Lecture Notes in Physics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

[5] Wald, Robert M. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.

[6] Hawking, S. W. e Ellis, G. F. R. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, 1973.

[7] Penrose, R. e Rindler, W. *Spinors and Space-Time*, volume 1: Two-spinor calculus and relativistic fields. Cambridge University Press, 1984.

[8] Wald, Robert M. Existence of the S-matrix in quantum field theory in curved space-time. *Ann. Phys.*, 118:490–510, 1979.

[9] Hawking, S. W. Particles creation by black holes. *Commun. Math. Phys*, 43:199–220, 1975.

[10] Parker, Leonard E. Particle creation in expanding universes. *Physical Review Letters*, 21(8):562–564, 1968.

[11] Ashtekar, A. e Magnon, Anne. Quantum fields in curved space-times. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 346:375–394, 1975.

[12] Kay, Bernard S. Linear spin-zero quantum fields in external gravitational and scalar fields: I. a one particle structure for the stationary case. *Commun. Math. Phys*, 62:55–70, 1978.

[13] Bernard S. Kay. Quantum Fields in Curved Spacetime: Non Global Hyperbolicity and Locality. *ArXiv General Relativity and Quantum Cosmology e-prints*, abril 1997.

[14] Fulling, Stephen A. *Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space-Time (London Mathematical Society)*. Cambridge University Press, 1989.

[15] Mukhanov, V. F. e Winitzki, S. *Introduction to Quantum Effects in Gravity*. Cambridge University Press, 2007.

[16] Penrose, R. Structure of space-time. In DeWitt, C. M. e Wheeler, J. A., editor, *Battelle Rencontres*, 1967 Lecture in Mathematics and Physics, pages 121–235. Benjamin, New York, 1968.

[17] Geroch, Robert. Domain of dependence. *Journal of Math. Phys.*, 11(2):437–449, 1969.

[18] João C. A. Barata. *Curso de Física Matemática*. Universidade de São Paulo - Departamento de Física Matemática, 10 de agosto 2011. `http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html`.

[19] Rudin, Mary Ellen. A new proof that metric spaces are paracompact. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20:603, 1969. `http://www.ams.org/journals/proc/1969-020-02/S0002-9939-1969-0236876-3/home.html`.

[20] Stone, A. H. Paracompactness and product spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54:977–982, 1948.

[21] Zumpano, A. O teorema de A. H. Stone. *Matemática Universitária*, 16:67–69, 1994.

[22] Geroch, Robert. Spinor structure of space-times in general relativity. I. *Journal of Math. Phys.*, 9(11):1739–1744, 1968.

[23] Whitehead, J. H. C. On C^1-complexes. *Ann. Math., Second Series*, 41:809–824, 1940.

[24] Bernal, Antonio N. e Sánchez, Miguel. On smooth Cauchy hypersurfaces and Geroch's splitting theorem. *Commun. Math. Phys*, 243:461–470, 2008.

[25] Dimock, J. Algebras of local observables on a manifold. *Commun. Math. Phys*, 77:219–228, 1980.

[26] Tevian Fischer, Jim e Dray. A new look at the Ashtekar-Magnon energy condition. *Gen.Rel.Grav.*, 31:511–526, 1999.

[27] Kay, Bernard S. Linear spin-zero quantum fields in external gravitational and scalar fields: II. generally covariant pertubation theory. *Commun. Math. Phys*, 71:29–46, 1980.

[28] Bunch, T. S., Panangaden, P. e Parker, L. On renormalisation of $\lambda\phi^4$ field theory in curved space-time. I. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 13(3):901–918, 1980. `http://stacks.iop.org/0305-4470/13/i=3/a=022`.

[29] Bernard, Claude e Duncan, Anthony. Regularization and renormalization of quantum field theory in curved space-time. *Annals of Physics*, 107:201–221, 1977.

[30] Bohr, N., Rosenfeld, L. Zur frage der messbarkeit der elektromagnetischen feldgrössern. *Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab. Math.-fys. Medd*, 12(8), 1933. Traduzido para o ingles por Aage Petersen e publicado em "Selected Papers of Léon Rosenfeld" sob o nome "On the Question of the Measurability of Electromagnetic Field Quantities". Re-publicado em Kalckar, Jørgen, editor, *Niels Bohr-Collected Works*, volume 7: Foundations of Quantum Physics II (1933-1958), 1996, pages 123-166. Elsevier Science B. V., Amsterdam.

[31] Bohr, N., Rosenfeld, L. Field and charge measurements in quantum electrodynamics. *Physical Review*, 78(6):794–798, 1950. `http://dieumsnh.qfb.umich.mx/archivoshistoricosmq/ModernaHist/Bohr%20rosenfeld.pdf`.

[32] Meinard Kuhlmann. Quantum field theory. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, spring 2009 edition, 2009. `http://plato.stanford.edu/archives/spr2009/entries/quantum-field-theory/`.

[33] Christopher J. Fewster. *Lectures on quantum field theory in curved spacetime.* Lecture Note 39/2008. Max-Planck-Institute für Mathematik in den Naturwissenschaften, Leipzig, 2008. `http://www.mis.mpg.de/preprints/ln/lecturenote-3908.pdf`.

[34] Davis, Tamara M. e Lineweaver, Charles H. Expanding confusion: Common misconceptions of cosmological horizons and the superluminal expansion of the universe. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 21:97–109, 2004.

[35] Katz, J., Lynden-Bell, Donald e Bičák, Jiřrí. Gravitational energy in stationary spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 23(23):7111, 2006. `http://stacks.iop.org/0264-9381/23/i=23/a=030`.

[36] Itzykson, Claude e Zuber, Jean-Bernard. *Quantum Field Theory.* McGraw-Hill Book Co., 1985.

[37] Bjorken, James D. e Drell, Sydney D. *Relativistic Quantum Mechanics.* McGraw-Hill Book Co., 1964.

[38] Chernoff, Paul R. Essential self-adjointness of powers of generators of hyperbolic equations. *Journal of Functional Analysis*, 12(4):401–414, 1973.

[39] Kay, Bernard S. e Wald, Robert M. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon. *Physics Reports*, 207:49–136, 1991.

[40] Chmielowsi, Piotr. States of scalar field on spacetimes with two isometries with timelike orbits. *Class. Quantum Grav.*, 11:41–56, 1994.

[41] Whittaker, E. T. On the relations of the tensor-calculus to the spinor-calculus. *Proceedings of the Royal Society of London*, A158(893):38–46, 1937.

[42] Lichnerowicz, André. Topics on space-times. In DeWitt, C. M. e Wheeler, J. A., editor, *Battelle Rencontres*, 1967 Lecture in Mathematics and Physics, pages "107–116". Benjamin, New York, 1968.

[43] Penrose, R. e Rindler, W. *Spinors and Space-Time*, volume 2: Spinor and twistor methds in space-time geometry. Cambridge University Press, 1984.

[44] Wigner, Eugene P. *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Athomic Spectra.* New York: Academic Press, 1959.

[45] Haag, Rudolf. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, second edition, 1996.

[46] Wigner, Eugene P. On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group. *The Annals of Mathematics*, 40(1):149–204, 1939. `http://www.jstor.org/stable/1968551`.

[47] Bargmann, V. On unitary ray representations of continuous groups. *The Annals of Mathematics*, 59(1):pp. 1–46, 1954. `http://www.jstor.org/stable/1969831`.

[48] Spivak, Michael. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 1. Publish or Perish, Inc., 1979.

[49] Alexandrino, Marcos M. e Bettiol, Renato G. *Introduction to Lie groups, isometric and adjoint actions and some generalizations.* arXiv 2010, 27 de agosto 2010. `http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0901/0901.2374v3.pdf`.

[50] O'Donnell, Peter. *Introduction to 2-Spinors in General Relativity.* World Scientific Pub Co Inc, 2003.

[51] W. T. Payne. Elementary spinor theory. *American Journal of Physics*, 20(5):253–262, 1952.

[52] Geroch, Robert. Spinor structure of space-times in general relativity II. *Journal of Mathematical Physics*, 11(1):343–348, 1970.

[53] Bichteler, Klaus. Global existence of spin structures for gravitational fields. *Journal of Mathematical Physics*, 9(6):813–815, 1968.

[54] Milnor, John Willard. Spin structures on manifolds. *Enseignement Mathematique*, 9:198–203, 1963.

[55] Bekaert, Xavier. Universal enveloping algebras and some applications in physics. In Bouchard, V. e Wijns, A., editor, *First Modave Summer School in Mathematical Physics*, volume 1 of *Modave Schools and Workshops*, pages 214–234. International Solvay Institute, 2005. `http://www.ulb.ac.be/sciences/ptm/pmif/Rencontres/ModaveI/Modave2005.pdf`.

[56] Penrose, R. Zero rest-mass fields including gravitation: Asymptotic behaviour. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 284(1397):159–203, 1965.

[57] Ezra Newman and Roger Penrose. An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficients. *J. Math. Phys.*, 3(3):566–578, 1962. `http://dx.doi.org/10.1063/1.1724257`.

[58] Griffiths, J. B. On Dirac fields in a curved space-time. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 12(12):2429, 1979. `http://stacks.iop.org/0305-4470/12/i=12/a=020`.

[59] de Vries, Andreas. The evolution of the Weyl and Maxwell fields in curved space-times. *Mathematische Nachrichten*, 179(1):27–45, 1996.

[60] Zecca, Antonio. Quantization of Dirac field and particle production in Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker universe. *Adv. Studies Theor. Phys.*, 4(20):951–961, 2010.

[61] Parker, Leonard E. Quantized fields and particle creation in expanding universes. I. *Phys. Rev.*, 183:1057–1068, 1969.

[62] Labonté, Gilles. On the nature of "strong" Bogoliubov transformations for fermions. *Commun. Math. Phys*, 36:59–72, 1974.

[63] Parker, Leonard E. Quantized fields and particle creation in expanding universes. II. *Phys. Rev. D*, 3:346–356, 1971.

[64] Epstein, Paul S. Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 16(10):pp. 627–637, 1930. `http://www.jstor.org/stable/85754`.

[65] Eckart, Carl. The penetration of a potential barrier by electrons. *Phys. Rev.*, 35:1303–1309, Jun 1930. `http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.35.1303`.

[66] Abramowitz, Milton e Stegun, Irene A. *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, 1972.

[67] Dimock, J. Scalar quantum field in an external gravitational field. *J. Math. Phys*, 20:2549–2555, 1979.

[68] Kay, Bernard S. Quantum fields in curved space-times and scattering theory. In Doebner, H. D., Anderson, S. I. e Petry, H. R., editor, *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics*, volume 905 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 272–295. Springer, Berlin, 1982.

[69] Fulling, Stephen A., Sweeny, Mark e Wald, Robert M. Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved spacetime. *Commun. Math. Phys*, 63:257–264, 1978.

[70] Copson, E. T. Hadamard's elementary solution and frobenius's method. *SIAM Review*, 13(2):222–230, 1971.

[71] Hadamard, Jacques LL. D. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. New Haven Yale University Press, 1923.

[72] Fulling, Stephen A., Narcowich, F. J. e Wald, Robert M. Singularity structure of the two-point function in quantum field theory in curved spacetime, II. *Annals of Physics*, 136:243–272, 1981.

[73] Colosi, Daniele and Oeckl, Robert. Spatially asymptotic s matrix from general boundary formulation. *Phys. Rev. D*, 78:025020, Jul 2008. `http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.78.025020`.

[74] Oeckl, Robert. A "General boundary" formulation for quantum mechanics and quantum gravity. *Phys.Lett.*, B575:318–324, 2003.

[75] Colosi, Daniele. On the structure of the vacuum state in general boundary quantum field theory. *ArXiv e-prints*, 2009. arXiv:0903.2476v1 `http://arxiv.org/abs/0903.2476`.

[76] Colosi, Daniele. S-matrix in de Sitter spacetime from general boundary quantum field theory. *ArXiv e-prints*, 2009. arXiv:0910.2756v1 `http://arxiv.org/abs/0910.2756`.

[77] Colosi, Daniele, e Dohse, Max e Oeckl, Robert. S-Matrix for AdS from General Boundary QFT. *ArXiv e-prints*, 2011. arXiv:1112.2225v1 `http://arxiv.org/abs/1112.2225`.

[78] Bursztyn, Henrique. e Macarini, Leonardo. *Introdução a Geometria Simplética*. IMPA - XIV Escola de Geometria Diferencial, 26 de julho 2006. `http://w3.impa.br/~henrique/papers/EGD2806.pdf`.