

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Movimento quântico e semiclássico no campo de um magnético-solenóide

Damião Pedro Meira Filho

Orientador: Prof. Dr. Dmitry Maximovitch Gitman

Tese de doutorado apresentada ao
Instituto de Física para a obtenção
do título de doutor em Ciências

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. Dmitry Maximovitch Gitman (IF-USP)

Prof. Dr. Bruto Max Pimentel Escobar (IFT-UNESP)

Prof. Dr. Celso Luiz Lima (IF-USP)

Prof. Dr. Luiz Guimarães Ferreira (IF-USP)

Prof. Dr. Nami Fux Svaiter (CBPF)

São Paulo
2010

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Meira Filho, Damião Pedro

Movimento quântico e semiclássico no campo de um magnético-solenóide. São Paulo, 2010.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
Instituto de Física – Depto. de Física Nuclear

Orientador: Prof. Dr. Dmitry Maximovitch Gitman
Área de Concentração: Teoria Geral de Partículas e Campos

Unitermos: 1. Mecânica quântica relativística; 2. Efeito Aharonov-Bohm; 3. Soluções das equações de onda; 4. Estados coerentes; 5. Decomposição semiclássica.

USP/IF/SBI-066/2010

Agradecimentos

Ao Prof. Dmitry Maximovitch Gitman pela sua competente e segura orientação, pela solicitude e empenho ao longo da realização deste projeto.

Ao Prof. Sergey Gavrilov pelas profícuas discussões sobre este projeto.

Aos Professores Luis Carlos B. Crispino, Alberto Saa pelo apoio.

Aos responsáveis pela CPG pelo suporte.

A todos os amigos entre os quais posso citar Charles, Ailton, Nelson, Thiago, Wanderson, Jorgivan, Castro, Jeconias, Assirati e especialmente ao Tiago Adorno por todo o apoio dispensado.

Aos meus estimados pais Damiao Meira e Joelna Meira pelo empenho na transmissão dos conceitos de ética elevadíssimos de nossa TORAH, aos meus irmaos pelo apoio.

À estimada eshet chail Rose e a nossa estimada Chachama vetalmida TORAH Sarah pelo apoio em todos os âmbitos.

Baruch ata HASHEM, elohenu melech haolam, asher bachar banu micol haamim venatan lanu et Torato. Baruch ata HASHEM noten haTORAH.

À minha esposa, minha filha, aos meus pais.

Resumo

Um novo procedimento para construir os estados coerentes (CS) e os estados semiclássicos (SS) no campo de um magnético-solenóide é proposto. A idéia principal é baseada sobre o fato de que o AB solenóide quebra a simetria translacional no plano- xy , isto apresenta um efeito topológico tal que surgem dois tipos de trajetórias, aquelas que circundam e aquelas que não circundam o solenóide. Devido a este fato, deve-se construir dois tipos diferentes dos CS/SS, os quais correspondem as referidas trajetórias no limite semiclássico. Seguindo esta idéia, construímos os CS em duas etapas, primeiro os CS instantâneos (ICS) e os CS/SS dependentes do tempo como uma evolução dos ICS. A construção é realizada para partículas não-relativísticas e relativísticas, de spin-zero e com spin ambas em $(2 + 1)$ - e $(3 + 1)$ - dimensões e gera um exemplo não-trivial de SS/CS para sistemas com uma Hamiltoniana não-quadrática. É enfatizado que os CS dependendo dos seus parâmetros (números quânticos), descrevem ambos os estados puramente quânticos e semiclássicos. Uma análise é representada de modo que classifica os parâmetros dos CS em tal relação. Tal classificação é usada para as decomposições semiclássicas de diversas quantidades físicas.

Palavras chave: Efeito Aharonov-Bohm; soluções das equações de onda; campo magnético uniforme; estados coerentes; decomposição semiclássica.

Abstract

A new approach to constructing coherent states (CS) and semiclassical states (SS) in magnetic-solenoid field is proposed. The main idea is based on the fact that the AB solenoid breaks the translational symmetry in the xy -plane, this has a topological effect such that there appear two types of trajectories which embrace and do not embrace the solenoid. Due to this fact, one has to construct two different kinds of CS/SS, which correspond to such trajectories in the semiclassical limit. Following this idea, we construct CS in two steps, first the instantaneous CS (ICS) and the time dependent CS/SS as an evolution of the ICS. The construction is realized for nonrelativistic and relativistic, spinning and spinless particles both in $(2 + 1)$ - and $(3 + 1)$ - dimensions and gives a non-trivial example of SS/CS for systems with a nonquadratic Hamiltonian. It is stressed that CS depending on their parameters (quantum numbers) describe both pure quantum and semiclassical states. An analysis is presented that classifies parameters of the CS in such respect. Such a classification is used for the semiclassical decompositions of various physical quantities.

Keywords: Aharonov-Bohm effect; solutions of wave equations; uniform magnetic field; coherent states; semiclassical decomposition.

Sumário

1	Introdução	10
1.0.1	Estados coerentes	10
1.0.2	O efeito Aharonov-Bohm e a relevância dos estados coerentes	11
2	Caso não-relativístico	15
2.1	Movimento clássico	15
2.2	Estados estacionários	16
2.3	Estados coerentes	17
2.3.1	Estados coerentes instantâneos sobre o plano $-xy$	17
2.3.2	Estados coerentes dependentes do tempo	20
3	Caso relativístico	22
3.1	Movimento clássico relativístico em MSF	22
3.2	Estados quânticos estacionários	25
3.2.1	Partícula de spin-zero	25
3.2.2	Partículas com spin	27
3.2.2.1	(2 + 1)-dimensões	28
3.2.2.2	(3 + 1)-dimensões	32
3.3	Estados coerentes instantâneos sobre o plano- xy	35
3.3.1	Partículas de spin-zero	35
3.3.2	Partícula com spin	43
3.4	Estados coerentes dependentes do tempo	48
3.4.1	Partículas não-relativísticas	48
3.4.2	Partículas relativísticas em (3 + 1)-dimensões	50
3.4.3	Evolução dos valores médios em t e x_-	51
3.5	Sumário	53
3.6	Apêndice A	54

Lista de Figuras

- 2.1 Divisão dos níveis de Landau no campo de um magnético-solenóide. 17
- 3.1 Dois tipos de trajetórias no MSF. 24
- 3.2 Espalhamento das posições da partícula nas proximidades da órbita clássica para $R \approx R_c$. 53

Glossário

- **CS**: Estados coerentes.
- **SS**: Estados semiclássicos.
- **MSF**: Campo de um magnético-solenóide.
- **ICS**: Estados coerentes instantâneos.
- **AB**: Aharonov-Bohm.
- campo de **AB**: Campo de um infinitamente longo e infinitesimalmente fino solenóide com fluxo magnético interno Φ finito e constante.

Capítulo 1

Introdução

1.0.1 Estados coerentes

A primeira descrição sobre os estados coerentes foi proposta, em 1926, por Erwin Schrödinger. Tal assunto permaneceu inexplorado por aproximadamente três décadas, quando, em 1963, por ocasião do desenvolvimento de trabalhos sobre a formalização teórica do Laser, Glauber e Sudarshan apresentaram um detalhado formalismo dos estados coerentes com o objetivo de compreender e construir uma descrição, com razoável grau de acurácia matemática, do campo electromagnético para a ótica quântica. Para além das importantes aplicações em ótica quântica, os estados coerentes permitem a elaboração de uma elegante descrição matemática do oscilador harmônico quântico. Ainda, Glauber, Sudarshan e Klauder propuseram os fundamentos matemáticos que associam os estados coerentes com as propriedades de grupo de cada problema físico. Portanto, uma vez que todos os problemas físicos definidos em nível de teoria quântica apresentam propriedades de grupo associadas, é possível afirmar que os estados coerentes não estão restritos ao formalismo do oscilador harmônico quântico, mas seguramente podem ser generalizados para uma larga classe de problemas físicos.

No que concerne aos aspectos gerais dos estados coerentes, deve-se ressaltar que, em mecânica quântica, o valor médio de um dado observável físico calculado em termos dos estados estacionários não apresenta conexão com o correspondente clássico, ao passo que o mesmo procedimento calculado em termos dos estados coerentes reproduz em boa aproximação os resultados em regime clássico. Em outras palavras, os estados coerentes são estados com relação aos quais o comportamento da dinâmica quântica de um sistema está o mais próximo possível da correspondente dinâmica clássica. Com base no formalismo proposto por Glauber, os estados coerentes podem ser construídos fazendo uso de 3 definições, a saber:

Primeiro - Os estados coerentes são autoestados do operador aniquilação.

Segundo - os estados coerentes podem ser obtidos por meio da aplicação de um dado operador deslocamento sobre o estado de vácuo do oscilador harmônico quântico.

Terceiro - os estados coerentes são estados quânticos cuja relação de incerteza entre os operadores posição e momento é mínima.

Os estados coerentes apresentam ainda duas importantes propriedades, a saber:

Não ortogonalidade - os estados coerentes não são ortogonais, ao passo que são normalizados;

Supercompleteza - Glauber destacou que a resolução da identidade em termos dos estados coerentes não é única. Portanto, uma vez que os estados coerentes recebem um índice contínuo em um espaço de Hilbert que possui uma base contável, tais estados são considerados supercompletos.

Como conhecido, os estados coerentes (CS) estão sendo largamente e proficuamente utilizados em áreas diferentes da física teorica [1]-[5]. Os estados coerentes CS introduzidos por Schrödinger e

Glauber tornaram-se órbitas do grupo de Heisenberg-Weyl. Tal observação permitiu formular, por analogia, alguma definição geral dos CS para qualquer grupo de Lie [6, 7] como órbitas do grupo fator com respeito a um subgrupo estacionário. Uma conexão entre os CS e a quantização dos sistemas clássicos, em particular, os sistemas com um espaço de fase curvo, foi também estabelecido [8, 9]. Pela origem, os CS são estados quânticos, porém, ao mesmo tempo, eles são parametrizados pelos pontos do espaço de fase de uma mecânica clássica correspondente. Ressaltamos que as circunstâncias os fazem muito convenientes na análise das correspondências entre a descrição clássica e quântica. Tudo explica o interesse tanto para a investigação dos problemas gerais da teoria dos CS quanto para a construção dos CS dos grupos concretos.

Os CS de importância em grupos físicos como os grupos $SU(N)$ são de especial interesse, em particular em conexão com a descrição de sistemas de isospin e spin. Os CS do grupo $SU(2)$ são bem conhecidos e construídos explicitamente. É possível destacar algumas das primeiras referências [10]-[15], onde estes estados foram construídos sobre a base da bem investigada estrutura das matrizes $SU(2)$ na representação fundamental. Uma outra abordagem para a construção dos CS do grupo $SU(2)$ foi usado por Berezin [8, 9]. Esta abordagem é conectada com a utilização das representações do grupo $SU(2)$ no espaço de polinômios. Os CS dos grupos $SU(N)$ e $SU(l, 1)$ foram construídos em [16].

1.0.2 O efeito Aharonov-Bohm e a relevância dos estados coerentes

Grande parte dos efeitos bem conhecidos em teoria quântica foi teoricamente analisada e apresentada logo após o processo inicial de desenvolvimento da mecânica quântica, ao passo que certos efeitos tais como o comportamento discreto do espectro de energia de estados ligados foram inicialmente entendidos como um dos postulados da teoria. Nestes termos, notamos que a história das discussões sobre efeitos de não-localidade em mecânica quântica e a recente descoberta do efeito Aharonov-Bohm é surpreendente. Tal como conhecemos, o efeito Aharonov-Bohm [1, 17, 18, 36] envolve uma partícula carregada, a qual é sensível a um campo eletromagnético externo, que é inteiramente concentrado em uma região onde a probabilidade de detecção da partícula tende a zero ou é estritamente nula. Uma condição necessária para a existência deste efeito é um potencial de campo eletromagnético externo na região de propagação da partícula carregada, sendo que tal potencial não pode ser eliminado por uma transformação de gauge. Neste caso o estado quântico da partícula é dependente das características não-locais do campo eletromagnético, embora não exista ação direta local do campo eletromagnético gerado pelo solenóide sobre a partícula carregada. Portanto, é notória a importância do efeito Aharonov-Bohm, uma vez que tal fenômeno demonstra claramente os efeitos de não-localidade inerentes aos objetos quânticos e suas interações.

A interação quântica de partículas carregadas com o campo de um solenóide infinitamente longo e infinitesimalmente fino (denominado de campo de Aharonov-Bohm (AB)) foi estudada nos âmbitos teórico e experimental há um longo tempo. Não obstante o fato de que a função de onda da partícula anula-se sobre o eixo do solenóide, as partículas sentem a presença do solenóide AB [17]. Como discutido no parágrafo anterior, este fenômeno é denominado o efeito Aharonov-Bohm e é interpretado como a possibilidade de um potencial vetor gerar efeitos observáveis em uma topologia não-trivial. Um número considerável de trabalhos teóricos e experimentos convincentes foi realizado para elucidar dúvidas associadas ao efeito Aharonov-Bohm e provar sua efetiva existência. Por volta da metade dos anos 80, o efeito AB em regime de baixa energia tornou-se um instrumento adequado para a investigação de novos fenômenos físicos, em particular, fenômenos associados à física da matéria condensada, onde o anel de AB tem sido o fundamento experimental da pesquisa em física

mesoscópica desde seu princípio, consultar [18] para uma revisão geral. Foi descoberto que este efeito é relevante para um número considerável de problemas físicos, entre os quais, podemos citar: aniões em supercondutividade de altas temperaturas- T_c [19], excitações eletrônicas em grafeno com defeitos topológicos [20, 21], nanotubos [22], espalhamento não-relativístico na teoria de Chern-Simons [23], teoria de pseudo-partículas [24], entre outros. A polarização do vácuo de AB e a radiação de AB são relevantes para o estudo da dinâmica das cordas cósmicas, consultar alternativamente [25, 26].

A divisão dos níveis de Landau em uma superposição do campo de AB e um campo magnético uniforme paralelo faz surgir um exemplo do efeito AB para estados ligados. No que segue, denominamos tal superposição como o campo de um magnético-solenóide (MSF). Soluções da equação de Schrödinger com MSF haviam sido primeiramente estudados em [27]. Soluções das equações de onda relativísticas (equação de Klein-Gordon e equação de Dirac) com MSF foram primeiramente obtidos em [28] e então usados em [29] para estudar o efeito AB em radiações de ciclotron e sincrotron. Com base nestas soluções, as funções de Green e o problema sobre o caráter auto-adjunto da Hamiltoniana de Dirac com MSF foram estudados [30, 31, 32, 33, 34]. Uma análise espectral completa para todas as Hamiltonianas auto-adjuntas não-relativística e relativística assumindo a configuração de campo do tipo MSF foi realizada em [35]. Recentemente, o interesse sobre MSF (e relacionado a exemplos de multivortex) foi renovado em conexão com problemas de física planar e efeito Hall quântico [36]. É importante enfatizar que, em contraste ao caso do campo de AB puro, onde partículas interagem com o solenóide por um intervalo de tempo finito, uma partícula carregada movendo-se sob influência do MSF interage permanentemente com o solenóide. Isto faz surgir novas possibilidades de estudar esta interação e corresponde a um número de situações físicas reais. Como exemplo, a recente fabricação de grafeno permite uma observação experimental e aplicação dos efeitos com partículas relativísticas com spin sob condições usuais de laboratório [37].

No que concerne à relevância do formalismo dos estados coerentes para o problema associado ao movimento quântico e semiclássico de uma partícula carregada sob influência do campo MSF, é suficiente e, ainda, mais adequado (e conveniente) fazer uso de uma descrição semiclássica de um dado sistema físico. Estados semiclássicos (SS) de um dado sistema físico providenciam tal descrição. Usualmente, estes estados são identificados com diferentes tipos dos assim conhecidos estados coerentes (CS). Entretanto, tal identificação formal é conhecida para sistemas com Hamiltonianas quadráticas; em outros casos, a construção de estados coerentes e semiclássicos SS/CS e suas identificações é problemática. Adicionalmente às bem conhecidas aplicações dos estados SS/CS em teoria quântica [38], surgiram recentemente novas e relevantes aplicações em computação quântica, consultar, por exemplo [39]. A construção dos estados SS/CS para partículas sob influência do campo de AB e do campo MSF é um problema não-trivial (o qual configurava-se como um problema em aberto até o presente) em virtude da estrutura não quadrática da Hamiltoniana da partícula acoplada a tais campos. Para além das numerosas aplicações práticas possíveis, a construção destes estados gera um importante exemplo de estados SS/CS para uma Hamiltoniana não-quadrática e pode, adicionalmente, elucidar uma importante questão de natureza teórica: Para quais circunstâncias o efeito AB é de uma natureza puramente quântica? Deve ser notado que, em certo sentido, a construção dos estados SS/CS é uma tarefa complementar à construção de integrais de trajetória associadas, o que se configura como um problema em aberto para o caso da partícula submetida à influência do MSF. É possível assegurar que os estados SS/CS em MSF são, em certo sentido, análogos para estados em um campo magnético puro. No último caso, os estados SS são identificados com os estados CS os quais são bem conhecidos, consultar por exemplo [40, 41]. Assumindo os estados CS, os valores médios das coordenadas de uma partícula movem-se ao longo das trajetórias clássicas, que são círculos cujo o raio e posição do centro (números quânticos) identificam estes estados quânticos. Deve ser mencionado que algumas tentativas para construção dos estados SS/CS para partículas sob influência do MSF

foram apresentados ao longo dos trabalhos [42]. Contudo, os estados construídos nestes trabalhos não satisfazem a exigência principal para os estados SS/CS, ou seja, as médias correspondentes não se movem ao longo das trajetórias clássicas.

Em nosso artigo recente [43], conseguimos construir diferentes tipos de estados CS para uma partícula carregada não-relativística de spin-zero submetida ao campo MSF. Ao longo deste trabalho, estenderemos esta construção ao caso de partículas de spin-zero relativísticas e de spin-1/2 relativísticas e não-relativísticas ambas em 3 + 1- e 2 + 1- dimensões. Adicionalmente, desenvolvendo técnicas de aproximação semiclássica, construímos os estados SS em MSF com base nos estados CS. O progresso está associado a uma observação não-trivial de que no problema sob consideração existem dois tipos de estados SS/CS, aqueles que correspondem às trajetórias clássicas, que circundam o solenóide, e aqueles que correspondem as trajetórias clássicas que não circundam. Deve ser enfatizado que a identificação dos estados SS e CS em MSF depende essencialmente dos números quânticos que parametrizam estes estados (com respeito aos tipos e posições das trajetórias clássicas correspondentes). As partículas analisadas em relação aos estados SS/CS movem-se ao longo de trajetórias clássicas, os estados mantêm suas formas sob evolução temporal e formam um conjunto completo de funções, que podem ser úteis em cálculos semiclássicos. Na ausência do campo de AB estes estados são reduzidos aos bem conhecidos estados coerentes CS de Malkin-Man'ko [40], no caso de um campo magnético uniforme. Os estados construídos dão um exemplo não-trivial dos estados SS/CS para sistemas com uma Hamiltoniana do tipo não-quadrática. Adicionalmente, estes estados permitem tratar o efeito AB em termos de uma linguagem clássica, revelando uma influência do campo de AB sobre os parâmetros clássicos em um campo magnético. Deve ser notado que o movimento quântico dos férmions de Dirac de spin-1/2 é qualitativamente diferente em 3 + 1- e em 2 + 1- dimensões. Uma vez que os férmions de Dirac em 2 + 1- dimensões descrevem a dinâmica de um elétron em uma estrutura de grafeno, temos dedicado especial atenção ao estudo dos estados SS e CS em MSF associados a eles.

Esta tese é organizada como segue. No capítulo 2, a descrição clássica e a descrição quântica são realizadas construindo-se estados estacionários e estados coerentes para uma partícula carregada não-relativística de spin-zero sob influência do campo MSF, são realizadas. Na seção. 3.1, iniciamos nossas considerações com a descrição clássica do movimento de uma partícula relativística sob influência do MSF. Lembramos que MSF é uma superposição colinear de um campo magnético constante e uniforme de intensidade B e o campo de AB (campo de um infinitamente longo e infinitesimalmente fino solenóide com um fluxo magnético interno finito e constante Φ). Admitindo o eixo z ao longo do solenóide AB, a intensidade do MSF toma a forma $\mathbf{B} = (0, 0, B_z)$,

$$B_z = B + \Phi \delta(x) \delta(y) = B + \frac{\Phi}{\pi r} \delta(r), \quad B = \text{constante}, \quad \Phi = \text{constante}. \quad (1.1)$$

Fazemos uso dos seguintes potenciais eletromagnéticos¹ A^μ , atribuído ao MSF (1.1): $A^0 = A^3 = 0$, e

$$A^1 = -y \left(\frac{\Phi}{2\pi r^2} + \frac{B}{2} \right), \quad A^2 = x \left(\frac{\Phi}{2\pi r^2} + \frac{B}{2} \right). \quad (1.2)$$

Na seção. 3.2, descrevemos os estados quânticos estacionários relativísticos de partículas de spin-zero e de spin-1/2 em MSF ambos em 2 + 1 e em 3 + 1 dimensões. Aqui usamos as assim denominadas

¹Admitimos as seguintes notações para vetores de quatro e três dimensões: $a = (a^\mu, \mu = 0, i) = (a^0, \mathbf{a})$,

$\mathbf{a} = (a^i, i = 1, 2, 3) = (a^1 = a_x, a^2 = a_y, a^3 = a_z)$, $a_i = -a^i$, em particular, para as coordenadas de espaço-tempo: $x^\mu = (x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$, como para as coordenadas cilíndricas r, φ , no plano- xy , tal que $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, e $r^2 = x^2 + y^2$. Ademais, $dx = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$, e o tensor de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

extensões auto-adjuntas naturais das hamiltonianas correspondentes, as quais correspondem ao limite em que o raio tende a zero no caso regularizado de um solenóide de raio finito. Nas secs. 3.3 e 3.4, construímos estados CS instantâneos e dependentes do tempo para partículas relativísticas de spin-zero e spin-1/2 e analisamos suas propriedades. Então, por meio dos CS, construímos os estados SS, desenvolvendo técnicas de cálculos semiclássicos para os valores médios de quantidades físicas. Isto permite-nos analisar a evolução temporal da posição média das partículas. Sumarizamos os resultados obtidos na seção. 3.5.

Capítulo 2

Caso não-relativístico

2.1 Movimento clássico

O movimento clássico do elétron em um campo de um magnético-solenóide é governado pela Hamiltoniana $H = \mathbf{P}^2/2M$, $\mathbf{P} = \mathbf{p} - \frac{q}{c}\mathbf{A}$, onde \mathbf{p} e \mathbf{P} são o momento generalizado e cinético, respectivamente. As trajetórias, que não interceptam o solenóide, apresentam a forma:

$$x = x_0 + R \cos \psi, \quad y = y_0 + R \sin \psi, \quad z = \frac{p_z}{M} t + z_0; \quad \psi = \omega t + \psi_0, \quad \omega = \frac{eB}{Mc}, \quad (2.1)$$

onde x_0, y_0, z_0, p_z, R , e ψ_0 são constantes de integração. As equações (2.1) implicam

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= R^2, \quad x_0 = R_c \cos \alpha, \quad y_0 = R_c \sin \alpha, \\ r^2 &= R^2 + R_c^2 + 2RR_c \cos(\psi - \alpha), \quad R_c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

As projeções das trajetórias das partículas sobre o plano- xy são círculos, girando com a frequência de ciclotron ω . Para um observador que está situado nas proximidades do solenóide com $z > 0$, a rotação é anti-horária. A partícula move-se com velocidade constante p_z/M ao longo do eixo z . Uma vez que o elétron propaga-se livremente sobre o eixo z , somente o movimento no plano perpendicular $z = 0$ é não-trivial; isto será examinado abaixo. Denotando por r_{max} o máximo afastamento possível e por r_{min} o mínimo afastamento possível da partícula em relação ao eixo z , obtemos de (2.2) $r_{max} = R + R_c$, $r_{min} = |R - R_c|$. Segue de (2.1) que

$$\begin{aligned} P_x &= -M\omega R \sin \psi = -M\omega (y - y_0), \\ P_y &= M\omega R \cos \psi = M\omega (x - x_0), \quad \mathbf{P}_\perp^2 = P_x^2 + P_y^2 = (M\omega R)^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A energia E da rotação da partícula é escrita como: $E = \mathbf{P}_\perp^2/2M = M(\omega R)^2/2$. Por meio de (2.3), é possível calcular a projeção do momento angular L_z ,

$$L_z = xp_y - yp_x = \frac{M\omega}{2}(R^2 - R_c^2) - \frac{e\Phi}{2\pi c}. \quad (2.4)$$

Ainda em teoria clássica, é conveniente, introduzir quantidades complexas adimensionais a_1 e a_2 (contendo \hbar) como segue:

$$a_1 = \frac{-iP_x - P_y}{\sqrt{2\hbar M\omega}} = -\sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} R e^{-i\psi}, \quad a_2 = \frac{M\omega (x + iy) + iP_x - P_y}{\sqrt{2\hbar M\omega}} = \sqrt{\frac{M\omega}{2\hbar}} R_c e^{i\alpha}. \quad (2.5)$$

É possível verificar que $a_1 \exp(i\psi)$ e a_2 são integrais de movimento. É possível escrever que

$$R^2 = \frac{2\hbar}{M\omega} a_1^* a_1, \quad R_c^2 = \frac{2\hbar}{M\omega} a_2^* a_2, \quad r^2 = \frac{2\hbar}{M\omega} (a_2 - a_1^*) (a_2^* - a_1), \quad (2.6)$$

$$E = \omega \hbar a_1^* a_1, \quad L_z = \hbar (a_1^* a_1 - a_2^* a_2) - \frac{e\Phi}{2\pi c}. \quad (2.7)$$

2.2 Estados estacionários

O comportamento quântico do elétron no campo (1.1) é determinado pela equação de Schrödinger com a Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_\perp + \hat{p}_z^2/2M, \quad \hat{H}_\perp = \left(\hat{P}_x^2 + \hat{P}_y^2 \right) / 2M, \\ \hat{P}_x &= \hat{p}_x + \frac{e}{c} A_x, \quad \hat{P}_y = \hat{p}_y + \frac{e}{c} A_y, \quad \hat{p}_x = -i\hbar \partial_x, \quad \hat{p}_y = -i\hbar \partial_y, \quad \hat{p}_z = -i\hbar \partial_z, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde \hat{H}_\perp determina o comportamento não-trivial sobre o plano- xy . É conveniente apresentar o fluxo magnético Φ na equação (1.2) como $\Phi = (l_0 + \mu) \Phi_0$, onde l_0 é inteiro, e $0 \leq \mu < 1$ e $\Phi_0 = 2\pi c \hbar / e$ é a unidade fundamental de Dirac do fluxo magnético. A mantissa do fluxo magnético μ determina, de fato, todos os efeitos quânticos devidos à presença do campo de AB. Os estados estacionários do elétron não-relativístico no campo de um magnético-solenóide foram primeiro descritos em [27]. As funções radiais correspondentes foram admitidas como regulares em $r = 0$, as funções correspondem a mais natural extensão auto-adjunta (com um domínio D_{H_\perp}) do operador simétrico diferencial \hat{H}_\perp . Considerando um caso regularizado de um solenóide de raio finito, é possível demonstrar que o limite em que o raio tende a zero gera esta extensão, consultar [32]. A seguir, consideramos somente tal extensão (todas as possíveis extensões auto-adjuntas de \hat{H}_\perp foram construídas em ([33, 35]). O operador $\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x$ é auto-adjunto sobre o domínio D_{H_\perp} e comuta com a hamiltoniana auto-adjunta \hat{H}_\perp . É possível encontrar dois tipos ($\varkappa = 0, 1$) de autofunções de ambos os operadores

$$\begin{aligned} \hat{H}_\perp \Psi_{n_1, n_2}^{(\varkappa)}(t, r, \varphi) &= \mathcal{E}_{n_1} \Psi_{n_1, n_2}^{(\varkappa)}(t, r, \varphi), \quad \mathcal{E}_{n_1} = \hbar\omega (n_1 + 1/2), \\ \hat{L}_z \Psi_{n_1, n_2}^{(\varkappa)}(t, r, \varphi) &= L_z \Psi_{n_1, n_2}^{(\varkappa)}(t, r, \varphi), \quad L_z = \hbar (l - l_0). \end{aligned} \quad (2.9)$$

As autofunções apresentam a forma

$$\begin{aligned} \Psi_{n_1, n_2}^{(\varkappa)}(t, r, \varphi) &= \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_{n_1} t\right) \Phi_{n_1, n_2}^{(\varkappa)}(\varphi, \rho), \quad \rho = \frac{eBr^2}{2c\hbar}, \quad \varkappa = 0, 1, \\ \Phi_{n_1, n_2}^{(0)}(\varphi, \rho) &= \aleph \exp[i(l - l_0)\varphi] I_{n_2, n_1}(\rho), \quad n_1 = m, \quad n_2 = m - l - \mu, \quad -\infty < l \leq -1, \\ \Phi_{n_1, n_2}^{(1)}(\varphi, \rho) &= \aleph \exp[i(l - l_0)\varphi + \pi l] I_{n_1, n_2}(\rho), \quad n_1 = m + l + \mu, \quad n_2 = m, \quad 0 \leq l \leq +\infty. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Aqui l, m ($m \geq 0$) são dois inteiros, $I_{n, m}(\rho)$ são funções de Laguerre que estão associadas aos polinômios de Laguerre $L_m^\alpha(\rho)$ (consultar equações 8.970, 8.972.1 de [44]) como segue

$$I_{m+\alpha, m}(\rho) = \sqrt{\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}} e^{-\rho/2} \rho^{\alpha/2} L_m^\alpha(\rho), \quad L_m^\alpha(\rho) = \frac{1}{m!} e^\rho \rho^{-\alpha} \frac{d^m}{d\rho^m} e^{-\rho} \rho^{m+\alpha}, \quad (2.11)$$

e \aleph é uma constante de normalização. Estas funções formam um conjunto completo e ortonormalizado sobre o domínio D_{H_\perp} .

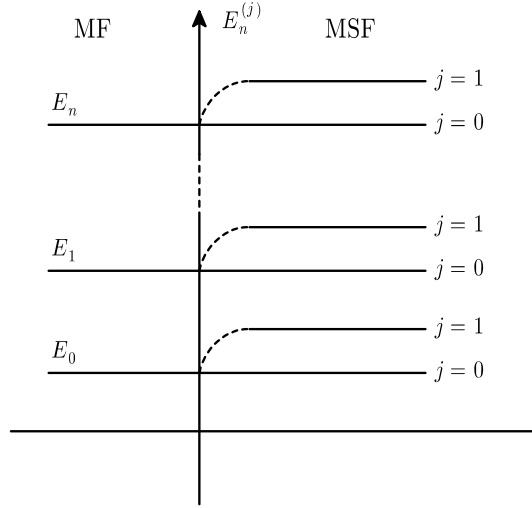


Figura 2.1: Divisão dos níveis de Landau no campo de um magnético-solenóide.

É útil definir os operadores auto-adjuntos \hat{R}^2 e R_c^2 por analogia com as relações clássicas correspondentes:

$$\hat{R}^2 = \frac{2\hat{H}_\perp}{M\omega^2}, \quad R_c^2 = \hat{R}^2 - \frac{2}{M\omega} \left[\hat{L}_z + (l_0 + \mu) \hbar \right]. \quad (2.12)$$

No limite semiclássico o sinal do valor médio do operador $\hat{R}^2 - R_c^2$ permite interpretar os estados correspondentes como trajetórias de partículas que circundam e não circundam o solenóide. Como segue de (2.12) e (2.9), uma órbita circunda o solenóide para $l \geq 0$ (tipo $j = 1$), e não o circunda para $l \leq -1$ (tipo $j = 0$). Para o caso em que $\mu \neq 0$, os níveis de energia dos estados (2.10) com $l \geq 0$ são desviados com relação aos níveis de Landau por $\mu\hbar\omega$, ao passo que os níveis de energia dos estados (2.10) com $l \leq -1$ permanecem coincidentes com os níveis de Landau. A divisão dos níveis de Landau no MSF é representada na figura (2.1).

2.3 Estados coerentes

2.3.1 Estados coerentes instantâneos sobre o plano $-xy$

Devemos introduzir os operadores \hat{a}_1 , \hat{a}_2 e \hat{a}_1^\dagger , \hat{a}_2^\dagger que correspondem às quantidades clássicas a_1 , a_2 e a_1^* , a_2^* ,

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{-i\hat{P}_x - \hat{P}_y}{\sqrt{2\hbar M\omega}}, & \hat{a}_2 &= \frac{M\omega(x + iy) + i\hat{P}_x - \hat{P}_y}{\sqrt{2\hbar M\omega}}, \\ \hat{a}_1^\dagger &= \frac{i\hat{P}_x - \hat{P}_y}{\sqrt{2\hbar M\omega}}, & \hat{a}_2^\dagger &= \frac{M\omega(x - iy) - i\hat{P}_x - \hat{P}_y}{\sqrt{2\hbar M\omega}}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Deve-se ressaltar que os operadores momento \hat{P}_x e \hat{P}_y são simétricos porém não são auto-adjuntos sobre o domínio D_{H_\perp} . Isto é verificado em virtude do fato de que não podemos considerar \hat{a}_1^\dagger e \hat{a}_2^\dagger como adjuntos de \hat{a}_1 e \hat{a}_2 . Não obstante, estes realizam um papel auxiliar relevante em construções posteriores.

Usando as propriedades das funções de Laguerre, é possível encontrar a ação dos operadores \hat{a}_1^\dagger , \hat{a}_1 ; \hat{a}_2^\dagger , \hat{a}_2 sobre as funções (2.10),

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_1} \Phi_{n_1-1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), & \hat{a}_1^\dagger \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_1 + 1} \Phi_{n_1+1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ \hat{a}_2 \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_2} \Phi_{n_1, n_2-1}^{(j)}(\varphi, \rho), & \hat{a}_2^\dagger \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_2 + 1} \Phi_{n_1, n_2+1}^{(j)}(\varphi, \rho),\end{aligned}\quad (2.14)$$

onde os valores possíveis de n_1 e n_2 dependem de m, l , e j de acordo com (2.10).

Os comutadores formais para os operadores $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1$ e $\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2$ apresentam a forma:

$$\left[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger \right] = 1 + f, \quad \left[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger \right] = 1 - f, \quad [\hat{a}_1, \hat{a}_2] = f, \quad \left[\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger \right] = 0, \quad (2.15)$$

onde f é uma função singular $f = \Phi(\pi Br)^{-1} \delta(r) = 2(l_0 + \mu)\delta(\rho)$. Contudo, é possível verificar por meio de (2.14) que esta função gera contribuição nula sobre o domínio D_{H_\perp} , tal que sobre este domínio $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger$ e \hat{a}_1, \hat{a}_2 comportam-se como operadores de criação e aniquilação. Os operadores $\hat{R}^2, \hat{R}_c^2, \hat{r}^2, \hat{H}_\perp$, and \hat{L}_z podem ser expressos em termos dos operadores $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1$ and $\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2$ como segue:

$$\begin{aligned}\hat{R}^2 &= \frac{\hbar}{M\omega} \left(2\hat{N}_1 + 1 \right), & \hat{R}_c^2 &= \frac{\hbar}{M\omega} \left(2\hat{N}_2 + 1 \right), & r^2 &= \frac{2\hbar}{M\omega} \left(\hat{a}_2 - \hat{a}_1^\dagger \right) \left(\hat{a}_2^\dagger - \hat{a}_1 \right), \\ \hat{H}_\perp &= \hbar\omega \left(\hat{N}_1 + 1/2 \right), & \frac{1}{\hbar} \hat{L}_z + l_0 + \mu &= \left(\hat{N}_1 - \hat{N}_2 \right), & \hat{N}_s &= \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s, \quad s = 1, 2.\end{aligned}\quad (2.16)$$

As funções $\Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho)$ (2.10) podem ser usadas para construir os seguintes estados $\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho)$,

$$\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) = \sum_{m, l} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho)}{\sqrt{\Gamma(1 + n_1) \Gamma(1 + n_2)}}, \quad (2.17)$$

onde z_1 e z_2 são parâmetros complexos, os valores possíveis de n_1 e n_2 dependem de m, l , e j de acordo com (2.10), e escolhemos $\aleph = 1$. Denominamos estes estados como estados coerentes instantâneos sobre o plano- xy . Estes estados podem ser expressos em termos das funções especiais $F_\alpha(z_1, z_2; \varphi, \rho)$,

$$F_\alpha(z_1, z_2; \varphi, \rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z_1^m z_2^{m+\alpha+l} \exp(-il\varphi) I_{m+\alpha+l, m}(\rho)}{\sqrt{\Gamma(1+m) \Gamma(1+m+\alpha+l)}} \quad (2.18)$$

como segue:

$$\Phi_{z_1, z_2}^{(0)}(\varphi, \rho) = \exp[-i(l_0 + 1)\varphi] F_{1-\mu}(z_1, z_2; \varphi, \rho), \quad \Phi_{z_1, z_2}^{(1)}(\varphi, \rho) = \exp(-il_0\varphi) F_\mu(z_2, z_1; \pi - \varphi, \rho).$$

Por meio da soma,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m I_{\alpha+m, m}(x)}{\sqrt{\Gamma(1+m) \Gamma(1+\alpha+m)}} = z^{-\frac{\alpha}{2}} \exp\left(z - \frac{x}{2}\right) J_\alpha(2\sqrt{xz}), \quad (2.19)$$

onde $J_\alpha(x)$ são funções de Bessel de primeiro tipo, é possível obter a seguinte representação para $F_\alpha(z_1, z_2; \varphi, \rho)$:

$$F_\alpha(z_1, z_2; \varphi, \rho) = \exp\left(z_1 z_2 - \frac{\rho}{2}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\sqrt{\frac{z_2}{z_1}}\right)^{\alpha+l} e^{-il\varphi} J_{\alpha+l}(2\sqrt{z_1 z_2 \rho}). \quad (2.20)$$

Então segue de (2.14):

$$\hat{N}_s \Phi_{z_1, z_2}^{(j)} = z_s \partial_{z_s} \Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \quad s = 1, 2. \quad (2.21)$$

Devemos definir um produto escalar de duas funções $f(\varphi, \rho)$ e $g(\varphi, \rho)$ como

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi f^*(\varphi, \rho) g(\varphi, \rho).$$

Então, usando as equações 6.615 de [44], obtemos:

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \Phi_{z'_1, z'_2}^{(j')} \right) &= \delta_{jj'} \mathcal{R}^{(j)}; \\ \mathcal{R}^{(0)} &= Q_{1-\mu} \left(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2} \right), \quad \mathcal{R}^{(1)} = Q_\mu \left(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1} \right), \\ Q_\alpha(x, y) &= Q_\alpha^-(x, y) + \left(\frac{y}{x} \right)^\alpha I_\alpha(2xy), \quad Q_\alpha^-(x, y) = \sum_{l=1}^\infty \left(\frac{y}{x} \right)^{\alpha+l} I_{\alpha+l}(2xy), \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde $I_\alpha(x)$ são as funções de Bessel modificadas de primeiro tipo. Definimos os valores médios de um operador \hat{F} na forma

$$\overline{(F)}_{(j)} = \left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \hat{F} \Phi_{z_1, z_2}^{(j)} \right) \left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \Phi_{z_1, z_2}^{(j)} \right)^{-1}.$$

Usando (2.21), é possível calcular os valores médios de \hat{N}_s :

$$\overline{(N_s)}_{(j)} = z_s \partial_{z'_s} \ln \mathcal{R}^{(j)} \Big|_{z'_s = z_s}, \quad s = 1, 2. \quad (2.23)$$

Isto permite conectar os valores médios de \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 com os parâmetro z_1 e z_2 . A perspectiva é que no limite semiclássico $\overline{(N_s)}_{(j)} \approx |z_s|^2$. Simultaneamente, as escalas de comprimento definidas pelas médias $\overline{(R^2)}_{(j)}$, $\overline{(R_c^2)}_{(j)}$ devem ser suficientemente grandes, isto implica em $|z_s|^2 \gg 1$. O sinal da diferença $\overline{(R^2)}_{(j)} - \overline{(R_c^2)}_{(j)}$ está associado ao tipo da trajetória, tal que para os estados com $j = 0$ temos $|z_1|^2 < |z_2|^2$, e para os estados com $j = 1$, temos $|z_1|^2 > |z_2|^2$. Notamos que em ambos os casos as funções correspondentes $Q_\alpha(x, y)$ são calculadas em $|y| > |x| \gg 1$.

Existem todas as derivadas $\partial_y \left[\left(\frac{y}{x} \right)^{\alpha+l} I_{\alpha+l}(2xy) \right]$, as séries $Q_\alpha^-(x, y)$ convergem e as séries de derivadas $\sum_{l=1}^\infty \partial_y \left[\left(\frac{y}{x} \right)^{\alpha+l} I_{\alpha+l}(2xy) \right]$ convergem uniformemente sobre o semi-eixo, $0 < \text{Re } y < \infty$. Portanto, é possível obter uma equação diferencial com relação a $Q_\alpha^-(x, y)$,

$$\frac{dQ_\alpha^-(x, y)}{dy} = 2y \left[\left(\frac{y}{x} \right)^\alpha I_\alpha(2xy) + Q_\alpha^-(x, y) \right].$$

Para avaliar o comportamento assintótico, representamos sua solução como segue:

$$Q_\alpha^-(x, y) = e^{x^2+y^2} [1 - T(x, y)], \quad T(x, y) = 2e^{-x^2} \int_y^\infty e^{-\tilde{y}^2} \left(\frac{\tilde{y}}{x} \right)^\alpha I_\alpha(2x\tilde{y}) \tilde{y} d\tilde{y}, \quad (2.24)$$

onde a formula 6.631.4 [44] é usada. Portanto

$$Q_\alpha(x, y) = e^{x^2+y^2} \tilde{Q}_\alpha(x, y), \quad \tilde{Q}_\alpha(x, y) = \left[1 - T(x, y) + e^{-x^2-y^2} \left(\frac{y}{x} \right)^\alpha I_\alpha(2xy) \right]. \quad (2.25)$$

Deste modo, os valores médios (2.23) apresentam a forma:

$$\begin{aligned} \overline{(N_s)}_{(j)} &= |z_s|^2 + z_s \partial_{z'_s} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(j)} \Big|_{z'_s=z_s}, \quad s = 1, 2, \\ \tilde{\mathcal{R}}^{(0)} &= \tilde{Q}_{1-\mu} \left(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2} \right), \quad \tilde{\mathcal{R}}^{(1)} = \tilde{Q}_\mu \left(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1} \right). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Usando o comportamento assintótico da função $I_\alpha(2xy)$, é possível verificar para o caso em que $|y| > |x| \gg 1$ então $|z_s|^2 \gg z_s \partial_{z'_s} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(j)} \Big|_{z'_s=z_s}$ in (2.26). Para os estados semiclássicos correspondentes às órbitas situadas suficientemente distantes do solenóide, i.e., para $||z_1|^2 - |z_2|^2| \gg 1$, a contribuição $z_s \partial_{z'_s} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(j)} \Big|_{z'_s=z_s}$ é tão pequena quanto a $\exp(-||z_1|^2 - |z_2|^2|)$. Finalmente, obtemos:

$$|z_1|^2 \approx \frac{M\omega}{2\hbar} \overline{(R^2)}_{(j)}, \quad |z_2|^2 \approx \frac{M\omega}{2\hbar} \overline{(R_c^2)}_{(j)}, \quad |z_s|^2 \gg 1. \quad (2.27)$$

Por meio de (2.14), é possível encontrar:

$$\begin{aligned} \overline{(a_1)}_{(0)} &= z_1 \Delta_{1-\mu}(|z_1|, |z_2|), \quad \overline{(a_2)}_{(0)} = z_2, \quad \overline{(a_1)}_{(1)} = z_1, \\ \overline{(a_2)}_{(1)} &= z_2 \Delta_\mu(|z_2|, |z_1|), \quad \Delta_\alpha(x, y) = \frac{Q_\alpha^-(x, y)}{Q_\alpha(x, y)}, \quad 0 \leq \mu < 1 \end{aligned} \quad (2.28)$$

onde $Q_\alpha^-(x, y)$ e $Q_\alpha(x, y)$ são definidos em (2.22), tal que estas médias relacionam-se com as equações (2.26) no limite semiclássico.

2.3.2 Estados coerentes dependentes do tempo

Consideremos a equação de Schrödinger com a Hamiltoniana completa em três-dimensões \hat{H} (2.8) e as correspondentes soluções $\Psi(t, \mathbf{r})$ com um dado momento p_z ,

$$\Psi(t, \mathbf{r}) = \aleph \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{p_z^2}{2M} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) t - p_z z \right] \right\} \Phi(t, \varphi, \rho),$$

onde \aleph é uma constante de normalização. As funções $\Phi(t, \varphi, \rho)$ satisfazem a seguinte equação

$$i\partial_t \Phi(t, \varphi, \rho) = \omega \hat{N}_1 \Phi(t, \varphi, \rho). \quad (2.29)$$

É possível obedecer (2.29) assumindo $\Phi(t, \varphi, \rho) = \mathbf{\Phi}_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) \Big|_{z_1=z_1(t)}$, onde $z_1(t)$ é uma função complexa do tempo t . Portanto

$$i\partial_t \mathbf{\Psi}_{z_1, z_2}^{(j)} = i\dot{z}_1 \partial_{z_1} \mathbf{\Phi}_{z_1, z_2}^{(j)}, \quad \dot{z}_1 = dz_1/dt, \quad (2.30)$$

onde (2.21) é usado. Substituindo (2.30) em (2.29), encontramos $i\dot{z}_1 = \omega z_1$. É conveniente escrever uma solução para $z_1(t)$ como segue:

$$z_1(t) = -|z_1| \exp(-i\psi), \quad \psi = \omega t + \psi_0, \quad (2.31)$$

onde $|z_1|$ é uma dada constante. Portanto, as funções

$$\Psi_{\text{CS}}^{(j)}(t, \mathbf{r}) = \aleph \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{p_z^2}{2M} + \frac{\hbar\omega}{2} \right) t - p_z z \right] \right\} \mathbf{\Phi}_{z_1(t), z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) \quad (2.32)$$

são soluções da equação de Schrödinger. Simultaneamente estas soluções apresentam propriedades especiais que permitem tratá-las como estados coerentes (e, sob certas condições, como estados semiclássicos).

Devemos considerar os valores médios $\overline{(x)}_{(j)}$ e $\overline{(y)}_{(j)}$ das coordenadas com respeito aos estados $\Psi_{\text{CS}}^{(j)}$. Para este fim é suficiente encontrar o valor médio $\overline{(x+iy)}_{(j)}$. Por meio de (2.13) obtemos:

$$\overline{(x+iy)}_{(j)} = \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}} \left[\overline{(a_2)}_{(j)} - \overline{(a_1)}_{(j)}^* \right].$$

Considerando as equações (2.28) e (2.31), é possível verificar que o ponto com coordenadas $\overline{(x)}_{(j)}$ e $\overline{(y)}_{(j)}$ está se movendo ao longo de um círculo no plano- xy com a frequência de ciclotron ω , i.e., sua trajetória apresenta a forma clássica. As mesmas equações permitem encontrar um raio $\overline{(R)}_{(j)}$ deste círculo e a distância $\overline{(R_c)}_{(j)}$ entre seu centro e a origem,

$$\begin{aligned} \overline{(R)}_{(0)} &= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}} |z_1| \Delta_{1-\mu}(|z_1|, |z_2|), & \overline{(R_c)}_{(0)} &= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}} |z_2|; \\ \overline{(R)}_{(1)} &= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}} |z_1|, & \overline{(R_c)}_{(1)} &= \sqrt{\frac{2\hbar}{M\omega}} |z_2| \Delta_{\mu}(|z_1|, |z_2|). \end{aligned}$$

Todavia, no caso geral, as quantidades $\overline{(R)}_{(j)}$ e $\overline{(R_c)}_{(j)}$ não coincidem com as quantidades correspondentes

$$\sqrt{\overline{(R^2)}_{(j)}} = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} \sqrt{2(N_1)_{(j)} + 1}, \quad \sqrt{\overline{(R_c^2)}_{(j)}} = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} \sqrt{2(N_2)_{(j)} + 1},$$

as quais são expressas em termos dos valores médios dos operadores \hat{H}_{\perp} e \hat{L}_z de acordo com (2.16), consultar também (2.23).

Portanto, para o caso geral ($\mu \neq 0$) as relações usuais entre os parâmetros do círculo, a energia da partícula e o momento angular são afetados pela presença do solenóide AB. Para o caso em que $\mu = 0$, e para $\mu \neq 0$ no limite semiclássico acima discutido (raio suficientemente grande) tais relações não são influenciadas pela presença do solenóide AB.

Portanto, em contraste com o problema no campo magnético constante e uniforme (e em contraste com qualquer problema associado a uma Hamiltoniana quadrática), no campo de um magnético-solenóide, encontramos uma situação completamente inusitada. Neste contexto os estados coerentes dependentes do tempo podem ser construídos (o que é um fato completamente não-trivial em virtude da natureza não-quadrática da Hamiltoniana acoplada ao campo de um magnético-solenóide), os respectivos valores médios movem-se ao longo das trajetórias clássicas, entretanto as relações clássicas entre as quantidades físicas implicam em restrições semiclássicas adicionais. Nem todos os estados coerentes correspondem a uma aproximação semiclássica, ao contrário das hamiltonianas quadráticas.

Finalmente, devemos mencionar que somente as combinações lineares da forma

$$\Psi(c_0, c_1; t, \mathbf{r}) = c_0 \Psi_{\text{CS}}^{(0)}(t, \mathbf{r}) + c_1 \Psi_{\text{CS}}^{(1)}(t, \mathbf{r}),$$

com c_0 e c_1 -arbitrárias e $c_0 c_1 \neq 0$ foram consideradas previamente como estados coerentes em [42]. Os valores médios dos operadores \hat{a}_1 e \hat{a}_2 calculados em termos de tais estados superpostos não coincidem com as expressões clássicas (2.5).

Capítulo 3

Caso relativístico

3.1 Movimento clássico relativístico em MSF

Abaixo, consideramos o movimento clássico de uma carga $q = \pm e$ com massa M sob influência do MSF. As trajetórias $x^\mu(s)$ parametrizadas pelo intervalo de Minkowski s , satisfazem a equação de Lorentz:

$$Mc^2 \dot{u}^\nu = qF^{\nu\mu} u_\mu \iff Mc^2 \dot{P}^\nu = qF^{\nu\mu} P_\mu, \quad P^\nu = p^\nu - \frac{q}{c} A^\nu, \quad (3.1)$$

onde $u^\nu = \dot{x}^\nu = dx^\mu/ds$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, p^ν é o momento generalizado da partícula, e $P^\nu = Mcu^\nu$ é o momento cinético, tal que

$$u^\nu u_\nu = 1 \implies P^\nu P_\nu = (Mc)^2. \quad (3.2)$$

Segue de (1.1), que as componentes não-nulas de $F^{\nu\mu}$ são $F^{21} = -F^{12} = B$. Para as trajetórias que não interceptam o eixo z , obtemos de (3.1) e (3.2):

$$\dot{P}_0 = 0, \quad \dot{P}_1 = \epsilon \varkappa P_2, \quad \dot{P}_2 = -\epsilon \varkappa P_1, \quad \dot{P}_3 = 0; \quad \varkappa = |qB|/Mc^2, \quad \epsilon = \text{sign}(qB). \quad (3.3)$$

As equações (3.3) implicam nas seguintes três primeiras integrais de movimento:

$$P_0 = p_0 = \text{const}, \quad P_3 = p_3 = \text{const}, \quad P_1^2 + P_2^2 = \mathbf{P}_\perp^2 = \text{const}. \quad (3.4)$$

Portanto, a energia total da partícula $\mathcal{E} = cP^0$ é também uma integral de movimento. A segunda e a terceira equações (3.3) podem ser reescritas na forma

$$\ddot{x} = \epsilon \varkappa \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\epsilon \varkappa \dot{x}. \quad (3.5)$$

É possível verificar que a solução geral de (3.4) e (3.5) é escrita como

$$\begin{aligned} ct &= \frac{p_0}{Mc} s, \quad z = -\frac{p_3}{Mc} s + z_0 = -\frac{cp_3}{p_0} t + z_0, \quad x = x_0 + R \cos \psi, \\ y &= y_0 - \epsilon R \sin \psi; \quad \psi = \varkappa s + \psi_0 = \omega t + \psi_0, \quad \omega = \frac{|qB|}{p_0}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde $x_0, y_0, z_0, p_0, p_3, R$, e ψ_0 são constantes de integração. Segue de (3.6) que

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= R^2, \quad x_0 = R_c \cos \alpha, \quad y_0 = R_c \sin \alpha, \\ r^2 = x^2 + y^2 &= R^2 + R_c^2 + 2RR_c \cos(\psi + \epsilon\alpha), \quad R_c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

As trajetórias das partículas sobre o plano- xy são círculos de raio R com os pontos centrais (x_0, y_0) situados a distância R_c da origem. As imagens das partículas sobre o plano- xy giram com frequência de síncrotron ω . Para um observador que está situado nas proximidades do solenóide com $z > 0$, a rotação da partícula com $\epsilon = 1$ ocorre no sentido horário, ao passo que para a partícula com $\epsilon = -1$ a rotação ocorre no sentido anti-horário. Portanto, as equações de movimento para a carga $-q$ podem ser obtidas das equações de movimento (3.6) com a carga q por meio da substituição p_0 por $-p_0$. Ao longo do eixo z , a partícula move-se com velocidade constante $dz/dt = -cp_3/p_0$. Denotamos por $r_{max} = R + R_c$ o máximo afastamento possível e por $r_{min} = |R - R_c|$ o mínimo afastamento possível da partícula com relação ao eixo z .

Notamos que as equações de movimento para uma partícula não-relativística ($\mathbf{P}^2 \ll (Mc)^2$) sob influência do MSF segue de (3.6) assumindo $p_0 = Mc$. Portanto $ct = s$ e $\omega = \omega_{NR} = |qB|/Mc$, onde ω_{NR} é a frequência de ciclotron.

As equações (3.2) e (3.6) implicam nas seguintes expressões para P_1, P_2 e p_1, p_2 :

$$\begin{aligned} P_1 &= Mc\kappa R \sin \psi = \epsilon Mc\kappa (y_0 - y), \\ P_2 &= \epsilon Mc\kappa R \cos \psi = \epsilon Mc\kappa (x - x_0), \quad \mathbf{P}_\perp^2 = (Mc\kappa R)^2; \\ p_1 &= \epsilon Mc\kappa [y_0 - y/2] + \frac{q\Phi}{2\pi c} \frac{y}{r^2}, \quad p_2 = \epsilon Mc\kappa (x/2 - x_0) - \frac{q\Phi}{2\pi c} \frac{x}{r^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

As constantes de integração p_0, p_3 , e R são independentes em virtude de (3.2) e (3.8),

$$\left(\frac{p_0}{Mc}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p_3}{Mc}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{P}_\perp}{Mc}\right)^2 = 1 + \left(\frac{p_3}{Mc}\right)^2 + (\kappa R)^2. \quad (3.9)$$

O quadrado da energia de rotação da partícula é $E_\perp^2 = c^2 \mathbf{P}_\perp^2$ e determina o raio R como segue

$$R^2 = E_\perp^2 (qB)^{-2}. \quad (3.10)$$

Usando (3.7) e (3.8), é possível calcular a projeção do momento angular L_z ,

$$L_z = yp_1 - xp_2 = \frac{\epsilon Mc\kappa}{2} (R_c^2 - R^2) + \frac{q\Phi}{2\pi c}, \quad (3.11)$$

o qual é uma integral de movimento.

Observamos que a presença do solenóide AB (o fluxo magnético Φ) quebra a simetria translacional no plano- xy . Em nível clássico, este fato apresenta um efeito topológico, de modo que surgem dois tipos de trajetórias, as quais são parametrizadas por um índice $j = 0, 1$ tal que $j = 1$ corresponde a $(R^2 - R_c^2) > 0$, (trajetórias circundam o solenóide), e $j = 0$ corresponde a $(R^2 - R_c^2) < 0$, (trajetórias não circundam o solenóide), verificar Fig. 3.1.

Ainda em teoria clássica, é conveniente, introduzir as quantidades complexas adimensionais a_1 e a_2 (contendo a constante \hbar) como segue:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{iP_1 - \epsilon P_2}{\sqrt{2\hbar Mc\kappa}} = -\sqrt{\gamma/2} R e^{-i\psi}, \quad \gamma = \frac{|qB|}{c\hbar}, \\ a_2 &= \frac{Mc\kappa(x - i\epsilon y) - iP_1 - \epsilon P_2}{\sqrt{2\hbar Mc\kappa}} = \sqrt{\gamma/2} R_c e^{-i\epsilon\alpha}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

As citadas quantidades definem as quantidades físicas $R, R_c, x, y, \mathbf{P}_\perp^2$ e L_z como segue:

$$R^2 = \frac{2}{\gamma} a_1^* a_1, \quad R_c^2 = 2\gamma^{-1} a_2^* a_2, \quad (x - i\epsilon y) = \sqrt{2\gamma^{-1}} (a_2 - a_1^*), \quad (3.13)$$

$$\mathbf{P}_\perp^2 = 2\gamma\hbar^2 a_1^* a_1, \quad L_z = \epsilon\hbar (a_2^* a_2 - a_1^* a_1) + \frac{q\Phi}{2\pi c}. \quad (3.14)$$

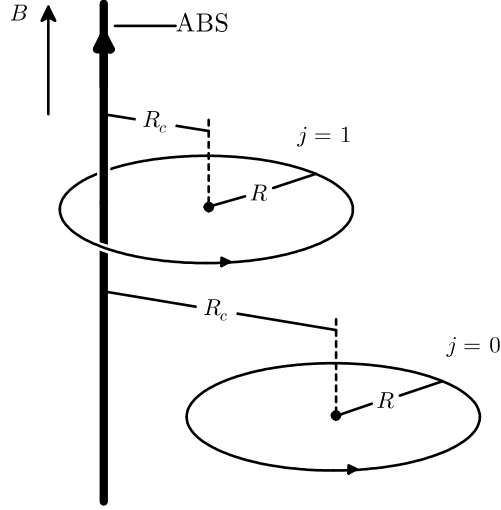


Figura 3.1: Dois tipos de trajetórias no MSF.

É possível verificar que $a_1 \exp(i\omega t)$ e a_2 são integrais de movimento. Outra importante integral de movimento adimensional λ (em teoria clássica $\lambda > 0$) é escrita:

$$\lambda = \frac{p_0 + p_3}{Mc}. \quad (3.15)$$

Segue de (3.9) e (3.15) que

$$\frac{p_0}{Mc} = \frac{\lambda^2 + (\varkappa R)^2 + 1}{2\lambda}, \quad \frac{p_3}{Mc} = \frac{\lambda^2 - (\varkappa R)^2 - 1}{2\lambda}. \quad (3.16)$$

Portanto, podemos escolher o conjunto $x_0, y_0, z_0, \lambda, R,$ e ψ_0 como seis integrais de movimento independentes.

Frequentemente, é conveniente usar variáveis de plano-nulo x_{\pm} ,

$$x_- = ct - z, \quad x_+ = ct + z \iff ct = \frac{x_+ + x_-}{2}, \quad z = \frac{x_+ - x_-}{2}. \quad (3.17)$$

Em termos das variáveis de plano-nulo, a solução geral (3.6) apresenta a forma:

$$ct = \frac{1 + (\varkappa R)^2 + \lambda^2}{2\lambda^2} x_-, \quad z = \frac{1 + (\varkappa R)^2 - \lambda^2}{2\lambda^2} x_- + z_0, \\ x = x_0 + R \cos \psi, \quad y = y_0 - \epsilon R \sin \psi; \quad \psi = \tilde{\omega} x_- + \psi_0, \quad \tilde{\omega} = \varkappa/\lambda, \quad s = \lambda^{-1} x_-, \quad (3.18)$$

onde x_- realiza o papel do tempo.

3.2 Estados quânticos estacionários

3.2.1 Partícula de spin-zero

O comportamento quântico de partículas relativísticas de spin-zero no MSF é descrito pelas funções de onda $\phi(x)$, as quais satisfazem a equação de Klein-Gordon com os potenciais electromagnéticos(1.2),

$$\begin{aligned} (\hat{P}_\nu \hat{P}^\nu - M^2 c^2) \phi(x) &= 0, \quad \hat{P}_\nu = \hat{p}_\nu - \frac{q}{c} A_\nu, \quad \hat{p}_\nu = i\hbar \partial_\nu, \\ \implies [\hbar^2 (\partial_3^2 - \partial_0^2) - \hat{\mathbf{P}}_\perp^2 - M^2 c^2] \phi(x) &= 0, \quad \hat{\mathbf{P}}_\perp = (\hat{P}_1, \hat{P}_2, 0). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Deve ser notado que o operador $\hat{\mathbf{P}}_\perp^2$ é responsável por uma forma não-trivial de ϕ sobre o plano- xy .

Na teoria quântica, é conveniente representar o fluxo magnético Φ do AB solenóide em termos do fluxo magnético fundamental de Dirac $\Phi_0 = 2\pi c\hbar/e$ como segue:

$$(\Phi/\Phi_0) \text{sign}B = l_0 + \mu \implies l_0 = [(\Phi/\Phi_0) \text{sign}B] \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq \mu = (\Phi/\Phi_0) \text{sign}B - l_0 < 1, \quad (3.20)$$

onde l_0 é um inteiro e a quantidade μ é chamada a mantissa do fluxo magnético. Efetivamente, μ determina todos os efeito quânticos no AB e MSF, consultar por exemplo [29]. Notamos que a definição (3.20) difere da definição $\tilde{\mu} = (\Phi/\Phi_0) - [(\Phi/\Phi_0)]$ para a mantissa de Φ , que foi usada previamente, e que não contém o fator $\text{sign}B$. As quantidades μ e $\tilde{\mu}$ estão associados como segue: $\mu = \tilde{\mu}$, $B > 0$; $\mu = 1 - \tilde{\mu}$, $B < 0$. Resulta que a definição (3.20) é muito conveniente e permite escrever uma expressão geral para quaisquer orientações mútuas do campo magnético constante e uniforme e do fluxo de AB.

Efetivamente, a eq. (3.19) é reduzida ao problema de equação de autovalor para uma Hamiltoniana de uma partícula não-relativística de spin-zero sobre o plano- xy .

Deve ser lembrado que os estados estacionários para uma partícula não-relativística de spin-zero no MSF foram primeiro descritas em [27] e para partículas relativísticas de spin-zero e spin-1/2 em [28]. Em [27, 28] e em todos os trabalhos contendo aplicações das soluções acima mencionadas, as funções radiais que são partes consistentes das soluções foram tomadas como do tipo regular¹ quando $r \rightarrow 0$, esta corresponde à mais natural extensão auto-adjunta com domínios $D_{P_\perp^2}$ do operador simétrico diferencial $\hat{\mathbf{P}}_\perp^2$. Introduzindo o caso regularizado de um solenóide de raio finito, é possível demonstrar que o limite em que o raio tende a zero gera esta extensão auto-adjunta, consultar [32]. Efetivamente, isto significa que qualquer função de onda é completamente determinada para $r > 0$. No que segue, consideramos somente esta extensão auto-adjunta que é induzida por estas extensões com domínios D_H de todas as possíveis Hamiltonianas de partículas de spin-zero.

O operador $\hat{L}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = -i\hbar\partial_\varphi$ é auto-adjunto sobre os domínios $D_{P_\perp^2}$ e comuta com $\hat{\mathbf{P}}_\perp^2$. É possível encontrar dois tipos ($j = 0, 1$) de autofunções comuns $\Phi_{n_1, n_2}^{(j)}$ de ambos os operadores:

$$\begin{aligned} c^2 \hat{\mathbf{P}}_\perp^2 \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{E}_\perp^2 \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad \mathcal{E}_\perp^2 = c^2 \mathbf{P}_\perp^2 = 2\hbar c |qB| (n_1 + 1/2), \\ \hat{L}_z \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= L_z \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad L_z = \epsilon\hbar (l_0 - l), \quad l \in \mathbb{Z}; \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n_1, n_2}^{(0)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp[i\epsilon(l_0 - l)\varphi] I_{n_2, n_1}(\rho), \\ n_1 = m, \quad n_2 = m - l - \mu, \quad -\infty < l \leq -1, \quad \rho &= \frac{\gamma}{2} r^2; \\ \Phi_{n_1, n_2}^{(1)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp\{i\epsilon[(l_0 - l)\varphi + \pi l]\} I_{n_1, n_2}(\rho), \\ n_1 = m + l + \mu, \quad n_2 = m, \quad 0 \leq l < \infty. \end{aligned} \quad (3.22)$$

¹Nexte contexto, usamos os termos "regular" e "irregular" quando $r \rightarrow 0$ no seguinte sentido. Denominamos uma função como regular se esta comporta-se como r^c quando $r \rightarrow 0$ com $c \geq 0$, e irregular caso $c < 0$.

Aqui $I_{n,m}(\rho)$, $m \geq 0$ são funções de Laguerre que estão associadas aos polinômios de Laguerre $L_m^\alpha(\rho)$ (consultar [44]) como segue:

$$I_{m+\alpha,m}(\rho) = \sqrt{\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m+\alpha+1)}} e^{-\rho/2} \rho^{\alpha/2} L_m^\alpha(\rho), \quad L_m^\alpha(\rho) = \frac{1}{m!} e^\rho \rho^{-\alpha} \frac{d^m}{d\rho^m} e^{-\rho} \rho^{m+\alpha}, \quad (3.23)$$

e \mathcal{N} são constantes de normalização. Para qualquer valor real $\alpha > -1$, as funções $I_{\alpha+m,m}(\rho)$ formam um conjunto completo ortonormal sobre o semi-eixo $\rho \geq 0$,

$$\int_0^\infty I_{\alpha+k,k}(\rho) I_{\alpha+m,m}(\rho) d\rho = \delta_{k,m}, \quad \sum_{m=0}^\infty I_{\alpha+m,m}(\rho) I_{\alpha+m,m}(\rho') = \delta(\rho - \rho'). \quad (3.24)$$

Devemos definir um produto interno de duas funções $f(\varphi, \rho)$ e $g(\varphi, \rho)$ como

$$(f, g)_\perp = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi f^*(\varphi, \rho) g(\varphi, \rho). \quad (3.25)$$

As autofunções deste produto interno (3.22) formam um conjunto ortogonal,

$$\left(\Phi_{n'_1, n'_2}^{(j')}, \Phi_{n_1, n_2}^{(j)} \right)_\perp = |\mathcal{N}|^2 \delta_{n'_1, n_1} \delta_{n'_2, n_2} \delta_{j', j}. \quad (3.26)$$

Ademais, estas funções formam um conjunto completo e ortogonal em $L^2(\mathbb{R}^2)$.

É útil definir os operadores auto-adjuntos \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 por analogia com as relações clássicas correspondentes (3.10) e (3.11) como segue:

$$\hat{R}^2 = \frac{c^2 \hat{\mathbf{P}}_\perp^2}{(qB)^2}, \quad \hat{R}_c^2 - \hat{R}^2 = -\frac{2c}{|qB|} \left[(l_0 + \mu) \hbar - \epsilon \hat{L}_z \right]. \quad (3.27)$$

Fazendo uso de (3.21), obtemos a média do operador $\hat{R}^2 - \hat{R}_c^2$,

$$\left(\Psi_{n_1, n_2}^{(j)}, \left(\hat{R}^2 - \hat{R}_c^2 \right) \Psi_{n_1, n_2}^{(j)} \right)_\perp |\mathcal{N}|^{-2} = 2(l + \mu) / \gamma.$$

No limite semiclássico, o sinal das médias permite interpretar os estados correspondentes como trajetórias de partículas que circundam e não circundam o solenóide. De modo que, uma órbita que circunda o solenóide para $l \geq 0$ (tipo $j = 1$) e outra que não circunda para $l \leq -1$ (tipo $j = 0$). Esta classificação corresponde à classificação clássica introduzida na seção prévia, verificar eq. (3.11) e Fig. 3.1. As trajetórias com $l = 0, -1$ estão situadas com a maior proximidade possível do solenóide.

Para o caso em que $\mu = 0$ não existe qualquer impacto do AB solenóide sobre o espectro de energia e portanto o espectro de energia é dado pela formula de Landau, $\mathcal{E}_\perp^2 = 2\hbar c |qB| (m + 1/2)$. Para o caso em que $\mu \neq 0$, o espectro (3.21) é escrito como

$$\mathcal{E}_\perp^2 = 2\hbar c |qB| \begin{cases} (m + l + \mu + 1/2), & l \geq 0 \\ (m + 1/2), & l \leq -1 \end{cases}.$$

As soluções da equação de Klein-Gordon completa (3.19) com uma dada energia $\pm \mathcal{E}$ podem ser escritas em termos das autofunções (3.22) como segue:

$$\Psi_{p_0, p_3, m, l}^{(j)}(x) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (cp_0 t + p_3 z) \right] \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad j = 0, 1, \\ cp_0 = \pm \mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{(Mc^2)^2 + (cp_3)^2 + \mathcal{E}_\perp^2}. \quad (3.28)$$

Os estados com $p_0 > 0$ descrevem partículas e estados com $p_0 < 0$ descrevem antipartículas.

Notamos que as soluções $\Psi_{\pm, m, l}^{(j)\text{NR}}$ da equação de Schrödinger com o MSF podem ser obtidas de (3.28) no limite não-relativístico $(cp_3)^2 + \mathcal{E}_\perp^2 \ll (Mc^2)^2$,

$$\begin{aligned}\Psi_{\pm, m, l}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}) &= \exp\left[\mp \frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_{\text{NR}} t\right] \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ \mathcal{E}_{\text{NR}} &= (2M)^{-1} [(p_3)^2 + \mathcal{E}_\perp^2/c^2].\end{aligned}\quad (3.29)$$

Aqui e no que segue os subíndices \pm parametrizam as funções e as energias associadas aos estados de partícula $+$ e antipartícula $-$.

Usando as variáveis de plano-nulo (3.17), temos a seguinte representação

$$\hat{P}_0 + \hat{P}_3 = 2i\hbar \frac{\partial}{\partial x_+}, \quad \hat{P}_0 - \hat{P}_3 = 2i\hbar \frac{\partial}{\partial x_-}. \quad (3.30)$$

É possível encontrar as soluções da equação de Klein-Gordon (3.19), as quais são, simultaneamente, as autofunções da integral de movimento $\hat{P}_0 + \hat{P}_3$ com autovalores λ . Estas soluções apresentam a forma:

$$\begin{aligned}\Psi_{\lambda, m, l}^{(j)}(x) &= \exp\left\{-\frac{i}{2\hbar} \left[\lambda M c x_+ + \left(\frac{M c}{\lambda} + \hbar \tilde{\omega}\right) x_- \right] - i\tilde{\omega} n_1 x_- \right\} \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ (\hat{P}_0 + \hat{P}_3)\Psi_{\lambda, m, l}^{(j)}(x) &= \lambda M c \Psi_{\lambda, m, l}^{(j)}(x),\end{aligned}\quad (3.31)$$

onde $\tilde{\omega}$ é dado por (3.18) e o número quântico λ é associado com as quantidades clássicas correspondentes de (3.15). Para os estados de partículas $\lambda > 0$, ao passo que $\lambda < 0$ para estados associados a antipartículas.

O produto interno associado as variáveis de plano-nulo (sobre a hypersuperfície $x_- = \text{const}$) das soluções de Klein-Gordon é definido como

$$(\Psi, \Psi')_{x_-} = \int \Psi^*(x) (\hat{P}_0 + \hat{P}_3) \Psi'(x) dx_+ dx^1 dx^2, \quad (3.32)$$

consultar [45]. Tal produto interno das soluções $\Psi_{\lambda, m, l}^{(j)}(x)$ pode ser expresso em termos do produto interno sobre o plano- xy ,

$$\left(\Psi_{\lambda, m, l}^{(j)}, \Psi_{\lambda', m', l'}^{(j)'}\right)_{x_-} = 8\pi^2 \frac{\hbar \lambda}{\gamma} \delta(\lambda - \lambda') \left(\Phi_{n_1, n_2}^{(j)}, \Phi_{n'_1, n'_2}^{(j)'}\right)_\perp.$$

3.2.2 Partículas com spin

O comportamento quântico de partículas relativísticas de spin-1/2 no MSF é descrito pelas funções de onda de Dirac Ψ (bispinor) que satisfazem a equação de Dirac com os potenciais eletromagnéticos (1.2),

$$i\hbar \partial_t \Psi = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} = c\gamma^0 \left(\boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{P}} + Mc\right), \quad (3.33)$$

onde $\gamma^\nu = (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma})$, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma^k)$ são matrizes γ . Abaixo, consideremos primeiro a equação de Dirac em $(2+1)$ -dimensões, onde $k = 1, 2$, em seguida consideramos em $(3+1)$ -dimensões, onde $k = 1, 2, 3$.

3.2.2.1 (2 + 1)-dimensões

Em (2 + 1)-dimensões, a função de onda de Dirac Ψ é um spinor dependente de x^0, x^1 , e x^2 , e existem duas representações não-equivalentes para as matrizes γ :

$$\gamma^0 = \sigma^3, \quad \gamma^1 = i\sigma^2, \quad \gamma^2 = -i\sigma^1\zeta, \quad \zeta = \pm 1,$$

onde $\sigma = (\sigma^i)$ são as matrizes de Pauli. Escolhendo as "polarizações" $\zeta = +1$, descrevemos partículas com "spin-up", e escolhendo $\zeta = -1$, descrevemos partículas com "spin-down". Em (2 + 1)-dimensões existem partículas e antipartículas com "spin-up" e "spin-down". Em contraste ao caso em (3 + 1)-dimensões, as partículas e antipartículas em (2 + 1)-dimensão apresentam somente um estado de polarização de spin.

Os estados estacionários da equação de Dirac com o MSF em (2 + 1)-dimensões apresentam a forma

$$\Psi = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(cp_0t)\right] \psi_{p_0}^{(\zeta)}(x_\perp), \quad \zeta = \pm 1, \quad x_\perp = (0, x^1, x^2), \quad (3.34)$$

onde os spinores $\psi_{p_0}^{(\zeta)}(x_\perp)$ estão submetidos as equações:

$$\left(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{P}}_\perp + Mc\sigma^3\right) \psi_{p_0}^{(1)}(x_\perp) = p_0\psi_{p_0}^{(1)}(x_\perp), \quad \hat{\mathbf{P}}_\perp = \left(\hat{P}_1, \hat{P}_2\right), \quad (3.35)$$

$$\left(\sigma^1\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{P}}_\perp\sigma^1 + Mc\sigma^3\right) \psi_{p_0}^{(-1)}(x_\perp) = p_0\psi_{p_0}^{(-1)}(x_\perp). \quad (3.36)$$

Notamos que $cp_0 = \mathcal{E} > 0$ para os estados de partículas, e $cp_0 = -\mathcal{E} < 0$ para os estados de antipartículas.

É possível observar que

$$\psi_{p_0}^{(-1)}(x_\perp) = \sigma^2\psi_{-p_0}^{(1)}(x_\perp). \quad (3.37)$$

Esta é a razão pela qual vamos considerar somente o caso $\zeta = 1$ no que segue. Em tal caso, uma hamiltoniana auto-adjunta \hat{H}^ϑ apresenta a forma

$$\hat{H}^\vartheta = c\left(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{P}}_\perp + Mc\sigma^3\right). \quad (3.38)$$

No caso com spin, seu domínio D_H^ϑ depende essencialmente do sinal $\vartheta = \text{sign}\Phi = \pm 1$ do fluxo magnético, este é o motivo pelo qual a Hamiltonian é parametrizada por ϑ .

Lembramos que todas as extensões auto-adjuntas da Hamiltoniana de Dirac em 2 + 1 dimensões no MSF foram construídas em [31, 32, 35], consultar, também [30]. Adicionalmente, considerando um caso regularizado do solenóide de raio finito, foi demonstrado que o limite em que o raio tende a zero gera duas extensões auto-adjuntas (dependentes de ϑ), com domínios D_H^ϑ . Em contraste ao caso de partícula de spin-zero, ambos os domínios D_H^ϑ envolvem funções radiais do tipo irregular porém ainda do tipo quadrado-integrável que não se anula quando $r \rightarrow 0$. Efetivamente, significa que qualquer função de onda é completamente determinada para $r > 0$. Seu valor no ponto $r = 0$ pode ser inserido arbitrariamente. Abaixo, representamos soluções das equações (3.35) para ambos os valores de ϑ nos domínios D_H^ϑ .

Algumas observações relevantes devem ser destacadas.

1. No caso de partículas com spin, alguns resultados essencialmente dependem tanto da mantissa do fluxo magnético μ quanto da direção do fluxo ϑ . A última dependência surge devido à presença do spin e é específico somente para os estados com funções radiais do tipo irregular. Em tais estados existe uma interação de contato superforte entre o momento magnético da partícula e o fluxo do

solenóide. Efetivamente esta interação depende de ϑ podendo ser repulsiva ou atrativa. Vale ressaltar que as funções radiais do tipo irregular surgem no caso atrativo.

2. No caso com spin-zero (e ainda no caso com spin) em estados com funções radiais do tipo regular, existe uma certa invariância de translação com respeito a mudança de número inteiro l_0 (consultar (3.20)) por um inteiro arbitrário k . Tal invariância significa que a física depende somente da mantissa do fluxo magnético μ .

3. Em estados com funções de onda do tipo irregular, não podemos afirmar que as partículas não penetram o solenóide AB, tal que uma interpretação simplificada do efeito AB não está disponível. Entretanto, mesmo neste caso, um potencial vetor gera efeitos observáveis em uma topologia não-trivial e isto é efetivamente uma manifestação do efeito AB para tais estados.

Em (2+1)-dimensões, o operador momento angular total $\hat{J} = -i\hbar\partial_\varphi + \hbar\sigma^3/2$, que é uma redução dimensional do operador \hat{J}_z em (3+1)-dimensões, é auto-adjunto sobre o domínio D_H^ϑ e comuta com \hat{H}^ϑ . Existem autovetores comuns $\psi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho)$ dos operadores \hat{H}^ϑ e \hat{J} ,

$$\begin{aligned}\hat{H}^\vartheta\psi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= cp_0\psi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad cp_0 = \pm\mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \sqrt{(Mc^2)^2 + \mathcal{E}_\perp^2}, \\ \hat{J}\psi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= J\psi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad J = \epsilon\hbar(l_0 - l + 1/2), \quad j = 1, 2.\end{aligned}\tag{3.39}$$

É conveniente usar a seguinte representação

$$\begin{aligned}\psi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \left[\sigma^3 \left(p_0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{P}}_\perp \right) + Mc \right] u_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ u_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sum_{\sigma=\pm 1} c_\sigma \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) v_\sigma,\end{aligned}\tag{3.40}$$

onde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\tag{3.41}$$

e c_σ são algumas constantes. As colunas $u_{n_1, n_2}^{(j)}$ são soluções do problema de autovalor

$$c^2 \left(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{P}}_\perp \right)^2 u_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) = \mathcal{E}_\perp^2 u_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho).\tag{3.42}$$

Notamos que a relação $\left(\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{P}}_\perp \right)^2 = \hat{\mathbf{P}}_\perp^2 - \epsilon\hbar c^{-1} |qB| \sigma^3$, gera uma relação para o espectro de energia para o caso de spin-zero (3.21).

As funções $\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho)$ apresentam a forma

$$\begin{aligned}\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(0)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp \{ i\epsilon [l_0 - l + (1 - \epsilon\sigma)/2] \varphi \} I_{n_2, n_1}(\rho), \\ n_1 &= m, \quad n_2 = m - \tilde{l} + (1 - \epsilon\sigma)/2 - \mu, \quad \tilde{l} = l - (1 + \epsilon)(1 + \sigma)/2, \quad -\infty < \tilde{l} \leq -(1 + \vartheta\epsilon)/2; \\ \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(1)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp \{ i\epsilon [l_0 - l + (1 - \epsilon\sigma)/2] \varphi + \pi [l - (1 - \epsilon)(1 + \sigma)/4] \} I_{n_1, n_2}(\rho), \\ n_1 &= m + \tilde{l} - (1 - \epsilon\sigma)/2 + \mu, \quad n_2 = m, \quad (1 - \vartheta\epsilon)/2 \leq \tilde{l} < \infty.\end{aligned}\tag{3.43}$$

O espectro de energia das Hamiltonianas auto-adjuntas (3.38) pode ser representado por meio dos autovalores \mathcal{E}_\perp^2 como

$$\mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2 = 2\hbar c |qB| [n_1 + (1 - \sigma\epsilon)/2],\tag{3.44}$$

onde, dependendo de ϑ e ϵ , o número quântico n_1 assume seus valores possíveis de acordo com (3.43). No caso geral, os autovalores \mathcal{E} da hamiltonian \hat{H}^ϑ são expressos por \mathcal{E}_\perp^2 para $\sigma = +1$ ou $\sigma = -1$,

de acordo com a eq. (3.39), isto ocorre devido o fato de que $\mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2$ são parametrizados pelo subíndice σ . As funções radiais do tipo irregular na origem surgem no domínio D_H^+ para $\tilde{l} = 0$ e $\sigma = -1$, e no domínio D_H^- para $\tilde{l} = 0$ e $\sigma = +1$.

Notamos que dependendo de $\vartheta\epsilon$, os níveis de energia associados a estados que apresentam funções radiais do tipo irregular coincidem ou diferem dos níveis de Landau. Em qualquer caso a diferença sempre depende apenas de μ . Tal como no caso de partícula de spin-zero, as energias dos estados com $j = 1$ diferem dos níveis de Landau, ao passo que as energias com $j = 0$ coincidem com os níveis de Landau. Caso $\mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2 \neq 0$, o conjunto completo de autovetores $\psi_{n_1, n_2}^{(j)}$ é dado pela eq. (3.40), onde as constantes c_σ são arbitrárias, por exemplo, $c_{+1} \neq 0$ ou $c_{-1} \neq 0$. Entretanto, caso $\mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2 = 0$, a completeza dos autovetores implica em uma escolha especial de c_σ , a saber: $c_{-1} \neq 0$ se $\epsilon = -1$ e $c_{+1} \neq 0$ se $\epsilon = +1$. Neste caso soluções com energia negativa (antipartículas com $cp_0 = -M$) são possíveis caso $\epsilon = -1$ e somente as soluções com energia positiva (partículas com $cp_0 = +M$) são possíveis caso $\epsilon = +1$. Estas soluções coincidem com os spinores correspondentes $u_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho)$ a menos de uma constante de normalização. Esta é uma manifestação da assimetria do espectro de energia das partículas de Dirac em $2 + 1$ -dimensões em um campo magnético uniforme. Verificamos que esta assimetria surge na presença do campo de AB. Para as partículas, selecionamos $c_{+1} \neq 0$, $c_{-1} = 0$, então o espectro de energia delas é $\mathcal{E} = \sqrt{(Mc^2)^2 + \mathcal{E}_{\perp(+1)}^2}$ e para as antipartículas $c_{+1} = 0$, $c_{-1} \neq 0$, de modo que o espectro de energia associado é $\mathcal{E} = \sqrt{(Mc^2)^2 + \mathcal{E}_{\perp(-1)}^2}$.

Em caso de definirmos o produto interno de spinores $\psi(\varphi, \rho)$ e $\psi'(\varphi, \rho)$ como

$$(\psi, \psi')_D = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \psi^\dagger(\varphi, \rho) \psi'(\varphi, \rho), \quad (3.45)$$

então o produto interno dos autovetores $\psi_{n_1, n_2}^{(j)}$ apresenta a forma

$$\left(\psi_{n'_1, n'_2}^{(j')}, \psi_{n_1, n_2}^{(j)} \right)_D = 2Mc |c_\sigma|^2 (\sigma p_0 + Mc) \left(\Phi_{n'_1, n'_2, \sigma}^{(j')}, \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)} \right)_\perp, \quad (3.46)$$

onde o produto interno $(,)_\perp$ é dado pela eq. (3.26). Com relação ao produto interno introduzido, os autovetores (3.40) formam conjunto ortogonal para qualquer ϑ .

Tal como no caso de spin-zero, definimos os operadores auto-adjuntos \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 (integrais de movimento) por analogia com as relações clássicas correspondentes (3.10) e (3.11):

$$\hat{R}^2 = c^2 \left(\sigma \hat{\mathbf{P}}_\perp \right)^2 (qB)^{-2}, \quad \hat{R}_c^2 - \hat{R}^2 = -2c \left[(l_0 + \mu) \hbar - \epsilon \hat{J} \right] |qB|^{-1}. \quad (3.47)$$

Por meio dos autovetores (3.40), obtemos as seguintes soluções da equação de Dirac com uma dada energia $cp_0 = \pm \mathcal{E}$, em $(2 + 1)$ -dimensões:

$$\Psi_{p_0, m, \tilde{l}}^{(j)}(t, \mathbf{r}) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (cp_0 t) \right] \psi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho). \quad (3.48)$$

É conhecido que o efeito AB em física da matéria condensada, em particular, em física planar, é importante no caso não-relativístico, $\mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2 \ll Mc^2$. Por outro lado, a equação de Dirac sem massa (que é, em um certo sentido, equivalente ao caso ultrarelativístico) em $(2 + 1)$ -dimensões descreve, sob certas condições, a física associada ao grafeno.

Acreditamos que o movimento não-relativístico é descrito pela equação de Pauli correspondente em $(2 + 1)$ -dimensões,

$$i\hbar \partial_t \Psi_\pm = \pm \hat{H}_\pm^{\text{NR}} \Psi_\pm, \quad \hat{H}_\pm^{\text{NR}} = \left(\sigma \hat{\mathbf{P}}_\perp \right)^2 / 2M. \quad (3.49)$$

As soluções de tal equação podem ser obtidas de (3.48) no limite não-relativístico. Estas soluções apresentam somente uma componente, considerando que em $(2 + 1)$ -dimensões existe somente uma polarização de spin. Consideremos, por exemplo, partículas de spin-up ($\zeta = +1$). Então obtemos de (3.40):

$$\Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{up}}(t, \mathbf{r}) = \exp \left[\mp \frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_{(\pm)}^{\text{NR}} t \right] \Phi_{n_1, n_2, \pm 1}^{(j)}(\varphi, \rho) v_{\pm 1}, \quad (3.50)$$

onde $\mathcal{E}_{(\pm)}^{\text{NR}} = \mathcal{E}_{\perp(\pm 1)}/2Mc^2$. O produto interno correspondente destas soluções é escrito

$$\left(\Psi_{\pm, m', \tilde{l}'}^{(j')\text{up}}, \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{up}} \right)_D = \left(\Phi_{n'_1, n'_2, \pm 1}^{(j')}, \Phi_{n_1, n_2, \pm 1}^{(j)} \right)_{\perp}. \quad (3.51)$$

Por meio da relação (3.37), obtemos soluções que descrevem partículas de spin-down :

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{down}}(t, \mathbf{r}) &= \exp \left[\mp \frac{i}{\hbar} \mathcal{E}_{(\mp)}^{\text{NR}} t \right] \Phi_{n_1, n_2, \mp 1}^{(j)}(\varphi, \rho) v_{\mp 1}, \\ \left(\Psi_{\pm, m', \tilde{l}'}^{(j')\text{down}}, \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{down}} \right)_D &= \left(\Phi_{n'_1, n'_2, \mp 1}^{(j')}, \Phi_{n_1, n_2, \mp 1}^{(j)} \right)_{\perp}. \end{aligned} \quad (3.52)$$

É válido fazer a seguinte observação: Usualmente, no limite não-relativístico, as soluções com energia negativa (aquelas que após a operação de conjugação de cargas representam funções de onda de partículas com carga oposta $-q$, e que são, efetivamente, antipartículas) da equação de Dirac não são consideradas. É suposto que todas as informações sobre o movimento quântico das antipartículas podem ser extraídas do movimento da partícula. A última afirmação não é válida no caso sob consideração (para a equação de Dirac com o MSF em $(2 + 1)$ -dimensões). Aqui o espectro de energia para as partículas e antipartículas são inteiramente diferentes. Esta assimetria foi a razão pela qual representamos explicitamente, mesmo no limite não-relativístico, as soluções com energia negativa $\Psi_{-, m, \tilde{l}}^{(j)\text{up}}(t, \mathbf{r})$ e $\Psi_{-, m, \tilde{l}}^{(j)\text{down}}(t, \mathbf{r})$, que correspondem as antipartículas de spin-up e spin-down.

Para o caso de partículas e antipartículas não-massivas $\zeta = +1$ (no que segue, consideramos todas as partículas como férmions) em $(2 + 1)$ -dimensões, a Hamiltoniana de Dirac auto-adjunta é $\hat{H}^{\vartheta} = c\sigma\hat{\mathbf{P}}_{\perp}$. Seus autovalores são $cp_0 = \pm\mathcal{E}$, onde $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\perp(-\vartheta)}$ (os autovalores $\mathcal{E}_{\perp(\sigma)}$ são dados pela eq. (3.44)). Os autovetores correspondentes de \hat{H}^{ϑ} apresentam a forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j, +1)}(t, \mathbf{r}) &= \exp \left[\mp \frac{i}{\hbar} (\mathcal{E}t) \right] u_{\pm, n_1, n_2}^{(j, +1)}(\varphi, \rho), \\ u_{\pm, n_1, n_2}^{(0, +1)}(\varphi, \rho) &= \begin{pmatrix} \Phi_{n_1 + (1+\epsilon)/2, n_2, +1}^{(0)}(\varphi, \rho) \\ \pm i\epsilon \Phi_{n_1 + (1-\epsilon)/2, n_2, -1}^{(0)}(\varphi, \rho) \end{pmatrix}, \\ u_{\pm, n_1, n_2}^{(1, +1)}(\varphi, \rho) &= \begin{pmatrix} \Phi_{n_1, n_2, +1}^{(1)}(\varphi, \rho) \\ \mp i\epsilon \Phi_{n_1, n_2, -1}^{(1)}(\varphi, \rho) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E} \neq 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

onde $\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}$ são dados pelas eqs. (3.43). O produto interno de tais soluções é

$$\left(\Psi_{\pm, m', \tilde{l}'}^{(j', +1)}, \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j, +1)} \right)_D = \sum_{\sigma=\pm 1} \left(\Phi_{n'_1 + (1-j')(1+\sigma\epsilon)/2, n'_2, \sigma}^{(j')}, \Phi_{n_1 + (1-j)(1+\sigma\epsilon)/2, n_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp}. \quad (3.54)$$

Adicionalmente, existem soluções de modo-zero não-triviais ($\mathcal{E} = 0$):

$$\begin{aligned} u_{0, n_1, n_2}^{(0, +1)}(\varphi, \rho) &= c_{\epsilon} \Phi_{n_1, n_2, \epsilon}^{(0)}(\varphi, \rho) \Big|_{m=0} v_{\epsilon}, \\ \left(u_{0, n'_1, n'_2}^{(0, +1)}, u_{0, n_1, n_2}^{(0, +1)} \right)_D &= \left(\Phi_{n'_1, n'_2, \epsilon'}^{(0)}, \Phi_{n_1, n_2, \epsilon}^{(0)} \right)_{\perp} \Big|_{m=0}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Como segue de (3.37), para partículas de massa nula $\zeta = -1$ os autovetores correspondentes podem ser representados como

$$\begin{aligned}\Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j, -1)}(t, \mathbf{r}) &= \exp\left[\mp \frac{i}{\hbar} \mathcal{E}t\right] \sigma^2 u_{\mp, n_1, n_2}^{(j, +1)}(\varphi, \rho), \\ u_{0, n_1, n_2}^{(0, -1)}(\varphi, \rho) &= \sigma^2 u_{0, n_1, n_2}^{(0, +1)}(\varphi, \rho).\end{aligned}\quad (3.56)$$

Os produtos interno destas soluções coincidem com os produtos interno das soluções $\Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j, +1)}$ dados pela eq. (3.54):

$$\left(\Psi_{\pm, m', \tilde{l}'}^{(j', -1)}, \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j, -1)}\right)_D = \left(\Psi_{\pm, m', \tilde{l}'}^{(j', +1)}, \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j, +1)}\right)_D, \quad \left(u_{0, n'_1, n'_2}^{(0, -1)}, u_{0, n_1, n_2}^{(0, -1)}\right)_D = \left(u_{0, n'_1, n'_2}^{(0, +1)}, u_{0, n_1, n_2}^{(0, +1)}\right)_D.$$

3.2.2.2 (3 + 1)-dimensões

Neste contexto consideramos as Hamiltonianas de Dirac auto-adjuntas definidas no espaço $D_H^{\mathcal{J}}$. Estes domínios são extensões triviais dos domínios correspondentes mencionados no caso de (2 + 1)-dimensões, esta é a razão pela qual devemos manter nestes domínios a mesma notação.

Devemos introduzir os operadores de projeção $\hat{P}_{(\pm)}$ e os dois tipos de spinor de Dirac $\Psi_{(\pm)}$,

$$\hat{P}_{(\pm)} = (1 \pm \alpha^3) / 2, \quad (\hat{P}_{(\pm)})^\dagger = \hat{P}_{(\pm)}, \quad (\hat{P}_{(\pm)})^2 = \hat{P}_{(\pm)}, \quad \hat{P}_{(+)}\hat{P}_{(-)} = 0, \quad \hat{P}_{(+)} + \hat{P}_{(-)} = \mathbb{I},$$

onde \mathbb{I} é uma matriz unidade 4×4 , tal que qualquer Ψ pode ser representado como $\Psi = \Psi_{(+)} + \Psi_{(-)}$, $\Psi_{(\pm)} = \hat{P}_{(\pm)}\Psi$. Então a equação de Dirac (3.33) é reduzida ao seguinte conjunto de equações

$$\begin{aligned}(\hat{P}_0 + \hat{P}_3)\Psi_{(+)} &= \hat{Q}\Psi_{(-)}, \quad (\hat{P}_0 - \hat{P}_3)\Psi_{(-)} = \hat{Q}\Psi_{(+)}; \\ \hat{Q} &= (\boldsymbol{\alpha}_\perp \mathbf{P}_\perp) + Mc\gamma^0, \quad \boldsymbol{\alpha}_\perp = (\alpha^1, \alpha^2, 0), \quad \hat{\mathbf{P}}_\perp = (\hat{P}^1, \hat{P}^2, 0),\end{aligned}\quad (3.57)$$

onde $\alpha^i = \gamma^0\gamma^i$. Devido à simetria axial do problema, é conveniente usar a seguinte representação para as matrizes γ (consultar [25]),

$$\gamma^0 = \text{diag}(\sigma^3, -\sigma^3), \quad \gamma^1 = \text{diag}(i\sigma^2, -i\sigma^2), \quad \gamma^2 = \text{diag}(-i\sigma^1, i\sigma^1), \quad \gamma^3 = \text{antidiag}(-I, I), \quad (3.58)$$

onde I é uma matriz unidade 2×2 . Não obstante, as expressões para α^3 , Σ_z , e γ^5 são as mesmas na representação (3.58) e na representação padrão.

É possível verificar que

$$\hat{Q}^2 = M^2c^2 + \hat{Q}_\perp^2, \quad \hat{Q}_\perp^2 = \hat{\mathbf{P}}_\perp^2 - \epsilon\hbar c^{-1}|qB|\Sigma_z, \quad (3.59)$$

onde $\Sigma_z = \text{diag}(\sigma^3, \sigma^3)$. A quantidade $c^2\hat{Q}_\perp^2$ é o quadrado da energia cinética da partícula com spin. No MSF, os operadores $\hat{P}_0 + \hat{P}_3$, $\hat{P}_0 - \hat{P}_3$, e \hat{Q} comutam mutuamente, tal que (como segue de (3.57)) os bispinores $\Psi_{(\pm)}$ satisfazem às mesmas equações:

$$(\hat{P}_0^2 - \hat{P}_3^2 - \hat{Q}^2)\Psi_{(\pm)}(x) = 0. \quad (3.60)$$

Representando $\Psi_{(\pm)}$ em termos de spinores ψ e χ ,

$$\Psi_{(-)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi \\ -\sigma^3\psi \end{pmatrix}, \quad \Psi_{(+)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi \\ \sigma^3\chi \end{pmatrix}, \quad (3.61)$$

encontramos as seguintes equações para os spinores:

$$\left[\hat{P}_0^2 - \hat{P}_3^2 - \left(\hat{\mathbf{P}}_\perp^2 - \epsilon |qB| \frac{\hbar}{c} \sigma^3 \right) - M^2 c^2 \right] \psi(x) = 0, \quad (3.62)$$

$$(\hat{P}_0 + \hat{P}_3)\chi(x) = \left(\sigma^3 \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{P}}_\perp + Mc \right) \psi(x). \quad (3.63)$$

Notamos que ambas as soluções $\Psi_{(-)}$ e $\Psi_{(+)}$ pertencem a um conjunto completo de funções sobre a hipersuperfície $t = \text{const}$.

O produto interno dos bispinores de Dirac sobre a hipersuperfície de plano-nulo $x_- = \text{const}$ apresenta a forma:

$$(\Psi, \Psi')_{x_-} = \int \Psi^\dagger \hat{\mathcal{P}}_{(-)} \Psi' dx_+ dx^1 dx^2 = \int \Psi_{(-)}^\dagger \Psi'_{(-)} dx_+ dx^1 dx^2, \quad (3.64)$$

consultar [45]. Este produto interno pode ser expresso apenas em termos das componentes $\Psi_{(-)}$. Simultaneamente, um conjunto completo de funções sobre a hipersuperfície $x_- = \text{const}$ consiste apenas de funções $\Psi_{(-)}$.

No caso sob consideração, os operadores \hat{P}_0 , \hat{P}_3 , $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \Sigma_z/2$ (\hat{J}_z é a componente z do operador momento angular total), e o operador de spin \hat{S}_z (componente z do pseudovetor de polarização)

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} \left(\hat{H} \Sigma_z + \Sigma_z \hat{H} \right) = \gamma^0 \Sigma_z M c^2 - \gamma^5 c \hat{P}^3, \quad (3.65)$$

são integrais de movimento que comutam entre si (todos estes operadores comutam com a Hamiltoniana \hat{H}^θ) [31, 32]. Adicionalmente, o conjunto \hat{P}_0 , \hat{P}_3 , \hat{J}_z , Σ_z , e $\hat{\mathcal{Q}}_\perp^2$ representam operadores que comutam entre si, e que, simultaneamente, comutam com α^3 . Este fato permite encontrar soluções $\Psi_{(-)}$ que são autovetores para o último conjunto. Para este fim deve-se submeter os spinores ψ às seguintes equações:

$$\begin{aligned} (\hat{P}_0 + \hat{P}_3) \psi(x) &= \lambda M c \psi(x), \quad \hat{J}_z \psi(x) = J_z \psi(x), \\ c^2 (\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{P}}_\perp)^2 \psi(x) &= \mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2 \psi(x), \quad \sigma^3 \psi(x) = \sigma \psi(x), \end{aligned} \quad (3.66)$$

onde $\mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2$ é dado por (3.44). Então obtemos para $\Psi_{(-)}$:

$$\begin{aligned} (\hat{P}_0 + \hat{P}_3) \Psi_{(-)} &= \lambda M c \Psi_{(-)}, \quad \hat{J}_z \Psi_{(-)} = J_z \Psi_{(-)}, \quad J_z = \epsilon \hbar (l_0 - l + 1/2), \\ c^2 \hat{\mathcal{Q}}_\perp^2 \Psi_{(-)} &= \mathcal{E}_{\perp(\sigma)}^2 \Psi_{(-)}, \quad \Sigma_z \Psi_{(-)} = \sigma \Psi_{(-)}, \quad \sigma = \pm 1. \end{aligned}$$

Em vista das equações (3.60) e (3.62), encontramos um conjunto completo de soluções $\Psi_{(-)}$ na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{(-)\lambda, m, \tilde{l}, \sigma}^{(j)} &= \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left[\lambda M c x_+ + \left(\frac{M c}{\lambda} + \hbar \tilde{\omega} (1 - \sigma \epsilon) \right) x_- \right] \right. \\ &\quad \left. - i \tilde{\omega} n_1 x_- \right\} \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) \begin{pmatrix} v_\sigma \\ -\sigma v_\sigma \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde $\tilde{\omega}$ é dado por (3.18), v_σ pelas eqs. (3.41), $\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}$ por (3.43), com $\lambda > 0$ para partículas e $\lambda < 0$ para antipartículas. Como pode ser verificado, o número quântico λ é associado com as quantidades clássicas correspondentes λ de (3.15).

Notamos que a integral de movimento de spin \hat{S}_z não comuta com α^3 , de modo que as soluções (3.67) não são autovetores de \hat{S}_z . É possível usar o operador Σ_z alternativamente a \hat{S}_z para caracterizar a polarização de spin. Não obstante o fato de que $[\Sigma_z, \hat{H}] \neq 0$ e, portanto, Σ_z não é uma integral de movimento com respeito a evolução temporal t , Σ_z é uma integral de movimento com respeito a evolução no "tempo" de plano-nulo x_- . Este é o motivo pelo qual a "polarização de spin" σ das soluções (3.67) é conservada com o tempo x_- . Considerando tudo isto, é possível calcular o produto interno de plano-nulo (3.64) das soluções (3.67):

$$\left(\Psi_{(-)\lambda', m', \tilde{l}, \sigma'}^{(j')} \right)_{x_-} \Psi_{(-)\lambda, m, \tilde{l}, \sigma}^{(j)} = \frac{(4\pi)^2 \hbar}{\gamma M c} \delta_{\sigma', \sigma} \delta(\lambda' - \lambda) \left(\Phi_{n'_1, n'_2, \sigma}^{(j')} \right)_{\perp} \left(\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp}, \quad (3.68)$$

onde o produto interno $(\cdot)_{\perp}$ é dado pela eq. (3.26).

É conveniente considerar o movimento quântico de partículas com spin no limite não-relativístico. Para este fim é mais conveniente, como alternativa às soluções (3.67), fazer uso de outro conjunto de soluções $\Psi_s(x)$,

$$\begin{aligned} \Psi_s(x) &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (cp_0 t + p_3 z) \right] \Psi_s(x_{\perp}), \quad s = \pm 1, \\ \Psi_s(x_{\perp}) &= N \begin{pmatrix} \left[1 + \frac{p^3 + s\tilde{M}}{M} \right] \psi_{p_0, s}(x_{\perp}) \\ \left[-1 + \frac{p^3 + s\tilde{M}}{M} \right] \psi_{p_0, s}(x_{\perp}) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde $\tilde{M} = \sqrt{M^2 + (p_3)^2}$. Estas soluções são autovetores de integrais de movimento que comutam mutuamente \hat{P}_0 , \hat{P}_3 , \hat{J}_z , e \hat{S}_z ,

$$\begin{aligned} \hat{P}_0 \Psi_s(x) &= p_0 \Psi_s(x), \quad \hat{P}_3 \Psi_s(x) = p_3 \Psi_s(x), \\ \hat{J}_z \Psi_s(x) &= J_z \Psi_s(x), \quad J_z = \epsilon \hbar (l_0 - l + 1/2), \quad S_z \Psi_s = s \tilde{M} \Psi_s. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Os spinores $\psi_{p_0, s}(x_{\perp})$ satisfazem a equação

$$\left(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{P}_{\perp} + s \tilde{M} c \boldsymbol{\sigma}^3 \right) \psi_{p_0, s}(x_{\perp}) = p_0 \psi_{p_0, s}(x_{\perp}). \quad (3.71)$$

É possível verificar que fixados s e p^3 , a eq. (3.71) é similar à eq. (3.35) em $(2+1)$ -dimensões. Assim, suas soluções serão utilizadas no que segue.

No limite não-relativístico, o operador de spin \hat{S}_z é reduzido a $\hat{S}_z^{\text{NR}} = \gamma^0 \Sigma_z M c^2$ e $\tilde{M} = M$. Portanto para $s = +1$ a eq. (3.71) coincide com a eq. (3.35). Observamos que $\psi_{p_0, -1}(x_{\perp}) = \sigma^3 \psi_{-p_0, 1}(x_{\perp})$. Como um resultado, obtemos as funções de onda de partículas não-relativísticas de spin da eq. (3.69):

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm, p_3, m, \tilde{l}, s}^{(j)\text{NR}}(x) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\pm \frac{(p_3)^2 t}{2M} + p_3 z \right] \right\} \Psi_{\pm, m, \tilde{l}, s}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}), \\ \Psi_{\pm, m, \tilde{l}, +1}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{up}}(t, \mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\pm, m, \tilde{l}, -1}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{down}}(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde os spinores $\Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{up}}$ e $\Psi_{\pm, m, \tilde{l}}^{(j)\text{down}}$ são respectivamente (3.50) e (3.52) soluções da equação de Pauli em $(2+1)$ -dimensões com MSF. Portanto, as funções de onda de partículas (antipartículas) não-relativísticas com spin em $(3+1)$ -dimensões satisfazem a equação não-relativística de Dirac com a Hamiltoniana $\hat{H}_{\pm}^{\text{NR}} = \hat{Q}_{\pm}^2 / 2M$.

3.3 Estados coerentes instantâneos sobre o plano- xy

3.3.1 Partículas de spin-zero

A exemplo do capítulo anterior, é conveniente introduzir os operadores \hat{a}_1 , \hat{a}_2 , e \hat{a}_1^\dagger , \hat{a}_2^\dagger que correspondem as quantidades clássicas a_1 , a_2 , e a_1^* , a_2^* ,

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 &= \frac{i\hat{P}_1 - \epsilon\hat{P}_2}{\sqrt{2\hbar Mc \varkappa}}, & \hat{a}_2 &= \frac{Mc \varkappa (x - i\epsilon y) - i\hat{P}_1 - \epsilon\hat{P}_2}{\sqrt{2\hbar Mc \varkappa}}; \\ \hat{a}_1^\dagger &= -\frac{i\hat{P}_1 + \epsilon\hat{P}_2}{\sqrt{2\hbar Mc \varkappa}}, & \hat{a}_2^\dagger &= \frac{Mc \varkappa (x + i\epsilon y) + i\hat{P}_1 - \epsilon\hat{P}_2}{\sqrt{2\hbar Mc \varkappa}}.\end{aligned}\quad (3.73)$$

Deve ser notado que os operadores \hat{P}_1 e \hat{P}_2 são operadores simétricos porém não são operadores auto-adjuntos sobre o domínio $D_{P_\perp^2}$. Isto ocorre, uma vez que não podemos considerar \hat{a}_1^\dagger e \hat{a}_2^\dagger como adjuntos dos operadores \hat{a}_1 e \hat{a}_2 respectivamente. Não obstante, os operadores definidos em (3.73) realizam um importante papel em construções posteriores.

Usando as propriedades da funções de Laguerre, é possível encontrar a ação destes operadores sobre as funções (3.22),

$$\begin{aligned}\hat{a}_1 \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_1} \Phi_{n_1-1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), & \hat{a}_1^\dagger \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_1 + 1} \Phi_{n_1+1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ \hat{a}_2 \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_2} \Phi_{n_1, n_2-1}^{(j)}(\varphi, \rho), & \hat{a}_2^\dagger \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_2 + 1} \Phi_{n_1, n_2+1}^{(j)}(\varphi, \rho),\end{aligned}\quad (3.74)$$

onde os valores possíveis de n_1 e n_2 dependem de m, l , e j de acordo com (3.22) e as funções $\Phi_{n_1+s_1, n_2+s_2}^{(j)}$ para $s_1 = 0, \pm 1$ e $s_2 = 0, \pm 1$ são definidos como segue:

$$\begin{aligned}\Phi_{n_1+s_1, n_2+s_2}^{(0)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp[i\epsilon(l_0 - l - s_1 + s_2)\varphi] I_{n_2+s_2, n_1+s_1}(\rho), \\ \Phi_{n_1+s_1, n_2+s_2}^{(1)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp\{i\epsilon[(l_0 - l - s_1 + s_2)\varphi + \pi(l + s_1 - s_2)]\} I_{n_1+s_1, n_2+s_2}(\rho).\end{aligned}$$

As novas funções $\Phi_{n_1, n_2-1}^{(0)}(\varphi, \rho)$ com $n_2 = m + 1 - \mu$ e $\Phi_{n_1-1, n_2}^{(1)}(\varphi, \rho)$ com $n_1 = m + \mu$, são do tipo irregular quando $r \rightarrow 0$, estas não foram definidas pelas eqs. (3.22). Adicionalmente, para $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$, deve-se considerar que

$$\hat{a}_1 \Phi_{0, -l-\mu}^{(0)}(\varphi, \rho) = 0, \quad \hat{a}_2 \Phi_{l+\mu, 0}^{(1)}(\varphi, \rho) = 0,$$

o que permite-nos interpretar $\Phi_{0, -l-\mu}^{(0)}(\varphi, \rho)$ e $\Phi_{l+\mu, 0}^{(1)}(\varphi, \rho)$ como estados de vácuo.

Os comutadores formais entre os operadores $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1$, e $\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2$ apresentam a forma:

$$\left[\hat{a}_1, \hat{a}_1^\dagger\right] = 1 + f, \quad \left[\hat{a}_2, \hat{a}_2^\dagger\right] = 1 - f, \quad \left[\hat{a}_1, \hat{a}_2\right] = f, \quad \left[\hat{a}_1, \hat{a}_2^\dagger\right] = 0, \quad (3.75)$$

onde f é uma função singular $f = \Phi(\pi Br)^{-1} \delta(r) = 2(l_0 + \mu)\delta(\rho)$. Uma vez que os estados provenientes do domínio $D_{P_\perp^2}$ descrevem partículas fora do solenóide AB, podemos considerar apenas as funções de $D_{P_\perp^2}$ que não são nulas somente para $r > 0$. Em tal caso, a função f gera contribuição nula e pode ser negligenciada. Por sua vez, isto significa que, sobre tal domínio, $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger$, e \hat{a}_1, \hat{a}_2 comportam-se como operadores de criação e aniquilação². Portanto os operadores \hat{R}^2 , \hat{R}_c^2 , $x - i\epsilon y$,

²Enfatizamos que a função f desaparece em cálculos diretos (por meio de (3.74)) de qualquer elemento de matriz com respeito aos estados (3.22) mesmo se o ponto $r = 0$ não é excluído. Obviamente isto é consequência do fato de que as funções (3.22) são regulares na origem.

$\hat{\mathbf{P}}_{\perp}^2$ e \hat{L}_z podem ser expressos em termos dos operadores $\hat{a}_1^{\dagger}, \hat{a}_1$, e $\hat{a}_2^{\dagger}, \hat{a}_2$ como segue:

$$\begin{aligned}\hat{R}^2 &= (2\hat{N}_1 + 1) \gamma^{-1}, \quad \hat{R}_c^2 = (2\hat{N}_2 + 1) \gamma^{-1}, \quad (x - i\epsilon y) = \sqrt{2\gamma^{-1}} (\hat{a}_2 - \hat{a}_1^{\dagger}), \\ \hat{\mathbf{P}}_{\perp}^2 &= 2 \frac{|qB|\hbar}{c} (\hat{N}_1 + 1/2), \quad -\frac{\epsilon}{\hbar} \hat{L}_z + l_0 + \mu = (\hat{N}_1 - \hat{N}_2), \quad \hat{N}_s = \hat{a}_s^{\dagger} \hat{a}_s, \quad s = 1, 2.\end{aligned}\quad (3.76)$$

É conveniente introduzir os estados coerentes instantâneos (ICS) $\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}$ sobre o plano- xy como segue:

$$\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) = \sum_l \Phi_{z_1, z_2}^{(j)l}(\varphi, \rho), \quad \Phi_{z_1, z_2}^{(j)l}(\varphi, \rho) = \sum_m \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \Phi_{n_1, n_2}^{(j)}(\varphi, \rho)}{\sqrt{\Gamma(1+n_1)\Gamma(1+n_2)}}, \quad (3.77)$$

onde as funções $\Phi_{n_1, n_2}^{(j)}$ são definidas pela eq. (2.10), z_1 e z_2 são parâmetros complexos, e os valores possíveis de n_1 e n_2 dependem de m, l , e j de acordo com a eq. (3.22), além de assumirmos que $\mathcal{N} = 1$. Os ICS podem ser expressos em termos de funções especiais Y_{α} ,

$$\begin{aligned}\Phi_{z_1, z_2}^{(0)l}(\varphi, \rho) &= \exp[i\epsilon(l_0 - l)\varphi] Y_{-l-\mu}(z_1, z_2; \rho), \\ \Phi_{z_1, z_2}^{(1)l}(\varphi, \rho) &= \exp\{i\epsilon[(l_0 - l)\varphi + \pi l]\} Y_{l+\mu}(z_2, z_1; \rho),\end{aligned}\quad (3.78)$$

$$Y_{\alpha}(z_1, z_2; \rho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_1^m z_2^{m+\alpha} I_{m+\alpha, m}(\rho)}{\sqrt{\Gamma(1+m)\Gamma(1+m+\alpha)}}. \quad (3.79)$$

Por meio da soma,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m I_{\alpha+m, m}(x)}{\sqrt{\Gamma(1+m)\Gamma(1+\alpha+m)}} = z^{-\frac{\alpha}{2}} \exp(z - x/2) J_{\alpha}(2\sqrt{xz}),$$

onde J_{α} são funções de Bessel de primeiro tipo, é possível obter as seguintes representações para Y_{α} :

$$Y_{\alpha}(z_1, z_2; \rho) = \exp\left(z_1 z_2 - \frac{\rho}{2}\right) \left(\sqrt{z_2/z_1}\right)^{\alpha} J_{\alpha}(2\sqrt{z_1 z_2} \rho). \quad (3.80)$$

Portanto, segue de (2.14):

$$\hat{N}_k \Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) = z_k \partial_{z_k} \Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad k = 1, 2; \quad (3.81)$$

e

$$\begin{aligned}a_1 \Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= z_1 \left[\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) - (-1)^j \Phi_{z_1, z_2}^{(j)-1}(\varphi, \rho) \right], \\ a_2 \Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= z_2 \left[\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) + (-1)^j \Phi_{z_1, z_2}^{(j)0}(\varphi, \rho) \right].\end{aligned}\quad (3.82)$$

Usando as eqs. (6.615) de [44], obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \Phi_{z'_1, z'_2}^{(j')} \right)_{\perp} &= \delta_{jj'} \mathcal{R}^{(j)}; \quad \mathcal{R}^{(0)} = Q_{1-\mu} \left(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2} \right), \quad \mathcal{R}^{(1)} = Q_{\mu} \left(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1} \right); \\ Q_{\alpha}(u, v) &= Q_{\alpha}^{-}(u, v) + (v/u)^{\alpha} I_{\alpha}(2uv), \quad Q_{\alpha}^{-}(u, v) = \sum_{l=1}^{\infty} (v/u)^{\alpha+l} I_{\alpha+l}(2uv),\end{aligned}\quad (3.83)$$

onde I_{α} são funções de Bessel modificadas de primeiro tipo.

As eqs. (3.82) permitem calcular os elementos de matriz

$$\left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, a_k \Phi_{z'_1, z'_2}^{(j')} \right)_{\perp} = (a_k)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(j, j')}, \quad k = 1, 2, \quad (3.84)$$

onde

$$\begin{aligned} (a_1)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(0,0)} &= z'_1 Q_{1-\mu}^{-}(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2}), \quad (a_2)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(0,0)} = z'_2 Q_{1-\mu}(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2}), \\ (a_1)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(1,1)} &= z'_1 Q_{\mu}(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1}), \quad (a_2)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(1,1)} = z'_2 Q_{\mu}^{-}(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1}), \\ (a_1)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(1,0)} &= (a_2)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(0,1)} = 0, \\ (a_1)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(0,1)} &= -z'_1 \left(\sqrt{\frac{z_2^* z'_2}{z_1^* z'_1}} \right)^{1-\mu} \mathcal{J}_{1-\mu}(\sqrt{z_1^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_2}), \\ (a_2)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(1,0)} &= z'_2 \left(\sqrt{\frac{z_1^* z'_1}{z_2^* z'_2}} \right)^{\mu} \mathcal{J}_{\mu}(\sqrt{z_1^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_2}), \end{aligned} \quad (3.85)$$

e

$$\mathcal{J}_{\mu}(u, v) = \exp(u^2 + v^2) \int_0^{\infty} e^{-\rho} J_{\mu}(2u\sqrt{\rho}) J_{-\mu}(2v\sqrt{\rho}) d\rho. \quad (3.86)$$

Notamos que as soluções do tipo irregular $\Phi_{n_1, n_2}^{(j)}$ (quando $r \rightarrow 0$) no lado direito de (3.74), geram contribuições nulas para os elementos da matriz diagonal $(a_k)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2}^{(j, j)}$.

É natural definir a média de um dado operador \hat{F} como segue:

$$\overline{(F)}_{(j)} = \left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \hat{F} \Phi_{z_1, z_2}^{(j)} \right)_{\perp} \left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \Phi_{z_1, z_2}^{(j)} \right)_{\perp}^{-1}. \quad (3.87)$$

Portanto, usando (3.81), obtemos as médias dos operadores \hat{N}_k :

$$\overline{(N_k)}_{(j)} = z_k \partial_{z'_k} \ln \mathcal{R}^{(j)} \Big|_{z'_k = z_k}, \quad k = 1, 2. \quad (3.88)$$

Estes resultados permitem conectar as médias de \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 com os parâmetros z_1 e z_2 . Segue de (3.76) que

$$\overline{(R^2)}_{(j)} = 2\gamma^{-1} \left[\overline{(N_1)}_{(j)} + 1/2 \right], \quad \overline{(R_c^2)}_{(j)} = 2\gamma^{-1} \left[\overline{(N_2)}_{(j)} + 1/2 \right]. \quad (3.89)$$

A perspectiva é de que no limite semiclássico $\overline{(N_k)}_{(j)} \approx |z_k|^2$. Simultaneamente, as escalas de comprimento definidas por meio de $\overline{(R^2)}_{(j)}$ e $\overline{(R_c^2)}_{(j)}$ devem ser suficientemente grandes, o que implica em $|z_k|^2 \gg 1$ no limite semiclássico.

Notamos que no caso puramente quântico, para uma escala quântica característica do movimento de rotação, podemos assumir a quantidade

$$\mathcal{E}_{\text{quant}}^2 = 2 |qB| \hbar c = 2M^2 c^4 |B| / B_0, \quad B_0 = M^2 c^3 / |q| \hbar,$$

onde $B_0 = m_e^2 c^3 / e \hbar \simeq 4,4 \cdot 10^{13} G$ é o campo magnético crítico, acima do qual o comportamento não-linear da Eletrodinâmica Quântica torna-se real. O comprimento de escala correspondente é

$$R_{\text{quant}} = \sqrt{2\gamma^{-1}} = \sqrt{2B_0 / |B|} \lambda_C, \quad \lambda_C = \hbar / Mc. \quad (3.90)$$

Para a projeção do momento angular L_z uma escala quântica característica é obviamente \hbar . Para uma dada energia, i.e., para uma dada $\overline{(R^2)}_{(j)}$, a quantidade $\overline{(L_z)}_{(j)}$ é proporcional a $\overline{(R_c^2)}_{(j)}$ devido a (3.27), e, portanto, pode ser caracterizado pela escala de comprimento correspondente R_{quant} . Note que o R_{quant} é muito maior em relação ao comprimento Compton λ_C se o campo magnético B é fraco, $B_0/|B| \gg 1$. Portanto, as condições $|z_k|^2 \gg 1$, correspondem às condições

$$\overline{(R^2)}_{(j)}, \overline{(R_c^2)}_{(j)} \gg R_{\text{quant}}^2 .$$

Simultaneamente, no caso quântico, as quantidades adimensionais $|z_k|^2$ são da ordem de 1. Verificamos que as decomposições semiclássicas são adequadas especialmente no caso de campos magnéticos suficientemente fortes (por exemplo, campos magnéticos de um pulsar B para o qual $B_0/|B| \sim 10^{-2}$ e $R_{\text{quant}} \ll \lambda_C$).

O sinal da diferença

$$d_{(j)} = \sqrt{\overline{(R^2)}_{(j)}} - \sqrt{\overline{(R_c^2)}_{(j)}} \quad (3.91)$$

é associado ao tipo da trajetória no limite clássico, e é possível verificar que tal limite implica nas seguintes condições:

$$|d_{(j)}| \gg R_{\text{quant}} \sim ||z_1| - |z_2|| \gg 1.$$

Em particular, para estados com $j = 0$, temos $|z_1| \ll |z_2|$, e para estados com $j = 1$, temos $|z_1| \gg |z_2|$. Notamos que em ambos os casos as funções correspondentes $Q_\alpha(u, v)$ são calculadas em $|v| > |u| \gg 1$.

Neste capítulo faremos uso de todo o estudo e tratamento detalhado associado às funções $Q_\alpha(u, v)$ realizados no capítulo 2. Portanto podemos calcular as médias (3.88):

$$\begin{aligned} \overline{(N_k)}_{(j)} &= |z_k|^2 + z_k \left. \partial_{z'_k} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(j)} \right|_{z'_k=z_k}, \quad k = 1, 2, \\ \tilde{\mathcal{R}}^{(0)} &= \tilde{Q}_{1-\mu} \left(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2} \right), \quad \tilde{\mathcal{R}}^{(1)} = \tilde{Q}_\mu \left(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1} \right). \end{aligned} \quad (3.92)$$

Estas médias podem ser representadas explicitamente na forma real, considerando que

$$\begin{aligned} z_k \left. \partial_{z'_k} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(0)} \right|_{z'_k=z_k} &= \frac{\delta_{k,1} |z_1| \partial_u \tilde{Q}_{1-\mu}(u, v) + \delta_{k,2} |z_2| \partial_v \tilde{Q}_{1-\mu}(u, v)}{2 \tilde{Q}_{1-\mu}(u, v)} \Bigg|_{u=|z_1|, v=|z_2|}, \\ z_k \left. \partial_{z'_k} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(1)} \right|_{z'_k=z_k} &= \frac{\delta_{k,1} |z_1| \partial_v \tilde{Q}_\mu(u, v) + \delta_{k,2} |z_2| \partial_u \tilde{Q}_\mu(u, v)}{2 \tilde{Q}_\mu(u, v)} \Bigg|_{u=|z_2|, v=|z_1|}. \end{aligned}$$

Enfatizamos que as médias (3.92) permitem o limite $\mu \rightarrow 0$. Portanto, a contribuição devida ao campo de AB pode ser facilmente isolada.

Usando a decomposição de potências da função $\tilde{v}^{\alpha+1} I_\alpha(2u\tilde{v}) e^{-2u\tilde{v}}$ em torno do ponto $\tilde{v} = v$ para uma estimativa da integral $T(u, v)$ in (2.24) e o comportamento assintótico da função $I_\alpha(2uv)$, é possível verificar que $|z_k|^2 \gg z_k \left. \partial_{z'_k} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(j)} \right|_{z'_k=z_k}$ para $|v| \gtrsim |u| \gg 1$. Deste modo, obtemos as expansões semiclássicas:

$$|z_1|^2 = \frac{\gamma}{2} \overline{(R^2)}_{(j)} + \dots, \quad |z_2|^2 = \frac{\gamma}{2} \overline{(R_c^2)}_{(j)} + \dots, \quad |z_k|^2 \gg 1, \quad (3.93)$$

que conectam as médias de \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 com os parâmetros z_1 e z_2 . Portanto se $||z_1| - |z_2|| \gg 1$, as eqs. (3.93) implicam as seguintes relações

$$|z_1| \ll |z_2|, \quad j = 0; \quad |z_1| \gg |z_2|, \quad j = 1. \quad (3.94)$$

Deve ser notado que as relações (3.94) não estão associadas às condições de aplicabilidade das expansões semiclássicas (3.93). Obtendo as últimas expansões, supusemos que $|z_1| \lesssim |z_2|$ para os estados com $j = 0$, e $|z_1| \gtrsim |z_2|$ para os estados com $j = 1$. Portanto, as relações (3.93) entre as médias de \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 e os parâmetros z_1 e z_2 apresentam-se mesmo se uma relação definida entre $\text{sign}(|z_1| - |z_2|)$ e j é ausente.

Retendo somente os termos principais nas decomposições (3.93), reproduzimos as relações clássicas correspondentes (3.13) com $|z_1| = |a_1|$ e $|z_2| = |a_2|$. Em outras palavras, é possível afirmar que as relações clássicas (3.13) correspondem à primeira aproximação para raio suficientemente grande. Deste modo, a primeira aproximação em expansões semiclássicas reproduz o limite clássico. Os termos em segunda ordem na expansão semiclássica definem quantidades físicas na aproximação semiclássica.

É conveniente considerar a aproximação semiclássica retendo os termos de segunda e terceira ordem. Caso $|v| \gg |u| \gg 1$, é possível aproximar a integral $T(u, v)$ in (2.24) por uma série de potências em u/v como segue:

$$T(u, v) = (v/u)^\alpha I_\alpha(2uv) e^{-u^2 - v^2} (1 + u/v + \dots).$$

Então, usando o comportamento assintótico de $I_\alpha(2uv)$, obtemos de (2.25):

$$\tilde{Q}_\alpha(u, v) = 1 - \frac{(u/v)^{1-\alpha}}{2\sqrt{\pi uv}} e^{-(v-u)^2}, \quad (3.95)$$

o que implica em

$$\frac{\partial_v \tilde{Q}_\alpha(u, v)}{\tilde{Q}_\alpha(u, v)} \approx -\frac{\partial_u \tilde{Q}_\alpha(u, v)}{\tilde{Q}_\alpha(u, v)} \approx \frac{(u/v)^{1/2-\alpha}}{\sqrt{\pi}} e^{-(v-u)^2}, \quad |v| \gg |u| \gg 1. \quad (3.96)$$

Deste modo, para os estados semiclássicos correspondentes às órbitas situadas suficientemente distante do solenóide, i.e., para $\||z_1| - |z_2|\| \gg 1$, os termos $z_k \partial_{z'_k} \ln \tilde{\mathcal{R}}^{(j)} \Big|_{z'_k = z_k}$ são tão pequenos quanto $\exp(-\||z_1|^2 - |z_2|^2\|)$. Então as expansões semiclássicas (3.93) em segunda ordem de aproximação são escritas como:

$$|z_1|^2 \approx \frac{\gamma}{2} \overline{(R^2)}_{(j)} - 1/2, \quad |z_2|^2 = \frac{\gamma}{2} \overline{(R_c^2)}_{(j)} - 1/2, \quad \||z_1| - |z_2|\| \gg 1.$$

Para o caso mais interessante quando uma órbita semiclássica está situada nas proximidades do solenóide, tal que a condição $\||v| - |u|\| \ll 1$ é válida, a influência do solenóide AB (devido a $\mu \neq 0$) sobre as órbitas é considerável. Em tal caso

$$\begin{aligned} T(u, v) &= \frac{1}{2} - \frac{v-u}{\sqrt{\pi}} + \frac{\alpha + 1/2}{2\sqrt{\pi u}} + O(|v-u|^3) + O(|u|^{-2}), \\ \tilde{Q}_\alpha(u, v) &\approx \frac{1}{2} + \frac{v-u}{\sqrt{\pi}} - \frac{\alpha - 1/2}{2\sqrt{\pi u}}, \\ \frac{\partial_v \tilde{Q}_\alpha(u, v)}{\tilde{Q}_\alpha(u, v)} &\approx -\frac{\partial_u \tilde{Q}_\alpha(u, v)}{\tilde{Q}_\alpha(u, v)} \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(1 - 2\frac{v-u}{\sqrt{\pi}} + \frac{\alpha - 1/2}{\sqrt{\pi u}} \right), \end{aligned} \quad (3.97)$$

tal que

$$\overline{(N_k)}_{(j)} \approx |z_k|^2 + (-1)^k \left\{ \frac{|z_k|}{\sqrt{\pi}} \left[(-1)^j + 2\frac{|z_1| - |z_2|}{\sqrt{\pi}} \right] + \frac{1 - 2\mu}{2\pi} \right\}, \quad \||z_1| - |z_2|\| \ll 1. \quad (3.98)$$

Deste modo, para $\||z_1| - |z_2|\| \ll 1$ todas as contribuições (dependentes de μ) para as médias $\overline{(N_k)}_{(j)}$ são da ordem de 1, o que é natural para o caso puramente quântico. As contribuições de segunda ordem para as médias (de ordem $|z_k|$) que não dependem de μ são muito maiores. Estas contribuições semiclássicas surgem uma vez que cada ICS do tipo- j inclui somente a metade das autofunções do operador \hat{L}_z . Segue de (3.98) que em primeira aproximação

$$\overline{(N_1)}_{(j)} - \overline{(N_2)}_{(j)} \approx (-1)^{j+1} \frac{|z_1| + |z_2|}{\sqrt{\pi}}, \quad \||z_1| - |z_2|\| \ll 1. \quad (3.99)$$

Simultaneamente, as relações (3.93) geram na aproximação semiclássica:

$$\begin{aligned} |z_1|^2 &\approx \frac{\gamma}{2} \overline{(R^2)}_{(j)} + (-1)^j \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi} \overline{(R^2)}_{(j)}}, \\ |z_2|^2 &\approx \frac{\gamma}{2} \overline{(R_c^2)}_{(j)} - (-1)^j \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi} \overline{(R_c^2)}_{(j)}}, \quad \||z_1| - |z_2|\| \ll 1. \end{aligned}$$

Portanto, usando (3.99), obtemos

$$\overline{(R^2)}_{(j)} - \overline{(R_c^2)}_{(j)} \approx (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}} \left(\sqrt{\overline{(R^2)}_{(j)}} + \sqrt{\overline{(R_c^2)}_{(j)}} \right), \quad \||z_1| - |z_2|\| \ll 1.$$

o que implica em

$$\overline{(L_z)}_{(j)} - \frac{q\Phi}{2\pi c} \approx \epsilon (-1)^j \frac{\hbar}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\overline{(R^2)}_{(j)}} + \sqrt{\overline{(R_c^2)}_{(j)}} \right) R_{\text{quant}}^{-1}. \quad (3.100)$$

Então a quantidade $d_{(j)}$ (3.91) é:

$$d_{(j)} \approx (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma}}, \quad \||z_1| - |z_2|\| \ll 1. \quad (3.101)$$

Deste modo, para $\||z_1| - |z_2|\| \ll 1$, assumindo a aproximação semiclássica, a média do menor afastamento possível $|d_{(j)}|$ da partícula em relação ao eixo do solenóide é da ordem de R_{quant} , em particular, $d_{(j)} < 0$ para estados com $j = 0$, e $d_{(j)} > 0$ para estados com $j = 1$, independentemente do sinal da diferença $|z_1| - |z_2|$.

As eqs. (3.81) e (2.25) permitem calcular as variâncias dos operadores \hat{N}_k ,

$$\text{Var}_j(N_k) = \overline{(N_k^2)}_{(j)} - \left(\overline{(N_k)}_{(j)} \right)^2.$$

Na aproximação semiclássica, temos

$$\text{Var}_j(N_k) \approx |z_k|^2, \quad \||z_1| - |z_2|\| \gg 1; \quad \text{Var}_j(N_k) \approx (1 - 1/\pi) |z_k|^2, \quad \||z_1| - |z_2|\| \ll 1. \quad (3.102)$$

Deste modo, os desvios padrão de \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 nos ICS semiclássicos são da mesma ordem para qualquer valor $\||z_1| - |z_2|\|$, a saber:

$$\delta_j(R^2) = \sqrt{\text{Var}_j(R^2)} \sim R_{\text{quant}} \sqrt{\overline{(R^2)}_{(j)}}, \quad \delta_j(R_c^2) = \sqrt{\text{Var}_j(R_c^2)} \sim R_{\text{quant}} \sqrt{\overline{(R_c^2)}_{(j)}}.$$

Neste caso, o espalhamento típico dos raios R e R_c são dados pelos desvios padrão

$$\delta_j(R) = \delta_j(R^2) \left[\overline{(R^2)}_{(j)} \right]^{-1/2} \sim R_{\text{quant}}, \quad \delta_j(R_c) = \delta_j(R_c^2) \left[\overline{(R_c^2)}_{(j)} \right]^{-1/2} \sim R_{\text{quant}}. \quad (3.103)$$

Para $\|z_1\| - \|z_2\| \ll 1$, a diferença $\overline{(R^2)}_{(j)} - \overline{(R_c^2)}_{(j)}$ é da ordem do desvio padrão de $\hat{R}^2 - \hat{R}_c^2$, que é $\delta_j(R^2) + \delta_j(R_c^2)$. Portanto, o momento angular médio (3.100) é da ordem do desvio padrão de \hat{L}_z , e para $\|z_1\| - \|z_2\| \ll 1$, a escala quântica do momento angular é muito maior que \hbar . Neste caso $|d_{(j)}|$ é da ordem de $\delta_j(R) + \delta_j(R_c) \sim R_{\text{quant}}$.

Notamos que os ICS *à la* Malkin-Man'ko [40] (para o caso em que $\Phi = 0$) pode ser associado com a superposição $\Phi_{z_1, z_2}^{(0)} + \Phi_{z_1, z_2}^{(1)}$ para $\mu = 0$, que inclui todas as autofunções de \hat{L}_z . O produto interno sobre o plano- xy entre tais estados é a soma $\mathcal{R}^{(0)} + \mathcal{R}^{(1)}$. Usando as eqs. (8.511.1) de [44], encontramos

$$\mathcal{R}^{(0)} + \mathcal{R}^{(1)} = \exp(z_1^* z_1' + z_2^* z_2') \implies \tilde{\mathcal{R}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{R}}^{(1)} = 1.$$

Portanto, em tais ICS, temos $\overline{(N_k)} = |z_k|^2$. Similares compensações mutuas surgem nas expressões para $\tilde{\mathcal{R}}^{(0)}$ e $\tilde{\mathcal{R}}^{(1)}$ para $\mu \neq 0$ no limite semiclássico, $|z_k|^2 \gg 1$. Por exemplo, para $\|z_1\| - \|z_2\| \ll 1$, obtemos:

$$\tilde{\mathcal{R}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{R}}^{(1)} = 1 + O(|z_k|^{-2}).$$

É possível verificar que em estados que são superposições entre diferentes j , as primeiras correções para as médias $\overline{(N_k)} = |z_k|^2$ (3.98) desaparecem na aproximação semiclássica.

Caso $|z_1|$ e $|z_2|$ difiram essencialmente, i.e., $\|z_1\| - \|z_2\| \gg 1$, poderia ser possível acreditar que termos de segunda ordem em $\mathcal{R}^{(j)}$, dados por (3.95), permanecem sem compensação. Isto não é verídico. Para verificar isto, é necessário considerar que os termos de segunda ordem em $\tilde{\mathcal{R}}^{(0)} + \tilde{\mathcal{R}}^{(1)}$ são devidos às contribuições de (3.92) e dos primeiros termos em $\tilde{Q}_\alpha(u, v)$ para $|u| \gg |v|$,

$$\tilde{Q}_\alpha(u, v) = \frac{1}{2\sqrt{\pi uv}} (v/u)^\alpha e^{-(v-u)^2}, \quad |u| \gg |v| \gg 1. \quad (3.104)$$

Lembramos que para os ICS, o domínio $|u| > |v|$ não é um domínio clássico mesmo se $|z_k|^2 \gg 1$.

Usando (3.85) e (3.76), e a representação

$$\Delta_\alpha(u, v) = 1 - \varpi_\alpha(u, v), \quad \varpi_\alpha(u, v) = (v/u)^\alpha I_\alpha(2uv) e^{-u^2 - v^2} / \tilde{Q}_\alpha(u, v),$$

encontramos:

$$\begin{aligned} \overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)} &= \sqrt{2\gamma^{-1}} \left[\overline{(a_2)}_{(j)} - \overline{(a_1)}_{(j)}^* \right], \\ \overline{(a_1)}_{(0)} &= z_1 \Delta_{1-\mu}(|z_1|, |z_2|), \quad \overline{(a_2)}_{(0)} = z_2, \\ \overline{(a_1)}_{(1)} &= z_1, \quad \overline{(a_2)}_{(1)} = z_2 \Delta_\mu(|z_2|, |z_1|), \quad \Delta_\alpha(u, v) = \frac{Q_\alpha^-(u, v)}{Q_\alpha(u, v)}, \\ \overline{(a_2)}_{(0)} - \overline{(a_1)}_{(0)}^* &= z_2 - z_1^* \Delta_{1-\mu}(|z_1|, |z_2|) = z_2 - z_1^* + z_1^* \varpi_{1-\mu}(|z_1|, |z_2|), \\ \overline{(a_2)}_{(1)} - \overline{(a_1)}_{(1)}^* &= z_2 \Delta_\mu(|z_2|, |z_1|) - z_1^* = z_2 - z_1^* - z_2 \varpi_\mu(|z_2|, |z_1|). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Por meio das eqs. (3.105) calculamos a variância de $(x + y)$ em termos dos estados do tipo- j :

$$\begin{aligned} \text{Var}_j(x + y) &= \overline{(|x - i\epsilon y|^2)}_{(j)} - \left| \overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)} \right|^2 \\ &= 2\gamma^{-1} \left[\overline{(N_1)}_{(j)} + \overline{(N_2)}_{(j)} + 1 - \left| \overline{(a_1)}_{(j)} \right|^2 - \left| \overline{(a_2)}_{(j)} \right|^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.106)$$

É conveniente considerar o limite semiclássico $|z_k|^2 \gg 1$ para os ICS com $j = 0$ e $|z_1| \lesssim |z_2|$ e para os ICS com $j = 1$ e $|z_1| \gtrsim |z_2|$, em ambos os estados, temos $|v| \gtrsim |u| \gg 1$. Neste caso, usando os

resultados acima, é possível verificar que as correções para as expressões clássicas $\left[\overline{(a_2)_{(j)}} - \overline{(a_1)_{(j)}}^* \right] = z_2 - z_1^*$ são pequenas. Em particular, usando as eqs. (3.95) e (3.97), e o comportamento assintótico de $I_\alpha(2uv)$, obtemos:

$$\begin{aligned} d_\alpha(u, v) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi uv}} (v/u)^\alpha e^{-(v-u)^2}, \quad |v| \gg |u|; \\ d_\alpha(u, v) &= \frac{1}{\sqrt{\pi u}} \left(1 - 2\frac{v-u}{\sqrt{\pi}} + \frac{\alpha - 1/2}{\sqrt{\pi u}} \right), \quad |v-u| \ll 1, \end{aligned} \quad (3.107)$$

onde os termos válidos são tomados em segunda ordem de aproximação. Deste modo, as eqs. (3.105) relacionam-se com (3.92) no limite semiclássico, e devido a (3.92), (3.96), e (3.97), na aproximação semiclássica, as variâncias (3.106) são relativamente pequenas,

$$\begin{aligned} \text{Var}_j(x+y) &\approx 2\gamma^{-1}, \quad |z_2| \gg |z_1| \text{ for } j=0, \quad |z_1| \gg |z_2| \text{ for } j=1; \\ \text{Var}_0(x+y) &\approx \frac{4|z_1|^{3/2}}{\sqrt{\pi}\gamma}, \quad \text{Var}_1(x+y) \approx \frac{4|z_2|^{3/2}}{\sqrt{\pi}\gamma}, \quad ||z_1| - |z_2|| \ll 1. \end{aligned} \quad (3.108)$$

Contudo, próximo ao solenóide AB, onde $||z_1| - |z_2|| \ll 1$, as variâncias aumentam significativamente. Portanto, resulta que a escala de comprimento quântico para $\sqrt{\overline{(R^2)_{(j)}}}$ e $\sqrt{\overline{(R_c^2)_{(j)}}}$ é essencialmente diferente da escala de comprimento quântico para $\overline{(x)_{(j)}}$ e $\overline{(y)_{(j)}}$.

Note que neste caso, a parte principal das contribuições de segunda ordem para $\overline{(x)_{(j)}}$ e $\overline{(y)_{(j)}}$, dadas por (3.107), não depende de μ , que é inteiramente similar ao comportamento de $\overline{(N_k)_{(j)}}$ dado por (3.98). Entretanto, aqui um limite contínuo para o caso $\mu = 0$ não existe. Isto pode ser verificado considerando as médias $\overline{(x)}$ e $\overline{(y)}$ na superposição $\Phi_{z_1, z_2}^{(0)} + \Phi_{z_1, z_2}^{(1)}$. Por exemplo, a média $\overline{(x)}$ na última superposição inclui ambas as médias $\overline{(x)_{(j)}}$ e alguns termos de interferência dados por (3.85). Os últimos termos são ausentes somente para $\mu = 0$. Isto resulta do fato de que as médias $\overline{(x)}$ e $\overline{(y)}$ calculadas em termos dos CS de Malkin-Man'ko não podem ser obtidas no limite $\mu \rightarrow 0$. Portanto, efetivamente as médias $\overline{(x)_{(j)}}$, $\overline{(y)_{(j)}}$, e $\overline{(x)}$, $\overline{(y)}$ são especialmente sensíveis ao efeito topológico da quebra de simetria translacional no plano- xy devido à presença do solenóide AB.

No caso puramente quântico, $\overline{(a_2)_{(j)}} - \overline{(a_1)_{(j)}}^*$ diferem essencialmente de $z_2 - z_1^*$. Por exemplo, para $|z_1 z_2| \ll 1$, temos $\Delta_\alpha(u, v) = v^2(\alpha + 1)^{-1}$, $\alpha > 0$. Portanto,

$$\overline{(a_2)_{(0)}} - \overline{(a_1)_{(0)}}^* \approx z_2, \quad \overline{(a_2)_{(1)}} - \overline{(a_1)_{(1)}}^* \approx -z_1^*. \quad (3.109)$$

Neste caso, usando (3.81) e (3.83), obtemos $\text{Var}_j(x+y) \approx 2\gamma^{-1}$. Contudo, é grande em comparação com o pequeno $|z_k|^2$.

Caso $|u| \gg |v|$, tratamos com o caso quântico mesmo para um grande $|z_k|^2$. Aqui $\Delta_\alpha(u, v) = v/u \rightarrow 0$ que gera uma justificação para as relações (3.109). Adicionalmente, no caso quântico, temos $\overline{(N_k)_{(j)}} \sim 1$, e, simultaneamente, as contribuições para $\overline{(N_k)_{(j)}}$ que dependem de z_k são muito menores que 1. Isto ocorre em virtude das médias $\overline{(R^2)_{(j)}}$ e $\overline{(R_c^2)_{(j)}}$, que são expressas em termos de $\overline{(N_k)_{(j)}}$ pela eq. (3.76), dependendo apenas levemente de z_k . Neste caso as variâncias

$$\text{Var}_0(x+y) \approx 2\gamma^{-1} |z_1|^2, \quad \text{Var}_1(x+y) \approx 2\gamma^{-1} |z_2|^2$$

são muito maiores que os quadrados das médias correspondentes $\left| \overline{(x - i\epsilon y)_{(j)}} \right|^2$.

Devemos considerar as relações de incerteza com relação aos ICS semiclássicos. Seja \hat{F}_1 e \hat{F}_2 dois operadores auto-adjuntos satisfazendo a relação de comutação $[\hat{F}_1, \hat{F}_2] = i\hat{F}_3$, onde \hat{F}_3 é um operador simétrico com uma média real $\overline{(F_3)}$. Neste caso a relação de incerteza

$$\text{Var}(F_1) \text{Var}(F_2) \geq \frac{1}{4} \overline{(F_3)}$$

é válida, consultar por exemplo [46]. Adotando esta relação geral para nossos casos particulares, obtemos:

$$\text{Var}_j(\mathbf{P}_\perp^2) \text{Var}_j(x+y) \geq \hbar^2 \left| \overline{(P_1 + i\epsilon P_2)}_{(j)} \right|^2, \quad \text{Var}_j(L_z) \text{Var}_j(x+y) \geq \frac{\hbar^2}{4} \left| \overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)} \right|^2. \quad (3.110)$$

Aqui $\overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)}$ é dado por (3.105) e $\left| \overline{(P_1 + i\epsilon P_2)}_{(j)} \right|^2$ pode ser representado por meio de (3.73) como

$$\overline{(P_1 + i\epsilon P_2)}_{(j)} = 2\gamma\hbar^2 \left| \overline{(a_1)}_{(j)} \right|^2.$$

As variâncias $\text{Var}_j(\mathbf{P}_\perp^2)$ e $\text{Var}_j(L_z)$ podem ser expressas via $\text{Var}_j(N_k)$ (3.102),

$$\text{Var}_j(\mathbf{P}_\perp^2) = (2\gamma\hbar^2)^2 \text{Var}_j(N_1), \quad \text{Var}_j(L_z) = \hbar^2 \text{Var}_j(N_1 - N_2),$$

e $\text{Var}_j(x+y)$ são dados por (3.108).

Notamos que $\left| \overline{(a_1)}_{(j)} \right|^2 \approx |z_1|^2$ para qualquer $\|z_1\| - \|z_2\|$, e para efeito de definição, supomos que $|z_1^* - z_2| = \|z_1\| - \|z_2\|$ para $\|z_1\| - \|z_2\| \ll 1$. Então, usando (3.102) e (3.108), verificamos que para $\|z_1\| - \|z_2\| \gg 1$ os produtos das variâncias de (3.110) estão mais próximos dos seus valores mínimos possíveis,

$$\text{Var}_j(\mathbf{P}_\perp^2) \text{Var}_j(x+y) \approx 4\hbar^2 \left| \overline{(P_1 + i\epsilon P_2)}_{(j)} \right|^2, \quad \text{Var}_j(L_z) \text{Var}_j(x+y) \approx \hbar^2 \left| \overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)} \right|^2,$$

e para $\|z_1\| - \|z_2\| \ll 1$ estas variâncias são muito maiores que as médias $\hbar^2 \left| \overline{(P_1 + i\epsilon P_2)}_{(j)} \right|^2$ e $(\hbar^2/4) \left| \overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)} \right|^2$, respectivamente.

3.3.2 Partícula com spin

Similarmente ao caso de spin-zero, é possível encontrar a ação dos operadores $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1; \hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2$ dado pela eq. (3.73) sobre as funções (3.43):

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_1} \Phi_{n_1-1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho), & \hat{a}_1^\dagger \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_1 + 1} \Phi_{n_1+1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ \hat{a}_2 \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_2} \Phi_{n_1, n_2-1, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho), & \hat{a}_2^\dagger \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \sqrt{n_2 + 1} \Phi_{n_1, n_2+1, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho), \end{aligned} \quad (3.111)$$

onde os valores possíveis de n_1 e n_2 dependem de m, l, σ , e j de acordo com (3.43) e as funções $\Phi_{n_1+s_1, n_2+s_2, \sigma}^{(j)}$ são definidas como segue

$$\begin{aligned} \Phi_{n_1+s_1, n_2+s_2, \sigma}^{(0)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp \{ i\epsilon [l_0 - l - s_1 + s_2 + (1 - \epsilon\sigma) / 2] \varphi \} I_{n_2+s_2, n_1+s_1}(\rho), \\ \Phi_{n_1+s_1, n_2+s_2, \sigma}^{(1)}(\varphi, \rho) &= \mathcal{N} \exp \{ i\epsilon [l_0 - l - s_1 + s_2 + (1 - \epsilon\sigma) / 2] \varphi \\ &\quad + \pi [l + s_1 - s_2 - (1 - \epsilon)(1 + \sigma) / 4] \} I_{n_1+s_1, n_2+s_2}(\rho), \quad s_1 = 0, \pm 1, \quad s_2 = 0, \pm 1. \end{aligned}$$

Surgem novas funções $\Phi_{n_1, n_2-1, \sigma}^{(0)}$ com $n_2 = m + 1 + (\vartheta - \sigma) \epsilon / 2 - \mu$ e funções $\Phi_{n_1-1, n_2, \sigma}^{(1)}$ com $n_1 = m + (\sigma - \vartheta) \epsilon / 2 + \mu$. Estas funções não foram definidas pelas eqs. (3.43). Adicionalmente, para $n_1 = 0$ ou $n_2 = 0$, deve-se considerar que

$$\hat{a}_1 \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(0)}(\varphi, \rho) \Big|_{m=0} = 0, \quad \hat{a}_2 \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(1)}(\varphi, \rho) \Big|_{m=0} = 0.$$

Isto permite-nos interpretar $\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(0)} \Big|_{m=0}$ e $\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(1)} \Big|_{m=0}$ como estados de vácuo.

Todos os spinores introduzidos na subsec. 3.2.2 são expressos em termos das funções (3.43) e descrevem estados de partículas com spin fora do solenóide, $r > 0$, isto ocorre em virtude do fato de que os operadores $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1$, e $\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2$ comportam-se como operadores de criação e aniquilação. Então os operadores $c^2 \left(\sigma \hat{\mathbf{P}}_\perp \right)^2$ em 2 + 1 dimensões e $c^2 \hat{\mathcal{Q}}_\perp^2$ em 3 + 1 dimensões apresentam as seguintes representações:

$$c^2 \left(\sigma \hat{\mathbf{P}}_\perp \right)^2 = 2\hbar c |qB| \left[\hat{N}_1 + (1 - \sigma^3 \epsilon) / 2 \right], \quad c^2 \hat{\mathcal{Q}}_\perp^2 = 2\hbar c |qB| \left[\hat{N}_1 + (1 - \Sigma_z \epsilon) / 2 \right], \quad (3.112)$$

onde as relações (3.111) e a expressão (3.44) são utilizadas. Ambas as quantidades $x - i\epsilon y$ e \hat{L}_z sendo escritas em termos de $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_1$, e $\hat{a}_2^\dagger, \hat{a}_2$ apresentam a forma (3.76) (que é a mesma em 2 + 1 e 3 + 1 dimensões.) Portanto, os operadores \hat{R}^2 e R_c^2 apresentam a seguinte forma (verificar as definições (3.47)):

$$\begin{aligned} \hat{R}^2 &= \gamma^{-1} \left(2\hat{N}_1 + 1 - \sigma^3 \epsilon \right) \text{ em } 2 + 1 \text{ dim}, \quad \hat{R}^2 = \gamma^{-1} \left(2\hat{N}_1 + 1 - \Sigma_z \epsilon \right) \text{ em } 3 + 1 \text{ dim}, \\ \hat{R}_c^2 &= \gamma^{-1} \left(2\hat{N}_2 + 1 \right) \text{ em } 2 + 1 \text{ e em } 3 + 1 \text{ dim}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Similarmente ao caso de spin-zero, é conveniente converter das funções $\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}$ (3.43) para as novas funções $\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}$ como segue:

$$\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) = \sum_{\tilde{l}} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)\tilde{l}}(\varphi, \rho), \quad \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)\tilde{l}}(\varphi, \rho) = \sum_m \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho)}{\sqrt{\Gamma(1 + n_1) \Gamma(1 + n_2)}}. \quad (3.114)$$

Aqui z_1 e z_2 são parâmetros complexos, os valores possíveis de n_1 e n_2 dependem de m, \tilde{l}, σ , e j de acordo com a eq. (3.43), e assumimos $\mathcal{N} = 1$. As funções $\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)\tilde{l}}$ apresentam a seguinte representação (verificar a definição (3.80)):

$$\begin{aligned} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(0)\tilde{l}}(\varphi, \rho) &= \exp \{ i\epsilon [l_0 - l + (1 - \epsilon\sigma) / 2] \varphi \} Y_{-\alpha_{\tilde{l}}}(z_1, z_2, \rho), \quad \alpha_{\tilde{l}} = \tilde{l} - (1 - \epsilon\sigma) / 2 + \mu, \\ \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(1)\tilde{l}}(\varphi, \rho) &= \exp \{ i\epsilon [l_0 - l + (1 - \epsilon\sigma) / 2] \varphi + \pi [l - (1 - \epsilon)(1 + \sigma) / 4] \} Y_{\alpha_{\tilde{l}}}(z_2, z_1, \rho). \end{aligned} \quad (3.115)$$

Por meio das funções introduzidas e usando os resultados da subseção (3.2.2), é possível construir os ICS para as partículas sobre o plano- xy . Estes ICS são construídos por meio dos spinores descritos na subseção 3.2.2 pela substituição das funções $\Phi_{n_1, n_2, \sigma}^{(j)}$ para a função $\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}$.

Deste modo, usando as eqs. (3.40), (3.42), e (3.112), obtemos os ICS para partículas massivas de spin, $\zeta = +1$, sobre o plano- xy e em (2 + 1)-dimensões:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm, z_1, z_2}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \left\{ \sigma^3 \left[\pm \Pi_0 \left(\hat{N}_1 \right) - \sigma \hat{\mathbf{P}}_\perp \right] + Mc \right\} \mathbf{u}_{z_1, z_2, \pm 1}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ \mathbf{u}_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) &= \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) v_\sigma, \\ \Pi_0 \left(\hat{N}_1 \right) &= \hat{\Pi}_0^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\hat{\Pi}_0^2 \tau^2} d\tau, \quad \hat{\Pi}_0^2 = M^2 c^2 + 2\hbar |qB| / c \left[\hat{N}_1 + (1 - \sigma\epsilon) / 2 \right]. \end{aligned} \quad (3.116)$$

Para estes estados, temos

$$\left(\boldsymbol{\psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j)}, \boldsymbol{\psi}_{\pm, z'_1, z'_2}^{(j')} \right)_D = 2Mc \left(\boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \pm 1}^{(j)}, \left[\Pi_0 \left(\hat{N}_1 \right) + Mc \right] \boldsymbol{\Phi}_{z'_1, z'_2, \pm 1}^{(j')} \right)_\perp, \quad (3.117)$$

onde o produto interno $(,)_\perp$ é definido por (3.26).

De acordo com (3.50), (3.51), e (3.52), os ICS para partículas não-relativísticas de spin-up em 2 + 1 dimensões apresentam a forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j)\text{up}}(\varphi, \rho) &= \mathbf{u}_{z_1, z_2, \pm 1}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ \left(\boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j)\text{up}}, \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z'_1, z'_2}^{(j')\text{up}} \right)_D &= \left(\boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \pm 1}^{(j)}, \boldsymbol{\Phi}_{z'_1, z'_2, \pm 1}^{(j')} \right)_\perp, \end{aligned} \quad (3.118)$$

ao passo que para as partículas de spin-down estes estados são escritos como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j)\text{down}}(\varphi, \rho) &= \mathbf{u}_{z_1, z_2, \mp 1}^{(j)}(\varphi, \rho), \\ \left(\boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j)\text{down}}, \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z'_1, z'_2}^{(j')\text{down}} \right)_D &= \left(\boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \mp 1}^{(j)}, \boldsymbol{\Phi}_{z'_1, z'_2, \mp 1}^{(j')} \right)_\perp, \end{aligned} \quad (3.119)$$

De acordo com (3.72), os ICS sobre o plano- xy para partículas não-relativísticas em 3+1 dimensões com uma dada polarização de spin $s = \pm 1$ apresentam a forma:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2, \pm 1}^{(j)\text{NR}}(\varphi, \rho) &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j)\text{up}}(\varphi, \rho) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2, -1}^{(j)\text{NR}}(\varphi, \rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j)\text{down}}(\varphi, \rho) \end{pmatrix}, \\ \left(\boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2, s}^{(j)\text{NR}}, \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z'_1, z'_2, s'}^{(j')\text{NR}} \right)_D^\perp &= \delta_{s, s'} \left(\boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \pm s}^{(j)}, \boldsymbol{\Phi}_{z'_1, z'_2, \pm s}^{(j')} \right)_\perp, \end{aligned} \quad (3.120)$$

onde o produto interno dos spinores de quatro-componentes $\boldsymbol{\Psi}$ e $\boldsymbol{\Psi}'$ sobre o plano- xy é definido como

$$(\boldsymbol{\Psi}, \boldsymbol{\Psi}')_D^\perp = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \boldsymbol{\Psi}^\dagger(\varphi, \rho) \boldsymbol{\Psi}'(\varphi, \rho). \quad (3.121)$$

De acordo com (3.53) - (3.55), os ICS para férmions $\zeta = +1$ sem massa em 2 + 1 dimensões são

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j, +1)}(\varphi, \rho) &= \mathbf{u}_{\pm, z_1, z_2}^{(j, +1)}(\varphi, \rho), \quad \mathbf{u}_{\pm, z_1, z_2}^{(1, +1)}(\varphi, \rho) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \pm 1}^{(1)}(\varphi, \rho) \\ \mp i\epsilon \boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \mp 1}^{(1)}(\varphi, \rho) \end{pmatrix}, \\ \mathbf{u}_{\pm, z_1, z_2}^{(0, +1)}(\varphi, \rho) &= \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{z_1, z_2, \pm 1}^{(0)}(\varphi, \rho) \\ \pm i\epsilon \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{z_1, z_2, \mp 1}^{(0)}(\varphi, \rho) \end{pmatrix} + \mathbf{u}_{0, z_1, z_2}^{(0, +1)}(\varphi, \rho), \\ \mathbf{u}_{0, z_1, z_2}^{(0, +1)}(\varphi, \rho) &= \sum_{\tilde{l}} c_\epsilon \frac{z_2^{n_2} \boldsymbol{\Phi}_{0, n_2, \epsilon}^{(0)}(\varphi, \rho)}{\sqrt{\Gamma(1 + n_2)}} \Big|_{m=0} \quad v_\epsilon, \quad \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{z_1, z_2, \sigma}^{(0)}(\varphi, \rho) = \sum_{\tilde{l}} \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{z_1, z_2, \sigma}^{(0)\tilde{l}}(\varphi, \rho), \\ \tilde{\boldsymbol{\Phi}}_{z_1, z_2, \sigma}^{(0)\tilde{l}}(\varphi, \rho) &= \boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \sigma}^{(0)\tilde{l}}(\varphi, \rho) - \frac{1}{2} (1 + \sigma\epsilon) \frac{z_2^{n_2} \boldsymbol{\Phi}_{0, n_2, \sigma}^{(0)}(\varphi, \rho)}{\sqrt{\Gamma(1 + n_2)}} \Big|_{m=0}. \end{aligned} \quad (3.122)$$

O produto interno de tais estados apresentam a forma

$$\left(\boldsymbol{\Psi}_{\pm, z_1, z_2}^{(j, +1)}, \boldsymbol{\Psi}_{\pm, z'_1, z'_2}^{(j', +1)} \right)_D = \sum_{\sigma = \pm 1} \left(\boldsymbol{\Phi}_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \boldsymbol{\Phi}_{z'_1, z'_2, \sigma}^{(j')} \right)_\perp. \quad (3.123)$$

Similarmente, por meio de (3.56), é possível obter os ICS para férmions $\zeta = -1$ sem massa em $2 + 1$ dimensões.

De acordo com a eq. (3.67), para partículas relativísticas com spin em $3 + 1$ dimensões, os ICS sobre o plano- xy apresentam a forma

$$\mathbf{U}_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) = \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) \begin{pmatrix} v_\sigma \\ -\sigma v_\sigma \end{pmatrix}. \quad (3.124)$$

O produto interno de tais estados sobre o plano- xy é escrito como:

$$\left(\mathbf{U}_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \mathbf{U}_{z'_1, z'_2, \sigma}^{(j')} \right)_D^\perp = 2 \left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \Phi_{z'_1, z'_2, \sigma}^{(j')} \right)_\perp. \quad (3.125)$$

É possível verificar que em todos os casos o produto interno dos ICS sobre o plano- xy é expresso via elementos de matriz:

$$\begin{aligned} \left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \Phi_{z'_1, z'_2, \sigma}^{(j')} \right)_\perp &= \delta_{jj'} \mathcal{R}_\sigma^{(j)}; \quad \mathcal{R}_\sigma^{(0)} = Q_{1-\mu_\sigma} \left(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2} \right), \\ \mathcal{R}_\sigma^{(1)} &= Q_{\mu_\sigma} \left(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1} \right), \quad \mu_\sigma = \mu - \frac{1}{2} \vartheta \epsilon (1 - \vartheta \sigma). \end{aligned} \quad (3.126)$$

onde $Q_\alpha(u, v)$ são dados por (3.83). Notamos que em contraste ao caso de spin-zero, o subíndice α nas funções $Q_\alpha(u, v)$ pode assumir também valores negativos $-1 < \alpha < 0$. Para tal α negativo e para $|u|$ e $|v|$ grandes, o comportamento das funções $Q_\alpha(u, v)$ em casos limites é dado pelas formas apresentadas nas subseções prévias. Para $|u|$ e $|v|$ pequenos, as funções $Q_\alpha(u, v)$ com α positivo e negativo comportam-se essencialmente de maneira diferente. Por exemplo, usando a representação (8.445) [44] para a função $I_\alpha(2uv)$, obtemos:

$$\begin{aligned} Q_\alpha(u, v) &\approx v^{2\alpha} / \Gamma(1 + \alpha), \quad |uv| \ll 1 \\ \implies \begin{cases} Q_\alpha(u, v) \xrightarrow{|uv| \rightarrow 0} 0, & \alpha > 0, \\ Q_\alpha(u, v) \xrightarrow{|uv| \rightarrow 0} \infty, & \alpha < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Segue de (3.111) que:

$$\hat{N}_k \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) = z_k \partial_{z_k} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad k = 1, 2, \quad (3.127)$$

e

$$\begin{aligned} a_1 \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) &= z_1 \left[\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) - (-1)^j \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)\tilde{l}}(\varphi, \rho) \Big|_{\tilde{l} = -(1+\vartheta\epsilon)/2} \right], \\ a_2 \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) &= z_2 \left[\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) + (-1)^j \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)\tilde{l}}(\varphi, \rho) \Big|_{\tilde{l} = (1-\vartheta\epsilon)/2} \right]. \end{aligned} \quad (3.128)$$

As eqs. (3.128) permitem calcular os elementos de matriz

$$\left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, a_k \Phi_{z'_1, z'_2, \sigma}^{(j')} \right)_\perp = (a_k)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2, \sigma}^{(j, j')}, \quad k = 1, 2. \quad (3.129)$$

Resulta que estes cálculos são similares ao cálculos (3.85) para o caso de spin-zero, por exemplo:

$$\begin{aligned} (a_1)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2, \sigma}^{(0,0)} &= z'_1 Q_{1-\mu_\sigma}^-(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2}), \quad (a_2)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2, \sigma}^{(0,0)} = z'_2 Q_{1-\mu_\sigma}(\sqrt{z_1^* z'_1}, \sqrt{z_2^* z'_2}), \\ (a_1)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2, \sigma}^{(1,1)} &= z'_1 Q_{\mu_\sigma}(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1}), \quad (a_2)_{z_1, z_2; z'_1, z'_2, \sigma}^{(1,1)} = z'_2 Q_{\mu_\sigma}^-(\sqrt{z_2^* z'_2}, \sqrt{z_1^* z'_1}). \end{aligned} \quad (3.130)$$

É natural definir a média de um dado operador \hat{F} sobre o plano- xy no caso de $2 + 1$ e $3 + 1$ dimensões como segue:

$$\begin{aligned}\overline{(F)}_{(j)} &= \frac{\left(\Psi_{(-)z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \hat{F} \Psi_{(-)z_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_D}{\left(\Psi_{(-)z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \Psi_{(-)z_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_D} \text{ em } 3 + 1 \text{ dim.}, \\ \overline{(F)}_{(j)} &= \frac{\left(\psi_{z_1, z_2}^{(j)}, \hat{F} \psi_{z_1, z_2}^{(j)} \right)_D}{\left(\psi_{z_1, z_2}^{(j)}, \psi_{z_1, z_2}^{(j)} \right)_D} \text{ em } 2 + 1 \text{ dim.},\end{aligned}\quad (3.131)$$

onde $\psi_{z_1, z_2}^{(j)}$ é um dos ICS de duas-componentes dados acima.

Portanto, consideramos os casos importantes quando um operador matricial \hat{F} é a matriz identidade I multiplicada por um operador diferencial \hat{f} , $\hat{F} = \hat{f}I$, ou $\hat{F} = c^2 \left(\sigma \hat{\mathbf{P}}_{\perp} \right)^2$ em $2 + 1$ dimensões, e $\hat{F} = c^2 \hat{\mathbf{Q}}_{\perp}^2$ em $3 + 1$ dimensões. Aqui, podemos expressar $\overline{(F)}_{(j)}$ em termos das médias $\left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \hat{F}_{\sigma} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp}$, onde $\hat{F}_{\sigma} = \hat{f}$, ou $\hat{F}_{\sigma} = c^2 \hat{\mathbf{P}}_{\perp}^2 - \epsilon \hbar c |qB| \sigma$. Portanto, obtemos, por exemplo, para partículas relativísticas e não-relativísticas de spin-up em $3 + 1$ e $2 + 1$ dimensões, as seguintes expressões (com as correspondentes interpretações do número σ)

$$\overline{(F)}_{(j)} = \frac{\left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \hat{F}_{\sigma} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp}}{\left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp}}. \quad (3.132)$$

Para as partículas relativísticas $\zeta = +1$ massivas em $2 + 1$ dimensões obtemos

$$\overline{(F)}_{(j)} = \frac{\left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \hat{F}_{\sigma} [\Pi_0 (z'_1 \partial_{z'_1}) + Mc] \Phi_{z'_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp} \Big|_{z_1=z'_1}}{\left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, [\Pi_0 (z'_1 \partial_{z'_1}) + Mc] \Phi_{z'_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp} \Big|_{z_1=z'_1}}, \quad (3.133)$$

ao passo que para férmions sem massa $\zeta = +1$ em $2 + 1$ dimensões, temos:

$$\overline{(F)}_{(j)} = \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} \left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \hat{F}_{-\vartheta} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp}}{\sum_{\sigma=\pm 1} \left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)} \right)_{\perp}}. \quad (3.134)$$

Note que as médias $\overline{(F)}_{(j)}$ para partículas e antipartículas não-relativísticas de spin, em $3 + 1$ dimensões com um dado s , são expressas em termos das médias (3.132) para o caso não-relativístico em $2 + 1$ de acordo com (3.120).

Portanto, usando (3.127) e a notação (3.132), obtemos as médias dos operadores \hat{N}_k , por exemplo,

$$\overline{(N_k)}_{(j)} = z_k \partial_{z'_k} \ln \mathcal{R}_{\sigma}^{(j)} \Big|_{z'_k=z_k} \quad (3.135)$$

para partículas em $3 + 1$ dimensões e para partículas não-relativísticas de spin-up em $2 + 1$ dimensões;

$$\overline{(N_k)}_{(j)} = z_k \partial_{z'_k} \ln \sum_{\sigma=\pm 1} \mathcal{R}_{\sigma}^{(j)} \Big|_{z'_k=z_k} \quad (3.136)$$

para férmions $\zeta = +1$ sem massa em $2 + 1$ dimensões;

$$\overline{(N_k)_{(j)}} = z_k \partial_{z'_k} \ln \{ [\Pi_0 (z'_1 \partial_{z'_1}) + Mc] \mathcal{R}_\sigma^{(j)} \} \Big|_{z'_k=z_k} \quad (3.137)$$

para partículas relativísticas $\zeta = +1$ massivas em $2 + 1$ dimensões.

Estes resultados permitem, para o caso de partículas com spin, associar os valores médios de \hat{R}^2 e \hat{R}_c^2 dados pelas eqs. (3.113) com os parâmetros z_1 e z_2 . Sabemos que na aproximação semi-clássica temos $\overline{(N_k)_{(j)}} \approx |z_k|^2$. Simultaneamente as escalas de comprimento definidas pelas médias $\overline{(R^2)_{(j)}}$ e $\overline{(R_c^2)_{(j)}}$ devem ser suficientemente grandes, o que implica em $|z_k|^2 \gg 1$. As aproximações correspondentes nos casos limites podem ser obtidas fazendo uso das fórmulas para Q_α apresentadas nas subsecções prévias. Em particular, em primeira aproximação, que é a mesma para os casos de partículas de spin-zero e partículas com spin, obtemos as relações clássicas (3.93).

Fazendo uso de (3.130), encontramos que

$$\overline{(x - i\epsilon y)_{(j)}} = \sqrt{2\gamma^{-1}} \left[\overline{(a_2)_{(j)}} - \overline{(a_1)_{(j)}}^* \right], \quad (3.138)$$

onde, por exemplo,

$$\begin{aligned} \overline{(a_1)_{(0)}} &= z_1 \Delta_{1-\mu_\sigma}(|z_1|, |z_2|), & \overline{(a_2)_{(0)}} &= z_2, \\ \overline{(a_1)_{(1)}} &= z_1, & \overline{(a_2)_{(1)}} &= z_2 \Delta_{\mu_\sigma}(|z_2|, |z_1|), & \Delta_\alpha(u, v) &= \frac{Q_\alpha^-(u, v)}{Q_\alpha(u, v)} \end{aligned} \quad (3.139)$$

para partículas em $3 + 1$ dimensões e para partículas ($\sigma = +1$) (e antipartícula ($\sigma = -1$)) não-relativística de spin-up em $2 + 1$ dimensões, e

$$\begin{aligned} \overline{(a_1)_{(0)}} &= z_1 \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} Q_{1-\mu_\sigma}^- (|z_1|, |z_2|)}{\sum_{\sigma=\pm 1} Q_{1-\mu_\sigma} (|z_1|, |z_2|)}, & \overline{(a_2)_{(0)}} &= z_2, \\ \overline{(a_1)_{(1)}} &= z_1, & \overline{(a_2)_{(1)}} &= z_2 \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} Q_{\mu_\sigma}^- (|z_2|, |z_1|)}{\sum_{\sigma=\pm 1} Q_{\mu_\sigma} (|z_2|, |z_1|)}, \end{aligned} \quad (3.140)$$

para férmions $\zeta = +1$ sem massa em $2 + 1$ dimensões Vale ressaltar que $\mu_\sigma = \mu - \frac{1}{2}\vartheta\epsilon(1 - \vartheta\sigma)$.

3.4 Estados coerentes dependentes do tempo

Com base nos ICS discutidos acima, é possível construir os CS dependentes do tempo (denominaremos estes simplesmente como CS no que segue) como soluções das equações de onda não-estacionárias. Deve-se mencionar que os CS para partícula não-relativística de spin-nulo no MSF foram construídos em nosso recente trabalho [43]. Abaixo, vamos construir os CS para partículas não-relativísticas com spin em $2 + 1$ e $3 + 1$ dimensões, e para partículas relativísticas de spin-zero e com spin em $2 + 1$ e $3 + 1$ dimensões.

3.4.1 Partículas não-relativísticas

Em $2 + 1$ dimensões o comportamento quântico de uma partícula (antipartícula) não-relativística de spin-up é governado pela equação de Pauli (3.49), onde a Hamiltoniana pode ser representada como segue

$$\hat{H}_\pm^{\text{NR}} = \hbar\omega_{\text{NR}} \left[\hat{N}_1 + (1 - \sigma\epsilon)/2 \right] \Big|_{\sigma=\pm 1}.$$

As soluções $\Psi_{\pm 1}^{\text{up}}(t, \mathbf{r})$ de tal equação são

$$\Psi_{\sigma}^{\text{up}}(t, \mathbf{r}) = \mathcal{N} \exp \{ -i [\omega_{\text{NR}} (\sigma - \epsilon) / 2] t \} \Phi_{\sigma}(t, \varphi, \rho) v_{\sigma},$$

respectivamente para os casos \pm , onde \mathcal{N} é uma constante de normalização, v_{σ} é dado por (3.41), e as funções Φ_{σ} são soluções da seguinte equação:

$$i \partial_t \Phi_{\sigma}(t, \varphi, \rho) = \sigma \omega_{\text{NR}} \hat{N}_1 \Phi_{\sigma}(t, \varphi, \rho). \quad (3.141)$$

É possível satisfazer (3.141) assumindo $\Phi_{\sigma}(t, \varphi, \rho) = \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) \Big|_{z_1=z_1(t)}$, onde $z_1(t)$ é uma função complexa do tempo t . Portanto

$$i \partial_t \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) = i \dot{z}_1 \partial_{z_1} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho), \quad \dot{z}_1 = dz_1/dt. \quad (3.142)$$

Substituindo (3.142) em (3.141), encontramos $i \dot{z}_1 = \sigma \omega_{\text{NR}} z_1$, onde (3.127) é usado. É conveniente escrever a solução para $z_1(t)$ como segue:

$$z_1(t) = -|z_1| \exp(-i\sigma\psi), \quad \psi = \omega_{\text{NR}}t + \psi_0, \quad (3.143)$$

onde $|z_1|$ é uma dada constante. Portanto as funções

$$\Psi_{\text{CS}, \sigma}^{(j)\text{up}}(t, \mathbf{r}) = \mathcal{N} \exp \{ -i [\omega_{\text{NR}} (\sigma - \epsilon) / 2] t \} \Phi_{z_1(t), z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) v_{\sigma} \quad (3.144)$$

são soluções da equação de Pauli para partícula não-relativística de spin-up em $2 + 1$ dimensões. Simultaneamente estas soluções apresentam propriedades especiais que permitem tratá-las como CS e mesmo como estados semiclassicos (SS) sob certas condições.

Consideremos a equação de Pauli (3.49) para partículas não-relativísticas de spin-down em $2 + 1$ dimensões. A Hamiltoniana correspondente é escrita como:

$$\hat{H}_{\pm}^{\text{NR}} = \hbar \omega_{\text{NR}} \left[\hat{N}_1 + (1 - \sigma \epsilon) / 2 \right] \Big|_{\sigma=\mp 1}.$$

As soluções $\Psi_{\sigma}^{\text{down}}(t, \mathbf{r})$ da equação apresentam a forma:

$$\Psi_{\sigma}^{\text{down}}(t, \mathbf{r}) = \mathcal{N} \exp \{ -i [\omega_{\text{NR}} (\sigma + \epsilon) / 2] t \} \Phi_{-\sigma}(t, \varphi, \rho) v_{-\sigma},$$

onde para a partícula $\sigma = +1$ e para a antipartícula $\sigma = -1$. Similar ao caso de spin-up, é possível construir os CS como segue

$$\Psi_{\text{CS}, \sigma}^{(j)\text{down}}(t, \mathbf{r}) = \mathcal{N} \exp \{ -i [\omega_{\text{NR}} (\sigma + \epsilon) / 2] t \} \Phi_{z_1(t), z_2, -\sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) v_{-\sigma}. \quad (3.145)$$

Notamos que as médias $\overline{(F)}_{(j)}$ em tais CS coincidem com as médias correspondentes (3.131) para $2 + 1$ dimensões e portanto são reduzidas a $\overline{(F)}_{(j)}$ dada por (3.132).

É conveniente considerar partículas e antipartículas não-relativísticas de spin-zero em $(2 + 1)$ -dimensões. Neste caso, a dinâmica destas partículas é governada pela mesma Hamiltonian $\hat{H}^{\text{NR}} = \hbar \omega_{\text{NR}} \left(\hat{N}_1 + 1/2 \right)$. Similarmente ao caso com spin, podemos construir os CS de spin-zero como segue:

$$\Psi_{\text{CS}, \pm}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}) = \mathcal{N} \exp [\mp i (\omega_{\text{NR}}/2) t] \Phi_{z_1(t), z_2}^{(j)}(\varphi, \rho),$$

onde $\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}$ são definidos por (3.77) e (3.78), e $z_1(t)$ por (3.143).

Em $(3 + 1)$ -dimensões, os CS para partículas não-relativísticas de spin-zero apresentam a forma:

$$\Psi_{\text{CS},\pm}^{(j)\text{NR}}(x) = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\pm \left(\frac{p_3^2}{2M} + \frac{\hbar\omega_{\text{NR}}}{2} \right) t + p_3 z \right] \right\} \Phi_{z_1(t), z_2}^{(j)}(\varphi, \rho). \quad (3.146)$$

Este resultado coincide com o resultado obtido em nossos trabalhos prévios [43].

No caso de considerar apenas observáveis físicos \hat{F} que não dependem de z , então as médias $\overline{(F)}_{(j)}$ em termos dos CS (3.146) são expressas via as médias correspondentes (3.87).

Em $(3 + 1)$ -dimensões, é possível encontrar os CS para partículas não-relativísticas com spin, com uma dada polarização de spin s . Tais CS satisfazem a equação de Dirac não-relativística com a Hamiltoniana, $\hat{H}_{\pm}^{\text{NR}} = \left(\hat{Q}_{\pm}^2 + \hat{P}_3^2 \right) / 2M$, consultar subseção. (3.2.2), e apresentam a forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{CS},\sigma,s}^{(j)\text{NR}}(x) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[\frac{(p_3)^2 \sigma t}{2M} + p_3 z \right] \right\} \Psi_{\text{CS},\sigma,s}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}), \\ \Psi_{\text{CS},\sigma,+1}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}) &= \begin{pmatrix} \Psi_{\text{CS},\sigma}^{(j)\text{up}}(t, \mathbf{r}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_{\text{CS},\sigma,-1}^{(j)\text{NR}}(t, \mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Psi_{\text{CS},\sigma}^{(j)\text{down}}(t, \mathbf{r}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.147)$$

onde a representação (3.120) é usada. No caso de se considerar apenas observáveis físicos \hat{F} que não dependem de z , as médias $\overline{(F)}_{(j)}$ em termos dos CS (3.147) são expressas em termos das médias correspondentes sobre o plano- xy , i.e., via as médias correspondentes (3.131) para partículas em $(2 + 1)$ -dimensões.

3.4.2 Partículas relativísticas em $(3 + 1)$ -dimensões

Em $3 + 1$ dimensões, consideramos a equação de Dirac nas variáveis de plano-nulo, tal que x_- realiza papel de tempo. As soluções Ψ de tal equação apresentam a forma:

$$\begin{aligned} \Psi_{\lambda,\sigma}(x) &= \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left[\lambda M c x_+ + \left(\frac{M c}{\lambda} + \hbar\tilde{\omega} (1 - \sigma\epsilon) \right) x_- \right] \right\} \\ &\times \Phi_{\lambda,\sigma}(x_-, \varphi, \rho) \begin{pmatrix} v_{\sigma} \\ -\sigma v_{\sigma} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

onde

$$i \frac{\partial \Phi_{\lambda,\sigma}(x_-, \varphi, \rho)}{\partial x_-} = \tilde{\omega} \hat{N}_1 \Phi_{\lambda,\sigma}(x_-, \varphi, \rho), \quad (3.148)$$

verificar subseção. (3.2.2).

É possível satisfazer (3.148) assumindo

$$\Phi_{\lambda,\sigma}(x_-, \varphi, \rho) = \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) \Big|_{z_1=z_1(x_-)}, \quad (3.149)$$

onde $z_1(x_-)$ é uma função complexa do tempo x_- . Substituindo (3.149) em (3.148), considerando

$$i \frac{\partial \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho)}{\partial x_-} = i \frac{dz_1}{dx_-} \partial_{z_1} \Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho),$$

e (3.127), encontramos $idz_1/dx_- = \tilde{\omega} z_1$. Uma solução da última equação apresenta a forma:

$$z_1(x_-) = -|z_1| \exp(-i\psi), \quad \psi = \tilde{\omega} x_- + \psi_0, \quad (3.150)$$

onde $|z_1|$ e ψ_0 são constantes. Deste modo, temos um conjunto de soluções da equação de Dirac na seguinte forma

$$\begin{aligned} \Psi_{\text{CS},\sigma}^{(j)}(x) &= \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left[\lambda M c x_+ + \left(\frac{M c}{\lambda} + \hbar \tilde{\omega} (1 - \sigma \epsilon) \right) x_- \right] \right\} \\ &\times \Phi_{z_1(x_-), z_2, \sigma}^{(j)}(\varphi, \rho) \begin{pmatrix} v_\sigma \\ -\sigma v_\sigma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Interpretamos estas soluções como os CS com a evolução no tempo de plano-nulo x_- .

Se supusermos, que tratamos com observáveis físicos \hat{F} que não dependem de x_+ , que é natural para a simetria axial do problema sob consideração. Os elementos de matriz de tais observáveis obtidos em termos dos CS (3.151) (fazemos uso do produto interno (3.64) sobre a hipersuperfície $x_- = \text{const}$) assume a forma:

$$\left(\Psi_{\text{CS},\sigma}^{(j)}, \hat{F} \Psi_{\text{CS},\sigma'}^{(j')} \right)_{x_-} = \frac{(4\pi)^2 \hbar}{\gamma M c} \delta_{\sigma',\sigma} \delta(\lambda' - \lambda) \left(\Phi_{z_1, z_2, \sigma}^{(j)}, \hat{F} \Phi_{z'_1, z'_2, \sigma}^{(j')} \right)_\perp,$$

onde o produto interno $(,)_\perp$ é dado pela eq. (3.25). Isto ocorre uma vez que as médias $\overline{(F)}_{(j)}$ obtidas em termos dos CS coincidem com as médias correspondentes (3.131) em 3 + 1 dimensões sobre o plano- xy e são expressas em termos de $\overline{(F)}_{(j)}$ dados por (3.132).

Seguindo o mesmo procedimento para o caso de spin-zero, construímos os CS que são soluções da equação de Klein-Gordon:

$$\Psi_{\text{CS}}^{(j)}(x) = \mathcal{N} \exp \left\{ -\frac{i}{2\hbar} \left[\lambda M c x_+ + \left(\frac{M c}{\lambda} + \hbar \tilde{\omega} \right) x_- \right] \right\} \Phi_{z_1(x_-), z_2}^{(j)}(\varphi, \rho). \quad (3.152)$$

Os elementos de matriz de um operador \hat{F} obtidos em termos dos estados $\Psi_{\text{CS}}^{(j)}$ (com relação ao produto interno (3.32)) apresentam a forma:

$$\left(\Psi_{\text{CS}}^{(j)}, \hat{F} \Psi_{\text{CS}}^{(j')} \right)_{x_-} = 8\pi^2 \hbar \lambda \gamma^{-1} \delta(\lambda - \lambda') \left(\Phi_{z_1, z_2}^{(j)}, \hat{F} \Phi_{z'_1, z'_2}^{(j')} \right)_\perp.$$

As médias de \hat{F} obtidas em termos dos CS $\Psi_{\text{CS}}^{(j)}$ são reduzidas às médias (3.87).

3.4.3 Evolução dos valores médios em t e x_-

Devemos calcular as médias $\overline{(x)}_{(j)}$ e $\overline{(y)}_{(j)}$ nos CS não-relativísticos construídos acima. Estas médias são expressas em termos das médias $\overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)}$, que apresentam a forma

$$\overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \left[\overline{(a_2)}_{(j)} - \overline{(a_1)}_{(j)}^* \right]. \quad (3.153)$$

Para partículas com spin, as quantidades $\overline{(a_k)}_{(j)}$ são dadas por (3.139), e para partículas de spin-zero as quantidades $\overline{(a_k)}_{(j)}$ são dadas por (3.105). Considerando a eq. (3.143), é possível verificar que as médias $\overline{(x)}_{(j)}$ e $\overline{(y)}_{(j)}$ movem-se ao longo de um círculo sobre o plano- xy com frequência de ciclotron ω_{NR} , i.e., a trajetória das médias apresentam a forma clássica. As mesmas equações permitem encontrar um raio médio $\overline{(R)}_{(j)}$ de tal círculo e a distância $\overline{(R_c)}_{(j)}$ entre seu centro e a origem,

$$\begin{aligned} \overline{(R)}_{(0)} &= \sqrt{2\gamma^{-1}} |z_1| \Delta_{1-\mu_\sigma}(|z_1|, |z_2|), & \overline{(R_c)}_{(0)} &= \sqrt{2\gamma^{-1}} |z_2|, \\ \overline{(R)}_{(1)} &= \sqrt{2\gamma^{-1}} |z_1|, & \overline{(R_c)}_{(1)} &= \sqrt{2\gamma^{-1}} |z_2| \Delta_{\mu_\sigma}(|z_2|, |z_1|). \end{aligned} \quad (3.154)$$

No caso de spin-zero,

$$\Delta_{\mu_\sigma}(|z_2|, |z_1|) = \Delta_\mu(|z_2|, |z_1|), \quad \Delta_{1-\mu_\sigma}(|z_1|, |z_2|) = \Delta_{1-\mu}(|z_1|, |z_2|).$$

Em caso geral, as quantidades $\overline{(R)}_{(j)}$ e $\overline{(R_c)}_{(j)}$ não coincidem com as quantidades correspondentes

$$\sqrt{\overline{(R^2)}_{(j)}} = \sqrt{\left(2\overline{(N_1)}_{(j)} + 1 - \sigma\epsilon\right) \gamma^{-1}}, \quad \sqrt{\overline{(R_c^2)}_{(j)}} = \sqrt{\left(2\overline{(N_2)}_{(j)} + 1\right) \gamma^{-1}}. \quad (3.155)$$

Estas últimas quantidades são expressas em termos das médias dos operadores $\hat{\mathbf{P}}_\perp^2$ e \hat{J} de acordo com (3.113) e (3.127) para partículas com spin e em termos das médias dos operadores $\hat{\mathbf{P}}_\perp^2$ e \hat{L}_z de acordo com (3.76) e (3.88) para partículas de spin-zero (no último caso σ deve-se assumir como zero).

Segue da eq. (3.139) que $\Delta_{1-\mu_\sigma}(|z_1|, |z_2|) < 1$ e $\Delta_{\mu_\sigma}(|z_2|, |z_1|) < 1$. Isto permite-nos elaborar a seguinte interpretação para os dois tipos de estados com $j = 0, 1$. Os estados com $j = 1$ correspondem às órbitas que circundam o solenóide AB (que corresponde a $|z_1| \gtrsim |z_2|$ no limite semiclássico). Para estas órbitas, temos $\overline{(R_c)}_{(1)} < R_c$, onde a quantidade $R_c = \sqrt{2\hbar/M\omega} |z_2|$ é interpretada como a distância entre o solenóide AB e o centro da órbita (verificar o limite clássico da eq. (2.27)). Simultaneamente, o raio médio das órbitas coincide com o raio clássico $R = \sqrt{2\hbar/M\omega} |z_1|$. A interpretação de R como raio clássico segue da eq. (3.93) no limite clássico. Os estados com $j = 0$ correspondem às órbitas que não circundam o solenóide AB (que corresponde a $|z_1| \lesssim |z_2|$ no limite semiclássico). Para tais órbitas $\overline{(R_c)}_{(0)} = R_c$ e $\overline{(R)}_{(0)} < R$.

É possível verificar que os desvios padrão $\delta_j(R)$, $\delta_j(R_c)$, e $\delta_j(x+y) = \sqrt{\text{Var}_j(x+y)}$ em termos dos CS (3.103) e (3.108), são relativamente pequenos para as órbitas semiclássicas situadas suficientemente distantes do eixo do solenóide, i.e., para $\||z_1| - |z_2|\| \gg 1$. Neste caso os CS estão principalmente concentrados nas proximidades das órbitas clássicas. No caso mais interessante, quando uma órbita semiclássica está situada nas proximidades do solenóide, tal que a condição $\||z_1| - |z_2|\| \ll 1$ é válida, o desvio padrão $\delta_j(x+y)$ aumenta significativamente, $\delta_j(x+y) = \delta'(R) \approx 2\pi^{-1/4} \gamma^{-1/2} |z_1|^{3/4}$, ao passo que os desvios padrão $\delta_j(R)$ e $\delta_j(R_c)$ permanecem relativamente pequenos. Neste caso $R \approx R_c$, contudo, $\overline{(R_c)}_{(1)} < R$ e $\overline{(R)}_{(0)} < R_c$, como deve ser para órbitas semiclássicas. Portanto, o desvio padrão $\delta_j(x+y)$ da posição da partícula nas proximidades da órbita clássica é relativamente grande em $R \approx R_c$, tal que $\delta'(R) \gg \left|R - \overline{(R_c)}_{(1)}\right|, \left|\overline{(R)}_{(0)} - R_c\right|$. Mostramos os espalhamentos correspondentes na Fig. 3.2 (onde $\overline{R_c} = \overline{(R_c)}_{(1)}$ e $\overline{R} = \overline{(R)}_{(0)}$)

Enfatizamos que para um solenóide ligado, de modo que sua mantissa seja não nula $\mu \neq 0$, as relações clássicas entre os parâmetros da trajetória da partícula em um campo magnético constante e uniforme são alterados devido a presença do solenóide AB. Acima, demonstramos isto, considerando o raio R (associado a energia de rotação da partícula) e a distância R_c (associada ao momento angular da partícula). Tais relações não são influenciadas pela presença do solenóide AB para $\mu = 0$, e, mesmo para $\mu \neq 0$, no limite clássico.

Finalmente, deve ser notado que apenas as combinações lineares da forma

$$\Psi(c_0, c_1; t, \mathbf{r}) = c_0 \Psi_{\text{CS}}^{(0)}(t, \mathbf{r}) + c_1 \Psi_{\text{CS}}^{(1)}(t, \mathbf{r}),$$

com c_0 e c_1 constantes arbitrárias, $c_0 c_1 \neq 0$, foram consideradas previamente como CS de partículas de spin-zero, consultar [42]. As médias dos operadores \hat{a}_1 e \hat{a}_2 obtidas em termos destes estados superpostos não coincidem com as expressões semiclássicas (3.12).

Para as partículas relativísticas em $(3+1)$ -dimensões, consideramos as médias $\overline{(x - iy)}_{(j)}$ obtidas em termos dos CS (3.151) e (3.152) sobre a hipersuperfície $x_- = \text{const}$. Estas médias são reduzidas às

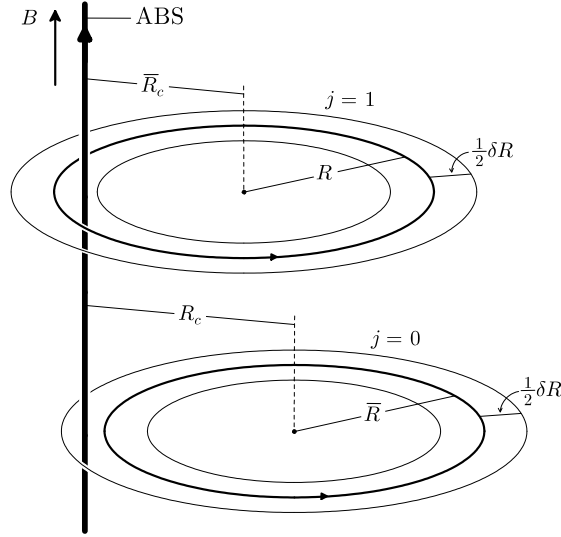


Figura 3.2: Espalhamento das posições da partícula nas proximidades da órbita clássica para $R \approx R_c$.

médias $\overline{(x - i\epsilon y)}_{(j)}$ representadas acima pela eq. (3.153). As relações (3.154) e (3.155) permanecem verdadeiras. Aqui contudo, a evolução é parametrizada pelo tempo de plano-nulo x_- , em termos da função $z_1(x_-)$ dada pela eq. (3.150). É possível verificar que as médias $\overline{(x)}_{(j)}$ e $\overline{(y)}_{(j)}$ giram ao longo dos círculos sobre o plano- xy com frequência de sincrotron ω , i.e., suas trajetórias apresentam a forma clássica (3.18).

3.5 Sumário

Um novo procedimento para a construção dos CS/SS em MSF é proposto. A idéia principal é baseada no fato de que o solenoide AB quebra a simetria translacional no plano- xy , isto apresenta um efeito topológico tal que surgem dois tipos de trajetórias circulares que circundam e não circundam o solenoide. Em virtude deste fato, é possível construir dois diferentes tipos de CS/SS, os quais correspondem estas trajetórias no limite semiclássico. Seguindo esta idéia, construímos os CS em dois passos, primeiro os CS instantâneos (ICS) e segundo os CS/SS dependentes do tempo como uma evolução dos ICS.

A construção é realizada para partículas não-relativísticas e relativísticas de spin-zero e com spin tanto em $(2 + 1)$ -dimensões quanto em $(3 + 1)$ -dimensões e gera um exemplo não-trivial de SS/CS para sistemas com Hamiltonianas do tipo não-quadrático.

É enfatizado que os CS dependendo de seus parâmetros (números quânticos) descrevem tanto estados quânticos quanto semiclássicos. Uma análise é representada de modo a classificar os parâmetros dos CS em tal relação. Tal classificação é usada para as decomposições semiclássicas de diversas quantidades físicas.

Na aproximação semiclássica, as relações entre os parâmetros dos CS/SS e os parâmetros que caracterizam as trajetórias clássicas são estabelecidos. No caso geral, estas relações diferem das relações para o campo magnético puro e tal distinção pode ser tratada como o efeito AB sobre os CS/SS.

As seguintes propriedades associadas aos CS/SS dependentes do tempo devem ser enfatizadas:

a) No caso não-relativístico, tanto em $(2 + 1)$ quanto em $(3 + 1)$ -dimensões, os CS dependentes

do tempo em cada instante preservam a forma dos ICS correspondentes. As trajetórias médias obtidas em termos dos CS coincidem com as trajetórias clássicas, ao passo que na aproximação semiclássica as distribuições de partículas são concentradas nas proximidades das trajetórias clássicas. Na presença do solenóide AB, o espalhamento das posições das partículas nas proximidades das trajetórias clássicas depende essencialmente da disposição mútua entre a trajetória e o solenóide. Tal espalhamento aumenta para trajetórias situadas nas proximidades do solenóide AB.

b) No caso relativístico, em $(3 + 1)$ -dimensões, os CS são construídos em variáveis de plano-nulo, onde a evolução é parametrizada pelo tempo de plano-nulo x_- . Tais CS dependentes do tempo satisfazem todas as propriedades associadas aos CS discutidos no (item a).

3.6 Apêndice A

Neste apêndice apresentaremos algumas propriedades da função de Laguerre. A função de Laguerre $I_{n,m}$ é definida por

$$I_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+m)\Gamma(1+n-m)}} \exp(-x/2) x^{(n-m)/2} \Phi(-m, n-m+1; x)$$

Neste caso, $\Phi(a, b; x)$ é a função hipergeométrica confluyente em uma definição padrão. Seja m um número inteiro não-positivo; então a função de Laguerre está relacionada com os polinômios de Laguerre $L_m^\alpha(x)$ por

$$I_{m+\alpha,m}(x) = \sqrt{\frac{m!}{\Gamma(m+\alpha+1)}} \exp(-x/2) x^{\alpha/2} L_m^\alpha(x),$$

onde

$$L_m^\alpha(x) = \frac{1}{m!} \exp(x) x^{-\alpha} \frac{d^m}{dx^m} [\exp(-x) x^{m+\alpha}]$$

Fazendo uso das propriedades da função hypergeometrica confluyente, é possível obter as seguintes relações para as funções de Laguerre:

$$2\sqrt{x(n+1)} I_{n+1,m}(x) = (n-m+x) I_{n,m}(x) - 2x \frac{dI_{n,m}}{dx},$$

$$2\sqrt{x(m+1)} I_{n,m+1}(x) = (n-m-x) I_{n,m}(x) + 2x \frac{dI_{n,m}}{dx},$$

$$2\sqrt{nx} I_{n-1,m}(x) = (n-m+x) I_{n,m}(x) + 2x \frac{dI_{n,m}}{dx},$$

$$2\sqrt{mx} I_{n,m-1}(x) = (n-m-x) I_{n,m}(x) - 2x \frac{dI_{n,m}}{dx}.$$

Fazendo uso das propriedades da função hipergeometrica confluyente, é possível obter a representação

$$I_{n,m}(x) = \sqrt{\frac{\Gamma(1+n)}{\Gamma(1+m)\Gamma(n-m+1)}} \exp(x/2) x^{(n-m)/2} \Phi(n+1, n+1-m; -x)$$

bem como a relação

$$I_{n,m}(x) = (-1)^{n-m} I_{m,n}(x),$$

onde $n - m$ é um inteiro.

As funções $I_{m+\alpha,m}(x)$ satisfazem a condição de ortogonalidade,

$$\int_0^{\infty} I_{n+\alpha,n}(x) I_{m+\alpha,m}(x) dx = \delta_{n,m}$$

a quais são provenientes das propriedades correspondentes dos polinômios de Laguerre. O conjunto das funções de Laguerre

$$I_{n+\alpha,n}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha > -1$$

é um conjunto completo no espaço de funções do tipo quadrado-integrável sobre o semieixo positivo ($x \geq 0$),

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{n+\alpha,n}(x) I_{n+\alpha,n}(y) = \delta(x - y).$$

Referências Bibliográficas

- [1] J.R.Klauder, E.C.Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, (Benjamin, 1968)
- [2] I.A.Malkin, V.I.Man'ko, *Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems*, (Nauka, Moscow, 1979) pp.320
- [3] I.R.Klauder, B.S.Skagerstam, *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, (World Scientific, Singapore, 1985). pp.991
- [4] A.M.Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, (Springer-Verlag, 1986)
- [5] V.G.Bagrov, D.M.Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations*, (Kluwer acad. publish., 1990) pp.323
- [6] A.M.Perelomov, *Comm. Math. Phys.*, **26** (1972) 222
- [7] M.Rasetti, *Int. J. Theor. Phys.*, **13** (1975) 425
- [8] F.A.Berezin, *Comm. Math. Phys.*, **40** (1975) 153
- [9] F.A.Berezin, *The Method of Secondary Quantization*, (Nauka, Moscow, 1986)
- [10] F.Bloch, *Phys. Rev.*, **70** (1946) 460; F.Bloch, W.W.Hansen and M.Packard, *Phys. Rev.*, **70** (1946) 474
- [11] J.M.Radcliff, *J. Phys. A* **4** (1971) 313
- [12] F.T.Arecchi, E.Courtens, R.Gilmor, H.Thomas, *Phys. Rev.* **6** (1972) 2211
- [13] E.M.Lieb, *Comm. Math. Phys.*, **31** (1973) 327
- [14] J.Bellisard, R.Holts, *J. Math. Phys.* **15** (1974) 1275
- [15] R.Delborgo and J.R.Fox, *J. Phys.*, **A10** (1977) 223; R.Delbourgo, *J. Phys.* **A10** (1977) 1837
- [16] D.M. Gitman and A.L. Shelepin, *Coherent States of the $SU(N)$ groups*, *Journ. Phys. A* **26** (1993) 313-327; *Coherent States of $SU(l,1)$ Groups*, *Journ. Phys. A* **26** (1993) 7003-7018
- [17] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys.Rev.* **115** (1959) 485.
- [18] S. Olariu and I.I. Popescu, *Rev. Mod. Phys.* **47** (1985) 339; M. Peskin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect* (Springer-Verlag, Berlin 1989).
- [19] Y.H. Chen, F. Wilczek, E. Witten, and B.I. Halperin, *Int. J. Mod. Phys. B* **3** (1989) 1001-1067; F.Wilczek, *Fractional statistics and anyon superconductivity* (World Scientific, Singapore, 1990).

- [20] Yu. A. Sitenko and N. D. Vlasii, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 164034; P. R. Giri, *Hydrino like states in graphene and Aharonov-Bohm field*, arXiv:0808.3309; A. Roy and M. Stone, J. Phys. A: Math. Theor. **43** (2010) 015203.
- [21] R. Jackiw, A. I. Milstein, S.-Y. Pi, and I. S. Terekhov, Phys. Rev. B **80** (2009) 033413.
- [22] J-Ch Charlier, X. Blase, and S. Roche, Rev. Mod. Phys. **79** (2007) 677.
- [23] C.R. Hagen, Phys. Rev. D **31** (1985) 848; M. Boz, V. Fainberg, and N.K. Pak, Phys. Lett. **A 207** (1995) 1; Ann. Phys. **246** (1996) 347
- [24] A. Kobakhidze, Phys. Rev.D **76** (2007) 097701.
- [25] M.G. Alford, J. March-Russel, and F. Wilczek, Nucl. Phys., **B 328** (1989) 140.
- [26] M.G. Alford and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett., **62** (1989) 1071; P. de Sousa Gerbert and R. Jackiw, Commun. Math. Phys. **124** (1989) 229; M. Bordag, K. Kirsten, Phys. Rev. **D 60** (1999) 105019; C.G. Beneventano, M. De Francia, K. Kirsten and E.M. Santangelo, Phys. Rev. **D 61** (2000) 085019; Yu. A. Sitenko and N. D. Vlasii, Class. Quant. Grav. **26** (2009) 195009; K. Jones-Smith, H. Mathur, and T. Vachaspati, Phys. Rev. D **81**, 043503 (2010); Yi-Zen Chu, H. Mathur, and T. Vachaspati, *Aharonov-Bohm radiation of fermions*, arXiv:1003.0674.
- [27] R.R. Lewis, Phys. Rev. **A28** (1983) 1228.
- [28] V.G. Bagrov, D.M. Gitman, and V.B. Tlyachev, J. Math. Phys. **42**, No.5 (2001) 1933.
- [29] V.G. Bagrov, D.M. Gitman, A. Levin, and V.B. Tlyachev, Mod. Phys. Lett. **A 16**, No. 18 (2001) 1171; Nucl. Phys. **B605** (2001) 425; V.G. Bagrov, D.M. Gitman, and V.B. Tlyachev, Int. J. Mod. Phys. **A17** (2002) 1045.
- [30] H. Falomir, P.A.G. Pisani, J. Phys. A **34** (2001) 4143.
- [31] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, and A.A. Smirnov, Eur. Phys. Journ. C direct **30** (2003) 009; **32** Suppl. (2003) s119; Phys. Rev. A **67** (2003) 024103.
- [32] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, A.A. Smirnov, and B.L. Voronov, *Dirac fermions in a magnetic-solenoid field*, "Focus on mathematical physics research" (ISBN: 1-59033-923-1), ed. by C. V. Benton (Nova Science Publishers, NY 2004) 131.
- [33] P. Exner, P. Št'oviček and P. Vytřas, J. Math. Phys., **43** (2002) 2151.
- [34] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, and A.A. Smirnov, J. Math. Phys. **45** (2004) 1873; O. Lisovyy, J. Math. Phys. **48** (2007) 052112.
- [35] D.M. Gitman, I.V. Tyutin, A. Smirnov, and B.L. Voronov, *Self-adjoint Schrödinger and Dirac operators with Aharonov-Bohm and magnetic-solenoid fields*, arXiv:0911.0946.
- [36] Y. Nambu, Nucl. Phys. **B579** (2000) 590; H.-P. Thienel, Ann. Phys. **280** (2000) 140-162; R.M. Cavalcanti, *Comment on "Quantum mechanics of an electron in a homogeneous magnetic field and a singular magnetic flux tube"*, quant-ph/0003148; M. Hirokawa and O. Ogurusu, J. Math. Phys., **42** (2001) 3334; J. Math. Phys. **45** (2004) 1873; T. Mine, Ann. Henri Poincaré **6** (2005) 125; T. Mine, Y. Nomura, Rev. Math. Phys. **18**, No. 8 (2006) 913.

- [37] M. I. Katsnelson and K. S. Novoselov, *Solid State Commun.* **143** (2007) 3; A.K.Geim, K.S. Novoselov, *Nature Materials* **6** (2007) 183; A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov, and A. K. Geim, *Rev. Mod. Phys.* **81** (2009) 109.
- [38] J.R.Klauder, E.C.Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, (Benjamin, 1968); I.A.Malkin, V.I.Man'ko, *Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems*, (Nauka, Moscow, 1979); I.R.Klauder, B.S.Skagerstam, *Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics*, (World Scientific, Singapore, 1985); A.M.Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, (Springer-Verlag, 1986); W. M. Zhang, D. H. Feng, and R Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **62** (1990) 867; J. R. Klauder, *The Current State of Coherent States*, arXiv:quant-ph/0110108; Mostafazadeh and F. Zamani, *Ann. Phys.* **321** (2006) 2210; A Vourdas, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) R65; J.-P. Gazeau, *Coherent States in Quantum Optics* (Berlin: Wiley-VCH, 2009).
- [39] B. Huttner, N. Imoto, N. Gisin, and T. Mor, *Phys. Rev. A* **51** (1995) 1863; T. C. Ralph, W. J. Munro, and G. J. Milburn, *Proceedings of SPIE* 4917, 1 (2002), quant-ph/0110115; T. C. Ralph, A. Gilchrist, G. J. Milburn, W. J. Munro, and S. Glancy, *Phys. Rev. A* **68**, 042319 (2003); M. Nielsen and I. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000).
- [40] I.A. Malkin, V.I. Man'ko, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **55** (1968) 1014 [*Soviet Phys. JETP* **28** (1969) 527]; A. Feldman, A.N. Kahn, *Phys. Rev. B*, **1** (1970) 4584; K. Kowalski and J. Rembieliński, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38** (2005) 8247; A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, and E. Solano, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 123602; V.G. Bagrov, D.M. Gitman and I.L. Buchbinder, *Izv. VUZov Fizika (Sov. Phys. Journ.)* **8** (1975) 134; *J. Phys. A* **9** (1976) 1955; V.G. Bagrov, I.L. Buchbinder, D.M. Gitman and P.M. Lavrov, *Theor. Mat. Fiz.* **33** (1977) 419.
- [41] V.G. Bagrov and D.M. Gitman, *Exact Solutions of Relativistic Wave Equations* (Kluwer, Dordrecht 1990).
- [42] V.G. Bagrov, D.M. Gitman, V.D. Skarzhinsky, *Aharonov-Bohm effect for stationary and coherent states of an electron in homogeneous magnetic field*, *Trudy FIAN (Proceedings of Lebedev Institute)*, **176** (1986) 151; Bagrov V G, Gavrilov S P, Gitman D M and Meira Filho D P 2008 in: *Problems of Modern Theoretical Physics* Ed. V. Epp (Tomsk State University Press, Tomsk) p 57.
- [43] V.G. Bagrov, S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, and D. P. Meira Filho, e-Print: arXiv:1002.2256, *J. Phys. A* **43** (2010).
- [44] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 1994).
- [45] D.M. Gitman, V.M. Shachmatov and Sh.M. Shvartsman, *Sov. Phys. Journ.* **8** (1975) 43.
- [46] A.S. Davidov, *Quantum mechanics*, 2-nd ed. (Pergamon Press, Oxford, 1976).