Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Partículas Exóticas em Regras de Soma da QCD

Ricardo D'Elia Matheus

Tese apresentada ao Instituto de Física
da Universidade de São Paulo para a
obtenção do título de Doutor em Ciências

Orientadora: Profa. Dra. Marina Nielsen

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Marina Nielsen (USP)

Prof. Dr. Airton Deppman (USP)

Prof. Dr. Gustavo Alberto Burdman (USP)

Prof. Dr. Marcelo Chiapparini (UERJ)

Prof. Dr. Ignácio Alfonso de Bediaga e Hickman (CBPF)

São Paulo, 2006

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e
Informação
do Instituto de Física da Universidade de São
Paulo

Matheus, Ricardo D'Elia
Partículas exóticas em regras de soma da QCD . São
Paulo, 2006.

Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física. Física Experimental

Orientador: Profa. Marina Nielsen

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Cromodinâmica quântica; 2. Partículas
elementares; 3. Teoria de campos; 4. Física de alta
energia.

USP/IF/SBI-079/2006

Aos meus avós,
Caetano, Josefina, Osvaldo e Francisca.

Aos meus pais,
Cláudio e Elisabeth.

Agradecimentos

A Marina Nielsen pela sua orientação enérgica, sua atitude positiva e pelo contagiante prazer que ela demonstra no exercício do trabalho de pesquisa. Também agradeço a Fernando Silveira Navarra que me orientou na primeira metade deste trabalho. Ambos contribuíram enormemente para minha formação e se tornaram verdadeiros amigos, pelos quais tenho grande apreço.

Ao colega Rômulo Rodrigues da Silva por todo trabalho realizado em conjunto e por todas as dúvidas respondidas.

Aos colaboradores Mirian E. Bracco e Alberto Lozée Feijó Soares, pela ajuda na elaboração deste trabalho.

À professora Ana Regina Blak pelos conhecimentos transmitidos e pelo continuado apoio e incentivo.

Aos colegas do GRHAFITE: David, Diogo, Gabriel, Simone, Arthur, Daniela, Patrícia, Regina e Babi, bem como aos professores Manoel Robilotta e Celso Lima e aos secretários Olga e Paulo. Todos colaboraram para a existência de um agradável e produtivo ambiente de trabalho.

Aos meus caros amigos: Ilomar, Lécio, Caio, Lucas, Rubens, Bob, e Diego, por continuarem presentes e ouvindo minhas reclamações depois de uma década de amizade.

Aos meus amigos e companheiros de jogatina: Jorge, Ivan, Flexa, Arthur, Ilomar, Lécio, Fernando e a meu irmão Mauro, pelos domingos mais do que felizes passados juntos e ao André pela duradoura amizade.

A meus pais, Cláudio e Elisabeth, por tornarem tudo isto possível e por sua constante presença e apoio às minhas ambições. Acima de tudo eu lhes agradeço pelo amor e os ensinamentos que me foram dados.

À minha amada Mirela por estar ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis, mas principalmente por fazer parte dos momentos mais felizes da minha vida. Sua resoluta disposição de seguir me apoiando pelo longo e errante caminho da vida acadêmica me dá forças para continuar em frente.

À FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho usamos as regras de soma da QCD para calcular as massas e constantes de acoplamento ou decaimento dos estados exóticos $\Theta^+(1540)$ e $\Xi^{--}(1862)$ (pentaquarks), dos mesons escalares charmosos $D_{sJ}^+(2317)$, $D_0(2308)$ e $D_0(2405)$ e do meson axial $X(3872)$. Os mesons foram também tratados como estados exóticos de quatro quarks (tetraquarks). Dois métodos de regra de soma foram aplicados e uma atenção especial foi dada aos limites de validade e incertezas da regra de soma. Em todos os casos encontramos resultados compatíveis com os dados experimentais existentes, mas no caso dos pentaquarks e dos mesons escalares as regras de soma têm algumas de suas condições violadas, levantando a questão sobre a existência das ressonâncias na forma em que foram propostas. Fizemos também uma previsão para um méson axial X_b , que é uma expansão para o setor botônico do modelo assumido para o $X(3872)$.

Abstract

In this work the QCD Sum Rules have been used to obtain masses and coupling or decay constants of the $\Theta^+(1540)$ and $\Xi^{--}(1862)$ pentaquarks, the $D_{sJ}^+(2317)$, $D_0(2308)$ and $D_0(2405)$ charmed scalar mesons and the $X(3872)$ axial meson. The mesons have been treated as 4-quark exotic states (tetraquarks). Two sum rules methods have been used with special attention given to the limits and uncertainties of the sum rules. Results consistent with experimental data have been found in all cases, but some of the sum rules constraints have been violated in the calculation of the pentaquarks and scalar mesons, leaving questions about the existence of the states as they have been built here. A prediction was also made for the mass of a state expanding the model used for $X(3872)$ to the bottom sector, named X_b .

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Pentaquarks	2
1.2	Tetraquarks	3
1.2.1	O $X(3872)$	4
2	Regras de Soma da QCD (RSQCD)	6
2.1	Função de correlação	7
2.2	Expansão do Produto de Operadores de Wilson (OPE)	8
2.3	Lado Fenomenológico	11
2.3.1	O contínuo e a densidade espectral	12
2.4	Transformada de Borel	14
2.5	A “janela de Borel” e a validade das RSQCD	16
2.5.1	Estabilidade em M^2	16
2.5.2	Dominância do polo sobre o contínuo	16
2.5.3	A convergência da OPE	17
2.6	Determinação dos parâmetros hadrônicos	17
2.7	As Regras de Soma de Energia Finita (FESR)	18
3	Os pentaquarks $\Theta^+(1540)$ e $\Xi^{--}(1862)$	20
3.1	As possíveis correntes	20
3.2	Critérios de escolha e mistura das correntes	22
3.2.1	Cálculo do isospin	22
3.2.2	Paridade das correntes	27
3.2.3	Conclusões	29
3.3	O lado fenomenológico	30
3.4	O lado da OPE	31
3.4.1	A corrente $\eta_{[27]}$	31
3.4.2	A corrente $\eta_{[31]}$	33

3.4.3	A corrente $[\eta_{[32]} + t \eta_D]$	34
3.4.4	As correntes do $\Xi^{--}(1862)$: $\eta_{I[28]}$ e $\eta_{II[28]}$	37
3.5	Resultados (RSQCD)	39
3.5.1	A corrente $\eta_{[31]}$	40
3.5.2	A corrente $\eta_{[27]}$	45
3.5.3	A corrente $\eta_{[32]}$	49
3.5.4	A corrente $\eta_{II[28]}$	51
3.5.5	A corrente $\eta_{I[28]}$	53
3.6	Resultados (FESR)	55
3.6.1	As correntes do $\Theta^+(1540)$	57
3.6.2	As correntes do $\Xi^{--}(1862)$	60
3.7	Conclusões	61
4	Os tetraquarks	64
4.1	Mesons escalares charmosos	64
4.1.1	Isospin e paridade	65
4.1.2	O lado fenomenológico	66
4.1.3	O lado da OPE	66
4.1.4	Resultados numéricos (RSQCD)	69
4.1.5	Resultados numéricos (FESR)	75
4.1.6	Conclusões	76
4.2	O $X(3872)$	77
4.2.1	Isospin e paridade	78
4.2.2	O lado fenomenológico	79
4.2.3	O lado da OPE	79
4.2.4	Resultados numéricos (RSQCD)	82
4.2.5	Resultados numéricos (FESR)	85
4.2.6	Testando a violação de isospin	85
4.3	Previsões para o X_b	88
5	Conclusões	92
A	O propagador não perturbativo	94
A.1	A parte perturbativa	94
A.2	A parte não perturbativa	97
A.3	A parte não fatorável	100
A.4	Propagador para quarks leves	101
A.5	Propagador para quarks pesados	102

B	Relações de dispersão	104
C	Exemplos do cálculo de diagramas	107
C.1	Correntes com quarks leves	107
C.2	Correntes com quarks pesados	110
C.2.1	Diagramas com 1 quark pesado	110
C.2.2	Diagramas com 2 quarks pesados	114

Capítulo 1

Introdução

Acredita-se que a cromodinâmica quântica seja a teoria fundamental da interação forte, com três propriedades fundamentais: liberdade assintótica, confinamento, simetria quiral aproximada e a sua quebra espontânea. No regime de altas energias a QCD já foi testada até uma precisão de 1%. No entanto, no regime de baixas energias a QCD é altamente não-perturbativa. É muito difícil calcular todo o espectro hadrônico a partir da QCD. Com o rápido desenvolvimento de novas idéias e poder computacional, a QCD na rede pode um dia fornecer a solução final para o problema do espectro. Mas no momento tudo que se pode entender por meio da QCD na rede foi a primeira excitação angular e orbital do nucleon [1, 2].

Vários modelos baseados em QCD, ou que pelo menos incorporam aspectos importantes desta, foram então propostos para explicar a espectroscopia de hadrons e outras propriedades de baixas energias. Entre elas é justo dizer que o modelo de quarks foi o mais bem sucedido. Ele é amplamente utilizado para classificar hadrons e calcular suas massas, propriedades estáticas e reações de baixas energias [3]. De acordo com este modelo, os mesons são compostos de um par quark anti-quark ao passo que os bárions são compostos de três quarks. Ambos em estados singletos de cor. A esmagadora maioria dos hadrons observados experimentalmente pode ser facilmente acomodada no modelo de quarks. Qualquer estado com conteúdo de quarks diferente de $q\bar{q}$ ou qqq está fora do modelo de quarks, e é chamado de estado exótico. É muito difícil, por exemplo, encaixar o par $f_0(980)$ $a_0(980)$ em uma posição confortável no modelo de quarks. Existem modelos sugerindo que eles podem ser moléculas de kaons ou estados de quatro quarks (ou tetraquarks) [4, 5].

De fato, além dos mesons e bárions convencionais, a QCD não proíbe a existência de estados não convencionais tais como as “glueballs” ($gg, ggg, \dots$), os mesons híbridos ($q\bar{q}g$) e outros estados de muitos quarks ($qqq\bar{q}, qqqq\bar{q}, qqqq\bar{q}\bar{q}, qqqqqq, \dots$). Nos primórdios da QCD Jaffe propôs a partícula H usando o modelo de sacola do MIT [6]. Este era um

estado de seis quarks que infelizmente nunca foi encontrado experimentalmente.

Alguma evidência experiemetal foi acumulada recentemente sobre a possível existência de glueballs e mesons híbridos com números quânticos exóticos tais como $J^{PC} = 1^{-+}$ [7].

Nas seções que seguem nós exploraremos dois grupos destes estados exóticos, neste caso compostos de muitos quarks. São eles os pentaquarks e os tetraquarks.

1.1 Pentaquarks

O bárion exótico $\Theta^+(1540)$ [8] foi primeiramente observado em 2003 na reação:

$$\gamma + n \rightarrow K^- + \Theta^+ \rightarrow K^- + K^+ + n$$

em um experimento realizado pela colaboração LEPS no laboratório SPring-8, no Japão. A busca fora motivada por um trabalho teórico feito por Diakonov, Petrov e Polyakov [9], no qual eles previam um bárion estreito de estranheza $S = +1$. A massa medida foi de 1540 ± 10 MeV e o limite superior da largura era de 25 MeV. A estranheza positiva implicava que o Θ^+ continha ao menos um $\bar{s}$ e portanto um número mínimo de 5 quarks. A carga e a estranheza eram compatíveis com o conteúdo $uudd\bar{s}$ e foi por isso que o nome “pentaquark” passou a denominá-la. Muitos outros grupos corroboraram a observação nos meses que se seguiram [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]

A descoberta do Θ^+ foi logo seguida de uma outra: o Ξ^{--} , encontrado pela colaboração NA49 no CERN [21], tinha conteúdo mínimo de quarks $ssdd\bar{u}$. Ele foi medido na massa 1862 ± 2 MeV com uma largura menor que a resolução do detector ($\Gamma < 18$ MeV).

Apesar de alguns grupos terem obtido resultados negativos [22, 23, 24]¹, a grande quantidade de resultados positivos motivou uma intensa atividade teórica na tentativa de entender a estrutura e propriedades destes pentaquarks.

Na ref. [26], Zhu explorou a idéia do estado ligado $K - N$ numa versão em que uud e $u\bar{s}$ não estão separados em singletos de cor. Nossos trabalhos [27, 28, 29] se fundamentaram na sugestão de Jaffe e Wilczek (JW) para os pentaquarks [30], onde sua estrutura seria do tipo de estado diquark-diquark-antiquark. Em JW, cada par de diquark possui spin zero e é um elemento da representação de $SU(3)$. O estado resultante da combinação diquark-diquark-antiquark é um antidecuplete $\bar{10}_f$ e um octeto $\bar{8}_f$ em sabor Fig.(1.1). Esta hipótese também foi explorada por Sugiyama et al. [31] e por Eidemüller [32]. Outras tentativas teóricas estão devidamente revisadas em [33].

Apesar de ser citado com uma ressonância de três estrelas no PDG 2004 [34], a situação experimental dos pentaquarks começou a mudar no começo de 2005. Alguns grupos que previamente haviam anunciado um resultado positivo passaram a não mais encontrá-lo

¹Para um quadro completo veja [25].

Figura 1.1: Os pentaquarks representantes do modelo de Jaffe e Wilczek.

em novos experimentos, estes mais cuidadosos e com maior estatística [35, 36, 37, 38, 39]. Com um número crescente de experimentos engrossando o coro dos resultados negativos, a comunidade rapidamente perdeu a confiança na existência do pentaquark. Muito trabalho experimental ainda é necessário para entender o que pode ter dado o falso positivo anterior, mas parece hoje muito provável que o resultado negativo se confirme [40, 41], a despeito de ainda existirem algumas opiniões favoráveis à existência do pentaquark [42].

No capítulo 3 exploraremos a aplicação das Regras de Soma da QCD ao pentaquark, mostrando os resultados que podem ser obtidos e os problemas encontrados no estudo desta polêmica partícula.

1.2 Tetraquarks

O ano de 2003 foi um ano muito generoso para a espectroscopia de hadrons, além da descoberta dos pentaquarks, foram anunciadas as primeiras observações dos mesons escalares charmosos. O estado $D_{sJ}^+(2317)$, bem estreito, foi descoberto no canal $D_s^+\pi^0$ pela Colaboração BABAR [43] e foi confirmado pelas colaborações CLEO [44], BELLE [45] e FOCUS [46]. Sua massa foi medida como 2317 MeV, o que está aproximadamente 160 MeV abaixo da previsão do modelo de quarks para mesons charmosos [47], que é um modelo usualmente bem sucedido. A colaboração BELLE [48] também observou um meson escalar razoavelmente largo, o $D_0^0(2308)$, e a colaboração FOCUS [49] achou evidências de estruturas largas tanto nos estados finais neutros como nos carregados que, se interpretadas como ressonâncias no canal $J^P = 0^+$, seriam os mesons $D_0^0(2407)$ e $D_0^+(2403)$. A massa do meson escalar $D_0^0(2308)$, observado pela Colaboração BELLE, também está abaixo da previsão da referência [47] (aproximadamente 100 MeV), enquanto

que as massas dos possíveis estados da colaboração FOCUS estão em total concordância com a referência [47].

Devido a sua massa pequena, a estrutura do meson $D_{sJ}^+(2317)$ foi debatida extensivamente. Ele foi interpretado como um estado $c\bar{s}$ [50, 51, 52, 53, 54], um estado molecular de dois mesons [55, 56], “ $D - K$ - mixing” [57], estado de quatro quarks [58, 59, 60] ou uma mistura entre os estados de dois mesons e quatro quarks [61]. A mesma análise seria também aplicada ao $D_0^0(2308)$.

No setor leve a idéia de que os mesons escalares poderiam ser estados de quatro quarks não é nova [4] e, portanto, é natural considerar estados análogos no setor charmoso.

Nossa proposta [62] foi de que a ressonância observada na colaboração BELLE [48] e a possível ressonância da colaboração FOCUS [49] fossem consideradas como duas ressonâncias diferentes. Na seção 4.1 usaremos as Regras de Soma da QCD para estudar os mesons $D_{sJ}(2317)$, $D_0(2308)$ e $D_0(2405)$ considerados como estados de quatro quarks. As Regras de Soma já haviam sido utilizadas antes para estudar os mesons escalares [50, 53, 54], mas interpretados como estados de dois quarks.

1.2.1 O $X(3872)$

Ainda em 2003, houve um anúncio por parte da colaboração BELLE [63] de uma ressonância estreita no processo: $B^+ \rightarrow X(3872)K^+ \rightarrow J/\psi \pi^+\pi^- K^+$. Esta ressonância foi logo confirmada pelas colaborações D0 [64], CDF II [65] e BABAR [66]. A média das massas medidas por estes experimentos nos dá: $m_X = 3871,9 \pm 0,5$ MeV. A largura foi medida no BELLE com limite superior de 2,3 MeV com nível de confiança de 90% (os outros experimentos indicam uma largura menor que a resolução experimental). Os números quânticos mais prováveis para a partícula são: $J^{PC} = 1^{++}$ [67].

A cooperação BELLE também mediu o decaimento do X em três pions: $X(3872) \rightarrow J/\psi \pi^+\pi^-\pi^0$. De fato, a ref. [68] fornece:

$$\frac{Br(X \rightarrow \pi^+\pi^-\pi^0 J/\psi)}{Br(X \rightarrow \pi^+\pi^- J/\psi)} = 1.0 \pm 0.4 \pm 0.3,$$

com forte violação de isospin, o que indica que o estado provavelmente não é um charmônio ($c\bar{c}$), que teria $I = 0$. Além disso o estado do espectro do charmônio² mais próximo com os números quânticos corretos, o $\chi_1'(3925)$, tem a massa um tanto alta e a largura é uma ordem de grandeza maior (≈ 16 MeV) na melhor das hipóteses [67].

A falha na identificação do $X(3872)$ como um charmônio levou a várias propostas para sua estrutura: tetraquark [69, 70], cusp [71], híbrido [72] ou glueball [73]. Outra explicação é que o $X(3872)$ seja um estado ligado $D\bar{D}^*$ [74, 75, 76, 77, 78], como previsto antes da sua descoberta.

²Calculado com modelos de quark constituinte.

No nosso trabalho [79] usamos as Regras de Soma da QCD para examinar o $X(3872)$ encarado como um estado diquark-antidiquark de acordo com a proposta de Maiani et al. [69]. Estes resultados serão mostrados na seção 4.2.

Capítulo 2

Regras de Soma da QCD (RSQCD)

As regras de soma da QCD são uma técnica que permite um tratamento aproximado de efeitos não-perturbativos na QCD. O método, desenvolvido há mais de vinte anos [80], possui uma grande gama de aplicações sendo muito bem sucedido em algumas delas. Alguns exemplos são:

- Determinação das massas de quarks leves (u, d, s) e pesados (c, b);
- Determinação de massas e constantes de decaimento de mesons e bárions leves e pesados;
- Cálculo de fatores de forma de mesons e bárions;
- Estudo da distribuição de quarks de valência e distribuição de estrutura de spin de nucleons; função de estrutura do fóton e mesons ρ e π ;
- Momentos magnéticos de mesons e bárions;
- Propriedades da matéria hadrônica em altas temperaturas e densidades.

Uma vantagem das Regras de Soma consiste em se tratar de um método analítico. O método consiste em descrever os hadrons e suas interações sob duas formas que, quando comparadas, nos permitem obter propriedades destas partículas tais como a massa ou constantes de decaimento. Isto é feito por meio da construção de uma função de correlação (ou correlator) que será calculada diferentemente para cada uma das formas. Estas duas descrições são possíveis devido a uma prescrição fundamental das RSQCD, o chamado Princípio da Dualidade, que diz que é possível descrever um hadron tanto no nível de quarks como no nível hadrônico.

Do ponto de vista da QCD descrevemos os hadrons em função das suas correntes interpolantes de quarks. Estas correntes interpolantes possuem os mesmos números quânticos

do meson ou bárion em questão. Temos, por exemplo, correntes na forma $\bar{q}_a(x)\gamma_\mu q_a(x)$ no caso de mesons vetoriais (onde $q_a(x)$ é o operador de campo de um quark). Nesta forma o correlator é calculado pela aplicação do Teorema de Wick, o que equivale a fazer uma Expansão de Produto de Operadores de Wilson (OPE), e isto nos permite separar os termos perturbativos daqueles não-perturbativos. Esta forma é normalmente chamada de lado da OPE.

Do ponto de vista fenomenológico considera-se os hadrons como se fossem partículas fundamentais. Assim as correntes que aparecem no correlator ganham a interpretação de operadores de campo dos hadrons correspondentes, com a ressalva de que estes operadores incluem a criação e aniquilação de todos os estados ressonantes do hadron fundamental. Desta forma as massas, constantes de acoplamento e fatores de forma entram como parâmetros fenomenológicos que são determinados a partir da comparação dos dois lados.

Esta comparação é melhorada por meio de uma transformação nos momentos de ambos os lados, conhecida como transformada de Borel, cuja utilidade será exposta na seção 2.4.

A precisão deste método é limitada por aproximações da função de correlação nos dois lados (OPE e Fenomenológico). Assim as Regras de Soma devem ser estudadas caso a caso para determinar seus limites de validade e margens de erro.

As seções seguintes mostrarão com mais detalhes as características das Regras de Soma mais relevantes para este trabalho, delineando assim os passos do método para aplicação na determinação de massas e constantes de decaimento.

2.1 Função de correlação

Os objetos centrais do cálculo em regra de soma são diagramas do tipo mostrado na figura 2.1, em que os estados inicial e final são os hadrons. As amplitudes destes diagramas

Figura 2.1: Diagramas dos correladores de dois (a) e três (b) pontos.

são dadas por funções de correlação. No caso do diagrama 2.1(a) temos uma expressão do tipo:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (2.1)$$

onde $j(x)$ é uma corrente com os números quânticos do hadron estudado (assumido escalar neste caso) e p é o momento total. Este é um exemplo de uma função de correlação de dois pontos, que é útil para obter massas de hadrons e constantes de decaimento ou acoplamento, como veremos mais adiante.

O diagrama 2.1(b) é dado por (mais uma vez assumindo correntes escalares):

$$\Pi(p, q) = \int d^4x d^4y e^{ip_1x} e^{-ip_2y} \langle 0 | T \{ j_1(x) j_2^\dagger(y) j_3^\dagger(0) \} | 0 \rangle, \quad (2.2)$$

onde p_1 é o momento que sai do loop pelo ponto x e p_2 é o momento que entra pelo ponto y . Funções deste tipo são conhecidas como funções de três pontos e são úteis para obtenção de fatores de forma das interações hadrônicas.

2.2 Expansão do Produto de Operadores de Wilson (OPE)

O cálculo da função correlação, envolvendo os graus de liberdade da QCD, fundamenta-se na expansão em produto de operadores de Wilson (OPE). Na OPE, o produto temporalmente ordenado de dois operadores locais $A(x)$ e $B(0)$, é expandido em termos de um conjunto completo de operadores locais [81],

$$i \int dx e^{iqx} T\{A(x)B(0)\} = \sum_d C_d(q) \hat{O}_d(0). \quad (2.3)$$

Os coeficientes C_d , chamados coeficientes de Wilson, contêm as informações sobre a física de curto alcance, e podem ser calculados pela teoria perturbativa. Os operadores locais $\hat{O}_d(0)$ são operadores compostos, construídos a partir de campos de quarks e gluons, e contêm todos os efeitos não perturbativos de longa distância. O índice d denota a dimensão do operador, expressa em unidade de potência de massa. Os operadores $\hat{O}_d(0)$ em (2.3) são ordenados de forma crescente pela dimensão d e acrescentam correções não perturbativas às Regras de Soma. Os coeficientes $C_d(q)$ são funções do momento transferido q e aparecem naturalmente da integral (2.1). O operador de dimensão zero é a identidade $\hat{O}_0 = \hat{1}$ e seu coeficiente dá a contribuição puramente perturbativa ao diagrama. A lista de operadores não perturbativos com mais baixa ordem é iniciada com:

$$\hat{O}_3 = \bar{q}q, \quad (2.4)$$

e com:

$$\hat{O}_4 = G_{\mu\nu}^j G^{j\mu\nu}. \quad (2.5)$$

Os valores esperados destes operadores no vácuo da QCD, são conhecidos como condensados de quarks e de gluons (equações (2.4) e (2.5) respectivamente).

O operador com dimensão $d = 5$ é:

$$\hat{O}_5 = \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda^j}{2} G^{j\mu\nu} q, \quad (2.6)$$

onde λ^a são as matrizes de Gell-Mann, $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ e $G_{\mu\nu}^j$ é o tensor de campo dos gluons. Operadores com $d > 5$ podem ser encontrados em várias referências como por exemplo [82, 83].

Uma forma de obter os termos desta expansão é por meio do teorema de Wick. Podemos, por exemplo, inserir uma corrente de um meson escalar em (2.1), obtendo um produto temporalmente ordenado de quatro campos de quarks. Este produto pode ser então escrito na seguinte forma:

$$\begin{aligned} T \{ \bar{q}_a(x)_i q_a(x)_j \bar{q}_b(0)_m q_b(0)_n \} &= \langle 0_p | T \{ q_a(x)_j \bar{q}_b(0)_m \} | 0_p \rangle \langle 0_p | T \{ \bar{q}_a(x)_i q_b(0)_n \} | 0_p \rangle + \\ &+ \langle 0_p | T \{ \bar{q}_a(x)_i q_b(0)_n \} | 0_p \rangle : q_a(x)_j \bar{q}_b(0)_m : + \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde os índices a e b são índices de cor, $(i - n)$ são índices de Dirac, $|0_p\rangle$ é o vácuo perturbativo e “:” representa o ordenamento normal. Os termos com $\langle 0_p | \dots | 0_p \rangle$ são identificados como os propagadores livres de quarks como:

$$\langle 0_p | T \{ q_a(x)_j \bar{q}_b(y)_k \} | 0_p \rangle = [S_{ab}^q(x - y)]_{jk}. \quad (2.8)$$

O termo com “:”, que seria nulo no vácuo perturbativo que conhecemos, introduz as informações não perturbativas do vácuo da QCD nas Regras de Soma, já que (2.7) será avaliada no vácuo da QCD. O produto normal dos operadores de quarks mostrado no segundo termo da Eq. (2.7), pode ser expandido em uma série de Taylor em torno de $x = 0$ dada por:

$$\begin{aligned} : q_a(x)_j, \bar{q}_b(0)_m : &= : q_a(0)_j, \bar{q}_b(0)_m : + x^\mu : (\partial_\mu q_a(0)_j), \bar{q}_b(0)_m : + \\ &+ \frac{1}{2} x^\mu x^\nu : (\partial_\mu \partial_\nu q_a(0)_j), \bar{q}_b(0)_m : + \dots \end{aligned} \quad (2.9)$$

O valor esperado no vácuo da QCD, do termo dominante em (2.9) [82], dá origem ao condensado de quarks:

$$\langle 0 | : q_a(0)_j, \bar{q}_b(0)_m : | 0 \rangle \equiv -\frac{1}{12} \langle \bar{q}q \rangle \delta_{ab} \hat{1}_{jm}. \quad (2.10)$$

Esta contribuição é representada pela linha interrompida na figura 2.2(a), o que representa o fato de que não há fluxo de momento por ela.

Os condensados que podem ser introduzidos com a OPE são parâmetros puramente não perturbativos. Seus valores não podem ser calculados analiticamente¹ e têm que ser

¹Resultados vindos de primeiros princípios têm sido obtidos com QCD na rede [84].

Figura 2.2: Alguns dos diagramas obtidos com a expansão em produto de operadores. Os diagramas (a), (b) e (c) vêm dos operadores $\hat{O}_3$, $\hat{O}_4$ e $\hat{O}_5$ respectivamente

determinados por outros métodos. O valor numérico de $\langle \bar{q}q \rangle$ pode ser determinado, por exemplo, usando-se a hipótese de PCAC (Corrente Axial Parcialmente Conservada) [85]:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -\frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{2(m_u + m_d)}, \quad (2.11)$$

onde m_u e m_d são as massas dos quarks u e d , m_π e f_π são respectivamente a massa e a constante de decaimento do pión. Tomando $m_\pi = 138$ MeV, $f_\pi = 132$ MeV e tomando os valores usuais para as massas dos quarks, $m_u + m_d \cong 14$ MeV, obtemos:

$$\langle \bar{q}q \rangle \cong -(0,228 \text{ GeV})^3. \quad (2.12)$$

Outros operadores, como o condensado de gluons ($\hat{O}_4$) e o condensado de quarks e gluons ($\hat{O}_5$) podem ser obtidos de maneira semelhante.

Neste trabalho usamos o princípio da fatorização para os condensados de quarks, assim conseguimos gerar os múltiplos condensados de quarks apenas utilizando a expansão perturbativa, onde devemos inserir no propagador de quarks a componente não perturbativa da eq. (2.9):

$$S_{ab}(x) = S_{ab}^0(x) + \langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle. \quad (2.13)$$

Detalhes sobre este propagador “não-perturbativo” estão dados no apêndice A.

Uma vez calculada a OPE até a dimensão desejada e obtida a expressão analítica de $\Pi(q^2)$, nos é útil colocá-la na forma de uma relação de dispersão:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^{\infty} ds \frac{\text{Im} [\Pi(s)]}{s - q^2} + \text{termos de subtração}. \quad (2.14)$$

Os termos de subtração são polinômios em q^2 que serão eliminados pela transformada de Borel (ver sec. 2.4).

É a expressão 2.14 que usaremos para comparação com o lado fenomenológico (eq. (2.43))

2.3 Lado Fenomenológico

No lado fenomenológico nós interpretamos as correntes que entram no correlator como operadores de criação e aniquilação do hadron sob estudo. Usando mais uma vez um meson escalar como exemplo podemos escrever o correlator:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ j(x) j^\dagger(0) \} | 0 \rangle . \quad (2.15)$$

Usando a definição do produto temporalmente ordenado temos:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \{ \langle 0 | \theta(x_0) j(x) j^\dagger(0) | 0 \rangle + \langle 0 | \theta(-x_0) j^\dagger(0) j(x) | 0 \rangle \} . \quad (2.16)$$

Podemos assumir que o conjunto dos mesons formados pela corrente j é um conjunto completo, logo podemos escrever o operador unidade através de um relação de completiza:

$$\hat{1} = \sum_{j=0}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0} \frac{1}{(2\pi)^3} |m_j, \vec{p}\rangle \langle m_j, \vec{p}|, \quad (2.17)$$

onde:

$$m_0 = m \implies \text{massa do estado fundamental criado pela corrente } j, \quad (2.18)$$

$$m_j \quad j \geq 1 \implies \text{massas das outras ressonâncias.} \quad (2.19)$$

Inserindo (2.17) entre as correntes da equação (2.16) temos:

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= i \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) \langle 0 | j(x) | m, \vec{p} \rangle \langle m, \vec{p} | j^\dagger(0) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(-x_0) \langle 0 | j^\dagger(0) | m, \vec{p} \rangle \langle m, \vec{p} | j(x) | 0 \rangle \} \\ &\quad + MS, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde:

$$\begin{aligned} MS &= i \int d^4x e^{iqx} \sum_{j=1}^{\infty} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0) \langle 0 | j(x) | m_j, \vec{p} \rangle \langle m_j, \vec{p} | j^\dagger(0) | 0 \rangle \\ &\quad + \theta(-x_0) \langle 0 | j^\dagger(0) | m_j, \vec{p} \rangle \langle m_j, \vec{p} | j(x) | 0 \rangle \} . \end{aligned} \quad (2.21)$$

Fazemos então uso do operador de translação $\hat{U}$, que possui as seguintes propriedades:

$$\hat{U}(a) j(x) \hat{U}^\dagger(a) = j(x + a), \quad (2.22)$$

$$\hat{U}(a) |m_j, \vec{p}\rangle = e^{ip a} |m_j, \vec{p}\rangle, \quad (2.23)$$

$$\hat{U}^\dagger(a) \hat{U}(a) = \hat{1} . \quad (2.24)$$

Usando estas propriedades escrevemos:

$$\begin{aligned}\langle 0|j(x)|m, \vec{p}\rangle &= \underbrace{\langle 0|\hat{U}^\dagger(-x)}_{\langle 0|\hat{1}} \underbrace{\hat{U}(-x) j(x) \hat{U}^\dagger(-x)}_{j(0)} \underbrace{\hat{U}(-x)}_{e^{-ipx}|m, \vec{p}\rangle} |m, \vec{p}\rangle = \\ &= e^{-ipx} \langle 0|j(0)|m, \vec{p}\rangle,\end{aligned}\quad (2.25)$$

e portanto:

$$\langle m, \vec{p}|j(x)|0\rangle = e^{ipx} \langle m, \vec{p}|j(0)|0\rangle. \quad (2.26)$$

O caráter fenomenológico entra neste ponto, por meio de parametrizações do tipo²:

$$\langle 0|j^\dagger(0)|m, \vec{p}\rangle = mf, \quad (2.27)$$

onde m e f são respectivamente a massa e a constante de decaimento do méson escalar deste exemplo. Inserindo as equações (2.25) e (2.27) em (2.20) temos:

$$\Pi(q) = i m^2 f^2 \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0)e^{-ipx} + \theta(-x_0)e^{ipx} \} + MS. \quad (2.28)$$

Vamos agora transformar a integral tridimensional acima numa integral quadridimensional usando a identidade (que pode ser provada integrando-se o lado direito em p_0 no plano complexo):

$$\int \frac{d^3\vec{p}}{2p^0(2\pi)^3} \{ \theta(x_0)e^{-ipx} + \theta(-x_0)e^{ipx} \} \mathcal{P}[\vec{p}, p_0] = i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} \mathcal{P}[\vec{p}, p_0], \quad (2.29)$$

onde $\mathcal{P}[\vec{p}, p_0]$ é um polinômio em p_0 . A equação (2.28) transforma-se em:

$$\Pi(q) = -m^2 f^2 \int d^4x e^{iqx} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} + MS, \quad (2.30)$$

que pode ser facilmente integrada em x e p , transformando-se em:

$$\Pi(q^2) = -m^2 f^2 \frac{1}{q^2 - m^2} + MS. \quad (2.31)$$

2.3.1 O contínuo e a densidade espectral

O termo MS é chamado de termo do contínuo e vamos agora examiná-lo melhor. Vamos, por um momento, voltar à definição do correlator de dois pontos do meson escalar:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0|T\{j(x)j^\dagger(0)\}|0\rangle. \quad (2.32)$$

Usando a definição do produto temporalmente ordenado temos:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \{ \langle 0|\theta(x_0)j(x)j^\dagger(0)|0\rangle + \langle 0|\theta(-x_0)j^\dagger(0)j(x)|0\rangle \}. \quad (2.33)$$

²Estas parametrizações podem mudar um pouco de hadron para hadron, mas a forma indicada é suficiente para ilustrar o método

Inserimos então um conjunto completo de estados $\sum_{\Gamma} |\Gamma\rangle\langle\Gamma|$ entre os operadores de corrente e usamos os operadores de translação para escrever:

$$\begin{aligned} \Pi(q) = & i \int d^4x e^{iqx} \sum_{\Gamma} \{ \theta(x_0) e^{-ip_{\Gamma}x} \langle 0|j(0)|\Gamma\rangle \langle\Gamma|j^{\dagger}(0)|0\rangle \\ & + \theta(-x_0) e^{ip_{\Gamma}x} \langle 0|j^{\dagger}(0)|\Gamma\rangle \langle\Gamma|j(0)|0\rangle \} . \end{aligned} \quad (2.34)$$

Todas as partículas no estado $|\Gamma\rangle$ estão na camada de massa, e portanto: $p_{\Gamma}^2 = t \geq 0$. Assim podemos inserir na soma sobre Γ a identidade matemática:

$$\int_0^{\infty} ds \int d^4p \theta(p_0) \delta(p^2 - s) \delta^{(4)}(p - p_{\Gamma}) = 1 . \quad (2.35)$$

É fácil, reorganizando os termos da função obtida, encontrar a definição da função espectral associada ao operador j :

$$\sum_{\Gamma} \langle 0|j^{\dagger}(0)|\Gamma\rangle \langle\Gamma|j(0)|0\rangle (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p_{\Gamma}) \equiv 2\pi \rho(p^2) . \quad (2.36)$$

Assim a equação (2.34) fica:

$$\begin{aligned} \Pi(q) = & \int d^4x e^{iqx} \int_0^{\infty} ds \rho(s) \times \\ & \times \underbrace{\int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} [i\theta(x_0) e^{-ipx} \theta(p_0) \delta(p^2 - s) + i\theta(-x_0) e^{ipx} \theta(p_0) \delta(p^2 - s)]}_{\Delta_F(x;s)} . \end{aligned} \quad (2.37)$$

A função $\Delta_F(x; s)$ é o propagador de Feynman de um méson escalar e pode ser escrito na forma:

$$\Delta_F(x; s) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{s - p^2 - i\epsilon} . \quad (2.38)$$

Substituindo esta forma em (2.37) e integrando sobre x e p , obtemos:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) = & \int d^4x e^{iqx} \int_0^{\infty} ds \rho(s) \Delta_F(x; s) = \\ = & \int_0^{\infty} ds \rho(s) \frac{1}{s - q^2 - i\epsilon} . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Assim a função $\Pi(q^2)$ aparece como uma transformada de Fourier de um campo livre se propagando com massa quadrática arbitrária s integrada sobre todos valores de s . Observações experimentais nos permitem aproximar a função $\rho(s)$ na forma:

$$\rho(s) = \lambda \delta(s - m^2) + \theta(s - \underbrace{[m + \Delta_s]^2}_{s_0}) \rho(s), \quad (2.40)$$

onde λ é uma constante, $\Delta_s > 0$ e s_0 é conhecido como parâmetro de limiar (ou “threshold”) do contínuo.

Isto significa separar a densidade espectral em uma massa fundamental isolada e um contínuo de ressonâncias de massa superior. O limiar do contínuo $s_0 = (m + \Delta_s)^2$ marca a massa a partir da qual assumimos que começam essas ressonâncias. Na ref. [7] vemos que o espectro medido obedece aproximadamente esta separação, mas com um pequeno número de estados excitados medidos. Para a J/ψ temos $\Delta_s = 589$ MeV, para o D^0 temos apenas um estado excitado medido cujo $\Delta_s = 555$ MeV e para o D^* ficamos com $\Delta_s = 450$ MeV. Nas Regras de Soma, s_0 é assumido como um parâmetro livre, mas usualmente é escolhido de forma que $\Delta_s \approx 500$ MeV. Este valor parece ser o ideal para uma grande quantidade de mesons, mas é necessário mais cuidado quando trabalhamos com outros hadrons.

Substituindo (2.40) em (2.39) temos ($\epsilon \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned}\Pi(q^2) &= \frac{-\lambda}{q^2 - m^2} + \int_0^\infty ds \rho(s) \frac{\theta(s - s_0)}{s - q^2} = \\ &= \frac{-\lambda}{q^2 - m^2} + \int_{s_0}^\infty ds \rho(s) \frac{1}{s - q^2} .\end{aligned}\quad (2.41)$$

Se compararmos este resultado com a equação (2.31) podemos identificar:

$$MS = \int_{s_0}^\infty ds \rho(s) \frac{1}{s - q^2} \quad \text{e que} \quad \lambda = m^2 f^2 . \quad (2.42)$$

Obtendo então:

$$\Pi(q^2) = \frac{m^2 f^2}{m^2 - q^2} + \int_{s_0}^\infty ds \rho(s) \frac{1}{s - q^2} . \quad (2.43)$$

Este é o resultado que, quando identificado com o correlator obtido no lado da OPE (eq. (2.14)), nos fornece informações sobre os parâmetros hadrônicos m e f .

2.4 Transformada de Borel

Encontrados os correlatores do lado da QCD e do lado fenomenológico, devemos impor a igualdade entre as duas descrições. Embora a igualdade seja garantida pela Dualidade quark-hadron, as aproximações adotadas nos dois lados introduzem complicações. O lado da OPE sofre com a impossibilidade de calcular toda a série de produto de operadores, de forma que somos obrigados a truncá-la em algum ponto. No lado fenomenológico fazemos a aproximação para a densidade espectral mostrada na eq. (2.40), que assume que as ressonâncias formam um contínuo de estados excitados além de um único polo fundamental.

Para o casamento entre os dois lados ser possível, devemos suprimir as contribuições de ordem mais alta da OPE e também o papel dos estados excitados. Isto é feito usando uma

transformada nos momentos das partículas chamada transformada de Borel [82], definida como:

$$\beta[f(Q^2)] = \hat{f}(M^2) = \lim_{Q^2/n \rightarrow M} \frac{(Q^2)^{n+1}}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial Q^2} \right)^n f(Q^2), \quad (2.44)$$

onde Q é o momento da partícula no espaço euclidiano ($q^2 = -Q^2$). A razão Q^2/n é mantida fixa ao passo que Q^2 , $n \rightarrow \infty$. O parâmetro M é chamado massa de Borel. Alguns importantes exemplos de transformadas são:

$$\beta[(Q^2)^k] = 0 \text{ para } k > 0, \quad (2.45)$$

$$\beta\left[\frac{1}{s+Q^2}\right] = e^{-s/M^2}, \quad (2.46)$$

$$\beta\left[\frac{1}{(Q^2)^k}\right] = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{1}{M^2}\right)^{k-1}. \quad (2.47)$$

No lado da QCD, a transformada de Borel ajuda a convergência da OPE, suprimindo a contribuição dos operadores de dimensão mais alta. Os coeficientes destes operadores são proporcionais a $1/(q^2)^k$, onde k cresce com a dimensão do operador. A transformada de Borel introduz um fator proporcional a $1/(k-1)!$, reduzindo a importância dos operadores de ordem superior [82].

Do lado fenomenológico o correlator assume a forma:

$$\Pi(Q^2) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j \frac{1}{Q^2 + m_j^2}, \quad (2.48)$$

onde:

$$m_0 \implies \text{massa do meson no estado fundamental}, \quad (2.49)$$

$$m_j \quad j \geq 1 \implies \text{massas das outras ressonâncias}, \quad (2.50)$$

$$K_j \implies \text{constante}. \quad (2.51)$$

Usando a equação (2.46), temos:

$$\beta[\Pi(Q^2)] = \sum_j K_j e^{-m_j/M^2}. \quad (2.52)$$

Como $m_{(j+1)} > m_j$ a transformada de Borel acaba suprimindo os estados ressonantes.

Logo, se for possível encontrar uma região no espaço da massa de Borel em que as contribuições dos operadores de ordem mais altas da OPE e as ressonâncias de massas mais altas sejam igualmente suprimidas, as descrições hadrônica e da QCD se igualarão e poderemos extrair as propriedades hadrônicas de interesse para o estado fundamental dos hadrons envolvidos. Então devemos impor um certo intervalo em que a massa de Borel seja adequada para o melhor casamento possível das duas descrições da função correlação. Este intervalo é geralmente chamado “janela de Borel”.

2.5 A “janela de Borel” e a validade das RSQCD

Nas seções anteriores foram introduzidos dois novos parâmetros que são característicos das RSQCD: o limiar do contínuo s_0 e a massa de Borel M^2 , ambos têm seus valores possíveis restritos por algumas condições, que exploraremos a seguir.

2.5.1 Estabilidade em M^2

A massa de Borel M^2 é um parâmetro completamente livre dentro das RSQCD, introduzido por conta da transformada de Borel. Assim buscamos um regime em que a função ou parâmetro a ser determinado pelas RSQCD independe da massa de Borel e para isso escolhemos M^2 numa região apropriada. Em condições ideais não haveria nenhuma dependência em relação a massa de Borel e consequentemente teríamos uma teoria válida em qualquer região de M^2 , no entanto o truncamento da OPE e as suposições fenomenológicas introduzem a instabilidade.

A condição de estabilidade é pouco restritiva e um tanto subjetiva, mas deve ser observada. A região possível de M^2 fica muito mais restrita pelas duas condições que seguem, definindo de fato a “janela de Borel”.

2.5.2 Dominância do polo sobre o contínuo

Um limite intrínseco às regras de soma da QCD vem da dualidade quark-hadron. Todo o formalismo das RSQCD tem como objetivo estudar o polo presente do lado fenomenológico. Assim é natural exigir uma escolha dos parâmetros livres da teoria tal que o termo correspondente a este polo seja grande se comparado com o termo que representa o contínuo. Assim, um teste interessante da teoria é comparar a relação entre as grandezas da eq. (2.41):

$$P = \frac{\lambda^2}{m^2 - q^2}, \quad (2.53)$$

$$C = \int_{s_0}^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2} = T - P, \quad (2.54)$$

onde $T = \int_0^{\infty} ds \frac{\rho(s)}{s - q^2}$.

A contribuição do contínuo, C , é menos importante para valores baixos da massa de Borel, assim se consideramos a condição $C < P$ (o que equivale a exigir que o contínuo seja menos que 50% do valor total T) temos efetivamente um limite máximo para o valor de M^2 .

2.5.3 A convergência da OPE

Por outro lado já mencionamos que a OPE resulta em uma série cujos termos tem potências cada vez mais altas de $1/q^2$. A transformada de Borel traduz isto em potências crescentes de $1/M^2$, como pode ser visto na eq. (2.47). Assim, valores altos de M^2 melhoram a convergência da OPE e valores baixos (em especial $M^2 \ll 1 \text{ GeV}^2$) fazem a série divergir. Podemos então comparar as contribuições dos termos da OPE e, exigindo a convergência, obter o valor mínimo para M^2 onde a série ainda funciona.

Estando estabelecidos valores máximo e mínimo para M^2 temos (caso $M_{min}^2 < M_{max}^2$) uma região denominada janela de Borel da Regra de Soma, e é nesta região que a Regra de Soma é confiável.

2.6 Determinação dos parâmetros hadrônicos

Só resta então mostrar como podemos obter os parâmetros que desejamos a partir das regras de soma.

Fazendo a transformada de Borel e igualando o lado da OPE e o lado fenomenológico (eqs. (2.14) e (2.43) respectivamente) obtemos:

$$m^2 f^2 e^{-m^2/M^2} + \int_{s_0}^{\infty} ds \rho(s) e^{-s/M^2} = \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^{\infty} ds \text{Im} [\Pi(s)] e^{-s/M^2}. \quad (2.55)$$

Se separamos a integral do lado da OPE (lado direito da equação) em duas partes ($\int_{s_{min}}^{\infty} = \int_{s_{min}}^{s_0} + \int_{s_0}^{\infty}$) e definimos a densidade espectral no lado da OPE tal que:

$$\int_{s_{min}}^{\infty} ds \rho^{ope}(s) e^{-s/M^2} = \int_{s_{min}}^{\infty} ds \frac{\text{Im} [\Pi(s)]}{\pi} e^{-s/M^2}, \quad (2.56)$$

podemos, aproximando esta densidade àquela do lado fenomenológico³, cancelar as integrais de s_0 a infinito dos dois lados obtendo:

$$m^2 f^2 e^{-\frac{m^2}{M^2}} = \int_{s_{min}}^{s_0} ds \rho^{ope}(s) e^{-s/M^2}. \quad (2.57)$$

A partir desta equação podemos obter os parâmetros m e f . Como já mencionado antes, a forma em que estes dois parâmetros aparecem no lado fenomenológico pode mudar de partícula para partícula (a expressão (2.57) vem do exemplo de um meson escalar). No entanto é um resultado geral que eles aparecerão na forma $m^{2n} f^{2n'}$, onde n e n' são números inteiros maiores que zero. Isso é o bastante para garantir que o método de obtenção destes parâmetros seja aplicável a qualquer partícula.

³Ou seja: $\rho^{ope}(s) \approx \rho(s)$, esta aproximação é justificada unicamente pelo princípio da dualidade quark-hadron que fundamenta as RSQCD.

Derivando a eq. (2.57) em relação a $1/M^2$ temos:

$$-m^4 f^2 e^{-\frac{m^2}{M^2}} = \int_{s_{min}}^{s_0} ds (-s) \rho^{ope}(s) e^{-s/M^2}. \quad (2.58)$$

Dividindo então (2.58) por (2.57) chegamos a:

$$m^2 = \frac{\int_{s_{min}}^{s_0} ds s \rho^{ope}(s) e^{-s/M^2}}{\int_{s_{min}}^{s_0} ds \rho^{ope}(s) e^{-s/M^2}}. \quad (2.59)$$

Que determina a massa da partícula estudada. Uma vez determinada a massa, a constante de decaimento f pode ser facilmente obtida substituindo m em (2.57).

2.7 As Regras de Soma de Energia Finita (FESR)

Existem muitas outras formas de Regra de Soma [86], diferindo principalmente em como é feita a comparação entre os lados da OPE e fenomenológico. Uma destas formas será também interessante para nós e é chamada de Regras de Soma de Energia Finita, que abreviaremos FESR (do inglês Finite Energy Sum Rules).

As FESR são obtidas a partir da equação (2.57). Fazendo uma expansão em $1/M^2 \rightarrow 0$ temos:

$$f^2 m^2 \sum_n \frac{(-m^2)^n}{n!} \left(\frac{1}{M^2}\right)^n = \sum_n \int_{s_{min}}^{s_0} ds \frac{(-s)^n}{n!} \left(\frac{1}{M^2}\right)^n \rho^{ope}(s). \quad (2.60)$$

Igualando os coeficientes do polinômio em $1/M^2$ nos dois lados de (2.60) obtemos n equações:

$$f^2 m^{2n+2} = \int_{s_{min}}^{s_0} ds s^n \rho^{ope}(s), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.61)$$

Finalmente, dividindo duas equações subsequentes (com n e $n+1$) nós podemos obter o valor da massa para qualquer valor de n (espera-se que este valor seja o mesmo para qualquer escolha de n):

$$m^2 = \frac{\int_{s_{min}}^{s_0} ds s^{n+1} \rho^{ope}(s)}{\int_{s_{min}}^{s_0} ds s^n \rho^{ope}(s)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.62)$$

As FESR têm vantagens e desvantagens quando comparadas ao método anterior⁴. A principal consequência de eliminar a massa de Borel é um aumento da dependência do resultado em função do parâmetro s_0 , que controla o limiar entre polo e contínuo.

Por outro lado as FESR tem a vantagem de nos dar uma relação direta entre m e s_0 , diminuindo assim a arbitrariedade na determinação destes valores. Idealmente o que se

⁴Nos referiremos ao método já descrito por RSQCD para evitar confusões. Na literatura este primeiro método e conhecido por QCDSR ou LSR (Laplace Sum Rules)

procura nas FESR é uma região de estabilidade ou mínimo na função $m(s_0)$, o que é um bom critério para fixar tanto s_0 quanto m . Este mínimo, no entanto, nem sempre pode ser encontrado.

Capítulo 3

Os pentaquarks $\Theta^+(1540)$ e $\Xi^{--}(1862)$

O ponto inicial, e crucial, do estudo de uma ressonância em regras de soma é a escolha da corrente interpolante que será utilizada no lado da OPE. Esta escolha envolve uma suposição sobre a estrutura interna da partícula estudada e é de fato a hipótese que queremos testar com as regras de soma.

3.1 As possíveis correntes

Não foram poucos os trabalhos a estudar o pentaquark por meio das RSQCD e portanto foram muitas as correntes estudadas. O primeiro trabalho sobre o pentaquark em regras de soma foi o de S.-L. Zhu [26], onde foram estudadas as seguinte correntes:

$$\eta_{I[26]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{abc} [u_a^T(x)C\gamma_5 d_b(x)] \{u_e(x)\bar{s}_e(x)i\gamma_5 d_c(x) - (u \leftrightarrow d)\}, \quad (3.1)$$

$$\eta_{II[26]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{abc} [u_a^T(x)C\gamma_\mu d_b(x)] \{\gamma^\mu \gamma_5 u_e(x)\bar{s}_e(x)i\gamma_5 d_c(x) - (u \leftrightarrow d)\}, \quad (3.2)$$

e

$$\eta_{III[26]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon^{abc} [u_a^T(x)C\gamma_5 d_b(x)] \{u_e(x)\bar{s}_e(x)i\gamma_5 d_c(x) + (u \leftrightarrow d)\}, \quad (3.3)$$

onde $a, b, c, \dots$ são índices de cor, u e d são os operadores do campo dos quarks e C é a matriz conjugação de carga.

As três correntes acima são semelhantes do ponto de vista da estrutura assumida para a partícula. Diferem apenas no valor do isospin total ($\eta_{I[26]}$ tem $I = 0$; $\eta_{II[26]}$ e $\eta_{III[26]}$ tem $I = 1$) e como este isospin foi implementado.

Estas correntes são desprezíveis do ponto de vista que não fazem grandes pressuposições sobre o arranjo dos quarks dentro do estado exótico. Tudo que o autor buscou foi obter os números quânticos do $\Theta^+(1540)$ e evitar um acoplamento com um estado $K - N$ singletos de cor. Em particular estas correntes restringem pouco o multiplete ao qual a partícula exótica poderia pertencer.

No trabalho de Jaffe e Wilczek [30] foi proposta uma estrutura mais elaborada utilizando a idéia de diquarks. Os diquarks são uma associação de dois quarks

$$Q_{ab}^\Gamma(x) = [u_a^T(x) C \Gamma d_b(x)] , \quad (3.4)$$

onde a matriz Γ determina o carácter vetorial do diquark. Os diquarks pseudo-escalares e escalares são, por exemplo, dados respectivamente por:

$$Q_{ab}^{ps}(x) = [u_a^T(x) C d_b(x)] , \quad (3.5)$$

$$Q_{ab}^s(x) = [u_a^T(x) C \gamma_5 d_b(x)] . \quad (3.6)$$

O arranjo na forma de diquark pode ser atrativo ou repulsivo, dependendo dos números quânticos do estado construído [87]. No espaço de cor temos $3_c \otimes 3_c = \bar{3}_c \oplus 6_c$, dando duas possibilidades para o arranjo da cor dos diquarks. O RILM (Random Instanton Liquid Model) prevê que o canal 6_c seja repulsivo [88], assim nos concentraremos nos diquarks anti-tripletos de cor, construindo os estados:

$$(q^T \Gamma q)_c = \epsilon_{abc} Q_{ab}^\Gamma(x). \quad (3.7)$$

A ligação entre os quarks depende ainda do arranjo de spin (dado pela matriz Γ). O RILM indica que os diquarks escalares e tensoriais ($\Gamma = \gamma_5$ e $\Gamma = \sigma_{\mu\nu}$ respectivamente) apresentem uma força atrativa [88], tornando os quarks altamente correlacionados. Assim tratamos um diquark anti-tripletto de cor como uma entidade de números quânticos muito semelhantes a de um antiquark. Jaffe e Wilczek propuseram então que o pentaquark fosse um estado ligado de diquark-diquark-antiquark de forma a obter um singlete de cor. No espaço de sabor esta suposição implica no seguinte arranjo em multipletos:

$$\bar{3}_f \otimes \bar{3}_f \otimes \bar{3}_f = 1_f \oplus 8_f \oplus 8_f \oplus \bar{10}_f . \quad (3.8)$$

Os estados pertencentes aos multipletos $1_f \oplus 8_f \oplus 8_f$ tem necessariamente números quânticos não exóticos (tais como $udus\bar{s}$ ou $udus\bar{u}$) e portanto os pentaquarks $\Theta^+(1540)$ e $\Xi^{--}(1862)$ devem pertencer ao $\bar{10}_f$.

Alguns trabalhos exploraram a proposta de JW com regras de soma. Nosso primeiro trabalho [27] considerou a seguinte corrente:

$$\eta_{[27]} = [t \eta_1 + \eta_2] , \quad (3.9)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} (Q_{ab}^s Q_{ce}^s C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d)) , \quad (3.10)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} (Q_{ab}^{ps} Q_{ce}^{ps} C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d)) , \quad (3.11)$$

onde temos um parâmetro adicional t que determina a mistura entre as correntes η_1 e η_2 .

Sugiyama et al. [31] utilizaram a corrente:

$$\eta_{[31]} = \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} Q_{ab}^{ps} Q_{de}^s C \bar{s}_g^T. \quad (3.12)$$

É possível também construir correntes de dimensão mais alta, ainda dentro desta mesma proposta. Uma destas correntes foi introduzida por Jaffe e Wilczek em um segundo trabalho [89] e estudada no âmbito da Regras de Soma por Eidemüller [32]:

$$\eta_{[32]} = (\epsilon^{abd} \delta^{ce} \pm \epsilon^{abc} \delta^{de}) [Q_{ab}^s (D^\mu Q_{cd}^s) - (D^\mu Q_{ab}^s) Q_{cd}^s] \gamma_5 \gamma_\mu C \bar{s}_e^T. \quad (3.13)$$

O aumento na dimensão é causado pela introdução da derivada covariante $\mathcal{D}$. Analogamente podemos introduzir uma corrente semelhante à da equação (3.12) aumentando sua dimensão por meio de uma derivada:

$$\eta_D = \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} Q_{ab}^{ps} Q_{de}^s \mathcal{D} C \bar{s}_g^T. \quad (3.14)$$

No caso do $\Xi^{--}(1862)$ nós construímos a corrente por meio de uma modificação dos sabores nas correntes $\eta_{[27]}$ e $\eta_{[31]}$, obtendo [28]:

$$\eta_{I[28]}(x) = [t\eta_3(x) + \eta_4(x)], \quad (3.15)$$

onde:

$$\eta_3(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} (d_a^T(x) C \gamma_5 s_b(x)) [d_c^T(x) C \gamma_5 s_e(x) + s_e^T(x) C \gamma_5 d_c(x)] C \bar{u}_e^T(x), \quad (3.16)$$

$$\eta_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} (d_a^T(x) C s_b(x)) [d_c^T(x) C s_e(x) + s_e^T(x) C d_c(x)] C \bar{u}_e^T(x), \quad (3.17)$$

e

$$\eta_{II[28]}(x) = \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} \{s_a^T(x) C d_b(x)\} \{s_d^T(x) C \gamma_5 d_e(x)\} C \bar{u}_g^T(x). \quad (3.18)$$

3.2 Critérios de escolha e mistura das correntes

O primeiro requisito exigido da corrente escolhida é que ela tenha os números quânticos da partícula que pretendemos descrever. Começamos a análise das correntes acima pelo cálculo do isospin.

3.2.1 Cálculo do isospin

Para calcular o isospin de uma corrente, usamos a álgebra do grupo SU(2):

$$I_3 u = \frac{1}{2} u, I_3 d = -\frac{1}{2} d, \quad (3.19)$$

$$I_+ d = u, I_- u = d, \quad (3.20)$$

$$I_+ u = I_- d = 0, \quad (3.21)$$

No caso de produtos de campos de quarks temos a propriedade:

$$I_i (q_1 q_2) = (I_i q_1) q_2 + q_1 (I_i q_2), \quad (3.22)$$

$$I_i I_j (q_1 q_2) = (I_i I_j q_1) q_2 + (I_j q_1) (I_i q_2) + (I_i q_1) (I_j q_2) + q_1 (I_i I_j q_2), \quad (3.23)$$

onde $i, j = 3, +, -$. Os outros quarks (s, c, t e b) não pertencem ao multipletto de isospin, assim os operadores de isospin dão zero atuando nesses quarks.

O operador que mede o isospin é:

$$I^2 = I_3^2 + \frac{1}{2} (I_+ I_- + I_- I_+), \quad (3.24)$$

cujos autovalores $\mathcal{I}$ são definidos por:

$$I^2 \eta = \mathcal{I}(\mathcal{I} + 1) \eta. \quad (3.25)$$

É importante notar que neste tratamento estamos considerando os campos dos quarks dentro do âmbito da primeira quantização, ou seja, como estados (ou funções de onda) sobre o qual atuam os operadores de isospin e não como operadores de campo.

Devemos, no entanto, levar em consideração o fato de que estes campos tem uma propriedade anti-comutativa. Esta propriedade é introduzida da mesma forma que é feito no formalismo de integrais de trajetória [90], assumindo que os elementos dos spinors u e d são números de Grassmann. A principal consequência deste tratamento para o cálculo que segue dá-se sobre o cálculo da transposição de produtos dos campos. Suponha um produto de dois campos com uma matriz qualquer entre eles, se escrevermos o produto em termos dos elementos temos:

$$q_1^T M q_2 = [q_1]_i M_{ij} [q_2]_j \quad (3.26)$$

Se calcularmos a transposta da expressão acima considerando que os elementos de q_1 e q_2 são números de Grassman ($[q_1]_i [q_2]_j = -[q_2]_j [q_1]_i$) chegamos à:

$$[(q_1^T M q_2)^T]_{ij} = [q_1^T M q_2]_{ji} = [q_1]_j [q_2]_i M_{ji} = -[q_2]_i [q_1]_j [M^T]_{ij} = [-q_2^T M^T q_1]_{ij} \quad (3.27)$$

$$(q_1^T M q_2)^T = -q_2^T M^T q_1 \quad (3.28)$$

Mantendo isto em mente, calculemos primeiramente o isospin do diquark singleto de cor, $(u^T \Gamma d)_c$, que é um ingrediente básico em algumas das correntes que utilizaremos para o $\Theta^+(1540)$:

$$(u^T \Gamma d)_c = \epsilon_{abc} u_a^T C \Gamma d_b. \quad (3.29)$$

Obtemos de imediato $I_3(u^T \Gamma d)_c = 0(u^T \Gamma d)_c$.

$$I_+(u^T \Gamma d)_c = \epsilon_{abc} u_a^T C \Gamma u_b, \quad (3.30)$$

$$I_-(u^T \Gamma d)_c = \epsilon_{abc} d_a^T C \Gamma d_b. \quad (3.31)$$

Observe que $q_{1a}^T C \Gamma q_{2b}$ (onde $q_{1,2} = u$ ou d) é uma matriz 1×1 e portanto:

$$(q_{1a}^T C \Gamma q_{2b})^T = q_{1a}^T C \Gamma q_{2b}. \quad (3.32)$$

Por outro lado (3.28) nos dá:

$$(q_{1a}^T C \Gamma q_{2b})^T = -q_{2b}^T \Gamma^T C^T q_{1a} = q_{2b}^T \Gamma^T C q_{1a}, \quad (3.33)$$

$$\Gamma^T C = \begin{cases} C \Gamma, & \Gamma = \gamma_5, \hat{1} \\ -C \Gamma, & \Gamma = \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu}. \end{cases} \quad (3.34)$$

Logo, para $\Gamma = \gamma_5$ ou $\Gamma = \hat{1}$ temos:

$$q_{1a}^T C \Gamma q_{2b} = q_{2b}^T C \Gamma q_{1a}. \quad (3.35)$$

Multiplicando ambos os lados por ϵ_{abc} :

$$\epsilon_{abc} q_{1a}^T C \Gamma q_{2b} = \epsilon_{abc} q_{2b}^T C \Gamma q_{1a} = \epsilon_{bac} q_{2a}^T C \Gamma q_{1b} = -\epsilon_{abc} q_{2a}^T C \Gamma q_{1b}, \quad (3.36)$$

onde usamos $\epsilon_{abc} = -\epsilon_{bac}$. Comparando o primeiro e o último termos para sabores iguais ($q_1 = q_2 = q$) vemos que, **para diquarks escalares ou pseudo-escalares** ($\Gamma = \gamma_5$ ou $\Gamma = \hat{1}$), $\epsilon_{abc} q_a^T C \Gamma q_b = 0$ e portanto o isospin é também igual a zero. Conclui-se também que, para estes diquarks, as operações de I_3 , I_+ ou I_- individualmente em $(u^T \Gamma d)_c$ resultam em zero:

$$I_k(u^T \Gamma d)_c = 0; \quad k = 3, +, -; \quad \Gamma = \gamma_5, \hat{1}. \quad (3.37)$$

A corrente da eq. (3.12) pode ser reescrita na forma:

$$\eta_{[31]} = \epsilon^{c f g} (u^T \hat{1} d)_c (u^T \gamma_5 d)_f C \bar{s}_g^T, \quad (3.38)$$

e fica imediato concluir que seu isospin também é zero.

Já η_1 e η_2 da corrente $\eta_{[27]}$ da eq. (3.9) ficam:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(u^T \gamma_5 d)_c Q_{ce}^s C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d)], \quad (3.39)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(u^T \hat{1} d)_c Q_{ce}^{ps} C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d)]. \quad (3.40)$$

Esta corrente é mais complicada pois, ao passo que $(u^T \gamma_5 d)_c$ e $(u^T \hat{1} d)_c$ estão sujeitos à (3.37), não temos um “ ϵ ” para garantir o mesmo para Q_{ce}^s e Q_{ce}^{ps} . Temos:

$$I_3 Q_{ce}^s = I_3 Q_{ce}^{ps} = 0 \quad (3.41)$$

$$I_- I_+ [u_c^T(x) C \Gamma d_e(x)] = [d_c^T(x) C \Gamma u_e(x)] + [u_c^T(x) C \Gamma d_e(x)] \quad (3.42)$$

$$I_+ I_- [u_c^T(x) C \Gamma d_e(x)] = [u_c^T(x) C \Gamma d_e(x)] + [d_c^T(x) C \Gamma u_e(x)] \quad (3.43)$$

Logo:

$$\begin{aligned} I^2 [u_c^T(x) C \Gamma d_e(x)] &= [u_c^T(x) C \Gamma d_e(x)] + [d_c^T(x) C \Gamma u_e(x)] = \\ &= [u_c^T(x) C \Gamma d_e(x)] + (u \leftrightarrow d), \end{aligned} \quad (3.44)$$

o que mostra que Q_{ce}^s e Q_{ce}^{ps} não são isoladamente autoestados de Isospin.

Voltemos em η_1 (o calculo de η_2 é análogo), que pode ser escrito na forma:

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} [(u^T \gamma_5 d)_c [u_c^T(x) C \gamma_5 d_e(x)] C \bar{s}_e^T - (d^T \gamma_5 u)_c [d_c^T(x) C \gamma_5 u_e(x)] C \bar{s}_e^T]. \quad (3.45)$$

A eq. (3.36) garante que $(u^T \gamma_5 d)_c = -(d^T \gamma_5 u)_c$, logo¹:

$$\begin{aligned} I^2 \eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u^T \gamma_5 d)_c \{ I^2 [u_c^T(x) C \gamma_5 d_e(x)] + I^2 [d_c^T(x) C \gamma_5 u_e(x)] \} C \bar{s}_e^T = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u^T \gamma_5 d)_c \{ 2 [u_c^T(x) C \gamma_5 d_e(x)] + 2 [d_c^T(x) C \gamma_5 u_e(x)] \} C \bar{s}_e^T = 2 \eta_1. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Como o mesmo vale para η_2 temos o isospin $\mathcal{I} = 1$ para a corrente $\eta_{[27]}$. Em princípio, se construíssemos η_1 e η_2 com um sinal positivo entre seus termos ($[(u^T \Gamma d)_c Q_{ce}^s C \bar{s}_e^T + (u \leftrightarrow d)]$) conseguiríamos uma corrente com $\mathcal{I} = 0$, mas infelizmente esta modificação faz com que a própria corrente interpolante seja nula.

Passemos então para o isospin da corrente $\eta_{[32]}$ na eq. (3.13). A parte que importa para o cálculo de isospin pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} &(\epsilon^{abd} \delta^{ce} \pm \epsilon^{abc} \delta^{de}) [Q_{ab}^s (D^\mu Q_{cd}^s) - (D^\mu Q_{ab}^s) Q_{cd}^s] = \\ &= (u^T \gamma_5 d)_c [(D^\mu Q_{ec}^s) \pm (D^\mu Q_{ce}^s)] - (D^\mu (u^T \gamma_5 d)_c) [Q_{ec}^s \pm Q_{ce}^s]. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Como temos novamente um termo $(u^T \gamma_5 d)_c$, para o qual vale (3.37), só temos que nos preocupar com $I^2 Q_{ec}^s$. Usando a eq. (3.44) temos:

$$I^2 \underbrace{[u_a^T(x) C \gamma_5 d_b(x)]}_{Q_{ab}^s} = \underbrace{[u_a^T(x) C \Gamma d_b(x)]}_{Q_{ab}^s} + \underbrace{[d_a^T(x) C \Gamma u_b(x)]}_{\tilde{Q}_{ab}^s}, \quad (3.48)$$

¹Note que só podemos ignorar $(u^T \gamma_5 d)_c$ e levar o operador I^2 para dentro dos colchetes pois não só $I^2 (u^T \gamma_5 d)_c = 0$ mas também porque $I_3 (u^T \gamma_5 d)_c = I_+ (u^T \gamma_5 d)_c = I_- (u^T \gamma_5 d)_c = 0$, de forma que todos os termos cruzados do tipo $(I_j A)(I_k B)$ envolvendo este diquark dão zero.

de acordo com (3.35) vale $Q_{ab}^s = \tilde{Q}_{ba}^s$, e:

$$I^2 Q_{ab}^s = Q_{ab}^s + Q_{ba}^s. \quad (3.49)$$

Assim:

$$I^2 \left[(D^\mu Q_{ec}^s) \pm (D^\mu Q_{ce}^s) \right] = D^\mu (Q_{ec}^s + Q_{ce}^s) \pm D^\mu (Q_{ce}^s + Q_{ec}^s), \quad (3.50)$$

$$I^2 \left[Q_{ec}^s \pm Q_{ce}^s \right] = Q_{ec}^s + Q_{ce}^s \pm [Q_{ce}^s + Q_{ec}^s]. \quad (3.51)$$

O isospin de $\eta_{[32]}$ depende então da escolha do sinal central em $(\epsilon^{abd}\delta^{ce} \pm \epsilon^{abc}\delta^{de})$, se construirmos a corrente com o sinal negativo o isospin será 0, se a construirmos com o sinal positivo o isospin será 1.

A corrente η_D da eq. (3.14) tem isospin 0 já que é muito similar à corrente $\eta_{[31]}$ e a derivada não influencia o isospin.

Resta então calcular o isospin das correntes construídas para o $\Xi^{--}(1862)$, eqs. (3.15) e (3.18). Começemos com a corrente $\eta_{II[28]}(x)$:

$$\begin{aligned} I_3 \eta_{II[28]}(x) &= \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} \{s_a^T(x) C(I_3 d_b(x))\} \{s_d^T(x) C\gamma_5 d_e(x)\} C \bar{u}_g^T(x) + \\ &+ \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} \{s_a^T(x) C d_b(x)\} \{s_d^T(x) C\gamma_5 (I_3 d_e(x))\} C \bar{u}_g^T(x) + \\ &+ \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} \{s_a^T(x) C d_b(x)\} \{s_d^T(x) C\gamma_5 d_e(x)\} C (I_3 \bar{u}_g^T(x)) = \\ &= -\frac{3}{2} \eta_{II[28]}(x). \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$I_3^2 \eta_{II[28]}(x) = \frac{9}{4} \eta_{II[28]}(x). \quad (3.53)$$

Vemos que o cálculo é basicamente o mesmo de uma associação de três quarks já que agora os diquarks são construídos com um quark s . O mesmo vale para I_- e I_+ :

$$I_- \eta_{II[28]}(x) = 0, \quad (3.54)$$

$$I_- I_+ \eta_{II[28]}(x) = 3 \eta_{II[28]}(x). \quad (3.55)$$

Assim:

$$I^2 \eta_{II[28]}(x) = \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) \eta_{II[28]}(x) \Rightarrow \mathcal{I} = \frac{3}{2}. \quad (3.56)$$

Vale exatamente o mesmo para a corrente $\eta_{I[28]}(x)$ que também tem $\mathcal{I} = 3/2$.

Não foi encontrado nenhum candidato a parceiro de isospin do $\Theta^+(1540)$ de forma que associamos um isospin igual a zero a este estado [33].

Tabela 3.1: Isospin das correntes estudadas do $\Theta^+(1540)$ e do $\Xi^{--}(1862)$.

Estado	Corrente	Isospin
$\Theta^+(1540)$	$\eta_{[27]}$ eq.(3.9)	1
$\Theta^+(1540)$	$\eta_{[31]}$ eq.(3.12)	0
$\Theta^+(1540)$	$\eta_{[32]}$ eq.(3.13)	0 ou 1
$\Theta^+(1540)$	η_D eq.(3.14)	0
$\Xi^{--}(1862)$	$\eta_{I[28]}$ eq.(3.15)	3/2
$\Xi^{--}(1862)$	$\eta_{II[28]}$ eq.(3.18)	3/2

3.2.2 Paridade das correntes

Passamos então para o estudo da paridade das correntes. A transformação de paridade é definida diferentemente para férmions e bósons. Para férmions temos:

$$\psi'(-\vec{r}, t) = \xi \gamma_0 \psi(\vec{r}, t), \quad (3.57)$$

e para os bósons:

$$\phi'(-\vec{r}, t) = \xi \phi(\vec{r}, t). \quad (3.58)$$

Em ambos os casos $\xi = +1$ significa que o campo tem paridade positiva e $\xi = -1$ que a paridade é negativa. Os quarks são férmions de paridade positiva. Aplicando estas definições aos diquarks pseudo-escalares temos:

$$(q^T \hat{1} q)_c(x) = \epsilon_{abc} [q_a^T(x) C q_b(x)], \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned}
(q^T \hat{1} q)'_c(-\vec{r}, t) &= \epsilon_{abc} [q_a'^T(-\vec{r}, t) C q_b'(-\vec{r}, t)] = \\
&= \epsilon_{abc} [(\gamma_0 q_a)^T C \gamma_0 q_b] = \\
&= \epsilon_{abc} [q_a^T (-C \gamma_0) \gamma_0 q_b] = \\
&= -(q^T \hat{1} q)_c(\vec{r}, t).
\end{aligned} \quad (3.60)$$

Já os diquarks escalares:

$$(q^T \gamma_5 q)_c(x) = \epsilon_{abc} [q_a^T(x) C \gamma_5 q_b(x)], \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned}
(q^T \gamma_5 q)'_c(-\vec{r}, t) &= \epsilon_{abc} [q_a'^T(-\vec{r}, t) C \gamma_5 q_b'(-\vec{r}, t)] = \\
&= \epsilon_{abc} [q_a^T (-C \gamma_0) \gamma_5 \gamma_0 q_b] = \\
&= (q^T \gamma_5 q)_c(\vec{r}, t).
\end{aligned} \quad (3.62)$$

O que justifica a posteriori os nomes pelos quais já vínhamos chamando estes estados.

Uma vez determinada a paridade dos diquarks, fica fácil calcular a paridade das correntes. Começando com $\eta_{[27]} = t \eta_1 + \eta_2$ temos:

$$\begin{aligned}
 \eta'_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} \left(Q'^s_{ab} Q'^s_{ce} C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d) \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} \left(Q^s_{ab} Q^s_{ce} C ((\gamma_0 s_e)^\dagger \gamma_0)^T - (u \leftrightarrow d) \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} \left(Q^s_{ab} Q^s_{ce} C \gamma_0^T \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d) \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} \left(Q^s_{ab} Q^s_{ce} (-\gamma_0 C) \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d) \right) = \\
 &= -\gamma_0 \eta_1,
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

$$\begin{aligned}
 \eta'_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} \left(Q'^ps_{ab} Q'^ps_{ce} C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d) \right) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} \left((-Q^{ps}_{ab})(-Q^{ps}_{ce})(-\gamma_0 C) \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d) \right) = \\
 &= -\gamma_0 \eta_2.
 \end{aligned} \tag{3.64}$$

O que nos leva a concluir que $\eta_{[27]}$ tem paridade negativa. Um cálculo muito semelhante resulta em uma paridade positiva para $\eta_{[31]}$.

A corrente $\eta_{[32]}$ da eq. (3.13) pode ser reescrita na forma:

$$\eta_{[32]} = -(\epsilon^{abd} \delta^{ce} \pm \epsilon^{abc} \delta^{de}) [Q^s_{ab} (\not{D} Q^s_{cd}) - (\not{D} Q^s_{ab}) Q^s_{cd}] \gamma_5 C \bar{s}_e^T. \tag{3.65}$$

A transformação de paridade do campo de gluons é dada por:

$$A^{\mu'}(x) \Rightarrow A^{0'}(-\vec{r}, t) = A^0(\vec{r}, t); \quad A^{j'}(-\vec{r}, t) = -A^j(\vec{r}, t), \tag{3.66}$$

e isso implica que a derivada covariante se tranforma da forma seguinte:

$$\not{D}'(-\vec{r}, t) = \gamma_0 \not{D}(\vec{r}, t) \gamma_0. \tag{3.67}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 \eta'_{[32]} &= -(\epsilon^{abd} \delta^{ce} \pm \epsilon^{abc} \delta^{de}) [Q'^s_{ab} (\not{D}' Q'^s_{cd}) - (\not{D}' Q'^s_{ab}) Q'^s_{cd}] \gamma_5 C \bar{s}_e^T = \\
 &= -(\epsilon^{abd} \delta^{ce} \pm \epsilon^{abc} \delta^{de}) [Q^s_{ab} (\gamma_0 \not{D} \gamma_0 Q^s_{cd}) - (\gamma_0 \not{D} \gamma_0 Q^s_{ab}) Q^s_{cd}] \gamma_5 (-\gamma_0 C \bar{s}_e^T) = \\
 &= \gamma_0 \eta_{[32]}.
 \end{aligned} \tag{3.68}$$

De forma semelhante a corrente da eq. (3.14) fica:

$$\eta'_D = \gamma_0 \eta_D. \tag{3.69}$$

Tabela 3.2: Isospin e paridade das correntes estudadas do $\Theta^+(1540)$ e do $\Xi^{--}(1862)$.

Estado	Corrente	Isospin	paridade
$\Theta^+(1540)$	$\eta_{[27]}$ eq.(3.9)	1	-
$\Theta^+(1540)$	$\eta_{[31]}$ eq.(3.12)	0	+
$\Theta^+(1540)$	$\eta_{[32]}$ eq.(3.13)	0 ou 1	+
$\Theta^+(1540)$	η_D eq.(3.14)	0	+
$\Xi^{--}(1862)$	$\eta_{I[28]}$ eq.(3.15)	3/2	-
$\Xi^{--}(1862)$	$\eta_{II[28]}$ eq.(3.18)	3/2	+

As correntes $\eta_{I[28]}$ e $\eta_{II[28]}$ do $\Xi^{--}(1862)$ têm respectivamente a mesma paridade que as correntes $\eta_{[27]}$ e $\eta_{[31]}$, já que o sabor dos quarks não influencia na paridade.

Resumimos então todas as propriedades das correntes na tabela 3.2

Sobre a paridade nada pôde ser dito experimentalmente [33]. De fato a paridade da corrente pode não ser importante na determinação da paridade da partícula [31].

3.2.3 Conclusões

As correntes para o $\Theta^+(1540)$ podem ser divididas em dois grupos de acordo com sua dimensão já que as correntes $\eta_{[32]}$ e η_D têm uma derivada entre seus operadores. Esta derivada tem o efeito de introduzir um momento angular entre os quarks do estado sob estudo e eleva a dimensão do operador. Assim fica difícil construir uma combinação linear entre estas correntes e as de dimensão mais baixa ($\eta_{[27]}$ e $\eta_{[31]}$). Adicionalmente a tabela 3.2 mostra que as duas correntes de dimensão baixa têm isospins e paridade diferentes, o que também torna inconveniente construir uma mistura das duas. Vemos então que de fato temos três candidatas para a corrente do $\Theta^+(1540)$: $\eta_{[27]}$, $\eta_{[31]}$ e $\eta_{[32]} + t.\eta_D$ (onde t é um coeficiente de mistura a ser ajustado).

A primeira corrente com que trabalhamos ($\eta_{[27]}$) tem o problema de que seu isospin é igual a 1. Tudo indica que, se o $\Theta^+(1540)$ existe, ele tem isospin zero. Este fato foi se consolidando depois do início de nosso trabalho até que, em certo ponto, decidimos abandonar o uso desta corrente, não incluindo-a em alguns dos artigos publicados. Aqui apresentaremos a análise completa desta corrente.

As correntes $\eta_{[31]}$ e $\eta_{[32]}$ foram anteriormente exploradas por outros autores (refs. [31] e [32] respectivamente). Nosso trabalho consistirá em aprofundar o cálculo destas correntes

estudando os limites de validade das regras de soma e expandí-lo aplicando as FESR. Além disso, buscamos generalizar a corrente $\eta_{[32]}$ por meio da introdução do termo η_D .

3.3 O lado fenomenológico

A expressão fenomenológica para o correlator do pentaquarks é obtida de forma análoga a da eq. (2.43), só que neste caso o estado em questão tem spin 1/2 (o que introduz uma soma sobre a orientação do spin):

$$\Pi_{\alpha\beta}(q) = \sum_{r=1,2} \frac{\langle 0 | \eta_\alpha | m, \vec{p}, r \rangle \langle m, \vec{p}, r | \bar{\eta}_\beta | 0 \rangle}{m^2 - q^2}, \quad (3.70)$$

onde já deixamos de lado a soma sobre as massas que seriam depois excluídas por meio do corte do contínuo.

Temos então que fazer uma parametrização fenomenológica análoga àquela da eq. (2.27). Suponha que a corrente tenha paridade positiva e o bárion com o qual ela se acopla possua também a paridade positiva, a parametrização fica:

$$\langle 0 | \eta_\alpha(0) | m, \vec{p}, r \rangle_+ = \lambda_+ U_\alpha^r, \quad (3.71)$$

onde U_α^s é o spinor da partícula e λ_+ é o parâmetro que fornece o acoplamento da corrente com o pentaquark. Se considerarmos o acoplamento com uma partícula de paridade negativa temos:

$$\langle 0 | \gamma_5 \eta_\alpha(0) | m, \vec{p}, r \rangle_- = \lambda_- U_\alpha^r, \quad (3.72)$$

que multiplicada por γ_5 nos fornece uma equação equivalente a (3.71):

$$\langle 0 | \eta_\alpha(0) | m, \vec{p}, r \rangle_- = \lambda_- \gamma_5 U_\alpha^r, \quad (3.73)$$

Inserindo os elementos de matriz (3.71) e (3.73) na Eq.(3.70), obtemos dois tipos de correlatores,

$$\Pi_{\alpha\beta}^+(q) = \frac{\lambda_{m+}^2}{m_+^2 - q^2} \sum_{r=1,2} U_\alpha^r(q) \bar{U}_\beta^r(q), \quad (3.74)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^-(q) = -\frac{\lambda_{m-}^2}{m_-^2 - q^2} \gamma_5 \left(\sum_{r=1,2} U_\alpha^r(q) \bar{U}_\beta^r(q) \right) \gamma_5, \quad (3.75)$$

sabendo que:

$$\sum_{r=1,2} U_\alpha^r(q) \bar{U}_\beta^r(q) = (\not{q} + m)_{\alpha\beta}, \quad (3.76)$$

temos os dois tipos de correlatores para o lado fenomenológico, dados por:

$$\Pi^{m\pm}(q) = \lambda_\pm^2 \frac{\not{q} \pm m_\pm}{m_\pm^2 - q^2} = \not{q} \Pi_q + \Pi_1, \quad (3.77)$$

As funções Π_1 e Π_q são conhecidas como estruturas q e $\hat{1}$ e as regras de soma podem ser construídas independentemente para as duas estruturas já que o lado da OPE apresentará um arrajo semelhante ($\not{q} \Pi_q + \Pi_1$). Fazendo a transformada de Borel em ambas as estruturas temos:

$$\beta[\Pi_1] = \pm \lambda_{\pm}^2 m_{\pm} e^{-m_{\pm}^2/M^2}, \quad \beta[\Pi_q] = \lambda_{\pm}^2 e^{-m_{\pm}^2/M^2}. \quad (3.78)$$

Igualando estas expressões ao lado Borel-transformado da OPE, obtemos equações análogas à eq. (2.57), uma para cada estrutura:

$$\lambda_{\pm}^2 e^{-m_{\pm}^2/M^2} = \int_0^{s_0} ds \rho_q^{ope}(s) e^{-s/M^2}, \quad (3.79)$$

$$\pm \lambda_{\pm}^2 m_{\pm} e^{-m_{\pm}^2/M^2} = \int_0^{s_0} ds \rho_1^{ope}(s) e^{-s/M^2}. \quad (3.80)$$

Fica claro que a paridade só influencia a estrutura 1, já que o correlador fenomenológico desta estrutura muda de sinal de acordo com a paridade. Um sinal positivo no lado esquerdo da equação (3.80) indica que estamos considerando um estado que tem a mesma paridade da corrente, ao passo que um sinal negativo indica um estado com paridade oposta à da corrente. É importante notar que, a menos deste sinal, todas as outras constantes no lado esquerdo da equação são positivo-definidas, assim o sinal obtido no lado direito (da OPE) deve concordar com este sinal proveniente da paridade. Em princípio isto nos permite determinar a paridade da partícula. Um tratamento alternativo para o lado fenomenológico, que considera simultaneamente as partículas de paridade positiva e negativa, pode ser encontrado na ref. [31].

3.4 O lado da OPE

Passamos agora para a determinação das densidades espectrais no lado da OPE, $\rho_q^{ope}(s)$ e $\rho_1^{ope}(s)$, para cada uma das correntes.

3.4.1 A corrente $\eta_{[27]}$

Começaremos estudando a corrente introduzida na eq. (3.9):

$$\eta_{[27]} = [t \eta_1 + \eta_2]; \quad (3.81)$$

$$\eta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} (Q_{ab}^s Q_{ce}^s C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d)), \quad (3.82)$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon_{abc} (Q_{ab}^{ps} Q_{ce}^{ps} C \bar{s}_e^T - (u \leftrightarrow d)). \quad (3.83)$$

Esta corrente foi originalmente estudada na ref. [27], aqui refinaremos aquela discussão fazendo algumas correções e aprofundando a discussão das regiões de validade das regras de soma.

Como descrito no capítulo 2, começamos o cálculo inserindo a corrente $\eta_{[27]}$ no correlator:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \eta(x) \bar{\eta}(0) \} | 0 \rangle. \quad (3.84)$$

O elemento de matriz $\langle 0 | T \{ \eta(x) \bar{\eta}(0) \} | 0 \rangle$ é melhor manipulado na forma:

$$\langle 0 | T \{ \eta(x) \bar{\eta}(0) \} | 0 \rangle = t^2 \Pi_{11}(x) + t(\Pi_{12} + \Pi_{21}) + \Pi_{22}, \quad (3.85)$$

onde:

$$\Pi_{RR'}(x) = \langle 0 | T \{ \theta_R(x) \bar{\theta}_{R'}(0) \} | 0 \rangle, \quad (3.86)$$

$$\theta_R(x) = \epsilon^{abc} [u_a^T(x) C \Gamma_R d_b(x)] [u_c^T(x) C \Gamma_R d_e(x)] C \bar{s}_e^T(x), \quad (3.87)$$

$$\bar{\theta}_R(0) = \epsilon^{abc} s_e^T(0) C [\bar{d}_e(0) \Gamma_R C \bar{u}_c^T(0)] [\bar{d}_b(0) \Gamma_R C \bar{u}_a^T(0)], \quad (3.88)$$

$$\Gamma_1 = \gamma_5 \text{ e } \Gamma_2 = \hat{1}. \quad (3.89)$$

Esse elemento é então expandido por meio da aplicação do teorema de Wick:

$$\langle 0 | T \{ \theta_R(x) \bar{\theta}_{R'}(0) \} | 0 \rangle = -C S_{e'e}^T(-x, m_s) C \epsilon_{abc} \epsilon_{a'b'c'} \sum_{j=1}^4 \Pi_j(x), \quad (3.90)$$

onde:

$$\Pi_1(x) = \text{Tr}[C \Gamma_R S_{ee'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{cc'}^T(x, m_u)] \cdot \text{Tr}[C \Gamma_R S_{bb'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{aa'}^T(x, m_u)], \quad (3.91)$$

$$\Pi_2(x) = \text{Tr}[C \Gamma_R S_{be'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{ac'}^T(x, m_u)] \cdot \text{Tr}[C \Gamma_R S_{eb'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{ca'}^T(x, m_u)], \quad (3.92)$$

$$\Pi_3(x) = -\text{Tr}[C \Gamma_R S_{be'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{cc'}^T(x, m_u) C \Gamma_R S_{eb'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{aa'}^T(x, m_u)], \quad (3.93)$$

$$\Pi_4(x) = -\text{Tr}[C \Gamma_R S_{bb'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{ac'}^T(x, m_u) C \Gamma_R S_{ee'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{ac'}^T(x, m_u)], \quad (3.94)$$

onde todos os propagadores são “não-perturbativos” no sentido definido na equação (2.13) e explorado no apêndice A.

Inserimos então estes propagadores nas eqs. (3.91-3.94) para em seguida calcular a transformada de Fourier de cada diagrama obtido. Fizemos o cálculo considerando os diagramas de dimensão até 6 com uma expansão para m_s pequeno (desprezando os termos de ordem igual ou superior a m_s^2), estes diagramas estão mostrados na figura 3.1. As massas dos quarks u e d foram consideradas iguais a zero.

Figura 3.1: Diagramas calculados para as regras de soma do $\Theta^+(1540)$ usando a corrente $\eta_{[27]}$.

Tomamos então a parte imaginária do correlator $\Pi(q^2)$ obtido para $q^2 = s > 0$, obtendo as densidades espectrais $\rho(s) = 1/\pi \text{Im}\Pi(s)$:

$$\begin{aligned} \rho_q^{[27]} &= c_1 \frac{s^5}{5!5!2^{12}7\pi^8} + c_1 \frac{s^3}{5!3!2^{10}\pi^6} m_s \langle \bar{s}s \rangle + c_2 \frac{s^3}{5!3!2^{13}\pi^6} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \\ &- c_1 \frac{s^2}{4!3!2^{11}\pi^6} m_s \langle \bar{s}g_s \sigma \cdot \mathbf{G} s \rangle + c_3 \frac{s^2}{4!3!2^6\pi^4} \langle \bar{q}q \rangle^2, \end{aligned} \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^{[27]} &= c_1 \frac{s^5}{5!5!2^{12}\pi^8} m_s - c_1 \frac{s^4}{5!4!2^9\pi^6} \langle \bar{s}s \rangle \\ &+ c_1 \frac{s^3}{4!3!2^{11}\pi^6} \langle \bar{s}g_s \sigma \cdot \mathbf{G} s \rangle + c_2 \frac{s^3}{4!3!2^{13}\pi^6} m_s \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.96)$$

onde $c_1 = 5t^2 + 2t + 5$, $c_2 = (1 - t)^2$ e $c_3 = 7t^2 - 2t - 5$.

3.4.2 A corrente $\eta_{[31]}$

Utilizando a corrente da equação (3.12):

$$\eta_{[31]} = \epsilon^{abc} \epsilon^{def} \epsilon^{cfg} Q_{ab}^{ps} Q_{de}^s C \bar{s}_g^T, \quad (3.97)$$

o elemento de matriz $\langle 0 | T \{ \eta(x) \eta^\dagger(0) \} | 0 \rangle$ pode expandido, da mesma forma que foi feito anteriormente, por meio da aplicação do teorema de Wick:

$$\langle 0 | T \{ \eta(x) \bar{\eta}(0) \} | 0 \rangle = C S_{g'g}^T(-x, m_s) C \epsilon_{abc} \epsilon_{def} \epsilon_{cfg} \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'f'} \epsilon_{c'f'g'} \sum_{j=1}^4 \Pi_j(x), \quad (3.98)$$

onde,

$$\Pi_1(x) = \text{Tr}[CS_{bb'}(x, m_d)CS_{aa'}^T(x, m_u)] \text{Tr}[C\gamma_5 S_{ee'}(x, m_d)\gamma_5 CS_{dd'}^T(x, m_u)], \quad (3.99)$$

$$\Pi_2(x) = \text{Tr}[CS_{be'}(x, m_d)\gamma_5 CS_{ad'}^T(x, m_u)] \text{Tr}[C\gamma_5 S_{eb'}(x, m_d)CS_{da'}^T(x, m_u)], \quad (3.100)$$

$$\Pi_3(x) = -\text{Tr}[CS_{be'}(x, m_d)\gamma_5 CS_{dd'}^T(x, m_u)C\gamma_5 S_{eb'}(x, m_d)CS_{aa'}^T(x, m_u)], \quad (3.101)$$

$$\Pi_4(x) = -\text{Tr}[CS_{bb'}(x, m_d)CS_{da'}^T(x, m_u)C\gamma_5 S_{ee'}(x, m_d)\gamma_5 CS_{ad'}^T(x, m_u)]. \quad (3.102)$$

Esta corrente apresenta uma propriedade interessante: os termos que possuem no traço os 4 propagadores, Π_3 e Π_4 , se cancelam devido a uma ação combinada do traço e da contração dos fatores de cor. Isso leva à supressão de um grande número de permutações dos diagramas da figura 3.1. Em particular os diagramas que restam para o termo $\langle \bar{q}q \rangle^2$ (diagrama (i) da figura 3.1) se anulam e este condensado não contribui. As densidades espectrais obtidas são dadas por:

$$\begin{aligned} \rho_q^{[31]} &= \frac{s^5}{5!5!2^{10}7\pi^8} + \frac{s^3}{5!3!2^8\pi^6}m_s\langle \bar{s}s \rangle + \frac{s^3}{5!3!2^{10}\pi^6}\langle \frac{\alpha_s}{\pi}G^2 \rangle \\ &- \frac{s^2}{4!3!2^9\pi^6}m_s\langle \bar{s}g_s\sigma \cdot \mathbf{G}s \rangle, \end{aligned} \quad (3.103)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^{[31]} &= \frac{s^5}{5!5!2^{10}\pi^8}m_s - \frac{s^4}{5!4!2^7\pi^6}\langle \bar{s}s \rangle \\ &+ \frac{s^3}{4!3!2^9\pi^6}\langle \bar{s}g_s\sigma \cdot \mathbf{G}s \rangle + \frac{s^3}{4!3!2^{10}\pi^6}m_s\langle \frac{\alpha_s}{\pi}G^2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.104)$$

3.4.3 A corrente $[\eta_{[32]} + t \eta_D]$

Passamos então ao estudo da corrente:

$$\eta_{nova} = [\eta_{[32]} + t \eta_D] \quad (3.105)$$

onde $\eta_{[32]}$ foi escolhida de forma a obter isospin 0. O correlator no espaço das coordenadas pode ser reescrito na forma:

$$\Pi(x) = \langle 0|T\left\{\eta_{[32]}\bar{\eta}_{[32]} + t\left[\eta_D\bar{\eta}_{[32]} + \eta_{[32]}\bar{\eta}_D\right] + t^2\eta_D\bar{\eta}_D\right\}|0\rangle \quad (3.106)$$

Obtemos os elementos de matriz de forma análoga ao realizado anteriormente:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{\eta_{[32]}(x)\bar{\eta}_{[32]}(0)\}|0\rangle &= -(\epsilon_{abd}\delta_{ce} - \epsilon_{abc}\delta_{de})(\epsilon_{a'b'd'}\delta_{c'e'} - \epsilon_{a'b'c'}\delta_{d'e'}) \times \\ &\times \gamma_5\gamma^\mu CS_{e'e}^T(-x, m_s)C\gamma^\nu\gamma_5 \sum_{j=1}^4 \Pi_j(x), \end{aligned} \quad (3.107)$$

onde:

$$\Pi_1(x) = \partial^A \text{Tr}[S_{bb'}^{(1)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{aa'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5] \text{Tr}[S_{dd'}^{(3)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{cc'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5], \quad (3.108)$$

$$\Pi_2(x) = -\partial^B \text{Tr}[S_{bd'}^{(1)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{cc'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5 S_{db'}^{(3)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{aa'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5], \quad (3.109)$$

$$\Pi_3(x) = \partial^B \text{Tr}[S_{bb'}^{(1)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ca'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5 S_{dd'}^{(3)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ac'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5], \quad (3.110)$$

$$\Pi_4(x) = -\partial^A \text{Tr}[S_{bd'}^{(1)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ac'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5] \text{Tr}[S_{db'}^{(3)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ca'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5]. \quad (3.111)$$

Os índices numéricos sobre os propagadores (de 1 a 4) servem para indicar sobre quais deles as derivadas estão agindo. Estas são definidas por:

$$\partial^A = -\partial_\mu^{(43)} \partial_\nu^{(43)} + \partial_\mu^{(43)} \partial_\nu^{(21)} + \partial_\mu^{(21)} \partial_\nu^{(43)} - \partial_\mu^{(21)} \partial_\nu^{(21)}, \quad (3.112)$$

$$\partial^B = -\partial_\mu^{(23)} \partial_\nu^{(21)} + \partial_\mu^{(23)} \partial_\nu^{(43)} + \partial_\mu^{(41)} \partial_\nu^{(21)} - \partial_\mu^{(41)} \partial_\nu^{(43)}, \quad (3.113)$$

onde:

$$\partial_\mu^{(12)} = \frac{\partial^{(1)}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial^{(2)}}{\partial x^\mu}. \quad (3.114)$$

O elemento relativo à η_D fica:

$$\langle 0 | T \{ \eta_D(x) \bar{\eta}_D(0) \} | 0 \rangle = \epsilon_{abc} \epsilon_{def} \epsilon_{c'fg} \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'f'} \epsilon_{c'f'g'} \gamma^\mu C [\partial_\mu \partial_\nu S_{g'g}^T(-x, m_s)] C \gamma^\nu \sum_{j=1}^4 \Pi_j(x), \quad (3.115)$$

onde,

$$\Pi_1(x) = \text{Tr}[C S_{bb'}(x, m_d) C S_{aa'}^T(x, m_u)] \text{Tr}[C \gamma_5 S_{ee'}(x, m_d) \gamma_5 C S_{dd'}^T(x, m_u)], \quad (3.116)$$

$$\Pi_2(x) = \text{Tr}[C S_{be'}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ad'}^T(x, m_u)] \text{Tr}[C \gamma_5 S_{eb'}(x, m_d) C S_{da'}^T(x, m_u)], \quad (3.117)$$

$$\Pi_3(x) = -\text{Tr}[C S_{be'}(x, m_d) \gamma_5 C S_{dd'}^T(x, m_u) C \gamma_5 S_{eb'}(x, m_d) C S_{aa'}^T(x, m_u)], \quad (3.118)$$

$$\Pi_4(x) = -\text{Tr}[C S_{bb'}(x, m_d) C S_{da'}^T(x, m_u) C \gamma_5 S_{ee'}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ad'}^T(x, m_u)]. \quad (3.119)$$

Restando ainda a contribuição dos termos cruzados (mostraremos um deles, o outro tem forma semelhante):

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \eta_{[32]}(x) \bar{\eta}_D(0) \} | 0 \rangle &= (\epsilon_{abd} \delta_{ce} - \epsilon_{abc} \delta_{de}) \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'f'} \epsilon_{c'f'g'} (\partial_\mu^{(41)} - \partial_\mu^{(23)}) \times \\ &\times \gamma_5 \gamma^\mu C [\partial_\nu S_{g'e}^T(-x, m_s)] C \gamma^\nu \sum_{j=1}^4 \Pi_j(x), \end{aligned} \quad (3.120)$$

onde,

$$\Pi_1(x) = \text{Tr}[S_{de'}^{(1)}(x, m_d) C S_{cd'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5] \text{Tr}[S_{bb'}^{(3)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{aa'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5], \quad (3.121)$$

$$\Pi_2(x) = \text{Tr}[S_{db'}^{(1)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ca'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5] \text{Tr}[S_{be'}^{(3)}(x, m_d) C S_{ad'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5], \quad (3.122)$$

$$\Pi_3(x) = -\text{Tr}[S_{db'}^{(1)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{aa'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5 S_{be'}^{(3)}(x, m_d) C S_{cd'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5], \quad (3.123)$$

$$\Pi_4(x) = -\text{Tr}[S_{de'}^{(1)}(x, m_d) C S_{ad'}^{(2)T}(x, m_u) C \gamma_5 S_{bb'}^{(3)}(x, m_d) \gamma_5 C S_{ca'}^{(4)T}(x, m_u) C \gamma_5]. \quad (3.124)$$

Com base nestas expressões podemos analisar a influência do novo termo η_D antes mesmo de fazer qualquer cálculo numérico. Para tal consideremos a parte do propagador “não perturbativo” proporcional a δ_{ab} , dividindo o propagador da seguinte forma:

$$S_{ab}(x, m_q) = \delta_{ab} S_I(x, m_q) + \tau_{ab} S_{II}(x, m_q), \quad (3.125)$$

$$S_I(x, m_q) = \not{x} \Delta_1(x^2, m_q) + \Delta_2(x^2, m_q), \quad (3.126)$$

e considerando somente os diagramas gerados por S_I . Isto equivale a estudar somente os diagramas que não envolvem troca de glúons entre os quarks, mostrados na figura 3.2.

Figura 3.2: Diagramas usados no cálculo preliminar da regra de soma da corrente η_{nova} .

O termos cruzados (3.120) se anulam para todos estes diagramas pois as funções Π_1 e Π_2 são nulas (ambas tem um traço onde restará uma matriz γ_5 acompanhada de uma ou duas outras matrizes de Dirac) e os fatores de cor levam os termos Π_3 e Π_4 a se anularem (como no caso de $\eta_{[31]}$).

Já no termo da eq. (3.115), que envolve somente a corrente nova, outro fato importante pode ser notado: a derivada presente na corrente η_D (eq. 3.14) dá origem ao seguinte resultado para a estrutura $\hat{1}$ do correlator no espaço das coordenadas:

$$\Pi(x^2)_{\hat{1}} = 3.2^7 \left(-2^3 \frac{\partial \Delta_2(x^2, m_s)}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 \Delta_2(x^2, m_s)}{\partial (x^2)^2} \right) (\Delta_2^4(x^2, m_q) - x^4 \Delta_1^4(x^2, m_q)). \quad (3.127)$$

Os primeiros termos de $\Delta_2(x^2, m_s)$ são dados por:

$$\Delta_2(x^2, m_s) = -\frac{m_s}{4\pi^2 x^2} - \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{12} + \dots \quad (3.128)$$

Isso faz com que $\left(-2^3 \frac{\partial \Delta_2(x^2, m_s)}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 \Delta_2(x^2, m_s)}{\partial (x^2)^2}\right)$ seja zero para todos os diagramas com baixa dimensão na linha do quark s . Uma situação idêntica é verificada na estrutura $\not{q}$:

$$\Pi(x^2)_{\not{q}} = 3.2^7 \left(-3.2^2 \frac{\partial \Delta_1(x^2, m_s)}{\partial x^2} - 4x^2 \frac{\partial^2 \Delta_1(x^2, m_s)}{\partial (x^2)^2} \right) (\Delta_2^4(x^2, m_q) - x^4 \Delta_1^4(x^2, m_q)), \quad (3.129)$$

e são nulos todos os diagramas com baixa dimensão na linha do quark s :

$$\Delta_1(x^2, m_s) = \frac{i}{2\pi^2 x^4} + \frac{i m_s \langle \bar{s}s \rangle}{3.2^4} + \dots \quad (3.130)$$

Em suma, a corrente η_D não contribui para nenhum dos diagramas da figura 3.2. O fato desta corrente só começar a contribuir em diagramas de ordem mais alta da OPE mostra que ela é pouco importante quando comparada a corrente $\eta_{[32]}$. Este fato justifica a escolha de corrente feita na ref. [32]. A densidade espectral (calculada para os mesmo diagramas da figura 3.1) que obtemos para esta corrente é dada por:

$$\begin{aligned} \rho_q^{[32]} &= \frac{s^6}{7!2^{13}5 \pi^8} + \frac{s^4}{3!5!2^8 \pi^6} m_s \langle \bar{s}s \rangle + \frac{s^4}{4!2^{15} \pi^6} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \\ &+ \frac{s^3}{4!3!2^3 \pi^4} \langle \bar{q}q \rangle^2 - \frac{s^3}{5!3!2^6 \pi^6} m_s \langle \bar{s}g\sigma.Gs \rangle, \end{aligned} \quad (3.131)$$

$$\begin{aligned} \rho_1^{[32]} &= \frac{s^6}{7!2^{11}5 \pi^8} m_s - \frac{s^5}{5!5!2^6 \pi^6} \langle \bar{s}s \rangle - \frac{s^4}{5!2^{15} \pi^6} m_s \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \\ &+ \frac{s^4}{5!2^{10} \pi^6} \langle \bar{s}g\sigma.Gs \rangle. \end{aligned} \quad (3.132)$$

3.4.4 As correntes do $\Xi^{--}(1862)$: $\eta_{I[28]}$ e $\eta_{II[28]}$

As correntes $\eta_{I[28]}$ e $\eta_{II[28]}$, eqs. (3.15) e (3.18), são muito semelhantes às correntes $\eta_{[27]}$ e $\eta_{[31]}$ respectivamente. Portanto os elementos de matriz $\langle 0|T\{\eta(x)\eta^\dagger(0)\}|0\rangle$ são idênticos aos obtidos nas equações (3.85) (no caso de $\eta_{I[28]}$) e (3.98) (no caso de $\eta_{II[28]}$) com os propagadores do quark u trocados por propagadores do quark s e vice-versa. Isto acaba acarretando um número muito maior de diagramas que contribuirão para a OPE, principalmente na estrutura q . Os diagramas usados no caso da corrente $\eta_{I[28]}$ estão mostrados na figura 3.3. Estes diagramas levam à seguinte densidade espectral para a

Figura 3.3: Diagramas calculados para as regras de soma do $\Xi^{--}(1862)$ usando a corrente η_I [28].

corrente $\eta_I[28]$:

$$\begin{aligned}
\rho_q^{I[28]} = & c_1 \frac{s^5}{5!5!2^{12}7\pi^8} + c_4 \frac{s^3}{5!2^{10}\pi^6} m_s \langle \bar{s}s \rangle - c_5 \frac{s^3}{5!2^8\pi^6} m_s \langle \bar{q}q \rangle \\
& + c_2 \frac{s^3}{5!3!2^{13}\pi^6} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle + 7c_5 \frac{s^2}{2^{16}\pi^6} m_s \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \\
& - c_5 \frac{s^2}{4!2^{13}\pi^6} m_s \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \left[6\ln \left(\frac{s}{\Lambda_{QCD}^2} \right) - \frac{43}{2} \right] \\
& + c_2 \frac{s^2}{3^2 2^{11}\pi^4} (\langle \bar{s}s \rangle^2 + \langle \bar{q}q \rangle^2) + c_5 \frac{s^2}{3!2^8\pi^4} \langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{q}q \rangle \\
& - c_6 \frac{s^2}{4!3!2^{11}\pi^6} m_s \langle \bar{s}g\sigma.Gs \rangle,
\end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\rho_1^{I[28]} = -c_1 \frac{s^4}{5!4!2^9\pi^6} \langle \bar{q}q \rangle + c_1 \frac{s^3}{4!3!2^{11}\pi^6} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle, \tag{3.134}$$

onde $c_1 = 5t^2 + 2t + 5$, $c_2 = (1 - t)^2$, $c_4 = (t + 1)^2$, $c_5 = t^2 - 1$ e $c_6 = t^2 + 22t + 1$.

A corrente $\eta_{II}[28]$, assim como a $\eta_{[31]}$, faz com que muitos diagramas não contribuam. De fato somente os diagramas (a), (b), (c), (f), (g), (l) e (m) da figura 3.3 têm contribuição não nula. A densidade espectral obtida é dada por:

$$\begin{aligned}
\rho_q^{II[28]} = & \frac{s^5}{5!5!2^{10}7\pi^8} + \frac{s^3}{5!3!2^7\pi^6} m_s \langle \bar{s}s \rangle + \frac{s^3}{5!3!2^{10}\pi^6} \langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \rangle \\
& + \frac{s^2}{4!3!2^9\pi^6} m_s \langle \bar{s}g\sigma.Gs \rangle,
\end{aligned} \tag{3.135}$$

$$\rho_1^{II[28]} = -\frac{s^4}{5!4!2^7\pi^6} \langle \bar{q}q \rangle + \frac{s^3}{4!3!2^9\pi^6} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle. \tag{3.136}$$

3.5 Resultados (RSQCD)

O passo seguinte consiste em substituir as densidades espectrais obtidas na seção anterior em (3.79) e (3.80), e seguir o procedimento indicado na seção 2.6 para obter os parâmetros hadrônicos.

Nos cálculos numéricos que seguem usamos os seguintes valores [86, 91, 92, 93]:

$$\langle \bar{q}q \rangle = -(0,23 \pm 0,03)^3 \text{ GeV}^3, \tag{3.137}$$

$$m_s = 100 \pm 22 \text{ MeV}, \tag{3.138}$$

$$\langle \bar{s}s \rangle / \langle \bar{q}q \rangle = 0,8, \tag{3.139}$$

$$\langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle \text{ com } m_0^2 = 0,8 \text{ GeV}^2, \tag{3.140}$$

$$\langle g^2 G^2 \rangle = 0,88 \text{ GeV}^4. \tag{3.141}$$

3.5.1 A corrente $\eta_{[31]}$

Começaremos com a análise numérica das correntes do $\Theta^+(1540)$ usando a corrente $\eta_{[31]}$ que é a mais simples das três. Para tanto substituímos as densidades espectrais das eqs. (3.103) e (3.104) respectivamente em (3.79) e (3.80), e realizamos o cálculo numérico para a massa e constante λ (constante de acoplamento). A massa é obtida em uma expressão análoga à (2.59):

$$m_\Theta^2 = \frac{\int_0^{s_0} ds s \rho_q^{ope}(s) e^{-s/M^2}}{\int_0^{s_0} ds \rho_q^{ope}(s) e^{-s/M^2}}. \quad (3.142)$$

Ao passo que a constante de acoplamento tem expressões diferentes para as duas estruturas:

$$\lambda_\Theta^2 = e^{m_\Theta^2/M^2} \int_0^{s_0} ds \rho_q^{ope}(s) e^{-s/M^2}, \quad (3.143)$$

$$\pm \lambda_\Theta^2 = \frac{e^{m_\Theta^2/M^2}}{m_\Theta} \int_0^{s_0} ds \rho_1^{ope}(s) e^{-s/M^2}, \quad (3.144)$$

onde devemos substituir m_Θ pela expressão (3.142) para realizar o cálculo numérico.

Tanto a massa quanto a constante de acoplamento serão funções do parâmetro M^2 e o primeiro passo consiste em determinar um intervalo de valores de M^2 em que podemos confiar nas regras de soma. As figuras 3.4 e 3.5 mostram a contribuição relativa do termo de polo e do contínuo para as estruturas q e $\hat{1}$ respectivamente. Como explicado na seção 2.5.2, temos a condição de que o polo seja mais importante do que o contínuo, esta região fica à esquerda dos pontos indicados por setas nos gráficos.

Em ambos os casos fazemos a análise para dois valores de s_0 . A escolha destes valores, apesar de bastante arbitrária, contém ingredientes fenomenológicos. O valor de $\sqrt{s_0}$ tomado 500 MeV acima da massa do estado fundamental representa bem o primeiro estado excitado do meson J/ψ e este valor é amplamente utilizado em regras de soma com resultados satisfatórios para mesons e hadrons. Os valores usados nesta análise ($\sqrt{s_0} = (1, 5 + 0, 3)$ GeV e $\sqrt{s_0} = (1, 5 + 0, 7)$ GeV) são valores extremos em torno deste valor tradicional.

As figuras 3.6 e 3.7 mostram a convergência da OPE para as estruturas q e $\hat{1}$ respectivamente, com $\sqrt{s_0} = 2,0$ GeV. Claramente a estrutura $\hat{1}$ não apresenta qualquer tipo de convergência, apresentando inclusive uma inversão de sinal quando adicionamos o último condensado, que é maior que os outros três termos somados. A estrutura q apresenta um comportamento melhor, ainda que longe do ideal. Verifica-se um salto quando adicionamos o condensado de dimensão 4, mas depois a mudança é pequena.

Figura 3.4: Corrente $\eta_{[31]}$: comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para a estrutura q .

Figura 3.5: Corrente $\eta_{[31]}$: comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para a estrutura $\hat{1}$.

Figura 3.6: Corrente $\eta_{[31]}$: curvas da OPE para a estrutura q com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 5). Foi usado $\sqrt{s_0} = 2,0$ GeV.

Figura 3.7: Corrente $\eta_{[31]}$: curvas da OPE para a estrutura $\hat{1}$ com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 5). Foi usado $\sqrt{s_0} = 2,0$ GeV.

Parte deste comportamento pode ser compreendida observando as densidades espectrais (3.103) e (3.104). Notamos que, na estrutura q , temos os termos $\langle \bar{s}s \rangle$ (dim. 3) e $\langle \bar{s}g\sigma.Gs \rangle$ (dim. 5) multiplicados por m_s . O mesmo ocorre para o termo perturbativo e $\langle \frac{\alpha_s}{\pi}G^2 \rangle$ (dim. 4) na estrutura $\hat{1}$. No limite quiral estes termos seriam todos zero e é de se esperar que sejam pouco importantes dado o tamanho de m_s (~ 0.1 GeV). Ainda assim os termos remanescentes estão divergindo, sendo esta divergência muito pior no caso da estrutura $\hat{1}$.

Figura 3.8: Corrente $\eta_{[31]}$: resultado da regra de soma para a massa do $\Theta^+(1540)$ em ambas as estruturas com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas indicam a região em que existem domínio da contribuição do polo sobre o contínuo.

Apesar de rigorosamente não termos uma região confiável para a realização da regras de soma (não existe a janela de Borel) adotamos uma posição pragmática e obtivemos os parâmetros hadrônicos. Usamos como limite superior de M^2 a condição de domínio do polo sobre o contínuo. Os resultados obtidos para a massa do $\Theta^+(1540)$ em ambas estruturas estão mostrados na figura 3.8. Vemos que, além de apresentar uma OPE muito ruim, a estrutura $\hat{1}$ também é muito suscetível à variação de s_0 . Devemos considerar ainda a estabilidade da regra de soma em relação a M^2 e tomaremos como estável a região $M^2 \geq 0,7$ GeV². Por conta dos vários problemas da estrutura $\hat{1}$ vamos descartá-la, a média obtida na estrutura q para a massa do $\Theta^+(1540)$ é então:

$$m_{\Theta^+} = (1,60 \pm 0,18) \text{ GeV}, \quad (3.145)$$

onde o erro é estimado levando em conta a variação da massa com a mudança de s_0 (variando entre 1.8 e 2.2 GeV) e M^2 (que varia entre 0,7 GeV² e o valor máximo permitido para cada s_0). Podemos ainda estimar o erro introduzido pela incerteza nos parâmetros da QCD, neste caso a massa do quark s e o valor do condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$. Incluindo estes erros temos:

$$m_{\Theta^+} = (1,60 \pm 0,18 \pm 0,01) \text{ GeV}, \quad (3.146)$$

Podemos ter alguma idéia da influência da má convergência da OPE sobre este valor observando a figura 3.9, nela está mostrado o cálculo da massa em diferentes ordens na OPE. Mostramos as contribuições perturbativa e de dimensão 4, que são as dominantes, e o resultado final (até dimensão 5). O grande salto ocorre quando colocamos o condensado de dimensão 4, conforme já havia se notado anteriormente. Podemos obter uma grosseira estimativa do erro associado ao truncamento da OPE usando a metade da distância média entre estas curvas. Enfim chegamos ao valor:

$$m_{\Theta^+} = (1,60 \pm 0,18 \pm 0,01 \pm 0,07) \text{ GeV} = (1,60 \pm 0,19) \text{ GeV}, \quad (3.147)$$

onde assumimos a independência dos 3 erros para somá-los quadraticamente e obter um erro total.

Figura 3.9: Corrente $\eta_{[31]}$: resultado da regra de soma para a massa do $\Theta^+(1540)$ em várias ordens da OPE. Os valores de M^2 já foram restritos à região apropriada.

O resultado para a constante de acoplamento, obtido usando a eq. (3.143), pode ser visto na figura 3.10. Nota-se que esta constante é muito mais sensível à mudança dos parâmetros da regra de soma.

Figura 3.10: Corrente $\eta_{[31]}$: resultado da regra de soma para a constante de acoplamento do $\Theta^+(1540)$. As setas indicam a região em que existem domínio da contribuição do polo sobre o contínuo.

Seguindo o mesmo procedimento usado para a massa, podemos ainda incluir o erro devido aos parâmetros da QCD e uma estimativa do erro induzido pelo truncamento da OPE. Desta forma obtemos:

$$\lambda_{\Theta^+}^2 = (2,4 \pm 1,7 \pm 0,1 \pm 0,5) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12} = (2,4 \pm 1,8) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12}, \quad (3.148)$$

onde os erros na passagem intermediária são respectivamente σ_{RS} (relativo aos parâmetros s_0 e M^2), σ_{QCD} (dado por m_s e $\langle \bar{q}q \rangle$) e σ_{OPE} (vindo do truncamento da OPE), todos variando da mesma forma que foi feito para a massa. O erro total final é a soma quadrática dos outros três: $\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_{RS}^2 + \sigma_{QCD}^2 + \sigma_{OPE}^2}$.

3.5.2 A corrente $\eta_{[27]}$

A análise numérica com a corrente $\eta_{[27]}$ segue um caminho quase idêntico ao da seção anterior com uma diferença importante: a existência do parâmetro de mistura t . Observando as eqs. (3.95) e (3.96) vemos que os termos da OPE são proporcionais a diferentes polinômios neste parâmetro, isto permite que o ajustemos para resolver problemas tais como a má convergência da OPE, que prejudicava a regra de soma da corrente $\eta_{[31]}$.

As dependências das contribuições de cada condensado para estrutura q estão mostradas na figura 3.11. Nesta figura adotamos um valor fixo $M^2 = 0,8$, já que a situação que queremos ilustrar não muda qualitativamente até valores muito altos de M^2 (onde não devemos

ir devido a relação polo / contínuo).

Figura 3.11: Corrente $\eta_{[27]}$: Contribuições dos condensados para estrutura q em função do parâmetro t divididas pelo termo perturbativo ($\sqrt{s_0} = 2,0$ GeV). No detalhe a região em torno de $t = 1$.

Nota-se que o condensado de dimensão 6 é problemático para quase todos os valores de t , com excessão apenas das regiões em torno de $t = -\frac{5}{7}$ e $t = 1$, onde este condensado é zero. No gráfico menor da figura 3.11 podemos ver o comportamento dos outros condensados e constatar que os condensados de dimensão 3 e 5 são da mesma ordem que o termo perturbativo. De fato, mudando um pouco a massa de Borel M^2 , podemos encontrar uma região em que temos a convergência da OPE, isto está mostrado na figura 3.12 com $t = 1$. Na figura notamos que existe uma convergência para $M^2 > 0,8$ GeV². No caso de $t = -\frac{5}{7}$ o condensado de dimensão 4 é diferente de zero e prejudica a convergência, por isso $t = 1$ é uma melhor escolha.

A estrutura $\hat{1}$ apresenta, assim como no caso da corrente $\eta_{[31]}$, uma OPE totalmente divergente e que não melhora com nenhuma escolha dos parâmetros t e M^2 . Por isso nos concentramos novamente na estrutura q .

A figura 3.13 mostra a relação polo/contínuo para a estrutura q . Para $\sqrt{s_0} = 1,8$ GeV temos a condição $M^2 < 0,64$ GeV², que é incompatível com a condição que tiramos da convergência da OPE para este s_0 ($M^2 > 1,12$ GeV²)². Já para $\sqrt{s_0} = 2,2$ GeV verifi-

²É importante notar que a condição de convergência da OPE também depende do valor do limiar do contínuo, já que estamos analisando a OPE após a remoção do contínuo. A condição $M^2 > 0,8$ GeV² obtida anteriormente só se aplica ao caso em que $\sqrt{s_0} = 2,0$ GeV

Figura 3.12: Corrente $\eta_{[27]}$: curvas da OPE para $t = 1$ e $\sqrt{s_0} = 2,0$ GeV com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 6). As dimensões 4 e 6 são idênticas a zero para este valor de t .

Figura 3.13: Corrente $\eta_{[27]}$: comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para a estrutura q , com $t = 1$.

camos a existência de uma janela de Borel. Na figura 3.14 estão mostrados os resultados para a massa com ambos os limites de confiança da regra de soma indicados.

Figura 3.14: Corrente $\eta_{[27]}$: resultado da regra de soma para a massa do $\Theta^+(1540)$ com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas indicam as regiões confiáveis para as RS.

Agora temos uma janela de Borel para $\sqrt{s_0} \geq 2,1$ GeV. Levando em conta a variação de s_0 e M^2 dentro dos limites permitidos temos: $m_{\Theta^+} = (1,73 \pm 0,07)$ GeV. Assim como na corrente anterior incluímos ainda o σ_{QCD} (devido a m_s e $\langle \bar{q}q \rangle$) e finalmente σ_{OPE} (devido ao truncamento da OPE), para depois calcular o erro total:

$$m_{\Theta^+} = (1,73 \pm 0,07 \pm 0,04 \pm 0,04) \text{ GeV} = (1,73 \pm 0,09) \text{ GeV} . \quad (3.149)$$

Os erros são muito menores do que no caso anterior principalmente porque agora estamos restringindo a variação de M^2 e s_0 a uma pequena região (o que diminui σ_{RS}), mas também porque a OPE está convergindo melhor (diminuindo σ_{OPE}). Para obter um valor diretamente comparável com o da seção anterior podemos ignorar o limite inferior imposto pela OPE considerando apenas o limite superior a M^2 dado pela relação polo/contínuo. Neste caso temos $m_{\Theta^+} = (1,57 \pm 0,23)$ GeV, onde usamos os intervalos: $M^2 > 0,6 \text{ GeV}^2$ e $1,8 \text{ GeV} < s_0 < 2,2 \text{ GeV}$. No entanto este resultado é pouco confiável.

Seguimos ao cálculo da constante de acoplamento. A figura 3.15 mostra os resultados já restritos a região confiável definida para a massa.

Levando em conta o intervalo de s_0 e M^2 mostrado na figura 3.15 temos $\lambda_{\Theta^+}^2 = (2,20 \pm 0,80) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12}$. Levando em conta os erros dos parâmetros da QCD e o

Figura 3.15: Corrente $\eta_{[27]}$: resultado da regra de soma para a constante de acoplamento do $\Theta^+(1540)$. As setas indicam as regiões confiáveis para as RS.

truncamento da OPE chegamos à:

$$\lambda_{\Theta^+}^2 = (2,2 \pm 0,8 \pm 0,4 \pm 0,5) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12} = (2,2 \pm 1,0) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12}. \quad (3.150)$$

Mais uma vez podemos produzir um outro valor, menos confiável, ignorando o limite imposto pela OPE: $\lambda_{\Theta^+}^2 = (1,6 \pm 1,4) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12}$.

3.5.3 A corrente $\eta_{[32]}$

Passamos agora ao cálculo numérico da corrente $\eta_{[32]}$ que se assemelha muito ao da corrente $\eta_{[31]}$. Mais uma vez nos concentramos na análise da estrutura q dado seu melhor comportamento com as correntes anteriores. A figura 3.16 mostra o comportamento das contribuições do polo e do contínuo para esta corrente.

A figura 3.17 mostra claramente que a contribuição do termo de dimensão 6 ($\langle \bar{q}q \rangle^2$) é muito maior que todas as outras, em uma situação semelhante à que tínhamos no caso da corrente $\eta_{[27]}$. Infelizmente neste caso não temos como corrigir este problema e voltamos a situação encontrada no caso da corrente $\eta_{[31]}$ em que somos obrigados a determinar a região de validade somente pelo limite superior dado pela relação polo/contínuo e por argumentos de estabilidade.

Os resultados para a massa com os respectivos limites superiores para a massa de Borel estão mostrados na figura 3.18. Considerando mais uma vez a região $M^2 \geq 0.7$

Figura 3.16: Corrente $\eta_{[32]}$: comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para a estrutura q .

Figura 3.17: Corrente $\eta_{[32]}$: curvas da OPE com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 6). Foi usado $\sqrt{s_0} = 2,0$ GeV

Figura 3.18: Corrente $\eta_{[32]}$: resultado da regra de soma para a massa do $\Theta^+(1540)$ com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas indicam a região em que existem domínio da contribuição do polo sobre o contínuo.

GeV 2 como estável obtemos $m_{\Theta^+} = (1,61 \pm 0,18)$ GeV. Neste caso os erros em m_s e $\langle \bar{q}q \rangle$ são desprezíveis ($\sigma_{QCD} < 0,01$ GeV). Incluindo o relativo ao truncamento da OPE temos:

$$m_{\Theta^+} = (1,61 \pm 0,18 \pm 0,09) \text{ GeV} = (1,61 \pm 0,20) \text{ GeV} . \quad (3.151)$$

Os resultados para a constante de acoplamento estão mostrados na figura 3.19, onde mais uma vez vemos que esta constante é muito mais sensível à mudança dos parâmetros do que a massa.

Levando em conta todos os erros da mesma forma que fizemos para as outras correntes temos:

$$\lambda_{\Theta^+}^2 = (8,7 \pm 6,2 \pm 4,5 \pm 2,9) \times 10^{-8} \text{ GeV}^{14} = (8,7 \pm 8,2) \times 10^{-8} \text{ GeV}^{14}, \quad (3.152)$$

onde o erros seguem o arranjo usual ($\lambda^2 \pm \sigma_{RS} \pm \sigma_{QCD} \pm \sigma_{OPE} = \lambda^2 \pm \sigma_{tot}$) .

3.5.4 A corrente $\eta_{II[28]}$

Passamos agora para as correntes do $\Xi^{--}(1862)$, começando pela corrente $\eta_{II[28]}$ que é a mais simples. Continuaremos trabalhando com a estrutura q , a figura 3.20 mostra a relação entre o polo e contínuo para esta estrutura.

A convergência da OPE na região permitida pela relação polo / contínuo é mostrada na figura 3.21. Assim como na corrente $\eta_{[31]}$ não temos convergência pois verifica-se um grande salto quando adicionamos o condensado de dimensão 4.

Figura 3.19: Corrente $\eta_{[32]}$: resultado da regra de soma para a constante de acoplamento do $\Theta^+(1540)$. As setas indicam a região em que existem domínio da contribuição do polo sobre o contínuo.

Figura 3.20: Corrente $\eta_{II[28]}$: comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para a estrutura q .

Figura 3.21: Corrente $\eta_{II[28]}$: curvas da OPE para a estrutura q com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 5). Foi usado $\sqrt{s_0} = 2, 3$ GeV

Os resultados para a massa estão mostrados na figura 3.22. Os limites superiores para M^2 são um pouco mais altos que no caso da corrente $\eta_{[31]}$ e por isso podemos ir para uma região mais estável. Considerando a região entre $M^2 = 0,8$ GeV² e estes limites superiores temos $m_{\Xi^{--}} = (1,88 \pm 0,19)$ GeV, colocando os outros erros ($\pm\sigma_{QCD} \pm \sigma_{OPE}$) temos:

$$m_{\Xi^{--}} = (1,88 \pm 0,19 \pm 0,03 \pm 0,06) \text{ GeV} = (1,88 \pm 0,20) \text{ GeV} . \quad (3.153)$$

Seguimos para o cálculo da constante de acoplamento, os resultados estão mostrados na figura 3.23. O resultado com todos os erros (ordenados na forma habitual) fica:

$$\lambda_{\Xi^{--}}^2 = (6,4 \pm 4,8 \pm 0,4 \pm 0,9) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12} = (6,4 \pm 4,9) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12} . \quad (3.154)$$

3.5.5 A corrente $\eta_{I[28]}$

Esta corrente tem muitas semelhanças com a corrente $\eta_{[27]}$ assim seguiremos uma análise idêntica à seguida para aquela corrente. Começamos com a análise da contribuição dos condensados conforme a variação do parâmetro de mistura t , os resultados estão mostrados na figura 3.24.

Mais uma vez verifica-se uma divergência em quase todos valores de t , com exceção das regiões em torno de $t = 1$ e $t = -0,7$. Embora o condensado de dimensão 6 seja

Figura 3.22: Corrente $\eta_{II}[28]$: resultado da regra de soma para a massa do $\Xi^{--}(1862)$ com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas indicam a região em que existem domínio da contribuição do polo sobre o contínuo.

Figura 3.23: Corrente $\eta_{II}[28]$: resultado da regra de soma para a constante de acoplamento do $\Xi^{--}(1862)$. As setas indicam a região em que existem domínio da contribuição do polo sobre o contínuo.

Figura 3.24: Corrente $\eta_{I[28]}$: Contribuições dos condensados para estrutura q em função do parâmetro t divididas pelo termo perturbativo ($\sqrt{s_0} = 2,3$ GeV e $M^2 = 1$ GeV²). No detalhe a região em torno de $t = 1$.

o mais importante, desta vez não é só ele que se comporta mal fora destas regiões. A convergência em $t = 1$ é melhor que em $t = -0,7$ e adotaremos este valor para o parâmetro de mistura. Podemos então analisar a convergência da OPE conforme variamos M^2 , os resultados para $\sqrt{s_0} = 2,3$ GeV estão mostrados na figura 3.25.

Esta corrente tem uma convergência melhor que a $\eta_{[27]}$ de forma que temos a janela de Borel para todo o intervalo de s_0 analisado ($2,1$ GeV $< \sqrt{s_0} < 2,5$ GeV). A figura 3.26 mostra o resultado para a massa entre os limites mínimo (dado pela convergência da OPE) e máximo (dado pela relação polo / contínuo). Levando em conta estes limites e já incluindo os erros devidos aos parâmetros hadrônicos e ao truncamento da OPE:

$$m_{\Xi^{--}} = (1,81 \pm 0,26 \pm 0,08 \pm 0,07) \text{ GeV} = (1,81 \pm 0,28) \text{ GeV}. \quad (3.155)$$

Os resultados para a constante de acoplamento estão mostrados na figura 3.27. Levando em conta o intervalo da figura e os outros erros da forma usual chegamos à:

$$\lambda_{\Xi^{--}}^2 = (6,6 \pm 5,8 \pm 1,7 \pm 1,0) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12} = (6,6 \pm 6,1) \times 10^{-9} \text{ GeV}^{12}. \quad (3.156)$$

3.6 Resultados (FESR)

Passamos agora à análise destas correntes usando as FESR, descritas na seção 2.7. Neste método usamos a equação (2.62) para obter a massa em uma região em que $M^2 \rightarrow$

Figura 3.25: Corrente $\eta_{I[28]}$: curvas da OPE para $t = 1$ e $\sqrt{s_0} = 2,3$ GeV com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 6). As dimensões 4 e 6 são idênticas a zero para este valor de t .

Figura 3.26: Corrente $\eta_{I[28]}$: resultado da regra de soma para a massa do $\Xi^{--}(1862)$ com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas indicam as regiões confiáveis para as RS.

Figura 3.27: Corrente $\eta_{I[28]}$: resultado da regra de soma para a constante de acoplamento do $\Xi^{--}(1862)$. As setas indicam as regiões confiáveis para as RS.

∞ . Se por um lado estamos violando o requisito de que o polo seja dominante sobre o contínuo, por outro estamos indo para uma região em que a OPE converge. Isto nos oferece um contraponto ao que foi feito anteriormente onde, na eventual ausência de uma janela de Borel, demos preferência a ficar na região em que o polo dominava a despeito de não haver convergência da OPE.

Esta convergência em $M^2 \rightarrow \infty$ fica evidente se escrevermos a expressão analítica do correlator após a transformada de Borel. Tomemos, por exemplo, a densidade espectral da eq. (3.103) (estrutura q da corrente $\eta_{[31]}$). O correlator correspondente é:

$$\begin{aligned} \beta \left[\Pi_q^{[31]} \right] (M^2) &= \int_0^\infty ds \rho_q^{[31]}(s) e^{-s/M^2} = \frac{M^{12}}{5!2^{10}7\pi^8} + \frac{M^8}{5!2^8\pi^6} m_s \langle \bar{s}s \rangle + \frac{M^8}{5!2^{10}\pi^6} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \\ &\quad - \frac{M^6}{4!3!2^8\pi^6} m_s \langle \bar{s}g_s \sigma \cdot \mathbf{G}s \rangle, \end{aligned} \quad (3.157)$$

onde fica claro que para valores grandes de M^2 os termos de baixa dimensão serão dominantes.

3.6.1 As correntes do $\Theta^+(1540)$

Começamos novamente com a corrente $\eta_{[31]}$. A equação (2.62) no dá:

$$m_{\Theta^+}^2 = \frac{\int_0^{s_0} ds s^{n+1} \rho_{q,1}^{[31]}(s)}{\int_0^{s_0} ds s^n \rho_{q,1}^{[31]}(s)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.158)$$

Calculamos o resultado para a massa em ambas as estruturas usando dois valores de n . O resultado está mostrado na figura 3.28.

Figura 3.28: Corrente $\eta_{[31]}$: resultado das FESR para a massa do $\Theta^+(1540)$ em ambas as estruturas e dois valores de n .

Idealmente buscamos nas FESR uma região estável em s_0 . A figura 3.28 mostra que uma região deste tipo só existe na estrutura $\hat{1}$. Temos então uma inversão de papéis, a estrutura $\hat{1}$ que tinha um comportamento ruim nas RSQCD é útil para as FESR e o inverso ocorre com a estrutura q . A região estável, $1,71 \text{ GeV} \leq \sqrt{s_0} \leq 1,83 \text{ GeV}$, está no limite inferior do intervalo considerado anteriormente. Levando em consideração ambas as curvas da estrutura $\hat{1}$ ($n = 0$ e $n = 1$) neste intervalo, o valor obtido para a massa é $m_{\Theta^+} = (1,47 \pm 0,04) \text{ GeV}$. Podemos incluir neste valor o erro devido às variações de m_s e $\langle \bar{q}q \rangle$, σ_{QCD} , para obter:

$$m_{\Theta^+}^{[31]} = (1,47 \pm 0,04 \pm 0,11) \text{ GeV} = (1,47 \pm 0,12) \text{ GeV} . \quad (3.159)$$

Repetimos o mesmo processo para $\eta_{[27]}$ (com $t = 1$) e $\eta_{[32]}$ (cujas curvas para estrutura $\hat{1}$ são mostradas nas figuras 3.29 e 3.30 respectivamente). Em ambos os casos temos uma região estável na estrutura $\hat{1}$ e não na estrutura q (por isso omitimos esta estrutura dos gráficos). No caso da corrente $\eta_{[27]}$ a região estável está em: $1,83 \text{ GeV} \leq \sqrt{s_0} \leq 1,97 \text{ GeV}$, levando ao seguinte resultado para a massa:

$$m_{\Theta^+}^{[27]} = (1,58 \pm 0,04 \pm 0,02) \text{ GeV} = (1,58 \pm 0,05) \text{ GeV}, \quad (3.160)$$

onde os erros estão arranjados da mesma forma usada na eq. (3.159).

Figura 3.29: Corrente $\eta_{[27]}$ ($t = 1$): resultado da regra das FESR para a massa do $\Theta^+(1540)$ com dois valores de n .

Figura 3.30: Corrente $\eta_{[32]}$: resultado das FESR para a massa do $\Theta^+(1540)$ com dois valores de n .

No caso da corrente $\eta_{[32]}$ a região estável está em valores mais altos de s_0 : $2,24 \text{ GeV} \leq \sqrt{s_0} \leq 2,41 \text{ GeV}$, de fato acima da região que usamos nas RSQCD. Este intervalo (juntamente com o erro nos parâmetros da QCD) nos dá:

$$m_{\Theta^+}^{[32]} = (1,99 \pm 0,04 \pm 0,03) \text{ GeV} = (1,99 \pm 0,05) \text{ GeV} . \quad (3.161)$$

Aqui surge uma consequência interessante do uso das FESR. Diferentemente do caso anterior, temos uma condição para fixar uma pequena região de s_0 , tirando uma parte da liberdade na escolha desta variável. No caso das correntes $\eta_{[27]}$ e $\eta_{[31]}$ o valor encontrado de s_0 levou a um valor para a massa próximo àquele encontrado com as RSQCD. Já no caso de $\eta_{[32]}$ o valor é bem superior. Desta forma as FESR estão indicando que esta corrente, que de fato introduz um momento angular entre seus quarks por meio da derivada, pode ser mais adequada para representar uma excitação do $\Theta^+(1540)$.

3.6.2 As correntes do $\Xi^{--}(1862)$

Passamos agora a para as correntes $\eta_{I[28]}$ e $\eta_{II[28]}$. Assim como nas correntes do $\Theta^+(1540)$ só temos uma região estável para s_0 na estrutura $\hat{1}$. Se observarmos as equações (3.134) e (3.136), notaremos que:

$$\rho_1^{I[28]} = \frac{c_1}{4} \rho_1^{II[28]} . \quad (3.162)$$

Esta constante de proporcionalidade desaparecerá quando fizermos a divisão da equação (2.62), de forma que estas duas correntes terão exatamente o mesmo resultado nesta estrutura. Isto também implica que o resultado das FESR para a estrutura $\hat{1}$ da corrente $\eta_{I[28]}$ independe do parâmetro t . O resultado está mostrado na figura 3.31.

Ainda nas equações (3.134) e (3.136) notamos que quando fizermos $\langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle = m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle$, $\langle \bar{q}q \rangle$ também será uma constante multiplicativa. Isto quer dizer que, nesta ordem da OPE, os resultados vão depender unicamente de m_0^2 e isto elimina os erros relativos à variação de $\langle \bar{q}q \rangle$. A região estável está abaixo daquela usada nas RSQCD em: $1,91 \text{ GeV} \leq \sqrt{s_0} \leq 2,06 \text{ GeV}$. Levando em consideração ambas as curvas da estrutura $\hat{1}$ ($n = 0$ e $n = 1$) neste intervalo, o valor obtido para a massa é:

$$m_{\Xi^{--}} = (1,65 \pm 0,04) \text{ GeV} . \quad (3.163)$$

Figura 3.31: Correntes $\eta_{I[28]}$ e $\eta_{II[28]}$: resultado das FESR para a massa do $\Xi^{--}(1862)$ com dois valores de n .

3.7 Conclusões

Os resultados obtidos estão resumidos nas tabelas 3.3 e 3.4 e comparados nas figuras 3.32 e 3.33.

Tabela 3.3: Resultados das RSQCD e FESR para o $\Theta^+(1540)$.

Corr.	RSQCD			FESR	
	$\sqrt{s_0}(GeV)$	$m_{\Theta^+}(GeV)$	$\lambda_{\Theta^+}^2$	$\sqrt{s_0}(GeV)$	$m_{\Theta^+}(GeV)$
$\eta_{[27]}$	$2,1 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,2$	$1,73 \pm 0,09$	$(2,2 \pm 1,0).10^{-9}GeV^{12}$	$1,8 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,0$	$1,58 \pm 0,05$
$\eta_{[31]}$	$1,8 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,2$	$1,60 \pm 0,19$	$(2,4 \pm 1,8).10^{-9}GeV^{12}$	$1,7 \leq \sqrt{s_0} \leq 1,8$	$1,47 \pm 0,12$
$\eta_{[32]}$	$1,8 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,2$	$1,61 \pm 0,20$	$(8,7 \pm 8,2).10^{-8}GeV^{14}$	$2,2 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,4$	$1,99 \pm 0,05$

No caso do $\Theta^+(1540)$, vemos que os resultados das RSQCD são todos compatíveis entre si e, com exceção do resultado para a corrente $\eta_{[27]}$, compatíveis também com o valor experimental. Isto é um resultado direto do fato da corrente $\eta_{[27]}$ ter sido a única a satisfazer as condições da seção 2.5, fornecendo uma janela de Borel em valores altos de s_0 e resultando em uma massa média mais alta e um erro menor. Se considerássemos

Figura 3.32: $\Theta^+(1540)$: comparação dos resultados obtidos com as regras de soma. O valor experimental foi incluído para comparação.

um intervalo de s_0 igual ao das outras correntes obteríamos $m_{\Theta^+} = (1,57 \pm 0,23)$ GeV, colocando-a em pé de igualdade com as outras correntes. Como os resultados de $\eta_{[27]}$ satisfazem as condições das regras de soma, eles são mais confiáveis que os outros, no entanto esta corrente tem isospin $\mathcal{I} = 1$, e nenhum parceiro de isospin do $\Theta^+(1540)$ foi observado. Nas FESR os resultados de $\eta_{[27]}$ e $\eta_{[31]}$ são compatíveis entre si e com o resultado experimental apesar de serem calculadas em regiões diferentes de s_0 . Já a corrente $\eta_{[32]}$ fornece uma massa muito superior. Este resultado é interessante pois as FESR, quando apresentam regiões de estabilidade, tiram grande parte da arbitrariedade na escolha de s_0 e, neste caso, fomos forçados a escolher valores de s_0 acima da região que consideramos para todos os outros cálculos. Isto indica que a corrente $\eta_{[32]}$ pode estar representando um estado excitado do $\Theta^+(1540)$, já que ela de fato introduz um momento angular entre os diquarks por meio de uma derivada.

No caso do $\Xi^{--}(1862)$ os resultados para as duas correntes são semelhantes (de fato idênticos para as FESR). As RSQCD de ambos, apesar da grande margem de erro, têm o valor central muito próximo do experimental. Infelizmente a falta de uma janela de Borel torna estes resultados pouco confiáveis. As FESR, que apresentam regiões de estabilidade em s_0 , fornecem valores para a massa bem abaixo do valor experimental.

Os pentaquarks têm agora uma situação experimental que tende fortemente para sua não existência [25]. Embora ainda existam resultados recentes defendendo essa existência [42], pode-se interpretar os problemas encontrados nas regras de soma como um sinal de que este estado não existe como uma ressonância estreita separada do contínuo.

Tabela 3.4: Resultados das RSQCD e FESR para o $\Xi^{--}(1862)$.

Corr.	RSQCD			FESR	
	$\sqrt{s_0}(GeV)$	$m_{\Theta^+}(GeV)$	$\lambda_{\Theta^+}^2$	$\sqrt{s_0}(GeV)$	$m_{\Theta^+}(GeV)$
$\eta_I[28]$	$2,1 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,5$	$1,81 \pm 0,28$	$(6,6 \pm 6,1).10^{-9}GeV^{12}$	$1,9 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,1$	$1,65 \pm 0,04$
$\eta_{II}[28]$	$2,1 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,5$	$1,88 \pm 0,20$	$(6,4 \pm 4,9).10^{-9}GeV^{12}$	$1,9 \leq \sqrt{s_0} \leq 2,1$	$1,65 \pm 0,04$

Figura 3.33: $\Xi^{--}(1862)$: comparação dos resultados obtidos com as regras de soma. O valor experimental foi incluído para comparação.

Capítulo 4

Os tetraquarks

4.1 Mesons escalares charmosos

A abordagem dos mesons escalares charmosos tomou como base a referência [94] onde mesons escalares leves foram interpretados como estados ligados em onda- S de pares diquark-antidiquark. O que fazemos para obter as correntes é uma extensão daquele trabalho para o setor charmoso.

Como sugerido na referência [30], tomaremos o diquark como um anti-triplete de cor de spin zero, construindo as correntes a partir de objetos como o da equação (3.7).

Do ponto de vista da constituição mínima de quarks o estado $D_{sJ}^+(2317)$ é decrito como um sistema $(c\bar{s})$, já os estados $D_0(2308)$ e $D_0(2405)$ seriam $(c\bar{q})$ (onde $q = u, d$ conforme a carga). Descrevendo estes estados como tetraquarks fazemos: $c\bar{s} \longrightarrow (cq)(\bar{q}\bar{s})$ e $c\bar{q}_i \longrightarrow (cq_j)(\bar{q}_j\bar{q}_i)$ ou $c\bar{q} \longrightarrow (cs)(\bar{s}\bar{q})$, obtendo duas possibilidades para o estado D_0 .

Assim as correntes contendo zero, um e dois quarks (ou antiquarks) estranhos são¹:

$$j_0 = (q^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{d}^T)_c, \quad (4.1)$$

$$j_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [(u^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{s}^T)_c + (d^T \gamma_5 c)_c (\bar{d} \gamma_5 \bar{s}^T)_c], \quad (4.2)$$

$$j_{ss} = (s^T \gamma_5 c)_c (\bar{q} \gamma_5 \bar{s}^T)_c, \quad (4.3)$$

onde $(\bar{q}_1 \gamma_5 \bar{q}_2^T)_c = \epsilon_{abc} (\bar{q}_{1a} \gamma_5 C \bar{q}_{2b}^T)$ e q representa o quark u ou d dependendo da carga do meson. Como o meson D_{sJ} tem um quark $\bar{s}$, nós escolhemos a corrente j_s para ter os mesmos números quânticos do D_{sJ} , que supostamente é um isoescalar. No entanto, como estamos trabalhando no limite $SU(2)$, os estados isoescalar e isovetor são degenerados em massa e, portanto, esta escolha é irrelevante para nós.

¹Na corrente j_0 somos obrigados a construir o par $\bar{q}\bar{q}$ com diquarks diferentes, caso contrário teríamos uma corrente nula por conta de um resultado análogo ao mostrado na equação (3.36).

4.1.1 Isospin e paridade

Para obter o isospin das correntes escolhidas usamos novamente os resultados da seção 3.2.1 com a inclusão das relações para os antiquarks:

$$I_3 \bar{u} = -\frac{1}{2} \bar{u}, I_3 \bar{d} = \frac{1}{2} \bar{d}, \quad (4.4)$$

$$I_- \bar{d} = -\bar{u}, I_+ \bar{u} = -\bar{d}, \quad (4.5)$$

$$I_- \bar{u} = I_+ \bar{d} = 0, \quad (4.6)$$

O cálculo mais simples é o da corrente j_{ss} que possui apenas um quark u ou d tendo portanto $\mathcal{I}_{j_{ss}} = \frac{1}{2}$.

A corrente j_0 possui um antiquark leve, $(\bar{u}\gamma_5 d^T)_c$, para o qual vale uma propriedade análoga a da eq. (3.37), permitindo o cálculo do isospin independentemente desta parte. O outro diquark que compõe a corrente possui apenas um quark leve e portanto $\mathcal{I}_{j_0} = \frac{1}{2}$.

Para j_s temos:

$$\begin{aligned} I_3 j_s &= \frac{I_3}{\sqrt{2}} \{ (u^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} + \frac{I_3}{\sqrt{2}} \{ (d^T \gamma_5 c)_c (\bar{d} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} = \\ &= \frac{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2})}{\sqrt{2}} \{ (u^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} + \frac{(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}} \{ (d^T \gamma_5 c)_c (\bar{d} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} = 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} I_+ j_s &= \frac{I_+}{\sqrt{2}} \{ (u^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} + \frac{I_+}{\sqrt{2}} \{ (d^T \gamma_5 c)_c (\bar{d} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ (u^T \gamma_5 c)_c (\bar{d} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} + \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (u^T \gamma_5 c)_c (\bar{d} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} = 0, \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} I_- j_s &= \frac{I_-}{\sqrt{2}} \{ (u^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} + \frac{I_-}{\sqrt{2}} \{ (d^T \gamma_5 c)_c (\bar{d} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ (d^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} + \frac{-1}{\sqrt{2}} \{ (d^T \gamma_5 c)_c (\bar{u} \gamma_5 \bar{s}^T)_c \} = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Temos então $\mathcal{I}_{j_s} = 0$.

O cálculo da paridade não depende dos sabores dos quarks e portanto as três correntes terão a mesma paridade. Para os antiquarks obtemos:

$$\begin{aligned} (\bar{q} \gamma_5 \bar{q}^T)'_c &= \epsilon_{abc} \left[(\gamma_0 q_a)^\dagger \gamma_0 \gamma_5 C \left((\gamma_0 q_b)^\dagger \gamma_0 \right)^T \right] = \\ &= \epsilon_{abc} [\bar{q}_a \gamma_0 \gamma_5 C \gamma_0^T \bar{q}_b^T] = \\ &= (\bar{q} \gamma_5 \bar{q}^T)_c. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Assim concluímos, usando também a eq.(3.62), que estas correntes têm paridade positiva.

4.1.2 O lado fenomenológico

O acoplamento do meson escalar, S , à corrente escalar, j_S , pode ser parametrizado em termos da constante de decaimento do meson f_S conforme [94]: $\langle 0|j_S|S\rangle = \sqrt{2}f_S m_S^4$, portanto o lado fenomenológico do correlator pode ser escrito na forma:

$$\Pi(q^2) = \frac{2f_S^2 m_S^8}{m_S^2 - q^2} + \dots, \quad (4.11)$$

onde os pontos representam os estados excitados que serão parametrizados da forma habitual, por meio da introdução de um parâmetro do limite do contínuo s_0 . Em contraste com os bárions, aqui só temos uma estrutura para a regra de soma.

Fazendo a transformada de Borel desta expressão e igualando-a ao lado da OPE já Borel-transformado obtemos:

$$2f_S^2 m_S^8 e^{-m_S^2/M^2} = \int_0^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho^{ope}(s), \quad (4.12)$$

de onde podemos extrair m_S e f_S da forma usual.

4.1.3 O lado da OPE

No lado da OPE nós seguimos o procedimento adotado para os pentaquarks, trabalhando em primeira ordem perturbativa e considerando os condensados até dimensão 6. A massa do quark s é, assim como antes, tratada como pequena, e diagramas com ordem até m_s são considerados. A massa finita do quark c introduz uma dificuldade técnica, para poder trabalhar com ela nós usamos a expressão do propagador do quark c no espaço dos momentos. Seguindo então o procedimento adotado em [95] calculamos a parte do correlator contendo quarks leves no espaço das coordenadas e então fazemos uma transformada de Fourier para o espaço dos momentos em D dimensões. Só então combinamos a parte dos quarks leves com a parte do quark charmoso, para então regularizar dimensionalmente o resultado para $D = 4$. Mostraremos alguns exemplos deste procedimento no apêndice C, nos limitando aqui aos resultados.

As três correntes são calculadas de forma muito similar, começamos substituindo-as no correlator:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0|T\{j_S(x)j_S^\dagger(0)\}|0\rangle. \quad (4.13)$$

Expandindo então o elemento de matriz $\langle 0|T\{j_S(x)j_S^\dagger(0)\}|0\rangle$ temos:

$$\begin{aligned} \langle 0|T\{j_S(x)j_S^\dagger(0)\}|0\rangle &= \epsilon_{abc}\epsilon_{dec}\epsilon_{a'b'c'}\epsilon_{d'e'e'}\text{Tr}[S_{bb'}(x, m_{q_1})\gamma_5 C S_{aa'}^T(x, m_c)C\gamma_5] \times \\ &\times \text{Tr}[S_{d'd}(-x, m_{q_2})\gamma_5 C S_{e'e}^T(-x, m_{q_3})C\gamma_5], \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde $\{q_1, q_2, q_3\} = \{q, u, d\}$ para a corrente j_0 , $\{q_1, q_2, q_3\} = \{q, q, s\}$ para j_s e $\{q_1, q_2, q_3\} = \{s, q, s\}$ para j_{ss} , o quark leve q pode ser u ou d , determinando a carga em alguns casos, mas sua escolha não influencia os resultados da regra de soma.

Queremos trabalhar com o propagador do quark c no espaço dos momentos, por isso escrevemos a eq. (4.14) na forma:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ j_S(x) j_S^\dagger(0) \} | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \left\{ \epsilon_{abc} \epsilon_{dec} \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'c'} \text{Tr} [S_{bb'}(x, m_{q_1}) \gamma_5 C S_{aa'}^T(p, m_c) C \gamma_5] \right. \\ &\quad \times \left. \text{Tr} [S_{d'd}(-x, m_{q_2}) \gamma_5 C S_{e'e}^T(-x, m_{q_3}) C \gamma_5] \right\}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

Inserimos então os propagadores “não-perturbativos” (veja o apêndice A) e calculamos os diagramas mostrados na figura 4.1. A densidade espectral obtida fica então na forma $\rho_S(s) = \rho^{\text{pert}}(s) + \rho^{m_s}(s) + \rho^{\langle \bar{q}q \rangle}(s) + \rho^{\langle G^2 \rangle}(s) + \rho^{\text{mix}}(s) + \rho^{\langle \bar{q}q \rangle^2}(s) + \rho^{\langle G^3 \rangle}(s)$, com:

$$\rho^{\text{pert}}(s) = \frac{1}{2^{10} 3 \pi^6} \int_{\Lambda}^1 d\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^3 (m_c^2 - s\alpha)^4, \quad (4.16)$$

$$\rho^{\langle G^2 \rangle}(s) = \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{2^{10} \pi^6} \int_{\Lambda}^1 d\alpha (m_c^2 - s\alpha) \left[\frac{m_c^2}{9} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^3 + (m_c^2 - s\alpha) \left(\frac{1-\alpha}{2\alpha} + \frac{(1-\alpha)^2}{4\alpha^2} \right) \right], \quad (4.17)$$

$$\rho^{\langle G^3 \rangle}(s) = \frac{\langle g^3 G^3 \rangle}{2^{12} 9 \pi^6} \int_{\Lambda}^1 d\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^3 (3m_c^2 - s\alpha), \quad (4.18)$$

que são termos comuns às três ressonâncias e onde o limite inferior das integrações é dado por $\Lambda = m_c^2/s$.

Os outros termos da densidade espectral diferem de corrente para corrente. Para j_0 nós temos:

$$\rho^{m_s}(s) = 0, \quad (4.19)$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle}(s) = -\frac{m_c \langle \bar{q}q \rangle}{2^6 \pi^4} \int_{\Lambda}^1 d\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2 (m_c^2 - s\alpha)^2, \quad (4.20)$$

$$\rho^{\text{mix}}(s) = \frac{m_c \langle \bar{q}q \sigma \cdot Gq \rangle}{2^6 \pi^4} \left[\frac{1}{2} \int_{\Lambda}^1 d\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2 (m_c^2 - s\alpha) - \int_{\Lambda}^1 d\alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) (m_c^2 - s\alpha) \right], \quad (4.21)$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle^2}(s) = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle^2}{12 \pi^2} \int_{\Lambda}^1 d\alpha (m_c^2 - s\alpha). \quad (4.22)$$

Para j_s :

$$\rho^{m_s}(s) = 0, \quad (4.23)$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle}(s) = \frac{1}{2^6 \pi^4} \int_{\Lambda}^1 d\alpha \frac{1-\alpha}{\alpha} (m_c^2 - s\alpha)^2 \left[-\langle \bar{q}q \rangle \left(2m_s + m_c \frac{1-\alpha}{\alpha} \right) + m_s \langle \bar{s}s \rangle \right], \quad (4.24)$$

Figura 4.1: Diagramas calculados para as regras de soma dos mesons D_{sJ} e D_0 . Temos $\{q_1, q_2, q_3\} = \{q, u, d\}$ para a corrente j_0 , $\{q_1, q_2, q_3\} = \{q, q, s\}$ para j_s e $\{q_1, q_2, q_3\} = \{s, q, s\}$ para j_{ss} .

$$\begin{aligned} \rho^{mix}(s) = & \frac{1}{2^6 \pi^4} \int_{\Lambda}^1 d\alpha (m_c^2 - s\alpha) \left[-\frac{m_s \langle \bar{s}g\sigma.Gs \rangle}{6} + \right. \\ & \left. + \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \left(-m_s \left(1 - \ln(1 - \alpha) \right) - m_c \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{1 - \alpha}{2\alpha} \right) \right) \right], \quad (4.25) \end{aligned}$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle^2}(s) = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle \langle \bar{s}s \rangle}{12\pi^2} \int_{\Lambda}^1 d\alpha (m_c^2 - s\alpha). \quad (4.26)$$

E finalmente para j_{ss} temos:

$$\rho^{m_s}(s) = -\frac{m_s m_c}{2^8 3 \pi^6} \int_{\Lambda}^1 d\alpha \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^3 (m_c^2 - s\alpha)^3, \quad (4.27)$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle}(s) = \frac{1}{2^6 \pi^4} \int_{\Lambda}^1 d\alpha \frac{1 - \alpha}{\alpha} (m_c^2 - s\alpha)^2 \left[\langle \bar{s}s \rangle \left(2m_s - m_c \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right) - 2m_s \langle \bar{q}q \rangle \right], \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \rho^{mix}(s) = & \frac{1}{2^6 \pi^4} \int_{\Lambda}^1 d\alpha (m_c^2 - s\alpha) \left[\frac{\langle \bar{s}g\sigma.Gs \rangle}{2} \left(\frac{m_s}{3} - m_s \frac{1 - \alpha}{\alpha} + \right. \right. \\ & \left. \left. - m_c \frac{1 - \alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{1 - \alpha}{2\alpha} \right) \right) - m_s \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \left(1 - \ln(1 - \alpha) \right) \right], \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle^2}(s) = -\frac{\langle \bar{q}q \rangle \langle \bar{s}s \rangle}{12\pi^2} \int_{\Lambda}^1 d\alpha (m_c^2 - s\alpha). \quad (4.30)$$

Para o propagador do quark charmoso com condensado de dois ou três gluons (diagramas (d) e (m) da figura 4.1) nós utilizamos as expressões no espaço dos momentos dadas em [83] e mostradas no apêndice A.

O cálculo das densidades espectrais também impõe uma condição sobre s (veremos detalhes de como no apêndice C):

$$s \geq m_c^2, \quad (4.31)$$

de forma que a equação (4.12) deve ser alterada para:

$$2f_S^2 m_S^8 e^{-m_S^2/M^2} = \int_{m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho^{ope}(s). \quad (4.32)$$

4.1.4 Resultados numéricos (RSQCD)

Podemos então substituir as densidades espectrais obtidas na seção anterior em (4.32), e seguir o procedimento indicado na seção 2.6 para obter os parâmetros hadrônicos.

Nos cálculos numéricos que seguem usamos os seguintes valores [86, 91, 92, 93]:

$$\begin{aligned} m_c &= (1,23 \pm 0,05) \text{ GeV}, & m_s &= 100 \text{ MeV}, \\ \langle g^2 G^2 \rangle &= 0,88 \text{ GeV}^4, & \langle g^3 G^3 \rangle &= 0,045 \text{ GeV}^6, \\ \langle \bar{q}q \rangle &= -(0,23 \pm 0,03)^3 \text{ GeV}^3, & \langle \bar{s}s \rangle &= 0,8 \langle \bar{q}q \rangle, \\ \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle &= m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle \quad \text{com} & m_0^2 &= 0,8 \text{ GeV}^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nós chamamos de $D_0^{(0s)}$, $D_0^{(1s)}$ e $D_0^{(2s)}$ os mesons escalares charmosos representados por j_0 , j_s e j_{ss} (nas equações (4.1), (4.2) e (4.3)) respectivamente. Seguindo então o procedimento adotado nas seções anteriores começamos analisando a relação polo /contínuo para as três correntes. O resultado para j_0 está mostrado na figura 4.2 e os outros resultados estão resumidos na tabela 4.1.

Figura 4.2: j_0 : Comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para os valores extremos de $\sqrt{s_0}$.

Tabela 4.1: Limites superiores para M^2 (em GeV^2) impostos pela relação polo /contínuo para as correntes j_0 , j_s e j_{ss} .

$\sqrt{s_0}$ (GeV)	Corrente		
	j_0	j_s	j_{ss}
2,5	1,34	1,16	1,22
2,7	1,53	1,37	1,41
2,9	1,72	1,59	1,61

As comparações das contribuições dos vários termos da OPE (eqs. (4.16) a (4.30)) para as correntes j_0 , j_s e j_{ss} estão mostradas nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5, respectivamente. Vemos que a convergência não é boa, principalmente graças a contribuição dos condensados de dimensão 5 e 6. Nota-se que o condensado de dimensão 5 causa uma grande diferença na OPE, tornando-a inclusive negativa nos casos de j_s e j_{ss} . Este efeito é então atenuado

Figura 4.3: j_0 : curvas da OPE com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 6). Foi usado $\sqrt{s_0} = 2,7$ GeV.

Figura 4.4: j_s : curvas da OPE com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 6). Foi usado $\sqrt{s_0} = 2,7$ GeV.

Figura 4.5: j_{ss} : curvas da OPE com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 6). Foi usado $\sqrt{s_0} = 2,7$ GeV.

com a adição da dimensão 6 que é ainda maior e de sinal contrário. Nos pautaremos então, para realizar o cálculo de massa, pelos limites superiores mostrados na tabela 4.1. O limite inferior foi estabelecido buscando a estabilidade em M^2 e ficaremos na região $M^2 \geq 1$ GeV². Os resultados para a massa dos mesons $D_0^{(0s)}$, $D_0^{(1s)}$ e $D_0^{(2s)}$ estão mostrados nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8, respectivamente.

Obtemos então a massa de cada uma destas ressonâncias calculando o valor médio da massa com M^2 e s_0 variando dentro da região permitida, usando o erro σ_{RS} para representar os outros valores permitidos neste intervalo. Os outros erros são obtidos da mesma forma que fizemos para os pentaquarks. O erro σ_{QCD} é obtido pelas variações de m_c (entre 1,18 GeV e 1,28 GeV) e $\langle \bar{q}q \rangle$ (entre $-0,20^3$ GeV³ e $-0,26^3$ GeV³). O erro σ_{OPE} é estimado como metade da diferença entre os valores obtidos para a massa somando-se a OPE até dimensão 5 ou 6. No caso das ressonâncias $D_0^{(1s)}$ e $D_0^{(2s)}$ temos um problema com esta estimativa já que o condensado de dimensão 5 faz com que a OPE se aproxime muito de zero ou mesmo fique negativa (o que pode ser visto nas figuras 4.4 e 4.5). Isto se reflete como uma divergência no cálculo da massa tornando irreal calcular a massa até dimensão 5. O erro obtido calculando a massa até dimensão 4 (e comparando com a dimensão 6) é surpreendentemente pequeno, mas não há garantias que o mesmo se repetirá em outras dimensões. Assim escolhemos não incluir o erro devido ao truncamento da OPE para estas duas ressonâncias, conscientes de que estamos subestimando as incertezas nestes valores para a massa. Os resultados para as três ressonâncias estão apresentados na tabela 4.2.

Figura 4.6: j_0 : resultado da regra de soma para a massa com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas da direita indicam a região em que existe domínio da contribuição do polo sobre o contínuo e a seta da esquerda indica a região considerada estável em M^2 .

Figura 4.7: j_s : resultado da regra de soma para a massa com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas da direita indicam a região em que existe domínio da contribuição do polo sobre o contínuo e a seta da esquerda indica a região considerada estável em M^2 .

Figura 4.8: j_{ss} : resultado da regra de soma para a massa com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas da direita indicam a região em que existe domínio da contribuição do polo sobre o contínuo e a seta da esquerda indica a região considerada estável em M^2 .

Tabela 4.2: Resultados numéricos para as massas.

Ressonância	Resultados (GeV)				Valor final (GeV)
	m_S	σ_{RS}	σ_{QCD}	σ_{OPE}	$m_s \pm \sigma_{tot}$
$D_0^{(0s)}$	2,19	$\pm 0,20$	$\pm 0,05$	$\pm 0,16$	$2,19 \pm 0,26$
$D_0^{(1s)}$	2,28	$\pm 0,18$	$\pm 0,09$	—	$2,28 \pm 0,20$
$D_0^{(2s)}$	2,25	$\pm 0,19$	$\pm 0,08$	—	$2,25 \pm 0,20$

Tabela 4.3: Resultados numéricos para as constantes de decaimento.

Ressonância	Resultados (10^{-9} GeV^2)				Valor final (10^{-9} GeV^2)
	f_s^2	σ_{RS}	σ_{QCD}	σ_{OPE}	$f_s^2 \pm \sigma_{tot}$
$D_0^{(0s)}$	8,8	$\pm 1,3$	$\pm 5,7$	$\pm 3,1$	$8,8 \pm 6,6$
$D_0^{(1s)}$	5,4	$\pm 1,4$	$\pm 3,6$	—	$5,4 \pm 3,9$
$D_0^{(2s)}$	6,1	$\pm 1,3$	$\pm 3,9$	—	$6,1 \pm 4,1$

Da mesma forma que fizemos no caso do pentaquark podemos usar ainda a equação (4.32) para obter a constante de decaimento. Os resultados, obtidos usando os mesmos intervalos de M^2 e s_0 e os mesmos critérios de estimativa de erros, estão resumidos na tabela 4.3.

4.1.5 Resultados numéricos (FESR)

Na ausência da janela de Borel somos compelidos a examinar também a região $M^2 \rightarrow \infty$ por meio das FESR. Desta forma podemos estudar o comportamento da regra de soma em uma região melhor para a convergência da OPE.

Seguindo o procedimento da seção 2.7 escrevemos uma equação idêntica à (2.62) para obter massa dos mesons escalares:

$$m_s^2 = \frac{\int_{m_c^2}^{s_0} ds s^{n+1} \rho^{ope}(s)}{\int_{m_c^2}^{s_0} ds s^n \rho^{ope}(s)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.34)$$

Os resultados obtidos para as três correntes com $n = 1$ estão mostrados na figura 4.9. A figura mostra bem o ordenamento de massa entre as três ressonâncias, mas não mostra

Figura 4.9: Mesons escalares: resultado das FESR para a massa dos mesons usando as três correntes estudadas. Foi usado $n = 0$.

qualquer estabilidade em s_0 , o que torna as FESR pouco úteis neste caso.

4.1.6 Conclusões

Observando os resultados resumidos na tabela 4.2 vemos que as massas das ressonâncias $D_0^{(1s)}$ e $D_0^{(2s)}$ são praticamente degeneradas enquanto que a massa do $D_0^{(0s)}$ está um pouco abaixo das outras. Enquanto é natural esperar que a inclusão de um quark estranho fosse aumentar a massa da ressonância de um valor em torno da massa deste quark (como foi o caso quando se vai do $D_0^{(0s)}$ para o $D_0^{(1s)}$), é realmente interessante observar que isso não se repete quando se vai do $D_0^{(1s)}$ para o $D_0^{(2s)}$ (de fato temos uma pequena diminuição). Em termos das contribuições para a OPE nós podemos entender este comportamento notando que o termo do condensado de quarks é menor no $D_0^{(2s)}$ que no $D_0^{(1s)}$ (graças a troca de $m_c\langle\bar{q}q\rangle$ por $m_c\langle\bar{s}s\rangle$), no entanto a inclusão do termo proporcional a $m_s m_c$ (que não está presente no $D_0^{(1s)}$), compensa este decréscimo.

Comparando os resultados da tabela 4.2 com as massa dadas por BABAR, BELLE e FOCUS: respectivamente $D_{sJ}^+(2317)$, $D_0^0(2308)$ e $D_0^{0,+}(2405)$, vemos que pode-se identificar os estados de quatro quarks representados por $D_0^{(1s)}$ e $D_0^{(2s)}$ com as ressonâncias medidas em BABAR e BELLE respectivamente. No entanto, é pouco provável que um estado com dois quarks estranhos seja largo para o decaimento em $D^+\pi^-$ medido pela colaboração BELLE, de forma que a identificação desta ressonância com o estado $D_0^{(0s)}$ parece mais apropriada. A identificação de um dos estados de quatro quarks com as ressonâncias do FOCUS, $D_0^{0,+}(2405)$, é menos confortável. Associamos portanto esta ressonância com um estado escalar $c\bar{q}$, já que sua massa está em total concordância com as previsões do modelo de quarks na referência [47]. Também é interessante notar que uma massa em torno de 2.4 GeV também é compatível com o cálculo de Regras de Soma da QCD para um meson escalar $c\bar{q}$ [53].

Ainda é possível argumentar-se que, ao passo que a aproximação de pólo no lado fenomenológico é justificada para a ressonância estreita da cooperação BABAR, esse pode não ser o caso para as ressonâncias largas encontradas nas cooperações BELLE e FOCUS. Para checar se a largura das ressonâncias teria algum efeito sobre os resultados para as massas dos estados de quatro quarks o lado fenomenológico da Regra de Soma, na eq. (4.32), foi modificado para introduzir uma ressonância do tipo Breit-Wigner:

$$\Pi^{phen}(M^2) = 2f_S^2 m_S^8 \int_{(m_\pi+m_D)^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho_{BW}(s), \quad (4.35)$$

onde

$$\rho_{BW}(s) = \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(s)m_S}{(s - m_S^2)^2 + m_S^2 \Gamma(s)^2}, \quad (4.36)$$

com $\Gamma(s) = \Gamma_0 \sqrt{\frac{\lambda(s, m_D^2, m_\pi^2)}{\lambda(m_S, m_D^2, m_\pi^2)}} \frac{m_S^2}{s}$, e $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$.

Agora não podemos mais obter uma expressão para a massa da ressonância como fizemos anteriormente. No entanto podemos usar a massa como um parâmetro para

comparar a compatibilidade entre o lado direito (lado da OPE) e o lado esquerdo (lado fenomenológico) da regra de soma na equação:

$$\frac{\int_{(m_\pi+m_D)^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} s \rho_{BW}(s)}{\int_{(m_\pi+m_D)^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho_{BW}(s)} = \frac{\int_{m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} s \rho_S(s)}{\int_{m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho_S(s)}. \quad (4.37)$$

Na figura 4.10 estão mostrados o lado da OPE e o lado fenomenológico da Eq. (4.37) para $D_0^{(0s)}$, com três valores diferentes para a massa da ressonância, com $\Gamma_0 = 280$ MeV e $\sqrt{s_0} = 2.7$ GeV. Vê-se que a melhor concordância entre os dois lados é obtida para $m_S \sim 2.2$ GeV, o que mostra que a inclusão da largura não muda o valor da massa obtida para a ressonância.

Figura 4.10: Comparação dos dois lados da eq. (4.37). O lado da OPE é dado pelo lado direito da equação e o lado esquerdo é o fenomenológico.

4.2 O $X(3872)$

Como já mencionado na seção 1.2.1 assumimos que o $X(3872)$ seja um estado ligado de um diquark e um antidiquark de acordo com a proposta de Maiani et al. [69]. A corrente interpolante que utilizamos em [79] para descrever X_q foi:

$$j_\mu^q = \frac{i}{\sqrt{2}} [(q^T \gamma_5 c)_c (\bar{q} \gamma_\mu \bar{c}^T)_c + (q^T \gamma_\mu c)_c (\bar{q} \gamma_5 \bar{c}^T)_c], \quad (4.38)$$

onde $q = u$ ou d .

4.2.1 Isospin e paridade

Foram observados decaimentos que indicam que o $X(3872)$ não é autoestado de isospin [68], vejamos como se comporta a corrente escolhida. Se usarmos as seguintes identidades:

$$I_3 [(u^T \Gamma_i c)_c (\bar{u} \Gamma_j \bar{c}^T)_c] = I_3 [(d^T \Gamma_i c)_c (\bar{d} \Gamma_j \bar{c}^T)_c] = 0, \quad (4.39)$$

$$I_{\pm} I_{\mp} [(u^T \Gamma_i c)_c (\bar{u} \Gamma_j \bar{c}^T)_c] = + [(u^T \Gamma_i c)_c (\bar{u} \Gamma_j \bar{c}^T)_c] - [(d^T \Gamma_i c)_c (\bar{d} \Gamma_j \bar{c}^T)_c], \quad (4.40)$$

$$I_{\pm} I_{\mp} [(d^T \Gamma_i c)_c (\bar{d} \Gamma_j \bar{c}^T)_c] = - [(u^T \Gamma_i c)_c (\bar{u} \Gamma_j \bar{c}^T)_c] + [(d^T \Gamma_i c)_c (\bar{d} \Gamma_j \bar{c}^T)_c], \quad (4.41)$$

teremos:

$$I^2 j_{\mu}^u = j_{\mu}^u - j_{\mu}^d, \quad (4.42)$$

$$I^2 j_{\mu}^d = j_{\mu}^d - j_{\mu}^u, \quad (4.43)$$

$$I^2 [j_{\mu}^u + j_{\mu}^d] = 0, \quad (4.44)$$

$$I^2 [j_{\mu}^u - j_{\mu}^d] = 2 [j_{\mu}^u - j_{\mu}^d]. \quad (4.45)$$

Assim, como indicado em [69], os autoestados de isospin seriam dados por:

$$X(\mathcal{I} = 0) = \frac{X_u + X_d}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad X(\mathcal{I} = 1) = \frac{X_u - X_d}{\sqrt{2}}, \quad (4.46)$$

ao passo que os autoestados de massa X_u ou X_d resultam em uma violação máxima de Isospin. Podemos trabalhar com uma situação intermediária introduzindo um ângulo de mistura entre X_u e X_d [69]:

$$\begin{aligned} X_l &= X_u \cos \theta + X_d \sin \theta, \\ X_h &= -X_u \sin \theta + X_d \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Em [69], o autor considerou o decaimento em dois e três pions e deduziu um ângulo de mistura de $\theta \sim 20^\circ$ e a diferença de massa:

$$m(X_h) - m(X_l) = (8 \pm 3) \text{ MeV}. \quad (4.48)$$

A paridade é obtida combinando as equações (3.62) e (4.10) com os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} (q^T \gamma_{\mu} q)'_c &= \epsilon_{abc} [q_a^T C \gamma_{\mu} q_b] = \\ &= \epsilon_{abc} [q_a^T (-C \gamma_0) \gamma_{\mu} \gamma_0 q_b] = \\ &= (q \gamma_{\mu} q)_c, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} (\bar{q} \gamma_{\mu} \bar{q}^T)'_c &= \epsilon_{abc} \left[(\gamma_0 q_a)^{\dagger} \gamma_0 \gamma_{\mu} C \left((\gamma_0 q_b)^{\dagger} \gamma_0 \right)^T \right] = \\ &= \epsilon_{abc} [\bar{q}_a \gamma_0 \gamma_{\mu} C \gamma_0^T \bar{q}_b^T] = \\ &= (\bar{q} \gamma_{\mu} \bar{q}^T)_c. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Temos assim uma paridade positiva para a corrente j_{μ} .

4.2.2 O lado fenomenológico

Seguindo novamente o método das seções anteriores começamos com a parametrização fenomenológica do acoplamento do meson axial de conjugação de carga positiva X ($J^{PC} = 1^{++}$) à corrente j_μ :

$$\langle 0 | j_\mu | X \rangle = \sqrt{2} f_X m_X^4 \epsilon_\mu , \quad (4.51)$$

Assim, o correlator pode ser escrito na forma:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = \frac{2f_X^2 m_X^8}{m_X^2 - q^2} \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_X^2} \right) + \dots , \quad (4.52)$$

onde os pontos indicam as ressonâncias mais altas associadas à corrente j_μ e serão mais uma vez tratadas por meio da introdução de um parâmetro do contínuo.

4.2.3 O lado da OPE

O correlator de meson axial pode ser separado nas seguintes estruturas:

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T[j_\mu(x) j_\nu^\dagger(0)] | 0 \rangle = -\Pi_1(q^2)(g_{\mu\nu}q^2 - q_\mu q_\nu) + \Pi_0(q^2)q_\mu q_\nu. \quad (4.53)$$

Como a corrente axial não é conservada, as funções $\Pi_1(q^2)$ e $\Pi_0(q^2)$ são independentes e têm os números quânticos de mesons de spin 1 e 0 respectivamente. Comparando essa estrutura com a eq. (4.52) notamos que a estrutura $q_\mu q_\nu$ mistura $\Pi_1(q^2)$ e $\Pi_0(q^2)$. Como estamos estudando uma partícula de spin 1 e queremos trabalhar com a função $\Pi_1(q^2)$ isoladamente, devemos usar as regras de soma para a estrutura $g_{\mu\nu}$. Escrevendo $\Pi_1^{ope}(q^2) = -q^2 \Pi_1(q^2)$ em uma relação de dispersão:

$$\Pi_1^{ope}(q^2) = \int_{4m_c^2}^{\infty} ds \frac{\rho_1^{ope}(s)}{s - q^2} , \quad (4.54)$$

onde $\rho_1^{ope}(s) = \frac{\text{Im}[\Pi_1^{ope}(s)]}{\pi}$.

Igualando a estrutura $g_{\mu\nu}$ da eq. (4.52) com a eq. (4.54), introduzindo o parâmetro do contínuo e fazendo a transformada de Borel obtemos:

$$-2f_X^2 m_X^8 e^{-m_X^2/M^2} = \int_0^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho_1^{ope}(s) . \quad (4.55)$$

Para obter $\rho_1^{ope}(s)$ calculamos a OPE até os condensados de dimensão 6. Diferentemente das seções anteriores, nós mantivemos os termos lineares na massa dos quarks leves m_q para que possamos obter a diferença de massa a ser comparada com a eq (4.48). Esses termos tem um impacto desprezível na OPE, mas são os únicos que restam quando calculamos a diferença de massa por troca de mesons u e d .

Incluimos também uma contribuição dos condensados de dimensão 8 com a intenção de testar um possível cancelamento entre estes e os condensados de dimensão 6. De acordo com [96] cancelamentos deste tipo, que ocorrem no caso dos pentaquarks, devem ocorrer em operadores com muitos campos de quark, prejudicando a convergência da OPE. Os diagramas calculados estão mostrados na figura 4.11.

Figura 4.11: Diagramas calculados para as regras de soma do $X(3872)$.

Os resultados obtidos são dados por:

$$\rho_1^{ope}(s) = \rho^{pert}(s) + \rho^{m_q}(s) + \rho^{\langle \bar{q}q \rangle}(s) + \rho^{\langle G^2 \rangle}(s) + \rho^{mix}(s) + \rho^{\langle \bar{q}q \rangle^2}(s), \quad (4.56)$$

onde:

$$\rho^{pert}(s) = \frac{-1}{2^{10}\pi^6} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\alpha^3} \int_{\beta_{min}}^{1-\alpha} \frac{d\beta}{\beta^3} (1-\alpha-\beta)(1+\alpha+\beta) [(\alpha+\beta)m_c^2 - \alpha\beta s]^4, \quad (4.57)$$

$$\rho^{m_q}(s) = \frac{m_q}{2^3\pi^4} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\alpha} \left\{ -\frac{\langle \bar{q}q \rangle [m_c^2 - \alpha(1-\alpha)s]^2}{2^2(1-\alpha)} + \int_{\beta_{min}}^{1-\alpha} \frac{d\beta}{\beta} [(\alpha+\beta)m_c^2 - \alpha\beta s] \times \right.$$

$$\times \left[-m_c^2 \langle \bar{q}q \rangle + \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{2^2} [(\alpha + \beta)m_c^2 - \alpha\beta s] + \frac{m_c}{2^5 \pi^2 \alpha \beta^2} (3 + \alpha + \beta)(1 - \alpha - \beta) [(\alpha + \beta)m_c^2 - \alpha\beta s]^2 \right] \Big\}, \quad (4.58)$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle}(s) = \frac{m_c \langle \bar{q}q \rangle}{2^5 \pi^4} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} \frac{d\alpha}{\alpha^2} \int_{\beta_{min}}^{1-\alpha} \frac{d\beta}{\beta} (1 + \alpha + \beta) [(\alpha + \beta)m_c^2 - \alpha\beta s]^2, \quad (4.59)$$

$$\rho^{\langle G^2 \rangle}(s) = -\frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^6} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} d\alpha \int_{\beta_{min}}^{1-\alpha} \frac{d\beta}{\beta^2} [(\alpha + \beta)m_c^2 - \alpha\beta s] \times \\ \times \left[\frac{m_c^2 (1 - (\alpha + \beta)^2)}{\beta} - \frac{(1 - 2\alpha - 2\beta)}{2\alpha} [(\alpha + \beta)m_c^2 - \alpha\beta s] \right], \quad (4.60)$$

$$\rho^{mix}(s) = -\frac{m_c \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle}{2^6 \pi^4} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} d\alpha \left[-\frac{2}{1-\alpha} (m_c^2 - \alpha(1-\alpha)s) + \int_{\beta_{min}}^{1-\alpha} d\beta [(\alpha + \beta)m_c^2 - \alpha\beta s] \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha + \beta}{\beta^2} \right) \right], \quad (4.61)$$

$$\rho^{\langle \bar{q}q \rangle^2}(s) = -\frac{m_c^2 \langle \bar{q}q \rangle^2}{12 \pi^2} \sqrt{\frac{s - 4m_c^2}{s}}. \quad (4.62)$$

onde os limites de integração são dados por:

$$\alpha_{min} = \frac{(1 - \sqrt{1 - 4m_c^2/s})}{2}, \quad (4.63)$$

$$\alpha_{max} = \frac{(1 + \sqrt{1 - 4m_c^2/s})}{2} \quad (4.64)$$

e

$$\beta_{min} = \frac{\alpha m_c^2}{(s\alpha - m_c^2)}. \quad (4.65)$$

Os diagramas de dimensão 8 (diagramas (k) e (l) da figura 4.11) não possuem parte imaginária e portanto não podem ser escritos como uma relação de dispersão. Estes diagramas são dados por (após a transformada de Borel):

$$\Pi_1^{mix\langle \bar{q}q \rangle}(M^2) = \frac{m_c^2 \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \langle \bar{q}q \rangle}{24 \pi^2} \int_0^1 d\alpha \left[1 + \frac{m_c^2}{\alpha(1-\alpha)M^2} - \frac{1}{2(1-\alpha)} \right] e^{\left[-\frac{m_c^2}{\alpha(1-\alpha)M^2} \right]}. \quad (4.66)$$

Assim como no caso dos mesons escalares o cálculo das densidades espectrais impõe uma condição sobre s :

$$s \geq 4m_c^2. \quad (4.67)$$

Levando em conta esta condição e a equação (4.66), devemos reescrever (4.55) como:

$$-2f_X^2 m_X^8 e^{-m_X^2/M^2} = \int_{4m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho_1^{ope}(s) + \Pi_1^{mix\langle \bar{q}q \rangle}(M^2), \quad (4.68)$$

4.2.4 Resultados numéricos (RSQCD)

Seguimos novamente o procedimento da seção 2.6 para obter os parâmetros hadrônicos. Nos cálculos numéricos que seguem usamos os seguintes valores [86, 91, 92, 93]:

$$\begin{aligned}
 m_c &= (1,23 \pm 0,05) \text{ GeV}, & \langle g^2 G^2 \rangle &= 0,88 \text{ GeV}^4, \\
 m_u &= 2,3 \text{ MeV}, & m_d &= 6,4 \text{ MeV}, \\
 m_q &\equiv (m_u + m_d)/2 = 4,3 \text{ MeV}, & \langle \bar{q}q \rangle &= -(0,23 \pm 0,03)^3 \text{ GeV}^3, \\
 \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle &= m_0^2 \langle \bar{q}q \rangle & \text{com} & \quad m_0^2 = 0,8 \text{ GeV}^2.
 \end{aligned} \tag{4.69}$$

Calculamos as regras de soma no intervalo $1,6 \leq M^2 \leq 3,2$ para três valores de $\sqrt{s_0}$: $\sqrt{s_0} = 4,1 \text{ GeV}$, $\sqrt{s_0} = 4,3 \text{ GeV}$ e $\sqrt{s_0} = 4,5 \text{ GeV}$. Seguindo o procedimento habitual começamos com a análise da relação polo / contínuo, mostrada na figura 4.12.

Figura 4.12: $X(3872)$: Comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para os valores extremos de $\sqrt{s_0}$.

Vemos que, na mais restritiva das hipóteses, temos $M^2 < 2,26 \text{ GeV}^2$. Comparando as contribuições relativas de cada termo da OPE, nas eqs. (4.56) a (4.66), vemos que a OPE tem uma boa convergência na região $M^2 > 1,9 \text{ GeV}^2$, como pode ser visto na figura 4.13 (para $\sqrt{s_0} = 4,3 \text{ GeV}$). Fica assim determinado o limite inferior para a janela de Borel. A figura 4.13 também mostra que, embora haja uma mudança de sinal entre os condensados de dimensão seis e oito, a contribuição do segundo termo é bem menor. Isto é diferente dos cancelamento que acontecia no caso dos pentaquarks e que foi explorado em [96], e justifica a aproximação de truncar a OPE nesta ordem.

Figura 4.13: $X(3872)$: curvas da OPE com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 8). Foi usado $\sqrt{s_0} = 4,3$ GeV.

Passamos então para o cálculo da massa no intervalo permitido. Na figura 4.14 vê-se que a região $M^2 < 2,1$ GeV² começa a apresentar uma dependência acentuada em M^2 . Os limites impostos pelo contínuo, no entanto, são altos o suficiente para que possamos restringir a regra de soma à região $M^2 \geq 2,1$ GeV², mais estável.

Considerando a variação de M^2 e s_0 nos limites indicados na figura 4.14 temos $m_X = 3,94 \pm 0,09$ GeV. Mais uma vez consideraremos outros erros que serão indicados na forma $m_X \pm \sigma_{RS} \pm \sigma_{QCD} \pm \sigma_{OPE} = m_X \pm \sigma_{tot}$, onde $\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_{RS}^2 + \sigma_{QCD}^2 + \sigma_{OPE}^2}$. Aqui o erro relativo aos parâmetros da QCD, σ_{QCD} , é dado principalmente pela variação de m_c nos limites indicados em (4.69), mas o erro de $\langle \bar{q}q \rangle$ também foi incluído. O resultado final obtido foi:

$$m_X = (3,94 \pm 0,09 \pm 0,09 \pm 0,12) \text{ GeV} = (3,94 \pm 0,17) \text{ GeV} . \quad (4.70)$$

Podemos ainda obter a constante de decaimento, cujo comportamento está mostrado na figura 4.15.

Temos um resultado particularmente estável para esta constante de decaimento e o resultado final, com todos os erros considerados da forma habitual, é:

$$f_X^2 = (3,2 \pm 1,0 \pm 1,0 \pm 0,2) \times 10^{-9} \text{ GeV}^2 = (3,2 \pm 1,4) \times 10^{-9} \text{ GeV}^2 . \quad (4.71)$$

Figura 4.14: $X(3872)$: resultado da regra de soma para a massa com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas da direita indicam a região em que existe domínio da contribuição do polo sobre o contínuo e a seta da esquerda indica a região considerada estável em M^2 .

Figura 4.15: $X(3872)$: resultado da regra de soma para a constante de decaimento, f_X com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas da direita indicam a região em que existe domínio da contribuição do polo sobre o contínuo e a seta da esquerda indica a região considerada estável em M^2 .

4.2.5 Resultados numéricos (FESR)

Apesar de neste caso já termos uma janela de Borel apropriada para as regras de soma testamos também as FESR. Neste caso surge um problema com o termo de dimensão 8, eq. (4.66), pois este se torna divergente para $M^2 \rightarrow \infty$. Esta divergência provavelmente é cancelada se levarmos em conta outros diagramas de dimensão 8, que foram deixados de lado. Por isso nos limitamos aqui a calcular as FESR com a OPE somada somente até dimensão 6. Os resultados estão mostrados na figura 4.16:

Figura 4.16: $X(3872)$: resultado das FESR para a massa com $n = 0$ e $n = 1$.

Assim como no caso dos mesons escalares não há qualquer região de estabilidade em s_0 . As FESR concordam com o valor obtido com as RSQCD para $\sqrt{s_0} \approx 4,2$ GeV.

4.2.6 Testando a violação de isospin

Embora as regras de soma não sejam um método totalmente apropriado para determinar pequenas quantidades, tal como $m(X_h) - m(X_l)$ na Eq. (4.48), uma estimativa da diferença de massa pode ser tentada. A regra de soma para esta diferença pode ser obtida subtraindo duas equações análogas a (2.59) para $m(X_h)$ e $m(X_l)$, obtendo:

$$m^2(X_h) - m^2(X_l) = \frac{\int_{4m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} s [\rho_h(s) - \rho_l(s)]}{\int_{4m_c^2}^{s_0} ds e^{-s/M^2} \rho(s)}, \quad (4.72)$$

onde:

$$\rho_l(s) = \cos^2 \theta \rho_u(s) + \sin^2 \theta \rho_d(s) \quad \text{and} \quad \rho_h(s) = \sin^2 \theta \rho_u(s) + \cos^2 \theta \rho_d(s). \quad (4.73)$$

$\rho_u(s)$ e $\rho_d(s)$ são simplesmente a densidade espectral $\rho_1^{ope}(s)$, definida anteriormente, com o sabor do quark leve escolhido como u e d respectivamente.

É claro que somente os termos que dependem do sabor do quark leve irão contribuir para o numerador da eq. (4.72), já que os outros são iguais em $\rho_u(s)$ e $\rho_d(s)$. De fato, a expressão $\rho_h(s) - \rho_l(s)$ pode ser escrita em função das quantidades que quebram a simetria de isospin:

$$\langle \bar{u}u \rangle - \langle \bar{d}d \rangle = -\gamma \langle \bar{q}q \rangle, \quad (4.74)$$

$$m_u - m_d, \quad (4.75)$$

$$m_u \langle \bar{u}u \rangle - m_d \langle \bar{d}d \rangle = -\gamma \langle \bar{q}q \rangle m_q + \langle \bar{q}q \rangle (m_u - m_d) \quad (4.76)$$

e

$$\langle \bar{u}u \rangle^2 - \langle \bar{d}d \rangle^2 = -2\gamma \langle \bar{q}q \rangle^2, \quad (4.77)$$

onde $\langle \bar{q}q \rangle = (\langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle)/2$ e $\gamma = (\langle 0 | \bar{d}d - \bar{u}u | 0 \rangle) / \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle$.

O valor de γ foi estimado de várias formas. Os métodos da teoria de perturbação quiral [97], da análise por meio de regras de soma dos canais (pseudo)escalares [86], da análise da diferença de massa neutron-proton [98] e das larguras de decaimento de mésons pesados [99] encontraram o valor $\gamma \simeq -1 \times 10^{-2}$, que usaremos na nossa análise. A referência [100] favorece um valor maior, $\gamma \simeq -2,6 \times 10^{-2}$, veremos qual é o efeito desta mudança.

Os resultados para vários valores de s_0 podem ser vistos na figura 4.17. Onde consideramos dois valores para o ângulo de mistura: $\theta = 0^\circ$, que corresponde a uma violação máxima de isospin, e $\theta = 20^\circ$ que foi o valor determinado em [69]. Calculando as médias dentro dos limites de s_0 e M^2 que foram usados anteriormente chegamos aos valores:

$$m^2(X_h) - m^2(X_l) = (-2,3 \pm 1,5) \times 10^{-2} \text{ GeV}^2 \quad \theta = 0^\circ, \quad (4.78)$$

$$m^2(X_h) - m^2(X_l) = (-1,8 \pm 1,2) \times 10^{-2} \text{ GeV}^2 \quad \theta = 20^\circ, \quad (4.79)$$

que levam aos valores de $m(X_h) - m(X_l) = (-3 \pm 2) \text{ MeV}$ para $\theta = 0^\circ$ e $m(X_h) - m(X_l) = (-2 \pm 2) \text{ MeV}$ para $\theta = 20^\circ$. Esta previsão é menor que os 8 MeV dados em [69], e difere no sinal.

Estes valores são muito pequenos e, levados em conta os outros erros, compatíveis com zero. Poderíamos calcular estes erros da forma habitual, mas nos concentramos em uma fonte de erros que se destaca. A figura 4.18 mostra o resultado para $\sqrt{s_0} = 4,3 \text{ GeV}$ quando usamos o valor de γ dado em [100], comparando-o com as curvas já mostradas na figura 4.17.

A figura 4.18 deixa bem clara a sensibilidade deste cálculo em relação ao valor de γ . Com $\gamma = -2,6 \times 10^{-2}$ obtemos $m(X_h) - m(X_l) = -29 \text{ MeV}$, que é bem maior que o valor obtido em [69]. Assim, embora consideremos o valor $\gamma = -1 \times 10^{-2}$ mais apropriado, uma

Figura 4.17: $m^2(X_h) - m^2(X_l)$ como função da massa de Borel (M^2) para $\gamma = -1 \times 10^{-2}$ e vários valores de s_0 .

Figura 4.18: Comparação dos resultados de $m^2(X_h) - m^2(X_l)$ obtidos usando $\gamma = -1 \times 10^{-2}$ com aquele obtido usando $\gamma = -2,6 \times 10^{-2}$.

determinação mais precisa deste parâmetro é necessária antes que seja possível fazer uma afirmação firme sobre a separação $m(X_h) - m(X_l)$ em regras de soma.

4.3 Previsões para o X_b

A análise feita para o $X(3872)$ pode ser repetida para um estado que batizaremos de X_b , que seria um meson axial formado de quatro quarks ($b\bar{b}q\bar{q}$), usando a mesma corrente da eq. (4.38) com o quark c substituído pelo quark b ($m_b = (4.24 \pm 0.06)$ GeV). Este é um cálculo muito interessante pois nenhum estado candidato foi observado e podemos ilustrar o poder preditivo das regras de soma.

Esperamos que a massa desta partícula esteja em torno de 10 GeV, já que o espectro do bottomonium varia entre 9,4 GeV e 11,0 GeV [7]. Fazemos então um cálculo exploratório usando grandes intervalos de s_0 e M^2 em torno deste valor. O primeiro resultado obtido é que valores de $\sqrt{s_0} < 9$ GeV resultam em $m_{X_b}^2$ negativo, colocando desde já um limite inferior para este parâmetro. Os resultados para a massa com $\sqrt{s_0} \geq 9$ estão mostrados na figura 4.19.

Figura 4.19: X_b : valores preliminares de m_{X_b} para um grande intervalo de s_0 e M^2 .

Na figura 4.19 nota-se a presença de uma discontinuidade que muda de posição entre $\sqrt{s_0} = 9$ GeV e $\sqrt{s_0} \geq 10$ GeV. Se escolhermos valores de s_0 e M^2 de forma que fiquemos abaixo desta discontinuidade teremos uma situação em que m_{X_b} é bem menor que $\sqrt{s_0}$. A consequência disto seria ter o primeiro estado excitado 1 GeV ou mais acima do fundamental, o que é pouco provável. Como esta região também fornece uma massa

exageradamente baixa para uma partícula com quarks b ficaremos na região acima da discontinuidade, considerando apenas os valores: $\sqrt{s_0} \geq 10$ GeV e $M^2 \geq 5$ GeV². Também notamos que esta diferença entre m_{X_b} e $\sqrt{s_0}$ cresce rapidamente para valores altos de s_0 . A diferença para $\sqrt{s_0} = 13$ GeV, por exemplo, é maior que 1 GeV para qualquer valor de M^2 . Assim exploraremos valores de s_0 logo acima do limite inferior de 10 GeV.

Passamos então para a análise da relação entre as contribuições do polo e do contínuo. Não é possível encontrar uma região onde o polo seja maior que o contínuo para $\sqrt{s_0} \leq 10.2$ GeV, o que reforça o limite mínimo escolhido anteriormente. As contribuições relativas para $\sqrt{s_0} = 10.3$ GeV e $\sqrt{s_0} = 10.7$ GeV estão mostradas na figura 4.20.

Figura 4.20: X_b : Comparação das contribuições relativas do polo e contínuo para os valores que tomaremos como extremos de $\sqrt{s_0}$.

A convergência da OPE, mostrada na figura 4.21, é semelhante ao caso do $X(3872)$. Podemos afirmar que a OPE converge bem para $M^2 > 6$ GeV². Os resultados para o cálculo da massa no intervalo permitido estão mostrados na figura 4.22. A média na região indicada na figura e todos os erros, calculados e ordenados na forma habitual, nos dão:

$$m_{X_b} = (10, 20 \pm 0, 10 \pm 0, 11 \pm 0, 19) \text{ GeV} = (10, 20 \pm 0, 24) \text{ GeV}, \quad (4.80)$$

onde o erro $\sigma_{QCD} = 0,11$ GeV vêm predominantemente da variação de m_b entre 4,18 GeV e 4,30 GeV.

O valor central de (4.80) é próximo à massa do $\Upsilon(3S)$, e consideravelmente abaixo do limiar de produção $B^*\bar{B}$ que fica em torno de 10.6 GeV. O modelo molecular para o

Figura 4.21: X_b : curvas da OPE com sucessivas dimensões adicionadas. Todas as curvas estão divididas pelo resultado final (até dimensão 8). Foi usado $\sqrt{s_0} = 10,5$ GeV.

Figura 4.22: X_b : resultado da regra de soma para a massa com vários valores de $\sqrt{s_0}$. As setas da direita indicam a região em que existem domínio da contribuição do polo sobre o contínuo e a seta da esquerda indica a região em que a OPE converge.

X_b prevê uma massa que está entre $50 - 60$ MeV abaixo deste limiar [67]. Uma futura descoberta deste estado testaria os diferentes modelos teóricos além de melhorar nossa compreensão sobre a natureza do $X(3872)$.

Podemos também obter o valor da constante de decaimento, da mesma forma que fizemos no caso do $X(3872)$:

$$f_{X_b}^2 = (8, 1 \pm 2, 4 \pm 2, 1 \pm 1, 2) \times 10^{-11} \text{ GeV}^2 = (8, 1 \pm 3, 4) \times 10^{-11} \text{ GeV}^2. \quad (4.81)$$

Assim como no caso do $X(3872)$ as FESR do X_b não apresentam nenhuma estabilidade em s_0 e por isso tem pouca utilidade.

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho usamos as regras de soma para estudar um total de 7 possíveis estados exóticos. Tivemos uma preocupação especial em tornar as regras de soma o mais transparentes possível, principalmente no que se refere à escolha de seus parâmetros, regiões permitidas e erros decorrentes destas escolhas. Por conta disso obtivemos erros que podem ser grandes em comparação com aqueles presentes na maioria da literatura recente de regras de soma, mas dão ao leitor uma visão clara de quais parâmetros devem ser ajustados para obter valores mais precisos. Em particular a região de s_0 estudada para estas regras de soma foi mais larga que o normalmente considerado, justamente para mostrar o quão importante é este parâmetro para as regras de soma. Considerar uma região menor de s_0 resulta imediatamente em uma incerteza menor nos resultados obtidos, mas envolve uma maior arbitrariedade de escolha.

No cálculo dos pentaquarks e dos mésons escalares charmosos nos deparamos, na maioria dos casos¹, com o fato de não termos uma janela de Borel. Isto é causado principalmente pelo comportamento da contribuição do contínuo que coloca um limite superior baixo para a região permitida de M^2 . Além disso esta forte contribuição também prejudica a OPE, já que a convergência desta é analisada após a subtração do contínuo e piora significativamente com esta subtração.

Os resultados que obtivemos para os pentaquarks e sua comparação com as experiências estão resumidos nas páginas 61 a 63. Estes estados têm agora uma situação experimental que tende fortemente para sua não existência, como refletido na referência [25] e na setença proferida por Ted Barnes na HADRON05: “the pentaquark is dead!”, refletindo o consenso daquela conferência. Embora ainda existam resultados recentes defendendo a sua existência [42], pode-se interpretar a grande importância do contínuo como um sinal proveniente das regras de soma de que este estado não existe como uma ressonância

¹As correntes $\eta_{[27]}$ e $\eta_{I[28]}$ são exceções, mas somente para uma escolha bem particular do seu parâmetro t .

estreita separada do contínuo.

Por outro lado os resultados obtidos para os mésons escalares charmosos, apesar de apresentarem os mesmos problemas, parecem explicar bem os estados observados (tabela 4.2 da pág. 74). Ficamos então com a importante questão de como devemos encarar os resultados de regras de soma em que o contínuo não está se comportando bem. Este problema é interessante especialmente porque o mal comportamento é um resultado que afetará todas as correntes com um número grande de quarks e com poucos quarks pesados. Assim, se adotarmos a visão de que a importância do contínuo dada pelas regras de soma reflete uma não existência destas partículas, estaremos fazendo uma afirmação bem geral a respeito de estados exóticos leves. Seria muito interessante ter resultados experimentais para as constantes de decaimento dos mésons escalares, já que estes valores são muito mais sensíveis à troca da corrente.

A situação melhora significativamente quando incluímos mais quarks pesados. O resultado para o $X(3872)$ foi obtido dentro da janela de Borel apropriada e concorda com o resultado experimental (eq. 4.70 da pág. 83). Seria mais uma vez interessante ter um valor experimental para a constante de decaimento que, se confirmada, reforçaria a interpretação deste estado como um tetraquark. Ainda mais interessante para este modelo de quatro quarks seria a confirmação da previsão que obtivemos para o X_b , cuja regra de soma também funciona da forma apropriada.

A idéia de que a inclusão de quarks pesados melhora a regra de soma também foi usada em [101] para fazer uma regra de soma bem sucedida para um pentaquark charmoso, Θ_c , mas ainda não há confirmação experimental deste estado.

Apêndice A

O propagador não perturbativo

Ao longo deste trabalho os condensados do lado da OPE foram obtidos pela aplicação do teorema de Wick. Este procedimento expande um produto temporalmente ordenado de operadores de campo em função do produto dos propagadores associados a estes operadores:

$$\begin{aligned} T \{ \bar{q}_a(x)_i q_a(x)_j \bar{q}_b(0)_m q_b(0)_n \} &= \langle 0_p | T \{ q_a(x)_j \bar{q}_b(0)_m \} | 0_p \rangle \langle 0_p | T \{ \bar{q}_a(x)_i q_b(0)_n \} | 0_p \rangle + \\ &+ \langle 0_p | T \{ \bar{q}_a(x)_i q_b(0)_n \} | 0_p \rangle : q_a(x)_j \bar{q}_b(0)_m : + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

onde $\langle 0_p | T \{ q_a(x)_j \bar{q}_b(y)_k \} | 0_p \rangle = [S_{ab}^q(x-y)]_{jk}$ são os propagadores livres de quarks.

Na teoria perturbativa, os termos do tipo $: q_a(x)_j \bar{q}_b(0)_m :$ desapareceriam quando voltássemos com este resultado na expressão do correlator, já que seu valor esperado no vácuo perturbativo é zero. Em uma teoria não perturbativa são justamente estes termos que nos fornecem alguma informação sobre a dinâmica de longas distâncias.

Podemos tratar estes termos incluindo-os no próprio propagador que então fica definido na forma :

$$S_{ab}(x) = S_{ab}^0(x) + \langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle, \quad (\text{A.2})$$

onde $S_{ab}^0(x)$ é o propagador perturbativo. Mostraremos a seguir detalhes de como isto é feito.

A.1 A parte perturbativa

Numa teoria onde os quarks estão interagindo, o cálculo do propagador em termos do vácuo perturbativo, $|0_p\rangle$, é dado pela fórmula de Gell-Mann Low:

$$S_{ab}^0(x) = \langle 0_p | T \left\{ q_a(x) \bar{q}_b(0) e^{i \int d^4 z \mathcal{L}_{qcd}(z)} \right\} | 0_p \rangle, \quad (\text{A.3})$$

onde a lagrangeana do acoplamento quark-gluon da QCD é dada por:

$$\mathcal{L}_{QCD} = g_s \bar{q}_a [\gamma_\mu B^{A\mu} \tau_{ab}^A] q_b, \quad (\text{A.4})$$

e g_s é a constante de acoplamento da QCD, τ_{ab}^A são as matrizes de Gell-Mann, $B^{A\mu}$ é o campo do gluon e A é um índice que varia de 1 a 8.

Assim temos a expansão:

$$S_{ab}^0(x) = \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0_p \rangle + i \int d^4 z \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \mathcal{L}_{QCD}(z) \} | 0_p \rangle + \dots \quad (\text{A.5})$$

O primeiro termo desta expansão é o propagador de quarks livres:

$$S_{ab}^I(x) = \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \} | 0_p \rangle = i \delta_{ab} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon}. \quad (\text{A.6})$$

Na regra de soma, consideramos que o gluon possui uma componente de campo clássico, chamado condensado de gluons, e por isso o segundo termo da expansão da eq. (A.5) não é nulo. No gauge de ponto fixo o campo gluônico é dado por:

$$B_\mu^A(x) = -\frac{1}{2} G_{\mu\nu}^A(0) x^\nu, \quad (\text{A.7})$$

onde $G_{\mu\nu}^A = \partial_\mu B_\nu^A - \partial_\nu B_\mu^A + g_s f_{ABC} B_\mu^B B_\nu^C$ é um tensor antissimétrico.

Definindo $S_{ab}^{II}(x) = i \int d^4 z \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \mathcal{L}_{QCD}(z) \} | 0_p \rangle$, temos:

$$S_{ab}^{II}(x) = i g_s \tau_{a'b'}^A \int d^4 z B^{A\mu}(z) \langle 0_p | T \{ q_a(x) \bar{q}_b(0) \bar{q}_{a'}(z) \gamma_\mu q_{b'}(z) \} | 0_p \rangle. \quad (\text{A.8})$$

Aplicando o teorema de Wick obtemos:

$$S_{ab}^{II}(x) = \int d^4 z S_{aa'}^I(x-z) [i \gamma_\mu g_s \tau_{a'b'}^A B^{A\mu}(z)] S_{b'b}^I(z). \quad (\text{A.9})$$

Inserindo a expressão do propagador livre, eq. (A.6), e a transformada de Fourier para o campo do gluon, dada por:

$$B^{A\mu}(z) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iqz} B^{A\mu}(q) \quad (\text{A.10})$$

na eq. (A.9), ficamos com a expressão:

$$S_{ab}^{II}(x) = -i g_s \tau_{ab}^A \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} F(p), \quad (\text{A.11})$$

onde:

$$F(p) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} [\gamma_\mu B^{A\mu}(q)] \frac{\not{p} - \not{q} + m_q}{(p-q)^2 - m_q^2 + i\epsilon}. \quad (\text{A.12})$$

A transformada de Fourier aplicada à equação (A.7) nos dá:

$$B_\mu^A(q) = i(2\pi)^4 \frac{1}{2} G_{\mu\nu}^A(0) \partial^\nu \delta^4(q), \quad (\text{A.13})$$

assim temos a expressão para $F(p)$:

$$\begin{aligned} F(p) &= -i\frac{1}{2}G_{\mu\nu}^A(0)\gamma^\mu \left[\frac{\partial}{\partial q_\nu} \frac{\not{p} - \not{q} + m_q}{(p-q)^2 - m_q^2 + i\epsilon} \right]_{q=0} = \\ &= i\frac{1}{2}G_{\mu\nu}^A(0)\gamma^\mu \left(\frac{\gamma^\nu}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} - 2p^\nu \frac{\not{p} + m_q}{(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Assim ficamos com a expressão para o propagador (A.11) no espaço dos momentos:

$$S^{II}(p) = \frac{1}{2}g_s\tau_{ab}^A G_{\mu\nu}^A(0) \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} \left(\frac{\gamma^\mu \gamma^\nu}{p^2 - m_q^2 + i\epsilon} - 2\gamma^\mu p^\nu \frac{\not{p} + m_q}{(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2} \right). \quad (\text{A.15})$$

Usando a relação

$$(\not{p} + m_q)\gamma^\mu p^\nu (\not{p} + m_q) = -\gamma^\mu p^\nu (p^2 - m_q^2) + 2p^\mu p^\nu (\not{p} + m_q), \quad (\text{A.16})$$

no segundo termo de (A.15) temos, em um dos termos, uma contração entre o tensor simétrico $p^\mu p^\nu$ e o tensor antissimétrico $G_{\mu\nu}^A(0)$, o que dá zero. Assim temos uma expressão mais simples:

$$S^{II}(p) = \frac{g_s\tau_{ab}^A G_{\mu\nu}^A(0)}{2(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2} [(\not{p} + m_q)\gamma^\mu \gamma^\nu + 2\gamma^\mu p^\nu]. \quad (\text{A.17})$$

Podemos decompor o tensor $\gamma^\mu p^\nu$ em dois tensores: um tensor antissimétrico e um tensor simétrico. Devido a presença do tensor antissimétrico, $G_{\mu\nu}^A(0)$, apenas a parte antissimétrica irá contribuir, logo podemos realizar a troca:

$$2\gamma^\mu p^\nu \rightarrow \gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu. \quad (\text{A.18})$$

Usando a relação $2(\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) = \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} - \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu$, temos:

$$4\gamma^\mu p^\nu \rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu \not{p} - \not{p} \gamma^\mu \gamma^\nu p^\mu. \quad (\text{A.19})$$

O tensor $\gamma_\mu \gamma_\nu$ contraído com o tensor $G_{\mu\nu}^A(0)$ pode ser, pelos mesmos motivos, trocado por:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu \rightarrow -i\sigma_{\mu\nu}. \quad (\text{A.20})$$

Inserindo (A.19) e (A.20) na equação (A.17) para enfim aplicar a transformada de Fourier obtendo:

$$S_{ab}^{II}(x) = \frac{-i}{4}g_s\tau_{ab}^A G_{\mu\nu}^A(0) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\sigma^{\mu\nu} \not{p} + \not{p} \sigma^{\mu\nu} + 2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 - m_q^2 + i\epsilon)^2}. \quad (\text{A.21})$$

Quando consideramos correntes com quarks leves (que é o caso dos cálculos feitos no capítulo 3) é interessante trabalhar no espaço das configurações considerando uma expansão em primeira ordem na massa do quark. Esta expansão aplicada na eq. (A.6) fica:

$$S_{ab}^I(x) = i\delta_{ab} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 + i\epsilon}. \quad (\text{A.22})$$

A expressão no espaço de configurações pode ser obtida por meio das transformadas de Fourier:

$$\int d^4p \frac{\not{p} e^{-ipx}}{p^2 + i\epsilon} = \not{x} \frac{8\pi^2}{x^4}, \quad (\text{A.23})$$

$$\int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 + i\epsilon} = i \frac{4\pi^2}{x^2}, \quad (\text{A.24})$$

de forma que:

$$S_{ab}^I(x) = \delta_{ab} \left(\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \right). \quad (\text{A.25})$$

No caso de (A.21) a expansão fornece:

$$S_{ab}^{II}(x) = \frac{-i}{4} g_s \tau_{ab}^A G_{\mu\nu}^A(0) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ipx} \frac{\sigma^{\mu\nu} \not{p} + \not{p} \sigma^{\mu\nu} + 2m_q \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 + i\epsilon)^2}. \quad (\text{A.26})$$

e usamos as seguintes transformadas:

$$\int d^4p \frac{\not{p} e^{-ipx}}{(p^2 + i\epsilon)^2} = \not{x} \frac{2\pi^2}{x^2}, \quad (\text{A.27})$$

$$\int d^4p \frac{e^{-ipx}}{(p^2 + i\epsilon)^2} = -i\pi^2 \ln(-x^2), \quad (\text{A.28})$$

obtendo:

$$S_{ab}^{II}(x) = -\tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x}) - \tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2). \quad (\text{A.29})$$

Somando S_{ab}^I e S_{ab}^{II} temos o propagador de quarks leves em primeira ordem na constante de acoplamento:

$$\begin{aligned} S_{ab}^0(x) &= \delta_{ab} \left(\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \right) - \tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x}) + \\ &- \tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

O próximo termo da expansão (A.5) pode ser obtido em um cálculo análogo e fornece [102]:

$$S_{ab}^{III}(x) = -\delta_{ab} \frac{m_q \langle g^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^2} x^2 \ln(-x^2) \quad (\text{A.31})$$

A.2 A parte não perturbativa

Passamos agora ao segundo termo de (A.2):

$$\langle 0 | : q_\alpha^a(x) \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle, \quad (\text{A.32})$$

onde deixamos agora explícitos os índices spinoriais α e β . Podemos separar a parte de cor fazendo:

$$\langle 0 | : q_\alpha^a(x) \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle = \delta^{ab} \Delta_{\alpha\beta}(x), \quad (\text{A.33})$$

Multiplicando ambos os lados por δ^{ab} e definindo o elemento singlete de cor

$$\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle = -\delta^{ab} \langle 0 | : q_\alpha^a(x) \bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle \quad (\text{A.34})$$

temos:

$$\Delta_{\alpha\beta}(x) = -\frac{1}{3} \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle, \quad (\text{A.35})$$

A OPE de Wilson se baseia em transformar um produto não local de operadores, $\bar{q}(0)q(x)$, em uma soma de operadores locais $\hat{O}_d(0)$. Para obtê-la fazemos uma expansão em série de Taylor do campo $q_\alpha(x)$ em torno do ponto $x = 0$:

$$q_\alpha(x) = q_\alpha(0) + x^\mu \partial_\mu q_\alpha(x)|_{x=0} + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu \partial_\mu \partial_\nu q_\alpha(x)|_{x=0} + \frac{1}{6} x^\mu x^\nu x^\rho \partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho q_\alpha(x)|_{x=0} + \dots \quad (\text{A.36})$$

Que substituído na eq. (A.34) fornece:

$$\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle = [A_1]_{\alpha\beta} + x^\mu [A_{2\mu}]_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} x^\mu x^\nu [A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} + \frac{1}{6} x^\mu x^\nu x^\rho [A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} + \dots \quad (\text{A.37})$$

onde:

$$[A_1]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(0) : | 0 \rangle, \quad (\text{A.38})$$

$$[A_{2\mu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) [\partial_\mu q_\alpha(x)] : | 0 \rangle_{x=0}, \quad (\text{A.39})$$

$$[A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) [\partial_\mu \partial_\nu q_\alpha(x)] : | 0 \rangle_{x=0}, \quad (\text{A.40})$$

$$[A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) [\partial_\mu \partial_\nu \partial_\rho q_\alpha(x)] : | 0 \rangle_{x=0}, \quad (\text{A.41})$$

O primeiro termo desta expansão nos fornece o condensado de quarks. Separando primeiro a estrutura espinorial temos:

$$[A_1]_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} N_1, \quad (\text{A.42})$$

que, multiplicado dos dois lados por $\delta_{\beta\alpha}$, fornece:

$$N_1 = \frac{[A_1]_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha}}{4} = \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{4}, \quad (\text{A.43})$$

onde definimos $\langle \bar{q}q \rangle = \delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(0) : | 0 \rangle$. Finalmente temos:

$$\langle 0 | : q^a(0) \bar{q}^b(0) : | 0 \rangle = -\delta_{ab} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12}. \quad (\text{A.44})$$

Para avaliar o coeficiente $[A_{2\mu}]_{\alpha\beta}$ usamos o fato que os quarks obedecem à equação de movimento,

$$\not{D} q(x) = -im_q q(x), \quad (\text{A.45})$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ig_s \tau^A B_\mu^A(x)$. Aplicando o gauge de ponto fixo, podemos trocar a derivada usual pela derivada covariante em todos os termos da expansão (A.37), assim temos a seguinte relação para $[A_{2\mu}]_{\alpha\beta}$:

$$\gamma_{\beta\alpha}^\mu [A_{2\mu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) [\not{D} q_\alpha(x)] : | 0 \rangle_{x=0} = -im_q \delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) q_\alpha(x) : | 0 \rangle = -im_q \langle \bar{q}q \rangle \quad (\text{A.46})$$

Considerando que podemos separar a estrutura espinorial na forma:

$$[A_{2\mu}]_{\alpha\beta} = [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} N_2, \quad (\text{A.47})$$

temos (multiplicando por $\gamma_{\beta\alpha}^\mu$):

$$N_2 = \frac{-im_q \langle \bar{q}q \rangle}{16}. \quad (\text{A.48})$$

O coeficiente $[A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta}$ é avaliado usando uma nova equação de movimento válida para quarks leves,

$$D^2 q(x) = \frac{1}{2} g_s \sigma G(x) q(x), \quad (\text{A.49})$$

onde $\sigma G(x) = \sigma_{\mu\nu} \tau^A G^{A\mu\nu}(x)$. Ficamos então com a relação:

$$g^{\mu\nu} \delta_{\beta\alpha} [A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) [D^2 q_\alpha(x)] : | 0 \rangle_{x=0} = \frac{1}{2} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle, \quad (\text{A.50})$$

onde definimos:

$$\langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle = \delta_{\beta\alpha} \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) g_s \sigma G(0) q_\alpha(0) : | 0 \rangle. \quad (\text{A.51})$$

Separando mais uma vez as estruturas spinorial e de lorentz:

$$[A_{3\mu\nu}]_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta} N_3, \quad (\text{A.52})$$

que, com as devidas multiplicações, leva a:

$$N_3 = \frac{\langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle}{2^5}. \quad (\text{A.53})$$

O coeficiente $[A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta}$ pode ser finalmente calculado usando as duas equações de movimento (eqs (A.45) e (A.49)):

$$g^{\mu\nu} \gamma_{\beta\alpha}^\rho [A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0) [D^2 \not{D} q_\alpha(x)] : | 0 \rangle_{x=0} = -\frac{im_q}{2} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle. \quad (\text{A.54})$$

Separando a estrutura simétrica temos:

$$[A_{4\mu\nu\rho}]_{\alpha\beta} = [g_{\mu\nu} \gamma_\rho + g_{\rho\nu} \gamma_\mu + g_{\rho\mu} \gamma_\nu]_{\alpha\beta} N_4, \quad (\text{A.55})$$

que então fornece:

$$N_4 = \frac{-im_q \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle}{2^6 3}. \quad (\text{A.56})$$

Assim temos o termo não perturbativo da equação (A.33) até dimensão 5:

$$\langle 0 | : q_a(x) \bar{q}_b(0) : | 0 \rangle = \delta_{ab} \left(-\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12} + \frac{im_q \langle \bar{q}q \rangle}{48} \not{x} - \frac{x^2}{2^6 3} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle + \frac{ix^2 m_q}{2^7 3^2} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \not{x} \right), \quad (\text{A.57})$$

onde voltamos a omitir os índices spinoriais.

A.3 A parte não fatorável

Devemos ainda levar em conta os termos que podem aparecer do produto entre as partes perturbativa e não-perturbativa do propagador. Este produto só surge quando temos duas linhas de quarks em um diagrama, de forma que o condensado obtido envolve ambas, por isto estes termos são chamados de não fatoráveis.

O produto entre o propagador (A.33) e a parte perturbativa (A.21) gera um termo relacionado ao valor esperado $\langle q_a(x)g_s G_{\mu\nu}^A(0)\bar{q}_b(0) \rangle$. Podemos separar a estrutura de cor na forma:

$$\langle 0 | : q_\alpha^a(x)g_s G_{\mu\nu}^A(0)\bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle = \tau^{Aab}[\Delta_{\mu\nu}(x)]_{\alpha\beta} . \quad (\text{A.58})$$

Temos:

$$[\Delta_{\mu\nu}(x)]_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)q_\alpha(x) : | 0 \rangle, \quad (\text{A.59})$$

onde $\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)q_\alpha(x) : | 0 \rangle = -\tau^{Aba}\langle 0 | : q_\alpha^a(x)g_s G_{\mu\nu}^A(0)\bar{q}_\beta^b(0) : | 0 \rangle$

Fazendo a expansão de $q_\alpha(x)$ em série de Taylor e aplicando o gauge de ponto fixo, temos a expansão da parte não fatorável, que até dimensão 5 fica:

$$\langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)q_\alpha(x) : | 0 \rangle = [A'_{1\mu\nu}]_{\alpha\beta} + x^\rho [A'_{2\rho\mu\nu}]_{\alpha\beta}, \quad (\text{A.60})$$

onde:

$$[A'_{1\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)q_\alpha(0) : | 0 \rangle \quad (\text{A.61})$$

$$[A'_{2\rho\mu\nu}]_{\alpha\beta} = \langle 0 | : \bar{q}_\beta(0)g_s G_{\mu\nu}^A(0)[D_\rho q_\alpha(x)] : | 0 \rangle_{x=0} \quad (\text{A.62})$$

Considerando a estrutura antissimétrica:

$$[A'_{1\mu\nu}]_{\alpha\beta} = [\sigma_{\mu\nu}]_{\alpha\beta} N'_1, \quad (\text{A.63})$$

$$N'_1 = \frac{\langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle}{2^4 3}. \quad (\text{A.64})$$

De forma semelhante para $[A'_{2\rho\mu\nu}]_{\alpha\beta}$ temos:

$$[A'_{2\rho\mu\nu}]_{\alpha\beta} = [\sigma_{\mu\nu}\gamma_\rho + \gamma_\rho\sigma_{\mu\nu}]_{\alpha\beta} N'_2 \quad (\text{A.65})$$

$$N'_2 = \frac{-im_q \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle}{2^6 3}. \quad (\text{A.66})$$

Assim, a componente não fatorável para o propagador até dimensão 5 fica:

$$\langle q_a(x)g_s G_{\mu\nu}^A(0)\bar{q}_b(0) \rangle = -\tau_{ab}^A \left(\frac{1}{2^6 3} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \sigma_{\mu\nu} - \frac{i}{2^8 3} m_q \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle (\not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x}) \right) \quad (\text{A.67})$$

A.4 Propagador para quarks leves

Juntando enfim as equações (A.30), (A.57) e (A.67), temos uma expressão para o propagador total, que inclui partes perturbativas e não perturbativas:

$$\begin{aligned}
S_{ab}(x) = & \delta_{ab} \left(\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} - \frac{m_q}{4\pi^2 x^2} \right) - \tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x}) + \\
& - \tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2) - \delta_{ab} \frac{m_q \langle g^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^2} x^2 \ln(-x^2) + \delta_{ab} \left(-\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12} + \right. \\
& + \frac{i m_q \langle \bar{q}q \rangle}{48} \not{x} - \frac{x^2}{2^6 3} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle + \frac{i x^2 m_q}{2^7 3^2} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \not{x} \left. \right) - \tau_{ab}^A \left(\frac{1}{2^6 3} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \sigma_{\mu\nu} + \right. \\
& \left. - \frac{i}{2^8 3} m_q \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle (\not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x}) \right), \tag{A.68}
\end{aligned}$$

onde os dois últimos termos (os não fatoráveis) devem ser tratados com cuidado, pois devem sempre aparecer associados a um termo perturbativo de gluons em outro propagador, no qual devemos omitir $g_s G_{\mu\nu}^A(0)$.

Podemos expressar este propagador em termos dos diagramas:

$\delta_{ab} \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$
$-\delta_{ab} \frac{m_q}{4\pi^2 x^2}$
$-\tau_{ab}^A \frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x})$
$-\tau_{ab}^A \frac{m_q}{32\pi^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \sigma^{\mu\nu} \ln(-x^2)$
$-\delta_{ab} \frac{m_q \langle g^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^2} x^2 \ln(-x^2)$
$-\delta_{ab} \frac{\langle \bar{q}q \rangle}{12}$

$\delta_{ab} \frac{im_q \langle \bar{q}q \rangle}{48} \not{x}$
$-\delta_{ab} \frac{x^2}{2^6 3} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle$
$\delta_{ab} \frac{ix^2 m_q}{2^7 3^2} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \not{x}$
$-\tau_{ab}^A \frac{1}{2^6 3} \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle \sigma_{\mu\nu}$
$\tau_{ab}^A \frac{i}{2^8 3} m_q \langle \bar{q}g\sigma.Gq \rangle (\not{x} \sigma_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \not{x})$

A.5 Propagador para quarks pesados

No caso de quarks pesados o condensado de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$ é muito pequeno e pode ser desprezado. Restam apenas os condensados de gluons gerados pela expressão (A.21) e por outros termos da expansão (A.5). Como não podemos expandir as expressões para massa pequena do quark, fica muito complicado passar para o espaço das coordenadas e o cálculo acaba sendo realizado no espaço dos momentos. As expressões usadas neste trabalho para estas contribuições e seus respectivos diagramas são [83]:

$i\delta_{ab} \frac{\not{p} + m_q}{p^2 - m_q^2}$
$-\frac{i}{4} g_s \tau_{ab}^A G_{\mu\nu}^A(0) \left(\frac{\sigma^{\mu\nu} (\not{p} + m_q) + (\not{p} + m_q) \sigma^{\mu\nu}}{(p^2 - m_q^2)^2} \right)$

$$\frac{im_q\delta_{ab}}{2^2 3}\langle g^2 G^2 \rangle \left(\frac{(p^2+m_q)\not{p}}{(p^2-m_q^2)^4} \right)$$

$$\frac{i\delta_{ab}}{2^4 3}\langle g^3 G^3 \rangle \left(\frac{(\not{p} + m_q) \left[\not{p} (p^2 - 3m_q^2) + 2m_q(2p^2 - m_q^2) \right] (\not{p} + m_q)}{(p^2 - m_q^2)^6} \right)$$

Apêndice B

Relações de dispersão

Muitas vezes, funções como $\Pi(q^2)$ apresentam valores reais para q^2 abaixo de algum limite s_{min} e exibem um corte de ramificação para q^2 maior que este limite. Para se fazer proveito de um importante teorema da teoria de funções complexas, torna-se necessário permitir que q^2 seja complexa, apesar de isto parecer ir de encontro com a intuição física. Considere uma função complexa $\Pi(s)$ com argumento complexo s e assumimos que: a) $\Pi(s)$ é real para valores reais de $s < s_{min}$; b) $\Pi(s)$ tem cortes de ramificação para valores reais de $s > s_{min}$; c) $\Pi(s)$ é analítica para valores complexos de s (exceto ao longo dos cortes de ramificação). É comum representar Π ao longo do corte de ramificação por sua parte dispersiva (real) e sua parte imaginária:

$$\Pi(s + i\epsilon) = \text{Re}\Pi(s) + i \text{Im}\Pi(s), \quad (\text{B.1})$$

onde $\epsilon > 0$ é infinitesimal. De acordo princípio da reflexão de Schwartz, temos que:

$$\Pi(s + i\epsilon) - \Pi(s - i\epsilon) = 2i \text{Im}\Pi(s). \quad (\text{B.2})$$

Desde que Π seja analítica em cada ponto dentro do contorno C descrito na figura B.1, podemos aplicar o teorema de Cauchy e encontrar que:

$$\begin{aligned} \Pi(q^2) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_c ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^R ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2 - i\epsilon} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|s|=R} ds \frac{\Pi(s)}{s - q^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Supomos que somente conhecemos $\text{Im}\Pi$ e queremos avaliar Π em algum ponto q^2 qualquer. Então a equação (B.3), não é muito útil para o nosso propósito, já que Π também aparece no lado direito da equação, sob uma integral ao longo círculo. Esta situação pode ser simplificada se $\Pi(s)$ anular-se suficientemente rápido em $|q^2| \sim R \rightarrow \infty$, logo a integral sobre o círculo tende a zero e obtemos a chamada relação de dispersão não

Figura B.1: Contorno C no plano complexo da variável s

subtraída¹:

$$\Pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{s_{min}}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2}. \quad (\text{B.4})$$

Muitas vezes, a condição para que a integral do segundo termo de (B.3) se anule não é satisfeita. Então devemos fazer que este termo se comporte bem de alguma maneira. Note que a integral dispersiva (B.4) envolve todos os valores de s . Para se conhecer $\Pi(q^2)$ para valores pequenos de s , necessitamos conhecer $\text{Im}\Pi(s)$ também para grandes valores de s . Em muitos casos, a parte imaginária $\text{Im}\Pi(s)$ não se anula para $s \rightarrow \infty$ e a integral (B.4) também diverge. A maneira de resolver este problema é subtrair de $\Pi(q^2)$ alguns dos primeiros termos de uma série de Taylor em torno de um ponto arbitrário $q^2 = q_0^2$:

$$\Pi(q_0^2) = \frac{1}{\pi} \int ds \text{Im}\Pi(s) \left[\frac{1}{s - q_0^2} + \frac{(q^2 - q_0^2)^2}{(s - q_0^2)^2} + \dots \right]. \quad (\text{B.5})$$

Para a função correlação de dois pontos, a subtração do primeiro termo da série nos dá:

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}(q^2) &= \Pi(q^2) - \Pi(q_0^2) = \\ &= \frac{q^2 - q_0^2}{\pi} \int_{s_{min}}^{\infty} ds \frac{\text{Im}\Pi(s)}{(s - q_0^2)(s - q^2)} + \end{aligned}$$

¹No restante da conta a parte infinitesimal $-i\epsilon$ não será mais mostrada explicitamente.

$$+ \frac{q^2 - q_0^2}{2\pi i} \oint_{|s|=R} ds \frac{\Pi(s)}{(s - q_0^2)(s - q^2)} . \quad (\text{B.6})$$

Assim obtemos a forma subtraída (B.6) da integral de dispersão (B.4). No caso especial em que $q_0^2 = 0$:

$$\overline{\Pi}(q^2) = \frac{q^2}{\pi} \int_{s_{min}}^{\infty} \frac{ds}{s} \frac{\text{Im}\Pi(s)}{s - q^2} . \quad (\text{B.7})$$

Estas subtrações são necessárias se $\Pi(s) \neq \infty$ conforme $s \rightarrow \infty$. Note que um bom comportamento em (B.4) é exigido para grandes valores de s na derivação da relação de dispersão, o que realmente ocorre com o fator $\frac{1}{s}$ quando s é muito grande. Mais subtrações de outros termos da série acrescentam mais termos proporcionais a $\frac{1}{s^2}$ e $\frac{1}{s^3}$, melhorando ainda mais o comportamento da integral no infinito. Portanto é sempre importante subtrair termos de (B.4) para que (B.7) tenha um comportamento suave no infinito. É especialmente verdade em teorias de campos efetivas, que estamos interessados inicialmente em efeitos quânticos a baixas energias, enquanto não sabemos como calculá-los a altas energias. Geralmente a função $\text{Im}\Pi(s)$ não é bem conhecida a altas energias. A integral de dispersão subtraída (B.7) é influenciada mais fortemente por baixas energias e diminui a importância da região de altas energias.

Apêndice C

Exemplos do cálculo de diagramas

No capítulos 3 e 4, passamos diretamente dos elementos de matriz obtidos após a aplicação do teorema de Wick para as densidades espectrais, que só são obtidas após a inserção dos propagadores não-perturbativos e um longo desenvolvimento algébrico. Nas seções seguintes mostraremos alguns exemplos detalhados de como este cálculo é feito.

C.1 Correntes com quarks leves

Para exemplificar o cálculo dos diagramas com quarks leves, que é todo feito no espaço das coordenadas, calcularemos um diagrama da corrente $\eta_{[27]}$, definida na equação (3.9).

Calcularemos o diagrama puramente perturbativo, que é o diagrama (a) da figura 3.1 (pg. 33), que repetimos abaixo:

Figura C.1: Diagrama perturbativo do $\Theta^+(1540)$.

Começamos o cálculo a partir do elemento de matriz obtido na eq. (3.90):

$$\Pi_{RR'}(x) = \langle 0 | T \{ \theta_R(x) \bar{\theta}_{R'}(0) \} | 0 \rangle = -C S_{e'e}^T(-x, m_s) C \epsilon_{abc} \epsilon_{a'b'c'} \sum_{j=1}^4 \Pi_j(x), \quad (C.1)$$

onde os $\Pi_j(x)$ com $j = 1 \dots 4$ são dados por:

$$\Pi_1(x) = \text{Tr}[C \Gamma_R S_{ee'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{cc'}^T(x, m_u)] \cdot \text{Tr}[C \Gamma_R S_{bb'}(x, m_d) \Gamma_{R'} C S_{aa'}^T(x, m_u)], \quad (C.2)$$

$$\Pi_2(x) = \text{Tr}[C\Gamma_R S_{be'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{ac'}^T(x, m_u)] \cdot \text{Tr}[C\Gamma_R S_{eb'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{ca'}^T(x, m_u)], \quad (\text{C.3})$$

$$\Pi_3(x) = -\text{Tr}[C\Gamma_R S_{be'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{cc'}^T(x, m_u)C\Gamma_R S_{eb'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{aa'}^T(x, m_u)], \quad (\text{C.4})$$

$$\Pi_4(x) = -\text{Tr}[C\Gamma_R S_{bb'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{ac'}^T(x, m_u)C\Gamma_R S_{ee'}(x, m_d)\Gamma_{R'}CS_{ac'}^T(x, m_u)] . \quad (\text{C.5})$$

Devemos então substituir os propagadores $S_{ab}(x, m_q)$ por aquele obtido na equação (A.68) do apêndice A. O diagrama C.1 é dado pela contribuição do primeiro termo de cada um dos cinco propagadores. Assim, para obter este diagrama fazemos:

$$S_{ab}(x, m_q) = S_{ab}(x) = \delta_{ab} \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x} \quad (\text{C.6})$$

Primeiramente separamos a estrutura de cor, escrevendo:

$$S_{ab}(x) = \delta_{ab} S(x), \quad (\text{C.7})$$

de forma que:

$$\Pi_1(x) = \underbrace{\delta_{ee'}\delta_{cc'}\delta_{bb'}\delta_{aa'}}_{c_1} \Pi'_1(x), \quad (\text{C.8})$$

$$\Pi_2(x) = \underbrace{\delta_{be'}\delta_{ac'}\delta_{eb'}\delta_{ca'}}_{c_2} \Pi'_2(x), \quad (\text{C.9})$$

$$\Pi_3(x) = -\underbrace{\delta_{be'}\delta_{cc'}\delta_{eb'}\delta_{aa'}}_{c_3} \Pi'_3(x), \quad (\text{C.10})$$

$$\Pi_4(x) = -\underbrace{\delta_{bb'}\delta_{ac'}\delta_{ee'}\delta_{ac'}}_{c_4} \Pi'_4(x), \quad (\text{C.11})$$

onde $\Pi'_j(x)$ são os $\Pi_j(x)$ com $S_{ab}(x, m_q) \rightarrow S(x)$. Temos que $\Pi'_1(x) = \Pi'_2(x)$ e $\Pi'_3(x) = \Pi'_4(x)$, portanto:

$$\Pi_{RR'}(x) = -CS^T(-x)C\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}\delta_{e'e}\left[(c_1 + c_2)\Pi'_1(x) - (c_3 + c_4)\Pi'_3(x)\right], \quad (\text{C.12})$$

Podemos então contrair $\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c'}\delta_{e'e}$ como os coeficientes de cor c_j usando as seguintes identidades:

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{abc'} = 2\delta_{cc'}, \quad (\text{C.13})$$

$$\epsilon_{abc}\epsilon_{a'b'c} = \delta_{aa'}\delta_{bb'} - \delta_{ab'}\delta_{ba'}, \quad (\text{C.14})$$

$$\delta_{aa} = 3. \quad (\text{C.15})$$

Obtemos então:

$$\begin{aligned} \Pi_{RR'}(x) = & -24CS^T(-x)C \left\{ \text{Tr}^2[C\Gamma_R S(x)\Gamma_{R'}CS^T(x)] + \right. \\ & \left. + \text{Tr}[C\Gamma_R S(x)\Gamma_{R'}CS^T(x)C\Gamma_R S(x)\Gamma_{R'}CS^T(x)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

De fato este resultado vale não só para o diagrama perturbativo¹, mas também para todos os diagramas cujos propagadores tenham estrutura de cor δ_{ab} . Estes são os diagramas (a), (b), (c), (f), (g), (h) e (i) da figura 3.1. Somente os diagramas que envolvem os condensados não fatoráveis, com estrutura de cor τ_{ab}^A , resultam em valor diferente para a contração de cor.

Fazendo então $S(x) = \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$ em (C.16), temos:

$$\Pi_{RR'}(x) = \frac{3i\not{x}}{4\pi^{10}x^{20}} \left\{ \text{Tr}^2[\Gamma_{R'}\not{x} \Gamma_{R'}\not{x}] + \text{Tr}[\Gamma_{R'}\not{x} \Gamma_{R'}\not{x} \Gamma_{R'}\not{x} \Gamma_{R'}\not{x}] \right\}. \quad (\text{C.17})$$

Lembrando que:

$$\langle 0|T\{\eta(x)\bar{\eta}(0)\}|0\rangle = t^2\Pi_{11}(x) + t(\Pi_{12} + \Pi_{21}) + \Pi_{22}, \quad (\text{C.18})$$

$$\Gamma_1 = \gamma_5 \text{ e } \Gamma_2 = \hat{1}, \quad (\text{C.19})$$

podemos calcular facilmente os traços de (C.17) para obter:

$$\Pi_{11}(x) = \Pi_{22}(x) = \frac{15i\not{x}}{\pi^{10}x^{16}}, \quad (\text{C.20})$$

$$\Pi_{12}(x) = \Pi_{21}(x) = \frac{3i\not{x}}{\pi^{10}x^{16}}, \quad (\text{C.21})$$

e finalmente:

$$\langle 0|T\{\eta(x)\bar{\eta}(0)\}|0\rangle = \frac{3i\not{x}}{\pi^{10}x^{16}}(5 + 2t + 5t^2), \quad (\text{C.22})$$

Voltando com este resultado em:

$$\Pi(q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0|T\{\eta(x)\bar{\eta}(0)\}|0\rangle, \quad (\text{C.23})$$

temos:

$$\Pi(q) = -\frac{3}{\pi^{10}}(5 + 2t + 5t^2) \int d^4x \frac{\not{x}}{x^{16}} e^{iqx}. \quad (\text{C.24})$$

A integral pode ser reescrita na forma:

$$\int d^4x \frac{\not{x}}{x^{16}} e^{iqx} = -i\gamma^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \int d^4x \frac{e^{iqx}}{x^{16}}, \quad (\text{C.25})$$

que pode ser resolvida usando o resultado²:

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2)^n} = \frac{i\pi^2(-1)^n 2^{(4-2n)}(q^2)^{(n-2)}}{(n-1)!(n-2)!} \ln(-q^2). \quad (\text{C.26})$$

¹Tomando cuidado em notar que o propagador externo aos traços é o propagador do quark s , já que alguns termos da expansão do propagador dependem da massa.

²Rigorosamente temos:

$$\int d^4x \frac{e^{iqx}}{(x^2)^n} = \frac{-i\pi^2(-1)^n}{(n-1)!(n-2)!} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{q_E^2/4}^{a+q_E^2/4} dy \frac{(y - q_E^2/4)^{(n-2)}}{y},$$

onde $q_E^2 = -q^2$. A integral em y gera vários termos além do mostrado em (C.26), alguns deles divergentes. No entanto, só o termo considerado possui parte imaginária para $q^2 > 0$.

Derivando este resultado em q^α e substituindo em (C.24):

$$\Pi(q) = \Pi(q^2)\not{q} = -\frac{3}{\pi^8} \frac{(5 + 2t + 5t^2)}{2^{11}7!6!} \not{q} q^{10} (6 \ln(-q^2) + 1) . \quad (\text{C.27})$$

De onde podemos finalmente obter a densidade espectral usando:

$$\text{Im}[\ln(-s)] = \text{Im}[-i\pi + \ln(s)] = -\pi, \quad (\text{C.28})$$

de forma que:

$$\rho(s) = \frac{\text{Im}\Pi(s)}{\pi} = \frac{(5 + 2t + 5t^2)}{5!5!2^{12}7\pi^8} s^5, \quad (\text{C.29})$$

onde $s = q^2$.

Os outros diagramas do $\Theta^+(1540)$ e do $\Xi^{--}(1862)$ são obtidos de maneira semelhante. Basta levar em conta os outros termos do produto entre os propagadores não-perturbativos. O diagrama (c) da figura 3.1, por exemplo, é obtido substituindo o propagador do quark s por $(-\delta_{ab} \frac{\langle \bar{s}s \rangle}{12})$. Esta mesma substituição (usando $\langle \bar{q}q \rangle$ ao invés de $\langle \bar{s}s \rangle$) resulta no diagrama (i) quando feita em duas linhas dos quarks mais leves (caso em que somamos todas as possibilidades de quais 2 entre as 4 linhas disponíveis são substituídas).

C.2 Correntes com quarks pesados

O caso dos tetraquarks, tratado no capítulo 4, é bem mais complicado devido à presença de quarks pesados. Neste caso somos obrigados a usar a expressão do propagador em função do momento. Veremos a seguir alguns exemplos de diagramas dos mésons escalares charmosos e do $X(3872)$.

C.2.1 Diagramas com 1 quark pesado

Começamos calculando diagramas com apenas uma linha de quark pesado, que no presente trabalho apareceram no cálculo das regras de soma dos mésons escalares charmosos. Partimos do elemento de matriz dado na eq. (4.15):

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ j_S(x) j_S^\dagger(0) \} | 0 \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \left\{ \epsilon_{abc} \epsilon_{dec} \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'c'} \text{Tr} [S_{bb'}(x, m_{q_1}) \gamma_5 C S_{aa'}^T(p, m_c) C \gamma_5] \right. \\ &\quad \times \left. \text{Tr} [S_{d'd}(-x, m_{q_2}) \gamma_5 C S_{e'e}^T(-x, m_{q_3}) C \gamma_5] \right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \Pi(x, p), \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

Nosso primeiro exemplo será o diagrama perturbativo mostrado na figura 4.1(a) na página 68. Podemos obtê-lo substituindo os propagadores leves por $\delta_{ab} \frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$ e o pesado

por $i\delta_{ab}\frac{\not{p}+m_c}{p^2-m_c^2}$. Assim como no caso dos pentaquaks faremos primeiro a separação das estruturas de cor ($S_{ab} = \delta_{ab}S$), obtendo:

$$\begin{aligned}\Pi(x, p) &= \epsilon_{abc}\epsilon_{dec}\epsilon_{a'b'c'}\epsilon_{d'e'c'}\delta_{bb'}\delta_{aa'}\delta_{d'd}\delta_{e'e}\text{Tr}[S(x, m_{q_1})\gamma_5 C S^T(p, m_c)C'\gamma_5] \times \\ &\times \text{Tr}[S(-x, m_{q_2})\gamma_5 C S^T(-x, m_{q_3})C'\gamma_5] = \\ &= 12\text{Tr}[S(x, m_{q_1})\gamma_5 C S^T(p, m_c)C'\gamma_5]\text{Tr}[S(-x, m_{q_2})\gamma_5 C S^T(-x, m_{q_3})C'\gamma_5],\end{aligned}\tag{C.31}$$

que vale também para vários diagramas, cujas linhas têm estrutura δ_{ab} de cor. Substituindo então os propagadores perturbativos e calculando os traços obtemos:

$$\Pi(x, p) = \frac{2^3 3}{\pi^6} \frac{x \cdot p}{x^{10}(p^2 - m_c^2)}.\tag{C.32}$$

Voltando ao elemento de matriz temos:

$$\begin{aligned}\langle 0|T\{j_S(x)j_S^\dagger(0)\}|0\rangle &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{-ipx} \Pi(x, p) = \\ &= \frac{3x_\mu}{2\pi^{10}x^{10}} \underbrace{\int d^4p e^{-ipx} \frac{p^\mu}{p^2 - m_c^2}}_{I_\mu}.\end{aligned}\tag{C.33}$$

Podemos reescrever o denominador da integral de forma a obter:

$$\begin{aligned}I_\mu &= - \int_0^\infty d\alpha \int d^4p e^{-ipx} p^\mu e^{-\alpha(m_c^2 - p^2)} = \\ &= \int_0^\infty d\alpha \left(-e^{-\alpha m_c^2}\right) \int d^4p p^\mu e^{\alpha p^2 - ipx}.\end{aligned}\tag{C.34}$$

Onde então usamos o resultado da integral dado em [103]:

$$\int d^4k k^\mu e^{Ak^2 - 2Bk} = i \left(\frac{\pi}{A}\right)^2 e^{-B^2/A} \left(-\frac{B^\mu}{A}\right),\tag{C.35}$$

que fornece:

$$I_\mu = \frac{\pi^2 x^\mu}{2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^3} e^{(\frac{x^2}{4\alpha} - \alpha m_c^2)},\tag{C.36}$$

e finalmente obtemos o elemento de matriz desejado:

$$\langle 0|T\{j_S(x)j_S^\dagger(0)\}|0\rangle = \frac{3}{2^2\pi^8 x^8} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^3} e^{(\frac{x^2}{4\alpha} - \alpha m_c^2)}\tag{C.37}$$

Voltando com este resultado no correlator da equação (4.13) obtemos:

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= i \int d^4x e^{iq \cdot x} \frac{3}{2^2\pi^8 x^8} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^3} e^{(\frac{x^2}{4\alpha} - \alpha m_c^2)} = \\ &= \frac{3i}{2^2\pi^8} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^3} e^{-\alpha m_c^2} \underbrace{\int \frac{d^4x}{x^8} e^{(iq \cdot x + \frac{x^2}{4\alpha})}}_{I_2}.\end{aligned}\tag{C.38}$$

A integral I_2 pode ser calculada fazendo uma rotação de Wick para o espaço euclidiano. A rotação é basicamente uma mudança de variáveis com:

$$x_\mu = (x_0, \vec{x}) \longrightarrow x_E = (x_4, \vec{x}),$$

$$p_\mu = (p_0, \vec{p}) \longrightarrow p_E = (p_4, \vec{p}),$$

$$x_4 = ix_0,$$

$$p_4 = -ip_0,$$

que implica em:

$$x^2 = -x_E^2,$$

$$d^4x = -i d^4x_E,$$

$$px = p_4x_4 - \vec{p} \cdot \vec{x}.$$

Fazendo esta rotação temos:

$$I_2 = -i \int \frac{d^4x_E}{x_E^8} e^{(-iq_E \cdot x_E - \frac{x_E^2}{4\alpha})}. \quad (\text{C.39})$$

Como $x_E^2 \geq 0$ podemos usar a identidade:

$$\frac{1}{(a^2)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^\infty d\beta \beta^{(n-1)} e^{-\beta a^2}, \quad (\text{C.40})$$

para obter:

$$I_2 = -\frac{i}{3!} \int_0^\infty d\beta \beta^3 \underbrace{\int d^4x_E e^{(-iq_E \cdot x_E - \frac{x_E^2}{4\alpha} - \beta x_E^2)}}_{I_3}. \quad (\text{C.41})$$

A integral I_3 é basicamente uma integral de gaussiana em 4 dimensões, dada por:

$$I_3 = \frac{16\pi^2}{(4\beta + \frac{1}{\alpha})^2} e^{\frac{-q_E^2}{4\beta + \frac{1}{\alpha}}}. \quad (\text{C.42})$$

Substituindo I_3 em I_2 e voltando com o resultado no correlator da eq. (C.38):

$$\begin{aligned} \Pi(q) &= \frac{2}{\pi^6} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^3} e^{-\alpha m_c^2} \int_0^\infty d\beta \frac{\beta^3}{(4\beta + \frac{1}{\alpha})^2} e^{\frac{-q_E^2}{4\beta + \frac{1}{\alpha}}} = \\ &= \frac{1}{2^7 \pi^6} \int_0^\infty d\alpha \frac{e^{-\alpha m_c^2}}{\alpha} \int_0^\infty d\gamma \frac{1}{\gamma^3 (\alpha + \gamma)^2} e^{\frac{-\alpha \gamma q_E^2}{(\alpha + \gamma)}}, \end{aligned} \quad (\text{C.43})$$

onde a segunda expressão foi obtida com a mudança de variáveis $\beta \rightarrow \frac{1}{4\gamma}$.

Inserimos então a identidade $1 = \int_0^\infty d\lambda \delta(\lambda - (\alpha + \gamma))$ para obter:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2^7 \pi^6} \int_0^\infty d\alpha \frac{e^{-\alpha m_c^2}}{\alpha} \int_0^\infty d\gamma \frac{1}{\gamma^3 (\alpha + \gamma)^2} e^{\frac{-\alpha \gamma q_E^2}{(\alpha + \gamma)}} \int_0^\infty d\lambda \delta(\lambda - (\alpha + \gamma)), \quad (\text{C.44})$$

e então fazemos a mudança de escala $\alpha \rightarrow \lambda\alpha$ e $\gamma \rightarrow \lambda\gamma$:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2^7\pi^6} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\gamma \frac{1}{\lambda^4} \frac{e^{-\lambda\alpha m_c^2}}{\alpha} \frac{1}{\gamma^3(\alpha+\gamma)^2} e^{\frac{-\lambda\alpha\gamma q_E^2}{(\alpha+\gamma)}} \delta[\lambda(1-(\alpha+\gamma))] . \quad (\text{C.45})$$

Podemos usar as propriedades da função δ para escrever:

$$\delta[\lambda(1-(\alpha+\gamma))] = \frac{1}{\lambda} \delta[(\alpha+\gamma)-1] . \quad (\text{C.46})$$

Fazendo esta mudança em (C.45) e integrando em γ obtemos:

$$\Pi(q) = \frac{1}{2^7\pi^6} \int_0^1 d\alpha \frac{1}{\alpha(1-\alpha)^3} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5} e^{-\lambda(\alpha m_c^2 + \alpha(1-\alpha)q_E^2)} . \quad (\text{C.47})$$

As integrais do tipo $\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^n} e^{-\lambda K}$, onde $K(\alpha) = \alpha m_c^2 + \alpha(1-\alpha)q_E^2$, são obtidas começando com a seguinte integral:

$$\int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda K} = \frac{1}{K} . \quad (\text{C.48})$$

A integral para $n = 1$ pode ser obtida notando-se que:

$$\int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda K} = -\frac{\partial}{\partial K} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda K} , \quad (\text{C.49})$$

logo:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda} e^{-\lambda K} = -\int dK \int_0^\infty d\lambda e^{-\lambda K} = -\int dK \frac{1}{K} = -\ln K + c_1 . \quad (\text{C.50})$$

A constante c_1 é um número real que carrega a divergência da integral. Só não precisamos nos preocupar com ela pois mais adiante consideraremos somente a parte imaginária destas integrais. A integral seguinte ($n = 2$) pode ser obtida da mesma forma:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2} e^{-\lambda K} = \int dK (\ln K - c_1) = K \ln K - K - K c_1 + c_2 , \quad (\text{C.51})$$

onde novamente só a parte $K \ln K$ interessa, pois é a única que pode ter parte imaginária. As integrais seguintes são obtidas da mesma forma, assim:

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^3} e^{-\lambda K} = -\frac{K^2 \ln K}{2} + \dots \quad (\text{C.52})$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^4} e^{-\lambda K} = \frac{K^3 \ln K}{3!} + \dots \quad (\text{C.53})$$

$$\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^5} e^{-\lambda K} = -\frac{K^4 \ln K}{4!} + \dots \quad (\text{C.54})$$

Voltando com este último resultado em (C.47) temos:

$$\Pi(q) = -\frac{1}{2^7\pi^6 4!} \int_0^1 d\alpha \frac{[\alpha m_c^2 + \alpha(1-\alpha)q_E^2]^4}{\alpha(1-\alpha)^3} \ln[\alpha m_c^2 + \alpha(1-\alpha)q_E^2] . \quad (\text{C.55})$$

Para que este correlator tenha uma parte imaginária precisamos:

$$\alpha m_c^2 - \alpha(1 - \alpha)q^2 < 0, \quad (\text{C.56})$$

como estamos na região $\alpha > 0$ e a relação de dispersão será escrita para $q^2 = s > 0$, obtemos:

$$\alpha < 1 - \frac{m_c^2}{q^2}, \quad (\text{C.57})$$

e também:

$$m_c^2 < q^2. \quad (\text{C.58})$$

A condição (C.57) limita a integral em α . A condição (C.58) muda o limite inferior da relação de dispersão onde será inserida a densidade espectral, já que fora da região delimitada por esta condição a parte imaginária de $\Pi(q)$ é zero.

Satisfeitas estas condições temos $\text{Im}[K(\alpha)] = -\pi$, assim temos a seguinte densidade espectral:

$$\rho(s) = \frac{1}{2^7 \pi^6 4!} \int_0^{1 - \frac{m_c^2}{s}} d\alpha \frac{[\alpha m_c^2 - \alpha(1 - \alpha)s]^4}{\alpha(1 - \alpha)^3}. \quad (\text{C.59})$$

Fazendo a mudança $\alpha' = 1 - \alpha$ chegamos finalmente à expressão dada no capítulo 4:

$$\rho(s) = \frac{1}{2^{10} 3 \pi^6} \int_{\frac{m_c^2}{s}}^1 d\alpha \frac{(1 - \alpha)^3}{\alpha^3} [m_c^2 - \alpha s]^4. \quad (\text{C.60})$$

Os outros diagramas para as regras de soma dos mésons escalares charmosos podem ser obtidos de maneira semelhante usando as mesmas integrais mostradas acima. No caso de alguns diagramas temos, no lugar da integral I_μ que apareceu na eq. (C.33), a seguinte integral:

$$\int d^4 p e^{-ipx} \frac{1}{p^2 - m_c^2} = -i\pi^2 \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{\left(\frac{x^2}{4\alpha} - \alpha m_c^2\right)}, \quad (\text{C.61})$$

mas de resto o método se mantém inalterado.

C.2.2 Diagramas com 2 quarks pesados

Nas seções anteriores usamos o diagrama perturbativo como exemplo de cálculo pois as integrais mais divergentes aparecem neste diagrama. No caso do $X(3872)$ ilustraremos um diagrama com a estrutura de cor mais complicada, já que não há novidade em termos de integrais. Calcularemos o diagrama (e) da figura 4.11 (mostrada na página 80). Este diagrama é um dos que contribuem para o condensado de gluons. Ele tem duas possibilidades que devem ser somadas e estão ilustradas na figura C.2.

Começamos novamente com o elemento de matriz, obtido quando substituímos a corrente no correlator dado na equação (4.53) e passamos os dois propagadores dos quarks c

Figura C.2: Diagramas do condensado $\langle g^2 G^2 \rangle$ do $X(3872)$.

para o espaço dos momentos.

$$\begin{aligned}
 \Pi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 p_1 d^4 p_2 e^{-ip_1 x} e^{-ip_2 x} \frac{-\epsilon_{abc} \epsilon_{dec} \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'c'}}{2} \times \\
 &\times \left\{ \text{Tr}[S_{bb'}(p_1, m_c) \gamma_5 C S_{aa'}^T(x, m_q) C \gamma_5] \text{Tr}[S_{d'd}(-x, m_q) \gamma_\mu C S_{e'e}^T(-p_2, m_c) C \gamma_\nu] + \right. \\
 &+ \left. \text{Tr}[S_{bb'}(p_1, m_c) \gamma_\nu C S_{aa'}^T(x, m_q) C \gamma_\mu] \text{Tr}[S_{d'd}(-x, m_q) \gamma_5 C S_{e'e}^T(-p_2, m_c) C \gamma_5] \right\} = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 p_1 d^4 p_2 e^{-ip_1 x} e^{-ip_2 x} \Pi(x, p_1, p_2) . \tag{C.62}
 \end{aligned}$$

Para o cálculo destes diagramas convém separar os propagadores em suas estruturas de cor:

$$S_{ab}(x, m_q) = \delta_{ab} S_I(x, m_q) + \tau_{ab}^A S_{II}(x, m_q), \tag{C.63}$$

$$S_{ab}(p, m_c) = \delta_{ab} S_I(p, m_c) + \tau_{ab}^A S_{II}(p, m_c) . \tag{C.64}$$

Substituindo estas expressões em (C.62) obtemos uma grande quantidade de termos. Olhando os diagramas fica claro que somente os termos com estrutura de cor $(\delta_{bb'} \delta_{aa'} \tau_{d'd}^A \tau_{e'e}^A)$ e $(\tau_{bb'}^A \tau_{aa'}^A \delta_{d'd} \delta_{e'e})$ vão contribuir para o cálculo que estamos fazendo agora. Assim, temos:

$$\Pi(x, p_1, p_2) = c_I t_I(x, p_1, p_2) + c_{II} t_{II}(x, p_1, p_2), \tag{C.65}$$

onde:

$$c_I = -\frac{\epsilon_{abc} \epsilon_{dec} \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'c'}}{2} \delta_{bb'} \delta_{aa'} \tau_{d'd}^A \tau_{e'e}^A, \tag{C.66}$$

$$c_{II} = -\frac{\epsilon_{abc} \epsilon_{dec} \epsilon_{a'b'c'} \epsilon_{d'e'c'}}{2} \tau_{bb'}^A \tau_{aa'}^A \delta_{d'd} \delta_{e'e}, \tag{C.67}$$

$$\begin{aligned}
 t_I(x, p_1, p_2) &= \text{Tr}[S_I(p_1, m_c) \gamma_5 C S_I^T(x, m_q) C \gamma_5] \text{Tr}[S_{II}(-x, m_q) \gamma_\mu C S_{II}^T(-p_2, m_c) C \gamma_\nu] + \\
 &+ \text{Tr}[S_I(p_1, m_c) \gamma_\nu C S_I^T(x, m_q) C \gamma_\mu] \text{Tr}[S_{II}(-x, m_q) \gamma_5 C S_{II}^T(-p_2, m_c) C \gamma_5], \tag{C.68}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_{II}(x, p_1, p_2) &= \text{Tr}[S_{II}(p_1, m_c) \gamma_5 C S_{II}^T(x, m_q) C \gamma_5] \text{Tr}[S_I(-x, m_q) \gamma_\mu C S_I^T(-p_2, m_c) C \gamma_\nu] + \\
 &+ \text{Tr}[S_{II}(p_1, m_c) \gamma_\nu C S_{II}^T(x, m_q) C \gamma_\mu] \text{Tr}[S_I(-x, m_q) \gamma_5 C S_I^T(-p_2, m_c) C \gamma_5] . \tag{C.69}
 \end{aligned}$$

Os coeficientes de cor c_I e c_{II} são obtidos usando as mesmas relações que usamos nos casos anteriores e também:

$$\tau_{aa'}^A \tau_{bb'}^A = \frac{1}{2} \left(\delta_{ab'} \delta_{a'b} - \frac{1}{3} \delta_{aa'} \delta_{bb'} \right),$$

obtendo então:

$$c_I = c_{II} = 4. \quad (\text{C.70})$$

O termo t_I fornecerá o diagrama à direita da figura C.2 ao passo que o termo t_{II} fornecerá o diagrama à esquerda. Os termos de cada propagador que fornecem o diagrama desejado estão listados na tabela C.1:

Tabela C.1: Partes do propagador que contribuirão para cada termo.

	t_I	t_{II}
$S(p_1, m_c)$	$i \frac{\not{p}_1 + m_c}{p_1^2 - m_c^2}$	$-\frac{i}{4} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \left(\frac{\sigma^{\mu\nu}(\not{p}_1 + m_c) + (\not{p}_1 + m_c)\sigma^{\mu\nu}}{(p_1^2 - m_c^2)^2} \right)$
$S(x, m_q)$	$\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$	$-\frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x})$
$S(-x, m_q)$	$\frac{i}{32\pi^2 x^2} g_s G_{\mu\nu}^A(0) (\not{x} \sigma^{\mu\nu} + \sigma^{\mu\nu} \not{x})$	$-\frac{i}{2\pi^2 x^4} \not{x}$
$S(-p_2, m_c)$	$-\frac{i}{4} g_s G_{\mu\nu}^A(0) \left(\frac{\sigma^{\mu\nu}(-\not{p}_2 + m_c) + (-\not{p}_2 + m_c)\sigma^{\mu\nu}}{(p_2^2 - m_c^2)^2} \right)$	$i \frac{-\not{p}_2 + m_c}{p_2^2 - m_c^2}$

Fazendo as substituições indicadas na tabela C.1, calculando o traço e usando a identidade:

$$g_s^2 G_{\mu\nu}^A G^{A\alpha\beta} = \frac{1}{96} \langle g^2 G^2 \rangle (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}),$$

chegamos ao resultado:

$$\Pi(x, p_1, p_2) = -\frac{1}{2^6 \pi^4 x^6 (p_1^2 - m_c^2)(p_2^2 - m_c^2)} \left\{ \frac{1}{(p_2^2 - m_c^2)} [T_1 + T_2] + \frac{1}{(p_1^2 - m_c^2)} [T_3 + T_4] \right\}, \quad (\text{C.71})$$

onde:

$$T_1 = -\frac{8}{3} \langle g^2 G^2 \rangle p_1 x (x_\mu p_{2\nu} + p_{2\mu} x_\nu + g_{\mu\nu} p_2 x), \quad (\text{C.72})$$

$$T_2 = -8 \langle g^2 G^2 \rangle p_2 x (x_\mu p_{1\nu} + p_{1\mu} x_\nu - g_{\mu\nu} p_1 x), \quad (\text{C.73})$$

$$T_3 = -8 \langle g^2 G^2 \rangle p_1 x (x_\mu p_{2\nu} + p_{2\mu} x_\nu - g_{\mu\nu} p_2 x), \quad (\text{C.74})$$

$$T_4 = -\frac{8}{3} \langle g^2 G^2 \rangle p_2 x (x_\mu p_{1\nu} + p_{1\mu} x_\nu + g_{\mu\nu} p_1 x). \quad (\text{C.75})$$

Como o coeficiente externo às chaves é simétrico pela troca $p_1 \rightleftharpoons p_2$, podemos fazê-la no segundo termo da equação (C.71) obtendo:

$$\begin{aligned}
 \Pi(x, p_1, p_2) &= -\frac{1}{2^6 \pi^4 x^6 (p_1^2 - m_c^2)(p_2^2 - m_c^2)} \left\{ \frac{1}{(p_2^2 - m_c^2)} [T_1 + T_2] + \frac{1}{(p_1^2 - m_c^2)} [T_2 + T_1] \right\} = \\
 &= -\frac{2}{2^6 \pi^4 x^6 (p_1^2 - m_c^2)(p_2^2 - m_c^2)} \left\{ \frac{1}{(p_2^2 - m_c^2)} [T_1 + T_2] \right\} = \\
 &= \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{2^2 \pi^4 x^6 (p_1^2 - m_c^2)(p_2^2 - m_c^2)^2} \left[\frac{1}{3} p_1 x (x_\mu p_{2\nu} + p_{2\mu} x_\nu + g_{\mu\nu} p_2 x) + \right. \\
 &\quad \left. + p_2 x (x_\mu p_{1\nu} + p_{1\mu} x_\nu - g_{\mu\nu} p_1 x) \right]. \tag{C.76}
 \end{aligned}$$

O último termo entre colchetes pode ser reescrito na forma:

$$p_{1\alpha} x^\beta p_{2\gamma} x^\delta \underbrace{\left[\frac{1}{3} g_\beta^\alpha g_\nu^\gamma g_{\mu\delta} + \frac{1}{3} g_\beta^\alpha g_\mu^\gamma g_{\nu\delta} - \frac{2}{3} g_\beta^\alpha g_\delta^\gamma g_{\mu\nu} + g_\delta^\gamma g_\nu^\alpha g_{\mu\beta} + g_\delta^\gamma g_\mu^\alpha g_{\nu\beta} \right]}_{[ggg]}, \tag{C.77}$$

e assim:

$$\Pi(x, p_1, p_2) = \frac{\langle g^2 G^2 \rangle [ggg]}{2^2 \pi^4 x^6} \frac{p_{1\alpha} x^\beta p_{2\gamma} x^\delta}{(p_1^2 - m_c^2)(p_2^2 - m_c^2)^2}. \tag{C.78}$$

Passamos então para o espaço das coordenadas:

$$\begin{aligned}
 \Pi(x) &= \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4 p_1 d^4 p_2 e^{-ip_1 x} e^{-ip_2 x} \Pi(x, p_1, p_2) = \\
 &= \frac{\langle g^2 G^2 \rangle [ggg] x^\beta x^\delta}{2^{10} \pi^{12} x^6} \underbrace{\int d^4 p_1 \frac{p_{1\alpha} e^{-ip_1 x}}{(p_1^2 - m_c^2)}}_{I_1} \underbrace{\int d^4 p_2 \frac{p_{2\gamma} e^{-ip_2 x}}{(p_2^2 - m_c^2)^2}}_{I_2}. \tag{C.79}
 \end{aligned}$$

As integrais I_1 e I_2 são resolvidas da mesma forma que a integral da equação (C.33):

$$I_1 = \frac{\pi^2 x_\alpha}{2} \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta^3} e^{(\frac{x^2}{4\beta} - \beta m_c^2)}, \tag{C.80}$$

$$I_2 = -\frac{\pi^2 x_\gamma}{2} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{(\frac{x^2}{4\alpha} - \alpha m_c^2)}. \tag{C.81}$$

Voltando com as integrais em (C.79) podemos contrair os índices de Lorentz:

$$[ggg] x^\beta x^\delta x_\alpha x_\gamma = \frac{2x^2}{3} [2^2 x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}], \tag{C.82}$$

para então obter:

$$\Pi(x) = \frac{-\langle g^2 G^2 \rangle}{2^{11} 3 \pi^8 x^4} [2^2 x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}] \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta^3} e^{(\frac{x^2}{4\beta} - \beta m_c^2)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{(\frac{x^2}{4\alpha} - \alpha m_c^2)}. \tag{C.83}$$

Voltando então ao correlator:

$$\begin{aligned}\Pi(q) &= i \int d^4x e^{iqx} \frac{-\langle g^2 G^2 \rangle}{2^{11} 3 \pi^8 x^4} [2^2 x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}] \int_0^\infty \frac{d\beta}{\beta^3} e^{(\frac{x^2}{4\beta} - \beta m_c^2)} \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{(\frac{x^2}{4\alpha} - \alpha m_c^2)} = \\ &= -\frac{i\langle g^2 G^2 \rangle}{2^{11} 3 \pi^8} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-(\alpha+\beta)m_c^2}}{\alpha^2 \beta^3} \int d^4x \frac{[2^2 x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}] e^{iqx} e^{\frac{x^2}{4\alpha}} e^{\frac{x^2}{4\beta}}}{x^4}. \quad (C.84)\end{aligned}$$

Como a expressão $[2^2 x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}]$ está multiplicando e^{iqx} podemos trocar as coordenadas por derivadas, fazendo:

$$[2^2 x_\mu x_\nu - x^2 g_{\mu\nu}] e^{iqx} = \left[-2^2 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} - x^2 g_{\mu\nu} \right] e^{iqx} \quad (C.85)$$

O correlator então fica:

$$\Pi(q) = \frac{i\langle g^2 G^2 \rangle}{2^{11} 3 \pi^8} \left[2^2 \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} \mathcal{I}(2, 2, 3) - x^2 g_{\mu\nu} \mathcal{I}(1, 2, 3) \right], \quad (C.86)$$

onde as integrais são definidas por:

$$\mathcal{I}(n, m, l) = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \frac{e^{-(\alpha+\beta)m_c^2}}{\alpha^m \beta^l} I(n), \quad (C.87)$$

$$I(n) = \int d^4x \frac{e^{iqx} e^{x^2(\frac{1}{4\alpha} + \frac{1}{4\beta})}}{(x^2)^n}, \quad (C.88)$$

Estas integrais são resolvidas por métodos análogos ao da seção anterior. Para resolver $I(n)$ fazemos a rotação de Wick para, em seguida, usar a eq. (C.40) para escrever o denominador $1/(x^2)^n$ como uma integral. Aí teremos uma integral gaussiana análoga a (C.41), que pode ser integrada para obter:

$$I(n) = \frac{(-1)^{n-1} i \pi^2}{2^{2(n-2)} (n-1)!} \int_0^\infty d\gamma \frac{\alpha^2 \beta^2}{\gamma^{n-1} (\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta)^2} e^{-\frac{\alpha\beta\gamma q_E^2}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}}. \quad (C.89)$$

Voltando com esta resposta em (C.87) temos:

$$\mathcal{I}(n, m, l) = \frac{(-1)^{n-1} i \pi^2}{2^{2(n-2)} (n-1)!} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma \frac{e^{-(\alpha+\beta)m_c^2} e^{-\frac{\alpha\beta\gamma q_E^2}{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}}}{\alpha^{m-2} \beta^{l-1} \gamma^{n+1} \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \right)^2}. \quad (C.90)$$

Devemos então fazer a mudança de variáveis:

$$\alpha' = \alpha, \quad (C.91)$$

$$\beta' = \beta, \quad (C.92)$$

$$\xi = \frac{\alpha\beta}{\gamma}, \quad (C.93)$$

$$d\alpha d\beta d\gamma = \frac{\alpha' \beta'}{\xi^2} d\alpha' d\beta' d\xi, \quad (\text{C.94})$$

para obter (depois de suprimir os índices “linha” e renomear $\xi \rightarrow \gamma$):

$$\mathcal{I}(n, m, l) = \frac{(-1)^{n-1} i \pi^2}{2^{2(n-2)} (n-1)!} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int_0^\infty d\gamma \frac{\gamma^{n-1}}{\alpha^{m+n-2} \beta^{l+n-2}} \frac{e^{-(\alpha+\beta)m_c^2} e^{-\frac{\alpha\beta q_E^2}{\beta+\alpha+\gamma}}}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}. \quad (\text{C.95})$$

Seguimos então o procedimento usado nas eqs. (C.43) a (C.47): inserimos identidade por meio de uma integral em λ de $\delta[\lambda - (\alpha + \beta + \gamma)]$, para em seguida fazer mudanças de escala do tipo $\alpha \rightarrow \lambda\alpha$ em todas as variáveis e integrar em γ usando a função δ . O resultado obtido é:

$$\mathcal{I}(n, m, l) = \frac{(-1)^{n-1} i \pi^2}{2^{2(n-2)} (n-1)!} \int_0^{\alpha_{max}} d\alpha \int_0^{\beta_{max}} d\beta \int_0^\infty d\lambda \frac{(1-\alpha-\beta)^{n-1}}{\lambda^{m+l+n-3}} \frac{e^{-\lambda(\alpha+\beta)m_c^2} e^{-\lambda\alpha\beta q_E^2}}{\alpha^{m+n-2} \beta^{l+n-2}}, \quad (\text{C.96})$$

onde α_{max} e β_{max} são determinados pela condição imposta pela integração da função δ : $\alpha + \beta < 1$.

Usando este resultado para calcular $\mathcal{I}(2, 2, 3)$ e $\mathcal{I}(1, 2, 3)$ em (C.86) temos:

$$\Pi(q) = \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^6} \int_0^{\alpha_{max}} d\alpha \int_0^{\beta_{max}} d\beta \int_0^\infty d\lambda \left\{ \left[\frac{(1-\alpha-\beta)}{\lambda\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} - g_{\mu\nu} \right] \right\} \frac{e^{-\lambda(\alpha+\beta)m_c^2} e^{-\lambda\alpha\beta q_E^2}}{\lambda^3 \alpha \beta^2}. \quad (\text{C.97})$$

Levando em consideração que:

$$\left[\frac{(1-\alpha-\beta)}{\lambda\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q_\nu} - g_{\mu\nu} \right] e^{-\lambda\alpha\beta q_E^2} = [4(1-\alpha-\beta)\lambda\alpha\beta q_\mu q_\nu + (1-2\alpha-2\beta)g_{\mu\nu}] e^{-\lambda\alpha\beta q_E^2}, \quad (\text{C.98})$$

e que só estamos interessados na estrutura $g_{\mu\nu}$, temos:

$$\Pi(q^2)g_{\mu\nu} = \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{2^9 3 \pi^6} \int_0^{\alpha_{max}} d\alpha \int_0^{\beta_{max}} d\beta \frac{(1-2\alpha-2\beta)g_{\mu\nu}}{\alpha\beta^2} \int_0^\infty d\lambda \frac{e^{-\lambda K(\alpha, \beta)}}{\lambda^3}, \quad (\text{C.99})$$

onde $K(\alpha, \beta) = -\lambda[(\alpha + \beta)m_c^2 + \alpha\beta q_E^2]$. A integral em λ está resolvida na equação (C.52), mas a diferença na forma de $K(\alpha, \beta)$ leva a condições ligeiramente diferentes para que tenhamos uma parte imaginária:

$$q^2 > 4m_c^2 \quad (\text{C.100})$$

$$\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{q^2}}}{2} < \alpha < \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4m_c^2}{q^2}}}{2} \quad (\text{C.101})$$

$$\frac{\alpha}{\frac{\alpha q^2}{m_c^2} - 1} < \beta < 1 - \alpha \quad (\text{C.102})$$

Temos finalmente:

$$\rho(s) = \frac{\text{Im}[\Pi(q^2)]}{\pi} = \frac{\langle g^2 G^2 \rangle}{2^{10} 3 \pi^6} \int_{\alpha_{min}}^{\alpha_{max}} d\alpha \int_{\beta_{min}}^{1-\alpha} d\beta \frac{(1-2\alpha-2\beta)}{\alpha\beta^2} K^2(\alpha, \beta), \quad (\text{C.103})$$

que é um dos termos que contribui para a densidade espectral $\rho^{(G^2)}(s)$ em (4.56).

Bibliografia

- [1] A. Ukawa, *Int. J. Mod. Phys.* **A21**, 726-732 (2006).
- [2] S. J. Dong et al., *Phys. Lett.* **B605**, 137-143 (2005).
- [3] S. Godfrey and N. Isgur, *Phys. Rev.* **D32**, 189 (1985); S. Capstick and N. Isgur, *Phys. Rev.* **D34**, 2809 (1986).
- [4] R.L. Jaffe, *Phys. Rev.* **D15**, (1977) 267, 281; **D17**, (1978) 1444.
- [5] J. Weinstein and N. Isgur, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 659; *Phys. Rev.* **D27** (1983) 588; *Phys. Rev.* **D41** (1990) 2236 ; F. E. Close, N. Isgur and S. Kumana, *Nucl. Phys.* **B389** (1993) 513; R. Kaminski, L. Lesniak and J. P. Maillet, *Phys. Rev.* **D50** (1994) 3145; N. N. Achasov, V. V. Gubin and V. I. Shevchenko, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 203.
- [6] R. L. Jaffe, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 195 (1977).
- [7] W.-M. Yao et al. [Particle Data group], *J. Phys.* **G 33**, (2006) 1.
- [8] T. Nakano et al., LEPS Coll., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 012002 (2003).
- [9] D. Diakonov, V. Petrov and M. Polyakov, *Z. Phys.* **A359**, 305 (1997).
- [10] V. V. Barmin et al., *Phys. Atom. Nucl.* **66** 1715-1718 (2003).
- [11] S. Stepanyan et al., The CLAS collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **91** (2003) 252001.
- [12] The SAPHIR Collaboration, J. Barth, et al., *Phys. Lett.* **B572** (2003) 127-132.
- [13] A. E. Asratyan, A. G. Dolgolenko and M. A. Kubantsev, *Phys. Atom. Nucl.* **67** (2004) 682-687.
- [14] V. Kubarovsky, et al, for the CLAS Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 032001; *Erratum-ibid.* **92** (2004) 049902.
- [15] HERMES Collaboration (A. Airapetian et al.), *Phys. Lett.* **B585** (2004) 213.
- [16] A. Aleev et al., SVD Collaboration, *Phys. Atom. Nucl.* **68** (2005) 974-981.

- [17] COSY-TOF Collaboration, *Phys. Lett.* **B595** (2004) 127-134.
- [18] P.Zh.Aslanyan, V.N.Emelyanenko, G.G.Rikhkvitzkaya, *Nucl. Phys.* **A755** (2005) 375-378.
- [19] ZEUS Collaboration, *Phys. Lett.* **B591** (2004) 7-22.
- [20] S. V. Chekanov, [hep-ex/0404007].
- [21] NA49 Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 042003.
- [22] BES Collaboration: J.Z. Bai, et al, *Phys. Rev.* **D70** (2004) 012004.
- [23] K. T. Knopfle et al., HERA-B collaboration, *J. Phys.* **G30** (2004) S1363-S1366.
- [24] C. Pinkenburg, PHENIX collaboration, *J. Phys.* **G30** (2004) S1201-S1206.
- [25] W.-M. Yao et al. [Particle Data group], *J. Phys.* **G 33**, (2006) 1019-1021.
- [26] S.-L.Zhu, *Phys. Rev. Lett.* **91**, (2003) 232002.
- [27] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen, R. Rodrigues da Silva e S.H. Lee, *Phys. Lett.* **B578**, (2004) 323.
- [28] R.D. Matheus, F.S. Navarra, M. Nielsen, R. Rodrigues da Silva, *Phys. Lett.* **B602** (2004) 185-196.
- [29] R.D. Matheus, S. Narison, *Nucl. Phys. B - Proceedings Supplements* **152** (2006) 236-241, [hep-ph/0412063].
- [30] R. L. Jaffe e F. Wilczek., *Phys. Rev. Lett.* **91**, (2003) 232003.
- [31] Jun Sugiyama, Takumi Doi, Makoto Oka., *Phys. Lett.* **B581**, (2004) 167.
- [32] M. Eidemüller, *Phys. Lett.* **B597** (2004) 314-320.
- [33] M. Karliner, *Int. J. Mod. Phys.* **A20** (2005) 199; Shi-Lin Zhu, *Int. J. Mod. Phys.* **A20** (2005) 1548; M.Oka, J.Sugiyama, T.Doi, *Nucl. Phys.* **A755** (2005) 391; A.Hosaka, [hep-ph/0506138]; S.H.Lee, H.Kim, Y.s.Oh, *J. Korean Phys. Soc.* **46** (2005) 774.
- [34] S. Eidelman et al [Particle Data group], *Phys. Lett.* **B592**, (2004) 1.
- [35] M.I. Adamovich et al., WA99 Collaboration, *Phys. Rev.* **C72** (2005) 055201.
- [36] M. Battaglieri et al., CLAS Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 042001.
- [37] M.-Z. Wang et al., BELLE Collaboration, *Phys. Lett.* **B617** (2005) 141.

- [38] B. Aubert et al., BABAR Collaboration, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 042002.
- [39] R. Mizuk et al., BELLE Collaboration, *Phys. Lett.* **B632** (2006) 173.
- [40] F. Close, *Nature* **435** (2005) 287; M. Ostrick, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **55** (2005) 337; D. Barna, *Acta Phys. Hung.* **A22** (2005) 187; M. Danilov, [hep-ex/0509012]. K. Hicks, *AIP Conf. Proc.* **756** (2005) 195.
- [41] Johannes Haller (CERN) (on behalf of the ATLAS Collaboration), [hep-ex/0512042], *Presented at the 2005 International Europhysics Conference on High Energy Physics (EPS2005), Lisbon, Portugal, July 2005*
- [42] V.V. Barmin et al., DIANA Collaboration, [hep-ex/0603017].
- [43] BABAR Coll., B. Auber et al., *Phys. Rev. Lett.* **90**, (2003) 242001; *Phys. Rev.* **D69**, (2004) 031101.
- [44] CLEO Coll., D. Besson et al., *Phys. Rev.* **D68**, (2003) 032002.
- [45] BELLE Coll., P. Krokovny et al., *Phys. Rev. Lett.* **91**, (2003) 262002.
- [46] FOCUS Coll., E.W. Vaandering, [hep-ex/0406044].
- [47] S. Godfrey and N. Isgur, *Phys. Rev.* **D32**, (1985) 189; S. Godfrey and R. Kokoshi, *Phys. Rev.* **D43**, (1991) 1679.
- [48] BELLE Coll., K. Abe et al., *Phys. Rev.* **D69**, (2004) 112002.
- [49] FOCUS Coll., J.M. Link et al., *Phys. Lett.* **B586**, (2004) 11.
- [50] Y.-B. Dai, C.-S. Huang, C. Liu and S.-L. Zhu, *Phys. Rev.* **D68**, (2003) 114011.
- [51] G.S. Bali, *Phys. Rev.* **D68**, (2003) 071501(R).
- [52] A. Dougall, R.D. Kenway, C.M. Maynard and C. Mc-Neile, *Phys. Lett.* **B569**, (2003) 41.
- [53] A. Hayashigaki and K. Terasaki, [hep-ph/0411285].
- [54] S. Narison, *Phys. Lett.* **B605**, (2005) 319.
- [55] T. Barnes, F.E. Close and H.J. Lipkin, *Phys. Rev.* **D68**, (2003) 054006.
- [56] A.P. Szczepaniak, *Phys. Lett.* **B567**, (2003) 23.
- [57] E. van Beveren and G. Rupp, *Phys. Rev. Lett.* **91**, (2003) 012003.

- [58] H.-Y. Cheng and W.-S. Hou, *Phys. Lett.* **B566**, (2003) 193.
- [59] K. Terasaki, *Phys. Rev.* **D68**, (2003) 011501(R).
- [60] L. Maiani, F. Piccinini, A.D. Polosa, V. Riquer, *Phys. Rev.* **D71**, (2005) 014028.
- [61] T. Browder, S. Pakvasa and A.A. Petrov, *Phys. Lett.* **B578**, (2004) 365.
- [62] M.E. Bracco, A. Lozea, R.D. Matheus, F. S. Navarra, M. Nielsen, *Phys. Lett.* **B624** (2005) 217-222.
- [63] S.-L. Choi et al. [Belle Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **91**, (2003) 262001.
- [64] V. M. Abazov et al. [D0 Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **93**, (2004) 162002;
- [65] D. Acosta et al. [CDF II Collaboration], *Phys. Rev. Lett.* **93**, (2004) 072001;
- [66] B. Aubert et al. [BABAR Collaboration], *Phys. Rev.* **D71**, (2005) 071103.
- [67] Eric S. Swanson, *Phys. Rept.* **429** (2006) 243-305.
- [68] K. Abe et al., “Evidence for $X(3872) \rightarrow \gamma J/\psi$ and the sub-threshold decay $X(3872) \rightarrow \omega J/\psi$ ”, [hep-ex/0505037].
- [69] L. Maiani, F. Piccinini, A.D. Polosa, V. Riquer, *Phys. Rev.* **D71**, (2005) 014028.
- [70] H. Høgaasen, J.-M. Richard, P. Sorba, *Phys. Rev.* **D73**, (2006) 054013.
- [71] D. Bugg, *Phys. Lett.* **B598**, (2004) 8.
- [72] B.-A. Li, *Phys. Lett.* **B605**, (2005) 306.
- [73] K. K. Seth, *Phys. Lett.* **B612**, (2005) 1.
- [74] N. Törnqvist, [hep-ph/0308277].
- [75] F.E. Close and P. Page, *Phys. Lett.* **B578**, (2004) 119.
- [76] C.Y. Wong, *Phys. Rev.* **C69**, (2004) 055202.
- [77] S. Pakvasa and M. Suzuki, *Phys. Lett.* **B579**, (2004) 67.
- [78] E.S. Swanson, *Phys. Lett.* **B588**, (2004) 189; *Phys. Lett.* **B598**, (2004) 197; [hep-ph/0601110].
- [79] R.D. Matheus, S. Narison, M. Nielsen, J.M. Richard, [hep-ph/0608297].
- [80] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, *Nucl. Phys.* **B147**, (1979) 385; *Nucl. Phys.* **B147**, (1979) 519.

- [81] K.G. Wilson, *Phys. Rev.* **179**, (1969) 1499.
- [82] P. Colangelo, A. Khodjamirian, “QCD Sum Rules, a modern perspective”, [hep-ph/0010175], (2000).
- [83] L.J. Reinders, H. Rubinstein, S. Yazaki, *Phys. Rep.* **127**, (1985) 1.
- [84] V. Gimenez, V. Lubicz, F. Mescia, V. Porretti, J. Reyes, *Eur. Phys. J.* **C41**, (2005) 535-544; H.G. Dosch, M. Eidemüller, M. Jamin, E. Meggiolaro, *J. High Energy Phys.* **JHEP07**, (2000) 023.
- [85] V.M. Belyaev, V.M. Braun, A. Khodjamirian, R. Rückl, *Phys. Rev.* **D51**, (1995) 6177.
- [86] S. Narison, *QCD as a theory of hadrons, Cambridge Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol.* **17**, (2002) 1-778 [hep-h/0205006]; *QCD spectral sum rules*, *World Sci. Lect. Notes Phys.* **26**, (1989) 1-527.
- [87] Para os primeiros trabalhos sobre diquarks veja: R.L. Jaffe, *Phys. Rev.* **D15**, (1977) 267; Para uma revisão recente: A. Selem, F. Wilczek, [hep-ph:0602128].
- [88] Edward Shuryak, Ismail Zahed, *Phys. Lett.* **B589** (2004) 21-27.
- [89] “Plenary talk by FW at the European Physical Society”, Aachen, August 2003, R. L. Jaffe e F. Wilczek., [hep-ph/0401034]
- [90] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics, World Sci. Lect. Notes Phys.* **57**, (1998) 53.
- [91] S. Narison, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **86**, (2000) 242 [hep-ph/9911454]; S. Narison, [hep-ph/0202200]; S. Narison, [hep-ph/0510108]; S. Narison, *Phys. Lett.* **B341**, (1994) 73; H.G. Dosch and S. Narison, *Phys. Lett.* **B417**, (1998) 173; S. Narison, *Phys. Lett.* **B216**, (1989) 191.
- [92] S. Narison, *Phys. Lett.* **B466**, (1999) 345.
- [93] S. Narison, *Phys. Lett.* **B 361**, (1995) 121; *Phys. Lett.* **B 387**, (1996) 162.
- [94] T.V. Brito, F.S. Navarra, M. Nielsen, M.E. Bracco, *Phys. Lett.* **B608**, (2005) 69.
- [95] H. Kim, S.H. Lee and Y. Oh, *Phys. Lett.* **B595**, (2004) 293.
- [96] A.G. Oganesian, [hep-ph/0510327].
- [97] J. Gasser, H. Leutwyler, *Nucl. Phys.* **B250**, (1985) 465.

- [98] X. Jin, M. Nielsen, J. Pasupathy, *Phys. Rev.* **D51**, (1995) 3688; H. Forkel, M. Nielsen, *Phys. Rev.* **D55**, (1997) 1471, and references therein.
- [99] M. Nielsen, *Phys. Lett.* **B634**, (2006) 35.
- [100] H.-C. Kim, M.M. Musakhanov, M. Siddikov, [hep-ph/0508211].
- [101] Y. Sarac, H. Kim, S.H. Lee, *Phys.Rev.* **D73**, (2006) 014009.
- [102] K-C. Yang, W-Y. P. Hwang, E.M. Henley, L.S. Kisslinger, *Phys. Rev.* **D47**, (1993) 3001.
- [103] J. Collins, “*Renormalization*”, Cambridge University Press, (1984), 82.