UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

Correção Não-Comutativa para o Efeito Aharonov-Bohm: Uma Abordagem da Teoria Quântica de Campos

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 4124 Ex.1

Marcos Antonio Anacleto

ORIENTADOR: Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física para obtenção do título de Doutor em Ciências

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Adriano Antonio Natale (IFT)
Prof. Dr. Fernando Tadeu Caldeira Brandt (IFUSP)
Prof. Dr. José Roberto Soares do Nascimento (UFPB)
Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP)
Prof. Dr. Victor de Oliveira Rivelles (IFUSP)

SÃO PAULO
2004

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP
305M81014124

def. 16/11/04

530.143
A532c
D
Ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Anacleto, Marcos Antonio

Correção Não-Comutativa para o Efeito Aharonov-Bohm: Uma Abordagem da Teoria Quântica de Campos. São Paulo - 2004.

Tese (Doutoramento) – Universidade de São Paulo
Instituto de Física - Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Otávio Caminha Gomes
Área de Concentração: Física

Unitermos

1. Teoria de Campos – Teorias Não-comutativas;
2. Teoria de Campos – Teoria Chern-Simons;
3. Teoria de Campos - Efeito Aharonov-Bohm.

USP/IF/SBI-061/2004

Abstract

We study noncommutative nonrelativistic theories of spin 0 and 1/2 field coupled to the Chern-Simons field in 2+1 dimensions. In the commutative situation the scalar model has been used to simulate the Aharonov-Bohm effect in the field theory context. We verified that, contrarily to the commutative result, the inclusion of a quartic self-interaction of the scalar field is not necessary to secure the ultraviolet renormalization of the model. However, to obtain a smooth commutative limit the presence of a quartic gauge invariant self-interaction is required. For the case of spin 1/2 particles we show that the one-loop contributions to the that scattering matrix the which contain the Pauli's term are purely nonplanar. The Pauli's term plays the same role of a quartic self-interaction in the scalar case. For small values of the noncommutative parameter we fix the corrections to the Aharonov-Bohm scattering and prove that up to one-loop the models are free from dangerous infrared/ultraviolet divergences.

Resumo

Estudamos as teorias não-relativísticas e não-comutativas de campos de spin zero e 1/2 acoplado minimamente com o campo de Chern-Simons em 2+1 dimensões. Na situação comutativa o modelo escalar foi usado para simular o efeito Aharonov-Bohm na abordagem da teoria de campos. Na teoria escalar verificamos que, contrariamente ao resultado comutativo, a inclusão de uma auto-interação quártica do campo escalar não é necessária para garantir a renormalização ultravioleta do modelo. Entretanto, para obter um limite comutativo analítico a presença de uma auto-interação quártica é exigida. Mostramos para o caso de partículas de spin 1/2 que a contribuição em um laço para a matriz de espalhamento contendo o termo de Pauli é puramente não-planar. O termo de Pauli desempenha a mesma função da auto-interação quártica como no caso escalar. Para valores pequenos do parâmetro da não-comutatividade determinamos as correções para o espalhamento Aharonov-Bohm e provamos que, até ordem de um laço, os modelos são livres de singularidades ultravioleta/infravermelha.

À minha mãe Ernestina *e*
À memória de meu pai Juvino.

À Iara por tudo que
representa para mim.

Agradecimentos

- Ao Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes pela orientação;
- Aos Professores Dr. Adilson J. da Silva e Dra. D. Spehler pela colaboração;
- À minha mãe Ernestina e aos meus irmãos Luciano e Juvinete
por todo apoio e incentivo no decorrer desta jornada;
- Aos amigos do IFUSP que tive a oportunidade de conhecer;
- À CAPES pelo apoio financeiro.

Sumário

1 Introdução 1

2 Teorias Não-comutativas 7
2.1 Propriedades do Produto Moyal 8
2.2 O Campo Magnético Forte 14
2.2.1 O Problema de Landau 14
2.3 Teoria Escalar Não-Comutativa 18
2.3.1 A Mistura UV/IV 19
2.3.2 Unitariedade 22
2.4 Teoria de Calibre Não-Comutativa 25
2.4.1 Eletrodinâmica Quântica Não-comutativa 25

3 Campo Escalar Acoplado com o Campo de Chern-Simons em $(2+1)D$ 29
3.1 O Modelo Não-Abeliano Não-Relativístico 30
3.2 A Teoria de Chern-Simons Não-Comutativa 35
3.2.1 Cálculo da Função de Dois Pontos 37
3.2.2 Cálculo da Função de Três Pontos 38
3.2.3 Cálculo da Função de Quatro Pontos 40
3.3 O Modelo Não-Comutativo Não-Relativístico 42
3.3.1 Espalhamento Partícula-Partícula 46
3.3.2 Contribuição Planar 50
3.3.3 Contribuição Não-Planar 52

4 Campo Fermiônico Acoplado com o Campo de CS em $(2+1)D$ 59
4.1 O Modelo Comutativo com Simetria $SU(2)$ Não-Relativístico 59
4.2 O Modelo Não-Comutativo Não-Relativístico 63

5 Conclusão 71

A Cálculo das Integrais 73

B Integração em k^0 77

Bibliografia 79

Capítulo 1

Introdução

O estudo da teoria de campos não-comutativa tem recentemente despertado bastante interesse. Existem várias motivações para o estudo dessas teorias, a principal delas oriunda da teoria de super-cordas [1]. Tem sido mostrado que a dinâmica da D-brana na presença de um campo anti-simétrico pode ser descrita, em certos limites, em termos de uma teoria de calibre (gauge) deformada pelo produto Moyal. Do ponto de vista formal, a versão não-comutativa de uma dada teoria de campos é obtida através da substituição do produto ordinário de campos pelo seu produto Moyal (produto estrela), $fg \to f * g$; o produto Moyal é definido por:

$$f(x) * g(x) \equiv \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}}\frac{\partial}{\partial\zeta^{\nu}}\right) f(x+\xi)g(x+\zeta)|_{\xi=\zeta=0}, \tag{1.1}$$

onde $\theta^{\mu\nu}$ é uma matriz anti-simétrica que reflete a não-comutatividade dos operadores de posição

$$[q^{\mu}, q^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu}. \tag{1.2}$$

A idéia da não-comutatividade do espaço-tempo foi sugerida inicialmente, muito antes da teoria de cordas, por Heisenberg na década de 1930 com o objetivo de eliminar as divergências em teoria quântica de campos. O primeiro artigo publicado sobre o assunto data de 1947 por H. Snyder [2], sugerindo uma estrutura não-comutativa em uma escala de comprimento pequena para obter um corte efetivo ultravioleta. Entretanto, este assunto foi ignorado devido as dificuldades no tratamento com teorias não-locais e ao grande sucesso obtido pelo programa de renormalização da teoria quântica de campos, fornecendo resultados com concordância de alta precisão com os dados experimentais na eletrodinâmica quântica.

Um exemplo físico da não-comutatividade das coordenadas bastante conhecido na mecânica quântica é o problema de Landau [3], no qual uma partícula carregada movimenta-se em um campo magnético forte constante e perpendicular ao plano tal que o espaço torna-se não-comutativo quando é projetado no nível mais baixo de Landau. É interessante notar que este exemplo é similar ao da teoria de cordas, ambos sendo caracterizados pela presença de um campo magnético de fundo.

Um outro exemplo do efeito da não-comutatividade no espaço surge quando consideramos distâncias muito pequenas da ordem do comprimento de Planck, $10^{-33}cm$. Heuristicamente [4], pelo princípio de incerteza de Heisenberg ao medirmos uma coordenada com uma precisão a teremos uma indeterminação no momento da ordem de $1/a$. Ao aplicarmos à gravitação clássica, teremos, devido a indeterminação no momento, que uma energia da mesma ordem seria transmitida ao sistema por meio do tensor momento-energia, gerando um campo gravitacional. No caso deste campo ser muito intenso de modo a evitar que a luz ou outros sinais vindo da região de observação escapem, a idéia de localização é perdida.

Uma característica peculiar às teorias de campos não-comutativas é a não-localidade das interações, que serve como um regulador no comportamento ultravioleta. Entretanto, a regularização não é completa e as divergências ultravioletas não desaparecem completamente.

Em geral os diagramas das expansões perturbativas dessas teorias são divididos em dois grupos, *planares* e *não-planares*. Os gráficos não-planares são caracterizados pela existência de fatores de fase que dependem dos momentos de integração enquanto que nos gráficos planares os fatores de fase não dependem do momento de integração. Essencialmente, a forma das integrais de Feynman nas partes planares, a menos de fatores de fases globais, são as mesmas como no caso comutativo. Assim, para uma teoria escalar foi mostrado em [5] que os diagramas planares da teoria não-comutativa são os mesmos gráficos planares, a menos de fases globais, da correspondente teoria comutativa e exigem um procedimento de renormalização similar ao usado em modelos comutativos. Os gráficos não-planares, como foi sugerido em [6], são finitos no ultravioleta, devido a fase oscilatória que regulariza as integrais. Entretanto, essas contribuições não-planares podem produzir divergências que foram interpretadas como divergências infravermelhas [7]. No limite $\theta \to 0$ essas contribuições são singulares e as amplitudes não são analíticas para momentos pequenos. Resultados semelhantes são válidos em teorias de calibre (gauge) [8, 9]. Assim, temos uma mistura no comportamento ultravioleta (UV) e infravermelho (IV) dos diagramas não-planares. Isto implica na quebra da estrutura perturbativa em muitas

teorias renormalizáveis. Em alguns modelos supersimétricos não-comutativos [10, 11, 12], o efeito das divergências ultravioletas da parte comutativa surgirem como singularidades infravermelhas está sob controle. Artigos de revisão podem ser encontrados em [13].

Como objetivo de estudo desta tese, procedemos com uma investigação sobre as possíveis mudança no efeito Aharonov-Bohm (AB) [14] devido a não-comutatividade do espaço. No ano de 1959 Aharonov e Bohm [14] demonstraram que partículas cujas as trajetórias clássicas são confinadas a regiões do espaço onde classicamente nenhuma força atua podem, no entanto, sofrer desvios devido aos efeitos quânticos. A amplitude de espalhamento de duas partículas no sistema do centro de massa foi obtida exatamente. Este efeito foi confirmado experimentalmente por Akira Tonomura e colaboradores [15]. Entretanto, no tratamento perturbativo da mecânica quântica, a aproximação de Born falha em reproduzir a expansão do resultado exato, devido a falta da contribuição da onda-s em primeira ordem no tratamento perturbativo enquanto o termo de segunda ordem na série de Born é divergente [16]. Esta disparidade pode ser entendida observando que o espalhamento de um tubo de fluxo de raio finito não é bem definido no limite de raio zero (tubo de fluxo ideal) [17].

No contexto da teoria de campos não-relativística o resultado exato foi obtido usando o campo de Chern-Simons para simular o potencial AB [18]. A proposta inicial utilizando a abordagem de teoria de campos para o espalhamento AB foi introduzida por Hagen [19]. Bergman e Lozano generalizaram o modelo de Hagen incluindo uma auto-interação quártica para o campo escalar [18] com o objetivo de cancelar as divergências ultravioletas e obter concordância com o resultado exato. Além disso, para os valores especiais da auto-interação quártica a invariância de escala é restaurada, até ordem de um laço, escolhendo o sinal do termo quártico correspondendo a uma interação repulsiva; a amplitude de espalhamento concorda com a expansão perturbativa do resultado exato. O termo quártico corresponde a interação de um potencial da função delta na mecânica quântica. Kim mostrou que este resultado é válido para todas as ordens em teoria de perturbação [20]. Isto é, as divergências presentes na expansão perturbativa para o espalhamento AB são canceladas ordem a ordem pelas divergências vindas da interação de contato. O cancelamento ocorre no ponto crítico da interação quártica e, corresponde a restauração em todas as ordens da invariância de escala.

Bak e Bergman analisaram o caso escalar não-abeliano, até ordem de um laço, utilizando a teoria quântica de campos não-relativística [21]. Os autores mostraram que, semelhantemente ao que acontece no caso abeliano, a teoria é finita e invariante de escala no ponto crítico. O efeito AB é reproduzido escolhendo uma interação quártica repulsiva.

O problema do espalhamento AB para o caso fermiônico pode ser tratado similarmente na formulação da teoria quântica de campos. Neste caso a auto-interação quártica não é necessária [18, 22]. Isto ocorre devido ao fato que a teoria com férmions (ambos os casos abeliano e não-abeliano) inclui o termo de Pauli que corresponde exatamente ao termo da interação quártica. Estes resultados foram reobtidos considerando o limite de baixos momentos da teoria relativística [23].

No contexto da mecânica quântica não-comutativa, estudos anteriores sobre o efeito Aharonov-Bohm não-comutativo mostraram, diferentemente do que ocorre na situação comutativa, a seção de choque para o espalhamento de partículas escalares por um solenoide fino não se anula até mesmo quando o campo magnético assume valores discretos [24]. Em nosso trabalho o efeito será simulado por teorias de campos não-relativísticas descrevendo partículas de spin zero ou 1/2, interagindo por meio de um campo de Chern-Simons (CS) [25, 26]. Embora nossas considerações sejam restritas ao caso do grupo de simetria $U(1)$, estaremos realmente lidando com um efeito AB tipo não-abeliano [27] devido a não-comutatividade do espaço subjacente (ver [21, 28] para estudos sobre o efeito AB comutativo não-abeliano usando o campo de CS). Além disso, por conta da mudança no caráter de algumas divergências, do ultravioleta para o infravermelho, a renormalizabilidade do modelo pode estar em perigo. Entretanto, na presente situação existem dois ordenamentos possíveis para a auto-interação quártica, assim temos mais de um parâmetro livre a serem ajustados de modo que é possível formular um modelo consistente. Neste trabalho todos os cálculos serão realizados no calibre de Coulomb que para os estudos não-relativísticos parece ser mais adequado. Mostraremos que, até ordem de um laço, as divergências ultravioletas da contribuição planar são canceladas no cálculo da função de quatro pontos e contrário ao caso comutativo não tem perda da invariância de escala. Assim, a parte planar é renormalizável sem a interação de contato necessária na situação comutativa. Por outro lado, como mencionado antes, a parte não-planar apresenta divergências logarítmicas infravermelhas quando a parâmetro da não-comutatividade tende a zero. Para eliminar essas divergências introduzimos na lagrangeana interações quárticas do tipo

$$\frac{\lambda_1}{8}[\phi,\phi^\dagger]*[\phi,\phi^\dagger] \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_2}{8}\{\phi,\phi^\dagger\}*\{\phi,\phi^\dagger\}, \tag{1.3}$$

todos os produtos de campos sendo Moyal. Para valores genéricos de λ_1 e λ_2 a invariância de calibre será quebrada e divergências UV originadas dos termos quárticos ocorrem. Entretanto, para o valor especial $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, para o qual a ação é invariante de calibre, estas divergências UV são eliminadas. Provamos que as divergências IV na amplitude de

espalhamento desaparecem para um valor crítico da constante de acoplamento λ.

No caso de partículas de spin 1/2 novas características surgem na análise do efeito AB comutativo [29, 30]. Por exemplo, o termo magnético de Pauli cancela as divergências UV realizando a mesma função da interação de contato. O resultado é automaticamente invariante de escala e nenhuma auto-interação quártica é necessária diferentemente do que acontece no caso escalar. Realizamos um tratamento perturbativo da versão não-comutativa do modelo não-relativístico para partículas de spin 1/2 interagindo com o campo de CS [26] e, mostramos que as divergências UV são canceladas como ocorre na teoria escalar não-comutativa. Também, verificamos que a amplitude de espalhamento associada ao termo de Pauli é puramente não-planar e conseqüentemente não temos divergências UV adicionais, pois os fatores de fase nas integrais servem como reguladores. Por outro lado, surgem divergências logarítmicas quando fazemos o limite do parâmetro da não-comutatividade tender a zero. Estas divergências são essenciais para o cancelamento das divergências IV das demais contribuições.

Esta tese está organizada da seguinte forma. No capítulo 2, fazemos uma revisão sobre teorias não-comutativas. Introduzimos os operadores de Weyl, que associam um operador quântico a uma função clássica das variáveis do espaço de fase, para realização das operações algébricas no espaço não-comutativo. Após realização deste mapeamento, damos exemplos da simetrização e anti-simetrização levando em conta o produto estrela entre os campos. Também, ilustramos como a não-comutatividade surge em um exemplo simples em mecânica quântica do movimento de partículas carregadas, em duas dimensões, interagindo com um campo magnético constante e perpendicular ao plano em que eles se movem. O problema da mistura UV/IV são apresentados, analisando a teoria $\lambda\phi^4$ e a questão referente a unitariedade é exemplificada no modelo $\lambda\phi^3$. Em seguida introduzimos os ingredientes necessários para implementar as teorias de calibre não-comutativas.

No capítulo 3, revemos o efeito AB não-relativístico, que na teoria quântica de campos em 2+1 dimensões pode ser simulado por um sistema de partículas de spin zero interagindo via o campo de CS não-abeliano. Em seguida, estudamos a versão não-comutativa desse modelo com o grupo de simetria de calibre $U(1)$. Aplicamos um tratamento perturbativo, até ordem de um laço, no cálculo do espalhamento partícula-partícula. Realizamos o cálculo da amplitude de espalhamento separando as contribuições em uma parte planar e não-planar. Mostramos que a parte planar é finita no ultravioleta enquanto que a parte não-planar apresenta um resultado divergente no infravermelho. Essas divergências são eliminadas pela escolha adequada da constante de acoplamento. Essa escolha corresponde a situação em que a interação quártica é invariante de calibre. Como ocorre na teoria

escalar comutativa a interação quártica é fundamental para eliminar essas divergências.

No capítulo 4, analisamos o efeito AB não-abeliano não-relativístico para partículas de spin 1/2. No caso de férmions a interação de contato surge naturalmente através do termo magnético de Pauli. Para a versão não-comutativa desse modelo, verificamos que a parte planar é finito no ultravioleta.

Finalizando a tese, apresentamos as conclusões e alguns comentários. Usaremos, a menos do início do capítulo 2, o sistema de unidades naturais ($\hbar = c = 1$).

Capítulo 2

Teorias Não-comutativas

Na mecânica quântica a quantização do espaço de fase clássico (contínuo) é realizada substituindo as coordenadas e os momentos por operadores, obedecendo as bem conhecidas relações de comutação:

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \tag{2.1}$$

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}. \tag{2.2}$$

Deste modo, o espaço de fase passa do contínuo para o quântico (discreto). A constante de Planck, $\hbar$, define uma "área" mínima no espaço de fase, denominada célula de Planck.

No entanto, em uma escala de energia muita alta (ou distância muito pequena) não temos evidências a priori que essas relações seriam ainda mantidas. Uma generalização natural das relações acima para um espaço-tempo quantizado é obtida supondo que os operadores de posição $\hat{x}_\mu = (t, \hat{x}_i)$ não comutam, obedecendo a relação

$$[\hat{x}_\mu, \hat{x}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \tag{2.3}$$

onde $\theta_{\mu\nu}$ é uma matriz $D \times D$ anti-simétrica constante, com dimensão de comprimento ao quadrado (L^2) e D é a dimensão do espaço-tempo. Um limite inferior da ordem de $(10\text{Tev})^{-2}$ para o paramêtro θ da não-comutatividade foi obtido por Carroll e colaboradores [31]. Como os operadores de posição não comutam, não podemos diagonalizá-los simultaneamente e nesse caso uma relação de incerteza é induzida

$$\Delta x_\mu \Delta x_\nu \geq \frac{1}{2}|\theta_{\mu\nu}|. \tag{2.4}$$

Assim, um ponto no espaço-tempo é substituído por uma célula de Planck. Foi sugerido em [2] que para distância muito pequena da ordem de θ, as divergências ultravioletas da teoria quântica de campos poderiam ser eliminadas, isto seria equivalente a usar um corte

Λ ultravioleta para calcular as integrais nos diagramas de Feynman. No entanto, essas divergências ultravioletas não são eliminadas completamente. Além disso, divergências infravermelhas surgem, originando a mistura UV/IV nos diagramas não-planares.

2.1 Propriedades do Produto Moyal

Para realizarmos as operações algébricas no espaço não-comutativo vamos introduzir o seguinte operador:

$$T(k) = e^{ik_\mu \hat{x}^\mu}. \tag{2.5}$$

Este operador obedece as regras [5]:
1. $T^\dagger(k) = T(-k)$ se $\hat{x}^{\mu\dagger} = \hat{x}^\mu$.
2. $T(k)T(p) = e^{i(k+p)x}e^{-\frac{i}{2}k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}} = T(k+p)e^{-ik\theta p}$,
que segue da aplicação da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorf $e^A e^B = e^{A+B}e^{\frac{1}{2}[A,B]}$ para $[A,B]$ um número c e onde definimos $k\theta p \equiv \frac{1}{2}k_\mu p_\nu \theta^{\mu\nu}$.
3. $TrT(k) = (2\pi)^n \prod_\mu \delta(k_\mu)$.
4. Representação no espaço dos momentos:
Para uma função clássica $\phi(x)$ vamos associar um operador

$$\Phi[\phi] = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} T(k)\tilde{\phi}(k), \tag{2.6}$$

onde

$$\tilde{\phi}(k) = \int d^D x e^{-ikx}\phi(x), \tag{2.7}$$

é a transformada de Fourier de $\phi(x)$. Combinando as equações (2.7) e (2.6), obtemos o mapeamento $\hat{\Delta}(x)$ entre os operadores e os campos,

$$\Phi[\phi] = \int d^D x \phi(x)\hat{\Delta}(x), \tag{2.8}$$

com

$$\hat{\Delta}(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{ik\hat{x}}e^{-ikx}, \tag{2.9}$$

um operador hermitiano, $\hat{\Delta}(x)^\dagger = \hat{\Delta}(x)$, que descreve uma "base" para operadores sobre o espaço-tempo. Inversamente $\Phi \to \phi(x)$, podemos relacionar uma função clássica $\phi(x)$ com um operador $\Phi(q)$ através da fórmula

$$\phi(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ikx} Tr[\Phi T^\dagger(k)]. \tag{2.10}$$

Para mostrar como o produto entre os operadores de Weyl modifica o produto de funções no espaço comutativo, temos da definição (2.6) que

$$\Phi_1\Phi_2 = \int\int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D}\frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} T(k_1)T(k_2)\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2). \tag{2.11}$$

Das propriedades (1) e (2), obtemos

$$\Phi_1\Phi_2 = \int\int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D}\frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} T(k_1+k_2)e^{-ik_1\theta k_2}\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2), \tag{2.12}$$

e podemos reescrever o resultado acima modificando a operação de multiplicação das funções no espaço comutativo através da relação

$$\Phi_1[\phi_1]\Phi_2[\phi_2] = \Phi[\phi_1 * \phi_2], \tag{2.13}$$

onde

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ikx} Tr[\Phi_1\Phi_2 T^\dagger(k)], \tag{2.14}$$

é o produto estrela escrito em termos dos operadores de Weyl. O resultado acima pode ser reescrito da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int\int\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D}\frac{d^D k_1}{(2\pi)^D}\frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} e^{-ikx-\frac{i}{2}k_1^\mu\theta_{\mu\nu}k_2^\nu} \\
&\quad \times Tr[T(k_1+k_2)T^\dagger(k)]\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2) \\
&= \int\int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D}\frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} e^{-i(k_1+k_2)x-\frac{i}{2}k_1^\mu\theta_{\mu\nu}k_2^\nu}\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2) \\
&= \lim_{y\to x} e^{\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial y^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right)}\phi_1(y)\phi_2(x) = \phi_1(x)\phi_2(x) \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!}\theta^{\mu_1\nu_2}\ldots\theta^{\mu_n\nu_n}\partial_{\mu_1}\ldots\partial_{\mu_n}\phi_1(x)\partial_{\nu_1}\ldots\partial_{\nu_n}\phi_2(x).
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Desse resultado temos como conseqüência a não-localidade do produto estrela envolvendo um número arbitrário de derivadas. O produto (2.15) é associativo mas não-comutativo e para $\theta = 0$ reduz-se ao produto ordinário de funções. Em ordem mais baixa no parâmetro θ temos

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) \approx \phi_1(x)\phi_2(x) + \theta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi_1(x)\partial_\nu\phi_2(x) + O(\theta^2). \tag{2.16}$$

Aplicando o traço em (2.12) e usando a propriedade (3), obtemos

$$\begin{aligned} Tr[\Phi_1\Phi_2] &= \int\int\int d^Dx \frac{d^Dk_1}{(2\pi)^D}\frac{d^Dk_2}{(2\pi)^D} e^{-i(k_1+k_2)x - ik_1\theta k_2}\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2) \\ &= \int d^Dx \phi_1 * \phi_2. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Utilizando este resultado temos

$$\int d^Dx \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \frac{d^Dk_1}{(2\pi)^D}\frac{d^Dk_2}{(2\pi)^D}(2\pi)^D\delta(k_1+k_2)e^{-ik_1\theta k_2}\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2), \tag{2.18}$$

pela presença da delta, $k_1 = -k_2$, e a fase não contribui, $k_1\theta k_2 = -k_2\theta k_2 = 0$. Assim, temos

$$\int d^Dx \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \frac{d^Dk}{(2\pi)^D}\tilde{\phi}_1(k)\tilde{\phi}_2(-k) = \int d^Dx \phi_1(x)\phi_2(x). \tag{2.19}$$

Logo, a parte quadrática da ação de uma teoria de campo não muda quando substituímos o produto ordinário pelo produto Moyal. Note que devido a propriedade de ciclicidade do operador traço o produto estrela não é modificado por permutações cíclicas dos campos. Em particular

$$\int d^Dx(\phi_1 * \phi_2)(x) = \int d^Dx(\phi_2 * \phi_1)(x) = \int d^Dx \phi_1(x)\phi_2(x). \tag{2.20}$$

Para um produto de três campos temos,

$$\begin{aligned} \int d^Dx \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_3(x) &= Tr[\Phi_1\Phi_2\Phi_3] \\ &= \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^Dk_i}{(2\pi)^{iD}} Tr[T(k_1)T(k_2)T(k_3)]\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2)\tilde{\phi}_3(k_3) \\ &= \int \frac{d^Dk_1}{(2\pi)^D}\frac{d^Dk_2}{(2\pi)^D}\frac{d^Dk_3}{(2\pi)^D}(2\pi)^D\delta(k_1+k_2+k_3) \\ &\quad e^{-ik_1\theta k_2}e^{-i(k_1+k_2)\theta k_3}\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2)\tilde{\phi}_3(k_3), \end{aligned} \tag{2.21}$$

pela conservação de momentos $k_3 = -(k_1+k_2)$ e a fase $-i(k_1+k_2)\theta k_3$ não contribui pois $-i(k_1+k_2)\theta k_3 = i(k_1+k_2)\theta(k_1+k_2) = 0$ devido a $k_1\theta k_2 = -k_2\theta k_1$ e $k_1\theta k_1 = k_2\theta k_2 = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} \int d^Dx \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_3(x) &= \int \frac{d^Dk_1}{(2\pi)^D}\frac{d^Dk_2}{(2\pi)^D}\frac{d^Dk_3}{(2\pi)^D}(2\pi)^D\delta(k_1+k_2+k_3)e^{-ik_1\theta k_2} \\ &\quad \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2)\tilde{\phi}_3(k_3). \end{aligned} \tag{2.22}$$

A forma geral para o produto * de n campos integrados é dada pela expressão [5]

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * ... * \phi_n(x) = Tr[\Phi_1 \Phi_2 ... \Phi_n]$$
$$= \int \prod \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{iD}} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + ... + k_n)$$
$$\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2)...\tilde{\phi}_n(k_n) \exp(-i \sum_{i<j} k_i \theta k_j). \quad (2.23)$$

A expressão acima pode ser bastante simplificada quando alguns dos campos são iguais. Vamos agora calcular explicitamente para as teorias bosônicas como essa simplificação ocorre. Iniciamos pelo cálculo de três campos onde dois deles são iguais, isto é

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3) e^{-ik_1 \theta k_2}$$
$$\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)\tilde{\phi}_2(k_3). \quad (2.24)$$

Como os campos bosônicos $\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)$ são indistinguíveis e portanto o produto é simétrico na troca de $k_1 \Leftrightarrow k_2$. Daí

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3)$$
$$\frac{1}{2}\left[e^{-ik_1 \theta k_2} + e^{-ik_2 \theta k_1}\right] \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)\tilde{\phi}_2(k_3)$$
$$= \int \frac{d^D k_1}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_2}{(2\pi)^D} \frac{d^D k_3}{(2\pi)^D} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3)$$
$$\cos(k_1 \theta k_2)\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)\tilde{\phi}_2(k_3). \quad (2.25)$$

Obviamente, temos o mesmo resultado quando $\phi_1(x) = \phi_2(x)$, ou seja,

$$\int d^D x \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) = \int \prod_{i=1}^{3} \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{iD}} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3)$$
$$\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\tilde{\phi}(k_3) \cos(k_1 \theta k_2). \quad (2.26)$$

No caso de quatro campos

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_2(x) = \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{iD}} (2\pi)^D \delta(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)$$
$$e^{-ik_1 \theta k_2 - ik_3 \theta k_4} \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)\tilde{\phi}_2(k_3)\tilde{\phi}_2(k_4). \quad (2.27)$$

Os campos bosônicos $\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)$ e $\tilde{\phi}_2(k_3)\tilde{\phi}_2(k_4)$ são indistinguíveis pela permutação de $k_1 \Leftrightarrow k_2$ e $k_3 \Leftrightarrow k_4$ respectivamente. Logo, por simetrização temos

$$\begin{aligned}\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_2(x) &= \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{iD}} (2\pi)^D \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \\ &\frac{1}{4}\left[e^{-ik_1\theta k_2 - ik_3\theta k_4} + e^{-ik_2\theta k_1 - ik_3\theta k_4} + e^{-ik_1\theta k_2 - ik_4\theta k_3}\right. \\ &\left. + e^{-ik_2\theta k_1 - ik_4\theta k_3}\right] \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)\tilde{\phi}_2(k_3)\tilde{\phi}_2(k_4),\end{aligned}$$

onde fizemos as permutações $k_1 \Leftrightarrow k_2$, $k_3 \Leftrightarrow k_4$, $k_1 \Leftrightarrow k_2$ e $k_3 \Leftrightarrow k_4$ nas três últimas parcelas respectivamente assim,

$$\begin{aligned}e^{-ik_1\theta k_2 - ik_3\theta k_4} &= \frac{1}{4}[e^{-ik_1\theta k_2 - ik_3\theta k_4} + e^{ik_1\theta k_2 - ik_3\theta k_4} + e^{-ik_1\theta k_2 + ik_3\theta k_4} + e^{ik_1\theta k_2 + ik_3\theta k_4}] \\ &= \frac{1}{2}\cos(k_1\theta k_2)[e^{ik_3\theta k_4} + e^{-ik_3\theta k_4}] = \cos(k_1\theta k_2)\cos(k_3\theta k_4),\end{aligned}$$

e finalmente, obtemos

$$\begin{aligned}\int d^D x \phi_1(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_2(x) = \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{iD}} (2\pi)^D \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \\ \tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_1(k_2)\tilde{\phi}_2(k_3)\tilde{\phi}_2(k_4)\cos(k_1\theta k_2)\cos(k_3\theta k_4). \quad (2.28)\end{aligned}$$

Analogamente para o produto $\int d^4x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{iD}} (2\pi)^D \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \\ e^{-ik_1\theta k_2 - ik_3\theta k_4}\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2)\tilde{\phi}_1(k_3)\tilde{\phi}_2(k_4). \quad (2.29)\end{aligned}$$

A simetria neste caso é agora entre $k_1 \Leftrightarrow k_3$ e $k_2 \Leftrightarrow k_4$. Por simetrização temos

$$\begin{aligned}e^{-ik_1\theta k_2 - ik_3\theta k_4} &= \frac{1}{4}[2e^{-ik_1\theta k_2 - ik_3\theta k_4} + 2e^{-ik_3\theta k_2 - ik_1\theta k_4}], \\ &= \cos(k_1\theta k_2 + k_3\theta k_4),\end{aligned}$$

onde pela conservação dos momentos $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 0$, reescrevemos a segunda exponencial na forma $e^{ik_1\theta k_2 - ik_3\theta(k_1+k_2)} = e^{ik_1\theta k_2 + ik_3\theta k_4}$ para obtermos o resultado final em termos da função trigonométrica e o resultado é

$$\begin{aligned}\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) * \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^D k_i}{(2\pi)^{iD}} (2\pi)^D \delta(k_1+k_2+k_3+k_4) \\ \cos(k_1\theta k_2 + k_3\theta k_4)\tilde{\phi}_1(k_1)\tilde{\phi}_2(k_2)\tilde{\phi}_1(k_3)\tilde{\phi}_2(k_4), \quad (2.30)\end{aligned}$$

que por simetrização, todos os campos são iguais e portanto indistinguíveis, teremos

$$\int d^4x\phi(x)*\phi(x)*\phi(x)*\phi(x) = \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^Dk_i}{(2\pi)^{iD4}}(2\pi)^D\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$
$$\frac{1}{3}[\cos(k_1\theta k_2)\cos(k_3\theta k_4)+\cos(k_1\theta k_3)\cos(k_2\theta k_4)$$
$$+\cos(k_1\theta k_4)\cos(k_2\theta k_3)]\tilde{\phi}(k_1)\tilde{\phi}(k_2)\tilde{\phi}(k_3)\tilde{\phi}(k_4). \quad (2.31)$$

Este procedimento de simetrização, campos bosônicos, possibilita reescrever os fatores de fase em termos de funções trigonométricas.

Vamos agora considerar produtos de quatro campos fermiônicos dados por

$$\int d^4x\bar{\psi}_1(x)*\bar{\psi}_1(x)*\psi_2(x)*\psi_2(x) = \int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^Dk_i}{(2\pi)^{iD}}(2\pi)^D\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$
$$e^{-ik_1\theta k_2-ik_3\theta k_4}\tilde{\bar{\psi}}_1(k_1)\tilde{\bar{\psi}}_1(k_2)\tilde{\psi}_2(k_3)\tilde{\psi}_2(k_4). \quad (2.32)$$

Devido ao caráter fermiônico dos campos, devemos anti-simetrizar o resultado acima, como segue

$$\begin{aligned} e^{-ik_1\theta k_2-ik_3\theta k_4} &= \frac{1}{4}[e^{-ik_1\theta k_2-ik_3\theta k_4}-e^{ik_1\theta k_2-ik_3\theta k_4}-e^{-ik_1\theta k_2+ik_3\theta k_4}+e^{ik_1\theta k_2+ik_3\theta k_4}] \\ &= -\sin(k_1\theta k_2)\sin(k_3\theta k_4). \end{aligned}$$

Então, temos

$$\int d^4x\bar{\psi}_1(x)*\bar{\psi}_1(x)*\psi_2(x)*\psi_2(x) = -\int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^Dk_i}{(2\pi)^{iD}}(2\pi)^D\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$
$$\times\tilde{\bar{\psi}}_1(k_1)\tilde{\bar{\psi}}_1(k_2)\tilde{\psi}_2(k_3)\tilde{\psi}_2(k_4)\sin(k_1\theta k_2)\sin(k_3\theta k_4), \quad (2.33)$$

e procedendo de modo análogo temos

$$\int d^4x\bar{\psi}_1(x)*\psi_2(x)*\bar{\psi}_1(x)*\psi_2(x) = i\int \prod_{i=1}^{4} \frac{d^Dk_i}{(2\pi)^{iD}}(2\pi)^D\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)$$
$$\times\tilde{\bar{\psi}}_1(k_1)\tilde{\psi}_2(k_2)\tilde{\bar{\psi}}_1(k_3)\tilde{\psi}_2(k_4)\sin(k_1\theta k_2+k_3\theta k_4). \quad (2.34)$$

Notamos para o caso fermiônico que os dois resultados acima não são nulos como ocorre no caso comutativo. Isto acontece devido ao fato que não temos mais o princípio de exclusão de Pauli no espaço não-comutativo, pois agora temos um limite para o conceito de localização.

Vimos que a manipulação dos fatores de fase pelo procedimento de simetrização (campos de bósons) e anti-simetrização (campos fermiônicos) para reescrevê-los em termos de funções trigonométricas, a ordem na qual os campos indistinguíveis são colocados modifica os argumentos das funções trigonométricas.

2.2 O Campo Magnético Forte

Nesta seção ilustraremos como a não-comutatividade surge em um exemplo simples em mecânica quântica do movimento de partículas carregadas em duas dimensões na presença de um campo magnético constante e perpendicular ao plano em que eles se movem [3].

2.2.1 O Problema de Landau

O problema de Landau trata de um sistema não-relativístico de N_e elétrons interagindo e movendo-se em duas dimensões. Vamos considerar uma partícula carregada de massa m movendo-se no plano $\mathbf{r}_a = (x_a, y_a)$ com $a = 1, ..., N_e$ e na presença de um campo magnético $\mathbf{B} = B\hat{z}$ constante e perpendicular ao plano em que eles se movem.

A lagrangeana é dada por

$$L = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{m_e}{2} \dot{\mathbf{r}}_a^2 + e\dot{\mathbf{r}}_a \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}_a) - V(\mathbf{r}_a) \right] - \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b), \tag{2.35}$$

e $\mathbf{A}(\mathbf{r}_a) = (0, Bx_a)$, é o correspondente potencial vetor.

Para quantizarmos canonicamente esse sistema procedemos de modo usual determinando o correspondente operador hamiltoniano

$$H = \sum_{a=1}^{N_e} \left[\frac{\pi_a^2}{2m_e} + V(\mathbf{r}_a) \right] + \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b), \tag{2.36}$$

onde

$$\pi_a = m_e \dot{\mathbf{r}}_a = \mathbf{p}_a - e\mathbf{A}(\mathbf{r}_a), \tag{2.37}$$

é o momento mecânico (não-canônico), enquanto $\mathbf{p}_a$ é o momento canônico obedecendo as relações de comutação usuais.

$$\begin{aligned} [x_a, p_b^x] &= [y_a, p_b^y] = i\delta^{ab}, \\ [x_a, y_b] &= [p_a^x, p_b^y] = 0. \end{aligned} \tag{2.38}$$

A relação de comutação canônica dos operadores de momentos tem comutadores quânticos não nulos dados por

$$[\hat{\pi}_a^x, \hat{\pi}_b^y] = ieB\delta_{ab}. \tag{2.39}$$

Assim, o espaço dos momentos na presença de um campo magnético B de fundo é não-comutativo.

O operador momento $\hat{\pi}_a$ pode ser escrito em termos dos operadores de criação e aniquilação do oscilador harmônico. Na ausência de interações, $V = U = 0$, os autovalores de energia da hamiltoniana são aqueles dos níveis de Landau

$$E = \frac{eB}{m_e}(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.40}$$

A não-comutatividade no espaço das coordenadas surge quando tomamos o limite de campo forte $B \to \infty$, ou formalmente tomamos o limite de massa pequena $m_e \to 0$. Neste limite a lagrangeana torna-se

$$L_0 = \sum_{a=1}^{N_e} [eBx_a\dot{y}_a - V(x_a, y_a)] - \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b). \tag{2.41}$$

Temos para cada $a = 1, ..., N_e$, que a lagrangeana acima é da forma $p\dot{q} - h(p, q)$, e forma um par canônico (eBx_a, y_a) cuja relação de comutação é

$$[\hat{x}_a^i, \hat{x}_b^j] = \frac{i\delta_{ab}\epsilon^{ij}}{eB} = i\delta_{ab}\theta^{ij}, \tag{2.42}$$

onde o parâmetro da não-comutatividade é dado por

$$\theta^{ij} = \frac{\epsilon^{ij}}{eB}, \tag{2.43}$$

com ϵ^{ij} o tensor anti-simétrico de Levi-Cività.

Uma outra forma de obter a não-comutatividade no espaço das coordenadas é através do procedimento de quantização canônica de Dirac para sistemas vinculados. Da lagrangeana (2.41), obtemos que os momentos canonicamente conjugados são

$$p_{x_a} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{x}_a} = 0, \tag{2.44}$$

$$p_{y_a} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{y}_a} = eBx_a. \tag{2.45}$$

O sistema possui os seguintes vínculos primários

$$\phi_1 \equiv p_{x_a} \approx 0, \tag{2.46}$$

$$\phi_2 \equiv p_{y_a} - eBx_a \approx 0. \tag{2.47}$$

O parêntese de Poisson entre eles dá

$$\{\phi_1, \phi_2\} = eB. \tag{2.48}$$

Da relação (2.48) vemos que os vínculos são classificados como de segunda-classe[1] na terminologia de Dirac [32]. A hamiltoniana canônica é

$$H = p_{y_a}\dot{y} - L_0 = \sum_{a=1}^{N_e} V(x_a, y_a) + \sum_{a<b} U(\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b). \tag{2.49}$$

Incluindo os vínculos primários temos a hamiltoniana primária

$$H_p = H + u^1\phi_1 + u^2\phi_2, \tag{2.50}$$

onde u^1 e u^2 são os multiplicadores de Lagrange. Com ajuda dos parênteses de Poisson fundamentais

$$\{x^i, x^j\} = 0, \quad \{x^i, p^j\} = \delta^{ij}. \tag{2.51}$$

Como os vínculos primários são todos de segunda-classe, não há vínculos secundários (pela condição de consistência, $\dot{\phi}_i \approx 0$ com $i = 1, 2$). Passemos agora ao cálculo dos parênteses de Dirac, o qual é definido por

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \sum_{r,s=1}^{2} \{f, \phi_r\} C^{-1}_{rs} \{\phi_s, g\}, \tag{2.52}$$

onde

$$C^{-1} = \begin{vmatrix} 0 & -1/eB \\ 1/eB & 0 \end{vmatrix}, \tag{2.53}$$

é a inversa da matriz $C_{rs} = \{\phi_r, \phi_s\}$ e ϕ_r o conjunto de todos os vínculos de segunda-classe. Assim, temos que

$$\{x^i_a, x^j_b\}_D = -\frac{1}{eB}\delta_{ab}\epsilon^{ij}, \tag{2.54}$$

e a quantização é obtida pela correspondência

$$\{x^i_a, x^j_b\}_D \to i[\hat{x}^i_a, \hat{x}^j_b], \tag{2.55}$$

logo,

$$[\hat{x}^i_a, \hat{x}^j_b] = \frac{i}{eB}\delta_{ab}\epsilon^{ij} = i\delta_{ab}\theta^{ij}. \tag{2.56}$$

Note que a não-comutatividade das coordenadas são inicialmente estabelecidas no nível clássico no qual os parênteses de Poisson das coordenadas não são nulos. No limite

[1] Na terminologia de Dirac os vínculos são classificados como sendo de *primeira-classe*, se o parêntese de Poisson entre eles é fracamente nulo, do contrário eles serão de *segunda-classe*.

de $B \to \infty$ (ou $m \to 0$) o espaçamento entre os níveis de Landau torna-se infinito e no nível mais baixo $n = 0$ temos um desacoplamento dos níveis restantes no sistema. Assim, o limite de campo forte projeta o espectro quântico deste sistema no nível mais baixo de Landau.

Vamos agora investigar as conseqüências da não-comutatividade na descrição do ponto de vista de teoria de campos não-relativística. Para um exemplo de campos não-comutantes, vamos considerar um fluido carregado movendo-se no plano na presença de um campo magnético externo perpendicular ao plano. O fluido é descrito por uma densidade ρ e velocidade v, ambos definidos sobre o plano. A densidade de elétrons é dada por

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{a=1}^{N_e} \delta^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \tag{2.57}$$

Assim, escrevemos a hamiltoniana no nível mais baixo de Landau como sendo

$$H_0 = \int d^2\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})V(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}\int\int d^2\mathbf{r}d^2\mathbf{r}'\rho(\mathbf{r})U(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}'). \tag{2.58}$$

O operador densidade é definido em termos dos operadores de criação $\psi^\dagger(\mathbf{r})$ e aniquilação $\psi(\mathbf{r})$ de elétrons como

$$\rho(\mathbf{r}) = \psi^\dagger(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \tag{2.59}$$

Para facilitar os cálculos vamos trabalhar com a transformada de Fourier da densidade, isto é

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \int d^2\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}}. \tag{2.60}$$

Desde que $\mathbf{r}_a$ é um operador que não comuta, vamos escolher o ordenamento de Weyl que é equivalente a definir a transformada de Fourier como sendo

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) = \sum_{a=1}^{N_e} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_a}. \tag{2.61}$$

Para calcular a relação de comutação dos operadores densidades vamos usar a relação (2.42) e a fórmula de Baker-Hausdorf. Assim, temos

$$e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}_a}e^{i\mathbf{q}.\mathbf{r}_a} = e^{-i\mathbf{k}\theta\mathbf{q}}e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{q}).\mathbf{r}_a}, \tag{2.62}$$

onde definimos que $\mathbf{k}\theta\mathbf{q} \equiv \frac{1}{2}\mathbf{k}_i\theta^{ij}\mathbf{q}_j$ e o parâmetro da não-comutatividade θ^{ij} dado por (2.43). Portanto, obtemos

$$[\tilde{\rho}(\mathbf{k}), \tilde{\rho}(\mathbf{q})] = 2i\sin(\mathbf{k}\theta\mathbf{q})\tilde{\rho}(\mathbf{k}+\mathbf{q}). \tag{2.63}$$

A relação de comutação acima, está relacionada com o produto Moyal da seguinte forma. Para uma função arbitrária $f(\mathbf{r})$, definimos

$$\langle f \rangle = \int d^2\mathbf{r}\rho(\mathbf{r})f(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\tilde{\rho}(\mathbf{k})\tilde{f}(-\mathbf{k}). \tag{2.64}$$

Agora podemos calcular o comutador das médias multiplicando ambos os lados da eq. (2.63) por $\tilde{f}(-\mathbf{k})\tilde{g}(-\mathbf{q})$ e realizando a integração nos momentos, obtemos

$$[\langle f \rangle, \langle g \rangle] = \langle [f, g]_* \rangle, \tag{2.65}$$

onde

$$[f, g]_*(\mathbf{r}) = (f * g)(\mathbf{r}) - (g * f)(\mathbf{r}). \tag{2.66}$$

Portanto, apenas o comutador da média é mapeado no comutador Moyal e em geral temos

$$\langle f \rangle \langle g \rangle \neq \langle f * g \rangle. \tag{2.67}$$

A expansão do comutador Moyal (2.66) para $\theta \to 0$ (ou $B \to \infty$) em ordem mais baixa resulta em

$$[f, g]_* = \frac{1}{eB}\{f, g\} + O\left(\frac{1}{B^2}\right), \tag{2.68}$$

onde $\{f, g\} = \epsilon^{ij}\partial_i f \partial_j g$ é o parêntese de Poisson usual das funções f e g.

2.3 Teoria Escalar Não-Comutativa

Iniciamos nossas discussões considerando, como exemplo, a teoria escalar ϕ^4 real comutativa em 4-dimensões na métrica euclidiana,

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right]. \tag{2.69}$$

Para transformar uma teoria quântica de campos ordinária em uma teoria de campos não-comutativa podemos usar o procedimento de quantização de Weyl via operadores hermitianos $\Phi[\phi]$ ou usamos a deformação do produto ordinário no produto estrela (2.15).

A teoria quântica de campos escrita em termos dos operadores de Weyl $\Phi[\phi]$, correspondente ao campo escalar real em 4-dimensões é dada por

$$S[\Phi] = Tr\left[\frac{1}{2}[\hat{\partial}_\mu, \Phi]^2 - \frac{1}{2}m^2\Phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\Phi^4\right], \tag{2.70}$$

onde a derivada $\hat{\partial}_\mu$ corresponde a uma derivação linear anti-hermitiana que é definida pelas relações de comutação,

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{x}^\nu] = \delta^\nu_\mu, \tag{2.71}$$

$$[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu] = 0. \tag{2.72}$$

Podemos reescrever esta ação no espaço das coordenadas usando o mapeamento (2.8) e a propriedade (2.13) para obtermos o análogo não-comutativo da teoria ϕ^4 real[7]

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi * \phi * \phi * \phi\right]. \tag{2.73}$$

Como vimos anteriormente, a parte da teoria livre é a mesma que no caso comutativo. A diferença surge nos termos de interação. As regras de Feynman no espaço dos momentos são:

1. Propagador do campo escalar:

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.74}$$

2. Vértice de quatro bósons:

$$-\frac{i\lambda}{3}[\cos(k_1\theta k_2)\cos(k_3\theta k_4) + \cos(k_1\theta k_3)\cos(k_2\theta k_4) + \cos(k_1\theta k_4)\cos(k_2\theta k_3)], \tag{2.75}$$

em que os k's indicam os momentos das linhas que se juntam no vértice.

2.3.1 A Mistura *UV/IV*

Para ilustrar o aspecto não-comutativo deste modelo, vamos calcular a correção da auto-energia (função de dois pontos 1PI) em um laço do campo ϕ, temos

$$\Gamma(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Gamma^{(n)}(p). \tag{2.76}$$

A função de dois pontos em ordem mais baixa é dada por

$$\Gamma^{(0)}(p) = i(p^2 - m^2), \tag{2.77}$$

e a contribuição em ordem de um laço divide topologicamente os gráficos em duas partes uma planar e outra não-planar, figuras (2.1a) e (2.1b) respectivamente, ou seja

$$\Gamma^{(1)}_{planar}(p) = \frac{1}{3(2\pi)^4}\int d^4k \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.78}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nplanar}(p) = \frac{1}{6(2\pi)^4}\int d^4k \frac{e^{ik\theta p}}{k^2 - m^2 + i\epsilon}. \tag{2.79}$$

Figura 2.1: Diagrama planar e não-planar em um laço para a função de dois pontos na teoria ϕ^4.

A parte planar é a correção para a massa em um laço do modelo comutativo e é quadraticamente divergente. A parte não-planar é convergente no ultravioleta, devido as oscilações rápidas do fator de fase $e^{ik\theta p}$ para momentos grandes. No entanto, quando $k\theta p = 0$ ($\theta = 0$) ou para os momentos externos nulos, o fator de fase na integral (2.79) torna-se ineficiente como um regulador no comportamento ultravioleta. Assim, temos a seguinte relação

$$\Gamma^{(1)}_{planar}(p) = 2\Gamma^{(1)}_{nplanar}(p = 0). \tag{2.80}$$

Para ver o efeito do fator de fase na segunda integral (2.79), vamos usar a parametrização de Schwinger nas duas integrais

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty d\alpha e^{i\alpha(k^2 - m^2 + i\epsilon)}, \tag{2.81}$$

as integrais em k são agora gaussianas e podem ser feitas explicitamente

$$\Gamma^{(1)}_{planar}(p) = -\frac{1}{48\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-i\alpha m^2}, \tag{2.82}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nplanar}(p) = -\frac{1}{96\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-i\alpha m^2 - i\tilde{p}^2\alpha^{-1}}, \tag{2.83}$$

onde introduzimos a notação $\tilde{p}^2 = p_\mu \theta^{\mu\rho}\theta^\nu_\rho p_\nu$. A integral em α pode ser regularizada introduzindo um fator de fase $exp(-\frac{i}{\alpha\Lambda^2})$ onde Λ representa um regulador para a convergência da integral, isto é

$$\Gamma^{(1)}_{planar}(p) = -\frac{1}{48\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-i\alpha m^2 - \frac{i}{\alpha\Lambda^2}}, \tag{2.84}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nplanar}(p) = -\frac{1}{96\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-i\alpha m^2 - i\left(\frac{\tilde{p}^2 + \Lambda^{-2}}{\alpha}\right)}. \tag{2.85}$$

Efetuando a integração em α, temos

$$\Gamma^{(1)}_{planar}(p) = -\frac{im}{24\pi^2}\frac{\Lambda}{2} K_1\left(\frac{2m}{\Lambda}\right), \tag{2.86}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nplanar}(p) = -\frac{im}{96\pi^2}\left(\tilde{p}^2 + \frac{4}{\Lambda^2}\right)^{-1/2} K_1\left(m\sqrt{\tilde{p}^2 + \frac{4}{\Lambda^2}}\right), \tag{2.87}$$

onde $K_1(z)$ é a função de Bessel do segundo tipo. Usando a expansão assintótica da função $K_1(z) \to \frac{1}{z} + \frac{z}{2}\ln\frac{z}{2}$, obtemos

$$\Gamma^{(1)}_{planar}(p) = -\frac{i}{48\pi^2}\left[\Lambda^2 - m^2\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right) + ...\right], \tag{2.88}$$

$$\Gamma^{(1)}_{nplanar}(p) = -\frac{i}{96\pi^2}\left[\Lambda^2_{ef} - m^2\ln\left(\frac{\Lambda^2_{ef}}{m^2}\right) + ...\right], \tag{2.89}$$

e definimos

$$\Lambda^2_{ef} = \frac{1}{\tilde{p}^2 + \Lambda^{-2}}. \tag{2.90}$$

No limite $\Lambda \to \infty$, a parte não-planar permanece finita, regularizada pelo fator de fase não-comutativo. Neste limite o corte efetivo $\Lambda^2_{ef} = \frac{1}{\tilde{p}^2}$ tende para infinito quando, $\theta \to 0$ ou $\tilde{p} \to 0$.

A ação efetiva quadrática em um laço é

$$S^{(1)} = \int d^4p\frac{i}{2}\left[p^2 - M^2 - \frac{\lambda}{96\pi^2(\tilde{p}^2 + \Lambda^{-2})} + \frac{\lambda M^2}{96\pi^2}\ln\left(\frac{1}{M^2(\tilde{p}^2 + \Lambda^{-2})}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\right]\phi(p)\phi(-p), \tag{2.91}$$

onde

$$M^2 = m^2 + \frac{\lambda\Lambda^2}{48\pi^2} - \frac{\lambda m^2}{48\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right), \tag{2.92}$$

é a massa renormalizada. Vamos agora considerar os seguintes casos:

1. Caso $\tilde{p}^2 \ll \Lambda^{-2}$:

Em particular no limite de momento nulo temos $\Lambda_{ef} \approx \Lambda$ e recuperamos à ação da teoria comutativa

$$S^{(1)} = \int d^4p\frac{i}{2}\left[p^2 - M'^2\right]\phi(p)\phi(-p), \tag{2.93}$$

onde

$$M'^2 = M^2 + \frac{3\lambda\Lambda^2}{96\pi^2} - \frac{3\lambda m^2}{96\pi^2}\ln\left(\frac{\Lambda^2}{m^2}\right), \tag{2.94}$$

quando ajustamos M para ser um corte independente e nesse caso M' e $S^{(2)}_1$ divergem no limite de $\Lambda \to \infty$.

2. Caso $\tilde{p}^2 \gg \Lambda^{-2}$:

No limite de $\Lambda \to \infty$ temos $\Lambda^2_{ef} = \frac{1}{\tilde{p}^2}$ e portanto

$$S_{ef} = \int d^4p\frac{i}{2}\left[p^2 - M^2 - \frac{\lambda}{96\pi^2\tilde{p}^2} + \frac{\lambda M^2}{96\pi^2}\ln\left(\frac{1}{m^2\tilde{p}^2}\right) + \mathcal{O}(\lambda^2)\right]\phi(p)\phi(-p). \tag{2.95}$$

A função de dois pontos completa e renormalizada em ordem de um laço é dada por

$$\Gamma(p) = i(p^2 - m^2) + \lambda\Gamma^{(1)}_{planar}(p) + \lambda\Gamma^{(1)}_{nplanar}(p) + \mathcal{O}(\lambda^2). \tag{2.96}$$

Note que a função de dois pontos renormalizada contém dois pólos um para momento nulo e outro com uma singularidade logarítmica $\ln(\tilde{p}^2)$. Portanto, quando tomamos o limite de $\Lambda \to \infty$ e o limite de pequenos momentos $p \to 0$ (ou $\theta \to 0$) eles não comutam, e assim na teoria de campos não-comutativa temos uma mistura nos comportamentos do ultravioleta ($\Lambda \to \infty$) e infravermelho ($\tilde{p} \to 0$) da teoria. Essa mistura entre as escalas de alta e baixa energias é chamada de mistura *UV/IV*.

A mistura *UV/IV* é uma das principais característica da teoria quântica de campos não-comutativa e não tem um análogo correspondente em teoria comutativa. Os gráficos da teoria são divergentes em $\theta = 0$ e quando o parâmetro da não-comutatividade é diferente de zero, a teoria é regularizada pelos fatores de fase que a torna finita. No entanto, para $\tilde{p} \to 0$ (ou $\theta \to 0$) a fase é irrelevante e os diagramas divergem em momentos nulos. O pólo na função de dois pontos em $p = 0$ surge da integração de momentos grandes (isto é $\Lambda \to \infty$) e no espaço das posições leva as correlações de longo alcance. Geralmente as funções de correlação decaem exponencialmente se a massa é constante, $m > 0$. Na teoria não-comutativa eles decaem algebricamente para λ pequeno e a correção de λ pequeno leva ao decaimento exponencial, mas com a constante de decaimento da ordem de λ. Assim, mesmo para uma teoria massiva encontramos divergências infravermelhas.

2.3.2 Unitariedade

Nesta seção vamos calcular os diagramas em ordem de um laço da teoria ϕ^3 e verificar se eles satisfazem a condição de unitariedade. Os primeiros autores a analisar a quebra de unitariedade em teorias não-comutativas foram J. Gomes e T. Mehen [33], eles mostraram que a unitariedade dessa teoria à nível de um laço é satisfeita para $\theta^{0i} = 0$ enquanto que para $\theta^{0i} \neq 0$ a teoria não é unitária. A condição de unitariedade para os elementos de matrizes na concha de massa, é dada pela relação

$$2ImM_{ab} = \sum_n M_{an}M_{nb}, \tag{2.97}$$

onde M_{ab} é um elemento da matriz de transição entre os estados a e b. No lado direito da eq. (2.97), a soma sobre os estados intermediários inclui integrações no espaço de fase para cada partícula n. As teorias de campos obedecem relações de unitariedade mais gerais,

Figura 2.2: Relação de unitariedade generalizada para a função de dois pontos na teoria ϕ^3 expressa em termos do teorema ótico.

as quais são generalizações da condição (2.97) para os gráficos de Feynman, chamadas regras de cortes. As regras de cortes também são aplicadas as funções de Green fora da concha de massa bem como para os elementos da matriz S.

Vamos agora calcular a função de dois pontos, em ordem mais baixa, para a teoria escalar $\lambda\phi^3$ não-comutativa e as suas regras de cortes estão desenhadas na figura (2.2).

O análogo não-comutativo da teoria $\lambda\phi^3$ real é dado pela ação

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi\phi - \frac{\lambda}{3!}\phi * \phi * \phi\right]. \tag{2.98}$$

Como visto anteriormente, a parte quadrática da teoria é a mesma que no caso comutativo. A modificação surge apenas nos termos de interação. As regras de Feynman no espaço dos momentos são:

1. Propagador do campo escalar:

$$\Delta_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{2.99}$$

2. Vértice de três bósons:

$$-i\lambda\cos\left(\frac{k\theta q}{2}\right), \quad k\theta q = k_\mu\theta^{\mu\nu}q_\nu, \tag{2.100}$$

onde k e p indicam os momentos que chegam no vértice.

A amplitude para o diagrama em um laço, figura (2.2), é

$$iM = \frac{\lambda^2}{4}\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{[1+\cos(p\theta l)]}{(l^2 - m^2 + i\epsilon)[(l+p)^2 - m^2 + i\epsilon]}, \tag{2.101}$$

e a expressão para o lado direito da figura (2.2), é

$$\sum |M|^2 = \frac{\lambda^2}{4(2\pi)^2}\int \frac{d^3k}{2k_0}\int \frac{d^3q}{2q_0}\delta^4(p-k-q)[1+\cos(p\theta k)]. \tag{2.102}$$

No cálculo das amplitudes acima usamos a identidade $\cos^2 x = (1+\cos 2x)/2$ para separar as contribuições planar e não-planar. Visto que a parte planar satisfaz a condição de

unitariedade, nos deteremos apenas na parte não-planar. Usando a parametrização de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}, \tag{2.103}$$

para combinar os denominadores em (2.101), obtemos

$$iM^{np} = \frac{\lambda^2}{4} \int_0^1 dx \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\cos(p\theta l)}{[l^2 + x(1-x)p^2 + m^2 - i\epsilon]}. \tag{2.104}$$

Realizando a integração nos momentos [47], teremos

$$iM^{np} = \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx K_0(\sqrt{\tilde{p}^2[m^2 - x(1-x)p^2 - i\epsilon]}), \tag{2.105}$$

onde K_0 é a função de Bessel modificada do segundo tipo. Vamos escolher $\theta^{01} = -\theta^{10} = \theta_E$ e $\theta^{23} = \theta^{32} = \theta_B$ e todas as outras componentes se anulam. Assim,

$$\tilde{p}^2 = \theta_E^2(p_0^2 - p_1^2) + \theta_B^2(p_2^2 + p_3^2). \tag{2.106}$$

No caso de termos apenas não-comutatividade espaciais a quantidade $\tilde{p}^2$ é positivo, mas para não-comutatividade no espaço-tempo $\tilde{p}^2$ pode ser negativo. Isto será de grande importância na análise da unitariedade. Mostraremos que a relação de unitariedade generalizada (2.97) é satisfeita para teorias magnéticas ($\theta^{0i} = 0$) e violada para as teorias elétricas ($\theta^{0i} \neq 0$). Inicialmente, vamos calcular a parte imaginária do gráfico de Feynman quando $p^2 > 0$ e $\tilde{p}^2 > 0$. Assim, usando que $ImK_0(-ix) = \frac{\pi}{2}J_0(x)$, onde J_0 é uma função de Bessel, obtemos

$$\begin{aligned} ImM^{np} &= \frac{\lambda^2}{64\pi} \int_{(1-\gamma)/2}^{(1+\gamma)/2} dx J_0(\sqrt{\tilde{p}^2}\sqrt{-m^2 + x(1-x)p^2}) \\ &= \frac{\lambda^2}{32\pi} \frac{\sin(\gamma\sqrt{p^2\tilde{p}^2}/2)}{\sqrt{p^2\tilde{p}^2}}, \end{aligned} \tag{2.107}$$

onde $\gamma = \sqrt{1 - \frac{4m^2}{p^2}}$.

Calculando a contribuição da integral referente ao lado direito da figura (2.2), temos

$$\sum |M^{np}|^2 = \frac{\lambda^2\gamma}{4(32\pi^2)} \int d\Omega \cos(p\theta k) = \frac{\lambda^2}{16\pi} \frac{\sin(\gamma\sqrt{p^2\tilde{p}^2}/2)}{\sqrt{p^2\tilde{p}^2}}. \tag{2.108}$$

Comparando os resultados, obtemos que a relação de unitariedade generalizada é satisfeita para $\tilde{p}^2 > 0$.

Agora vamos considerar o caso $\tilde{p}^2 < 0$. Da eq. (2.107) teremos

$$ImM^{np} = \frac{\lambda^2}{64\pi}\int_{(1-\gamma)/2}^{(1+\gamma)/2} dx J_0(\sqrt{|\tilde{p}^2|}\sqrt{m^2 + x(1-x)|p^2|}). \tag{2.109}$$

Esta integral não é nula. No entanto, o lado direito da figura (2.2) é zero por causa da conservação de energia-momento em (2.102) proibindo uma partícula com momento tipo espaço decair em duas partículas massivas na concha de massa. Portanto, quando $\tilde{p}^2 < 0$ a relação de unitariedade generalizada não é satisfeita. Os resultados obtidos são também mantidos para o caso das teorias de calibre não-comutativa. Isto ocorre porque a estrutura das integrais de Feynman é a mesma tanto na teoria escalar como na de calibre. Ambas as teorias tem fatores de fase oscilantes nas integrais. Estes fatores envolvendo a componente temporal se reflete na não-localidade no tempo e como conseqüência a função sofre um deslocamento da origem passando a contribuir em instantes diferentes. Isto implica na perda de informação e também da unitariedade.

2.4 Teoria de Calibre Não-Comutativa

Vamos nessa seção estudar o exemplo da teoria de calibre não-comutativa dada pela teoria de Yang-Mills não-comutativa. Na seção anterior, a construção de uma teoria de campo escalar clássica admite uma generalização direta para outras teorias com interações polinomiais contendo campos de férmions e escalares com um acoplamento tipo Yukawa[2]. No caso de teorias de calibres surgem peculiaridades.

2.4.1 Eletrodinâmica Quântica Não-comutativa

Para definir uma teoria de Yang-Mills no espaço-tempo não-comutativo, devemos generalizar o mapeamento (2.9). Assim, seja A_μ um campo de calibre sobre $\mathbb{R}^D$, que corresponde ao grupo de calibre unitário $U(N)$. Introduzimos o operador de Weyl hermitiano correspondente ao campo A_μ por

$$\hat{A}_\mu = \int d^D x \hat{\Delta}(x) \otimes A_\mu(x), \tag{2.110}$$

[2]Este é um acoplamento entre os campos de bósons (spin 0) e férmions (spin 1/2), e foi inicialmente introduzido para descrever a interação forte entre os núcleos via a troca de mésons.

onde $\hat{\Delta}(x)$ é definido em (2.9). A versão não-comutativa da ação de Yang-Mills pode ser escrita como

$$S[\hat{A}] = -\frac{1}{4e^2} Tr \otimes tr_N([\hat{\partial}_\mu, \hat{A}_\nu] - [\hat{\partial}_\nu, \hat{A}_\mu] - i[\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu])^2, \tag{2.111}$$

onde o termo em parêntese é o operador análogo ao tensor intensidade de campo. O operador Tr é o traço sobre os índices das coordenadas do espaço-tempo e tr_N é o traço sobre os índices de cores. A ação (2.111) é invariante pela transformação,

$$\hat{A}_\mu \to \hat{g}\hat{A}_\mu\hat{g}^\dagger - i\hat{g}[\hat{\partial}_\mu, \hat{g}], \tag{2.112}$$

onde $\hat{g}$ é um elemento unitário da álgebra de matrizes, isto é

$$\hat{g}\hat{g}^\dagger = \hat{g}^\dagger\hat{g} = \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}_N, \tag{2.113}$$

onde o símbolo $\mathbb{I}$ é a identidade na álgebra de Weyl e $\mathbb{I}_N$ é uma matriz unitária $N \times N$. Podemos reescrever a ação (2.111) no espaço das coordenadas utilizando as equações (2.110) e (2.13), obtemos

$$S[A] = -\frac{1}{4e^2} \int d^D x tr_N[F_{\mu\nu}(x) * F^{\mu\nu}(x)], \tag{2.114}$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i(A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu), \tag{2.115}$$

é o tensor intensidade de campo não-comutativo. Enfatizamos que mesmo no caso do grupo de calibre $U(1)$ temos uma estrutura do tipo não-abeliana devido apenas a não-comutatividade. Além disso, a teoria de Yang-Mills não-comutativa com simetria de grupo $U(1)$ contém os vértices de três e quatro pontos, e é assintoticamente livre no limite comutativo clássico $\theta \to 0$. A ação (2.114) é invariante sob a transformação unitária dada por

$$A_\mu(x) \to g(x) * A_\mu(x) * g(x)^\dagger - ig(x) * \partial_\mu g(x)^\dagger, \tag{2.116}$$

onde $g(x)$ é uma matriz unitária,

$$g(x) * g(x)^\dagger = g(x)^\dagger * g(x) = \mathbb{I}_N, \tag{2.117}$$

a expressão (2.117) é equivalente a condição de unitariedade (2.113).

Sob a lei de transformação (2.116), o campo de calibre $F_{\mu\nu}$ obedece a transformação dada por

$$F_{\mu\nu}(x) \to g(x) * F_{\mu\nu}(x) * g(x)^\dagger. \tag{2.118}$$

Vamos considerar agora a teoria de Yang-Mills não-comutativa (YMNC) $U(1)$ pura,

$$S[A] = -\frac{1}{4e^2}\int d^D x F_{\mu\nu}(x) * F^{\mu\nu}(x), \tag{2.119}$$

que é invariante sob a transformação de calibre acima com $g(x)^\dagger = g(x)^{-1}$ e utilizando a propriedade de ciclicidade do produto estrela sob o sinal de integração a invariância é demonstrada, como segue

$$S[A] \to S[A] = -\frac{1}{4e^2}\int d^D x g(x) * F_{\mu\nu}(x) * g(x)^{-1} * g(x) * F^{\mu\nu}(x) * g(x)^{-1}, \tag{2.120}$$

onde

$$g(x) = \left(e^{i\lambda(x)}\right)_* \equiv 1 + i\lambda(x) - \frac{1}{2}\lambda(x) * \lambda(x) + ... \tag{2.121}$$

contém uma série infinita do produto estrela da função escalar $\lambda(x)$.

O caráter não-abeliano da teoria de YMNC $U(1)$ é uma conseqüência do produto estrela, isto é

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]_*. \tag{2.122}$$

Efetuando o cálculo do comutador Moyal no espaço dos momentos obtemos

$$\begin{aligned}
[A_\mu, A_\nu]_* &= A_\mu * A_\nu - A_\nu * A_\mu, \\
&= \int dp_1 dp_2 \left(e^{ip_1\theta p_2} - e^{-ip_1\theta p_2}\right) e^{i(p_1+p_2)x} \tilde{A}_\mu(p_1)\tilde{A}_\nu(p_2), \\
&= \int dp_1 dp_2 2i\sin(p_1\theta p_2) e^{i(p_1+p_2)x} \tilde{A}_\mu(p_1)\tilde{A}_\nu(p_2).
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Por conseguinte, a constante de estrutura é substituída pelo fator de fase trigonométrico dependente do momento $2i\sin(p_1\theta p_2)$, e a característica não-abeliana da teoria YMNC $U(1)$ é um efeito puramente geométrico.

Nesta seção temos considerado apenas as teorias de calibre não-comutativa com simetria do grupo de calibre $U(N)$, que reproduz as teorias ordinárias no limite clássico $\theta \to 0$. Para outros grupos de calibre, por exemplo o grupo especial unitário $SU(N)$ foi mostrado na referência [35], que esta construção não pode ser realizada sobre um espaço plano não-comutativo. A álgebra do grupo unitário $U(N)$ é fechada sob o produto estrela, isto é, o produto de dois campos de matrizes unitárias é um campo de matriz unitária. Além disso, o grupo especial unitário $SU(N)$ não é fechado com relação ao produto estrela, pois em geral temos

$$\det(g) * \det(h) \neq \det(g * h). \tag{2.124}$$

Na decomposição,

$$U(N) = U(1) \otimes SU(N), \tag{2.125}$$

os setores $U(1)$ e $SU(N)$ não desacoplam no caso não-comutativo, devido a interação do fóton $U(1)$ com o gluon $SU(N)$ [9].

Em analogia com o caso comutativo, a versão não-comutativa do acoplamento do campo de matéria com o campo de calibre, é dada pela ação

$$S[A, \bar{\psi}, \psi] = \int d^D(\bar{\psi}\gamma^\mu * D_\mu\psi - m\bar{\psi} * \psi), \tag{2.126}$$

onde as derivadas covariantes são

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) &= \partial_\mu\psi(x) - ieA_\mu(x) * \psi(x), \\ D_\mu\bar{\psi}(x) &= \partial_\mu\bar{\psi}(x) + ie\bar{\psi}(x) * A_\mu(x). \end{aligned} \tag{2.127}$$

As leis de transformação para os campos fermiônicos que definem as derivadas covariantes acima são

$$\psi(x) \to g(x) * \psi(x), \tag{2.128}$$

e

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x) * g(x)^{-1}. \tag{2.129}$$

Na representação adjunta, temos as seguintes leis de transformação para os campos de férmions

$$\psi(x) \to g(x) * \psi(x) * g(x)^{-1}, \tag{2.130}$$

e

$$\bar{\psi}(x) \to g(x) * \bar{\psi}(x) * g(x)^{-1}, \tag{2.131}$$

que definem as derivadas covariantes,

$$\begin{aligned} D_\mu\psi(x) &= \partial_\mu\psi(x) - ie[A_\mu(x), \psi(x)]_*, \\ D_\mu\bar{\psi}(x) &= \partial_\mu\bar{\psi}(x) + ie[\bar{\psi}(x), A_\mu(x)]_*. \end{aligned} \tag{2.132}$$

A ação completa é dada por

$$S[A, \bar{\psi}, \psi] = S_{YM}[A] + S_{\text{férmions}}[A, \bar{\psi}, \psi], \tag{2.133}$$

Portanto, uma extensão da eletrodinâmica quântica ordinária é dada pelo acoplamento do campo de calibre unitário não-comutativo $U(1)$ com o campo de férmions.

Capítulo 3

Campo Escalar Acoplado com o Campo de Chern-Simons em $(2+1)D$

As teorias de campos contendo o termo Chern-Simons (CS), tem sido bastante estudadas na literatura e constituem uma ferramenta útil para o entendimento de fenômenos interessantes na física da matéria condensada tais como o efeito Hall fracionário [36], a supercondutividade com alta temperatura crítica [37] e o efeito Aharonov-Bohm [18, 21, 22, 38, 39].

O efeito Aharonov-Bohm (AB) diz respeito a mudança que ocorre no padrão de interferência no experimento de fenda dupla, devido a presença de um solenoide longo e fino localizado entre as duas fendas [40]. Embora, o campo magnético $\vec{B}$ esteja presente apenas dentro do solenoide, a equação de Schrödinger correspondente depende explicitamente do potencial magnético $\vec{A}$ (não nulo fora do solenoide). Portanto, a função de onda depende do potencial $\vec{A}$ e conseqüentemente ocorrem mudanças no padrão de interferência. O efeito AB que é essencialmente o espalhamento de partículas carregadas por um tubo de fluxo, pode ser simulado em teoria quântica de campos em 2+1 dimensões pela interação de duas partículas carregadas com o campo de Chern-Simons.

No estudo do espalhamento AB abeliano em mecânica quântica, feito por meio de um tratamento perturbativo para o caso abeliano, a aproximação de Born falha em reproduzir a expansão do resultado exato [16]. Por outro lado, num tratamento perturbativo em teoria de campos não-relativística descrevendo partículas com spin zero interagindo com o campo de Chern-Simons abeliano foi mostrado que para eliminar as divergências e concordar com a expansão do resultado exato, é necessário adicionar uma interação quártica [18]. Para o caso não-abeliano desse modelo, uma análise

perturbativa foi aplicada e, como no caso abeliano, também devemos adicionar uma interação quártica [22, 21] à lagrangeana que descreve o sistema.

O nosso objetivo neste trabalho é fazer um tratamento perturbativo até ordem de um laço para a versão não-comutativa da teoria de campo escalar não-relativística em 2+1 dimensões acoplada com o campo de Chern-Simons. Recentemente, no contexto da mecânica quântica, foi aplicado um tratamento perturbativo até ordem θ no parâmetro não-comutativo para o efeito Aharonov-Bohm não-comutativo [24]. É interessante argumentar que o padrão de interferência pode aparecer até mesmo quando o fluxo magnético é quantizado e a seção de choque é diferente de zero quando o fluxo magnético é quantizado, contrário ao caso comutativo.

No nosso estudo usando a teoria quântica de campos, pretendemos verificar se o resultado obtido na teoria comutativa para o efeito AB são mantidos ou não no espaço não-comutativo. Como o limite $\theta \to 0$ é em geral singular é possível que exista contribuições que não podem ser obtidas através do procedimento de [24].

3.1 O Modelo Não-Abeliano Não-Relativístico

Iniciamos com a análise perturbativa, até ordem de um laço, de um modelo para partículas escalares não-relativísticas, com um índice de simetria interna, acoplado minimamente com o campo de Chern-Simons não-abeliano. Em [21] os autores mostraram que para obter uma teoria invariante de escala e o resultado em concordância com o cálculo exato do efeito AB, foi necessário introduzir uma interação de quártica semelhante ao que acontece no caso abeliano. Esse modelo é descrito pela ação

$$\begin{aligned} S[A,\phi] &= \int d^3x \left[-\kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda} tr\left(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{2ig}{3} A_\mu A_\nu A_\lambda \right) - \frac{1}{\xi} tr(\nabla \mathbf{A})^2 + i\phi^\dagger D_t \phi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2m} (\mathbf{D}\phi)^\dagger (\mathbf{D}\phi) - \frac{1}{4} \phi^\dagger_{n'} \phi^\dagger_{m'} C_{n'm'nm} \phi_n \phi_m + tr(\bar{c}\nabla^2 c + ig\nabla\bar{c}[\mathbf{A}, c]) \right], \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde ϕ é um campo complexo transformando-se de acordo com a representação fundamental do grupo de calibre $SU(n)$ gerado pelas matrizes T^a com $a = 1, 2, ...N = n^2 - 1$, e $A_\mu \equiv A^a_\mu T^a$ e $D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$. As matrizes T^a satisfazem a álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = f_{abc} T^c, \tag{3.2}$$

e são normalizadas por

$$tr(T^a T^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{3.3}$$

O termo de interação de contato descreve uma interação do tipo função-δ entre as partículas. Como as partículas são bosônicas, podemos assumir que

$$C_{n'm'nm} = C_{m'n'mn}. \tag{3.4}$$

Por simplicidade de notação no cálculo da amplitude de espalhamento vamos abstrair os índices de matéria. Considerando uma matriz $\mathcal{A}(\varphi) = -i\mathcal{M}(\varphi)$, de modo que a amplitude de espalhamento será dada por

$$\mathcal{A} = \langle n', m'|\mathcal{A}(\varphi)|n, m\rangle + \langle m', n'|\mathcal{A}(\varphi + \pi)|n, m\rangle, \tag{3.5}$$

onde φ é o ângulo de espalhamento. Assim,

$$C_{n'm'nm} = \langle n', m'|C|n, m\rangle, \tag{3.6}$$

$$(T^a)_{n'n}(T^b)_{m'm} = \langle n', m'|T^a \otimes T^b|n, m\rangle, \tag{3.7}$$

$$C^2_{n'm'nm} = \sum_{l,l'}\langle n', m'|C|l, l'\rangle\langle l, l'|C|n, m\rangle, \tag{3.8}$$

e da invariância da ação sobre as transformações do grupo $SU(n)$ temos uma restrição adicional sobre a forma de C,

$$[C \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T_a, C] = 0. \tag{3.9}$$

Pelo lema de Schur,

$$T^2 \equiv T_a T^a \propto \mathbb{I}, \tag{3.10}$$

e

$$[T^2 \otimes \mathbb{I}, C] = [\mathbb{I} \otimes T^2, C] = 0, \tag{3.11}$$

usando a identidade,

$$T^a \otimes T_a = \frac{1}{2}(T \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes T) - \frac{1}{2}T^2 \otimes \mathbb{I} - \frac{1}{2}\mathbb{I} \otimes T^2, \tag{3.12}$$

obtemos

$$[T^a \otimes T_a, C] = 0. \tag{3.13}$$

A forma de C mais geral invariante de calibre é obtida usando uma base que diagonaliza simultaneamente $T^a \otimes T_a$.

Por conveniência, todos os cálculos serão feitos no calibre de Coulomb obtido no limite de $\xi \to 0$. As regras de Feynman, representadas graficamente na figura (3.5), são:
(i) O propagador do campo de matéria:

$$D(p)_{nm} = D(p)\delta_{nm} = \frac{i}{p_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon}\delta_{nm}, \tag{3.14}$$

(ii) O propagador do campo fantasma:

$$G(p)_{ba} = G(p)\delta_{ba} = -\frac{i}{\mathbf{p}^2}\delta_{ba}, \tag{3.15}$$

(iii) O propagador do gluon:

$$D_{\mu\nu}(k)_{ba} = D_{\mu\nu}(k)\delta_{ba} = \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\bar{k}^{\lambda}}{\kappa\mathbf{k}^2}\delta_{ba}, \tag{3.16}$$

onde $\bar{k}^{\lambda}=(0,\mathbf{k})$.
(iv) As expressões analíticas associadas com os vértices são:

$$\Gamma^{a,0}_{nm}(p,p') = -ig(T^a)_{nm}, \tag{3.17}$$

$$\Gamma^{a,i}_{n,m}(p,p') = \frac{ig}{2m}(p+p')^i(T^a)_{nm}, \tag{3.18}$$

$$\Gamma^{i}_{fantasma}(p,p') = -igf^{abc}(p')^i, \tag{3.19}$$

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda}(p,p') = -g\kappa f^{abc}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}, \tag{3.20}$$

$$\Gamma^{ab,ij}_{nm}(p,p') = -\frac{ig^2}{m}[T^aT^b + T^bT^a]_{nm}\delta^{ij}, \tag{3.21}$$

$$\Gamma_{m'n'mn}(p,p') = -\frac{i}{2}C_{m'n'mn}. \tag{3.22}$$

Note que o denominador no propagador do campo de calibre é linear na energia. Assim, temos apenas uma propagação para frente no tempo. Como não existe uma dependência em k_0, o propagador no espaço das coordenadas é instantâneo no tempo e é um sinal que a partícula envolvida é apenas virtual.

Analisaremos agora a função de quatro pontos associadas com o espalhamento de duas partículas idênticas no sistema do centro de massa (c.m.). Antes de calcularmos a amplitude de espalhamento, verificaremos que não existem correções, pelo menos até ordem de um laço, para o propagador do gluon. Já sabemos da teoria abeliana que não existem correções para o propagador do bóson, e o propagador do campo fantasma não contribui para a função de quatro pontos de bósons em um laço.

A correção de um laço para a função de dois pontos do campo A_μ, figura (3.2), é dada pelo tensor de polarização contendo duas contribuições

1. Advinda do gráfico com vértices trilineares do campo de calibre:

$$\Pi_{ij}^{ab,G}(p) = -\frac{g^2}{2} f^{acd} f^{b}_{cd} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\gamma l}\varepsilon_{j\gamma\delta}\varepsilon^{\delta\beta n}(p+k)_l k_n}{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2\mathbf{k}^2}, \tag{3.23}$$

usando que

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\nu\rho} = \delta^{\mu}_{\nu}\delta^{\alpha}_{\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}\delta^{\alpha}_{\nu}, \tag{3.24}$$

no cálculo acima, obtemos

$$\Pi_{ij}^{ab,G}(p) = g^2 f^{acd} f^{b}_{cd} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(p+k)_i k_j}{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2\mathbf{k}^2}. \tag{3.25}$$

2. Advinda do gráfico com vértices contendo o campo fantasma:

$$\Pi_{ij}^{ab,F}(p) = -g^2 f^{acd} f^{b}_{cd} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{(p+k)_i k_j}{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2\mathbf{k}^2}. \tag{3.26}$$

Portanto, até um laço mostramos que as duas contribuições quando somadas se cancelam, isto é, não temos correções radiativas para a auto-energia, associado ao setor de *calibre puro*.

$$\Pi_{ij}(p) = \Pi_{ij}^{ab,G}(p) + \Pi_{ij}^{ab,F}(p) = 0. \tag{3.27}$$

Os gráficos relevantes para o espalhamento à nível de árvore são representados graficamente na figura (3.8), e a amplitude de espalhamento é dada por

$$\mathcal{A}^0(\varphi) = -\frac{2\pi i\Omega}{m}\left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] - \frac{C}{2}, \tag{3.28}$$

onde estamos usando a notação da referência [21]

$$\Omega = -\frac{g^2}{2\pi\kappa} T^a \otimes T^a, \tag{3.29}$$

$$\Omega^2 = \frac{g^4}{4\pi^2\kappa^2} T^a T^b \otimes T_a T_b. \tag{3.30}$$

O segundo termo na equação (3.28) corresponde ao gráfico cruzado, onde os estados da partícula final são permutados. A amplitude total à nível de árvore é

$$\mathcal{A}^0(\varphi) = -\frac{4\pi i\Omega}{m}\cot\varphi - \frac{C}{2}. \tag{3.31}$$

O resultado no caso abeliano é recuperado se considerarmos $T = \frac{i}{\sqrt{2}}$ e $g = \sqrt{e}$. Isto é,

$$\mathcal{A}^0_{\text{abeliano}}(\varphi) = -\frac{2ie^2}{m\kappa}\cot\varphi - \frac{C}{2}. \tag{3.32}$$

Os gráficos contribuindo para a amplitude de espalhamento em um laço são ilustrados na figura (3.9). Por contagem de potência os gráficos são logaritmicamente divergente. Entretanto, o diagrama caixa, figura (3.9d), dá um resultado finito. Para regularizar estas divergências usamos regularização por corte. O gráfico (3.9b) não existe na teoria abeliana, e a sua contribuição será essencial para cancelar as divergências. As contribuições destes gráficos, após realizarmos as integrações em k_0, são

1. Para o gráfico triângulo, figura (3.9a):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}(T^aT^b+T^bT^a)\otimes(T_aT_b)\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}+(\mathbf{p}'\to-\mathbf{p}') \\ &= \frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}[f^{abc}T_c\otimes(T_aT_b)]\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)-2\ln(2\sin\varphi)\right] \\ &\quad -\frac{2\pi\Omega^2}{m}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)-2\ln(2\sin\varphi)\right], \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde $\mathbf{q}=\mathbf{p}-\mathbf{p}'$. Usamos na expressão acima que

$$T^aT^b+T^bT^a=2T^aT^b-[T^a,T^b]=2T^aT^b-f^{abc}T_c. \tag{3.34}$$

2. Para o gráfico com três gluons, figura (3.9b):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b(\varphi) &= -\frac{g^4}{2m\kappa^2}f_{abc}T^a\otimes(T^bT^c)\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right]+(\mathbf{p}'\to-\mathbf{p}') \\ &= -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}[f^{abc}T_c\otimes(T_aT_b)]\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)-2\ln(2\sin\varphi)+1\right]. \end{aligned} \tag{3.35}$$

3. Para o gráfico da interação quártica, figura (3.9c):

$$\mathcal{A}_c(\varphi) = \frac{mC^2}{2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{1}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}=\frac{mC^2}{8\pi}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)+i\pi\right]. \tag{3.36}$$

4. Para o gráfico caixa, figura (3.9d):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_d(\varphi) &= \frac{16\pi^2\Omega^2}{m}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}'\wedge\mathbf{k})}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}')^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}+(\mathbf{p}'\to-\mathbf{p}') \\ &= -\frac{2\pi\Omega^2}{m}[\ln(2\sin\varphi)+i\pi]. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Observe que a contribuição divergente de $\mathcal{A}_b(\varphi)$ cancela com a primeira parte divergente de $\mathcal{A}_a(\varphi)$. Portanto, a menos de um termo constante em $\mathcal{A}_b(\varphi)$ que pode ser absorvido em C, a amplitude de espalhamento total em um laço é dada por

$$\mathcal{A}(\varphi)=\frac{m}{8\pi}\left(C^2-\frac{16\pi^2\Omega^2}{m^2}\right)\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)+i\pi\right]. \tag{3.38}$$

Podemos renormalizar esta amplitude, redefinindo a constante de acoplamento C da seguinte forma:

$$\begin{aligned} C &= \mathcal{C} - \delta\mathcal{C}, \\ \delta\mathcal{C} &= \frac{m}{4\pi}\left(\mathcal{C}^2 - \frac{16\pi^2\Omega^2}{m^2}\right)\ln\left(\frac{\Lambda}{\mu}\right) + O(\mathcal{C}^3, \Omega^4), \end{aligned} \tag{3.39}$$

e a amplitude total renormalizada é dada por [1]

$$\mathcal{A}(\varphi) = -\frac{4\pi i\Omega}{m}\cot\varphi - \frac{\mathcal{C}}{2} + \frac{m}{8\pi}\left(\mathcal{C}^2 - \frac{16\pi^2\Omega^2}{m^2}\right)\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\mathbf{p}^2}\right) + i\pi\right]. \tag{3.40}$$

Como podemos ver, esta amplitude não é invariante de escala pois tem uma dependência com uma escala de massa μ arbitrária. Portanto, no ponto crítico,

$$\mathcal{C} = \pm\frac{4\pi\Omega}{m}, \tag{3.41}$$

o termo dependente da escala anula-se, restaurando a invariância de escala e assim não temos correções em um laço para o espalhamento de AB na teoria comutativa não-relativística. Além disso, as interações quárticas são importantes para uma teoria de perturbação renormalizável, embora não contribua no tratamento exato. Em mecânica quântica, a equação de Schrödinger exige uma condição física na forma de uma condição de fronteira sobre a função de onda plana para obter uma solução exata. No entanto, esta condição não pode ser imposta no tratamento perturbativo e seu conteúdo físico é incluído na forma de uma interação de contato. A escolha do sinal superior (+) no ponto crítico (3.41), corresponde a uma auto-interação quártica repulsiva e o resultado perturbativo em um laço concorda até segunda ordem com a solução exata.

3.2 A Teoria de Chern-Simons Não-Comutativa

Nesta seção, analisaremos perturbativamente a teoria de Chern-Simons não-comutativa no calibre de Coulomb até a ordem de um laço. Considerações perturbativas dessa teoria tem sido, até agora, feitas no calibre covariante [42, 43] e axial [44]. A teoria CS pura é conhecida ser uma teoria topológica (nos casos comutativo e não-comutativo). Também é conhecido que a teoria não-abeliana sem acoplamento com campos de matéria (apenas incluindo os termos de CS, fixação de calibre e de Fadeev-Popov), no caso

[1] Em [21] os autores usaram uma regularização dimensional.

comutativo, é completamente livre. Para o calibre de Coulomb isso foi mostrado na referência [45]. Um dos nossos objetivos é verificar se o mesmo acontece para a versão não-comutativa do modelo.

A versão não-comutativa da teoria CS com simetria $U(1)$ é definida pela ação

$$S_{CSNC}[A] = \int d^3x \frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(A_\mu * \partial_\nu A_\lambda + \frac{2ig}{3}A_\mu * A_\nu * A_\lambda\right). \tag{3.42}$$

Aqui o campo dinâmico é o potencial de calibre A_μ e κ a constante de acoplamento Chern-Simons. A ação (3.42) é invariante sob a transformação de calibre infinitesimal

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu\lambda + ig(\lambda * A_\mu - A_\mu * \lambda) = D_\mu\lambda, \tag{3.43}$$

com $\lambda(x)$ sendo uma função arbitrária. Para uma transformação de calibre finita, a ação muda por uma constante e a invariância da teoria exige que o coeficiente da ação CS seja quantizado.

A ação completa no calibre de Coulomb e incluindo os campos fantasmas é

$$S[A, c, \bar{c}] = S_{CSNC}[A] + S_{FG}[A] + S_{GH}[c, \bar{c}], \tag{3.44}$$

onde

$$S_{FG}[A] = -\int d^3x \frac{1}{2\xi}\partial_i A^i * \partial_j A^j, \tag{3.45}$$

$$S_{GH}[c, \bar{c}] = \int d^3x \partial^i \bar{c} * D_i c, \tag{3.46}$$

e D_i $(i = 1, 2)$ é a derivada covariante:

$$D_i c = \partial_i c + ig[A_i, c]. \tag{3.47}$$

As regras de Feynman, representadas graficamente na figura (3.1), são
(i) O propagador do gluon: no limite $\xi \to 0$ é

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\bar{k}^\lambda}{\kappa \mathrm{k}^2}. \tag{3.48}$$

(ii) O propagador do campo fantasma:

$$G(p) = -\frac{i}{\mathrm{p}^2}. \tag{3.49}$$

(iii) O vértice fantasma-fantasma-gluon:

$$\Gamma^i_{fantasma}(p, p') = -2gp'^i \sin(p\theta p'). \tag{3.50}$$

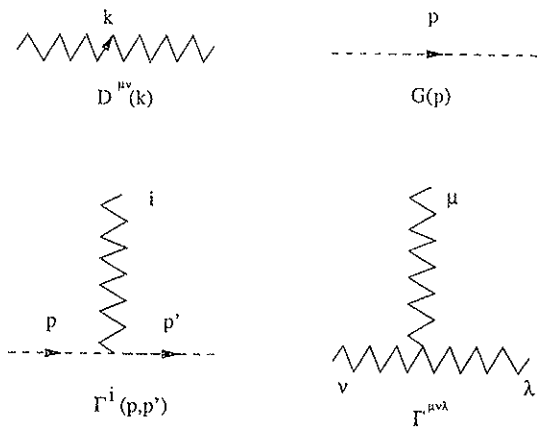


Figura 3.1: Regras de Feynman - Teoria Chern-Simons Não-Comutativa.

(iv) O vértice de três gluons:

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda} = 2ig\kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\sin(k_1\theta k_2). \tag{3.51}$$

Com o objetivo de verificar se temos ou não correções radiativas para a auto-energia, em um laço, no caso não-comutativo da teoria *CS pura no calibre de Coulomb*, iremos calcular a função de dois, três e quatro pontos como segue

3.2.1 Cálculo da Função de Dois Pontos

A correção de um laço para a função de dois pontos do campo A_μ, figura (3.2), é dada pelo tensor de polarização que tem duas contribuições

1. Advinda do gráfico com vértices trilineares do campo de calibre:

$$\Pi^G_{ij}(p) = -2g^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{\varepsilon_{i\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\gamma l}\varepsilon_{j\gamma\delta}\varepsilon^{\delta\beta n}(p+k)_l k_n}{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2\mathbf{k}^2}\sin^2(p\theta k), \tag{3.52}$$

usando que

$$\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\varepsilon_{\beta\nu\rho} = \delta^\mu_\nu\delta^\alpha_\rho - \delta^\mu_\rho\delta^\alpha_\nu, \tag{3.53}$$

no cálculo acima, obtemos

$$\Pi^G_{ij}(p) = 4g^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{(p+k)_i k_j}{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2\mathbf{k}^2}\sin^2(p\theta k). \tag{3.54}$$

2. Advinda do gráfico com vértices contendo o campo fantasma:

$$\Pi^F_{ij}(p) = -4g^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{(p+k)_i k_j}{(\mathbf{p}+\mathbf{k})^2\mathbf{k}^2}\sin^2(p\theta k). \tag{3.55}$$

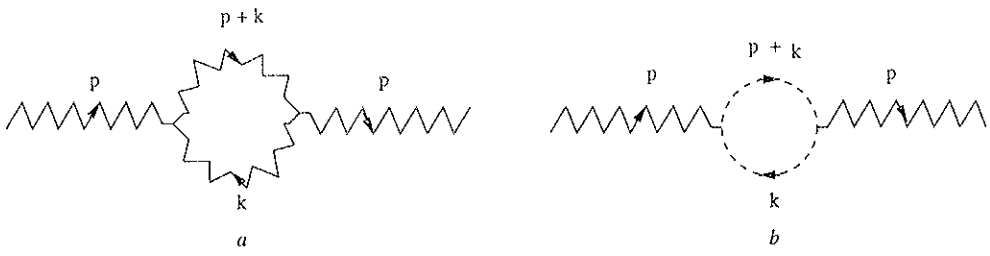


Figura 3.2: Função de dois pontos do campo de calibre.

Portanto, até um laço mostramos que as duas contribuições quando somadas se cancelam, isto é, não temos correções radiativas para a auto-energia, associado ao setor de *calibre puro*.

$$\Pi_{ij}(p) = \Pi^{G}_{ij}(p) + \Pi^{F}_{ij}(p) = 0. \tag{3.56}$$

3.2.2 Cálculo da Função de Três Pontos

A função de três pontos $\langle TA^{\mu}A^{\nu}A^{\rho}\rangle$ calculada quando um dos índices μ, ν, ρ assume valor 0 é identicamente nula. Neste caso, a contribuição é diferente de zero quando, todos os índices acima são espaciais $(i_1, i_2, i_3 = 1, 2)$. Então, a contribuição para a função de três pontos $\langle TA^{i_1}A^{i_2}A^{i_3}\rangle = V^{i_1 i_2 i_3}(a; p_1, p_2, p_3)$ proveniente do gráfico $(3.3a)$ com linha interna gluônica é dada analiticamente por

$$\begin{aligned} V^{i_1 i_2 i_3}(a; p_1, p_2, p_3) &= \frac{8}{3!} ig^3 \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon^{i_1\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\gamma j}\epsilon^{i_2\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\sigma l}\varepsilon^{i_3\lambda\sigma}\varepsilon_{\lambda\beta k} q_1^j q_2^l q_3^k}{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2\mathbf{q}_3^2} \\ &\quad \times \sin(q_1\theta q_2)\sin(q_2\theta q_3)\sin(q_3\theta q_1) \\ &= \frac{8}{3!} ig^3 \int \frac{d^3q_1}{(2\pi)^3} \frac{(q_1^{i_1}q_2^{i_2}q_3^{i_3} + q_1^{i_2}q_2^{i_3}q_3^{i_1})}{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2\mathbf{q}_3^2} \\ &\quad \times \sin(q_1\theta q_2)\sin(q_2\theta q_3)\sin(q_3\theta q_1), \end{aligned} \tag{3.57}$$

onde usamos a propriedade (3.53) e, por simplicidade nos cálculos, definimos (veja o gráfico $(3.3a)$)

$$q_3 = q_1 + p_1, \tag{3.58}$$

$$q_2 = q_1 - p_2. \tag{3.59}$$

Pela conservação dos momentos temos,

$$q_2 = q_1 + p_1 + p_3. \tag{3.60}$$

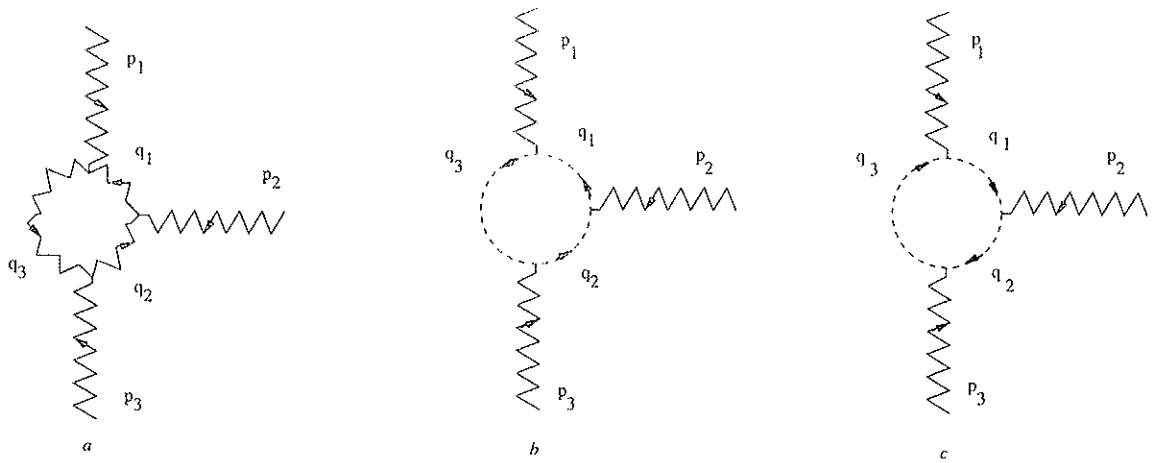


Figura 3.3: Função de três pontos do campo de calibre.

Por outro lado, a representação analítica para o gráfico (3.3*b*) com linha interna de campo fantasma é

$$V^{i_1 i_2 i_3}(b; p_1, p_2, p_3) = -\frac{8}{3!} i g^3 \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{q_1^{i_1} q_2^{i_2} q_3^{i_3}}{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2 \mathbf{q}_3^2} \sin(q_1 \theta q_2) \sin(q_2 \theta q_3) \sin(q_3 \theta q_1), \qquad (3.61)$$

onde

$$\begin{aligned} q_3 &= q_1 + p_1, \\ q_2 &= q_1 + p_1 + p_3. \end{aligned} \qquad (3.62)$$

Para o gráfico (3.3*c*) temos,

$$V^{i_1 i_2 i_3}(c; p_1, p_2, p_3) = -\frac{8 i g^3}{3!} \int \frac{d^3 q_1'}{(2\pi)^3} \frac{q_1'^{i_1} q_2'^{i_2} q_3'^{i_3}}{\mathbf{q}_1'^2 \mathbf{q}_2'^2 \mathbf{q}_3'^2} \sin(q_1' \theta q_2') \sin(q_2' \theta q_3') \sin(q_3' \theta q_1'), \qquad (3.63)$$

e definimos

$$\begin{aligned} q_2' &= q_1' + p_1, \\ q_3' &= q_1' + p_1 + p_3. \end{aligned} \qquad (3.64)$$

Afim de compararmos os gráficos (3.3*a*) com (3.3*b*) e (3.3*c*), vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$q_1 = -q_1' - p_1. \qquad (3.65)$$

Então,

$$V^{i_1 i_2 i_3}(c; p_1, p_2, p_3) = -\frac{8 i g^3}{3!} \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{q_1^{i_2} q_2^{i_3} q_3^{i_1}}{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2 \mathbf{q}_3^2} \sin(q_1 \theta q_2) \sin(q_2 \theta q_3) \sin(q_3 \theta q_1). \qquad (3.66)$$

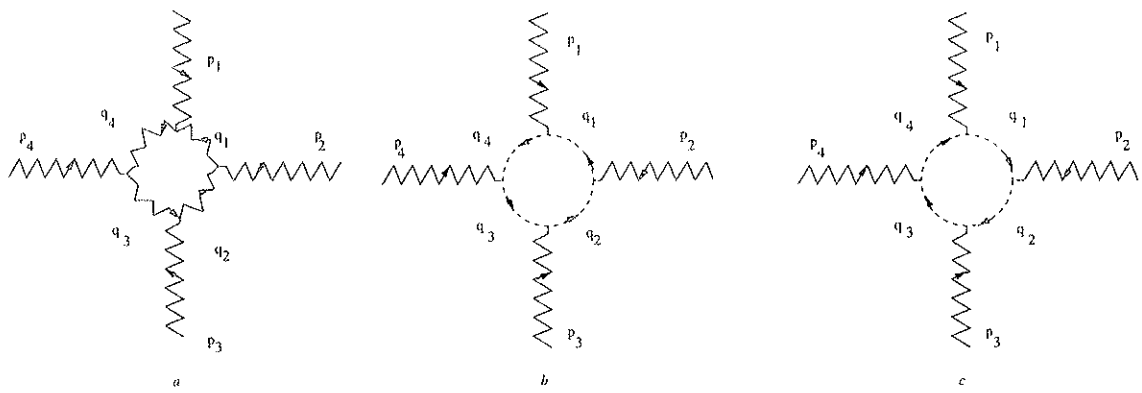


Figura 3.4: Função de quatro pontos do campo de calibre.

Portanto, o resultado final é identicamente nulo e assim não temos correções radiativas para a função de três pontos.

$$V^{i_1 i_2 i_3}(a;p_1,p_2,p_3)+V^{i_1 i_2 i_3}(b;p_1,p_2,p_3)+V^{i_1 i_2 i_3}(c;p_1,p_2,p_3)=0. \tag{3.67}$$

3.2.3 Cálculo da Função de Quatro Pontos

Analogamente ao caso anterior, a função de quatro pontos contendo o propagador do campo de gluon, gráfico $(3.4a)$, é

$$\begin{aligned} V^{i_1 i_2 i_3 i_4}(a;p_1,p_2,p_3,p_4) &= \frac{16}{4!}ig^3\int\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{\varepsilon^{i_1\alpha\beta}\varepsilon_{\alpha\gamma j}\varepsilon^{i_2\delta\gamma}\varepsilon_{\delta\sigma l}\varepsilon^{i_3\lambda\sigma}\varepsilon_{\lambda\xi n}\varepsilon^{i_4\nu_1\xi}\varepsilon_{\nu_1\beta s}q_1^j q_2^l q_3^n q_4^s}{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2\mathbf{q}_3^2\mathbf{q}_4^2} \\ &\quad\times\sin(q_1\theta q_2)\sin(q_2\theta q_3)\sin(q_3\theta q_4)\sin(q_4\theta q_1) \\ &= \frac{16}{4!}ig^3\int\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{(q_1^{i_1}q_2^{i_2}q_3^{i_3}q_4^{i_4}+q_1^{i_2}q_2^{i_3}q_3^{i_4}q_4^{i_1})}{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2\mathbf{q}_3^2\mathbf{q}_4^2} \\ &\quad\times\sin(q_1\theta q_2)\sin(q_2\theta q_3)\sin(q_3\theta q_4)\sin(q_4\theta q_1), \end{aligned} \tag{3.68}$$

com as seguintes definições

$$\begin{aligned} q_4 &= q_1+p_1, \\ q_3 &= q_1+p_1+p_4, \\ q_2 &= q_1+p_1+p_3+p_4. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Para o gráfico $(3.4b)$ contendo o propagador vindo do campo fantasma temos

$$\begin{aligned} V^{i_1 i_2 i_3 i_4}(b;p_1,p_2,p_3,p_4) &= \frac{16ig^3}{4!}\int\frac{d^3q_1}{(2\pi)^3}\frac{q_1^{i_1}q_2^{i_2}q_3^{i_3}q_4^{i_4}}{\mathbf{q}_1^2\mathbf{q}_2^2\mathbf{q}_3^2\mathbf{q}_4^2}\sin(q_1\theta q_2)\sin(q_2\theta q_3) \\ &\quad\times\sin(q_3\theta q_4)\sin(q_4\theta q_1), \end{aligned} \tag{3.70}$$

e para o gráfico (3.4c), definimos

$$\begin{aligned} q_2' &= q_1' + p_1, \\ q_3' &= q_1' + p_1 + p_2, \\ q_4' &= q_1' + p_1 + p_2 + p_3. \end{aligned} \tag{3.71}$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{aligned} V^{i_1 i_2 i_3 i_4}(c; p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\frac{16}{4!} i g^3 \int \frac{d^3 q_1'}{(2\pi)^3} \frac{(q_1')^{i_1}(q_2')^{i_2}(q_3')^{i_3}(q_4')^{i_4}}{(\mathbf{q}_1')^2(\mathbf{q}_2')^2(\mathbf{q}_3')^2(\mathbf{q}_4')^2} \sin(q_1'\theta q_2') \\ &\quad \times \sin(q_2'\theta q_3') \sin(q_3'\theta q_4') \sin(q_4'\theta q_1'). \end{aligned} \tag{3.72}$$

Como feito anteriormente devemos fazer a mudança de variável

$$q_1 = -q_1' - p_1. \tag{3.73}$$

Assim, a expressão torna-se

$$\begin{aligned} V^{i_1 i_2 i_3 i_4}(c; p_1, p_2, p_3, p_4) &= -\frac{16}{4!} i g^3 \int \frac{d^3 q_1}{(2\pi)^3} \frac{q_1^{i_2} q_2^{i_3} q_3^{i_4} q_4^{i_1}}{\mathbf{q}_1^2 \mathbf{q}_2^2 \mathbf{q}_3^2 \mathbf{q}_4^2} \sin(q_1\theta q_2) \sin(q_2\theta q_3) \\ &\quad \times \sin(q_3\theta q_4) \sin(q_4\theta q_1), \end{aligned} \tag{3.74}$$

e o resultado final também é nulo

$$V^{i_1 i_2 i_3 i_4}(a; p_1, p_2, p_3, p_4) + V^{i_1 i_2 i_3 i_4}(b; p_1, p_2, p_3, p_4) + V^{i_1 i_2 i_3 i_4}(c; p_1, p_2, p_3, p_4) = 0. \tag{3.75}$$

Portanto, mostramos explicitamente que a teoria CSNC no calibre de Coulomb, até a função de quatro pontos em ordem de um laço, não apresenta correções radiativas e nenhuma regularização é necessária para as divergências ultravioleta e infravermelha. Para um número maior de pontos ($n > 4$) o produto tensorial entre os $\varepsilon_{\mu\nu\alpha}$ não é trivial. Assim, esperamos que este resultado seja mantido para a função de n-pontos. Foi mostrado na referência [46] a equivalência quântica entre as teorias de Chern-Simons comutativa e não-comutativa para todas as ordens em teoria de perturbação.

3.3 O Modelo Não-Comutativo Não-Relativístico

A versão não-comutativa da ação clássica e não-relativística para o campo de spin zero acoplado com o termo CS e com a interação de contato é dada por [25]

$$\begin{aligned} S[A,\phi] &= \int d^3x \left[\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \frac{2ig}{3}A_\mu * A_\nu * A_\lambda\right) - \frac{1}{2\xi}\partial_i A^i \partial_j A^j \right. \\ &+ i\phi^\dagger * D_t\phi - \frac{1}{2m}(\mathbf{D}\phi)^\dagger * (\mathbf{D}\phi) - \frac{\lambda_1}{8}[\phi,\phi^\dagger] * [\phi,\phi^\dagger] \\ &\left. - \frac{\lambda_2}{8}\{\phi,\phi^\dagger\} * \{\phi,\phi^\dagger\} + \partial^i\bar{c}\partial_i c + ig\partial^i\bar{c} * (A_i * c - c * A_i)\right]. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Os campos ϕ e $\phi^\dagger$ transformam-se de acordo com a representação fundamental do grupo de calibre

$$\phi \to (e^{i\Lambda})_* * \phi, \tag{3.77}$$

$$\phi^\dagger \to \phi^\dagger * (e^{-i\Lambda})_*, \tag{3.78}$$

enquanto o campo de calibre tem a seguinte regra de transformação

$$A_\mu \to (\mathrm{e}^{i\Lambda})_* * A_\mu * (\mathrm{e}^{-i\Lambda})_* + i[\partial_\mu(\mathrm{e}^{i\Lambda})_*] * (\mathrm{e}^{-i\Lambda})_*. \tag{3.79}$$

As derivadas covariantes são dadas por

$$\begin{aligned} D_t\phi &= \partial_t\phi + igA_0 * \phi, \\ D_i\phi &= \partial_i\phi + igA_i * \phi. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Note que existem dois ordenamentos diferentes para os termos de contato. Em (3.76) eles foram escritos em termos dos comutadores e anti-comutadores dos campos escalares.

Por conveniência, todos os cálculos serão feitos no calibre de Coulomb obtido no limite de $\xi \to 0$. As regras de Feynman, representadas graficamente na figura (3.5), são:
(i) O propagador do campo de matéria:

$$D(p) = \frac{i}{p_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon}, \tag{3.81}$$

(ii) O propagador do campo fantasma:

$$G(p) = -\frac{i}{\mathbf{p}^2}, \tag{3.82}$$

(iii) O propagador do gluon:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\bar{k}^{\lambda}}{\kappa \mathbf{k}^2}, \tag{3.83}$$

onde $\bar{k}^{\lambda}=(0,\mathbf{k})$.

(iv) As expressões analíticas associadas com os vértices são:

$$\Gamma^0(p,p') = -ige^{ip\theta p'}, \tag{3.84}$$

$$\Gamma^i(p,p') = \frac{ig}{2m}(p+p')^i e^{ip\theta p'}, \tag{3.85}$$

$$\Gamma^i_{fantasma}(p,p') = -2gp^i \sin p\theta p', \tag{3.86}$$

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = 2ig\kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\sin(k_1\theta k_2), \tag{3.87}$$

$$\Gamma^{ij}(k_1,k_2,p,p') = -\frac{ig^2}{m}\cos(k_1\theta k_2)e^{ip\theta p'}\delta^{ij}, \tag{3.88}$$

$$\Gamma_1(p_1,p_3',p_2,p_4') = i\lambda_1[\sin(p_1\theta p_3')\sin(p_2\theta p_4') + \sin(p_1\theta p_4')\sin(p_2\theta p_3')], \tag{3.89}$$

$$\Gamma_2(p_1,p_3',p_2,p_4') = -i\lambda_2[\cos(p_1\theta p_3')\cos(p_2\theta p_4') + \cos(p_1\theta p_4')\cos(p_2\theta p_3')]. \tag{3.90}$$

Nos gráficos da figura (3.5) definimos que p são os momentos que chegam nos vértices e p' os momentos que saem dos vértices, e estamos usando a seguinte notação $k_1\theta k_2 \equiv \frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}k_{1\mu}k_{2\nu}$, onde $\theta^{\mu\nu}$ é a matriz anti-simétrica que caracteriza a não-comutatividade do espaço. Para evitar problemas com unitariedade e causalidade [33] assumiremos que $\theta^{0i}=0$ e $\theta^{ij}=\theta\varepsilon^{ij}$ com ε^{ij} sendo o símbolo de Levi-Cività em duas dimensões.

Na aproximação de um laço temos divergências quadráticas associadas com as funções de dois pontos dos campos de calibre e escalar, divergências lineares associadas com as funções de quatro pontos do campo escalar e divergências logarítmicas associadas com as funções de três pontos $< A_\mu\phi\phi^\dagger >$. A seguir analisaremos cada uma dessas divergências:

(1) As funções de dois pontos dos campos de calibre e escalar. O gráfico na figura (3.6*a*) que contribui para a função de dois pontos do campo de calibre é planar assim podemos eliminar por um contratermo adequado. Especificamente, a contribuição não nula em ordem de um laço, após efetuada a integração em k^0 (ver apêndice B), é dada por

$$\Pi_a^{ij} = -\frac{ig^2\delta^{ij}}{2m}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} = -\frac{ig^2\delta^{ij}\Lambda^2}{8\pi m}. \tag{3.91}$$

Este é um termo não-invariante de calibre e pode ser removido por um contratermo A_iA_i de modo que a invariância de calibre (BRST) permanece não-quebrada.

O diagrama na figura (3.6*b*) que contribui para a função de dois pontos do campo escalar tem ambas as partes planar e não-planar. Como mencionado antes, a parte planar

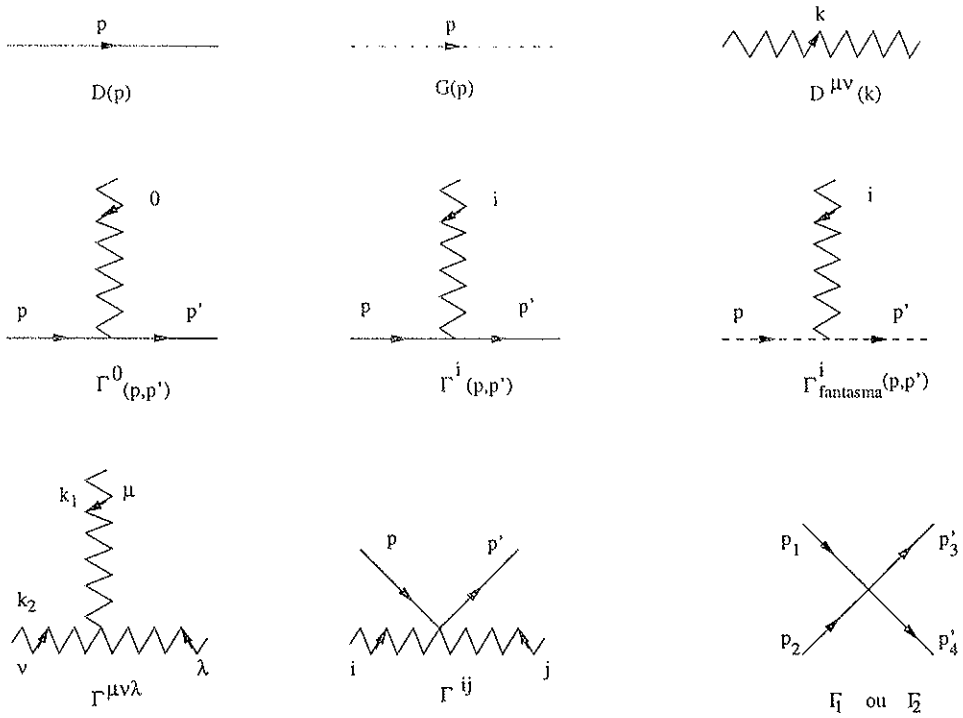


Figura 3.5: Regras de Feynman.

pode ser eliminada por um contratermo. Para valores genéricos de λ_1 e λ_2, a parte não-planar embora finita no ultravioleta gera singularidades infravermelhas não-integráveis. Entretanto, estas partes não-planares são canceladas se escolhemos $\lambda_1 = \lambda_2$, que é também a condição para implementar a invariância de calibre. Assim, depois de efetuadas as integrações em k_0 (ver apêndice B), temos que

$$\Pi_b = \Pi_{\lambda_1} + \Pi_{\lambda_2}, \tag{3.92}$$

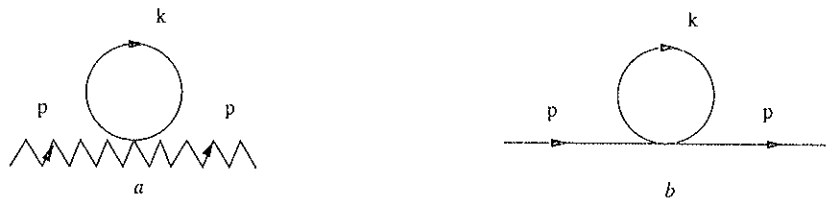
onde

$$\begin{aligned} \Pi_{\lambda_1} &= -\frac{i\lambda_1}{2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\sin^2(p\theta k), \\ \Pi_{\lambda_2} &= -\frac{i\lambda_2}{2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}[1+\cos^2(p\theta k)]. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Pela escolha de $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, obtemos

$$\Pi_b = -i\lambda\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} = -\frac{i\lambda\Lambda^2}{4\pi}. \tag{3.94}$$

(2) Como a invariância de Lorentz é quebrada, a função de três pontos $< TA_\mu\phi\phi^\dagger >$ apresenta dois tipos de divergências:



a b

Figura 3.6: Contribuições em um laço para os propagadores dos campos escalar e de calibre.

(a) A contribuição em um laço para $< TA_0\phi\phi^\dagger >$, representada na figura (3.7a) é, após realizada a integração em k^0, dada por

$$\Gamma^0 = -\frac{g^3 e^{ip\theta p'}}{2\kappa}\lim_{\mu\to 0}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{q}\wedge\mathbf{k})[1-e^{-2iq\theta k}]}{\mathbf{k}^2[(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2+\mu^2]}, \tag{3.95}$$

onde introduzimos o parâmetro μ para regular possíveis divergências infravermelhas nos passos intermediários dos cálculos. Usando a identidade de Feynman

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \frac{1}{[ax+b(1-x)]^2}, \tag{3.96}$$

e fazendo a mudança de variável, $\mathbf{k}\to\mathbf{k}+\mathbf{q}x$, a integral (3.95) pode ser reescrita como

$$\Gamma^0 = -\frac{g^3 e^{ip\theta p'}}{2\kappa}\lim_{\mu\to 0}\int_0^1 dx\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{q}\wedge\mathbf{k})[1-e^{-2iq\theta k}]}{[\mathbf{k}^2+\mathbf{q}^2x(1-x)+\mu^2x]^2}, \tag{3.97}$$

O resultado da integral para a parte planar é nulo devido a integração ímpar nos momentos. A integração nos momentos para a parte não-planar é feita utilizando a fórmula [47]

$$\int \frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{e^{ik_\alpha\tilde{p}^\alpha}}{[k^2-M^2]^\lambda} = i(-1)^\lambda\frac{M^{n/2-\lambda}}{2^{\lambda-1}(2\pi)^{n/2}\Gamma[\lambda]}\frac{K_{n/2-\lambda}\left(\sqrt{-M^2\tilde{p}^2}\right)}{(-\tilde{p}^2)^{n/2-\lambda}}, \tag{3.98}$$

onde K_ν é a função de Bessel modificada de ordem ν. Procedendo assim, obtém-se para θ pequeno

$$\Gamma^0_{nplanar} = \frac{ig^3\theta\mathbf{q}^2e^{ip\theta p'}}{8\pi\kappa}\left[\ln\left(\frac{\theta\mathbf{q}^2}{2}\right)+\gamma-1\right], \tag{3.99}$$

que tem apenas uma divergência logarítmica infravermelha suave.

(b) Para a função de três pontos $< TA_i\phi\phi^\dagger >$, temos duas contribuições que depois de realizarmos as integrações em k^0, obtém-se

$$\Gamma^i_b = \frac{g^3e^{ip\theta p'}}{2m\kappa}\lim_{\mu\to 0}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{[(\mathbf{p}-\mathbf{k})\wedge\mathbf{p}'][1-e^{-2iq\theta k}]k^i}{\mathbf{k}^2[(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2+\mu^2]}, \tag{3.100}$$

$$\Gamma^i_c = -\frac{g^3e^{ip\theta p'}}{2m\kappa}\lim_{\mu\to 0}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{k})[1-e^{-2iq\theta k}](k^i-q^i)}{\mathbf{k}^2[(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2+\mu^2]}, \tag{3.101}$$

associadas com os gráficos nas figuras (3.7*b*) e (3.7*c*), respectivamente. Usando a identidade de Feynman (3.96) e em seguida fazendo a translação, $\mathbf{k} \to \mathbf{k} + \mathbf{q}x$, obtém-se para θ pequeno que o cálculo dessas amplitudes fornecem os seguintes resultados para as suas partes planar e não-planar.

(b1) Parte planar:

$$\Gamma^i_{planar\ b} = -\frac{g^3 e^{ip\theta p'}}{8\pi m\kappa}\left\{\frac{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}')q^i}{\mathbf{q}^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{\mathbf{q}^2}\right) + \varepsilon^{in}p'^n\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\Lambda^2}\right) - 2\right]\right\}, \quad (3.102)$$

$$\Gamma^i_{planar\ c} = -\frac{g^3 e^{ip\theta p'}}{8\pi m\kappa}\varepsilon^{in}p^n\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{q}^2}\right) + 2\right]. \quad (3.103)$$

(b2) Parte não-planar:

$$\begin{aligned}\Gamma^i_{nplanar\ b} &= \frac{g^3 e^{ip\theta p'}}{8\pi m\kappa}\left\{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}')\left[\frac{q^i}{\mathbf{q}^2}\ln\left(\frac{\mu^2}{\mathbf{q}^2}\right) - i\tilde{q}^i\left(\ln\left(\frac{\theta\mathbf{q}^2}{2}\right) + \gamma - 1\right)\right]\right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{in}p'^n\left[\ln\left(\frac{\theta\mu^2}{2}\right) + 1 + \gamma\right]\right\}, \quad (3.104)\end{aligned}$$

$$\Gamma^i_{nplanar\ c} = -\frac{g^3 e^{ip\theta p'}}{8\pi m\kappa}\left\{[\varepsilon^{in}p^n + i\theta q^i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\left[\ln\left(\frac{\theta\mathbf{q}^2}{2}\right) + \gamma\right] + \varepsilon^{in}p^n - i\theta q^i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})\right\}. \quad (3.105)$$

Somando essas partes, obtemos a contribuição total para θ pequeno

$$\begin{aligned}\Gamma^i &= \Gamma^i_{planar} + \Gamma^i_{nplanar} \\ &= -\frac{ig^3 e^{p\theta p'}}{8\pi m\kappa}[(\mathbf{p}\wedge\mathbf{p}')\tilde{q}^i + \theta q^i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{q})]\left[\ln\left(\frac{\theta\mathbf{q}^2}{2}\right) + \gamma - 1\right] \\ &\quad -\frac{g^3 e^{p\theta p'}\varepsilon^{in}q^n}{8\pi m\kappa}\left[\ln\left(\frac{\theta\Lambda^2}{2}\right) + \gamma + 3\right]. \quad (3.106)\end{aligned}$$

Observe que o resultado final não depende do parâmetro μ. As divergências infravermelhas sendo apenas logarítmicas são menos danosas pois são integráveis enquanto que as divergências ultravioletas são eliminadas por contratermos. Resta analisar a função de quatro pontos a qual será feita na próxima seção, junto com a computação da matriz de espalhamento de dois corpos.

3.3.1 Espalhamento Partícula-Partícula

Nesta seção temos como objetivo analisar a função de quatro pontos associada com o espalhamento de duas partículas idênticas no sistema do centro de massa. Os diagramas

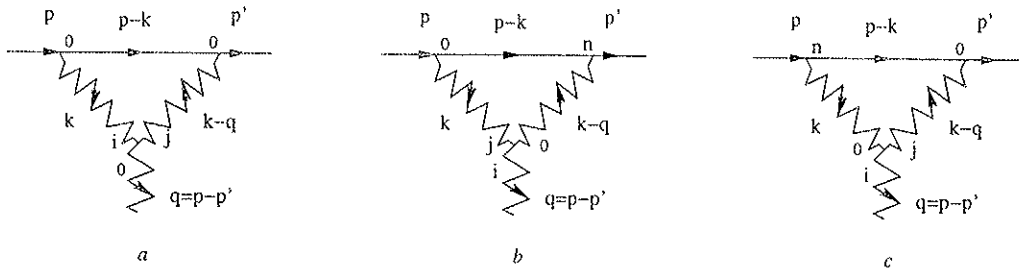


Figura 3.7: Contribuições em um laço para a função de três pontos do vértice.

relevantes são ilustrados nas figuras (3.8) e (3.9), mas por simplicidade desenhamos apenas o processo de espalhamento direto. A amplitude de espalhamento à nível de árvore correspondente ao gráfico (3.8a), é dada por

$$\mathcal{A}_a^0(\varphi) = -\frac{2ig^2(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3)}{m\kappa}\left[\frac{e^{i(p_1\theta p_3 + p_2\theta\ p_4)}}{(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)^2} - \frac{e^{-i(p_1\theta p_3+p_2\theta p_4)}}{(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3)^2}\right], \tag{3.107}$$

sendo $\mathbf{p}_1$ e $\mathbf{p}_2$ os momentos incidentes no sistema do centro de massa, $\mathbf{p}_3$ e $\mathbf{p}_4$ os momentos espalhados. Assim, temos que

$$\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2 \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_3 = -\mathbf{p}_4, \tag{3.108}$$

$$|\mathbf{p}| \equiv |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_3|, \tag{3.109}$$

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}^2\cos\varphi, \tag{3.110}$$

$$\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}^2\sin\varphi, \tag{3.111}$$

onde φ é o ângulo de espalhamento. Usando as relações acima obtemos

$$\mathcal{A}_a^0(\varphi) = -\frac{ig^2}{m\kappa}\left[\frac{e^{i(p_1\theta p_3+p_2\theta p_4)}}{1-\cos\varphi} - \frac{e^{-i(p_1\theta p_3+p_2\theta p_4)}}{1+\cos\varphi}\right]\sin\varphi. \tag{3.112}$$

O segundo termo na expressão acima corresponde a permutação do estado final das partículas. Como estamos considerando $\theta_{ij} = \theta\varepsilon_{ij}$ e o sistema no centro de massa, a fase pode ser escrita da seguinte forma

$$p_1\theta p_3 + p_2\theta p_4 = \theta(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3) = \theta\mathbf{p}^2\sin\varphi = \bar{\theta}\sin\varphi, \tag{3.113}$$

onde definimos $\bar{\theta} = \theta\mathbf{p}^2$. Então, escrevemos a eq. (3.112) como sendo

$$\mathcal{A}_a^0(\varphi) = -\frac{ig^2}{m\kappa}\left[\frac{e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}}{1-\cos\varphi} - \frac{e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}}{1+\cos\varphi}\right]\sin\varphi, \tag{3.114}$$

que para $\bar{\theta}$ pequeno fornece

$$\mathcal{A}_a^0(\varphi) \approx -\frac{2ig^2}{m\kappa}(\cot\varphi + i\bar{\theta}). \tag{3.115}$$

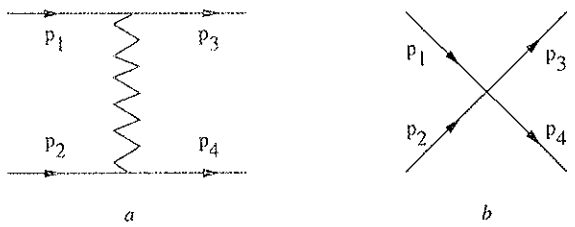


Figura 3.8: Espalhamento à nível de árvore.

A contribuição para o gráfico (3.8b) já usando $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, é

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b^0(\varphi) &= \lambda[\sin(p_1\theta p_3)\sin(p_2\theta p_4) + \sin(p_1\theta p_4)\sin(p_2\theta p_3) \\ &\quad - \cos(p_1\theta p_3)\cos(p_2\theta p_4) - \cos(p_1\theta p_4)\cos(p_2\theta p_3)] \\ &= 2\lambda\left[\sin^2\left(\frac{\bar\theta\sin\varphi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\bar\theta\sin\varphi}{2}\right)\right] = -2\lambda\cos(\bar\theta\sin\varphi). \qquad (3.116)\end{aligned}$$

Com isso a amplitude de espalhamento total à nível de árvore é igual a

$$\mathcal{A}(\varphi) = -\frac{ig^2}{m\kappa}\left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\bar\theta\sin\varphi} - \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{-i\bar\theta\sin\varphi}\right] - 2\lambda\cos(\bar\theta\sin\varphi). \qquad (3.117)$$

Os gráficos que contribuem para o espalhamento em um laço estão representados na figura (3.9) (todos os outros gráficos em um laço são nulos). As expressões analíticas correspondentes, depois de efetuadas as integrações em k_0 (ver apêndice B), são

1. Para o gráfico triângulo, figura (3.9a):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i(p_1\theta p_3 + p_2\theta p_4)}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\left[1+e^{-2iq\theta k}\right] \\ &\quad +(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4), \qquad (3.118)\end{aligned}$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ é o momento transferido.

2. Para o gráfico com três gluons, figura (3.9b):

$$\mathcal{A}_b(\varphi) = \mathcal{A}_b^1(\varphi) + \mathcal{A}_b^2(\varphi) + \mathcal{A}_b^3(\varphi), \qquad (3.119)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b^1(\varphi) &= \frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i(p_1\theta p_3+p_2\theta p_4)}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right] \\ &\quad \times\left[1-e^{-2iq\theta k}\right]+(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4),\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_b^2(\varphi) = \frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i(p_1\theta p_3+p_2\theta p_4)}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_1)}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right]\left[1-e^{-2iq\theta k}\right]$$

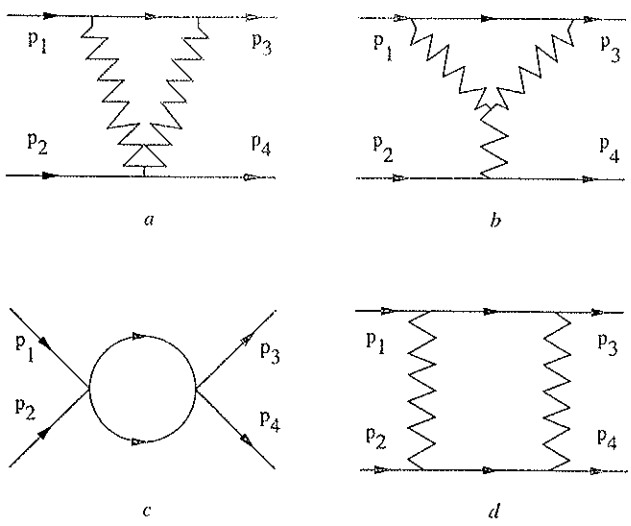


Figura 3.9: Espalhamento um laço.

$$+(p_1 \leftrightarrow p_2) + (p_3 \leftrightarrow p_4) + (p_1 \leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3 \leftrightarrow p_4),$$

$$\mathcal{A}_b^3(\varphi) = -\frac{g^4}{4m\kappa^2} e^{i(p_1\theta p_3 + p_2\theta p_4)} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right] \left[1 - e^{-2iq\theta k}\right]$$
$$+(p_1 \leftrightarrow p_2) + (p_3 \leftrightarrow p_4) + (p_1 \leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3 \leftrightarrow p_4), \tag{3.120}$$

3. Para o gráfico com uma interação quártica, figura (3.9*c*):

$$\mathcal{A}_c(\varphi) = \frac{m\lambda^2}{2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{[\cos(2k\theta q) + \cos(2k\theta q')]}{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon)}. \tag{3.121}$$

4. Para o gráfico caixa, figura (3.9*d*):

$$\mathcal{A}_d(\varphi) = \mathcal{A}_d^1(\varphi) + \mathcal{A}_d^2(\varphi), \tag{3.122}$$

onde

$$\mathcal{A}_d^1(\varphi) = \frac{4g^4}{m\kappa^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k})(\mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{k}) e^{-i(p_1\theta p_2 - p_3\theta p_4)} e^{2i(p_1 - p_3)\theta k}}{(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon)}, \tag{3.123}$$

$$\mathcal{A}_d^2(\varphi) = -\frac{4g^4}{m\kappa^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \frac{(\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k})(\mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{k}) e^{i(p_1\theta p_2 + p_3\theta p_4)} e^{2i(p_2 - p_3)\theta k}}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon)}. \tag{3.124}$$

As integrais acima são logaritmicamente divergente por contagem de potências e para regularizá-las estamos assumindo implicitamente uma regularização por corte Λ. Para calcular as integrais acima, vamos separá-las em duas partes uma planar e outra não-planar

3.3.2 Contribuição Planar

Na expansão perturbativa temos uma contribuição planar caracterizada por existir fatores de fase que dependem apenas dos momentos externos. Embora a interação induzida pela não-comutatividade seja não-local, as divergências ultravioletas são as mesmas que aparecem na teoria comutativa. Assim, as contribuições da amplitude de espalhamento são calculadas da mesma forma como no caso comutativo e para exemplificar os cálculos vamos considerar o primeiro termo na expressão abaixo

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a^p(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}+\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}+\mathbf{q}')e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}+\mathbf{q}')^2}\right]\\ &\quad +(\mathbf{q}\to-\mathbf{q},\quad \mathbf{q}'\to-\mathbf{q}'),\end{aligned} \tag{3.125}$$

usando a identidade de Feynman (3.96), o denominador da integral acima pode ser reescrito como

$$\mathcal{A}_{a1}^p(\varphi) = -\frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\int_0^1 dx\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{[\mathbf{k}^2-2x\mathbf{q}\cdot\mathbf{k}+\mathbf{q}^2x]^2}, \tag{3.126}$$

fazendo a mudança de variável $\mathbf{k}\to\mathbf{k}+\mathbf{q}x$, obtemos

$$\mathcal{A}_{a1}^p(\varphi) = -\frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\int_0^1 dx\int_0^{\Lambda^2}\frac{d\mathbf{k}^2}{2(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}d\alpha\left[\frac{\mathbf{k}^2-c^2+\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}(2x-1)}{(\mathbf{k}^2+c^2)^2}\right], \tag{3.127}$$

onde $c^2=\mathbf{q}^2x(1-x)$. Resolvendo a integral angular, temos

$$\mathcal{A}_{a1}^p(\varphi) = -\frac{g^4}{16\pi m\kappa^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\int_0^1 dx\int_0^{\Lambda^2}d\mathbf{k}^2\left[\frac{\mathbf{k}^2-c^2}{(\mathbf{k}^2+c^2)^2}\right]. \tag{3.128}$$

Finalmente, realizando as integrações nos momentos e na variável x, obtemos

$$\mathcal{A}_{a1}^p(\varphi) = -\frac{g^4}{16\pi m\kappa^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)-2\ln[2\sin(\varphi/2)]\right]. \tag{3.129}$$

Os outros termos na eq. (3.125) são calculados usando o mesmo procedimento. Portanto, considerando todas as possibilidades (pela troca dos momentos externos), a amplitude de espalhamento correspondente ao gráfico (3.9a) é

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a^p(\varphi) &= -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}\left[\cos(\bar{\theta}\sin\varphi)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)\right.\\ &\quad \left.-\ln[2\sin(\varphi/2)]e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}-\ln[2\cos(\varphi/2)]e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right].\end{aligned} \tag{3.130}$$

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 4434

Referente ao gráfico (3.9*b*), temos

$$\mathcal{A}_b^p(\varphi) = \mathcal{A}_b^{1p}(\varphi) + \mathcal{A}_b^{2p}(\varphi) + \mathcal{A}_b^{3p}(\varphi), \tag{3.131}$$

onde

$$\mathcal{A}_b^{1p}(\varphi) = \frac{g^4}{4m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left\{\frac{[\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2]e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}+\frac{[\mathbf{k}^2\mathbf{q}'^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')^2]e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}'^2(\mathbf{k}-\mathbf{q}')^2}\right\} + (\mathbf{q}\to-\mathbf{q},\quad \mathbf{q}'\to-\mathbf{q}'), \tag{3.132}$$

$$\mathcal{A}_b^{2p}(\varphi) = \frac{g^4}{4m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}+\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}'^2-2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')(\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}'^2(\mathbf{k}-\mathbf{q}')^2}e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right] + (\mathbf{q}\to-\mathbf{q},\quad \mathbf{q}'\to-\mathbf{q}'), \tag{3.133}$$

$$\mathcal{A}_b^{3p}(\varphi) = -\frac{g^4}{4m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\left(\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}+\mathbf{q})^2}\right)e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} + \left(\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q}')^2}-\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}+\mathbf{q}')^2}\right)e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right]. \tag{3.134}$$

Aplicando o mesmo procedimento feito para o cálculo do gráfico triângulo (3.9*a*), obtemos que o resultado para o gráfico (3.9*b*) é

$$\mathcal{A}_b^p(\varphi) = \frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}\left[\cos(\bar{\theta}\sin\varphi)\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)+1\right] - \ln[2\sin(\varphi/2)]e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} - \ln[2\cos(\varphi/2)]e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right]. \tag{3.135}$$

A soma da contribuição da parte planar das amplitudes $\mathcal{A}_a^p(\varphi)$ e $\mathcal{A}_b^p(\varphi)$ é

$$\mathcal{A}_{a+b}^p(\varphi) = \frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}\cos(\bar{\theta}\sin\varphi). \tag{3.136}$$

Note que as divergências ultravioletas são canceladas na soma contrário ao caso comutativo [21].

A amplitude de espalhamento para o termo de interação de contato, depois de fazer a integração em k_0 (ver apêndice B), é zero pois

$$\mathcal{A}_c^p(\varphi) = \frac{m(\lambda_1-\lambda_2)^2}{8\pi}\cos(p_1\theta p_3)\cos(p_2\theta p_4)\int_0^{\Lambda^2} d\mathbf{k}^2\frac{1}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)} = 0, \tag{3.137}$$

devido a escolha $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

A amplitude de espalhamento parcial até um laço é

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{p}_{1\text{-laço}}(\varphi) &= -\frac{ig^2}{m\kappa}\left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}-\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right] \\ &\quad -2\lambda\cos(\bar{\theta}\sin\varphi)+\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}\cos(\bar{\theta}\sin\varphi). \qquad (3.138)\end{aligned}$$

Notamos que para a parte planar da amplitude de espalhamento, contrário ao caso comutativo, é finita. Expandindo o resultado acima para $\bar{\theta}$ muito pequeno até primeira ordem, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{p}_{1\text{-laço}}(\varphi) &= -\frac{ig^2}{m\kappa}\left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)-\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)+i\bar{\theta}\sin\varphi\left[\cot\left(\frac{\varphi}{2}\right)+\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]\right] \\ &\quad -2\lambda+\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}, \\ &= -\frac{2ig^2}{m\kappa}\left[\cot\varphi+i\bar{\theta}\right]-2\lambda+\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}+\mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \qquad (3.139)\end{aligned}$$

O próximo passo será analisar a parte não-planar e ver a dependência com o parâmetro θ da não-comutatividade e em particular estudar o espalhamento para $\bar{\theta}$ pequeno.

3.3.3 Contribuição Não-Planar

A parte não-planar é dada pela existência de fatores de fase que dependem do momento de integração na amplitude de espalhamento. Para os gráficos (3.9*a*) e (3.9*b*), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{np}_{a}(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}e^{-2iq\theta k} \\ &\quad +(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4), \qquad (3.140)\end{aligned}$$

e

$$\mathcal{A}^{np}_{b}(\varphi)=\mathcal{A}^{1np}_{b}(\varphi)+\mathcal{A}^{2np}_{b}(\varphi)+\mathcal{A}^{3np}_{b}(\varphi), \qquad (3.141)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{1np}_{b}(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2+(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right]e^{-2iq\theta k} \\ &\quad +(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}^{2np}_{b}(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_1)}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right]e^{-2iq\theta k} \\ &\quad +(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4),\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_b^{3np}(\varphi) = \frac{g^4}{4m\kappa^2} e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right] e^{-2iq\theta k} + (p_1 \leftrightarrow p_2) + (p_3 \leftrightarrow p_4) + (p_1 \leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3 \leftrightarrow p_4), \tag{3.142}$$

e $\mathbf{q}' = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3$.

Agora vamos calcular a integral da parte não-planar referente ao gráfico triângulo. Iniciamos os cálculos com o primeiro termo da eq. (3.140), usando a parametrização de Feynman e em seguida fazendo a mudança de variável $\mathbf{k} \to \mathbf{k} + \mathbf{q}x$, ver eq. (3.126), teremos

$$\mathcal{A}_{a1}^{np}(\varphi) = -\frac{g^4}{4m\kappa^2} e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} \int_0^1 dx \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{k}^2 - c^2 + \mathbf{k}\cdot\mathbf{q}(2x-1)}{(\mathbf{k}^2+c^2)^2}\right] e^{-2iq\theta k}, \tag{3.143}$$

efetuamos a integração nos momentos, usando diretamente o resultado (3.98) [47]. Procedendo deste modo, obtemos

$$\mathcal{A}_{a1}^{np}(\varphi) = -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2} \int_0^1 dx \left[K_0(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2}) - \sqrt{a^2\bar{\theta}^2} K_1(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2})\right] e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}, \tag{3.144}$$

onde $a^2 = 16x(1-x)\sin^4(\varphi/2)$. Colecionando este com o resultado para os outros termos obtém-se

$$\mathcal{A}_a^{np}(\varphi) = -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2} \int_0^1 dx \left[K_0(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2}) - \sqrt{a^2\bar{\theta}^2} K_1(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2}) e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} + (K_0(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2}) - \sqrt{b^2\bar{\theta}^2} K_1(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2}) e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right], \tag{3.145}$$

com $b^2 = 16x(1-x)\cos^4(\varphi/2)$.

Calculamos a amplitude de espalhamento referente ao gráfico com três gluons, aplicando o mesmo procedimento. Assim, temos como resultado

$$\mathcal{A}_b^{np}(\varphi) = -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2} \int_0^1 dx \left[[(3 + 2i\bar{\theta}\sin\varphi) K_0(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2}) - \sqrt{a^2\bar{\theta}^2} K_1(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2})] e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} + [(3 - 2i\bar{\theta}\sin\varphi) K_0(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2}) - \sqrt{b^2\bar{\theta}^2} K_1(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2})] e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right]. \tag{3.146}$$

Usando a expansão assintótica para os termos dominantes das funções,

$$K_0(z) = -\ln(z/2) - \gamma + \ldots \quad \text{para} \quad z \to 0, \tag{3.147}$$

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \ldots \quad \text{para} \quad z \to 0, \tag{3.148}$$

e integrando na variável x, obtemos até primeira ordem em θ

$$\mathcal{A}_a^{np}(\varphi) = \frac{g^4}{2\pi m\kappa^2}\left[\ln\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)+\gamma\right]+\frac{g^4}{2\pi m\kappa^2}\ln(2\sin\varphi) + \frac{i\bar{\theta}\sin\varphi g^4}{2\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]+\mathcal{O}(\bar{\theta}^2), \tag{3.149}$$

e

$$\mathcal{A}_b^{np}(\varphi) = \frac{3g^4}{2\pi m\kappa^2}\left[\ln\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)+\gamma\right]+\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}+\frac{3g^4}{2\pi m\kappa^2}\ln(2\sin\varphi) + \frac{3i\bar{\theta}\sin\varphi g^4}{2\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]+\mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \tag{3.150}$$

Somando as amplitudes dos gráficos (3.9a) e (3.9b), obtemos

$$\mathcal{A}_{a+b}^{np}(\varphi) = \frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}\left[\ln\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)+\gamma\right]+\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}+\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}\ln(2\sin\varphi) + \frac{2i\bar{\theta}\sin\varphi g^4}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]+\mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \tag{3.151}$$

A contribuição não-planar para a interação quártica tem a forma

$$\mathcal{A}_c^{np}(\varphi) = \frac{m\lambda^2}{2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{[\cos(2k\theta q)+\cos(2k\theta q')]}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}. \tag{3.152}$$

Logo, a integração nos momentos [47] dá

$$\mathcal{A}_c^{np}(\varphi) = \frac{m\lambda^2}{2\pi}[K_0(-i2\sin(\varphi/2)\bar{\theta})+K_0(-i2\cos(\varphi/2)\bar{\theta})], \tag{3.153}$$

e considerando que $\bar{\theta}$ é muito pequeno, obtemos

$$\mathcal{A}_c^{np}(\varphi) = -\frac{m\lambda^2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right)+\gamma\right]-\frac{m\lambda^2}{2\pi}\ln[2\sin\varphi]+\frac{im\lambda^2}{2}+\mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \tag{3.154}$$

Assim, a amplitude de espalhamento para a parte não-planar é

$$\mathcal{A}_{\text{1-laço}}^{np}(\varphi) = \frac{m}{\pi}\left(\frac{2g^4}{m^2\kappa^2}-\lambda^2\right)[\ln(\bar{\theta}/2)+\gamma]+\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2} + \left(\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}-\frac{m\lambda^2}{2\pi}\right)\ln[2\sin\varphi]+\frac{im\lambda^2}{2} + \frac{2i\bar{\theta}\sin\varphi g^4}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]+\mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \tag{3.155}$$

O limite quando $\bar{\theta}\to 0$ não é analítico, pois é logaritmicamente divergente. Eliminamos essa divergência fazendo $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}g^2}{m\kappa}$.

O diagrama caixa, depois de executar a integração em k_0, veja apêndice B eq. (B.14), é dado por

$$\mathcal{A}_d(\varphi) = \mathcal{A}_d^1(\varphi) + \mathcal{A}_d^2(\varphi), \tag{3.156}$$

onde

$$\mathcal{A}_d^1(\varphi) = \frac{4g^4}{m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})e^{-i(p_1\theta p_2 - p_3\theta p_4)}e^{2iq\theta k}}{(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}, \tag{3.157}$$

$$\mathcal{A}_d^2(\varphi) = -\frac{4g^4}{m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})e^{i(p_1\theta p_2 + p_3\theta p_4)}e^{-2iq'\theta k}}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}, \tag{3.158}$$

Vamos calcular as amplitudes acima. Considerando que o efeito da não-comutatividade é fraco, o cálculo será feito até primeira ordem no parâmetro θ. No sistema do centro de massa $p_1\theta p_2 + p_3\theta p_4 = \theta(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{p}_2) = -\theta(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{p}_1) = 0$ e a fase planar não contribui. Assim, temos

$$\mathcal{A}_d^1(\varphi) = \frac{4g^4}{m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})[1+i\theta(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)\wedge\mathbf{k}]}{(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}, \tag{3.159}$$

$$\mathcal{A}_d^2(\varphi) = -\frac{4g^4}{m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})[1-i\theta(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3)\wedge\mathbf{k}]}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}. \tag{3.160}$$

Realizamos as integrações nas expressões acima, separando as contribuições independente e dependente do parâmetro θ como segue.

Parte Independente de θ:

Em duas dimensões o elemento de volume $d^2\mathbf{k}$ tem a forma

$$d^2\mathbf{k} = |\mathbf{k}|\ d|\mathbf{k}|\ d\alpha = \frac{1}{2}d\mathbf{k}^2 d\alpha. \tag{3.161}$$

Então

$$\mathcal{A}_d^1(\varphi)|_{\theta=0} = \frac{4g^4}{2m\kappa^2}\int_0^{\Lambda^2}\frac{d\mathbf{k}^2}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} d\alpha \frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})}{(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}, \tag{3.162}$$

$$= -\frac{g^4}{m\kappa^2}\int_0^{\Lambda^2}\frac{d\mathbf{k}^2}{(2\pi)^2}\frac{[I_2-\cos(\varphi)I_0]}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}, \tag{3.163}$$

onde I_0 e I_2 estão definidos no apêndice A, eq. (A.24) e eq. (A.26). A integral angular foi calculada recorrendo a eq. (A.19), veja apêndice A, para o caso em que $n=0$ e $n=2$. Assim, efetuando a integração em $\mathbf{k}^2$, chega-se a

$$\mathcal{A}_d^1(\varphi)|_{\theta=0} = -\frac{g^4}{4m\kappa^2}\left[2\ln[2\sin(\varphi/2)] + i\pi\right]. \tag{3.164}$$

De modo análogo temos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_d^2(\varphi)|_{\theta=0} &= -\frac{4g^4}{m\kappa^2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\\ &= -\frac{g^4}{m\kappa^2}\int_0^{\Lambda^2}\frac{d\mathbf{k}^2}{(2\pi)^2}\frac{[\mathcal{I}_2-\cos(\varphi)\mathcal{I}_0]}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\\ &= -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}\left[2\ln[2\cos(\varphi/2)]+i\pi\right]. \end{aligned} \tag{3.165}$$

Somando os resultados obtemos

$$\mathcal{A}_d(\varphi)|_{\theta=0} = \mathcal{A}_d^1(\varphi)|_{\theta=0}+\mathcal{A}_d^2(\varphi)|_{\theta=0} = -\frac{g^4}{2\pi m\kappa^2}\left[\ln(2\sin\varphi)+i\pi\right]. \tag{3.166}$$

Parte dependente de θ:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\theta d}^1(\varphi) &= \frac{4i\theta g^4}{m\kappa^2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3)\wedge\mathbf{k}}{(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\\ &= -\frac{i\theta g^4\sin(\varphi/2)}{m\kappa^2}\int_0^{\Lambda^2}\frac{d\mathbf{k}^2}{(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{p}|[I_1-2\cos(\varphi)I_1+I_3]}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}. \end{aligned} \tag{3.167}$$

Realizando a integração em $\mathbf{k}^2$, obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\theta d}^1(\varphi) &= -\frac{i\theta g^4\sin\varphi}{4\pi m\kappa^2}\int_0^{\Lambda^2}d\mathbf{k}^2\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{p}|}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\left[f-\sqrt{f^2-4}-\frac{2\sqrt{f^2-4}}{B}\right]\\ &= -\frac{i\theta g^4\sin\varphi}{4\pi m\kappa^2}\int_0^{\Lambda^2}d\mathbf{k}^2\left[\frac{\mathbf{k}^2+\mathbf{p}^2-|\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2|}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\right.\\ &\quad\left.-\frac{2|\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2|\mathbf{k}^2\mathbf{p}^2}{[\mathbf{k}^4+\mathbf{p}^4-2\mathbf{p}^2\cos(\varphi)\mathbf{k}^2](\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\right]\\ &= -\frac{i\bar{\theta}g^4\sin\varphi}{2\pi m\kappa^2}[i\pi+1+2\ln[2\sin(\varphi/2)], \end{aligned} \tag{3.168}$$

onde

$$f=\frac{\mathbf{k}^2+\mathbf{p}^2}{|\mathbf{k}||\mathbf{p}|}, \tag{3.169}$$

e

$$\frac{|\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2|}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}=\left\{\begin{array}{cccc}-1 & \text{se} & 0<\mathbf{k}^2<\mathbf{p}^2\\ 1 & \text{se} & \mathbf{p}^2<\mathbf{k}^2<\Lambda\end{array}\right\}, \tag{3.170}$$

é a função sinal. Da mesma forma,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\theta d}^2(\varphi) &= \frac{4i\theta g^4}{m\kappa^2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_3)\wedge\mathbf{k}}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\\ &= \frac{i\theta g^4\cos(\varphi/2)}{m\kappa^2}\int_0^{\Lambda^2}\frac{d\mathbf{k}^2}{(2\pi)^2}\frac{|\mathbf{k}||\mathbf{p}|[I_3'-I_1'-2\cos(\varphi)I_1']}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}\\ &= \frac{i\bar{\theta}g^4\sin\varphi}{2\pi m\kappa^2}[i\pi+1+2\ln[\cos(\varphi/2)]]. \end{aligned} \tag{3.171}$$

Adicionando as contribuições, temos

$$\mathcal{A}_{\theta d}(\varphi) = \mathcal{A}^1_{\theta d}(\varphi) + \mathcal{A}^2_{\theta d}(\varphi) = -\frac{i\bar{\theta}g^4 \sin\varphi}{\pi m\kappa^2} \ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \quad (3.172)$$

Portanto, a amplitude para o gráfico caixa é finita e, até primeira ordem em θ, é dada por

$$\mathcal{A}_d(\varphi) = -\frac{g^4}{2\pi m\kappa^2}[\ln(2\sin\varphi) + i\pi] - \frac{i\bar{\theta}g^4 \sin\varphi}{\pi m\kappa^2} \ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \quad (3.173)$$

Logo, o resultado para a amplitude de espalhamento total em um laço, incluindo os termos à nível de árvore, é

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{1-laço}}(\varphi) &= \mathcal{A}^p_{\text{1-laço}}(\varphi) + \mathcal{A}^{np}_{\text{1-laço}}(\varphi) + \mathcal{A}_d(\varphi) \\
&= -\frac{2ig^2}{m\kappa}\cot(\varphi) - 2\lambda - \frac{ig^4}{2m\kappa^2} + \frac{im\lambda^2}{2} + \frac{9g^4}{4\pi m\kappa^2} + \frac{2\bar{\theta}g^2}{m\kappa} \\
&\quad + \left[\frac{3g^4}{2\pi m\kappa^2} - \frac{m\lambda^2}{2\pi}\right]\ln[2\sin\varphi] + \frac{i\bar{\theta}g^4\sin\varphi}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \\
&\quad + \frac{m}{\pi}\left(\frac{2g^4}{m^2\kappa^2} - \lambda^2\right)[\ln(\bar{\theta}/2) + \gamma] + \mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \quad (3.174)
\end{aligned}$$

A singularidade logarítmica em $\bar{\theta} = 0$, é um exemplo da mudança das singularidades ultravioletas para infravermelhas. O parâmetro θ, tem sido usado justamente como um regulador e tais singularidades são removidas para os valores especiais, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}g^2}{m\kappa}$. Assim, para esses valores particulares de λ a amplitude torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{1-laço}}(\varphi) &= -\frac{2ig^2}{m\kappa}\cot(\varphi) - 2\lambda + \frac{ig^4}{2m\kappa^2} + \frac{9g^4}{4\pi m\kappa^2} + \frac{g^4}{2\pi m\kappa^2}\ln[2\sin\varphi] \\
&\quad + \frac{2\bar{\theta}g^2}{m\kappa} + \frac{i\bar{\theta}g^4\sin\varphi}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \quad (3.175)
\end{aligned}$$

Note que na aproximação de árvore, até primeira ordem em $\bar{\theta}$, a correção para amplitude de espalhamento de dois corpos é isotrópica. Qualitativamente, isto está de acordo com o resultado obtido em [24, 41] para o cálculo da holonomia. Entretanto, para valores pequenos do ângulo de espalhamento, φ, temos uma dependência, $\varphi\ln\varphi$, na correção não-comutativa e esta dependência não está presente em [24]. A diferença nos resultados pode ser atribuída ao uso de formalismos diferentes. De fato, devido a não-localidade inerente na situação não-comutativa a definição especial para o produto estrela em coordenadas polares adotado em [24] pode dar contribuições diferentes da definição usual.

Portanto, mostramos perturbativamente, até ordem de um laço, que o modelo não-comutativo do campo escalar não-relativístico interagindo com o Chern-Simons em 2+1

dimensões não apresenta divergências ultravioletas. Por outro lado, temos singularidades logarítmica no limite de $\bar{\theta} \to 0$, para eliminar as divergências infravermelhas introduzimos na lagrangeana uma interação quártica do tipo, $\frac{\lambda_1}{8}[\phi, \phi^\dagger] * [\phi, \phi^\dagger]$ e $\frac{\lambda_2}{8}\{\phi, \phi^\dagger\} * \{\phi, \phi^\dagger\}$ com duas constantes de acoplamentos diferentes. Para uma escolha particular dessas constantes, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, a amplitude de espalhamento referente a interação de contato torna-se finita no UV e no ponto em que $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}g^2}{m\kappa}$, as divergências IV são eliminadas. Assim, verificamos que a amplitude de espalhamento de dois corpos é analítica em $\bar{\theta} = \theta\mathbf{p}^2$ pela escolha adequada das constantes de acoplamento.

Capítulo 4

Campo Fermiônico Acoplado com o Campo de CS em $(2+1)D$

O nosso objetivo neste capítulo é estudar as mudanças no efeito Aharonov-Bohm para partículas de spin 1/2 devido a não-comutatividade do espaço. Semelhantemente ao capítulo anterior, o efeito será simulado por uma teoria de campo não-relativística descrevendo partículas de spin 1/2 interagindo através de um campo de Chern-Simons.

4.1 O Modelo Comutativo com Simetria $SU(2)$ Não-Relativístico

O modelo de férmions não-relativísticos acoplados minimamente com um campo de Chern-Simons não-abeliano em 2+1 dimensões é dado pela ação [22]

$$\begin{aligned} S[A,\psi] &= \int d^3x \left[-\kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda} tr\left(A_\mu \partial_\nu A_\lambda + \frac{2ig}{3} A_\mu A_\nu A_\lambda \right) - \frac{1}{\xi} tr(\bar{\nabla}\mathbf{A})^2 + i\psi^\dagger D_t \psi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2m}(\mathbf{D}\psi)^\dagger(\mathbf{D}\psi) + \frac{g}{2m}\psi^\dagger B\psi + tr(\bar{c}\nabla^2 c + ig\nabla\bar{c}[\mathbf{A},c]) \right], \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde c é o campo fantasma, a interação contendo o campo magnético, $B = -F_{12} = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 + ig[A^1, A^2]$, é o termo de Pauli, ψ é um campo de uma componente de Lorentz que anticomuta, transformando-se com a representação fundamental do grupo de calibre $SU(2)$, cuja álgebra é gerada pelas matrizes T^a, com $a = 1,2,3$ e $A_\mu = A_\mu^a T^a$. Os geradores T^a são matrizes anti-hermitianas 2×2, satisfazendo a álgebra de Lie

$$[T^a, T^b] = \varepsilon_{abc} T^c, \tag{4.2}$$

e são normalizadas por

$$tr(T^aT^b) = -\frac{1}{2}\delta^{ab}. \tag{4.3}$$

As outras relações para as matrizes T^a, são

$$tr(\mathbb{I}) = 2 \quad tr(T^a) = 0, \tag{4.4}$$

$$tr(T^aT^bT^c) = -\frac{1}{4}\varepsilon^{abc}, \tag{4.5}$$

$$T^aT^b = -\frac{1}{4}\delta^{ab}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\varepsilon^{abc}T_c, \tag{4.6}$$

$$\{T^a, T^b\} = -\frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{4.7}$$

$$T^aT_a = -\frac{3}{4}\mathbb{I}, \tag{4.8}$$

$$T^aT^b \otimes T_aT_b = \frac{3}{16}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} + \frac{1}{2}T^a \otimes T_a, \tag{4.9}$$

$$T^aT^b \otimes T_bT_a = \frac{3}{16}\mathbb{I}\otimes\mathbb{I} - \frac{1}{2}T^a \otimes T_a. \tag{4.10}$$

A representação gráfica das regras de Feynman é dada na figura (4.1) e as correspondentes expressões analíticas são:
(i) O propagador do campo de matéria:

$$S(p)_{nm} = S(p)\delta_{nm} = \frac{i}{p_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon}\delta_{nm}, \tag{4.11}$$

(ii) O propagador do campo auxiliar:

$$\Delta_B^{ba}(x) = \langle TB^b(x)A_0^a(0)\rangle = -\frac{i}{\kappa}\delta(x)\delta^{ba}, \tag{4.12}$$

no espaço dos momentos dá

$$\tilde{\Delta}_B^{ba}(p) = -\frac{i}{\kappa}\delta^{ba}, \tag{4.13}$$

(iii) O propagador do campo de fantasma:

$$G(p)_{ba} = G(p)\delta_{ba} = -\frac{i}{\mathbf{p}^2}\delta_{ba}, \tag{4.14}$$

(iv) O propagador do campo de calibre no limite $\xi \to 0$ é

$$D_{\mu\nu}(k)_{ba} = D_{\mu\nu}(k)\delta_{ba} = \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\tilde{k}^\lambda}{\kappa\mathbf{k}^2}\delta_{ba}, \tag{4.15}$$

onde $\tilde{k}^\lambda$=$(0, \mathbf{k})$.

(v) As expressões analíticas associadas com os vértices são:

$$\Gamma^{a,0}_{nm}(p,p') = -ig(T^a)_{nm}, \tag{4.16}$$

$$\Gamma^{a,i}_{n,m}(p,p') = \frac{ig}{2m}(p+p')^i(T^a)_{nm}, \tag{4.17}$$

$$\Gamma^{a,B}_{nm}(p,p') = \frac{ig}{2m}(T^a)_{nm}, \tag{4.18}$$

$$\Gamma^{abc,i}_{fantasma}(p,p')_{nm} = -ig\varepsilon^{abc}(p')^i, \tag{4.19}$$

$$\Gamma^{abc,\mu\nu\lambda}(p,p') = -g\kappa\varepsilon^{abc}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}, \tag{4.20}$$

$$\Gamma^{ab,ij}_{nm}(p,p') = -\frac{ig^2}{m}[T^aT^b + T^bT^a]_{nm}\delta^{ij}, \tag{4.21}$$

$$\Gamma^{ab,12}_{nm}(p,p') = -\frac{g^2}{2m}\varepsilon^{abc}(T_c)_{nm}. \tag{4.22}$$

Como feito no caso escalar, vamos omitir os índices de matéria no cálculo da amplitude de espalhamento. Ou seja,

$$\mathcal{A} = \langle n',m'|\mathcal{A}(\varphi)|n,m\rangle + \langle m',n'|\mathcal{A}(\varphi+\pi)|n,m\rangle, \tag{4.23}$$

onde φ é o ângulo de espalhamento. Na aproximação de árvore e no sistema do centro-de-massa a amplitude de espalhamento, figura (4.2), é dada por

$$\mathcal{A}(\varphi) = -\frac{g^2}{m\kappa}(T^a\otimes T_a)\left[2 - \frac{i\sin\varphi}{1-\cos\varphi} + \frac{i\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right]. \tag{4.24}$$

Sendo que o primeiro termo corresponde a parte referente ao termo de Pauli. Os gráficos que contribuem para a amplitude de espalhamento em um laço são ilustrados na figura (4.3). As contribuições destes gráficos, após realizarmos as integrações em k_0, são

1. Para o gráfico caixa, figura (4.3*a*):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_a(\varphi) &= \frac{16\pi^2\Omega^2}{m}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}'\wedge\mathbf{k})}{(\mathbf{k}-\mathbf{p})^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}')^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)} + (\mathbf{p}'\to-\mathbf{p}'),\\ &= -\frac{2\pi\Omega^2}{m}\left[\ln(2\sin\varphi) + i\pi\right],\end{aligned} \tag{4.25}$$

onde Ω^2 foi definido no capítulo anterior, ver eq. (3.30).

2. Para o gráfico triângulo, figura (4.3*b*):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}(T^aT^b + T^bT^a)\otimes(T_aT_b)\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2} + (\mathbf{p}'\to-\mathbf{p}'),\\ &= \frac{g^4}{8\pi m\kappa^2}[\varepsilon^{abc}T_c\otimes(T_aT_b)]\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right) - 2\ln(2\sin\varphi)\right]\\ &\quad -\frac{2\pi\Omega^2}{m}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right) - 2\ln(2\sin\varphi)\right],\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde $\mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{p}'$ é o momento transferido e Λ é um corte ultravioleta introduzido para regularizar a integral.

3. Para o gráfico com três gluons, figura (4.3c):

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_c(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}(\varepsilon_{abc}T^a)\otimes(T^bT^c)\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right]+(\mathbf{p}'\to-\mathbf{p}'),\\ &= -\frac{g^4}{8\pi m\kappa^2}[\varepsilon^{abc}T_c\otimes(T_aT_b)]\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)-2\ln(2\sin\varphi)+1\right].\end{aligned} \tag{4.27}$$

4. Para o gráfico (4.3d):

$$\mathcal{A}_d(\varphi) = \frac{8\pi^2\Omega^2}{m}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{1}{(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)} = \frac{2\pi\Omega^2}{m}\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)+i\pi\right]. \tag{4.28}$$

O termo de Pauli contém duas contribuições adicionais. Uma delas é devido a contração entre as quantidades $\psi^\dagger[A^1,A^2]\psi$ e $\psi^\dagger A_0\psi$ a outra surge dos termos $\psi^\dagger(\partial_1A^2-\partial_2A^1)\psi$ e do vértice trilinear AAA no cálculo da amplitude de espalhamento. Assim, as expressões analíticas associadas são:

$$\mathcal{A}_e(\varphi) = -\frac{ig^4}{4m\kappa^2}[\varepsilon^{abc}T_c\otimes(T_aT_b)]\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{k_1q_2-k_2q_1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right]+(\mathbf{p}\leftrightarrow-\mathbf{p}'), \tag{4.29}$$

e

$$\mathcal{A}_f(\varphi) = \frac{ig^4}{4m\kappa^2}[\varepsilon^{abc}T_c\otimes(T_aT_b)]\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{k_1q_2-k_2q_1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right]+(\mathbf{p}\leftrightarrow-\mathbf{p}'). \tag{4.30}$$

Note que, as amplitudes (4.29) e (4.30) correspondem aos gráficos (4.4a) e (4.4b) respectivamente e, a soma delas são canceladas completamente. Observe ainda que a contribuição divergente de $\mathcal{A}_c(\varphi)$ cancela com a primeira parte divergente de $\mathcal{A}_b(\varphi)$. Portanto, a amplitude de espalhamento total em um laço dá

$$\mathcal{A}(\varphi) = -\frac{g^4}{8\pi m\kappa^2}[\varepsilon^{abc}T_c\otimes(T_aT_b)]. \tag{4.31}$$

Observamos que a termo de interação de Pauli $\psi^\dagger B\psi$ na lagrangeana tem a mesma função que a auto-interação quártica na teoria escalar. O resultado é automaticamente invariante de escala e não é necessário introduzir um termo de contato, como ocorria no caso escalar. O termo finito na expressão acima é devido ao uso da regularização por corte. Este termo pode ser eliminado redefinindo o corte ou adicionando um contra termo na ação.

4.2 O Modelo Não-Comutativo Não-Relativístico

A versão não-comutativa da teoria de um campo fermiônico não-relativístico acoplado com o campo de Chern-Simons em 2+1 dimensões é dada pela ação

$$S[A,\psi] = \int d^3x \left[\frac{\kappa}{2}\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\left(A_\mu\partial_\nu A_\lambda + \frac{2ig}{3}A_\mu * A_\nu * A_\lambda\right) - \frac{1}{2\xi}\partial_i A^i\partial_j A^j + i\psi^\dagger * D_t\psi - \frac{1}{2m}(\mathbf{D}\psi)^\dagger * (\mathbf{D}\psi) + \lambda\psi^\dagger * B * \psi + \partial^i\bar{c}\partial_i c + ig\partial^i\bar{c} * [A_i, c]_*\right], \quad (4.32)$$

onde $B = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 + ig[A^1, A^2]_* = B_0 + ig[A^1, A^2]_*$ é o campo magnético. O campo ϕ transforma-se de acordo com a representação fundamental de $U(1)$ não-comutativo.

$$\psi \to (e^{i\Lambda})_* * \psi, \quad (4.33)$$

$$\psi^\dagger \to \psi^\dagger * (e^{-i\Lambda})_*, \quad (4.34)$$

e as derivadas covariantes são dadas por

$$\begin{aligned} D_t\psi &= \partial_t\psi + igA_0 * \psi, \\ D_i\psi &= \partial_i\psi + igA_i * \psi. \end{aligned} \quad (4.35)$$

A representação gráfica das regras de Feynman é dada na figura (4.1) e as correspondentes expressões analíticas são:
(i) O propagador do campo de matéria:

$$S(p) = \frac{i}{p_0 - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + i\epsilon}, \quad (4.36)$$

(ii) O propagador do campo auxiliar:

$$\Delta_{B_0}(p) = -\frac{i}{\kappa}, \quad (4.37)$$

(iii) O propagador do campo de fantasma:

$$G(p) = -\frac{i}{\mathbf{p}^2}, \quad (4.38)$$

(iv) O propagador do campo de calibre no limite $\xi \to 0$ é

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\bar{k}^\lambda}{\kappa\bar{\mathbf{k}}^2}, \quad (4.39)$$

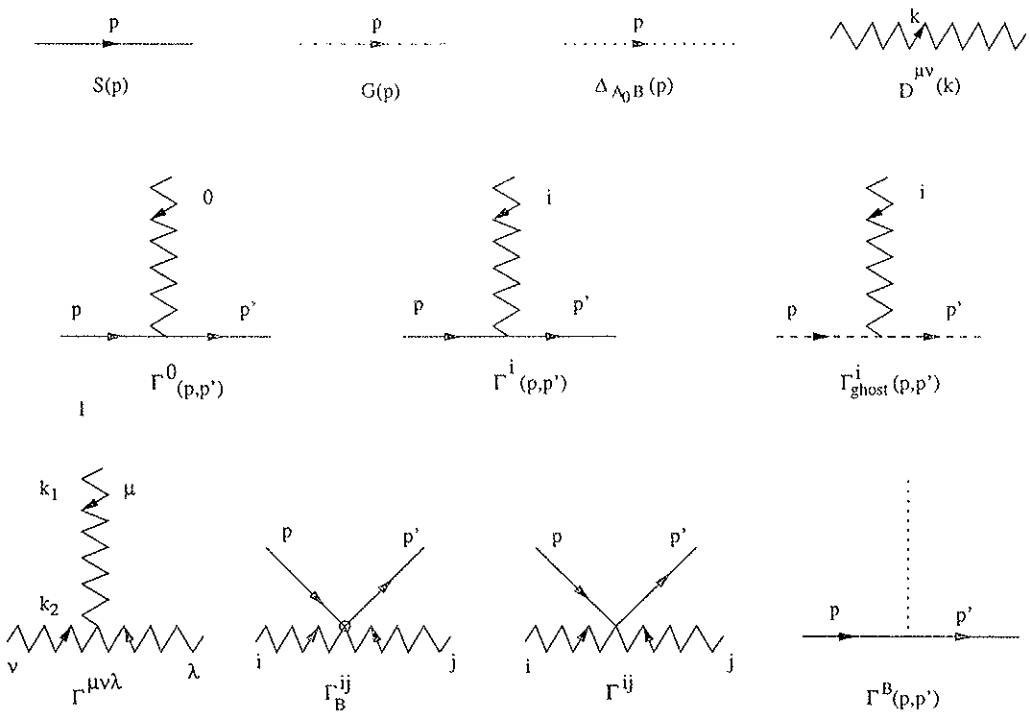


Figura 4.1: Regras de Feynman.

onde $\bar{k}^\lambda=(0,\mathbf{k})$.

(v) As expressões associadas aos vértices são:

$$\Gamma^0(p,p') = -ige^{ip\theta p'}, \tag{4.40}$$

$$\Gamma^i(p,p') = \frac{ig}{2m}(p+p')^i e^{ip\theta p'}, \tag{4.41}$$

$$\Gamma^{B_0}(p,p') = i\lambda e^{ip\theta p'}, \tag{4.42}$$

$$\Gamma^i_{fantasma}(p,p') = -2gp^{\prime i}\sin(p\theta p'), \tag{4.43}$$

$$\Gamma^{\mu\nu\lambda}(k_1,k_2) = 2ig\kappa\varepsilon^{\mu\nu\lambda}\sin(k_1\theta k_2), \tag{4.44}$$

$$\Gamma^{ij}(k_1,k_2,p,p') = -\frac{ig^2}{m}\cos(k_1\theta k_2)e^{ip\theta p'}\delta^{ij}, \tag{4.45}$$

$$\Gamma^{12}(k_1,k_2,p,p') = 2ig\lambda\sin(k_1\theta k_2)e^{ip\theta p'}. \tag{4.46}$$

Na aproximação de árvore e no sistema do centro-de-massa a amplitude de espalhamento, figura (4.2), é dada por

$$\mathcal{A}^0_a(\varphi) = -\frac{ig^2}{m\kappa}\left[\frac{e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}}{1-\cos\varphi} - \frac{e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}}{1+\cos\varphi}\right]\sin\varphi. \tag{4.47}$$

O segundo termo na expressão acima corresponde a permutação do estado final das

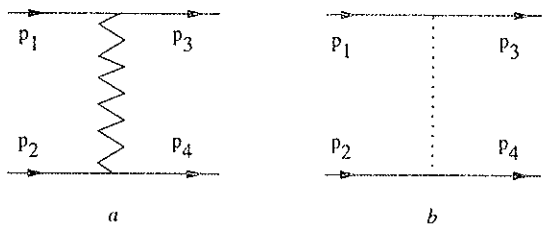


Figura 4.2: Espalhamento à nível de árvore.

partículas. Para a gráfico (4.2*b*), temos

$$\mathcal{A}_b^0(\varphi) = -\frac{4g\lambda}{\kappa}\cos(\bar{\theta}\sin\varphi). \tag{4.48}$$

Portanto, a amplitude total à nível de árvore é

$$\mathcal{A}^0(\varphi) = -\frac{ig^2}{m\kappa}[\cot(\varphi/2)e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} - \tan(\varphi/2)e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}] - \frac{4g\lambda}{\kappa}\cos(\bar{\theta}\sin\varphi). \tag{4.49}$$

Expandindo o resultado acima até termos de primeira ordem no parâmetro $\bar{\theta}$, temos

$$\mathcal{A}^0(\varphi) = -\frac{2ig^2}{m\kappa}\left[\cot\varphi + i\bar{\theta}\right] - \frac{4g\lambda}{\kappa} + \mathcal{O}(\bar{\theta}^2). \tag{4.50}$$

Note que, a correção não-comutativa para a amplitude de espalhamento na aproximação de árvore, até primeira ordem em $\bar{\theta}$, é isotrópica. O último termo corresponde a interação de Pauli e, faz a mesma função da interação quártica.

A contribuição para a amplitude de espalhamento em um laço está representada na figura (4.3). Todos os outros possíveis gráficos em um laço são nulos.

Para o gráfico caixa, após realizar a integração em k_0 (ver apêndice B), temos

$$\mathcal{A}_a(\varphi) = \mathcal{A}_a^1(\varphi) + \mathcal{A}_a^2(\varphi), \tag{4.51}$$

onde

$$\mathcal{A}_a^1(\varphi) = \frac{4g^4}{m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})e^{-i(p_1\theta p_2 - p_3\theta p_4)}e^{2i(p_1-p_3)\theta k}}{(\mathbf{k}-\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}, \tag{4.52}$$

$$\mathcal{A}_a^2(\varphi) = -\frac{4g^4}{m\kappa^2}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{(\mathbf{p}_1\wedge\mathbf{k})(\mathbf{p}_3\wedge\mathbf{k})e^{i(p_1\theta p_2 + p_3\theta p_4)}e^{2i(p_2-p_3)\theta k}}{(\mathbf{k}+\mathbf{p}_1)^2(\mathbf{k}-\mathbf{p}_3)^2(\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon)}. \tag{4.53}$$

As amplitudes acima foram calculadas no capítulo anterior supondo que o parâmetro da não-comutatividade é muito pequeno e realizados até primeira ordem em θ. Daí a amplitude total para o gráfico caixa é finita, fornecendo

$$\mathcal{A}_a(\varphi) = -\frac{g^4}{2\pi m\kappa^2}\left[\ln(2\sin\varphi) + i\pi\right] - \frac{i\bar{\theta}g^4\sin\varphi}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]. \tag{4.54}$$

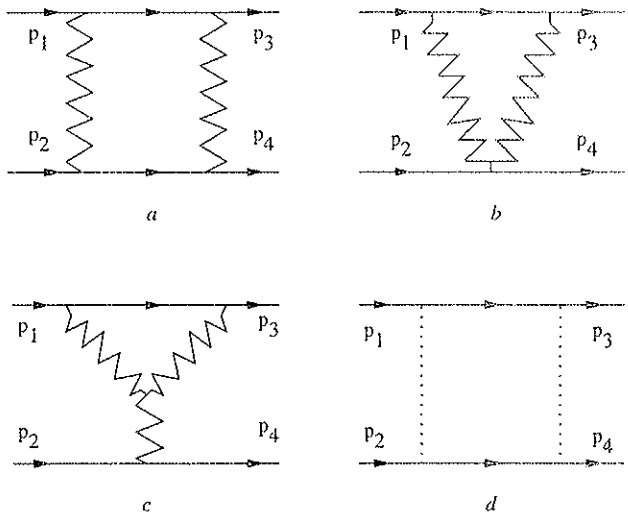


Figura 4.3: Espalhamento em um laço.

A contribuição do gráfico triângulo, figura (4.3*b*), dá

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2}e^{i(p_1\theta p_3+p_2\theta p_4)}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{\mathbf{k}\cdot(\mathbf{k}-\mathbf{q})}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\left[1+e^{-2iq\theta k}\right]\\ &\quad +(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4),\end{aligned} \tag{4.55}$$

onde $\mathbf{q}=\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_3$ é o momento transferido.

A computação da parte planar é realizada de modo usual e esta integral é logaritmicamente divergente por contagem de potência. Para regularizá-la, impomos um corte ultravioleta Λ de modo que a amplitude de espalhamento total para a parte planar do gráfico (4.3*b*) é

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b^p(\varphi) &= -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}\left[\cos(\bar{\theta}\sin\varphi)\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right)\right.\\ &\quad \left.-\ln[2\sin(\varphi/2)]e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}-\ln[2\cos(\varphi/2)]e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right],\end{aligned} \tag{4.56}$$

A integral da parte não-planar do gráfico triângulo, após realizarmos a integrações nos momentos [47], obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_b^{np}(\varphi) &= -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}\int_0^1 dx\left[\left(K_0(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2})-\sqrt{a^2\bar{\theta}^2}K_1(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2})\right)e^{i\bar{\theta}\sin\varphi}\right.\\ &\quad \left.+\left(K_0(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2})-\sqrt{b^2\bar{\theta}^2}K_1(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2})\right)e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right],\end{aligned} \tag{4.57}$$

onde $K_0(z)$ e $K_1(z)$ são as funções de Bessel do segundo tipo, com $a^2=x(1-x)4^2\sin^4(\varphi/2)$ e $b^2=x(1-x)4^2\cos^4(\varphi/2)$.

Para o gráfico com três gluons, figura (4.3*c*), temos

$$\mathcal{A}_c(\varphi) = \mathcal{A}_c^1(\varphi) + \mathcal{A}_c^2(\varphi) + \mathcal{A}_c^3(\varphi), \tag{4.58}$$

onde

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_c^1(\varphi) &= \frac{g^4}{4m\kappa^2} e^{i(p_1\theta p_3 + p_2\theta p_4)} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}) - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right] \\
&\quad \times \left[1 - e^{-2iq\theta k}\right] + (p_1 \leftrightarrow p_2) + (p_3 \leftrightarrow p_4) + (p_1 \leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3 \leftrightarrow p_4), \\
\mathcal{A}_c^2(\varphi) &= \frac{g^4}{4m\kappa^2} e^{i(p_1\theta p_3 + p_2\theta p_4)} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2 - 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q})(\mathbf{k}\cdot\mathbf{p}_1)}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right] \left[1 - e^{-2iq\theta k}\right] \\
&\quad + (p_1 \leftrightarrow p_2) + (p_3 \leftrightarrow p_4) + (p_1 \leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3 \leftrightarrow p_4), \\
\mathcal{A}_c^3(\varphi) &= -\frac{g^4}{4m\kappa^2} e^{i(p_1\theta p_3 + p_2\theta p_4)} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{(\mathbf{k}\cdot\mathbf{q}')\mathbf{q}^2}{\mathbf{k}^2\mathbf{q}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right] \left[1 - e^{-2iq\theta k}\right] \\
&\quad + (p_1 \leftrightarrow p_2) + (p_3 \leftrightarrow p_4) + (p_1 \leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3 \leftrightarrow p_4).
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Adotando o mesmo procedimento para o gráfico (4.3*c*), obtemos as contribuições planar e não-planar como segue

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_c^p(\varphi) &= \frac{g^4}{4\pi m\kappa^2} \left[\cos(\bar{\theta}\sin\varphi)\left[\ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mathbf{p}^2}\right) + 1\right]\right. \\
&\quad \left. - \ln[2\sin(\varphi/2)]e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} - \ln[2\cos(\varphi/2)]e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right].
\end{aligned} \tag{4.60}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_c^{np}(\varphi) &= -\frac{g^4}{4\pi m\kappa^2} \int_0^1 dx \left[[(3 + 2i\bar{\theta}\sin\varphi)K_0(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2})\right. \\
&\quad - \sqrt{a^2\bar{\theta}^2}K_1(\sqrt{a^2\bar{\theta}^2})]e^{i\bar{\theta}\sin\varphi} + [(3 - 2i\bar{\theta}\sin\varphi)K_0(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2}) \\
&\quad \left. - \sqrt{b^2\bar{\theta}^2}K_1(\sqrt{b^2\bar{\theta}^2})]e^{-i\bar{\theta}\sin\varphi}\right].
\end{aligned} \tag{4.61}$$

A contribuição para o gráfico (4.3*d*) é puramente não-planar,

$$\mathcal{A}_d^{np}(\varphi) = \frac{4mg^2\lambda^2}{\kappa^2} \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{e^{2iq\theta k} + e^{2iq'\theta k}}{(\mathbf{k}^2 - \mathbf{p}^2 - i\epsilon)}\right]. \tag{4.62}$$

Assim, a integração nos momentos [47]

$$\mathcal{A}_d^{np}(\varphi) = \frac{2mg^2\lambda^2}{\pi\kappa^2}[K_0(-i2\sin(\varphi/2)\bar{\theta}) + K_0(-i2\cos(\varphi/2)\bar{\theta})], \tag{4.63}$$

e para $\tilde{\theta}$ pequeno, encontramos

$$\mathcal{A}_d^{np}(\varphi) = -\frac{4mg^2\lambda^2}{\pi\kappa^2}\left[\ln\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right)+\gamma\right] - \frac{2mg^2\lambda^2}{\pi\kappa^2}\ln[2\sin\varphi] + \frac{2img^2\lambda^2}{\kappa^2} + \mathcal{O}(\tilde{\theta}^2). \quad (4.64)$$

Devido a não-comutatividade do espaço o termo magnético contém uma interação do tipo $\psi^\dagger * [A_1, A_2]_* * \psi$ na lagrangeana. Assim, como feito na seção anterior, devemos considerar os gráficos extras, $(4.4a)$ e $(4.4b)$, na amplitude de espalhamento associados ao termo de Pauli. Procedendo desse modo, as expressões analíticas adicionais fornecem:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_e(\varphi) &= -\frac{img^2\lambda^2 e^{i\tilde{\theta}\sin\varphi}}{\kappa^2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{k_1q_2-k_2q_1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right][1-e^{-2iq\theta k}] \\ &\quad +(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4), \end{aligned} \quad (4.65)$$

e

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_f(\varphi) &= \frac{img^2\lambda^2 e^{i\tilde{\theta}\sin\varphi}}{\kappa^2}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\left[\frac{k_1q_2-k_2q_1}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}-\mathbf{q})^2}\right][1-e^{-2iq\theta k}] \\ &\quad +(p_1\leftrightarrow p_2)+(p_3\leftrightarrow p_4)+(p_1\leftrightarrow p_2 \quad \text{e} \quad p_3\leftrightarrow p_4). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Note que as contribuições adicionais referentes ao termo de Pauli são canceladas na soma da mesma forma como acontece no caso comutativo.

Efetuando a integração em x e somando as amplitudes dos gráficos $(4.3b)$ e $(4.3c)$ até primeira ordem em $\tilde{\theta}$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{b+c}^{np}(\varphi) &= \frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}[\ln(\tilde{\theta}/2)+\gamma]+\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}\ln(2\sin\varphi) \\ &\quad +\frac{2i\tilde{\theta}g^4\sin\varphi}{\pi m\kappa^2}\ln[\tan(\varphi/2)]+\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}+\mathcal{O}(\tilde{\theta}^2). \end{aligned} \quad (4.67)$$

Somando as contribuições planares das amplitudes $\mathcal{A}_b^p(\varphi)$ e $\mathcal{A}_c^p(\varphi)$, as divergências ultravioletas são canceladas. O resultado é finito em um laço e até primeira ordem no parâmetro $\tilde{\theta}$ dá

$$\mathcal{A}_{\text{1-laço}}^p(\varphi) = \frac{g^4}{4\pi m\kappa^2}+\mathcal{O}(\tilde{\theta}^2). \quad (4.68)$$

A amplitude de espalhamento para a parte não-planar

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{\text{1-laço}}^{np}(\varphi) &= \frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}+\frac{2img^2\lambda^2}{\kappa^2}+\left(\frac{2g^4}{\pi m\kappa^2}-\frac{2mg^2\lambda^2}{\pi\kappa^2}\right)\ln[2\sin\varphi] \\ &\quad +\frac{4mg^2}{\pi\kappa^2}\left(\frac{g^2}{2m^2}-\lambda^2\right)\left[\ln\left(\frac{\tilde{\theta}}{2}\right)+\gamma\right]+\frac{2i\tilde{\theta}g^4\sin\varphi}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

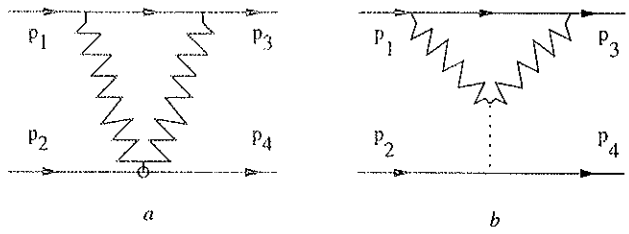


Figura 4.4: Contribuição adicional referente ao termo de Pauli.

O limite $\bar{\theta} \to 0$ é analítico para $\lambda = \pm\frac{g}{\sqrt{2m}}$. Somando todas as contribuições, incluindo a contribuição de árvore, obtemos a amplitude total até um laço

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{1-laço}}(\varphi) &= \mathcal{A}^{p}_{\text{1-laço}}(\varphi) + \mathcal{A}^{np}_{\text{1-laço}}(\varphi) + \mathcal{A}_a(\varphi) \\
&= -\frac{2ig^2}{m\kappa}\cot\varphi - \frac{4g\lambda}{\kappa} + \frac{2\bar{\theta}g^2}{m\kappa} - \frac{ig^4}{2m\kappa^2} + \frac{2img^2\lambda^2}{\kappa^2} + \frac{9g^4}{4\pi m\kappa^2} \\
&\quad + \left(\frac{3g^4}{2\pi m\kappa^2} - \frac{2mg^2\lambda^2}{\pi\kappa^2}\right)\ln[2\sin\varphi] + \frac{4mg^2}{\pi\kappa^2}\left(\frac{g^2}{2m^2} - \lambda^2\right)\left[\ln\left(\frac{\bar{\theta}}{2}\right) + \gamma\right] \\
&\quad + \frac{i\bar{\theta}g^4\sin\varphi}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\bar{\theta}^2).
\end{aligned} \tag{4.70}$$

No ponto em que $\lambda = \pm\frac{g}{\sqrt{2m}}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\text{1-laço}}(\varphi) &= -\frac{2ig^2}{m\kappa}\cot\varphi - \frac{2\sqrt{2}g^2}{m\kappa} + \frac{2\bar{\theta}g^2}{m\kappa} + \frac{ig^4}{2m\kappa^2} + \frac{9g^4}{4\pi m\kappa^2} + \frac{g^4}{2\pi m\kappa^2}\ln[2\sin\varphi] \\
&\quad + \frac{i\bar{\theta}g^4\sin\varphi}{\pi m\kappa^2}\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] + \mathcal{O}(\bar{\theta}^2).
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Observe que o termo de Pauli faz o mesmo papel da interação quártica na teoria escalar não-comutativa, eliminando as divergências infravermelhas. Da mesma forma como acontece na situação comutativa, uma interação quártica não é necessária.

Em resumo, mostramos que a amplitude de espalhamento, em ordem de um laço, para o modelo descrito não apresenta divergências ultravioletas e as divergências logarítmicas IV ($\bar{\theta} \to 0$) são canceladas pelo termo de Pauli. Assim, verificamos que a amplitude de espalhamento de duas partículas idênticas é finito (quando $\bar{\theta} \to 0$) e o resultado é o mesmo comparado com o modelo escalar não-comutativo.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta tese estudamos as teorias não-relativísticas e não-comutativas de partículas de spin 0 e spin 1/2 acoplados minimamente com um campo de Chern-Simons. Para o modelo escalar verificamos que, contrariamente ao resultado obtido na situação comutativa, a inclusão de uma auto-interação quártica não é necessária para garantir a renormalizabilidade ultravioleta do modelo. Entretanto, para obtermos um limite comutativo finito a presença de uma interação de contato invariante de calibre é obrigatória. Realmente, a eliminação completa das divergências infravermelha e ultravioleta ocorre apenas para os valores especiais, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}g^2}{m\kappa}$, da auto-interação quártica invariante de calibre. Para valores pequenos de $\bar{\theta}$, determinamos as correções que modificam qualitativamente e quantitativamente o espalhamento Aharonov-Bohm comutativo e provamos que, em ordem de um laço, o modelo é livre de divergências infravermelhas/ultravioletas perigosas. Mostramos que na aproximação de árvore e até primeira ordem no parâmetro da não-comutatividade, a correção para o espalhamento de duas partículas é isotrópica. Isto está de acordo qualitativamente com o resultado obtido em [24, 41] para o cálculo da holonomia. Entretanto, os nossos resultados diferem em vários aspectos daqueles obtidos em [24]. Por exemplo, exceto para os valores particulares do auto-acoplamento quártico, $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}g^2}{m\kappa}$, nossa amplitude de espalhamento não é analítica para $\bar{\theta}$ pequeno. Além disso, para o ângulo de espalhamento, φ, pequeno, a correção não-comutativa encontrada mostra uma dependência, $\varphi \ln \varphi$. Estas características não estão presentes em [24] e podem ser atribuídos ao uso de formalismos diferentes. De fato, devido a não-localidade inerente da situação não-comutativa, resultados diferentes podem surgir de outros procedimentos. Além disso, a definição especial para o produto Moyal em coordenadas polares adotado em [24] pode

originar contribuições que não estão presentes na definição usual.

Verificamos para o caso de partículas de spin 1/2 que a contribuição do termo de Pauli para a amplitude de espalhamento é puramente não-planar e desempenha a mesma função da auto-interação quártica na teoria escalar, cancelando as divergências infravermelhas. O cancelamento das divergências ultravioletas ocorre da mesma forma como no caso escalar.

Convem notar, que no limite em que o parâmetro da não-comutatividade tende a zero embora a aproximação de árvore coincida com o do tratamento comutativo, o mesmo não acontece com a contribuição de um laço. Isto ocorre devido o limite da integral ser diferente da integral do limite. Por exemplo, analisando a expressão analítica associada ao gráfico com três gluons, eq. (3.120), podemos verificar que ao aplicarmos o limite inicialmente obtemos um resultado nulo. Por outro lado, após realizarmos as integrações encontramos uma singularidade logarítmica quando o limite é aplicado, ver eq. (3.150).

Uma extensão destes trabalhos seria a análise perturbativa da versão relativística [22, 23] e não-comutativa no limite de baixas energias tanto no caso escalar como para partículas de spin 1/2. Isto fica como uma possibilidade futura.

Apêndice A

Cálculo das Integrais

No cálculo dos gráficos em um laço, após realizarmos as integrações em k^0, encontramos integrais do tipo

$$\int_0^\infty d(\mathbf{k})^2 \int_0^{2\pi} d\alpha f(\mathbf{p}, \mathbf{p}', \mathbf{k}, m), \tag{A.1}$$

e, de acordo com a figura (A.1), temos as seguintes relações

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_3 &= |\mathbf{p}|^2 \cos\varphi, && \text{(A.2)}\\
\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{p}_3 &= |\mathbf{p}|^2 \sin\varphi, && \text{(A.3)}\\
\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{k} &= |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos(\alpha - \varphi/2), && \text{(A.4)}\\
\mathbf{p}_3 \cdot \mathbf{k} &= |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \cos(\alpha + \varphi/2), && \text{(A.5)}\\
\mathbf{p}_1 \wedge \mathbf{k} &= |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \sin(\alpha - \varphi/2), && \text{(A.6)}\\
\mathbf{p}_3 \wedge \mathbf{k} &= |\mathbf{p}||\mathbf{k}| \sin(\alpha + \varphi/2). && \text{(A.7)}
\end{aligned}$$

Em particular, para o cálculo do gráfico caixa encontramos as seguintes integrais angulares

$$I_n = \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\cos(n\alpha)}{[2\cos(\alpha - \varphi/2) - f][2\cos(\alpha + \varphi/2) - f]}, \tag{A.8}$$

$$\mathcal{I}_n = \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\cos(n\alpha)}{[2\cos(\alpha - \varphi/2) - f][2\cos(\alpha + \varphi/2) + f]}, \tag{A.9}$$

$$I'_n = \int_0^{2\pi} d\alpha \frac{\sin(n\alpha)}{[2\cos(\alpha - \varphi/2) - f][2\cos(\alpha + \varphi/2) + f]}. \tag{A.10}$$

As integrais acima são calculadas via o teorema de Cauchy-Goursat. Isto é, definindo $Z = \exp(i\alpha)$ e $W = \exp(i\varphi/2)$, e em seguida usando o teorema dos resíduos. Para

exemplificarmos os cálculos, vamos trabalhar com a integral (A.10). Ou seja,

$$I'_n = I^1_n + I^2_n, \tag{A.11}$$

onde

$$I^1_n = -\oint_{|Z|=1} dZ \frac{Z^n}{2Z\left[\frac{Z}{W}+\frac{W}{Z}-f\right]\left[ZW+\frac{1}{ZW}+f\right]}, \tag{A.12}$$

e

$$I^2_n = -\oint_{|Z|=1} dZ \frac{Z^n}{2Z\left[\frac{Z}{W}+\frac{W}{Z}+f\right]\left[ZW+\frac{1}{ZW}-f\right]}, \tag{A.13}$$

Cálculo de resíduos para I^1_n e I^2_n: Temos que

$$I^1_n = -\oint_{|Z|=1} dZ \frac{Z^{n+1}}{2(Z-WZ_-)(Z-WZ_+)\left(Z+\frac{Z_-}{W}\right)\left(Z+\frac{Z_+}{W}\right)}, \tag{A.14}$$

e

$$I^2_n = -\oint_{|Z|=1} dZ \frac{Z^{n+1}}{2(Z+WZ_-)(Z+WZ_+)\left(Z-\frac{Z_-}{W}\right)\left(Z-\frac{Z_+}{W}\right)}, \tag{A.15}$$

onde

$$Z_\pm = \frac{1}{2}\left[f \pm \sqrt{f^2-4}\right]. \tag{A.16}$$

O integrando em I_n possui dois pólos simples no círculo unitário. São eles:

$$Z = WZ_- \quad \text{e} \quad Z = -\frac{Z_-}{W} \tag{A.17}$$

em I^1_n e

$$Z = -WZ_- \quad \text{e} \quad Z = \frac{Z_-}{W} \tag{A.18}$$

em I^2_n. Assim, usando o teorema dos resíduos, obtém-se

$$I'_n = -\frac{\pi\left[1-(-1)^n\right]}{\cos(\varphi/2)B_-\sqrt{f^2-4}}\left[Z_-^{n-1}\sin\left[(n+1)\frac{\varphi}{2}\right]+Z_-^{n+1}\sin\left[(n-1)\frac{\varphi}{2}\right]\right], \tag{A.19}$$

onde

$$B_- = f^2-2(1-\cos\varphi) \quad \text{e} \quad f = \frac{\mathbf{k}^2+\mathbf{p}^2}{|\mathbf{k}||\mathbf{p}|}. \tag{A.20}$$

De modo análogo, obtemos os seguintes resultados para as integrais:

$$I_n = \frac{2\pi}{B_+\sin(\varphi/2)\sqrt{f^2-4}}\left[Z_-^{n-1}\sin\left[(n+1)\frac{\varphi}{2}\right]+Z_-^{n+1}\sin\left[(n-1)\frac{\varphi}{2}\right]\right], \tag{A.21}$$

$$\mathcal{I}_n = -\frac{\pi\left[1+(-1)^n\right]}{2\cos(\varphi/2)B_-\sqrt{f^2-4}}\left[Z_-^{n-1}\cos\left[(n+1)\frac{\varphi}{2}\right]+Z_-^{n+1}\cos\left[(n-1)\frac{\varphi}{2}\right]\right], \tag{A.22}$$

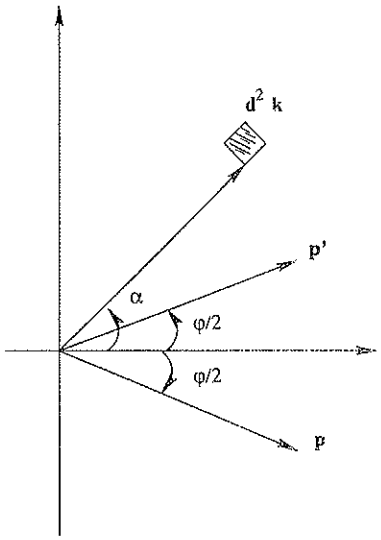


Figura A.1: $\mathbf{p}_1$=$\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_3$=$\mathbf{p}'$ e φ é o ângulo de espalhamento.

onde

$$B_+ = f^2 - 2(1+\cos\varphi). \tag{A.23}$$

Para os valores de $n = 0, 1, 2$ e 3, obtemos

$$I_0 = \frac{2\pi f}{B_+\sqrt{f^2-4}}, \quad \mathcal{I}_0 = -\frac{2\pi f}{B_-\sqrt{f^2-4}}, \quad I_0' = 0, \tag{A.24}$$

$$I_1 = \frac{2\cos(\varphi/2)I_0}{f}, \quad \mathcal{I}_1 = 0, \quad I_1' = -\frac{4\pi\sin(\varphi/2)}{B_-\sqrt{f^2-4}}, \tag{A.25}$$

$$I_2 = I_0 - \frac{\pi f}{\sqrt{f^2-4}} + \pi, \quad \mathcal{I}_2 = -\mathcal{I}_0 - \frac{\pi f}{\sqrt{f^2-4}} + \pi, \quad I_2' = 0, \tag{A.26}$$

$$I_3 = \left[1 + B_+ - \frac{B_+ f^2}{2}\right] I_1 + 2\pi\cos(\varphi/2) f, \quad \mathcal{I}_3 = 0,$$

$$I_3' = -\left[1 + B_- - \frac{B_- f^2}{2}\right] I_1' + 2\pi\sin(\varphi/2) f. \tag{A.27}$$

Apêndice B

Integração em k^0

Vamos determinar o valor da integral

$$I_{k^0} = \int \frac{dk^0}{(2\pi)}\Delta(p_1 - k) = \int \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{i}{\left[p_1^0 - k^0 - \frac{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k})^2}{2m} + i\epsilon\right]}. \tag{B.1}$$

No centro de massa temos que

$$p_1^0 = \frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \tag{B.2}$$

logo,

$$I_{k^0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{i}{\left(-k^0 + \frac{2\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{k} - \mathbf{k}^2}{2m} + i\epsilon\right)} = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{(2\pi)} \frac{1}{(k^0 - a - i\epsilon)}, \tag{B.3}$$

onde

$$a = \frac{2\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{k} - \mathbf{k}^2}{2m}, \tag{B.4}$$

pelo teorema dos resíduos, temos um pólo simples em $k^0 = a + i\epsilon$ e o resíduo é $b_1 = 1$. A integral acima é do tipo

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz = 2i\pi b_1, \tag{B.5}$$

onde C_R é o semicírculo superior do círculo $|z| = R$. Assim,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x - a} + \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta} - a} = 2i\pi 1, \tag{B.6}$$

segue-se, que o limite, quando R tende para o infinito, da segunda integral é

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta} - a} = \lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta} - a/R} = i\pi, \tag{B.7}$$

então,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}\frac{dx}{x-a}=2i\pi-i\pi=i\pi. \tag{B.8}$$

Portanto, o resultado da integral é

$$I_{k^0}=-i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk^0}{(2\pi)}\frac{1}{(k^0-a-i\epsilon)}=-\frac{i}{2\pi}(i\pi)=\frac{1}{2} \tag{B.9}$$

A outra integral que iremos calcular é dada por,

$$\begin{aligned} I_{k^0} &= \int\frac{dk^0}{(2\pi)}\Delta(k)\Delta(p_1+p_2-k) \\ &= -\int\frac{dk^0}{(2\pi)}\frac{1}{\left(k^0-\frac{\mathbf{k}^2}{2m}+i\epsilon\right)\left(p_1^0+p_2^0-k^0-\frac{(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{k})^2}{2m}+i\epsilon\right)}. \end{aligned} \tag{B.10}$$

No centro de massa temos que

$$p_1^0=p_2^0=\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m}=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \tag{B.11}$$

e

$$(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{k})^2=\mathbf{k}^2, \tag{B.12}$$

logo,

$$I_{k^0}=\int\frac{dk^0}{(2\pi)}\frac{1}{\left(k^0-\frac{\mathbf{k}^2}{2m}+i\epsilon\right)\left(k^0+\frac{(\mathbf{k}^2-2\mathbf{p}^2)}{2m}-i\epsilon\right)}. \tag{B.13}$$

Pelo teorema dos resíduos, obtemos

$$I_{k^0}=\frac{-im}{\mathbf{k}^2-\mathbf{p}^2-i\epsilon}. \tag{B.14}$$

Referências Bibliográficas

[1] N. Seiberg, E. Witten, JHEP **9909**, 032 (1999), hep-th/9908142.

[2] H. S. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).

[3] L. D. Landau and L. M. Lifschitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory* (Pergamon Press, Oxford, 1977); R. J. Szabo, Int. J. Mod. Phys. A **19**, 1837 (2004), physics/0401142; R. Jackiw, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 108, 30 (2002), hep-th/0110057.

[4] S. Doplicher, K. Fredenhagen, J. E. Roberts, Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995), hep-th/0303037.

[5] T. Filk, Phys. Lett. B **376**, 53 (1996).

[6] D. Bigatti, L. Susskind, Phys. Rev. D **62**, 066004 (2000), hep-th/9908056.

[7] S. Minawalla, M. Van Raamsdonk, N. Seiberg, JHEP **0002**, 020 (2000), hep-th/9912072.

[8] M. Hayakawa, Phys. Lett. B **478**, 394 (2000); M. Hayakawa, *Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on* $\mathbf{R}^4$, hep-th/9912167; A. Matusis, L. Susskind, N. Toumbas, JHEP **0012**, 002 (2000), hep-th/0002075; L. Bonora, M. Salizzoni, Phys. Lett. B **504**, 80 (2001), hep-th/0011088; C. P. Martin, D. Sanchez-Ruiz, Nucl. Phys. **B598**, 348 (2001), hep-th/0012024.

[9] A. Armoni, Nucl. Phys. **B593**, 229 (2001), hep-th/0005208.

[10] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, Nucl. Phys. **B587**, 299 (2000), hep-th/0005272; A. A. Bichl, J. M. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda and R. Wulkenhaar, JHEP **0010**, 046 (2000), hep-th/0007050.

[11] A. A. Bichl, M. Ertl, A. Gerhold, J. M. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, V. Putz, M. Schweda, and R. Wulkenhaar, *Noncommutative U(1) Super-Yang-Mills Theory: Perturbative Self-Energy Corrections*, hep-th/0203141.

[12] A. F. Ferrari, H. O Girotti, M. Gomes, A. Yu. Petrov, A. A. Ribeiro, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **69**, 025008 (2004), hep-th/0309154.

[13] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. **73**, 977 (2001), hep-th/0106048; R. J. Szabo, Phys. Rept. **378**, 207 (2003), hep-th/0109162; M. Gomes, *Renormalization in Noncommutative Field Theory*, in Proceedings of the XI Jorge André Swieca Summer School, Particle and Fields, edited by G. A. Alves, O. J. P. Éboli, and V. O. Rivelles (World Scientific, Singapore 2002); A. Micu, M. M. Sheikh-Jabbari, JHEP **01**, 025 (2001), hep-th/0008057; H. O. Girotti, "Noncommutative Quantum Field Theories", hep-th/0301237.

[14] Y. Aharonov and Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).

[15] Akira Tonomura *et al*, Phys. Rev. Lett. **48**, 1443 (1982).

[16] E. L. Feinberg, Sov. Phys. Usp. **5**, 753 (1963); E. Corinaldesi and F. Rafeli, Am. J. Phys. **46**, 1185 (1978); K. M. Purcell and W. C. Henheberg, Am. J. Phys. **46**, 1255 (1978).

[17] Y. Aharonov, C. Au, E. Lerner and J. Liang, Phys. Rev. D **29**, 2396 (1984); B. Nagel, *ibid.* **32**, 3328 (1985).

[18] O. Bergman and G. Lozano, Ann. Phys. (N. Y.) **229**, 416 (1994), hep-th/9302116.

[19] C. R. Hagen, Phys. Rev. D **31**, 848 (1985).

[20] S-J. Kim, Phys. Lett. B **343**, 244 (1995).

[21] D. Bak and O. Bergman, Phys. Rev. D **51**, 1994 (1995), hep-th/9403104.

[22] M. Gomes, L. C. Malacarne and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **62** 045019 (2000), hep-th/0004168.

[23] M. Boz, F. Fainberg and N. K. Pak, Phys. Lett. A **207**, 1 (1995); M. Gomes, J. M. C. Malbouisson and A. J. da Silva, *ibid.* **236**, 373 (1997), hep-th/9611027.

[24] H. Falomir, J. Gamboa, M. Loewe, F. Méndez, and J. C. Rojas, Phys. Rev. D **66**, 045018 (2002), hep-th/0203260.

[25] M. A. Anacleto, M. Gomes, A. J. da Silva, D. Spehler, Phys. Rev. D **70**, 085005 (2004), hep-th/0407133.

[26] M. A. Anacleto, M. Gomes, A. J. da Silva, D. Spehler, *Noncommutative Field Theory: Nonrelativistic Fermionic Field Coupled to the Chern-Simons Field in 2+1 Dimensions*, hep-th/0411168.

[27] T. Lee and P. Oh, Ann Phys. (N. Y.) **235**, 413 (1994); H. K. Lo and J. Preskill, Phys. Rev. D **48**, 4821 (1993); T. T. Wu and C. N. Yang, Phys. Rev. D **12**, 3845 (1975); P. A. Horvathy, Phys. Rev. D **33**, 407 (1986).

[28] M. Gomes, L. C. Malacarne and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **59**, 045015 (1999), hep-th/9809062.

[29] C. R. Hagen, Phys. Rev. Lett. **64**, 503 (1990); C. R. Hagen, Phys. Rev. D **41**, 2015 (1990); C. R. Hagen, Phys. Rev. D **48**, 5935 (1993), hep-th/9308009.

[30] M. Fleck, A. Foester, H. O. Girotti, M. Gomes, J. R. S. Nascimento and A. J. da Silva, Int. J. Mod. Phys. A **12** 2889 (1997); H. O. Girotti, M. Gomes, J. R. S. Nascimento and A. J. da Silva, Phys. Rev. D **56**, 3623 (1997), hep-th/9703200.

[31] Sean M. Carroll, Jeffrey A. Harvey, V. Alan Kostelecky, Charles D. Lane and Takemi Okamoto, Phys. Rev. Lett. **87**, 141601 (2001), hep-th/0105082.

[32] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Belfer Graduate School on Science, Yeshiva University (New York, 1964).

[33] Jaume Gomis and Thomas Mehen, Nucl. Phys. **B591**, 265 (2000), hep-th/0005129; D. Bahns, S. Doplicher, K. Fredenhagen andn G. Piacitelli, Phys. Lett. B **533**, 178 (2002), hep-th/0201222.

[34] M. R. Douglas, C. Hull, JHEP **02**, 008 (1998), hep-th/9711165.

[35] K. Matsubara, Phys. Lett. B **482**, 417 (2000), hep-th/0003294.

[36] L. Susskind, *The Quantum Hall Fluid and Noncommutative Chern-Simons Theory*, hep-th/0101029; E. Fradkin, V. Jejjala e R. G. Leigh, Nucl. Phys. **B642**, 483 (2002),

R. B. Laughlin, Phys. Rev. **B39**, 9679 (1989); Y.-H. Chen, F. Wilczek, E. Witten and B. Halperin, Int. J. Mod. Phys. B **3**, 1001 (1989); *The Quantum Hall Effect*, edited by R. Prange and S. Girvin (Springer, Berlim, 1990).

[37] P. B. Wiegmann, Phys. Rev. Lett. **60**, 821 (1988); F. Wilczek, *Fractional Statistics and Anyon Superconductivity*, Word Scientific, Singapore (1990); A. P. Balachandran, G. Landi, B. Rai, Int. J. Mod. Phys. **A5**, 4501 (1990); A. Zee, 25^0 *Int. Conf. on High Energy Physics*, Singapore (1990), Published in Singapore H. E. Phys. 1990:206-212, Ed. K. K. Phua and Y. Yamaguchi.

[38] M. Gomes, J. M. C. Malbouisson, A. G. Rodrigues and A. J. da Silva, J. Phys. A **33**, 5521 (2000), hep-th/0007080; M. Gomes, J. M. C. Malbouisson and A. J. da Silva, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 3157 (1998), hep-th/9801192.

[39] M. Peshkin and A. Tonomura, *The Aharonov-Bohm Effect* (Springer-Verlag, Berlin, 1989).

[40] R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, the Feynman lectures on physics, Vol. II, Addison-Wesley, Reading, MA, 1964; B. R. Holstein, Topics in Advanced Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Redwood, 1992.

[41] M. Chaichian, A. Demichev, P. Presnajder and M. H. Sheikh-Jabbari, Nucl. Phys. **B611**, 383 (2001), hep-th/0101209; Phys. Lett. B **527** 149 (2002), hep-th/0012175.

[42] A. A. Bichl, J. Grimstrup, V. Putz and M. Schweda, JHEP **0007**, 046 (2000), hep-th/0004071.

[43] G-H. Chen, Y-S. Wu, Nucl. Phys. **B593**, 562 (2001), hep-th/0006114.

[44] Ashok Das and M. M. Sheikh-Jabbari, JHEP **0106**, 028 (2001), hep-th/0101029.

[45] F. Ferrari, I. Lazzizzera, *Chern-Simons Field Theories in the Coulomb Gauge*, hep-th/9712076; F. Ferrari, I. Lazzizzera, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 1773 (1998), hep-th/9611224.

[46] Kirk Kaminsky, Nucl. Phys. **B679**, 189 (2004), hep-th/0310011.

[47] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov, *Generalized Functions*, Vol. 1, Academic Press, 1964.