

Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

SBI-IFUSP



305M810T4175

# Caos Homoclínico no Espaço dos Parâmetros

Rene Orlando Medrano-T.

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 4175

*Tese de doutorado apresentada ao  
Instituto de Física para a obtenção  
do título de Doutor em Ciências.*

Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas - IFUSP (Orientador)  
Prof. Dr. Celso Grebogi - IFUSP  
Prof. Dr. Jose Roberto Castilho Piqueira - EP/USP  
Prof. Dr. Marcus Aloizio Martinez Aguiar - UNICAMP  
Prof. Dr. Thomas Braun - UFRGS

*Iberê Luiz Caldas*

São Paulo  
2004

  
Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação

def. 26/11/04

530.155352

MUSC

D

Ex. 1

### FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Medrano -Torricos, Rene Orlando

Caos Homoclínico no Espaço dos Parâmetros.  
São Paulo - 2004.

Tese (Doutoramento) – Universidade de São Paulo  
Instituto de Física - Depto. de Física Aplicada

Orientador: Prof. Dr. Iberê Luiz Caldas.  
Área de Concentração: Física

Unitermos

1. Caos (Sistemas Dinâmicos);
2. Sistema Dissipativo;
3. Circuitos Eletrônicos.

USP/IF/SBI-066/2004

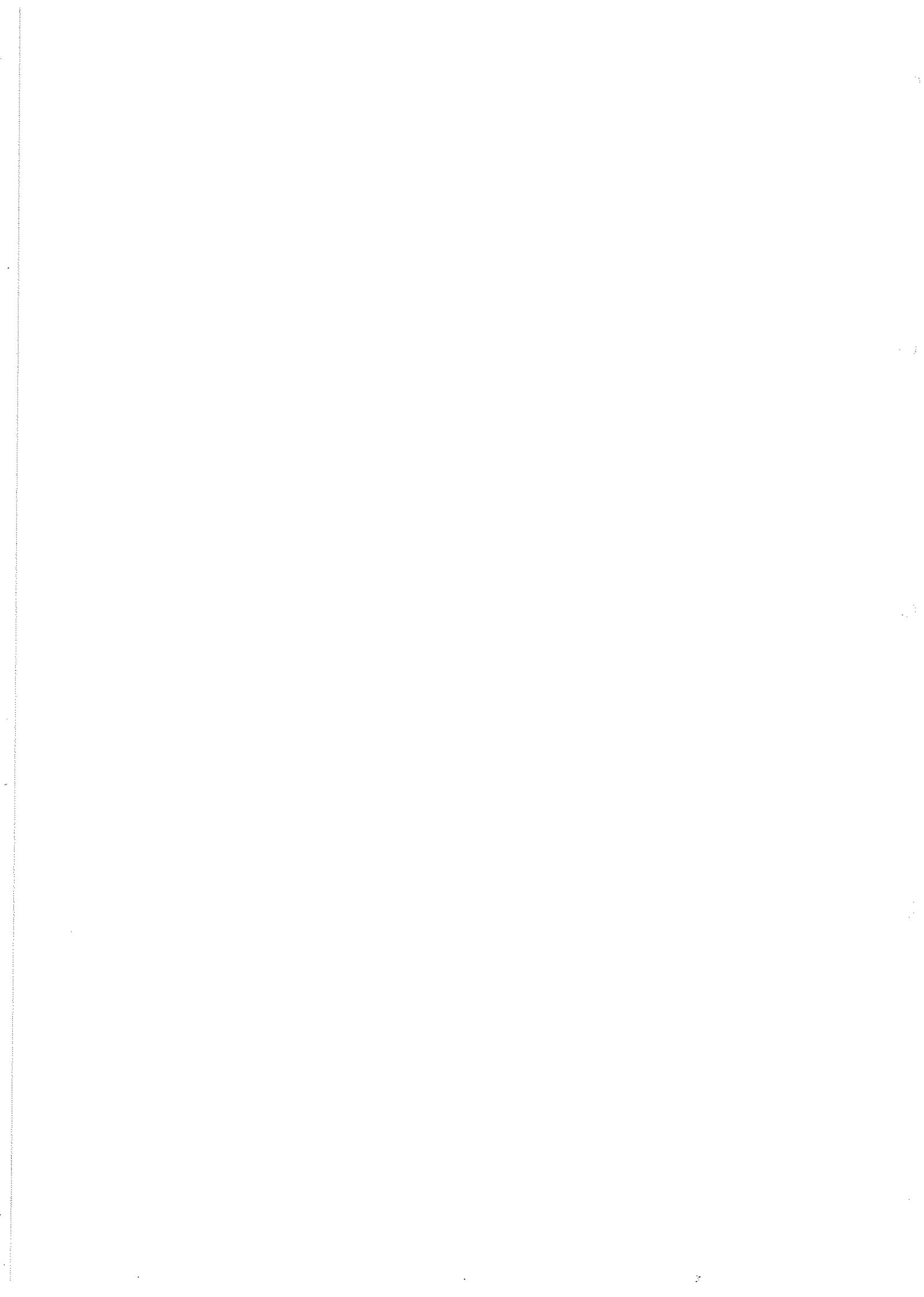
SBI-IFUSP



305M810T4175

# Dedicatória

Aos meus pais, Rene e Dayssi, ao meu irmão Eddie, *in memoriam*, aos meus irmãos, Fernando, Jorge e Igor, ao meu filho Maxwilliam e à minha esposa Sandra, todos responsáveis pelas transformações na minha vida, com amor e carinho.



# Agradecimentos

Aos meus queridos pais, Rene e Dayssi, pelo amor, carinho e confiança que sempre depositaram em mim.

Aos meus irmãos, Eddie, Fernando, Jorge e Igor. Incontestável sorte de tê-los. Eddie, *in memoriam*.

Ao meu filho Maxwilliam, pela compreensão e paciência.

À Sandra, minha esposa, pelo reconhecimento da sua dedicação, compreensão e amor. E pela parte que me complementa.

Ao Prof. Iberê Luiz Caldas pela orientação, apoio, incentivo e atenção ímpar que teve comigo ao longo de todos estes anos. Uma amizade ancorada no respeito e na consideração que guardo como um prêmio.

Ao Prof. José Carlos Sartorelli pelo interesse e discussões de procedimentos experimentais a serem tomados nos experimentos propostos nesta tese. E pela demonstração de credibilidade pelo trabalho que foi desenvolvido.

Ao Prof. Celso Grebogi pelas aulas nos corredores e às inúmeras referências de trabalhos que ajudaram no desenvolvimento desta tese.

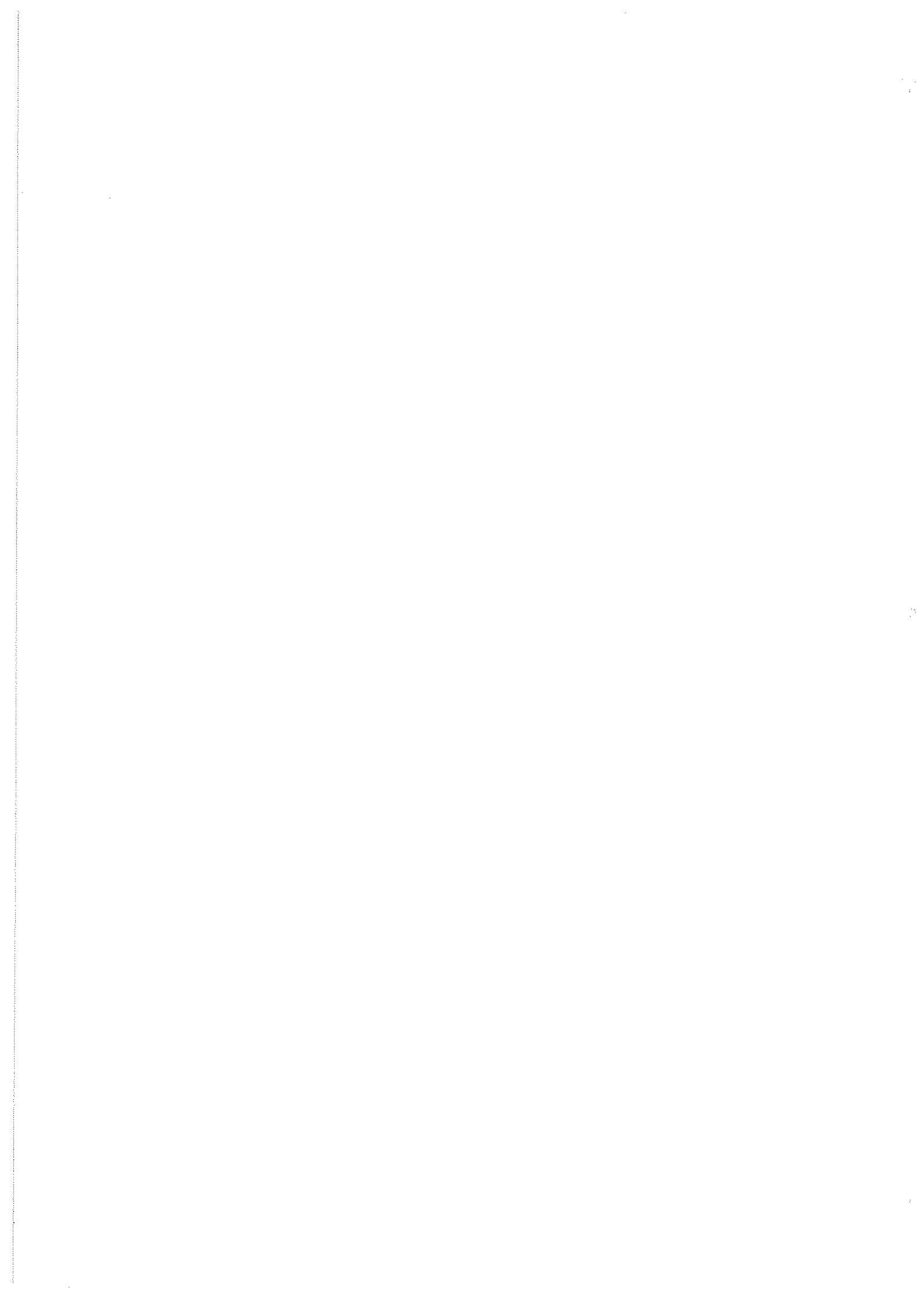
Ao grande amigo e colaborador Dr. Murilo da Silva Baptista, pelo entusiasmo contagiante, alegre e motivador. Sempre pronto para discussões, almoços, baladas ...

Ao MSc. Marcelo Bussoti pela presença concreta e incondicional nas situações mais adversas que podem ocorrer dentro de um instituto de pesquisa. Não tem preço. No dia a dia, um irmão.

Aos meus colegas de sala, pelo aprendizado e convivência diária. Em especial, ao Dr. Elton Silva, o *linux man* do grupo, sempre muito atencioso.

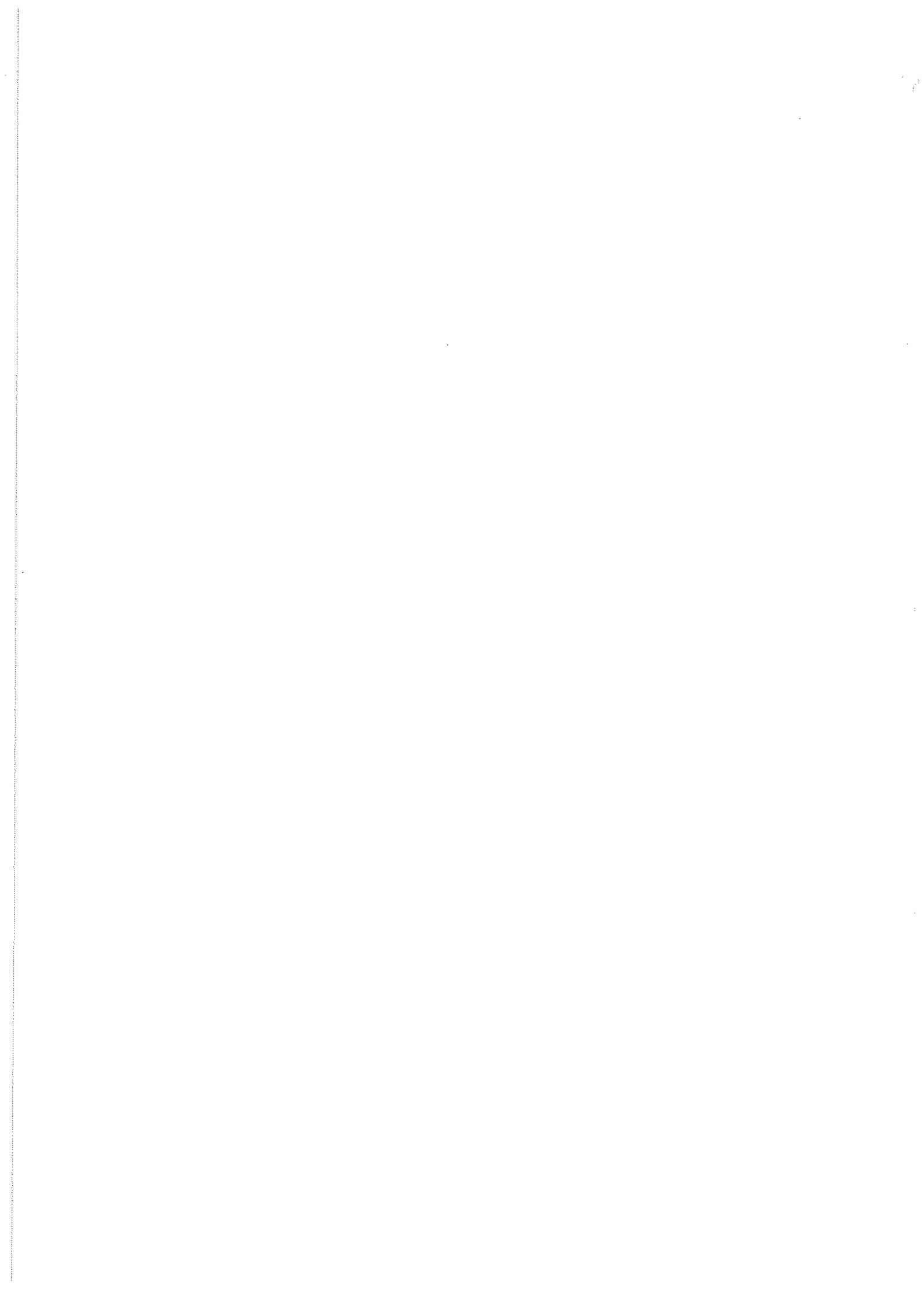
E, para descansar, muito obrigado aos meus desconhecidos amigos enxadristas da Internet.

Agradeço à Fapesp pelo suporte financeiro concedido.



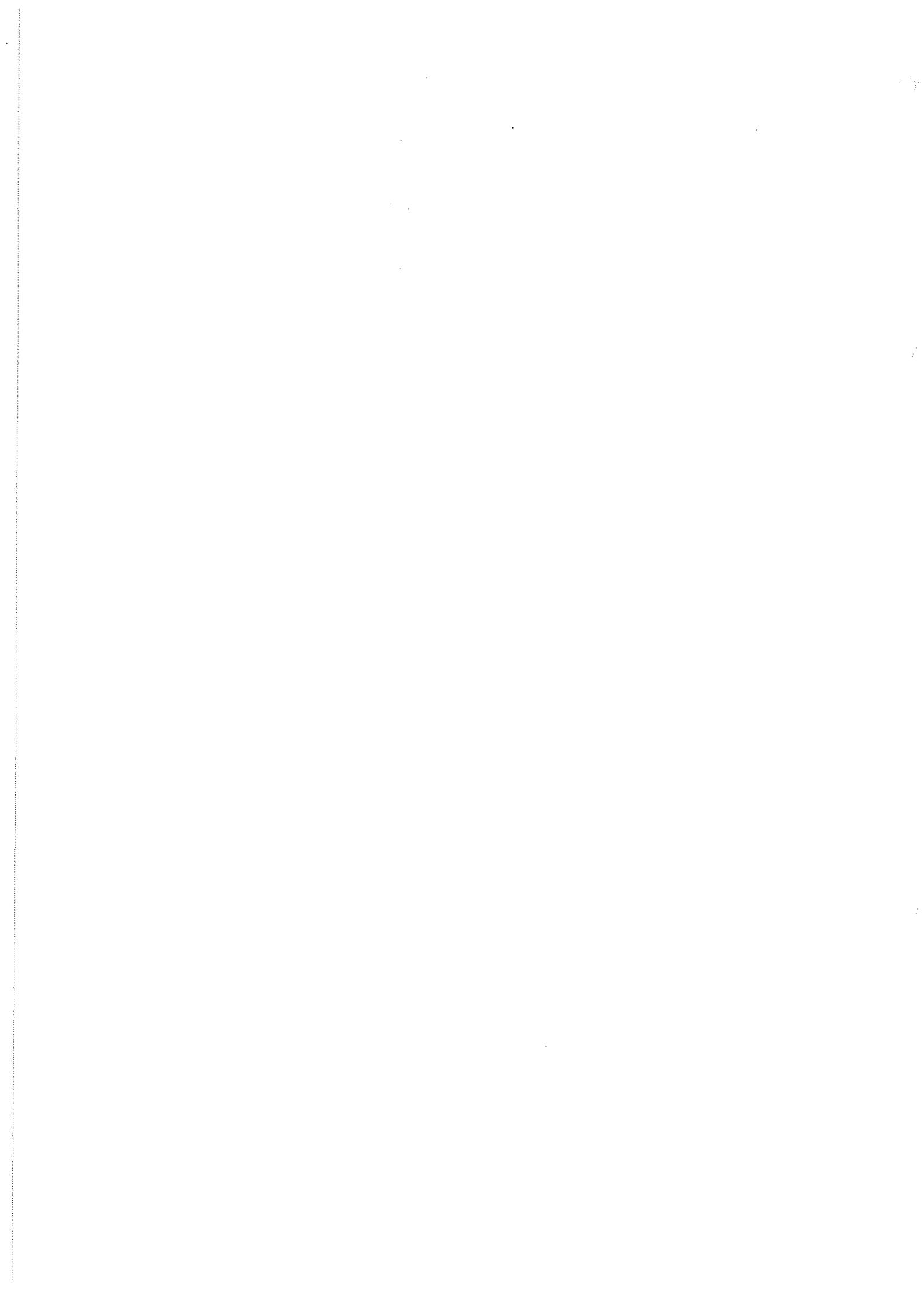
*"O tabuleiro é o mundo, as peças são o fenômeno do universo, as regras do jogo são as leis da natureza. O jogador no outro lado está oculto a nós."*

Thomas H. Huxley



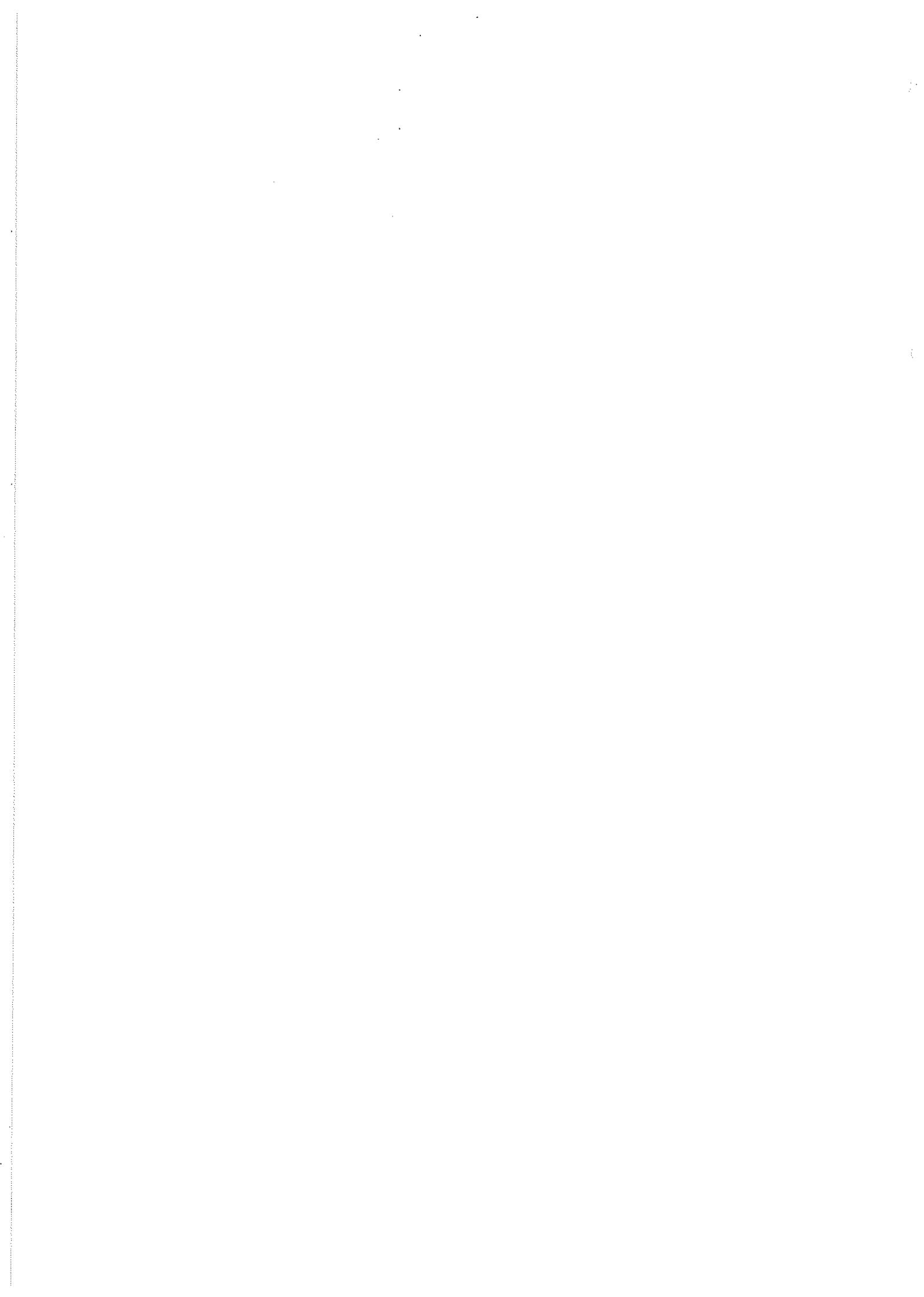
# Resumo

Nesta tese analisamos o comportamento dinâmico, no espaço dos parâmetros, de duas versões do circuito eletrônico Double Scroll, descritas por sistemas, não integráveis, de equações diferenciais lineares por partes. A diferença entre esses circuitos reside na curva característica da resistência negativa, uma contínua e a outra descontínua. O circuito Double Scroll é conhecido por apresentar comportamento caótico associado à existência de órbitas homoclínicas. Desenvolvemos métodos numéricos para identificar distintos atratores periódicos e caóticos nesses circuitos. Realizamos um estudo completo das variedades que esses sistemas apresentam, onde demonstramos que o circuito descontínuo não pode formar órbitas homoclínicas. Desenvolvemos um método geral para obter órbitas homoclínicas e heteroclínicas em sistemas lineares por partes. Esse método foi utilizado no circuito contínuo para identificar famílias de órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros. Fazemos um estudo teórico sobre as órbitas homoclínicas, baseado no teorema de Shilnikov, e determinamos a lei de escala geral que descreve as acumulações das infinitas órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros. Utilizando o método de detecção de órbitas homoclínicas, comprovamos, em distintos tipos de órbitas homoclínicas, a validade dessa lei para o circuito Double Scroll contínuo. Além do mais, através da geometria apresentada pelas famílias de órbitas homoclínicas que identificamos e da teoria que permitiu demonstrar a lei de escala, mostramos a existência de estruturas de órbitas homoclínicas que explicam o cenário homoclínico do espaço dos parâmetros. Essas estruturas estão presentes em todos os sistemas para os quais o teorema de Shilnikov se aplica. Finalmente, sugerimos três experimentos para verificar a existência dessas órbitas e a relação delas com a dinâmica do sistema.



# Abstract

In this thesis we study the dynamic behavior, in the parameter space, of two versions of the Double Scroll electronic circuit, whose flows are represented by piecewise non integrable systems. The difference between these circuits is the characteristic curves of the negative resistance, one continuous and the other discontinuous. The Double Scroll circuit is known to present chaotic behavior associated to the existence of homoclinic orbits. We develop numerical methods to identify periodic and chaotic attractors in these circuits. We present a complete study of these systems manifolds and demonstrate that the discontinuous circuit can not form homoclinic orbits. We develop a general method to obtain homoclinic and heteroclinic orbits in piecewise linear systems. This method was used in the continuous circuit to identify homoclinic orbit families in the parameter space. We develop a theoretical study about the homoclinic orbits based on the Shilnikov theorem, determining a general scaling law that describes the accumulations of the infinity homoclinic orbits in the parameter space. Using the detecting homoclinic orbits method, we show the validity of this law for the continuous Double Scroll circuit. Moreover, combining the geometry of the homoclinic orbit families with the scaling law, we show the existence of homoclinic orbits structures of the homoclinic orbits that explain the homoclinic scenario in the parameter space. These structures are present in all systems for which we can apply the Shilnikov theorem. Finally, we suggest three experiments to verify the existence of these orbits and their relation with the system dynamics.

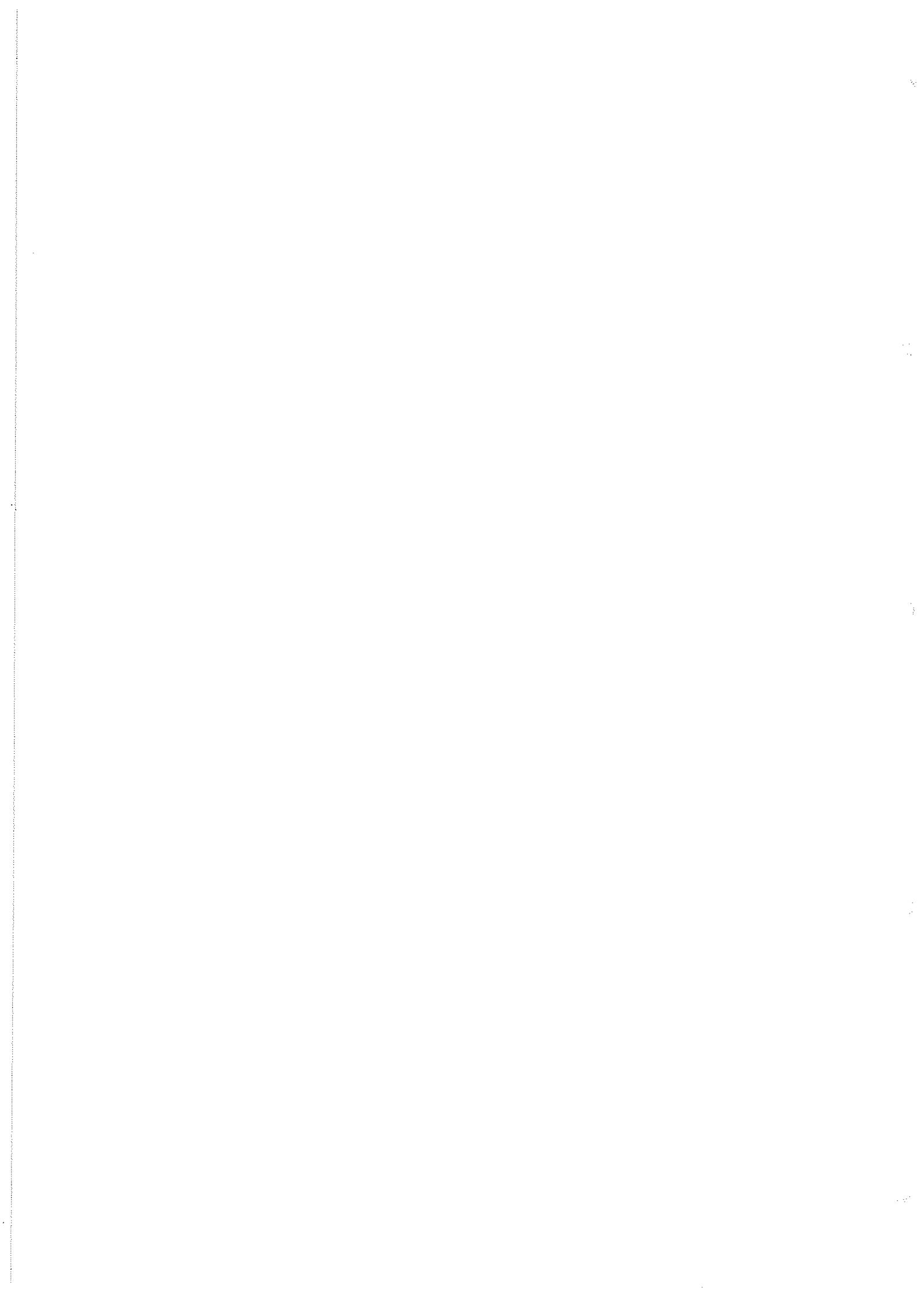


# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Circuito Double Scroll</b>	<b>21</b>
2.1	O circuito eletrônico Double Scroll . . . . .	21
2.2	Sistema Double Scroll . . . . .	24
2.2.1	Coordenadas Naturais . . . . .	25
2.2.2	Coordenadas Adimensionais . . . . .	27
2.2.3	Atratores Característicos . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Análise Linear</b>	<b>35</b>
3.1	Autovalores e Auto Vetores . . . . .	36
3.1.1	Determinando Autovalores . . . . .	37
3.1.2	Determinando Auto Vetores . . . . .	40
3.2	Subespaços . . . . .	43
3.2.1	Sistema Contínuo . . . . .	43
3.2.2	Sistema Descontínuo . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Atratores</b>	<b>49</b>
4.1	Existência de Conjuntos Caóticos . . . . .	51
4.1.1	Teorema de Shilnikov . . . . .	52
4.1.2	Expoente de Lyapunov . . . . .	54
4.2	Tipos de Atratores . . . . .	58
4.2.1	Espaço dos Parâmetros . . . . .	59
4.2.2	Formação dos Atratores . . . . .	65
4.2.3	Coexistência de atratores . . . . .	67
4.2.4	Atratores Caóticos . . . . .	69

<b>5</b>	<b>Bifurcações de Atratores Caóticos</b>	<b>75</b>
5.1	Bifurcações no Sistema de Rössler . . . . .	76
5.2	Bifurcações no Circuito Double Scroll . . . . .	78
5.2.1	Sistema Contínuo . . . . .	81
5.2.2	Sistema Descontínuo . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Variedades</b>	<b>91</b>
6.1	Sistema Descontínuo . . . . .	92
6.1.1	Variedade Instável . . . . .	93
6.1.2	Variedade Estável . . . . .	95
6.2	Sistema Contínuo . . . . .	97
6.2.1	Variedade Instável . . . . .	98
6.2.2	Variedade Estável . . . . .	102
6.2.3	Conjunto Caótico para $t \rightarrow -\infty$ . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas</b>	<b>107</b>
7.1	Método de Obtenção . . . . .	108
7.1.1	Órbitas Homoclínicas . . . . .	109
7.1.2	Órbitas Heteroclínicas . . . . .	119
7.2	Órbitas Homoclínicas $\times$ Variedades . . . . .	121
<b>8</b>	<b>Bifurcações de Órbitas Homoclínicas</b>	<b>125</b>
8.1	Análise Teórica . . . . .	126
8.1.1	Existência de Infinitas Órbitas Homoclínicas . . . . .	127
8.1.2	Lei de Escala . . . . .	132
8.1.3	Transformação do Sistema Double Scroll nos Modos Normais . . . . .	135
8.2	Órbitas Homoclínicas no Espaço dos Parâmetros . . . . .	136
8.2.1	A medida $d$ . . . . .	137
8.2.2	Famílias Primárias . . . . .	139
8.2.3	Famílias Subsidiárias . . . . .	144
8.2.4	Estruturas Homoclínicas . . . . .	151
<b>9</b>	<b>Experiências com Órbitas Homoclínicas</b>	<b>157</b>
9.1	Aspectos Teóricos Gerais . . . . .	158
9.1.1	Coordenadas Adimensionais $\times$ Coordenadas Reais . . . . .	158
9.1.2	Subespaços e as Manifestações do Circuito . . . . .	159
9.2	Experimento I: Órbitas Homoclínicas . . . . .	160

9.3	Experimento II: Famílias de Órbitas Homoclínicas . . . . .	163
9.4	Experimento III: Órbitas Homoclínicas na Fronteira Caos-Caos . . . . .	165
9.5	Circuito eletrônico . . . . .	166
<b>10</b>	<b>Conclusão</b>	<b>169</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>171</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Fenômenos não lineares existem em abundância na natureza. Na física, estão presentes nos mais diversos campos, desde a mecânica quântica, que estuda problemas de baixa dimensão [1], à astrofísica, que lida com problemas envolvendo distâncias interestelares, dado que a própria geodésica é descrita por uma equação não linear [2]. Além do mais, modelos de dinâmica de populações como as equações de Volterra para espécies em competição [3, 4], geração de diferentes espécies de plânctons [5, 6], catalisação de reações químicas [7] e pulsos de neurônios [8] são alguns exemplos, na natureza, cujo comportamento é modelado em sistemas não lineares. A maioria desses sistemas não pode ser resolvido analiticamente, o que dificulta o seu estudo. Por isso é necessário analisá-los através de simulações numéricas. Estes modelos apresentam características comuns, decorrentes da não linearidade, como pontos de equilíbrio instáveis e comportamentos periódicos e caóticos.

A existência de comportamento caótico num sistema dinâmico pode ser desejável, como em reações químicas, onde a catalisação das reações é acelerada nesse regime, ou para o favorecimento de coexistências de espécies na natureza, e indesejável em sistemas onde seja necessária uma dinâmica completamente previsível, como em osciladores eletrônicos de frequência. Nesses casos, garantir a estabilidade de comportamento desses sistemas é fundamental para que cada um deles desempenhe eficientemente o seu papel. Assim, o estudo das transições de comportamento, também chamado de bifurcações, de um sistema dinâmico é um tema de alta relevância.

Uma manifestação decorrente de bifurcações, muito comum em sistemas dinâmicos, é a formação de órbitas homoclínicas no espaço de estado. Órbitas homoclínicas são conjuntos invariantes de um sistema que evoluem para um ponto fixo num tempo  $t \rightarrow \pm\infty$ . Essas órbitas estão intimamente associadas a mudanças dinâmicas [9] em

sistemas físicos, sendo resultado das transformações que as variedades sofrem nas transições de comportamento do sistema dinâmico.

Estudos de uma classe de sistemas em duas dimensões, realizados por Andronov, Leontovich e Gordon [10], mostraram que o surgimento de órbitas homoclínicas implica no surgimento de órbitas periódicas. No sistema de Lorenz elas estão associadas às bifurcações de conjuntos periódicos em conjunto caóticos [11, 12]. No estudo das equações do problema de três corpos [13], no fim do século XIX, Poincaré mostrou que a impossibilidade da sua solução deve-se à presença de órbitas homoclínicas, que provocam a alta sensibilidade às condições iniciais que o problema apresenta. Nos anos sessenta, Smale mostrou que um sistema caótico discreto (mapa) contém infinitas órbitas periódicas, tendo como consequência a alta sensibilidade às condições iniciais [14]. Esse conjunto de órbitas periódicas forma a ferradura de Smale, que é um ícone de sistemas caóticos.

Posteriormente, Shilnikov mostrou que a existência de órbitas homoclínicas de pontos fixos tipo sela, em uma classe tridimensional de sistemas contínuos (fluxo), implica na existência das ferraduras de Smale na vizinhança dessa órbita e, portanto, em caos [15, 16, 17]. Órbitas homoclínicas que atendem a esse teorema são conhecidas como órbitas homoclínicas de Shilnikov. No final dos anos setenta, e começo dos oitenta, os resultados matemáticos de Shilnikov tornaram-se conhecidos por trabalhos publicados em revistas de distintas áreas da física, química e biologia [18, 19, 20, 21, 22].

As órbitas homoclínicas de Shilnikov são importantes em diferentes áreas em que a dinâmica caótica está intrinsecamente ligada a elas. Elas governam a dinâmica de: sistemas de descargas incandescentes [23], pulsos de neurônios [8, 24], intermitência em artérias de coelhos [25], fenômenos de ruído induzido [26], osciladores eletroquímicos [27], e de reações químicas [28, 29, 22]. No laser  $\text{CO}_2$ , órbitas heteroclínicas são responsáveis pelo tempo de retorno da trajetória [30], no entanto, as trajetórias na vizinhança dessa órbita podem ser analisadas da mesma forma com que analisamos a órbita homoclínica.

No espaço dos parâmetros, ocorrem acumulações de órbitas homoclínicas de Shilnikov em outras. As órbitas homoclínicas decorrentes de uma outra são denominadas subsidiárias, enquanto que essa outra é denominada primária. Assim, a simples existência de uma órbita homoclínica primária, para um dado conjunto de parâmetros de controle, implica na existência de um número infinito de outras órbitas homoclínicas subsidiárias [31] para outros parâmetros. A acumulação das subsidiárias na primária obedece uma lei de escala demonstrada em [32]. A existência

de um número arbitrário de distintas subsidiárias foi provada em [33] e, em [34], se demonstrou que, dada a complexidade da distribuição das órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros, não é possível obter-se uma descrição completa delas nesse espaço. No entanto, descrições parciais de algumas subsidiárias foram feitas em [35].

Nesta tese, mostramos que existem muitos tipos de órbitas homoclínicas primárias distintas do tipo descrito na literatura. Além disso, para cada tipo de órbita primária encontrada, existem novas sequências de bifurcações que originam órbitas homoclínicas subsidiárias. Nesse contexto, incluímos as novas órbitas primárias encontradas na teoria de bifurcações para demonstrar a existência de novas sequências de subsidiárias que se acumulam nessas primárias. Além disso, demonstramos que existem acumulações entre subsidiárias no espaço dos parâmetros. Sobre a teoria de bifurcações, demonstramos que a lei de escala, já conhecida, de acumulações de órbitas subsidiárias em uma primária, vale para as novas primárias e, também, para as acumulações entre subsidiárias. Com as previsões que essa teoria de bifurcações oferece e a análise de resultados numéricos, chegamos a determinar as estruturas básicas de órbitas homoclínicas presentes em todo o espaço dos parâmetros do sistema estudado.

Para o estudo de bifurcações escolhemos um sistema que é um paradigma em caos [36], o circuito Double Scroll. O comportamento desse circuito tem sido objeto de investigação por pesquisadores do Instituto de Física [37, 38, 39, 40]. Esse circuito é conhecido por apresentar caos homoclínico e existem estudos em várias versões desse circuito na literatura. Nós analisamos a versão mais tradicional [41], que chamaremos de circuito contínuo, e uma versão em que o fluxo apresenta regiões não suaves [42], que chamaremos de circuito descontínuo. Várias são as vantagens deste sistema; as equações que descrevem o seu fluxo são lineares por parte. Ele apresenta características dinâmicas que são gerais em sistemas não lineares como atratores caóticos (tipo Rössler e Double Scroll), rota para o caos por duplicação de período e uma grande variedade de órbitas homoclínicas. Do ponto de vista experimental, é de fácil implementação, demanda um custo baixo e há um excelente acordo entre teoria e prática. Existe uma grande quantidade de trabalhos que mostram as características que citamos, e podem ser encontradas em [36, 43]. Por esses motivos, o circuito Double Scroll é um excelente sistema físico, tanto para buscar confirmações de teorias através de simulações numéricas, quanto para realizações de vários experimentos.

Para estes sistemas, desenvolvemos métodos de identificação de bifurcações de atratores e de detecção de órbitas homoclínicas. Fizemos um estudo completo das variedades desses sistemas revelando que todas as variedades estáveis têm origem

em duas regiões do espaço de fase e que, no circuito descontínuo, não se formam órbitas homoclínicas porque as variedades estáveis e instáveis não podem se encontrar. Para o circuito contínuo, dividimos a variedade estável, de um ponto fixo, em dois conjuntos segundo suas regiões de origem. Verificamos que, nas proximidades do ponto fixo, esses dois conjuntos tornam-se contínuos e, toda vez que ocorre uma órbita homoclínica, ela está na fronteira desses conjuntos.

Obtivemos as curvas de bifurcações homoclínicas, no espaço dos parâmetros, identificando as órbitas homoclínicas primárias. Estas curvas estruturam as regiões em que se formam as órbitas homoclínicas. Mostramos, ainda, que esse cenário apresenta uma estrutura mínima de organização presente em todo o espaço dos parâmetros. Por esta estrutura mínima estar prevista pela teoria de codimensão um, acreditamos que ela é uma característica geral das órbitas homoclínicas consideradas pelo teorema de Shilnikov [44].

Ainda para o circuito contínuo, propomos três experiências. A primeira permite determinar órbitas homoclínicas de codimensão um, a segunda permite determinar as órbitas numa codimensão dois e a terceira associa o atrator caótico com as órbitas homoclínicas do sistema.

Nesta tese, apresentamos um estudo de bifurcações com três abordagens distintas: a simulação numérica, a análise analítica e a parte experimental.

A primeira abordagem, a simulação numérica, corresponde ao desenvolvimento e aplicações de métodos de identificação de bifurcações nas duas versões do circuito Double Scroll, e está desenvolvida do capítulo 2 ao 7. No capítulo 2 apresentamos as duas versões do circuito Double Scroll e as deduções dos sistemas de equações diferenciais que determinam seus comportamentos, no capítulo 3 está a análise linear desses sistemas com os cálculos dos autovalores, autovetores e subespaços presentes. No capítulo 4 é feita uma abordagem qualitativa da teoria que permite garantir a existência de atratores no circuito Double Scroll. Também é apresentado um método de identificação de atratores distintos, baseado num mapeamento bidimensional do fluxo, para uma região do espaço dos parâmetros. Em seguida, mostramos, topologicamente, como são formados os atratores, situações em que ocorrem coexistência de atratores e, por fim, alguns atratores caóticos do sistema Double Scroll. No capítulo 5 desenvolvemos um método para identificar transições de comportamentos caóticos, baseado num mapeamento unidimensional do fluxo. No capítulo 6 apresentamos um estudo completo das variedades dos dois circuitos estudados, através do qual demonstramos que a versão do circuito descontínuo não forma órbitas homoclínicas. No capítulo 7 está desenvolvido um método de obtenção de órbitas homoclínicas

para sistemas lineares por partes. Estes dois últimos capítulos são a essência do artigo publicado em [45].

A segunda abordagem do estudo de bifurcações, a análise analítica, trata de aspectos gerais em sistemas dinâmicos do tipo Shilnikov. Esta parte contém a nossa contribuição ao estudo de órbitas homoclínicas e sobre consequências do teorema de Shilnikov, apresentadas no capítulo 8. Nesse capítulo apresentamos uma análise teórica completa de codimensão um de sistemas correspondentes ao teorema de Shilnikov, onde obtivemos como resultado mais importante uma lei de escala das órbitas homoclínicas de Shilnikov, que é um corolário desse teorema. A verificação dessa lei de escala foi exaustivamente confirmada para o circuito Double Scroll [46]. Através do estudo de codimensão um e das observações da formação de órbitas homoclínicas do circuito Double Scroll no espaço dos parâmetros bidimensional, fizemos uma análise de codimensão dois, que resultou na identificação de estruturas de órbitas homoclínicas que descrevem completamente o cenário homoclínico no espaço dos parâmetros do circuito Double Scroll contínuo.

Como último produto desta tese, no capítulo 9 está a sugestão de três experimentos envolvendo órbitas homoclínicas, usando o circuito Double Scroll, factíveis de serem realizados a baixo custo. A primeira experiência visa detectar a presença dessas órbitas, a segunda é uma extensão da primeira e tem o objetivo de determinar famílias de órbitas homoclínicas. A terceira experiência deve resultar na confirmação da maciça presença das órbitas homoclínicas na fronteira entre os atratores caóticos tipo Rössler e Double Scroll, tal qual verificado nas simulações, e em acordo com a análise teórica de codimensão dois.



## Capítulo 2

# Circuito Double Scroll

Existem vários circuitos eletrônicos, que apresentam comportamentos caóticos e periódicos, extensamente estudados na literatura [47, 48, 43]. Entre eles escolhemos estudar o circuito Double Scroll pelas razões que apresentamos a seguir.

O circuito Double Scroll é um circuito eletrônico que apresenta várias características comuns em sistemas não lineares. O sistema de equações diferenciais, que descreve o funcionamento do circuito (sistema Double Scroll), obtido através da análise de suas tensões e correntes, é linear por partes e, por isso, pode, por partes, ser resolvida analiticamente. Assim, o sistema pode ser simulado numericamente e, também, ser implementado experimentalmente. Os resultados das simulações estão em completo acordo com a observação, e a característica do sistema de ser linear por partes simplifica drasticamente a sua análise. Por estes motivos, o circuito Double Scroll é um excelente sistema para estudar fenômenos não lineares e por isso é conhecido como um paradigma do caos [36].

Neste capítulo, apresentamos as duas versões do circuito Double Scroll que usaremos como sistema dinâmico nesta tese. Deduzimos as equações diferenciais do sistema, a partir do circuito elétrico, e mudamos o sistema de coordenadas para um sistema de coordenadas adimensionais.

### 2.1 O circuito eletrônico Double Scroll

O circuito Double Scroll é formado por um resistor  $R$ , um indutor  $L$ , dois capacitores  $C_1$  e  $C_2$  e um circuito eletrônico, conhecido como resistência negativa não linear, representado pelo símbolo  $R_N$  na figura 2.1.

Vamos estudar duas variações do circuito Double Scroll. Em ambos os casos, o

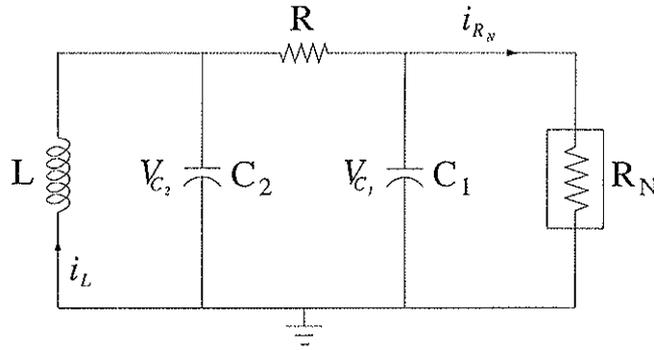


Figura 2.1: Esquema elétrico do circuito Double Scroll.

esquema elétrico que representa os circuitos é o mesmo daquele apresentado na figura 2.1. A diferença entre eles é que a resistência negativa apresenta curvas características distintas. A figura 2.2(a) mostra uma variação da curva característica de  $R_N$ . Esta curva apresenta três regiões lineares: duas externas e de mesmo coeficiente angular  $m_0$ , e uma central, passando pela origem, com inclinação mais acentuada que as demais e de valor  $m_1$ . As inclinações mudam de valor para  $V_{C_1} = |B_p|$ . Note que

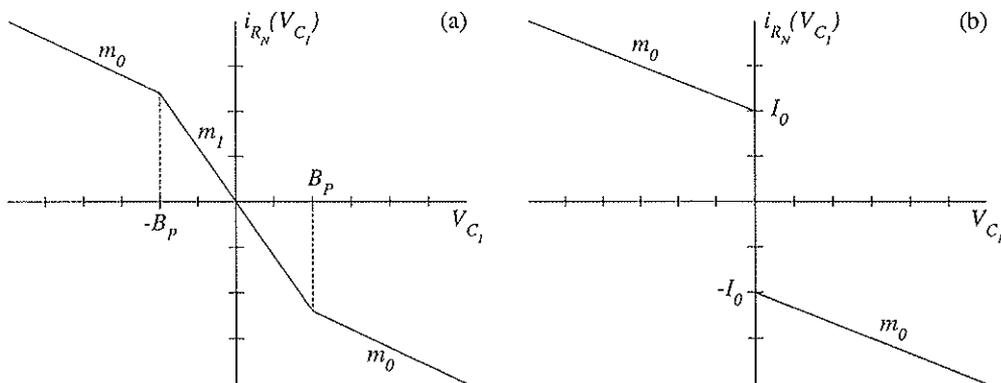


Figura 2.2: (a) Curva característica da resistência não linear contínua. (b) Curva característica da resistência não linear com descontinuidade.

$m_1$  tem dimensão de admitância ( $\Omega^{-1}$ ). Portanto,  $\frac{1}{m_1} = -\frac{\Delta V_{C_1}}{\Delta i_{R_N}}$  tem dimensão de resistência ( $\Omega$ ), mas com sinal negativo. Isso significa que o circuito faz o papel inverso da resistência, ou seja, ao invés de dissipar energia, ele dá energia para o sistema. É por isso que o esquema da figura 2.1 não apresenta nenhuma fonte de tensão para alimentar o circuito. A mesma análise vale para  $m_0$ . E o valor da

resistência negativa é dado por:

$$R_N = \begin{cases} \frac{1}{m_0}, & |V_{C_1}| > B_p \\ \frac{1}{m_1}, & |V_{C_1}| < B_p \end{cases} \quad (2.1)$$

Como esta curva característica é contínua, nos referiremos ao circuito com esta curva como circuito contínuo. Na figura 2.2(b) está apresentada a curva característica de outra resistência negativa que faremos uso neste trabalho.  $I_0$  é o valor da corrente que passa por ele quando  $V_{C_1} \rightarrow 0$  para valores negativos de  $V_{C_1}$  e  $-I_0$  é o valor da corrente que passa por ele quando  $V_{C_1} \rightarrow 0$  para valores positivos de  $V_{C_1}$ .  $m_0$  é o valor de todas as inclinações que a curva apresenta. O valor da resistência negativa é dado por:

$$R_N = \frac{1}{m_0} \quad (2.2)$$

Como esta curva característica é descontínua, nos referiremos ao circuito com essa curva como circuito descontínuo.

O funcionamento do circuito Double Scroll pode ser entendido melhor se for dividido em duas partes. A primeira é composta pelo indutor  $L$  e o capacitor  $C_2$  que está numa configuração de circuito tipo tanque. Supondo esse conjunto isolado de todo o circuito e  $C_2$  carregado, as cargas elétricas, armazenadas em  $C_2$ , começam a se movimentar gerando uma corrente que passa pelo indutor. Essa corrente cria uma diferença de potencial entre os terminais do indutor, opondo-se à corrente do circuito até anulá-la. Então a corrente inverte de sentido e passa a carregar o capacitor, e o processo se repete novamente gerando um sinal oscilatório periódico entre os terminais dos componentes.

A segunda parte do circuito é composto pelo capacitor  $C_1$  e o resistor negativo  $R_N$ . Supondo que o capacitor esteja com pouquíssima carga, de tal forma que  $V_{C_1}$  seja levemente positivo (isso significa que o terminal de  $C_1$ , que não está aterrado, é positivo). Tanto para  $R_N$  contínuo quanto para o descontínuo,  $R_N$  estará polarizado com uma tensão positiva. Isso implica que ele responderá com uma corrente  $i_{R_N}$  negativa (no sentido contrário ao mostrado na figura 2.1), como pode ser observado pelas curvas características. Essa corrente alimentará o capacitor que, por sua vez, aumentará sua tensão. Isso implicará numa corrente  $i_{R_N}$  negativa de módulo maior que a primeira. Caso não haja um elemento dissipador, o funcionamento do circuito tende à saturação. Da mesma forma ocorrerá a saturação se  $C_1$  estiver negativamente carregado. Porém, se o capacitor estiver completamente descarregado, operando

com  $R_N$  contínuo, a corrente  $i_{R_N}$  gerada por  $R_N$  será nula. Assim, o capacitor não é alimentado e permanecerá descarregado indefinidamente num estado de equilíbrio instável, pois qualquer carga no capacitor fará com que se inicie o processo de saturação. Para  $R_N$  descontínuo, esse ponto de equilíbrio não existe, pois a sua curva característica não passa pela origem.

O resistor  $R$  faz um acoplamento entre as duas partes anteriormente discutidas. Assim, haverá uma interação entre o circuito tanque e o circuito formado por  $C_1$  e  $R_N$ , regulado pelo valor de  $R$ . A oscilação do circuito tanque será dissipada por  $R$  e alimentada pelo outro circuito. Agora o movimento periódico não depende mais apenas de  $L$  e  $C_2$ , mas de um equilíbrio entre os dois circuitos e o resistor  $R$ . Esse equilíbrio pode ser completamente instável, gerando um funcionamento caótico. As instabilidades irão diminuindo à medida que  $R$  aumentar, isolando os circuitos. Assim, a energia que o circuito tanque receber, será fracamente dissipada em  $R$ , mas ainda estará recebendo energia proveniente do outro circuito, o que poderá lhe permitir realizar comportamentos periódicos. Para valores de  $R$  muito altos, o circuito tanque não recebe mais energia. Nessa situação, é como se o circuito tanque não existisse, então podemos considerar que o terminal de  $R$  está aterrado. Assim, toda a energia fornecida pelo circuito  $R_N$  será dissipada em  $R$ , atingindo um equilíbrio estável de tensão  $V_{C_1}$ . Note que o capacitor  $C_1$  não participa dessa estabilidade. Por outro lado, se o resistor  $R$  for muito baixo, então a quantidade de energia fornecida por  $R_N$  será maior que a quantidade de energia dissipada por  $R$ , e o circuito saturará.

A análise feita aqui é puramente descritiva e está baseada na física que está por trás do funcionamento complexo deste circuito. Nas próximas seções apresentaremos resultados rigorosos dos pontos de equilíbrio aqui expostos, e dos comportamentos caóticos e periódicos que o sistema apresenta.

## 2.2 Sistema Double Scroll

Para fazer uma análise rigorosa, de sistemas dinâmicos reais, é necessário conseguir, pelo menos, um bom modelo que o represente, o que nem sempre é uma tarefa simples. Considerando o comportamento físico dos componentes eletrônicos (capacitores, indutor e resistor) e a curva característica da resistência negativa do circuito Double Scroll, é possível extrair um conjunto de equações diferenciais, onde a sua solução descreve o comportamento do circuito. Esse conjunto de equações diferenciais será chamado de sistema do Double Scroll. Os seus parâmetros e suas variáveis

podem ser representados pelos elementos físicos envolvidos no circuito (tensões, correntes e componentes eletrônicos). Nesse caso dizemos que estamos usando as coordenadas naturais do sistema. Porém, é possível fazer uma reorganização no sistema, i. e., mudança de variáveis, de tal forma que o sistema fique completamente sem dimensão e, então, dizemos que o sistema está representado nas suas coordenadas adimensionais. Isso causa uma grande simplificação na análise.

As seções 2.2.1 e 2.2.2 mostram como obter o sistema descrito nas coordenadas naturais e adimensionais, a partir do circuito Double Scroll, e fazem uma discussão das vantagens e desvantagens que elas apresentam. É feita também uma análise da estabilidade do sistema e, no final, apresentamos alguns comportamentos característicos do circuito obtidos através da simulação numérica do sistema Double Scroll.

### 2.2.1 Coordenadas Naturais

Para derivar o sistema do Double Scroll vamos utilizar o esquema elétrico apresentado na figura 2.1. Vamos tratar o circuito da resistência negativa como um componente que possui uma curva característica como aquelas apresentadas na figura 2.2. Outro ponto importante é como funcionam os componentes eletrônicos do circuito quando submetidos à correntes e tensões sobre seus terminais. E, por fim, devemos entender como analisar esses componentes quando essas correntes e tensões são compartilhadas entre si.

A seguir, descrevemos, brevemente, as relações entre as correntes e tensões com os componentes utilizados.

- O resistor é um componente que dissipa energia em forma de calor e obedece a Lei de Ohm:

$$i_R = \frac{V_R}{R} \quad (2.3)$$

onde  $i_R$  e  $V_R$  são a corrente e tensão aplicadas no resistor  $R$ .

- A carga num capacitor é dada por  $q = CV_C$ , então a corrente que passa pelo capacitor será dada por:

$$i_C = C \frac{dV_C}{dt} \quad (2.4)$$

- O fluxo  $\phi$  que atravessa um indutor é o resultado  $\phi = Li$ . Quando a corrente varia, o fluxo cria uma diferença de potencial no indutor, de forma a opor-se

a essa variação, assim a tensão no indutor é dado por:

$$V_L = -L \frac{di_L}{dt} \quad (2.5)$$

Para analisar o circuito, vamos usar a *lei de Kirchoff* para a tensão e a corrente:

- *Lei da Tensão:* A soma das tensões ao longo de qualquer circuito fechado é zero.
- *Lei da Corrente:* A soma das correntes em qualquer nó é zero.

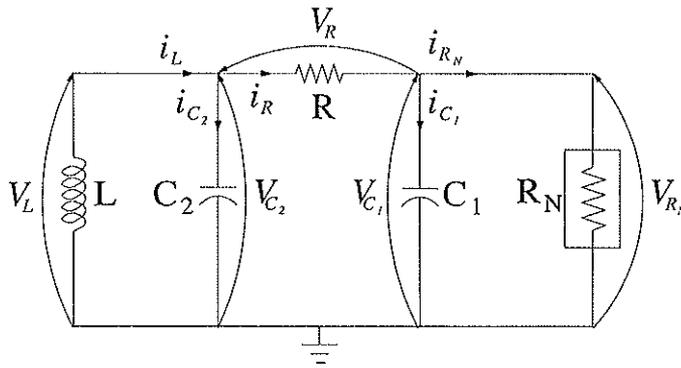


Figura 2.3: Tensões e correntes do circuito Double Scroll.

Vamos supor, inicialmente, que existe uma corrente  $i_L$  que passa pelo indutor  $L$ . Essa corrente se divide em duas que vão para o resistor  $R$  ( $i_R$ ) e para o capacitor  $C_2$  ( $i_{C_2}$ ).  $i_R$ , por sua vez, divide-se em outras duas  $i_{C_1}$  e  $i_{R_N}$ , passando pelo capacitor  $C_1$  e pela resistência negativa  $R_N$ , respectivamente. Essas correntes provocam quedas de tensões nos componentes eletrônicos conforme representados na figura 2.3.

Assim, pela lei da corrente,

$$i_{C_1} - i_R + i_{R_N} = 0 \Rightarrow C_1 \dot{V}_{C_1} - \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R} + i_{R_N}(V_{C_1}) = 0 \quad (2.6)$$

$$i_{C_2} + i_R - i_L = 0 \Rightarrow C_2 \dot{V}_{C_2} + \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{R} - i_L = 0$$

onde a tensão no resistor  $V_R$  é a diferença de potencial das tensões nos capacitores  $V_{C_2}$  e  $V_{C_1}$ , e a variação temporal da tensão nos capacitores está representada por  $\frac{dV_C}{dt} = \dot{V}_C$ . As variáveis destas equações são as tensões  $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$  e a corrente  $i_L$ , e formam o espaço de estado do sistema.

Para resolver, analítica ou numericamente, um sistema de equações diferenciais com três variáveis precisamos de três equações diferenciais. Aplicando a lei da tensão de Kirchoff no circuito fechado composto por  $L$  e  $V_{C_2}$  obtemos a terceira equação:

$$V_L - V_{C_2} = 0 \Rightarrow -L\dot{i}_L - V_{C_2} = 0 \quad (2.7)$$

onde  $\dot{i}_L = \frac{di_L}{dt}$ . Reorganizando as equações (2.6) e (2.7) obtemos o sistema de equações naturais do circuito Double Scroll:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{C_1} &= \frac{V_{C_2} - V_{C_1}}{RC_1} - \frac{i_{R_N}(V_{C_1})}{C_1} \\ \dot{V}_{C_2} &= \frac{V_{C_1} - V_{C_2}}{RC_2} + \frac{i_L}{C_2} \\ \dot{i}_L &= -\frac{V_{C_2}}{L} \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $i_{R_N}(V_{C_1})$  é a corrente da resistência não linear  $R_N$ . No circuito contínuo, conforme o seu gráfico apresentado na figura 2.2(a), a corrente é dada por:

$$i_{R_N}(V_{C_1}) = \begin{cases} m_0 V_{C_1} + (m_1 - m_0) B_p, & V_{C_1} \geq B_p \\ m_1 V_{C_1}, & |V_{C_1}| \leq B_p \\ m_0 V_{C_1} - (m_1 - m_0) B_p, & V_{C_1} \leq -B_p \end{cases} \quad (2.9)$$

e no circuito descontínuo (figura 2.2(b)),

$$i_{R_N}(V_{C_1}) = \begin{cases} m_0 V_{C_1} - I_0, & V_{C_1} > 0 \\ m_0 V_{C_1} + I_0, & V_{C_1} < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

O circuito contínuo apresenta um sistema com sete parâmetros de controle:  $R$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $m_0$ ,  $m_1$  e  $B_p$ , e o descontínuo, seis:  $R$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $m_0$  e  $I_0$ , onde consideramos que podemos variar os parâmetros das curvas características de  $R_N$ . A vantagem do sistema em coordenadas naturais é que os resultados das análises são as próprias medidas físicas do circuito, o que é importante do ponto de vista experimental.

## 2.2.2 Coordenadas Adimensionais

O sistema de equações diferenciais (2.8) pode ser simplificado fazendo o reesca-

lonamento dos parâmetros,

$$a = \frac{R}{R_{N_1}}, \quad b = \frac{R}{R_{N_0}} \quad e \quad \tau = \frac{1}{RC_2}t \quad (2.11)$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1}, \quad \beta = \frac{R^2C_2}{L}$$

onde  $R_{N_0} = \frac{1}{m_0}$  e  $R_{N_1} = \frac{1}{m_1}$ , com a mudança de variáveis, para o circuito contínuo,

$$x = \frac{VC_1}{B_p}, \quad y = \frac{VC_2}{B_p}, \quad e \quad z = \frac{i_L R}{B_p} \quad (2.12)$$

e para o circuito descontínuo,

$$x = \frac{VC_1}{RI_0}, \quad y = \frac{VC_2}{RI_0}, \quad e \quad z = \frac{i_L}{I_0} \quad (2.13)$$

Observe que os novos parâmetros e variáveis não possuem unidades. Assim, obtemos o sistema do Double Scroll em coordenadas adimensionais:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha[y - x - k(x)] \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned} \quad (2.14)$$

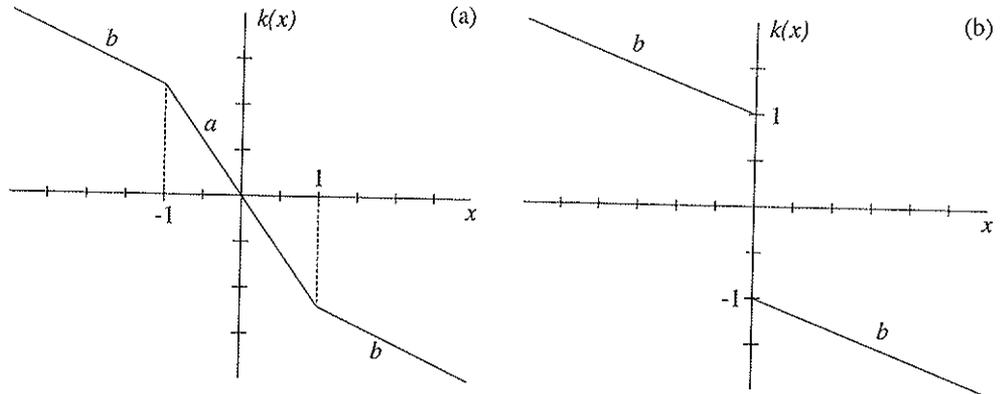
onde as derivadas são agora em relação a  $\tau$  e  $k(x)$  é equivalente à função  $i_{R_N}(V_{C_1})$ , após as mudanças de variáveis indicadas em (2.11). Dessa forma, as funções (2.9) e (2.10) passam a ser, respectivamente:

$$k_c(x) = \begin{cases} bx + (a - b), & x \geq 1 \\ ax, & |x| \leq 1 \\ bx - (a - b), & x \leq -1 \end{cases} \quad (2.15)$$

e

$$k_d(x) = \begin{cases} bx - 1, & x > 0 \\ bx + 1, & x < 0 \end{cases} \quad (2.16)$$

onde os índices  $c$  e  $d$  de  $k(x)$  fazem referência à curva característica contínua e descontínua, e serão usados sempre que essa diferenciação se fizer necessária. As variáveis do sistema passam a ser  $x$ ,  $y$  e  $z$ , e formam o espaço de estado adimensional. Assim, as curvas características do sistema nas coordenadas naturais, apresentadas na figura 2.2, passam a ser como as curvas mostradas na figura 2.4, no sistema de coordenadas adimensionais.



**Figura 2.4:** Curvas características nas coordenadas adimensionais: (a) Sistema contínuo. (b) Sistema descontínuo.

Observe a simplificação do sistema com as mudanças (2.11), (2.12) e (2.13). O sistema de coordenadas adimensionais (2.14) apresenta simetria ímpar  $f(x) = -f(-x)$  e, juntamente com (2.15) ou (2.16), revela que, dos sete parâmetros de controle do circuito contínuo, existem de fato apenas quatro:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  e  $b$ , e no circuito descontínuo apenas três:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $b$ . Isso ocorre porque diversas configurações dos parâmetros de controle são completamente equivalentes.

As funções  $k_c(x)$  e  $k_d(x)$  permanecerão sempre as mesmas em todo este trabalho, com os valores  $a = -\frac{8}{7}$  e  $b = -\frac{5}{7}$ . A razão desses números deve-se ao fato de que eles propiciam componentes eletrônicos com valores de fácil acesso no mercado. Em termos práticos, fixar os valores de  $a$  e  $b$  é equivalente a manter fixo o resistor  $R$  e a resistência negativa  $R_N$ . Dessa forma simplificamos o circuito Double Scroll para um sistema de codimensão dois (que possui dois parâmetros de controle).

As funções  $k(x)$  dividem o espaço em partes, nas quais o sistema (2.14) é linear. Cada parte pode ser resolvida, analiticamente, independente das demais, obtendo-se três soluções distintas. O circuito contínuo é dividido em três partes com domínios

$$\begin{aligned} D_{c+} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1\} \\ D_{c0} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1\} \\ D_{c-} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq -1\} \end{aligned}$$

e o circuito descontínuo em duas, com domínios

$$\begin{aligned} D_{d+} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0\} \\ D_{d-} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0\} \end{aligned}$$

Os índices  $c$  e  $d$  usados para diferenciar o circuito contínuo do descontínuo serão usados somente nos casos que se fizer necessário. Caso contrário serão omitidos.

Para o circuito contínuo, podemos observar que o seu fluxo, dado pela equação (2.14), com  $k_c(x)$  descrita em (2.15), é contínuo e suave. Ou seja, apesar da curva característica de  $R_N$  ser não diferenciável, o fluxo está determinado em todos os pontos, mesmo quando  $x = \pm 1$ . É por isso, que  $k_c(x)$  está determinado para qualquer valor de  $x$ . No caso do circuito descontínuo, isso não é mais verdade. O fluxo não é definido em  $x = 0$ , ocorrendo, para esse valor, uma trajetória com mudança abrupta de direção, ou seja, a trajetória não apresenta derivada nessa região.

Outra observação interessante, que este sistema de coordenadas revela, é que há uma infinidade de escalas de tempo  $t$  associadas ao mesmo par de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  (verifique as relações (2.11)). Isso significa que trajetórias idênticas podem ser reproduzidas em escalas de tempo distintas. Em outras palavras, esse novo sistema evidencia que podemos controlar a velocidade de uma trajetória. O controle pode ser feito da seguinte forma, por exemplo:  $R$  controla o tempo enquanto os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  são controlados independentemente por  $C_1$  e  $L$ , respectivamente. Isso tem uma utilidade experimental relevante. Como os equipamentos de aquisição de dados requerem um tempo mínimo para coletar um dado, quando necessário, podemos impor uma velocidade na trajetória compatível com o equipamento, sem alterar a sua trajetória no espaço de estado ( $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$  e  $i_L$ ). Ou então, pode se medir uma trajetória com frequências fundamentais distintas.

### 2.2.3 Atratores Característicos

Nesta seção, vamos derivar os pontos fixos e apresentar os atratores característicos do circuito Double Scroll. Um tratamento mais detalhado, sobre a evolução das trajetórias no espaço de estado, será discutido mais adiante na seção 4.2.2 do capítulo 4.

Os pontos fixos são pontos onde o fluxo é nulo, isto é, onde o sistema não apresenta movimento. Portanto, para determiná-los, impomos a condição  $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ . Para cada domínio do sistema existe um ponto fixo. Assim, para o circuito contínuo os pontos fixos são dados por

$$P_{c+} = (k'_c, 0, -k'_c) \quad P_{c0} = (0, 0, 0) \quad e \quad P_{c-} = (-k'_c, 0, k'_c) \quad (2.17)$$

onde  $k'_c = \frac{b-a}{b+1} = 1,5$ , e para o circuito descontínuo,

$$P_{d+} = (k'_d, 0, -k'_d) \quad e \quad P_{d-} = (-k'_d, 0, k'_d) \quad (2.18)$$

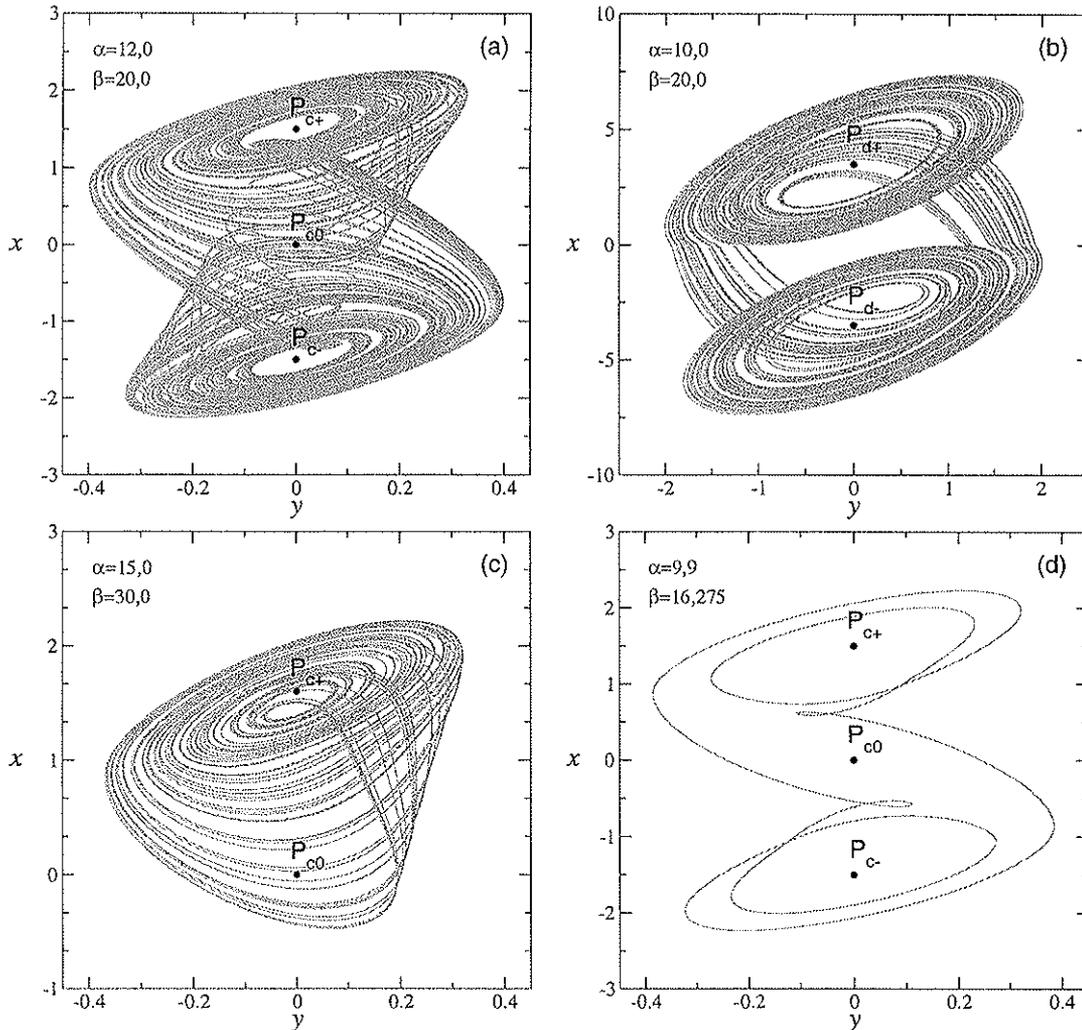
onde  $k'_d = \frac{1}{b+1} = 3, 5$ . Os índices  $+$ ,  $0$  e  $-$  fazem referência ao domínio em que estão localizados os pontos fixos. Cada domínio tem um.

O sistema Double Scroll é um sistema dissipativo e determinístico. A dissipação é feita pelo resistor  $R$  do circuito e o teorema da existência e unicidade garante que o sistema é determinístico. Esse teorema garante que para cada condição inicial do sistema de equações diferenciais existe uma única solução [49]. Como consequência, não pode haver intersecções entre as trajetórias no espaço de estado. Caso contrário, uma única condição inicial daria origem a diferentes trajetórias. Do ponto de vista teórico, essas duas características, dissipativa e determinística, do sistema, associado ao fato dele ser não linear (ou linear por partes), dão condições para que o sistema apresente atratores periódicos e caóticos. A trajetória descrita pela evolução do fluxo até que ela atinja seu regime estacionário, ou seja o atrator, chamaremos de transiente.

Utilizaremos o integrador Runge Kutta de quarta ordem para a solução numérica do sistema de equações diferenciais (2.14). A trajetória será definida pelo conjunto de pontos gerados pelo integrador. O passo de integração, que determina o intervalo de tempo  $d\tau$  entre dois pontos consecutivos da trajetória, é responsável pela precisão da integração, e está relacionada com uma variação de tempo  $dt$  da mesma forma que  $\tau$  está relacionada com  $t$ , definido nas equações (2.11). Um passo pequeno implica numa pequena evolução da trajetória no espaço de estado, definindo-a bem naquela região. Um passo grande, gera uma grande evolução da trajetória, prejudicando a definição local. No decorrer do trabalho, este será um compromisso que deverá ser considerado, já que passos pequenos geram alta precisão, mas implicam em longos tempos de integração. Já passos grandes diminuem o tempo de integração, mas perdem precisão, o que pode ser crítico em sistemas com sensibilidade às condições iniciais, como veremos mais adiante.

A seguir, apresentamos algumas soluções estacionárias que decorrem desses sistemas. A figura 2.5 apresenta exemplos de algumas soluções periódicas e caóticas que ocorrem nas duas variantes do circuito Double Scroll. Foram utilizados  $d\tau = 10^{-3}$ , um transiente de  $10^4$  passos, o que equivale a  $\tau = 10$ , e mais  $5 \times 10^4$  passos,  $\tau = 50$ , para gerar as figuras (a), (c) e (d) do circuito contínuo. Para o circuito descontínuo usamos  $d\tau = 5 \times 10^{-3}$ , transiente =  $10^5$  passos ( $\tau=500$ ) e  $5 \times 10^4$  passos ( $\tau = 250$ ) para gerar a figura 2.4(b).

A figura 2.5(a) apresenta um atrator caótico, do circuito contínuo, chamado Double Scroll. Esse atrator visita os três domínios  $D_{c+}$ ,  $D_{c0}$  e  $D_{c-}$ , existentes nesse sistema. Em (c) está o atrator caótico tipo Rössler. Note que ele percorre apenas dois



**Figura 2.5:** Circuito contínuo: (a) atrator caótico Double Scroll , (c) atrator caótico tipo Rössler Double e (d) atrator periódico. (b) Atrator caótico do circuito descontínuo.

domínios do sistema;  $D_{c+}$  e  $D_{c0}$ , no caso da figura. Mas, como a o sistema contínuo apresenta simetria ímpar, coexiste com ele outro atrator ocupando os domínios  $D_{c-}$  e  $D_{c0}$  para os mesmos parâmetros de controle. A convergência da trajetória para esses atratores depende das condições iniciais do sistema. Na figura 2.5(d) está uma das inúmeras órbitas periódicas estáveis que o sistema contínuo pode formar. Como se verá mais adiante, não existem soluções periódicas para o circuito descontínuo. Observe na figura 2.5(b) que, como as equação (2.14) com a (2.16) apontavam, o atrator caótico desse circuito não é suave para  $x = 0$ , não existindo derivada para esse valor de  $x$ . Existem valores de parâmetros em que os pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$ , dos

sistemas contínuo e descontínuo, ganham estabilidade e passam a atrair a dinâmica do sistema. Nesse caso recebem o nome de sorvedores.



## Capítulo 3

# Análise Linear

Em geral, sistemas de equações diferenciais não lineares não podem ser resolvidos analiticamente, sendo necessário recorrer a métodos numéricos para determinar suas soluções. Porém, se um sistema de equações diferenciais for expandido em uma série de potências e os termos que introduzem a não linearidade do sistema forem desprezados, então podemos ter uma solução analítica do sistema e, portanto, determinar a sua solução. Esse artifício matemático é chamado de linearização do sistema, e o estudo das suas soluções, de análise linear. A análise linear é uma análise local, válida apenas para uma região limitada ao redor do ponto em que a expansão está sendo feita. O importante desta discussão é que a topologia do sistema pode ser, localmente, determinado através da análise linear.

Quando mencionamos a topologia de um sistema dinâmico, estamos interessados em saber como se comporta o fluxo desse sistema. No caso de sistemas Hamiltonianos, a topologia é caracterizado pelo surgimento de ilhas e regiões caóticas, no espaço de estado, e, em sistemas dissipativos, pela formação de estruturas atrativas que podem ser regulares ou caóticas. A forma como se apresenta esse conjunto de características do fluxo, Hamiltoniano ou dissipativo, é chamado de topologia do sistema.

A localização e a forma com que o fluxo se desenvolve está ligado a um conjunto de invariantes do sistema. Em sistemas dissipativos, os invariantes são responsáveis por formações de atratores e, também, por comportamentos de divergência.

Os atratores podem ser classificados como pontuais ou estruturais. Os pontuais são os pontos fixos estáveis, e os estruturais são as órbitas periódicas estáveis e os atratores caóticos. Para que exista uma solução periódica, é necessário pelo menos um ponto fixo instável, como é o caso do sistema básico de Van der Pol [49]. E,

para que se forme um atrator caótico, são necessários pelo menos dois pontos fixos instáveis, como é o caso do atrator tipo Rössler apresentado no primeiro capítulo desta tese (ver figura 2.5(c)). Os atratores periódico e o Double Scroll, apresentados nas figuras 2.5(a) e (d), são formados devido a presença de três pontos fixos. Assim, torna-se importante fazer um estudo da estabilidade dos pontos fixos para se ter uma melhor compreensão da topologia do sistema.

Linearizando um sistema nas proximidades de um ponto fixo, é possível determinar sua estabilidade através dos seus autovalores. A cada autovalor está associado um auto vetor, que pode ser estável ou instável dependendo do sinal do autovalor associado. O conjunto de auto vetores estáveis forma o subespaço estável do ponto fixo, e o conjunto instável, o subespaço instável. Os subespaços representam os conjuntos que convergem para o ponto fixo num tempo  $t \rightarrow \pm\infty$ . A denominação de subespaço somente é válida nas proximidades do ponto fixo, onde vale a linearização.

No circuito Double Scroll existem três conjuntos de subespaços para o sistema contínuo, e dois para o sistema descontínuo. Como o sistema é linear por partes, esses conjuntos agem diretamente na dinâmica em todo o espaço de estado, portanto, determiná-las é fundamental para entendermos o comportamento das trajetórias nesse espaço, ou seja, a topologia do sistema. Neste capítulo faremos um estudo detalhado dos autovalores, dos auto vetores e dos subespaços do circuito contínuo e descontínuo.

### 3.1 Autovalores e Auto Vetores

A aplicação de uma matriz  $T$  em um vetor  $\vec{v}$  causa uma transformação nesse vetor. Por exemplo, pode causar uma rotação, uma reflexão ou uma inversão de sentido de  $\vec{v}$ . Mas, podem existir vetores que não sofrem as transformações características causadas pela aplicação de  $T$ , preservando o seu sentido e direção com uma variação da sua magnitude. Esses vetores são chamados de auto vetores e o fator de variação da sua magnitude, de autovalor. Podemos defini-los assim [50]: Dado uma transformação  $T : V \rightarrow V$ , tal que  $T$  seja um operador linear, se existirem  $\vec{v} \in V$ ,  $\vec{v} \neq 0$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $T\vec{v} = \lambda\vec{v}$ , então  $\lambda$  é o autovalor de  $T$  e  $\vec{v}$  é o auto vetor de  $T$  associado a  $\lambda$ .

Pela definição acima, o conjunto de vetores, com direções e sentidos iguais ao de  $\vec{v}$ , é preservado pela transformação  $T$ , com apenas a alteração do seu módulo pelo fator  $\lambda$ . Assim, esse conjunto é invariante pela transformação  $T$ .

As seções 3.1.1 e 3.1.2 mostram como determinar, respectivamente, os autovalores

e auto vetores no sistema Double Scroll para os sistemas contínuo e descontínuo.

### 3.1.1 Determinando Autovalores

O sistema Double Scroll (2.14) pode ser reescrito da seguinte forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha(1+\gamma) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

onde, para o circuito contínuo, substituímos  $\gamma$  e  $p$  por

$$\gamma_c = \begin{cases} b, & |x| \geq 1 \\ a, & |x| \leq 1 \end{cases}$$

e

$$p_c = \begin{cases} -\alpha(a-b), & x \geq 1 \\ 0, & |x| \leq 1 \\ \alpha(a-b), & x \leq -1 \end{cases}$$

e, para o descontínuo, por

$$\gamma_d = b, \quad x \in \mathbb{R}$$

e

$$p_d = \begin{cases} -\alpha, & x > 0 \\ \alpha, & x < 0 \end{cases}$$

O sistema (3.1) pode ser escrito da seguinte forma vetorial:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{p} \quad (3.2)$$

onde  $A$  é a matriz  $3 \times 3$  do sistema (3.1) e  $\vec{p}$  é o vetor formado pelas coordenadas  $(p, 0, 0)$ .

Para estudarmos o comportamento do sistema nas proximidades do ponto fixo, vamos linearizar o sistema nessa região. Para isso, faremos uma expansão do sistema, numa série de Taylor [51], em relação ao ponto fixo:

$$cdf_j(\vec{v}) = f_j(\vec{v}_0) + \sum_{i=1}^{n=3} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{v}_0)(x_i - x_{i_0}) + O^2 + \dots \quad (3.3)$$

onde  $\vec{v} = (x_1, x_2, x_3)$  é um vetor com coordenadas muito próximas das coordenadas do vetor  $\vec{v}_0 = (x_{1_0}, x_{2_0}, x_{3_0})$ , que localiza o ponto fixo no espaço de estado, e  $O^2$  representa os termos de segunda ordem.

No caso do sistema Double Scroll, todas as derivadas parciais de ordem igual ou superior a 2 são nulas, como pode ser verificado pela equação (3.2), portanto, os termos da equação (3.3) com essas ordens são nulos. Considerando  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$ , o vetor  $\vec{v}$  é formado pelas coordenadas  $(x, y, z)$ ,  $f_j(\vec{v})$  representa  $\dot{x}$  para  $j = 1$ ,  $\dot{y}$  para  $j = 2$  e  $\dot{z}$  para  $j = 3$ , dessa forma,  $f_j(\vec{v}_0)$  é sempre nulo, já que a solução de  $f_j(\vec{v})$  é nula para as coordenadas do ponto fixo. A derivada parcial  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(\vec{v}_0)$  não depende de  $\vec{v}$  pois, como pode ser verificado pela equação (3.1), ela é constante. Assim, definindo  $x'_i = (x_i - x_{i_0})$  como sendo a distância na coordenada  $x_i$  do ponto  $(x, y, z)$  ao ponto fixo, o que implica que  $\dot{x}'_i = \dot{x}_i$ , obtemos o seguinte resultado:

$$\dot{\vec{x}}' = J\vec{x}' \quad (3.4)$$

onde:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} \\ \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} & \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \end{pmatrix}$$

A matriz  $J$  é a matriz Jacobiana do sistema, e é a análise da transformação que ela causa no vetor  $\vec{x}'$  que vai nos informar sobre a dinâmica do sistema nas proximidades do ponto fixo. A Jacobiana de um sistema não linear normalmente depende das variáveis desse sistema. Mas no caso do sistema Double Scroll, que é um sistema linear por partes, ela é uma constante para cada intervalo do domínio e é a própria matriz  $A$  da equação (3.2).

$$J = \begin{pmatrix} -\alpha(1 + \gamma) & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

onde, para o circuito contínuo e descontínuo, substituímos, respectivamente,  $\gamma$  por

$$\gamma_c = \begin{cases} b, & |x| \geq 1 \\ a, & |x| \leq 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad \gamma_d = b, \quad x \in \mathbb{R}$$

A equação (3.4) é uma equação linear cuja solução é dada por [50],

$$\vec{x}' = C_1 e^{\lambda_1 \tau} \vec{v}_1 + C_2 e^{\lambda_2 \tau} \vec{v}_2 + C_3 e^{\lambda_3 \tau} \vec{v}_3 \quad (3.6)$$

$C_1, C_2$  e  $C_3$  são constantes que dependem das condições iniciais do sistema.  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$  são, respectivamente, os auto vetores associados aos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  da Jacobiana  $J$ .

De acordo com a definição de autovalores feita na introdução desta seção (seção 3.1), devemos encontrar  $\lambda$  tal que,

$$J\vec{x}' = \lambda\vec{x}' \iff (J - \lambda I)\vec{x}' = 0$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $3 \times 3$ . Como, por definição,  $\vec{x}' \neq 0$ , concluímos que a transformação que  $(J - \lambda I)$  ocasiona no vetor não nulo,  $\vec{x}'$ , deve resultar num vetor nulo. Assim,

$$\begin{pmatrix} -\alpha(1 + \gamma) - \lambda & \alpha & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 0 & -\beta & -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Portanto, devemos buscar  $\det(J - \lambda I) = 0$ , que resulta em

$$\lambda^3 + [\alpha(1 + \gamma) + 1]\lambda^2 + (\alpha\gamma + \beta)\lambda + \alpha\beta(1 + \gamma) = 0 \quad (3.8)$$

sendo  $\gamma$  o mesmo utilizado na equação (3.5). Note que, no caso do circuito com descontinuidade, a solução dessa equação independe de qual domínio estamos tratando, o que implica que os autovalores encontrados valem para todo o espaço. No caso do circuito contínuo, temos os mesmos autovalores para os domínios  $D_+$  e  $D_-$ , e outros para  $D_0$ . Ou seja, há dois grupos de autovalores para todo o espaço. A seguir, apresentamos a solução da equação (3.8).

Seja,

$$\lambda^3 + a'\lambda^2 + b'\lambda + c = 0$$

onde,

$$a' = \alpha(1 + \gamma) + 1 \quad b' = \alpha\gamma + \beta \quad e \quad c = \alpha\beta(1 + \gamma)$$

então,

$$\lambda_{1,2} = -\frac{A+B}{2} - \frac{a'}{3} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3} \quad (3.9)$$

$$\lambda_3 = A + B - \frac{a'}{3} \quad (3.10)$$

onde,

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{Q}}, \quad B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{Q}}, \quad Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2,$$

$$p = -\frac{a'^2}{3} + b' \quad \text{e} \quad q = 2\left(\frac{a'}{3}\right)^3 - \frac{a'b'}{3} + c$$

Uma análise desses autovalores revela que para  $Q \leq 0$ , as soluções são puramente reais. Como veremos na seção 4.1.1 do capítulo 4, pelo teorema de Shilnikov, o sistema pode apresentar comportamento caótico quando os autovalores apresentarem soluções complexas. Assim, estudaremos a situação em que  $Q > 0$ . Para simplificar nossa notação, utilizaremos a seguinte representação,

$$\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega \quad \text{e} \quad \lambda_3 = \lambda \quad (3.11)$$

onde,

$$\rho = -\frac{A+B}{2} - \frac{a'}{3}$$

$$\omega = \frac{A-B}{2}\sqrt{3}$$

$$\lambda = A+B - \frac{a'}{3}$$

### 3.1.2 Determinando Auto Vetores

Substituindo o autovalor  $\lambda = \lambda_3$ , conforme a definição (3.11), na equação (3.7) podemos calcular o seu auto vetor associado  $\vec{v}_3$ . Assim, obtemos as soluções:

$$y' = \frac{\alpha(1+\gamma) + \lambda_3}{\alpha} x' \quad (3.12)$$

$$z' = -\frac{\beta}{\lambda} y'$$

Para  $\lambda = \lambda_1$ , conforme definido na (3.11), temos:

$$y' = y'_R + iy'_I \quad \text{e} \quad z' = z'_R + iz'_I$$

onde,

$$y'_R = \frac{\alpha(1+\gamma) + \rho}{\alpha} x' \quad (3.13)$$

$$y'_I = \frac{\omega}{\alpha} x'$$

e

$$\begin{aligned} z'_R &= -\frac{\beta}{\rho^2 + \omega^2}(y'_R \rho + y'_I \omega) \\ z'_I &= -\frac{\beta}{\rho^2 + \omega^2}(y'_I \rho - y'_R \omega) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Assim, o auto vetor  $\vec{v}_1$ , associado ao autovalor  $\lambda_1$  é complexo e é dado por  $\vec{v}_1 = \vec{v}_R + i\vec{v}_I$ , onde  $\vec{v}_R = (x'_R, y'_R, z'_R)$  e  $\vec{v}_I = (x'_I, y'_I, z'_I)$ . Da mesma forma, o vetor  $\vec{v}_2$ , associado ao autovalor  $\lambda_2$  é dado por  $\vec{v}_2 = \vec{v}_R - i\vec{v}_I$ . O auto vetor  $\vec{v}_3$  associado a  $\lambda_3$  é real.

Escolhendo arbitrariamente  $x' = 1$ , os auto vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  podem ser calculados através das equações (3.13) e (3.14). E, através da equação (3.12), obtém-se o auto vetor  $\vec{v}_3$ . O índice 3 do auto vetor  $\vec{v}_3$  e do autovalor  $\lambda_3$  não é mais necessário, por isso vamos designá-los simplesmente de  $\vec{v}$  e  $\lambda$ , assim:

$$\vec{v}_R = \begin{pmatrix} 1 \\ y'_R \\ z'_R \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_I = \begin{pmatrix} 0 \\ y'_I \\ z'_I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha(1 + \gamma) + \lambda}{\alpha} \\ -\frac{\beta}{\lambda} y' \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

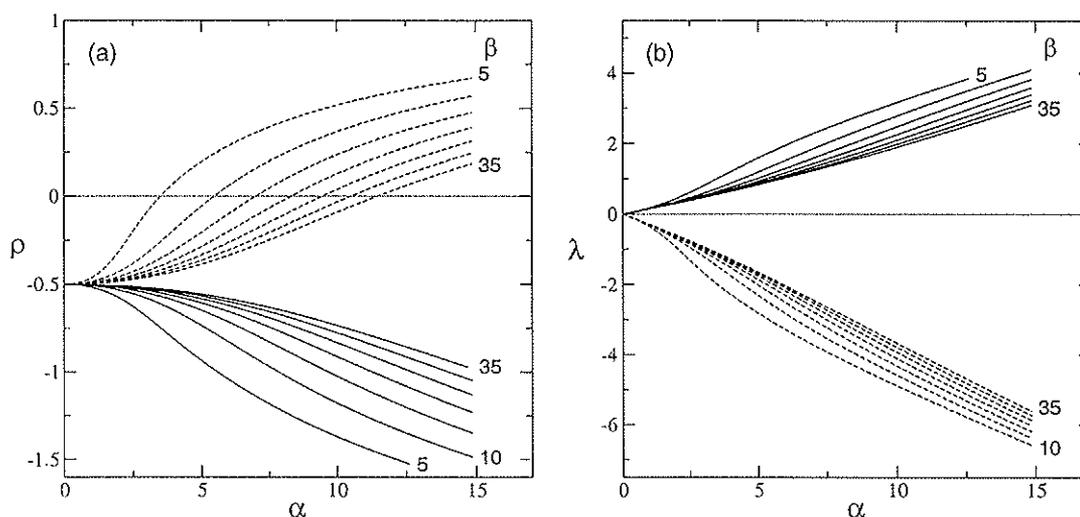
Os vetores  $\vec{v}_R$ ,  $\vec{v}_I$  e  $\vec{v}$  são linearmente independentes e, portanto, formam uma base do sistema. Substituindo  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ , conforme (3.11), e  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\vec{v}_3$ , em função de  $\vec{v}_R$ ,  $\vec{v}_I$  e  $\vec{v}$ , calculados conforme (3.15), na equação (3.6) e escolhendo  $C_1$  e  $C_2$  complexos conjugados, de forma a tornar real a solução da equação, obtemos

$$\vec{x}' = e^{\rho\tau}(C'_2 \text{sen } \omega\tau + C'_1 \text{cos } \omega\tau)\vec{v}_R + e^{\rho\tau}(C'_2 \text{cos } \omega\tau - C'_1 \text{sen } \omega\tau)\vec{v}_I + C_3 e^{\lambda\tau}\vec{v} \quad (3.16)$$

onde  $C'_1$  e  $C'_2$  são novas constantes reais em substituição às constantes complexas  $C_1$  e  $C_2$ .

A equação (3.16) representa a evolução do sistema em relação a um dos pontos fixos. A parte imaginária  $i\omega$  dos autovalores  $\lambda_{1,2}$  é responsável pelo surgimento das funções seno e cosseno que introduzirão à dinâmica um caráter oscilatório. A condição inicial é dada pelas constantes  $C'_1$ ,  $C'_2$  e  $C_3$ . Os sinais de  $\rho$  e  $\lambda$  indicam se o conjunto de pontos, ao longo das direções dos vetores  $\vec{v}_R$ ,  $\vec{v}_I$  e  $\vec{v}$ , converge assintoticamente para o ponto fixo em  $t \rightarrow +\infty$  ou em  $t \rightarrow -\infty$ . Se ambos forem positivos, o conjunto associado à direção desses vetores se afasta do ponto fixo

(convergência para o ponto fixo em  $t \rightarrow -\infty$ ), pois cada uma das parcelas da equação (3.16) aumentará de valor à medida que o tempo for crescendo. Nessas condições, o ponto fixo é instável e é chamado de ponto fixo tipo fonte. Se  $\rho$  e  $\lambda$  forem negativos, o conjunto de pontos, ao longo das direções dos vetores  $\vec{v}_R$ ,  $\vec{v}_I$  e  $\vec{v}$ , se aproxima do ponto fixo (convergência para o ponto fixo em  $t \rightarrow +\infty$ ), pois as parcelas tendem a zero para uma evolução temporal positiva. Esse ponto fixo é chamado de sorvedor e é estável. Existem casos em que  $\rho$  e  $\lambda$  possuem sinais distintos, fazendo com que o conjunto de pontos, formado pelas direções dos vetores  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$ , evoluam no sentido contrário ao do conjunto de pontos ao longo da direção de  $\vec{v}$ . Nesse situação, o ponto fixo é instável e é chamado de ponto fixo tipo sela.



**Figura 3.1:** (a) Parte real do autovalor  $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$ . (b) Autovalor real  $\lambda_3 = \lambda$ . As curvas contínuas correspondem ao ponto fixo  $P_0$  e as tracejadas, ao ponto fixo  $P_{\pm}$ .

A figura 3.1 mostra os valores de  $\rho$  e  $\lambda$  dos pontos fixos  $P_0$ ,  $P_+$  e  $P_-$  em função dos parâmetro  $\alpha$  e  $\beta$ . Cada curva corresponde a um valor de  $\beta$ . Como  $P_+$  e  $P_-$  possuem os mesmos autovalores, eles estão representados por  $P_{\pm}$ . As curvas contínuas correspondem ao ponto fixo  $P_0$  e, as tracejadas, ao  $P_{\pm}$ . Observe que o ponto fixo  $P_0$  apresenta  $\rho$  sempre negativo (figura 3.1(a)) e  $\lambda$  positivo (figura 3.1(b)) e, o ponto fixo  $P_{\pm}$  apresenta  $\rho$  positivo, numa larga faixa de parâmetros, e  $\lambda$  negativo, sempre.

## 3.2 Subespaços

Os conjuntos que contém as direções dos vetores  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$  apresentam o mesmo comportamento porque  $\rho$  é comum para os dois, como pode ser verificado pela equação (3.16). Assim, se o conjunto contido na direção de  $\vec{v}_R$  tende a aumentar a sua amplitude, o conjunto dado pela direção de  $\vec{v}_I$  também tenderá a aumentar. Além do mais, qualquer vetor composto pela combinação linear dos vetores  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$  apresentará a mesma característica que estes apresentam. Portanto, a evolução do conjunto, formado pela direção desse vetor, tenderá para o ponto fixo num tempo  $t \rightarrow \pm\infty$ .

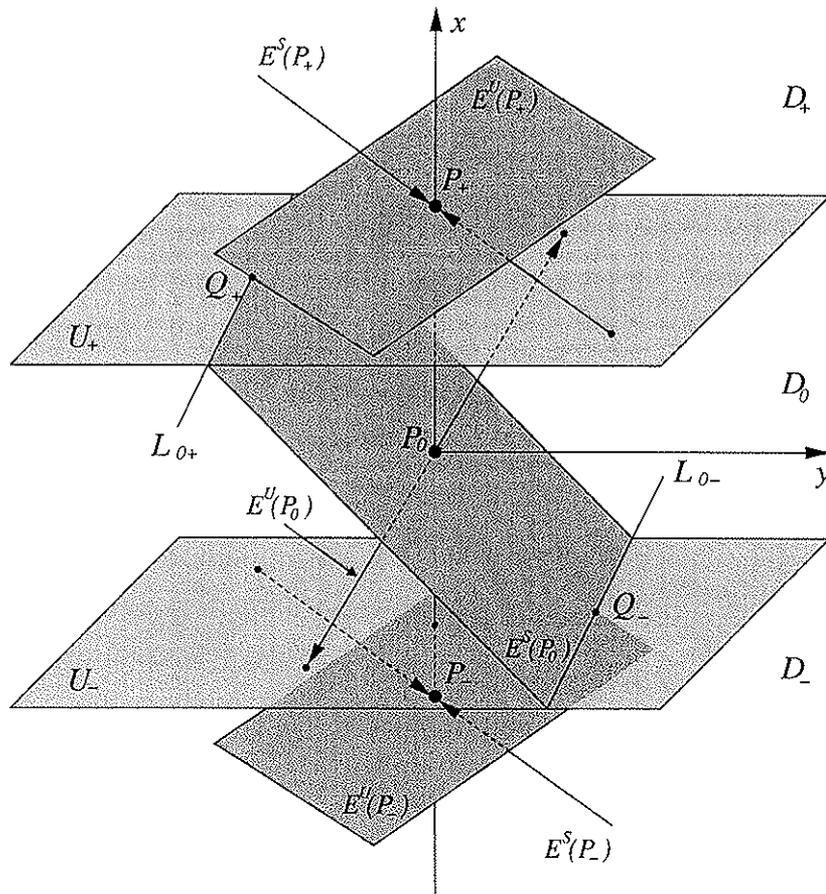
Os subespaços são subconjuntos do espaço de estado, formados pela combinação linear dos vetores associados aos auto vetores, que evoluem para o ponto fixo num tempo  $t \rightarrow \pm\infty$ , do sistema linearizado. O subconjunto, formado por esses vetores, que se aproxima assintoticamente do ponto fixo para  $t \rightarrow +\infty$  é chamado de subespaço estável e, o que se aproxima em  $t \rightarrow -\infty$ , de subespaço instável. A soma do número de vetores que compõem o subespaço estável com o número de vetores que compõem o subespaço instável é igual à dimensão do espaço de estado.

Nesta seção vamos mostrar como determinar e apresentar a topologia mais característica dos subespaços, no espaço de estado, do circuito Double Scroll contínuo e descontínuo.

### 3.2.1 Sistema Contínuo

O Sistema Double Scroll contínuo apresenta três pontos fixos,  $P_+$ ,  $P_-$  e  $P_0$ , conforme a equação (2.17) do capítulo 2. Cada um desses pontos fixos apresenta os dois tipos de subespaços, estável e instável, para uma larga combinação dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , incluindo as situações em que a dinâmica apresenta atratores periódicos e caóticos. Portanto, os pontos fixos são do tipo sela.

De acordo com a discussão feita no final da seção 3.1.2, pontos ao longo das direções dos vetores  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$ , do ponto fixo tipo sela, evoluem no sentido contrário ao dos pontos ao longo da direção de  $\vec{v}$ , numa larga faixa de parâmetros. Assim, em geral a combinação linear de  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$  formará um subespaço bidimensional que será um plano, e  $\vec{v}$  formará o outro subespaço que será uma reta, portanto unidimensional. A estabilidade deles dependerá do valor da parte real dos autovalores calculados para cada ponto fixo. A figura 3.2 mostra que, caracteristicamente, em  $P_0$  o subespaço estável é um plano e o instável é uma reta e, em  $P_+$  e  $P_-$ , o subespaço estável é uma reta e o instável é um plano.



**Figura 3.2:** Subespaços estáveis ( $E^S$ ) e instáveis ( $E^U$ ) dos pontos fixos  $P_+$ ,  $P_0$  e  $P_-$  do sistema Double Scroll contínuo. Os planos  $U_+$  e  $U_-$  são as fronteiras entre os domínios  $D_0$  e  $D_+$ , e  $D_0$  e  $D_-$ , respectivamente.  $Q_{\pm} = E^S(P_0) \cap E^U(P_{\pm})$  e  $L_{0\pm} = E^S(P_0) \cap U_{\pm}$ .

A figura 3.2 mostra a disposição dos subespaços no espaço de estados do sistema Double Scroll contínuo. A vista é tridimensional e corresponde a uma leve rotação do espaço em torno do eixo  $y$ . Os domínios do sistema, discutidos na seção 2.2.2, estão representados por  $D_+$ ,  $D_0$  e  $D_-$ .  $P_+$ ,  $P_0$  e  $P_-$  são, respectivamente, os pontos fixos do sistema. O plano  $U_+ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$  é a fronteira entre os domínios  $D_+$  e  $D_0$ , e  $U_- = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -1\}$  é a fronteira entre os domínios  $D_-$  e  $D_0$ . O subespaço estável de  $P_0$  está representado pelo plano  $E^S(P_0)$  e, o instável, pela reta  $E^U(P_0)$ . Ambos estão limitados pelos planos  $U_+$  e  $U_-$ . Observe que  $E^U(P_0)$  é composto pelas duas retas que apontam para fora de  $P_0$ . O plano  $E^U(P_+)$  é o subespaço instável do ponto fixo  $P_+$ , e está limitado somente de um lado por  $U_+$ . As retas representadas por  $E^S(P_+)$ , compõem o subespaço estável de  $P_+$ . Ambas

apontam para o ponto fixo e apenas a reta inferior está limitada entre  $P_+$  e  $U_+$ . Os subespaços de  $P_-$  apresentam a mesma geometria que os de  $P_+$ , respeitando a simetria do sistema.

Todas as amplitudes possíveis que o vetor  $\vec{v}$ , definido na equação (3.15), pode assumir determinam o conjunto de pontos que formam o subespaço unidimensional. Assim, a equação (3.12) define esse conjunto para os diversos valores de  $x'$ . Como nessa equação, todas as coordenadas ( $x'_i$ , com  $i=1, 2$  e  $3$ ), têm a referência localizada na posição do ponto fixo, então  $x'_i = x_i - x_{pfi}$ , onde  $x_{pfi}$  são as coordenadas dos pontos fixos determinadas em (2.17) do capítulo 2. Assim,

$$E^U(P_o) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, y = \frac{\alpha(1+a) + \lambda}{\alpha} x \text{ e } z = -\frac{\beta}{\lambda} y \right\} \quad (3.17)$$

$$E^S(P_+) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 1, y = \frac{\alpha(1+b) + \rho}{\alpha} (x - 1, 5) \text{ e } z = -\frac{\beta}{\rho} y - 1, 5 \right\} \quad (3.18)$$

$$E^S(P_-) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq -1, y = \frac{\alpha(1+b) + \rho}{\alpha} (x + 1, 5) \text{ e } z = -\frac{\beta}{\rho} y + 1, 5 \right\} \quad (3.19)$$

Os subespaços bidimensionais são os planos determinados pela combinação linear dos vetores  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$ . Isso implica que,

$$\begin{vmatrix} x - x_{pf} & y - y_{pf} & z - z_{pf} \\ x'_R & y'_R & z'_R \\ x'_I & y'_I & z'_I \end{vmatrix} = 0$$

que resulta em

$$X(x - x_{pf}) + Y(y - y_{pf}) + Z(z - z_{pf}) = 0$$

onde,  $X = y'_R z'_I - z'_R y'_I$ ,  $Y = z'_R x'_I - x'_R z'_I$  e  $Z = x'_R y'_I - y'_R x'_I$ . As coordenadas  $x'_{Ri}$  formam o vetor  $\vec{v}_R$  e,  $x'_{Ii}$ , o vetor  $\vec{v}_I$ . Elas estão definidas em (3.13) e (3.14). Assim,

$$E^S(P_o) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Xx + Yy + Zz = 0, |x| \leq 1\} \quad (3.20)$$

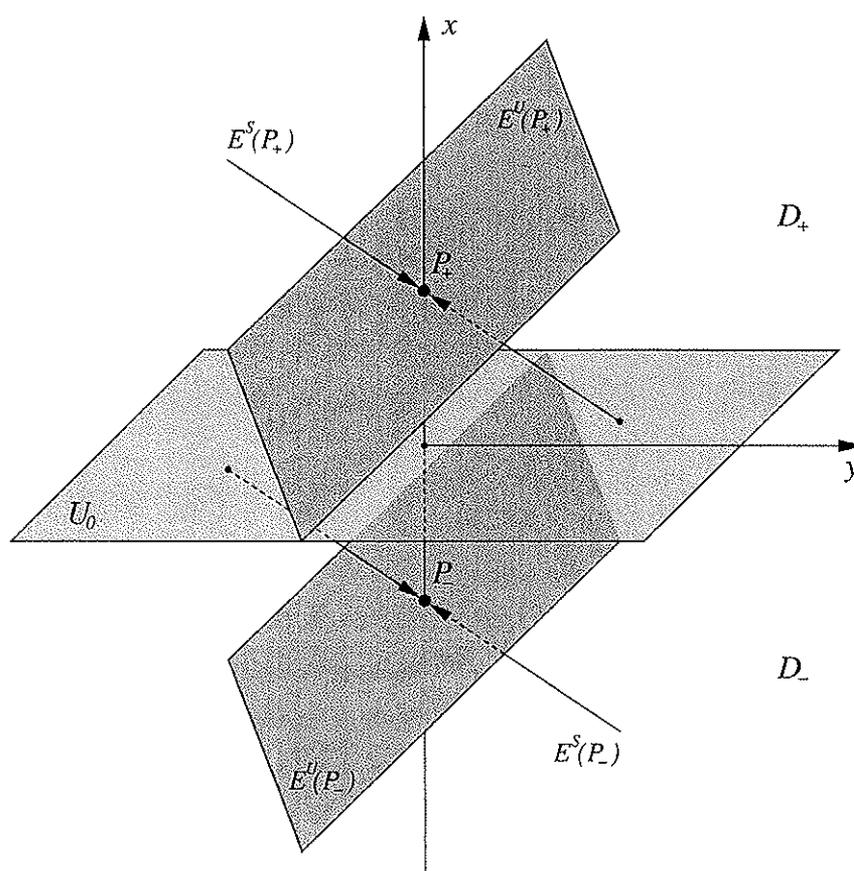
$$E^U(P_+) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid X(x - 1, 5) + Yy + Z(z + 1, 5) = 0, x \geq 1\} \quad (3.21)$$

$$E^U(P_-) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid X(x + 1, 5) + Yy + Z(z - 1, 5) = 0, x \leq -1\} \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Sistema Descontínuo

A exemplo do sistema contínuo, o sistema descontínuo apresenta, na maior parte das combinações de  $\alpha$  e  $\beta$ , pontos fixos do tipo sela. Como determinado no capítulo

2, nesse sistema existem dois pontos fixos que são equivalentes aos  $P_+$  e  $P_-$  do circuito contínuo. O domínio  $D_0$  deixa de existir devido à ausência da inclinação central na curva característica da resistência não linear do sistema com descontinuidade. E, como os dois sistemas são equivalentes para  $|x| \geq 1$ , obteremos o mesmo comportamento dessa região, apresentado pelo circuito contínuo, estendida a um domínio maior, no circuito descontínuo, conforme determinado na seção 2.2.2. Assim, neste caso todos os subespaços estáveis são unidimensionais e os instáveis, bidimensionais.



**Figura 3.3:** Subespaços estáveis ( $E^S$ ) e instáveis ( $E^U$ ) dos pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$  do sistema Double Scroll descontínuo. O plano  $U_0$  é a fronteira entre os domínios  $D_+$  e  $D_-$ .

Na figura 3.3 apresentamos os subespaços do sistema descontínuo. A vista é tridimensional e corresponde a uma leve rotação do espaço em torno do eixo  $y$ .  $U_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$  é a fronteira entre os domínios  $D_+$  e  $D_-$ .  $P_+$  e  $P_-$  são os pontos fixos do sistema. O subespaço instável de  $P_+$  está representado por  $E^U(P_+)$ . Ele é o plano composto pelos vetores  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$ , e está limitado pelo plano

$U_0$ .  $E^S(P_+)$  é o subespaço estável de  $P_+$ . É composto pelas duas retas que apontam para o ponto fixo. A reta inferior está limitada entre  $P_+$  e  $U_0$ . Da mesma forma que acontece no sistema contínuo, a simetria das equações do sistema impõe a mesma configuração dos subespaços no ponto fixo  $P_-$ .

As mesmas considerações feitas, para determinar os subespaços instáveis e estáveis dos pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$ , do sistema contínuo, devem ser feitas aqui, levando em conta os novos domínios e posições dos pontos fixos. Assim, o subespaço estável, de  $P_+$  e  $P_-$  do sistema descontínuo, é dado pelo conjunto

$$E^S(P_+) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y = \frac{\alpha(1+b) + \rho}{\alpha}(x - 3, 5) \text{ e } z = -\frac{\beta}{\rho}y - 3, 5 \right\} \quad (3.23)$$

$$E^S(P_-) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y = \frac{\alpha(1+b) + \rho}{\alpha}(x + 3, 5) \text{ e } z = -\frac{\beta}{\rho}y + 3, 5 \right\} \quad (3.24)$$

e, o instável, pelo conjunto

$$E^U(P_+) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid X(x - 3, 5) + Yy + Z(z + 3, 5) = 0, x > 0\} \quad (3.25)$$

$$E^U(P_-) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid X(x + 3, 5) + Yy + Z(z - 3, 5) = 0, x < 0\} \quad (3.26)$$

onde,  $X = y'_R z'_I - z'_R y'_I$ ,  $Y = z'_R x'_I - x'_R z'_I$  e  $Z = x'_R y'_I - y'_R x'_I$ . As coordenadas  $x'_{R_i}$  formam o vetor  $\vec{v}_R$  e,  $x'_{I_i}$ , o vetor  $\vec{v}_I$ . Elas estão definidas em (3.13) e (3.14).



# Capítulo 4

## Atratores

Atratores são conjuntos característicos de sistemas dissipativos, compactos no espaço de fase, e invariantes sob o fluxo e o mapeamento, para onde a dinâmica do sistema converge assintoticamente. Os atratores mais comuns são conhecidos como

- (a) **Atrator Pontual:** A trajetória do sistema converge para um ponto e lá permanece indefinidamente. Esse tipo de atrator é independente do tempo e tem dimensão 0.
- (b) **Ciclo Limite:** Neste caso a trajetória converge para uma curva fechada, no espaço de fase, percorrendo uma trajetória caracterizada pela sua amplitude e periodicidade. Esse atrator é periódico e tem dimensão 1 (uma frequência fundamental).
- (c) **Estranho:** O atrator possui dimensão fracionária.
- (d) **Caótico:** É caracterizado por apresentar uma divergência média, do tipo exponencial, entre duas trajetórias muito próximas. Os atratores caóticos também apresentam dimensão fracionária.

Os atratores (a) e (b), citados anteriormente, e mostrados na figura 4.1, têm formas geométricas simples com dimensão inteira ou nula. As trajetórias apresentadas na figura indicam que o fluxo converge para o atrator pontual (a) e periódico (b).

Atratores que tem propriedades geométricas complexas são conhecidos como atratores estranhos. Para caracterizá-los quantitativamente, medimos a sua dimensão. Conjuntos associados a uma dimensão não inteira são chamados fractais [52]. Os atratores estranhos possuem dimensão fractal.

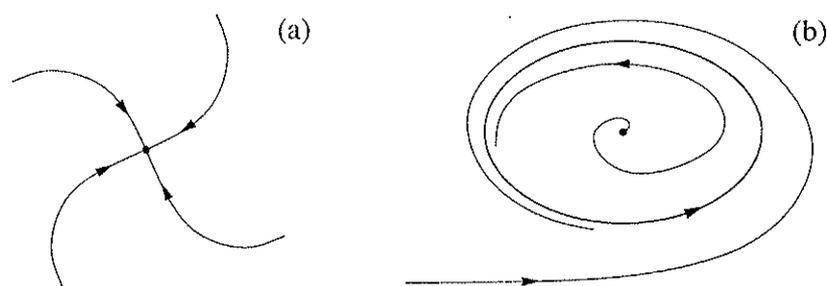


Figura 4.1: Atratores tipo (a) pontual e (b) ciclo limite.

Outra medida quantitativa de um atrator é o expoente característico de Lyapunov ou número de Lyapunov [49, 53]. Esta medida está baseada na sensibilidade às condições iniciais dos sistemas dinâmicos. Essa sensibilidade tem conseqüências práticas, uma vez que pequenos desvios nas condições iniciais estão sempre presentes, seja devido a imprecisões inerentes ou pela existência de ruído experimental. Os expoentes característicos de Lyapunov medem a taxa de divergência exponencial de trajetórias muito próximas e serão melhor discutidos na seção 4.1.2. Um atrator é considerado caótico se pelo menos um dos expoentes de Lyapunov for positivo.

Os atratores caóticos possuem dimensão fractal mas existem atratores com dimensões fractais que não apresentam nenhum expoente de Lyapunov positivo e, portanto, não são caóticos [54]. Dessa forma, o termo caos reflete a sensibilidade às condições iniciais de um sistema, e o termo estranho, à geometria do atrator.

O circuito Double Scroll Scroll não apresenta atratores estranhos que não sejam caóticos. Por outro lado, apresenta conjuntos invariantes chamados órbitas homoclínicas, através dos quais é possível demonstrar que existe um conjunto caótico na sua vizinhança (teorema de Shilnikov [15, 16, 17]).

Neste capítulo, não se pretende demonstrar os teoremas, mas apresentamos, na seção 4.1, seus aspectos mais importantes no intuito de dar sustentação à existência de conjuntos caóticos no circuito Double Scroll. O teorema de Shilnikov está tratado de forma rigorosa no capítulo 8 por fazer parte da demonstração de bifurcações no sistema desenvolvida neste programa de doutoramento. Para a teoria completa dos expoentes de Lyapunov sugerimos as referências anteriormente citadas. Na seção 4.2 apresentamos uma análise da dinâmica através dos subespaços do sistema capaz de explicar a formação dos atratores. A coexistência de atratores, suas bacias de atração e as regiões do espaços dos parâmetros em que eles ocorrem também estão discutidas nesta seção.

## 4.1 Existência de Conjuntos Caóticos

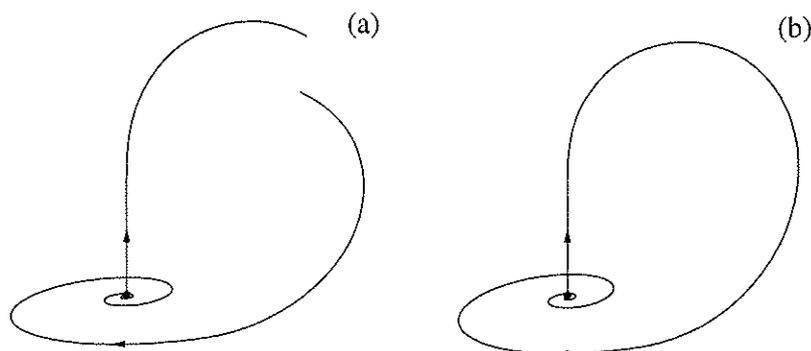
No final do século XIX, Poincaré observou que a complexidade do comportamento dinâmico do sistema de três corpos, que mais tarde viria a ser chamado de caos, devia-se à existência de pontos chamados homoclínicos em mapeamentos do sistema [13] (a idéia de analisar o sistema por meio de mapas é originalmente de Poincaré e a definição desse mapeamento está apresentada na seção 4.2.1). Em 1963, Smale [14] mostrou que um conjunto caótico é formado de infinitas órbitas periódicas e que, através de um processo de contração, expansão e dobramento, formam-se estruturas no mapa conhecidos como ferraduras de Smale. Essas ferraduras são ícones dos sistemas caóticos. No mesmo ano Melnikov mostrou que a existência de estruturas invariantes, chamadas de órbitas homoclínicas, em sistemas discretos bidimensionais, implica no surgimento de pontos homoclínicos e portanto em caos [55]. A partir de 1965, através de uma série de artigos [15, 16, 17], Shilnikov associou as órbitas homoclínicas no fluxo com a existência das ferraduras de Smale. No final dos anos setenta, e começo dos oitenta, os resultados matemáticos de Shilnikov foram popularizados pelos trabalhos pioneiros de Arneodo, Couillet e C. Tresser [18, 19, 20, 21, 22] publicados em revistas de distintas áreas da física, química e biologia.

O estudo de órbitas homoclínicas, no fluxo, é uma das partes centrais deste trabalho e será analisado, desde a sua formação até as regiões do espaço dos parâmetros em que ela acontece, nos próximos capítulos. Na seção 4.1.1 está apresentado uma breve descrição, suficiente para a compreensão do teorema de Shilnikov. No final da introdução do capítulo 7 estão apresentados os motivos pelos quais não pode haver formação de uma órbita homoclínica no sistema Double Scroll descontínuo. Assim, o teorema não se aplica nesse sistema, mas é válido para o sistema contínuo.

Em 1966, Lyapunov mostrou como quantificar a dependência sensitiva às condições iniciais, ou seja, o caos, através dos expoentes característicos de Lyapunov [53], cuja proposta se transformou na forma mais usada para verificar se o comportamento dinâmico de um sistema é caótico. A existência de conjuntos caóticos, no fluxo, pode ser demonstrada analiticamente pelo teorema de Shilnikov, mas raros são os sistemas que permitem a determinação analítica dos expoentes de Lyapunov. Neste caso é necessário determiná-los numericamente. Na seção 4.1.2 está apresentado como medir os expoentes de Lyapunov e em seguida os resultados dessas medidas no sistema Double Scroll contínuo e descontínuo.

### 4.1.1 Teorema de Shilnikov

Uma das condições do teorema de Shilnikov é que deve existir uma órbita homoclínica no sistema. A órbita homoclínica no fluxo é formada pela fusão da variedade instável e estável de um ponto fixo. Para o teorema o ponto fixo deve ser do tipo foco sela, ou seja, como estamos tratando de sistema tridimensionais, dois autovalores da matriz Jacobina no ponto fixo devem ser complexos conjugados e o outro puramente real. A variedade estável é formada pelo conjunto de pontos que descrevem trajetórias que se aproximam assintoticamente de um ponto fixo num intervalo de tempo  $t \rightarrow +\infty$ , e a variedade instável é formada pelo conjunto de pontos que descrevem trajetórias que se aproximam assintoticamente do ponto fixo num intervalo de tempo  $t \rightarrow -\infty$  (figura 4.2(a)). Quando a órbita homoclínica é formada, a órbita converge para o ponto fixo num tempo  $t \rightarrow \pm\infty$  (figura 4.2(b)).



**Figura 4.2:** (a) Variedade estável (seta na direção do ponto fixo) e instável (seta na direção contrária ao ponto fixo) (b) Órbita Homoclínica.

O teorema de Shilnikov é válido para sistemas de equações diferenciais em  $\mathbb{R}^3$  que possam ser reduzidos ao sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x - \omega y + P(x, y, z; \mu) \\ \dot{y} &= \omega x + \rho y + Q(x, y, z; \mu) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z; \mu) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde:

- I—  $\mu$  é o parâmetro de controle.
- II—  $\dot{P}(0, 0, 0; \mu) = \dot{Q}(0, 0, 0; \mu) = \dot{R}(0, 0, 0; \mu) = 0$ .
- III—  $\lambda\rho < 0$  e  $\omega \neq 0$ .

IV-  $|\rho/\lambda| < 1$ .

Note que o sistema apresenta um ponto fixo na origem  $(0, 0, 0)$ . Os autovalores do sistema (4.1) linearizado são  $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$  e  $\lambda_3 = \lambda$ . Apesar do item [I] mostrar apenas um parâmetro de controle, o sistema pode conter outros. A condição apresentada no item [II] garante que as funções  $P$ ,  $Q$  e  $R$  se anulem quando o sistema for linearizado em torno do ponto fixo. Nessas condições a Jacobiana do sistema será constante. A condição  $\lambda\rho < 0$  implica que o ponto fixo deve possuir as variedades estável e instável, o que caracteriza um ponto fixo tipo sela, e a condição  $\omega \neq 0$  implica na existência de autovalores imaginários, típico de ponto fixo tipo foco. Assim, a condição do item [III] impõe que o ponto fixo deve ser do tipo sela foco. E, por fim, a condição [IV] é conhecida como a condição de Shilnikov.

O teorema de Shilnikov diz que se existir uma órbita homoclínica de um ponto fixo sela foco e o sistema dinâmico puder ser representado pelo sistema de equações diferenciais (4.1) com [I a IV] respeitados, então existe uma contável infinidade de ferraduras de Smale na vizinhança da órbita homoclínica. Se a condição de Shilnikov ([IV]) não for obedecida, será formada um conjunto finito, ou vazio, de órbitas periódicas e nenhuma ferradura.

Uma forma pictórica de entender a formação de ferraduras de Smale está apresentada na figura 4.3. A forma em espiral com que a órbita homoclínica se apresenta, nas proximidades do ponto fixo, revela que o ponto fixo é do tipo sela foco.  $\Sigma(t_0)$  representa o conjunto de pontos da superfície retangular  $\Sigma$  no tempo  $t_0$ . Inicialmente,  $\Sigma$  está posicionado acima e perpendicularmente à direção da órbita. Os pontos mais próximos da órbita homoclínica convergirão para o ponto fixo de forma mais lenta que os demais, dado que um ponto na órbita leva um tempo infinito para alcançar o ponto fixo. Por outro lado, observe que o lado da superfície retangular, logo acima da órbita, deve contrair-se à medida que se aproxima do ponto fixo. Portanto, haverá uma expansão, ao longo da direção da órbita, e um estreitamento, na direção transversal, da superfície  $\Sigma(t_0)$ . Além do mais, as curvas da órbita causam dobramentos formando a superfície  $\Sigma(t_1)$  no instante  $t_1$ . Em seguida toda a superfície se afasta do ponto fixo por influência da sua variedade instável formando a superfície  $\Sigma(t_2)$  no instante  $t_2$ . O sistema passa a evoluir praticamente sem mudanças topológicas formando as superfícies  $\Sigma(t_3)$  e  $\Sigma(t_4)$  até que atravessa o plano que contém a superfície  $\Sigma(t_0)$ . A evolução da superfície  $\Sigma(t_4)$  intersecciona esse plano formando  $\Sigma'$ . Note que a superfície  $\Sigma'$  apresenta regiões que interseccionam  $\Sigma(t_0)$ , isso significa que existem pontos em  $\Sigma(t_0)$  que são mapeados nele mesmo, caracterizando a existência de órbitas periódicas. A superfície  $\Sigma'$  tem a forma de

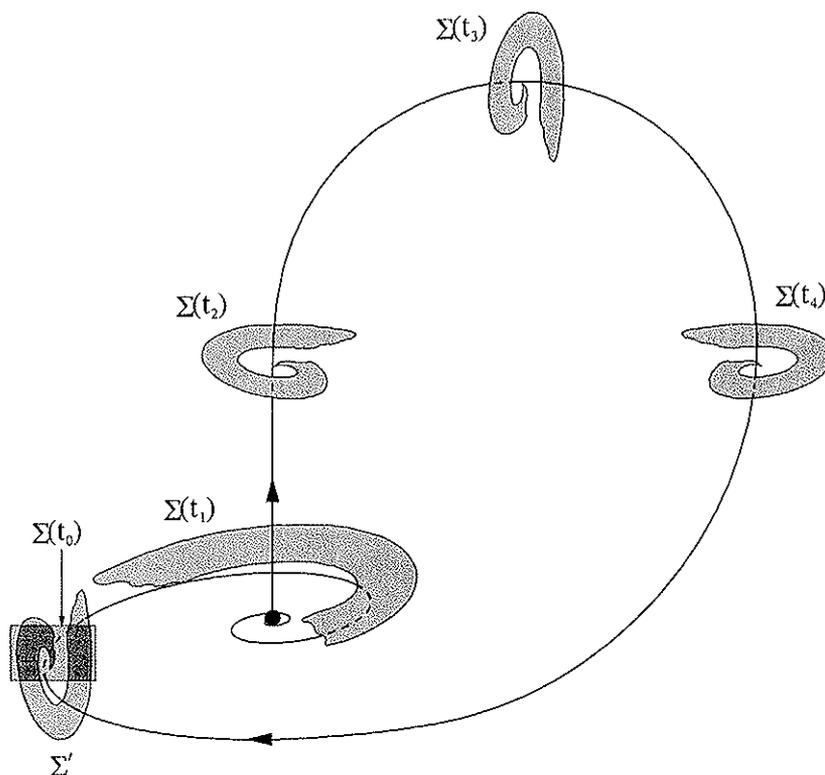


Figura 4.3: Ferradura de Smale segundo o teorema de Shilnikov.

uma ferradura de Smale, típica de sistemas caóticos. A demonstração rigorosa da existência das órbitas periódicas pode ser obtida impondo  $z=z_0$  e  $r=r_0$  na equação (8.8) do capítulo 8.

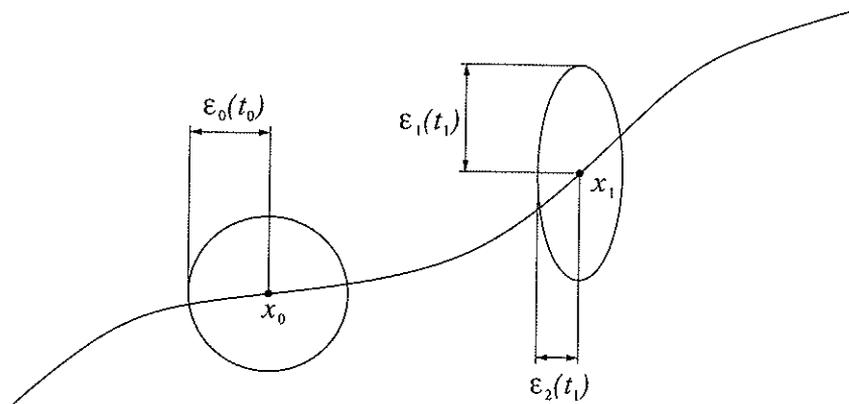
#### 4.1.2 Expoente de Lyapunov

O termo trajetória caótica está associado à imprevisibilidade da trajetória ao longo do tempo. Mas se o sistema é determinístico, como é que pode ser não previsível? A resposta a esta pergunta está na sensibilidade às condições iniciais que o sistema apresenta. Vamos supor dois pontos num espaço de fase de três dimensões, inicialmente bem próximos. Em trajetórias caóticas de um atrator, esses pontos vão se separar exponencialmente com o tempo, até que num instante estarão percorrendo trajetórias completamente distintas que jamais vão se cruzar, do ponto de vista local, mas que, globalmente, estarão presas ao atrator. Os expoentes característicos de Lyapunov ou número de Lyapunov, medem a taxa média da divergência das trajetórias, ou seja, quantifica a sensibilidade às condições iniciais.

Consideremos um pequeno volume esférico de condições iniciais de raio  $\epsilon_0(t_0)$  em torno do ponto inicial  $x_0$ , no espaço de estado de dimensão 3. Vamos acompanhar a evolução das condições iniciais  $y_0$  contidas no volume. Inicialmente temos que:

$$|y_0 - x_0| \leq \epsilon_0(t_0) \quad (4.2)$$

À medida que o tempo vai passando, o fluxo transforma a esfera num elipsóide com eixos principais  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , pois terá ocorrido, em média, a contração de um dos seus eixos, expansão do outro e, condições iniciais que estão no eixo que corresponde à direção da trajetória de  $x_0$ , não alterarão suas distâncias relativas, ou seja, nesse eixo, em média, não ocorre contração nem expansão.



**Figura 4.4:** Representação da evolução da esfera de condições iniciais numa dinâmica caótica.

A figura 4.4 faz uma representação em duas dimensões de como ocorre a deformação da esfera. A circunferência, fronteira das condições iniciais, de raio  $\epsilon_0(t_0)$ , centrado em  $x_0$ , sofre expansão em uma direção, representado pelo eixo  $\epsilon_1(t_1)$ , e contração na outra ( $\epsilon_2(t_1)$ ).

Os expoentes de Lyapunov medem a média da variação exponencial desses eixos, e são definidos por:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon_0(t_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\epsilon_i(t)}{\epsilon_0(t_0)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.3)$$

Da equação (4.3), é intuitivo verificar que

$$\epsilon_i(t) \approx \epsilon_0(t_0) e^{\lambda_i t} \quad (4.4)$$

Podemos concluir, que há expansão orbital, numa direção, cada vez que se tenha o expoente de Lyapunov, associado a ele, positivo. Portanto, a divergência a que

se refere a dependência às condições iniciais de um sistema caótico, implica na existência de pelo menos um expoente positivo. Nas soluções periódicas e quase-periódicas, há uma contração nas direções perpendiculares ao movimento o que implica em expoentes negativos. Para um instante  $t$  qualquer, um elemento do volume no espaço de fase pode ser escrito assim:

$$\delta V(t) \cong \prod_{i=1}^3 \epsilon_i(t) \quad (4.5)$$

Substituindo a 4.4 em 4.5 obtemos

$$\delta V(t) = \delta V(0) \exp \left( \sum_{i=1}^3 \lambda_i t \right) \quad (4.6)$$

Nos circuitos considerados neste trabalho ocorrem as situações:

- a)  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i > 0 \implies \delta V(t) > \delta V(0)$ , e o fluxo diverge.
- b)  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0 \implies \delta V(t) < \delta V(0)$ , e o fluxo não diverge.

Em b) está a condição em que o sistema é dissipativo quando o volume se contrai. Esse é o caso de interesse neste capítulo. Através dos expoentes de Lyapunov é possível identificar o tipo do atrator. Vamos verificar como isso pode ser feito para o sistema dissipativo de três dimensões:

**Pontual:** todas as direções devem se contrair para um único ponto, assim os expoentes devem ser  $(-, -, -)$ .

**Ciclo limite:** apenas a direção da trajetória não deve, em média, se contrair, portanto  $(0, -, -)$ .

**Caótico:** devido à sensibilidade às condições iniciais, pelo menos um expoente deve ser positivo. O expoente associado à direção do fluxo deve ser nulo. O fato do sistema ser dissipativo implica que a soma dos expoentes deve ser negativo, o que só pode acontecer se o terceiro expoente for negativo, assim  $(+, -, 0)$ .

Note que para que ocorra um atrator pontual, basta um sistema de uma dimensão com expoente de Lyapunov negativo. Isso significa que, quando evoluídas no tempo,

a distância entre duas condições iniciais diminuirá infinitamente, tornando-se nula quando atingirem o ponto fixo. Para que ocorra um ciclo limite (órbita periódica estável), além da direção de contração como no caso do atrator pontual, é necessário no mínimo uma outra dimensão com expoente de Lyapunov nulo, o que reflete o fato de que duas condições iniciais sobre o ciclo limite, quando evoluídas, em média não sofrerão contração nem expansão. Isso é fácil de perceber se observarmos que, decorrido um intervalo de tempo igual ao período do ciclo limite, o sistema apresenta soluções nas mesmas posições das suas condições iniciais, mantendo a mesma distância entre eles. Para um atrator caótico é necessário pelo menos um sistema tridimensional. Duas direções devem comportar-se como no ciclo limite, e a terceira deve apresentar expoente de Lyapunov positivo. Isso caracteriza a divergência exponencial entre duas trajetórias com condições iniciais muito próximas, responsável pela sensibilidade às condições iniciais de um sistema caótico.

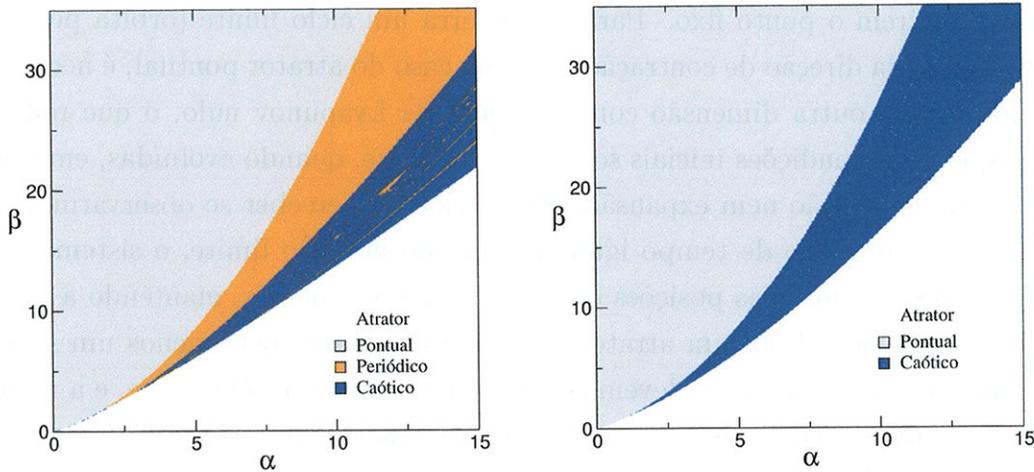
Resumindo, as condições que identificamos para ocorrência de atrator caótico, num sistema tridimensional, são:

1.  $\lambda_i > 0$ , existência de um expoente de Lyapunov positivo.
2.  $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$ , o que garante a contração do volume de um sistema dissipativo.

A figura 4.5 mostra os tipos de atratores que ocorrem no circuito Double Scroll descontínuo (a) e contínuo (b), segundo o expoente de Lyapunov e autovalores dos pontos fixos. O circuito descontínuo apresenta atratores pontuais e caóticos, enquanto o contínuo, apresenta atratores pontuais, caóticos e janelas periódicas. Para o cálculo do expoente de Lyapunov foi utilizado o algoritmo desenvolvido por Wolf [56] e implementado por Santos [57]. A esse programa foram feitas adaptações para compatibilizá-los aos sistemas aqui estudados.

No circuito descontínuo existem apenas os dois pontos fixos simétricos. Dessa forma, para verificar a estabilidade dos pontos fixos basta determinar os autovalores do sistema. A figura 3.1, apresentada no capítulo Análise Linear, mostra que existem parâmetros em que a parte real do autovalor imaginário ( $\rho$ ) e o autovalor real ( $\lambda$ ) dos pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$  são negativos, i.e., os pontos fixos são atratores pontuais. Na figura 4.5, os atratores pontuais, do circuito descontínuo, foram determinados através dos seus autovalores. Os demais atratores da figura foram determinados através do expoente de Lyapunov.

A fronteira dos atratores pontuais e dos caóticos, no espaço dos parâmetros, é caracterizada pela parte real do autovalor imaginário com valor nulo. Isso implica



**Figura 4.5:** Diagrama dos Atratores, segundo o expoente de Lyapunov, no circuito Double Scroll contínuo (a) e descontínuo (b). Resolução 500x500 pontos. Os atratores pontuais do circuito descontínuo foram determinados através dos autovalores dos pontos fixos.

que atratores caóticos próximos a essa fronteira tenham uma baixa divergência exponencial, principalmente no circuito descontínuo, sendo necessário longas trajetória para a determinação do expoente de Lyapunov. Para determinar os parâmetros dos atratores caóticos na figura 4.5(a) foram necessários um intervalo de tempo de  $\tau = 200$  para a avaliação do expoente, com um transiente de  $\tau = 50$  a passos de  $d\tau = 10^{-3}$ . Para gerar a figura 4.5(b), o sistema sofreu evoluções discretas de tempo  $d\tau = 10^{-3}$ . Decorrendo um intervalo de tempo  $\tau = 50$  para eliminar o transiente e mais  $\tau = 50$  para a determinação do expoente de Lyapunov.

## 4.2 Tipos de Atratores

Na seção anterior identificamos que estão presentes, no espaço dos parâmetros, os atratores pontuais, ciclos limite e caóticos. No circuito Double Scroll contínuo existe uma variada quantidade de distintos atratores periódicos e caóticos, e estas diferenças não podem ser identificados pelo cálculo do expoente de Lyapunov.

Nesta seção vamos mostrar um método para identificar parâmetros de órbitas periódicas semelhantes e com isso mostrar como o surgimento dessas órbitas está relacionada com o atrator caótico. A figura 4.5(b) mostrou que as órbitas periódicas fazem fronteira com os atratores caóticos no espaço dos parâmetros. O que queremos

identificar é o tipo de órbitas periódica e caótica que estão nessa fronteira. Além do mais, é possível identificar, usando este mesmo método, os parâmetros que contém atratores caóticos com diferenças acentuadas como os atratores tipo Rössler e Double Scroll. Apresentamos, também, as trajetórias que formam todos estes atratores no espaço de fase, identificando coexistência de atratores caóticos, e no final apresentamos ainda uma coleção de atratores caóticos distintos que o circuito Double Scroll contínuo pode apresentar. Como o circuito descontínuo não apresenta órbitas periódicas e os atratores caóticos são muito semelhantes, a existência de atratores distintos, nesse sistema, será abordada no próximo capítulo.

### 4.2.1 Espaço dos Parâmetros

Para identificar parâmetros que apresentam atratores parecidos, analisamos o atrator no espaço de fase. Uma das formas mais simples de fazer isso é através da análise de uma seção transversal ao atrator. A idéia de reduzir o estudo de sistemas contínuos no tempo para o estudo de um sistema discreto no tempo, associado ao fluxo, é devida à Poincaré [13]. O mapa de Poincaré é um sistema discreto no tempo que está associado a uma equação diferencial ordinária. Uma discussão mais completa sobre esse assunto pode ser encontrada em [58], nós aqui vamos nos limitar à sua utilidade na determinação dos diferentes atratores periódicos e de atratores caóticos com diferenças acentuadas.

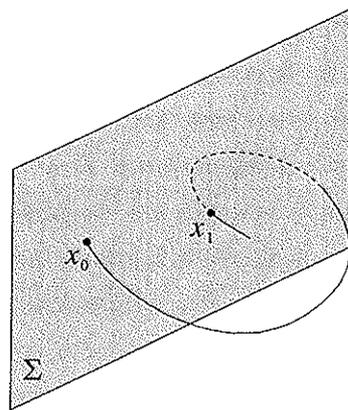


Figura 4.6: Seção de Poincaré.

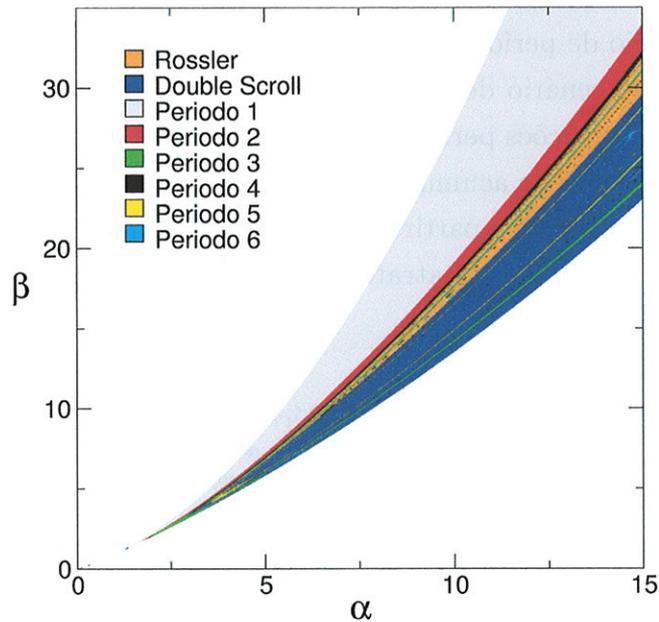
A figura 4.6 mostra uma seção de Poincaré  $\Sigma$ , onde uma trajetória, com condição inicial em  $x_0$  a cruza mais duas vezes. A seção de Poincaré é um plano infinito, assim, para cada revolução da trajetória serão definidos dois pontos na seção. Para

o estudo que estamos fazendo, um dos pontos pode ser desprezado. Assim, somente consideraremos os pontos que foram originados por um dos sentidos do fluxo. Essas considerações definem o mapa de Poincaré de primeiro retorno. Neste caso, numa órbita periódica de período um (uma revolução), observaremos um ponto no mapa, de período dois (duas revoluções), dois, e assim por diante.

A seção de Poincaré, utilizada na nossa análise, está definida no plano  $\Sigma = \{x, y, z \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$ , e consideraremos os pontos marcados pelas trajetórias que tenham o sentido de  $y$  positivo para  $y$  negativo. Essa seção foi escolhida por conter os três pontos fixos e, portanto, atravessa os três domínios, garantindo que a maioria das revoluções passem por esse plano. Dessa forma, os atratores caóticos podem ser diferenciados pela região que a trajetória visita o mapa: o atrator Double Scroll visita todos os domínios  $D_0$ ,  $D_+$  e  $D_-$ , e o atrator tipo Rössler cruza  $\Sigma$  em apenas duas regiões que pertencem aos domínios  $D_0$  e  $D_+$ , ou aos domínios  $D_0$  e  $D_-$ .

Do ponto de vista numérico, é preciso tomar alguns cuidados ao estabelecer o critério para a identificação das órbitas periódicas. O fato é que qualquer trajetória analisada tem um transiente infinito até atingir o atrator periódico. Assim, existe um compromisso entre o tempo de evolução do sistema e a aproximação da trajetória à órbita periódica. Na seção de Poincaré, essa aproximação fica caracterizada por uma concentração de pontos que, a cada período que passa, convergem para um ponto. Assim, a distância de dois pontos tomados a cada período deve ser sempre menor que uma distância  $\epsilon$  para que possamos considerá-los como sendo o mesmo ponto. Se entre esses dois pontos forem marcados  $n$  pontos na seção de Poincaré, o período será dado por  $n + 1$ . A distância  $\epsilon$  pode ser tanto menor quanto maior for o tempo de evolução do sistema, mas isso implica num tempo maior de computação. Por outro lado,  $\epsilon$  grande pode implicar num erro na determinação do período da órbita, levando a um erro na avaliação do período da órbita. Existe ainda um outro cuidado a ser tomado, o passo de integração  $d\tau$  do integrador. Passos grandes favorecem longos tempos de evolução, porém inserem imprecisão na integração. Por outro lado, pequenos passos têm maior precisão, mas implicam em maior tempo de integração. Assim, existe um compromisso entre a distância mínima  $\epsilon$ , a partir da qual consideramos que dois pontos sejam iguais, e o passo de integração  $d\tau$ , versus a precisão da avaliação de uma órbita periódica e o tempo de processamento computacional.

Na figura 4.7 está o resultado desta análise. A resolução é de 500x500 pontos. Foi utilizado um passo de integração de  $d\tau = 5 \times 10^{-3}$ , num intervalo de tempo  $\tau = 70$  para eliminar o transiente, e mais  $\tau = 30$  para detectar o tipo de comportamento,



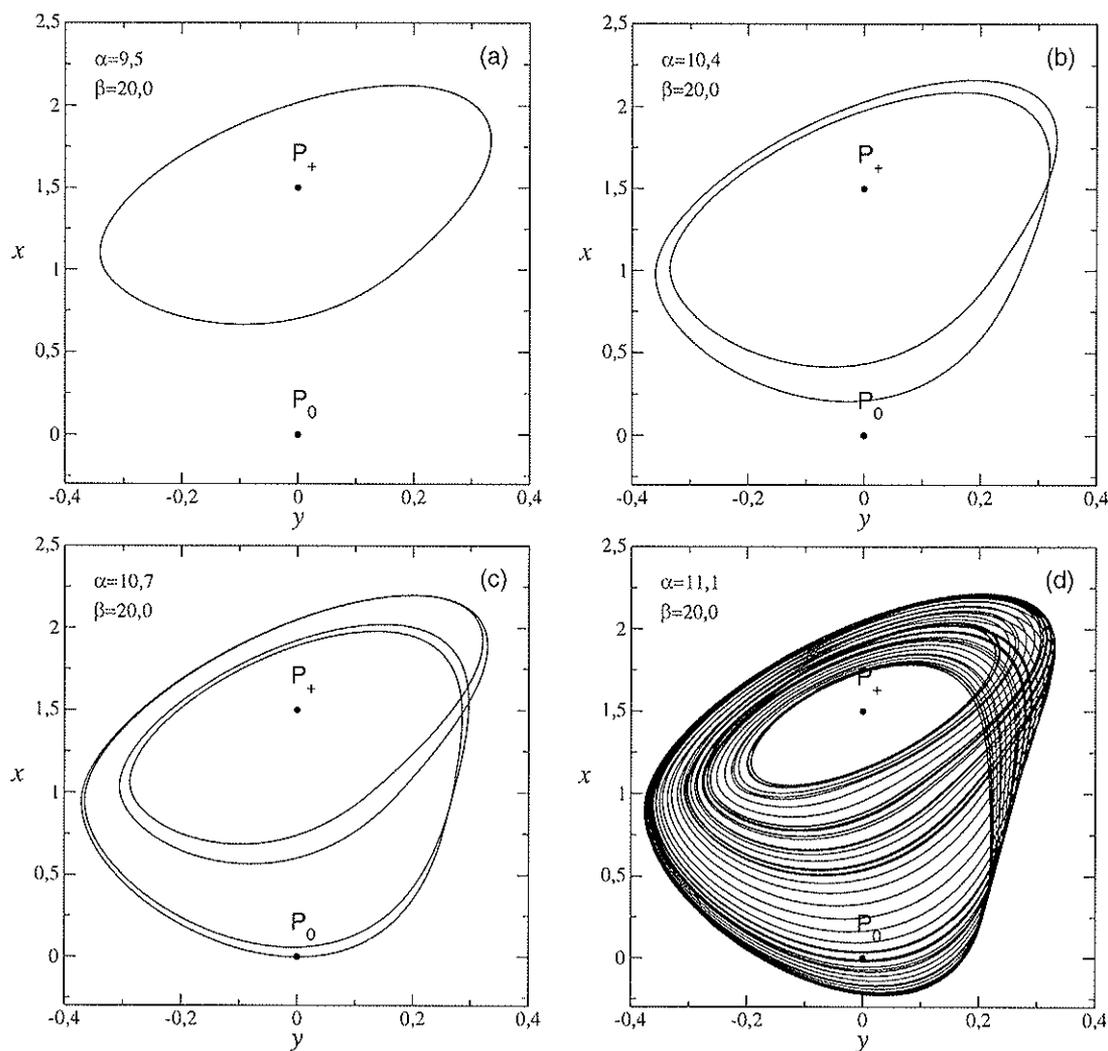
**Figura 4.7:** Atratores periódicos e caóticos no espaço dos parâmetros do circuito Double Scroll contínuo.

o que equivale a pelo menos 100 revoluções avaliadas em torno dos pontos fixos. Nestas condições consideramos distâncias menores que  $\epsilon = 2 \times 10^{-4}$  como sendo o mesmo ponto. A condição inicial para todos os parâmetros foi  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0,5, 0,5)$ . Para a avaliação do período, considerou-se em regime periódico as trajetórias que, para um mesmo intervalo de tempo, atravessaram por quatro vezes a seção de Poincaré a uma distância máxima entre eles de  $\epsilon$ . Foram feitas rotinas para detectar órbitas com períodos de um a seis. Os atratores pontuais estão localizados na região compreendida entre o eixo  $\beta$  e a região em cinza (período 1), e entre a região em azul (Double Scroll) e o eixo  $\alpha$ , está o conjunto de parâmetros para os quais o sistema diverge.

Entre os atratores, os pontuais são os que preenchem a maior parte do espaço dos parâmetros, seguido do periódico de período 1, e dos caóticos Double Scroll e Rössler. Imersas nas regiões do espaço dos parâmetros em que ocorrem os atratores caóticos vemos várias regiões de atratores periódicos formando janelas periódicas.

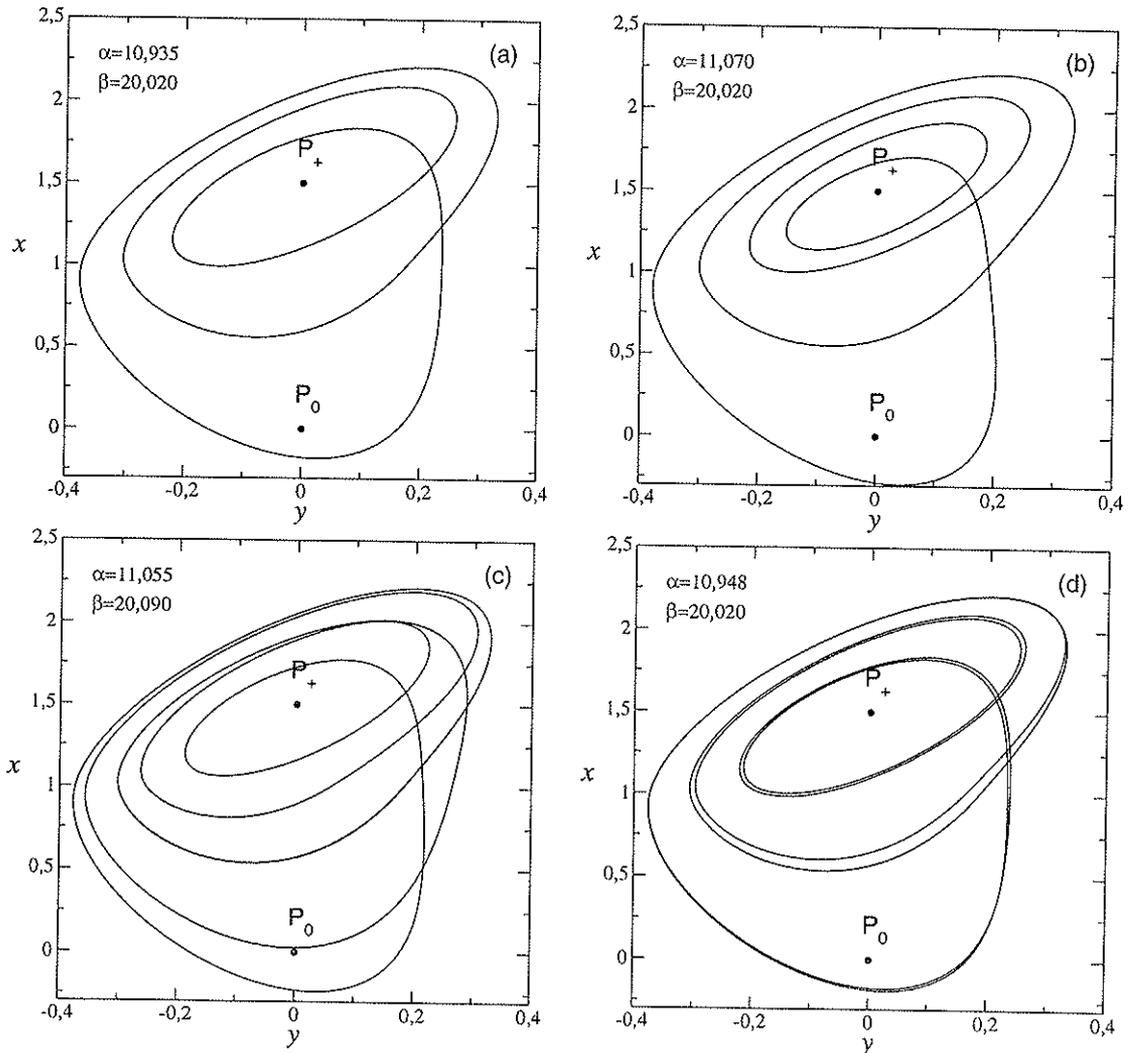
Para valores crescente de  $\alpha$  com  $\beta$  fixo, partindo da região do atrator pontual em direção à região do atrator caótico tipo Rössler, o atrator pontual sofre uma

bifurcação de Hopf [59, 58], na qual se transforma numa órbita periódica de período 1. Na seqüência, sofre outra bifurcação dobrando o seu período para 2 e em seguida para 4. Essa bifurcação de período caracteriza uma rota para o caos via duplicação de período, levando ao cenário de Feigenbaum [60, 61]. Esse cenário é constituído por uma cascata de bifurcações periódicas de períodos  $1, 2, 4, \dots, 2^n$ . O parâmetro  $\alpha$  em que  $n \rightarrow \infty$  é um ponto de acumulação de órbitas periódicas, chamado de ponto de acumulação de Feigenbaum, a partir do qual o sistema passa a ter comportamento caótico. No caso aqui estudado, o atrator caótico é o do tipo Rössler, como pode ser visto na figura 4.7.



**Figura 4.8:** Rota para o caos via bifurcação de período. (a) Período 1. (b) Período 2. (c) Período 4. (d) Atrator caótico tipo Rössler

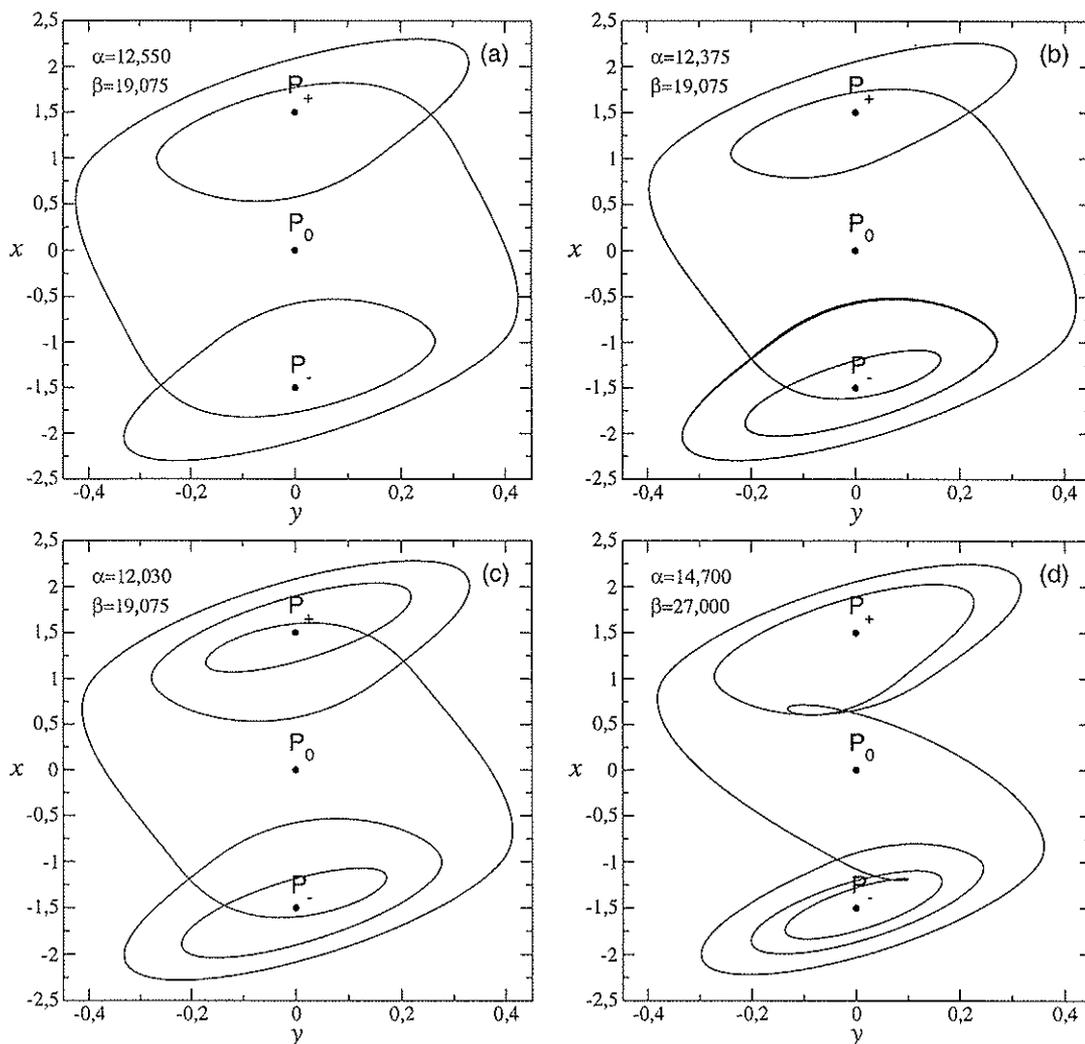
A figura 4.8 apresenta uma sequência de três bifurcações, de períodos para o parâmetro  $\beta = 20$  fixo. Os atratores pontuais, para esse parâmetro, ocorrem somente para valores de  $\alpha < 8,3$ . Aumentando-se o parâmetro  $\alpha$ , o atrator pontual bifurca tornando-se uma órbita periódica de período 1, semelhante àquela apresentada na figura (a). Aumentando-se esse parâmetro um pouco mais, essa órbita aumenta o seu tamanho até o instante em que duplica o seu período e transforma-se numa órbita de período 2 (b). Esta, por sua vez, continua crescendo e sofre mais uma bifurcação, para um pequeno aumento de  $\alpha$ , dobrando seu período para 4 (c). À medida que  $\alpha$  vai aumentando, as bifurcações para os períodos 8, 16, ...,  $2^n$  vão



**Figura 4.9:** Atratores periódicos que formam janelas periódicas na região do atrator caótico tipo Rössler. (a) Período 3. (b) Período 4. (c) Período 5. (d) Período 6.

acontecendo até que se chega num valor do parâmetro em que é atingido o ponto de acumulação de Feigenbaum, onde surge o atrator tipo Rössler (d).

Imersas na região onde ocorre o atrator caóticos tipo Rössler estão presentes janelas periódicas. Os atratores pertencentes a essas janelas periódicas estão apresentados na figura 4.9. Cada um desses tipos de atratores forma uma faixa contínua no espaço dos parâmetros, como mostra a figura 4.7. Algumas faixas não apresentam continuidade devido a resolução utilizada. Note que todos esses atratores periódicos têm características que lembram o atrator tipo Rössler.



**Figura 4.10:** Atratores periódicos que formam janelas periódicas na região do atrator caótico Double Scroll. (a) Período 3. (b) Período 4. (c) Período 5. (d) Período 6.

A exemplo dos atratores periódicos na região do atrator caótico tipo Rössler, os

atratores da figura 4.10 também se apresentam em uma faixa contínua no espaço dos parâmetros e carregam consigo características do atrator caótico Double Scroll. Cada conjunto contínuo de pontos de mesma cor, no espaço dos parâmetros, forma uma família de atratores de mesma forma topológica. Assim, as duas faixas amarelas (período 5) da figura 4.7, ainda que sejam do mesmo período, pertencem a famílias distintas.

### 4.2.2 Formação dos Atratores

O fato do circuito Double Scroll ser linear por partes permite que a formação dos atratores seja entendida através do estudo da influência dos subespaços dos pontos fixos no fluxo. Os subespaços foram determinados no capítulo 3 e estão apresentados nas figuras 3.3, para o circuito descontínuo, e 3.2, para o circuito contínuo. É necessário o acompanhamento dessas figuras nas análises que faremos nesta seção.

#### Circuito Descontínuo

O teorema de existência e unicidade [58] garante que uma trajetória nunca atravessará transversalmente um subespaço no espaço de estado. Assim, os planos dos

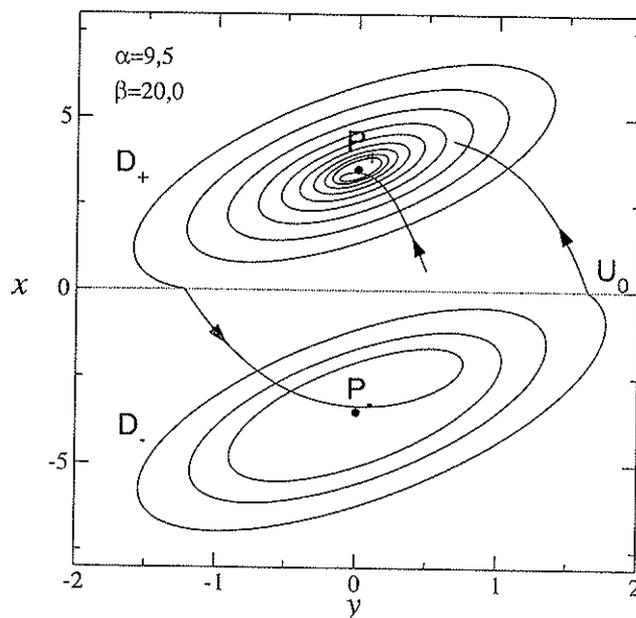


Figura 4.11: Trajetória de um atrator caótico do circuito descontínuo.

subespaços instáveis limitam os atratores, o que nos permite compreender como se desenvolve a trajetória do atrator.

Vamos supor uma condição inicial próxima ao subespaço estável  $E^S(P_+)$  no domínio  $D_+$  (figura 3.3). A trajetória é atraída para o ponto fixo  $P_+$  pelo subespaço estável até aproximar-se do instável  $E^U(P_+)$ . Como ela não pode atravessá-la, passa a segui-la, e adquire um movimento em espiral a uma distância muito próxima do subespaço instável, afastando-se exponencialmente do ponto fixo, até que atravessa a fronteira  $U_0$  dos domínios, e passa a ser governada pelos subespaços do domínio  $D_-$ . Assim, passa a ser atraída pela subespaço estável  $E^S(P_-)$  para o ponto fixo  $P_-$ , aproximando-se do subespaço  $E^U(P_-)$ . Começa então a seguir a subespaço instável espiralando e cruzando novamente a fronteira dos domínios, repetindo novamente o processo.

A figura 4.11 ilustra todo o processo discutido. Note que o cruzamento da trajetória na fronteira  $U_0$  ocorre num ponto não diferenciável, como mostrado no capítulo 2. Para gerar essa figura usamos uma condição inicial em  $(0,5, 0,5, -1,5)$  evoluídos num tempo de  $\tau = 22,5$  a passos de  $d\tau = 5 \times 10^{-3}$ .

### Circuito Contínuo

Os autovalores calculados nos pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$  do circuito descontínuo apresentam os mesmos valores que no circuito contínuo, para os mesmos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Isso significa que os subespaços desses pontos fixos são geometricamente semelhantes. Porém, a existência do ponto fixo  $P_0$  implica em outros subespaços que contribuem para ocorrência de comportamentos mais complexos.

Dada uma condição inicial, próxima ao subespaço instável  $E^U(P_0)$  de  $P_0$  (figura 3.2), a trajetória é conduzida para o domínio  $D_+$ , atraída para o ponto fixo  $P_+$  pelo subespaço estável  $E^S(P_+)$ . Em seguida passa a ter um movimento em espiral em virtude do comportamento do fluxo no subespaço instável  $E^U(P_+)$ . A partir desse instante, existem duas situações possíveis. Ou a trajetória atravessa a fronteira  $U_+$  pelo lado direito de  $L_{0+}$ , ou pelo seu lado esquerdo.

Considerando que a trajetória cruzou a fronteira pelo lado direito de  $L_{0+}$ , ela se aproximará do ponto fixo  $P_0$ , atraída pela subespaço estável  $E^S(P_0)$  e, devido à influência da subespaço instável  $E^U(P_0)$ , será redirecionada para a região de domínio  $D_+$ , repetindo todo o processo novamente. Se esse processo se repetir indefinidamente, então o atrator formado é o do tipo Rössler, como mostrado na figura 4.12(a).

Caso a trajetória cruze a fronteira pelo lado esquerdo de  $L_{0+}$ , ela será atraída

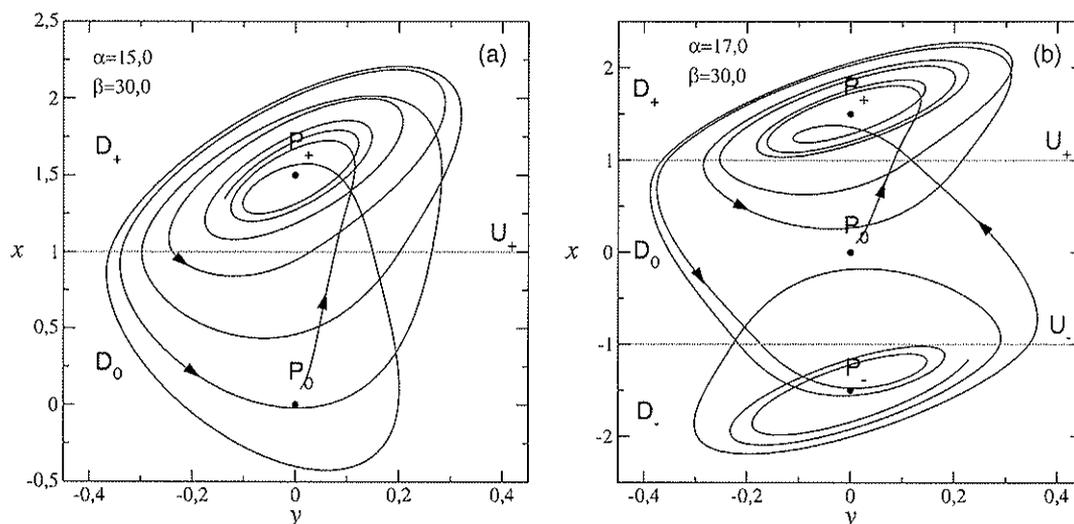


Figura 4.12: Trajetória dos atratores caóticos Rössler (a) e Double Scroll (b).

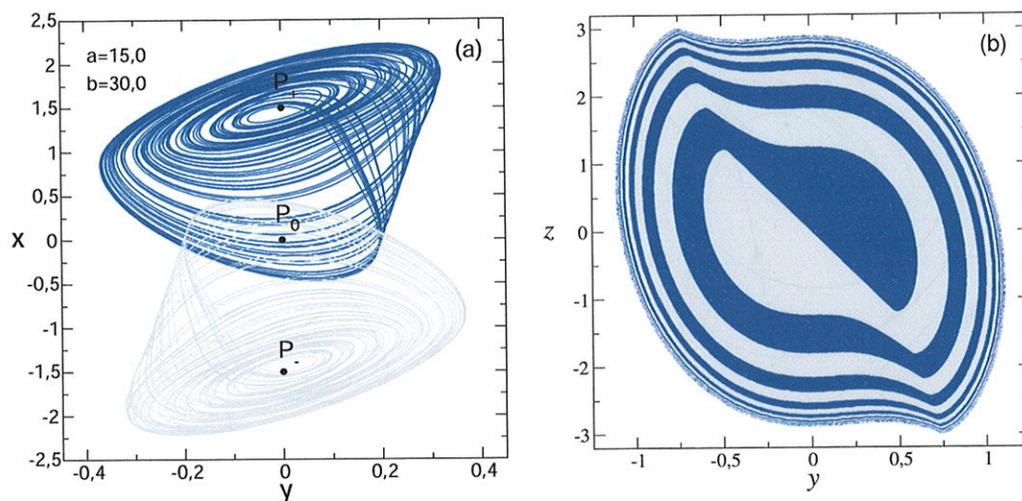
para  $P_0$  pelo subespaço estável  $E^S(P_0)$ , mas pelo outro lado desse plano. Assim, desta vez, quando se aproximar de  $P_0$ , será direcionada para o domínio  $D_-$  pelo subespaço instável  $E^U(P_0)$ . Lá chegando, será atraída para o ponto fixo  $P_-$  pelo seu subespaço estável  $E^S(P_-)$ , e passa a descrever um movimento em espiral, afastando-se do ponto fixo, em virtude do subespaço instável  $E^U(P_-)$ , e então segue a mesma análise feita em  $P_+$ , formando o atrator caótico Double Scroll mostrado na figura 4.12(b).

As trajetórias da figura 4.12 têm condição inicial  $(0,10, 0,01, 0,00)$  e correspondem a intervalos de tempo de  $\tau = 11,5$  para o atrator tipo Rössler (a) e  $\tau = 15$  para o atrator Double Scroll (b), ambos integrados a passos de  $d\tau = 10^{-2}$ .

### 4.2.3 Coexistência de atratores

O circuito de Chua tem simetria ímpar  $f(x) = -f(-x)$ . Isso cria condições para que um atrator, que não apresenta simetria, coexista com outro atrator numa região simetricamente oposto a este. O exemplo mais simples disso são os atratores pontuais  $P_+ = (k, 0, -k)$  e  $P_- = (-k, 0, k)$ , onde  $k$  foi definido na seção 2.2.3. No circuito contínuo, a grande maioria dos atratores periódicos apresentam pares simétricos. A figura 4.13(a) mostra a coexistência dos atratores caóticos tipo Rössler.

Os atratores apresentados na figura 4.13(a) coexistem no espaço de estado, mas não se manifestam ao mesmo tempo. Quem determina para qual atrator a trajetória



**Figura 4.13:** (a) Atratores coexistentes do tipo Rössler (b) Bacia de atração dos atratores em  $x = 0$ .

convergirão são as condições iniciais do sistema. O conjunto de condições iniciais que levam a um atrator recebe o nome de bacia de atração desse atrator. Uma vez que a órbita convergiu para um dos atratores, lá permanece indefinidamente. A figura 4.13(b) é a bacia de atração, localizada em  $x = 0$ , dos atratores apresentados em (a). A região de condições iniciais associadas a um atrator está desenhada na mesma cor desse atrator. Condições iniciais na região em branco convergem para o infinito.

Todos os atratores periódicos, imersos na região dos parâmetros do atrator tipo Rössler, ou fora das regiões de ocorrência de atratores caóticos, no espaço dos parâmetros, apresentam coexistência de atratores simétricos. Mas existe também coexistência de atratores distintos. Como exemplo podemos citar a coexistência de três atratores encontrados por Lozi [62], como mostra a figura 4.14.

Para garantir o comportamento assintótico, todos os atratores da figura 4.14 tiveram um tempo de evolução de  $\tau = 10^4$  para eliminar o transiente. As trajetórias correspondem a um intervalo de tempo de  $\tau = 10^2$ . Os atratores nas cores azul e verde não apresentam simetria, mas são simétricos entre si, tal qual os atratores tipo Rössler apresentados na figura 4.13(a). O atrator na cor vermelha é simétrico, e por isso não apresenta o seu par. As condições iniciais que levam aos atratores são, para o vermelho,  $(-0.005, 0.017, 0.019)$ , para o verde,  $(-0.002, 0.014, 0.010)$ , e para o azul,  $(0.002, -0.014, -0.010)$ .

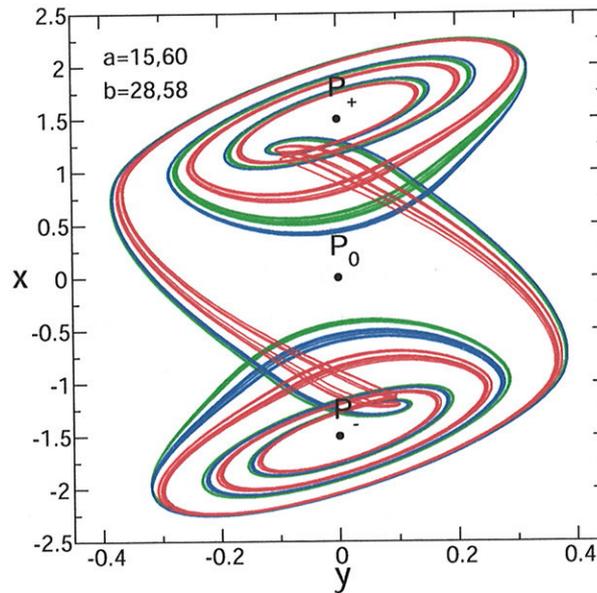


Figura 4.14: Coexistência de três atratores caóticos no circuito Double Scroll contínuo.

#### 4.2.4 Atratores Caóticos

O circuito Double Scroll contínuo apresenta uma enorme quantidade de atratores caóticos. Os mais conhecidos são os atratores tipo Rössler e o Double Scroll que, para os parâmetros  $a = -\frac{8}{7}$  e  $b = -\frac{5}{7}$ , são os mais comuns.

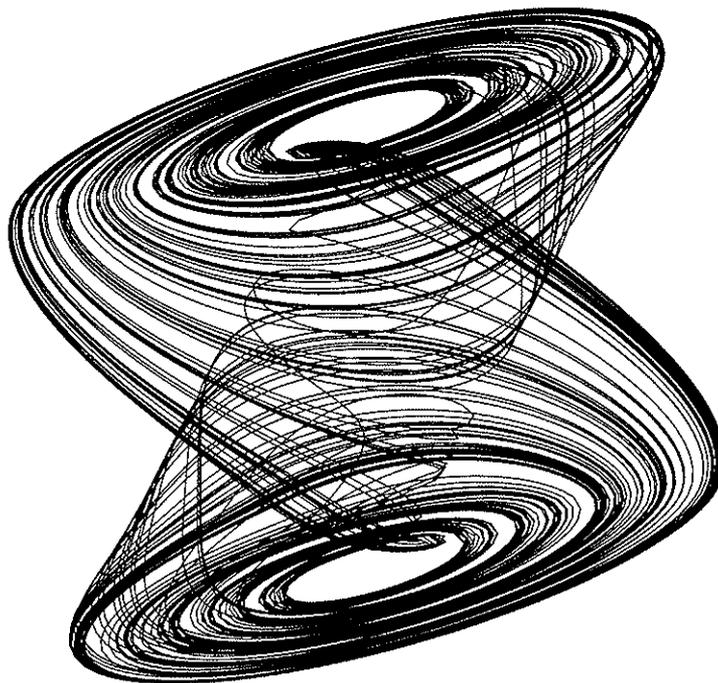
O atrator tipo Rössler, apresentado diversas vezes neste capítulo (figura 4.13(a)), recebe esse nome porque é muito parecido com o atrator caótico do sistema de Rössler [63], mas apresenta um comportamento distinto, como está discutido na seção 5.1. O Double Scroll é o atrator caótico característico deste sistema. Recebe esse nome por ter a forma de um pergaminho retorcido ao meio. Ele está apresentado na figura 4.15.

Além dos atratores coexistentes da figura 4.14, do tipo Rössler e do Double Scroll, as equações do sistema permite formar uma série de outros atratores caóticos, o que torna este sistema interessante para o estudo de transições de comportamentos.

Para completar este capítulo sobre atratores no circuito Double Scroll, a seguir apresentamos uma série de outros atratores caóticos. Alguns desses atratores podem ser observados na prática, como é o caso das figuras 4.15, 4.18 e 4.20. Os demais apresentam  $\alpha$  e  $\beta$  negativos, o que implicaria em valores, do indutor ou dos capacitores, negativos, o que não invalida o estudo teórico do sistema. Uma quantidade mais completa de atratores pode ser encontrado em [36].

Figura.	$\alpha$	$\beta$	$a$	$b$
4.15	20	12	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$
4.16	-4,086850	-2	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$
4.17	-6,691910	-1,520610	$-\frac{8}{7}$	$-\frac{5}{7}$
4.18	8,456221	12,07323	-0,705629	-1,146757
4.19	-4,898979	-3,624135	-2,501256	-0,929720
4.20	1800	10000	-1,026000	-0,982000

**Tabela 4.1:** Valores dos parâmetros de distintos atratores caóticos no circuito Double Scroll contínuo.



**Figura 4.15:**

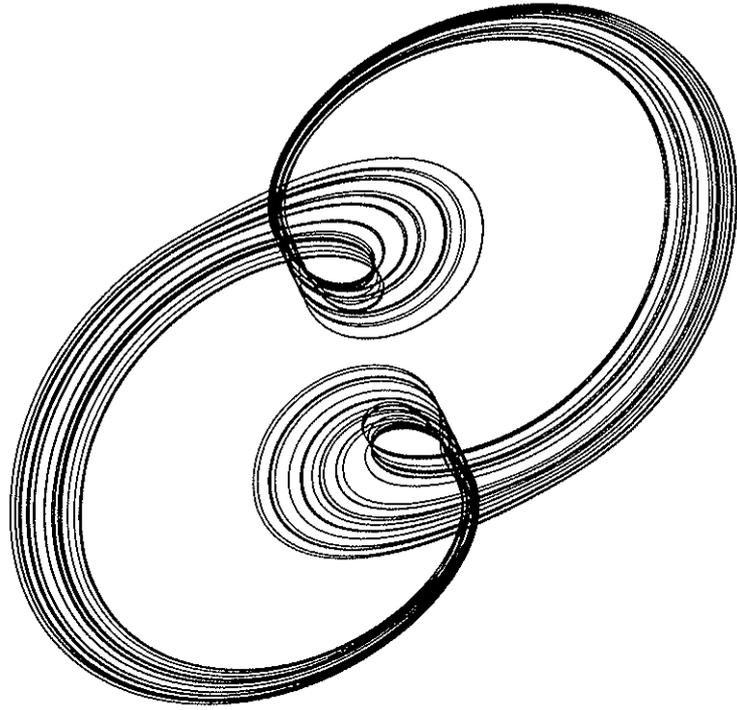


Figura 4.16:

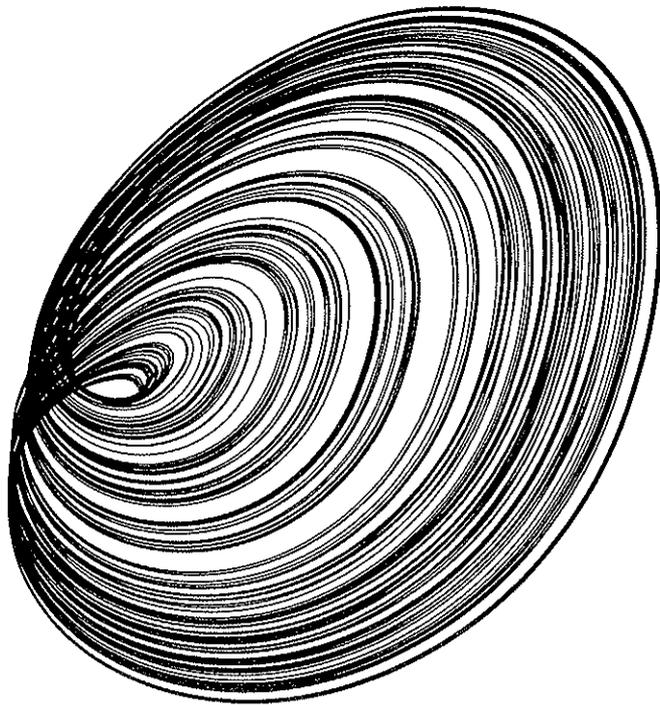


Figura 4.17:

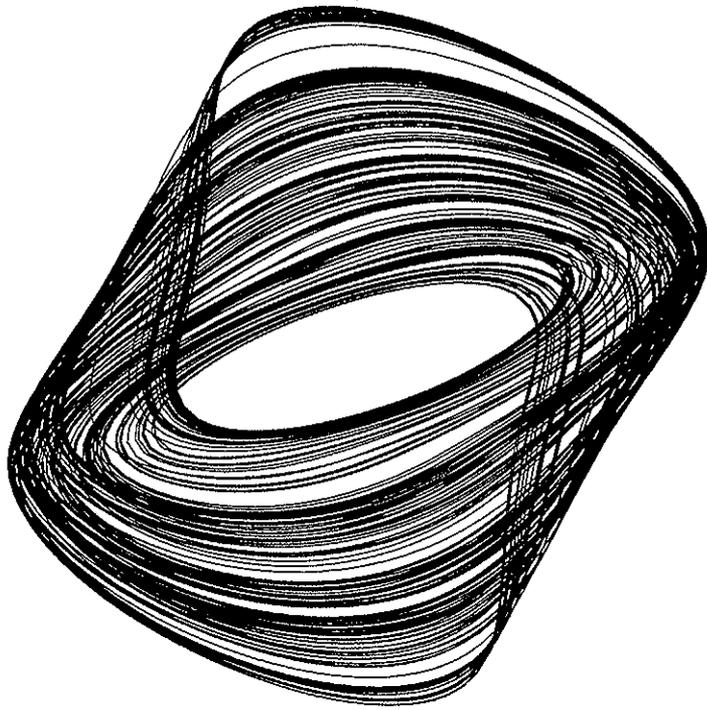


Figura 4.18:

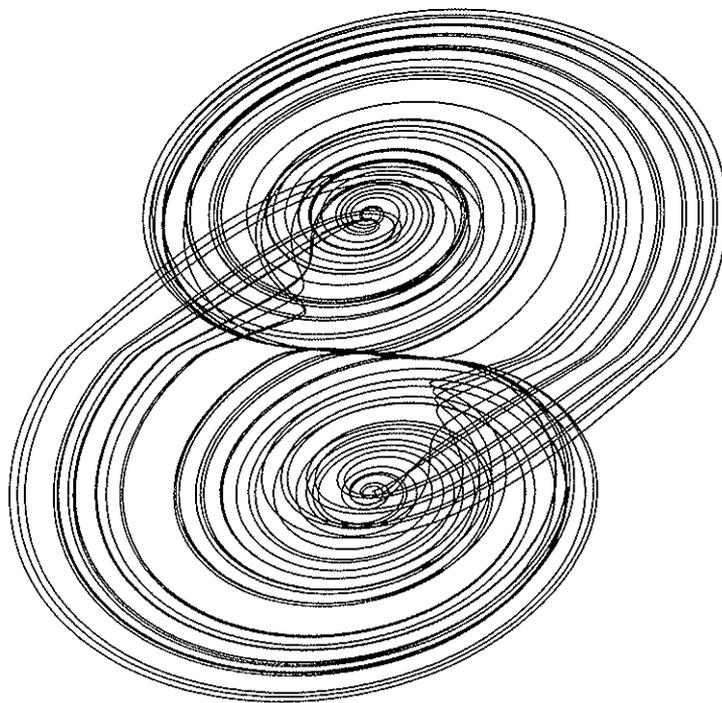


Figura 4.19:

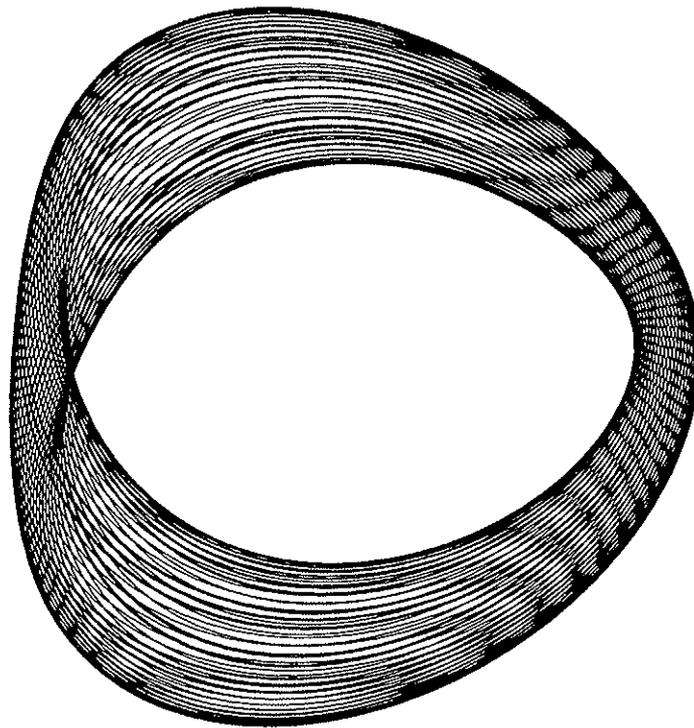


Figura 4.20:



## Capítulo 5

# Bifurcações de Atratores Caóticos

Atratores caóticos sofrem mudanças topológicas na sua estrutura quando se varia um parâmetro de controle. Essas mudanças podem ser desde a variação suave do seu tamanho, até uma variação brusca de comportamento, provocando bifurcações no atrator. As mudanças súbitas do atrator são chamadas de crises [64, 65, 54]. A bifurcação do atrator tipo Rössler para o Double Scroll é um exemplo de crise.

Como continuação do capítulo anterior, onde identificamos as regiões em que o circuito contínuo apresenta bifurcações, neste capítulo vamos investigar atratores caóticos que apresentam comportamentos distintos, mas que topologicamente são parecidos. Nosso interesse é localizar as regiões do espaço dos parâmetros em que ocorrem bifurcações entre atratores caóticos, para demarcar as fronteiras entre os distintos atratores.

Através da seção de Poincaré bidimensional, foi possível investigar atratores com diferenças acentuadas, mas, para atratores topologicamente parecidos, esse método não é eficiente. Usando o fato de que os atratores estão muito próximos dos planos formados pelos subespaços instáveis dos pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$ , é possível definir uma seção de Poincaré unidimensional e, através dela, extrair informações sobre a dinâmica do sistema. Para entender melhor como isso pode ser feito, na seção 5.1 apresentamos um estudo de transições caóticas no sistema de Rössler. Este sistema foi escolhido por apresentar um atrator com características semelhantes ao que encontramos no circuito Double Scroll, e pelo seu sistema permitir determinar trivialmente a seção unidimensional.

Na seção 5.2 apresentamos como determinar a seção unidimensional nos circuitos contínuo e descontínuo, e nas seções 5.2.1 e 5.2.2 apresentamos uma análise dos atratores à luz do mapeamento unidimensional.

## 5.1 Bifurcações no Sistema de Rössler

Dado o fato de que o circuito Double Scroll descontínuo não apresenta atratores periódicos, apenas atratores pontuais e caóticos com topologia parecida, vamos investigar diferenças na dinâmica dos atratores para a identificação de atratores caóticos distintos. O método baseado no mapa de Poincaré, utilizado na seção 4.2.1, não é adequado para atratores com topologia semelhante. Para ilustrar melhor como as diferenças na dinâmica podem ser observadas, vamos estudar o comportamento caótico do sistema de Rössler, por ser um sistema em que o atrator pode ser mais facilmente analisado, como expomos a seguir.

O sistema de equações diferenciais 5.1 é conhecido como o sistema de Rössler [63, 66]. Apesar de não ser um sistema linear por partes, como o sistema do circuito Double Scroll, apresenta atratores semelhantes aos que já vimos. Também possui regiões no seu espaço de parâmetros que obedecem às condições do teorema de Shilnikov. Além disso, para uma variação contínua de um parâmetro de controle, sofre bifurcação de Hopf seguido de dobramentos de período e, por fim, comportamento caótico, apresentando o cenário de Feigenbaum tal qual o circuito Double Scroll contínuo.

O sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= bx - cz + xz\end{aligned}\tag{5.1}$$

possui dois pontos fixos:

$$P_1 = (0, 0, 0) \quad \text{e} \quad P_2 \left( c - ab, b - \frac{c}{a}, \frac{c}{a} - b \right)$$

Gaspard e Nicolis [9] mostraram que o surgimento de uma órbita homoclínica, no sistema de Rössler, cria uma fronteira no espaço dos parâmetros que divide comportamentos caóticos distintos. A figura 5.1 mostra dois tipos de atratores distintos do sistema Rössler, o tipo *Spiral* (a) e o tipo *Screw* (b), um em cada lado dessa fronteira. Para obter essa figura mantivemos fixos os parâmetros  $b$  e  $c$ , e variamos  $a$ .

Como pode ser visto, a topologia dos atratores da figura 5.1 não apresenta diferenças evidentes entre os atratores. Mas os atratores aproximam-se rapidamente do plano  $xy$ , o que permite fazer uma seção de Poincaré unidimensional que contenha informações suficientes que os caracterizam. O mapa de Poincaré será então definido como a seqüência dos pontos formados pelo intersecção do fluxo com a

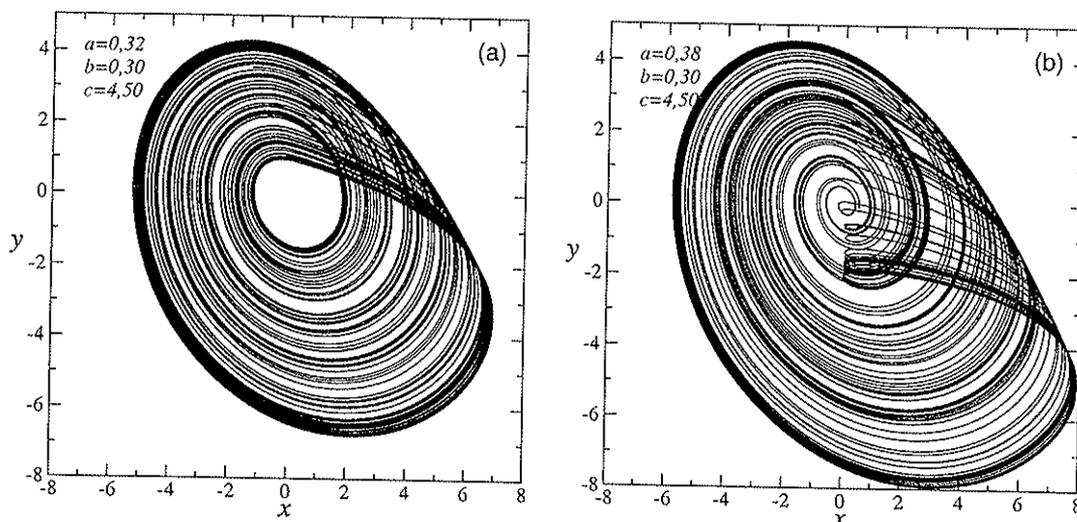


Figura 5.1: (a) Atrator de Rössler tipo *Spiral*. (b) Atrator de Rössler tipo *Screw*.

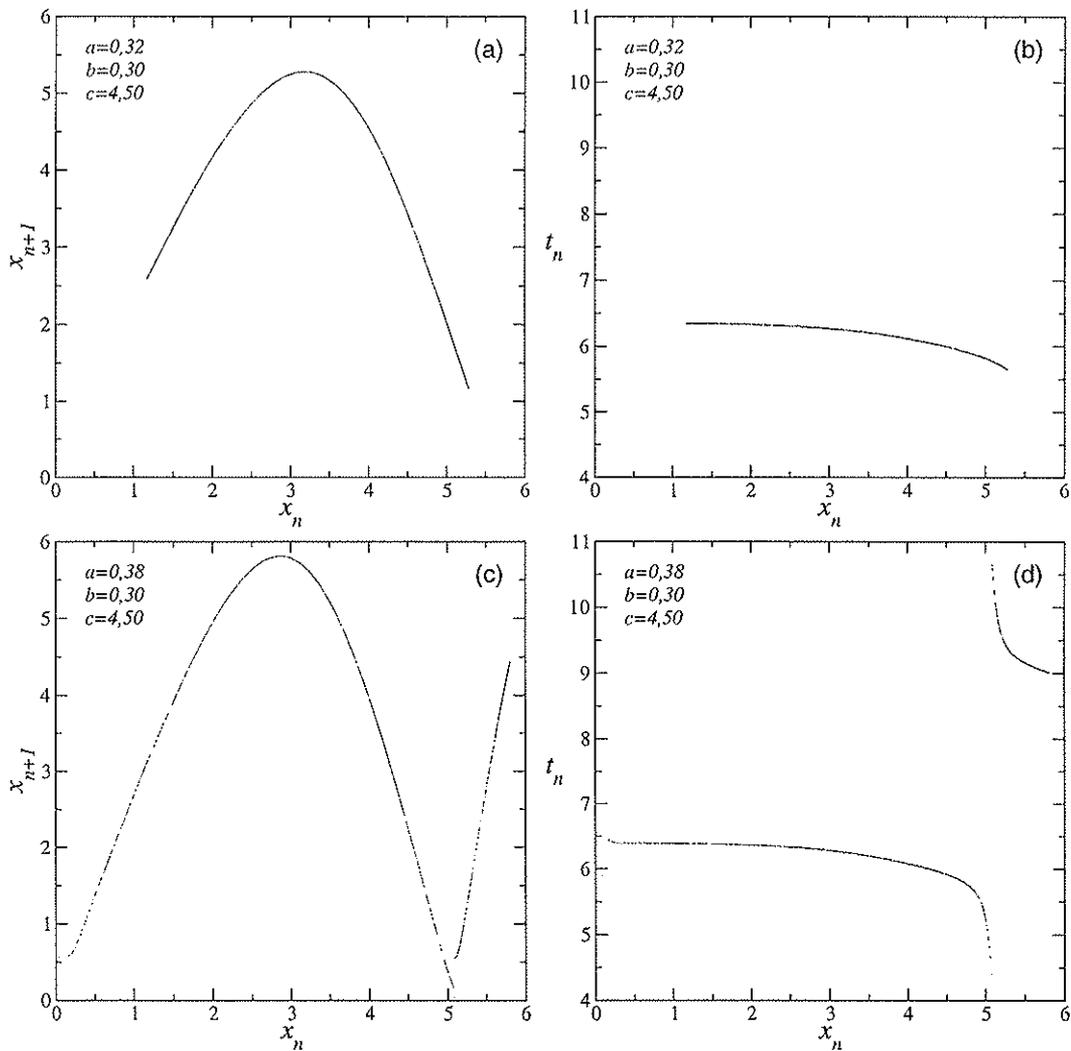
seção de Poincaré. Esse mapeamento é também conhecido como mapa de primeiro retorno, e sua representação gráfica é feita através de  $x_{n+1} \times x_n$ , onde  $x_n$  é o valor da variável  $x$  no instante em que o fluxo interceptou a seção unidimensional.

Na prática, não é uma tarefa simples localizar, no espaço, uma seção unidimensional por onde todo o fluxo passe. Assim, consideramos apenas a coordenada  $x$  de uma seção de Poincaré, bidimensional, definido pelo plano  $\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x < 0, y = 0, z < 1\}$ . Note que onde está localizado essa seção, o fluxo passa muito próximo da coordenada  $x$ , o que permite que consideremos essa coordenada, com grande aproximação, como sendo a seção de Poincaré unidimensional desejada.

Como uma análise complementar pode-se levantar um gráfico de  $t_n$  em função de  $x_n$ , onde se verifica o intervalo de tempo  $t_n$  necessário para que a trajetória, que sai do plano  $\Sigma$  de um ponto com coordenada  $x = x_n$ , atravesse novamente o plano num ponto com coordenada  $x_{n+1}$ . Chamaremos esse gráfico como gráfico do tempo de retorno. Com esse gráfico e o mapa de retorno as características dos atratores ficam mais evidentes, como mostram as figuras 5.2.

Os mapas de retorno mostram que, até  $x_n$  um pouco maior que 5, o atrator tipo *Spiral* (figura 5.2(a)) apresenta uma topologia muito parecida ao do *Screw* (figura 5.2(c)). Para valores maiores de  $x$ , aparece uma reta, no atrator *Screw*, que o diferencia.

O gráfico do tempo de retorno, do atrator do tipo *Spiral* (figura 5.2(b)), mostra que, independente da posição em que a trajetória tenha cruzado a seção de Poincaré,



**Figura 5.2:** (a) Mapa de retorno e (b) gráfico do tempo de retorno do atrator de Rössler tipo *Spiral*. (c) Mapa de retorno e (d) gráfico do tempo de retorno do atrator de Rössler tipo *Screw*.

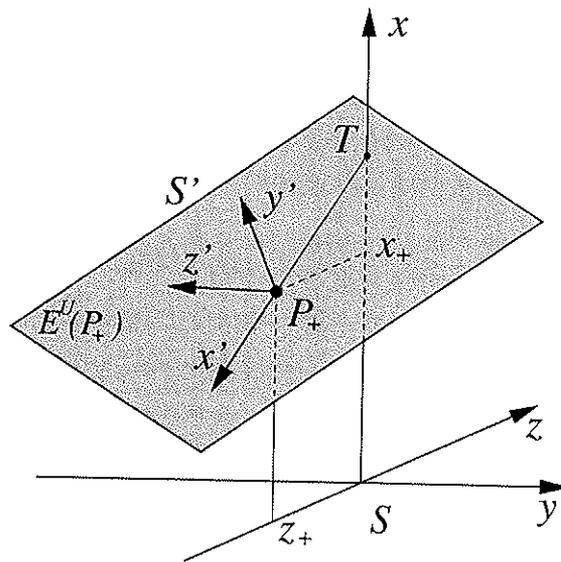
ela leva praticamente o mesmo tempo para retornar ao plano. Já no atrator tipo *Screw*, existem dois tempos de retorno (figura 5.2(d)), um curto para trajetórias mais próximas da origem, e outro mais longo para trajetórias mais afastadas. Assim, vemos que ocorrem alterações significativas no atrator quando variamos o parâmetro de controle.

## 5.2 Bifurcações no Circuito Double Scroll

No sistema de Rössler, o mapeamento unidimensional permitiu identificar a

transição do atrator tipo *Spiral* para o *Screw* através do surgimento de uma reta, no mapa de retorno, ou da identificação da descontinuidade no gráfico do tempo de retorno. Os atratores caóticos do circuito Double Scroll estão muito próximos do plano pertencente ao subespaço instável de  $P_+$  e  $P_-$ , da mesma forma que ocorre no sistema de Rössler, o que permite realizar um estudo unidimensional semelhante, levantando seu mapa de retorno e seu gráfico do tempo de retorno.

Na região do espaço dos parâmetros em que ocorre os atratores caóticos, o autovalor real, dos pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$ , é negativo e de módulo muito maior do que a parte real dos autovalores complexos [67, 68], que assumem valores positivos. Dessa forma, o fluxo é rapidamente atraído, pelo subespaço estável, para o plano do subespaço instável, onde assume um movimento espiral afastando-se do ponto fixo. A seção de Poincaré unidimensional foi escolhida como sendo a coordenada  $x'$  do sistema de coordenadas ortogonais  $S'$  apresentada na figura 5.3.



**Figura 5.3:** Sistema de coordenadas ortogonais  $S'$  ( $x', y', z'$ ) e  $S$  ( $x, y, z$ ).  $T$  é o ponto onde o subespaço  $E^U(P_+)$  intersecciona o eixo  $x$ .  $P_+ = (x_+, 0, z_+)$ .  $x'$  é a coordenada da seção de Poincaré unidimensional.

O sistema de coordenadas ortogonais  $S'$  tem origem no ponto fixo  $P_+$ . As coordenadas  $x'$  e  $z'$  estão contidas no subespaço instável  $E^U(P_+)$ , e a coordenada  $y'$  é perpendicular a esse plano. O ponto  $T$  demarca a posição no eixo  $x$  onde o subespaço instável  $E^U(P_+)$  intersecciona esse eixo.  $x'$  tem a direção que une o ponto fixo  $P_+$  com o ponto  $T$  e,  $x_+$  e  $z_+$  são as coordenadas  $x$  e  $z$  do ponto fixo  $P_+$ . Como seção unidimensional, vamos considerar apenas a coordenada  $x$  da seção de

Poincaré, bidimensional, definido por

$$\Sigma = \{(x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \mid x' > 0, y' < 0, z' = 0\} \quad (5.2)$$

Para levantar o mapa de retorno e o gráfico do tempo de retorno, no circuito Double Scroll, é necessário determinar o sistema  $S'$ . Assim, o ponto  $T$  pode ser calculado através da solução da equação 3.25, que define o subespaço  $E^U(P_+)$ , para os valores de  $y = 0$  e  $z = 0$ , resultando em

$$T = \left(x_+ + \frac{Z}{X}z_+, 0, 0\right) \quad (5.3)$$

onde,  $X$  e  $Z$  estão definidas na seção 3.2.1.

Um vetor contido no eixo  $x'$ , é dado por  $\vec{v}_{x'} = P_+ - T$ . Assim,

$$\vec{v}_{x'} = a_{11}\hat{i} + a_{12}\hat{j} + a_{13}\hat{k} \quad (5.4)$$

onde,  $a_{11} = -\frac{Z}{X}z_+$ ,  $a_{12} = 0$  e  $a_{13} = z_+$ . Os versores  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$  são associados às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Como o eixo  $y'$  é perpendicular ao subespaço instável de  $P_+$ , um vetor  $\vec{v}_{y'}$  sobre esse eixo pode ser conseguido através da própria equação (3.21) ou (3.25) de  $E^U(P_+)$ ,

$$\vec{v}_{y'} = a_{21}\hat{i} + a_{22}\hat{j} + a_{23}\hat{k} \quad (5.5)$$

onde  $a_{21} = X$ ,  $a_{22} = Y$  e  $a_{23} = Z$ .

O eixo  $z'$  tem direção perpendicular às demais, portanto, um vetor  $\vec{v}_{z'}$  sobre esse eixo será o resultado do produto vetorial  $\vec{v}_{x'} \times \vec{v}_{y'}$ .

$$\vec{v}_{z'} = a_{31}\hat{i} + a_{32}\hat{j} + a_{33}\hat{k} \quad (5.6)$$

onde  $a_{31} = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ ,  $a_{32} = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}$  e  $a_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

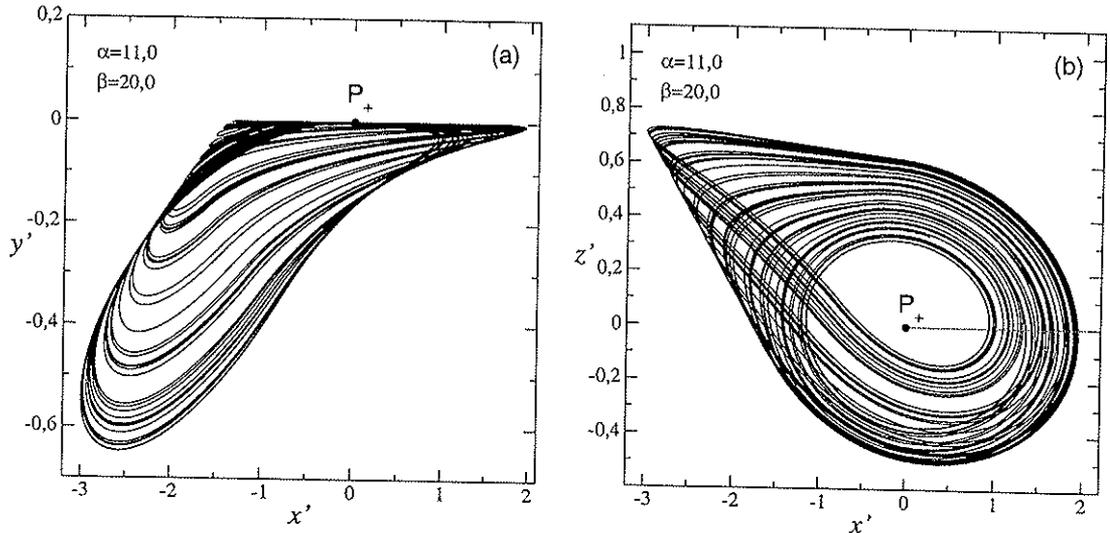
Normalizando os vetores  $\vec{v}_{x'}$ ,  $\vec{v}_{y'}$  e  $\vec{v}_{z'}$ , obtemos os versores  $\hat{i}'$ ,  $\hat{j}'$  e  $\hat{k}'$  respectivamente. Assim, a representação de um ponto  $(x, y, z)$ , do sistema  $S$ , pode ser feita no sistema  $S'$  através das coordenadas obtidas pela seguinte equação matricial,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_+ \\ y \\ z - z_+ \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Com esta transformação podemos identificar quando uma trajetória cruza a seção de Poincaré  $\Sigma$  e então construir o mapa de retorno e o gráfico do tempo de retorno, como mostrados nas seções 5.2.1 e 5.2.2.

### 5.2.1 Sistema Contínuo

No sistema de coordenadas  $S'$ , fica evidente como o plano do subespaço instável limita o fluxo, e como este converge rapidamente para ele. A figura 5.4(a), mostra a alta densidade de trajetórias nas proximidades de  $y' = 0$  do atrator tipo Rössler do circuito Double Scroll. A linha horizontal que sai de  $P_+$  e atravessa o atrator na



**Figura 5.4:** Projeção do atrator Rössler nos planos  $x'y'$  em (a) e  $x'z'$  em (b), do sistema de coordenadas  $S'$ .

figura 5.4(b) é a região do eixo  $x'$  onde serão medidos os valores de  $x'_n$ . O plano  $x'y'$ , com  $x' > 0$  é a seção  $\Sigma$  por onde a trajetória passa nas proximidades do eixo  $x'$ . É através da intersecção da trajetória com essa seção que serão obtidos os valores de  $x'_n$ .

Na figura 5.5 está o mapa de retorno e o gráfico do tempo de retorno do atrator tipo Rössler. Para aumentar a definição dos mapas, em vez de utilizar o valor de  $x'_n$ , utilizamos  $r_n = (x'_n)^2$  para representar os cruzamentos da trajetória com a seção  $\Sigma$ . Na figura 5.5(a),  $r_{n+1}$  é o valor associado ao cruzamento seguinte. No gráfico do tempo de retorno (figura 5.5(b)),  $\tau_n$  é o intervalo de tempo entre dois cruzamentos consecutivos,  $r_n$  e  $r_{n+1}$ .

As curvas da figura 5.5 são característicos do atrator tipo Rössler. À medida que vamos aumentando o parâmetro  $\alpha$ , o mapa de retorno praticamente preserva a sua forma, apenas aumentando o valor máximo da curva, o que reflete o aumento do tamanho do atrator. O mesmo comportamento é observado no gráfico do tempo de retorno. Assim, não foi observado variações de comportamento do atrator tipo

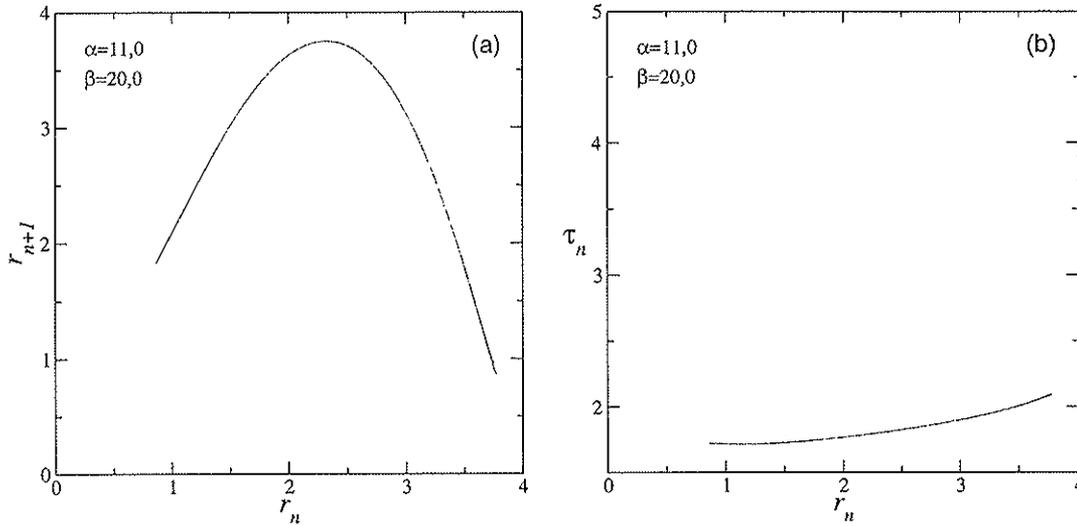
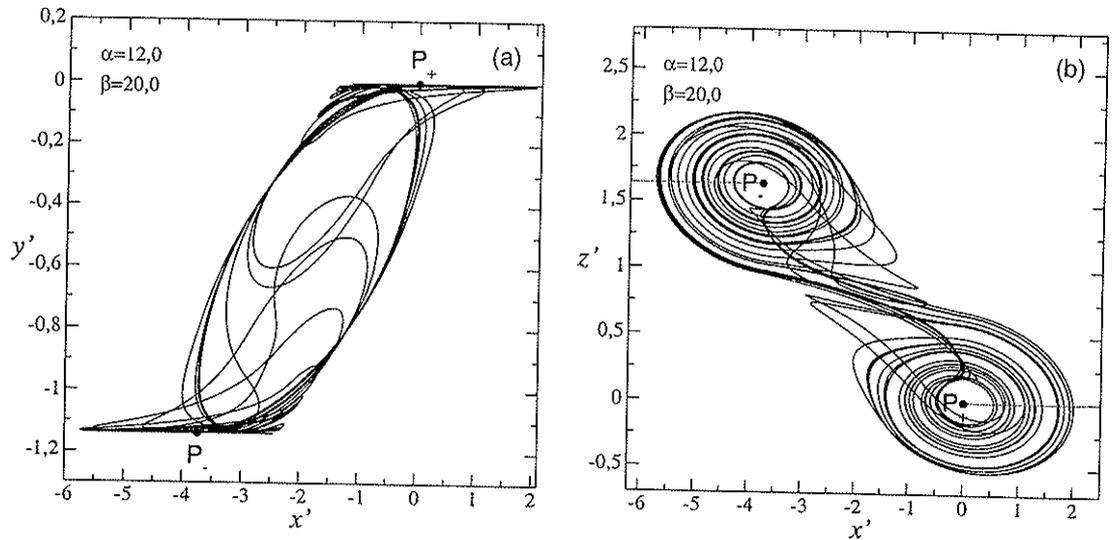


Figura 5.5: Mapa de retorno (a) e gráfico do tempo de retorno (b) do atrator Rössler.

Rössler como o observado no atrator de Rössler discutido na seção anterior

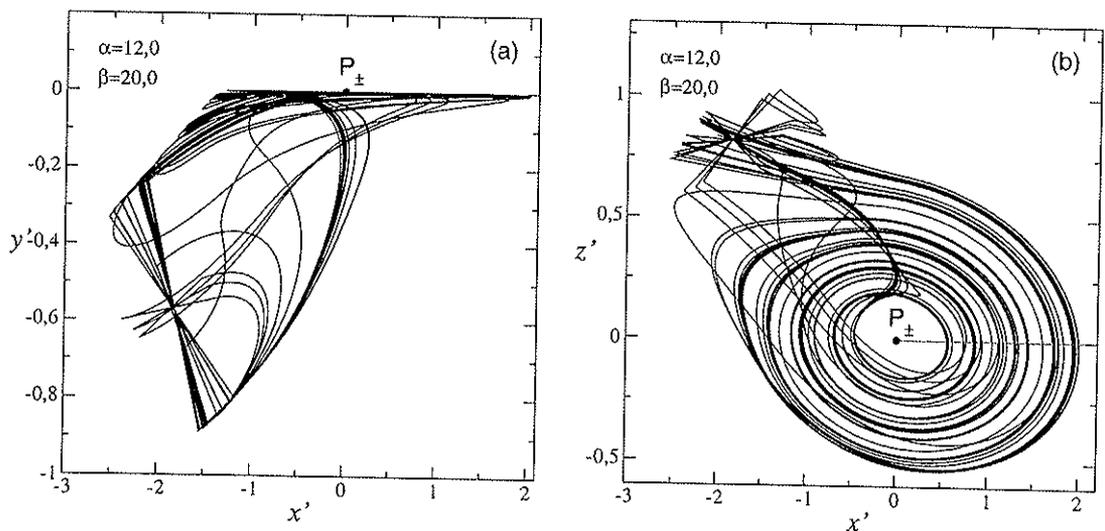
Para que uma trajetória passe pela seção de Poincaré, é necessário que ela dê, pelo menos, uma revolução em torno do ponto fixo. A sensibilidade às condições iniciais que o sistema apresenta força a aumentarmos a precisão da integração para que a trajetória se mantenha próxima do plano  $x'z'$  com o mínimo de flutuações. Para evitar essas flutuações, que prejudicam a definição dos mapas, o passo de integração deve ser pequeno. Todos esses fatores contribuem para aumentar o tempo de processamento para construir os mapas. Em situações em que o mapa apresenta detalhes na sua composição, essas considerações são relevantes como veremos mais adiante. Na figura 5.5, foi utilizado um intervalo de tempo de  $d\tau = 10^{-3}$  para a integração do sistema, numa tempo total de  $\tau = 10^4$  de evolução da trajetória, e mais  $\tau = 5$  para eliminação do transiente.

O atrator Double Scroll, por conta da simetria do sistema, possui duas regiões factíveis de serem seções de Poincaré unidimensionais, uma associada ao ponto fixo  $P_+$  e outra ao ponto fixo  $P_-$ , como mostramos na figura 5.6. A seção unidimensional em  $P_+$  está associada ao cruzamento das trajetórias na seção  $\Sigma_+$ , definida igualmente como no caso da seção  $\Sigma$  do atrator tipo Rössler, e da seção em  $P_-$  ao cruzamento das trajetórias em  $\Sigma_-$ , que é uma seção simetricamente ímpar ( $f(x) = -f(-x)$ ) a  $\Sigma_+$ . Para considerar as duas seções no mesmo mapeamento faremos uma adaptação desta situação ao algoritmo anteriormente usado. Para entender melhor, vamos considerar inicialmente que a trajetória está nas proximidades de  $P_+$ . Enquanto



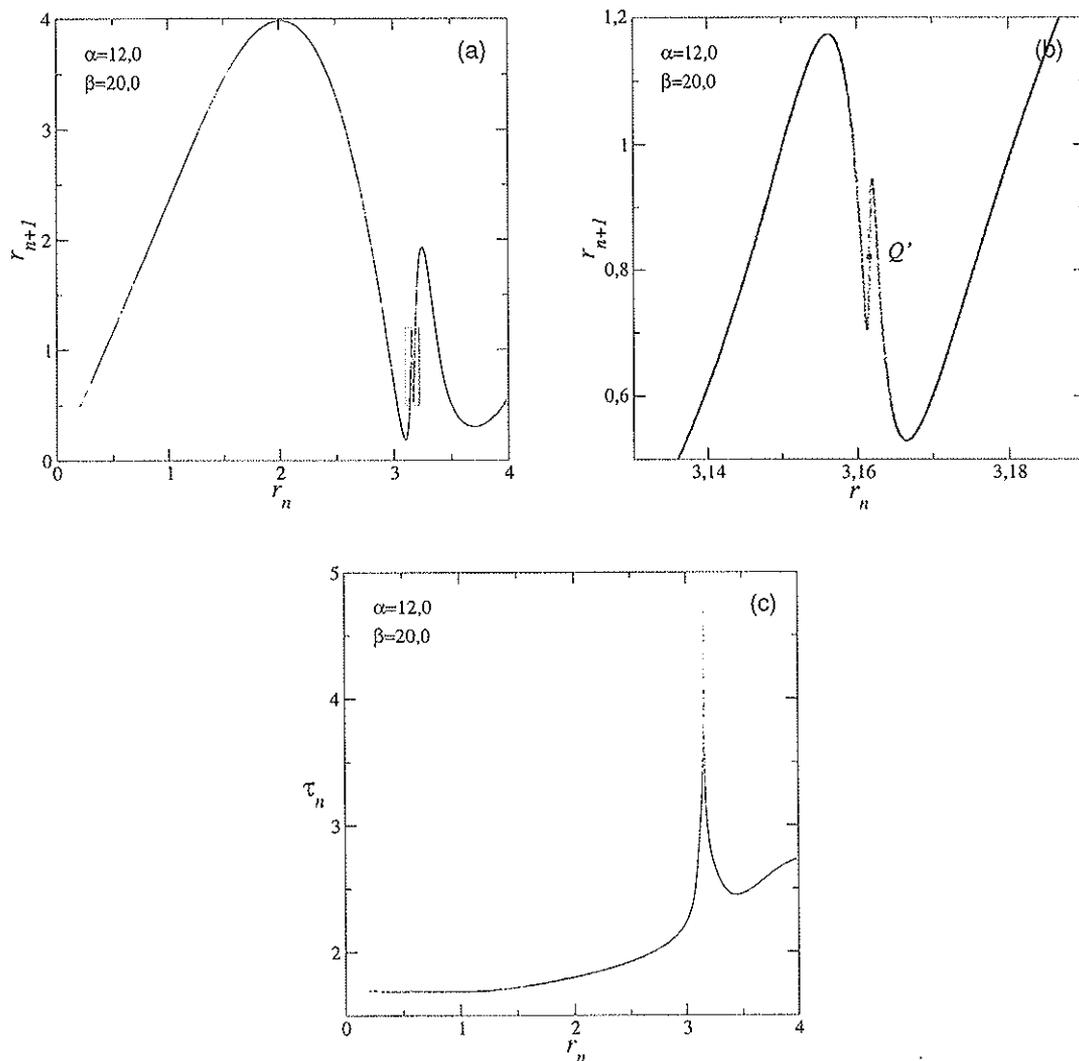
**Figura 5.6:** Projeção do atrator Double Scroll nos planos  $x'y'$  em (a) e  $x'z'$  em (b), do sistema de coordenadas  $S'$ .

a trajetória permanecer ao redor de  $P_+$ , os dados para o mapeamento vão sendo computados da mesma forma que no atrator tipo Rössler, através da seção  $\Sigma_+$ . Quando a trajetória passar a visitar o ponto fixo  $P_-$ , consideramos o último ponto computado em  $\Sigma_+$  e o primeiro em  $\Sigma_-$ , para determinar  $r_n$  e  $r_{n+1}$ , respectivamente.



**Figura 5.7:** Projeção do atrator Double Scroll nos planos  $x'y'$  em (a) e  $x'z'$  em (b), do sistema de coordenadas  $S'$ , rebatendo o subespaço inferior para o superior, utilizando a propriedade anti simétrica do sistema.

Fazendo uso da simetria ímpar do sistema, as coordenadas da trajetória que apresentam a coordenada  $x$  negativa, sofrerão a transformação  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ . Com isso os dois pontos fixos e as seções de Poincaré passam a coincidir, como mostrado na figura 5.7. O sentido do fluxo, em torno dos pontos fixos, é o mesmo, permitindo fazer o mapa de retorno e o gráfico do tempo de retorno com os mesmos critérios adotados nos mapeamentos do atrator tipo Rössler. As figuras 5.8(a) e (b) mostram os mapeamentos do Double Scroll da figura 5.7.



**Figura 5.8:** Mapa de retorno (a) e gráfico do tempo de retorno (c) do atrator Double Scroll. Em (b) está a ampliação da região do mapa de retorno, destacada pelo retângulo.

A região do mapa de retorno da figura 5.8(a), que está marcada com um retângulo, apresenta elevados tempos para retornar à seção, como se pode ver pelo gráfico do tempo de retorno (c). A ampliação em (b) mostra que essa região tem como característica picos, de amplitude cada vez menores e gradativamente mais próximos um do outro até um determinado ponto que chamamos de  $Q'$ . Após esse ponto os picos passam a aumentar suas amplitudes e distâncias. Há evidências de que no ponto  $Q'$  exista uma acumulação de infinitos picos [68].

Pontos próximos a  $Q'$  correspondem à passagem de trajetórias nas proximidades da linha  $L_{0\pm} = E^S(P_0) \cap U_{\pm}$  (ver figura 3.2). Como essas trajetórias estão próximas do subespaço  $E^U(P_{\pm})$ , então necessariamente elas passam nas proximidades do ponto  $Q_{\pm} = E^S(P_0) \cap E^U(P_{\pm})$ . Se uma trajetória cruzar  $Q'$ , então o atrator colidiu com a variedade estável de  $P_0$ , então ocorrerá uma crise de fronteira com mudanças topológicas do atrator.

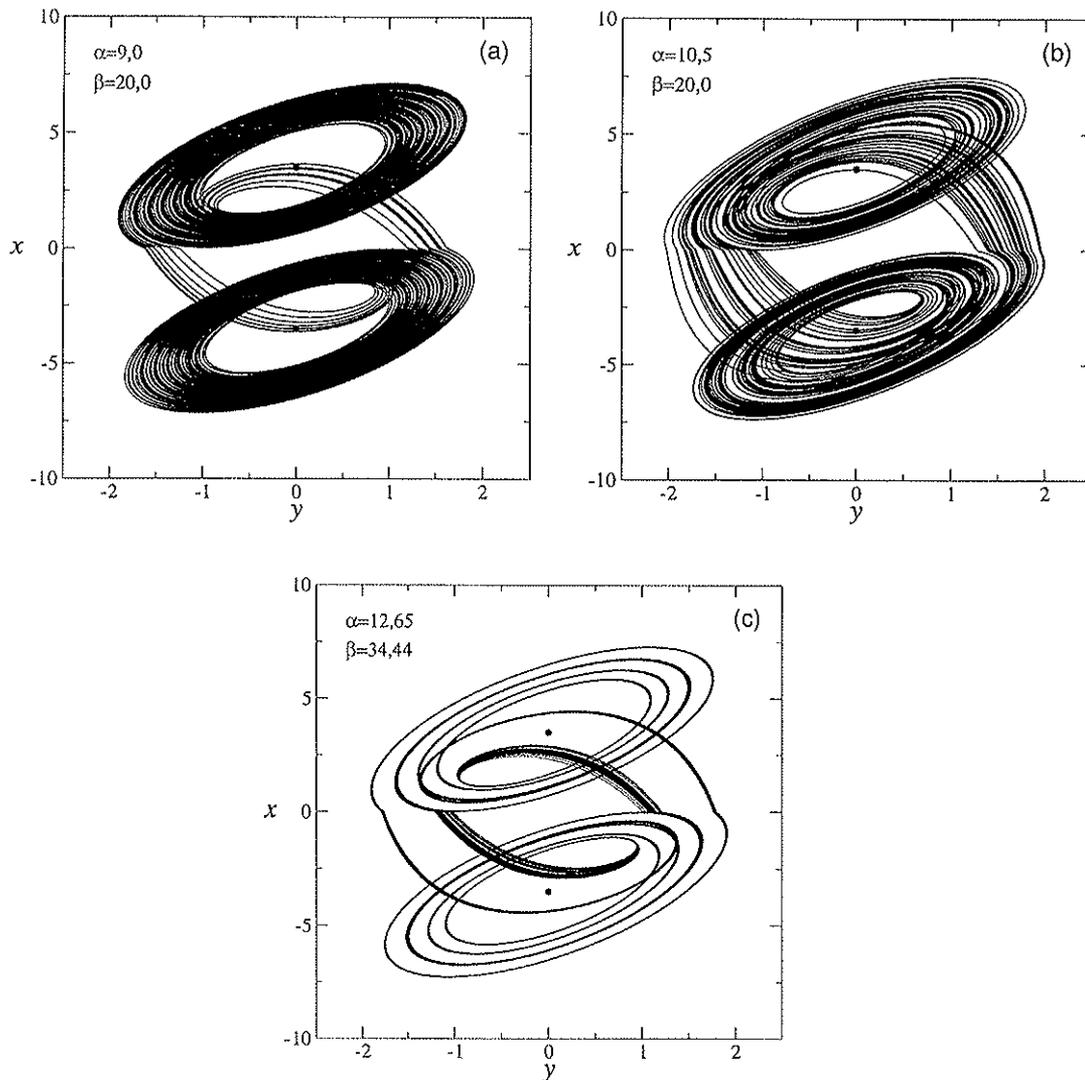
A fronteira entre os atratores Rössler e Double Scroll se dá para parâmetros em que o atrator atingiu a variedade estável de  $P_0$  através do ponto  $Q'$ , e sua estrutura nunca ultrapassa esse ponto. Assim, atratores com parâmetros nessa fronteira apresentarão mapas de retorno que irão até o ponto  $Q'$ . Para parâmetros que correspondam a trajetórias com mapeamentos levemente maiores que  $Q'$ , ocorre uma intermitência induzida por crise [69].

O pico que vemos, na figura 5.8(c), corresponde a trajetórias que passam muito próximas de  $Q'$  e mostra como o tempo de retorno varia drasticamente nessa região. Novamente, se a trajetória passar no ponto  $Q'$  o tempo de retorno  $\tau_n$  será infinito, ou seja, não retornará mais à seção  $\Sigma_{\pm}$ , pois convergirá assintoticamente para o ponto fixo  $P_{\pm}$ . Trajetórias na sua vizinhança tendem a aumentar o seu tempo de retorno porque se aproximam de  $P_0$ , que somente pode ser atingido num tempo infinito.

Para obtermos as figuras 5.8, foi necessário um tempo de evolução do sistema de  $\tau = 10^6$  a passos de integração de  $d\tau = 10^{-3}$ . Para a figura 5.8(b) foi necessário um tempo de evolução do sistema de  $\tau = 10^7$  a passos de integração de  $d\tau = 10^{-4}$ , devido à baixa visitação do atrator à região próxima ao ponto  $Q'$ .

### 5.2.2 Sistema Descontínuo

Os atratores do circuito Double Scroll descontínuo sempre envolvem os dois pontos fixos. Assim, adotaremos os mesmos critérios estabelecidos para o mapeamento do atrator Double Scroll. A figura 5.9 mostra três atratores topologicamente distintos.



**Figura 5.9:** Atratores topologicamente distintos do circuito Double Scroll descontínuo.

O mapa de retorno e o gráfico do tempo de retorno da figura 5.10, decorrentes dos atratores da figura 5.9, revelam que os atratores apresentam características próprias nas suas dinâmicas. Os mapas da figura 5.10(a) (mapa de retorno) e (b) (gráfico do tempo de retorno) são do atrator **A** apresentado na figura 5.9(a). O mapa de retorno (c) e o gráfico do tempo de retorno (d) da figura 5.10 são do atrator **B** da figura 5.9(b). Os mapas 5.10(e) e (f) são do atrator **C** (figura 5.9(c)).

Ao contrário do atrator Double Scroll, as curvas dos mapas dos atratores aqui estudados apresentam descontinuidade. O mapa de retorno do atrator **A** é composto por duas curvas, uma maior, localizada do lado esquerdo da curva de identidade, e

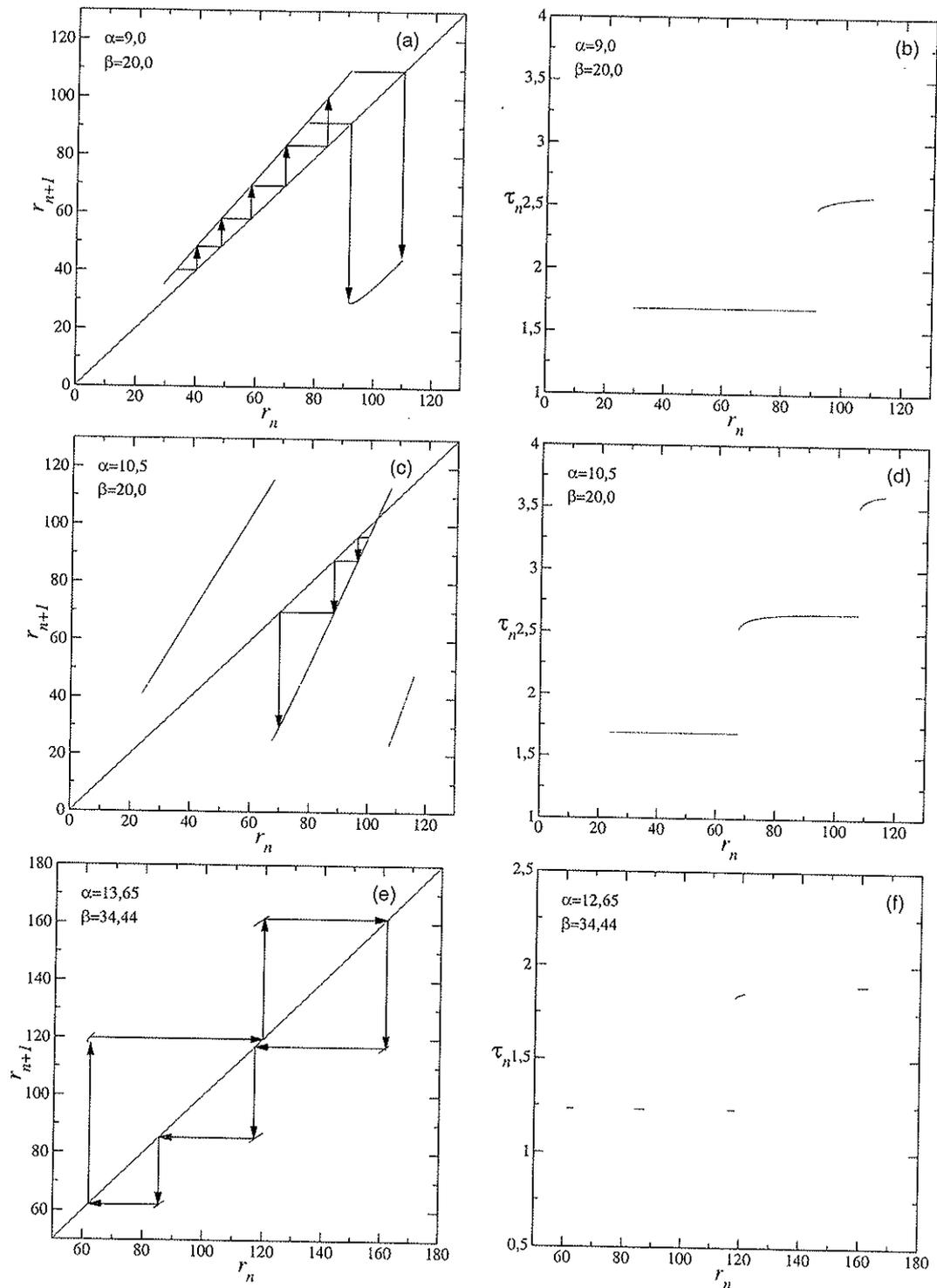


Figura 5.10: (a) e (b) são o mapas de retorno e o gráfico do tempo de retorno do atrator A da figura 5.9(a). (c) e (d), idem para o atrator B e em (e) e (f) estão os mapas do atrator C.

outra menor, localizado do outro lado da curva de identidade. Os pontos sobre a curva maior correspondem a trajetórias que se afastam de um ponto fixo descrevendo revoluções em torno dele, e por isso o intervalo de tempo  $\tau_n$  entre dois mapeamentos consecutivos (tempo de retorno) é praticamente o mesmo.

Os pontos contidos na curva menor correspondem às trajetórias mais afastadas do ponto fixo e são imediatamente mapeadas a distâncias mais próximas do ponto fixo. Essa diminuição de distância se deve à mudança de domínio que a trajetória sofreu, onde se aproximou de um ponto fixo por ter sido atraída para ele por influência da sua variedade estável. Essas mudanças de domínios acontecem em intervalos de tempo relativamente iguais, mas maiores do que no caso dos mapeamentos da curva maior, como mostra a figura 5.10(b).

O mapa de retorno do atrator **B** apresenta uma terceira curva que surge na região central do mapeamento. As curvas da esquerda e da direita apresentam, essencialmente, o mesmo comportamento dinâmico do atrator **A**. A curva central também corresponde a trajetórias que estão mudando de domínio, mesmo aqueles pontos que são mapeados nela mesma (Observe na figura 5.9 como a região permitida para mudanças de domínios é maior no atrator **B** do que no **A**). Note que essa curva representa um fluxo que se aproxima dos pontos fixos, comportamento que não existia no atrator **A**, e é a responsável pela mudança da topologia do atrator.

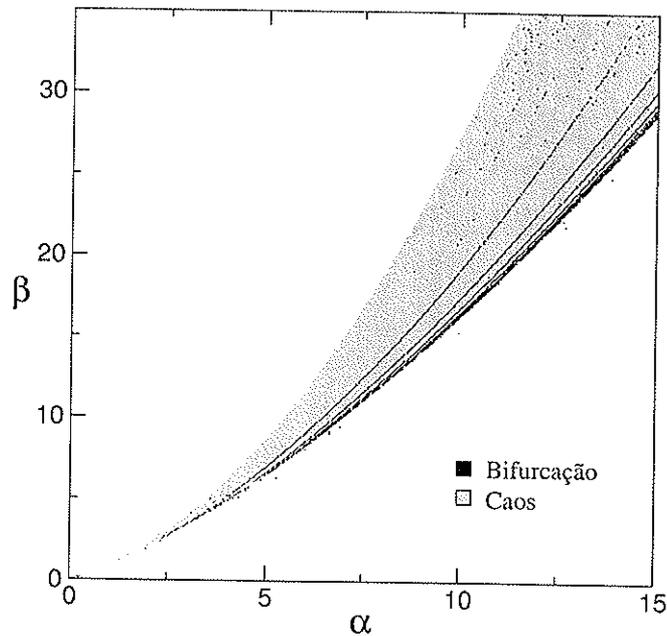
O mapa de retorno e o gráfico do tempo de retorno do atrator **C** apresentam regiões discretas de visitação com grandes discontinuidades na medida de  $r_n$ . Esses mapas, juntamente com a figura do atrator no espaço de estado (figura 5.9(c)), permitem entender de modo mais claro o fenômeno de diminuição sucessiva da medida  $r_n$ . Este tipo de atrator é mais raro de acontecer que os atratores **A** e **B**. Para valores de parâmetros ligeiramente diferentes do atrator **C**, as regiões de discontinuidade de  $r_n$  passam a ser habitadas pelo atrator, e o mapa de retorno e o gráfico do tempo de retorno passam a ser parecidos com aqueles apresentados na figura 5.10(a) e (b).

Todos os mapas da figura 5.10 foram gerados com uma evolução do sistema de  $\tau = 5 \times 10^3$  após um transiente de  $\tau = 50$  a passos de integração de  $d\tau = 10^{-3}$ .

Tanto o mapa de retorno quanto o gráfico do tempo de retorno permitem diferenciar os atratores. O que faremos agora é verificar em que regiões do espaço dos parâmetros ocorrem mudanças entre os atratores. Identificamos uma transição entre comportamentos caóticos, cada vez que surgir um novo tempo de retorno. Para identificar a discontinuidade, é necessário ordenar, o par  $r_n$  e  $r_{n+1}$  que definem um ponto no mapa de retorno, onde  $r_n$  terá ordenação crescente. Um aumento do valor do tempo  $\tau_n$ , superior a 0,2, indica uma discontinuidade no mapa. O número

de descontinuidades caracterizam o atrator.

Os pontos em preto na figura 5.11 representam os parâmetros em que ocorrem mudanças de comportamentos nos atratores. Os pontos que aparecem alinhados, formam uma fronteira bidimensional, no espaço dos parâmetros, entre os distintos atratores que se formam no circuito descontínuo. Os pontos isolados são mudanças detectadas para os atratores com comportamento discreto semelhantes ao atrator C. Como são mais raros, não se verifica, para esta resolução ( $500 \times 500$  pontos), o alinhamento característico da sua fronteira.



**Figura 5.11:** Bifurcações entre atratores caóticos no circuito descontínuo.



# Capítulo 6

## Variedades

Um ponto fixo tipo sela apresenta conjuntos, ligados a ele, chamados de variedades. A variedade estável é formada pelo conjunto de pontos que iterados no tempo se aproximam assintoticamente do ponto fixo. A variedade instável é o conjunto de pontos que também chega ao ponto fixo assintoticamente, mas para tempos negativos. Uma trajetória próxima de uma variedade segue a orientação dessa variedade. Assim, as variedades evidenciam como o fluxo deve se comportar nas suas proximidades.

Para determinar a variedade de um ponto fixo, escolhemos uma condição inicial ligeiramente deslocada do ponto fixo, sobre o subespaço associado à variedade que se quer determinar. Se o subespaço for instável, os pontos que formam a trajetória, ao longo de um intervalo de tempo positivo, formam aproximadamente o conjunto que compõe a variedade instável. Se o subespaço for estável, obtemos a variedade estável, de uma forma análoga, mas invertendo o sentido do tempo. Como a condição inicial não é exatamente na variedade, existe uma diferença, entre a trajetória descrita e a variedade, que depende da distância da condição inicial à variedade, implicando numa imprecisão na sua determinação. Para sistemas discretos, existem métodos específicos para minimizar essa imprecisão [70]. Esses métodos podem ser usados nos sistemas contínuos, com as devidas considerações.

No capítulo 3 mostramos que os subespaços estáveis e instáveis são formados por auto vetores que estão ligados aos pontos fixos, tipo sela, do sistema Double Scroll. Os subespaços apresentam conjuntos que se aproximam assintoticamente do ponto fixo com uma evolução temporal  $t \rightarrow +\infty$  (subespaço estável) e  $t \rightarrow -\infty$  (subespaço instável). Em geral os subespaços tangenciam as variedades apenas nos pontos fixos, mas como o sistema Double Scroll é linear por partes, os subespaços

tangenciam as variedades numa região ampla. Assim, podemos dar uma condição inicial exatamente sobre a variedade  $e$ , com isso, determiná-la com um alto grau de precisão.

No capítulo 4 mostramos que os atratores, do sistema Double Scroll, podem ser compreendidos através dos subespaços dos pontos fixos. Mas uma análise mais precisa da dinâmica do sistema pode ser feita se conhecermos as suas variedades.

Estruturas instáveis de um sistema dinâmico apresentam conjuntos de pontos pelos quais elas são alcançadas num tempo  $t \rightarrow \pm\infty$ . Uma estrutura com essas características é chamada de sela e é caracterizada pela presença de variedades estável e instável.

Neste capítulo determinamos as variedades estáveis e instáveis de todos os pontos fixos do sistema Double Scroll, tanto do contínuo como do descontínuo. Através do estudo dessas variedades apresentamos evidências de existência de selas caóticas quando o sistema é evoluído num tempo negativo.

## 6.1 Sistema Descontínuo

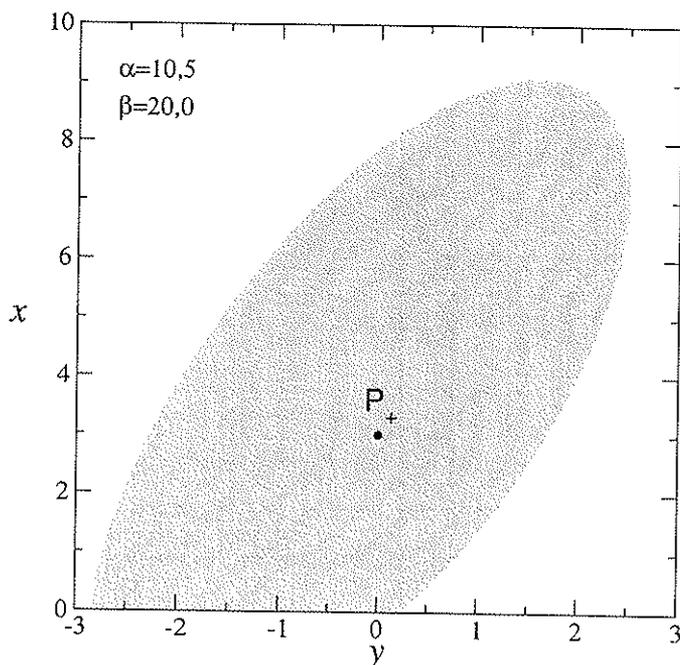
Conforme visto no capítulo 4, o circuito Double Scroll descontínuo apresenta dois atratores finitos, o pontual e o caótico. Quando o sistema opera com parâmetros que apresentam o atrator pontual, todo o espaço de fase converge para o ponto fixo. Portanto, há apenas a variedade estável. Existe também uma região, no espaço dos parâmetros, em que o sistema apresenta divergência para qualquer condição inicial. Nessa região, o espaço de fase inteiro forma a variedade instável. Mas quando o atrator caótico existe, ele coexiste com o atrator no infinito, assim, o espaço de fase contém duas bacias de atração, uma para cada atrator. Essa coexistência é causada pela existência de variedades estáveis e instáveis no sistema. É para essa situação que concentraremos nosso estudo das variedades.

O sistema Double Scroll descontínuo apresenta dois pontos fixos,  $P_+$  e  $P_-$ , localizados nos domínios  $D_+$  e  $D_-$ , respectivamente. Esses pontos são simétricos em relação à origem devido à simetria ímpar do sistema. Por isso, da mesma forma como acontece com os subespaços deste sistema (seção 3.2.2), as variedades estáveis e instáveis dos dois pontos fixos são simétricas, bastando a determinação das variedades para apenas um dos pontos fixos. Determinadas as variedades desse ponto fixo, basta aplicar  $f(x) = -f(-x)$ , no conjunto que compõe essas variedades, e obtemos as variedades do outro ponto fixo. Assim, vamos optar por realizar o estudo para o ponto fixo  $P_+$ .

### 6.1.1 Variedade Instável

O nosso interesse está em determinar as regiões visitadas assintoticamente pela variedade. No caso da variedade instável, por definição, ela tem origem no ponto fixo. O que devemos determinar, neste caso, é para onde evolui o conjunto de pontos que a forma.

No caso do circuito Double Scroll com descontinuidade, o subespaço instável de  $P_+$  ( $E^U(P_+)$ ), determinado na seção 3.2.2, contém um conjunto de pontos cujas trajetórias convergem para o ponto fixo para  $t \rightarrow -\infty$ . Esse conjunto de pontos pertence à variedade instável. Pode-se determinar essa variedade observando o limite das trajetórias, que passam por esses pontos, para  $t \rightarrow +\infty$ . Os pontos que compõem essas trajetórias formam a variedade instável de  $P_+$ , representada por  $W^U(P_+)$ . Vamos, inicialmente, fazer um estudo da evolução dos pontos, nas proximidades de  $P_+$ , que compõem o subespaço ( $E^U(P_+)$ ).



**Figura 6.1:** Subespaço instável  $E^U(P_+)$ . A região em cinza converge para o atrator caótico e em branco tende para o infinito. O conjunto que forma a variedade instável  $W^U(P_+)$  converge para o atrator caótico.

A equação que descreve o subespaço  $E^U(P_+)$  foi deduzida na seção 3.2.2 e é dada

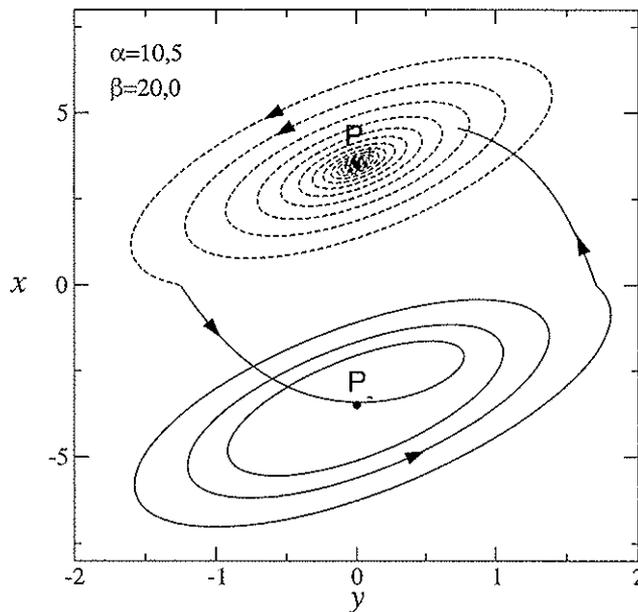
por

$$E^U(P_+) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid X(x - 3, 5) + Yy + Z(z + 3, 5) = 0, x > 0\} \quad (6.1)$$

$X = y'_R z'_I - z'_R y'_I$ ,  $Y = z'_R x'_I - x'_R z'_I$  e  $Z = x'_R y'_I - y'_R x'_I$ . As coordenadas  $(x'_R, y'_R, z'_R)$  formam o vetor  $\vec{v}_R$  e  $(x'_I, y'_I, z'_I)$  o vetor  $\vec{v}_I$ , no sistema de coordenadas  $S'$  em que a origem do sistema foi deslocada para o ponto fixo  $P_+ = (3, 5, 0, -3, 5)$ .

A figura 6.1 mostra a evolução dos pontos que formam o subespaço  $E^U(P_+)$  no intervalo  $x = (0, 10]$ ,  $y = [-3, 3]$  e  $z$  dado por  $z = -\frac{X(x-3,5)+Yy}{Z} - 3, 5$ , conforme a equação (6.1). Para a identificação do atrator integramos o sistema a passos de  $d\tau = 10^{-2}$  por um intervalo de tempo de  $\tau = 100$ . Se após esse intervalo a trajetória permanecer a uma distância menor que 20 da origem, então ela convergiu para o atrator caótico, caso contrário, convergiu para o atrator no infinito.

A região em branco da figura 6.1 representa os pontos que tendem ao infinito e, em cinza, os que convergem para o atrator caótico. Note que todos os pontos, que estão nas proximidades do ponto fixo  $P_+$ , convergem para o atrator caótico. Portanto, a variedade instável  $W^U(P_+)$  converge assintoticamente para o atrator caótico. Pela simetria do sistema, o resultado se estende para  $W^U(P_-)$ .



**Figura 6.2:** Trajetória contida na variedade  $W^U(P_+)$ . A trajetória tracejada diferencia a região da variedade em que  $W^U(P_+) \cap E^U(P_+)$ .

As trajetórias contidas nas variedades  $W^U(P_+)$  e  $W^U(P_-)$ , rapidamente convergem para o atrator caótico. Na figura 6.2 está apresentada uma dessas trajetórias

para os parâmetros  $\alpha = 10,5$  e  $\beta = 20,0$ , os mesmos utilizados no estudo da convergência de  $E^U(P_+)$ . Para essa figura foram utilizados como condições iniciais  $(3,500065, -0.035000, -3.651442)$  e uma evolução num intervalo de tempo  $\tau = 28,5$  com passos de  $d\tau = 10^{-2}$ . A linha tracejada é a parte da trajetória que coincide com o subespaço  $E^U(P_+)$ , e a preta pertence somente à variedade.

### 6.1.2 Variedade Estável

O circuito descontínuo apresenta algumas particularidades com as quais devemos tomar cuidado. Uma delas é que o fluxo não apresenta solução em  $x = 0$ , ou seja, o sistema não é diferenciável para esse valor de coordenada. A outra particularidade é que existem regiões, no espaço de estado, em que o fluxo apresenta sentidos opostos para duas coordenadas muito próximas, o que cria regiões proibidas, que nenhuma trajetória pode atingir. Para demonstrar isso, vamos analisar o fluxo nas proximidades do plano  $U_0 = \{(x, y, z) \mid x = 0\}$ .

O fluxo do sistema Double Scroll descontínuo está apresentado na equação (2.14) com a (2.16) do capítulo 2. Para as regiões próximas ao plano  $U_0$ , as equações ficam assim:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{+0} &= \alpha(y + 1), & x > 0 \\ \dot{x}_{-0} &= \alpha(y - 1), & x < 0 \\ \dot{y} &= -y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned} \tag{6.2}$$

onde os índices  $+$  e  $-$ , usados em  $\dot{x}_{+0}$  e  $\dot{x}_{-0}$ , indicam que o fluxo se refere à coordenada  $x_{+0}$ , localizada imediatamente acima de  $U_0$  ( $x > 0$ ), e à coordenada  $x_{-0}$ , localizada imediatamente abaixo de  $U_0$  ( $x < 0$ ). Os fluxos nas direções de  $y$  e  $z$  estão definidos para toda a região do espaço. O fluxo na direção  $x$  apresenta equações distintas para as regiões acima e abaixo de  $U_0$ . Uma rápida análise nessas equações revela que:

- (a) Não há solução para  $\dot{x}_{+0} = \dot{x}_{-0}$ .
- (b)  $\dot{x}_{+0} = -\dot{x}_{-0}$  apresenta solução somente em  $y = 0$ .
- (c)  $\dot{x}_{+0}$  é positivo para  $y > -1$  e negativo para  $y < -1$ .
- (d)  $\dot{x}_{+0}$  é positivo para  $y > 1$  e negativo para  $y < 1$ .

O item (a) mostra que o fluxo abaixo de  $U_0$ , na direção  $x$ , é sempre diferente do fluxo acima, ou seja, o sistema não é diferenciável nessa região. O item (b) mostra

que o fluxo acima e abaixo de  $U_0$ , na direção  $x$ , possuem módulos iguais com sentido opostos para  $y = 0$ . Os itens (c) e (d) revelam três comportamentos distintos do fluxo nas proximidades de  $U_0$ . Nas regiões onde  $y < -1$  tanto  $\dot{x}_{+0}$  quanto  $\dot{x}_{-0}$  são

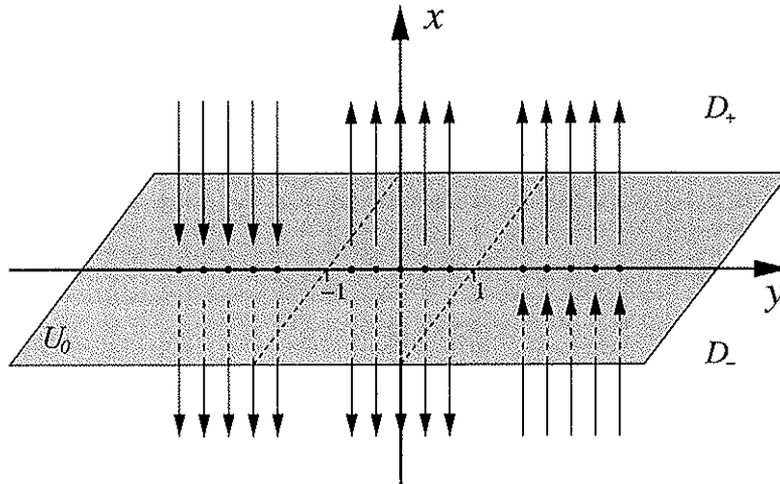


Figura 6.3: Representação do fluxo nas proximidades de  $U_0$ .

negativos, o que permite que trajetórias atravessassem da região de cima de  $U_0$  ( $D_+$ ) para a de baixo ( $D_-$ ). Nas regiões onde  $y > 1$ ,  $\dot{x}_{+0}$  e  $\dot{x}_{-0}$  são positivos, viabilizando a passagem de trajetórias da região de baixo de  $U_0$  para a de cima. Nas regiões dentro do intervalo  $-1 < y < 1$ ,  $\dot{x}_{+0}$  é positivo e  $\dot{x}_{-0}$  é negativo. Isso impede que qualquer trajetória se aproxime de  $U_0$  nessa região, o que inviabiliza a formação de órbitas homoclínicas neste sistema. Esse fluxo está representado na figura 6.3.

Para o circuito Double Scroll com descontinuidade, o subespaço estável  $E^S(P_+)$  do ponto fixo  $P_+$  é unidimensional (ver figura 3.3). Conforme demonstrada na seção 3.2.2, o subespaço  $E^S(P_+)$  é descrito pela equação (6.3),

$$E^S(P_+) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y = \frac{\alpha(1+b) + \rho}{\alpha}(x - 3,5) \text{ e } z = -\frac{\beta}{\rho}y - 3,5 \right\} \quad (6.3)$$

Para parâmetros em que ocorre o atrator caótico, o subespaço  $E^S(P_+)$ , próximo de  $U_0$  está na região onde  $-1 < y < 1$ . Portanto, o conjunto de pontos que forma o subespaço dessa região, converge num tempo negativo, para  $x_{+0}$  e, num tempo positivo, para  $P_+$ .

A solução do sistema Double Scroll com descontinuidade, com condição inicial no subespaço  $E^S(P_+)$ , está apresentada na figura 6.4. A curva representa a variedade estável  $W^S(P_+)$  e é resultado da integração numérica do sistema, onde foi utilizado

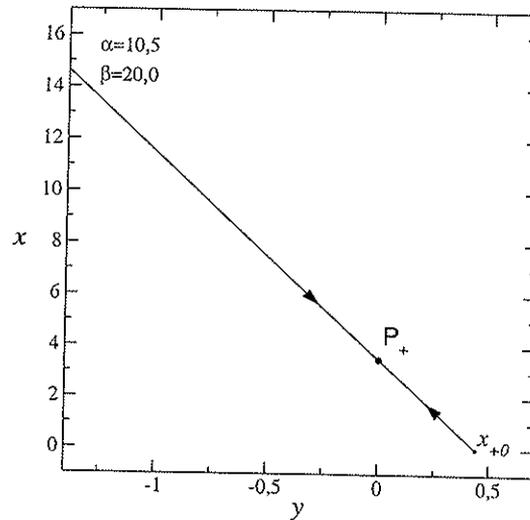


Figura 6.4: Projeção da variedade estável  $W^S(P_+)$  no plano  $z = 0$ .

$d\tau = -10^{-3}$  com condições iniciais em  $(3,491409, 0,001081, -3,494998)$  para determinar a parte da variedade que contém  $x_+$  e,  $(3,508591, -0,001081, -3,505002)$ , para determinar o restante. Neste caso, a variedade estável coincide completamente com o subespaço estável.

## 6.2 Sistema Contínuo

O sistema Double Scroll contínuo apresenta três pontos fixos  $P_+$ ,  $P_0$  e  $P_-$ , portanto, teremos três conjuntos de variedades. Estudaremos as variedades desses pontos fixos nas condições em que o fluxo apresenta apenas atratores estruturais. As variedades, onde o sistema apresenta atratores pontuais ou somente o atrator no infinito, são triviais e foram discutidos na seção 6.1.

A existência do ponto fixo  $P_0$  cria uma situação nova na forma das estruturas das variedades de  $P_+$  e  $P_-$  em relação ao sistema descontínuo. As variedades instáveis, que anteriormente convergiam para o único atrator caótico, agora se depararão com a coexistência de atratores, o que criará distintos conjuntos assintóticos. As variedades estáveis de  $P_+$  e  $P_-$ , que no circuito descontínuo estavam confinadas numa região do espaço de estado em função das características do fluxo, agora não apresentam mais essa restrição, já que o sistema contínuo é diferenciável em todo o espaço.

Além do mais, a variedade estável de  $P_0$  não se restringe ao conjunto de pontos formados por apenas duas trajetórias, como é o caso de  $P_+$  e  $P_-$ , mas de infinitas.

O resultado da convergência dessas trajetórias, num tempo negativo, revela a possibilidade de existirem estruturas caóticas no sistema para  $t \rightarrow -\infty$ . As seções a seguir mostram um estudo detalhado das variedades dos pontos fixos deste sistema, e faz uma discussão sobre essa estrutura caótica em tempo reverso.

### 6.2.1 Variedade Instável

No sistema Double Scroll contínuo, existem três conjuntos de variedades instáveis,  $W^U(P_+)$ ,  $W^U(P_-)$  e  $W^U(P_0)$ . Os dois primeiros apresentam variedades com as mesmas características. Por isso vamos dividir esta seção em duas subseções. A primeira fará um estudo das variedades dos pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$  e, a segunda, do ponto fixo  $P_0$ .

#### Pontos Fixos $P_+$ e $P_-$

O sistema apresenta simetria ímpar, assim, os pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$  são simétricos ímpar. Determinadas as variedades de um dos ponto fixo, as variedades do outro ponto fixo podem ser determinadas através da seguinte transformação:  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$ , onde  $(x, y, z)$  é a coordenada de um ponto da variedade de um dos pontos fixos, e  $(-x, -y, -z)$  a coordenada correspondente da variedade do outro ponto fixo. Por isso faremos o estudo da variedade apenas em  $P_+$ .

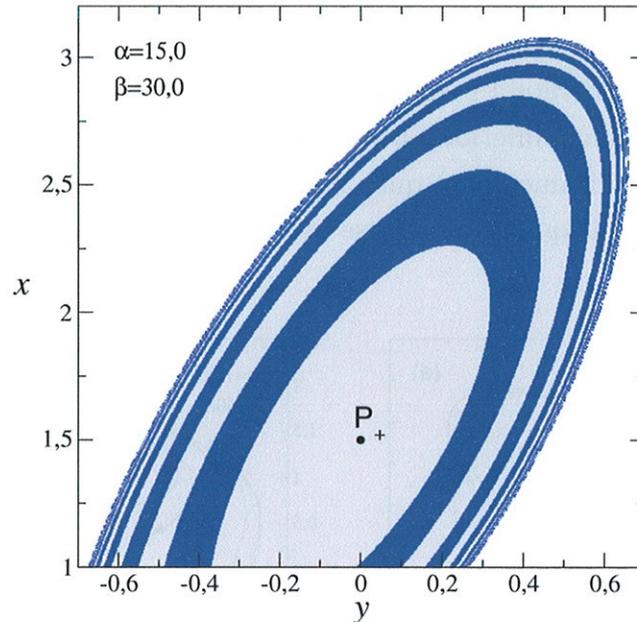
Da mesma forma como ocorre no sistema descontínuo, o subespaço  $E^U(P_+)$  coincide com a variedade  $W^U(P_+)$  nas regiões do subespaço próximas ao ponto fixo. Assim, conhecemos a origem das trajetórias que compõem essa variedade, o ponto fixo. O que vamos buscar é a região para onde essas trajetórias convergem assintoticamente. Para isso, vamos evoluir o conjunto de pontos que formam o subespaço  $E^U(P_+)$  e analisar como se comportam as trajetórias que partem das regiões próximas ao ponto fixo  $P_+$ .

A equação que descreve o subespaço  $E^U(P_+)$  foi deduzida na seção 3.2.1 e é dada por

$$E^U(P_+) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid X(x - 1, 5) + Yy + Z(z + 1, 5) = 0, x \geq 1\} \quad (6.4)$$

onde,  $X = y'_R z'_I - z'_R y'_I$ ,  $Y = z'_R x'_I - x'_R z'_I$  e  $Z = x'_R y'_I - y'_R x'_I$ . As coordenadas  $(x'_R, y'_R, z'_R)$  formam o vetor  $\vec{v}_R$  e,  $(x'_I, y'_I, z'_I)$ , o vetor  $\vec{v}_I$ , no sistema de coordenadas  $S'$  em que a origem do sistema foi deslocada para o ponto fixo  $P_+ = (1, 5, 0, -1.5)$ .

O sistema contínuo apresenta coexistência de atratores caóticos e periódicos. Os atratores periódicos e o atrator caótico tipo Rössler surgem aos pares, fazendo com



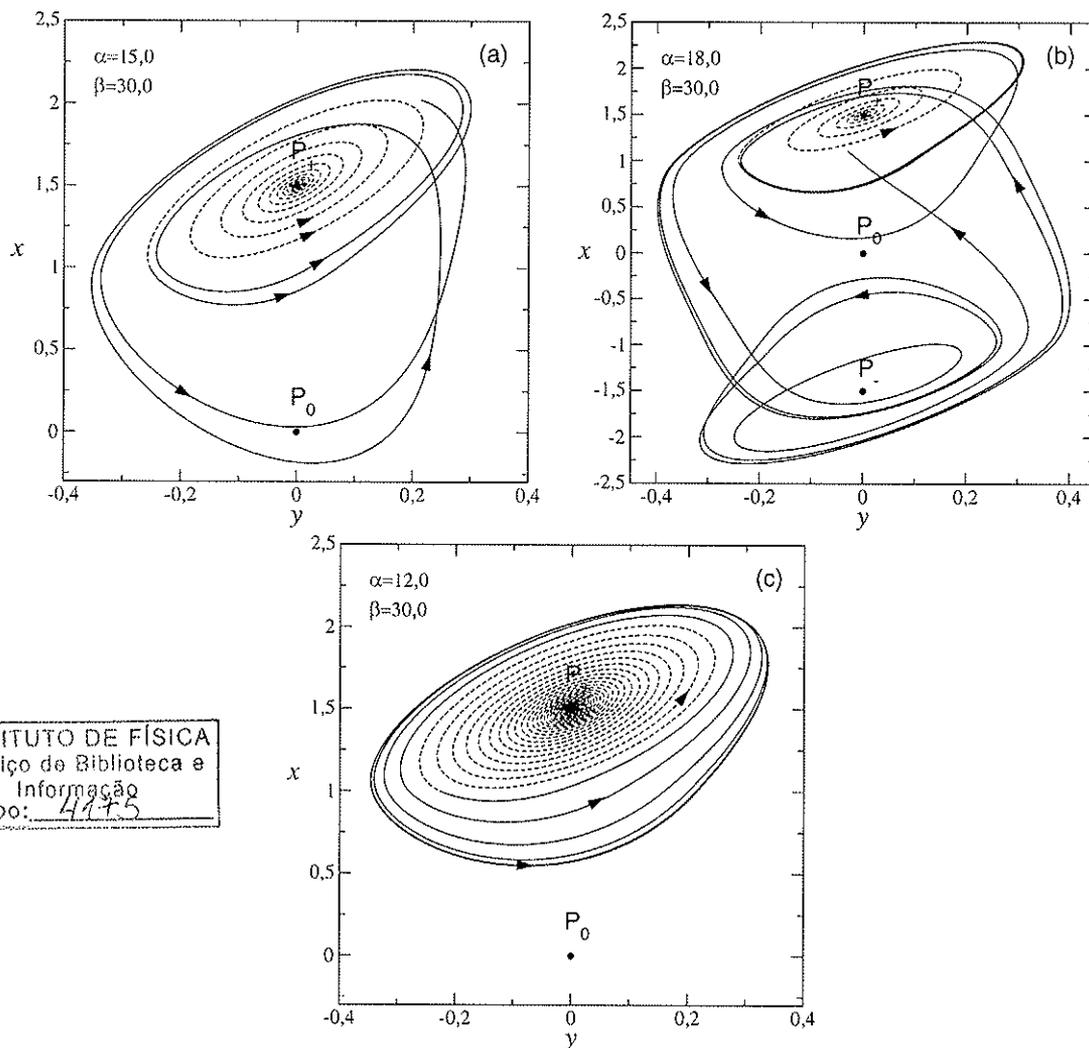
**Figura 6.5:** Subespaço instável  $E^U(P_+)$ . As trajetórias da região em branco divergem para o infinito. A região em cinza leva as trajetórias para o atrator caótico tipo Rössler em  $D_+$  e, a outra, para o atrator caótico tipo Rössler em  $D_-$ . O conjunto que forma a variedade instável  $W^U(P_+)$  converge sempre para o atrator caótico tipo Rössler em  $D_+$ .

que sempre coexistam dois atratores, um predominantemente no domínio  $D_+$ , e o outro predominantemente em  $D_-$ . A coexistência de atratores Double Scroll é mais raro e, por isso, vamos considerar na nossa análise que o atrator Double Scroll coexiste apenas com o atrator do infinito.

Os parâmetros usados para gerar o subespaço  $E^U(P_+)$ , mostrado na figura 6.5, apresentam atratores tipo Rössler. As trajetórias da região em branco divergem para o infinito. A região em cinza leva as trajetórias para o atrator caótico tipo Rössler localizado predominantemente em  $D_+$  e, a outra, para o atrator caótico tipo Rössler em predominantemente em  $D_-$ . O conjunto de pontos em cinza converge para o atrator que predomina no domínio  $D_+$ , em preto, para o atrator em  $D_-$  e, em marrom, os pontos convergem para o atrator no infinito. Note que ponto fixo  $P_+$  está localizado na região em cinza. Isso implica que a sua variedade instável  $W^U(P_+)$  converge sempre para o atrator caótico tipo Rössler em  $D_+$ .

O subespaço apresentado nesta figura está no intervalo  $x = [-0,7, 0,7]$ ,  $y =$

[1, 3, 2] e  $z = -\frac{X(x-1,5)+Yy}{Z} - 1,5$ , conforme a equação (6.4). O atrator foi identificado após um intervalo de tempo  $\tau = 10^3$ , com passos de  $d\tau = 10^{-2}$ . Se a trajetória se afastar a uma distância de 5 da origem, dentro desse intervalo de tempo, então indicamos que o sistema divergiu para o infinito. Se, vencido o tempo  $\tau$ , a trajetória permanecer a uma distância inferior a 5 consideramos que o sistema convergiu para o atrator caótico. Identificamos para qual atrator a trajetória convergiu e salvamos todas as condições iniciais que levam a esse atrator num mesmo arquivo.



INSTITUTO DE FÍSICA  
Serviço de Biblioteca e  
Informação  
Tombo: 4475

**Figura 6.6:** Trajetórias pertencentes à variedade instável  $W^U(P_+)$ . (a) Convergência da trajetória para o atrator tipo Rössler. (b) Convergência da trajetória para o atrator Double Scroll. (c) Convergência da trajetória para o atrator periódico de período 1. As trajetórias tracejadas representam regiões em que  $W^U(P_+) \cap E^U(P_+)$ .

Para um atrator periódico, o subespaço  $E^U(P_+)$  apresenta as mesmas características que o subespaço da figura 6.5. Sendo que as cores cinza e pretos representariam os conjuntos de pontos que convergem para os distintos atratores. No caso em que o atrator é o Double Scroll, as regiões em cinza e preto da figura 6.5 levam ao mesmo atrator, formando um subespaço semelhante ao subespaço instável do sistema com descontinuidade mostrado na figura 6.1.

Alguns exemplos da forma que variedade  $W^U(P_+)$  assume estão apresentados na figura 6.6. Ela mostra que o variedade converge para o atrator determinado pelos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ . Em (a) o conjunto de pontos que formam a variedade convergem assintoticamente para o atrator caótico tipo Rössler, em (b), para o atrator caótico Double Scroll e em (c) para o atrator periódico de período 1. As trajetórias tracejadas representam regiões em que  $W^U(P_+) \cap E^U(P_+)$ . Para a figura (a) foi utilizado um tempo de 2.050 passos a partir da condição inicial (1,512851, 0,003689, -1527987), para (b) o tempo de evolução foi de 2.210 passos a partir de (1,523965, 0,007055, -1,545459) e para a figura (c) foram dados  $5 \times 10^3$  passos a partir da condição inicial (1,510940, 0,003007, -1,528681). Cada passo vale  $d\tau = 10^{-2}$ .

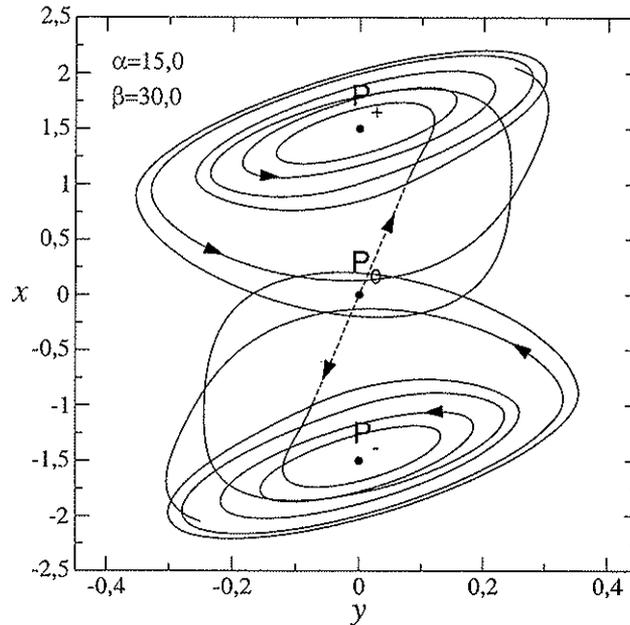
### Ponto Fixo $P_0$

Como o subespaço instável de  $P_0$  é unidimensional (ver a figura 3.2), todo o subespaço está contido na variedade instável  $W^U(P_0)$ . Então para determinarmos  $W^U(P_0)$  basta dar uma condição inicial no subespaço e evoluí-lo. A equação de  $E^U(P_0)$  foi deduzida na seção 3.2.1 e é dada por

$$E^U(P_0) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, y = \frac{\alpha(1+a) + \lambda}{\alpha} x \text{ e } z = -\frac{\beta}{\lambda} y \right\} \quad (6.5)$$

A figura 6.7 corresponde à variedade instável de  $P_0$ . A evolução dessas duas trajetórias forma todo o conjunto da variedade. Note que elas estão indo para regiões distintas do espaço de estado. Uma está convergindo assintoticamente ao atrator tipo Rössler localizado, predominantemente, no domínio  $D_+$ . O outro converge para o atrator simétrico ao anterior. Assim, a variedade  $W^U(P_0)$  apresenta três conjuntos para onde o seu conjunto de pontos evolui assintoticamente: o ponto fixo, num tempo negativo, e os dois atratores caóticos, num tempo positivo.

Se os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  determinarem um atrator periódico, pela simetria, existirão dois atratores, e a variedade convergirá para ambos da mesma forma como convergiu para os atratores tipo Rössler. Mas se o atrator for o Double Scroll, as duas trajetórias convergirão assintoticamente para esse atrator por caminhos sim-



**Figura 6.7:** Trajetórias pertencentes à variedade instável  $W^U(P_0)$ . A evolução dessas duas trajetórias formam toda a variedade instável de  $P_0$ . As trajetórias tracejadas representam regiões em que  $W^U(P_+) \cap E^U(P_+)$ .

tricamente opostos. Nesse caso, o conjunto de pontos que forma a variedade  $W^U(P_0)$  converge, num tempo positivo, assintoticamente para apenas um conjunto.

Na figura 6.7, a trajetória que revoluciona em torno de  $P_+$  tem início em  $(0,025534, 0,001896, -0,017464)$  e se desenvolve num intervalo de tempo  $\tau = 10$  a passos de  $d\tau = 10^{-2}$ . A que revoluciona em torno de  $P_-$  tem início em  $(-0,025534, -0,001896, 0,017464)$  e se desenvolve no mesmo intervalo de tempo. A trajetória tracejada identifica regiões em que  $W^U(P_+) \cap E^U(P_+)$ .

## 6.2.2 Variedade Estável

Pela definição, a variedade estável de um ponto fixo é o conjunto de pontos que converge assintoticamente para o ponto fixo. Nesta seção vamos determinar para onde evolui esse conjunto de pontos, quando o tempo evolui negativamente. Esta seção também está dividida em duas subseções.

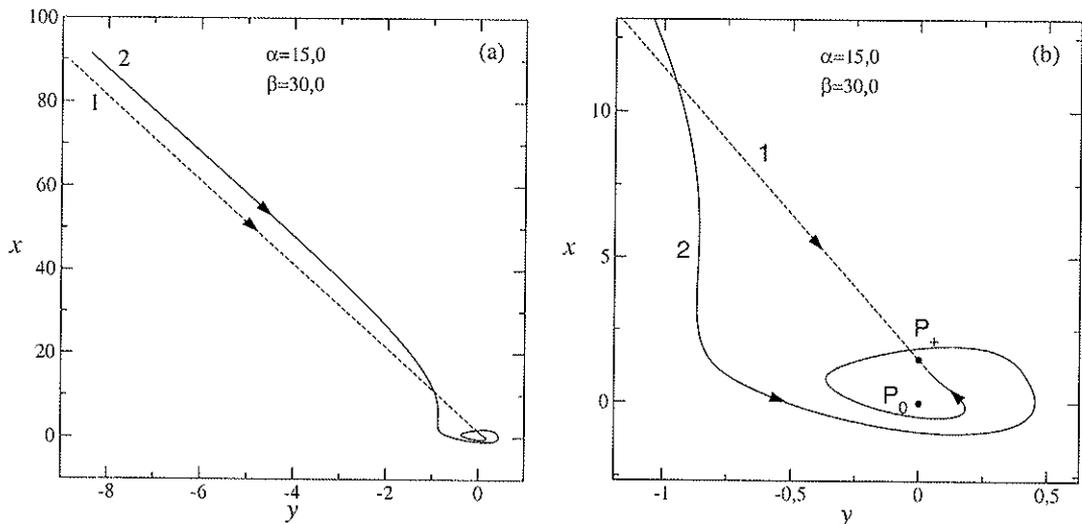
### Pontos Fixos $P_+$ e $P_-$

No circuito Double Scroll, operando na situação em que existem atratores periódicos

e caóticos, o subespaço estável  $E^S(P_+)$  é uma reta que pode ser subdividida em duas partes. A primeira une  $P_+$  com uma região no infinito com  $x > 0$ ,  $y < 0$  e  $z < 0$ , a qual nós nos referiremos como  $x_{+\infty}$ . A segunda é uma reta que está limitada pela fronteira  $U_-$  (ver figura 3.2). Usando as propriedades de simetria, o correspondente de  $x_{+\infty}$  é o  $x_{-\infty}$  localizado em  $x < 0$ ,  $y > 0$  e  $z > 0$ . Conforme demonstrado na seção 3.2.1, o subespaço  $E^S(P_+)$  é descrito pela equação (6.5),

$$E^S(P_+) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0, y = \frac{\alpha(1+b) + \rho}{\alpha}(x - 1,5) \text{ e } z = -\frac{\beta}{\rho}y - 1,5 \right\} \quad (6.6)$$

A partir da equação (6.6) é possível calcular uma condição inicial pertencente ao conjunto da variedade para determiná-la. Existem apenas duas trajetórias que levam ao ponto fixo  $P_+$  indicadas por 1 e 2 na figura 6.8. O conjunto de pontos que forma essas trajetórias é a variedade estável de  $P_+$  ( $W^S(P_+)$ ). A 1 descreve uma trajetória retilínea e está contida completamente no subespaço  $E^S(P_+)$ . A 2 descreve uma trajetória que passa pela vizinhança de  $P_0$  e segue em direção à  $P_+$ . Ambas têm origem na região  $x_{+\infty}$ . As trajetórias tracejadas indicam as regiões em que  $W^S(P_+) \cap E^S(P_+)$  e podem ser calculadas analiticamente através da equação (6.6).



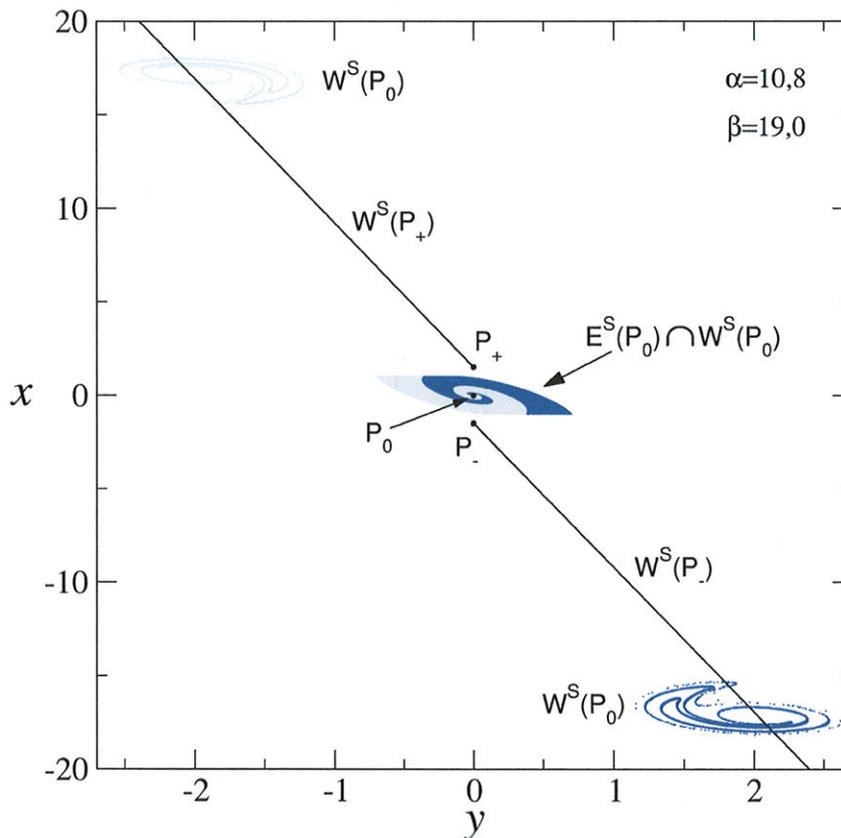
**Figura 6.8:** (a) Projeção da variedade estável  $W^S(P_+)$  no plano  $xy$ . (b) ampliação da região próxima do ponto fixo  $P_+$  da figura (a). As trajetórias tracejadas identificam a parte do conjunto da variedade estável de  $P_+$  onde  $W^S(P_+) \cap E^S(P_+)$ .

As curvas da figura 6.8 foram determinadas com a evolução de um ponto pertencente ao subespaço  $E^S(P_+)$ , num tempo negativo ( $d\tau = -10^{-2}$ ), até que a trajetória

se afastasse da origem a uma distância máxima de  $10^2$ . Para determinar a variedade tracejada, acima do ponto fixo  $P_+$ , foi utilizada a condição inicial  $(1,526516, -0,002659, -1,513778)$ . Para determinar o restante da variedade, a condição inicial foi  $(1,473484, 0,002659, -1,486222)$ .

### Ponto Fixo $P_0$

O subespaço  $E^S(P_0)$  é um plano infinito dado pela equação (6.7), conforme a



**Figura 6.9:** Variedades estáveis de  $P_0$ . A região central em cinza e azul é o conjunto  $W^S(P_0) \cap E^S(P_0)$ . Condições iniciais em cinza (azul), nessa região, convergem para a região em cinza (azul) ao longo do subespaço  $E^S(P_{+(-)})$ , num tempo negativo. Para  $t \rightarrow -\infty$  a região em cinza (azul) tende para  $x_{+\infty(-\infty)}$  ao longo de  $E^S(P_{+(-)})$ .

(3.20),

$$E^S(P_0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid Xx + Yy + Zz = 0, |x| \leq 1\} \quad (6.7)$$

onde,  $X = y_R z_I - z_R y_I$ ,  $Y = z_R x_I - x_R z_I$  e  $Z = x_R y_I - y_R x_I$ . As coordenadas  $(x_R, y_R, z_R)$  formam o vetor  $\vec{v}_R$  e,  $(x_I, y_I, z_I)$ , o vetor  $\vec{v}_I$ .

Para determinar a intersecção do subespaço  $E^S(P_0)$  com a variedade  $W^S(P_0)$ , damos uma série de condições iniciais no subespaço, nas proximidades de  $P_0$ , e integramos com  $t \rightarrow +\infty$ . As condições iniciais cujo as trajetórias convergem para  $P_0$  formam o conjunto  $W^S(P_0) \cap E^S(P_0)$ . Qualquer condição inicial em  $W^S(P_0)$  tem que necessariamente passar por esse conjunto para  $t \rightarrow +\infty$ . Assim condições iniciais nesse conjunto, evoluídas com  $t \rightarrow -\infty$ , revelam completamente a estrutura de  $W^S(P_0)$ .

Na figura 6.9 está apresentado um resultado desse procedimento. Para os parâmetros utilizados existe o atrator caótico tipo Rössler. A região central da figura, em azul e cinza, é o conjunto  $E^S(P_0) \cap W^S(P_0)$ . No centro, para onde todo esse conjunto converge para  $t \rightarrow +\infty$ , está o ponto fixo  $P_0$ . As retas em preto fazem parte das variedades estáveis  $W^S(P_+)$  e  $W^S(P_-)$ . Quando se integra a região central em azul de  $W^S(P_0)$ , num tempo negativo, essa região evolui para a região em azul que contorna a variedade  $W^S(P_-)$ . E para um tempo  $t \rightarrow -\infty$ , o seu comportamento assintótico converge para  $x_{-\infty}$ . Da mesma forma a região central em cinza de  $W^S(P_0)$  converge para  $x_{+\infty}$ . Portanto, podemos dividir a variedade  $W^S(P_0)$  em dois subconjuntos: uma que tem sua extremidade em  $x_{+\infty}$ , que chamaremos de subconjuntos positivo e será representado por  $W_+^S(P_0)$  (região em cinza da Fig. 6.9), e a outra que tem sua extremidade em  $x_{-\infty}$ , que chamaremos de subconjuntos negativo e será representado por  $W_-^S(P_0)$ , (região em azul).

### 6.2.3 Conjunto Caótico para $t \rightarrow -\infty$

Existe um subconjunto revelado pelos subconjuntos positivo e negativo. A fronteira que se forma no subespaço  $E^S(P_0)$ , entre os subconjuntos  $W_+^S(P_0)$  e  $W_-^S(P_0)$ , é um conjunto de pontos que, para  $t \rightarrow -\infty$ , não converge nem para o conjunto limite  $x_{+\infty}$  nem para  $x_{-\infty}$ . Portanto é razoável acreditar que essa fronteira pertença a um conjunto instável confinado no espaço de fase. Ou seja, condições iniciais nessa fronteira teriam um comportamento assintótico, para  $t \rightarrow -\infty$ , numa região limitada no espaço de fase ao redor dos pontos fixos do sistema.

Para parâmetros muito bem definidos, pode ocorrer da variedade estável fundir-se com a instável, formando uma estrutura instável conhecida como órbita ho-

homoclínica. Essa órbita é parte integrante do conjunto que compõe a variedade estável, e não pertence a nenhum dos dois conjuntos limites  $x_{+\infty}$  ou  $x_{-\infty}$ . Portanto, ela seria uma forte candidata a ser a fronteira que se formou na região do conjunto  $W^s(P_0) \cap E^s(P_0)$ .

A trajetória que descreve a fronteira formada em  $W^s(P_0) \cap E^s(P_0)$  é muito instável. E rapidamente ela converge para um dos conjuntos limite, dificultando a observação da estrutura que argumentamos existir para uma evolução com  $t \rightarrow -\infty$ . Porém, a órbita homoclínica, como mostraremos no capítulo 7, pode ser determinada e de fato pertence a essa fronteira.

Portanto, neste capítulo pudemos verificar que todas as variedades instáveis convergem, na maioria dos casos, para o atrator determinado pelos parâmetros. A regra falha quando temos uma órbita homoclínica envolvida, que é o outro conjunto que pode ser habitado pelas variedades. As variedades estáveis geralmente têm origem em duas regiões bem definidas no infinito, as quais nós chamamos de  $x_{+\infty}$  e  $x_{-\infty}$ . A exceção é, além do caso em que exista a órbita homoclínica, o conjunto da variedade  $W^s(P_0)$  composto pela fronteira formada em  $W^s(P_0) \cap E^s(P_0)$ .

## Capítulo 7

# Órbitas Homoclínicas e Heteroclínicas

No capítulo 6 foram estudadas as estruturas formadas pelas variedades de todos os pontos fixos do circuito Double Scroll contínuo e descontínuo. No final da seção 6.2.3, fizemos uma discussão sobre dois conjuntos pertencentes à variedade estável de  $P_0$  que não foram mostrados. O primeiro foi o conjunto caótico para  $t \rightarrow -\infty$ , que, devido a sua instabilidade, não foi possível verificar sua estrutura no espaço de estado. O segundo conjunto foi a órbita homoclínica que, daqui até o final desta tese será o foco central do nosso estudo.

A relevância do estudo de órbitas homoclínicas está na relação que elas têm com um conjunto caótico. A implicação em caos através do estudo de órbitas homoclínicas, em sistemas discretos bidimensionais, foi mostrado por Melnikov em 1963 [55] e, para uma classe de sistemas contínuos tridimensionais, por Shilnikov numa série de artigos publicados a partir de 1965 [15, 16, 17], cujo teorema foi apresentado na seção 4.1.1.

As órbitas homoclínicas são conjuntos invariantes que, quando evoluídos no tempo  $t \rightarrow \pm\infty$ , convergem assintoticamente para o ponto fixo. Em alguns casos raros pode-se determinar analiticamente uma órbita homoclínica, como no modelo introduzido por Sandstede [71], mas determiná-las, geralmente, não é uma tarefa simples. Uma dificuldade é determinar as variedades estável e instável do ponto fixo. Como mostrado anteriormente, para isso é necessário dar uma condição inicial na variedade, o que nem sempre é possível fazer com precisão. Vencida essa primeira, a outra dificuldade que segue é determinar o parâmetro de controle para o qual as variedades se unirão.

No sistema Double Scroll contínuo, conforme visto no capítulo 6, pode-se calcular uma condição inicial na variedade analiticamente e determinar a variedade com alta precisão. Para determinar o conjunto de parâmetros em que as variedades se fundem, neste capítulo vamos propor um método que pode ser aplicado a todo sistema linear por partes. Além do mais, estendemos o método para determinar órbitas heteroclínicas, que são órbitas cujas trajetórias unem dois pontos fixos. Nesse caso, a variedade instável de um ponto fixo se une à estável do outro e vice-versa.

No sistema Double Scroll descontínuo, estudado na seção 6.1.2, vimos que as variedades estáveis dos pontos fixos coincidem exatamente com seus subespaços estáveis (ver figura 6.4). Isso implica que não existe uma trajetória, fora desses subespaços, que convirja para uma variedade estável, o que inviabiliza a formação de órbitas homoclínicas nesse sistema. Por isso daqui para frente estudaremos somente o sistema Double Scroll contínuo.

## 7.1 Método de Obtenção

Como já foi mencionado anteriormente, uma órbita homoclínica é formada pela conexão das variedades estável e instável de um ponto fixo. No sistema Double Scroll conhecemos precisamente como o conjunto das variedades se comporta nas proximidades do ponto fixo. Assim, sabemos como esse conjunto se aproxima (variedade estável) e se afasta (variedade instável) do ponto fixo, quando evolui num tempo positivo. Mas, devido à não linearidade que o sistema apresenta, ao deixar o domínio em que o ponto fixo está, não é mais possível determinar com precisão o comportamento do conjunto da variedade. Portanto, estamos forçados a encontrar uma solução numérica para determinar o parâmetro em que as variedades se juntam.

Nas seções que seguem apresentaremos um método para obtenção de órbitas homoclínicas para todos os pontos fixos do sistema Double Scroll. O método está baseado no fato de que em sistemas lineares por partes, os subespaços tangenciam as variedades numa larga escala de espaço. Mostraremos, também, como o método pode ser usado para determinar órbitas heteroclínicas, aquelas nas quais a variedade instável de um ponto fixo se une à estável de outro e vice-versa. Este método de obtenção de órbitas homoclínicas e heteroclínicas é válido para sistemas lineares por partes, mas pode ser estendido para sistemas não lineares em geral.

### 7.1.1 Órbitas Homoclínicas

Existem vários tipos de órbitas homoclínicas do ponto fixo  $P_0$  as quais serão apresentadas em subseções porque o método para obtê-las sofre ligeiras adequações.

#### Órbitas Homoclínicas tipo $H_n$

Vamos começar determinando uma órbita homoclínica do ponto fixo  $P_0$  de ordem  $n$ . A figura 7.1 mostra um esquema do método, onde o sistema de coordenadas foi levemente rotacionado em torno do eixo  $y$ . Damos uma condição inicial nas proximidades do ponto fixo  $P_0$ , no subespaço  $E^U(P_0)$ , e consideramos a sua evolução. Será descrita uma trajetória que deixará o domínio  $D_0$ , através desse subespaço, em direção ao domínio  $D_+$ , fará um número  $n$  de revoluções em torno de  $P_+$ , podendo eventualmente cruzar várias vezes a fronteira  $U_+$  entre os domínios, e atingirá na enésima revolução o ponto  $P_n$ , em  $U_+$ , localizado a uma distância  $d_n$  do ponto  $Q$ .  $Q$  é um ponto da variedade estável  $W^S(P_0)$  contido no conjunto que forma a reta  $L_{0+}$ , e é o ponto nessa reta que mais se aproxima de  $P_n$ . A reta  $L_{0+}$  é a intersecção entre a fronteira  $U_+$  e o subespaço  $E^S(P_0)$ . Quando  $d_n = 0$  a órbita converge assintoticamente para o ponto fixo  $P_0$ , através do plano formado pelo subespaço  $E^S(P_0)$ , e a órbita homoclínica de ordem  $n$  está determinada. O método consiste em fixar um parâmetro do sistema e variar o outro de forma a obter  $d_n = 0$ . A ordem da órbita é determinada pelo número  $n$  de revoluções que ela dá em torno de  $P_+$ . Representaremos as órbitas homoclínicas com o símbolo  $H_n$ .

A reta  $L_{0+}$  pode ser determinada através da equação 3.20 com  $x = 1$

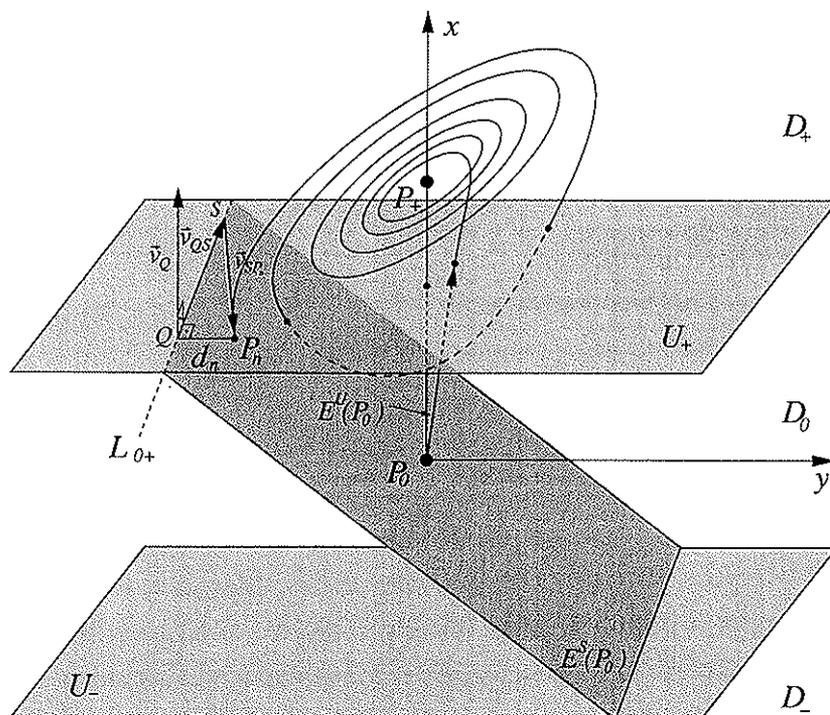
$$L_{0+} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid X + Yy + Zz = 0\} \quad (7.1)$$

onde,  $X = y_R z_I - z_R y_I$ ,  $Y = z_R x_I - x_R z_I$  e  $Z = x_R y_I - y_R x_I$ . As coordenadas  $(x_R, y_R, z_R)$  formam o vetor  $\vec{v}_R$  e,  $(x_I, y_I, z_I)$ , o vetor  $\vec{v}_I$ .

A distância  $d_n$  é dada pela equação 7.2

$$d_n = \frac{\vec{v}_{QS} \times \vec{v}_Q}{|\vec{v}_{QS} \times \vec{v}_Q|} \cdot \vec{v}_{SP_n} \quad (7.2)$$

onde  $\vec{v}_{QS}$  e  $\vec{v}_{SP_n}$  são os vetores formados pelos pontos  $Q$  e  $S$  e pelos pontos  $S$  e  $P_n$ , respectivamente.  $S$  é um ponto arbitrário contido na reta  $L_{0+}$ .  $\vec{v}_Q$  é um vetor perpendicular ao plano  $U_+$ . Note que a configuração dos vetores na figura 7.1 implica que a distância  $d_n$  será positiva se  $P_n$  estiver entre a linha  $L_{0+}$  e o eixo  $x$  e, negativa, quando a linha  $L_{0+}$  estiver entre  $P_n$  e o eixo  $x$ .



**Figura 7.1:** Esquema do método de obtenção de órbitas homoclínicas do ponto fixo  $P_0$ .  $U_+$  é a fronteira entre os domínios  $D_0$  e  $D_+$ .  $Q$  pertence à  $W^U(P_0)$ , e é o ponto na reta  $L_{0+} = E^S(P_0) \cap U_+$  que mais se aproxima de  $P_n$ , e  $S$  é um ponto arbitrário nessa reta.  $\vec{v}_Q$ ,  $\vec{v}_{QS}$  e  $\vec{v}_{SP_n}$  são vetores auxiliares para o cálculo da distância  $d_n$ . A órbita homoclínica de ordem  $n$  está determinada quando  $d_n = 0$ .

Para calcular as coordenadas dos pontos  $Q$  e  $S$  usamos a equação (7.1) escolhendo a coordenada  $z$  como  $z_Q = 0$ , para o ponto  $Q$ , e  $z_S = 1$ , para o ponto  $S$ , assim,

$$Q = (x_Q, y_Q, z_Q) = \left(1, -\frac{X}{Y}, 0\right) \quad (7.3)$$

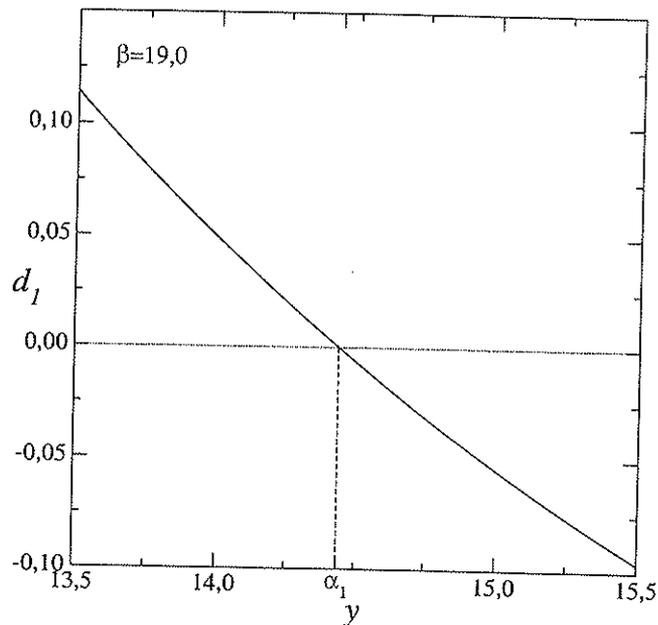
$$S = (x_S, y_S, z_S) = \left(1, -\frac{X+Z}{Y}, 1\right)$$

Escolhendo como  $\vec{v}_Q = (1, 0, 0)$ , que é um vetor perpendicular a  $U_+$ , a equação (7.2) passa ser dado por

$$d_n = \frac{y_{SP_n} + Z z_{SP_n}}{\sqrt{1 + Z^2}} \quad (7.4)$$

onde  $y_{SP_n} = y_{P_n} - y_S$  e  $z_{SP_n} = z_{P_n} - z_S$ . As coordenadas de  $P_n = (1, y_{P_n}, z_{P_n})$  dependem da integração do sistema.

A determinação das órbitas homoclínicas é um processo semi analítico. A linha  $L_{0+}$  é determinada analiticamente, mas a evolução do sistema é calculada por um

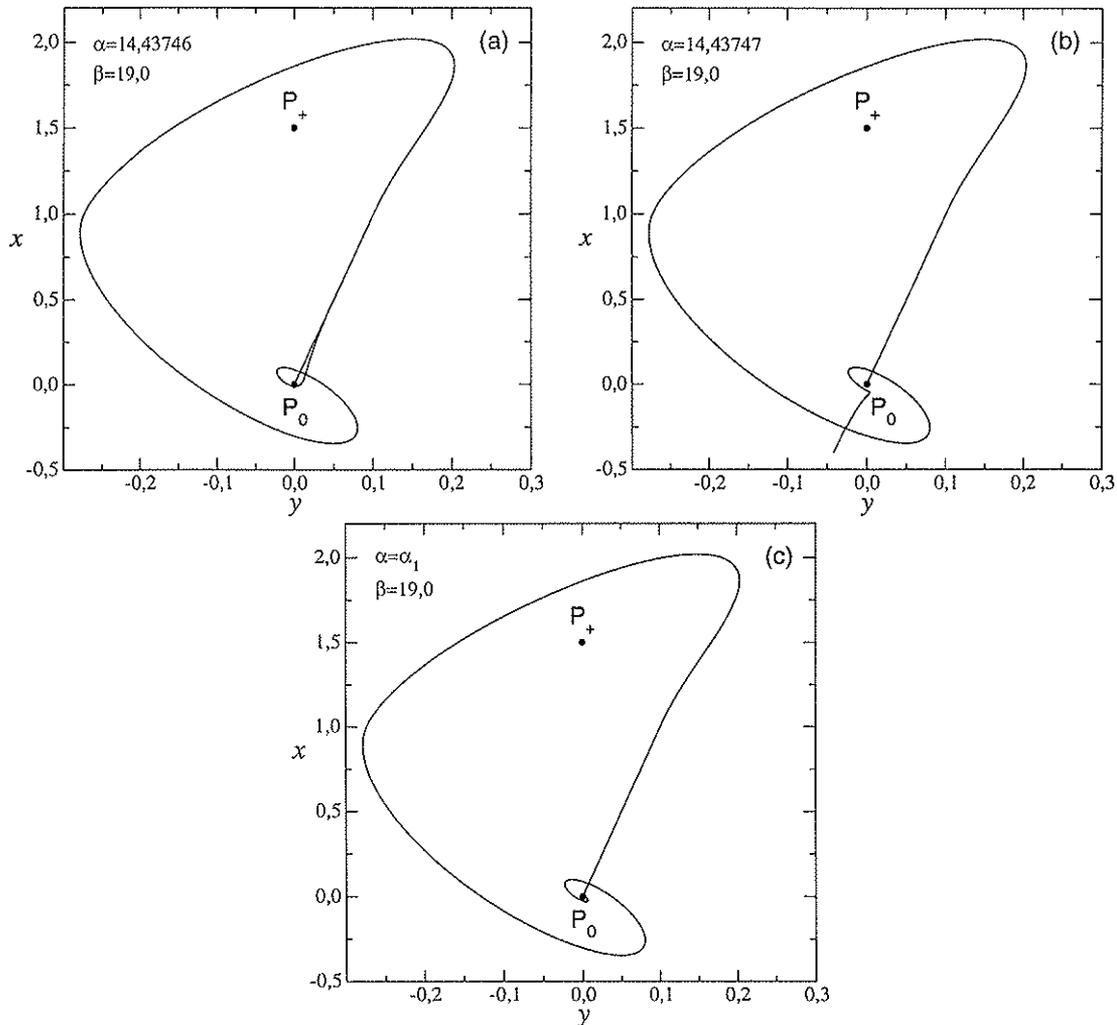


**Figura 7.2:** Curva da distância  $d_1$  em função de  $\alpha$ , com  $\beta = 19,0$  fixo.  $\alpha_1$  representa o valor do parâmetro em que ocorre a órbita homoclínica de ordem um ( $H_1$ ).

método numérico. Assim, por mais preciso que seja a determinação das coordenadas de  $P_n$  em que  $d_n = 0$ , a trajetória nunca convergirá infinitamente para o ponto fixo, pois a integração do sistema não é exata, e cada ponto determinado depende do anterior, o que colabora para que a trajetória se desvie cada vez mais da variedade. Portanto, o parâmetro que resulta em  $d_n = 0$  não é necessariamente aquele que resultará na máxima aproximação da órbita ao ponto fixo, sendo necessário para isso uma correção.

Este método de obtenção de órbita homoclínica consiste em duas partes. Primeiro fixamos o parâmetro  $\beta$ , variamos o parâmetro  $\alpha$  e medimos a distância  $d_n$  até que ela sofra uma mudança de sinal. Com isso determinamos dois valores de  $\alpha$  entre os quais está o valor  $\alpha_n$  do parâmetro em que ocorre a órbita homoclínica de ordem  $n$ . A figura 7.2 mostra o resultado desta primeira etapa para a determinação de uma órbita homoclínica de ordem  $n = 1$  ( $H_1$ ). Onde  $\beta = 19,0$  está fixo e  $\alpha_1$  está entre 14,42 e 14,44. Portanto há uma imprecisão do parâmetro em torno de  $\Delta\alpha = 0,02$ . A distância medida para  $\alpha = 14,42$  é de  $d_1 = 0,0018$  e para  $\alpha = 14,44$ ,  $d_1 = -0,0003$ .

Em seguida, sabendo que o valor de  $\alpha_n$  está entre  $\alpha$  e  $\alpha + \Delta\alpha$ , fazemos uso da seguinte propriedade do sistema, para valores positivos da distância  $d_n$  a trajetória se



**Figura 7.3:** Trajetórias partindo da variedade  $W^U(P_0)$  na vizinhança de  $P_0$  (a) A trajetória se aproxima de  $P_0$  e diverge em direção a  $D_+$  ( $d_1 > 0$  e  $\alpha < \alpha_1$ ). (b) A trajetória se aproxima de  $P_0$  e diverge em direção a  $D_-$  ( $d_1 < 0$  e  $\alpha > \alpha_1$ ). (c) A trajetória forma uma órbita homoclínica de ordem um ( $d_1 \approx 0$  e  $\alpha = \alpha_1$ ).

aproxima de  $P_0$  e, em seguida, diverge para a região do domínio  $D_+$ , onde se encontra  $P_+$ , (figura 7.3(a)). Se  $d_n < 0$  a divergência ocorre em direção da região de  $D_-$  (figura 7.3(b)), onde se encontra  $P_-$ . Através desse comportamento vamos nos aproximando do valor de  $\alpha_n$  medindo  $\delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , a maior aproximação da trajetória ao ponto fixo  $P_0$ . O valor de  $\delta$  determina a precisão da órbita homoclínica formada. Para os casos tratados nesta seção, consideramos  $\delta = 10^{-5}$  suficiente. A figura 7.3(c) mostra a órbita homoclínica de ordem um com  $\delta = 10^{-5}$  e  $\alpha' = 14,43746643008159$ . O parâmetro exato  $\alpha_1$  está entre  $\alpha'$  e  $\alpha' + \Delta\alpha'$ , onde  $\Delta\alpha' = 10^{-14}$ . Assim, nós

consideramos  $\alpha_1 = \alpha'$ . Note que esta sintonia do parâmetro  $\alpha$  permitiu que a precisão aumentasse de  $\Delta\alpha = 0,02$  para  $\Delta\alpha' = 10^{-14}$ .

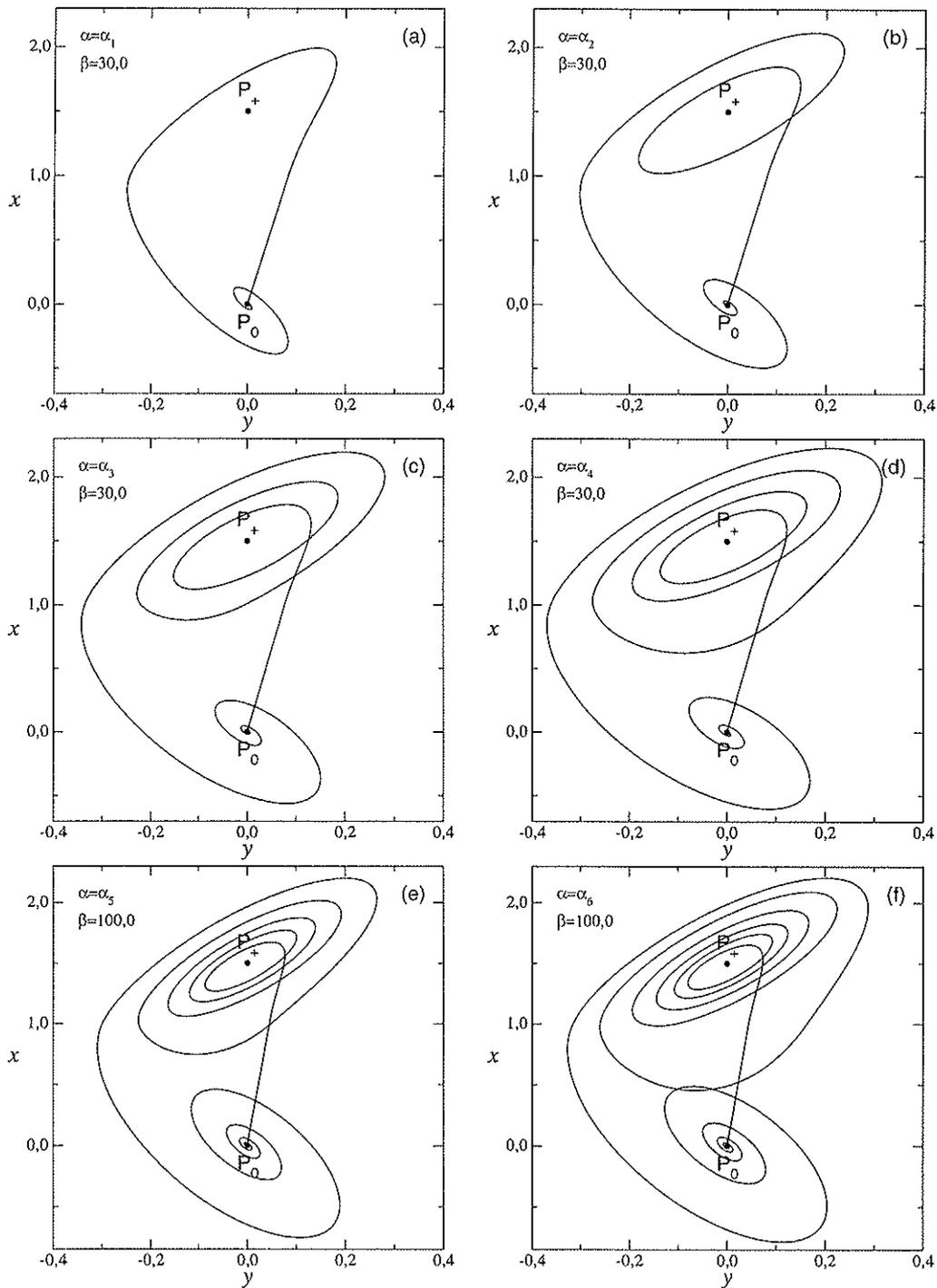
Assim, uma órbita homoclínica existe se as seguintes condições forem satisfeitas [45]:

- I Existem parâmetros  $\alpha$  e  $\Delta\alpha \in \mathbb{R}$  tais que duas trajetórias, com parâmetros  $\alpha$  e  $\alpha + \Delta\alpha$  (ou  $\alpha - \Delta\alpha$ ) partindo da vizinhança de  $P_0$ , permaneçam a uma distância máxima  $\epsilon$  uma da outra até que alcancem o ponto  $P_n$ .
- II Os parâmetros  $\alpha$  e  $\Delta\alpha$  são tais que  $P_n(\alpha)$  está posicionado dentro de uma faixa  $T$  (sendo  $T$  uma faixa de largura  $\epsilon$  centrada em  $L_{0+}$ ) com  $d_n > 0$  e  $P_n(\alpha + \Delta\alpha)$  (ou  $P_n(\alpha - \Delta\alpha)$ ), com  $d_n < 0$ , para  $|d_n| \leq \epsilon/2$ .
- III Existe um parâmetro  $\alpha' \in [\alpha, \alpha + \Delta\alpha]$  (ou  $\alpha' \in [\alpha, \alpha - \Delta\alpha]$ ) tal que a trajetória que parte de  $P_n(\alpha')$  alcança uma  $\delta$  vizinhança de  $P_0$  e vai para  $D_+$  para  $t \rightarrow +\infty$ . E existe também  $\Delta\alpha' \in \mathbb{R}$  tal que  $P_n(\alpha' + \Delta\alpha')$  (ou  $P_n(\alpha' - \Delta\alpha')$ ) vai para  $D_-$  para  $t \rightarrow +\infty$ .

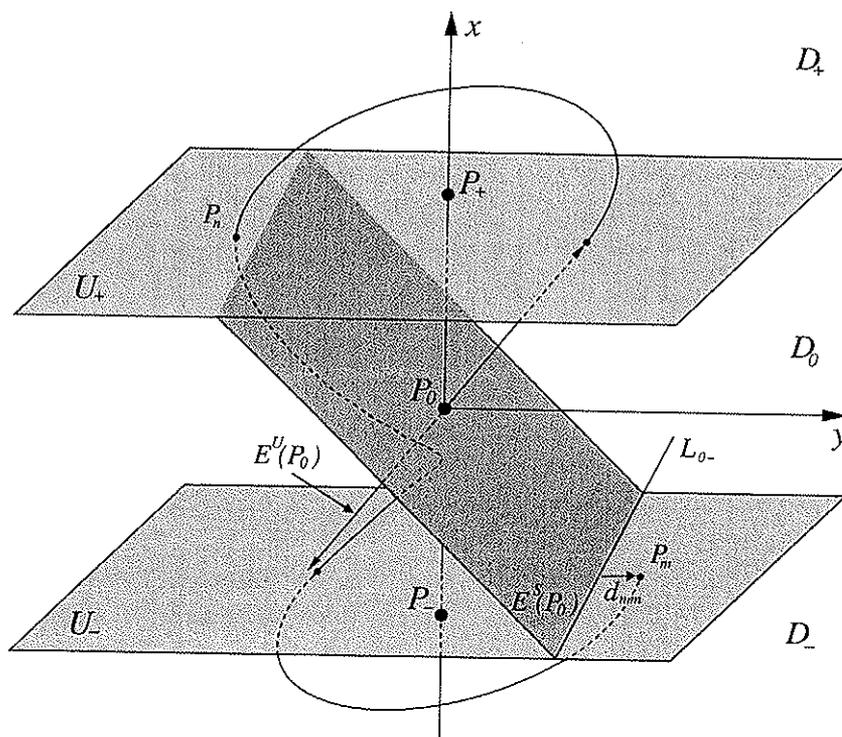
Se as condições I – III forem satisfeitas, então  $|\alpha' - \alpha_n| \ll |\alpha - \alpha_n|$  e  $\Delta\alpha' \ll \Delta\alpha$ , onde  $\alpha_n$  é o valor exato de  $\alpha$  que forma uma órbita homoclínica, e então podemos concluir que essa órbita existe em  $\alpha_n$  dentro do intervalo  $[\alpha' + \Delta\alpha']$  (ou  $[\alpha' - \Delta\alpha']$ ).

A condição II é uma sintonia preliminar do parâmetro  $\alpha$  que permite estimar o parâmetro  $\alpha'$ , e a condição III é a sintonia fina do parâmetro  $\alpha$  que permite que estimar o parâmetro  $\alpha_n$ . Essa condição está baseada na instabilidade estrutural da órbita homoclínica, como mostrado na figura 7.3, i. e., variações arbitrariamente pequenas de  $\alpha$  mudam completamente a trajetória que partiu de  $P_n$ .

A figura 7.4 mostra órbitas homoclínicas determinadas com o procedimento aqui descrito. Todas apresentam condição inicial na variedade instável  $W^S(P_0)$  distantes de  $10^{-2}$  do ponto fixo  $P_0$ , o passo de integração usado é de  $d\tau = 5 \times 10^{-3}$  com precisão  $\Delta\alpha' = 10^{-13}$  de  $\alpha_n$ , mas, como neste caso estamos apenas mostrando resultados do método, apresentaremos o valor de  $\alpha_n$  com seis casas decimais, o que já é suficiente para ter uma estimativa do seu valor. De (a) a (d),  $\beta = 30,0$  e, em (e) e (f),  $\beta = 100,0$ . Em (a) está a órbita homoclínica de ordem um ( $H_1$ ) em  $\alpha_1 = 22,298546$ , em (b) está  $H_2$  em  $\alpha_2 = 18,065924$ , em (c) está  $H_3$  em  $\alpha_3 = 16,196541$ , em (d) está  $H_4$  em  $\alpha_4 = 15,247382$ , em (e) está  $H_5$  em  $\alpha_5 = 37,996929$  e em (f) está  $H_6$  em  $\alpha_6 = 36,069044$ .



**Figura 7.4:** (a) Órbita homoclínica de ordem um ( $H_1$ ) em  $\alpha_1 = 22,298546$ . (b)  $H_2$  em  $\alpha_2 = 18,065924$ . (c)  $H_3$  em  $\alpha_3 = 16,196541$ . (d)  $H_4$  em  $\alpha_4 = 15,247382$ . (e)  $H_5$  em  $\alpha_5 = 37,996929$ . (f)  $H_6$  em  $\alpha_6 = 36,069044$ .

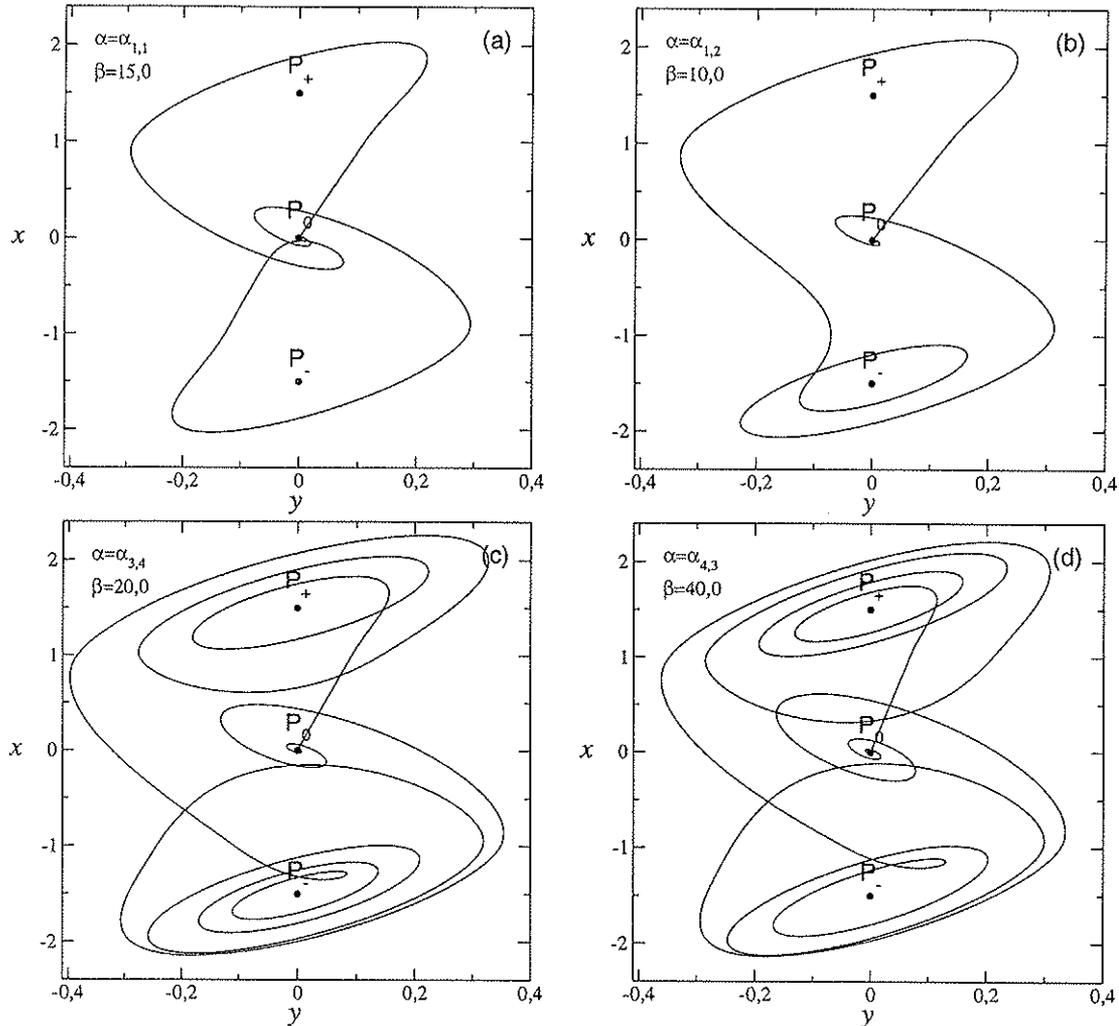
Órbitas Homoclínicas tipo  $H_{n,m}$ 

**Figura 7.5:** Esquema do método de obtenção de órbitas homoclínicas do tipo  $H_{n,m}$ .  $P_n$  é o ponto onde a variedade instável  $W^U(P_0)$  cruza a fronteira  $U_+$  e  $P_m$  é o ponto onde cruza  $U_-$ .  $L_{0-} = E^S(P_0) \cap U_-$  e  $d_{n,m}$  é a distância entre  $P_m$  e  $L_{0-}$ . A órbita homoclínica  $H_{n,m}$  está determinada quando  $d_{n,m} = 0$ .

Todos os tipos de órbitas homoclínicas até aqui considerados, implicam necessariamente que todas as vezes que a trajetória cruzar  $U_+$  deve estar a uma distância  $d > 0$  em relação à reta  $L_{0+}$ . Mas existem outros tipos de órbitas em que a trajetória pode cruzar  $U_+$ , após ter dado  $n$  revoluções em torno de  $P_+$ , com  $d < 0$ . Nesse caso, a trajetória aproxima-se de  $P_0$ , atraída pelo seu subespaço estável, e visita o domínio  $D_-$  por influência do seu subespaço instável. Aproxima-se do ponto fixo  $P_-$ , devido ao subespaço estável  $E^S(P_-)$ , contorna-o um determinado número  $m$  de vezes e incide no subespaço estável  $E^S(P_0)$  através da linha  $L_{0-}$  sendo conduzido à  $P_0$ .

Para determinar esse tipo de órbita, varia-se um dos parâmetros  $\alpha$  ou  $\beta$  no sentido de minimizar distância  $d_{n,m}$  entre a linha  $L_{0-}$  e o ponto  $P_m$ , onde  $P_m$  é o ponto onde a trajetória cruza o plano  $U_-$ . A figura 7.5 ilustra a formação dessa órbita. Neste caso  $d_{n,m}$  é positivo se  $L_{0-}$  estiver entre  $P_m$  e o eixo  $x$  e negativo se  $P_m$  estiver entre o eixo  $x$  e  $L_{0-}$ . A distância  $d_{n,m}$  é calculada de forma similar à

distância  $d_n$  das órbitas homoclínicas tipo  $H_n$ .



**Figura 7.6:** (a) Órbita homoclínica  $H_{1,1}$  em  $\alpha_{1,1} = 11,601180$ . (b)  $H_{1,4}$  em  $\alpha_{1,2} = 8,172096$ . (c)  $H_{3,4}$  em  $\alpha_{3,4} = 11,977307$  (d)  $H_{4,3}$  em  $\alpha_{4,3} = 19,846019$ .

A combinação do número de revoluções da órbita homoclínica em torno de  $P_+$  e de  $P_-$  caracteriza as distintas famílias de órbitas homoclínicas. Dessa forma usaremos a notação  $H_{n,m}$  para distinguir as diversas órbitas homoclínicas. O índice  $n$  indica o número de revoluções da órbita em torno de  $P_+$ , e o  $m$ , em torno de  $P_-$ . Para  $m = 0$  a órbita habita apenas o domínio  $D_+$ , além do  $D_0$ . Por isso classificaremos esses tipos de órbitas como de classe 1. Para  $n \neq 0$ , as órbitas visitam, na seqüência,  $D_+ \rightarrow D_-$ , e são de classe 2. Seguindo o mesmo raciocínio, podemos concluir que existem órbitas homoclínicas que habitam, na seqüência,  $D_+ \rightarrow D_- \rightarrow D_+$  para

depois convergir para  $P_0$ , através de  $L_{0+}$ . Essas são órbita homoclínicas de classe 3. Dessa forma existem uma infinidade de tipos de órbitas homoclínicas de classes superiores, além do que em cada classe existe uma quantidade imensa de ordens de órbitas homoclínicas. Nós nos limitaremos a estudar órbitas homoclínicas de classe 1 e 2.

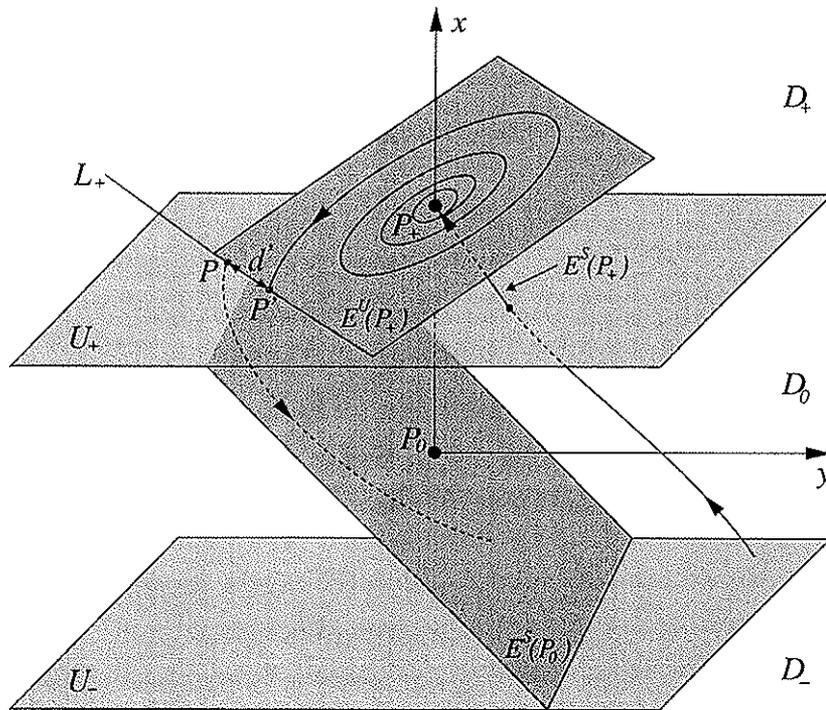
A figura 7.6 apresenta quatro órbitas homoclínicas tipo  $H_{n,m}$ . Em (a) está a órbita homoclínica  $H_{1,1}$  em  $\alpha_{1,1} = 11,601180$  e  $\beta = 15,0$ , em (b) está  $H_{1,2}$  em  $\alpha_{1,2} = 8,172096$  e  $\beta = 10,0$ , em (c) está  $H_{3,4}$  em  $\alpha_{3,4} = 11,977307$  e  $\beta = 20,0$  e em (d) está  $H_{4,3}$  em  $\alpha_{4,3} = 19,846019$  e  $\beta = 40,0$ .

### Órbitas Homoclínicas no Ponto Fixo $P_+$

No ponto fixo  $P_+$  os subespaços tem geometria inversa a dos de  $P_0$ , como mostrado na figura 3.2. Isso introduz uma dificuldade que é a determinação da condição inicial na variedade instável, já que ela é um plano. Para contornar esse problema, e usarmos o método descrito para obtenção de órbitas homoclínicas tipo  $H_n$ , calculamos uma condição inicial próxima ao ponto fixo  $P_+$  no subespaço estável, que é uma reta, e integramos o sistema numericamente com o tempo negativo. Assim, a trajetória sai do domínio  $D_+$  para  $D_0$  pela variedade estável de  $P_+$  e ao retornar de  $D_0$  para  $D_+$ , cruza o plano  $U_+$  em um ponto  $P$  a uma distância  $d$  da linha  $L_+$ , que é formada pela intersecção entre o subespaço instável de  $P_+$  e o plano  $U_+$ . A órbita homoclínica estará determinada para o par de parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que resultar em  $d = 0$  com  $P$  pertencendo a  $W^U(P_+)$  (ver figura 7.7).

Se, a partir do ponto  $P$ , a trajetória continuar sendo evoluída num tempo negativo, divergirá rapidamente do plano do subespaço instável. Isso acontece porque, para uma integração com tempo negativo, a propriedade dos subespaços inverte, o subespaço instável atrai a trajetória para o ponto fixo e o estável o afasta. Como, para o ponto fixo  $P_+$  o autovalor  $\lambda$  associado ao subespaço estável é muito maior que a parte real  $\rho$  do autovalor imaginário associado ao instável, a divergência atua com maior intensidade, para uma evolução no tempo negativo. Dessa forma, para determinar completamente a órbita homoclínica, deve-se incluir mais um passo, no método. A idéia é encontrar uma condição inicial, próximo ao  $P_+$  no subespaço estável, cuja trajetória, integrada no tempo positivo, encontre com o ponto  $P$  sobre a linha  $L_+$ . A figura 7.7 mostra esquematicamente como encontrar essa condição inicial.

A figura 7.7 apresenta a situação em que os parâmetros da órbita homoclínica já



**Figura 7.7:** Esquema para obtenção de órbitas homoclínicas de  $P_+$ .  $P$  pertence à variedade estável de  $P_+$ , e está sobre a linha  $L_+ = E^U(P_+) \cap U_+$ .  $P'$  é o ponto para onde convergiu uma trajetória com condição inicial em  $E^U(P_+)$ , nas proximidades de  $P_+$ , e está sobre  $L_+$ .  $d'$  é a distância entre  $P$  e  $P'$ . Quando  $d' = 0$ , a órbita homoclínica de  $P_+$  estará completamente determinada.

foram determinados, ou seja, o ponto  $P$  já está sobre a linha  $L_+$ . Para simplificação da figura, a variedade estável de  $P_+$  está apresentado em duas partes, a que está ligada a  $P_+$  e a que contém o ponto  $P$ . Ela é determinada através da interação, num tempo negativo, de um ponto no subespaço estável nas proximidades de  $P_+$ . Saindo das proximidades do ponto fixo, está uma trajetória sobre o plano do subespaço  $E^U(P_+)$  que cruza a linha  $L_+$  no ponto  $P'$  distante  $d'$  de  $P$ . A condição inicial dessa trajetória pertence a uma circunferência desenhada em torno de  $P_+$ , sobre o subespaço  $E^S(P_+)$ , de raio  $r$  arbitrariamente pequeno.

As condições iniciais, sobre a circunferência, podem ser calculadas no sistema de coordenadas  $S'$  definida na seção 5.2 com  $x' = r \cos(\theta)$  e  $y' = r \sin(\theta)$  e em seguida mudá-las para o sistema de coordenadas  $S$  que estamos usando. Dada a evolução de uma trajetória, a distância  $d'$  permite identificar em que sentido da circunferência devemos procurar a próxima condição inicial, até que  $P'$  coincida com  $P$ , quando a órbita homoclínica está completamente determinada.

O ponto fixo  $P_0$  apresenta situações semelhantes. Para parâmetros muito eleva-

dos, o autovalor  $\lambda$  associado ao seu subespaço instável é muito maior que a parte real  $\rho$  do autovalor imaginário associado ao seu subespaço estável, o que dificulta a aproximação da trajetória ao ponto fixo  $P_0$ . Para determinarmos completamente a órbita homoclínica, usa-se o mesmo procedimento descrito para obtenção das órbitas em  $P_+$ . A Fig. 7.8 mostra em (a) uma órbita homoclínica de  $P_+$  e em (b) outra de  $P_0$ , ambas determinadas por esse procedimento.

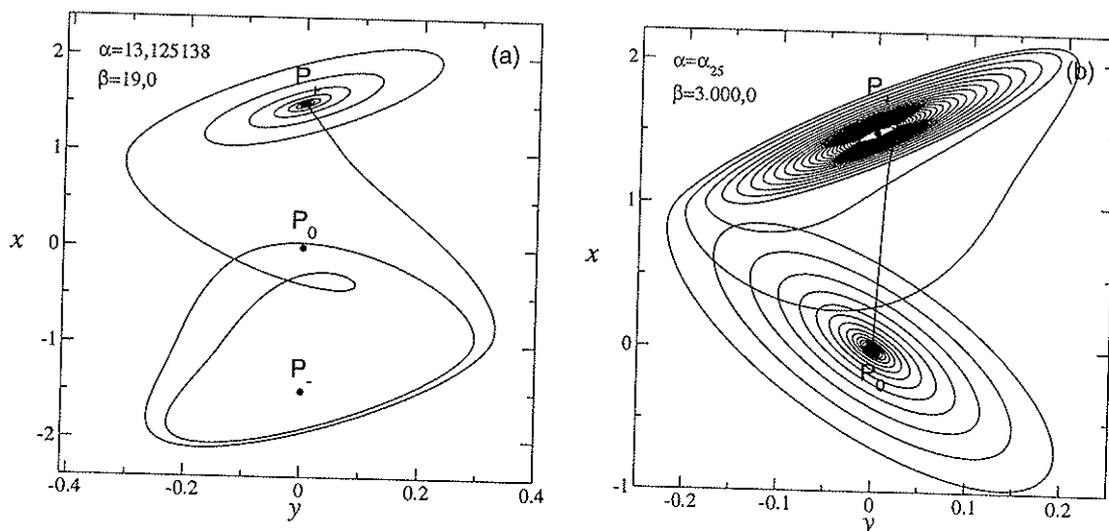


Figura 7.8: (a) Órbita homoclínica do ponto fixo  $P_+$ . (b) Órbita homoclínica  $H_{25}$  em  $\alpha_{25}=376,95172$ .

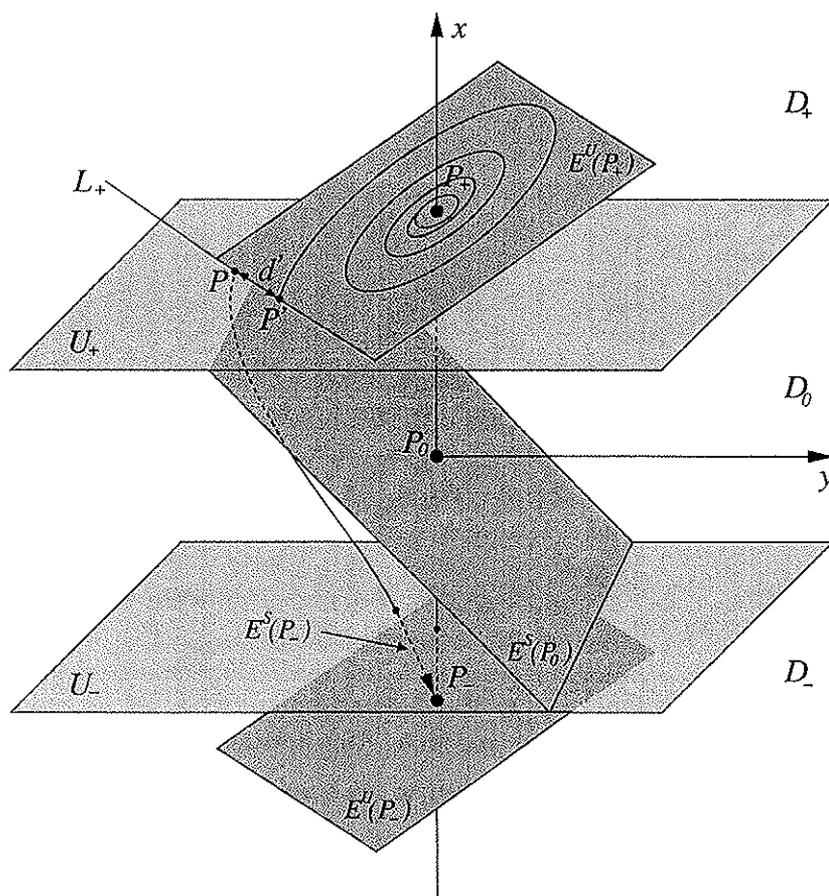
### 7.1.2 Órbitas Heteroclínicas

A órbita heteroclínica é um conjunto invariante que une dois ou mais pontos fixos de um sistema formando um ciclo fechado. Para que isso ocorra, é necessário que a variedade instável de um ponto fixo se una com a variedade estável de outro ponto fixo e a instável deste com a estável de um terceiro, envolvendo vários pontos fixos com essa mesma formação, até que a variedade instável do último ponto fixo se una com a estável do primeiro.

No sistema Double Scroll, a variedade instável de  $P_0$  e a estável de  $P_+$  são unidimensionais. A probabilidade de que uma trajetória com condição inicial em  $E^U(P_0)$  convirja assintoticamente para  $P_+$  é praticamente nula, excluindo a possibilidade de existir uma órbita heteroclínica que envolva o ponto fixo  $P_0$ . Assim, estudaremos aquelas que envolvem os pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$ .

As órbita heteroclínica no sistema Double Scroll são determinadas de forma similar ao método usado para as órbitas homoclínicas de  $P_+$ . Primeiramente, vamos

encontrar os parâmetros em que ela ocorre. Para isso, determina-se analiticamente uma condição inicial no subespaço estável de  $P_-$ , próximo a  $P_-$ , evolui-se a trajetória num tempo negativo até que ela interseccione o plano  $U_+$  num ponto  $P$ . Calcula-se a distância  $d$  entre  $P$  e  $L_+$  e varia-se um dos parâmetros  $\alpha$  ou  $\beta$  no sentido de minimizar  $d$ . O par de parâmetros, para os quais  $d = 0$  com  $P$  pertencendo à  $W^S(P_+)$ , determina a existência da órbita heteroclínica.



**Figura 7.9:** Esquema do método para obtenção de uma órbita heteroclínica envolvendo  $P_+$  e  $P_-$ . O ponto  $P$  pertence à variedade estável de  $P_-$  e o ponto  $P'$ , à variedade instável de  $P_+$ .

Determinados os parâmetros da órbita heteroclínica, pelos mesmos motivos apresentados na determinação das órbitas homoclínicas de  $P_+$ , deve-se buscar uma condição inicial nas proximidades de  $P_+$ , no subespaço  $E^U(P_+)$ , cuja evolução leve ao ponto  $P$ , para encontrar o conjunto completo da órbita heteroclínica. A figura 7.9 mostra a situação em que os parâmetros da órbita já foram encontrados, mas a trajetória que leva o ponto  $P$  até o ponto fixo, não. O procedimento para determiná-la

é exatamente o mesmo descrito para a órbita homoclínica de  $P_+$ .

Após ter-se determinado toda a trajetória que leva uma condição inicial nas proximidades de  $P_+$  para  $P_-$ , aplica-se a propriedade de simetria do sistema  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$  e obtém-se a trajetória que leva uma condição inicial nas proximidades de  $P_-$  para  $P_+$ . A figura 7.10 mostra uma órbita heteroclínica envolvendo os pontos fixos  $P_+$  e  $P_-$ , do circuito Double Scroll, obtida por este procedimento.

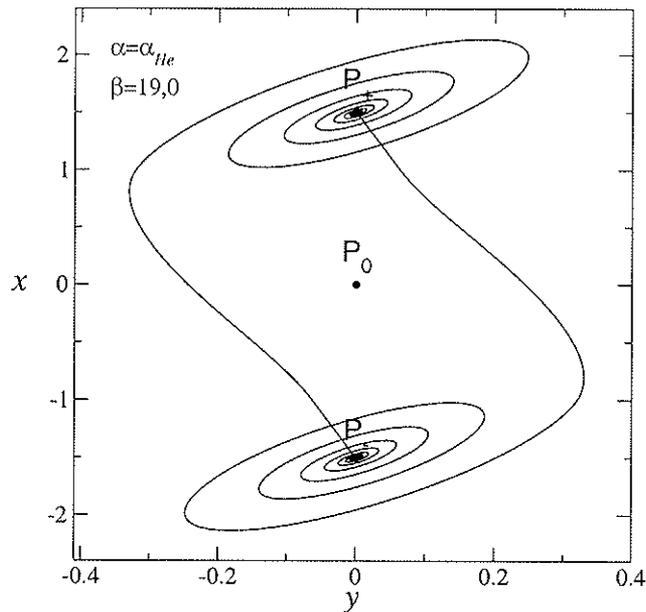


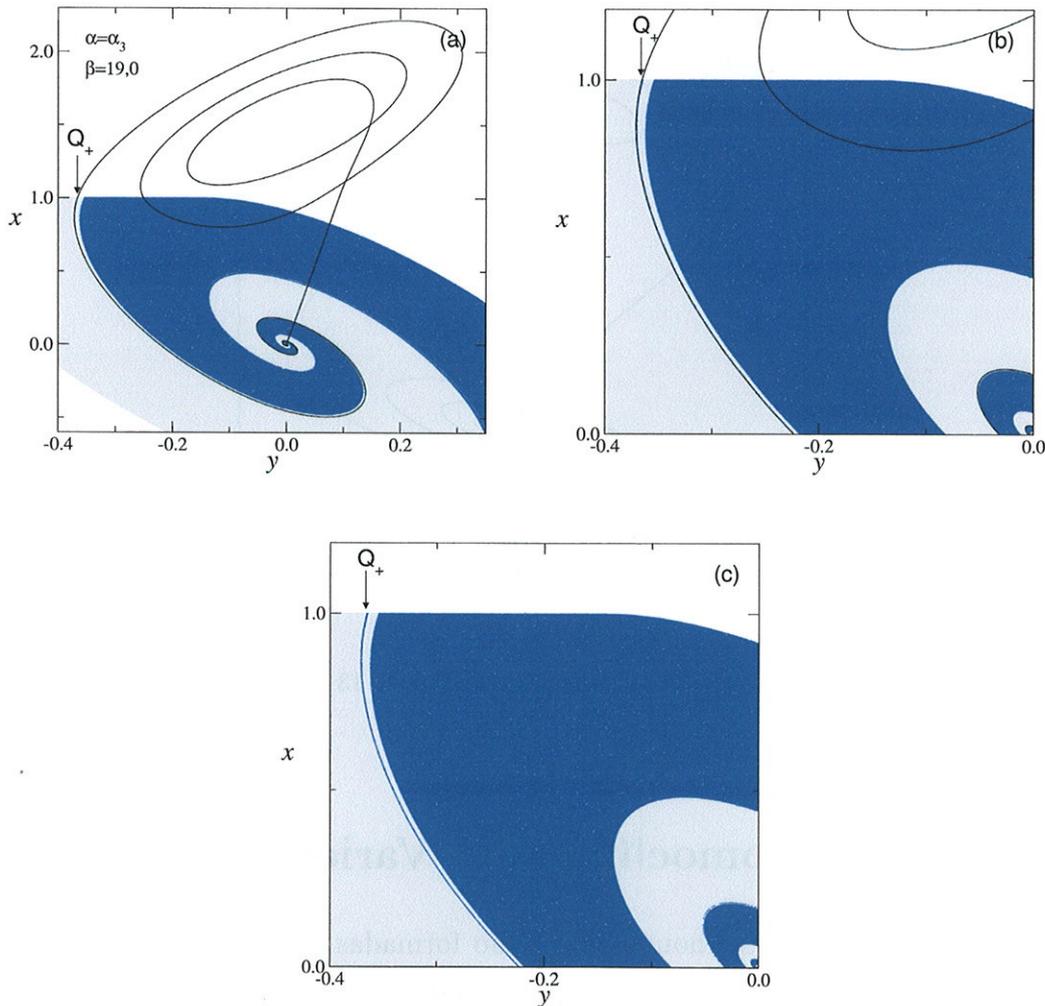
Figura 7.10: Órbita heteroclínica.  $\alpha_{He} = 13,132624$ .

## 7.2 Órbitas Homoclínicas $\times$ Variedades

Está claro que as órbitas homoclínicas são formadas pela fusão das variedades instável e estável de um ponto fixo, e podem ser descritas através de uma única trajetória. Mas, em sistemas tridimensionais como o tratado aqui, a variedade associada ao subespaço bidimensional contém, em seu conjunto, infinitas trajetórias distintas, e apenas uma delas fará parte da órbita homoclínica. A questão que queremos esclarecer nesta seção é de que forma está relacionada o restante do conjunto que forma essa variedade com a órbita homoclínica.

Na seção 6.2.2 do capítulo 6, mostramos que a variedade estável do ponto fixo  $P_0$  está conectada com duas regiões,  $x_{+\infty}$  e  $x_{-\infty}$ , bem definidas no infinito (veja a

figura 6.9), dividindo a variedade em dois subconjuntos,  $W_+^S(P_0)$  e  $W_-^S(P_0)$ , respectivamente. Esses subconjuntos encontram-se no subespaço estável de  $P_0$  formando uma fronteira a qual pertenceria a um conjunto caótico compacto conforme discutido na seção 6.2.3. O argumento dado foi que a fronteira entre os subconjuntos não está conectada nem com  $x_{+\infty}$  nem com  $x_{-\infty}$ , então, provavelmente está numa região entre os pontos fixos do sistema.



**Figura 7.11:** (a) Órbita homoclínica  $H_3$  e os subconjuntos  $W_+^S(P_0)$  (cinza) e  $W_-^S(P_0)$  (azul). (b) e (c) são uma ampliação de (a) com e sem a órbita homoclínica, respectivamente.  $Q_+ = E^S(P_0) \cap E^U(P_+)$  e  $\alpha_3 = 11,174540$ .

A órbita homoclínica é um conjunto que pertence a variedade estável de  $P_0$

que não está conectada com nenhuma região no infinito. A figura 7.11 mostra que a fronteira que separa os subconjuntos  $W_+^S(P_0)$  e  $W_-^S(P_0)$  no subespaço estável de  $P_0$  pode pertencer também a uma órbita homoclínica. Em (a) está a órbita homoclínica  $H_3$  e os subconjuntos  $W_+^S(P_0)$  (cinza) e  $W_-^S(P_0)$  (azul) na região em que  $E^S(P_0) \cap W^S(P_0)$ . A seta indica o ponto  $Q_+ = E^S(P_0) \cap E^U(P_+)$ . Como discutido no capítulo 4, as trajetórias são conduzidas rapidamente para as proximidades do subespaço  $E^U(P_+)$ , assim, uma órbita homoclínica de  $P_0$  deve interseccionar  $E^S(P_0)$  numa região muito próxima de  $Q_+$ , como mostrado a todo instante na figura 7.11. Em (b) e (c) mostramos uma ampliação de (a) com e sem a órbita homoclínica, respectivamente, para mostrar com mais clareza que a órbita habita a fronteira formada por  $W_+^S(P_0)$  e  $W_-^S(P_0)$ .

Para a órbita homoclínica de  $P_+$ , não existe nenhuma formação especial do conjunto da variedade instável (que está associada ao subespaço bidimensional). Isso porque essa órbita se forma na região do espaço dos parâmetros onde o sistema converge para o atrator no infinito.



## Capítulo 8

# Bifurcações de Órbitas Homoclínicas

Chamamos de bifurcação homoclínica a mudança de comportamento de um sistema dinâmico associado ao surgimento de uma órbita homoclínica [72]. Em sistemas bidimensionais estudados por Andronov, Leontovich, Gordon e Maier [10], a órbita homoclínica causa o surgimento ou o desaparecimento de uma órbita periódica estável. No sistema de Lorenz, a órbita homoclínica está associada à transição de comportamentos periódicos e ao surgimento de ferraduras, muito embora, segundo Yorke [12] e Kaplan e Yorke [11], o caos resultante não seja atrativo mas transitente. Em sistemas autônomos, com pontos fixos tipo sela e dimensão igual ou superior a três, a presença dessas órbitas pode implicar na existência de comportamento caótico, ferraduras, e uma infinidade de bifurcações vizinhas (no espaço dos parâmetros), dependendo dos valores dos autovalores da matriz Jacobiana do fluxo calculados no ponto fixo ao qual a órbita homoclínica está associada [73]. No sistema de Rössler, visto na seção 5.1, o surgimento de uma órbita homoclínica é sinal de transição entre atratores caóticos [9].

O simples surgimento de uma órbita homoclínica é, também, chamado de bifurcação [74]. Nas seções anteriores, vimos vários tipos de órbitas homoclínicas. Existe uma diversidade enorme de outras espalhadas no espaço dos parâmetros. Arneodo identificou órbitas complexas em dois sistemas estudados [4], e propôs outro sistema estudado por Glendinning e Sparrow [31], onde se formam outros tipos distintos de órbitas. No circuito Double Scroll, Freire [75] analisa órbitas homoclínicas característicos de sistemas com simetria, e Kahan apresenta famílias de órbitas homoclínicas [68]. Todas estas órbitas são chamadas de órbitas homoclínicas

de Shilnikov porque estes sistemas atendem ao teorema de Shilnikov.

Uma grande quantidade de estudos, como os de Evans [76], Gaspard [32], Glendinning e Sparrow [31] e Tresser [77], mostraram que a existência de uma órbita homoclínica de Shilnikov  $H_1$  (primária) implica na existência de infinitas  $H_2$  (subsidiárias). Em [32], Gaspard mostrou que  $H_2$  se acumula em  $H_1$  segundo uma lei de escala no espaço dos parâmetros. Posteriormente, Wang [78], Feroe [33] e Gonchenko [35] estenderam esses trabalhos mostrando que a primária  $H_1$  implica na existência de subsidiárias  $H_n$ , com  $n$  arbitrariamente grande. Além do mais, em [34], Gonchenko mostrou que uma completa descrição da organização dessas subsidiárias é impossível de ser obtida.

Dentro deste contexto, neste capítulo vamos buscar uma compreensão mais geral sobre a organização das órbitas homoclínicas de Shilnikov. Mostraremos que as subsidiárias  $H_n$  também sofrem acumulações no espaço dos parâmetros e estão organizadas segundo uma lei de escala deduzida à partir da análise de codimensão 1 da classe de sistemas dinâmicos onde se aplica o teorema de Shilnikov. Um outro ponto importante neste capítulo é a verificação da existência de outras órbitas homoclínicas primárias. Até onde foi possível averiguar, não há na literatura estudos que envolvam órbitas primárias de ordem superior a 1. Diante disso, a teoria de bifurcações sofreu ligeiras adaptações de forma a incluir estas órbitas e obter resultados gerais. A partir destes resultados, associado a uma análise de codimensão 2 e de observações do espaço dos parâmetros do sistema Double Scroll, identificaremos uma estrutura homoclínica característica que representa a menor organização de bifurcações homoclínicas. Todos esses resultados teóricos são confirmados pelas observações do sistema Double Scroll e descrevem todo o seu cenário de bifurcações, no espaço dos parâmetros.

## 8.1 Análise Teórica

O teorema que vamos enunciar, a seguir, pode ser dividido em duas partes. A primeira, apresentada na seção 8.1.1, está relacionada à existência de infinitos tipos distintos de órbitas homoclínicas, cada qual composta de infinitas órbitas homoclínicas similares. A segunda parte descreve como essas órbitas estão organizadas segundo uma lei de escala, cuja demonstração encontra-se na seção 8.1.2. A demonstração de que o teorema pode ser aplicado ao sistema Double Scroll está apresentada na seção 8.1.3. Esta análise é de codimensão 1, mas é válida para sistemas de codimensão maior, como o Double Scroll, conforme está discutido no final da seção 8.1.2

**Teorema:** Seja o sistema de equações diferenciais  $C^2$  em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \rho x - \omega y + P(x, y, z; \mu) \\ \dot{y} &= \omega x + \rho y + Q(x, y, z; \mu) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z; \mu) \end{aligned} \tag{8.1}$$

com autovalores  $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$  e  $\lambda_3 = \lambda$  onde  $\lambda\rho < 0$ ,  $|\rho/\lambda| < 1$  e  $\omega \neq 0$ , e funções  $P$ ,  $Q$  e  $R$  analíticas tais que  $\dot{P}(0, 0, 0; \mu) = \dot{Q}(0, 0, 0; \mu) = \dot{R}(0, 0, 0; \mu) = 0$ , sendo  $\mu$  o parâmetro de controle. Então, se existir uma órbita homoclínica primária  $H_j$ , de ordem  $j$ , existirá um número infinito de distintas órbitas homoclínicas subsidiárias  $H_{nj}$ , de ordem  $nj$  e próximas à  $H_j$ , cujo parâmetro de controle  $\mu_{nj}^i$ , da  $i$ ésima subsidiária  $H_{nj}^i$ , obedece à seguinte lei de escala [46]:

$$\frac{\mu_{nj}^i - \mu_{nj}^{i+1}}{\mu_{nj}^{i-1} - \mu_{nj}^i} = e^{-\frac{\lambda\pi}{\omega}}$$

### 8.1.1 Existência de Infinitas Órbitas Homoclínicas

Para demonstrar que as condições impostas pelo teorema anterior implicam na existência de um número infinito de distintas órbitas homoclínicas subsidiárias, considere que o sistema (8.1) apresenta uma órbita homoclínica primária  $H_1$  com  $\lambda_1 = \lambda$  e  $\lambda_{2,3} = -\rho \pm i\omega$  onde  $\lambda, \rho, \omega > 0$  (usamos  $\text{Re}(\lambda_{2,3}) = -\rho$ , com  $\rho > 0$ , para explicitar que a parte real desses autovalores é negativa). Note que se os sinais dos autovalores  $\lambda$  e  $\rho$  forem invertidos, basta inverter o tempo para retornamos à situação atual. Portanto a presente demonstração é também válida para  $\lambda_1 = -\lambda$  e  $\lambda_{2,3} = \rho \mp i\omega$ .

Linearizando o sistema (8.1) em torno do ponto fixo  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  obtém-se

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho & -\omega & 0 \\ \omega & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$

cuja solução é dada por

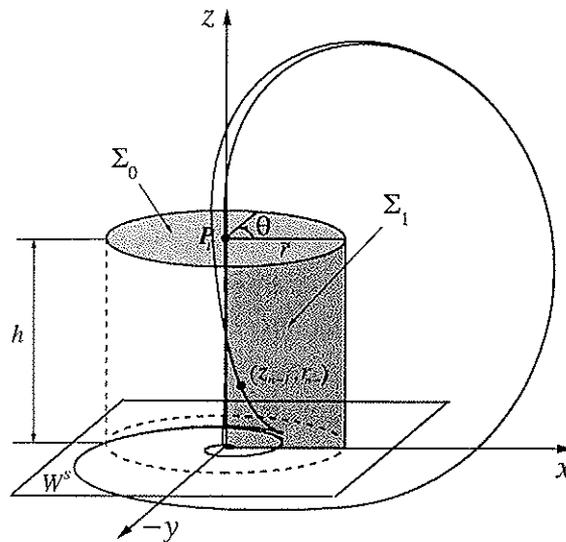
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\rho t}(x_0 \cos \omega t - y_0 \sin \omega t) \\ e^{-\rho t}(x_0 \sin \omega t + y_0 \cos \omega t) \\ z_0 e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{8.3}$$

Definem-se duas superfícies

$$\begin{aligned} \Sigma_0 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < \tilde{r}^2, z = h\} \\ \Sigma_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, 0 < x < \tilde{r}, 0 < z < h\} \end{aligned}$$

inseridas num cilindro centrado no eixo  $z$ , com  $0 < z < h$  e raio  $\tilde{r}$ , conforme representado na figura 8.1, onde o sistema pode ser considerado linear. Assim, a solução do sistema de equações diferenciais (8.3) é válida para qualquer região dentro desse cilindro. O tempo que as trajetórias, com condições iniciais em  $\Sigma_1$ , levam para alcançar  $\Sigma_0$  pode ser determinado através da equação (8.3) correspondente à componente  $z$ .

$$\begin{aligned} h &= z_0 e^{\lambda t} \\ t &= \frac{1}{\lambda} \ln \frac{h}{z_0} \end{aligned} \quad (8.4)$$



**Figura 8.1:** Representação de uma órbita homoclínica subsidiária  $H_2$  do sistema (8.1). O cilindro delimita a região no espaço de fase onde o sistema pode ser considerado linear. O ponto  $P_1 = (0, 0, h)$  representa o último local onde a variedade instável está sob o eixo  $z$ . A variedade estável  $W^s$  é composta pelo plano  $z=0$ , nas proximidades da origem.  $\Sigma_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < \tilde{r}^2, z = h\}$ ,  $\Sigma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, 0 < x < \tilde{r}, 0 < z < h\}$

Considerando que  $e^{-\rho t} = (z_0/h)^{\rho/\lambda}$  e que  $y = 0$  em  $\Sigma_1$ , trajetórias com condições iniciais  $(x_0, y_0, z_0)$  em  $\Sigma_1$  irão atravessar o plano  $\Sigma_0$  nas posições dadas por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(z_0/h)^{\rho/\lambda} \cos \gamma \\ x_0(z_0/h)^{\rho/\lambda} \sin \gamma \\ h \end{pmatrix}, \quad (8.5)$$

onde  $\gamma = \frac{\omega}{\lambda} \ln \frac{h}{z_0}$ . Mudando o sistema de coordenadas cartesianas para as cilíndricas,

obtemos  $\psi^0 : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_0$

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0(z_0/h)^{\rho/\lambda} \\ \gamma \\ h \end{pmatrix}, \quad (8.6)$$

onde  $r_0 = x_0$ .

A ordem é definida pelo número de vezes que a órbita é mapeada de  $\Sigma_0$  para  $\Sigma_1$ . Na Fig. 8.1 apresentamos uma órbita homoclínica de ordem 2 ( $H_2$ ), no sistema de coordenadas normais, com parâmetro de controle  $\mu = \mu_2$ . Essa órbita corresponde ao ponto fixo localizado na origem. O ponto  $P_1$  tem coordenadas  $(0, 0, h)$ . Observe que dentro do cilindro, de acordo com a equação (8.3), a variedade instável coincide com o eixo  $z$  com limite em  $P_1$ , e a variedade estável está no plano composto pelos eixos  $x$  e  $y$ . A nossa intenção é determinar um mapeamento que descreva como as trajetórias se comportam nas proximidades da órbita homoclínica. Para isso, vamos determinar como pontos em  $\Sigma_0$  são mapeadas em  $\Sigma_1$ .

Definindo o mapa  $\psi^1 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$ , dado um parâmetro de controle  $\mu$  e uma condição inicial  $(r, \theta, h)$  em  $\Sigma_0$ , a solução em primeira ordem de  $\psi^1$  é o resultado da sua expansão no polinômio de Taylor de ordem 1 em torno ponto  $(r_{H_1}, \theta_1 = 0, z_1 = 0)$ , primeira intersecção da órbita homoclínica  $H_1$  com a superfície  $\Sigma_1$ , assim,  $r_{H_1}$  é a distância entre esse ponto e o ponto fixo. Dessa forma, as trajetórias deverão se comportar de forma semelhante à órbita homoclínica  $H_1$ , na sua proximidade. Assim, uma condição inicial  $(r_0, \theta_0, z_0 = h)$  em  $\Sigma_0$  é mapeada em  $\Sigma_1$  no ponto  $(r_1, \theta_1 = 0, z_1)$  dado por

$$(r_1, \theta_1, z_1) = (r_{H_1} + a\Delta\mu_1 + br_0 \cos \theta_0 + cr_0 \sin \theta_0, 0, m\Delta\mu_1 + er_0 \cos \theta_0 + fr_0 \sin \theta_0)$$

onde  $a, b, c, e, f$  e  $m$  são constantes associadas ao fluxo, e  $\Delta\mu_1 = \mu - \mu_1$ . Note que para  $\mu = \mu_1$ ,

$$\psi^1(0, 0, h) = (r_{H_1}, 0, 0)$$

é a solução de  $H_1$  nesta representação. Fazendo a seguinte substituição  $b = p \cos \varphi_1$ ,  $c = p \sin \varphi_1$ ,  $e = q \cos \varphi_2$  e  $f = q \sin \varphi_2$ , obtemos  $\psi^1 : \Sigma_0 \rightarrow \Sigma_1$

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{H_1} + a\Delta\mu_1 + pr_0 \cos(\theta_0 + \varphi_1) \\ 0 \\ m\Delta\mu_1 + qr_0 \cos(\theta_0 + \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (8.7)$$

Usando as equações (8.6) e (8.7), i. e., aplicando  $\psi^1\psi^0(r_0, \theta_0 = 0, z_0)$ , obtemos o

mapeamento bidimensional  $\psi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_1$

$$\begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{H_1} + a\Delta\mu_1 + pr_0 \left(\frac{z_0}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos(\gamma + \varphi_1) \\ m\Delta\mu_1 + qr_0 \left(\frac{z_0}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos(\gamma + \varphi_2) \end{pmatrix} \quad (8.8)$$

Para o estudo de órbitas homoclínicas, vamos determinar o ponto em que a variedade instável cruza  $\Sigma_1$  imediatamente após ter cruzado  $\Sigma_0$ . O primeiro cruzamento é dado pela solução de  $\psi^1(P_1) = \psi^1(0, 0, h)$  que, conforme a equação (8.7), resulta em

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{H_1} + a\Delta\mu_1 \\ m\Delta\mu_1 \end{pmatrix},$$

onde foi omitido a coordenada  $\theta$  por ser sempre nula. A partir desse ponto, os demais cruzamentos são obtidos através de repetidas aplicações de  $\psi$ . Assim, o segundo cruzamento é determinado por  $\psi^2(P_1) = \psi\psi^1(P_1)$ , o terceiro por  $\psi^3(P_1) = \psi\psi^2(P_1)$ , e assim por diante. Chamando a  $n$ -ésima iteração de  $\psi^n$ , obtemos  $\psi^n(P_1)$ :

$$\begin{pmatrix} r_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r_{H_1} + a\Delta\mu_1 \\ m\Delta\mu_1 \end{pmatrix}, & n = 1 \\ \begin{pmatrix} r_1 + pr_{n-1} \left(\frac{z_{n-1}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{n-1}}\right) + \varphi_1\right) \\ z_1 + qr_{n-1} \left(\frac{z_{n-1}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{n-1}}\right) + \varphi_2\right) \end{pmatrix}, & n > 1 \end{cases} \quad (8.9)$$

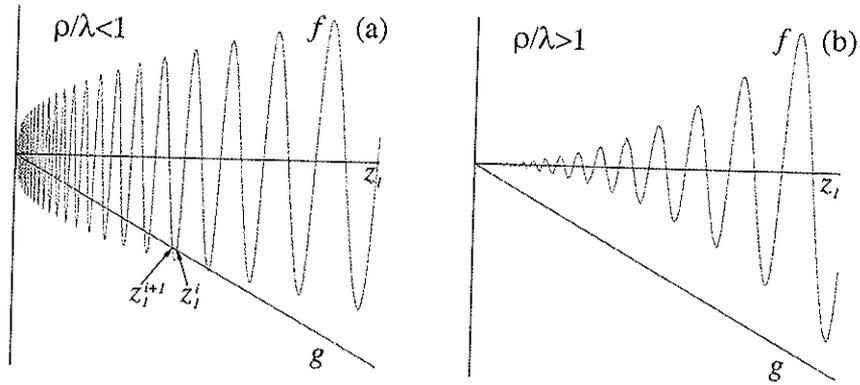
Toda vez que, na equação (8.9), a condição  $z_n=0$  for satisfeita, existirá uma órbita homoclínica  $H_n$ , de ordem  $n$ , com parâmetro  $\mu = \mu_n$ . A órbita  $H_1$  é chamada de primária e as demais ( $H_n$ ), de subsidiárias. A condição  $z_n=0$ , com  $n > 1$ , implica na equação transcendental

$$-z_1 = qr_{n-1} \left(\frac{z_{n-1}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{n-1}}\right) + \varphi_2\right) \quad (8.10)$$

impossível de ser solucionada analiticamente. Para analisá-la numericamente vamos definir as seguintes funções:

$$\begin{aligned} g &= -z_1 \\ f &= qr_{n-1} \left(\frac{z_{n-1}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{n-1}}\right) + \varphi_2\right). \end{aligned}$$

Na figura 8.2, estão traçadas as curvas de  $g$  e  $f$  para  $n = 2$ . Os pontos onde as



**Figura 8.2:** Gráfico das funções  $f$  e  $g$  para  $n=2$ . (a) Condição de Shilnikov satisfeita. Há infinitos cruzamentos entre  $g$  e  $f$ . Os cruzamentos são soluções em que existem órbitas homoclínicas subsidiárias  $H_n$ . (b) Condição de Shilnikov não satisfeita. Não há cruzamentos entre as curvas das funções  $g$  e  $f$ .

curvas dessas funções se cruzam representam soluções para as quais existe uma órbita homoclínica. Portanto, para que existam infinitas órbitas homoclínicas  $H_n$ , segundo a equação (8.10), a função  $|g|$  deve assumir valores inferiores à amplitude da função  $f$ , para os mesmos valores de  $z_1$ , no limite em que  $z_1 \rightarrow 0$ . Para demonstrarmos isso, primeiramente verificamos que, nesse limite,  $z_{n-1}$  tende a 0 e, por isso, os termos dominantes de  $g$  e  $f$  são, respectivamente,  $z_1$  e  $(z_{n-1})^{\frac{\rho}{\lambda}}$ . Assim, estudar as condições de existência de soluções da equação (8.10), quando  $z_1 \rightarrow 0$ , resume-se a verificar as condições em que  $z_1 < (z_{n-1})_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$ , onde  $(z_{n-1})_{MAX}$  representa o valor de  $z_{n-1}$  calculado desconsiderando a sua oscilação (termo do cosseno igual a 1). Através da equação (8.9), podemos verificar que  $z_1 \leq (z_{n-1})_{MAX}$  e, como no limite considerado  $(z_{n-1})_{MAX} < (z_{n-1})_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$  para  $\frac{\rho}{\lambda} < 1$ ,  $z_1 < (z_{n-1})_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$ . Definindo  $\delta = |\rho/\lambda|$ , a condição  $\delta < 1$  é conhecida como a condição de Shilnikov. Como não foi feita nenhuma restrição a  $n$ , existem infinitas ordens de órbitas  $H_n$ ,  $n \geq 2$ , cada ordem representada por infinitas órbitas homoclínicas, quando  $z_1 \rightarrow 0$ . A figura 8.2(a) ilustra esse resultado para  $n = 2$ .

Por outro lado, não ocorrerá formação de órbitas homoclínicas se  $z_1 > (z_{n-1})_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$ . No limite  $z_1 \rightarrow 0$ , isso acontece quando a condição de Shilnikov não for satisfeita, isto é,  $\frac{\rho}{\lambda} > 1$ . Para mostrar isso, primeiramente verificamos que, através da equação (8.9),  $(z_{n-1})_{MAX} = z_1 + C(z_{n-2})_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$ , onde  $C$  é positivo e constante. Como por hipótese  $z_1 > (z_{n-2})_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$ , podemos concluir que  $z_1 \leq (z_{n-1})_{MAX} < (1 + C)z_1$ . Assim, podemos reescrever a condição que determina a não ocorrência de  $H_n$  como  $z_1 > [(1 + C)z_1]_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$  e, como no limite  $z_1 \rightarrow 0$  as constantes não são relevantes, obtemos  $z_1 > (z_1)_{MAX}^{\frac{\rho}{\lambda}}$  o que implica que  $\delta > 1$ , como mostrado na figura 8.2(b).

Voltando para a equação (8.10), toda vez que  $z_{n-1}$  tende para zero, a amplitude de  $z_n$  tende para  $z_1$  e sua fase, para o infinito. Assim, considerando as discussões anteriores sobre a condição de Shilnikov, se formará um cenário, no espaço dos parâmetros, onde um número finito de órbitas  $H_n$  se acumula em  $H_{n-1}$ , quando  $\delta < 1$ . Essa formação pode ser melhor vista na figura 8.3, e será melhor explorada na seção a seguir.

### 8.1.2 Lei de Escala

Como foi verificado na seção 8.1.1, existem órbitas homoclínicas  $H_n$  se acumulando em  $H_{n-1}$ . Para estudar de que forma ocorre essa acumulação, vamos introduzir o índice  $i$  para diferenciar as soluções da equação (8.10). Os valores do índice aumentam à medida em que as soluções se aproximam do ponto de acumulação. Note que, para  $i \rightarrow \infty$ , a diferença de fase entre duas soluções consecutivas tende para  $\pi$ , assim:

$$\frac{\omega}{\lambda} \ln \left( \frac{h}{z_{n-1}^{i+1}} \right) + \varphi_2 - \left( \frac{\omega}{\lambda} \ln \left( \frac{h}{z_{n-1}^i} \right) + \varphi_2 \right) = \pi$$

portanto,

$$\frac{z_{n-1}^{i+1}}{z_{n-1}^i} = e^{-\frac{\lambda\pi}{\omega}} \quad (8.11)$$

onde  $z_{n-1}^i$  é a coordenada  $z$  em  $\Sigma_1$ , resultado do penúltimo mapeamento de  $\Sigma_0$  em  $\Sigma_1$  da  $i$ -ésima órbita homoclínica de ordem  $n$  ( $H_n^i$ ). O último mapeamento tem coordenada  $z$  igual a  $z_n=0$ . Como  $z_{n-1}^i$  está associada à  $H_n^i$ , então ela ocorre para o parâmetro  $\mu=\mu_n^i$

Na equação (8.9),  $z_n$  é diferenciável se  $z_{n-1} > 0$ . Isto implica que  $z_{n-1}$  é diferenciável se  $z_{n-2} > 0$ . No caso em que existe solução de  $z_n$ , tanto  $z_{n-1}$  como  $z_{n-2}$  são maiores que zero. Assim, dado que  $z_{n-1}$  é diferenciável, para uma vizinhança suficientemente pequena de  $\mu$ , vale que

$$\frac{d}{d\Delta\mu_1}(z_{n-1}) = -\frac{d}{d\mu}(z_{n-1}) \simeq \text{constante.}$$

Assim, para os valores de  $z_{n-1}$  em que ocorrem três órbitas consecutivas  $H_n^{i-1}$ ,  $H_n^i$  e  $H_n^{i+1}$ , com  $i \rightarrow \infty$ , vale

$$\frac{z_{n-1}^i - z_{n-1}^{i+1}}{\mu_n^i - \mu_n^{i+1}} = \frac{z_{n-1}^{i-1} - z_{n-1}^i}{\mu_n^{i-1} - \mu_n^i} \Rightarrow \frac{\mu_n^i - \mu_n^{i+1}}{\mu_n^{i-1} - \mu_n^i} = \frac{z_{n-1}^i - z_{n-1}^{i+1}}{z_{n-1}^{i-1} - z_{n-1}^i}$$

Por simples substituição, prova-se que a equação (8.11) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{z_{n-1}^i - z_{n-1}^{i+1}}{z_{n-1}^{i-1} - z_{n-1}^i} = e^{-\frac{\lambda\pi}{\omega}},$$

portanto:

$$\frac{\mu_n^i - \mu_n^{i+1}}{\mu_n^{i-1} - \mu_n^i} = e^{-\frac{\lambda\pi}{\omega}} \quad (8.12)$$

Essa lei de escala descreve de que forma os parâmetros  $\mu_n$ , de uma  $H_n$ , se acumulam em  $\mu_{n-1}$ , de  $H_{n-1}$ .

Estes resultados podem ser generalizados levando em conta a existência de órbitas homoclínicas primárias  $H_j$ , com  $j \in \mathbb{N}^*$ . Desta forma,  $\psi^n(P_1)$ , dada pela equação (8.9), passa a ser dada por

$$\begin{pmatrix} r_{nj} \\ z_{nj} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r_{H_j} + a\Delta\mu_j \\ m\Delta\mu_j \end{pmatrix}, & n = 1 \\ \begin{pmatrix} r_j + pr_{(n-1)j} \left(\frac{z_{(n-1)j}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{(n-1)j}}\right) + \varphi_1\right) \\ z_j + qr_{(n-1)j} \left(\frac{z_{(n-1)j}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{(n-1)j}}\right) + \varphi_2\right) \end{pmatrix}, & n > 1 \end{cases} \quad (8.13)$$

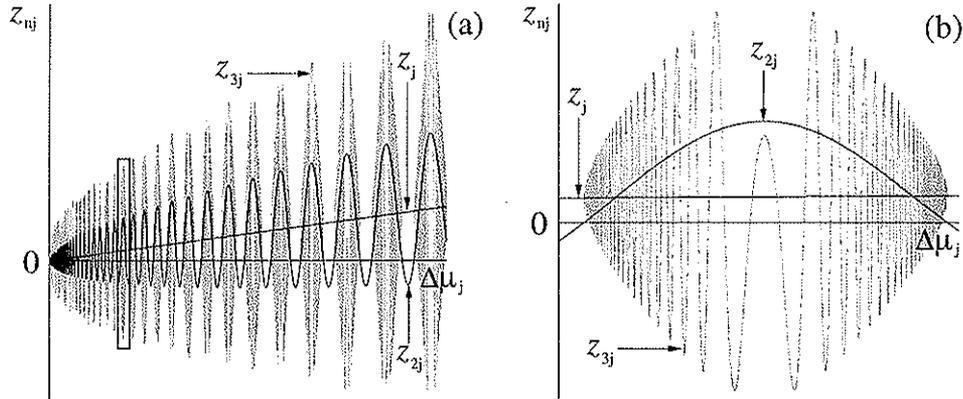
onde  $\Delta\mu_j = \mu - \mu_j$  sendo que  $\mu_j$  representa o parâmetro da órbita primária  $H_j$ , e  $r_{H_j}$  é a distância entre o ponto fixo e a j-ésima intersecção da órbita homoclínica  $H_j$  de ordem  $j$  com o plano  $\Sigma_1$ . As órbitas homoclínica subsidiárias  $H_{nj}$  ocorrem quando  $z_{nj}=0$ . Para  $j=1$ , obtemos os mesmos resultados anteriores.

A lei de escala obtida na equação (8.12) passa a ser escrita da seguinte forma.

$$\frac{\mu_{nj}^i - \mu_{nj}^{i+1}}{\mu_{nj}^{i-1} - \mu_{nj}^i} = e^{-\frac{\lambda\pi}{\omega}} \quad (8.14)$$

Esta é a lei de escala que descreve a aproximação dos parâmetros das órbitas homoclínicas  $H_{nj}$  no parâmetro da órbita  $H_{(n-1)j}$ . Para  $n=2$ , essa lei descreve a aproximação dos parâmetros da subsidiária  $H_{2j}$  no da primária  $H_j$  e, para  $n > 2$ , a aproximação dos parâmetros da subsidiária  $H_{nj}$  no da subsidiária  $H_{(n-1)j}$ .

A figura 8.3 ilustra soluções de  $z_{nj}$  para  $n=1, 2$  e  $3$  em função do parâmetro  $\Delta\mu_j$ . A análise dessa figura revela características interessantes sobre o cenário das órbitas homoclínicas. Podemos verificar que existem acumulações de infinitas soluções da subsidiária  $H_{2j}$  aproximando-se da primária  $H_j$ , e para cada solução da subsidiária  $H_{2j}$ , há uma acumulação de finitas soluções da subsidiária  $H_{3j}$ , que tendem para o



**Figura 8.3:** Soluções de  $z_{nj}$  para  $n=1,2$  e  $3$  em função do parâmetro  $\Delta\mu_j = \mu_j - \mu$ . As órbitas homoclínicas existem para parâmetros em que  $z_{nj}=0$ . (a) Acumulação de infinitas soluções da subsidiária  $H_{2j}$  no parâmetro da primária  $H_j$ , e de um número finito de soluções da subsidiária  $H_{3j}$  no parâmetro da  $H_{2j}$ . (b) Ampliação da região marcada com um retângulo em (a). Nesta figura,  $r_{H_j} = 1$ ,  $a = 0.1$ ,  $l = 1$ ,  $p = 1$ ,  $q = 0.1$ ,  $\rho = 1$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\omega = 100$ ,  $\phi_1 = 1$ ,  $\phi_2 = 1$  e  $h = 0.1$ .

infinito quando  $z_{(n-1)j} \rightarrow 0$ . Essas acumulações tendem para a lei de escala obtida na equação (8.14), no limite em que  $\mu_{nj} \rightarrow \mu_j$ . Note que não existe solução de  $z_{nj}$  quando  $z_{(n-1)j} \leq 0$ . Assim, a solução de  $z_2$  só acontece quando  $z_1 > 0$  (condição em que  $\mu > \mu_1$ ). Da mesma forma só existe  $z_3$  nos intervalos em que  $z_2 > 0$ . De forma geral, o conjunto de soluções  $z_{nj} < 0$  define regiões proibidas de formação de órbitas homoclínicas do tipo  $H_n$ . Daí podemos concluir que as acumulações acontecem apenas de um lado do parâmetro de  $H_{nj}$ . Outro ponto importante é que, devido à característica oscilatória do cosseno, as órbitas homoclínicas devem aparecer aos pares. Por fim, é interessante notar que as soluções para  $H_2$  deixam de existir antes das soluções para  $H_3$ . Toda esta discussão será considerada mais adiante juntamente com os resultados numéricos obtidos.

Não é nosso objetivo apresentá-las, porém, mais conclusões podem ser tiradas da análise feita aqui, como consequência da existência de uma órbita homoclínica de Shilnikov. Por exemplo, impondo  $z=z_0$  e  $r=r_0$  na equação (8.8), podemos demonstrar que existem infinitas órbitas periódicas com uma análise semelhante daquela feita aqui. A estabilidade dessas órbitas pode ser entendida através do estudo dos autovalores da Jacobiana de  $\psi$ , e com isso mostra-se a existência de ferraduras de Smale [14, 79] nas proximidades da órbita homoclínica. Estes resultados foram obtidos por Shilnikov [15, 16, 17], e podem ser encontrados em trabalhos publicados por Glendinning [31] e Gaspard [80]. O resultado que obtivemos é uma generalização

do resultado anteriormente obtido por Gaspard [32], onde ele determinou a lei de escala que descreve a aproximação dos parâmetros de  $H_2$  em  $H_1$ . A análise feita aqui é válida para sistemas em que se possa considerar que a órbita homoclínica primária seja de codimensão 1. Isto é, se existir uma região no espaço de parâmetros de dimensão maior que um no qual, fixando todos os parâmetros a menos o parâmetro  $\mu$ , uma órbita homoclínica possa ser sempre localizada para um valor de  $\mu = \mu_{nj}$ .

### 8.1.3 Transformação do Sistema Double Scroll nos Modos Normais

Para fazermos uso dos resultados obtidos na seção anterior, devemos mostrar que o sistema Double Scroll, nas regiões próximas do ponto fixo tipo sela, está de acordo com o sistema (8.1) da seção anterior. O nosso propósito é estudar órbitas homoclínicas do ponto de sela  $P_0$ . Assim, vamos fazer a mudança de coordenadas, do domínio  $D_0$ , para os modos normais.

O sistema Double Scroll escrita na forma matricial foi apresentada em (3.1) da seção 3.1.1, onde foram determinados os autovalores da Jacobiana,  $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\omega$  e  $\lambda_3 = \lambda$  definidos pelas equações (3.11). Na seção 3.1.2, mostramos que a esses autovalores estão associados, respectivamente, os auto vetores  $\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_R \pm i\vec{v}_I$  e  $\vec{v}_3$ , definidos em (3.15). Usando como base esses autovetores, a equação (3.1), para o domínio  $D_0$ , passa a ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \dot{\vec{v}}_1 \\ \dot{\vec{v}}_2 \\ \dot{\vec{v}}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho + i\omega & 0 & 0 \\ 0 & \rho - i\omega & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \vec{v}_3 \end{pmatrix}$$

Os auto vetores formam a base dos modos normais do sistema Double Scroll em  $\mathbb{C}^3$ . Mas devemos buscar soluções reais pois as coordenada  $x$ ,  $y$  e  $z$ , que formam os autovetores, estão associadas às amplitudes de tensão e corrente do circuito eletrônico. Como  $\vec{v}_{1,2}$  são compostos pela combinação linear de  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$ , e esses vetores são linearmente independentes, então,  $\vec{v}_R$  e  $\vec{v}_I$ , juntamente com  $\vec{v}_3$ , formam também uma base do sistema Double Scroll. Assim, dado que

$$\dot{\vec{v}}_{1,2} = \dot{\vec{v}}_R \pm i\dot{\vec{v}}_I \quad (8.15)$$

e

$$\dot{\vec{v}}_{1,2} = (\rho \pm i\omega)\vec{v}_{1,2} = \rho\vec{v}_R - \omega\vec{v}_I \pm i(\omega\vec{v}_R + \rho\vec{v}_I), \quad (8.16)$$

comparando a equação (8.15) com a (8.16), concluímos que

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}}_R &= \rho \vec{v}_R - \omega \vec{v}_I \\ \dot{\vec{v}}_I &= \omega \vec{v}_R + \rho \vec{v}_I \\ \dot{\vec{v}}_3 &= \lambda \vec{v}_3\end{aligned}$$

que está em pleno acordo com o sistema de equações (8.1). Note que este resultado vale para todo o domínio  $D_0$ . Assim, a fronteira  $U_+$  entre os domínios  $D_0$  e  $D_+$  faz o papel da superfície  $\Sigma_0$ , da figura 8.1. E qualquer superfície em  $D_0$  que contenha o subespaço instável  $E^U(P_0)$  em  $D_0$  corresponde à superfície  $\Sigma_1$ .

A transformação dos demais domínios para os modos normais, pode ser feita de maneira similar a aqui apresentada. Nesse caso, as funções  $P$ ,  $Q$  e  $R$  do sistema de equações diferenciais (8.1) assumem valores constantes. Com estes resultados, todos os domínios do sistema podem ser integrados analiticamente, como mostrado em [81].

## 8.2 Órbitas Homoclínicas no Espaço dos Parâmetros

As órbitas homoclínicas estão espalhadas numa vasta região do espaço dos parâmetros. Habitam desde as regiões onde existem atratores caóticos e periódicos, até as regiões em que o sistema diverge, formando conjuntos contínuos, no espaço dos parâmetros, às quais damos o nome de curvas de bifurcação, ou simplesmente de famílias. Existe uma infinidade de diferentes famílias de órbitas homoclínicas. A maneira com que elas estão organizadas forma um cenário complexo e denso no espaço dos parâmetros.

Nesta seção, vamos primeiramente mostrar que a medida  $d$ , utilizada para obter as órbitas homoclínicas no sistema Double Scroll, assume um papel importante na compreensão da formação das órbitas homoclínicas. Em seguida, apresentaremos como se formam as famílias, i. e., curvas de bifurcações, fazendo uma análise da medida  $d$  em função do parâmetro de controle  $\alpha$  do circuito Double Scroll. Como foi demonstrado na seção 8.1.3, o sistema Double Scroll pode ser reduzido ao sistema de equações diferenciais (8.1). Assim, deve estar de acordo com as previsões teóricas demonstradas na seção 8.1, e, particularmente, com a lei de escala que descreve a relação entre os parâmetros de controle de órbitas homoclínicas consecutivas de mesma ordem. Assim, mostraremos a validade da lei de escala, obtida na seção

8.1.2, para a acumulação das órbitas homoclínicas subsidiárias nas primárias, e para a acumulação entre as subsidiárias. Por fim, apresentamos uma análise de codimensão 2 mostrando que a teoria prevê estruturas homoclínicas, como as que observamos no circuito Double Scroll nesta seção.

### 8.2.1 A medida $d$

Como consequência da redução do sistema Double Scroll ao sistema (8.1) demonstrada na seção 8.1.3, a fronteira  $U_+$  entre os domínios  $D_0$  e  $D_+$  faz o papel da superfície  $\Sigma_0$ , da figura 8.1. E qualquer superfície em  $D_0$  que contenha o subespaço instável  $E^U(P_0)$  em  $D_0$  corresponde à superfície  $\Sigma_1$ . Assim, os eixos das coordenadas  $x$  e  $y$  são dois eixos arbitrários, perpendiculares entre si, que formam o plano do subespaço estável  $E^S(P_0)$ , e o eixo da coordenada  $z$  contém o subespaço instável  $E^U(P_0)$ . A medida  $d$ , de um ponto em  $U_+$ , tem uma relação linear com a coordenada  $z$  desse ponto dado por

$$d = \left( \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} \cos \theta_3 \right) z \quad (8.17)$$

onde  $\theta_1$  é o ângulo entre os subespaços  $E^S(P_0)$  e  $E^U(P_0)$ ,  $\theta_2$  é o ângulo entre  $E^S(P_0)$  e  $U_+$ , e  $\theta_3$  entre a medida  $d$  e a projeção da coordenada  $z$  do ponto em  $U_+$ . Considerando que, para pequenas perturbações do sistema, esses ângulos não se alteram significativamente, toda análise feita sobre a coordenada  $z$  deve se aplicar para  $d$ . Por exemplo podemos reescrever a lei de escala dada pela equação (8.11), obtida para  $z_{(n-1)j}$ , em função de  $d_{(n-1)j}$ :

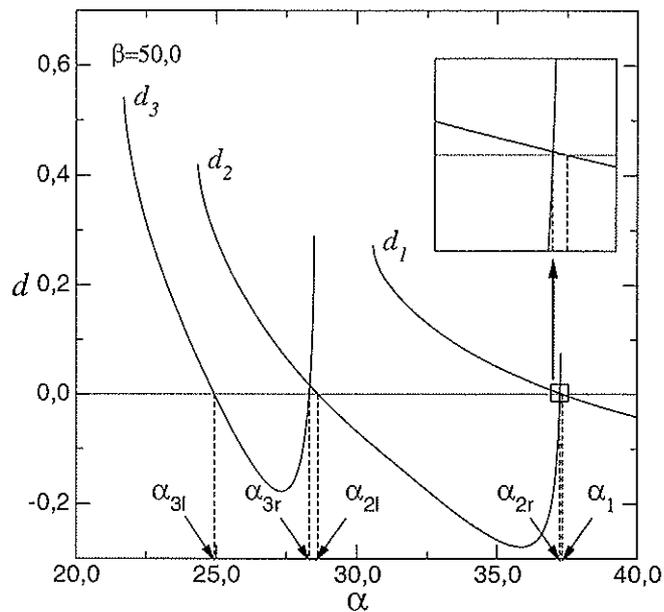
$$\frac{d_{(n-1)j}^{j+1}}{d_{(n-1)j}^j} = e^{-\frac{\lambda\pi}{\omega}}$$

O fato da medida  $d$  representar a coordenada  $z$  no circuito Double Scroll, permite que se possa comprovar as previsões feitas pela teoria. Além do mais, a grande vantagem é que  $d$  não é uma grandeza teórica e, portanto, ao ser extraída do sistema, traz consigo outras informações além daquelas previstas pela teoria, ampliando nosso conhecimento sobre a formação das órbitas homoclínicas.

Recordando que definimos na seção 7.1.1 o sinal de  $d_n$  como sendo  $d_n > 0$  quando  $P_n$  estiver entre a linha  $L_{0+}$  e o eixo  $x$ , e  $d_n < 0$  quando a linha  $L_{0+}$  estiver entre  $P_n$  e o eixo  $x$  (ver figura 7.1). Na situação  $d > 0$  a trajetória visita o domínio  $D_0$  e necessariamente retorna ao domínio  $D_+$  sob influência do subespaço instável de  $P_0$ . Quando  $d < 0$  a trajetória é conduzida para o domínio  $D_-$ , passando por  $D_0$ , em virtude do subespaço instável de  $P_0$ . Portanto, uma condição necessária para

a existência de órbitas homoclínicas, que envolvam apenas dois domínios, é que a medida  $d$  seja sempre positiva, o que, em outras palavras, significa que, para que exista uma órbita  $H_{nj}$ , devemos ter a condição  $d_{(n-1)j} > 0$ , o que está de acordo com a teoria. E para a existência das órbitas homoclínicas que envolvam todos os domínios  $d_n$  deve ser negativa.

Para elucidar melhor essa questão vamos analisar o gráfico da Fig 8.4, onde está apresentado o comportamento da medida  $d$ , para as curvas  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$ , quando variamos  $\alpha$  com  $\beta=50$  fixo. As curvas  $d_3$  e  $d_2$  cruzam duas vezes a reta  $d=0$ .



**Figura 8.4:** Gráfico do comportamento da medida  $d$  das curvas  $d_1$ ,  $d_2$  e  $d_3$  em função de  $\alpha$  com  $\beta=50,0$  fixo. Quando as curvas interseccionam a reta  $d=0$ , encontra-se o parâmetro  $\alpha$  para o qual a órbita homoclínica se forma. O detalhe mostra que as curvas  $d_1$  e  $d_2$  não se interseccionam em  $d=0$ .

Isso implica que para o mesmo  $\beta=50$  existem duas órbitas homoclínicas da mesma família. Essa característica é prevista pela teoria através da natureza oscilatória de  $z_{nj}$ , responsável pelo surgimento de órbitas homoclínicas aos pares. Para diferenciar uma órbita da outra introduzimos o símbolo  $l$  no índice de  $\alpha$ , para identificar a órbita do ramo esquerdo, e o símbolo  $r$ , para identificar o ramo direito. A curva  $d_1$  é a única curva que não possui duas órbitas homoclínicas para o mesmo  $\beta$ . Isso foi verificado em grande parte do espaço dos parâmetros (ver figura 8.5). Para  $\beta=50$ , a curva  $d_1$  possui um mínimo nas proximidades de  $\alpha=80$ , e depois cresce tendendo a zero para  $\alpha \rightarrow \infty$ , até onde foi possível observar. Nas demais famílias existe pelo menos duas formações distintas das órbitas.

Para valores de  $\alpha > \alpha_1$ , a medida  $d_1$  permanece negativa, sendo portanto essa a região onde pode ocorrer órbitas homoclínicas que visitam os três domínios, como as famílias do tipo  $H_{1,m}$ . Para  $\alpha < \alpha_1$ , a medida  $d_1$  é positiva e limitada. Esse limite ocorre porque, para parâmetros muito baixos de  $\alpha$ , a variedade instável contorna o ponto fixo  $P_+$  pelo menos uma vez antes de atravessar, pela segunda vez, o plano  $U_+$ . Não ocorrendo a medida  $d_1$ , o que não implica na inexistência das demais medidas de  $d$ . A limitação das curvas  $d_2$  e  $d_3$ , para valores baixos de  $\alpha$  são da mesma forma justificadas. Isso indica que não deve existir mais órbitas homoclínicas  $H_n$  para  $\alpha < \alpha_{nl}$ .

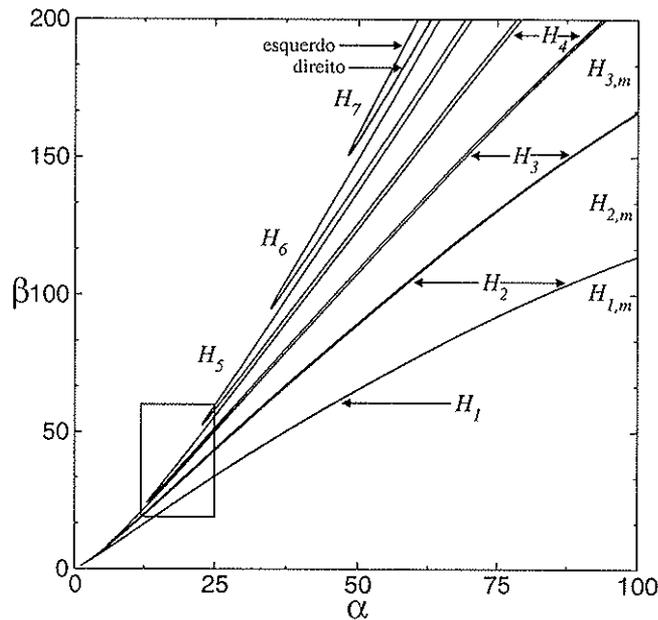
Entre  $\alpha_{nl}$  e  $\alpha_{nr}$  a medida  $d_n$  é negativa. Assim, é nesse intervalo que devem ser procurados as órbitas homoclínicas do tipo  $H_{n,m}$ . Para  $\alpha > \alpha_{nr}$  a medida  $d_n$  existe, e é positiva, enquanto  $d_{n-1}$  também for positiva. Quando  $d_{n-1}$  é nula,  $d_n$  deixa de existir. Por exemplo, na figura 8.4, entre  $\alpha_{2r}$  e  $\alpha_1$ , as medidas  $d_2$  e  $d_1$  são positivas, existindo portanto condições para que se formem órbitas de ordem superior à família  $H_2$ . Porém, como  $H_1$  é uma família de órbitas homoclínicas primárias, de acordo com a teoria, acumulam-se nela infinitas  $H_2$ . Assim, entre  $\alpha_{2r}$  e  $\alpha_1$  existem infinitas órbitas homoclínicas de ordem igual ou superior a  $H_2$ . Entre  $\alpha_{3r}$  e  $\alpha_{2l}$  a medida  $d_3$  existe e é positiva enquanto  $d_2$  for positiva. Isso cria condições para que se forme uma órbita homoclínica de uma ordem igual ou superior à família  $H_3$ . Neste caso, se  $H_2$  for uma órbita homoclínica primária não existirá mais nenhuma  $H_3$  entre  $\alpha_{3r}$  e  $\alpha_{2l}$ . Mas, se  $H_2$  for uma órbita homoclínica subsidiária, então existirão órbitas homoclínicas  $H_3$  se acumulando nela, e entre  $\alpha_{3r}$  e  $\alpha_{2l}$  poderão existir órbitas de ordem igual ou superior à  $H_3$ . De forma geral, a análise de  $d_n$  e  $d_{n+1}$  mostra que entre os ramos esquerdo e direito de duas famílias consecutivas de ordem  $n$  e  $n+1$ , respectivamente, poderão existir somente famílias de ordem igual ou superior a  $n+1$ .

### 8.2.2 Famílias Primárias

Como discutido na seção 2.2.2, o espaço dos parâmetros do circuito Double Scroll foi reduzido a dois parâmetros ( $\alpha$  e  $\beta$ ). É sobre esse espaço que aqui analisamos as bifurcações homoclínicas. As bifurcações que encontramos nesse espaço são geralmente unidimensionais. Esse tipo de bifurcação é dita de codimensão 1. A codimensão de uma bifurcação é medida pela diferença entre a dimensão do espaço dos parâmetros e a dimensão da bifurcação. Codimensão é o número mínimo de parâmetros que devem ser variados de maneira a se observar um certo tipo de bifurcação [82].

As famílias (curvas de bifurcação) que aparecem na figura 8.5 são compostas por

órbitas homoclínicas primárias, i. e., existem somente subsidiárias  $H_{nj}$  se acumulando nelas, e por isso as chamaremos de famílias primárias. Na figura 8.5, com exceção da família  $H_1$ , as curvas das famílias primárias, no espaço dos parâmetros, são compostas por um ramo esquerdo e outro direito que se juntam formando um vértice muito próximo da fronteira entre os atratores caóticos tipo Rössler e Double Scroll. Parâmetros na vizinhança a esquerda dos vértices correspondem ao atrator



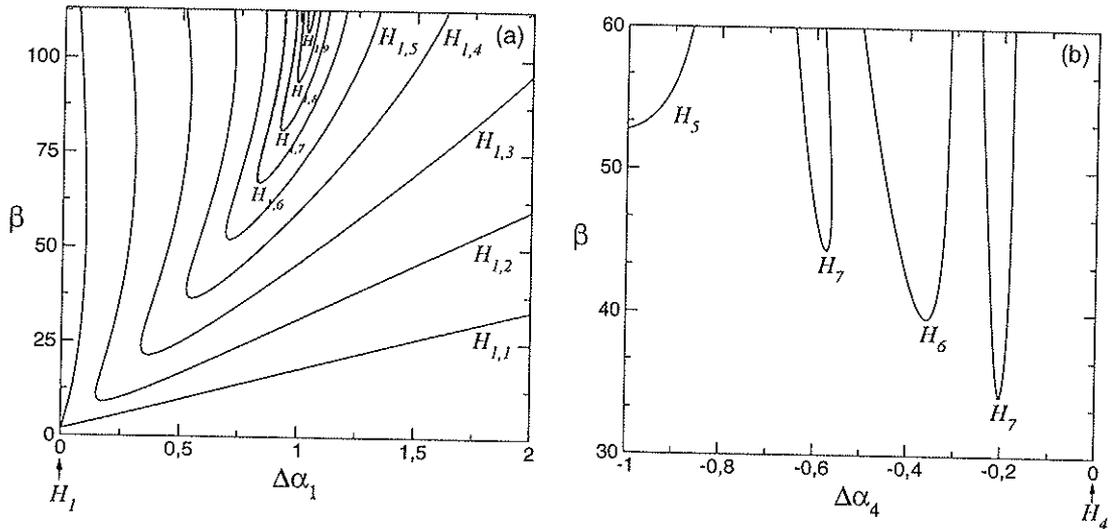
**Figura 8.5:** Famílias primárias principais de órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros. O retângulo representa a região entre os vértices de  $H_4$  e  $H_5$  onde se localizam as famílias primárias e subsidiárias apresentadas nas figuras 8.6(b) e 8.10.

tipo Rössler, e, na vizinhança a direita, ao atrator Double Scroll. Os vértices coexistem com o atrator Double Scroll. A figura mostra curvas pertencentes às famílias  $H_1$  a  $H_7$  organizadas da seguinte forma: o ramo esquerdo de uma família  $H_j$  é vizinho do ramo direito da família  $H_{j+1}$  e, para  $H_1$  que não possui dois ramos, seu vizinho primário é o ramo direito de  $H_2$ . O retângulo mostra uma região que será analisada com maior detalhe, cujo resultados estão mostrados nas figuras 8.6(b) e 8.10.

Cada uma destas famílias primárias, com exceção da  $H_1$ , tem a particularidade de seus ramos formarem um ângulo entre si, fazendo com que a separação entre eles aumente para parâmetros distantes do vértice, cobrindo uma vasta área do espaço dos parâmetros. Entre os ramos, direito e esquerdo, de uma família primária, não há mais órbitas homoclínicas do tipo  $H_n$ , porque  $d$  é negativo. Mas, podem haver

órbitas que envolvam os três domínios como as  $H_{n,m}$  discutidas na seção 7.1.1. Por outro lado, nas proximidades do lado externo dos ramos, existe uma infinidade de subsidiárias  $H_n$ . Por exemplo, entre os ramos de  $H_2$ , só podem existir órbitas do tipo  $H_{2,m}, \dots, H_{2,m,0}, \dots$ , nas proximidades do lado externo dos ramos, as subsidiárias  $H_4, H_6, \dots$ . Estas características fazem com que estas famílias primárias formem o esqueleto das órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros e, por isso, as chamaremos de famílias primárias principais.

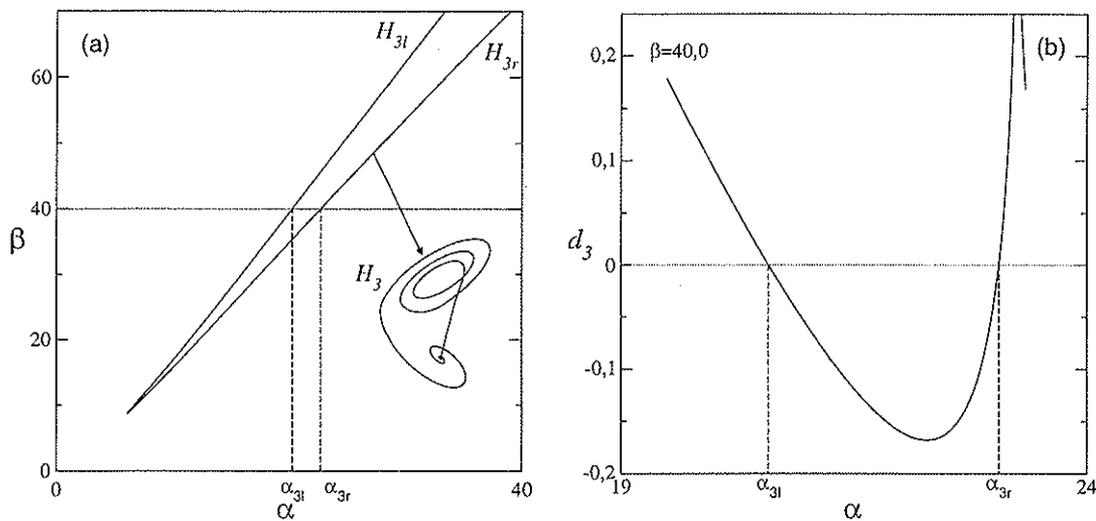
Além dessas primárias, entre os ramos direito e esquerdo de duas famílias primárias consecutivas, existem outras famílias primárias. Estas famílias primárias têm as mesmas características das anteriores a menos da formação de seus ramos que tendem a se manter todos paralelos. Na figura 8.6(a) estão apresentadas as famílias



**Figura 8.6:** (a) Famílias de órbitas homoclínicas do tipo  $H_{1,m}$ .  $\Delta\alpha_1 = \alpha - \alpha_1$ . (b) Famílias de órbitas homoclínicas primárias entre os ramos direito e esquerdo das famílias  $H_4$  e  $H_5$  da figura 8.5, respectivamente.  $\Delta\alpha_4 = \alpha - \alpha_4$

$H_{1,m}$ . Como elas estão muito próximas da família  $H_1$ , podemos vê-las com maiores detalhes trocando a abscissa  $\alpha$  por  $\Delta\alpha_1 = \alpha - \alpha_1$ . Elas estão à direita da curva de bifurcação  $H_1$  mostrada na figura 8.5. Na figura 8.6(b) estão algumas famílias primárias, que não são principais, entre os ramos esquerdo e direito das famílias primárias principais  $H_4$  e  $H_5$ , respectivamente. A exemplo da figura (a), a abscissa utilizada é  $\Delta\alpha_4 = \alpha - \alpha_4$ .

A figura 8.7(a) mostra o conjunto de parâmetros que compõem a família primária principal  $H_3$ , composta por seus ramos esquerdo ( $H_{3l}$ ) e direito ( $H_{3r}$ ). O detalhe, mostrado pela seta, é a forma da órbita homoclínica no espaço de fase. Todas as



**Figura 8.7:** (a)  $H_{3l}$  e  $H_{3r}$  são os ramos esquerdo e direito que compõem a família primária  $H_3$ . A seta aponta para a forma da órbita homoclínica  $H_3$  no espaço de fase. (b) Curva característica  $d_3$  para  $\beta = 40$ .  $\alpha_{3l}$  e  $\alpha_{3r}$  são os parâmetros para a órbita homoclínica no ramo esquerdo e direito, respectivamente.

demais são parecidas com essa, sofrendo suaves e contínuas deformações ao longo da curva. Para  $\beta=40$ , existem duas órbitas homoclínicas, uma em cada ramo, para os parâmetros  $\alpha_{3l}$  e  $\alpha_{3r}$ . Na figura 8.7(b) está a curva característica de  $d_3$  para  $\beta=40$ . Para  $d_3=0$ , obtemos os valores de  $\alpha_{3l}$  e  $\alpha_{3r}$  mostrados em (a). Para valores decrescentes de  $\beta$ , o ponto mínimo da curva  $d_3$  se aproxima do valor de  $d=0$  até atingí-lo. Esse é o ponto de encontro dos ramos esquerdo e direito, no espaço dos parâmetros. Para valores menores de  $\beta$ , a curva  $d_3$  assume somente valores positivos, não ocorrendo mais órbitas homoclínicas  $H_3$ . Todas as demais curvas de  $d \times \alpha$  das famílias apresentadas na figura 8.5 têm as mesmas características que esta.

De acordo com as previsões teóricas, para cada órbita homoclínica primária  $H_j$  devem existir infinitas órbitas subsidiárias  $H_{2j}$  se acumulando nela. A figura 8.8 mostra a acumulação da subsidiária  $H_6$  na primária  $H_3$  próximo ao vértice da família  $H_3$ , mostrada na figura 8.7. Note como as acumulações ocorrem tanto pelo lado esquerdo de  $\alpha_{3l}$  como pelo lado direito de  $\alpha_{3r}$ .

Para verificar a lei de escala que descreve a aproximação dos parâmetros  $\alpha_{nj}^i$ , de  $H_{nj}$ , no parâmetro  $\alpha_{(n-1)j}$ , de  $H_{(n-1)j}$ , vamos chamar de

$$S^i = \frac{\alpha_{nj}^i - \alpha_{nj}^{i+1}}{\alpha_{nj}^{i-1} - \alpha_{nj}^i} \quad \text{e} \quad S_T = e^{-\frac{\lambda\pi}{\omega}} \quad (8.18)$$

a escala medida e a escala teórica, respectivamente. Os valores de  $\lambda$  e  $\omega$  são referentes

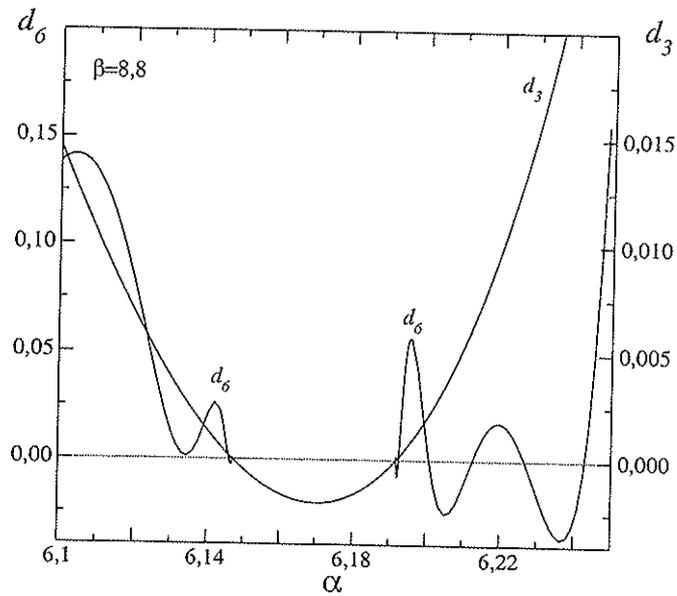


Figura 8.8: Curvas  $d_3$  e  $d_6$  medidas nas proximidades do vértice da família  $H_3$  ( $\beta = 8,8$ ). A escala da esquerda corresponde a curva  $d_6$  e, a da direita, a  $d_3$ .

ao parâmetro  $\alpha_j$  da órbita homoclínica principal  $H_j$ . Na figura 8.9(a) verificamos a aproximação da escala medida  $S^i$  na escala teórica  $S_T = 0,0594$  ( $\lambda = 5,28384$ ,  $\omega = 5,87965$ ) para as órbitas homoclínicas subsidiárias  $H_6$  se acumulando na

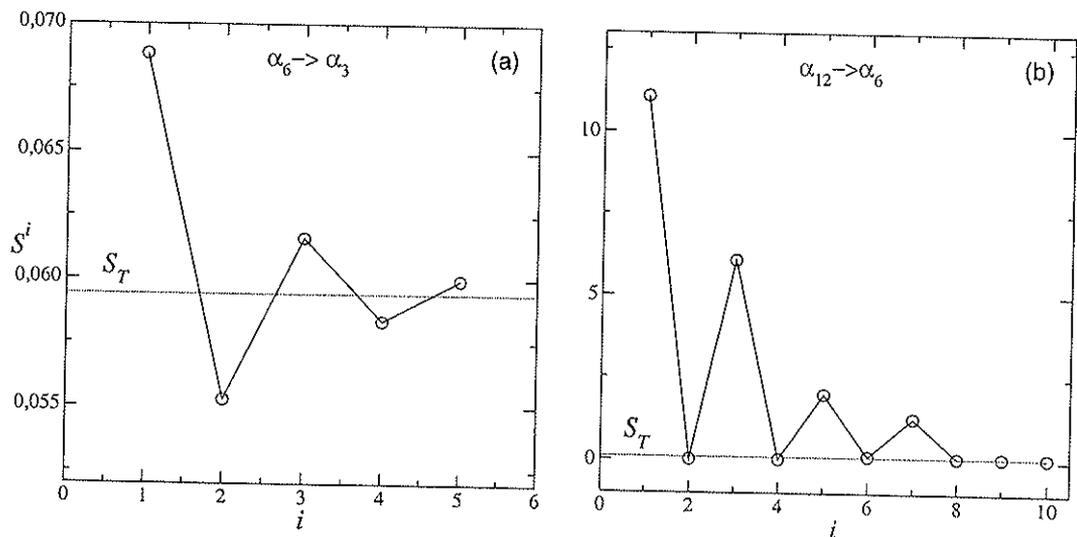


Figura 8.9: Aproximação da escala medida  $S^i$  na escala teórica  $S_T$ , definidas na equação (8.18) quando  $i \rightarrow \infty$ , para a acumulação da subsidiária  $H_6$  na primária principal  $H_3$  (a), e da subsidiária  $H_{12}$  na primária  $H_6$ . Dados na tabela 8.1.

$S_T = 0,0594 \quad \beta = 52$				$S_T = 0,0895 \quad \beta = 40$			
$i$	$H$	$\alpha^i$	$S^i$	$i$	$H$	$\alpha^i$	$S^i$
	1	38,90			1	29,66	
	3	25,7909174234			6	18,77350046227	
0	6	25,7903775086		0	12	18,77351396898	
1	6	25,7908807122	0,0688	1	12	18,77351296569	11,0683
2	6	25,7909153481	0,0553	2	12	18,77350186106	0,0170
3	6	25,7909172625	0,0616	3	12	18,77350167170	6,0684
4	6	25,7909173804	0,0583	4	12	18,77350052261	0,0272
5	6	25,7909173873	0,0600	5	12	18,77350049130	1,9860
6	6	25,7909173877		6	12	18,77350042912	0,1153
7	6	—		7	12	18,77350042196	1,2703
8	6	—		8	12	18,77350041285	0,0890
9	6	—		9	12	18,77350041204	0,0897
10	6	—		10	12	18,77350041197	0,0894
11	6	—		11	12	18,77350041196	

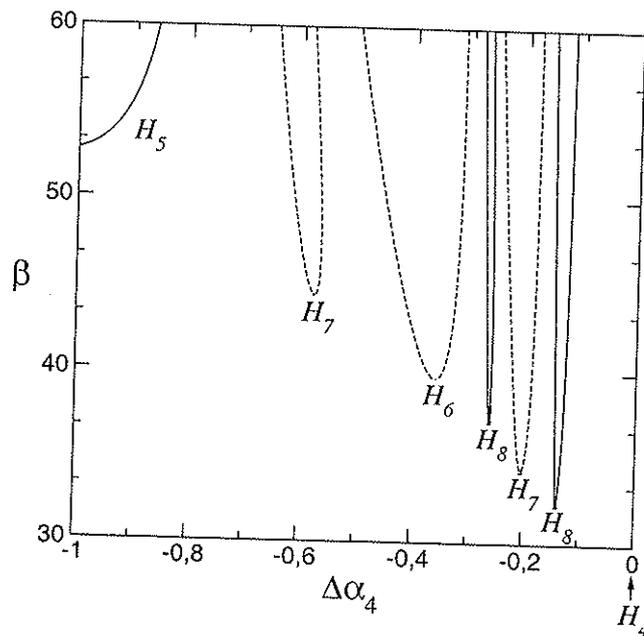
**Tabela 8.1:** Valores dos parâmetros das órbitas homoclínicas e do valor obtido de  $S^i$  utilizados na figura 8.9.

primária principal  $H_3$  localizada em  $\alpha_3 = 25,7909$  e  $\beta = 52$ .  $H_3$  corresponde a uma órbita homoclínica pertencente ao braço esquerdo da família  $H_3$  apresentada na figura 8.7(a). Na figura 8.9(b) está a aproximação da escala medida  $S^i$  na escala teórica  $S_T=0,0895$  ( $\lambda = 3,92371$ ,  $\omega = 5,10727$ ) da subsidiária  $H_{12}$  na primária  $H_6$ . As medidas foram feitas para  $\alpha_6 = 18,7735$  e  $\beta = 40$ , nas proximidades do vértice da família  $H_6$  apresentada na figura 8.6(b). Como a lei de escala em (a) é significativamente maior do que em (b), foi possível obter mais pontos em (b) do que em (a). Na tabela 8.1 estão os valores dos parâmetros das órbitas homoclínicas utilizadas para o cálculo de  $S^i$ . Note como as primárias  $H_3$  e  $H_6$  estão bem distantes de  $H_1$ , comprovando a validade da extensão da teoria de bifurcações para além das proximidades de  $H_1$ .

### 8.2.3 Famílias Subsidiárias

As famílias de órbitas homoclínicas subsidiárias desenvolvem-se nas proximidades de uma família primária, entre os braços esquerdo e direito de duas famílias

primárias principais consecutivas no espaço dos parâmetros, confundindo-se com as outras famílias primárias que também habitam essas regiões. Para poder identificar uma subsidiária, é necessário verificar qual é a ordem das órbitas que se acumulam nela. Nas primárias  $H_j$  acumulam-se as subsidiárias  $H_{2j}$ . Nas subsidiárias  $H_{(n-1)j}$ , acumulam-se as subsidiárias  $H_{nj}$ . A figura 8.10 mostra duas subsidiárias  $H_8$  da primária principal  $H_4$  no meio das primárias apresentadas na figura 8.6(b). A primária principal  $H_5$  e as subsidiárias estão representadas pelas curvas contínuas. As demais primárias são as curvas tracejadas. A primária principal  $H_4$  é a curva  $\Delta\mu_4 = 0$ .

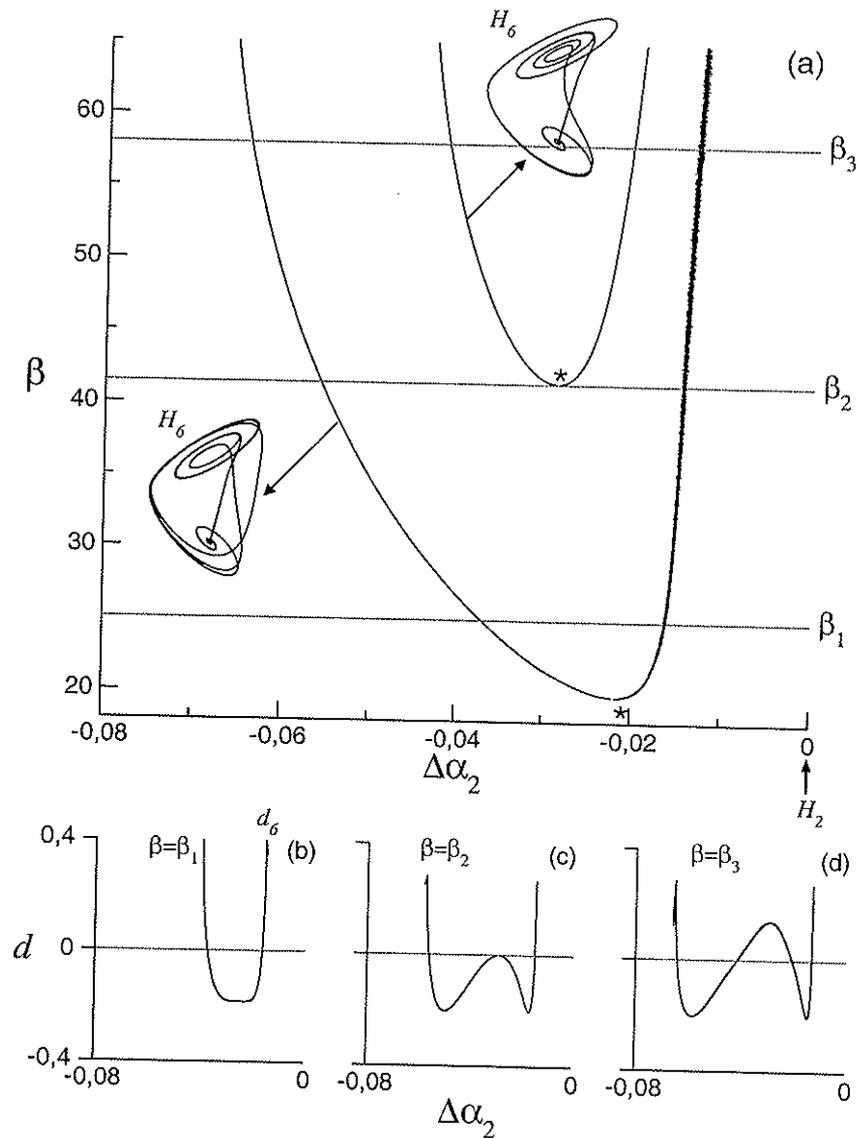


**Figura 8.10:** As curvas cheias são as subsidiárias  $H_8$  da primária principal  $H_4$  ( $\Delta\mu_4 = 0$ ) e a primária principal  $H_5$ . As curvas tracejadas são algumas famílias primárias entre as principais  $H_4$  e  $H_5$ .

Tipicamente, entre os braços esquerdo e direito de uma família  $H_n$ , a curva  $d_n$  assume valores negativos. Mas em alguns casos isso não acontece, provocando bifurcações que dão origem a outras famílias  $H_n$ . Na figura 8.11(a) estão apresentadas duas família  $H_6$  que surgem por deformações da curva  $d_6$ . Essas bifurcações estão na região entre o ramo direito da família primária principal  $H_3$  e o ramo esquerdo da família primária principal  $H_2$ . As curvas estão em função de  $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_2$  em virtude da proximidade dessas curvas com a família  $H_2$ . Para  $\beta = \beta_1$ , existem somente duas órbitas correspondendo a uma família  $H_6$ . Em  $\beta = \beta_2$  surge uma segunda família e, para  $\beta = \beta_3$ , existem quatro órbitas  $H_6$ , correspondentes às duas famílias. As figuras

8.11(b), (c) e (d) mostram a curva  $d_6$  sofrendo uma dobra e criando dois pontos de mínimo. Aumentando o parâmetro a partir de  $\beta = \beta_1$ , a dobra assentua-se cada vez mais até que em  $\beta = \beta_2$  ela tangencia  $d = 0$  dando origem a outra família  $H_6$  (figura 8.11(c)). Para valores ainda maiores,  $\beta = \beta_3$ , a curva característica se anula em quatro pontos correspondentes aos ramos direito e esquerdo das duas famílias  $H_6$  (figura 8.11(d)). A topologia das órbitas, no espaço de fase é semelhante para parâmetros próximos. As setas apontam duas órbitas homoclínicas, uma de cada família, obtidas para parâmetros distantes entre si. Pode se ter uma idéia de como as órbitas se transformam ao longo da curva de bifurcação.

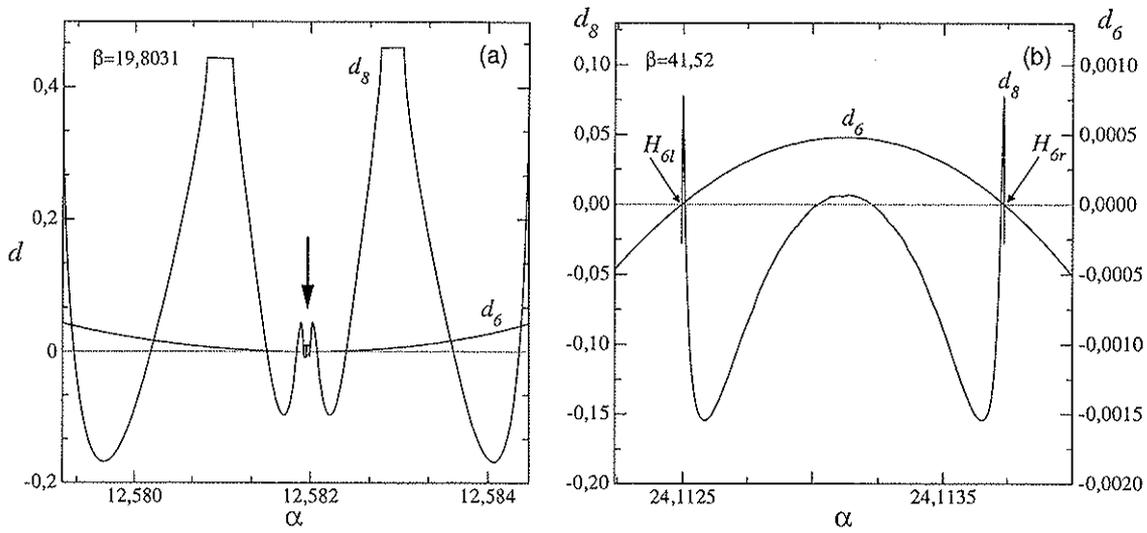
Para começar a discutir a acumulação de órbitas homoclínicas subsidiárias em outra subsidiária, vamos definir como o lado interno de uma família, a região do espaço dos parâmetros compreendida entre os ramos direito e esquerdo de uma família de órbitas homoclínicas e, do lado externo, como toda a região do espaço dos parâmetros, excluída o lado interno. Vimos que, nas órbitas homoclínicas primárias, a aproximação das subsidiárias se dava pelo lado externo da primária (veja figura 8.8) já que, do lado interno,  $d$  é negativo, eliminando a possibilidade de existir qualquer tipo de órbita homoclínica  $H_n$  nessa região. O mesmo se observa para a família  $H_6$  em  $\beta = \beta_1$ , conforme a figura 8.11(b). O surgimento da segunda família  $H_6$  em  $\beta = \beta_2$ , mostrada na figura 8.11(a), ocasiona uma inversão nessa acumulação. O lado interno dessa família, marcada pelo asterisco em  $\beta \gtrsim \beta_2$  possui medida  $d_6$  positiva, sendo  $d_6$  negativo do lado externo, como pode ser verificado na figura 8.11(d) para  $\beta = \beta_3$ . Como ambas as famílias  $H_6$  são subsidiárias de  $H_2$ , devem existir órbitas  $H_8$  se acumulando nelas. Tanto pelo lado interno, como pelo lado externo, dependendo da medida  $d_6$ . As figuras 8.12 mostram que essas acumulações de fato acontecem em acordo com a análise feita de  $d_6$ . A figura (a) corresponde à medida de  $d_6$  e  $d_8$ , feita na região marcada com asterisco ( $\beta \approx 19,8031$ ) na figura 8.11(a), próximo ao vértice da família  $H_6$ . A curva  $d_6$  se anula na região onde a seta aponta. É nesse local onde se acumulam as órbitas  $H_8$ . Vemos que as soluções para existência de  $H_8$  vão se concentrando nessa região tanto pelo seu lado esquerdo como pelo direito, o que caracteriza a acumulação pelo lado externo dessa família  $H_6$ . Em (b) são mostradas as medidas  $d_6$  e  $d_8$  para um valor de  $\beta \gtrsim \beta_2$ ,  $\beta = 41,52$ . A medida  $d_8$  só existe enquanto  $d_6$  for positiva. Para que isso pudesse ser observável, utilizamos duas escalas nessa figura. A da esquerda refere-se à curva  $d_8$ , e a da direita à  $d_6$ . As setas apontam as duas soluções para a órbita  $H_6$ , uma para o ramo esquerdo ( $H_{6l}$ ), e outra para o direito ( $H_{6r}$ ). Note que as soluções para existência de  $H_8$  estão na região entre os parâmetros das órbitas  $H_6$ . Portanto, neste caso as



**Figura 8.11:** (a) Duas famílias  $H_6$ , relacionadas pela mesma curva  $d_6$ . As setas mostram a topologia de duas órbitas homoclínicas, no espaço de fase, obtidas com parâmetros distantes entre si no espaço dos parâmetros. (b), (c) e (d) mostram a transformação da curva  $d_6$  responsável pelo surgimento da família  $H_6$  central.  $\Delta\alpha_2 = \alpha - \alpha_2$ .

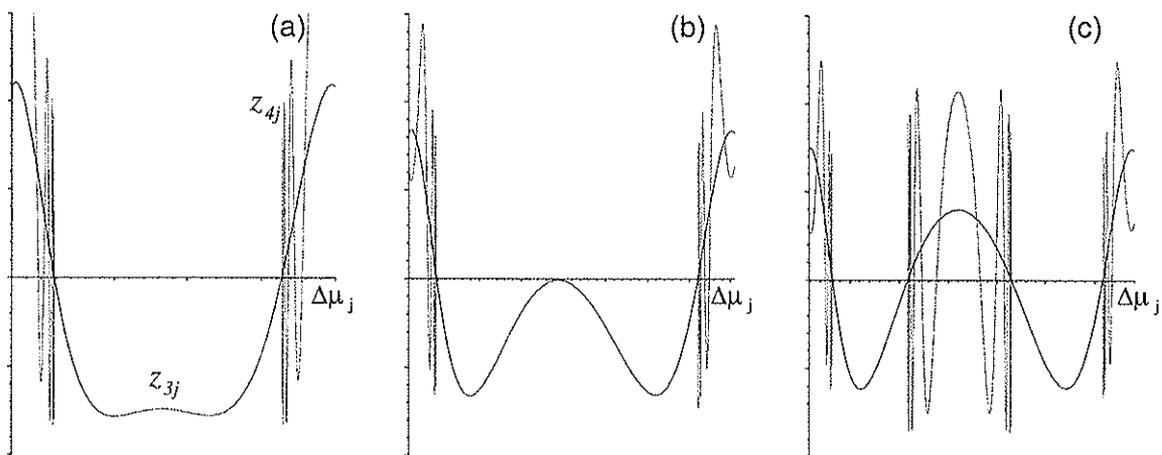
acumulações de  $H_8$  em  $H_6$  ocorrem pelo lado interno da família  $H_6$ .

O surgimento da segunda família  $H_6$  não pode ser explicada pela análise teórica feita na seção 8.1, porque essa análise está baseada num sistema de codimensão 1, e o fenômeno observado ocorre porque existem dois parâmetros sendo variados ao mesmo tempo. Porém, se inferirmos que um segundo parâmetro (no nosso caso o



**Figura 8.12:** (a) Acumulação de  $H_8$  pelo lado externo (a) e interno (b) de  $H_6$  medidas em  $\beta = 19,8031$  e  $\beta = 41,52$ , respectivamente, próximos aos vértice das família  $H_6$  indicado pelos asteriscos na figura 8.11(a). Em (b), a escala da esquerda referece à curva  $d_8$ , e a da direita à  $d_6$ .

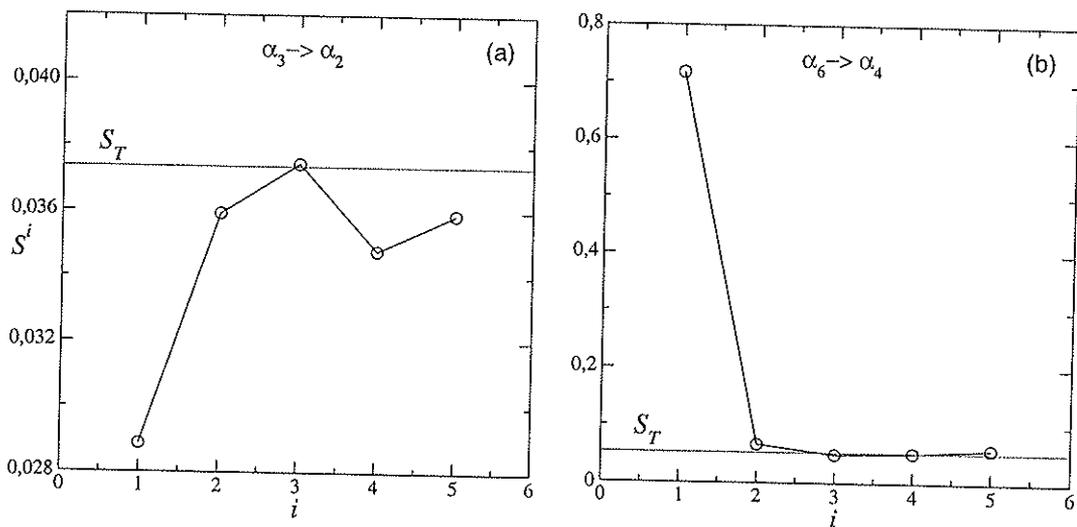
$\beta$ ) agisse nas constantes  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  da equação (8.13), podemos mostrar que a teoria permite a bifurcação que acabamos de examinar através da medida  $d$ . A figura 8.13 é o resultado da solução de  $z_{3j}$  e  $z_{4j}$  dada pela equação (8.13), quando variamos  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  mantendo todas as demais constantes fixas. Como  $j$  é arbitrário, este resultado não se restringe para acumulações de  $H_8$  em  $H_6$ , caso em que  $j = 2$ , mas para



**Figura 8.13:** Soluções da equação (8.13) para  $z_{3j}$  e  $z_{4j}$  com  $a = -4$ ,  $m = 6$ ,  $\lambda = 10$ ,  $\rho = 5$ ,  $\omega = 50$ ,  $p = q = h = 1$  e (a)  $\varphi_1 = \varphi_2 = 1,00$ , (b)  $\varphi_1 = \varphi_2 = -1,08$  e (c)  $\varphi_1 = \varphi_2 = -2$ . Este resultado mostra que a bifurcação de  $H_6$  da figura 8.11 é prevista pela teoria.

acumulações de  $H_{12}$  em  $H_9$ , etc. Portanto, a medida  $d_6$ , apresentada na figura 8.11(b-d), é prevista pela teoria se  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  forem variáveis pelo parâmetro  $\beta$ , ou seja,  $\varphi_1 = \varphi_1(\beta)$  e  $\varphi_2 = \varphi_2(\beta)$ .

A lei de escala teórica  $S_T$  é válida, como discutido anteriormente, para aproximações de órbitas homoclínicas subsidiárias em outras subsidiárias. Porém, devemos lembrar que essa lei de escala é válida para convergências de órbitas ocorrendo em regiões muito próximas da órbita homoclínica primária. Nessas regiões, as acumulações ocorrem em intervalos de parâmetros muito pequenos, o que cria uma dificuldade para medí-los com precisão, para determinar a escala  $S^i$ . Outro fator importante é a ordem da subsidiária. Quanto maior a ordem da subsidiária  $H_{(n-1)j}$ , em relação à primária  $H_j$ , menores serão os intervalos dos parâmetros da subsidiária de acumulação  $H_{nj}$ .



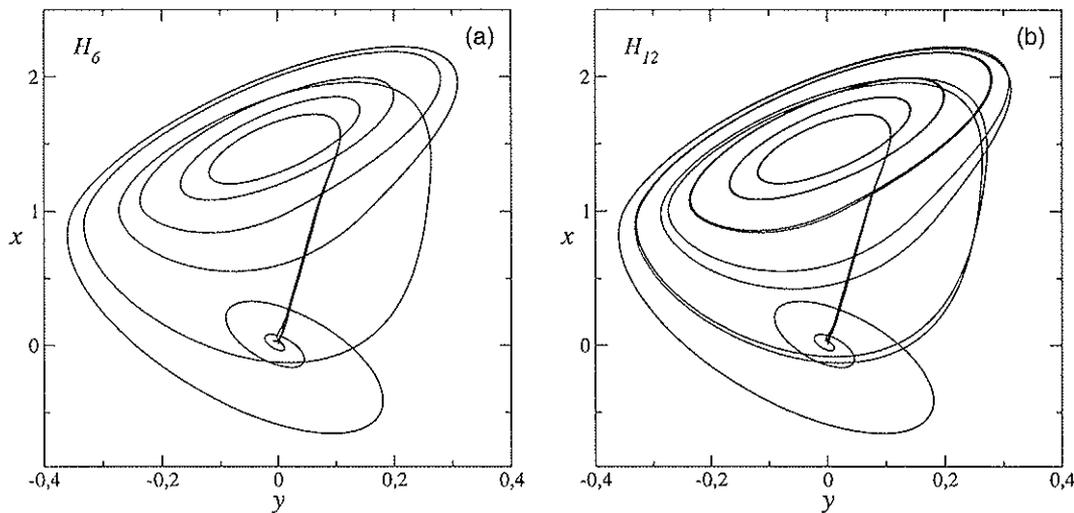
**Figura 8.14:** Aproximação da escala medida  $S$  na escala teórica  $S_T$ , definidas na equação (8.18) quando  $i \rightarrow \infty$ , para a acumulação da subsidiária  $H_3$  na subsidiária  $H_2$  pertencentes à principal  $H_1$  (a), e da subsidiária  $H_6$  na subsidiária  $H_4$  pertencentes à principal  $H_2$  (b). Dados na tabela 8.2.

A figura 8.14 mostra a escala medida  $S^i$  se aproximando da escala teórica  $S_T$ , para a acumulação das subsidiárias  $H_{3j}$  na  $H_{2j}$ . Em (a) apresentamos a acumulação das subsidiárias  $H_3$  na subsidiária  $H_2$  ( $\alpha_2 = 6,199654$ ,  $\beta = 7,5$ ), nas proximidades da primária  $H_1$  ( $\alpha_1 = 6,199655$ ,  $\beta = 7,5$ ), convergindo para a escala teórica  $S_T = 0,0374$  ( $\lambda = 1,77010$ ,  $\omega = 1,69222$ ). E em (b), a acumulação das subsidiárias  $H_6$  na subsidiária  $H_4$  ( $\alpha_4 = 15,401$ ,  $\beta = 40$ ), nas proximidades da primária  $H_2$  ( $\alpha_2 = 15,406$ ,  $\beta = 40$ ), convergindo para  $S_T = 0,0594$  ( $\lambda = 1,77010$ ,  $\omega = 1,69222$ ).

$S_T = 0,0374$ $\beta = 7,5$				$S_T = 0,0594$ $\beta = 40$			
$i$	$H$	$\alpha^i$	$S^i$	$i$	$H$	$\alpha^i$	$S^i$
1	6	6,1996556957198		2	15	15,4059830506267	
2	6	6,1996543917712		4	15	15,4006416115	
0	3	6,1996245238901		0	6	15,3998743687	
1	3	6,1996535232311	0,0289	1	6	15,4003084513	0,7173
2	3	6,1996543605248	0,0359	2	6	15,4006198014	0,0666
3	3	6,1996543906038	0,0375	3	6	15,4006405259	0,0496
4	3	6,1996543917304	0,0348	4	6	15,4006415544	0,0523
5	3	6,1996543917695	0,0357	5	6	15,4006416082	0,0596
6	3	6,1996543917710		6	6	15,4006416114	

**Tabela 8.2:** Valores dos parâmetros das órbitas homoclínicas e do valor obtido de  $S^i$  utilizados na figura 8.14.

Os valores dos parâmetros medidos das órbitas homoclínicas para a determinação de  $S^i$  estão apresentadas na tabela 8.2

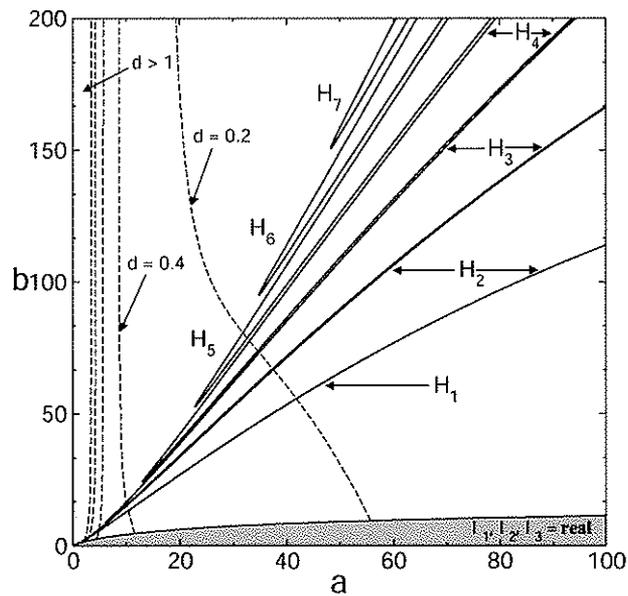


**Figura 8.15:** (a) Órbita homoclínica primária  $H_6$ . (b) Órbita homoclínica subsidiária  $H_{12}$ . A  $H_{12}$  faz parte do conjunto de órbitas que está se acumulando em  $H_6$ .

Na figura 8.15 estão uma órbita homoclínica da família  $H_6$  e sua subsidiária da família  $H_{12}$ . Note a semelhança entre elas, comum a todas as subsidiárias.

### 8.2.4 Estruturas Homoclínicas

Inicialmente, discutiremos as curvas de bifurcações homoclínicas, no espaço dos parâmetros, encontradas em [35]. Para isso, obtivemos a figura 8.16 que mostra curvas de bifurcações de famílias primárias principais nesse espaço. As linhas tracejadas indicam os valores de  $\beta$  e  $\alpha$  com o parâmetro  $\delta = \rho/\lambda$  constante. O teorema de Shilnikov não pode ser aplicado na região em cinza, porque  $\delta > 1$ , e na região em marrom, porque todos os autovalores são reais.



**Figura 8.16:** Distribuição do valor da condição de Shilnikov  $\delta$  no espaço dos parâmetros do sistema Double Scroll. Em cinza  $\delta > 1$ . Em marrom escuro todos os autovalores são reais

Em [34] Gochenko demonstrou a impossibilidade de uma descrição completa da organização das curvas de bifurcações homoclínicas. Em [35] esse pesquisador apresentou estudos com codimensão 2 com descrições parciais referentes às curvas das órbitas subsidiárias,  $H_2$  e  $H_3$ , nas proximidades da curva  $H_1$ , para o limite  $\delta \rightarrow 1$ . Mas, esses resultados não podem ser estendidos para as outras órbitas primárias cujas curvas de bifurcação não atingem a região com  $\delta \rightarrow 1$ , conforme vemos na figura 8.16.

Nesta seção faremos uma análise de codimensão 2, buscando entender a organização das curvas de órbitas homoclínicas, contemplando todo o espaço dos parâmetros. Assim, revelaremos estruturas, presentes em todo o espaço, que ainda não haviam sido identificadas.

Foi visto na seção 8.2.2 que as famílias primárias principais determinam as regiões onde estão os diferentes tipos de órbitas homoclínicas, formando uma estrutura que organiza a distribuição das órbitas do ponto de vista macroscópico. Entenda-se aqui, como macroscópico, a escala em que seja possível identificar as famílias primárias principais, no espaço dos parâmetros. Nas regiões compreendidas entre duas famílias primárias principais de ordens consecutivas, existe uma infinidade de outras órbitas homoclínicas primárias e subsidiárias, formando uma complexa organização que só pode ser vista em escala microscópica. A estrutura de órbitas homoclínicas mais simples e geral que possa descrever essa complexa organização chamamos de estruturas homoclínicas.

Na seção 8.1 foi demonstrado que para cada órbita homoclínica primária, que esteja em acordo com o teorema de Shilnikov, o sistema apresenta infinitas outras órbitas subsidiárias seguindo uma regra de acumulação regida por uma lei de escala nas proximidades da primária. Essa análise foi feita para um sistema de codimensão 1 nas proximidades da órbita primária, o que limita o seu alcance a uma escala microscópica. Por exemplo, não é capaz de prever que existam outras primárias.

As observações feitas no espaço dos parâmetros do circuito Double Scroll, apresentadas nas seções 8.2.2 e 8.2.3, revelaram que as órbitas homoclínicas estão agrupadas em conjuntos contínuos que chamamos de famílias, e que algumas dessas famílias determinam as disposições básicas das demais, no espaço dos parâmetros de codimensão 2. Contudo, não é capaz de descrever detalhes de como elas estão organizadas. O limite intrínseco imposto pela precisão computacional, restringe seu estudo a uma escala macroscópica.

Portanto, as duas formas de análises não são completas. O ideal seria termos uma teoria de codimensão 2 que amparasse fenômenos observados com precisão infinita. O que faremos aqui é verificar se os fenômenos observados, em escala macroscópica, não violam a teoria de codimensão 1, e que as previsões feitas pela teoria, em escala microscópica, possam ser aceitas como reais, com base nas observações. Assim, estenderemos a validade da teoria de codimensão 1 para a codimensão 2, e as observações com precisão limitada, para as escalas microscópicas.

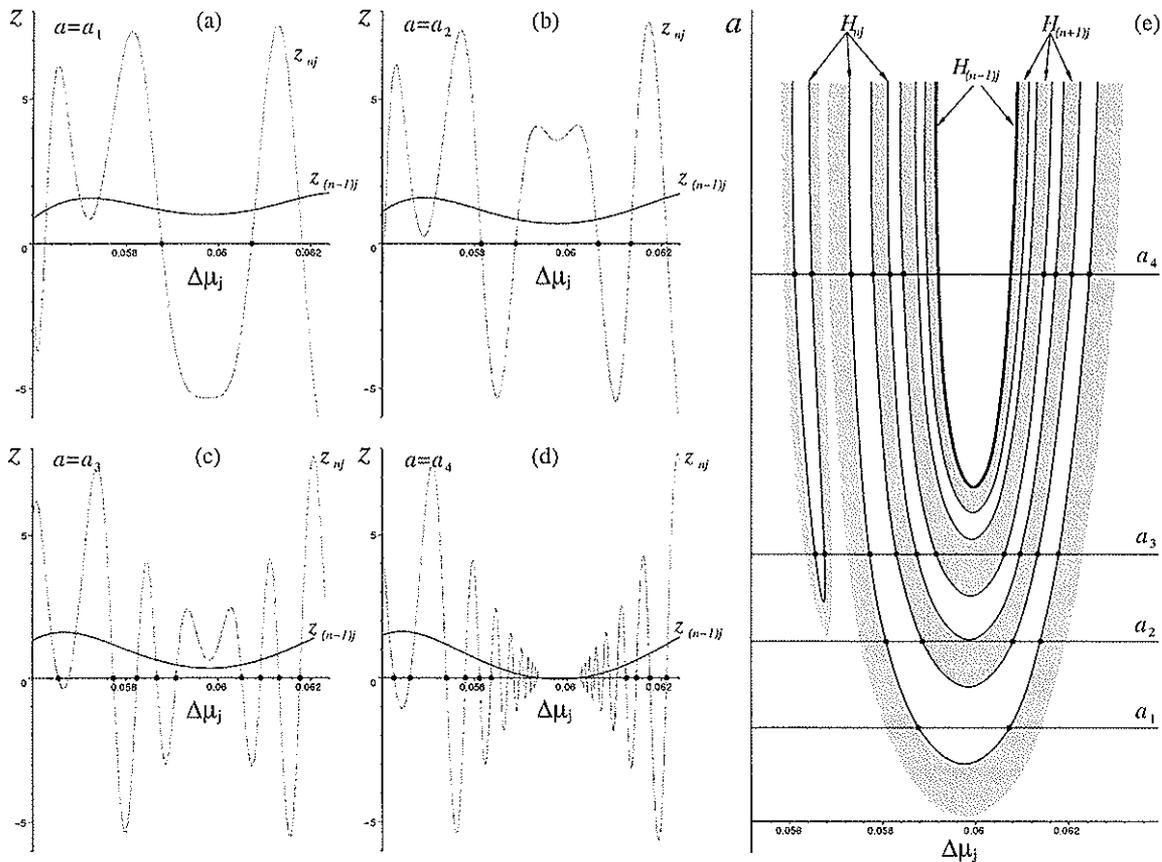
A equação (8.19) é a solução da variedade instável nas proximidades da órbita homoclínica, resolvida na seção 8.1.2. As constantes  $a$ ,  $m$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  são constantes que dependem do fluxo. Para fazer uma análise de codimensão 2, é necessário inferir mais um parâmetro na equação (8.19). Como as constantes dependem do fluxo e o fluxo depende dos parâmetros, é razoável afirmar que um segundo parâmetro deve fazer com que elas mudem de valor. Neste caso, elas deixam de ser constantes e

passam a depender do valor desse segundo parâmetro. No circuito Double Scroll, isso equivale a dizer que, para um determinado valor fixo de  $\beta$ , elas assumem um valor fixo e se mantêm para pequenas variações de  $\alpha$ . Quando  $\beta$  muda, assumem outros valores, mas continuam constantes para pequenas variações de  $\alpha$ . A equação que descreve a dependência delas com  $\beta$  é desconhecida. Mas podemos variá-las, arbitrariamente, para verificar se os fenômenos observados concordam com a solução (8.19).

$$\begin{pmatrix} r_{nj} \\ z_{nj} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} r_{H_j} + a\Delta\mu_j \\ m\Delta\mu_j \end{pmatrix}, & n = 1 \\ \begin{pmatrix} r_j + pr_{(n-1)j} \left(\frac{z_{(n-1)j}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{(n-1)j}}\right) + \varphi_1\right) \\ z_j + qr_{(n-1)j} \left(\frac{z_{(n-1)j}}{h}\right)^{\rho/\lambda} \cos\left(\frac{\omega}{\lambda} \ln\left(\frac{h}{z_{(n-1)j}}\right) + \varphi_2\right) \end{pmatrix}, & n > 1 \end{cases} \quad (8.19)$$

Esse tipo de análise foi feita na seção 8.2.3 para mostrar que o dobramento da medida  $d$ , apresentada na figura 8.11(b), (c) e (d), é previsto pela teoria, se inferirmos que o parâmetro  $\beta$  tem influência sobre  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , naquela região do espaço dos parâmetros. A solução de  $z_{3j}$  (equivalente a  $d_6$  para  $j = 2$ ), apresentada na figura 8.13 (a), (b) e (c), confirmou essa previsão. Além do mais, as acumulações pelo lado externo e interno verificadas na figura 8.12(a) e (b), também foram verificada através da solução de  $z_{4j}$  (equivalente a  $d_8$  para  $j = 2$ ).

Nas figuras 8.17(a), (b), (c) e (d),  $z_{(n-1)j} = 0$  pode ser interpretada como a solução de uma órbita homoclínica primária, se  $n = 2$ , ou de uma subsidiária, se  $n > 2$ . A solução  $z_{nj} = 0$  é sempre de uma subsidiária. A figura 8.17(e), representa as famílias de órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros de codimensão 2, onde  $a$  varia em função do segundo parâmetro. A curva desenhada com a linha grossa é a família  $H_{(n-1)j}$ , com a linha fina é a  $H_{nj}$  e as regiões em cinza representam as regiões permitidas para as famílias subsidiárias de ordem igual ou superior à  $H_{(n+1)j}$ . As regiões em branco, entre famílias consecutivas  $H_{nj}$ , são regiões proibidas para as órbitas homoclínicas do tipo  $H_n$ . Os valores de  $a$  referentes às curvas de  $z$ , em (a), (b), (c) e (d), estão representadas pelas linhas horizontais em (e). A figura (e) foi construída a partir das demais. Para  $a = a_1$ ,  $z_{(n-1)j}$  é positivo, não existindo solução para  $H_{(n-1)j}$ , e  $z_{nj}$  possui duas soluções para  $H_{nj}$  (representado por dois pontos em (a) e em (e)). Note que em (e) não existe  $H_{(n-1)j}$  e aparecem duas órbitas  $H_{nj}$ , uma no ramo esquerdo e outra no direito. As subsidiárias  $H_{(n+1)j}$  se acumulam



**Figura 8.17:** (a), (b), (c) e (d) são as soluções de  $z_{nj}$  e  $z_{(n-1)j}$  para diferentes valores da constante  $a$ . Os pontos marcam os parâmetros em que existem órbitas homoclínicas. (e) Estrutura homoclínica resultante da análise das soluções de  $z_{nj}$  e  $z_{(n-1)j}$ .

nelas pelo lado externo porque, para esses valores de  $\Delta\mu_j$ ,  $z_{nj}$  é positivo. Pelo lado interno não existem órbitas homoclínicas do tipo  $H_n$ , porque  $z_{nj}$  é negativo. Para  $a = a_2$ , surgem mais duas soluções que dão origem a uma segunda família  $H_{nj}$ . Em (e) vemos que as acumulações de  $H_{(n+1)j}$  se dão desta vez pelo lado interno em virtude de  $z_{nj}$  ser positivo nessa região e negativo no lado externo, como pode ser visto em (b). As acumulações pelos lados externos e internos vão se intercalando à medida que novas famílias vão sendo formadas. Para  $a = a_3$ , surge uma família  $H_{nj}$  que não envolve a  $H_{(n-1)j}$ . Famílias com essa características foram verificadas, como as  $H_8$  da figura 8.10, que estão do lado esquerdo da primária principal  $H_4$ . Em (d),  $a = a_4$ , surge a órbita  $H_{(n-1)j}$ , que pode ser tanto uma primária como uma subsidiária, como discutido anteriormente. Junto com ela surgem várias órbitas  $H_{nj}$  se acumulando nela pelo lado externo. A região entre os ramos esquerdo e

direito é uma área proibida para órbitas homoclínicas, porque  $z_{(n-1)j}$  é negativo nesse intervalo. A família  $H_{nj}$ , formada à esquerda de  $H_{(n-1)j}$  na figura (e), apresenta a mesma estrutura que envolve a  $H_{(n-1)j}$ .

O circuito Double Scroll permitiu observar que as curva das famílias, tanto das primárias como das subsidiárias, são exatamente iguais às prevista pela teoria. Outra congruência, da análise com a observação, é que para cada órbita homoclínica deve existir outras se acumulando sobre ela, o que está de acordo com a figura 8.17(e). Isso nos permite confiar nos resultados desta análise, ainda que não possa ser observado, com propriedade, em virtude do limite imposto pela precisão das simulações. Assim, a figura 8.17(e) representa a estrutura comum a todas as famílias do espaço dos parâmetros de codimensão 2. Esta estrutura explica todo o cenário (macro e micro) observado no circuito Double Scroll. E, como está amparada pela teoria, acreditamos que seja válida para todos os sistemas que estão em acordo com o teorema de Shilnikov.



## Capítulo 9

# Experiências com Órbitas Homoclínicas

As órbitas homoclínicas de Shilnikov são importantes em diferentes áreas em que a dinâmica caótica está intrinsicamente ligada a elas. Essas órbitas governam a dinâmica de sistemas de descargas incandescente [23], dos pulsos de neurônios [8, 24], da intermitência em artérias de coelhos [25], dos fenômenos de ruído induzido [26], de osciladores eletroquímicos [27], e de reações químicas [28, 29, 22]. No laser  $\text{CO}_2$ , órbitas heteroclínicas são responsáveis pelo tempo de retorno da trajetória [30], no entanto, as trajetórias na vizinhança dessa órbita podem ser analisadas da mesma forma com que analisamos a órbita homoclínica.

Existem muitos trabalhos experimentais em que a dinâmica é associada às órbitas homoclínicas. No entanto, essa associação é feita com base na análise teórica das equações do sistema, ou, quando não se pode extrair do sistema suas equações, com base na forma do atrator caótico que descreve trajetórias similares a das órbitas homoclínicas de Shilnikov. Isso se deve à dificuldade em medi-las. A importância das experiências, que propomos, está em mostrar a existência de órbitas homoclínicas em um sistema real e da sua influência na dinâmica.

Neste capítulo, propomos três experiências que farão uso de um mesmo aparato experimental. A primeira visa determinar as órbitas homoclínicas no circuito Double Scroll. A segunda, levantar as curvas das famílias de órbitas homoclínicas primárias principais. E a terceira experiência verifica a relação das órbitas homoclínicas com a fronteira, no espaço dos parâmetros, entre os atratores caóticos tipo Rössler e o Double Scroll. Experiências com o circuito Double Scroll têm sido realizadas por pesquisadores do Instituto de Física da USP no laboratório de Fenômenos Não-

Lineares, coordenado pelo Prof. José Carlos Sartorelli [40, 83]. As experiências propostas podem ser realizadas nesse laboratório que já conta com equipamentos apropriados para isso.

## 9.1 Aspectos Teóricos Gerais

Nesta seção, vamos discutir a teoria, que já foi apresentada, ressaltando os pontos essenciais, tanto do circuito Double Scroll como do método de obtenção das órbitas homoclínicas, suficientes para a compreensão dos experimentos. Como a teoria foi desenvolvida utilizando coordenadas adimensionais, faz-se necessário uma interpretação física dos resultados para que se possa usar a teoria no experimento.

### 9.1.1 Coordenadas Adimensionais $\times$ Coordenadas Reais

Na figura 9.1(a) está o circuito Double Scroll na sua representação simplificada e, em (b), a curva característica do elemento  $R_N$ .  $m_0$  e  $m_1$  são os coeficientes angulares

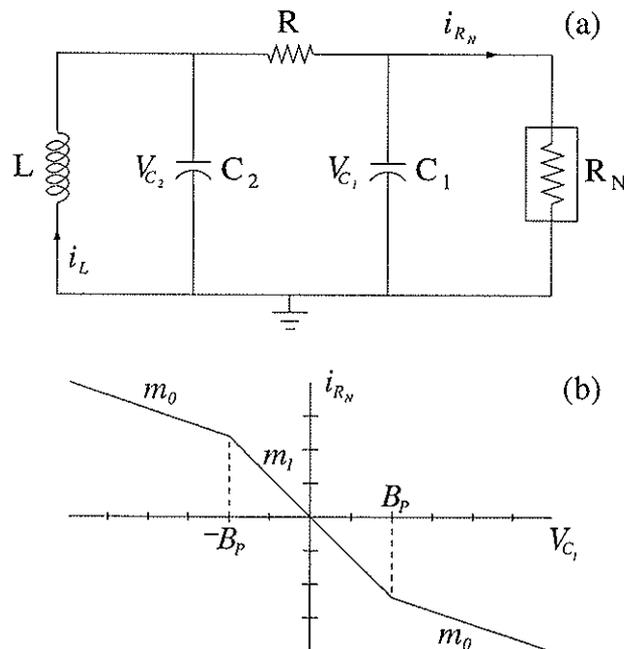


Figura 9.1: (a) Circuito Double Scroll. (b) Curva característica do elemento  $R_N$ .

e  $B_p$  é o valor da tensão em que a curva muda de inclinação. O circuito eletrônico que desempenha o papel de  $R_N$  está apresentado na seção 9.5. As relações entre as

grandezas envolvidas, na solução do circuito, e as variáveis adimensionais são dada por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{V_{C_1}}{B_p}, & y &= \frac{V_{C_2}}{B_p}, & z &= \frac{Ri_L}{B_p}, \\ \alpha &= \frac{C_2}{C_1}, & \beta &= \frac{R^2 C_2}{L}, & \tau &= \frac{t}{RC_2}, \end{aligned} \quad (9.1)$$

$$a = Rm_1 \quad e \quad b = Rm_0.$$

Como foi discutido no capítulo 2, cada componente equivale a um parâmetro de controle.  $R_N$  contribui com dois parâmetros, as inclinações  $m_0$  e  $m_1$ , sendo, no total, sete parâmetros de controle,  $R$ ,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $L$ ,  $m_0$ ,  $m_1$  e  $B_p$ . As variáveis adimensionais mostram que o sistema pode ser reduzido a quatro parâmetros:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$  e  $b$ . Fixando  $a$  e  $b$  ficamos somente com dois parâmetros de controle. No sistema real, isso pode ser obtido mantendo fixos  $R$ ,  $L$ ,  $m_0$  e  $m_1$ . Assim, os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  equivalem a ajustes nos capacitores  $C_1$  e  $C_2$ .

O sistema apresenta três pontos fixos,  $P_-$ ,  $P_0$  e  $P_+$ , cada um relacionado com uma inclinação da curva característica de  $R_N$ . No sistema adimensional, para os valores fixos de  $a = -\frac{8}{7}$  e  $b = -\frac{5}{7}$ ,  $P_- = (1,5, 0, -1,5)$ ,  $P_0 = (0, 0, 0)$  e  $P_+ = (-1,5, 0, 1,5)$ . Dado os valores das inclinações de  $m_0$  e  $m_1$ , com as relações apresentadas em 9.1 determina-se  $R$ . O indutor deve ser escolhido de tal forma que  $C_1$  e  $C_2$  sejam praticáveis. Pode-se convenientemente escolher  $B_p = 1V$  e os pontos fixos, no sistema de coordenadas naturais, serão dados por

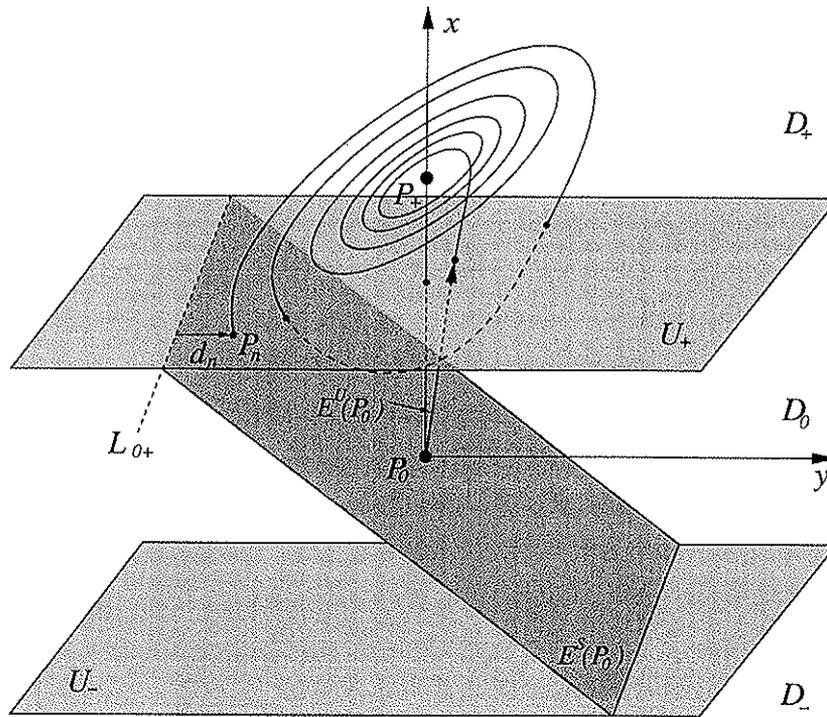
$$P_- = \left(1,5V, 0V, \frac{-1,5}{R}A\right), \quad P_0 = (0V, 0V, 0A) \quad e \quad P_+ = \left(-1,5V, 0V, \frac{1,5}{R}A\right). \quad (9.2)$$

A órbita homoclínica, a ser estudada neste experimento, é formada pela junção das variedades estável e instável do ponto fixo  $P_0$ .

### 9.1.2 Subespaços e as Manifestações do Circuito

Para detectar as órbitas homoclínicas, assim como fizemos para determiná-las numericamente, vamos tirar proveito da topologia dos subespaços.

Na prática, não é possível calcular  $d_n$  (distância indicada na figura 9.2 e definida na seção 7.1.1) com precisão, porque a medida da trajetória ocorre em intervalos de tempo discretos limitados pelo equipamento utilizado. Além do mais, existe o ruído do sistema. Por outro lado, ainda que tivéssemos medidas precisas da dinâmica



**Figura 9.2:**  $E^U(P_0)$  e  $E^S(P_0)$  são, respectivamente, os subespaços instável e estável de  $P_0$ . Dada uma condição inicial em  $E^U(P_0)$ , a órbita homoclínica ocorre quando a trajetória penetra em  $E^S(P_0)$  através da linha  $L_{0+}$ . Nesse caso,  $d_n=0$ .

em intervalos suficientemente pequenos, teríamos problemas em determinar a linha  $L_{0+}$ , dado a tolerância dos componentes. Lembramos que  $L_{0+}$  é a intersecção entre o subespaço estável  $E^S(P_0)$  e a fronteira  $U_+$  entre os domínios  $D_0$  e  $D_+$ . A variação do capacitor a intervalos discretos é outro agravante. Por esses motivos, dificilmente verificaremos  $d_n = 0$ , ou seja, a órbita homoclínica com seu exato conjunto de parâmetros. O que precisa ser observado é o comportamento da trajetória. Se ela passar de  $D_+$  para  $D_0$  e retornar para  $D_+$ , é porque estamos na situação em que  $d_n > 0$ , se for para  $D_-$ , então  $d_n < 0$ . Isso é causado pelo subespaço instável  $E^U(P_0)$  que de um lado de  $E^S(P_0)$  conduz o fluxo para  $D_+$  e do outro, para  $D_-$ . São essas as manifestações do circuito que indicarão o sentido em que o parâmetro deve ser variado para obtermos a órbita homoclínica procurada (correspondente a  $d_n = 0$ ).

## 9.2 Experimento I: Órbitas Homoclínicas

**Objetivo**

Nesta primeira experiência, vamos apresentar uma solução prática para determinar o conjunto que forma a variedade instável do circuito Double Scroll. Em seguida propomos um aparato experimental capaz de detectar a presença de uma órbita homoclínica, do tipo  $H_n$ , de qualquer ordem. Esta experiência também servirá de base para a realização da Experiência II apresentada na seção 9.3.

**Introdução Teórica**

Existem duas grandes dificuldades que devem ser vencidas para detectar uma órbita homoclínica. A primeira é que deve-se variar os parâmetros de controle com passos muito pequenos. A segunda, nem sempre possível em sistemas reais, é que deve-se escolher uma condição inicial na variedade instável, para verificar se ela forma uma órbita homoclínica.

Podemos simplificar o espaço dos parâmetros se, além de  $R$ ,  $L$ ,  $m_0$  e  $m_1$ , mantivermos fixo  $C_2$ . Assim,  $C_1$  será o único parâmetro de controle, o que é equivalente a fixarmos  $\beta$  e variarmos  $\alpha$  do sistema adimensional. Pode-se usar um variac (capacitor variável) em  $C_1$  e, com isso, alterar sua capacitância de modo contínuo.

O ponto fixo  $P_0$ , ao qual está associada a órbita homoclínica, está localizado na origem do espaço de fase, ou seja, as tensões em  $V_{C_1}$  e  $V_{C_2}$ , e a corrente em  $i_L$  são nulas. Para conseguir essa situação, basta aterrar os capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , eliminando as tensões sobre eles, que necessariamente a corrente no indutor será nula, também. Isso pode ser feito por um relé que abre e curto-circuita os capacitores simultaneamente. Na seção 9.5 apresentamos maiores detalhes sobre o circuito eletrônico. Se o sistema fosse ideal, essa situação se manteria indefinidamente, já que  $V_{C_1} = 0$  é a única situação em que  $R_N$  não fornece energia para o sistema, como pode ser visto pela sua curva característica (figura 9.1(b)). Mas, graças à instabilidade inerente a um sistema real, o sistema perde o equilíbrio deixando  $P_0$  através de sua variedade instável. E, dessa forma, é possível garantir uma trajetória sobre a variedade. Variando o variac, segundo as manifestações do circuito, e aterrando o sistema, de forma sistemática, cada vez que fizermos uma nova medida, será possível encontrar parâmetros próximos aos parâmetros em que existe uma órbita homoclínica.

**Parte Experimental**

A figura 9.3 mostra um diagrama em blocos, simplificado, do funcionamento operacional do experimento para detectar uma órbita homoclínica. O motor de

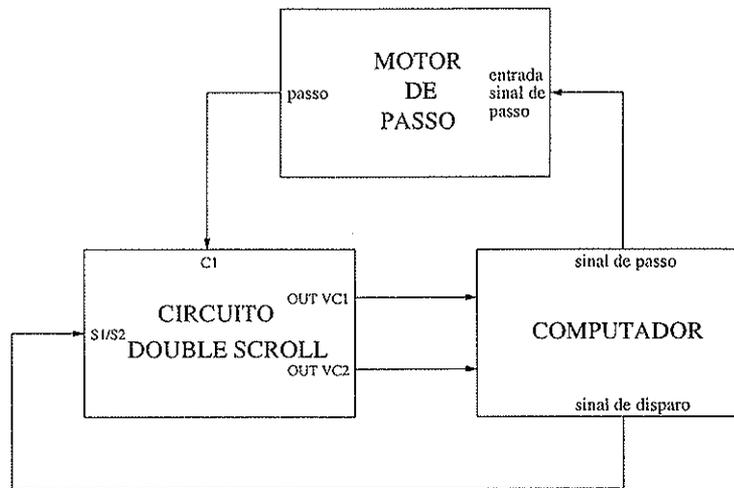


Figura 9.3: Diagrama em blocos da experiência 1.

passo é capaz de aumentar e diminuir o valor de  $C_1$ , mediante um sinal de disparo enviado pelo computador. O sinal de disparo faz com que as chaves  $S_1$  e  $S_2$  se fechem, por um tempo suficiente para descarregar completamente os capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , e se abram, simultaneamente. O sistema é todo controlado pelo computador que é gerenciado por um programa capaz de tomar decisões em função das tensões  $V_{C_1}$  e  $V_{C_2}$  medidas.

É necessário, à priori, relacionar o número de passos com a capacitância do capacitor, para que, durante a experiência, não seja necessário medi-lo cada vez que variarmos sua capacitância.

Já com a informação da ordem da órbita homoclínica que se quer detectar, o computador manda sinais de passos para o motor de passo até que o capacitor  $C_1$  atinja um valor em que o comportamento dinâmico esteja num regime caótico tipo Rössler. Com isso, garantimos que o capacitor está com um valor superior ao necessário para a órbita homoclínica desejada. Então, o computador manda um sinal de disparo para o circuito e passa a medir  $V_{C_1}$  e  $V_{C_2}$ . As tensões medidas correspondem à uma trajetória descrita pela variedade instável de  $P_0$ . Após a trajetória ter dado o número de voltas, em torno de  $P_+$  ou de  $P_-$ , igual a ordem da órbita desejada, o programa analisa a divergência do sistema, verificando a sua manifestação. Para eliminar o problema da instabilidade do sistema, faz-se pelo menos uma centena de disparos. Neste primeiro conjunto de medidas, o programa identificará que 100% das medidas indicam  $d_n > 0$ , já que ele está operando no atrator tipo Rössler. Então o computador manda um sinal para o motor de passo, que diminui a capacitância

de  $C_1$ . Este procedimento deve ser repetido até que as medidas acusam 50% dos desvios com  $d_n > 0$  e os outro 50%, com  $d_n < 0$ . Podemos considerar esse resultado como sendo a detecção da órbita homoclínica.

### 9.3 Experimento II: Famílias de Órbitas Homoclínicas

#### Objetivo

O experimento I, apresentado na seção 9.2, permite determinar uma órbita homoclínica fazendo-se uma varredura de codimensão 1 do parâmetro (varia-se apenas um parâmetro, o  $C_1$ ). Neste experimento propomos verificar as órbitas homoclínicas principais, no espaço dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  ou, equivalentemente,  $C_1$  e  $C_2$ . Como resultado espera-se obter as famílias de órbitas homoclínicas principais.

#### Introdução Teórica

Como foi visto na seção 8.2, as órbitas homoclínicas estão espalhadas numa vasta região do espaço dos parâmetros, desde as regiões em que existem atratores

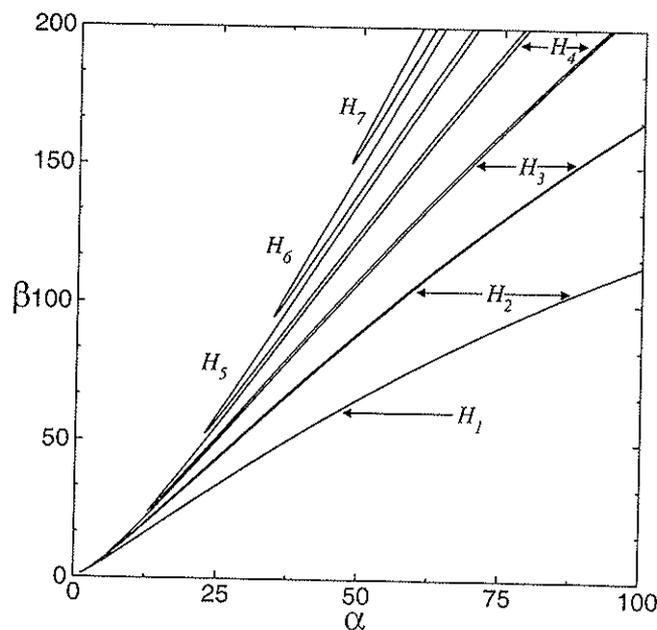


Figura 9.4: Famílias primárias principais de órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros.

caóticos e periódicos, até as regiões onde o sistema diverge. Elas formam conjuntos contínuos, no espaço dos parâmetros, às quais damos o nome de curvas de bifurcação, ou simplesmente de famílias. As famílias de órbitas homoclínicas são os conjuntos sobre os quais concentram-se as demais órbitas  $H_n$ . A figura 9.4 mostra o resultado da análise numérica das órbitas homoclínicas primárias principais. A fronteira entre os atratores, tipo Rössler e Double Scroll, encontra-se nas proximidades de uma linha imaginária que une os vértices das famílias de órbitas homoclínicas. Do lado esquerdo da linha está o atrator tipo Rössler e do direito, o Double Scroll.

### Parte Experimental

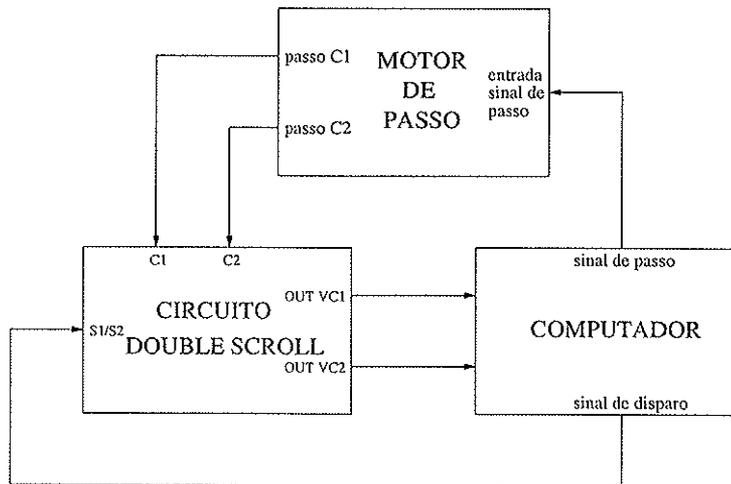


Figura 9.5: Diagrama em blocos da experiência II.

A figura 9.5 mostra o diagrama em blocos da experiência II. Note que ele é exatamente o mesmo da experiência I, a menos da inclusão da saída passo  $C_2$ , que serve para controlar a capacitância de  $C_2$ . O início desta experiência é feita exatamente igual à parte prática da experiência I. Após a órbita ser detectada, o capacitor  $C_2$  deve ser variado, e o procedimento é reinicializado mantendo-se fixo  $C_2$ . Se a capacitância de  $C_2$  sofrer um aumento, conseqüentemente haverá um aumento de  $\beta$  e  $\alpha$ , como pode ser visto pelas relações 9.1. Portanto, para detectar a órbita homoclínica para esse novo  $\beta$  deve-se aumentar o capacitor  $C_1$  até que a dinâmica se comporte como o atrator caótico tipo Rössler, e repete-se o procedimento da experiência I. Se o capacitor  $C_2$  sofrer uma diminuição, então deve-se diminuir  $C_1$  até encontrar o atrator tipo Rössler.

## 9.4 Experimento III: Órbitas Homoclínicas na Fronteira Caos-Caos

### Objetivo

O caos homoclínico ocorre em um sistema que tem comportamento caótico devido à existência de uma órbita homoclínica. No fluxo, em sistemas que atendem ao teorema de Shilnikov, as órbitas homoclínicas estão diretamente associadas à existência de órbitas periódicas, formando a ferradura de Smale, que é um ícone em caos. Nesta experiência propomos determinar as órbitas homoclínicas que estão relacionadas com a transição entre os atratores tipo Rössler e Double Scroll.

### Introdução Teórica

O circuito Double Scroll apresenta essencialmente dois atratores caóticos, o tipo Rössler e Double Scroll. Como comentado na introdução teórica do experimento II, a região à esquerda dos vértices, das famílias apresentadas na figura 9.4, corresponde ao conjunto de parâmetros em que ocorre o atrator tipo Rössler e à direita, o Double Scroll. Esses vértices estão localizados numa região próxima à fronteira entre esses atratores caóticos. Isso mostra que essas órbitas estão relacionadas com a transição caos-caos desse circuito.

Uma característica importante desse circuito é que ele apresenta simetria ímpar  $f(x) = -f(-x)$ . Isso permite uma coexistência dos dois atratores tipo Rössler. Mantendo-se o parâmetro  $\beta$  fixo e variando-se  $\alpha$ , positivamente, eles crescem no espaço de fase até se tocarem, e desaparecem, ao formar o atrator Double Scroll. Esse encontro se dá exatamente no subespaço estável  $E^S(P_0)$ . Assim, no exato instante desse encontro, não há atratores caóticos, mas sim um transiente caótico que leva as trajetórias para a origem. Conseqüentemente, o conjunto que forma a variedade instável de  $P_0$  convergirá para ele também, formando uma órbita homoclínica complexa e topologicamente parecida com o transiente caótico.

### Parte Experimental

A experiência é feita usando uma montagem que deve seguir o mesmo esquema em blocos da figura 9.4. Primeiramente calibramos, externamente, os capacitores  $C_1$  e  $C_2$  para obter o atrator tipo Rössler. Com os capacitores calibrados, começamos

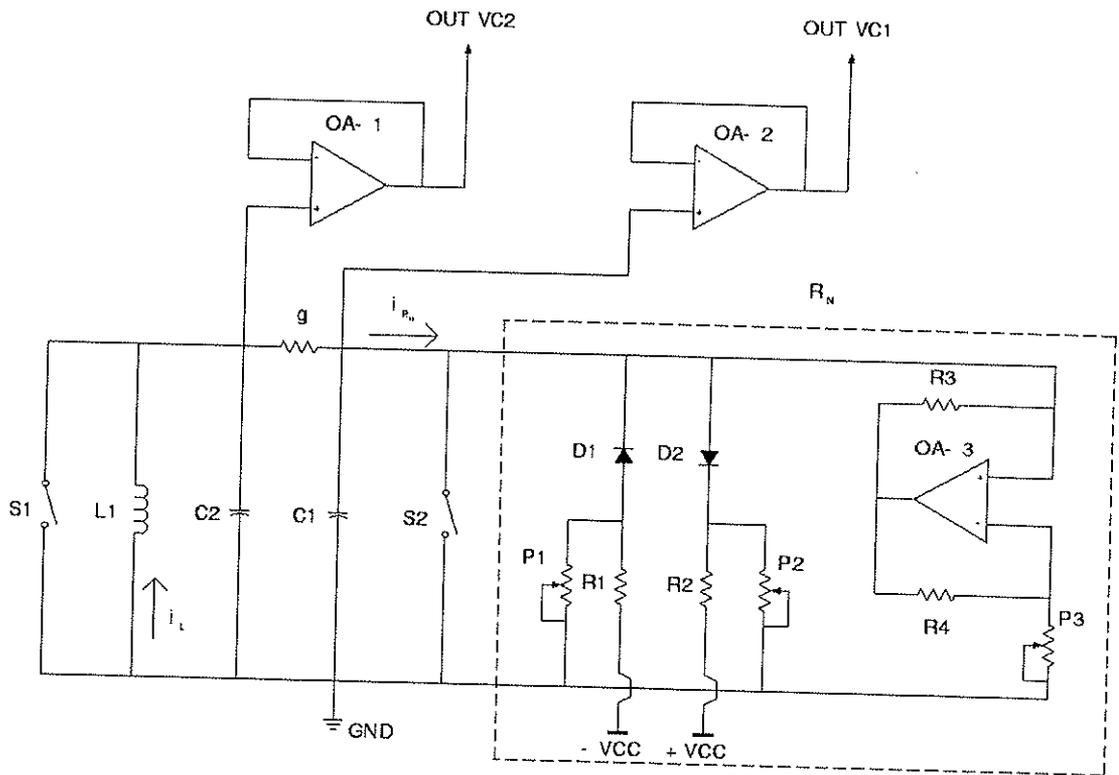
a experiência. O computador manda um sinal de disparo para o circuito, fechando as chaves  $S_1$  e  $S_2$ , e, em seguida, abre-as simultaneamente. O circuito passa então a operar em regime caótico, tipo Rössler, na região de  $P_+$  ou de  $P_-$  e envia os dados para o computador. Este, por sua vez, passa a enviar sinais para o motor de passos de  $C_1$ , a intervalos de tempos que garantam que o sistema está operando no seu estado de equilíbrio, até que o sistema perceba que o atrator caótico mudou para o Double Scroll. Esse é o sinal que os parâmetros estão próximos da fronteira entre os atratores caóticos.

O computador manda sinais de passos para que o capacitor  $C_1$  aumente sua capacitância (diminua  $\alpha$ ) e envia um sinal de disparo. Com isso, as chaves  $S_1$  e  $S_2$  fecham-se, durante um tempo suficiente para que os capacitores estejam completamente descarregados, e, em seguida, se abrem simultaneamente. O circuito passa então a operar novamente em regime caótico, tipo Rössler, na região de  $P_+$  ou de  $P_-$  e envia os dados, referentes à variedade instável de  $P_0$ , para o computador até que, ou tenha atingido um tempo limite ou a trajetória tenha mudado de região. Realizam-se pelo menos uma centena de disparos nas mesmas condições. A idéia é que, devido às instabilidades do sistema, as medidas serão sempre diferentes, sendo necessário uma amostragem para se concluir como o circuito está se comportando. Neste primeiro conjunto de disparos não haverá desvios de direção da trajetória para a outra região, em função da calibração inicial. Então o computador manda um sinal para o motor de passos para aumentar a capacitância do capacitor  $C_1$ . Repete-se novamente todo este processo, até que em todos os disparos se tenha observado desvio da trajetória. Isso garante que o sistema está calibrado nas proximidades da fronteira. Então o computador grava o número de revoluções que foram dadas, em torno de  $P_+$  ou  $P_-$ , até o instante em que o sistema sofreu o desvio. Essas revoluções se aproximarão das revoluções da órbita homoclínica da fronteira, quanto mais próximo da fronteira o sistema estiver operando. Consideraremos a média dessas revoluções como a ordem  $n$  da órbita homoclínica. O computador então manda um sinal de passo para que o capacitor  $C_2$  varie aumente seu valor, e repete-se o mesmo procedimento para caracterizar o restante da fronteira.

## 9.5 Circuito eletrônico

As experiências propostas medem, essencialmente, o conjunto que forma a variedade instável do ponto fixo  $P_0$ . Dar uma condição inicial na variedade somente foi possível porque, no circuito Double Scroll, pode-se calibrá-lo para que ele opere na

condição em que as variáveis (corrente  $i_L$  e as tensões  $V_{C1}$  e  $V_{C2}$ ) estejam no ponto fixo instável, à qual a órbita homoclínica pertence. Para fazer com que o circuito opere segundo as descrições da parte prática das experiências, ele deve sofrer algumas implementações que discutimos nesta seção.



**Figura 9.6:** Esquema elétrico do circuito Double Scroll. A linha tracejada corresponde ao circuito eletrônico que simula a resistência negativa linear por partes ( $R_N$ ). Os amplificadores operacionais  $OA-1$  e  $OA-2$  isolam as saídas do circuito. As chaves  $S_1$  e  $S_2$  tornam as variáveis do sistema,  $V_{C1}$ ,  $V_{C2}$  e  $i_L$ , nulos.

A figura 9.6 mostra o circuito Double Scroll com as adaptações necessárias para os experimentos I, II e III. A região delimitada pela linha tracejada é o circuito eletrônico que funciona como uma resistência negativa linear por partes ( $R_N$ ), cuja curva característica está na figura 9.1(b). Considerando que  $R_1 = R_2$  e  $R_3 = R_4$ , e que  $P_3$  é um potenciômetro, as inclinações  $m_1$  e  $m_0$  são dadas por  $m_1 = -\frac{1}{P_3}$  e  $m_0 = -\frac{R_1 + 2R_3}{R_1 R_3}$ , respectivamente.  $P_1$  e  $P_2$  são potenciômetros que devem ser calibrados com o mesmo valor. A tensão  $B_p$ , para a qual ocorre a mudança da inclinação da curva característica, é dada por  $B_p = \frac{P_1}{R_1 P_1} V_{cc}$ . O amplificador operacional  $OA-3$  é o componente ativo responsável pela introdução de energia no circuito.

O circuito Double Scroll é composto pelo circuito  $R_N$ , que funciona como uma resistência negativa (fornece energia ao sistema), os capacitores  $C_1$  e  $C_2$ , o indutor  $L$  e o resistor  $R$ . As chaves  $S_1$  e  $S_2$  foram acrescentadas para, quando fechadas, levar o sistema na situação de equilíbrio instável do ponto fixo  $P_0$ . Quando abertas, ou seja no instante seguinte ao sistema estar no ponto fixo, a instabilidade natural do sistema fará com que as variáveis descrevam a variedade instável. Para isso deve-se garantir que as chaves abram simultaneamente, caso contrário, não será mais a variedade que se estará observando. Assim, as chaves  $S_1$  e  $S_2$  pertencem a um mesmo relé acionado por um único pulso, o que garante que elas se abram simultaneamente. Os amplificadores operacionais  $OA - 1$  e  $OA - 2$  estão operando na configuração de *buffer*, o que garante uma impedância infinita entre o equipamento de medida e o circuito, evitando que as impedâncias do equipamento de medida interfiram no desempenho do circuito.

# Capítulo 10

## Conclusão

As investigações feitas nos circuitos Double Scroll contínuo e descontínuo mostraram que o comportamento dinâmico desses sistemas apresenta diferenças marcantes, apesar das semelhanças entre as equações diferenciais que os descrevem. O circuito Double Scroll descontínuo apresenta somente atratores pontuais ou caóticos. Assim que o atrator pontual perde a sua estabilidade, por uma variação de seus parâmetros, surge um atrator caótico. Esse atrator sofre pequenas modificações na sua dinâmica para diferentes regiões do espaço de parâmetros, e não identificamos coexistência de atratores. Este sistema não apresenta formação de órbitas homoclínicas, conforme demonstramos no capítulo 6. O seu comportamento caótico é denominado como caos robusto, devido a ausência de órbitas periódicas estáveis.

O circuito Double Scroll contínuo apresenta atratores pontuais, periódicos ou caóticos [43]. Para uma variação dos parâmetros, o atrator pontual sofre uma bifurcação de Hopf [59], transformando-se num ciclo limite, e passa a sofrer infinitamente duplicações de período até atingir o regime caótico, descrevendo uma rota para o caos via cenário de Feigenbaum [60]. Os atratores caóticos tipo Rössler e Double Scroll são característicos deste sistema e, na região do espaço dos parâmetros onde eles ocorrem, observamos diversas janelas periódicas. Este sistema apresenta, também, coexistência de atratores. Neste trabalho mostramos que a transição de comportamento do atrator tipo Rössler para o Double Scroll, no espaço dos parâmetros, é marcada por uma densa povoação de órbitas homoclínicas de Shilnikov.

Através do estudo de subespaços e variedades, desenvolvemos um método para obter órbitas homoclínicas e heteroclínicas, de pontos fixos tipo sela nó, em sistemas lineares por parte [45]. Esse método mostrou-se eficiente e com alto grau de precisão na determinação dos parâmetros em que a órbita homoclínica ocorre. O método foi

estendido para determinar órbitas de diversos graus de complexidade em todos os pontos fixos do sistema. A nossa investigação numérica revelou que existe uma grande quantidade de órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros agrupadas em curvas que se acumulam na região onde se encontra a fronteira entre os atratores tipo Rössler e Double Scroll.

Estudos anteriores de codimensão um, da classe de sistemas de equações diferenciais do teorema de Shilnikov, demonstraram que a existência de uma órbita homoclínica primária  $H_1$  é suficiente para garantir a existência de infinitas órbitas homoclínicas subsidiárias [31, 33]. Além disso, no espaço dos parâmetros, a subsidiária  $H_2$  se acumula numa primária  $H_1$ , segundo uma lei de escala [32]. O nosso estudo revelou que existem outras órbitas homoclínicas primárias  $H_j$ , com complexidades muito mais elevadas que a de  $H_1$ , e que a lei de escala, que anteriormente descrevia a acumulação da subsidiária  $H_2$  na primária  $H_1$ , é válida também para acumulações da subsidiária  $H_{2j}$  na primária  $H_j$ , e da subsidiária  $H_{nj}$  na subsidiária  $H_{(n-1)j}$  [46]. Esse resultado é um corolário do teorema de Shilnikov.

Baseado nas observações da formação das famílias de órbitas homoclínicas no espaço dos parâmetros do circuito Double Scroll e no desenvolvimento da análise analítica que resultou na generalização da lei de escala, fizemos um estudo de codimensão dois baseado na teoria de codimensão um, que resultou na identificação de estruturas de órbitas homoclínicas que descreveram completamente o cenário homoclínico no espaço dos parâmetros do circuito Double Scroll contínuo. Como o cenário está previsto pela teoria de codimensão um, acreditamos que ele é característico dos sistemas que apresentam órbitas homoclínicas requeridos pelo teorema de Shilnikov [44].

Para confirmação experimental de alguns dos resultados desta tese, sugerimos três experimentos envolvendo órbitas homoclínicas, usando o circuito Double Scroll contínuo. A primeira experiência tem como objetivo detectar a presença de órbitas homoclínicas, a segunda, de determinar famílias de órbitas homoclínicas e a terceira experiência deve resultar na confirmação da maciça presença das órbitas homoclínicas na fronteira entre os atratores caóticos Rössler e Double Scroll, tal qual verificado nas simulações e em acordo com a análise teórica de codimensão dois. Estas experiências são relevantes por envolverem a verificação experimental da existência de órbitas homoclínicas e da relação delas com a dinâmica caótica do sistema.

## Referências Bibliográficas

- [1] A. P. S. Moura, Y. C. Lai, R. Akis, J. P. Bird e D. K. Ferry. Tunneling e nonhyperbolicity in quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, 88:1-4, 2002.
- [2] R. A. Medrano-B. *Campos Vetorias, Espaços Lineares e Tensores na Física*. Trantec, São Paulo, 1994.
- [3] A. Arneodo, P. Coulet e C. Tresser. Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations. *Phys. Lett. A*, 79:259-263, 1980.
- [4] A. Arneodo, P. Coulet e C. Tresser. Oscillators with chaotic behavior: An illustration of a theorem by Shilnikov. *J. of Estat.Phys.*, 27:171-182, 1982.
- [5] E. R. Abraham. The generation of plankton patchiness by turbulent stirring. *Nature*, 391:577-580, 1998.
- [6] Z. Toroczkai, G. Károlyi, A. Péntek, T. Tél e C. Grebogi. Advection of active particles in open chaotic flows. *Phys. Rev. Lett.*, 80:500-503, 1998.
- [7] G. Károlyi, A. Penték, Z. Toroczkai, T.Tél e C. Grebogi. Chemical or biological activity in open chaotic flows. *Phys. Rev. E*, 59:5468-5481, 1999.
- [8] E. M. Izhikevich. Neural excitability, spiking and bursting. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 10:1171-1266, 2000.
- [9] P. Gaspard and G. Nicolis. What can we learn from homoclinic orbits in chaotic dynamics. *J. Stat. Phys.*, 31:499-518, 1983.
- [10] Andronov, Leontovich, Gordon e Maier. *Theory of Bifurcation of Dynamics Systems on a Plane*. Israel Program of Scientific Translation, Jerusalem, 1971.
- [11] J. L. Kaplan and J. A. Yorke. Preturbulence - regime observed in a fluid-flow model of Lorentz. *Commun. Math. Phys.*, 67:93-108, 1979.

- [12] J. A. Yorke and E. D. Yorke. Mismatchable chaos: The transition to sustained chaotic behavior in the Lorenz model. *J. Stat. Phys.*, 21:263–277, 1979.
- [13] H. Poincaré. *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, volume 1-3. Gauthier-Villars, Paris, 1899.
- [14] S. Smale. *Differential and Combinatorial Topology*. Princeton University Press, 1963.
- [15] L. P. Shilnikov. A case of the existence of a countable number of periodic motions. *Sov. Math. Dokl.*, 6:163–166, 1965.
- [16] L. P. Shilnikov. On the generation of periodic motion from trajectories doubly asymptotic to an equilibrium state of a saddle type. *Math. USSR-Sbornik*, 6:427–437, 1968.
- [17] L. P. Shilnikov. A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type. *Math. USSR-Sbornik*, 10:91–102, 1970.
- [18] P. Couillet, C. Tresser e A. Arneodo. Transition to stochasticity for a class of forced oscillators. *Phys. Lett. A*, 72:268–270, 1979.
- [19] A. Arneodo, P. Couillet e C. Tresser. Possible new strange attractors with a spiral structure. *Commun. Math. Phys.*, 79:573–579, 1981.
- [20] A. Arneodo, P. Couillet, J. Peyraud e C. Tresser. Strange attractors in Volterra equations for species in competition. *J. Math. Biol.*, 14:153–157, 1982.
- [21] A. Arneodo, P. Couillet e E. A. Spiegel. The dynamics of triple convection. *Geophys. Astrophys. Fluid. Dynamics*, 31:1–48, 1985.
- [22] F. Argoul, A. Arneodo, P. Richetti, J. C. Roux e H. L. Swinney. Chemical chaos: from hints to confirmation. *Acc. Chem. Res.*, 20:436–442, 1987.
- [23] T. Braun, J. A. Lisboa e J. A. C. Gallas. Evidence of homoclinic chaos in the plasma of a glow-discharge. *Phys. Rev. Lett.*, 68:2770–2773, 1992.
- [24] U. Feudel, A. Neiman, X. Pei e et. al. Homoclinic bifurcation in a Hodgkin-Huxley model of thermally sensitive neurons. *Chaos*, 10:231–239, 2000.

- [25] D. Parthimos, D. H. Edwards e T. M. Griffith. Shilnikov homoclinic chaos is intimately related to type-III intermittency in isolated rabbit arteries: Role of nitric oxide. *Phys. Rev. E*, 67:051922, 2003.
- [26] C. S. Zhou, J. Kurths, E. Allaria e et al. Constructive effects of noise in homoclinic chaotic systems. *Phys. Rev. E*, 67:066220, 2003.
- [27] M. T. M. Koper, P. Gaspard e J. H. Sluyters. Mixed-mode oscillations and incomplete homoclinic scenarios to a saddle focus in the indium/thiocyanate electrochemical oscillator. *J. Chem. Phys.*, 97:8250–8260, 1992.
- [28] P. Richetti and A. Arneodo. The periodic-chaotic sequences in chemical reactions: a scenario close to homoclinic conditions. *Phys. Lett. A*, 109:359–365, 1985.
- [29] F. Argoul, A. Arneodo e P. Richetti. Experimental evidence for homoclinic chaos in the Belousov-Zhabotinskii reaction. *Phys. Lett. A*, 120:269–275, 1987.
- [30] F. T. Arecchi, A. Lapucci, R. Meucci e et al. Experimental characterization of Shilnikov chaos by statistics of return times. *Europhys. Lett.*, 6:677–682, 1988.
- [31] P. Glendinning and C. Sparrow. Local and global behaviour near homoclinic orbits. *J. Stat. Phys.*, 35:645–696, 1984.
- [32] P. Gaspard. Generation of a countable set of homoclinic flows through bifurcation. *Phys. Letter A*, 97:1–4, 1983.
- [33] J. A. Feroe. Homoclinic orbits in a parametrized saddle-focus system. *Physica D*, 62:254–262, 1993.
- [34] S. V. Gonchenko, Shilnikov L. P. e D. V. Turaev. On models with non-rough Poincaré homoclinic curves. *Physica D*, 62:1–14, 1993.
- [35] S. V. Gonchenko, D. V. Turaev, P. Gaspard e G. Nicolis. Complexity in the bifurcation structure of homoclinic loops to a saddle-focus. *Nonlinearity*, 10:409–423, 1997.
- [36] R. N. Madan, editor. *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos*. World Scientific, Singapore, 1993.
- [37] M. S. Baptista and I. L. Caldas. Easy-to-implement method to target nonlinear systems. *Chaos*, 8:290–299, 1998.

- [38] M. S. Baptista and I. L. Caldas. Phase-locking and bifurcations of the sinusoidally-driven double scroll circuit. *Nonlinear Dynamics*, 17:119–139, 1998.
- [39] M. S. Baptista and I. L. Caldas. Dynamics of the two-frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit. *Phys. Rev. E*, 58:4413–4420, 1998.
- [40] M. S. Baptista, T. P. Silva, J. C. Sartorelli, I. L. Calda e E. J. Rosa. Phase synchronization in the perturbed Chua circuit. *Phys. Rev. E*, 67:056212, 2003.
- [41] T. Matsumoto, L.O. Chua e M. Komuro. The double scroll. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS 32:797–818, 1985.
- [42] A. I. Mahla and B. Palhares. Chua circuit's with a discontinuous nonlinearity. *Int. J. Circuits Syst. Comput.*, 3:231–237, 1993.
- [43] T. Matsumoto, M. Komuro e R. Tokunaga H. Kokubu. *Bifurcations: Sights, Sounds e Mathematics*. Springer, New York, 1993.
- [44] R. O. Medrano-T., M. S. Baptista e I. L. Caldas. Basic structures of the shilnikov homoclinic bifurcation scenario. *Submetido para publicação*.
- [45] R. O. Medrano-T., M. S. Baptista e I. L. Caldas. Homoclinic orbits in a piecewise system and its relations with invariant sets. *Physica D*, 186:133–147, 2003.
- [46] R. O. Medrano-T., M. S. Baptista e I. L. Caldas. Shilnikov homoclinic orbit bifurcation. *Submetido para publicação*.
- [47] T. Endo and T. Saito. Chaos in electrical and electronic circuits and systems. *Trans. IEICE*, E73:763–771, 1990.
- [48] T. Matsumoto and F. Salam. Special issue on chaotic circuits and systems. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS35, 1988.
- [49] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vectors Fields*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [50] J. L. Boldrine, S. I. R. Costa, V. L. Figueiredo e H. G. Wetzler. *Álgebra Linear*. Harbra, São Paulo, 1986.
- [51] H. L. Guidorizzi. *Um curso de Cálculo*, volume 2. Livros Técnico e Científicos, São Paulo, 1986.

- [52] B. Mandelbrot. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman, San Francisco, 1982.
- [53] A. M. Lyapunov. *Stability of Motion*. Academic Press, New York, 1966.
- [54] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan e A. Yorke. Strange attractors that are not chaotic. *Physica D*, 13:261–268, 1984.
- [55] V. K. Melnikov. On the stability of the center for time periodic perturbations. *Trans. Moscow Math. Soc.*, 12:41–51, 1963.
- [56] Swit J. A. Wolf. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D*, 16:285–31, 1985.
- [57] E. Santos and I. L. Caldas. *Bifurcações, controle e sincronização do caos nos circuitos de Matsumoto-Chua*. PhD thesis, Instituto de Física da USP, 2001.
- [58] S. Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, New York, 1996.
- [59] E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines differentialgleichungssystems. *Ber. Math. Phys. Sächsische Akademie der Wissenschaften Leipzig*, 94:1–22, 1942.
- [60] M. J. Feigenbaum. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 191:25–52, 1978.
- [61] M. J. Feigenbaum. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 21:669–706, 1979.
- [62] R. Lozi and S. Ushiki. Co-existing chaotic attractors in Chua's circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1:923–926, 1991.
- [63] O. Rössler. Equation for continuous chaos. *Phys. Lett. A*, 57:397–398, 1976.
- [64] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke. Chaotic attractors in crisis. *Phys. Rev. Lett.*, 48:1507–1510, 1982.
- [65] C. Grebogi and E. Ott. Crisis, sudden changes in chaotic attractors e transient chaos. *Physica D*, 7:181–200, 1983.
- [66] O. E. Rössler. Chaos in coupled optimizers. *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 504:229–240, 1987.

- [67] L. O. Chua, M. Komuro e T. Matsumoto. The double scroll family .1. Rigorous proof of chaos. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS-33:1072–1097, 1986.
- [68] S. Kahan and A. C. Sicardi-Schifino. Homoclinic bifurcations in Chua's circuit. *Physica A*, 262:144–152, 1999.
- [69] C. Grebogi, E. Ott, F. Romeiras e et al. Critical exponents for crisis-induced intermittency. *Phys. Rev. A*, 36:5365–5380, 1987.
- [70] Z. You, E. J. Kostelich e J. A. Yorke. Calculating stable and unstable manifolds. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 1:605–623, 1991.
- [71] B. Sandstede. Constructing dynamical systems having homoclinic bifurcation points of codimension two. *J. Dyn. Diff. Eq.*, 9:269–288, 1997.
- [72] J. Argyris, G. Faust e M. Haase. *An explosion of Chaos*. North-Holland, Amsterdam, 1994.
- [73] A. H. Nayfeh and B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics*. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [74] P. Glendinning and C. Laing. A homoclinic hierarchy. *Phys. Lett. A*, 211:155–160, 1996.
- [75] E. Freire, A. J. Rodríguez-Luis, E. Gamero e E. Ponce. A case study for homoclinic chaos in an autonomous electronic circuit. a trip from Takens-Bogdanov to Hopf-Shilnikov. *Physica D*, 62:230–253, 1993.
- [76] J. W. Evans, N. Fenichel e J. A. Feroe. Double impulse solutions in nerve axon equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 42:219–234, 1982.
- [77] C. Tresser. About some theorems by Silnikov, L.P. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Theo.*, 40:441–461, 1984.
- [78] W. P. Wang. Multiple impulse solutions to mckean caricature of the nerve equation .2. stability. *Commun. Pure Appl. Math*, 41:997–1025, 1988.
- [79] S. Smale. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:747–817, 1967.
- [80] P. Gaspard, R. Kapral e G. Nicolis. Bifurcation phenomena near homoclinic systems: A two-parameter analysis. *J. Stat. Phys.*, 35:697–727, 1984.

- [81] M. Komuro, R. Tokunaga, T. Matsumoto, L.O. Chua e A. Hotta. Global bifurcation analysis of the double scroll circuit. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 1:139–182, 1991.
- [82] N. F. Ferrara and C. P. C. Prado. *Caos, Uma Introdução*. Edgar Blücher, São Paulo, 1995.
- [83] M. S. Baptista, M. B. Reyes, J. C. Sartorelli, C. Grebogi C e E. Rosa. Communication-based on topology preservation of chaotic dynamics. *Int. J. Bifurcation Chaos*, 13:2551–2560, 2003.