

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

CONTRIBUICAO A TEORIA



SBI/IFUSP 305M81003042

CONTRIBUIÇÃO À TEORIA QUÂNTICA DE CAMPOS COM MASSAS COMPLEXAS

Tese de Mestrado Apresentada ao
Instituto de Física da Universidade
de São Paulo

GIL DA COSTA MARQUES

SBI-IFUSP



305M810T3042



São Paulo
1972

G I L D A C O S T A M A R Q U E S

CONTRIBUIÇÕES À TEORIA QUÂNTICA DE
CAMPOS COM MASSAS COMPLEXAS

TESE DE MESTRADO APRESENTA
DA AO INSTITUTO DE FÍSICA
DA UNIVERSIDADE DE S. PAULO



SÃO PAULO - MARÇO/1972

AGRADECIMENTOS.

Ao dedicado prof. J.Swieca pela orientação e valorosas discussões que possibilitaram a realização desse trabalho.

A todos os professores e colegas que me auxiliaram e incentivaram, especialmente os professores H.Fleming, C. H. Woo e R.Köberle e os amigos Humberto França e Haroldo Azevedo.

Ao prof. J.Goldemberg por ter criado as condições necessárias à realização deste trabalho.

Ao Instituto de Física e ao B.N.D.E. e à F. A.P.E.S.P.

À Renata e Ivone pelo serviço de datilografia e ao Bruno pelo serviço de impressão.

1 2 3 4 5

12-1-1945

12-1-1945

12-1-1945

12-1-1945

12-1-1945

12-1-1945

12-1-1945

12-1-1945

12-1-1945

A SILVANA

I N D I C E

INTRODUÇÃO.....	1
Cap.I - TEORIA DE LEE-WICK.....	9
Cap.II- TEORIA DE CAMPOS COM MASSAS COMPLEXAS.....	29
Cap.III-POTENCIAIS EXTERNOS - EQUAÇÃO DE YANG-FELDMAN <u>MO</u> DIFICADA.....	36
Cap.IV- TEORIA TOTALMENTE QUANTIZADA.....	58
CONCLUSÕES.....	74
APÊNDICES.....	77
REFERÊNCIAS.....	118

INTRODUÇÃO

Com a finalidade de formular apropriadamente a Eletrodinâmica, foi proposto há cerca de quarenta anos um formalismo denominado Teoria Quântica de Campos⁽¹⁾. Neste esquema os campos quantizados não são funções numéricas do espaço e tempo mas operadores.

Para o caso da teoria de campos livres é possível discutir esta teoria de uma forma matemática satisfatória bem como interpretar consistentemente seus resultados. A teoria livre nos fornece automaticamente as propriedades de simetria ou antissimetria das funções de onda descrevendo sistemas de muitas partículas, bastando para isso efetuar a quantização por meio de comutadores (bósons) ou anticomutadores (férmions).

O procedimento usual para levar em conta a interação de partículas, é acrescentar à lagrangeana livre um termo que descreve esta interação. Assim, por exemplo, na eletrodinâmica a substituição mínima nos leva à lagrangeana de interação (subtraída a energia de ponto-zero e a carga do vácuo)

$$L_{int} = e : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) A_\mu(x) : \quad (0-1)$$

Onde o símbolo : representa ordenação normal. ψ é o campo espinorial do elétron e $A_\mu(x)$ é o campo vetorial do fóton.

Dentre outras coisas, esta lagrangeana de interação nos permite calcular o Lamb-shift (observado experimentalmente). Em ordem mais baixa da teoria de perturbações nós obteremos os mesmos resultados para processos de emissão e absorção de fótons

por átomos quando tratados pela teoria semi-clássica (quanto maior o número de fótons melhor será a coincidência), com a exceção de que agora (na teoria quantizada) podemos dar conta também do processo de emissão espontânea.

No entanto, apesar de alguns sucessos incontestáveis desse formalismo, a teoria quântica de campos na formulação lagrangeana deixa sem resposta diversas questões de fundamental/importância. Por exemplo, para o caso de campos em interação como em geral as equações não são lineares, o problema de Cauchy não pode ser resolvido explicitamente. Além disso esta teoria envolve (em interação) um número alarmante de procedimentos obscuros. A tabela I no final dessa seção procura resumir os sucessos e insucessos desta teoria. Esta tabela foi construída com base na ref(2), capítulo 6.

A dificuldade mais séria da teoria de campo na formulação lagrangeana é a dificuldade das divergências. Assim quando os efeitos da interação são calculados em ordens mais altas da teoria de perturbação, a mesma densidade lagrangeana/de interação (0-1) nos leva a respostas sem significado pois são divergentes.

Para localizarmos a fonte dessas divergências, lembremo-nos de que nesse formalismo a lagrangeana de interação é sempre local (os operadores de campo dependem do mesmo ponto). O acoplamento local da forma com que o escrevemos não é permitido desde que os campos devem ser definidos como distribuições e o produto local de distribuições em geral não é definido. Uma primeira evidência desse fato pode ser obtida ao calcularmos o valor esperado no vácuo de tais quantidades. Como exemplo podemos calcular o valor esperado no vácuo do produto de dois

campos escalares reais

$$\langle 0 | \phi^2(x) | 0 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega_{\vec{k}}} \quad \omega_{\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

que é uma expressão quadraticamente divergente.

Por esta razão a formulação matemática da teoria quântica de campos em interação não é satisfatória. Apesar de estarmos convencidos de que a causa das divergências na teoria quântica lagrangeana se deve ao fato de que nesse formalismo a lagrangeana de interação é local, ninguém foi bem sucedido ainda em formular uma teoria quântica de campos não local de uma maneira/satisfatória.

Pelo fato da dificuldade mais séria da teoria de campo na formulação lagrangeana ser o problema com as divergências, a idéia de construir teorias quânticas de campo finitas tem recebido muita atenção nos últimos anos.

Um dos procedimentos que tem conseguido lograr mais êxitos e o menos inconsistente, é a teoria da renormalização. A renormalização se baseia essencialmente no fato de que podemos extrair respostas satisfatórias da eletrodinâmica quântica. Estas respostas são livres de divergências desde que expressemos as amplitudes de transição em termos da massa "observada" do eletrão e o valor "observado" da carga elétrica. Esta técnica no entanto além de ser apenas uma maneira de vivermos em "coexistência pacífica" com as divergências, só se aplica a problemas especiais / (as interações fracas por exemplo não são renormalizáveis).

Uma outra técnica usada para tratar as quantidades divergentes é por meio da introdução de cut-off's. A introdução de um cut-off ultravioleta pode ser realizado ou sob a forma de

uma teoria de campo não local⁽³⁾ ou por um procedimento de regularização invariante⁽⁴⁾. Sobre a teoria de campo não local já falamos anteriormente. Quanto à regularização, ela consistia, originalmente, apenas de um método covariante de fazer as integrais convergentes por meio de um cut-off explicitamente covariante. A formulação matemática precisa do procedimento da regularização/invariante mostra que uma tal teoria de campo assim construída, perde muitas das propriedades desejáveis de uma teoria quântica de campos, não sendo portanto de interesse. Uma formulação matemática em termos de campos pode ser obtida por um método de combinação de campos esboçado no capítulo 2.

Finalmente, relacionado com o método da regularização invariante existe o método de construir uma teoria quântica de campos finita baseado numa generalização do formalismo matemático da mecânica quântica. Esta generalização foi descoberta por Dirac⁽⁵⁾; e foi usada com sucesso por Gupta e Bleuler⁽⁶⁾ para formular a eletrodinâmica quântica de uma forma mais elegante. O método usa um espaço vetorial linear com uma forma bilinear indefinida para o produto interno de dois vetores e conduz à possibilidade de remover os infinitos da teoria quântica de campos relativística. Uma teoria quântica de campos formulada nesse espaço nós chamamos de uma "teoria de campo com métrica indefinida". Os maiores problemas encontrados na formulação de uma tal teoria são devidos ao fato de que nós precisamos ter cuidado ao definirmos amplitudes de transição, desde que amplitudes de transição físicas devem nos levar a probabilidade de transição não negativas.

Tem sido propostas algumas teorias de campo com métrica indefinida^(3,11-15). Dentre elas destacamos a teoria de

T.D.Lee e G.C.Wick, pelo fato de que ao tentarmos formular essa teoria usando uma descrição da causalidade mais próxima de uma/descrição do que está acontecendo em termos do espaço-tempo, fomos levados à nossa teoria. Ao nos convenceremos de que uma formulação da teoria de Lee-Wick não pode ter como suporte uma teoria quântica de campos Lagrangeana (à mesma conclusão já chegara Nakanishi⁽⁷⁾). Adotamos um procedimento diferente. Nesta formulação a métrica indefinida não desempenha qualquer papel.

A nossa teoria é uma teoria quântica de campos usando reguladores de massas complexas com uma descrição, em termos de espaço-tempo, mais completa que os tratamentos existentes. Além disso é uma teoria unitária. A unitariedade foi verificada explicitamente até segunda ordem da teoria de perturbações numa teoria totalmente quantizada, ao passo que para interação com / um potencial externo nossa investigação é mais completa.

No primeiro capítulo apresentamos a formulação de Lee-Wick de uma teoria finita: Chamamos a atenção para algumas dificuldades dessa teoria (diagramas nos quais ocorre "pinching") e como essas dificuldades podem ser contornadas adotando uma segunda prescrição. Para finalizar apresentamos a discussão da causalidade.

No segundo capítulo procuramos falar rapidamente sobre teorias de campo usando massas complexas. Como veremos, o procedimento de quantização canônico nos leva a introduzir uma métrica indefinida no espaço de estados. Para o caso de interação com potencial externo nós trabalhamos com a função de green retardada causal dando origem a transições entre estados de energia real e complexa violando a unitariedade física. Além desse defeito a teoria só é livre de divergências para potenciais

de suporte compacto no tempo. Mesmo para processos físicos, a teoria é divergente devido a contribuições dos estados intermediários com energia complexa.

No terceiro capítulo propomos uma equação de Yang-Feldman modificada. Esta é em essência a hipótese básica da nossa teoria. Uma interpretação consistente aparece quando não procuramos associar as massas complexas a partículas, mas associamos essas massas complexas com uma modificação da lei de propagação do campo.

A seguir investigamos, usando essa equação de Yang-Feldman modificada, o caso da interação com um potencial externo. Mostramos que em teoria de perturbações esta teoria é unitária até segunda ordem, o que é feito explicitamente no apêndice. Transcrevemos um método usado por J.A.Swieca que mostra a mesma propriedade para todas as ordens em teoria de perturbação⁽⁸⁾. A seguir tecemos alguns comentários sobre como a propriedade da unitariedade pode ser demonstrada usando um método desenvolvido por J.A.Swieca, R.Seiler e B.Schroer⁽⁹⁾.

Finalmente, no quarto capítulo investigamos o caso de uma teoria totalmente quantizada (ϕ^3). Não surgem dificuldades com unitariedade ou invariança de Lorentz. No entanto a contribuição de estados virtuais com energias arbitrariamente altas conduz a um realce da acausalidade da lei de propagação (de atenuada exponencialmente passa a cair com uma potência)⁽¹⁰⁾. Além desse defeito o termo de self-energy torna-se infinito / num determinado domínio de p^2 tipo espaço, obrigando-nos a defini-lo nesse domínio por continuação analítica a partir do domínio no qual ele é bem definido.

No apêndice apresentamos alguns cálculos mais detalhados.

lhados para justificar algumas afirmações feitas no texto, bem como algumas propriedades do espaço de estados com métrica indefinida e a discussão do termo de self-energy num espaço bidimensional usando massas reais (sendo assim apenas um modelo) e a seguir com massas complexas, onde no último caso usaremos alguns desses resultados no texto.

T A B E L A I

Dificuldades.

1. Nós estamos em completa ignorância com respeito à existência de soluções com propriedades fisicamente aceitáveis. Nós precisamos assumir que todos esses problemas tenham uma solução favorável.
2. Emergem constantes artificiais e sem significado que finalmente são removidas dos resultados, assim que elas são realmente redundantes. Quando calculadas em teoria de perturbação, obtemos para elas termos divergentes.
3. Devemos iniciar os cálculos usando uma estrutura explícita/para a lagrangeana de interação L' . No entanto nós não temos um número suficiente de critérios para fixar completamente a estrutura de L' .
4. Na teoria lagrangeana existe uma correspondência biunívoca/entre campos e partículas: para cada partícula devemos introduzir um campo separado na lagrangeana.
5. Tão logo estejamos interessados em estudar as interações fortes, a teoria lagrangeana acoplada com expansão perturbativa

é de muito pouco uso prático desde que teoria de perturbação não é mais válida para constante de acoplamento maior do que um.

Sucessos.

1. Uma descrição completa e absolutamente satisfatória de partículas livres.
2. Um formalismo natural e óbvio para formular simetrias do espaço-tempo e simetrias internas.
3. Um sucesso razoável na descrição de interações e no cálculo/ de amplitudes de transição, dentro do formalismo de teoria de perturbação.

(extraídos de P. Roman)

1. Teoria de Lee-Wick

1.1. Introdução.

Neste capítulo apresentaremos uma teoria "quântica de campos" finita, proposta por T.D.Lee e G.C.Wick⁽¹¹⁻¹⁴⁾. A justificativa para apresentarmos essa teoria, é que ela foi a motivação para êsse trabalho. Além disso, poderá aclarar al gumas idéias já expostas na introdução.

A idéia básica é construir uma teoria de campos con vergente usando estados "fantasmas complexos", ou seja, esta dos de norma zero com auto-valores complexos. Assim, é uma teoria de campos com métrica indefinida.

Na seção 1-2 falamos sôbre as dificuldades com di vergências na eletrodinâmica quântica. Desde que essa é a di ficuldade mais séria da teoria quântica de campo local, na se ção 1-3 apresentamos uma possibilidade de remover essas diver gências. Essa possibilidade consiste essencialmente em consi derar propagadores que caem mais rãpidamente do que os usuais no limite $k^2 \rightarrow \infty$. No entanto êsse procedimento nos leva a intro duzir um espaço de estados com métrica indefinida. A principal dificuldade com teorias de campo com métrica indefinida, está relacionada com o fato de que, nesse formalismo, a matriz S não é unitária.

A seção 1-4 mostra como a unitariedade da matriz S pode ser assegurada quando introduzirmos regularizadores com massas complexas. Isto pode ser feito, desde que, numa teoria de campos com métrica indefinida podemos ter "estados de ener gia complexa", bem como de energia real. Assim podemos intro

duzir campos com massas complexas. O argumento usado para garantir a unitariedade torna-se plausível desde que não haja transições para estados de energia complexa, a partir de estados iniciais com partículas de massa real. Isto é assegurado pelo princípio da conservação da energia. Como este argumento pode falhar no sistema particular do sistema centro de massa, é necessário/que ele seja excluído a priori.

Um modelo de campos em interação é apresentado na seção 1-5. Na primeira parte dessa, mostraremos como obter uma teoria finita usando regularizadores com massas complexas. Nesse esquema os contornos usuais de Feynman devem ser modificados de maneira a evitarmos as explosões da matriz S no limite $t \rightarrow +\infty$. Na última parte dessa seção mostramos como a prescrição original / de Lee-Wick, de não considerar o sistema centro de massa leva a dificuldades com não invariança de Lorentz. No sistema centro / de massa temos um corte ao longo do eixo real, não previsto pela condição da unitariedade, correspondendo a um par de massas complexas. O mesmo não acontece em qualquer outro sistema. A dificuldade com a invariança de Lorentz apontada por alguns autores ^(16,7) pode ser removida adotando-se uma prescrição sugerida por Cutkosky e colaboradores ⁽¹⁷⁾.

Na seção 1-6 discutimos a questão da causalidade nesse formalismo. A descrição da causalidade é feita por meio do estudo do movimento médio de um pacote de ondas. Estabelecemos/ ao mesmo tempo a conexão entre o que é feito na teoria de Lee-Wick e na nossa formulação no que diz respeito à violação da causalidade.

1.2. Dificuldades com divergências na Eletrodinâmica.

A correção radiativa de segunda ordem para qualquer processo

$$A \rightarrow B$$

onde A e B são auto-estados quaisquer das interações fortes ou interações fracas, têm uma amplitude dada pela integral

$$\int \frac{1}{q^2} \langle B | M(q) | A \rangle d^4q \quad (1.1)$$

O gráfico correspondente a esse processo é apresentado na fig. (1.1).

Usando um teorema devido a Bjorken⁽¹⁸⁾, o comportamento do operador M(q) no limite em que $q^2 \rightarrow \infty$ é dado por

$$M(q) \rightarrow \frac{1}{q^2} \int d^3 \vec{x} e^{i\vec{q}\vec{x}} \left\{ \left[\frac{\partial J^\mu}{\partial t}(\vec{x}, t), J_\mu(0, t) \right] - \langle 0 | \text{mesmo comutador} | 0 \rangle \right\} \quad (1.2)$$

E $J_\mu(x)$ é a corrente eletromagnética

$$J_\mu(x) = e \sum_\alpha \psi_\alpha \gamma_\mu \psi_\alpha + \dots$$

α corre sobre todos os campos carregados de spin 1/2 e corresponde a correntes devido a campos de outros / spins. O operador relevante $\left[\frac{\partial}{\partial t} J_\mu(\vec{x}, t), J_\mu(0, t) \right] - \langle 0 | \text{mesmo comutador} | 0 \rangle$ é, em geral, proporcional à função δ

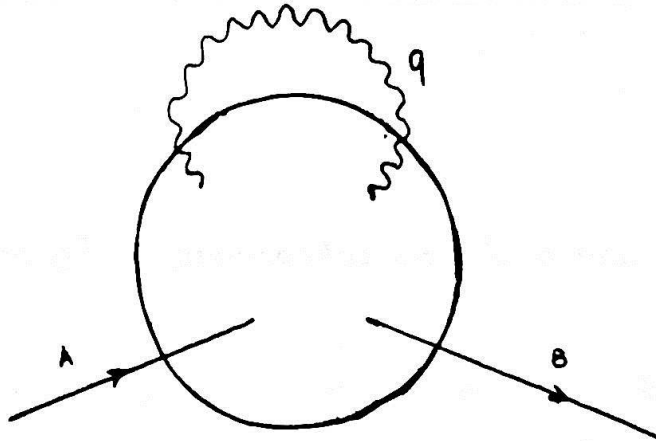


fig. (1.1)

pode-se mostrar que ele não pode ser reduzido a zero por interações fortes⁽¹²⁾. A integral de correção radiativas (1.1) é, assim, proporcional a um elemento de matriz apropriado, multiplicado por uma integral logaritmicamente divergente $\int q^{-4} d^4 q$.

1.3. Uma maneira possível.

A coisa mais notável acêrca dessas dificuldades com divergências é a sua total ausência na natureza. As várias diferenças de massa fracionárias entre Hádrons no mesmo multipletto de isospin são certamente finitas, e são todas da ordem de α . Usando a teoria de Cabibbo, a correção radiativa para G_V/G_μ pode ser deduzida obtendo um resultado finito e $\approx 0(\alpha)$ ⁽¹⁹⁾. Assim, se nós simplesmente ignoramos as divergências, uma estimativa/simples usando só as constantes de acoplamento adimensionais / dão invariavelmente a ordem correta de grandeza. O mesmo é verdade para todo processo de interação fraca de ordem mais alta.

Observamos que de maneira a fazer a integral de correção radiativa $\int \frac{1}{q^2} \langle A | M(q) | B \rangle d^4 q$ finita para todos os estados de Lepton ou Hádron A e B, só existem duas alternativas:

- 1) o operador $\left[\frac{\partial}{\partial t} J_\mu(\vec{x}, t), J_\mu(0, t) \right] \sim \langle 0 | \text{mesmo comutador} | 0 \rangle$ ser

zero

2) para grandes q^2 o propagador do fóton vai a zero mais rápido do que q^{-2} .

O primeiro método conduz só a uma transferência de infinitos da eletrodinâmica para a interação fraca, logo é insatisfatório⁽¹²⁾, assim examinaremos a última possibilidade.

É verdade que todas as dificuldades com divergência/na eletrodinâmica podem ser mais simplesmente removidas se o propagador do fóton fôr

$$\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 + m^2} \quad (1.3)$$

ao invés do termo usual $(\frac{1}{q^2})$

Igualmente, todas as dificuldades com divergências / nas interações fracas podem ser completamente removidas se o propagador do w^\pm puder ser

$$\delta_{\mu\nu} \left[\frac{1}{q^2 + m^2} - \frac{1}{q^2 + m'^2} \right] \text{ ao invés do usual } \frac{1}{q^2 + m^2} \left[\delta_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} \right]$$

onde m e m' são parâmetros finitos.

Que tais modificações são matematicamente possíveis, através do uso de uma métrica indefinida, tem sido bem conhecido desde os trabalhos de Dirac e Pauli^(4.5). Na verdade, quase todos os cálculos práticos são atualmente efetuados com tais propagadores modificados em primeiro lugar. Contudo, esses não são / aceitos como uma realidade física por causa da crença comum de que, como a Hamiltoniana de um tal esquema de métrica indefinida não é hermitiana, a matriz S resultante seria necessariamente

te não unitária. Como veremos a seguir, isso não é verdade, desde que se sacrifique alguma propriedade da teoria como por exemplo a invariância relativística ou ainda a formulação lagrangeana da teoria. O que não se tem conseguido até aqui é uma teoria onde todas estas propriedades estejam asseguradas.

1.4. Métrica Indefinida e Unitariedade.

Este tópico é introduzido a fim de analisarmos a dificuldade com a unitariedade numa teoria de campos com métrica indefinida, bem como as idéias básicas de Lee-Wick para eliminá-la. Discutimos também como esse argumento depende do sistema de referência. Assim sendo, teremos uma teoria unitária, desde que não se considere um sistema particular, a saber, o sistema centro de massa.

Lee-Wick tentaram provar que uma grande classe de teorias de campo nas quais a matriz S é unitária, a lagrangeana não é hermitiana. Isto tornaria possível construir teorias de campo satisfazendo a condição de unitariedade e livre de divergências.

Nós começamos com uma sugestão dada por Dirac e discutida por Pauli e outros. Usamos uma Hamiltoniana pseudo-unitária, ou seja

$$H = \eta^{-1} H^{\dagger} \eta \quad (1.4)$$

Por causa de (1.4), a matriz S satisfaz

$$S^{\dagger} \eta S = \eta$$

Desde que η não é positivo definido, nós temos proble

mas com respeito à violação da unitariedade. Essa dificuldade pode ser removida observando que os auto-estados de uma Hamiltoniana pseudo-hermitiana podem ser classificados de acordo com

$$H | \psi_r \rangle = E_r | \psi_r \rangle, \quad E_r \text{ real} \quad (1.6)$$

$$H | \psi_c \rangle = E_c | \psi_c \rangle, \quad E_c \text{ não real}$$

Destas relações segue que

$$\langle \psi_r | \eta | \psi_c \rangle = 0$$

$$\langle \psi_r | \eta | \psi_{r'} \rangle = 0 \quad \text{Se } E_r \neq E_{r'}$$

$$\langle \psi_c | \eta | \psi_{c'} \rangle = 0 \quad \text{Se } E_c \neq E_{c'}^*$$

"TEOREMA": $S_f^\dagger S_f = 1$ se não existem estados de métrica negativa estáveis na teoria, ou seja, se

$$\langle \psi_r | \eta | \psi_r \rangle > 0 \text{ para todo } | \psi_r \rangle \quad (1.8)$$

Demonstração:

Sejam: $\{ | \psi_r^{\text{out}} \rangle, | \psi_c^{\text{out}} \rangle \}$ ou $\{ | \psi_r^{\text{in}} \rangle, | \psi_c^{\text{in}} \rangle \}$

conjuntos de auto-estados que consistem somente de ondas planas mais ondas outgoing (ou incoming). Suponhamos que ambos os conjuntos sejam assumidos completos. A exigência básica⁽¹⁸⁾ e as relações de ortogonalidade nos possibilitam normalizar os estados $| \psi_r \rangle$ de tal forma que $\langle \psi_r | \eta | \psi_{r'} \rangle = \delta_{rr'}$

Desde que ambos os conjuntos de vetores da base são completos, a matriz conectando êsses dois conjuntos de vetores deve preservar a métrica, i.é., S deve ser pseudo-unitária

$$S^\dagger \eta S = \eta$$

A matriz S física, é por definição a matriz

$$S_f = (S_{fr'r'}) = \langle \psi_{r'}^{\text{in}} | \eta | \psi_r^{\text{out}} \rangle \quad (1.9)$$

Que ocupa sômente o canto esquerdo de cima da matriz S. Esta matriz S deve ter zeros devido à condição de ortogonalidade $\langle \psi_r^{\text{in}} | \psi_c^{\text{out}} \rangle = 0$. Assim colocando a ordem das colunas da esquerda para a direita, correspondendo ao conjunto de vetores da base $|\psi_r^{\text{out}}\rangle$ e $|\psi_c^{\text{out}}\rangle$ e das linhas de cima para baixo na mesma ordem mas do conjunto "in".

A matriz S tem a forma:

$$S = \left(\begin{array}{c|c} S_f & 0 \\ \hline 0 & // \\ \hline \end{array} \right)$$

analogamente, por causa das relações de ortogonalidade nós temos

$$\eta = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & // \\ \hline \end{array} \right)$$

onde em η a ordem das linhas e colunas é a mesma de S. Assim a partir de nossa hipótese fundamental^(1.8) e da relação (1.9) podemos escrever

$$S_f^+ S_f = 1 \quad (1.10)$$

Por uma questão de auto-consistência, é necessário impor uma lei fundamental: que no mundo físico só estados da forma

$$|t\rangle = \sum C_r |r\rangle \exp(-iE_{rt}) \quad \langle r|r\rangle > 0 \quad (1.11)$$

podem ser realizados. Todos os processos de Colisão (físicos) são descritos formando pacotes de onda apropriados/desses estados.

O espaço vetorial gerado por esses estados físicos/é claramente um subespaço do espaço de Hilbert inteiro. Para teorias dêsse tipo, como já dissemos nós, esperamos equações de movimento simples e relação de comutação simples só no espaço/"grande". A projeção do espaço grande para o espaço "pequeno" é em geral complicada. Ela trocará por exemplo uma relação de comutação local simples (no espaço "grande") em uma aparentemente não local (no espaço "pequeno") (30).

Analizando o modelo de Lee, Lee e Wick verificaram que em ambos os setores $N\theta$ e $N\theta\theta$ a condição básica (1.8) é satisfeita. Assim a matriz S é unitária (1.12).

Finalizando esta seção queremos tecer alguns comentários a respeito dêsse "teorema". Em primeiro lugar, fica subentendido na demonstração que

$$\langle \psi_r^{\text{in}} | \psi_c^{\text{out}} \rangle = 0 \quad (1.12)$$

Ou seja, que não seja possível haver transições em

tre estados de energia real e complexa. Isto é justificável pelo princípio da conservação da energia. No entanto, se quisermos formular esse princípio, quando consideramos estados com energia complexa, através de um procedimento formal como é feito usualmente introduzindo funções generalizadas como a "função" δ de Dirac, então deveremos generalizar inclusive estas distribuições de tal forma a serem definidas também para argumentos complexos. Por meio de uma série de procedimentos formais, Nakanishi⁽²⁰⁾ procura generalizar o conceito de conservação da energia, estabelecendo assim de uma maneira formal a hipótese/ (1.12).

Outrossim, o princípio da conservação da energia / não impede que num processo de espalhamento de duas partículas de massas reais, tenhamos no estado final um par de partículas de massas complexas, quando vistas do sistema centro de massa. Onde esse sistema invalidaria o argumento.

Em resumo, conservação da energia (assumida implicitamente) e a eliminação do sistema centro de massa tornam o "teorema" verdadeiro. A segunda hipótese claramente nos levará a problemas com invariança de Lorentz.

1.5. Campos em Interação.

1.5.a - Uma teoria finita.

Nesta seção consideraremos um modelo em teoria quântica de campos com métrica indefinida que envolve um campo escalar ϕ . Dentre as possíveis interações desse campo, uma das mais simples é a que tem uma densidade lagrangeana de interação

da forma $f\phi^3$

$$L_{\text{int}} = f\phi^3(x) \quad (1.13)$$

Numa teoria de campo usual, a self-energy $\Sigma(p)$ calculada a partir da lagrangeana de interação (1.13), tem uma integral de Feynman dada por:

$$\Sigma(p) = \frac{-if^2}{4\pi^4} \int d^3\vec{q} \int_{C_F} dq_0 \Delta\phi(p-q) \Delta\phi(q) \quad (1.14)$$

onde $\Delta\phi(q)$ é o propagador de Feynman dado por

$$\Delta\phi(q) = \frac{-i}{q^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (1.15)$$

O gráfico de Feynman correspondente a (1.14) é dado pela fig.(1.2)

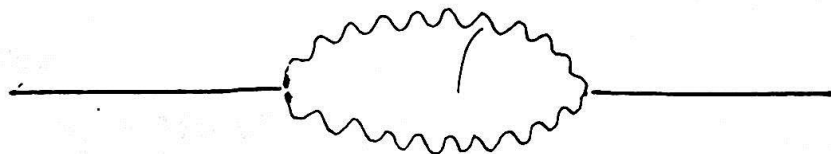


fig. (1.2)

O "mass-shift" da partícula ψ devido a esta interação é

$$\delta m^2 = \Sigma(p^2) \text{ para } p^2 = m^2 \quad (1.16)$$

A substituição de (1.15) em (1.14) nos leva a um têr-

mo divergente. Para obter uma teoria finita, Lee explora a possibilidade de usar para $\Delta p(q)$ a expressão:

$$\Delta \phi (q) = -i \left(\frac{1}{q^2 - m^2} - \frac{1/2}{q^2 - M^2} - \frac{1/2}{q^2 - M^{*2}} \right) \quad (1.17)$$

onde M é um número complexo conveniente. Este propagador cai com $(q^2)^{-2}$ para grandes valores de q^2 e assim nos leva à convergência do termo de self-energy.

1.5.b. Diagramas de Feynman.

A função de Green $U(t,t)$ da equação de Schroedinger dependente do tempo, na representação de interação, diverge exponencialmente quando $t \rightarrow +\infty$. Assim não temos a relação usual entre a matriz S e o limite de $U(t,t)$ quando $t = \infty$. No entanto, é possível separar $U(t,t)$ em uma soma bem definida⁽¹¹⁾: (para casos gerais são heurísticamente)

$$U(t,-t) = U^{\text{reg}}(t,-t) + U^{\text{exp}}(t,-t) \quad (1.18)$$

Com

$$S_f = \lim_{t \rightarrow \infty} U^{\text{reg}}(t,-t) \quad (1.19)$$

U^{exp} diverge exponencialmente

Como na teoria quântica usual, qualquer elemento de matriz da matriz S pode ser dado por uma soma sobre um conjunto apropriado de gráficos de Feynman. Cada gráfico deve ser subentendida uma integral multidimensional integrada sobre um do

mínio D de alguns quadrimomentos virtuais. A diferença do caso usual é que agora o integrando tem singularidades complexas. Assim em geral o domínio da integração será também complexo. Para obter o domínio de integração correto nós interpretamos as partes imaginárias das massas como se fôsem parâmetros. Para $\gamma_i = 0$ nós temos o domínio de integração usual, ou seja o domínio de integração é real. As posições das singularidades do integrando são determinadas pela regra usual do $i\epsilon$. Quando γ_i varia de zero até o seu valor final essas singularidades se moverão continuamente. O domínio de integração é tal que quando os γ_i variam de zero até o valor final, o domínio passa de D real a D de tal maneira que este não intercepte qualquer singularidade do integrando. Isto é sempre possível desde que não ocorra "pinching", ou seja, desde que duas singularidades em lados diferentes da curva não se juntem.

1.5.c. Self-Energy.

Com a finalidade de ilustrarmos as idéias já expostas e esboçarmos a estrutura analítica da matriz S da teoria/ de Lee-Wick, consideraremos agora o termo de self-energy- $\Sigma(p)$. A expressão para a self-energy é (1.14) com $\Delta\phi(q)$ dado por (1.17). Assim, o integrando tem doze polos no plano complexo. A integração em $d^3\vec{q}$ é real, mas o contôrno, de acôrdo com o exposto em (1.5.b), é dado pela fig. (1.3)

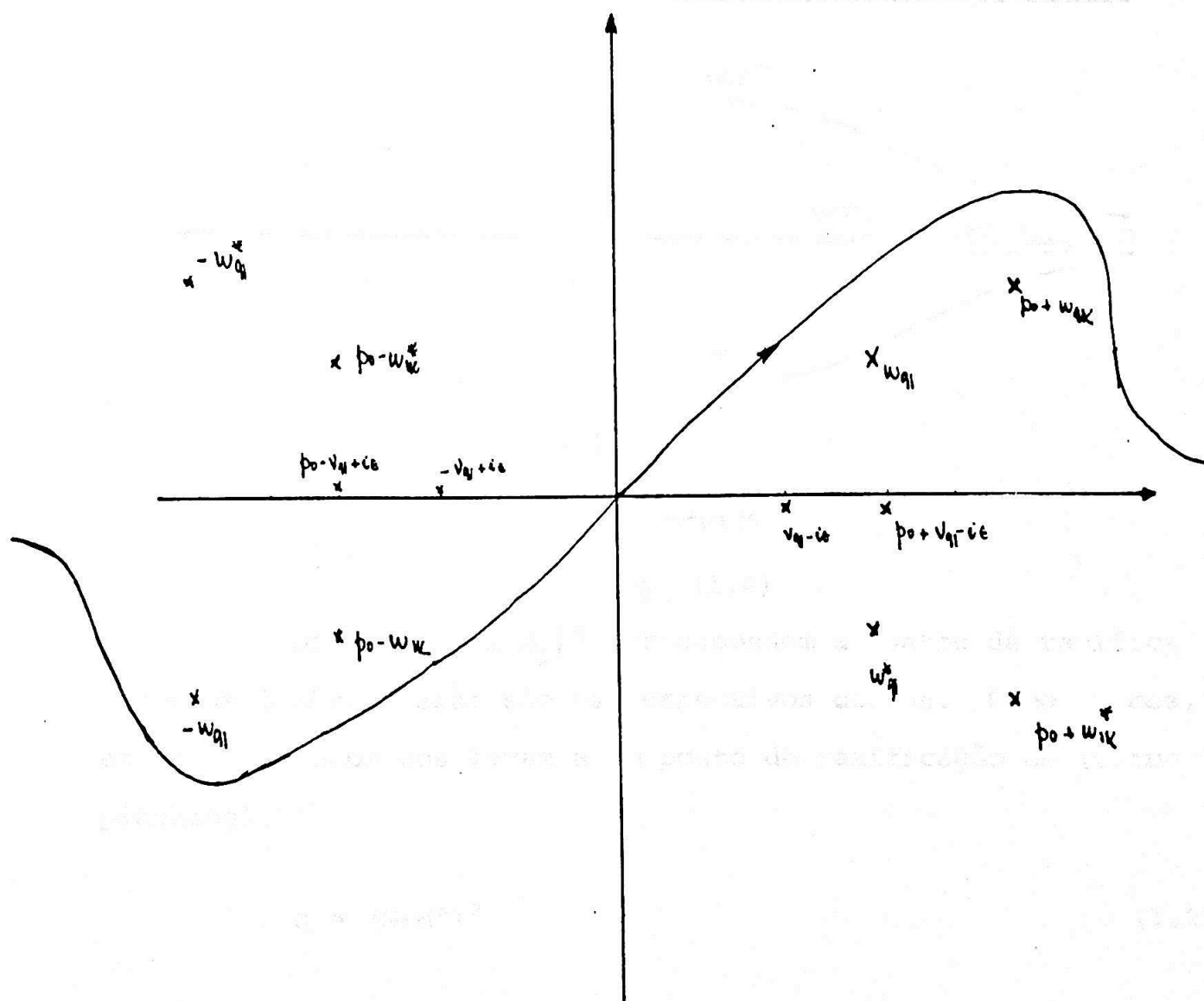
Dentre outros termos, $\Sigma(p)$ é proporcional a

$$\int d^3\vec{q} \int_{\bar{c}} \frac{dq_0}{(p-q)^2 - M^2} \cdot \frac{1}{q^2 - M^{*2}} \quad (1.20)$$

O integrando de (1.20) tem dois polos no plano complexo q_0 , dados por

$$q^2 = q_0^2 - \vec{q}^2 = M^{*2} \quad (1.21)$$

$$(p-q)^2 = + M^2$$



$$k = \vec{p} - \vec{q}$$

$$w_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$$

$$v_q = \sqrt{\vec{q}^2 + m^2}$$

Para um valor conveniente do momento externo p , pode ocorrer o pinching desses dois polos. Para as outras cinco parcelas de $\Sigma(p)$ não temos dificuldades com o pinching. A estrutura analítica do termo de self-energy pode ser esquematizada pela figura (1.4) (para $\vec{p} = 0$).

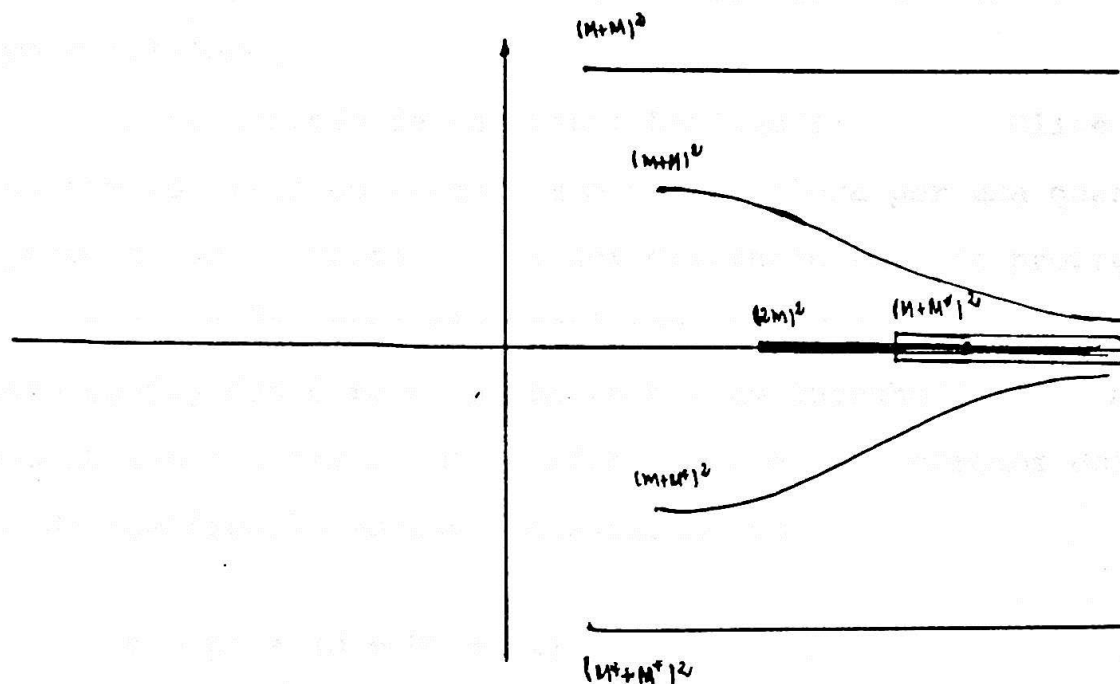


fig. (1.4)

Os pontos $(m+m_1)^2$ correspondem a pontos de ramificação e as linhas cheias são os respectivos cortes. Como vemos, esses resultados nos levam a um ponto de ramificação em (térmo pinching).

$$s = (M+M^*)^2 \quad (1.22)$$

e uma discontinuidade sobre o eixo real que violaria a unitariedade. Para remover essa dificuldade Lee e Wick propuseram a prescrição não invariante de Lorentz de que devemos usar sempre trimomentos virtuais \vec{q} reais, mas q_0 pode ser complexo. Essa formulação leva a problemas com invariança de Lorentz como

já foi apontado por Nakanishi⁽⁷⁾ e Sudarshan⁽⁹⁾.

Aparentemente existe mais de uma saída para o problema de estados intermediários "não físicos". Essas possibilidades não conduzem a um corte com origem em $(M+M^*)^2$. Sudarshan propõe o método de "estados sombra"⁽¹⁶⁾ ao passo que Cutkosty/ e outros⁽¹⁷⁾, propõem outra prescrição. Lee-Wick adotaram a última possibilidade.

A prescrição de Cutkosty; Landshoff; Olive e Polkinghorm consiste em trocar a massa complexa por uma quantidade pequena $i\delta M$. A troca deverá ser diferente em cada propagador complexo. Então, cada singularidade envolvendo duas massas complexo-conjugadas é reposta por um par de thresholds, uma estando abaixo e outra acima do eixo real. Assim teremos dois pontos de ramificação estando localizados em

$$s = p^2 = (M + M^* + i\epsilon)^2$$

e

(1.23)

$$s = p^2 = (M + M^* - i\epsilon)^2$$

Que podem ser representadas no plano p^2 , para $\epsilon \neq 0$, pela fig. (1.5)

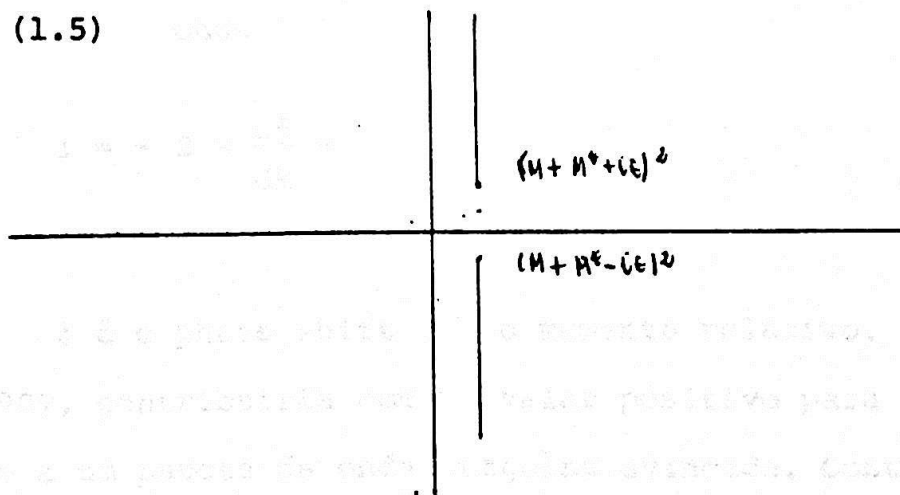


fig. (1.5)

A contribuição total dessas duas singularidades de pontos de ramificação é real; o mesmo acontece quando $\epsilon \rightarrow 0$, preservando assim a unitariedade. O ϵ deve ser feito igual a zero depois de efetuada a integração. Nesse limite os dois cortes separam o eixo real em dois segmentos. Tal singularidade é denominada de singularidade não analítica. Para essas, os valores da amplitude física para qualquer lado não são relacionados por continuação analítica.

1.6. Discussão da Causalidade.

A descrição da causalidade usada por Lee e Wick é a mesma usada por Wigner⁽²¹⁾. Essa descrição é feita pelo estudo do movimento médio de um pacote de ondas. Por exemplo, no caso do espalhamento em onda s, se o pacote de onda incoming tem uma posição média relativa $\langle r_{in} \rangle = -vt$ para tempo $t \ll 0$, então o pacote de onda outgoing, para $t \gg 0$, tem uma posição média relativa

$$\langle r_{out} \rangle = vt + l \quad (1.24)$$

onde

$$l = -2 \left\langle \frac{d\delta}{dk} \right\rangle \quad (1.25)$$

δ é o phase shift e k o momento relativo. Uma ressonância em -90° , contribuiria com um valor positivo para l , e assim dá origem a um pacote de onda outgoing avançado. Contudo, pode ser mostrado, sob condições gerais⁽¹¹⁾, que temos a desigualdade

$$1 < 1_{\max} = 0 \quad (\Delta^{-1}) \quad (1.26)$$

onde Δ representa a largura no momento do pacote de onda incoming. Como $0 \quad (\Delta^{-1})$ é a incerteza da posição do pacote de onda no espaço das coordenadas, nós não podemos unicamente/medindo $\langle r \rangle$ dizer se existe ou não violação da causalidade.

Um comportamento muito pouco usual dessa teoria diz respeito à forma detalhada do pacote de onda. Considerando a colisão elástica de e^+ é no S.C.M. à energia da ressonância m_B e assumindo (apenas para ficar mais claro) a dependência radial da onda incoming ser dada por

$$\phi^{\text{in}}(r,t) \propto r^{-1} e^{-\Delta|r+t|}$$

a grandes distâncias relativas.

Como mostrado em (11), a presença de um polo complexo, tal como $(m_B + i \frac{\gamma_B}{2})$ no propagador do fóton, implica que a onda outgoing tem uma dependência radial dada por

$$\phi^{\text{out}}(r,t) \propto r^{-1} e^{-\Delta(t-r)} \quad \text{para } t > r \quad (1.27)$$

mas

$$\phi^{\text{out}}(r,t) \propto r^{-1} \left\{ e^{-\Delta(t-r)} - \frac{8\gamma\Delta}{(2\Delta+\gamma)^2} e^{-\frac{\gamma}{2}(t-r)} \right\} \quad \text{para } t < r$$

A posição média é dada explicitamente por

$$\langle r \rangle = t \quad \text{para } t < -R$$

$$\langle r \rangle = t + \frac{4(4\Delta+\gamma)}{(2\Delta+\gamma)^2} \quad \text{para } t > R$$

onde a diferença $|\langle r \rangle - t|$ é sempre $< 4\Delta^{-1}$ e R um parâmetro razoavelmente grande.

A cauda $\exp \left\{ -\frac{\gamma}{2} (t-r) \right\}$ em (1.27) é devida ao polo complexo. Ela se tornaria o termo dominante dando um claro efeito de avanço temporal. Se tivermos um pacote de onda cuja incerteza original Δ^{-1} no espaço das coordenadas é muito menor do que γ^{-1} , e se pudermos medir parâmetros que são sensíveis à cauda

$$\exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma (t-r) \right\}$$

De maneira a ver a cauda e $-\frac{\gamma}{2} (t-r)$, nós podemos considerar uma medida que possa diferenciar a região avançada temporalmente, digamos $(t-r) > \xi$, onde ξ representa a resolução experimental do espaço-tempo. Por meio de algumas estimativas Lee e Wick concluíram que é muito pouco provável que possamos detectar tal efeito em qualquer futuro próximo (apesar de ser possível em princípio) (11.14).

Em qualquer teoria quântica, o que nós realmente estudamos são as correlações entre vários eventos ocorrendo em diferentes regiões do espaço-tempo. A impossibilidade de construir durante $t < 0$ uma frente de onda bem definida da onda incoming torna assim impossível dar uma interpretação causal estrita de tais correlações, dessa forma, concluem eles, não existe um princípio de causalidade bem definido. A atribuição de que um tal efeito / seria observado como não causal, tem um certo grau de arbitrariedade, exceto no limite clássico.

Podemos assim chamar esta cauda pouco usual no pacote de onda outgoing "acausal". A questão de se ele existe ou não na natureza só pode ser resolvida por experiências futuras.

A diferença essencial com respeito à causalidade nas

duas teorias, é que nossa teoria permite prever a resposta à excitação clássica e sua consequência em termos de acausalidade (4.47), ao passo que na de Lee-Wick a "acausalidade" se manifesta através do comportamento anômalo do pacote de ondas./ Porisso é justamente na discussão da causalidade que o nosso tratamento é mais rico em informações do que este. Sendo a nossa formulação mais completa na descrição em termos de espaço-tempo, nós podemos analisar a resposta do sistema a uma excitação clássica. Justamente no limite clássico, como já foi observado acima, é que existe um princípio da causalidade bem definido.

1.7. Conclusões.

Pelo que acabamos de apresentar, a formulação da / teoria de Lee-Wick passou essencialmente por dois estágios. No primeiro estágio temos a sua formulação original, onde a unitariedade da matriz S é assegurada, mas com o sacrifício da invariança de Lorentz da teoria (o que não foi reconhecido / imediatamente pelos autores).

No segundo estágio introduz-se uma nova prescrição para salvar a invariança de Lorentz e a unitariedade da teoria. No entanto a nova prescrição (bem como a integral de Feynman modificada) não tem sido derivada de uma teoria de / campo lagrangeana. Assim essas propriedades são mantidas com o prejuízo da formulação lagrangeana da teoria, sendo assim mais próximo de uma formulação de uma teoria de matriz S .

2. Teoria de Campos com massas complexas.

2.1. Teorias de Campo convergentes com massas complexas.

De acôrdo com o que já foi discutido na introdução , uma teoria de campo convergente pode ser obtida a partir de um formalismo que leve a propagadores que decrescem mais rapidamente que os usuais. Dentro da formulação lagrangeana de campos tal formalismo nos leva obrigatôriamente a um espaço de estados com métrica indefinida.

Em uma teoria de campos convencional as massas das partículas são reais, mas uma teoria com métrica indefinida permite a ocorrência de partículas com massas complexas. Além disso, estados constituídos de pares de partículas com massas complexas têm norma positivo definidas.

Tem sido propostas muitas teorias de campo (com métrica indefinida) que exploram essa liberdade adicional de introduzir partículas com massas complexas^(11,16,22,23). Nessa seção procuraremos indicar como uma teoria de campos convergente, pode ser obtida usando massas complexas.

O problema de quantizar o campo de massas complexas já foi tratado em alguns trabalhos (14,22,24). Aqui procuraremos mostrar apenas que quando quantizamos esses campos usando o formalismo canônico somos obrigados a introduzir uma métrica indefinida.

Consideremos três tipos de campos: um cujos quantas/ têm massa real e os outros dois têm massas complexas M e M^* , onde M é um número complexo. Supondo que êstes campos descrevem / bosons de spin 0, podemos escrever a densidade Lagrangeana para

campos livres sob a forma

$$L = \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_m \partial_\mu \phi_m - m^2 \phi_m^2) + \frac{1}{2} (\partial^\mu \phi_M \partial_\mu \phi_M - M^2 \phi_M^2) + \\ + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_{M^*} \partial^\mu \phi_{M^*} - M^{*2} \phi_{M^*}^2) \quad (2.1)$$

As equações de Euler-Lagrange nos conduzem às seguintes equações para os campos:

$$(\square + m_i^2) \phi_{m_i}(x) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

onde

$$\begin{aligned} m_1 &= m \\ m_2 &= M \\ m_3 &= M^* \end{aligned} \quad (2.3)$$

Uma decomposição de Fourier conveniente para esses campos é:

$$\phi_{m_i}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{2w_i(\vec{k})}} \left\{ a_i(\vec{k}) e^{-ik_i \cdot x} + a_i^\dagger(\vec{k}) e^{ik_i \cdot x} \right\} \quad (2.4)$$

onde

$$w_i(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_i^2} \equiv k_{0i} \quad (2.5)$$

$$\phi_m(x) = \phi_m^*(x) \rightarrow a_1^\dagger(\vec{k}) = b_1^+(k)$$

$$\phi_M^*(x) = \phi_{m_2}^*(x) = \phi_{M^*}(x) = \phi_{m_3}(x)$$

A quantização desses campos é efetuada usando o formalismo canônico. Estabelecemos as relações de comutação entre os campos e suas variáveis canonicamente conjugadas a tempos iguais

$$[\pi_i(x), \phi_i(y)]_{xx} = -i \delta(\vec{x}-\vec{y}) \quad (2.6)$$

Essas relações de comutação a tempos iguais implicam nas seguintes relações de comutação entre os operadores de criação e aniquilação definidos em (2.4).

$$[a_1(\vec{k}), a_1^+(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}') \quad (2.7)$$

$$[a_2(\vec{k}), a_2^+(\vec{k}')] = [a_3(\vec{k}), a_3^+(\vec{k}')] = 0$$

$$[a_2(\vec{k}), a_3^+(\vec{k}')] = [a_3(\vec{k}), a_2^+(\vec{k}')] = 0$$

As demais relações de comutação são nulas.

As relações de comutação (2.7) junto com a interpretação de $a_2(\vec{k})$, $a_3(\vec{k})$, $a_2^+(\vec{k})$, $a_3^+(\vec{k})$ como operadores de criação/ e aniquilação implicam uma métrica indefinida.

Agora introduzimos o campo $\phi(x)$ (Real) definido por

$$\phi(x) = C_1 \phi_m(x) + C_2 \phi_M(x) + C_3 \phi_{M^*}(x) \quad (2.8)$$

A partir de (2.2) é fácil verificar que o campo $\phi(x)$ satisfaz à equação de sexta ordem

$$\prod_{i=1}^3 (\square + m_i^2) \phi(x) = 0 \quad (2.9)$$

O propagador de Feynman (por exemplo) do campo $\phi(x)$ é

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = c_1^2 \langle 0 | T \phi_m(x) \phi_m(y) | 0 \rangle + c_2^2 \langle 0 | T \phi_M(x)$$

$$\phi_M(y) | 0 \rangle + c_3^2 \langle 0 | T \phi_{M^*}(x) \phi_{M^*}(y) | 0 \rangle$$

sendo

$$\langle 0 | T \phi_{m_i}(x) \phi_{m_i}(y) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{1}{k^2 - m_i^2} e^{-ik(x-y)}$$

Assim

$$\langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int_{C_F} \Delta_F(k^2) e^{-ik(x-y)} \quad (2.10)$$

onde o contorno C_F é dado na fig. (A.III.1) e

$$\Delta_F(k^2) = \frac{c_1^2}{k^2 - m^2} + \frac{c_2^2}{k^2 - M^2} + \frac{c_3^2}{k^2 - M^{*2}} \quad (2.11)$$

Para que a teoria resultante seja livre de divergências ultravioletas, devemos escolher as constantes de tal forma que

$$\lim_{k^2 \rightarrow \infty} \Delta_F(k^2) \approx \frac{1}{(k^2)^3} \quad (2.11)$$

A condição (2.11) implica as seguintes restrições às constantes C_1, C_2, C_3

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^{*2} = 0 \quad (2.12)$$

$$c_1^2 m^2 + c_2^2 M^2 + c_3^{*2} M^{*2} = 0$$

Escolhendo $c_1=1$, obtemos

$$c_1 = 1 \quad c_2 = \frac{M^{*2} - m^2}{M^2 - M^{*2}} \quad c_3 = \frac{M^2 - m^2}{M^{*2} - M^2} \quad (2.13)$$

e

$$\Delta_F(k^2) = \frac{|m^2 - M^2|^2}{(k^2 - m^2)(k^2 - M^2)(k^2 - M^{*2})} \quad (2.14)$$

2.2. Interações com Potencial Externo.

Com a finalidade de discutirmos algumas dificuldades associadas à teoria de campo com massas complexas, analisaremos a interação do campo $\phi(x)$. O campo $\phi(x)$ satisfaz então à equação:

$$\frac{(\square + m^2)(\square + M^2)(\square + M^{*2})}{|M^2 - m^2|^2} \phi(x) = J(x) \quad (2.15)$$

A maneira usual de resolvermos esta equação é a partir da equação de Yang-Feldman

$$\phi(x) = \phi^{\text{in}}(x) + \int \Delta_R(x-y) J(y) dy \quad (2.16)$$

onde

$$\phi^{\text{in}}(x) = \sum_i C_i \phi_{\text{mi}}^{\text{in}}(x) \quad (2.17)$$

e

$$\Delta_R(x-y) = - \frac{|M^2 - m^2|^2}{(2\pi)^4} \int_{C_R} \frac{d^4 k e^{-ik(x-y)}}{(k^2 - m^2)(k^2 - M^2)(k^2 - M^{*2})} \quad (2.17-b)$$

O contorno retardado é dado pela figura (2.1)

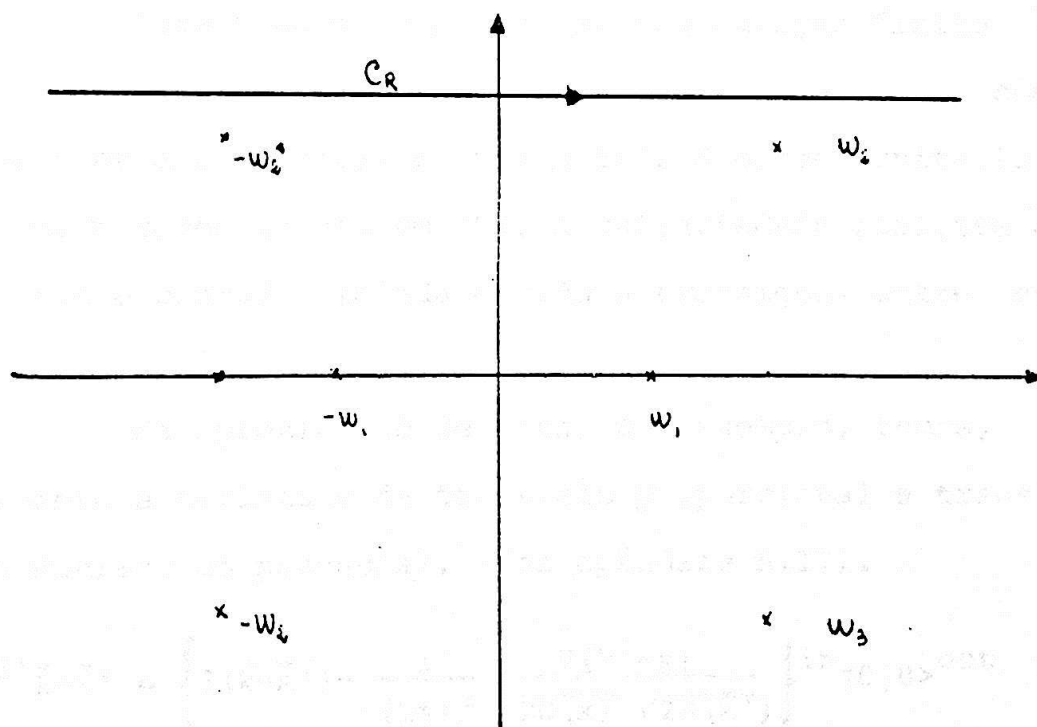


fig.(2.1)

No apêndice é desenvolvida uma teoria de perturbação baseada na equação (2.1). Claramente isto nos levará a resultados sem significado, desde que ambos: as funções de Green e os campos "incoming" tem uma dependência temporal que explode expo

nencialmente. Queremos lembrar que foi o mesmo tipo de dificuldades que levou Lee e Wick a modificarem as regras de Feynman para a matriz S. No entanto a nossa insistência em trabalharmos com os operadores de campo, ao invés da matriz S nos conduzirá a regras diferentes das de Lee-Wick.

Para analisarmos em maiores detalhes o que está acontecendo com a equação (2.1) nós começamos com o exemplo particularmente simples de interação com um potencial externo. Nesse caso

$$J(x) = V(x) \phi(x) \quad (2.18)$$

Para o caso do potencial com duração finita (e só nesse caso) não existem problemas com divergências, e nós podemos mostrar a existência de uma matriz S pseudo-unitária adaptando os métodos usados em (9). A unitariedade positiva definida física é contudo violada devido a transições entre estados de energia real e complexa.

Na aproximação de Born, por exemplo, temos, como usualmente a amplitude de transição proporcional à transformada de Fourier do potencial. (Ver apêndice A.II).

$$A^{(1)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'} = \left\{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') - \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k})}{\sqrt{2W(\vec{k})} \sqrt{2W(\vec{k}')}} \right\} \text{in} \langle 0 | 0 \rangle^{\text{out}} \quad (2.19)$$

No entanto em segunda ordem de perturbações

$$A^{(2)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}_i} = \text{in} \langle 0 | 0 \rangle^{\text{out}} \left\{ \frac{-i}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2W(\vec{k})} \sqrt{2W(\vec{k}_i)}} \times \right. \\ \left. \int_{C_F'} d^4k'' \Delta_R(K'') \tilde{V}(\vec{k}'_i - \vec{k}'') \tilde{V}(\vec{k}'' - \vec{k}) \right\} \quad (2.20)$$

onde C'_F é o contorno (A-II-1).

Como podemos ver a partir de (2.20) a expressão para a amplitude de espalhamento só faz sentido para potenciais com suporte compacto no tempo desde que envolve expressões tais como $V(k-k_i)$ que corresponde a transformada de funções com argumentos complexos.

De acordo com (A-II-27) transferência de energias complexas são possíveis, desde que tenhamos a transformada de Fourier de uma função de suporte compacto no tempo e assim, uma função inteira da energia. Quando o suporte do potencial no tempo vai para infinito, aquelas amplitudes descrevendo transferência de energia complexa se tornam divergentes. Em segunda ordem mesmo a amplitude para processos de energia real (Físicos) divergem, devido às contribuições dos estados intermediários com energia complexa. A divergência de amplitudes "Físicas" não deve nos surpreender desde que como a teoria é pseudo-unitária, pode haver cancelamentos entre probabilidades negativas e positivas.

Torna-se também claro que a hipótese simples da Conservação de Energia que para um potencial estático, excluiria/transições entre energia complexa e real, é incorreta. Como já vimos na seção (1.4) isto invalida a hipótese (1.12) que é essencial na demonstração do "teorema".

3. Potenciais Externos - Equação de Yang-Feldman modificada.

De maneira a sermos capazes de esboçar uma teoria com significado baseada na eq. (2.15) nós precisamos modificar o contorno de integração da função de Green retardada de forma a

evitarmos a explosão que ocorre no tempo. Ao adotarmos tal procedimento nós forçaremos automaticamente a unitariedade física (de acordo com a discussão na última seção). Ao mesmo tempo obteremos um conjunto de "regras de Feynman" modificadas sem ambiguidades e diferentes das de Lee e Wick.

Para evitarmos o aumento exponencial da função de Green é necessário introduzir um novo contorno de integração de forma que

$$\Delta_{Rm}(x) = - \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{C_{Rm}} d^4k \frac{e^{-ikx} |M^2 - m^2|^2}{(k^2 - m^2)(k^2 - M^2)(k^2 - M^{*2})} \quad (3.1)$$

onde o contorno de integração modificado é dado pela fig. (3.1)

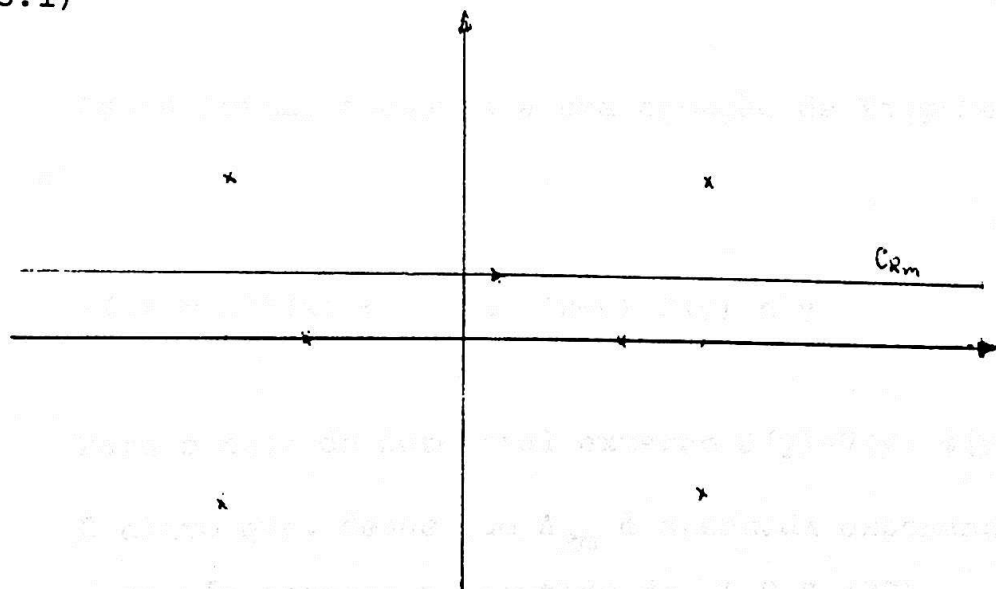


fig. (3.1)

A nova função de Green Δ_{Rm} não é mais estritamente retardada desde que os polos no semi-plano superior introduziram uma certa quantidade de acausalidade para tempos da ordem de $1/\text{Im}M$ (25).

Tanto na teoria de Lee-Wick, quanto nesta é de se

esperar uma violação da causalidade. No caso da primeira, a discussão dessa violação é em termos do comportamento do phase shift próximo à ressonância, sendo assim discutida de uma maneira indireta. No nosso caso nós achamos mais vantajoso tê-la explicitamente o mais próximo possível. Resta-nos comentar ainda que esta acausalidade é do "tipo primitiva" (26), mas se refletirá na violação da causalidade de Einstein (comutatividade local) como pode ser visto a partir de (3.15).

Além de modificarmos a função de Green, nós devemos também eliminar o crescimento exponencial proveniente dos campos "incoming", e isto será feito simplesmente considerando como configuração "incoming" apenas o campo $\phi_m^{\text{in}}(x)$. Fisicamente, isto é muito razoável desde que nós não queremos que estas partículas de massas complexas tenham qualquer manifestação assintótica.

Dessa forma, chegamos a uma equação de Yang-Feldman/ modificada:

$$\phi(x) = \phi_m^{\text{in}}(x) + \int \Delta_{\text{Rm}}(x-y) J(y) d^4y \quad (3.2)$$

Para o caso do potencial externo $J(y) = V(y) \phi(y)$.

É claro que, desde que Δ_{Rm} é atenuada exponencialmente para $x_0 - y_0 < 0$ nós teremos no sentido de L.S.Z. (27).

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \phi(x) = \lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \phi_m^{\text{in}}(x) \quad (3.3)$$

e é definido $\phi^{\text{out}}(x)$ por

$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} \phi_m^{\text{out}}(x) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \phi(x) \quad (3.4)$$

com

$$(\square + m^2) \phi_m^{\text{out}}(x) = 0 \quad (3.5)$$

Pode-se ver prontamente que a teoria de perturbação baseada em (3.2) é agora livre de divergências em todas as ordens em teoria de perturbação, mesmo para potenciais estáticos. No apêndice apresentamos os cálculos explicitamente para potenciais externos até segunda ordem. Os resultados desses cálculos são apresentados aqui resumidamente.

Em primeira ordem podemos escrever para o campo $\phi^{\text{out}}(x)$:

$$\phi^{\text{out}(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2W\vec{k}}} \left\{ a^{\text{out}(1)}(\vec{k}) e^{-ikx} + a^{+\text{out}(1)}(\vec{k}) e^{ikx} \right\} \quad (3.6)$$

onde

$$a^{\text{out}(1)}(k) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2W\vec{k}}} \tilde{U}(W\vec{k}, \vec{k})$$

com

$$\tilde{U}(k) \equiv \int dy e^{iky} V(y) \phi_m^{\text{in}}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{2W\vec{k}},$$

$$\left\{ a^{\text{in}}(\vec{k}) \tilde{V}(k-k') + a^{+\text{in}}(\vec{k}') \tilde{V}(k+k') \right\}$$

e

$$k_0' = W\vec{k}', \quad \tilde{V}(k) = \int e^{iky} V(y) dy \quad (3.7)$$

Para a amplitude de espalhamento, obtivemos

$$A^{(1)} \vec{k} \rightarrow \vec{k}' = (\delta(\vec{k} - \vec{k}')) - \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{k}'}}} \rangle_{in} \langle 0 | 0 \rangle_{out} \quad (3.8)$$

Ao passo que em segunda ordem obtemos respectivamente (A-III):

$$\phi^{out(2)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{C_F} d^4 k' \tilde{U}(\vec{k}') \tilde{\Delta}(\vec{k}') \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left\{ - \frac{\tilde{V}(\vec{k} - \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{-ikx} + \frac{\tilde{V}(\vec{k} - \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} e^{ikx} \right\} \quad (3.9)$$

$$A^{(2)} \vec{k} \rightarrow \vec{k} = \frac{i}{(2\pi)^7} \frac{\langle 0^{in} | 0^{out} \rangle}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{k}'}}} \int d^3 \vec{k}'' \int_{C_F} dk''$$

$$\frac{\tilde{V}(\vec{k}'' - \vec{k}) \tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}'') |M^2 - m^2|^2}{(k''^2 - m^2) (k''^2 - M^2) (k''^2 - M^{*2})}$$

Onde C_F é o contorno de Feynman usual ilustrado na fig. (A.III-1).

A partir desses resultados (mais a amplitude de espalhamento $|\vec{k}\rangle \rightarrow |\vec{k}', \vec{k}'', \vec{k}'''\rangle$ até primeira ordem) mostramos explicitamente que até segunda ordem a amplitude satisfaz a condição da unitariedade.

No entanto, por um método muito elegante, J.A.Swieca⁽⁸⁾ mostrou que esta teoria conduz a uma matriz S unitária em todas as ordens da teoria da perturbação. Transcreveremos aqui essen

cialmente sua demonstração.

Escrevendo a expansão de (3.2)

$$\phi(x) = \phi_m^{\text{in}}(x) + \int \Delta_{\text{Rm}}(x-y) V(y) \phi_m^{\text{in}}(y) + \dots$$

Simbolicamente como

$$\phi = \frac{1}{1 - \Delta_{\text{Rm}} V} \phi_m^{\text{in}} \equiv \int k_{\text{R}}(x, x') \phi_m^{\text{in}}(x') dx'$$

onde o Kernel retardado é definido por

$$k_{\text{R}}(x, x') = \Delta_{\text{Rm}}(x-x') V(x') + \Delta_{\text{Rm}}(x-x') V(x'') \Delta_{\text{Rm}}(x''-x') V(x') + \dots$$

nós temos então

$$\begin{aligned} [\phi(x), \phi(y)] &\equiv \\ &= \int k_{\text{R}}(x-x') \frac{\Delta}{i} (x'-y) k_{\text{R}}(-(y'-y)) dx' dy' \end{aligned}$$

Portanto

$$[\phi(x), \phi(y)] = \frac{1}{1 - \Delta_{\text{Rm}} V} \frac{\Delta}{i} \frac{1}{1 - V \Delta_{\text{Am}}}$$

$$\text{Com } \Delta_{\text{Am}}(x) = \Delta_{\text{Rm}}(-x)$$

e

$$\Delta(x-y) = i [\phi_m^{\text{in}}(x), \phi_m^{\text{in}}(y)] = \Delta_{\text{Rm}}(x-y) - \Delta_{\text{Am}}(x-y)$$

Usando (3.13) podemos reescrever (3.12) como

$$[\phi(x), \phi(y)] = \frac{1}{i} \left(\frac{1}{1 - \Delta_{\text{Rm}} V} \frac{1}{V} - \frac{1}{V} \frac{1}{1 - V \Delta_{\text{Am}}} \right)$$

Conduzindo-nos a

$$[\phi(x), \phi(y)] = [\phi_m^{\text{in}}(x), \phi_m^{\text{in}}(y)] + \quad (3.15)$$

$$+ \frac{1}{i} \left\{ \Delta_{Rm} V \Delta_{Rm} + \Delta_{Rm} V \Delta_{Rm} V \Delta_{Rm} + \dots - \Delta_{Am} V \Delta_{Am} - \Delta_{Am} V \Delta_{Am} V \Delta_{Am} \dots \right\}$$

com um significado simbólico.

Se Δ_{Rm} fôsse um propagador normal retardado, a equação (3.15) implicaria na comutatividade local para ϕ , e para x_0, y_0 maiores do que o tempo no qual o potencial é "desligado" (T)

$$[\phi(x), \phi(y)] \equiv [\phi_m^{\text{out}}(x), \phi_m^{\text{out}}(y)] = [\phi_m^{\text{in}}(x), \phi_m^{\text{in}}(y)] \quad (3.16)$$

$x_0, y_0 > T$

No nosso caso, desde que Δ_{Rm} não é zero, mas atenuado exponencialmente para $x_0 < 0$, a equação (3.16) não é verdadeira. No entanto para grandes valores do tempo, em todas as ordens na teoria de perturbações

$$\lim_{x_0, y_0 \rightarrow \infty} [\phi(x), \phi(y)] \equiv [\phi_m^{\text{out}}(x), \phi_m^{\text{out}}(y)] = [\phi_m^{\text{in}}(x), \phi_m^{\text{in}}(y)] \quad (3.17)$$

Que deve ser entendido no sentido de L.S.Z.

A partir das observações acima podemos agora entender o que já foi exposto quanto à violação da causalidade de Einstein e com respeito à unitariedade da matriz S.

Com respeito à unitariedade da matriz S devemos notar que a igualdade (3.17) implica numa álgebra para os operado

res $a^{\text{out}}(\vec{k})$ e $a^{\text{out}}(\vec{k}')$ que é essencialmente a mesma dos operadores $a^{\text{in}}(\vec{k})$ e $a^{\text{in}}(\vec{k}')$. Mas numa teoria quântica de campos (infinitos Graus de liberdade) devido ao problema da existência / de representações unitariamente inequivalentes da álgebra de operadores (Teorema de Von-Neumann não mais se aplica) esta igualdade só assegura a unitariedade da matriz S contanto que possa ser encontrado um vácuo $|out\rangle$ pertencente ao espaço gerado pelos vetores $|in\rangle$.

$$|0\rangle^{\text{out}} \in H^{\text{in}}$$

implicando numa restrição sobre o domínio espacial do potencial para evitar criação de pares catastróficos⁽⁹⁾.

A partir de (3.6) e (3.10) podemos calcular amplitudes de espalhamento (uma vez obtido o "campo out" em termos do "campo in"). Obtendo assim para o caso de interação com potencial externo um conjunto de regras de Feynman modificadas para uma teoria unitária com massas complexas.

Para o caso de uma normalização não covariante dos estados, obteremos para a amplitude de espalhamento:

$$\text{out}_{\langle \vec{k} | \vec{k} \rangle}^{\text{in}} = \text{out}_{\langle 0 | 0 \rangle}^{\text{in}} \left\{ \delta(\vec{k} - \vec{k}') - \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}(\vec{k} - \vec{k}')}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{k}'}}} - \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{k}'}}} \right.$$

$$\left. \int_{C_F} \tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}_1) \Delta_{Fm}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \tilde{V}(\vec{k}_2 - \vec{k}) d^4 k_1 d^4 k_2 + \dots \right\}$$

Onde o contorno de Feynman modificado é dado pela fig. (A-III-1).

Ao encerrarmos esta seção gostaríamos de fazer algumas observações muito úteis com respeito ao formalismo já exposto.

A primeira observação é a de que não existe um formalismo canonico como suporte para a nossa equação de Yang-Feldman modificada.

O nosso procedimento requer massas complexas, desde que massas reais, nos conduzem a uma violação da causalidade / que é mais violenta (a acausalidade cai apenas como uma potência) e também com dificuldades com unitariedade.

As modificações que introduzimos para nos conduzir/ à equação de Yang-Feldman modificadas, procuram colocar as massas complexas apenas como uma parametrização de uma nova lei de propagação acausal para partículas físicas. Como as partículas de massa complexa não terão qualquer manifestação, a métrica indefinida das teorias de campo usuais com massas complexas não desempenhará aqui qualquer papel.

3.2. Unitariedade - Equação de Yang-Feldman não modificada.

A seguir procuraremos mostrar que para potenciais / com suporte compacto no tempo, a equação do campo clássico acoplado a um potencial externo

$$(\square + m^2)(\square + M^2) \frac{(\square + M^{*2})}{|m^2 - M^2|^2} \phi(x) = V(x) \phi(x) \quad (3.19)$$

nos conduz a duas propriedades altamente desejáveis para suas soluções

- a) Existe a evolução temporal clássica
- b) Os campos livres $A^{\text{out}}(x)$ ($A^{\text{out}}(x) = A(x)$ quando $t > T$) e $A^{\text{in}}(x)$ são relacionados pseudo-unitária

mente.

Antes de atacarmos diretamente o problema queremos chamar a atenção para duas observações. A primeira é a de que tanto no caso do campo clássico quanto no caso do campo quantizado, nós podemos mostrar a existência da solução do problema de Cauchy porque para o caso de interação com potenciais externos as equações são lineares nos campos. Finalmente nesta seção bem como na seção correspondente ao campo quantizado nós usaremos basicamente as mesmas idéias (e o mesmo método) exposto na referência (9).

Procuraremos agora escrever a equação (3.19) que é uma equação de sexta ordem em termos de uma equação de primeira ordem (onde agora o novo campo tem seis componentes).

Uma lagrangeana que nos leva a (3.19) é

$$L = \phi(x) (\square + m^2) (\square + M^2) \frac{(\square + M^{*2})}{|m^2 - M^2|^2} \phi(x) + \frac{V(x)}{2} \phi^2(x) \quad (3.20)$$

Nota-se no entanto que a lagrangeana:

$$L \approx \sum_{i=1}^3 \frac{C_i}{2} (\partial_\mu \phi^i \partial^\mu \phi^i - m_C^2 \phi_i^2) + \frac{V(x)}{2} (\sum C_i \phi_i)^2 \quad (3.21)$$

onde os campos $\phi_i(x)$ são definidos por

$$\phi^i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(\square + m_j^2)}{|m^2 - M^2|^2} \phi(x) \quad (3.22)$$

$$\phi(x) = \sum_j C_j \phi_j(x)$$

os C_i 's são dados por (2.13)

é uma lagrangeana dinamicamente equivalente a (3.20). Esta lagrangeana nos leva às seguintes equações para os campos $\phi^i(x)$

$$(\square + m_i^2) \phi^i(x) = V(x) (\sum C_j \phi_j(x)) \quad (3.23)$$

Vamos introduzir um campo de três componentes $\vec{\phi}(x)$ definido por

$$\vec{\phi}(x) = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Então a equação (3.23) pode ser escrita sob a forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + H'_0 \right) \vec{\phi}(x) = v'(x) \vec{\phi}(x) \quad (3.25)$$

com

$$H'_0 = \begin{bmatrix} m^2 - \Delta & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & M^2 - \Delta & \bigcirc \\ \bigcirc & \bigcirc & M^{*2} - \Delta \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

$$v'(x) = V(x) \cdot \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$\Delta \equiv$ laplaciano

Retomando a equação (3.23) podemos fazer agora a mesma decomposição usada na referência (9). Assim para cada campo

$\phi^i(x)$ escrevemos:

$$\phi^i(x) = \frac{1}{(2k_i)^{1/2}} \alpha_i(x) + \frac{1}{(2k_i)^{1/2}} \beta_i(x) \quad (3.28)$$

onde

$$k_i = (m_i^2 - \Delta)^{1/2} \quad (3.29)$$

Introduzimos agora o campo $\psi(x)$ de seis componentes

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

onde cada componente $\alpha_i, \beta_i(x)$ satisfaz à equação

$$\left(\frac{i\partial}{\partial t} + k_i\right) \alpha_i(x) = \frac{-1}{\sqrt{2k_i}} \sum C_j V(x) \phi_j(x) \quad (3.31)$$

$$\left(\frac{i\partial}{\partial t} - k_i\right) \beta_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2k_i}} \sum C_j V(x) \phi_j(x)$$

A partir de (3.31) e (3.28) podemos escrever para $\psi(x)$ a equação

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = (H_0 + V(x)) \psi(x) \quad (3.32)$$

$$H_0 = \begin{pmatrix} -k_1 & & & & & \\ & +k_1 & & & & \\ & & -k_2 & & & \\ & & & +k_2 & & \\ & & & & -k_3 & \\ & & & & & +k_3 \end{pmatrix} \quad (3.33)$$

$$v(x) = \begin{bmatrix} -C_1 V_{11} & -C_1 V_{11} & -C_2 V_{12} & -C_2 V_{12} & -C_3 V_{13} & -C_3 V_{13} \\ C_1 V_{11} & C_1 V_{11} & C_2 V_{12} & C_2 V_{12} & C_3 V_{13} & C_3 V_{13} \\ -C_1 V_{21} & -C_1 V_{21} & -C_2 V_{22} & -C_2 V_{22} & -C_3 V_{23} & -C_3 V_{23} \\ C_1 V_{21} & C_1 V_{21} & C_2 V_{22} & C_2 V_{22} & C_3 V_{23} & C_3 V_{23} \\ -C_1 V_{31} & -C_1 V_{31} & -C_2 V_{32} & -C_2 V_{32} & -C_3 V_{33} & -C_3 V_{33} \\ C_1 V_{31} & C_1 V_{31} & C_2 V_{32} & C_2 V_{32} & C_3 V_{33} & C_3 V_{33} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$V_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2k_i}} V(x) \frac{1}{\sqrt{2k_j}} \quad (3.35)$$

Observemos agora a partir de (3.32) que existe uma corrente conservada e portanto a integral da sua primeira componente sobre todo o espaço é uma constante de movimento, definindo assim um produto interno que é conservado mas é indefinido.

Assim

$$(\bar{\psi}, \psi) \equiv (\psi^+, \eta\psi) = \text{cte}$$

onde η é a métrica

$$\eta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Então

$$(\psi^{+out}, \eta \psi^{out}(x)) = (\psi^{+in}, \eta \psi^{in}(x)) \geq 0$$

Assim o operador de evolução temporal (se existir) é pseudo unitário.

Mostraremos agora que existe o operador de evolução/ temporal que é dado por

$$U(t, -T) = e^{-iH_0(t+T)} \mathcal{T} e^{-i \int_{-T}^t H_{int}(t') dt'} \quad (3.38)$$

onde $H_{int}(t) = e^{-iH_0 t} v(t) e^{iH_0 t}$

Em primeiro lugar devemos mostrar que para um potencial de suporte compacto no tempo

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x_0 < -T \\ V(x) & -T < x_0 < T \\ 0 & x_0 > T \end{cases} \quad (3.40)$$

O operador $e^{-iH_0 t}$ é limitado ou equivalentemente/ este operador deve satisfazer para todo ψ

$$|| e^{-iH_0 t} \psi || < C || \psi || \quad (3.41)$$

A métrica conservada introduzida anteriormente não é útil para mostrar a existência do Kernel de propagação. Uma métrica útil, por ser positivo definida (mas não conservada), é a métrica número definida por

$$||\psi||_N^2 = \sum_i \left(\int |\alpha_i(x)|^2 d^3\vec{x} + \int |\beta_i(x)|^2 d^3\vec{x} \right) \quad (3.42)$$

Para demonstrarmos a propriedade (3.41) vamos fazer uma decomposição de Fourier do campo $\psi(\vec{x}, t)$, na parte espacial apenas.

$$\psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \tilde{\psi}(\vec{k}, t)$$

$$||\psi(\vec{x}, t)||_N^2 = \int d^3\vec{k} ||\tilde{\psi}(\vec{k}, t)||^2$$

$$e^{-iH_0 t} \psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} e^{-i\vec{k}\vec{x}} \begin{bmatrix} e^{-iw_1 t} & & & & & \\ & e^{iw_1 t} & & & & \\ & & e^{-iw_2 t} & & & \\ & & & e^{iw_2 t} & & \\ & & & & e^{-iw_3 t} & \\ & & & & & e^{iw_3 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_1(\vec{k}, t) \\ \tilde{\psi}_2(\vec{k}, t) \\ \tilde{\psi}_3(\vec{k}, t) \\ . \\ . \\ \tilde{\psi}_6(\vec{k}, t) \end{bmatrix}$$

$$w_i(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_i^2}$$

$$\begin{aligned} ||e^{-iH_0 t} \psi(x)||_N^2 &= \int d^3\vec{k} (|\tilde{\psi}_1(\vec{k}, t)|^2 + |\tilde{\psi}_2(\vec{k}, t)|^2 + e^{i(w_3 - w_2)t} |\tilde{\psi}_3(\vec{k}, t)|^2 + \\ &+ e^{i(w_2 - w_3)t} |\tilde{\psi}_4(\vec{k}, t)|^2 + e^{i(w_2 - w_3)t} |\tilde{\psi}_5(\vec{k}, t)|^2 + e^{i(w_3 - w_2)t} |\tilde{\psi}_6(\vec{k}, t)|^2) \\ &\leq e^{2\text{Im } M t} ||\psi(x)||_N^2 \end{aligned}$$

Assim para tempos finitos $e^{-iH_0 t}$ é limitado.

Como o operador $H_{int}(t) = e^{-iH_0 t} v(t) e^{iH_0 t}$ também é limitado, pois $v(t)$ é limitado, concluimos assim que o operador de evolução temporal

$$v(t, -T) = e^{-iH(t+T)} \tau e^{-i \int_{-T}^t H_{int}(t') dt'}$$

existe e é limitado na norma já introduzida.

Em termos de teoria de Perturbação isto é equivalente a dizer que a série de Dyson converge.

3.3. Unitariedade - Equação modificada.

Para discutirmos a unitariedade no caso da equação / de Yang-Feldman modificada, reescreveremos a equação do campo / sob a forma (3.32)

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x) = (H_0 + v(x)) \psi(x)$$

Com H_0 e $v(x)$ dados respectivamente por (3.33) e (3.34)

Denominaremos as seis componentes soluções dessa equação de $f_1(\vec{x}, t)$, $f_2(\vec{x}, t)$, $f_6(\vec{x}, t)$ para o caso clássico. Tanto para o campo clássico, quanto para o quântico definimos

$$\psi^{in}(\vec{x}, t) \equiv \lim_{t \rightarrow -T} \psi(\vec{x}, t) \quad (3.43)$$

$$\psi^{out}(\vec{x}, t) \equiv \lim_{t \rightarrow T} \psi(\vec{x}, t)$$

Como já dissemos anteriormente, existe um produto interno conservado. Isto nos permite escrever para as soluções clássicas a condição

$$(\psi^{+in}(x), \eta \psi^{in}(x)) = (\psi^{+out}, \eta \psi^{out}(x)) \quad (3.44)$$

onde η é dada por (3.37)

O operador de evolução é pseudo-unitário, pois a métrica é indefinida.

Observemos agora que a equação de Yang-Feldman modificada é equivalente, ao nível clássico, a eliminar as soluções que explodem quando $t \rightarrow -\infty$, ou equivalentemente

$$f_4^{in}(\vec{x}, t) = f_5^{in}(\vec{x}, t) = 0 \quad (3.45)$$

No entanto, como veremos a seguir, os campos $\phi^{out}(x)$ e $\phi^{in}(x)$ estarão relacionados (se este for o caso) unitariamente, se for possível também para $t \rightarrow +\infty$, não termos soluções que explodem exponencialmente. Ou em outras palavras, se não tivermos manifestação assintótica das "partículas de massas complexas". Dessa forma a outra condição corresponde/classicamente a

$$f_3^{out}(x) = f_6^{out}(x) = 0 \quad (3.46)$$

Isto implica então, que as condições iniciais devem ser ajustadas de modo a que satisfaçam às condições

$$\sum_i \int_{U_i} (\vec{x}, \vec{x}') f_1(\vec{x}', -T) = 0$$

$$\sum_j \int U_{6j}(\vec{x}, \vec{x}') f_j(\vec{x}', -T) = 0 \quad (3.47)$$

Onde os U_{ij} são os elementos de matriz do operador U escritos como "núcleos" no espaço das configurações, e T é o tempo no qual foi desligado o potencial.

Poderemos resolver este sistema de equações obtendo f_3^{in} e f_6^{in} em termos de f_1^{in} , f_2^{in} e U , desde que a matriz dessa transformação seja não singular. Dessa forma o sistema terá solução se não houver soluções para o sistema Homogeneo:

$$\begin{bmatrix} U_{33} & U_{36} \\ U_{63} & U_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_3 \\ 0_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.48)$$

ou, equivalentemente, se o operador

$$\frac{1}{U_{33}} U_{36} - \frac{1}{U_{66}} U_{66} \quad (3.49)$$

não tiver auto-valores iguais a zero.

A condição (3.49) é satisfeita pelo menos para potenciais fracos. Isto pode ser visto observando apenas que para potenciais suficientemente fracos, Os elementos da diagonal de (3.48) são da ordem de 1 e os fora da diagonal são da ordem de λ que dá essencialmente a intensidade do potencial. Para casos mais gerais o problema está ainda em aberto. Admitindo no entanto que a restrição (3.49) seja satisfeita, uma vez conhecidos os elementos de matriz de U ; podemos determinar $f_3(\vec{x}, -T)$ e $f_6(\vec{x}, -T)$

em função de $f_1(\vec{x}, -T)$ e $f_2(\vec{x}, -T)$ e dos elementos de U de tal forma que as massas complexas não tenham manifestação assintótica.

Antes de tratarmos da teoria quantizada, vamos analisar a inter-relação exibida na nossa equação modificada entre a condição da unitariedade e a violação da causalidade. De forma a que seja preservada a unitariedade, o sistema deve ser ajustado/ de tal forma a que sejam nulas algumas componentes da solução final. Como esse ajuste depende do potencial (pois depende de U), o meu sistema responderá a alguma excitação (ou qualquer perturbação) antes que essa tenha se efetivado. Donde a resposta do meu sistema é acausal.

Consideremos agora o campo quantizado em interação com um potencial externo. Mostraremos a seguir que a pseudo-unitariedade do operador de evolução temporal (3.38) juntamente com as condições (3.45) e (3.47) são condições suficientes para que a estrutura dos comutadores dos operadores de campo e operadores de criação e aniquilação "out" e "in" seja a mesma.

Retomemos a expansão do campo (3.27)

$$\hat{\phi}^i(x) = \frac{1}{\sqrt{2k_i}} \hat{\alpha}^i(x) + \frac{1}{\sqrt{2k_i}} \hat{\beta}^i(x)$$

Introduzimos ainda o operador de seis componentes

$$\hat{\psi}(x) = \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\alpha}_3 \\ \hat{\beta}_3 \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

Vamos agora fazer a decomposição de Fourier do campo sob a forma:

$$\hat{\psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} \left\{ a^{\text{in}}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{+}(\vec{x}, t) + a^{+\text{in}}(\vec{k}) f_{\vec{k}}^{-}(\vec{x}, t) \right\} \quad (3.51)$$

onde $f_{\vec{k}}^{+}$ e $f_{\vec{k}}^{-}$ são espinores de seis componentes, correspondendo às soluções de energia positiva e negativa da equação / clássica. Dessa forma, a partir das definições

$$\hat{\psi}^{\text{out}}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k} \left\{ a^{\text{out}}(\vec{k}) \xi_{\vec{k}}^{+\text{out}}(\vec{x}, t) + a^{+\text{out}}(\vec{k}) \xi_{\vec{k}}^{-\text{out}}(\vec{x}, t) \right\} \quad (3.52)$$

$$\hat{\psi}^{\text{in}}(\mathbf{x}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3\vec{k}' \left\{ a^{\text{in}}(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^{+\text{in}}(\vec{x}, t) + a^{+\text{in}}(\vec{k}') f_{\vec{k}'}^{-\text{in}}(\vec{x}, t) \right\}$$

de (3.45) e (3.47) devemos ter as seguintes propriedades para as soluções de energia positiva e negativa:

$$f_{\vec{k}}^{+\text{in}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{-ikx} \\ 0 \\ f_{\vec{k},x}^{+\text{in}}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \\ f_{\vec{k},6}^{+\text{in}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad f_{\vec{k}}^{-\text{in}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{ikx} \\ f_{\vec{k},3}^{-\text{in}}(\mathbf{x}) \\ 0 \\ 0 \\ f_{\vec{k},6}^{-\text{in}}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\xi_{\vec{k}}^{+\text{out}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} e^{-ikx} \\ 0 \\ 0 \\ \xi_{\vec{k},4}^{+\text{out}}(\mathbf{x}) \\ \xi_{\vec{k},5}^{+\text{out}}(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \xi_{\vec{k}}^{-\text{out}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{ikx} \\ 0 \\ \xi_{\vec{k},4}^{-\text{out}} \\ \xi_{\vec{k},5}^{-\text{out}} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

As funções $f_{k,3}^{+in}$, $f_{k,6}^{+in}$, $f_{k,4}^{+out}$, $f_{k,5}^{+out}$ decaem exponencialmente no limite $t \rightarrow -\infty$ e $t \rightarrow +\infty$ respectivamente.

Desde que a evolução temporal do operador de campo/ é dada pela equação diferencial clássica (3.31), podemos escrever então para o operador de campo $\hat{\psi}(x)$, no tempo $t=T$

$$\hat{\psi}(x,T) = U(T,-T) \hat{\psi}(x,-T) \quad (3.55)$$

onde U é o operador de evolução temporal da equação do campo clássico, cuja existência nós já demonstramos. A partir de (3.52), (3.53), (3.54), (3.55) podemos escrever:

$$a^{out}(\vec{k}) \cong \int d^3\vec{k}' \left\{ \left(\begin{matrix} +out \\ \vec{k} \end{matrix}, \eta U f_{\vec{k}'}^{+in} \right) a^{in}(\vec{k}') + \left(\begin{matrix} +out \\ \vec{k} \end{matrix}, \eta U f_{\vec{k}'}^{-in} \right) a^{+in}(\vec{k}') \right\} \quad (3.56)$$

$$a^{+out}(\vec{k}) \cong \int d^3\vec{k}' \left\{ \left(\begin{matrix} -out \\ \vec{k} \end{matrix}, \eta U f_{\vec{k}'}^{+in} \right) a^{in}(\vec{k}') + \left(\begin{matrix} -out \\ \vec{k} \end{matrix}, \eta U f_{\vec{k}'}^{-in} \right) a^{+in}(\vec{k}') \right\} \quad (3.57)$$

De acordo com o apêndice (A.XI) a partir de (3.56) e (3.57) e usando a condição (3.47) juntamente com a propriedade de U ser pseudo unitária e o fato do campo ser real, no tempo/ $t=T$ a álgebra de comutadores dos operadores a^{+out} , a^{out} é

$$[a^{out}(\vec{k}), a^{out}(\vec{k})] = 0 = [a^{+out}(\vec{k}), a^{+out}(\vec{k}')]]$$

$$[a^{out}(\vec{k}), a^{+out}(\vec{k}')] = \delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

Sendo assim a mesma álgebra dos operadores "in" (esta álgebra é usada na demonstração). Assim, a pseudo-unitariedade/ de U e as condições assintóticas são responsáveis pelo fato de / que o operador de evolução temporal dá o automorfismo algébrico por (3.55).

Contudo, a existência de um operador unitário no espaço de estados do campo quantizado, que transforma o campo em um instante de tempo para o campo em outro instante de tempo/ exige outras restrições a serem satisfeitas pela interação. A existência desse operador unitário $\hat{U}(t-T)$ que implementa esta transformação canonica é equivalente ao problema de $a^{+out}(\vec{k})$, / $a^{out}(\vec{k})$ pertencerem à representação de Fock se este foi o caso para os operadores "in".

A existência de um operador unitário no espaço de Fock de $a^{in}(\vec{k})$ e $a^{+in}(\vec{k})$ que implemente esta transformação canonica deve nos levar a restrições sobre a interação Hint. O problema é equivalente à existência de um vácuo para os $a^{out}(\vec{k})$ no espaço de Fock dos operadores "in". Seguindo basicamente as mesmas idéias de (9) chegaríamos à conclusão de que essa condição é equivalente à condição de $L \equiv \frac{1}{U_{11}} U_{12}$ ser um operador de Hilbert-Schmidt.

4. Teoria Totalmente Quantizada.

4.1. Equação de Yang-Feldman modificada.

Vamos agora considerar o caso de uma teoria totalmente quantizada. Como já dissemos anteriormente, aplicaremos nosas idéias a um modelo. O nosso modelo será a teoria ϕ^3 . Tomaremos como equação básica a equação

$$(\square + M^2) \frac{(\square + M^2)(\square + M^{*2})}{|m^2 - M^2|^2} \phi(x) = \lambda : \phi^2(x) : + \delta m^2 \frac{(\square + M)(\square + M^*)}{|m^2 - M^2|^2} \phi(x) \quad (4.1)$$

Onde na equação (4.1) já introduzimos o contra-térmo de massa (δm^2) explicitamente.

A equação de Yang-Feldman modificada se escreve

$$\phi(x) = \phi_m^{\text{in}}(x) + \int \Delta_R(x-y) J'(y) dy \quad (4.2)$$

onde agora

$$J'(y) = \lambda : \phi^2(y) : + \delta m^2 \frac{(\square + M^2)(\square + M^{*2})}{|m^2 - M^2|^2} \phi(y) \quad (4.3)$$

Podemos resolver a equação (4.2) por um método iterativo. Por iteração, temos para 4.2, usando (4.3)

$$\phi(x) = \phi_m^{\text{in}}(x) + \int \Delta_R(x-y) \{ \lambda : \phi(y) \{ \phi_m^{\text{in}}(y) + \lambda \Delta_R(y-z) J(z) \} : \} dy$$

$$+ \int \Delta_R(x-y) \{ \delta m^2 \frac{(\square_y + M)(\square_y + M^*)}{|M^2 - m^2|^2} (\phi_m^{in}(y) + \lambda \Delta_R(y-z) J'(z)) \} dy$$

Assim, até segunda ordem em λ encontraremos

$$\begin{aligned} \phi(x) = & \phi_m^{in}(x) + \lambda \int \Delta_R(x-y) : \phi_m^{in}(y) : dy + \int \Delta_R(x-y) \delta m^2 \left\{ \frac{(\square + M^2)(\square + M^{*2})}{|m^2 - M^2|^2} \phi_m^{in}(y) \right\} \\ & + \lambda^2 \iint dy dz \Delta_R(x-y) \Delta_R(y-z) \left\{ : \phi_m^{in}(y) : : \phi_m^{in}(z) : + : \phi_m^{in}(z) : : \phi_m^{in}(y) : \right\} \end{aligned}$$

Escreveremos uma série perturbativa para o campo $\phi(x)$

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \phi^{(2)}(x) + \phi^{(3)}(x) + \dots \quad (4.4)$$

onde cada índice corresponde à ordem da série perturbativa (potência de λ). Assim

$$\phi^{(0)}(x) = \phi_m^{in}(x)$$

$$\phi^{(1)}(x) = \lambda \int \Delta_R(x-y) : \phi_m^{in}(y) : dy \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(x) = & \lambda^2 \iint \Delta_R(x-y) \Delta_R(y-z) \left\{ : \phi_m^{in}(y) : : \phi_m^{in}(z) : + : \phi_m^{in}(z) : : \phi_m^{in}(y) : \right\} \\ & + \delta m^2 \int \Delta_R(x-y) \left\{ \frac{(\square_y + M^2)(\square_y + M^{*2})}{|M^2 - m^2|^2} \phi_m^{in}(y) \right\} \end{aligned}$$

Usando a álgebra de Wick, podemos escrever o produto de operadores de campo (usual) em termos de produtos de operadores de campo ordenados sob a forma normal, usando como coeficientes as funções de contração, que, como mostraremos em seguida, são as funções Δ^+ e Δ^- .

Para dois campos podemos escrever

$$\phi(x) \phi(y) = : \phi(x) \phi(y) : + f(x,y)$$

$f(x,y)$ é uma função usual (número c). Pelo fato do valor esperado no vácuo de campos ordenados sob a forma normal / ser zero, obtemos então

$$f(x,y) = \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = i\Delta^+(y-x) \quad (4.6)$$

Seja

$$i\Delta^+(y-x) \equiv \underline{\phi(x)} / \phi(y)$$

Donde

$$\phi(x) \phi(y) = : \phi(x) \phi(y) : + \underline{\phi(x)} / \phi(y) \quad (4.7)$$

Generalizando (4.7) obtemos

$$\phi(x) \phi(y) \phi(z) = : \phi(x) \phi(y) \phi(z) : + \underline{\phi(x)} / \phi(y) \phi(z) \quad (4.8)$$

$$+ \phi(x) \underline{\phi(y)} / \phi(z) + \underline{\phi(x) \phi(y)} / \phi(z)$$

A partir de (4.8) é fácil obter

$$\phi^{in}(y) : \phi^{in}(z) : + : \phi^{in}(z) : \phi^{in}(y) =$$

$$= : \phi^{\text{in}}(y) \phi^{\text{in}}(z) + \phi^{\text{in}}(z) \phi^{\text{in}}(y) : + 2i \phi^{\text{in}}(z) \{ \Delta^+(y-z) + \Delta^+(z-y) \} \quad (4.9)$$

Sendo

$$\Delta^+(x) = -\Delta^-(-x)$$

e definindo a função $\Delta^{(1)}$ de Schwinger através de

$$\Delta^{(1)}(x) \equiv i (\Delta^+(x) - \Delta^-(x)) \quad (4.10)$$

Podemos escrever para o último termo de (4.9):

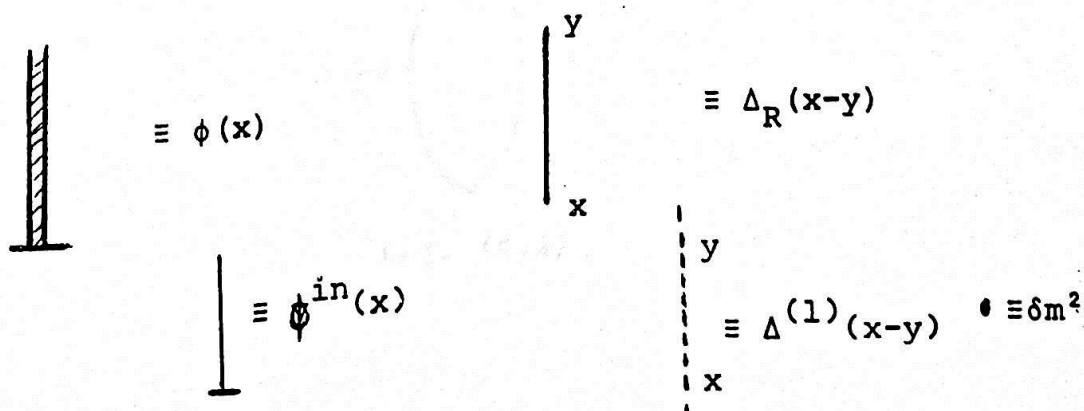
$$\Delta^+(y-z) + \Delta^+(z-y) \equiv \frac{\Delta^{(1)}}{i}(y-z)$$

A partir dessa igualdade e usando (4.9) obtemos para $\phi^{(2)}(x)$ definido em (4.5).

$$\phi^{(2)}(x) = \lambda^2 \iint \Delta_R(x-y) \Delta_R(y-z) dy dz \left\{ : \phi^{\text{in}}(z) \phi^{\text{in}}(y) + \phi^{\text{in}}(y) \phi^{\text{in}}(z) : + 2 \phi^{\text{in}}(z) \Delta^{(1)}(y-z) \right\} \quad (4.11)$$

$$+ \delta m^2 \int dy \Delta_R(x-z) \frac{(\square_y + M^2)(\square_y + M^{*2})}{|m^2 - M^2|^2} \phi^{\text{in}}(y)$$

Agora esboçaremos uma representação gráfica para o campo $\phi(x)$. Seja



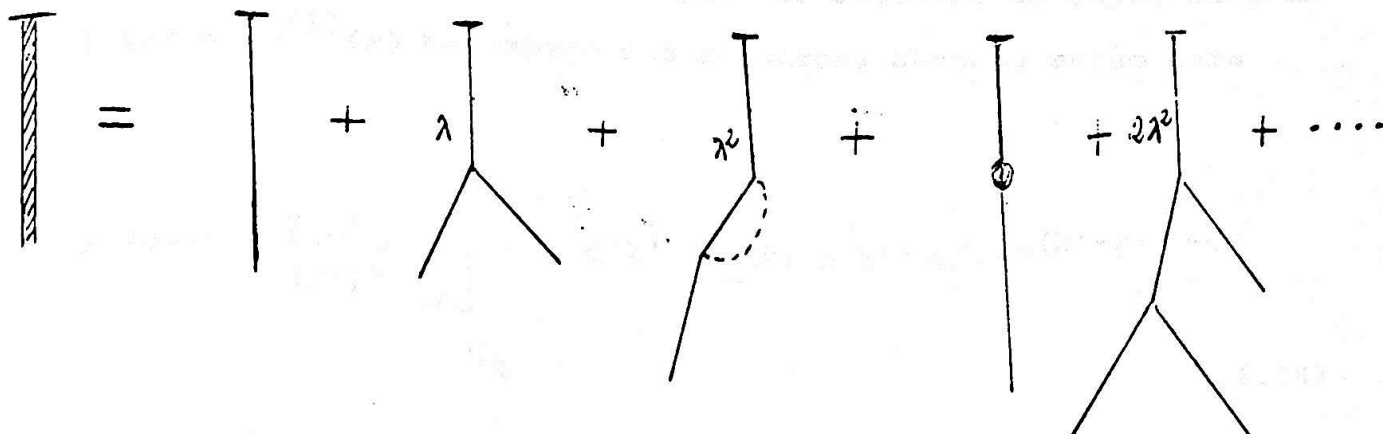


fig. (4.1)

Neste ponto, vamos considerar de agora em diante apenas o termo em $\phi^{(2)}$ que corresponde à renormalização da massa. Grãficamente este termo corresponde ao terceiro gráfico do segundo membro da fig.(4.1). Tomando apenas esse termo que nos interessa e denominando-o de $\phi_R^{II}(x)$, temos

$$\phi_R^{II}(x) = \iint \Delta_R(x-y) dy dz \phi_{in}(z) \tilde{F}(y-z) \quad (4.12)$$

$$\text{onde } \tilde{F}(y-z) \equiv 2\lambda^2 \Delta_R(y-z) \Delta^{(1)}(y-z) \quad (4.13)$$

$\tilde{F}(y-z)$ corresponde ao gráfico da fig.(4.2)

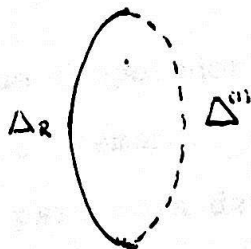


fig. (4.2)

A partir de (4.13) podemos escrever as expressões de $\Delta_R(x)$ e $\Delta^{(1)}(x)$ no espaço dos momentos, obtendo então para

$$\tilde{F}(y-z) = \frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3} \int_{C_R} d^4k d^4k' \tilde{\Delta}_R(k) \delta(k'^2 - m^2) e^{i(k'-k)(y-z)} \quad (4.14)$$

Para chegarmos a (4.14) a partir de (4.13) usamos (3.4) e a expressão de $\Delta^{(1)}(x-y)$

$$\Delta^{(1)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k' \delta(k'^2 - m^2) e^{ik'(y-z)}$$

4.2. Renormalização da massa.

As amplitudes do campo interpolante $A\phi = \langle 0 | \phi(x) | 1p \rangle$ onde $|1p\rangle$ é um estado arbitrário de uma partícula, devem obedecer à equação de Klein-Gordon:

$$(\square + m^2) \langle 0 | \phi(x) | 1p \rangle = 0 \quad (4.15)$$

Assim, ainda que o operador de campo não satisfaça a equação de Klein-Gordon, os elementos de matriz do operador de campo entre o vácuo e uma partícula devem satisfazê-la. A condição (4.15) até segunda ordem implica

$$(\square + m^2) \langle 0 | \phi^{(0)}(x) + \phi^{(1)}(x) + \phi^{(2)}(x) | 1p \rangle = 0 \quad (4.16)$$

Cálculos explícitos, usando (4.5), (4.11) e (4.14) levam-nos ao resultado

$$(\square + m^2) \langle 0 | \phi^{(0)}(x) | 1p \rangle = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} (m^2 - p^2)$$

$$(\square + m) \langle 0 | \phi^{(1)}(x) | 1p \rangle = 0 \quad (4.17)$$

$$(\square + m^2) \langle 0 | \phi^{(2)}(x) | 1p \rangle = \frac{e^{-ipx}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_p}} : \frac{|M^2 - m^2|^2}{(2\pi)^4 (p^2 - M^2) (p^2 - M^{*2})}$$

$$\left\{ \delta m^2 - \int d^4 k'' G(k'' - p, k'') \right\}$$

onde

$$G(k, k') = \frac{2 \lambda^2}{(2\pi)^3} \delta(k^2 - m^2) \Delta_R(k') \quad (4.18)$$

Como estamos considerando uma partícula física, temos $p^2 = m^2$. Assim a condição (4.15) implica

$$\delta m^2 = \int d^4 k G(k - p, k) \quad (4.19)$$

Para $p^2 = m^2$.

4.3. O termo de Self-Energy

Como já vimos na seção precedente, a renormalização da massa é dada em segunda ordem por:

$$\delta(m^2) = F(m^2) \quad (4.20)$$

com

$$F(p) = \alpha |M^2 - m^2|^2 \int \frac{d^4k \delta(k^2 - m^2)}{((p-k)^2 - m^2)((p-k)^2 - M^2)((p-k)^2 - M^{*2})} \quad (4.21)$$

e

$$\alpha = \frac{2\lambda^2}{(2\pi)^3} \quad (4.22)$$

Dêsse ponto em diante nós nos preocuparemos com a integral de Self-Energy (4.21). Como a integral de Self-Energy contribuirá, em ordens mais altas, para a correção radioativa/ ao espalhamento nós estaremos interessados no seu comportamento para p^2 arbitrário. A assimetria entre a função de contração e a função de Green, vem do fato de exigirmos que as massas complexas não tenham manifestações assintóticas de partículas, e terá um papel importante na estrutura analítica de $F(p^2)$. Ela nos conduzirá à unitariedade (desde que não existem pares de "partículas" conjugado-complexas no nosso formalismo). No entanto ela nos levará também a um desvio muito mais sério da causalidade do que no espalhamento por um potencial.

Retomemos agora a expressão (4.21). Fazemos agora a decomposição

$$\frac{|M^2 - m^2|^2}{(k'^2 - m^2)(k'^2 - M^2)(k'^2 - M^{*2})} = \frac{A_1}{k'^2 - m^2} + \frac{A_2}{k'^2 - M^2} + \frac{A_3}{k'^2 - M^{*2}} \quad (4.23)$$

onde

$$A_1 = 1, \quad A_2 = \frac{M^{*2} - m^2}{M^2 - M^{*2}} \quad \text{e} \quad A_3 = \frac{M^2 - m^2}{M^{*2} - M^2} \quad (4.24)$$

Assim (4.21) poderá ser escrita sob a forma

$$F(p) = \alpha \int d^4k \, \delta(k^2 - m^2) \left\{ \sum_i \frac{A_i}{(p-k)^2 - m_i^2} \right\} \quad (4.26)$$

Usando agora a identidade

$$\delta(k^2 - m^2) = \frac{\delta(k_0 + w_1(\vec{k})) + \delta(k_0 - w_1(\vec{k}))}{2w_1(\vec{k})} \quad (4.27)$$

E adotando a prescrição usual de integrarmos primeiro em k_0 obteremos para (4.26)

$$F(p) = \alpha \sum_i \int \frac{d^3\vec{k}}{2w_i(\vec{k})} A_i \left\{ \frac{1}{(p_0 + w_i(\vec{k}))^2 - w_i^2(\vec{p}-\vec{k})} + \frac{1}{(p_0 - w_i(\vec{k}))^2 - w_i^2(\vec{p}-\vec{k})} \right\} \quad (4.28)$$

A integral acima se torna uma integral absolutamente convergente nas variáveis restantes, para $0 < p^2 < 4m^2$ (A.X)

Além disso, por meio de uma série de manipulações podemos inscrevê-la de uma forma que fique transparente seu caráter de invariante de Lorentz, assegurando assim a invariança de Lorentz da integral para esse domínio de p^2 .

No apêndice A.X apresentamos alguns cálculos mostran

do que num determinado domínio de p^2 tipo-espaco a integral di verge (vide cálculos detalhados e mais resultados no apêndice). Nós redefiniremos este termo de Self-Energy por continuação analítica a partir do domínio no qual ela é bem definida. Nós podemos calcular a integral (4.28) com mais facilidade no sistema / centro de massa, e obteremos então o $F(p^2)$, invariante de Lorentz, para arbitrário p^2 por continuação analítica do domínio $0 < p^2 < 4m^2$

No sistema centro de massa

$$F(p) = \frac{\alpha}{2} \Sigma \int d^3\vec{k} A_i \left(\left\{ \frac{1}{w_1(\vec{k})} + \frac{1}{w_i(\vec{k})} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_1 + w_i)^2} + \left\{ \frac{1}{w_1(\vec{k})} - \frac{1}{w_i(\vec{k})} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_1 - w_i)^2} \right) \quad (4.29)$$

Ao invés de usarmos coordenadas cartesianas, usaremos coordenadas esféricas polares. O elemento de volume é $d^3k = k^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, dk$. Devido à simetria existente (o que justifica a nossa escolha de variáveis) podemos integrar sobre θ e ϕ dando um fator de 4π . Assim

$$F(p) = 2\alpha\pi\Sigma \int_0^\infty k^4 dk A_i \left(\left\{ \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_i} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_1 + w_i)^2} + \left\{ \frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_i} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_1 - w_i)^2} \right) \quad (4.30)$$

Consideraremos agora o primeiro termo do segundo membro de (4.30). A menor de constantes o iésimo termo é dado por

$$\int_0^\infty dk \, k^2 \left\{ \frac{1}{w_1(k)} + \frac{1}{w_i(k)} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_1 + w_i)^2} \quad (4.31)$$

Agora introduzimos a variável s , definida por

$$s \equiv (w_1 + w_i)^2 = (\sqrt{k^2 + m^2} + \sqrt{k^2 + m_i^2})^2 \quad (4.32)$$

$$\frac{ds}{dk} = \left(\frac{1}{w_1(k)} + \frac{1}{w_i(k)} \right) 2k \sqrt{s}$$

A transformação inversa nos leva a

$$k = \frac{1}{2\sqrt{s}} \sqrt{(s - (m_1 - m_i)^2)(s - (m_1 + m_i)^2)} \quad (4.33)$$

onde só consideramos a raiz positiva. Assim sendo, em termos da nova variável s , o termo (4.31) se torna

$$\frac{1}{4} \int_{(m_1 + m_i)^2}^{\infty} ds \sqrt{\frac{(s - (m_1 - m_i)^2)(s - (m_1 + m_i)^2)}{s^2}} \cdot \frac{1}{p_0^2 - s}$$

A segunda parte de $F(p)$ se constitui de uma soma de três termos. De uma maneira análoga podemos considerar cada um desses termos, obtendo finalmente para $F(p)$

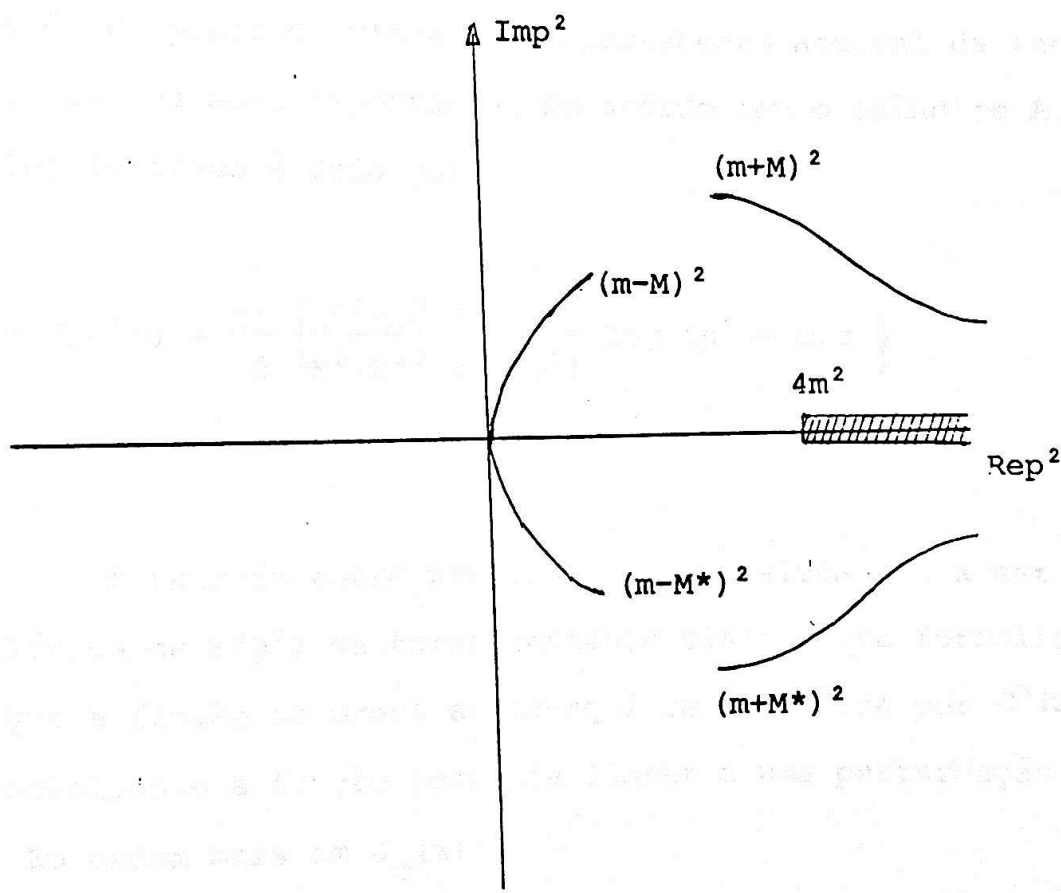
$$F(p) = \frac{\alpha\pi}{2} \left\{ \sum_{i=1}^3 \int_{(m_1 + m_i)^2}^{\infty} ds A_i \frac{\rho(s, m_1, m_i)}{p^2 - s} - \sum_{i=2}^3 \int_{(m_i - m_1)^2}^0 ds A_i \frac{\rho(s, m_1, m_i)}{p^2 - s} \right\} \\ + \alpha\pi \left[\frac{-1}{p^2} \frac{(M^2 - m^2)^2}{M^2 - M^{*2}} \log \left\{ \frac{M^2 - m^2}{M^{*2} - M^2} \right\} \right] \quad (4.34)$$

onde

$$\rho(s, m_1, m_i) \equiv \sqrt{\frac{(s - (m_1 - m_i)^2)(s - (m_1 + m_i)^2)}{s^2}} \quad (4.35)$$

Pelo fato do último termo ser o mais misterioso, nós o justificamos detalhadamente no apêndice (A.IV).

A partir de (4.34) podemos esboçar a estrutura analítica de $F(p^2)$. $F(p^2)$ é analítica no plano complexo p^2 , com cortes indo de $4m^2$ até ∞ , $(m+M)^2$ até ∞ , $(M^*+m)^2$ até infinito, 0 a $(M-m)^2$ e de 0 até $(M^*-m)^2$ e tendo um polo na origem. A estrutura analítica de $F(p^2)$ pode ser representada pela fig.4.3.



(fig.4.3)

Os três últimos cortes correspondem àqueles que obtemos usando as regras de Lee-Wick. Intuitivamente eles correspondem a "estados intermediários" formados de pares (m,m) , (m,M) e (m,M^*) . Não existem contudo cortes correspondendo a um par (M,M^*) que nos conduziria a uma singularidade não analítica (quando tratada apropriadamente).

Como já dissemos anteriormente, a assimetria entre a

função de Green e a função de contração acarreta importantes consequências sobre a estrutura analítica de $F(p^2)$. Devido à assimetria da nossa integral de Self-Energy aparecem agora dois cortes extras (os dois primeiros). Devido ao ponto de ramificação desses cortes estar na origem, estes dois cortes extras não podem ser deformados por continuação analítica de tal forma a que sejam colocados paralelamente ao eixo real.

Passaremos a mostrar a seguir que este ponto de ramificação é, do ponto de vista de comportamento acausal da teoria, a singularidade mais importante. De acordo com o apêndice A.V., esta singularidade é dada por

$$F(p^2) - (\text{polo}) \approx \frac{\alpha\pi}{2} \left\{ \frac{M^{*2} - m^2}{M^2 - M^{*2}} \frac{(M^2 + m^2)}{(M^2 - m^2)} \log ip^2 + \text{c.c.} \right\} \quad (4.35)$$

A relação entre problemas de causalidade e a estrutura analítica de $F(p^2)$ se torna bastante clara nesse formalismo / desde que a função de Green exata-aqui representada por $G'_{Rm}(x)$ é essencialmente a função resposta linear a uma perturbação externa. Em ordem mais em $J_c(x)$

$$\phi^{(1)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G'_{Rm}(x-y) (J_c(y) + \lambda : \phi(y) \phi(y) :) dy$$

Assim em primeira ordem em $J_c(x)$, o valor esperado no vácuo do operador de campo induzido por uma fonte externa clássica é

$$\langle \phi^{(1)}(x) \rangle_{\text{ind}} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G'_{Rm}(x-y) J_c(y) dy \quad (4.36)$$

Seja

$$\tilde{J}_C(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int J_C(y) e^{ipy} dy \quad (4.37)$$

Então podemos escrever para (4.36)

$$\langle \phi^{(1)}(x) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G'_{Rm}(p^2) \tilde{J}_C(p) e^{-ipx} d^4p \quad (4.38)$$

De acôrdo com o apêndice (A.VII), $G'_{Rm}(p^2)$ é da
da por

$$G'_{Rm}(p^2) = \frac{-(M^2 - m^2)^2}{(p^2 - m_0^2)(p^2 - M^2)(p^2 - M^{*2}) - F(p^2)(M^2 - m^2)^2 + O(\lambda^4)} \quad (4.39)$$

$$m_0^2 = m^2 - \delta m^2$$

Vamos agora escrever $G'_{Rm}(p^2)$ sob a forma/
de uma representação de Lehman modificada

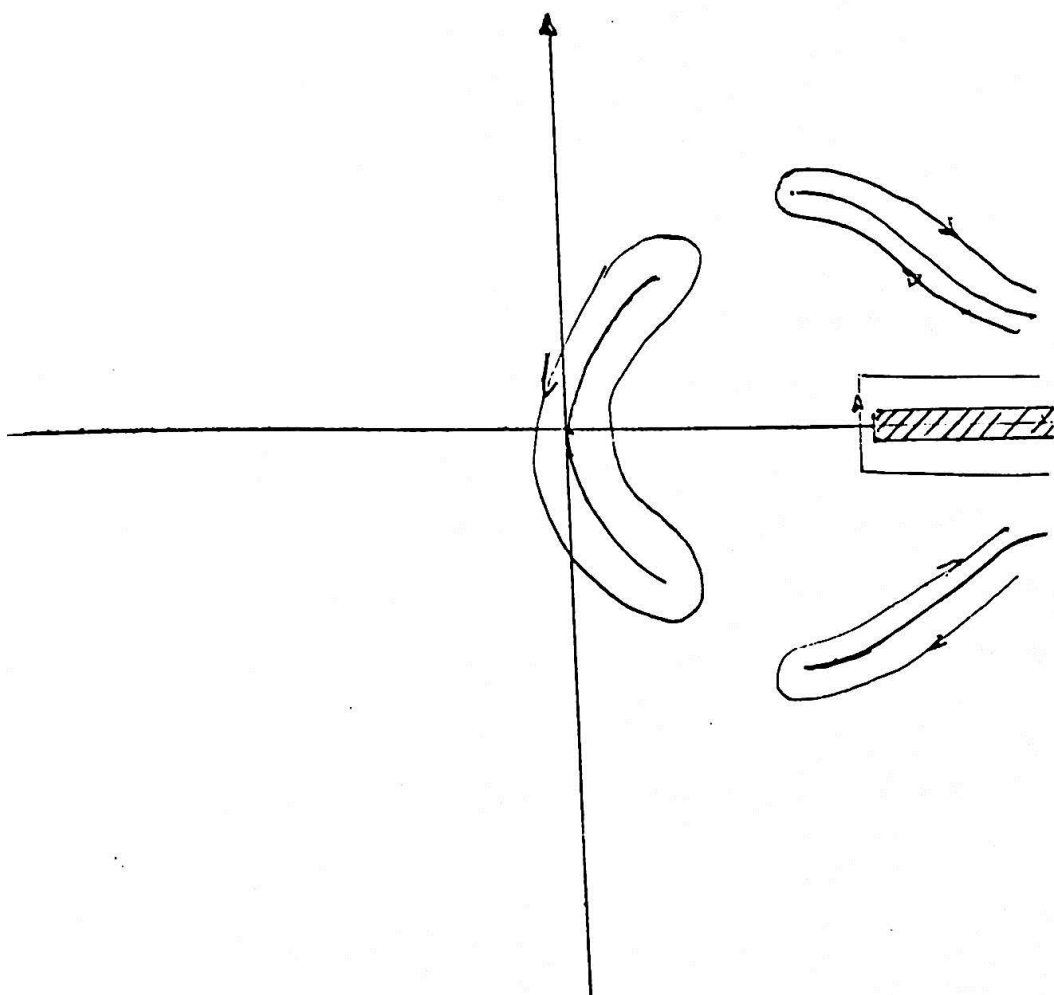
$$G'_{Rm}(p^2) = \int \frac{\Gamma(s)}{p^2 - s} ds \quad (4.40)$$

Para escrevermos $G'_{Rm}(p^2)$ sob esta forma
nós usamos o teorema de Cauchy. Assim s corre sôbre os cortes /
da fig.4.4 e $\Gamma(s)$ tem singularidades tipo δ correspon-
dentes aos polos de $G'_{Rm}(p^2)$

Consideraremos só o comportamento acausal dominante/
de $F(p^2)$ que é controlado pela singularidade logarítmica na ori-
gem $\approx \log(ip^2)$ dada por (4.35).

Substituindo (4.40) em (4.38) obtemos para $\langle \phi_{in}^{(1)} \rangle$

$$\langle \phi^{(1)}(x) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \int ds \Gamma(s) \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - s} \tilde{J}_c'(p) \quad (4.41)$$



(fig.4.4)

Para o cálculo de $\Gamma(s)$ consideramos apenas a singularidade logarítmica na origem, escrevemos $M^2 = \{M^2\} e^{i\theta}$ e supondo que $\{M^2\} \gg m^2$, obtivemos (ver apêndice A.VII o cálculo de $\Gamma(s)$) então

$$\langle \phi(x) \rangle_{\text{ind}} \approx C_1 \int_0^\epsilon s^2 ds \left\{ \frac{1}{(2\pi)^4} \iint \frac{d^4p}{p^2 - s} d^4y e^{-ip(x-y)} J_c(y) \right\} \quad (4.42)$$

Onde $\Gamma(s)$ é dado por A.VII-4 foi substituído em (4.41) e a constante C_1 é definida por

$$\Gamma(s) = C_1 s^2 \equiv \frac{\sin \theta e^{-i\theta}}{4\pi i \alpha |M^2|^2 \theta^2} \cdot s^2 \quad (4.43)$$

Além disso nós deformamos o corte na vizinhança da origem de tal forma a estar compreendido ao longo do eixo imaginário. O termo complexo conjugado corresponde ao corte abaixo do eixo real cuja integração deverá ser de 0 até $-i\epsilon$.

A partir de (4.42), basta usarmos a expansão assintótica deduzida em A.VIII, o resultado é que no limite

$$x_0 \rightarrow -\infty, \quad x^2 \equiv x_0^2 - x^2 > 0 \quad \text{e} \quad \delta > 0 \quad (4.44)$$

Vale a expansão

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ipx}}{p^2 - i\delta} \longrightarrow - \frac{\sqrt{2}}{8\pi^{3/2}} (i\delta)^{1/4} \frac{e^{i(i\delta)^{1/2}(x^2)^{1/2}}}{(x^2)^{3/4}} \quad (4.45)$$

No limite 4.44 podemos usar a expansão assintótica/ (4.45) em (4.42). Uma vez efetuada a integração e consideradas algumas aproximações válidas nesse limite, obtivemos

$$\lim_{x_0 \rightarrow -\infty} \langle \phi(x) \rangle_{\text{ind}} \approx (1-i)\pi^{1/2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\lambda^2} \left[\frac{\sin \theta e^{-i\theta}}{\theta^2 |M^2|^2} \right] \frac{\tilde{J}_C(0)}{(x^2)^4} + \text{c.c.}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\lambda^2} \left(\frac{\sin\theta \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}{\theta^2 |M^2|^2} \right) \frac{\tilde{J}_c(0)}{(x^2)^4} \quad (4.46)$$

CONCLUSÕES

A partir do que foi exposto neste trabalho, concluímos que logramos êxito em formular uma teoria completamente satisfatória para o caso de interação com um potencial externo. A nossa / teoria, usando a equação de Yang-Feldman modificada (3.1) é uma teoria unitária (o que foi verificado independentemente do uso da teoria de perturbação) e tem um comportamento acausal atenuado exponencialmente. Observemos que, como vimos no capítulo 2, as dificuldades com a formulação de uma teoria usando reguladores com massas complexas, no formalismo de Yang-Feldman usual, já apresenta muitas dificuldades mesmo nesse estágio.

Com respeito à teoria totalmente quantizada, a nossa / teoria não foi igualmente satisfatória em todos os aspectos. Para o caso da teoria totalmente quantizada o comportamento acausal da teoria é bastante insatisfatório. Como vemos a partir de (4.47) , ao invés de obtermos um comportamento acausal atenuado exponencialmente, ele é atenuado com uma potência. Esse comportamento da acausalidade torna-se muito desinteressante, ainda que possamos tomar para o parâmetro θ o valor $(\theta + \frac{\pi}{4}) = (\frac{2n+1}{2}) \pi$ fazendo com que.

o termo "mais acausal" se anule, ou tomar o parâmetro $|M|$ muito grande amenizando o comportamento acausal. Na referência 10 apontamos a razão para este realce na acausalidade. Em essência isto se deve a estados virtuais de energia arbitrariamente altas.

A unitariedade na teoria totalmente quantizada foi verificada explicitamente até segunda ordem da teoria de perturbações, no entanto, esta propriedade deve ser esperada para qualquer ordem tendo em vista que na nossa formulação não temos pares de massas complexas. Assim obtivemos êxito em qualquer caso no que diz respeito à unitariedade.

Outra característica apresentada pela nossa teoria é a de que mesmo para reguladores de massas complexas grandes o comportamento a baixas energias da teoria será bem diferente da teoria renormalizada usual sem reguladores. Esta é outra consequência da estrutura analítica do termo de Self-Energy $F(p)$. Ou mais precisamente, da singularidade do termo de Self-Energy próximo à origem, observe-se que esta mesma singularidade já desempenhou um papel muito importante no comportamento acausal da teoria (4.III). De certa forma, torna-se bastante tentador procurar nessa teoria, a interrelação entre a analiticidade da matriz s e a causalidade.

A utilização de reguladores com massas reais ($M \rightarrow m_1$, $M^* \rightarrow m_1$) nos levará obrigatoriamente, em ambos os casos analisados, a uma violação mais violenta da causalidade no nosso formalismo. Além disso, a partir do comentário anterior e da estrutura analítica de $F(p)$ (fig. (4.3)), vemos que essa substituição / nos levará também a dificuldades com a unitariedade.

Finalmente, queremos apontar que, de acordo com a discussão no apêndice (A.X), não nos livramos inteiramente das

dificuldades com divergências. Para um determinado domínio de p tipo-espaco o termo de Self-Energy é divergente, obrigando-nos a redefini-lo por meio de um processo de continuação analítica. / Assim continuamos ainda com problemas de divergências mesmo numa teoria usando reguladores de massas complexas. A razão para isto é essencialmente o fato de que nós só removemos as singularidades da função de Green retardada que estavam na ponta do cone de luz. Assim o produto de $\Delta_{Rm}(x)$ com a função de contração $\Delta^{(1)}(x)$ nos leva novamente a trabalharmos com produtos de quantidades (distribuições) que não são bem definidos (os produtos).

Estes defeitos, em particular o comportamento acausal da teoria, levaram-nos a olhar com pessimismo teorias de campo com massas complexas. Onde por isso queremos dizer teorias com uma dada equação de movimento e uma descrição detalhada em termos do espaço-tempo, usando reguladores de massas complexas.

A.I. Espaço dos Vetores de Estado com Métrica Indefinida.

Nesta seção procuraremos estudar as propriedades de um espaço de vetores de estado com uma métrica indefinida (23)

Um espaço \hat{H} constituído dos elementos $|\hat{A}\rangle$, $|\hat{B}\rangle \dots$ é um espaço vetorial com métrica indefinida se:

(a) é linear

(b) a cada par $|\hat{A}\rangle$ e $|\hat{B}\rangle$ fazemos corresponder um número $\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle$ com as propriedades.

$$i) \langle \hat{A} | \hat{B} \rangle = \langle \hat{B} | \hat{A} \rangle^*$$

$$ii) \langle \hat{A} | (\alpha |\hat{B}\rangle + \beta |\hat{C}\rangle) = \alpha \langle \hat{A} | \hat{B} \rangle + \beta \langle \hat{A} | \hat{C} \rangle$$

iii) Podem existir elementos $|A\rangle$ com $\langle A|A\rangle > 0$ e elementos $|B\rangle$ com $\langle B|B\rangle < 0$ e elementos $|C\rangle$ com $\langle C|C\rangle = 0$ ($|C\rangle \neq 0$). Se o espaço for decomponível, de tal forma que $|A\rangle \in H$ existe uma decomposição única.

$$|A\rangle = |A_+\rangle + |A_-\rangle$$

$$\text{Com } \langle A_+ | A_+ \rangle \geq 0$$

$$H = H_+ \oplus H_-$$

Nós introduzimos um novo produto escalar

$$\langle A | B \rangle_{\text{novo}} \equiv \langle A_+ | B_+ \rangle - \langle A_- | B_- \rangle$$

Através desse novo produto escalar, convergência, completeza, separabilidade, etc, podem ser definidos:

(c) H é completo com respeito ao novo produto escalar.

OPERADORES

Um operador P nesse espaço possui a propriedade usual de transformar os vetores de estado uns nos outros. Os operadores devem ser lineares.

Operador Adjunto.

Designemos por P^* o operador adjunto de P definido por

$$\langle A | P^* | B \rangle = \langle A | P | B \rangle^* \quad (\text{A.I-1})$$

Se $P^* = P$ é dito Pseudo-auto-adjunto ou Pseudo-Hermitiano onde a palavra "pseudo" é introduzida apenas para diferenciar os operadores correspondentes sobre o espaço de Hilbert

Se p for um auto-valor de um operador P , teremos :

$$(p^* - p) \langle p | p \rangle = 0$$

Donde p não é necessariamente real

Operador Unitário.

Um operador satisfazendo

$$U^*U = UU^* = 1 \quad (\text{A.I-2})$$

é denominado pseudo-unitário.

As transformações unitárias têm as propriedades usuais.

Antes de encerrarmos esta seção vamos falar alguma coisa sobre elementos de matriz de operadores. Se $|i\rangle$ é o sistema da base ortonormal e definindo o produto da maneira usual, o operador unidade é

$$I = \sum |i\rangle \langle i| \quad N_i \quad (\text{A.i-4})$$

$$\text{com } N_i = \langle i | i \rangle$$

Isto nos permite representar $|A\rangle$ e P pelas matri

zes

$$C_i = N_i \langle i | A \rangle \quad (\text{A.i-4})$$

$$P_{ij} = N_i \langle i | P | j \rangle$$

No caso de teorias com métrica indefinida as auto-funções de um operador pseudo-Hermitiano não formam em geral um sistema completo. A condição necessária para que as auto-funções de um operador pseudo-Hermitiano não forme um conjunto completo é que exista pelo menos um auto-vetor com norma zero.

O operador da projeção para o subespaço de auto-vetores com norma não zero é a soma dos termos

$$\sum \frac{|p_i\rangle \langle p_i|}{\langle p_i | p_i \rangle} \quad (\text{A.I-5})$$

Consideremos agora um dos auto-vetores tendo norma zero

$$(P - p_j) |p_{j,1}\rangle = 0 \quad \langle p_{j,1} | p_{j,1} \rangle = 0$$

No caso de auto-valor não degenerado e métrica não degenerada existe um $|p_{j,2}\rangle$ tal que

$$(P - p_j) |p_{j,2}\rangle = |p_{j,1}\rangle$$

Por causa da não degenerescência da teoria $\langle p_{j,1} | p_{j,2} \rangle \neq 0$ e $|p_{j,2}\rangle$ pode ser normalizada a zero. Assim o operador de projeção possui a forma

$$(\text{A.I-5}) + \frac{|p_{j,2}\rangle \langle p_{j,1}|}{\langle p_{j,1} | p_{j,2} \rangle} + \frac{|p_{j,1}\rangle \langle p_{j,2}|}{\langle p_{j,2} | p_{j,1} \rangle}$$

O Formalismo n

O formalismo da seção anterior é frequentemente repetido na literatura por um método no qual um operador métrico η é definido sobre um espaço de Hilbert.

Vamos construir um espaço de Hilbert \hat{H} de tal forma que exista uma correspondência biunívoca entre os vetores de estados $\{ | A \rangle \}$ de H e $\{ | \hat{A} \rangle \}$ do espaço \hat{H} de Hilbert \hat{H} . Consideremos esta correspondência como sendo uma correspondência linear.

$$| A \rangle \rightarrow | \hat{A} \rangle \quad \text{e} \quad | B \rangle \rightarrow | \hat{B} \rangle$$

$$\alpha | A \rangle + \beta | B \rangle \rightarrow \alpha | \hat{A} \rangle + \beta | \hat{B} \rangle$$

Por causa desta correspondência, a forma bilinear $\langle A | B \rangle$ define um operador η no espaço de Hilbert:

$$\langle A | B \rangle = \langle \hat{A} | \eta | \hat{B} \rangle$$

O operador \hat{P} correspondendo ao operador linear P é definido por:

$$\langle A | P | B \rangle = \langle \hat{A} | \eta \hat{P} | \hat{B} \rangle$$

$$\langle \hat{B} | P^+ | A \rangle = \langle \hat{A} | \hat{P} | \hat{B} \rangle^*$$

$$\text{Assim} \quad P^* = \eta^{-1} \hat{P}^+ \eta$$

onde para chegarmos à expressão acima usamos a igualdade $\eta = \eta^+$.

Ou seja η deve ser Hermitiano desde que a quantidade

$$\langle A | A \rangle = \langle \hat{A} | \eta | \hat{A} \rangle \quad \text{deve ser real.}$$

Assim, se P é hermitiano em H ($P=P^*$) segue que P é hermitiano em \hat{H} só se $[\hat{P}, \eta] = 0$.

Para gerar \hat{H} nós podemos usar um sistema ortonormal

$$| i \rangle, \quad \langle i | j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{. Nós podemos esco -}$$

lher isto arbitrariamente mas uma vez fixada construímos o espaço de Hilbert \hat{H} . Assim que ele é gerado pelo sistema ortonormal

$$|\hat{i}\rangle \quad \text{com} \quad \langle \hat{i} | \hat{j} \rangle = \delta_{ij} \quad . \text{Então}$$

$$\langle i | \eta | j \rangle = N_j \delta_{ij}$$

Nessa representação η é diagonal tendo os autovalores ± 1 .

A condição de Unitariedade implica

$$U^*U = 1 \quad \eta U^+ \eta^{-1} U = 1 \quad (A.1-)$$

A motivação para introduzirmos a métrica η no espaço/ de Hilbert é que agora trabalhamos em um espaço de Hilbert, para o qual temos muitos resultados conhecidos sobre este espaço.

Interpretação Probabilística.

O maior problema quando trabalhamos com teorias quânticas com métrica indefinida claramente é com a interpretação/ probabilística. A esse respeito temos duas possibilidades de encarar a questão, ou procuramos modificar o bem estabelecido formalismo de uma interpretação probabilística, o que claramente não/ é um programa modesto e nem factível sem uma profunda modificação dos principais conceitos da mecânica quântica. Assim somos forçados a preservar de alguma forma a interpretação probabilística / para os processos físicos.

Nesse sentido a possibilidade mais simples é restringir os estados físicos serem um sub-espaço com métrica não negativa do espaço com métrica indefinida (sendo assim mais amplo) .

Observáveis físicos devem ser representados por operadores lineares no espaço "grande" que, contudo deixam o "pequeno" espaço invariante (30).

A.II. Potencial Externo.

Quando consideramos a interação com um potencial externo a corrente $J(x)$ é dada por

$$J(x) = V(x) \phi(x) \quad (\text{A.II-1})$$

Substituindo (A.II-1) em (2.16), a equação de Yang-Feldman se escreve então

$$\phi(x) = \phi^{\text{in}}(x) + \int \Delta_R(x-y) V(y) \phi(y) dy$$

Usando (2.17-b)

$$\phi(x) = \phi^{\text{in}}(x) - \frac{|m^2 - M^2|^2}{|2\pi|^4} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ikx} d^4k \tilde{J}(k)}{(k^2 - m^2)(k^2 - M^2)(k^2 - M^{*2})} \quad (\text{A.II-2})$$

onde

$$\tilde{J}(k) = \int e^{iky} J(y) dy \quad (\text{A.II-3})$$

Definido o campo $\phi^{\text{out}}(x)$ de acordo com o procedimento usual, ou seja

$$\phi^{\text{out}}(x) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \phi(x) \quad (\text{A.II-4})$$

Podemos escrever usando (A.II.2)

$$\phi^{\text{out}}(x) = \phi^{\text{in}}(x) - \frac{|m^2 - M^2|}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{x}} \lim_{x_0 \rightarrow +\infty} \int \frac{e^{-ik_0 x_0} \tilde{J}(k) dk_0}{(k^2 - m^2)(k^2 - M^2)(k^2 - M^{*2})}$$

OBS: Por conveniência de notação $a_j \equiv A_j$ e $b_j \equiv B_j$

Depois de um cálculo razoavelmente simples, obtemos

$$\phi^{\text{out}}(\mathbf{x}) = \phi^{\text{in}}(\mathbf{x}) + \sum_i \int d^3\vec{k} \left\{ U(w_i, \vec{k}) e^{-ik_i \cdot \mathbf{x}} + U(-w_i, \vec{k}) e^{ik_i \cdot \mathbf{x}} \right\} \quad (\text{A.II-5})$$

onde $K_{i,0} = w_i(\vec{k})$

e

$$U(w_j, k) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{J}(w_j, \vec{k})}{2w_j(\vec{k}) \prod_{k \neq j} (m_j^2 - m_k^2)} \quad (\text{A.II-6})$$

Escrevendo a expansão de Fourier do operador de campo $\phi_i^{\text{out}}(\mathbf{x})$ da maneira usual

$$\phi_i^{\text{out}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2w_i(\vec{k})}} \left\{ A_i^{\text{out}}(\vec{k}) e^{-ik_i \cdot \mathbf{x}} + B_i^{\text{out}}(\vec{k}) e^{ik_i \cdot \mathbf{x}} \right\} \quad (\text{A.II-7})$$

De acordo com a notação introduzida no capítulo II, e usando a mesma decomposição (2.17)

$$\phi^{\text{out}}(\mathbf{x}) = \sum_i C_i \phi_i^{\text{out}}(\mathbf{x}) \quad (\text{A.II-8})$$

Com os coeficientes C_i dados por (2.13)

Podemos agora escrever a igualdade (A.II-5) em termos dos operadores de criação e aniquilação $A^{\text{out}}(\vec{k})$ e $A^{\text{in}}(\vec{k})$ usando (A.II-7) e (A.II-8). Esta relação é

$$A_i^{\text{out}}(\mathbf{k}) = A_i^{\text{in}}(\mathbf{k}) + (2\pi)^{3/2} \frac{\sqrt{w_i(\vec{k})}}{C_i} U(w_i, \vec{k}) \quad (\text{A.II-9})$$

$$B_i^{\text{out}}(\vec{k}) = B_i^{\text{in}} + (2\pi)^{3/2} \frac{\sqrt{w_i(\vec{k})}}{C_i} U(-w_i, -\vec{k})$$

Em teoria de perturbação podemos escrever uma expansão para $U(k)$

$$U(k) = U^{(1)}(k) + U^{(2)}(k) + U^{(3)}(k) + \dots \quad (\text{A.II-10})$$

Onde cada índice corresponde à ordem considerada em teoria de perturbação. Análogamente podemos escrever uma série para os operadores de criação e aniquilação.

$$A_i^{\text{out}}(\vec{k}) = A_i^{\text{out}(0)}(\vec{k}) + A_i^{\text{out}(1)}(\vec{k}) + A_i^{\text{out}(2)}(\vec{k}) + \dots \quad (\text{A.II.11})$$

com

$$A_i^{\text{out}}(\vec{k}) = A_i^{\text{in}}$$

$$A_i^{\text{out}(1)}(\vec{k}) = \frac{\sqrt{w_i(\vec{k})}}{c_i} (2\pi)^{3/2} U^{(1)}(w_i \vec{k}, \vec{k}) \quad (\text{A.II.12})$$

$$A_i^{\text{out}(2)}(\vec{k}) = (2\pi)^{3/2} \frac{\sqrt{w_i(\vec{k})}}{c_i} U^{(2)}(w_i \vec{k}, \vec{k})$$

Como faremos cálculos explícitos apenas até segunda ordem vamos exibir as expressões para $U^{(1)}(w_i \vec{k}, \vec{k})$ e $U^{(2)}(w_i \vec{k}, \vec{k})$.

$$U^{(1)}(w_i \vec{k}) = \frac{-i \{M^2 - m^2\}^2}{(2\pi)^3 2w_i \prod_{j \neq i} (m_i^2 - m_j^2)} \int dy e^{ik_i y} \bar{V}(y) \phi^{\text{in}}(y) \quad (\text{A.II.13})$$

$$U^{(2)}(w_i \vec{k}) = \frac{-i \{M^2 - m^2\}^2}{(2\pi)^3 2w_i \prod_{j \neq i} (m_i^2 - m_j^2)} \int dy e^{ik_i y} V(y) \left[\Delta_R(y-z) V(z) \phi^{\text{in}}(z) dz \right]$$

Observemos então que para manipularmos estas expressões nós precisamos assumir antes de mais nada que os potenciais têm suporte compacto no tempo, de outra forma as expressões abaixo não farão sentido. Com essa hipótese as expressões (A.II.13) se tornam

$$U^{(1)}(w_i, \vec{k}) = \frac{-i(m^2 - M^2)^2}{(2\pi)^3 2w_i \Pi(m_i^2 - m_j^2)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{j \neq i} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\sqrt{2w_j(k')}} C_j$$

$$\{ A_j^{\text{in}}(k) \tilde{V}(k_i - k_j) + \tilde{B}_j(k) \tilde{V}(k_i + k_j) \} \quad (\text{A.II-14})$$

$$U^{(2)}(w_i, \vec{k}) = \frac{-i(m^2 - M^2)^2}{(2\pi)^3 2w_i \Pi(m_i^2 - m_j^2)} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{j \neq i} \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\sqrt{2w_j(k')}} C_j \left\{ \int_{C_R} d^4 k'' \Delta_R(k'') \tilde{V}(k - k'') \left(\tilde{V}(k'' - k_j) A_j^{\text{in}}(\vec{k}) + \tilde{V}(k'' + k_j) \tilde{B}_j^{\text{in}}(\vec{k}) \right) \right\}$$

(A.II-15)

onde $\tilde{V}(k_i - k_j) = \int V(y) e^{i(k_i - k_j)y} dy$

A partir de (A.II.14) e (A.II.12) podemos calcular / amplitudes de transição para processos do tipo $|j\rangle \rightarrow |i\rangle$ onde $|j\rangle$ e $|i\rangle$ são estados de uma partícula (inclusive os de massa complexa). No entanto, desde que as partículas de massa complexa não são observadas experimentalmente e como nós podemos selecionar os estados "in", nós só nos interessaremos por transições / tais que no estado inicial só existem partículas com energia real (massa real). Em particular, consideraremos apenas transições de uma partícula.

A amplitude de transição para o processo $|1\rangle \rightarrow |i\rangle$

onde $|1\rangle$

é um estado de uma partícula com massa real é dado por:

$$A_{l+i}(\vec{k}, \vec{k}') \equiv {}^{\text{out}}\langle i_{\vec{k}}, | 1 \vec{k} \rangle^{\text{in}} = {}^{\text{out}}\langle 0 | A_i^{\text{out}}(\vec{k}') A_i^{\text{in}}(\vec{k}) | 0 \rangle^{\text{in}} \quad (\text{A.II-16})$$

Onde os vácuos $|0\rangle^{\text{out}}$ e $|0\rangle^{\text{in}}$ são definidos a partir de

$$\begin{aligned} A_i^{\text{out}} |0\rangle^{\text{out}} &= 0 \\ A_i^{\text{in}} |0\rangle^{\text{in}} &= 0 \\ {}^{\text{out}}\langle 0 | 0 \rangle^{\text{out}} &= 1 \end{aligned} \quad (\text{A.II.17})$$

Até primeira aproximação essa amplitude será dada por

$$A_{l+i}^{(1)}(\vec{k}, \vec{k}') = {}^{\text{out}}\langle 0 | (A_i^{(0)\text{out}}(\vec{k}') + A_i^{\text{out}(1)}(\vec{k}')) A_i^{\text{in}}(\vec{k}) | 0 \rangle^{\text{in}}$$

Os cálculos explícitos usando (A.II.14) e (A.II.12) e as relações de comutação (2.7) levaram-nos ao resultado

$$\begin{aligned} A_{l+i}^{(1)}(k, k') &= \delta_{li} \delta(\vec{k} - \vec{k}') {}^{\text{out}}\langle 0 | 0 \rangle^{\text{in}} + \frac{\gamma_i(\vec{k}') C_i \tilde{V}(k_i - k_1)}{\sqrt{2w_1(\vec{k})}} {}^{\text{out}}\langle 0 | 0 \rangle^{\text{in}} \\ &+ \gamma_i(\vec{k}') \sum_j \int \frac{d\vec{k}''}{\sqrt{2w_{\vec{k}''}}} C_j \tilde{V}(k_i' + k_j'') {}^{\text{out}}\langle 0 | j \vec{k}'', l \vec{k} \rangle^{\text{in}} \end{aligned} \quad (\text{A.II-18})$$

onde

$$\gamma_i(k) = \frac{-i}{(2\pi)^3 \sqrt{2w_1(\vec{k}')} \prod_{j \neq i} (m_i^2 - m_j^2)} \cdot \frac{1}{C_i} \quad (\text{A.II-19})$$

Até a ordem que estamos considerando (como veremos adian

te)

$|0\rangle^{\text{out}} \approx |0\rangle^{\text{in}}$ e portanto podemos escrever para (A.II-18)

$$A_{l+i}^{(1)}(\vec{k}, \vec{k}') = \left\{ \delta_{li} \delta(\vec{k} - \vec{k}') + \gamma_i(\vec{k}') \frac{C_i}{\sqrt{2w_1(\vec{k})}} \tilde{V}(k_i' - k) \right\} {}^{\text{out}}\langle 0 | 0 \rangle^{\text{in}} \quad (\text{A.II-20})$$

$k_j, 0 = w_j$

Nesse ponto é bom frisarmos que, analisando a expressão (A.II.20), não teremos dificuldades com divergências, desde que

consideremos apenas amplitudes físicas - mesmo relaxando a nossa hipótese sobre o potencial - em primeira ordem de aproximação. Outra observação é com respeito ao fato de que transições/entre estados físicos e não-físicos são permitidas.

Podemos agora estender o nosso cálculo para a amplitude de espalhamento até segunda ordem de aproximação, definida por

$$A_{l \rightarrow i}^{(2)}(\vec{k}, \vec{k}') = \text{out} \langle 0 | (A_i^{(0)} \text{out}(\vec{k}') + A_i^{(1)} \text{out}(\vec{k}') + A_i^{(2)} \text{out}(\vec{k}')) A_i^{\text{in}}(\vec{k}) | 0 \rangle^{\text{in}}$$

Calculando explicitamente obtivemos

$$\begin{aligned} A_{l \rightarrow i}^{(2)} = & \delta_{li} \delta(\vec{k} - \vec{k}') \text{out} \langle 0 | 0 \rangle^{\text{in}} + \gamma_i(\vec{k}') \frac{C_1}{\sqrt{2w_l(\vec{k})}} \tilde{V}(k_i' - k_l) \text{out} \langle 0 | 0 \rangle^{\text{in}} \\ & + \gamma_i(\vec{k}') \sum_j \int \frac{d^3 k''}{\sqrt{2w_j(k'')}} C_j \tilde{V}(k_i' + k_j'') \text{out} \langle 0 | j \vec{k}', l \vec{k} \rangle^{\text{in}} \\ & + \gamma_i(\vec{k}') \frac{C_1}{\sqrt{2w_i(\vec{k})}} \int_{C_R} d^4 k'' \Delta_R(k'') \tilde{V}(k_i' - k'') \tilde{V}(k'' - k) \text{out} \langle 0 | 0 \rangle^{\text{in}} \\ & + \gamma_i(\vec{k}') \sum_j \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \vec{k}'''}{\sqrt{2w_j(\vec{k}''')}} \int_{C_R} d^4 k'' \tilde{V}(k_i' - k'') \tilde{V}(k'' + k_j''') \text{out} \langle 0 | j \vec{k}', i \vec{k} \rangle^{\text{in}} \end{aligned} \quad (\text{A.II-21})$$

Os dois primeiros podem ser identificados com os primeiros termos de (A-II.18), sendo assim termos de primeira ordem. Em segunda ordem não teremos contribuições do último termo de (A.II-21). Por isso nos ocuparemos apenas dos outros dois termos restantes que assim serão denominados de $A^{(\Pi)}_{l \rightarrow j}$.

Vamos introduzir uma convenção quanto à notação. Sobre o índice cujo integrando é integrado no espaço quadrimensional não tem a componente temporal igual a $w(\vec{k})$

$$A_i^{(II)} \rightarrow i(\vec{k}, \vec{k}') \equiv \gamma_i(\vec{k}') \sum_j \int \frac{d^3 \vec{k}''}{\sqrt{2w_j(\vec{k}'')}} C_j \tilde{V}(k_j' + k_j'')^{\text{out}} \langle 0 | j \vec{k}'', i \vec{k} \rangle^{\text{in}} \quad 88.$$

$$+ \gamma_i(\vec{k}') \frac{C_1}{\sqrt{2w_1(\vec{k})}} \int d^4 k'' \Delta_R(k'') \tilde{V}(k_1' - k'') \tilde{V}(k'' - k)^{\text{out}} \langle 0 | 0 \rangle^{\text{in}} \quad (\text{A.II-22})$$

Para escrevermos (A.II-22) sob uma forma mais conveniente precisamos determinar as amplitudes $\langle 0 | j \vec{k}', i \vec{k} \rangle^{\text{in}}$. Para isso vamos escrever a seguinte expansão para o vácuo $|0\rangle^{\text{out}}$

$$|0\rangle^{\text{out}} = a_0 |0\rangle^{\text{in}} + \sum_{ij} \int f_{ij}^{(2)}(\vec{k}_1, \vec{k}_2) |\vec{k}_1 i \vec{k}_2\rangle^{\text{in}} + \dots \quad (\text{A.II-23})$$

Onde as funções $f^{(2n)}(k_1, \dots)$ podem ser determinadas em função de a_0 do potencial e outras constantes a partir da condição (A.II.17). Esta constante a_0 pode ser determinada a partir da condição de normalização do vácuo $|0\rangle^{\text{out}}$.

Nós calculamos o vácuo $|0\rangle^{\text{out}}$ usando a expansão (A.II-23) e usamos a condição (A.II-17). Como só estamos interessados em $f_{ij}^{(2)}$ em primeira ordem, usamos $A_i^{\text{out}}(\vec{k})$ em primeira ordem que é da do por

$$A^{(1)\text{out}}(\vec{k}) = A_i^{\text{in}}(\vec{k}) + \gamma_i(k) \sum_1 \int \frac{d^3 \vec{k}'}{\sqrt{2w_j(\vec{k}')}} C_j \left\{ A_j^{\text{in}}(\vec{k}') \tilde{V}(\vec{k}_1 - \vec{k}_j') + B_j^{\text{in}}(k') \tilde{V}(k_i + k_j') \right\}$$

Obtemos então a equação para $f_{ij}^{(2)}(\vec{k}_1 \vec{k}_2)$

$$2f_{ij}^{(2)}(k, k') = \frac{\gamma_i(\vec{k}) C_j}{\sqrt{2w_j(\vec{k})}} a_0 \tilde{V}(k_i + k_j') + \gamma_i(\vec{k}) a_0 \sum_l \int \frac{d^3 \vec{k}''}{\sqrt{2w_l(\vec{k}'')}} C_l$$

$$2f_{lj}(\vec{k}'', \vec{k}') \tilde{V}(k_i - k_l'')$$

Desde que precisamos calcular $f_{ij}^{(2)}$ somente em primeira ordem, podemos então escrever:

$$2f_{ij}^{(2)}(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{\gamma_i(\vec{k}) C_j}{\sqrt{2w_j(\vec{k})}} a_0 \tilde{V}(k_i + k_j) \quad (\text{A.II-24})$$

Substituindo em (A.II-22) obtemos

$$A_{l \rightarrow i}^{(II)}(k, k') \equiv \{\gamma_i(\vec{k}') \gamma_l(\vec{k}) \sum_j \int \frac{d^3 \vec{k}''}{\sqrt{2w_j(\vec{k}'')}} |C_j|^2 \tilde{V}(k_i' + k_j'') \tilde{V}(k_i' - k_j'')\}$$

$$+ \gamma_i(\vec{k}') \frac{C_1}{\sqrt{2w_1(\vec{k})}} \int_{C_R} d^4k'' \Delta_R(k'') \tilde{V}(k_1' - k'') \tilde{V}(k'' - k) \}^{out}_{<0|0>in} \quad (A.II.25)$$

Observemos agora que em segunda ordem mesmo os processos físicos são divergentes devido aos estados intermediários / com energia complexa. Assim mesmo para processos físicos devemos manter a condição de "potenciais com suporte compacto no tempo".

Finalmente, se quisermos escrever a expressão acima usando o contorno de Feynman (C_F), basta usarmos a seguinte identidade válida para uma função que tem os mesmos polos do propagador retardado. Seja $f(k, k', k'')$ uma tal função. Então vale:

$$\int_{C_R} f(k, k', k'') d^4k'' = \int_{C_F} f(k, k', k'') d^4k'' - \sum_i \oint_{\gamma_i} f(k, k', k'') d^4k'' \quad (A.II-26)$$

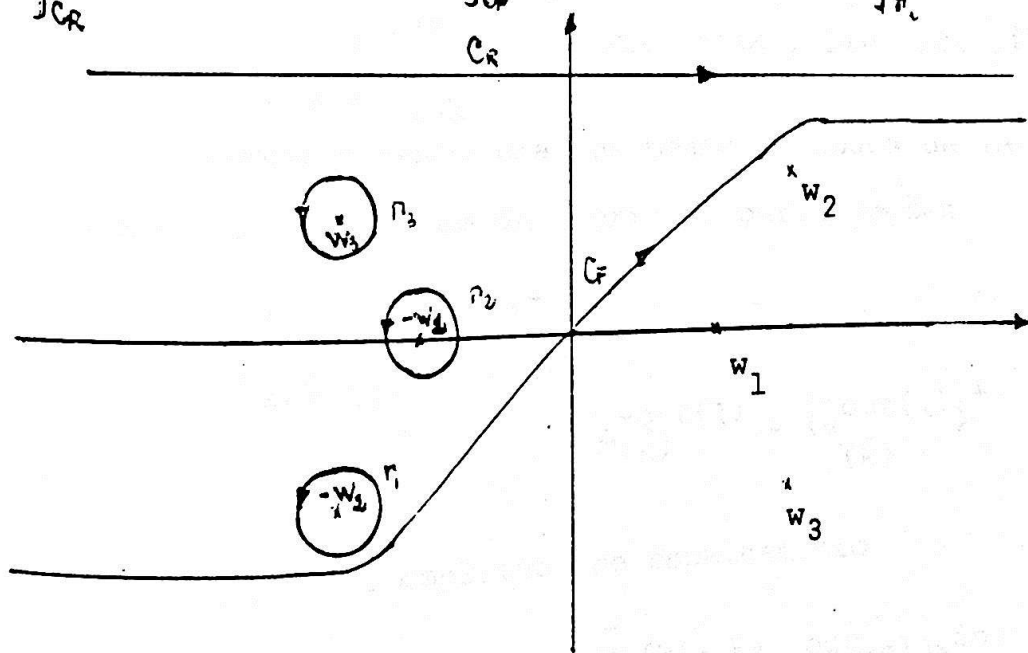


fig. A.II-1

Usando (A.II.26) obteremos para (A.II.25)

$$A_{1 \rightarrow i}^{\text{II}}(\vec{k}, \vec{k}') = \frac{\gamma_i(\vec{k}') C_1}{\sqrt{2w(\vec{k})}} \left\{ \int d^4k'' \Delta_R(k'') \tilde{V}(k_1' - k'') \tilde{V}(k'' - k) \right\}^{out}_{<0|0>in} \quad (A.II-27)$$

A.III. Potenciais Externos - Equação modificada.

Agora consideremos a equação de Yang-Feldman analisando a interação com um potencial externo. Esta equação então se escreve nesse caso

$$\phi(x) = \phi_m^{\text{in}}(x) + \int \Delta_R(x-y) V(y) \phi(y) dy \quad (\text{A.III-1})$$

Definimos o campo $\phi^{\text{out}}(x)$ através de

$$\phi^{\text{out}}(x) \equiv \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \phi(x) \quad (\text{A.III-2})$$

Usamos ainda as decomposições de Fourier para os campos $\phi^{\text{out}}(x)$ e $\phi_m^{\text{in}}(x)$

$$\phi_m^{\text{in}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \{ a^{\text{out}}_{\text{in}}(\vec{k}) e^{-ikx} + a^{\text{+out}}_{\text{in}}(\vec{k}) e^{ikx} \} \quad (\text{A.III-3})$$

Agora podemos usar os mesmos métodos de (A.II), encontramos em primeira ordem da teoria de perturbações

$$a^{\text{out}}_{(\vec{k})}(1) = \frac{-i}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} \{ a^{\text{in}}_{(\vec{k}')} \tilde{V}(\vec{k}-\vec{k}') + a^{\text{+in}}_{(\vec{k}')} \tilde{V}(\vec{k}+\vec{k}') \} \quad (\text{A.III-4})$$

$$a^{\text{+out}}_{(\vec{k})}(1) = (a^{\text{out}}_{(\vec{k})}(1))^{\dagger}$$

e para a amplitude de espalhamento

$$(A^{\text{out}}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'}(1)) = (\delta(\vec{k}-\vec{k}') - \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{\tilde{V}(\vec{k}'-\vec{k})}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}} \sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}})^{\text{out}}_{\langle 0|0 \rangle}{}^{\text{in}} \quad (\text{A.III-5})$$

onde a notação e as convenções são as mesmas já usadas em (A.II). Em segunda ordem da teoria de perturbação obtivemos / para o operador de aniquilação $a^{\text{out}}_{(\vec{k})}(2)$ e a amplitude de espalhamento, respectivamente

$$a^{\text{out}}_{(\vec{k})}(2) = \frac{-i}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \int \frac{d^3\vec{k}'}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}'}}} \left[a^{\text{in}}_{(\vec{k}'')} \int_{c'_R} d^4k' \tilde{V}(\vec{k}'-\vec{k}'') \Delta_R(k') \tilde{V}(\vec{k}-\vec{k}') \right]$$

$$+ a^{+in}(\vec{k}'') \int d^4 k' \tilde{V}(k'+k'') \Delta_R(k') \tilde{V}(k-k') \} \quad 91. \quad (A.III-6)$$

$$A^{(2)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'} = \frac{-i}{(2\pi)^3} \frac{\text{out} \langle 0 | 0 \rangle \text{in}}{\sqrt{2w(\vec{k})} \sqrt{2w(\vec{k}')}} \left\{ \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}''}{2w(\vec{k}'')} \tilde{V}(k'+k'') \tilde{V}(-k''-k) \right. \\ \left. + \int_{C_R} d^4 k''' \tilde{V}(k'''-k) \Delta_R(k''') \tilde{V}(k'-k''') \right\} \quad (A.III-7)$$

Onde o contorno C'_R é dado pela figura (3.1). O termo A.III.7 pode ainda ser escrito de uma forma diferente. Para isso basta considerarmos a seguinte igualdade válida para uma função genérica qualquer $G(k, k')$ que tenha os mesmos polos que $\Delta_R(k)$

$$\int_{C'_R} g(k, k') d^4 k' + \oint_{\gamma} g(k, k') d^4 k' = \int_{C'_F} g(k, k') d^4 k'$$

Sendo C'_R , γ e C'_F os contornos dados pela figura (A.III.1)

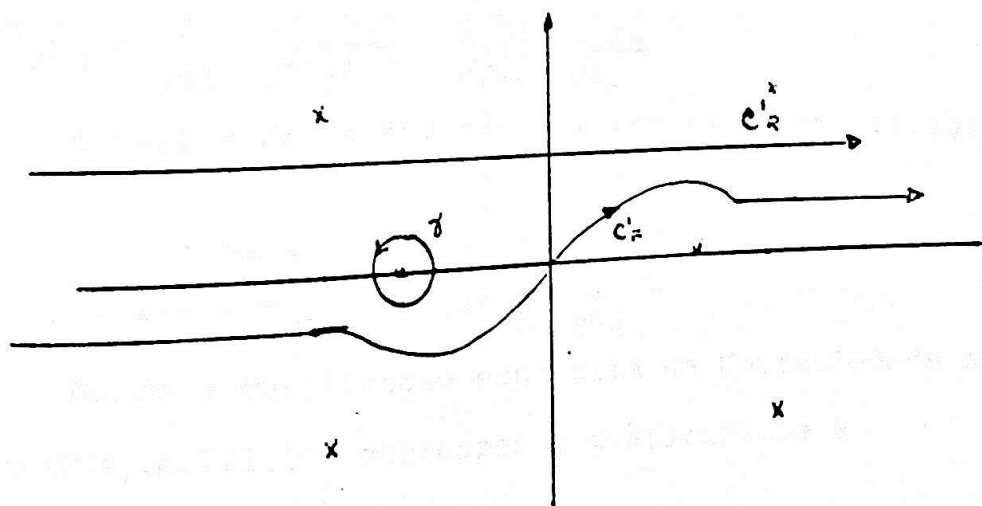


fig. (A.III-1)

Para $g(k, k''') = \tilde{V}(k'''-k) \Delta_R(k''') \tilde{V}(k'-k''')$

Encontraremos para $A^{(2)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'}$

$$A^{(2)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'} = \frac{-i}{(2\pi)^3} \frac{\text{out} \langle 0 | 0 \rangle \text{in}}{\sqrt{2w(\vec{k})} \sqrt{2w(\vec{k}')}} \int_{C'_F} d^4 k''' \tilde{V}(k'''-k) \Delta_F(k''') \tilde{V}(k'-k''') \quad (A.III-8)$$

Usando a identidade:

$$\frac{1}{k^2 - m^2 \pm i\epsilon} = \text{Pf} \left(\frac{1}{k^2 - m^2} \right) \mp i\pi \delta(k^2 - m^2)$$

(A.III-9)

Chegamos facilmente a (A.III-10)

$$\text{Im } T^{(2)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'} = \frac{1}{2(2\pi)^6} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{k}'}}} \int \frac{d^3\vec{k}''}{2\omega(\vec{k}'')} \left\{ \tilde{V}(\vec{k}'' - \vec{k}) \tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k}'') + \tilde{V}(-\vec{k}'' - \vec{k}) \tilde{V}(\vec{k}' + \vec{k}'') \right\}$$

Onde T é definida através de

$$S = 1 + iT$$

(A.III.11)

Obtivemos assim:

$$T^{(1)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}''} = \frac{-\tilde{V}(\vec{k}'' - \vec{k})}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}} 2\omega_{\vec{k}''}}} \quad \text{e} \quad T^{+(1)}_{\vec{k}' \rightarrow \vec{k}} = \frac{-\tilde{V}(\vec{k}' - \vec{k})}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_{\vec{k}'} 2\omega_{\vec{k}}}} \quad (\text{A.III-12})$$

e

$$T^{(1)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} = \sum_{i=1}^3 \frac{\delta(\vec{k} - \vec{k}_i)}{\sqrt{3!}} \frac{\tilde{V}(\vec{k}_i + \vec{k}_k)}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}_i} 2\omega_{\vec{k}_k}}} \quad (\text{A.III-13})$$

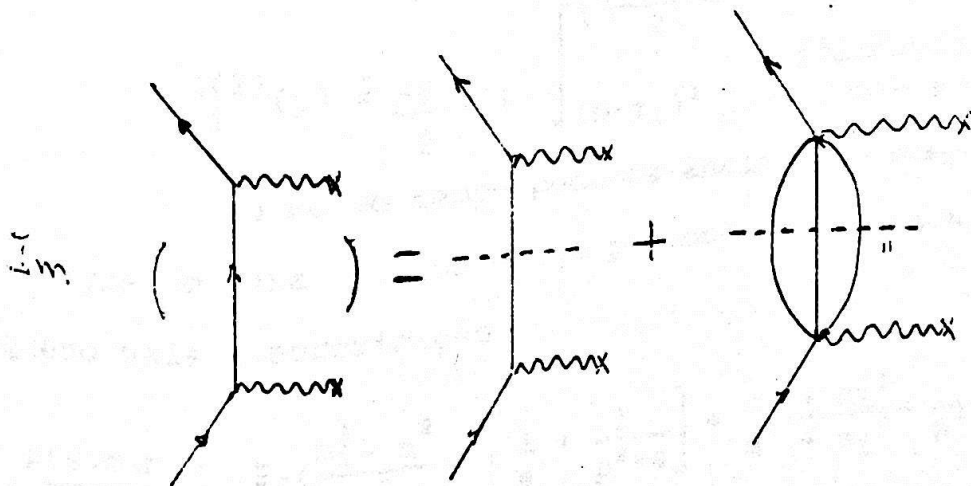
A partir de (A.III.10), (A.III.12) e (A.III.13) che

gamos a

$$2\text{Im } T^{(2)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}'} = T^{(1)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}''} T^{+(1)}_{\vec{k}' \rightarrow \vec{k}} + T^{(1)}_{\vec{k} \rightarrow \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} T^{+(1)}_{\vec{k}' \rightarrow \vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} \quad (\text{A.III-14})$$

Donde a verificação explícita da Unitariedade até /

segunda ordem, (A.III.14) corresponde graficamente a



A.IV. Térmo de Self-Energy.

De acôrdo com (4.30)

$$F(p) = \frac{\alpha\pi}{2} \sum \left\{ A_i \int_0^\infty dk k^2 \left\{ \left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_i} \right) \frac{1}{p_0^2 - (w_1 + w_i)} + \left(\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_i} \right) \frac{1}{p_0^2 - (w_1 - w_i)} \right\} \right.$$

Observemos então que o i -ésimo t rmo do segundo membro diverge quando $k \rightarrow \infty$. Consideremos  nt o o i -ésimo t rmo e ao invés de integrarmos de 0 até ∞ , vamos introduzir um limite superior de integração dado pelo parâmetro Λ . Dessa forma/ consideremos a integral $F^{(2)}_i(p)$ definida por

$$F^{(2)}_i(p) \equiv \frac{\alpha\pi A_i}{2} \int_0^\Lambda dk k^2 \left(\frac{1}{w_1} - \frac{1}{w_i} \right) \frac{1}{p_0^2 - (w_1 - w_i)^2} \quad (\text{A.IV-1})$$

Introduzimos agora a variável s'

$$s' = (w_1 - w_i)^2 \quad (\text{A.IV.2})$$

O comportamento assintótico de s' ($\Lambda \gg 1$)   dado /

por

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} s'(\Lambda) \rightarrow \left(\frac{m^2 - m_i^2}{2\Lambda} \right)^2 \quad (\text{A.IV-3})$$

Dessa forma o comportamento de $F^{(2)}_i(p)$ para $\Lambda \rightarrow \infty$ é

essencialmente

$$F^{(2)}_i(p) \approx \frac{-\alpha\pi}{2} A_i \int_{(m-m_i)^2}^{\left(\frac{m^2 - m_i^2}{2\Lambda}\right)^2} \frac{\rho(s, m, m_i) ds}{p^2 - s}$$

Ao mesmo tempo podemos analisar o comportamento do integrando para valores muito pequenos de s . Para s muito pequeno vale a aproximação

$$\frac{\rho(s, m, m_i)}{p^2 - s} \approx -\left(\frac{m_i^2 - m^2}{p^2}\right) \left[\frac{1}{s} + \frac{1}{p^2 - s} \right] + \frac{m^2 + m_i^2}{m^2 - m_i^2} \frac{1}{p^2 - s} \quad (\text{A.IV-4})$$

Considerando apenas o termo dominante

$$A_i \int_{\alpha} \left(\frac{m^2 - m_i^2}{2\Lambda} \right)^2 \frac{\rho(s, m, m_i)}{p^2 - s} ds \underset{s \rightarrow 0}{\approx} -A_i \frac{(m_i^2 - m^2)}{p^2} \log \left(\frac{m^2 - m_i^2}{2\Lambda\alpha} \right)^2$$

Observemos agora que o segundo membro de $F(p)$, Aqui denominado por $F^{(2)}(p)$ é simplesmente a soma de $F^{(2)}_i(p)$. Então

$$F^{(2)}(p) = \sum F^{(2)}_i(p)$$

$$F^{(2)}(p) \underset{\text{assintótico}}{\approx} -\frac{\alpha\pi}{2} \sum A_i \frac{(m_i^2 - m^2)}{p^2} \log \left(\frac{m^2 - m_i^2}{2\Lambda\alpha} \right)^2$$

(A.IV-5)

$$\text{Assin. } F^{(2)} = \frac{-2\alpha\pi}{2p^2} \frac{|M^2 - m^2|^2}{M^2 - M^{*2}} \log \left(\frac{m^2 - M^2}{m^2 - M^{*2}} \right)$$

$$= \frac{-\alpha\pi}{p^2} \frac{|M^2 - m^2|^2}{M^2 - M^{*2}} \log \left(\frac{m^2 - M^2}{m^2 - M^{*2}} \right)$$

A:V. Singularidade na origem.

Como o ponto de ramificação na origem, é, do ponto de vista do comportamento acausal da teoria, a singularidade/ mais importante. Vamos calculá-la a partir de $F(p^2)$ dado em

$$F(p^2) = \frac{\alpha\pi}{2} \left\{ \sum A_i \int_{(m+m_i)^2}^{\infty} \frac{\rho(s, m, m_i)}{p^2 - s} ds - \sum A_i \int_0^{(m_i - m)^2} \frac{\rho(s, m, m_i)}{p^2 - s} ds \right.$$

$$\left. -\frac{2}{p^2} \frac{|M^2 - m^2|^2}{M^2 - M^{*2}} \log \left(\frac{M^2 - m^2}{M^{*2} - m^2} \right) \right\}$$

Consideremos então a integral $A_i \int_0^{(m_i-m)^2} \frac{\rho(s, m, m_i)}{p^2 - s} ds$
para valores de s próximos à origem

Para $s \ll 1$ vale a expansão (A.IV.4).

Assim

$$\int_0^{i\epsilon} A_2 \frac{\rho(s, m, m^2)}{p^2 - s} ds = \frac{M^{*2} - m^2}{M^2 - M^{*2}} \frac{(M^2 + m^2)}{(M^2 - m^2)} \log \frac{i\epsilon - p^2}{p^2} A_2 \frac{(M^2 - m^2)}{p^2} \log \left(\frac{s}{s - p^2} \right) \Big|_0^{i\epsilon}$$

$$= \frac{(M^{*2} - m^2)}{M^2 - M^{*2}} \frac{(M^2 + m^2)}{(M^2 - m^2)} \log ip^2 - A_2 \left(\frac{M^2 - m^2}{p^2} \right) \log \left(\frac{s}{s - p^2} \right) \Big|_0^{i\epsilon}$$

sendo $\sum A_i (m_i^2 - m) = 0$ (A.V-1)

Podemos escrever

$$F(p^2) \sim \frac{\alpha\pi}{2} \left[\frac{M^{*2} - m^2}{M^2 - M^{*2}} \frac{(M^2 + m^2)}{(M^2 - m^2)} \log ip^2 + C. C. \right] \quad (A.V-2)$$

$p^2 \sim 0$

Onde os cortes próximos à origem foram deformados de tal forma a estarem ao longo do eixo imaginário.

A.VI. Comportamento Assintótico de $\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ipx}}{p^2 - i\delta} d^4p$

Consideremos a integral $\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ipx}}{p^2 - i\delta} d^4p$ (A.VI-1)

Queremos calcular (A.VI - 1) no limite

$$x_0 \rightarrow -\infty \quad x_0^2 - \vec{x}^2 > 0 \quad \delta > 0 \quad (A.VI-2)$$

Assim podemos escrever para (A.VI - 1)

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{i\vec{p}\vec{x}} e^{-ip_0 x_0}}{(p_0 - w_\delta)(p_0 + w_\delta)} = \frac{2\pi i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3\vec{p} e^{-i w_\delta x_0} e^{i\vec{p}\vec{x}}}{+2w_\delta}$$

$$= \frac{+i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} \frac{e^{-ipx}}{2w_\delta} \equiv \Delta^{(-)}(x, i\delta) \quad (\text{A.VI-3})$$

Donde

$$p_0 = w_\delta = \sqrt{\vec{p}^2 + i\delta}$$

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ipx}}{p^2 - i\delta} x_0 \rightarrow -\infty = -\Delta^+(x^2, i\delta) \quad (\text{A.VI-4})$$

Onde $\Delta^+(x^2, m^2)$ é dada por: $\Delta^+(x^2, m^2) = \frac{m}{8\pi\sqrt{x^2}} \left\{ J_1(m\sqrt{x^2}) + i N_1(m\sqrt{x^2}) \right\}$

(A.VI-5)

Usando o comportamento assintótico das funções de Bessel (J_V) e das funções de Neuman (N_V)

$$\begin{aligned} J_V(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{V\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ N_V(x) &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{V\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (\text{A.VI-6})$$

Assim, a partir de (A.VI-4), (A.VI-5) e (A.VI-6).

Concluimos

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - i\delta} \sim \frac{-\sqrt{2}}{8\pi^{3/2}} (i\delta)^{1/4} \frac{e^{i(i\delta)^{1/2} (x_0^2 - \vec{x}^2)^{1/2}}}{(x_0^2 - x^2)^{3/4}} \quad (\text{A.VI-7})$$

A.VII. Cálculo de $\Gamma(s)$

Em (4.40) $\Gamma(s)$ é dado por

$$\Gamma(s) = \frac{1}{2\pi i} \text{Disc } G'_{\text{Rm}}(p^2) \quad (\text{A.VII-1})$$

Sendo $G'_{\text{Rm}}(p^2)$ dado por (A.VI.6) podemos calcular

$\Gamma(s)$ usando (A.VII-1) e a igualdade facilmente verificável

$$\text{Disc } \frac{C(z)}{A(z) + B(z)} \stackrel{(A.VII-2)}{=} \frac{C(x)}{A(x) + B(x+i\epsilon)} - \frac{C(x)}{A(x) + B^*(x+i\epsilon)} = \frac{C(x) \text{Disc } B(x)}{|A(x)+B(x)|^2}$$

Sendo $A(x), B(x), C(x)$ funções analíticas mas $B(x)$ tem um corte ao longo do eixo real. Usando (A.VII-2) em (A.VII.1) / obtemos

$$\text{Disc } G_{Rm}(p) = \frac{+ |m^2 - M^2|^4 \text{Disc } F(p^2)}{(p^2 - m^2)(p^2 - M^2)(p^2 - M^{*2})^2 + |M^2 + m^2|^4 F^2(p)} \quad (A.VII-3)$$

No limite $s \rightarrow 0$ ($p^2 \rightarrow 0$), consideraremos apenas o termo dominante do denominador ^{que} é o termo (A.IV.5). obteremos

$$\text{Disc } G'_{Rm}(s) = + \frac{\text{disc } F(s)}{F_{\text{polo}}^2(s)}$$

Para o numerador o termo dominante é o termo logarítmico (A.V-3) e para o denominador usamos (A.IV.5), obtendo para $G(s)$ uma vez consideradas as aproximações resultantes da escolha $|M^2| \gg m^2$.

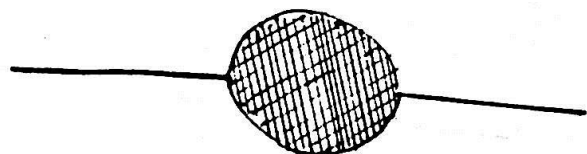
$$\Gamma^+(s) = \frac{\sin \theta e^{-i\theta}}{4\pi\alpha |M^2|^2 \theta^2 i} : s^2$$

onde θ é tal que $M^2 = |M^2| e^{i\theta}$

$$\Gamma^+(s) = \frac{\sin \theta e^{-i\theta}}{4\pi\alpha |M^2|^2 \theta^2 i} s^2 \quad (A.VII-4)$$

A.VIII. O Propagador Exato.

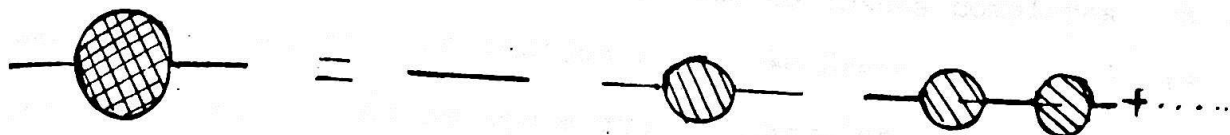
Representaremos o propagador exato através do símbolo $G'_{Rm}(x)$. Gráficamente ele será identificado com



No espaço dos momentos podemos escrever a seguinte série para o propagador como uma soma de Self-Energy próprias

$$G_{Rm}(p) = \Delta_R(p) + \Delta_R(p) \{\Sigma(p)\} \Delta_R(p) + \Delta_R(p) \{\Sigma(p)\} \Delta_R(p) \{\Sigma(p)\} \Delta_R(p) + \dots \quad (A.VIII-1)$$

que corresponde graficamente a



Sendo

$$\Delta_R(p) \equiv \frac{-|M^2 - m^2|^2}{(p^2 - m_0^2)(p^2 - M^2)(p^2 - M^{*2})} \quad (A.VIII-2)$$

e

$$\Sigma(p) = \text{shaded loop} = \text{dashed loop with } \Delta_R(p) \text{ and } \Delta_R(p) \text{ labels} + O(\lambda^4) \quad (A.VIII.3)$$

Resolvendo (A.VII.1) para $G_{Rm}(p)$ obtemos

$$G_{Rm}(p) = \frac{\Delta_R(p)}{1 - \Sigma(p) \Delta_R(p)} \quad (A.VIII-4)$$

A partir de (A.VIII.3) temos

$$\Sigma(p) = -F(p) + O(\lambda^4) \quad (A.VIII-5)$$

Substituindo (A.VII-2), (A.VII-5) em (A.VIII-4) obtemos:

$$G_{Rm}(p) = \frac{-|M^2 - m^2|^2}{(p^2 - m_0^2)(p^2 - M^2)(p^2 - M^{*2}) - |M^2 - m^2|^2 F(p) + O(\lambda^4)} \quad (A.VIII-6)$$

$$m_0^2 = m^2 - \delta m^2 \quad (A.VIII-7)$$

A.IX. INVARIANÇA DE LORENTZ- Modelos.

A.IX-1. Modelo Bidimensional - massas reais.

Com a intenção de elucidar algumas propriedades do termo de Self-Energy, procuraremos estudar a mesma integral em duas dimensões. A princípio consideraremos apenas massas reais (modelo). Em seguida analisamos o caso de massas complexas e nesse caso algumas propriedades nos serão úteis para a análise da mesma integral no espaço a quatro dimensões.

Consideremos o problema de calcularmos a integral / $I(p)$ definida por

$$I(p) = \int \frac{\delta(k^2 - m_a^2)}{(p-k)^2 - m_b^2} d^2k \quad (\text{A.IX-1})$$

Onde p e k são bivectores no espaço de Minkowski a duas dimensões. Cada bivector (V) tem um "comprimento" dado por

$$V^2 = V_0^2 - V_1^2$$

Quanto à questão da invariância de Lorentz, o problema que gostaríamos de resolver é o seguinte: consideremos / a integral de uma função $F(p,k)$ (duas ou quatro dimensões). Dentro de que condições a integral é invariante de Lorentz ?

Para que uma integral seja invariante de Lorentz / devemos ter satisfeitas as seguintes condições:

a) O integrando ($F(p,k)$) deve ser invariante de / Lorentz.

b) A integral deve independer da prescrição para o seu cálculo.

Pelo fato do integrando de um modo geral ser condi

cionalmente convergente (métrica indefinida), nem sempre essa última condição é automaticamente assegurada.

De um modo geral adota-se uma prescrição para o cálculo de uma integral. Uma vez adotada essa prescrição a invariança de Lorentz da integral fica na dependência do fato de se uma transformação de Lorentz da prescrição deixa a integral invariante de Lorentz. Assim devemos ter a integral invariante sob uma classe/ de transformações de Lorentz.

Consideremos agora a integral (A.IX.1). Usando a propriedade (A.III-9) da função δ e adotada a prescrição usual de integrarmos primeiro em K_0 , chegamos, depois de algumas manipulações a

(A.IX-2)

$$I(p, m_a, m_b) = \int dk_1 \left\{ \frac{1}{2w_a(k_1)} + \frac{1}{2w_b(p_1 - k_1)} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_0(p_1 - k_1) + w_a(k_1))^2} \\ + \int dk_1 \left\{ \frac{1}{2w_a(k_1)} - \frac{1}{2w_b(p_1 - k_1)} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_b(p_1 - k_1) - w_a(k_1))^2}$$

Por uma questão de conveniência, quanto à notação, usaremos daqui em diante

$$w_a \equiv w_a(k_1) = \sqrt{m_a^2 + k_1^2} \quad (A.IX-3)$$

$$w_b \equiv w_b(p_1 - k_1) = \sqrt{m_b^2 + (p_1 - k_1)^2}$$

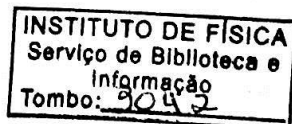
Além da simplificação exposta acima nós designaremos/ o primeiro termo do lado direito da expressão (A.IX.2) de $I_1(p)$ e o segundo termo de $I_2(p)$. Primeiramente analisaremos o termo/ $I_1(p)$. De acordo com o exposto

$$I_1(p) = \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \left\{ \frac{1}{2w_a} + \frac{1}{2w_b} \right\} \frac{1}{p_0^2 - (w_a + w_b)^2} \quad (A.IX-4)$$

Agora introduzimos uma nova variável s' definida por

$$s' = (w_a + w_b)^2 - p_1^2$$

(A.IX.5)



s' é o quadrado da energia total no S.C.M. Assim s é uma "variável de Mandelstan"

$$s' = (q^\mu + q'^\mu)^2$$

onde $q^\mu = (w_a, k_1)$

$$q'^\mu = (w_b, p_1 - k_1)$$

$$\frac{ds'}{dk_1} = 2 \left[\frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b} \right] (w_b k_1 + (k_1 - p_1) w_a) \quad (\text{A.IX-6})$$

Introduzindo o tensor de Levi-Civita $\epsilon_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\epsilon_{01} = 1$
podemos mostrar a igualdade

$$w_b k_1 + w_a (k_1 - p_1) = \epsilon_{\mu\nu} q'^\mu q^\nu \quad (\text{A.IX-7})$$

Donde êsse termo é explicitamente invariante de Lorentz. Assim êsse termo pode ser escrito sob a forma

$$\epsilon_{\mu\nu} q'^\mu q^\nu = f(s')$$

logo

$$\frac{ds'}{f(s')} = 2 dk_1 \left[\frac{1}{w_a} + \frac{1}{w_b} \right]$$

A transformação inversa nos dá (A.IX-8)

$$K_1 = \frac{p_1 (s' + m_a^2 - m_b^2) \pm \sqrt{(s' + p_1^2)(s' - (m_a - m_b)^2)(s' - (m_a + m_b)^2)}}{2s'}$$

No S.C.M. ($p_1 = 0$). Nesse sistema particular (A.IX-8)

se torna

$$K_1 = \pm \frac{1}{2} \frac{\sqrt{(s' - (m_a - m_b)^2)(s' - (m_a + m_b)^2)}}{\sqrt{s'}}$$

Como $f(s')$ é invariante nós o calculamos no S.C.M. obtendo

$$f(s') = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(s' - (m_a - m_b)^2)(s' - (m_a + m_b)^2)}$$

Um estudo da transformação (A.IX-5), nos leva a um esboço do gráfico s k_1 que é apresentado na fig. A.IX-1

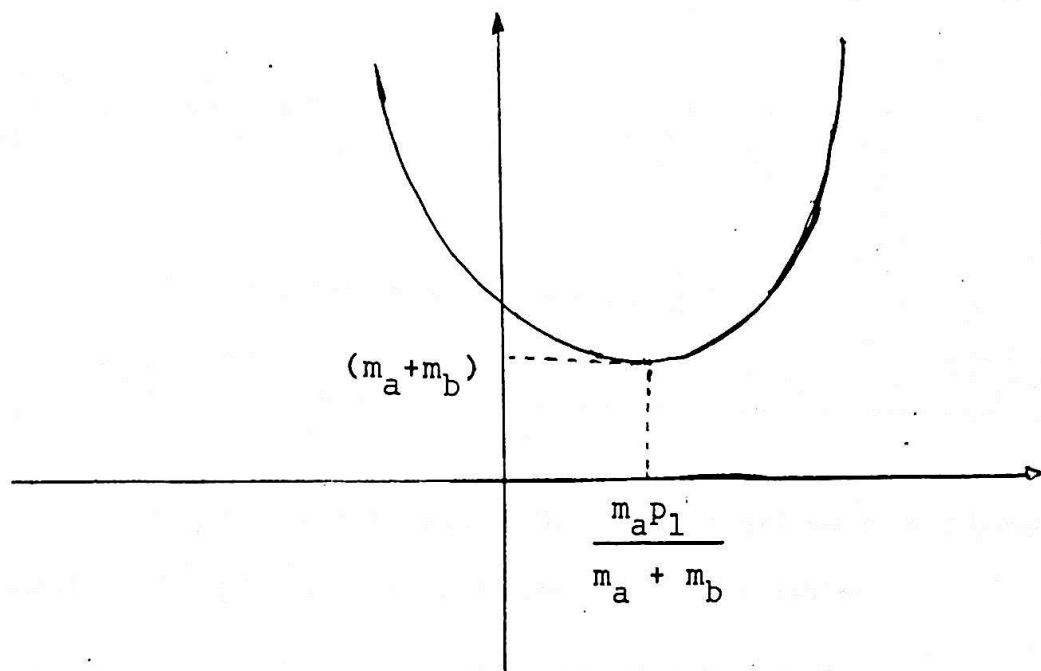


fig. (A.IX-1)

Depois de efetuadas as devidas substituições obtivemos para (A.IX-1) a expressão:

(A.IX-9)

$$I_1(\phi, m_a, m_b) = 4 \int_{(m_a + m_b)^2}^{\infty} \frac{ds'}{\sqrt{(s' - (m_a - m_b)^2)(s' - (m_a + m_b)^2)}} \cdot \frac{1}{p^2 - s'}$$

Consideremos agora o segundo termo, a saber $I_2(p, m_a, m_b)$

definido por

$$I_2(p, m_a, m_b) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{w_a} - \frac{1}{w_b} \right) \frac{dk_1}{p_0^2 - (w_a - w_b)^2} \quad (\text{A.IX-10})$$

Introduzindo uma nova "variável de Mandelstan"

$$s' = (w_a - w_b)^2 - p_1^2 = ((k_1^2 + m_a^2)^{1/2} - ((k_1 - p_1)^2 + m_b^2)^{1/2})^2 - p_1^2 \quad (\text{A.IX-11})$$

observemos que s' pode ser escrita como o quadrado do

"momento trasferido"

$$s' = (q - q'')^2 \quad \text{com} \quad \begin{aligned} q_v &= (w_a, k_1) \\ q'_v &= (w_b, k_1 - p_1) \end{aligned}$$

A partir de (A.IX.13)

$$\frac{ds'}{dk_1} = -2 \left(\frac{1}{w_a} - \frac{1}{w_b} \right) (k_1 w_b - (k_1 - p_1) w_a) = -2 \left(\frac{1}{w_a} - \frac{1}{w_b} \right) \epsilon_{\mu\nu} q''^\mu q^\nu \quad (\text{A.IX-12})$$

$$\frac{d^2 s'}{dk_1^2} = -2 \left(\frac{1}{w_a} - \frac{1}{w_b} \right) \left[w_b - w_a + k_1 (k_1 - p_1) \left(\frac{1}{w_b} - \frac{1}{w_a} \right) \right] \quad (\text{A.IX-13})$$

A transformação inversa nos leva a (A.IX-14)

$$k_1 = \frac{p_1 (s' + m_a^2 - m_b^2) \pm \sqrt{(s' + p_1)(s' - (m_a - m_b)^2)(s' - (m_a + m_b)^2)}}{2s'}$$

A partir de (A.IX.14) podemos calcular o termo invariante $\epsilon^{\mu\nu} q''^\mu q^\nu$ no sistema centro de massa

$$\epsilon^{\mu\nu} q''^\mu q^\nu = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(s' - (m_a - m_b)^2)(s' - (m_a + m_b)^2)} \quad (\text{A.IX-15})$$

Os pontos críticos da função $s'(k_1)$ podem ser determinados a partir de A.IX.11, A.IX.12 e A.IX.13. A partir da determinação desses pontos críticos podemos traçar a forma / aproximação do gráfico $s'_x k_1$. Para p_1^2 no domínio $(m_a - m_b)^2 < p_1^2 < (m_a + m_b)^2$ e $m_a > m_b$ este gráfico é dado pela fig. (A.IX.2)

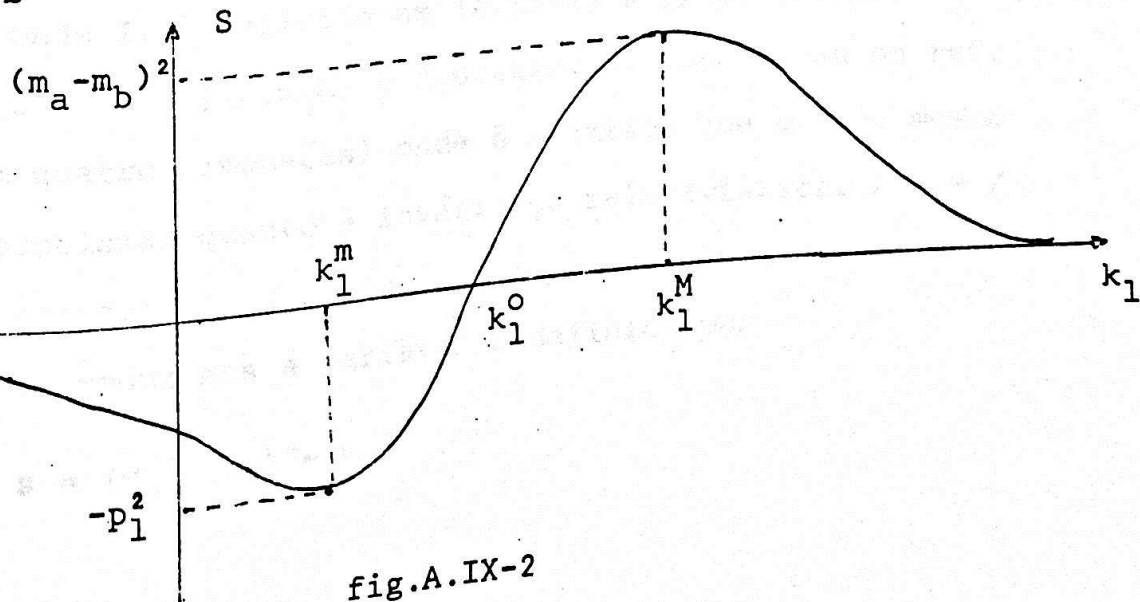


fig. A.IX-2

Efetuada as devidas substituições encontramos para

$$I_2(p, m_a, m_b)$$

$$I_2(p, m_a, m_b) = 4 \int_0^{(m_a - m_b)^2} \frac{ds'}{\sqrt{(s' - (m_a - m_b)^2)(s' - (m_a + m_b)^2)}} \cdot \frac{1}{p^2 - s}$$

Assim ambos os termos I_1 e I_2 exibem o caráter de invariante de Lorentz, desde que o integrando é invariante de Lorentz e os termos (A.IX-9) e (A.IX.16) se tornam integrais absolutamente convergente uma vez integrado numa direção tipo tempo. Assegurando assim o caráter de invariante de Lorentz do termo de Self-Energy a duas dimensões e com massas reais $I(p)$.

A.IX-2. Modelo bidimensional com massas complexas.

Vamos fazer agora a discussão da mesma integral a duas dimensões mas usando uma massa complexa que será aqui representada por M .

$$I(p, m, M) = \int \frac{\delta(k^2 - m^2)}{(p-k)^2 - M^2} d^2k \quad (\text{A.IX-17})$$

Novamente podemos escrever $I(p, m, M)$ sob a forma de uma soma de dois termos, depois de integrarmos em k_0

$$I(p, m, M) = I_1(p, m, M) + I_2(p, m, M)$$

onde I_1 é definido em (A.IX-4) e I_2 em (A.IX.10).

O termo $I_1(p, m, M)$ é discutido por Sudarshan na ref. (16) (em quatro dimensões) onde é mostrado que com o mesmo não há problemas quanto à invariança relativística. Assim / nós nos preocuparemos apenas com o termo $I_2(p, m, M)$.

Introduzimos a variável s definida por

$$s = (w_m - w_M)^2 - p_s^2$$

$$w_m = \sqrt{k_1^2 + m^2}$$

$$w_M = \sqrt{(p_1 - k_1)^2 + M^2}$$

(A.IX-18)

Claramente s tem uma parte real e uma parte imaginária, ou seja:

$$s = \text{Re}S + i\text{Im}S$$

A parte imaginária de s é dada por

$$\text{Im}S = \beta \left\{ 1 - \sqrt{2(k_1^2 + m^2)} \sqrt{\beta^2 + (\alpha + (p_1 - k_1)^2)^2}^{1/2} - (\alpha + (p_1 - k_1)^2) \right\} \quad \text{A.IX-19}$$

onde $M^2 = \alpha + i\beta$

(A.IX-19-a)

Enquanto que a parte real é dada por

$$\text{Re}S = (k_1^2 + m^2 + (k_1 - p_1)^2 + \alpha - p_1^2)$$

(A.IX-20)

$$- \sqrt{2(k_1^2 + m^2)} \sqrt{\beta^2 + (\alpha + (k_1 - p_1)^2)^2}^{1/2} + (\alpha + (p_1 - k_1)^2)$$

A partir de (A.IX.19) e (A.IX.20) inferimos que

$$\lim_{k_1 \rightarrow \pm\infty} \text{Im}S = -\beta \frac{p_1}{k_1} + 0$$

(A.IX-21)

$$\lim_{k_1 \rightarrow \pm\infty} \text{Re}S = -\frac{p_1}{k_1} (p_1^2 + \alpha) + 0$$

para $p_1 > 0$

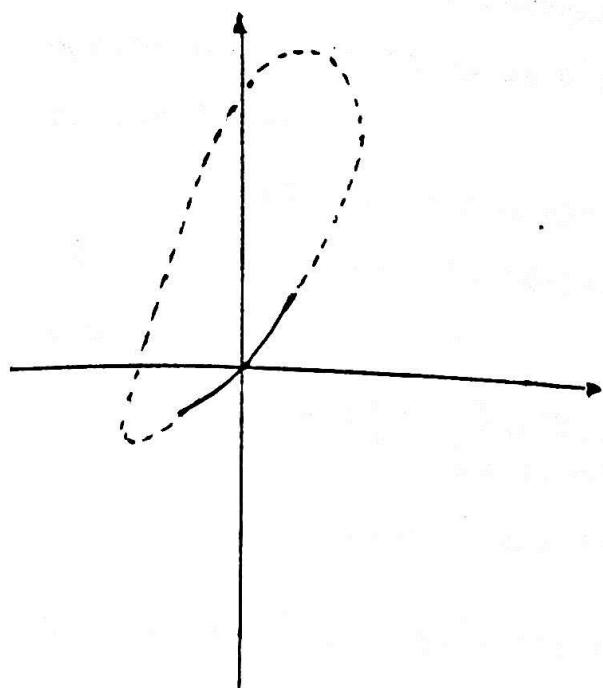
Os pontos para os quais $\text{Im}S = 0$ satisfazem à condição:

$$\frac{\beta^2}{4(k_1^2 + m^2)^2} + \frac{\alpha + (k_1 - p_1)^2}{(k_1^2 + m^2)} = 1 \quad \text{A.IX-22}$$

De (A.IX-22) concluímos que teremos a curva $s(k)$ cortando o eixo real no máximo cinco vezes. Duas soluções de (A.IX-22) correspondem a $k_1 = \pm\infty$. Além disso, quando s é puramente real, s deve ser obrigatoriamente negativo (ou nulo). Logo a curva cortará o eixo real negativo. Com base nessas considerações podemos traçar uma forma aproximada da curva.

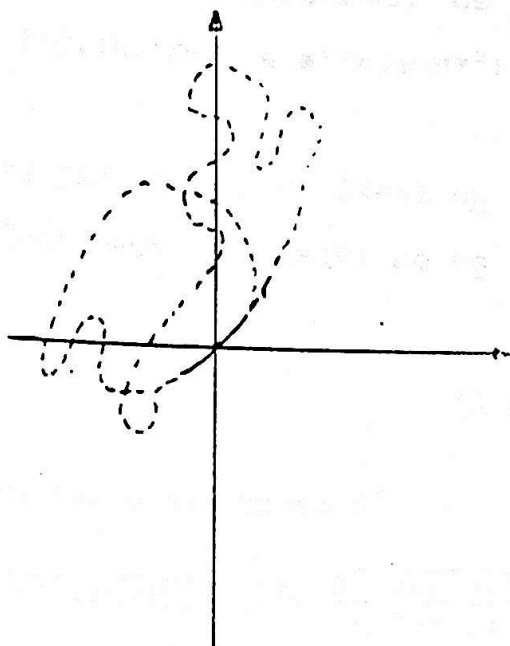
As linhas tracejadas representam as diversas possibilidades para a forma da curva, ao passo que as linhas cheias correspondem ao comportamento assintótico de s que é dado por

(A.IX-20) e (A.IX-21).



(a)

fig.(A.IX-3)



(b)

Os gráficos da fig.(A.IX.3) correspondem à curva /
 $s = (w_m(\vec{k}) - w_M(\vec{p} - \vec{k}))^2 - \vec{p}^2$ um gráfico semelhante será ob-
 tido quando considerarmos a curva $s = (w_m(k_1) - w_M(p_1 - k_1))^2 - p_1^2$
 (os w_1 são definidos a partir de (A.IX.18) . Com a única di-
 ferença que agora as linhas cheias estarão no segundo e qua-
 to quadrantes. De acôrdo com a fig.(A.IX.4) (ou possíveis /
 variantes como (A.IX.3b)

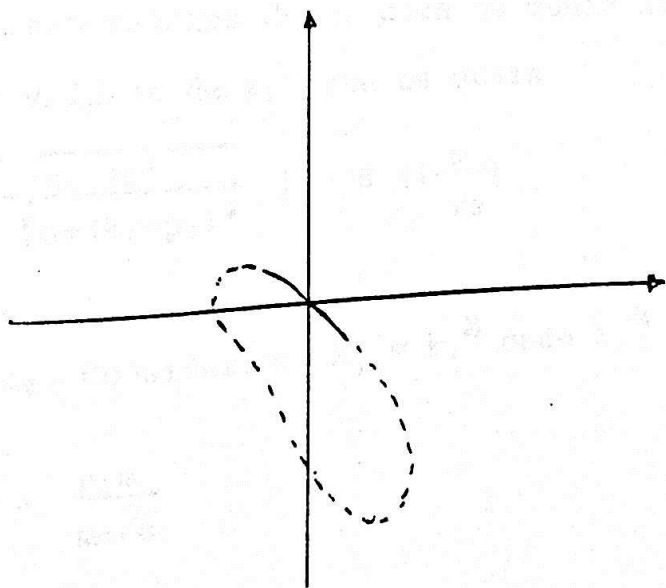


fig.(A.IX-4)

A seguir mostraremos que essas curvas contornam os pontos de ramificação $s_0 = (m-M)^2$ fig. (A.IX-3) e $s'_0 = (m-M^2)^2$ fig. (A.IX-4).

Iniciaremos a nossa análise para o caso de $\beta \ll 1$ onde β é definido em (A.IX-19.a). Nesse caso (A.IX-19) se escreve

$$\text{Im}S \approx \beta \left(1 - \sqrt{\frac{k_1^2 + m^2}{\alpha + (k_1 - p_1)^2}} \right) \quad (\text{A.IX-23})$$

Ao passo que para (A.IX-20) temos até ordem β^2

$$\begin{aligned} \text{Res} &= (k_1^2 + m^2 + (k_1 - p_1)^2 + \alpha - p_1^2) - \alpha \sqrt{k_1^2 + m^2} \cdot \sqrt{\alpha + (p_1 - k_1)^2} - \frac{\beta^2}{4} \frac{\sqrt{k_1^2 + m^2}}{(\alpha + (p_1 - k_1)^2)^{3/2}} \\ &\equiv s'(k_1, m, \sqrt{\alpha}, p_1) - \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{(\alpha + (p_1 - k_1)^2)} \cdot \frac{\sqrt{k_1^2 + m^2}}{\sqrt{\alpha + (p_1 - k_1)^2}} \end{aligned} \quad (\text{A.IX-24})$$

O ponto de ramificação será denominado s_0 . Assim

$$s_0 = (m-M)^2 \quad (\text{A.IX-25})$$

Até ordem β^2 sua parte real e imaginária será dada/

por

$$\text{Im}S_0 = \beta \left(1 - \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (\text{A.IX-26})$$

$$\text{Re}S_0 = (m - \sqrt{\alpha})^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} \frac{m}{\sqrt{\alpha}}$$

Existem valores de k_1 para os quais $\text{Im}S > \text{Im}S_0$. Desde que existem valores de k_1 para os quais

$$\beta \left(1 - \sqrt{\frac{k_1^2 + m^2}{\alpha + (k_1 - p_1)^2}} \right) > \beta \left(1 - \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \right) \quad (\text{A.IX-27})$$

Para mostrarmos que existem soluções para a desigualdade $\text{Res} > \text{Res}_0$. Consideremos $k_1 = k_1^M$ onde k_1^M é

$$k_1^M = \frac{p_1 m}{m - \sqrt{\alpha}} \quad (\text{A.IX-28})$$

Para k_1 dado por (A.IX-28)

$$\operatorname{Re} S(k_1^M) = (\sqrt{\alpha} - m)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} \cdot \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \left(\frac{1}{\frac{p_1^2}{(m - \sqrt{\alpha})^2 + 1}} \right) \quad (\text{A.IX-29})$$

Comparando (A.IX-29) com (A.IX-26) notamos que pontos na vizinhança de $k_1 = k_1^M$ satisfazem

$$s'(k_1, m, \sqrt{\alpha}, p_1) - \frac{\beta^2}{4} \frac{1}{(\alpha + (p_1 - k_1)^2) \sqrt{\alpha + (p_1 - k_1)^2}} > (m - \sqrt{\alpha})^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \quad (\text{A.IX-30})$$

Concluimos assim que até ordem β^2 a curva pode contornar o ponto de ramificação. Isso será verdade se o conjunto intersecção de (A.IX-27) e (A.IX-30) for diferente de zero.

Para mostrarmos que a curva contorna o ponto de ramificação, iniciaremos pela análise do comportamento de curva somente até ordem β . Nessa ordem

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} S &\approx S'(k_1, m, \sqrt{\alpha}, p_1) \\ \operatorname{Im} S &\approx \beta \left(1 - \frac{k_1^2 + m^2}{\alpha + (p_1 - k_1)^2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.IX-31})$$

$$\operatorname{Re} S_0 \approx (m - \sqrt{\alpha})^2$$

$$\operatorname{Im} S_0 \approx \beta \left(1 - \frac{m}{\sqrt{\alpha}} \right)$$

Usando (A.IX-23,24) traçamos um gráfico aproximando de s no plano complexo, representando alguns pontos no gráfico da fig. (A.IX-5)

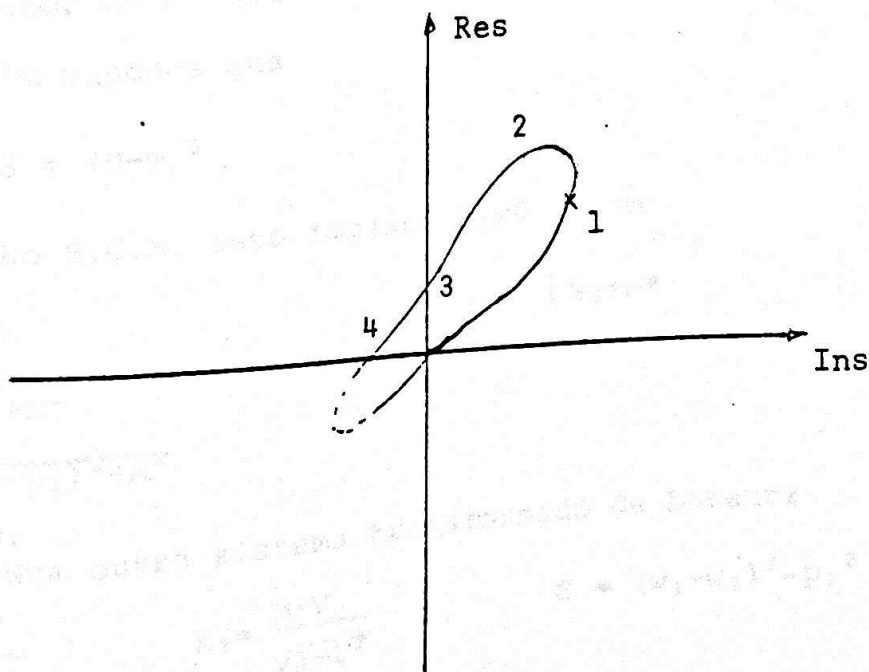


fig.A.IX.5

$$S_1 = S_0 = ((m - \sqrt{\alpha})^2, \beta(1 - \frac{m}{\sqrt{\alpha}}))$$

$$k_1 = \frac{p \cdot m}{m - \sqrt{\alpha}}$$

$$S_2 = ((m - \sqrt{\alpha + p_1^2})^2, \beta(1 - \frac{m}{\sqrt{\alpha + p_1^2}}))$$

$$k_1 = 0$$

$$S_3 = ((\sqrt{m^2 + p_1^2} - \sqrt{\alpha})^2, \beta(1 - \frac{\sqrt{m^2 + p_1^2}}{\alpha}))$$

$$k_1 = p$$

$$S_4 = (-p_1^2, 0)$$

$$k_1 = \frac{p_1^2 + \alpha - m^2}{2p}$$

Assim em primeira ordem a curva passa sobre o ponto de ramificação. Até segunda ordem, a parte imaginária não se altera mas introduzimos uma pequena correção à parte real. Essa pequena correção não altera a estrutura geral da curva, mas ela é suficiente para fazer com que no ponto de ramificação a curva o contorne como pode ser concluído a partir de considerações anteriores. Como a curva contorna o ponto de ramificação para valores pequenos de β , resta verificar que o mesmo ocorre para qualquer β .

Verificaremos agora que para qualquer M (sem a condição $\text{Im } M^2 \ll 1$) o contorno rodeia o ponto de ramificação.

Aqui usamos um argumento sobre invariança de Lorentz. Como já vimos, para pequenos valores de $\beta = \text{Im } M^2$ pode-se contornar o ponto de ramificação. Vamos supor que para um determinado valor de M^2 (ou de M) atingimos o ponto de ramificação. Assim supomos que

$$S = (M - m)^2$$

$$\text{No S.C.M. isto implica } k_1 = 0 \begin{cases} w_1 = m \\ w_2 = M^* \end{cases}$$

$$w_1 = \sqrt{k_1^2 + m^2}$$

A.IX-32

$$w_2 = \sqrt{(k_1 - p_1)^2 + M^2}$$

$$k_2 = k_1 - p_1$$

Num outro sistema transformado de Lorentz

$$S = (w_1 - w_2)^2 - p_1^2$$

$$k_1 = \frac{mV}{\sqrt{1 - V^2}}$$

$$k_2 = \frac{M^*V}{\sqrt{1 - V^2}}$$

devido ao fato de

$$\frac{k_1}{k_2} = N \neq \text{Real} \quad (\text{Pois os s\~ao } k_1 \text{ e } k_2)$$

mas

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{M}{M^*} = N \neq \text{Complexo}$$

concluimos que em nenhum sistema $s = (M-m)^2$

Donde para qualquer M o contorno rodeia o ponto de ramificação.

Levando em conta os cálculos das duas primeiras partes dessa seção, uma rápida substituição nos leva finalmente/ à seguinte expressão para o termo $I_2(p, m, M)$.

$$I_2(p, m, M) = 2 \oint_C \frac{ds}{\sqrt{(s - (m-M)^2)(s - (m+M)^2)}} \frac{1}{p^2 - s} \quad \text{A.IX-33}$$

onde C é o contorno da fig.(A.IX-6).

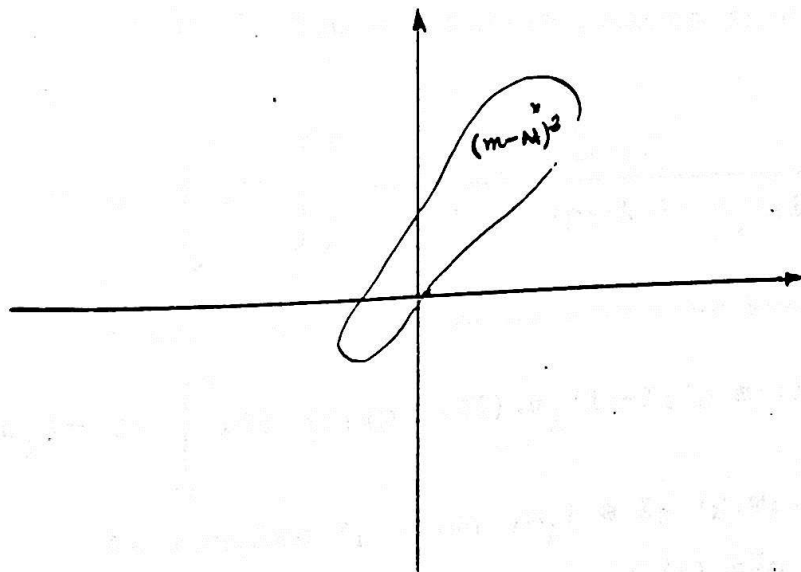


fig.A.IX-6

No final desse trabalho apresentamos alguns gráficos da curva $s \times k_1$. Fizemos várias curvas, onde em cada uma variamos os parâmetros α, β e p_1 .

A.X. O termo de Self-Energy.

Vamos analisar mais algumas propriedades do termo de Self-Energy. Para tanto consideraremos agora o sistema do laboratório e consideraremos \vec{p} de tal forma que $\vec{p} = (0, 0, p_3)$. Nesse sistema, consideremos a integral quadridimensional $I(p, m, m_1)$ definida por

$$I(p, m, m_1) = \int \frac{d^4 k \delta(k^2 - m^2)}{(p-k)^2 - m_1^2}$$

$$= \int \frac{\delta(k^2 - m^2) d^4 k}{(p_0 - k_0)^2 - (p_3 - k_3)^2 - k_x^2 - k_y^2 - m_1^2}$$
A.X-1

Introduzimos agora coordenadas cilíndricas

$$k_x = l \cos \phi \quad k_y = l \sin \phi \quad k_3 = k_3$$

Então devido à simetria podemos integrar (A.X.1) em

ϕ obtendo

$$I(p, m, m_1) = 2\pi \int_0^\infty l dl \iint \frac{\delta(k_0^2 - k_3^2 - m^2(l))}{(p_0 - k_0)^2 - (p_3 - k_3)^2 - m_1^2(l)} dk_0 dk_3$$

Integrando agora em k_0 , obtemos para (A.X-1)

$$I(p, m, m_1) = 2\pi \int_0^\infty l dl (I_1(p, m_1(l), m_1(l)) + I_2(p, m_1(l), m_1(l)))$$
(A.X-2)

As funções $I_1(p, m_1, m_1)$ e $I_2(p, m_1, m_1)$ são definidas

em (A.IX-4) e (A.IX-10), e as massas $m_1(l)$ são dadas por

$$m_1(l) = \sqrt{m_1^2 + l^2}$$
(A.X-3)

Em termos de I_1 e I_2 o termo de Self-Energy se escre-

ve

$$F(p) = 2\pi\alpha (m^2 - M^2)^2 \int_0^\infty l dl \Sigma A_1 \{I_1(p, m(l), m_1(l)) + I_2(p, m(l), m_1(l))\}$$
(A.X-4)

Devido ao fato de existir uma análise detalhada do primeiro termo (integral de $I_1(p, m(l), m_i(l))$ na referência (16), passaremos a estudar apenas o segundo termo que será denominado de $F^{(2)}(p)$

$$F^{(2)}(p) \equiv 2\alpha\pi (m^2 - M^2)^2 \int_0^\infty dl \sum A_i I_2(p, m(l), m_i(l)) \quad (\text{A.X-5})$$

De acordo com a discussão feita no apêndice (A.IX), o integrando $I_2(p, m(l), m_i(l))$ é definido através de uma integral ao longo de uma curva no plano complexo. fig.(A.IX-6). Este contorno de integração depende das "massas" que variam de m_i até ∞ , bem como do momento p_z . Podemos recapitular suas características principais: ele passa pela origem, contorna o corte de ramificação $(m(l) - m_i(l))^2$ e o respectivo corte da raiz quadrada. Não corta o eixo real positivo, mas corta o eixo real negativo para um valor de $s < -\vec{p}^2$ e volta novamente a passar pela origem, o ponto $s = -\vec{p}^2$ só é cortado pelo contorno com $l \rightarrow \infty$.

Para p tipo tempo ($p^2 > 0$) nós podemos deformar o contorno de integração de tal forma a integrar a variável s definida em A.IX-18 e $r_i(l)$ dado por A.X-6. Isto será ilustrado pela fig.A.X-1.

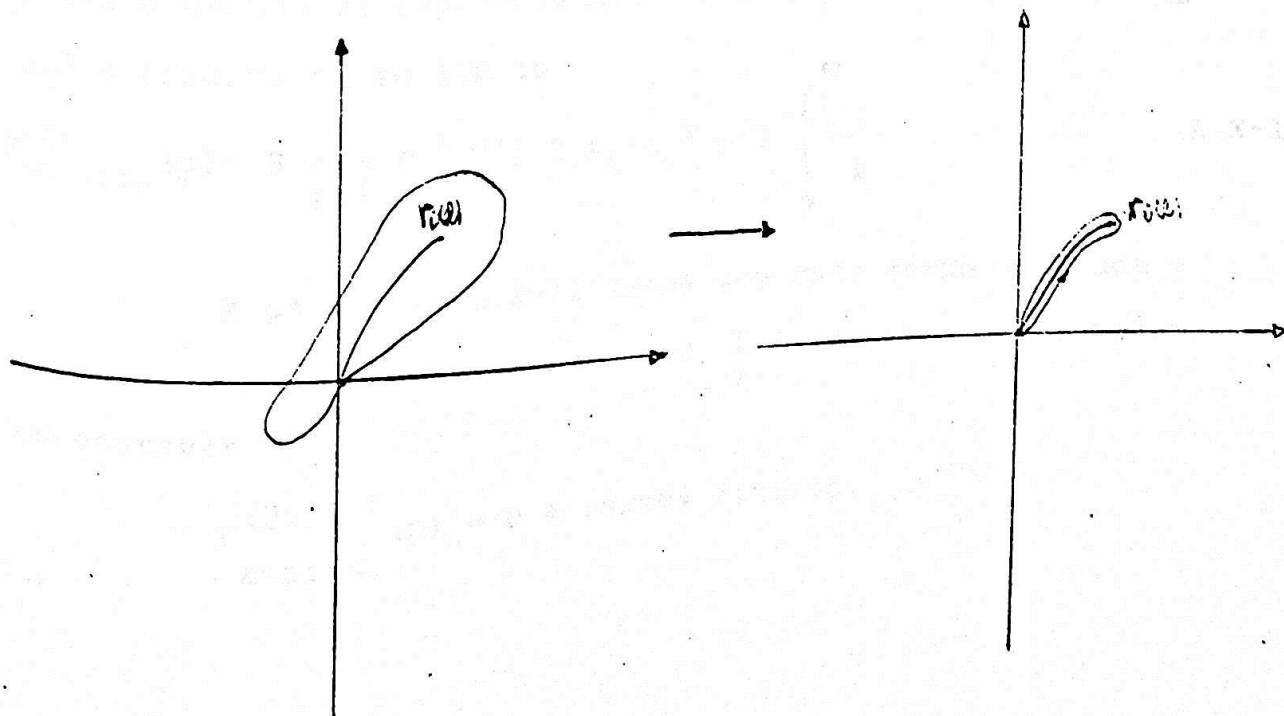


fig.A.X-1

Assim, usando (A.IX-33) $F^{(2)}(p)$ é dado por

$$F^{(2)}(p) = 2\pi\alpha (m^2 - M^2)^2 \int_0^\infty \sum A_i \, l \, dl \int_0^{r_i(l)} \frac{ds}{\sqrt{(s - (m(l) - m_i(l))^2)(s - (m(l) + m_i(l))^2)}}$$

onde $r_i(l) = (\sqrt{m^2 + l^2} - \sqrt{m_i^2 + l^2})^2$

$$\lim_{l \rightarrow 0} r_i(l) = \frac{l^4}{4} \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{M^*} \right)^2 + (m - m_i)^2 \quad (\text{A.X-6})$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} r_i(l) = \frac{(m^2 - m_i^2)^2}{4l^2} \quad (\text{A.X-7})$$

Definindo

$$R_i(l) = (\sqrt{m^2 + l^2} + \sqrt{m_i^2 + l^2})^2 \quad (\text{A.X-8})$$

teremos

$$\lim_{l \rightarrow \infty} R_i(l) \approx l^2 \quad (\text{A.X-9})$$

Em termos de $r_i(l)$ e $R_i(l)$ (4-53) se escrever

$$F^{(2)}(p) = 8\pi\alpha (m^2 - M^2)^2 \sum A_i \int_0^\infty l \, dl \int_0^{r_i(l)} \frac{ds}{\sqrt{(s - r_i(l))(s - R_i(l))}} \frac{1}{p^2 - s} \quad (\text{A.X-10})$$

Analisemos agora o comportamento de $F^{(2)}(p)$ apenas para valores muito grandes de l . Introduzindo um parâmetro $\lambda \gg 1$ e usando as expansões A.X-7 e A.X-8 e efetuando aproximações teremos nesse limite

$$F_{\text{assint.}}^{(2)}(p) \approx 8 \frac{\pi\alpha}{ip^2} (m^2 - M^2) \sum A_i (m_i^2 - m^2) \int_\lambda^\infty \frac{dl}{l} \quad (\text{A.X-11})$$

A partir de A.X-11 vemos que cada termo separadamente é divergente, no entanto como $\sum_i A_i (m_i^2 - m^2) = 0$, podemos escrever

$$F_{\text{assint.}}^{(2)}(p) = 0 + \text{térmos finitos.}$$

Concluimos assim que $F^{(2)}(p)$ não é um termo divergente para p tipo tempo ($0 < p^2 < 4m^2$).

Para p tipo espaço ($p^2 < 0$) temos dois casos a considerar

- a) $|\vec{p}| \gg 1$
- b) $|\vec{p}|$ pequeno

No caso (a) valem as mesmas considerações do caso onde p é tipo tempo. No entanto para o caso (b) ao modificarmos o contorno de integração de tal maneira que os limites de integração estejam sobre os cortes (como fizemos no caso anterior) devemos nos lembrar de levar em conta a singularidade dentro do contorno de integração de acordo com a figura A.X-2.

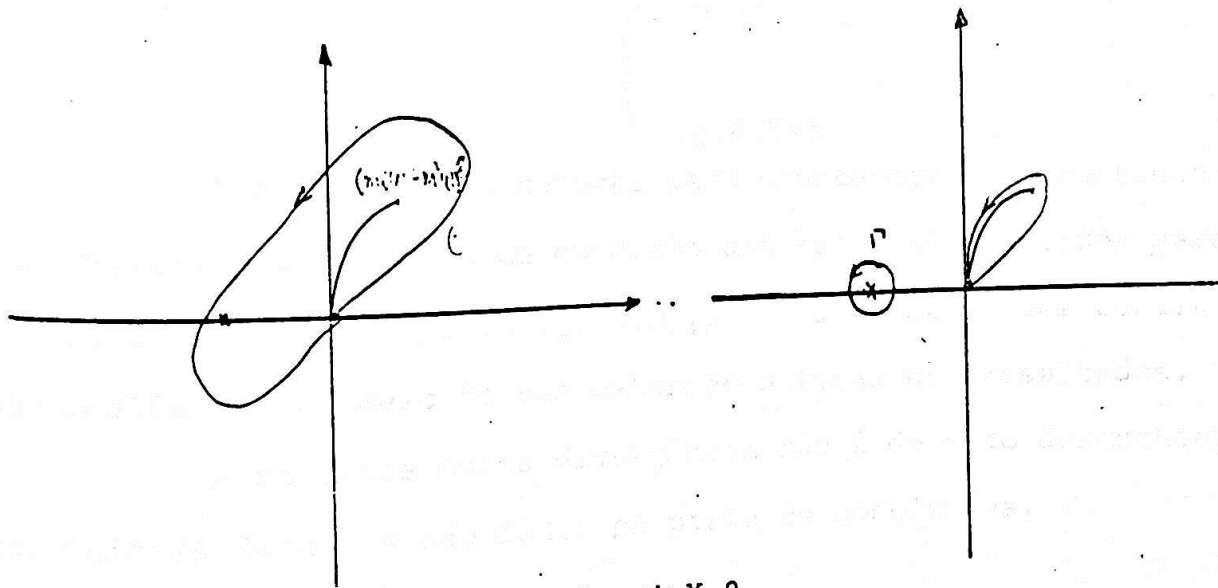


fig. A.X-2

Então podemos escrever:

$$F^{(2)}(p) = (\text{térmo do polo}) + (\text{térmo da eq. A.X-10})$$

Como já discutimos o segundo termo, passaremos a considerar o termo do polo que é dado por:

$$F^{(2)}(\text{polo}) = 2\pi\alpha (m^2 - M^2)^2 \int \frac{1dl \sum_{i \neq 1} A_i \alpha}{\sqrt{(s - \Gamma_i(1))(s - R_i(1))}} \frac{1}{p^2 - s}$$

$$= -(2\pi)^2 i \alpha (m^2 - M^2)^2 \sum_{i \neq 1} \int_0^\infty \frac{A_i}{\sqrt{(p^2 - \Gamma_i(1))(p^2 - R_i(1))}} \frac{1}{p^2 - s}$$

(A.X-12)

Observemos no entanto que desde que

$$\sum_i A_i \sim \frac{1}{\sqrt{p^2 - r_i(1)} \sqrt{p^2 - R_i(1)}} \xrightarrow{1 \gg 1} \frac{\sum_i A_i}{\sqrt{-p^2}} \quad (\text{A.X-13})$$

Assim o termo do polo é linearmente divergente. Portanto numa região de s que depende de \vec{p} (a parte hachuriada da fig. A.X-3) nós redefinimos $F(\vec{p})$ por continuação analítica.

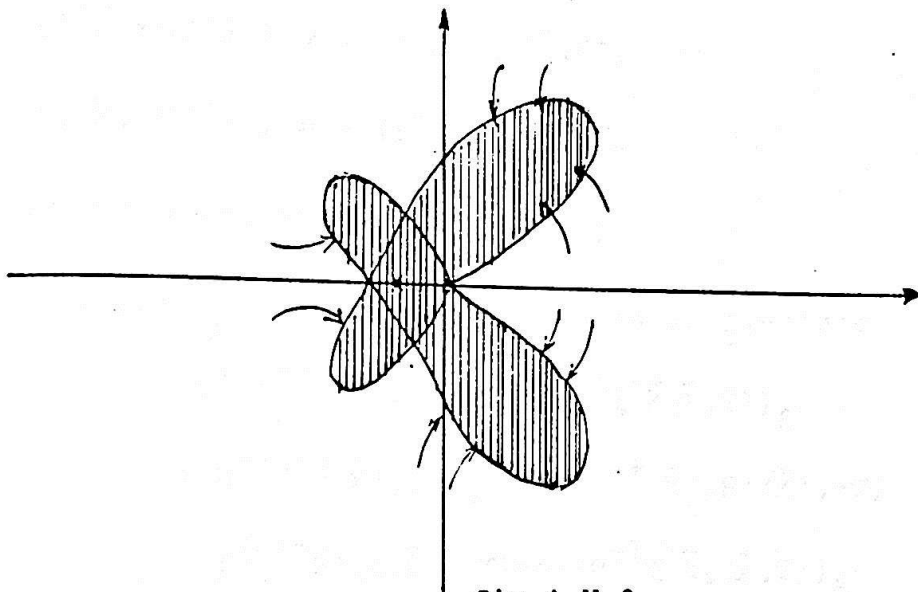


fig.A.X-3

A maneira mais natural para efetuarmos essa continuação analítica é por meio da extensão dos resultados obtidos para p tipo tempo (ou p tipo espaço com $|\vec{p}| \gg 1$). Esta é uma continuação analítica por meio de uma extensão natural dos resultados.

A natureza dessa divergência não é de todo desconhecida. Maiores detalhes são dados na parte de conclusões.

A.XI. Relações de Comutação dos operadores $A^{\text{out}}(\vec{k})$ e $A^{+\text{out}}(\vec{k})$.

A partir de (3.52), (3.53), (3.54) e (3.57) obtemos para a relação de comutação do operador $A^{\text{out}}(\vec{k})$

(A.XI-1)

$$[A^{\text{out}}(\vec{k}), A^{\text{out}}(\vec{k}_0)] =$$

$$\int d^3\vec{k}' \{ (\xi^{\dagger}\vec{k}, n_U f^{\dagger}\vec{k}') (\xi^{\dagger}\vec{k}_0, n_U f^{-}\vec{k}') - (\xi^{\dagger}\vec{k}_0, n_U f^{-}\vec{k}') (\xi^{\dagger}\vec{k}, n_U f^{\dagger}\vec{k}') \}$$

As funções $\xi^{\dagger}\vec{k}$ e $f^{\dagger}\vec{k}$ já foram definidas no capítulo 3.

Usando a condição de pseudo-unitariedade de U (A.1) bem como a condição de realidade do campo, que implicam as seguintes relações

$$\begin{aligned}(\xi^{-\vec{k}}, \eta U f^{-\vec{k}'}) &= - (f^{+\vec{k}'}, \eta U^{-1} \xi^{+\vec{k}}) \\(\xi^{+\vec{k}}, \eta U f^{+\vec{k}'}) &= - (f^{-\vec{k}'}, \eta U^{-1} \xi^{-\vec{k}}) \\(\xi^{-\vec{k}}, \eta U f^{+\vec{k}'}) &= - (f^{-\vec{k}'}, \eta U^{-1} \xi^{+\vec{k}}) \\(\xi^{+\vec{k}}, \eta U f^{-\vec{k}'}) &= - (f^{+\vec{k}'}, \eta U^{-1} \xi^{-\vec{k}})\end{aligned}\tag{A.XI-2}$$

Podemos escrever para (A.XI-1)

$$\begin{aligned}[A^{\text{out}}(\vec{k}), A^{\text{out}}(\vec{k}_0)] &= \int d^3\vec{x} d^3\vec{x}' d^3\vec{k}' \left\{ (U^{-1} \xi^{+\vec{k}}_0(\vec{x}', T))^*_{\alpha} \eta_{\alpha'\beta'} f^{(-)\vec{k}',\beta'}(\vec{x}', -T) \right. \\&\quad f^{(-)\vec{k}',\alpha}(\vec{x}', -T) \eta_{\alpha\beta} (U^{-1} \xi^{-\vec{k}}(\vec{x}, T))_{\beta} \\&\quad - (U^{-1} \xi^{+\vec{k}}(\vec{x}', T))^*_{\alpha} \eta_{\alpha'\beta'} f^{(+)\vec{k}',\beta'}(\vec{x}', -T) \\&\quad \left. f^{(+)\vec{k}',\alpha}(\vec{x}', -T) \eta_{\alpha\beta} (U^{-1} \xi^{-\vec{k}}_0(\vec{x}, T))_{\beta} \right\}\end{aligned}$$

Efetuada agora as reposições

$$\xi^{(+)\vec{k}} \rightarrow \overline{\xi^{+\vec{k}}} (x) \equiv \begin{vmatrix} e^{-ikx} \\ 0 \\ 0 \\ f_4^+(x) \\ f_5^+(x) \\ 0 \end{vmatrix} \quad \xi^{(-)\vec{k}} \rightarrow \overline{\xi^{(-)\vec{k}}} (x) \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ e^{ikx} \\ 0 \\ f_4^-(x) \\ f_5^-(x) \\ 0 \end{vmatrix}$$

Onde agora as funções f_4^{\pm} , f_5^{\pm} devem ser tais que satisfaçam a condição (3.47) no sistema que sofreu a inversão temporal/ou seja devemos ter as seguintes condições satisfeitas:

$$\sum_i \int U^{-1} \xi_{\vec{k},i}^{(\pm)} = 0 \quad \sum_i \int U^{-1} \overline{\xi}_{\vec{k},i}^{(\pm)} = 0 \tag{A.XI-4}$$

Analogamente introduzimos as funções $f^{(\pm)\vec{k}}$

$$f^{(-)\vec{k}} \rightarrow \overline{f^{(-)\vec{k}}} \equiv \begin{vmatrix} 0 \\ e^{ikx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad f^{(+)\vec{k}} \rightarrow \overline{f^{(+)\vec{k}}} \equiv \begin{vmatrix} e^{-ikx} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Usando agora a condição de completeza satisfeita pelas funções $\bar{f}^{\pm\vec{k}}(x)$, a saber

$$\int d^3\vec{k}' \bar{f}^{(\pm)\vec{k}'}_{\alpha}(X, -T) (\bar{f}^{(\pm)\vec{k}'}_{\beta}(X', -T))^* = M^{(\pm)}_{\alpha\beta} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

onde

(A.XI-5)

$$M^+ = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad M^{(-)} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

obteremos para (A.XI-3)

$$|A^{\text{out}}, A^{\text{out}}(\vec{k}_0)| = - (U^{-1} \xi^{\vec{k}}, \eta (M^+ - M^-) \eta U^{-1} \xi^{\vec{k}_0})$$

$$\approx - (U^{-1} \xi^{\vec{k}}, \eta U^{-1} \xi^{\vec{k}_0})$$

(A.XI-6)

$$= - (\xi^{\vec{k}}, \eta U U^{-1} \xi^{\vec{k}_0}) = - (\xi^{\vec{k}}, \eta \xi^{\vec{k}_0})$$

$$= 0$$

Analogamente seguindo o mesmo procedimento obteremos

$$[A^{\text{out}}(\vec{k}), A^{\text{out}}(\vec{k}_0)] = (\xi^{\vec{k}}, \eta \xi^{\vec{k}_0}) = \delta^3(\vec{k} - \vec{k}_0)$$

(A.XI-7)

$$[A^{\text{out}}(\vec{k}), A^{\text{out}}(\vec{k}_0)] = 0$$

REFERENCIAS

1. W.Heisemberg e W.Pauli - Zeits für Phys. 56 1 (1929) e 59 168 (1930).
2. P.Roman - Introduction to Quantum Field Theory
John Wiley & Sons, Inc. N.York.
3. A.Pais e G.E. Uhlenbeck, Phys.Rev. 97,145 (1950).
4. Pauli W. e F.Villars Rev.Mod.Physics 21 434 (1949).
5. P.A.M. Dirac Proc.Roy.Soc. A180, 1 (1942).
6. S.N.Gupta - Proc.Phys.Soc. A63 681 (1950), A64, 850 (1951)
K.Bleuler - Helv.Phys.Acta, 23, 567 (1951).
7. N.Nakanishi - Phys.Rev. D3 811 (1971).
8. J.A.Swieca - Palestra apresentada no Simpósio "Basic questions in Elementary Particle Physics" - Munique, Junho 1971.
9. J.A.Swieca, B.Schroer e R.Seiler Phys.Rev. D12, 2927 (1970).
10. J.A.Swieca e G.C.Marques, a ser publicado em "Nuclear Physics".
11. T.D.Lee e G.C.Wick - Nucl.Phys. B9, 209 (1969) e B10 1 (1969)
Phys.Rev. D2, 1033 (1970).
12. T.D.Lee e G.C.Wick - "A possible way to remove divergence difficulties in Physics", em Proc.1966 topical Conf.Weak interactions (CERN).
13. T.D.Lee - "A relativistic complex pole model with indefinite metric", em "Quanta", Chicago 1970.
14. T.D.Lee e G.C.Wick - "Questions of Lorentz invariance in field theories with indefinite metric" - Preprint

Columbia Univ. N.Y.

"Feynman Diagrams in a finite theory of
Quantum Electrodynamics" Preprint Colum
bia Univ. N.Y.

T.D.Lee - "A finite theory of Quantum Electrodynamics" - Ettore
Majorana International School of Physics,
Erice, 1970.

15. E.C.G.Sudarshan e A.M.Gleeson - Phys.Rev.D1, 474 (1970)
E.C.G.Sudarshan ,M.Arons, M.Y.Han - Phys.Rev.137,B1085 (1965).
16. Gleeson, Moore, Rechemberg, Sudarshan - Analyticity, Covariance
and Unitarity in indefinite metric Quantum
Field Theories. Univ.of Texas - Austin
Preprint.
17. R.E.Cutkosky,P.V.Landshoff, D.I.Olive e J.C.Polkinghorne - Nucl.
Physics B12, 281 (1969).
18. J.D.Bjorken, Phys.Rev.148, 1467 (1966).
19. N.Cabibbo, Phys.Rev.Letters 10, 513 (1963)
M.Gell-Mann e M.Lévy - N.Cimento 16,705 (1960).
20. N.Nakanishi - "Covariant Formulation of the Complex Ghost Q.
Field Theory and the Lorentz Invariance
of the S Matrix - Preprint-Brook Haven
National Laboratory.
21. E.P.Wigner - Phys.Rev. 98, 145 (1955).
22. H.Yamamoto - Prog. Theor.Phys. 43, 520 (1970).
44, 272 (1970).
H.Yamamoto , K.Kudo, "Quantum Field Theory of Complex Mass",
Fukui Preprint, Jan. 1971.

23. K.L.Nagy - State vector spaces with indefinite metric in quantum field theory - Akadémiai Kiadó Budapest (Hungria) 1966.
24. G.Feinberg - Phys.Rev. 159, 1089 (1967).
E.G.Sudarshan, M.E.Arons, Phys.Rev. 173, 1622 (1968).
B.Schroer, Univ.of Pittsburgh - Preprint NYO - 3829-49 - "The Quantization of $m^2 < 0$ Field Equation".
25. J.A.Swieca, B.Schroer - Phys.Rev. D2, 2938 (1970).
26. B.Schroer e R.Haag, J.Math.Phys.3, 248, 1962.
27. H.Lehmann, K.Symanzik e W.Zimmermann - Nuovo Cimento 2, 425 (1955) 6, 1122 (1957).
30. E.C.G.Sudarshan, Indefinite Metric and local Field Theories
Proc. 14th Solvay Conference 1967,
London 1969 pg.97.