

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

# Estados coerentes para Hamiltonianos quadráticos de forma geral

Alberto Silva Pereira

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman

Versão corrigida

*Tese de doutorado apresentada ao Instituto  
de Física para obtenção do título de Doutor  
em Ciências*

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman (IFUSP)

Prof. Dr. Adilson José da Silva (IFUSP)

Prof. Dr. Renato Higa (IFUSP)

Prof. Dr. Rodrigo Fresneda (UFABC)

Prof. Dr. Evaldo Mendonça Fleury Curado (CBPF)

São Paulo  
2016

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Pereira, Alberto Silva

Estados coerentes para Hamiltonianos quadráticos de forma geral.  
São Paulo, 2016.

Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física.  
Depto. de Física Nuclear.

Orientador: Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman.

Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Física Matemática; 2. Mecânica Quântica;  
3. Teoria de Campos e Ondas.

USP/IF/SBI-026/2016

# Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. Dmitri Maximovitch Gitman por tudo que aprendi no desenvolvimento desse projeto, como também ao professor colaborador Bagrov pelas numerosas contribuições dadas a esta tese.

Agradeço a minha família por apoiar e incentivar minha formação acadêmica, em especial minha mãe Lourdinha e minha irmã Marta.

Agradeço aos meus amigos que de uma forma ou de outra ajudaram nesse processo de formação, em especial a Érico (tico), que sem sua ajuda não estaria em São Paulo, e Adiel (mago vei... srrs) por mostrar uma paciência infinita em me ajudar.

Agradeço aos amigos que fiz no IFUSP, em especial o Tiago Adorno, João Assirati, Eder Hernandez, Luiz Oliveira, Maria Resende, Ricardo Castro, Marcelo Santos.

Agradeço a todos os funcionários da USP, em especial a Maria Isabel que é uma pena não trabalhar mais no IFUSP, ao Éber Lima, a Paula Mondini e Andrea Wirkus. Também gostaria de agradecer a assistente social Carla Cucolo, responsável por minha permanência no CRUSP, por sempre está disposta a me ajudar.

Por fim, agradeço o apoio financeiro da FAPESP.

# Resumo

Nesta tese, obtemos estados quânticos que satisfazem a equação de Schrödinger, para Hamiltonianos quadráticos de forma geral e, ao mesmo tempo, permitem de maneira natural obter a correspondência com a descrição clássica. Usamos o método de integrais de movimento para construir operadores de criação e aniquilação, que satisfazem a álgebra de Weyl-Heisenberg. Dessa forma, construímos os estados de número generalizados (ENG) de maneira análoga ao que é feito para os estados de Fock. Obtemos diferentes famílias de estados coerentes (EC), através de uma superposição dos ENG, que chamamos de estados coerentes generalizados (ECG). Esses estados são rotulados pela constante complexa  $z$  escrita em termos do valor esperado inicial da coordenada e do momento. Escrevemos os ECG em função do desvio padrão inicial na coordenada,  $\sigma_q$ , de modo a minimizar a relação de incerteza de Heisenberg no instante de tempo inicial. Obtemos, de forma pioneira, os ECG para partícula livre e discutimos em detalhes suas propriedades, tal como a relação de completeza, a minimização das relações de incerteza e a evolução da correspondente densidade de probabilidade. Mostramos que o valor esperado da coordenada e do momento segue ao longo da trajetória clássica no espaço de fase. Mostramos que, quando o comprimento de onda da partícula livre é muito menor que  $\sigma_q$ , os EC se comportam como estados semiclássicos. Além da partícula livre, construímos pela primeira vez, os ECG para o oscilador invertido e discutimos em detalhes suas propriedades. Mostramos que os ECG de sistemas diferentes podem ser relacionados, impondo condições sobre os parâmetros do Hamiltoniano. Por fim, consideramos Hamiltonianos dependentes do tempo, em particular, construímos os ECG, de forma exata, para um oscilador harmônico cuja frequência varia explicitamente no tempo. Mostramos ainda modelos úteis para obter solução exata de sistemas dependentes do tempo, fazendo analogia com a equação de spin ou equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo. Além disso, desenvolvemos um método próprio, que fixa a solução e em seguida determinamos a forma da frequência.

**Palavras-chave:** Integrais de movimento, famílias de estados coerentes, estados semiclássicos.

# Abstract

In this thesis we obtain quantum states that satisfy the Schrödinger equation for quadratic Hamiltonians in the general form and at the same time allow, naturally, to obtain the correspondence with the classical description. For this, we use the method of integrals of motion to construct creation and annihilation operators, which satisfy the algebra of Weyl-Heisenberg. Thus, we obtain the generalized number states (GNS) in the same way that is done for the Fock states. We obtain different families of coherent states (CS) that we call generalized CS (GCS), by a superposition of GNS. These states are labeled by a complex constant  $z$  which is written in terms of the initial expected values of the coordinate and momentum. We write the GCS in terms of the initial standard deviation of the coordinate,  $\sigma_q$ , which provides the minimization of Heisenberg uncertainty relation at the initial instant time. In particular, we obtain for the first time the GCS for the free particle and discuss in detail their properties, such as the completeness relation, the minimization of uncertainty relations, and the evolution of the corresponding probability density. We show that the expected values of coordinated and momentum propagate along the classical trajectory in phase space. When the Compton wavelength is much smaller than  $\sigma_q$ , the CS can be considered a semi classical state. In addition to the free particle, we obtain for the first time the GCS for the inverted oscillator and discuss in detail their properties. We show that the GCS of different systems can be related by imposing conditions on the parameters of the Hamiltonian. Finally, we consider the time-dependent Hamiltonian, especially to obtain the GCS for a harmonic oscillator whose frequency varies explicitly in time. We also show useful models to obtain exact solution for time-dependent systems, by analogy with the spin equation or one-dimensional time-independent Schrödinger equation, as well as a method which consists first to find the solution and then determine the shape of the frequency.

**Keywords:** Integrals of motion, families of coherent states, semiclassical states.

*'A física é a poesia da natureza. A matemática, o idioma.'*  
*(Antonio Gomes Lacerda)*

# Lista de Figuras

3.1	Densidade de probabilidade da partícula livre. . . . .	30
4.1	Densidade de probabilidade para os ECC. . . . .	37
4.2	Oscilador harmônico. . . . .	42
4.3	Oscilador invertido. . . . .	42
5.1	Frequência dependente do tempo do oscilador harmônico. . . . .	52
5.2	Frequência dependente do tempo do oscilador invertido realístico. . . . .	56
5.3	Frequência dependente do tempo do oscilador harmônico realístico. . . . .	58
5.4	Frequência dependente do tempo: exemplo 1. . . . .	60

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Integrais de movimento</b>	<b>13</b>
2.1	Derivada temporal de operadores . . . . .	13
2.2	Operadores de criação e aniquilação . . . . .	14
2.3	Estados de Fock dependentes do tempo . . . . .	16
2.4	Estados coerentes generalizados . . . . .	19
2.5	Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Partícula livre</b>	<b>25</b>
3.1	Equações básicas . . . . .	25
3.2	Integrais de movimento . . . . .	26
3.3	Estados coerentes generalizados . . . . .	26
3.4	Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza . . . . .	28
3.5	Estados coerentes . . . . .	29
3.6	Estados coerentes e sua relação com os estados semiclássicos . . . . .	31
3.7	Discussão dos resultados obtidos . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Sistemas quadráticos independentes do tempo</b>	<b>33</b>
4.1	Hamiltonianos e hamiltonianas . . . . .	33
4.2	Oscilador harmônico . . . . .	35
4.2.1	Estados coerentes generalizados . . . . .	37
4.2.2	Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza . . . . .	38
4.2.3	Estados coerentes . . . . .	40
4.2.4	Estados coerentes e sua relação com os estados coerentes canônicos . . . . .	40
4.3	Oscilador invertido . . . . .	41
4.3.1	Estados coerentes generalizados . . . . .	41
4.3.2	Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza . . . . .	43
4.3.3	Estados coerentes . . . . .	44
4.4	Relação entre os estados coerentes generalizados de sistemas simples . . . . .	45
4.5	Discussão dos resultados obtidos . . . . .	47
<b>5</b>	<b>Sistemas quadráticos dependentes do tempo</b>	<b>49</b>
5.1	Hamiltonianos quadráticos de forma geral . . . . .	49
5.2	Solução exata da equação do oscilador dependente do tempo e os estados coerentes relacionados . . . . .	51
5.3	Estados coerentes do oscilador harmônico com força externa . . . . .	54

5.4	Oscilador invertido e oscilador harmônico realístico . . . . .	56
5.5	Soluções para $g(\tau)$ : modelo 1 . . . . .	58
5.5.1	Exemplo 1 . . . . .	59
5.6	Soluções para $g(\tau)$ : modelo 2 . . . . .	60
5.7	Discussão dos resultados obtidos . . . . .	60
<b>A</b>	<b>Obtendo a função <math>\phi(\tau)</math> para Hamiltoniano quadrático geral</b>	<b>62</b>
<b>B</b>	<b>Demonstração da relação (2.16)</b>	<b>64</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A natureza dos fenômenos macroscópicos, pode ser descrita com boa aproximação pela física clássica. Porém, na descrição de fenômenos microscópicos, essa descrição não é satisfatória. As observações de William Herschel, por volta de 1800, sobre a decomposição da luz branca ao passar por um prisma, constitui um dos problemas iniciais que a física clássica não é capaz de explicar. Esse problema ficou conhecido por catástrofe ultravioleta. A solução foi dada somente em 1900, por Planck, que restringiu a energia irradiada a valores inteiros de  $hf$ , onde  $h$  ficou conhecida por constante de Planck e  $f$  é a frequência da radiação emitida. Tal proposta foi encarada pelo próprio Planck como sendo um ato de desespero, por divergir dos modelos clássicos largamente utilizados.

A hipótese de Planck foi útil para resolver vários problemas no início do século XX, por exemplo, Einstein, em 1905, a usou para explicar o efeito fotoelétrico, Bohr, em 1913, estabeleceu o modelo de órbitas estáveis do átomo de hidrogênio e De Broglie, em 1924, postulou o princípio de dualidade onda-partícula. Esses resultados fazem parte da Mecânica Quântica Velha. Para uma revisão histórica, veja, por exemplo, [1].

Schrödinger, em 1926, apresenta a formulação matemática das ideias quânticas apresentadas no início do século XIX. Em seu trabalho, Schrödinger deduziu a equação de onda – a qual leva seu nome – que permite obter todos os resultados da chamada Mecânica Quântica Velha. A partir de então, teve início ao que hoje conhecemos por Mecânica Quântica Ondulatória. No mesmo ano, foi dada a interpretação correta da função de onda por Born, postulando que seu módulo quadrado corresponde à densidade de probabilidade e, em 1927, Heisenberg deduz a relação de incerteza, que proíbe a medida simultânea de duas grandezas com exatidão. Esses trabalhos foram fundamentais para o desenvolvimento da Mecânica Quântica Moderna.

A Mecânica Quântica é uma teoria probabilística, isto implica dizer que as grandezas mensuráveis são apenas estimativas do que podemos obter após várias medições. Na prática, obtemos as informações do sistema ao determinar a função de onda  $\Psi(x, t)$  através da equação de Schrödinger,

$$\hat{H}\Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}.$$

Essa equação, diferencial parcial, possui tanto derivada no espaço, quanto no tempo, sendo poucos problemas para os quais podemos obter a solução exata. Em geral, essas soluções ficam restritas a problemas no qual o Hamiltoniano é independente do tempo. Para uma lista de potenciais exatamente solúveis, veja, por exemplo, [2].

Na situação em que  $\hat{H}$  é dependente do tempo, a equação de Schrödinger pode ser resolvida através do método de integrais de movimento, também conhecido por método do operador invariante. Essa técnica foi aplicada por Lewis e Riesenfeld para o oscilador harmônico com frequência variando no

tempo, [3, 4, 5]. Em seus trabalhos, eles construíram integrais de movimento, tanto para o caso clássico, quanto para o caso quântico. A ideia central desse método consiste em obter uma relação entre os autoestados do operador invariante com a solução da equação de Schrödinger.

Após propor a equação de onda, em 1926, Schrödinger obteve estados quânticos que reproduzem os resultados clássicos para o problema do oscilador harmônico. Essas funções de onda são não-ortogonais e a densidade de probabilidade não dispersa com a evolução temporal. Além disso, a dinâmica do centro do pacote de onda evolui de acordo com as equações clássicas de movimento e a relação de incerteza de Heisenberg é minimizada. Por essa razão, Schrödinger é conhecido como o idealizador do que, posteriormente, seria conhecido por estados coerentes (EC). Os estados idealizados por Schrödinger foram, por muito tempo, ignorados, principalmente pelo fato de não ter sido possível obter essa classe de estados para o átomo de hidrogênio. Somente a partir da década de sessenta, com advento do laser, essas ideias atraíram atenção.

Em 1963, Glauber publica três trabalhos [6, 7, 8], os quais constituem a base da Óptica Quântica. Nesse contexto, o termo EC foi utilizado pela primeira vez em analogia à coerência de fase do laser. Em seus trabalhos, Glauber mostra que os estados idealizados por Schrödinger descrevem adequadamente o laser, dado que as funções de correlação do campo eletromagnético correspondem aos autoestados do operador de aniquilação. Glauber mostrou que esses autoestados podem ser obtidos a partir da ação de um operador unitário sobre o vácuo do campo eletromagnético livre, como também que essas duas definições são equivalentes aos estados de incerteza mínima. Ao mesmo tempo, Sudarshan [9] mostrou a equivalência na descrição semiclássica e quântica da estatística que descreve o laser, enquanto Klauder [10, 11] formulou a teoria de representações contínuas de estados, que contém as ideias básicas dos EC para grupos arbitrários de Lie. Na década de setenta, podemos destacar Barut e Girardello [12], ao generalizar os EC para grupos de simetria não-compactos, enquanto que Peremolov [13] e Gilmore [14, 15] apresentaram uma descrição completa dos EC para grupos arbitrários de Lie.

Os EC desempenham papel importante em Mecânica Quântica moderna e, devido à sua fundamentação teórica, tem aplicação em diversas áreas da Física Quântica, como na descrição semiclássica, em Teoria de Quantização, em Física da Matéria Condensada, em Computação Quântica etc. Em Mecânica Quântica e em Teoria Quântica de Campos, os EC são úteis na construção de integrais de trajetória e na representação de operadores por funções definidas no espaço de fase, como a representação holomorfa associada ao ordenamento normal, a função de Wigner associada ao ordenamento simétrico ou de Weyl, o ordenamento anti-normal, veja [16, 17]. Os livros [18, 19, 20] abordam os EC com aplicação, revisão histórica e conceitual. Para mais aplicações, veja, por exemplo, [21, 22, 23, 24]. Mesmo com essa vasta literatura, ainda não temos uma definição universal para construir os EC de um sistema arbitrário.

Quando construímos os EC, em geral, procuramos manter as propriedades básicas conhecidas para o caso do oscilador harmônico. Por exemplo, minimização da relação de incerteza de Heisenberg, correspondência do valor esperado da coordenada e do momento com a trajetória clássica no espaço de fase. Também é desejável que esses estados mantenham a forma com a evolução temporal. Em sistemas com espectro de energia contínuo, encontramos problemas nas definições usuais dos EC. Nesses casos, não temos como definir um operador de aniquilação e as autofunções do Hamiltoniano não são de quadrado integrável. Existem vários trabalhos na literatura com diferentes tratamentos para construir os EC destinados a sistemas com espectro de energia contínuo [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32].

Na ref. [31], os EC para o oscilador invertido são definidos pela ação de um operador de deslocamento, agindo em um estado estacionário do correspondente Hamiltoniano. Dessa forma, esses estados são não-normalizáveis e isso dificulta a prova da propriedade de completeza. Na ref. [27],

foram implementadas as ideias apresentadas em [31], no sentido de tomar uma combinação de estados estacionários do Hamiltoniano, de modo a ser de quadrado integrável. Mas, a escolha dessas combinações leva a regras de regularização, nas quais, a princípio, existe uma infinidade de possibilidades, o que torna complicado um estudo geral. Na ref. [29], os EC para a partícula livre são obtidos ao tomar o limite da frequência do oscilador harmônico indo a zero. Esses estados são expressos em termos de somas de polinômios de Hermite, apresentando uma forma complicada para seu estudo, interpretação e aplicação.

Apesar de a partícula livre ser o modelo mais simples que temos em Mecânica Quântica, a construção e discussão em detalhes dos EC não era conhecida até o momento, veja [33]. Podemos atribuir isso ao fato desse sistema apresentar espectro de energia contínuo, o que dificulta implementar uma generalização do método de Glauber, aplicado em problemas do tipo oscilador harmônico. Além de sua importância física, a partícula livre é importante no ensino de Mecânica Quântica, por facilitar a introdução de conceitos, tais como pacote de onda representando movimento semiclássico e minimização das relações de incerteza. Seguiremos, essencialmente, o método de Malkin-Man'ko-Dodonov [34, 35, 36] para construir os EC, discutindo em detalhes suas propriedades, em particular a relação de completeza, a minimização das relações de incerteza e a evolução de densidade de probabilidade. Descreveremos condições pelas quais os EC podem ser tratados como estados semiclássicos.

Na mesma linha conceitual de sistemas com espectro de energia contínua está o oscilador harmônico com frequência imaginária, convencionalmente chamado de oscilador invertido. Para este problema, construiremos os EC e discutiremos em detalhes suas propriedades, de maneira análoga ao que fizemos para a partícula livre (veja [37]).

Ambos os sistemas, partícula livre e oscilador invertido, por simplicidade, consideramos como independentes do tempo. Revisaremos as propriedades de hamiltonianas quadráticas de forma geral, independente do tempo, com o objetivo de mostrar a relação existente entre as equações de movimento para sistemas diferentes, que encontramos impondo condições sobre os parâmetros da hamiltoniana. Em seguida, mostraremos que o valor esperado da coordenada e do momento, nos EC, segue ao longo da trajetória clássica no espaço de fase.

O estudo de Hamiltonianos dependentes do tempo tem atraído bastante atenção na literatura, apresentando aplicação em diversas áreas da física, como Óptica Quântica, em estudos de gravitação, em teoria de campos. Veja, por exemplo, [38, 39, 40, 41, 42, 43, 44]. Consideramos um Hamiltoniano quadrático dependente do tempo e, seguindo o método de Malkin-Man'ko-Dodonov, obtemos os EC. Em particular, abordaremos o problema do oscilador harmônico com frequência dependendo explicitamente do tempo, obtendo sua solução exata, veja [45]. Mostraremos alguns modelos para obter solução exata e aplicaremos em alguns exemplos importantes.

Em geral, os EC que encontramos não minimizam a relação de incerteza de Heisenberg, apresentando dependência temporal. Entretanto, a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger [46, 47], que é uma generalização da relação de incerteza de Heisenberg, é minimizada. Além dessa medida ser mais precisa do que a relação de incerteza de Heisenberg, ela nos permite mostrar que os EC são equivalentes aos estados comprimidos, veja as refs. [48, 49, 50].

Os estados comprimidos, também conhecidos por estados de dois-fótons, foram introduzidos nas refs. [51, 52], com o objetivo de reduzir o ruído quântico. Após a publicação do trabalho de Wall [53], foi dada uma maior atenção para esses estados. Vários trabalhos foram publicados com modelos para gerar esses estados em laboratório (veja, por exemplo, [54, 55, 56]) e os primeiros resultados experimentais, com geração e medidas, foram apresentados nos trabalhos [57, 58, 59].

Esta tese, organizamos da seguinte forma: capítulo 2, revisamos as propriedades e definições de integrais de movimento de maneira geral. Em seguida, obtemos condições pelas quais as integrais de movimento podem ser consideradas como operadores de aniquilação e criação, satisfazendo a álgebra

de Weyl-Heisenberg. No capítulo 3, aplicamos o formalismo de integrais de movimento para obter os EC da partícula livre e discutimos, em detalhes, suas propriedades. No capítulo 4, construímos os EC de Hamiltonianos quadráticos de forma geral, independente do tempo. Em seguida, discutimos relações existentes entre os EC de sistemas diferentes. No capítulo 5, construímos os EC para a forma geral de um Hamiltoniano quadrático, dependente do tempo. Em seguida, mostramos modelos úteis para obter a solução exata.

# Capítulo 2

## Integrais de movimento

Integrais de movimento são quantidades que nos auxiliam na obtenção das soluções de sistemas clássicos e sistemas quânticos, sejam eles dependentes ou independentes do tempo. Em Mecânica Clássica, o conceito de integrais de movimento corresponde a funções cuja derivada temporal é nula, já em Mecânica Quântica este conceito é para operadores que tem sua derivada temporal nula.

Neste capítulo, revisaremos as propriedades básicas de integrais de movimento no contexto da Mecânica Quântica e veremos como elas podem ser úteis para construir os EC.

### 2.1 Derivada temporal de operadores

O conceito de derivada de uma quantidade física com respeito ao tempo não pode ser definida em Mecânica Quântica da mesma forma que fazemos em Mecânica Clássica. Em Mecânica Clássica, temos que a definição de derivada considera o valor da grandeza em dois instantes próximos de tempo. Contudo, em Mecânica Quântica, uma grandeza física que tem, para um instante de tempo, um valor bem definido, em geral não terá valor bem definido para os tempos consecutivos.

Dessa maneira, o conceito de derivada temporal em Mecânica Quântica deve ser definido diferentemente da Mecânica Clássica. Uma escolha natural é definir a derivada do valor esperado como sendo igual a derivada da grandeza física, ou seja,

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} \equiv \left\langle \frac{d\hat{A}}{dt} \right\rangle, \quad (2.1)$$

onde o chapéu sobre a grandeza  $A$ , representa que a mesma é um operador e  $\langle \hat{A} \rangle$  representa o valor esperado de  $\hat{A}$ , definido na forma

$$\langle \Psi | \hat{A}(t) | \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{A}(t) \Psi(x, t) dx \equiv \langle \hat{A} \rangle. \quad (2.2)$$

Podemos escrever a derivada temporal de um operador em termos do Hamiltoniano do sistema, para isso vamos abrir a derivada do lado esquerdo da equação (2.1),

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{\partial \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle}{\partial t} + \left\langle \Psi \left| \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \right| \Psi \right\rangle + \langle \Psi | \hat{A} \frac{\partial | \Psi \rangle}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Usando a equação de Schrödinger e sua adjunta

$$\hat{H}|\Psi\rangle = i\hbar\frac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t}, \quad \langle\Psi|\hat{H} = -i\hbar\frac{\partial\langle\Psi|}{\partial t}, \quad (2.4)$$

teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\langle\hat{A}\rangle}{dt} &= \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|\hat{A}\hat{H}|\Psi\rangle - \frac{1}{i\hbar}\langle\Psi|\hat{H}\hat{A}|\Psi\rangle + \left\langle\Psi\left|\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right|\Psi\right\rangle \\ &= \left\langle\Psi\left|\frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{H}] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right|\Psi\right\rangle = \left\langle\frac{d\hat{A}}{dt}\right\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Daqui, encontramos a derivada total de um operador, na forma

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}(t),\hat{A}(t)] + \frac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t} = [\hat{S}(t),\hat{A}(t)], \quad (2.6)$$

onde o colchete  $[\hat{A}(t),\hat{H}(t)] \equiv \hat{A}(t)\hat{H}(t) - \hat{H}(t)\hat{A}(t)$  é conhecido por comutador e  $\hat{S}(t)$  é chamado de operador equação, definido a seguir

$$\hat{S}(t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \frac{i}{\hbar}\hat{H}(t). \quad (2.7)$$

Quando a derivada (2.6) é nula, os operadores  $\hat{A}(t)$  e  $\hat{S}(t)$  exibem propriedades importantes, mostradas a seguir:

I - O autovalor de  $\hat{A}(t)$  é constante no tempo. Dessa maneira, o operador  $\hat{A}(t)$  é uma integral de movimento. Isso implica que o valor esperado de  $\hat{A}(t)$  num estado dependente do tempo tem o mesmo valor no tempo inicial, ou seja,

$$\langle t|\hat{A}(t)|t\rangle = \langle 0|\hat{A}(0)|0\rangle. \quad (2.8)$$

II - Os operadores  $\hat{A}(t)$  e  $\hat{S}(t)$  apresentam uma base em comum. Para ver isso, considere  $\hat{A}\Psi_a = a\Psi_a$ . Então, atuando o operador  $\hat{S}(t)$  em  $\Psi_a$ , teremos  $\hat{S}\hat{A}\Psi_a = a(\hat{S}\Psi_a) = \hat{A}(\hat{S}\Psi_a)$ . Logo, podemos concluir que  $(\hat{S}\Psi_a)$  é um autoestado de  $\hat{A}$  com autovalor  $a$ . Assim, podemos escrever

$$\hat{A}(t)\Psi_z(x,t) = z\Psi_z(x,t), \quad (2.9)$$

$$\hat{S}(t)\Psi_z(x,t) = \lambda(t)\Psi_z(x,t), \quad (2.10)$$

onde  $\lambda(t)$  é uma função arbitrária do seu argumento e  $z$  é uma constante complexa. Note que  $\lambda(t)$  sendo nula, a equação (2.10), coincide com a equação de Schrödinger.

## 2.2 Operadores de criação e aniquilação

Operadores de criação e aniquilação podem ser definidos em vários contextos, por exemplo, satisfazendo a álgebra de Wigner-Heisenberg, a álgebra q-deformada, a álgebra Weyl-Heisenberg etc. Essas álgebras são úteis em problemas específicos. Por exemplo, resolver problemas no semi-eixo utilizando a álgebra de Wigner-Heisenberg.

Nessa parte, vamos considerar o operador  $\hat{A}$  e seu adjunto  $\hat{A}^\dagger$ , como sendo operadores de aniquilação e criação, respectivamente, satisfazendo a álgebra de Weyl-Heisenberg. Essa álgebra é caracterizada por apresentar três geradores  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  e 1, onde  $\hat{a}$  é o operador de aniquilação,  $\hat{a}^\dagger$  é o operador de criação e o operador unitário representamos por 1, com a seguinte relação de comutação  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .

Podemos escrever  $\hat{A}$  de duas formas: I - como uma combinação linear da coordenada  $\hat{q}$  e do momento  $\hat{p}_q$ , ( $[\hat{q}, \hat{p}_q] = i$ ); II - como uma combinação linear de  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ . Ambas as formas, pelas quais podemos escrever  $\hat{A}$ , nos leva aos mesmos resultados físicos. Mas, no caso em que  $\hat{A}$  é escrito em termos de  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$ , a manipulação algébrica mostra-se mais simples. Assim, vamos considerar  $\hat{A}$  na forma I, dada a seguir

$$\hat{A}(\tau) = \frac{f(\tau)\hat{q} + ig(\tau)\hat{p}_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau), \quad [\hat{q}, \hat{p}_q] = i, \quad (2.11)$$

onde  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  são, em geral, funções complexas, enquanto que  $\hat{q}$ ,  $\hat{p}_q$  e  $\tau$  são quantidades adimensionais, cujas relações com as quantidades dimensionais  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}_x$  e  $t$  são dadas por

$$\hat{q} = l^{-1}\hat{x}, \quad \hat{p}_q = -i\frac{\partial}{\partial q} = \frac{l}{\hbar}\hat{p}_x, \quad \tau = \frac{2\hbar}{l^2} \int_0^t r_1(s) ds, \quad (2.12)$$

com  $l$  tendo dimensão de comprimento e  $r_1(t)$ , uma função arbitrária no tempo.

A introdução de variáveis adimensionais evita sobrecarregar a notação, facilitando o desenvolvimento da discussão. Além disso, as variáveis adimensionais, na forma como definimos, nos permite obter limites específicos entre sistemas diferentes, por exemplo, o oscilador Harmônico no limite de frequência nula, que nos leva ao caso da partícula livre.

A forma da função  $r_1(t)$  é dada em correspondência ao coeficiente de  $\hat{p}_x^2$ , contido no Hamiltoniano do sistema, ou seja,

$$r_1(t) = \frac{1}{2m(t)}, \quad (2.13)$$

onde  $m(t)$  é massa da partícula variando no tempo. Na situação em que  $m(t) = m$ , teremos

$$r_1(t) = \frac{1}{2m} \Rightarrow \tau = \frac{\hbar}{l^2 m} t. \quad (2.14)$$

O comutador entre  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$ , tem a forma

$$[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau)] = \text{Re}(f(\tau)g^*(\tau)). \quad (2.15)$$

Na situação em que a derivada total de  $\hat{A}$  é nula (com  $\hat{H}$  autoadjunto temos que a derivada temporal do operador adjunto  $\hat{A}^\dagger$  também será nula), a quantidade  $\text{Re}(fg^*)$  é constante para todo  $\tau$ , (veja Apêndice B). Assim, podemos escrever

$$f(0) = c_1, \quad g(0) = c_2, \quad \varphi(0) = c_3 \Rightarrow \text{Re}[f(\tau)g^*(\tau)] = \text{Re}(c_1c_2^*). \quad (2.16)$$

A situação particular  $\text{Re}(c_1c_2^*) = 1$  implica que as integrais de movimento  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$  são operadores de aniquilação e criação, respectivamente, satisfazendo a álgebra de Weyl-Heisenberg. Ou seja,

$$[\hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau)] = 1, \quad \text{Re}[f(\tau)g^*(\tau)] = \text{Re}(c_1c_2^*) = 1. \quad (2.17)$$

Note que, dado o comutador (2.17), a equação (2.9) corresponde à definição dos EC, como sendo autoestados do operador de aniquilação que, neste caso, chamamos de EC generalizados (ECG). Definimos como ECG, a família de EC parametrizadas pelas constantes complexas  $c_1$  e  $c_2$ , restritas pela condição  $\text{Re}(c_1c_2^*) = 1$ .

## 2.3 Estados de Fock dependentes do tempo

Mostraremos, aqui, como construir os estados de Fock dependentes do tempo, que chamaremos de estados de número generalizados (ENG). Em seguida, construiremos os ECG expandidos nesta base.

Os estados de Fock ou estados de número, são estados quânticos com um número bem definido de partículas. Para a equação de Schrödinger estacionária, relacionada ao problema do oscilador harmônico, os estados de número  $|n\rangle$  são autoestados do Hamiltoniano, ou seja,

$$\hat{H}_x |n\rangle = E_n |n\rangle,$$

onde

$$\begin{aligned}\hat{H}_x &= \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 = \hbar\omega \left( \hat{n} + \frac{1}{2} \right), \\ E_n &= \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots\end{aligned}$$

Sendo  $\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a}$  conhecido por operador número.

A ação de  $\hat{a}$ ,  $\hat{a}^\dagger$  e  $\hat{n}$  na base  $|n\rangle$  (veja, por exemplo, [60]), é dada por

$$\hat{n} |n\rangle = n |n\rangle, \quad \hat{a}^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad \hat{a} |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle.$$

Daqui, temos como escrever o  $n$ -ésimo estado  $|n\rangle$  em termos do estado inicial  $|0\rangle$ , na forma

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle.$$

Em relação aos operadores  $\hat{A}(\tau)$  e  $\hat{A}^\dagger(\tau)$ , podemos construir uma base de Fock de maneira análoga ao que é feito para os operadores  $\hat{a}$  e  $\hat{a}^\dagger$ . Nesse caso, os estados de número apresentam dependência temporal  $|n, \tau\rangle$  e, na situação em que  $\lambda(\tau)$ , dada em (2.10), é nula, teremos que os estados  $|n, \tau\rangle$  satisfazem a equação de Schrödinger, ou seja,

$$\hat{H}_q(\tau) |n, \tau\rangle = i \frac{\partial |n, \tau\rangle}{\partial \tau}, \quad (2.18)$$

onde  $\hat{H}_q(\tau)$  é um Hamiltoniano quadrático adimensional, com a seguinte relação

$$\hat{H}_x(t) = \frac{2\hbar^2 r_1(t)}{l^2} \hat{H}_q(\tau). \quad (2.19)$$

Considere o operador número  $\hat{N}$ , definido na forma

$$\hat{N}(\tau) \equiv \hat{A}^\dagger(\tau) \hat{A}(\tau). \quad (2.20)$$

Esse operador satisfaz as relações de comutação

$$\left[ \hat{N}(\tau), \hat{A}(\tau) \right] = -\hat{A}(\tau), \quad (2.21)$$

$$\left[ \hat{N}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau) \right] = \hat{A}^\dagger(\tau), \quad (2.22)$$

onde usamos o comutador (2.17) e a relação  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}$ . Dado que  $\hat{N}$  seja autoadjunto, seu autovalor associado  $\varepsilon$  é real,

$$\hat{N}(\tau)|\varepsilon, \tau\rangle = \varepsilon|\varepsilon, \tau\rangle, \quad \langle\varepsilon, \tau|\varepsilon, \tau\rangle \neq 0. \quad (2.23)$$

Usando as relações (2.21) e (2.23), teremos

$$(\hat{N}\hat{A} - \hat{A}\hat{N})|\varepsilon, \tau\rangle = -\hat{A}|\varepsilon, \tau\rangle \Rightarrow \hat{N}(\hat{A}|\varepsilon, \tau\rangle) = (\varepsilon - 1)(\hat{A}|\varepsilon, \tau\rangle). \quad (2.24)$$

Isso implica que  $(\hat{A}|\varepsilon, \tau\rangle)$  seja um autoestado de  $\hat{N}$  com autovalor  $(\varepsilon - 1)$ . Dessa forma, o operador  $\hat{A}$  diminui (ou aniquila) um quantum de energia. Por essa razão, denominamos  $\hat{A}$  como operador de aniquilação. Tomando a norma do estado  $(\hat{A}|\varepsilon, \tau\rangle)$ ,

$$\langle\varepsilon, \tau|\hat{A}^\dagger(\hat{A}|\varepsilon, \tau\rangle) = \langle\varepsilon, \tau|\hat{N}|\varepsilon, \tau\rangle = \varepsilon = \|\hat{A}|\varepsilon, \tau\rangle\|. \quad (2.25)$$

Devemos impor  $\varepsilon \geq 0$ , para que a equação (2.25), seja válida. Dessa forma, encontramos um limite inferior para ação de  $\hat{A}(\tau)$  nos estados  $|\varepsilon, \tau\rangle$ , na forma

$$\hat{A}(\tau)|0, \tau\rangle = 0. \quad (2.26)$$

A equação (2.26), chamamos de condição de aniquilação do vácuo.

Considerando agora, as relações (2.22) e (2.23), teremos

$$\hat{N}(\hat{A}^\dagger|\varepsilon, \tau\rangle) = (\varepsilon + 1)(\hat{A}^\dagger|\varepsilon, \tau\rangle). \quad (2.27)$$

Daqui, podemos concluir que  $\hat{A}^\dagger$  tem a função de criar um quantum de energia e dessa forma denominamos de operador de criação. Sabendo que o menor valor de  $\varepsilon$  é zero, e considerando a relação (2.27), concluímos que o espectro de  $\hat{N}$  consiste de inteiros não negativos  $\varepsilon = n$ . Por essa razão, denominamos  $\hat{N}$  de operador número, ou seja,

$$\hat{N}|n, \tau\rangle = n|n, \tau\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

Os estados  $|n, \tau\rangle$ , são ortonormais e formam um conjunto completo de soluções,

$$\langle m, \tau|n, \tau\rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n, \tau\rangle\langle n, \tau| = 1, \quad \forall \tau, \quad (2.29)$$

onde  $\delta_{mn}$  é o delta de Kronecker.

As equações (2.24) e (2.27), nos mostram que os operadores  $\hat{A}^\dagger$  e  $\hat{A}$  aumentam e diminuem um quantum de energia, respectivamente. Dessa forma, podemos escrever

$$\hat{A}^\dagger|n, \tau\rangle = \alpha_n|n+1, \tau\rangle, \quad \hat{A}|n, \tau\rangle = \beta_n|n-1, \tau\rangle, \quad (2.30)$$

onde  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são, em geral, constantes complexas.

Em Mecânica Quântica, dois vetores  $|\Psi\rangle$  e  $c|\Psi\rangle$ , onde  $c$  é uma constante complexa não-nula, tem exatamente o mesmo significado físico. Por essa razão, é usual dizer que o estado físico corresponde, não a um particular vetor no espaço de Hilbert, mas a uma raia. Pode-se sempre escolher  $c$ , de tal modo, a termos  $|\Psi\rangle$  normalizado  $\|\Psi\| = \langle\Psi|\Psi\rangle = 1$ , onde  $\|\Psi\|$  corresponde à norma do estado  $|\Psi\rangle$ . O estado normalizado, pode sempre ser multiplicado por um fator de fase  $e^{i\zeta}$ , onde a constante  $\zeta$  é real, sem mudar a normalização ou interpretação física. Assim, sem perda de generalidade, podemos assumir que as constantes  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  são reais. Para determiná-las, devemos tomar a norma das equações (2.30),

$$\begin{aligned}\langle n, \tau | \hat{A}\hat{A}^\dagger | n, \tau \rangle &= \langle n, \tau | \hat{A}^\dagger \hat{A} + 1 | n, \tau \rangle = \alpha_n^2 \Rightarrow \alpha_n = \sqrt{n+1}, \\ \langle n, \tau | \hat{A}^\dagger \hat{A} | n, \tau \rangle &= \beta_n^2 \Rightarrow \beta_n = \sqrt{n}.\end{aligned}$$

Dessa forma, teremos

$$\hat{A}^\dagger |n, \tau\rangle = \sqrt{n+1} |n+1, \tau\rangle, \quad \hat{A} |n, \tau\rangle = \sqrt{n} |n-1, \tau\rangle. \quad (2.31)$$

Por meio de uma relação de recorrência, podemos escrever o estado  $|n, \tau\rangle$  em termos do estado inicial  $|0, \tau\rangle$ , vejamos:

$$\begin{aligned}n = 0 &\Rightarrow |1, \tau\rangle = \frac{\hat{A}^\dagger}{\sqrt{1}} |0, \tau\rangle, \\ n = 1 &\Rightarrow |2, \tau\rangle = \frac{\hat{A}^\dagger}{\sqrt{2}} |1, \tau\rangle = \frac{(\hat{A}^\dagger)^2}{\sqrt{1 \cdot 2}} |0, \tau\rangle \\ &\vdots \\ |n, \tau\rangle &= \frac{(\hat{A}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0, \tau\rangle.\end{aligned} \quad (2.32)$$

Logo, o nosso problema de resolver a equação de Schrödinger (2.18) e obter os estados  $|n, \tau\rangle$  se reduz em obter o estado  $|0, \tau\rangle$ , que encontramos pela condição de aniquilação (2.26).

Na representação de coordenada, a equação (2.26), toma a forma

$$\left( \frac{\partial}{\partial q} + \frac{f}{g}q + \frac{\sqrt{2}\varphi}{g} \right) \Phi_0(q, \tau) = 0. \quad (2.33)$$

A solução geral da equação (2.33), contém uma função arbitrária em  $\tau$ , visto que estamos resolvendo uma equação diferencial parcial na variável  $q$ , na forma

$$\Phi_0(q, \tau) = \exp \left[ -\frac{f(\tau)q^2}{g(\tau)2} - \frac{\varphi(\tau)}{g(\tau)}\sqrt{2}q + \phi(\tau) \right], \quad (2.34)$$

onde  $\phi(\tau)$  é determinada de modo que o estado  $\Phi_0(q, \tau)$  satisfaça a equação de Schrödinger (2.18), para um Hamiltoniano quadrático específico. No que segue, obtemos o estado  $\Phi_n(q, \tau) \equiv \langle q|n, \tau\rangle$  através da relação (2.32).

Por meio de uma relação de recorrência, podemos estabelecer a forma de atuação da  $n$ -ésima vez de  $\hat{A}^\dagger$  no estado  $\Phi_0(q, \tau)$ . Para isso, note que a ação de  $\hat{A}^\dagger$  em  $\Phi_0(q, \tau)$  resulta no primeiro estado excitado  $\Phi_1(q, \tau)$ , ou seja,

$$\Phi_1 = \hat{A}^\dagger \Phi_0 = \frac{g^*}{\sqrt{2}|g|} 2 \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{|g|} \Phi_0.$$

Atuando  $(\hat{A}^\dagger)^2$  em  $\Phi_0(q, \tau)$ , que corresponde à situação  $\hat{A}^\dagger \Phi_1(q, \tau) = \Phi_2(q, \tau)$ , teremos

$$\hat{A}^\dagger \Phi_1 = \frac{g^{*2}}{\sqrt{2^2}|g|^2} \left\{ 4 \left[ \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{|g|} \right]^2 - 2 \right\} \Phi_0.$$

Atuando  $(\hat{A}^\dagger)^3$  em  $\Phi_0(q, \tau)$ , que corresponde à situação  $\hat{A}^\dagger \Phi_2(q, \tau) = \Phi_3(q, \tau)$ , teremos

$$\hat{A}^\dagger \Phi_2(q, \tau) = \frac{g^{*3}}{\sqrt{2^3}|g|^3} \left\{ 8 \left[ \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{|g|} \right]^3 - 12 \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{|g|} \right\} \Phi_0.$$

Daqui, podemos identificar a  $n$ -ésima ação de  $\hat{A}^\dagger$  no estado inicial  $\Phi_0(q, \tau)$ , como sendo os polinômios de Hermite  $H_n(y)$ , que tem seus primeiros termos na forma

$$\begin{aligned} H_0(y) &= 1, \\ H_1(y) &= 2y, \\ H_2(y) &= 4y^2 - 2, \\ &\vdots \\ H_n(y) &= (-1)^n e^{y^2} \frac{d^n}{dy^n} (e^{-y^2}). \end{aligned}$$

Fazendo a correspondência

$$y = \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{|g|},$$

podemos escrever a  $n$ -ésima ação do operador  $\hat{A}^\dagger$  em  $\Phi_0(q, \tau)$ , na forma

$$\Phi_n(q, \tau) = \frac{(\hat{A}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \Phi_0(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{g^*}{|g|} \right)^n H_n \left( \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{|g|} \right) \Phi_0(q, \tau). \quad (2.35)$$

Um fato importante sobre a função  $\Phi_n(q, \tau)$  é de permitir obter correspondência clássica, como veremos a seguir. Isso é possível, devido ao termo  $\varphi(\tau)$  em  $\hat{A}(\tau)$ .

## 2.4 Estados coerentes generalizados

Em geral, quando construímos os EC para um dado sistema, procuramos manter as propriedades básicas, que são conhecidas no caso do oscilador harmônico simples. Em particular, os EC formam uma base completa, minimizam a relação de incerteza de Heisenberg e o valor esperado da coordenada e do momento segue ao longo da trajetória clássica, no espaço de fase. No caso do oscilador harmônico simples, temos três definições equivalentes aos EC, mostradas a seguir:

I - **São autoestados do operador de aniquilação**, ou seja,

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

II - **São estados gerados pela ação de um operador unitário**, atuando no estado inicial, na forma

$$|\alpha\rangle = \hat{D} |0\rangle, \quad \hat{D} \equiv \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}).$$

III - São estados de mínima incerteza, ou seja,

$$\sigma_x \sigma_{p_x} = \frac{\hbar}{2}.$$

Esses estados satisfazem a relação de completeza e são não-ortogonais

$$\int \int \frac{|\alpha\rangle \langle \alpha|}{\pi} d^2\alpha = 1, \quad d^2\alpha = d\text{Re}\alpha d\text{Im}\alpha,$$

$$\langle \alpha' | \alpha \rangle = \exp \left( \alpha'^* \alpha - \frac{|\alpha'|^2 + |\alpha|^2}{2} \right).$$

No capítulo anterior, mostramos que a integral de movimento  $\hat{A}(\tau)$  é um operador de aniquilação, quando as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  obedecem à relação (2.17). Dessa forma, podemos obter os ECG ao resolver a equação de autovalor de  $\hat{A}(\tau)$ ,

$$\hat{A} |z, \tau\rangle = z |z, \tau\rangle, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.36)$$

Expandindo os estados  $|z, \tau\rangle$ , na forma

$$|z, \tau\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n, \tau\rangle, \quad (2.37)$$

e multiplicando essa equação por  $\langle m, \tau|$ , teremos

$$\langle m, \tau | z, \tau \rangle = C_n \delta_{nm} \Rightarrow C_m = \langle m, \tau | z, \tau \rangle.$$

Dado o adjunto da equação (2.32),

$$\langle m, \tau | = \langle 0, \tau | \frac{\hat{A}^m}{\sqrt{m!}}, \quad (2.38)$$

teremos como escrever  $C_m$  na forma

$$C_m = \frac{1}{\sqrt{m!}} \langle 0, \tau | \hat{A}^m | z, \tau \rangle = \frac{z^m}{\sqrt{m!}} C_0. \quad (2.39)$$

A constante  $C_0$  é determinada pela condição de normalização

$$\langle z, \tau | z, \tau \rangle = 1 \Rightarrow C_0 = \exp \left( -\frac{|z|^2}{2} \right). \quad (2.40)$$

Assim, encontramos os ECG normalizados, na forma

$$|z, \tau\rangle = \exp \left( -\frac{|z|^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n, \tau\rangle. \quad (2.41)$$

Esses estados satisfazem a relação de completeza

$$\int \int \frac{|z, \tau\rangle \langle z, \tau|}{\pi} d^2z = 1, \quad d^2z = d\text{Re}z d\text{Im}z, \quad \forall \tau, \quad (2.42)$$

e são não-ortogonais

$$\langle z', \tau | z, \tau \rangle = \exp \left( z'^* z - \frac{|z'|^2 + |z|^2}{2} \right), \quad \forall \tau. \quad (2.43)$$

O fato dos ECG satisfazerem a relação de completeza indica que temos elementos suficientes para descrever toda a base. Por serem não-ortogonais, indica a existência de mais estados que o necessário para compor a base. Isso faz dos ECG uma base supercompleta, o que permite expandir os ECG na própria base.

Vamos considerar os estados  $|z, \tau\rangle$  em termos do estado inicial  $|0, \tau\rangle$ , na forma

$$|z, \tau\rangle = \exp \left( -\frac{|z|^2}{2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z\hat{A}^\dagger)^n}{n!} |0, \tau\rangle = \exp \left( -\frac{|z|^2}{2} + z\hat{A}^\dagger \right) |0, \tau\rangle.$$

Dado que  $\hat{A}$  aniquila o estado inicial  $|0, \tau\rangle$ , podemos escrever

$$\exp \left( -z^* \hat{A} \right) |0, \tau\rangle = \left( 1 - z^* \hat{A} + \frac{1}{2} z^* \hat{A}^2 + \dots \right) |0, \tau\rangle = |0, \tau\rangle.$$

Assim, o estado  $|z, \tau\rangle$  toma a forma

$$|z, \tau\rangle = \exp \left( -\frac{|z|^2}{2} \right) \exp \left( z\hat{A}^\dagger \right) \exp \left( -z^* \hat{A} \right) |0, \tau\rangle \equiv \hat{D} |0, \tau\rangle, \quad (2.44)$$

onde  $\hat{D} = \hat{D}^{-1} = \hat{D}^\dagger$  é conhecido por operador deslocamento. Assim, mostramos que os ECG também podem ser obtidos pela ação de um operador unitário, que desloca o estado inicial direto para um ECG.

Considere a relação de BCH (Baker, Campbell, Hausdorff)

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + \frac{1}{2} [\hat{A}, \hat{B}]}, \quad [\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0,$$

podemos escrever  $\hat{D}$  na forma mais conhecida

$$\hat{D} = \exp \left( z\hat{A}^\dagger - z^* \hat{A} \right). \quad (2.45)$$

Sabendo que a função geratriz dos polinômios de Hermite é dada por

$$\exp \left( 2yk - k^2 \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{n!} H_n(y),$$

teremos como obter os ECG na representação de coordenada, substituindo a relação (2.35) na soma-tória (2.41). Então

$$\begin{aligned} \Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) &= \exp \left( -\frac{|z|^2}{2} \right) \Phi_0(q, \tau) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{zg^*}{\sqrt{2}|g|} \right)^n H_n \left( \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{|g|} \right) \\ &= \Phi_0(q, \tau) \exp \left[ \sqrt{2}z \frac{q + \sqrt{2}\text{Re}(\varphi g^*)}{g} - \frac{z^2 g^*}{2g} - \frac{|z|^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (2.46)$$

onde o estado inicial  $\Phi_0(q, \tau)$  é dado em (2.34).

## 2.5 Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza

Nessa parte, vamos calcular o valor médio da coordenada e do momento, em seguida o desvio padrão e a relação de incerteza de Heisenberg e de Robertson-Schrödinger nos estados  $|n, \tau\rangle$  e  $|z, \tau\rangle$ .

Dada a relação (2.17), temos como escrever  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  em termos de  $\hat{A}^\dagger$  e  $\hat{A}$ , na forma

$$\hat{q} = \frac{g^* \hat{A} + g \hat{A}^\dagger - 2\text{Re}(g^* \varphi)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_q = \frac{f^* \hat{A} - f \hat{A}^\dagger - 2i\text{Im}(f^* \varphi)}{i\sqrt{2}}. \quad (2.47)$$

Assim, considerando as relações (2.31) e (2.36) podemos obter o valor esperado de  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  nos ENG e nos ECG.

### I - Valor esperado: estados de número generalizados

O valor esperado da coordenada e do momento, tem a forma

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_n &\equiv \langle n, \tau | \hat{q} | n, \tau \rangle = -\sqrt{2}\text{Re}(g^* \varphi) \equiv q_n(\tau), \\ \langle p_q \rangle_n &\equiv \langle n, \tau | \hat{p}_q | n, \tau \rangle = -\sqrt{2}\text{Im}(f^* \varphi) \equiv p_n(\tau). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Daqui, podemos escrever a função  $\varphi(\tau)$  na forma

$$\varphi(\tau) = -\frac{f(\tau)q_n(\tau) + ig(\tau)p_n(\tau)}{\sqrt{2}}. \quad (2.49)$$

No tempo inicial  $\tau = 0$ , a função  $\varphi(\tau)$  fica

$$\varphi(0) = c_3 = -\frac{c_1 q_n + i c_2 p_n}{\sqrt{2}}, \quad (2.50)$$

onde

$$q_n = q_n(0) = -\sqrt{2}\text{Re}(c_2^* c_3), \quad p_n = p_n(0) = -\sqrt{2}\text{Im}(c_1^* c_3). \quad (2.51)$$

O índice  $n$  faz referência ao fato de estarmos calculando o valor esperado nos ENG.

### II - Desvio padrão e relações de incerteza: estados de número generalizados

O desvio padrão da coordenada e do momento, definimos na forma

$$\begin{aligned} \sigma_q(n, \tau) &= \sqrt{\langle (\hat{q} - \langle q \rangle_n)^2 \rangle_n} = \sqrt{\langle q^2 \rangle_n - \langle q \rangle_n^2}, \\ \sigma_{p_q}(n, \tau) &= \sqrt{\langle (\hat{p}_q - \langle p_q \rangle_n)^2 \rangle_n} = \sqrt{\langle p_q^2 \rangle_n - \langle p_q \rangle_n^2}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Quanto maior forem essas quantidades, maior será o raio de incerteza com relação à média dos observáveis.

Tomando o quadrado de  $\hat{q}^2$  e  $\hat{p}_q^2$ ,

$$\begin{aligned} \hat{q}^2 &= \frac{\left[ (g^* \hat{A} + g \hat{A}^\dagger) - 4\text{Re}(g^* \varphi) \right] (g^* \hat{A} + g \hat{A}^\dagger)}{2} + 2\text{Re}^2(g^* \varphi), \\ \hat{p}_q^2 &= \frac{\left[ 4i\text{Im}(f^* \varphi) - (f^* \hat{A} - f \hat{A}^\dagger) \right] (f^* \hat{A} - f \hat{A}^\dagger)}{2} + 2\text{Im}^2(f^* \varphi), \end{aligned} \quad (2.53)$$

teremos

$$\begin{aligned}\langle q^2 \rangle_n &= 2\text{Re}^2(g^* \varphi) + |g|^2 \left\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right\rangle = 2\text{Re}^2(g^* \varphi) + |g|^2 \left( n + \frac{1}{2} \right), \\ \langle p_q^2 \rangle_n &= 2\text{Im}^2(f^* \varphi) + |f|^2 \left\langle \hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right\rangle = 2\text{Im}^2(f^* \varphi) + |f|^2 \left( n + \frac{1}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.54)$$

Assim, podemos calcular o desvio padrão na coordenada e no momento, mostrados a seguir

$$\sigma_q(n, \tau) = |g(\tau)| \sqrt{n + \frac{1}{2}}, \quad \sigma_{p_q}(n, \tau) = |f(\tau)| \sqrt{n + \frac{1}{2}}. \quad (2.55)$$

O produto de  $\sigma_q(n, \tau)$  com  $\sigma_{p_q}(n, \tau)$  representa a relação de incerteza de Heisenberg, com a seguinte forma

$$\sigma_q(n, \tau) \sigma_{p_q}(n, \tau) = |g(\tau)| |f(\tau)| \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.56)$$

Note que a relação de incerteza de Heisenberg, em geral, depende do tempo e do número  $n$  quando calculada nos ENG. Dessa forma, esta medida pode ser arbitrariamente grande.

Neste caso, é importante calcular a relação de incerteza generalizada, por ser uma medida mais precisa. Para isso, precisamos conhecer a covariância entre a coordenada e o momento, representada por  $\sigma_{qp_q}(\tau)$ , definida na forma

$$\begin{aligned}\sigma_{qp_q}(n, \tau) &= \frac{1}{2} \langle (\hat{q} - \langle q \rangle_n) (\hat{p}_q - \langle p_q \rangle_n) + (\hat{p}_q - \langle p_q \rangle_n) (\hat{q} - \langle q \rangle_n) \rangle_n \\ &= \frac{1}{2i} \left\langle \left( f^* \hat{A} - f \hat{A}^\dagger \right) \left( g^* \hat{A} + g \hat{A}^\dagger \right) \right\rangle_n + \frac{i}{2} \\ &= \text{Im}(f^*(\tau) g(\tau)) \left( n + \frac{1}{2} \right).\end{aligned}\quad (2.57)$$

Assim, podemos calcular a relação de incerteza generalizada, mostrada a seguir

$$\sigma_q^2(n, \tau) \sigma_{p_q}^2(n, \tau) - \sigma_{qp_q}^2(n, \tau) = \left( n + \frac{1}{2} \right)^2. \quad (2.58)$$

De maneira geral, a relação generalizada não é minimizada, portanto, não podemos fazer um paralelo com os estados comprimidos.

### III - Valor esperado: estados coerentes generalizados

Considerando a equação (2.36) e sua adjunta

$$\langle z, \tau | \hat{A}^\dagger = \langle z, \tau | z^*. \quad (2.59)$$

Com os operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  na forma (2.47), temos como calcular o valor esperado, mostrados a seguir

$$\begin{aligned}\langle q \rangle_z &\equiv \langle z, \tau | \hat{q} | z, \tau \rangle = \sqrt{2} \text{Re}(g^*(z - \varphi)) \equiv q(\tau), \\ \langle p_q \rangle_z &\equiv \langle z, \tau | \hat{p}_q | z, \tau \rangle = \sqrt{2} \text{Im}(f^*(z - \varphi)) \equiv p_q(\tau).\end{aligned}\quad (2.60)$$

Daqui, podemos escrever  $z$  na forma

$$z = \frac{f(\tau) q(\tau) + i g(\tau) p_q(\tau)}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau) = \frac{c_1 q_0 + i c_2 p_0}{\sqrt{2}} + c_3, \quad (2.61)$$

onde

$$q_0 = q(0) = \sqrt{2}\text{Re}(c_2^*(z - c_3)), \quad p_0 = p_q(0) = \sqrt{2}\text{Im}(c_1^*(z - c_3)). \quad (2.62)$$

Considerando a constante  $c_3$  na forma (2.50), o parâmetro  $z$  fica

$$z = \frac{c_1(q_0 - q_n) + ic_2(p_0 - p_n)}{\sqrt{2}} = c_1\text{Re}(c_2^*z) + ic_2\text{Im}(c_1^*z). \quad (2.63)$$

A forma de  $z$  mostrada em (2.63), corresponde a termos  $c_3 = 0$  em (2.62).

Dessa maneira, na construção dos ECG, podemos tomar a constante  $c_3$  como sendo nula, sem perda de generalidade. Contudo, nos ENG a constante  $c_3$  permite que o valor esperado da coordenada e do momento evolua de acordo com a trajetória clássica. Mas nesse caso sabemos que, além da dependência temporal, o desvio padrão apresenta dependência no número  $n$ . Assim, as medidas realizadas nos ENG tem um raio de incerteza maior do que as medidas feitas nos ECG. Por essa razão, os ECG mostram-se mais adequados para descrever a natureza física do problema. Nesse sentido, assumiremos de forma geral a condição

$$c_3 \equiv 0. \quad (2.64)$$

A seguir, calculamos o desvio padrão e as relações de incerteza nos ECG.

#### IV - Desvio padrão e relações de incerteza: estados coerentes generalizados

Considerando o quadrado da coordenada e do momento na forma (2.53), teremos

$$\langle q^2 \rangle_z = 2\text{Re}^2(g^*(z - \varphi))^2 + \frac{|g|^2}{2}, \quad \langle p_q^2 \rangle_z = 2\text{Im}^2(f^*(z - \varphi)) + \frac{|f|^2}{2}. \quad (2.65)$$

O desvio padrão toma a forma

$$\sigma_q(\tau) = \sqrt{\langle q^2 \rangle_z - \langle q \rangle_z^2} = \frac{|g|}{\sqrt{2}}, \quad \sigma_{p_q}(\tau) = \sqrt{\langle p_q^2 \rangle_z - \langle p_q \rangle_z^2} = \frac{|f|}{\sqrt{2}}. \quad (2.66)$$

Assim, podemos obter a relação de incerteza de Heisenberg,

$$\sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau) = \frac{|g(\tau)| |f(\tau)|}{2}. \quad (2.67)$$

A relação de incerteza de Heisenberg, de modo geral, não é minimizada nos ECG. Mas, em relação aos ENG, é mais precisa, visto que depende apenas do tempo.

Como já mencionamos anteriormente, a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger é mais precisa do que a relação de incerteza de Heisenberg. Neste caso, precisamos calcular a covariância entre o operador coordenada e o momento, dada por  $\sigma_{qp_q}(\tau)$ , definida na forma

$$\begin{aligned} \sigma_{qp_q}(\tau) &= \frac{1}{2} \langle (\hat{q} - \langle q \rangle_z) (\hat{p}_q - \langle p_q \rangle_z) + (\hat{p}_q - \langle p_q \rangle_z) (\hat{q} - \langle q \rangle_z) \rangle_z \\ &= \frac{1}{2i} \langle (f^* \hat{A} - fz^*) (g^* z + g \hat{A}^\dagger) \rangle_z - 2\text{Re}(g^* z) \text{Im}(f^* z) + \frac{i}{2} \\ &= \frac{\text{Im}(f^*(\tau) g(\tau))}{2}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

No que segue, encontramos a seguinte forma para a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger

$$\sigma_q^2(\tau) \sigma_{p_q}^2(\tau) - \sigma_{qp_q}^2(\tau) = \frac{1}{4}, \quad \forall \tau. \quad (2.69)$$

Quando a relação generalizada é minimizada, temos que os ECG são uma classe de estados comprimidos, como já mencionado na introdução desta tese. Para revisão e aplicação desses estados, em adição às referências da introdução veja, [62].

# Capítulo 3

## Partícula livre

Neste capítulo, construiremos os ECG para uma partícula livre de massa  $m$  não-relativística. Em seguida, discutiremos, em detalhes, suas propriedades, como a relação de completude, a minimização das relações de incerteza e a evolução da densidade de probabilidade. Mostraremos que sobre certas condições físicas, os ECG admitem comportamento semiclássico.

### 3.1 Equações básicas

O movimento quântico de uma partícula livre, em uma dimensão sobre o eixo real  $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ , é descrito pela equação de Schrödinger,

$$\hat{H}_x \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}, \quad \hat{H}_x = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (3.1)$$

Em termos das variáveis adimensionais, definidas em (2.12), a equação (3.1), toma a forma

$$\hat{S}\Phi(q, \tau) = 0, \quad \hat{S} = i\frac{\partial}{\partial \tau} - \hat{H}_q, \quad \hat{H}_q = \frac{\hbar^2}{ml^2} \hat{H}_x, \quad \Phi(q, \tau) = \sqrt{l} \Psi(x, t), \quad (3.2)$$

onde  $|\Phi(q, \tau)| dq = |\Psi(x, t)| dx$ , de modo que os estados permaneçam normalizados na mudança de variáveis.

Na descrição clássica, a dinâmica do sistema pode ser obtida por meio das equações de Hamilton,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H_x}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \quad (3.3)$$

onde o ponto sobre as funções representa a derivada total no tempo e  $H_x$  é a hamiltoniana da partícula livre, na forma

$$H_x = \frac{p_x^2}{2m}. \quad (3.4)$$

A solução geral de (3.3), tem a forma

$$x(t) = x_0 + \frac{p_0}{m}t, \quad p_x(t) = p_0, \quad (3.5)$$

onde  $x_0$  e  $p_0$  são os dados iniciais.

## 3.2 Integrais de movimento

Para que o operador  $\hat{A}(\tau)$ ,

$$\hat{A}(\tau) = \frac{f(\tau)\hat{q} + ig(\tau)\hat{p}_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau),$$

seja integral de movimento da equação (3.2), é necessário que as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  satisfaçam o sistema diferencial

$$i\dot{f}(\tau) = 0, \quad \dot{g}(\tau) - if(\tau) = 0, \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0. \quad (3.6)$$

A solução geral desse sistema, tem a forma

$$f(\tau) = c_1, \quad g(\tau) = c_2 + ic_1\tau, \quad \varphi(\tau) = c_3 \equiv 0, \quad (3.7)$$

onde  $c_1$ ,  $c_2$  são constantes complexas. Assim, podemos escrever a integral de movimento para o problema da partícula livre, na forma

$$\hat{A}(\tau) = \frac{c_1\hat{q} + i(c_2 + ic_1\tau)\hat{p}_q}{\sqrt{2}}. \quad (3.8)$$

As integrais de movimento  $\hat{A}(\tau)$  e  $\hat{A}^\dagger(\tau)$  são operadores de aniquilação e criação, respectivamente, quando satisfazem o comutador

$$[\hat{A}, \hat{A}^\dagger] = 1, \quad \text{Re}(c_1(c_2^* - ic_1^*\tau)) = \text{Re}(c_1c_2^*) = 1, \quad \forall\tau. \quad (3.9)$$

Daqui, podemos escrever  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  em função de  $\hat{A}(\tau)$  e  $\hat{A}^\dagger(\tau)$ , na forma

$$\hat{q} = \frac{(c_2^* - ic_1^*\tau)\hat{A}(\tau) + (c_2 + ic_1\tau)\hat{A}^\dagger(\tau)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_q = \frac{c_1^*\hat{A}(\tau) - c_1\hat{A}^\dagger(\tau)}{i\sqrt{2}}. \quad (3.10)$$

Dessa maneira, o cálculo do valor esperado da coordenada e do momento é imediato.

## 3.3 Estados coerentes generalizados

Definimos os ECG como sendo famílias de EC parametrizadas pelas constantes  $c_1$  e  $c_2$ , restritas na forma  $\text{Re}(c_1c_2^*) = 1$ . Mostramos, no capítulo 2, que os ECG podem ser construídos de duas formas equivalentes: I - na forma de autoestados do operador de aniquilação  $\hat{A}(c_1, c_2, \tau)$ ; II - estados gerados pela ação do operador deslocamento  $\hat{D}$  no estado inicial.

Considere a condição de aniquilação, na forma

$$\hat{A}(\tau)\Phi_0(q, \tau) = 0. \quad (3.11)$$

A equação (3.11), na forma diferencial, é dada por

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} + \frac{c_1}{c_2 + ic_1\tau}q\right)\Phi_0(q, \tau) = 0. \quad (3.12)$$

Com a seguinte solução geral

$$\Phi_0(q, \tau) = \exp\left[-\frac{c_1}{c_2 + ic_1\tau}\frac{q^2}{2} + \phi(\tau)\right], \quad (3.13)$$

onde  $\phi(\tau)$  é uma função arbitrária em  $\tau$ , que determinamos de modo que o estado  $\Phi_0(q, \tau)$  satisfaça a equação de Schrödinger (3.2). No que segue, para determinar a forma da função  $\phi(\tau)$ , precisamos conhecer a derivada segunda na coordenada e a derivada primeira no tempo e relacioná-las através da equação de Schrödinger. A seguir, calculamos as derivadas

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_0}{\partial q} &= -\frac{c_1 q}{c_2 + ic_1 \tau} \Phi_0, & \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial q^2} &= \left[ \frac{c_1^2 q^2}{(c_2 + ic_1 \tau)^2} - \frac{c_1}{c_2 + ic_1 \tau} \right] \Phi_0, \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial \tau} &= \left[ \frac{ic_1^2}{(c_2 + ic_1 \tau)^2} \frac{q^2}{2} + \dot{\phi} \right] \Phi_0.\end{aligned}$$

Substituindo essas derivadas na equação de Schrödinger (3.2), teremos

$$\dot{\phi} = -\frac{ic_1}{2(c_2 + ic_1 \tau)^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln(c_2 + ic_1 \tau).$$

Integrando em  $\tau$ , obtemos  $\phi(\tau)$  na forma

$$\phi(\tau) = -\frac{1}{2} \ln g(\tau) + C, \quad (3.14)$$

onde  $C$  é uma constante que determinamos pela condição de normalização. Assim, o estado inicial  $\Phi_0(q, \tau)$  que satisfaz a equação de Schrödinger, tem a forma

$$\Phi_0(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{c_2 + ic_1 \tau}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{c_1}{c_2 + ic_1 \tau} \frac{q^2}{2} + C\right).$$

Dado o módulo quadrado de  $\Phi_0(q, \tau)$ ,

$$|\Phi_0(q, \tau)|^2 = \frac{1}{|c_2 + ic_1 \tau|} \exp\left(-\frac{q^2}{|c_2 + ic_1 \tau|^2} + 2\text{Re}C\right),$$

e integrando em todo espaço, na forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_0(q, \tau)|^2 dq = 1.$$

Encontraremos a parte real de  $C$ , mostrada a seguir

$$\text{Re}C = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Sem perda de generalidade, podemos escrever  $C$  na forma

$$C = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.15)$$

Logo, o estado inicial normalizado, que satisfaz a equação de Schrödinger, é dado por

$$\Phi_0(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}(c_2 + ic_1 \tau)}} \exp\left(-\frac{c_1}{c_2 + ic_1 \tau} \frac{q^2}{2}\right). \quad (3.16)$$

Encontramos o  $n$ -ésimo estado  $\Phi_n(q, \tau)$ , mostrado em (2.26), na forma

$$\Phi_n(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{c_2^* - ic_1^* \tau}{|c_2 + ic_1 \tau|} \right)^n H_n \left( \frac{q}{|c_2 + ic_1 \tau|} \right) \Phi_0(q, \tau). \quad (3.17)$$

No que segue, encontramos os ECG ao considerar a relação (2.46),

$$\begin{aligned} \Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) &= \Phi_0(q, \tau) \exp \left[ \frac{\sqrt{2}z}{c_2 + ic_1 \tau} q - \frac{z^2}{2} \frac{c_2^* - ic_1^* \tau}{c_2 + ic_1 \tau} - \frac{|z|^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} (c_2 + ic_1 \tau)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{c_1}{c_2 + ic_1 \tau} \left( q - \sqrt{2} \frac{z}{c_1} \right)^2 + \frac{z^2}{2} \frac{c_1^*}{c_1} - \frac{|z|^2}{2} \right], \end{aligned} \quad (3.18)$$

Os ECG obtidos e a discussão que se segue, publicamos na forma de um artigo [33].

### 3.4 Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza

Nesta seção, vamos calcular o valor médio da coordenada e do momento nos ECG (3.18). Em seguida, iremos obter o desvio padrão e as relações de incerteza de Heisenberg e Robertson-Schrödinger. Com os operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  na forma (3.10), teremos

I - **Valor esperado: estados coerentes generalizados**

Com os operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  na forma (3.10), temos

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_z &\equiv \langle z, \tau | \hat{q} | z, \tau \rangle = q_0 + p_0 \tau \equiv q(\tau), \\ \langle p_q \rangle_z &\equiv \langle z, \tau | \hat{p}_q | z, \tau \rangle = p_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

onde  $q(\tau)$  e  $p_0$  seguem ao longo da trajetória clássica, no espaço de fase. Com as seguintes condições iniciais

$$q_0 \equiv \langle q \rangle_z |_{\tau=0} = \sqrt{2} \text{Re}(c_2^* z), \quad p_0 \equiv \langle p_q \rangle_z |_{\tau=0} = \sqrt{2} \text{Im}(c_1^* z). \quad (3.20)$$

Daqui, podemos escrever o parâmetro  $z$  em função dos dados iniciais  $q_0$  e  $p_0$ , na forma

$$z = \frac{c_1 q_0 + ic_2 p_0}{\sqrt{2}}. \quad (3.21)$$

Dessa maneira, podemos escrever os ECG (3.18), na forma

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} (c_2 + ic_1 \tau)}} \exp \left\{ -\frac{c_1}{c_2 + ic_1 \tau} \frac{[q - q(\tau)]^2}{2} + \frac{i}{2} p_0 [2q - q(\tau)] \right\}, \quad (3.22)$$

II - **Desvio padrão e relações de incerteza: estados coerentes generalizados**

Dado o valor esperado do quadrado dos operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$ ,

$$\langle \hat{q}^2 \rangle_z = 2 \text{Re}^2(g^* z) + \frac{|g|^2}{2}, \quad \langle \hat{p}_q^2 \rangle_z = 2 \text{Im}^2(c_1^* z) + \frac{|c_1|^2}{2}. \quad (3.23)$$

Podemos calcular o desvio padrão na coordenada e no momento,

$$\sigma_q(\tau) = \frac{|g(\tau)|}{2}, \quad \sigma_{p_q} = \frac{|c_1|}{2}. \quad (3.24)$$

A relação de incerteza de Heisenberg encontramos na forma do produto de  $\sigma_q(\tau)$  e  $\sigma_{p_q}$ ,

$$\sigma_q(\tau) \sigma_{p_q} = \frac{|c_1| |g(\tau)|}{2}. \quad (3.25)$$

Calculando a covariância entre a coordenada e o momento,

$$\sigma_{qp_q}(\tau) = \frac{\text{Im}(c_1^* g)}{2}, \quad (3.26)$$

encontraremos a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger,

$$\sigma_q^2(\tau) \sigma_{p_q}^2 - \sigma_{qp_q}^2(\tau) = \frac{1}{4}. \quad (3.27)$$

Assim, os ECG da partícula correspondem a uma classe especial de estados comprimidos.

### 3.5 Estados coerentes

Nesta parte, definimos EC, como sendo estados que minimizam a relação de incerteza de Heisenberg no tempo inicial, ou seja,

$$\sigma_q(0) \sigma_{p_q} = \frac{|c_1| |c_2|}{2} = \frac{1}{2}. \quad (3.28)$$

Para isso, considere as constantes  $c_1 = |c_1| \exp(i\mu_1)$  e  $c_2 = |c_2| \exp(i\mu_2)$  relacionadas na forma

$$c_2 = \frac{1}{c_1^*} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \equiv \mu. \quad (3.29)$$

Relacionando o módulo da constante  $c_1$  com o desvio padrão (3.24), no tempo  $\tau = 0$ , na forma

$$\sigma_q(0) \equiv \sigma_q = \frac{1}{\sqrt{2}|c_1|} \Rightarrow c_1 = \frac{e^{i\mu}}{\sqrt{2}\sigma_q}. \quad (3.30)$$

podemos escrever o parâmetro  $z$ , como mostrado em (3.21), na forma

$$z = e^{i\mu} \left( \frac{q_0}{2\sigma_q} + i\sigma_q p_0 \right), \quad (3.31)$$

e as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$ , ficam

$$f(\tau, \sigma_q) = \frac{e^{i\mu}}{\sqrt{2}\sigma_q}, \quad g(\tau, \sigma_q) = e^{i\mu} \left( \sqrt{2}\sigma_q + \frac{i\tau}{\sqrt{2}\sigma_q} \right). \quad (3.32)$$

Assim, encontramos os EC da partícula livre, que minimizam a relação de incerteza de Heisenberg no tempo inicial, na forma

$$\Phi_z^{\sigma_q}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} \left( \sigma_q + \frac{i\tau}{2\sigma_q} \right)}} \exp \left\{ -\frac{[q - q(\tau)]^2}{2(2\sigma_q^2 + i\tau)} + \frac{i}{2} p_0 [2q - q(\tau)] - \frac{i\mu}{2} \right\}. \quad (3.33)$$

Note que  $\mu$  entra apenas como um fator de fase nos EC, dessa maneira podemos tomar como sendo nula.

A densidade de probabilidade dos estados  $\Phi_{z_n}^{\sigma_q}(q, \tau)$  é dada por

$$\rho_z^{\sigma_q}(q, \tau) = |\Phi_z^{\sigma_q}(q, \tau)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \sigma_q^2 + \frac{\tau^2}{4\sigma_q^2} \right)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[q - q(\tau)]^2}{\sigma_q^2 + \frac{\tau^2}{4\sigma_q^2}} \right\}. \quad (3.34)$$

Escolhendo os parâmetros  $\sigma_q = 2^{-1/2}$ ,  $p_0 = 1$  e  $q_0 = 0$ , para os instantes  $\tau = 0$  e  $\tau = 1$ , temos

$$\begin{aligned} \rho_z^{\sigma_q}(q, 0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-q^2), \quad \sigma_q(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,707, \\ \rho_z^{\sigma_q}(q, 1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(q-1)^2}{2} \right], \quad \sigma_q(1) = 1. \end{aligned}$$

Na Figura 3.1 temos o gráfico correspondente.

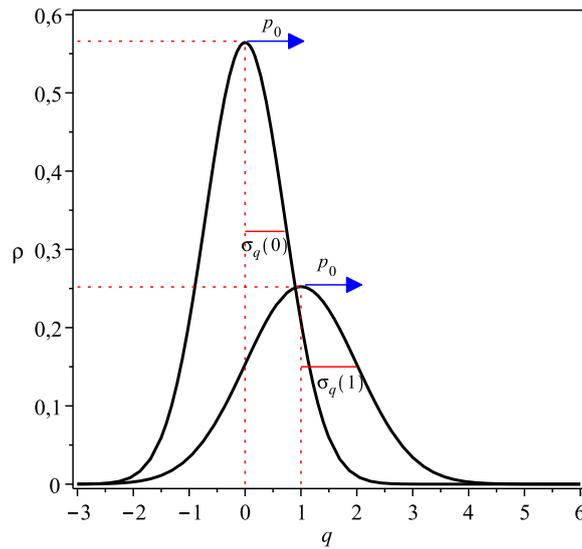


Figura 3.1: Densidade de probabilidade da partícula livre.

Notamos que a densidade dispersa com a evolução temporal. Isso era esperado, pelo fato de não termos uma força restauradora atuando.

Sabemos que a onda plana

$$\Phi_{p_0}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left[ i \left( p_0 q - \frac{p_0^2}{2} \tau \right) \right],$$

também satisfaz a equação de Schrödinger. Mas, apenas os EC pertencem ao grupo de funções de quadrado integrável  $L^2(\mathbb{R})$  e a densidade de probabilidade propaga-se exatamente com a velocidade da partícula  $p_0/m$ . Enquanto que, no caso da onda plana a velocidade de propagação da partícula é  $p_0/2m$ . Com isso podemos concluir que os EC representam pacotes de onda estabelecendo uma conexão natural entre a descrição clássica e a descrição quântica.

É importante ressaltar que o pacote de onda para partícula é um assunto que podemos encontrar em livros de Mecânica Quântica, como também em artigos, veja, por exemplo, [63]. Nesses casos, contudo, não é discutida a construção do pacote de onda como EC, sendo feito apenas em 2014, no nosso artigo [33].

### 3.6 Estados coerentes e sua relação com os estados semiclássicos

Nessa seção, discutiremos condições pelas quais os EC podem ser tratados como estados semiclássicos. Para isso devemos retornar às variáveis originais do problema  $x$  e  $t$ , como também a função de onda  $\Psi_z(x, t)$ , ou seja,

$$x(t) = lq(\tau) = x_0 + \frac{p_x}{m}t, \quad p_x = \frac{\hbar}{l}p_q,$$

$$\sigma_x = l\sigma_q, \quad \sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2\sigma_x^2}t^2.$$

Dessa forma, os EC ficam

$$\Psi_z^{\sigma_x}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2\pi} \left( \sigma_x + \frac{i\hbar t}{2m\sigma_x} \right)}} \exp \left\{ -\frac{[x - x(t)]^2}{2 \left( \sigma_x^2 + \frac{i\hbar t}{m} \right)} + \frac{ip_x}{2\hbar} \left( 2x - \frac{p_x t}{m} \right) \right\}.$$

Com a seguinte densidade de probabilidade

$$\rho_z^{\sigma_x}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left( \sigma_x^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma_x^2} \right)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{[x - x(t)]^2}{\sigma_x^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma_x^2}} \right\}.$$

O movimento semiclássico implica, em certo sentido, que a forma da distribuição de probabilidade varia pouco com o tempo  $t$ . Sabemos que a quantidade  $\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma_x^2}$  é parte responsável pela variação em  $\rho_z^{\sigma_x}(x, t)$ , que está presente em  $\sigma_x^2(t)$ . No movimento semiclássico, supomos que esta quantidade é muito menor que o quadrado da distância que a partícula percorre no mesmo instante de tempo, ou seja,

$$\frac{\hbar^2 t^2}{4m^2\sigma_x^2} \ll \left( \frac{p_x t}{m} \right)^2 \Rightarrow p_x \gg \frac{\hbar}{2\sigma_x} \sim v \gg \frac{\hbar}{2m\sigma_x}. \quad (3.35)$$

Podemos, ainda, escrever em uma forma mais conhecida

$$\lambda \ll 4\pi\sigma_x, \quad \lambda = \frac{2\pi\hbar}{p_x}, \quad (3.36)$$

onde  $\lambda$  é o comprimento de onda de Compton da partícula. Destacamos que critério similar foi usado nas refs. [64, 65], para o estudo em teoria de espalhamento e na classificação dos EC do campo magnético em um solenoide.

Dessa forma, os EC da partícula livre admitem comportamento semiclássico se o comprimento de Compton da partícula é muito menor que o desvio padrão inicial na coordenada.

Em um ciclotron, é bem conhecido que os elétrons não-relativísticos movem-se com velocidade  $v \sim 10^3 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ . De acordo com a equação (3.31), os EC com  $2\sigma_x = 10^{-7} \text{m}$  têm comportamento semiclássico.

### 3.7 Discussão dos resultados obtidos

Consideramos o método de integrais de movimento, para construir operadores de criação e aniquilação que satisfazem a álgebra de Weyl-Heisenberg. Dessa maneira, construímos uma base discreta dependente do tempo, que denominamos de ENG e que satisfaz a equação de Schrödinger para a partícula livre.

Esses estados formam um conjunto completo e são ortonormais. O desvio padrão na coordenada  $\sigma_q(n, \tau)$  e no momento  $\sigma_{p_q}(n, \tau)$  aumenta à medida que  $\tau$  e  $n$  crescem. Em seguida, consideramos uma superposição dos ENG para obter diferentes famílias de EC, que denominamos de ECG, para partícula livre não-relativística, e estudamos suas propriedades, tal como a relação de completeza, a minimização das relações de incerteza e a evolução da correspondente densidade de probabilidade.

Os ECG são parametrizados por duas constantes complexas  $c_1$  e  $c_2$ , que podem ser relacionadas ao desvio padrão inicial na coordenada  $\sigma_q$ . Dessa forma, esses estados minimizam a relação de incerteza de Heisenberg no tempo inicial e, por esta razão, chamamos simplesmente de EC.

Vimos que a densidade de probabilidade dos EC, corresponde a uma distribuição gaussiana com desvio padrão  $\sigma_q(\tau)$  e que o valor esperado da coordenada e do momento segue ao longo da trajetória clássica no espaço de fase. Os EC são rotulados pelo parâmetro  $z$ , que tem relação direta com os dados iniciais do valor médio da coordenada  $q_0$ , do momento  $p_0$  e do desvio padrão inicial  $\sigma_q$  e minimizam a relação de Robertson-Schrödinger para qualquer tempo. Esses estados são pacotes de onda que satisfazem a equação de Schrödinger, para partícula livre, e pertencem ao espaço de Hilbert das funções de quadrado integrável  $L^2(\mathbb{R})$ , enquanto que ondas planas não são. Obtemos uma condição física, pela qual os EC da partícula livre podem ser considerados estados semiclássicos, que corresponde a termos o comprimento de onda de Compton muito menor que  $\sigma_q$ .

Além de sua importância física, acreditamos que os EC da partícula livre auxiliam no ensino do curso de Mecânica Quântica, como um exemplo de pacote de onda, no qual sobre certas condições, admite-se uma descrição semiclássica dessa partícula. Também são importantes para ilustrar um grande número de princípios da Mecânica Quântica, tais como minimização das relações de incerteza. É importante destacar que soluções da equação de Schrödinger para partícula livre, na forma de pacote de onda, são bem conhecidas na literatura, mas a construção desses pacotes de onda na forma de EC foi feita, pela primeira vez, em nosso trabalho [33].

# Capítulo 4

## Sistemas quadráticos independentes do tempo

No capítulo 2 discutimos, de modo geral, o método de integrais de movimento e, no capítulo 3, como exemplo introdutório, aplicamos essa técnica para construir os ECG de uma partícula livre.

Neste capítulo, vamos discutir as equações de movimento para hamiltonianas (sistemas clássicos) independentes do tempo. Mostraremos que, sobre determinadas condições nos parâmetros da hamiltoniana, podemos obter a correspondência com sistemas diferentes (por exemplo, oscilador harmônico indo em uma partícula livre). Em seguida, vamos considerar Hamiltonianos (sistemas quânticos) quadráticos independentes do tempo e construir os ECG. Mostraremos que, sobre determinadas condições nos parâmetros, os ECG de sistemas diferentes podem ser relacionados, algo que não podemos fazer quando consideramos os EC de Glauber do oscilador harmônico.

### 4.1 Hamiltonianos e hamiltonianas

Em Mecânica Clássica, a forma geral de uma hamiltoniana quadrática, que contém tanto sistema com movimento confinado quanto não-confinado, é dada por

$$H_x = k_1 p_x^2 + k_2 x^2 + k_3 x p_x + k_4 p_x + k_5 x + k_6, \quad (4.1)$$

onde  $x$  é a coordenada definida em todo eixo real,  $p_x$  é o momento conjugado de  $x$  e os coeficientes  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ , são constantes reais com dimensões apropriadas, de modo que a hamiltoniana tenha dimensão de energia.

As equações de Hamilton, têm a forma

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{\partial H_x}{\partial p_x} = 2k_1 p_x + k_3 x + k_4, \\ \dot{p}_x(t) &= -\frac{\partial H_x}{\partial x} = -2k_2 x - k_3 p_x - k_5, \end{aligned} \quad (4.2)$$

No que segue, podemos escrever uma equação autônoma para  $x(t)$ , na forma

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= 2k_1 \dot{p}_x + k_3 \dot{x} = -\Omega_0^2 x(t) + F_0, \\ \Omega_0^2 &= k_3^2 - 4k_1 k_2, \quad F_0 = k_3 k_4 - 2k_1 k_5. \end{aligned} \quad (4.3)$$

A solução geral é dada por

$$x(t) = A \cos(\Omega_0 t) + B \sin(\Omega_0 t) + \frac{F_0}{\Omega_0^2}. \quad (4.4)$$

Assumindo as condições iniciais,

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 2k_1 p_0 + k_3 x_0 + k_4, \quad (4.5)$$

teremos as constantes  $A$  e  $B$ , na forma

$$\begin{aligned} x(0) &= A + \frac{F_0}{\Omega_0^2} = x_0 \Rightarrow A = x_0 - \frac{F_0}{\Omega_0^2}, \\ \dot{x}(0) &= B\Omega_0 = 2k_1 p_0 + k_3 x_0 + k_4 \Rightarrow B = \frac{2k_1 p_0 + k_3 x_0 + k_4}{\Omega_0}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Assim, a equação (4.4) fica completamente determinada para o caso em que os coeficientes são independentes do tempo. Dadas as condições iniciais (4.5), temos como escrever  $x(t)$  na forma

$$x(t) = \left( x_0 - \frac{F_0}{\Omega_0^2} \right) \cos(\Omega_0 t) + \frac{2k_1 p_0 + k_3 x_0 + k_4}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) + \frac{F_0}{\Omega_0^2}. \quad (4.7)$$

Para obter  $p_x(t)$ , podemos derivar  $x(t)$ ,

$$\dot{x}(t) = \Omega_0 \left( x_0 - \frac{F_0}{\Omega_0^2} \right) \sin(\Omega_0 t) - (2k_1 p_0 + k_3 x_0 + k_4) \cos(\Omega_0 t),$$

então, usando a primeira das equações em (4.2), encontramos  $p_x(t)$  na forma

$$\begin{aligned} p_x(t) &= \frac{\Omega_0^2 x_0 - F_0 - k_3(2k_1 p_0 + k_3 x_0 + k_4) \sin(\Omega_0 t)}{2k_1 \Omega_0} \\ &\quad - \left( \frac{2k_1 p_0 + k_3 x_0 + k_4}{2k_1} + \frac{k_3 F_0}{2k_1 \Omega_0^2} \right) \cos(\Omega_0 t) - \frac{k_3 F_0}{2k_1 \Omega_0^2} - \frac{k_4}{2k_1}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

A forma geral das equações de movimento  $x(t)$  e  $p_x(t)$ , dadas em (4.7) e (4.8), nos permite obter limites de sistemas simples, por exemplo, o oscilador invertido, o oscilador harmônico, a partícula livre, mostrados a seguir.

- **Partícula livre** - encontramos ao considerar  $k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0$ ,  $\Omega_0^2 = 0 = F_0$  e  $k_1 = 1/2m$ , sendo necessário apenas ter cuidado com as indeterminações que surgem nesse limite. Assim, teremos a seguinte forma para a equação de movimento

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{p_0}{m} t, \\ p_x(t) &= p_0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

- **Oscilador harmônico** - encontramos ao tomar  $k_2 = m\omega^2/2$  e  $k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = 0$ ,  $\Omega_0 = \omega$ ,  $F_0 = 0$  e  $k_1 = 1/2m$ , sem problemas encontramos

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sin(\omega t), \\ p_x(t) &= p_0 \cos(\omega t) - m\omega x_0 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (4.10)$$

- **Oscilador invertido** - encontramos de maneira análoga à do oscilador harmônico, considerando agora que  $\omega \rightarrow i\omega$ . Logo

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cosh(\omega t) + \frac{p_0}{m\omega} \sinh(\omega t), \\ p_x(t) &= p_0 \cosh(\omega t) + m\omega x_0 \sinh(\omega t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

A forma geral de um Hamiltoniano quadrático deve levar em consideração um termo simétrico, na forma  $\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}$ , visto que, em Mecânica Quântica, os operadores coordenada e momento não comutam. Dessa maneira, garantimos uma forma mais simétrica para o Hamiltoniano. Assim, o Hamiltoniano quadrático mais geral, tem a forma

$$\hat{H}_x = r_1\hat{p}_x^2 + r_2\hat{x}^2 + r_3(\hat{x}\hat{p}_x + \hat{p}_x\hat{x}) + r_4\hat{p}_x + r_5\hat{x} + r_6, \quad (4.12)$$

onde  $r_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  são constantes reais com dimensões apropriadas, de modo que o Hamiltoniano tenha dimensão de energia.

Usando a transformação adimensional

$$\hat{q} = l^{-1}\hat{x}, \quad \hat{p}_q = -i\frac{\partial}{\partial q} = \frac{l}{\hbar}\hat{p}_x, \quad \tau = \frac{2\hbar}{l^2} \int_0^t r_1(s) ds = \frac{2\hbar r_1}{l^2}t, \quad (4.13)$$

e definindo as constantes

$$s_1 = \frac{l^4}{2\hbar^2} \frac{r_2}{r_1}, \quad s_2 = \frac{l^2}{2\hbar} \frac{r_3}{r_1}, \quad s_3 = \frac{l}{2\hbar} \frac{r_4}{r_1}, \quad s_4 = \frac{l^3}{2\hbar^2} \frac{r_5}{r_1}, \quad s_5 = \frac{l^2}{2\hbar} \frac{r_6}{r_1}. \quad (4.14)$$

Podemos escrever (??), na forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_q\Phi(q, \tau) &= i\frac{\partial\Phi(q, \tau)}{\partial\tau}, \quad \hat{H}_x = \frac{2\hbar^2 r_1}{l^2}\hat{H}_q, \quad \Psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{l}}\Phi(q, \tau), \\ \hat{H}_q &= \frac{\hat{p}_q^2}{2} + s_1\hat{q}^2 + s_2(\hat{q}\hat{p}_q + \hat{p}_q\hat{q}) + s_3\hat{p}_q + s_4\hat{q} + s_5. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Aqui, é importante destacar que a transformação adimensional (4.13) e (4.14), tanto será útil para não sobrecarregar a notação, como também permitirá definir os operadores na forma adimensional sem levar em consideração uma frequência associada, como é feito para o oscilador harmônico simples. Desse modo, podemos tratar o sistema da partícula livre, e outros quaisquer que sejam, sem problemas quando tomamos o limite de frequência nula.

## 4.2 Oscilador harmônico

Como já mencionamos, os EC do oscilador harmônico simples, que também são conhecidos por estados coerentes de Schrödinger-Glauber ou EC canônicos (ECC), podem ser obtidos de três formas equivalentes. Vamos, neste primeiro momento, revisar o método de construção dos ECC. Neste caso, temos que a evolução temporal está contida no autovalor  $\alpha(\tau)$  do operador de aniquilação  $\hat{a}$ , na forma

$$\alpha(t) = \frac{m\omega x(t) + ip_x(t)}{\sqrt{2m\hbar\omega}}, \quad (4.16)$$

onde  $x(t)$  e  $p_x(t)$  correspondem ao valor esperado da coordenada e do momento, respectivamente. A evolução de  $x(t)$  e  $p_x(t)$  segue ao longo da trajetória clássica, ou seja,

$$\dot{x}(t) = \frac{p_x(t)}{m}, \quad \dot{p}_x(t) = -m\omega^2 x(t). \quad (4.17)$$

A equação de autovalor do operador  $\hat{a}$ , na representação de coordenada, tem a forma

$$\left( \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\partial_x \right) \Psi_\alpha(x, t) = \alpha(t) \Psi_\alpha(x, t). \quad (4.18)$$

Resolvendo esta equação em  $x$ , a solução geral depende de uma função arbitrária em  $t$ , na forma

$$\Psi_\alpha(x, t) = u(t) \exp \left[ -\frac{m\omega}{\hbar} \frac{x^2}{2} + \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} \alpha(t) x \right]. \quad (4.19)$$

Determinamos  $u(t)$  exigindo que o estado  $\Psi_\alpha(x, t)$  satisfaça a equação de Schrödinger. Dessa maneira, a função  $u(t)$  fica

$$u(t) = c \exp \left[ -\frac{\alpha^2(t)}{2} - \frac{i\omega t}{2} \right], \quad (4.20)$$

de modo que  $\Psi_\alpha(x, t)$  seja autoestado do operador de aniquilação e satisfaça a equação de Schrödinger. A constante  $c$  é determinada pela condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi_\alpha(x, t)|^2 dx = 1 \Rightarrow c = \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \exp \left( -\frac{|\alpha|^2}{2} \right), \quad (4.21)$$

onde consideremos  $c$ , como sendo real. No que segue, encontramos os ECC que satisfazem a equação de Schrödinger e estão normalizados, na forma

$$\begin{aligned} \Psi_\alpha(x, t) &= \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{2\hbar} \left[ x - \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \alpha(t) \right]^2 + \frac{\alpha^2(t)}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{i\omega t}{2} \right\} \\ &= \left( \frac{m\omega}{\hbar\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{m\omega}{\hbar} \frac{[x - x(t)]^2}{2} + \frac{i}{2\hbar} p_x(t) [2x - x(t)] - \frac{i\omega t}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

A densidade de probabilidade  $\rho$  é dada por (com  $m = \omega = \hbar = 1$ )

$$\rho(x, t) = |\Psi_\alpha(x, t)|^2 = \frac{\exp \{ -[x - x(t)]^2 \}}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.23)$$

A Figura 4.1 corresponde à densidade de probabilidade  $\rho(x, t)$ .

O valor esperado nos ECC  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p_x \rangle$  e  $\langle p_x^2 \rangle$ , tem a forma

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &\equiv \langle \alpha(t) | \hat{x} | \alpha(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} [\alpha(t) + \alpha^*(t)] = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} x(t), \\ \langle x^2 \rangle &= \frac{\hbar}{2m\omega} [\alpha^2(t) + \alpha^{*2}(t) + 2|\alpha|^2 + 1], \\ \langle p_x \rangle &= \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} \frac{\alpha(t) - \alpha^*(t)}{i} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}} p_x(t), \\ \langle p_x^2 \rangle &= \frac{m\hbar\omega}{2} [2|\alpha|^2 + 1 - \alpha^2(t) - \alpha^{*2}(t)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

O desvio padrão na coordenada  $\sigma_x$  e no momento  $\sigma_{p_x}$  são dados por

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}, \quad \sigma_{p_x} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}, \quad (4.25)$$

e assim a relação de incerteza de Heisenberg é minimizada

$$\sigma_x \sigma_{p_x} = \frac{\hbar}{2}. \quad (4.26)$$

Mostrando que os ECC são estados de mínima incerteza.

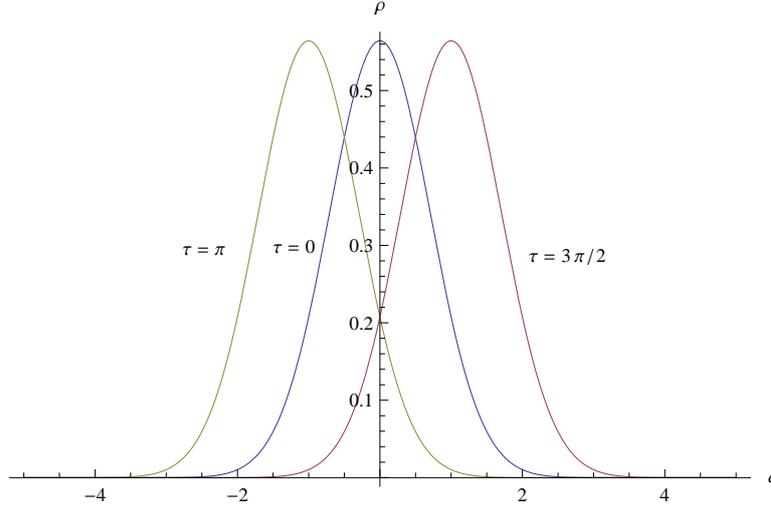


Figura 4.1: Densidade de probabilidade para os ECC.

### 4.2.1 Estados coerentes generalizados

Nesta parte, construiremos os ECC do oscilador harmônico para, depois, mostrar sua relação com os ECC e outros sistemas. Na construção dos ECC, é importante considerar a transformação adimensional (4.15), para que possamos obter as integrais de movimento na forma a seguir

$$\hat{A}(\tau) = \frac{f(\tau)\hat{q} + ig(\tau)\hat{p}_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau).$$

Assumindo as condições

$$s_1 = \frac{1}{2}\Omega^2, \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0, \quad \Omega = \frac{ml^2}{\hbar}\omega,$$

encontramos através de (4.15), o Hamiltoniano do oscilador harmônico, na forma

$$\hat{H}_q\Phi(q, \tau) = i\frac{\partial\Phi(q, \tau)}{\partial\tau}, \quad \hat{H}_q = \frac{\hat{p}_q^2}{2} + \frac{1}{2}\Omega^2\hat{q}^2. \quad (4.27)$$

Para que  $\hat{A}(\tau)$  seja integral de movimento, as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  devem satisfazer o sistema diferencial

$$i\dot{f}(\tau) + \Omega^2g(\tau) = 0, \quad \dot{g}(\tau) - if(\tau) = 0, \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0. \quad (4.28)$$

Com a seguinte solução

$$\begin{aligned} f(\tau) &= c_1 \cos(\Omega\tau) + ic_2\Omega \sin(\Omega\tau), \\ g(\tau) &= c_2 \cos(\Omega\tau) + \frac{ic_1}{\Omega} \sin(\Omega\tau), \\ \varphi(\tau) &= c_3 \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Encontramos o estado inicial  $\Phi_0(q, \tau)$  ao resolver a equação

$$\hat{A}(\tau)\Phi_0(q, \tau) = 0,$$

onde  $\Phi_0(q, \tau)$  é dado por

$$\Phi_0(q, \tau) = \exp \left[ -\frac{f(\tau) q^2}{g(\tau) 2} + \phi(\tau) \right].$$

Substituindo  $\Phi_0(q, \tau)$  na equação de Schrödinger (4.27), teremos

$$\dot{\phi} = \frac{1}{2i} \frac{f}{g} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \ln g.$$

Integrando no tempo,

$$\phi(\tau) = -\frac{1}{2} \ln g + c. \quad (4.30)$$

Para que o estado  $\Phi_0(q, \tau)$  esteja normalizado em todo espaço, a constante  $c$  deve ter a forma

$$c = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.31)$$

onde consideramos como sendo real. Logo, o estado  $\Phi_0(q, \tau)$  normalizado, que satisfaz a equação de Schrödinger, tem a forma

$$\Phi_0(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{g(\tau)} \sqrt{\pi}} \exp \left[ -\frac{f(\tau) q^2}{g(\tau) 2} \right]. \quad (4.32)$$

Daqui, podemos obter os ENG, como mostrado em (2.35), na forma

$$\Phi_n(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{g^*(\tau)}{|g(\tau)|} \right)^n H_n \left( \frac{q}{|g(\tau)|} \right) \Phi_0(q, \tau). \quad (4.33)$$

No que segue, encontramos os ECG na forma

$$\begin{aligned} \Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) &= \Phi_0(q, \tau) \exp \left[ \frac{\sqrt{2}z}{g(\tau)} q - \frac{z^2}{2} \frac{g^*(\tau)}{g(\tau)} - \frac{|z|^2}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi} g(\tau)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \left( q - \frac{\sqrt{2}z}{f(\tau)} \right)^2 + \frac{z^2}{2} \frac{f^*(\tau)}{f(\tau)} - \frac{|z|^2}{2} \right]. \end{aligned} \quad (4.34)$$

A seguir discutiremos o valor esperado.

### 4.2.2 Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza

Nesta parte iremos considerar o valor esperado da coordenada e do momento nos ECG. Considere  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$ , em termos de  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$ , na forma

$$\hat{q} = \frac{g^*(\tau) \hat{A}(\tau) + g(\tau) \hat{A}^\dagger(\tau)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_q = \frac{f^*(\tau) \hat{A}(\tau) - f(\tau) \hat{A}^\dagger(\tau)}{i\sqrt{2}},$$

onde as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  são dadas em (4.29). Assim,

#### II - Valor esperado

O valor esperado da coordenada e do momento nos estados  $|z, \tau\rangle$ , tem a forma

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_z &\equiv \langle z, \tau | \hat{q} | z, \tau \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Re} (g^*(\tau) (z - c_3)) \equiv q(\tau), \\ \langle p_q \rangle_z &\equiv \langle z, \tau | \hat{p}_q | z, \tau \rangle = \sqrt{2} \operatorname{Im} (f^*(\tau) (z - c_3)) \equiv p_q(\tau). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Aqui, as funções  $q(\tau)$  e  $p(\tau)$  seguem ao longo da trajetória clássica (4.10), com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} q(\tau) &= q_0 \cos(\Omega\tau) + \frac{p_0}{\Omega} \sin(\Omega\tau), \\ p(\tau) &= p_0 \cos(\Omega\tau) + q_0 \Omega \sin(\Omega\tau), \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde  $q_0$  e  $p_0$  são as condições iniciais

$$q_0 = q(0) = \sqrt{2}\text{Re}(c_2^*(z - c_3)), \quad p_0 = p(0) = \sqrt{2}\text{Im}(c_1^*(z - c_3)). \quad (4.37)$$

No que segue, podemos escrever  $z$  em termos de  $q_0$ ,  $p_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$ , na forma

$$z = \frac{f(\tau)q(\tau) + ig(\tau)p_q(\tau)}{\sqrt{2}} = \frac{c_1q_0 + ic_2p_0}{\sqrt{2}}. \quad (4.38)$$

Considerando  $z$  na forma (4.38), temos como escrever os ECG (4.34), da seguinte maneira,

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{f(\tau)[q - q(\tau)]^2}{g(\tau)} + \frac{i}{2}p_q(\tau)[2q - q(\tau)] \right\}. \quad (4.39)$$

Dado o valor esperado do quadrado de  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$ ,

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}^2 \rangle_z &= 2\text{Re}^2(g^*(z - c_3))^2 + \frac{|g(\tau)|^2}{2}, \\ \langle \hat{p}_q^2 \rangle_z &= 2\text{Im}^2(f^*(\tau)(z - c_3)) + \frac{|f(\tau)|^2}{2}. \end{aligned}$$

O desvio padrão na coordenada e no momento, ficam

$$\sigma_q(\tau) = \frac{|g(\tau)|}{2}, \quad \sigma_{p_q}(\tau) = \frac{|f(\tau)|}{2}. \quad (4.40)$$

Dessa maneira, obtemos a relação de incerteza de Heisenberg na forma do produto de  $\sigma_q(\tau)$  e  $\sigma_{p_q}(\tau)$ ,

$$\sigma_q(\tau)\sigma_{p_q}(\tau) = \frac{|f(\tau)||g(\tau)|}{2}. \quad (4.41)$$

Calculando a covariância entre a coordenada e o momento,

$$\sigma_{qp_q}(\tau) = \frac{\text{Im}(f^*(\tau)g(\tau))}{2}, \quad (4.42)$$

teremos a relação de incerteza de Robertson-Schrödinger, na forma

$$\sigma_q^2(\tau)\sigma_{p_q}^2(\tau) - \sigma_{qp_q}^2(\tau) = \frac{1}{4}. \quad (4.43)$$

A relação de incerteza generalizada é minimizada para qualquer tempo, dessa maneira temos que os ECG do oscilador harmônico são dados como sendo uma classe especial de estados comprimidos.

### 4.2.3 Estados coerentes

Como já discutimos, no caso da partícula livre, definimos os EC como sendo os ECG que minimizam a relação de incerteza de Heisenberg no tempo inicial. Para isso, considere as constantes  $c_1$  e  $c_2$  relacionadas na forma

$$c_2 = \frac{1}{c_1^*}.$$

Podemos relacionar o desvio padrão no tempo inicial com a constante  $c_1$ , na forma

$$\sigma_q = \frac{|c_2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}|c_1|} \Rightarrow c_1 = \frac{e^{i\mu}}{\sqrt{2}\sigma_q},$$

Assim, as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  ficam

$$\begin{aligned} f(\sigma_q, \tau) &= e^{i\mu} \left[ \frac{\cos(\Omega\tau)}{\sqrt{2}\sigma_q} + i\sqrt{2}\sigma_q\Omega \sin(\Omega\tau) \right], \\ g(\sigma_q, \tau) &= e^{i\mu} \left[ \sqrt{2}\sigma_q \cos(\Omega\tau) + \frac{i \sin(\Omega\tau)}{\sqrt{2}\sigma_q\Omega} \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Dessa maneira, podemos escrever  $z$  na forma

$$z = e^{i\mu} \left( \frac{q_0}{2\sigma_q} + i\sigma_q p_0 \right). \quad (4.45)$$

Da equação (4.39), obtemos os EC, na forma

$$\begin{aligned} \Phi_z^{\sigma_q}(q, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\left[ \sqrt{2}\sigma_q \cos(\Omega\tau) + \frac{i \sin(\Omega\tau)}{\sqrt{2}\sigma_q\Omega} \right] \sqrt{\pi}}} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{\cos(\Omega\tau) + 2i\sigma_q^2\Omega \sin(\Omega\tau)}{2\sigma_q^2 \cos(\Omega\tau) + \frac{i \sin(\Omega\tau)}{\Omega}} \frac{[q - q(\tau)]^2}{2} + \frac{i}{2} p_q(\tau) [2q - q(\tau)] - \frac{i\mu}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Note que  $\mu$ , entra nos EC na forma de um fator de fase, logo pode ser ignorado.

### 4.2.4 Estados coerentes e sua relação com os estados coerentes canônicos

Partindo dos EC (4.46) podemos obter os ECC (4.22), para isso, considere o desvio padrão inicial na forma

$$\sigma_q = \frac{1}{\sqrt{2\Omega}}. \quad (4.47)$$

Assim, as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  ficam

$$f(\tau) = \sqrt{\Omega} e^{i\Omega\tau}, \quad g(\tau) = \frac{e^{i\Omega\tau}}{\sqrt{\Omega}}. \quad (4.48)$$

Dessa maneira, os EC (4.46) tomam a forma

$$\Phi_z(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\Omega}\pi}} \exp \left\{ -\frac{\Omega [q - q(\tau)]^2}{2} + \frac{i}{2} p_q(\tau) [2q - q(\tau)] - \frac{i\Omega\tau}{2} \right\}. \quad (4.49)$$

Na variáveis originais

$$\Omega = \frac{l^2 m \omega}{\hbar}, \quad q = l^{-1} x, \quad p_q(\tau) = \frac{l}{\hbar} p_x(t), \quad \tau = \frac{\hbar}{l^2 m} t, \quad (4.50)$$

temos que os estados  $\Phi_z(q, \tau)$  coincidem com os ECC (4.22), dada a relação

$$\Phi_z(q, \tau) = \sqrt{l} \Psi_z(x, t). \quad (4.51)$$

Neste sentido, é natural que a integral de movimento  $\hat{A}(\tau)$  coincida com o operador de aniquilação canônico  $\hat{a}$ . Escrevendo  $\hat{A}(\tau)$  em termos das funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  mostradas em (4.48), teremos

$$\hat{A}(\tau) = e^{i\Omega\tau} \frac{\Omega \hat{q} + i \hat{p}_q}{\sqrt{2\Omega}} \Rightarrow \hat{A}(t) = e^{i\omega t} \frac{m\omega \hat{x} + i \hat{p}_x}{\sqrt{2m\omega}} = e^{i\omega t} \hat{a}. \quad (4.52)$$

Dessa maneira, encontramos que o operador  $\hat{A}(t)$  coincide com o operador canônico  $\hat{a}$  em  $t = 0$ , ou seja,

$$\hat{A}(0) = \hat{a}. \quad (4.53)$$

### 4.3 Oscilador invertido

Impondo as condições

$$s_1 = -\frac{\Omega^2}{2}, \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0,$$

no Hamiltoniano geral (4.15), encontramos o sistema conhecido por oscilador invertido,

$$\hat{H}_q \Phi(q, \tau) = i \frac{\partial \Phi(q, \tau)}{\partial \tau}, \quad \hat{H}_q = \frac{\hat{p}_q^2 - \Omega^2 \hat{q}^2}{2}. \quad (4.54)$$

Apesar do oscilador invertido não apresentar movimento oscilatório, é chamado dessa maneira devido à forma do seu potencial, que corresponde à inversão do potencial do oscilador harmônico.

As Figuras 4.2 e 4.3, representam o gráfico de ambos os potenciais, oscilador harmônico e oscilador invertido. O oscilador invertido apresenta espectro de energia contínuo, mas como vimos no caso da partícula livre, é possível construir um conjunto de soluções discreta, que satisfazem a equação de Schrödinger.

#### 4.3.1 Estados coerentes generalizados

Para este problema, temos que o operador

$$\hat{A}(\tau) = \frac{f(\tau) \hat{q} + i g(\tau) \hat{p}_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau),$$

é integral de movimento quando as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  satisfazem o sistema diferencial

$$i \dot{f}(\tau) - \Omega^2 g(\tau) = 0, \quad i \dot{g}(\tau) + f(\tau) = 0, \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0.$$

A solução geral tem a forma

$$\begin{aligned} f(\tau) &= c_1 \cosh(\Omega\tau) - i c_2 \Omega \sinh(\Omega\tau), \\ g(\tau) &= c_2 \cosh(\Omega\tau) + \frac{i c_1}{\Omega} \sinh(\Omega\tau), \\ \varphi(\tau) &= c_3 \equiv 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

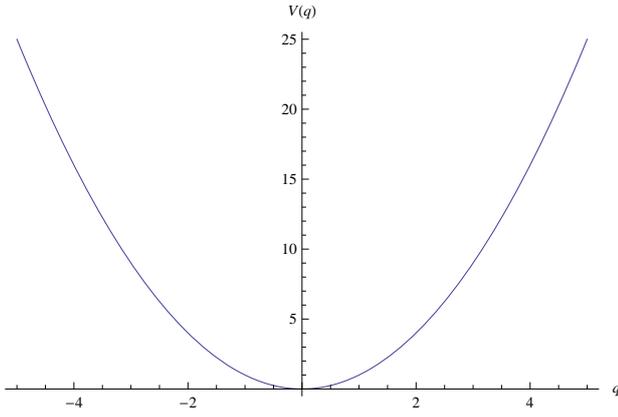


Figura 4.2: Oscilador harmônico.

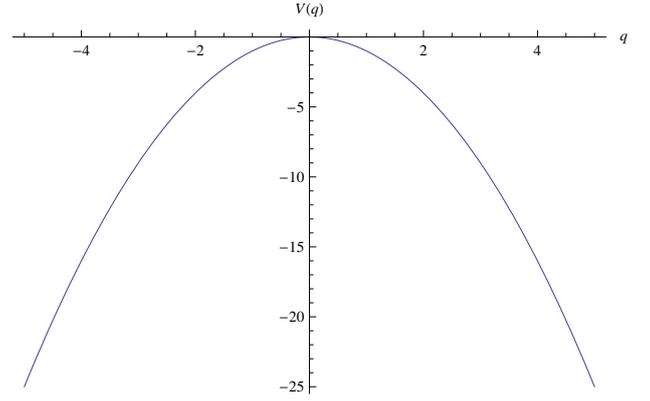


Figura 4.3: Oscilador invertido.

De maneira análoga ao que fizemos anteriormente, vamos obter o estado inicial, que encontramos ao resolver a equação

$$\hat{A}(\tau) \Phi_0(q, \tau) = 0.$$

A solução geral é dada por

$$\Phi_0(q, \tau) = \exp \left[ -\frac{f(\tau) q^2}{g(\tau)} + \phi(\tau) \right].$$

Substituindo  $\Phi_0(q, \tau)$  na equação de Schrödinger (4.54), encontramos  $\phi(\tau)$  na forma

$$\phi(\tau) = -\frac{1}{2} \ln g + C. \quad (4.56)$$

A constante  $C$  é determinada pela condição de normalização

$$\text{Re}C = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

que, sem perda de generalidade, podemos escolher  $C$  sendo real, na forma

$$C = \frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.57)$$

Assim, o estado inicial normalizado que satisfaz a equação de Schrödinger é dado por

$$\Phi_0(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g(\tau)}} \exp \left[ -\frac{f(\tau) q^2}{g(\tau)} \right]. \quad (4.58)$$

Os estados  $\Phi_n(q, \tau)$ , como mostrado em (2.35), ficam

$$\Phi_n(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{g^*(\tau)}{|g(\tau)|} \right)^n H_n \left( \frac{q}{|g(\tau)|} \right) \Phi_0(q, \tau). \quad (4.59)$$

Assim, encontramos os ECG para o oscilador invertido na forma

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g(\tau)}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{f(\tau)}{g(\tau)} \left( q - \sqrt{2} \frac{z}{f(\tau)} \right)^2 + \frac{z^2 f^*(\tau)}{2 f(\tau)} - \frac{|z|^2}{2} \right]. \quad (4.60)$$

Os resultados obtidos nesta parte foram publicados na forma de um artigo [37].

### 4.3.2 Valor esperado, desvio padrão e relações de incerteza

Nesta parte, iremos calcular o valor esperado da coordenada e do momento nos ECG. Considere  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  em termos de  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$ , na forma

$$\hat{q} = \frac{g^*(\tau) \hat{A}(\tau) + g(\tau) \hat{A}^\dagger(\tau)}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_q = \frac{f^*(\tau) \hat{A}(\tau) - f(\tau) \hat{A}^\dagger(\tau)}{i\sqrt{2}},$$

onde as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  são dadas em (4.55). Assim, teremos

#### I - Valor esperado

O valor médio de  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$ , tem a forma

$$\begin{aligned} \langle q \rangle_z &= q_0 \cosh(\Omega\tau) + \frac{p_0}{\Omega} \sinh(\Omega\tau) \equiv q(\tau), \\ \langle p_q \rangle_z &= p_0 \cosh(\Omega\tau) + \Omega q_0 \sinh(\Omega\tau) \equiv p_q(\tau), \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde  $q(\tau)$  e  $p_q(\tau)$  evoluem de acordo com as equações clássicas de movimento, mostradas em (4.11), com as condições iniciais

$$q_0 = \sqrt{2}\text{Re}(c_2^*z), \quad p_0 = \sqrt{2}\text{Im}(c_1^*z). \quad (4.62)$$

Daqui, podemos escrever  $z$  em termos dos dados iniciais  $q_0$ ,  $p_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$ , na forma

$$z = \frac{f(\tau)q(\tau) + ig(\tau)p_q(\tau)}{\sqrt{2}} = \frac{c_1q_0 + ic_2p_0}{\sqrt{2}}. \quad (4.63)$$

Dessa maneira, podemos escrever os ECG (4.60), na forma

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{f(\tau)}{g(\tau)} [q - q(\tau)]^2 + \frac{i}{2} p_q(\tau) [2q - q(\tau)] \right\}. \quad (4.64)$$

Calculando o valor esperado do quadrado dos operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$ , como segue

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}^2 \rangle_z &= 2\text{Re}^2(g^*(z - c_3))^2 + \frac{|g(\tau)|^2}{2}, \\ \langle \hat{p}_q^2 \rangle_z &= 2\text{Im}^2(f^*(\tau)(z - c_3)) + \frac{|f(\tau)|^2}{2}. \end{aligned}$$

Podemos calcular o desvio padrão na coordenada e no momento,

$$\sigma_q(\tau) = \frac{|g(\tau)|}{2}, \quad \sigma_{p_q}(\tau) = \frac{|f(\tau)|}{2}. \quad (4.65)$$

Encontramos a relação de incerteza de Heisenberg na forma do produto de  $\sigma_q(\tau)$  e  $\sigma_{p_q}(\tau)$ ,

$$\sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau) = \frac{|f(\tau)| |g(\tau)|}{2}. \quad (4.66)$$

Calculando a covariância entre a coordenada e o momento,

$$\sigma_{qp_q}(\tau) = \frac{\text{Im}(f^*(\tau)g(\tau))}{2}, \quad (4.67)$$

teremos como determinar a relação incerteza de Robertson-Schrödinger, na forma

$$\sigma_q^2(\tau) \sigma_{p_q}^2(\tau) - \sigma_{qp_q}^2(\tau) = \frac{1}{4}. \quad (4.68)$$

Por ser minimizada para qualquer tempo, temos que os ECG do oscilador invertido correspondem a uma classe especial de estados comprimidos.

### 4.3.3 Estados coerentes

Relacionando as constantes  $c_1$  e  $c_2$  na forma

$$c_2 = \frac{1}{c_1^*}.$$

Temos que a relação de incerteza de Heisenberg (4.66) é minimizada no tempo inicial

$$\sigma_q(0) \sigma_{p_q}(0) = \frac{1}{2}.$$

Nesta situação, chamamos os ECG (4.60) simplesmente de EC. Podemos relacionar o módulo da constante  $c_1$  com o desvio padrão no tempo inicial, na forma

$$\sigma_q = \frac{|c_2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}|c_1|} \Rightarrow c_1 = \frac{e^{i\mu}}{\sqrt{2}\sigma_q}.$$

Dessa maneira, podemos escrever as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$ , na forma

$$\begin{aligned} f(\tau, \sigma_q) &= e^{i\mu} \left[ \frac{\cosh(\Omega\tau)}{\sqrt{2}\sigma_q} - i\sqrt{2}\sigma_q\Omega \sinh(\Omega\tau) \right], \\ g(\tau, \sigma_q) &= e^{i\mu} \left[ \sqrt{2}\sigma_q \cosh(\Omega\tau) + \frac{i \sinh(\Omega\tau)}{\sqrt{2}\sigma_q\Omega} \right]. \end{aligned} \quad (4.69)$$

O parâmetro  $z$ , toma a forma

$$z = e^{i\mu} \left( \frac{q_0}{2\sigma_q} + i\sigma_q p_0 \right). \quad (4.70)$$

No que segue, encontramos os EC da equação (4.60), com as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  mostradas em (4.69), na forma

$$\begin{aligned} \Phi_z^{\sigma_q}(q, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{\left[ \sqrt{2}\sigma_q \cosh(\Omega\tau) + \frac{i \sinh(\Omega\tau)}{\sqrt{2}\sigma_q\Omega} \right] \sqrt{\pi}}} \times \\ &\exp \left\{ -\frac{\Omega \cosh(\Omega\tau) - 2i\sigma_q^2\Omega^2 \sinh(\Omega\tau)}{2\Omega\sigma_q^2 \cosh(\Omega\tau) + i \sinh(\Omega\tau)} \frac{[q - q(\tau)]^2}{2} + \frac{i}{2} p_q(\tau) [2q - q(\tau)] - \frac{i\mu}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Podemos ignorar  $\mu$ , sem perda de generalidade.

A densidade de probabilidade dos EC tem a forma

$$\rho_z^{\sigma_q}(q, \tau) \equiv |\Phi_z^{\sigma_q}(q, \tau)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} |g(\tau)|} \exp \left\{ -\frac{[q - q(\tau)]^2}{|g(\tau)|^2} \right\}. \quad (4.72)$$

Com a evolução temporal, a densidade de probabilidade tende a se dispersar. Isso é esperado, pelo fato de não termos forças conservativas atuando sobre o sistema.

## 4.4 Relação entre os estados coerentes generalizados de sistemas simples

Na discussão a respeito de hamiltonianas, vimos que as equações de movimento para sistemas diferentes podem ser relacionadas impondo condições nos seus parâmetros. Para Hamiltonianos, nem sempre é possível relacionar a função de onda de sistemas diferentes. Tomemos, como exemplo, o oscilador harmônico com  $\omega = 0$ . O Hamiltoniano correspondente é o da partícula livre, mas os ECC (4.22) são nulos nesta situação. Em contrapartida, temos que os ECG permitem tomar esse limite, obtendo uma função não-nula. Vamos considerar o Hamiltoniano quadrático na forma geral

$$\begin{aligned}\hat{H}_q \Phi(q, \tau) &= i \frac{\partial \Phi(q, \tau)}{\partial \tau}, \\ \hat{H}_q &= \frac{\hat{p}_q^2}{2} + s_1 \hat{q}^2 + s_2 (\hat{q} \hat{p}_q + \hat{p}_q \hat{q}) + s_3 \hat{p}_q + s_4 \hat{q} + s_5.\end{aligned}\quad (4.73)$$

Para que o operador  $\hat{A}(\tau)$ , mostrado a seguir

$$\hat{A}(\tau) = \frac{f(\tau) \hat{q} + ig(\tau) \hat{p}_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau),$$

seja integral de movimento do Hamiltoniano (4.73), é necessário que as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  satisfaçam o sistema diferencial

$$\begin{aligned}\dot{f}(\tau) + 2s_2 f(\tau) - 2is_1 g(\tau) &= 0, \\ \dot{g}(\tau) - 2s_2 g(\tau) - if(\tau) &= 0, \\ \sqrt{2} \dot{\varphi}(\tau) + s_3 f(\tau) - is_4 g(\tau) &= 0.\end{aligned}\quad (4.74)$$

Notamos que, ao determinar as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$  podemos encontrar a função  $\varphi(\tau)$  por integração simples. Dessa maneira, nosso problema consiste em determinar maneiras pelas quais podemos obter as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$ .

Podemos escrever uma equação autônoma para  $f(\tau)$ , na forma

$$\ddot{f}(\tau) + \Omega^2 f(\tau) = 0, \quad \Omega^2 = 2s_1 - 4s_2^2.\quad (4.75)$$

Em função da diferença  $2s_1 - 4s_2^2$ , temos três casos a serem discutidos:

I - Se  $s_1 > 2s_2^2$ , a equação (4.75) tem a forma correspondente a equação de movimento de um oscilador harmônico. A solução para esse problema é dada por

$$f(\tau) = C_1 \cos(\Omega\tau) + C_2 \sin(\Omega\tau),\quad (4.76)$$

II - Se  $s_1 < 2s_2^2$ , o parâmetro  $\Omega$  passa a ser um número imaginário puro. Dessa maneira, (4.75) corresponde à equação de movimento de um oscilador invertido, com a seguinte solução

$$f(\tau) = C_1 \cosh(\Omega\tau) + C_2 \sinh(\Omega\tau),\quad (4.77)$$

III - Se  $s_1 = 2s_2^2$ , a equação (4.75) descreve o movimento de uma partícula livre, cuja solução é dada na forma

$$f(\tau) = C_1 + C_2 \tau.\quad (4.78)$$

A integral de movimento  $\hat{A}(\tau)$  é um operador de aniquilação quando satisfaz o comutador

$$\left[ \hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau) \right] = 1, \quad \text{Re}(f(\tau)g^*(\tau)) = \text{Re}(c_1c_2^*) = 1.$$

Obtemos os ECG ao resolver a equação de autovalor para  $\hat{A}(\tau)$ , mostrada a seguir

$$\hat{A}(\tau) \Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = z \Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau).$$

A solução geral é dada por

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \exp \left[ -\frac{f(\tau)q^2}{g(\tau)2} + \sqrt{2} \frac{z - \varphi(\tau)}{g(\tau)} q + \phi(\tau) \right]. \quad (4.79)$$

Por conveniência, vamos escrever o parâmetro  $z$  na forma

$$z = \frac{f(\tau)q(\tau) + ig(\tau)p_q(\tau)}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau), \quad (4.80)$$

$$q(\tau) \equiv \langle z, \tau | \hat{q} | z, \tau \rangle, \quad p_q(\tau) \equiv \langle z, \tau | \hat{p}_q | z, \tau \rangle,$$

onde  $q(\tau)$  e  $p_q(\tau)$  correspondem ao valor esperado da coordenada e do momento nos ECG (4.79), satisfazendo as relações

$$\dot{q}(\tau) = p_q(\tau) + 2s_2q(\tau) + s_3, \quad \dot{p}_q(\tau) = -2s_1q(\tau) - 2s_2p_q(\tau) - s_4. \quad (4.81)$$

Dessa maneira, podemos escrever o estado (4.79), na forma

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \exp \left\{ -\frac{f(\tau)q^2}{g(\tau)2} + \left[ \frac{f(\tau)}{g(\tau)}q(\tau) + ip_q(\tau) \right] q + \phi(\tau) \right\}. \quad (4.82)$$

Encontramos  $\phi(\tau)$ , substituindo (4.82) na equação de Schrödinger (4.73) (veja o apêndice A),

$$\begin{aligned} \phi(\tau) &= \frac{q(\tau)p_q(\tau)}{2i} - \frac{f(\tau)q^2(\tau)}{g(\tau)2} + \frac{s_1s_3 + s_2s_4}{i\Omega^2}q(\tau) + \frac{2s_2s_3 - s_4}{2i\Omega^2}p_q(\tau) \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln g - \left( \frac{2s_1s_3^2 - s_4^2}{2i\Omega^2} - is_5 \right) \tau + C, \end{aligned} \quad (4.83)$$

desde que  $\Omega^2 = 2s_1 - 4s_2^2 \neq 0$ . Assim, encontramos os ECG que satisfazem a equação de Schrödinger (4.73), na forma

$$\begin{aligned} \Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{g(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{f(\tau)[q - q(\tau)]^2}{g(\tau)2} + \frac{ip_q(\tau)}{2}[2q - q(\tau)] + iK_4 + C \right\}, \\ K_1 &= \frac{s_1s_3 + s_2s_4}{\Omega^2}, \quad K_2 = \frac{2s_2s_3 - s_4}{2\Omega^2}, \quad K_3 = \frac{2s_1s_3^2 - s_4^2}{2\Omega^2} + s_5. \\ K_4 &= -p_q(\tau) \left[ K_1 \frac{q(\tau)}{p_q(\tau)} + K_2 \right] + K_3\tau \end{aligned}$$

A constante  $C$  é determinada pela condição de normalização

$$C = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (4.84)$$

Dessa maneira, os ECG normalizados que satisfazem a equação de Schrödinger, para um Hamiltoniano quadrático de forma geral, têm a forma

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g}} \exp \left\{ -\frac{f(\tau) [q - q(\tau)]^2}{g(\tau)} + \frac{ip_q(\tau)}{2} [2q - q(\tau)] + iK_4 \right\}. \quad (4.85)$$

Podemos obter os ECG de sistemas diferentes, partindo do resultado geral (4.85), mostrados a seguir

### I - Oscilador harmônico

Neste caso devemos ter

$$s_1 = \frac{1}{2}\Omega^2, \quad s_2 = s_3 = s_4 = s_5 = 0 \Rightarrow K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 0.$$

Dessa maneira as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  tomam a forma

$$\begin{aligned} f(\tau) &= c_1 \cos(\Omega\tau) + ic_2\Omega \sin(\Omega\tau), \\ g(\tau) &= c_2 \cos(\Omega\tau) + ic_1 \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega}, \\ \varphi(\tau) &= 0, \end{aligned}$$

que coincidem com (4.29).

### II - Oscilador invertido

Para o problema do oscilador invertido, basta considerar o oscilador harmônico na situação em que  $\Omega \rightarrow i\Omega$ . Assim, encontramos as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  na forma

$$\begin{aligned} f(\tau) &= c_1 \cosh(\Omega\tau) - ic_2\Omega_0 \sinh(\Omega\tau), \\ g(\tau) &= c_2 \cosh(\Omega_0\tau) + ic_1 \frac{\sinh(\Omega\tau)}{\Omega_0}, \\ \varphi(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

A forma das  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  coincidem com a dada em (4.55).

### III - Partícula livre

Tomando  $\Omega = 0$  para a situação mostrada no oscilador harmônico, as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  ficam

$$f(\tau) = c_1, \quad g(\tau) = c_2 + ic_1\tau, \quad \varphi(\tau) = 0.$$

Esse resultado está de acordo com o que obtemos em (3.7).

Isso mostra que os ECG permitem, de forma prática, a obtenção de soluções de sistemas diferentes, apenas considerando determinados limites dos parâmetros que aparecem no Hamiltoniano.

Na situação em que buscamos ir da partícula livre para o oscilador harmônico ou invertido, notamos que não existe essa possibilidade. De certa maneira, esta seria a situação física mais próxima do que esperamos obter na natureza. A seguir, veremos que esse problema pode ser contornado quando consideramos Hamiltonianos dependentes do tempo.

## 4.5 Discussão dos resultados obtidos

Seguindo a discussão feita no caso da partícula livre, construímos integrais de movimento para sistemas quadráticos independentes do tempo de forma geral. Consideramos as integrais de movimento

como geradores do grupo de Weyl-Heisenberg. Dessa maneira, construímos os ENG e, fazendo uma superposição desses estados, obtemos os ECG.

Discutimos em detalhes suas propriedades, como relação de completeza, minimização das relações de incerteza, evolução da densidade de probabilidade etc. Mostramos que o valor esperado da coordenada e do momento seguem ao longo da trajetória clássica no espaço de fase. Por fim, mostramos que os ECG admitem situações limite com outros sistemas, sendo que, para os ECC, não temos como fazer essa transição.

Em particular, obtemos, de forma pioneira, os ENG e, conseqüentemente os ECG para o oscilador invertido e discutimos em detalhes suas propriedades, veja [37].

# Capítulo 5

## Sistemas quadráticos dependentes do tempo

Neste capítulo, vamos construir os ECG para Hamiltonianos quadráticos dependentes do tempo de forma geral. Discutiremos algumas técnicas para obter solução exata na situação em que a frequência é dada. Em particular, analisaremos o oscilador harmônico com frequência dependente do tempo, obtendo a solução exata correspondente. Também veremos situações nas quais o sistema parte no tempo inicial, como sendo uma partícula livre, para em seguida ficar sobre ação de uma força.

### 5.1 Hamiltonianos quadráticos de forma geral

A forma geral de um Hamiltoniano quadrático em  $\hat{q}$  e  $\hat{p}_q$  é dada por

$$\hat{H}_q = \frac{\hat{p}_q^2}{2} + s_1(\tau) \hat{q}^2 + s_2(\tau) (\hat{q}\hat{p}_q + \hat{p}_q\hat{q}) + s_3(\tau) \hat{p}_q + s_4(\tau) \hat{q} + s_5(\tau), \quad (5.1)$$

onde as funções adimensionais  $s_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , são relacionadas com as funções originais na forma

$$\begin{aligned} s_1(\tau) &= \frac{l^4}{2\hbar^2} \frac{r_2(\tau)}{r_1(\tau)}, & s_2(\tau) &= \frac{l^2}{2\hbar} \frac{r_3(\tau)}{r_1(\tau)}, & s_3(\tau) &= \frac{l}{2\hbar} \frac{r_4(\tau)}{r_1(\tau)}, \\ s_4(\tau) &= \frac{l^3}{2\hbar^2} \frac{r_5(\tau)}{r_1(\tau)}, & s_5(\tau) &= \frac{l^2}{2\hbar} \frac{r_6(\tau)}{r_1(\tau)}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

As variáveis adimensionais têm as seguintes relações com as variáveis originais

$$\begin{aligned} \hat{q} &= l^{-1}\hat{x}, & \hat{p}_q &= -i\frac{\partial}{\partial q} = \frac{l}{\hbar}\hat{p}_x, & \tau &= \frac{2\hbar}{l^2} \int_0^t r_1(s) ds, \\ \hat{H}_q\Phi(q, \tau) &= i\frac{\partial\Phi(q, \tau)}{\partial\tau}, & \hat{H}_x &= \frac{2\hbar^2 r_1}{l^2}\hat{H}_q, & \Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{l}}\Phi(q, \tau). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Dado o operador

$$\hat{A}(\tau) = \frac{f(\tau)\hat{q} + ig(\tau)\hat{p}_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau), \quad (5.4)$$

para que seja integral de movimento, precisamos que as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  satisfaçam o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{f}(\tau) + 2s_2(\tau)f(\tau) - 2is_1(\tau)g(\tau) &= 0, \\ \dot{g}(\tau) - 2s_2(\tau)g(\tau) - if(\tau) &= 0, \\ \sqrt{2}\dot{\varphi}(\tau) + s_3(\tau)f(\tau) - is_4(\tau)g(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Notamos que, obtendo as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$ , temos como calcular  $\varphi(\tau)$  por uma integração simples. Dessa maneira, precisamos discutir formas de obter a solução para as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$ . Ou seja, resolver o sistema diferencial

$$\begin{aligned} \dot{f}(\tau) + 2s_2(\tau) f(\tau) - 2is_1(\tau) g(\tau) &= 0, \\ \dot{g}(\tau) - 2s_2(\tau) g(\tau) - if(\tau) &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

No que segue, temos alguns pontos importantes a serem destacados:

I - Podemos reduzir o sistema diferencial (5.6) para uma única equação de segunda ordem. No caso, escolhemos em  $g(\tau)$ , mostrada a seguir

$$\ddot{g}(\tau) + \Omega^2(\tau) g(\tau) = 0, \quad \Omega^2(\tau) = 2s_1(\tau) - 2\dot{s}_2(\tau) - 4s_2^2(\tau). \quad (5.7)$$

Essa equação tem a forma da equação de movimento do oscilador harmônico com frequência dependente do tempo. Sabendo a solução exata da equação (5.7), para um  $\Omega^2(\tau)$  específico, podemos calcular a função  $f(\tau)$ , na forma

$$f(\tau) = 2is_2(\tau) g(\tau) - i\dot{g}(\tau). \quad (5.8)$$

II - Podemos identificar a equação (5.7) com a equação de Schrödinger unidimensional

$$-\frac{d^2\Phi(q)}{dq^2} + V(q)\Phi(q) = E\Phi(q). \quad (5.9)$$

Para isso, devemos ter a correspondência  $q \rightarrow \tau$ ,  $\Phi(q) \rightarrow g(\tau)$ ,  $E - V(q) \rightarrow \Omega^2(\tau)$ , onde  $V(q)$  é o potencial. Para uma lista de potenciais exatamente soluções veja, por exemplo, [2].

III - Podemos fazer correspondência do sistema diferencial (5.6), com a equação de spin [66],

$$i\dot{V} = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F})V, \quad (5.10)$$

onde

$$V = \begin{pmatrix} f(\tau) \\ g(\tau) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\tau) = -\frac{1}{2}(2s_1(\tau) + 1, 2is_1(\tau) - i, 4is_2(\tau)), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z). \quad (5.11)$$

Para que a integral de movimento  $\hat{A}(\tau)$  seja dada como operador de aniquilação, precisamos que o comutador de  $\hat{A}(\tau)$  e  $\hat{A}^\dagger(\tau)$ , tenha a forma

$$\left[ \hat{A}(\tau), \hat{A}^\dagger(\tau) \right] = 1 \Rightarrow \text{Re}[f(\tau)g^*(\tau)] = \text{Re}(c_1c_2^*) = 1. \quad (5.12)$$

Dessa maneira, encontramos ECG ao resolver a equação de autovalor de  $\hat{A}(\tau)$ , mostrada a seguir

$$\left[ \frac{f(\tau)q + g(\tau)\partial_q}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau) \right] \Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = z\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau), \quad (5.13)$$

cuja solução geral é dada na forma

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \exp \left[ -\frac{f(\tau)q^2}{g(\tau)2} + \sqrt{2}\frac{z - \varphi(\tau)}{g(\tau)}q + \phi(\tau) \right]. \quad (5.14)$$

Escrevendo o parâmetro  $z$  em função do valor esperado da coordenada e do momento, na forma

$$z = \frac{f(\tau)q(\tau) + ig(\tau)p_q(\tau)}{\sqrt{2}} + \varphi(\tau),$$

$$q(\tau) \equiv \langle z, \tau | \hat{q} | z, \tau \rangle, \quad p_q(\tau) \equiv \langle z, \tau | \hat{p}_q | z, \tau \rangle, \quad (5.15)$$

onde  $q(\tau)$  e  $p_q(\tau)$  satisfazem as relações

$$\dot{q}(\tau) = p_q(\tau) + 2s_2(\tau)q(\tau) + s_3(\tau),$$

$$\dot{p}_q(\tau) = -2s_1(\tau)q(\tau) - 2s_2(\tau)p_q(\tau) - s_4(\tau). \quad (5.16)$$

Teremos

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \exp \left[ -\frac{f(\tau)q^2}{g(\tau)} + \frac{f(\tau)}{g(\tau)}q(\tau)q + ip_q(\tau)q + \phi(\tau) \right]. \quad (5.17)$$

A função  $\phi(\tau)$  é determinada substituindo o estado (5.17), na equação de Schrödinger, veja o apêndice A. Assim, teremos

$$\phi(\tau) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{f(\tau)}{g(\tau)}q^2(\tau) + iq(\tau)p_q(\tau) + \ln g(\tau) \right]$$

$$+ \frac{1}{2i} \int [s_3(\tau)p_q(\tau) + s_4(\tau)q(\tau) + 2s_5(\tau)] d\tau + C, \quad (5.18)$$

onde  $C$  é uma constante de integração que determinamos pela condição de normalização. Assumindo  $C$  uma constante real, temos

$$C = -\frac{1}{2} \ln \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \quad (5.19)$$

Logo, os ECG para um Hamiltoniano quadrático dependente do tempo de forma geral, que satisfazem a equação de Schrödinger e estão normalizados, têm a forma

$$\Phi_z^{c_1, c_2}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{f(\tau)[q - q(\tau)]^2}{g(\tau)} + \frac{i}{2}p_q(\tau)[2q - q(\tau)] + \tilde{\phi}(\tau) \right\},$$

$$\tilde{\phi}(\tau) \equiv \int \frac{s_3(\tau)p_q(\tau) + s_4(\tau)q(\tau) + 2s_5(\tau)}{2i} d\tau. \quad (5.20)$$

Da solução geral (5.20), podemos obter os resultados discutidos para a partícula livre, oscilador invertido e oscilador harmônico. Em cada caso, devemos escolher adequadamente os parâmetros  $s_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ . A seguir, vamos considerar alguns específicos.

## 5.2 Solução exata da equação do oscilador dependente do tempo e os estados coerentes relacionados

Assumindo que as funções  $s_i(\tau)$  tenham a forma

$$s_1(\tau) = \frac{1}{2}\Omega^2(\tau), \quad s_2(\tau) = s_3(\tau) = s_4(\tau) = s_5(\tau) = 0. \quad (5.21)$$

Encontramos o Hamiltoniano do oscilador harmônico, através de (5.1), dado por

$$\hat{H}_q = \frac{\hat{p}_q^2 + \Omega^2(\tau)\hat{q}^2}{2}. \quad (5.22)$$

Esse Hamiltoniano corresponde ao problema do oscilador harmônico com frequência dependente do tempo.

Tomando  $\Omega^2(\tau)$  na forma

$$\Omega^2(\tau) = \Omega^2 + \frac{2\Omega_0^2}{\cosh^2(\Omega_0\tau)}, \quad \Omega^2 \leq \Omega^2(\tau) \leq \Omega_{\max}^2, \quad \Omega(\pm\infty) = \Omega^2, \quad (5.23)$$

onde  $\Omega$  e  $\Omega_0$  são constantes positivas,  $\Omega_{\max} \geq \Omega$ . A frequência  $\Omega(\tau)$  é uma função par, que decresce monotonicamente com  $\tau$  indo de 0 a  $\infty$ , veja a Figura 5.1 ( $\Omega = \Omega_0 = 1$ ). Dessa maneira, a equação (5.7) fica

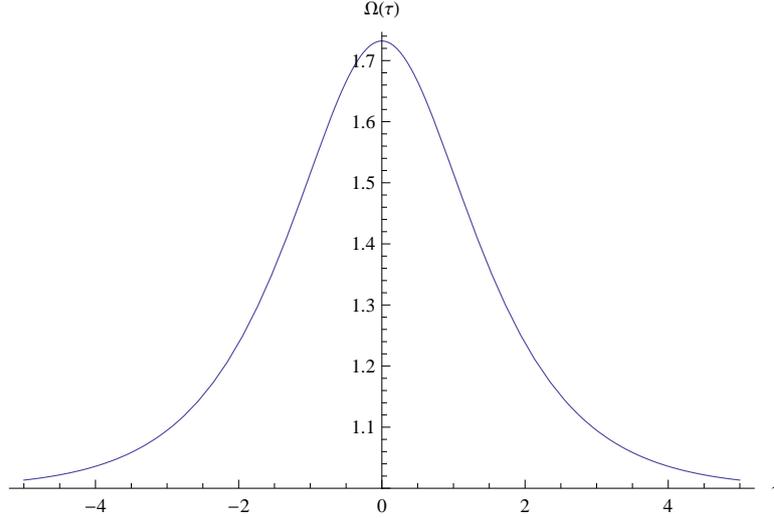


Figura 5.1: Frequência dependente do tempo do oscilador harmônico.

$$\ddot{g}(\tau) + \left[ \Omega^2 + \frac{2\Omega_0^2}{\cosh^2(\Omega_0\tau)} \right] g(\tau) = 0. \quad (5.24)$$

A solução geral é dada por

$$g(\tau) = \left[ \frac{ic_1\Omega_0}{\Omega^2 + \Omega_0^2} \tanh(\Omega_0\tau) + c_2 \right] \cos(\Omega\tau) + \left[ \frac{ic_1\Omega^2}{\Omega^2 + \Omega_0^2} - c_2\Omega_0 \tanh(\Omega_0\tau) \right] \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega}. \quad (5.25)$$

No que segue, encontramos a função  $f(\tau)$  através da relação (5.5), na forma

$$\begin{aligned} f(\tau) &= -i\dot{g}(\tau) \\ &= \left[ -\frac{c_1\Omega^2\Omega_0}{\Omega^2 + \Omega_0^2} \tanh(\Omega_0\tau) + \frac{ic_2\Omega_0^2}{\cosh^2(\Omega_0\tau)} + i\Omega^2c_2 \right] \frac{\sin(\Omega\tau)}{\Omega} + \\ &\quad \left[ \frac{c_1\Omega_0^2}{(\Omega^2 + \Omega_0^2)\cosh^2(\Omega_0\tau)} + ic_2\Omega_0 \tanh(\Omega_0\tau) + \frac{c_1\Omega^2}{\Omega^2 + \Omega_0^2} \right] \cos(\Omega\tau). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Encontramos os EC relacionando as constantes  $c_1$  e  $c_2$  na forma

$$c_1 = \frac{1}{c_2^*}. \quad (5.27)$$

Dessa maneira, temos que a relação de incerteza de Heisenberg é minimizada no tempo inicial, ou seja,

$$\sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau) = \frac{|f(\tau)||g(\tau)|}{2} \Rightarrow \sigma_q(0) \sigma_{p_q}(0) = \frac{|c_1||c_2|}{2} = \frac{1}{2}. \quad (5.28)$$

Podemos relacionar o módulo da constante  $c_1$  com o desvio padrão inicial na coordenada  $\sigma(0) = \sigma_q$ , na forma

$$\sigma_q = \frac{|c_2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}|c_1|} \Rightarrow c_1 = \frac{e^{i\mu}}{\sqrt{2}\sigma_q}. \quad (5.29)$$

Assim, encontramos os EC do resultado geral (5.20), junto às relações (5.27) e (5.29), mostrados a seguir

$$\Phi_z^{\sigma_q}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g(\tau)}} \exp \left\{ -\frac{f(\tau)[q - q(\tau)]^2}{g(\tau)} + ip_q(\tau) \frac{2q - q(\tau)}{2} \right\}, \quad (5.30)$$

onde consideramos a fase  $\mu = 0$ .

Na situação em que  $\Omega_0 = 0$ , o desvio padrão na coordenada  $\sigma_q(\tau)$  e momento  $\sigma_{p_q}(\tau)$  têm a forma

$$\sigma_q(\tau) = \sigma_q \sqrt{1 + \frac{1 - 4\sigma_q^4 \Omega^2}{4\sigma_q^4 \Omega^2} \sin^2(\Omega\tau)}, \quad \sigma_{p_q}(\tau) = \sigma_{p_q} \sqrt{1 - (1 - 4\sigma_q^4 \Omega^2) \sin^2(\Omega\tau)}. \quad (5.31)$$

Dessa maneira, notamos que a incerteza na coordenada e no momento do oscilador harmônico apresentam um limite superior e inferior. Isso não ocorre no caso do oscilador invertido, que apresenta apenas um limite inferior. A densidade de probabilidade é dada por

$$\rho_z^{\sigma_q}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_q(\tau)} \exp \left\{ -\frac{[q - q(\tau)]^2}{2\sigma_q^2(\tau)} \right\}. \quad (5.32)$$

Como  $\sigma_q(\tau)$  é a parte responsável pela dispersão da densidade de probabilidade e não dependente de  $\Omega$ , temos três casos a serem analisados:

a)  $\sigma_q \sqrt{2\Omega} = 1$ , então,

$$\sigma_q(\tau) = \sigma_q, \quad \sigma_{p_q}(\tau) = \sigma_{p_q}, \quad \sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau) = \sigma_q \sigma_{p_q} = 1/2, \quad \forall \tau. \quad (5.33)$$

b)  $\sigma_q \sqrt{2\Omega} < 1$ , então,

$$\begin{aligned} \sigma_q(\tau)|_{\min} &= \sigma_q(\tau)|_{\tau=\frac{\pi n}{\Omega}} = \sigma_q, & \sigma_q(\tau)|_{\max} &= \sigma_q(\tau)|_{\tau=\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\Omega}} = \frac{1}{2\sigma_q \Omega}, \\ \sigma_{p_q}(\tau)|_{\min} &= \sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\Omega}} = \sigma_q \Omega, & \sigma_{p_q}(\tau)|_{\max} &= \sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{\pi n}{\Omega}} = \sigma_{p_q}, \\ \sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau)|_{\min} &= \sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{\pi n}{\Omega}} = \frac{1}{2}, \\ \sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau)|_{\max} &= \sigma_q(\tau) \sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{2n+1}{4}\frac{\pi}{\Omega}} = \frac{1 + 4\sigma_q^4 \Omega^2}{8\sigma_q^2 \Omega}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.34)$$

c)  $\sigma_q \sqrt{2\Omega} > 1$ , então,

$$\begin{aligned}
\sigma_q(\tau)|_{\min} &= \sigma_q(\tau)|_{\tau=\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\Omega}} = \frac{1}{2\sigma_q\Omega}, & \sigma_q(\tau)|_{\max} &= \sigma_q(\tau)|_{\tau=\frac{n\pi}{\Omega}} = \sigma_q, \\
\sigma_{p_q}(\tau)|_{\min} &= \sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{n\pi}{\Omega}} = \sigma_{p_q}, & \sigma_{p_q}(\tau)|_{\max} &= \sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{2n+1}{2}\frac{\pi}{\Omega}} = \sigma_q\Omega, \\
\sigma_q(\tau)\sigma_{p_q}(\tau)|_{\min} &= \sigma_q(\tau)\sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{n\pi}{\Omega}} = \frac{1}{2}, \\
\sigma_q(\tau)\sigma_{p_q}(\tau)|_{\max} &= \sigma_q(\tau)\sigma_{p_q}(\tau)|_{\tau=\frac{2n+1}{4}\frac{\pi}{\Omega}} = \frac{1+4\sigma_q^4\Omega^2}{8\sigma_q^2\Omega}, \quad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned} \tag{5.35}$$

No caso a) a relação de incerteza de Heisenberg é minimizada, cuja forma dos EC, dada em (5.21), coincide com os ECC de Schrödinger-Glauber (4.22). Para o caso de  $\sigma_q$  na forma dada em b) e c), a relação de incerteza de Heisenberg é minimizada periodicamente, mas sempre restrita aos limites  $1/2$  e  $(1+4\sigma_q^4\Omega^2)/(8\sigma_q^2\Omega)$ .

### 5.3 Estados coerentes do oscilador harmônico com força externa

Vamos considerar o oscilador harmônico com uma força externa oscilante, na forma

$$s_1(\tau) = \frac{1}{2}\Omega_0^2, \quad s_4(\tau) = \sin(\Omega\tau). \tag{5.36}$$

O Hamiltoniano para o caso acima, é dado por

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{2}\Omega_0^2\hat{q}^2 + \sin(\Omega\tau)\hat{q}, \tag{5.37}$$

onde  $\Omega$  e  $\Omega_0$  são constantes reais.

A equação (5.7) toma a forma

$$\ddot{g}(\tau) + \Omega_0^2 g(\tau) = 0. \tag{5.38}$$

Com a seguinte solução geral

$$g(\tau) = c_2 \cos(\Omega_0\tau) + \frac{ic_1}{\Omega_0} \sin(\Omega_0\tau). \tag{5.39}$$

No que segue, encontramos a função  $f(\tau)$  pela relação (5.8), na forma

$$f(\tau) = -i\dot{g}(\tau) = c_1 \cos(\Omega_0\tau) + ic_2\Omega_0 \sin(\Omega_0\tau). \tag{5.40}$$

Assim, podemos calcular a função  $\varphi(\tau)$

$$\varphi(\tau) = i \int s_4(\tau) g(\tau) d\tau = i \int \sin(\Omega\tau) \left[ c_2 \cos(\Omega_0\tau) + \frac{ic_1}{\Omega_0} \sin(\Omega_0\tau) \right] d\tau, \tag{5.41}$$

cujas soluções apresenta dois domínios de soluções:

I- Se  $\Omega_0 \neq \Omega$  teremos

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & -\frac{c_1}{2\Omega_0} \left\{ \frac{\sin[(\Omega - \Omega_0)\tau]}{\Omega - \Omega_0} - \frac{\sin[(\Omega + \Omega_0)\tau]}{\Omega + \Omega_0} \right\} \\ & - \frac{ic_2}{2} \left\{ \frac{\cos[(\Omega - \Omega_0)\tau]}{\Omega - \Omega_0} + \frac{\cos[(\Omega + \Omega_0)\tau]}{\Omega + \Omega_0} \right\} + \frac{ic_2\Omega}{\Omega^2 - \Omega_0^2}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

II- Se  $\Omega_0 = \Omega$ , encontramos

$$\varphi(\tau) = \frac{c_1 \sin(2\Omega\tau)}{4\Omega^2} - \frac{ic_2 \cos(2\Omega\tau)}{4\Omega} + \frac{ic_2}{4\Omega}. \quad (5.43)$$

Encontramos os EC relacionando as constantes  $c_1$  e  $c_2$  na forma

$$c_1 = \frac{1}{c_2^*}.$$

Escrevendo o módulo da constante  $c_1$  em função do desvio padrão inicial na coordenada, teremos

$$\sigma_q = \frac{|c_2|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}|c_1|} \Rightarrow c_1 = \frac{e^{i\mu}}{\sqrt{2}\sigma_q}.$$

No que segue, podemos escrever as funções  $f(\tau)$ ,  $g(\tau)$  e  $\varphi(\tau)$  na forma

$$\begin{aligned} g(\sigma_q, \tau) &= \sqrt{2}\sigma_q \cos(\Omega_0\tau) + \frac{i}{\sqrt{2}\sigma_q} \frac{\sin(\Omega_0\tau)}{\Omega_0}, \\ f(\sigma_q, \tau) &= \frac{\cos(\Omega_0\tau)}{\sqrt{2}\sigma_q} + i\sqrt{2}\Omega_0\sigma_q \sin(\Omega_0\tau), \\ \varphi(\sigma_q, \tau, \Omega_0 \neq \Omega) &= -\frac{1}{\sqrt{2}\sigma_q\Omega_0} \left\{ \frac{\sin[(\Omega - \Omega_0)\tau]}{2(\Omega - \Omega_0)} - \frac{\sin[(\Omega + \Omega_0)\tau]}{2(\Omega + \Omega_0)} \right\} \\ &\quad - i\sqrt{2}\sigma_q \left\{ \frac{\cos[(\Omega - \Omega_0)\tau]}{2(\Omega - \Omega_0)} + \frac{\cos[(\Omega + \Omega_0)\tau]}{2(\Omega + \Omega_0)} \right\} + \frac{i\sqrt{2}\Omega\sigma_q}{\Omega^2 - \Omega_0^2}, \\ \varphi(\sigma_q, \tau, \Omega_0 = \Omega) &= \frac{\sin(2\Omega\tau)}{4\sqrt{2}\sigma_q\Omega^2} - \frac{i\sqrt{2}\sigma_q \cos(2\Omega\tau)}{4\Omega} + \frac{i\sqrt{2}\sigma_q}{4\Omega}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Dessa maneira, teremos os EC do oscilador harmônico com força externa, na forma

$$\Phi_z^{\sigma_q}(q, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}g(\sigma_q, \tau)}} \exp \left\{ -\frac{f(\sigma_q, \tau) [q - q(\tau)]^2}{g(\sigma_q, \tau)} + ip_q(\tau) \frac{2q - q(\tau)}{2} \right\}. \quad (5.45)$$

Note que, as funções  $f(\tau)$  e  $g(\tau)$ , dadas em (5.44) coincidem com as funções (4.44). Assim, podemos fazer a mesma análise dada em (5.33), (5.34) e (5.35). Interessante que, mesmo para sistemas diferentes do oscilador harmônico, é possível obter os EC com as mesmas propriedades dos ECC, ou seja, tem todas as propriedades usuais e a relação de incerteza de Heisenberg minimizada para qualquer tempo.

## 5.4 Oscilador invertido e oscilador harmônico realístico

Nesta seção, discutiremos o problema de obter a solução exata para o oscilador harmônico e o oscilador invertido, com a frequência dependente do tempo e satisfazendo as condições

$$\Omega(0) = 0 \quad \Omega(\tau \rightarrow \infty) = \Omega_0. \quad (5.46)$$

As soluções para esse tipo de problema permitem uma maior proximidade com a realidade, visto a situação de uma partícula saindo do repouso para, em seguida, ficar sobre ação de uma força.

**Oscilador invertido** - A frequência (5.23), pode ser adequada para as condições (5.46), de tal maneira a obtermos o que chamamos de oscilador invertido realístico. Assumindo que a constante  $\Omega$  é relacionada ao  $\Omega_0$ , na forma

$$\Omega = i\sqrt{2}\Omega_0, \quad (5.47)$$

teremos

$$\Omega^2(\tau) = \frac{2\Omega_0^2}{\cosh^2(\Omega_0\tau)} - 2\Omega_0^2 = -2\Omega_0^2 \tanh^2(\Omega_0\tau). \quad (5.48)$$

Podemos interpretar o sinal negativo que aparece na frequência como parte do potencial, ou seja,

$$\hat{H}_q = \frac{\hat{p}_q^2 + V(q, \tau)}{2}, \quad V(q, \tau) = -\Omega^2(\tau) q^2. \quad (5.49)$$

Dessa maneira, na Figura 5.2 ( $\Omega_0 = 1$ ) temos a curva representando a frequência  $\Omega(\tau)$  em função do tempo.

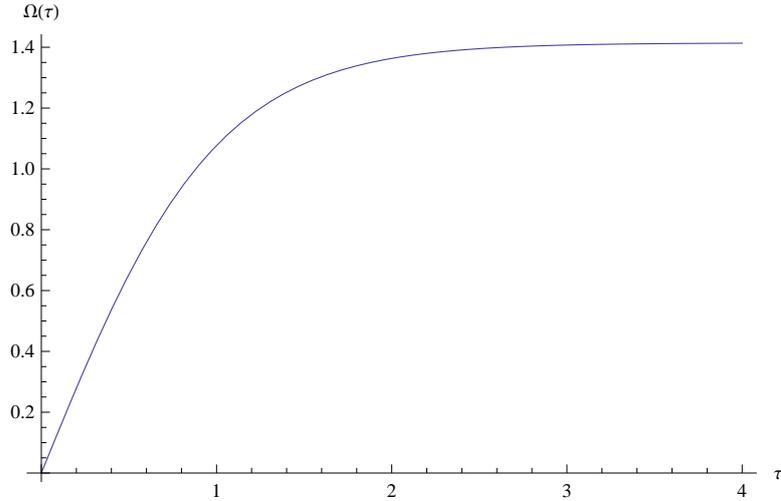


Figura 5.2: Frequência dependente do tempo do oscilador invertido realístico.

A equação (5.7), toma a forma

$$\ddot{g}(\tau) - 2\Omega_0^2 \tanh^2(\Omega_0\tau) g(\tau) = 0. \quad (5.50)$$

Com a seguinte solução

$$g(\tau) = \frac{i}{\sigma_q \Omega_0} \left[ \sinh(\sqrt{2}\Omega_0\tau) - \frac{\tanh(\Omega_0\tau) \cosh(\sqrt{2}\Omega_0\tau)}{\sqrt{2}} \right] + \sigma_q \left[ \sqrt{2} \cosh(\sqrt{2}\Omega_0\tau) - \tanh(\Omega_0\tau) \sinh(\sqrt{2}\Omega_0\tau) \right], \quad (5.51)$$

onde escrevemos as constantes  $c_1$  e  $c_2$  em termos do desvio padrão inicial na coordenada, de tal maneira que a relação de incerteza de Heisenberg seja minimizada no tempo inicial.

Encontramos a função  $f(\tau)$  pela relação

$$f(\tau) = -i\dot{g}(\tau).$$

Vamos verificar se a solução para  $g(\tau)$  satisfaz as condições impostas sobre  $\Omega(\tau)$ . Na situação em que  $\tau \gg 1$ , teremos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} [\tanh(\Omega_0\tau)] = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\cosh(\Omega_0\tau)] = \frac{e^{\Omega_0\tau}}{2}, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\sinh(\Omega_0\tau)] = \frac{e^{\Omega_0\tau}}{2}. \quad (5.52)$$

Logo, podemos escrever

$$\begin{aligned} g(\tau) &= \frac{ic_1}{\Omega_0} \left( \sqrt{2} \frac{e^{\sqrt{2}\Omega_0\tau}}{2} - \frac{e^{\sqrt{2}\Omega_0\tau}}{2} \right) + c_2 \left( \frac{e^{\sqrt{2}\Omega_0\tau}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{e^{\sqrt{2}\Omega_0\tau}}{2} \right) \\ &= \frac{iC_1}{\Omega_0} \sinh(\Omega\tau) + C_2 \cosh(\Omega\tau), \end{aligned}$$

onde definimos

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{c_1}{2} (\sqrt{2} - 1) + \frac{\Omega_0 c_2}{2i} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ C_2 &= \frac{ic_1}{2\Omega_0} (\sqrt{2} - 1) + \frac{c_2}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \sqrt{2}\Omega_0 &\longrightarrow \Omega. \end{aligned}$$

A forma de  $g(\tau)$  coincide com (4.55). Dessa maneira, o valor esperado e a densidade de probabilidade também terão a mesma forma, dado que dependem da função  $g(\tau)$  e  $f(\tau)$ .

**Oscilador harmônico** - A frequência para o oscilador harmônico, satisfazendo a condição (5.46), é dada por

$$\Omega^2(\tau) = \Omega_0^2 \tanh(\Omega_0\tau). \quad (5.53)$$

A Figura 5.3 representa a frequência  $\Omega(\tau)$  ( $\Omega_0 = 1$ ) mostrada em (5.53).

A equação (5.7) toma a forma

$$\ddot{g}(\tau) + \Omega_0^2 \tanh^2(\Omega_0\tau) g(\tau) = 0. \quad (5.54)$$

Para resolver a equação (5.54), podemos compará-la com a equação de Schrödinger unidimensional, dado o potencial a seguir

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - [4c^2g_1 \tanh^2(cx) + 4c^2g_2 \tanh(cx)] \psi(x) + W\psi(x) = 0. \quad (5.55)$$

Esse problema foi discutido no livro [2], cuja solução geral é dada por

$$\begin{aligned} \psi(x) &= c_1 z^\mu (1-z)^\nu F(\alpha, \beta; \gamma; z) + c_2 z^{-\mu} (1-z)^\nu F(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; z), \quad z = \frac{1}{2} [1 - \tanh(cx)], \\ \alpha &= \frac{1}{2} + \mu + \nu + \lambda, \quad \beta = \frac{1}{2} + \mu + \nu - \lambda, \quad \gamma = 1 + 2\mu, \\ \alpha_1 &= \frac{1}{2} - \mu + \nu + \lambda, \quad \beta_1 = \frac{1}{2} - \mu + \nu - \lambda, \quad \gamma_1 = 1 - 2\mu, \\ \mu &= \sqrt{g_1 + g_2 - w}, \quad \nu = \sqrt{g_1 - g_2 - w}, \quad \lambda = \sqrt{4g_1 + \frac{1}{4}}, \quad W = \frac{w}{4c^2}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

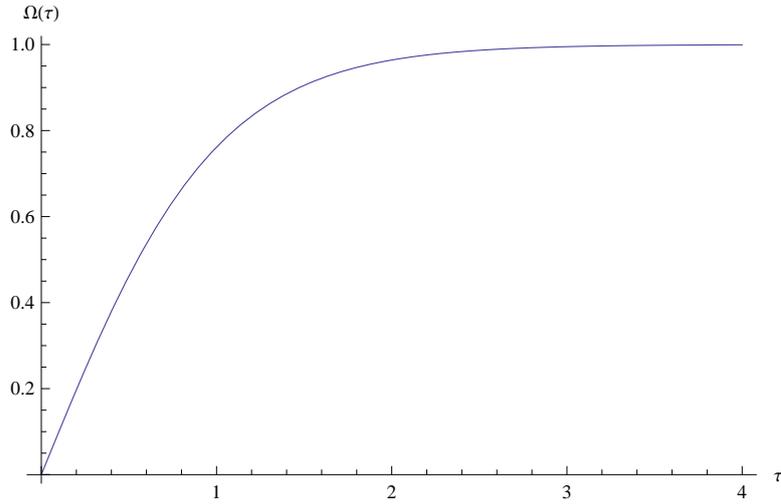


Figura 5.3: Frequência dependente do tempo do oscilador harmônico realístico.

onde  $F(x, y; z; k)$  são funções hipergeométricas (veja [67, 68]). Então, fazendo a correspondência

$$x \longrightarrow \tau, \quad \psi(x) \longrightarrow g(\tau), \quad c \longrightarrow \Omega_0, \quad g_1 = W = 0, \quad g_2 = -1/4 \Rightarrow \Omega(\tau) = \Omega_0^2 \tanh(\Omega_0 \tau). \quad (5.57)$$

Dessa maneira, a equação (5.55) coincide com (5.54). A solução geral é dada por

$$g(\tau) = c_1 z^\mu (1-z)^\nu F(\alpha, \beta; \gamma; z) + c_2 z^{-\mu} (1-z)^\nu F(\alpha_1, \beta_1; \gamma_1; z), \quad z = \frac{1}{2} [1 - \tanh(\Omega_0 \tau)],$$

$$\alpha = \frac{3+i}{2} = \alpha_1^*, \quad \beta = \frac{1+i}{2} = \beta_1^*, \quad \gamma = 1+i = \gamma_1^*, \quad \mu = \frac{i}{2}, \quad \nu = \frac{1}{2}. \quad (5.58)$$

No limite  $\tau \longrightarrow \infty$ , temos

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} z = e^{-2\Omega_0 \tau} \longrightarrow 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} (1-z) = 1, \quad (5.59)$$

Dessa maneira, podemos escrever a função  $g(\tau)$  na forma

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} g(\tau) = c_1 e^{-i\Omega_0 \tau} + c_2 e^{i\Omega_0 \tau} = C_2 \cos(\Omega_0 \tau) + \frac{iC_1}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 \tau),$$

onde

$$C_1 = \Omega_0 (c_2 - c_1), \quad C_2 = c_1 + c_2.$$

O resultado obtido para  $g(\tau)$  coincide com (4.29).

## 5.5 Soluções para $g(\tau)$ : modelo 1

Podemos resolver a equação (5.7) de maneira exata para um  $\Omega(\tau)$  dado. Considere que a função  $g(\tau)$  seja dada na forma

$$g_1(\tau) = \frac{\sin \beta(\tau)}{\sqrt{\eta(\tau)}}, \quad g_2(\tau) = \frac{\cos \beta(\tau)}{\sqrt{\eta(\tau)}}, \quad \eta(\tau) = \dot{\beta}(\tau), \quad (5.60)$$

onde  $\eta(\tau) \geq 0$  e substituindo  $g_1$  e  $g_2$  em (5.7) temos que  $\Omega(\tau)$  deve ser

$$\Omega^2(\tau) = \frac{\ddot{\eta}(\tau)}{2\eta(\tau)} - \frac{3}{4} \left[ \frac{\dot{\eta}(\tau)}{\eta(\tau)} \right]^2 + \eta^2(\tau). \quad (5.61)$$

Aqui, podemos mostrar que as soluções  $g_1$  e  $g_2$  são linearmente independentes. Para isso, considere o wronskiano

$$\begin{aligned} W &= g_1 \dot{g}_2 - \dot{g}_1 g_2 \\ &= \frac{\sin \beta}{\sqrt{\eta}} \left( -\frac{1}{2} \frac{\cos \beta}{\eta^{3/2}} \dot{\eta} - \frac{\sin \beta}{\sqrt{\eta}} \dot{\beta} \right) - \left( \frac{\cos \beta}{\sqrt{\eta}} \dot{\beta} - \frac{1}{2} \frac{\sin \beta}{\eta^{3/2}} \dot{\eta} \right) \frac{\cos \beta}{\sqrt{\eta}} \\ &= -\frac{\dot{\beta}}{\eta} = -1. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Por ser diferente de zero, podemos afirmar que as funções  $g_1$  e  $g_2$  são linearmente independentes. Dessa forma, constituem um conjunto completo de soluções para a equação (5.7).

Vamos discutir, na sequência, alguns exemplos, usando esse mecanismo para buscar soluções da equação (5.7).

### 5.5.1 Exemplo 1

Escolhendo as funções  $\beta(\tau)$  e  $\eta(\tau)$  na forma

$$\beta(\tau) = \Omega\tau + \frac{\alpha}{\Omega_0} \arctan[\sinh(\Omega_0\tau)], \quad \eta(\tau) = \Omega + \frac{\alpha}{\cosh(\Omega_0\tau)}, \quad \Omega \geq \frac{|\alpha| - \alpha}{2}, \quad (5.63)$$

daqui, podemos obter  $\Omega^2(\tau)$  correspondente

$$\Omega^2(\tau) = \eta^2(\tau) + \frac{\alpha\Omega_0^2}{2\eta(\tau)} \frac{\cosh^2(\Omega_0\tau) - 2}{\cosh^3(\Omega_0\tau)} - \frac{3\alpha^2\Omega_0^2}{4\eta^2(\tau)} \frac{\cosh^2(\Omega_0\tau) - 1}{\cosh^4(\Omega_0\tau)}. \quad (5.64)$$

Escolhendo  $\Omega_0 = \Omega = \alpha = 1$ , temos a Figura 5.4, correspondente a função  $\Omega(\tau)$  mostrada em (5.64). A frequência  $\Omega(\tau)$  no tempo inicial tem a forma

$$\Omega^2(0) = (\Omega + \alpha)^2 - \frac{\alpha\Omega_0^2}{2(\Omega + \alpha)}. \quad (5.65)$$

Enquanto que, para  $\tau \rightarrow \infty$ , a frequência  $\Omega^2(\tau)$  fica

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Omega^2(\tau) = \Omega. \quad (5.66)$$

A solução da equação (5.7) tem a forma

$$g(\tau) = C_1 g_1(\tau) + C_2 g_2(\tau) = C_1 \frac{\sin \beta(\tau)}{\sqrt{\eta(\tau)}} + C_2 \frac{\cos \beta(\tau)}{\sqrt{\eta(\tau)}}, \quad (5.67)$$

Para determinar a função  $f(\tau)$ , temos

$$f(\tau) = -ig(\tau).$$

Na situação em que  $\Omega = 0$ , encontramos

$$\Omega^2(\tau) = \frac{4\alpha^2 - \Omega_0^2}{4 \cosh^2(\Omega_0\tau)} - \frac{\Omega_0^2}{4}. \quad (5.68)$$

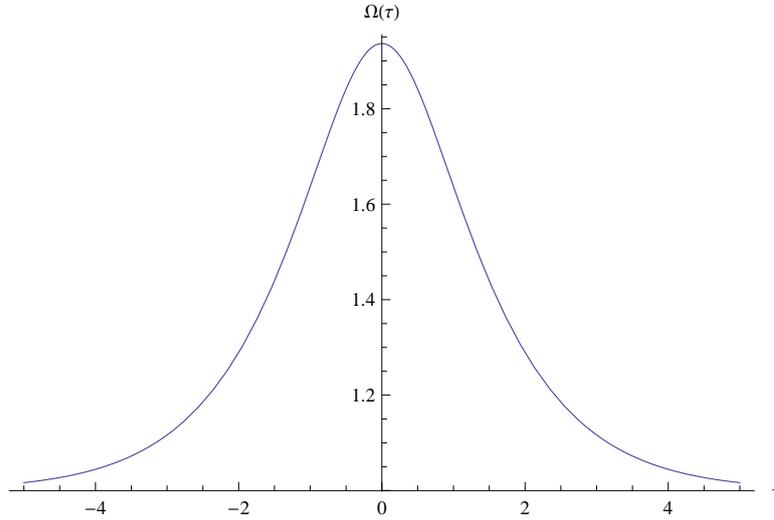


Figura 5.4: Frequência dependente do tempo: exemplo 1.

## 5.6 Soluções para $g(\tau)$ : modelo 2

Outra forma de obter soluções para a equação (5.4) consiste em assumir que as soluções sejam dadas na forma

$$g_1(\tau) = \frac{\sinh \beta(\tau)}{\sqrt{\eta(\tau)}}, \quad g_2(\tau) = \frac{\cosh \beta(\tau)}{\sqrt{\eta(\tau)}}, \quad \eta(\tau) = \dot{\beta}(\tau), \quad (5.69)$$

Dessa maneira, encontramos que a frequência  $\Omega(\tau)$  deve ser

$$\Omega^2(\tau) = \frac{\ddot{\eta}(\tau)}{2\eta(\tau)} - \frac{3}{4} \left[ \frac{\dot{\eta}(\tau)}{\eta(\tau)} \right]^2 - \eta^2(\tau). \quad (5.70)$$

Daqui, segue a mesma discussão dada para o modelo 1 na resolução do problema e análise da frequência.

## 5.7 Discussão dos resultados obtidos

Neste capítulo, consideramos sistemas quadráticos dependentes do tempo de forma geral e obtemos os seus correspondentes ENG e os ECG em uma forma mais simples do que encontramos na literatura.

Em particular, obtemos a solução exata para a função  $g(\tau)$  para o caso do oscilador harmônico, com frequência variando no tempo, e seus correspondentes ECG, veja [45].

Mostramos que a dependência temporal explícita no Hamiltoniano permite obter sistemas que descrevem a natureza física dos problemas mais próximos da realidade, como foi discutido nos exemplos dos osciladores realísticos. Definimos um oscilador realístico como sendo a situação pela qual o sistema parte do repouso. Ou seja, podemos modelar como sendo uma partícula livre no tempo inicial, para em seguida ficar sob ação de alguma força, seja ela do oscilador harmônico ou mesmo oscilador invertido.

Discutimos mecanismos para obter a solução exata da função  $g(\tau)$ . Como exemplo, buscar analogia com a equação de spin ou a equação de Schrödinger unidimensional, ou ainda um modelo próprio que foca em determinar primeiramente a forma da função  $g(\tau)$  para então obter a expressão

correspondente da frequência. Esses modelos foram ilustrados com alguns exemplos que permitem conexão com sistemas diferentes.

Nossa motivação principal no estudo de sistemas abertos (Hamiltonianos dependentes do tempo), está voltada para o caso de osciladores realísticos, definidos pela condição (5.46). O estudo desse problema pode nos ajudar a encontrar intervalos de tempo em que os efeitos de mudança na frequência são essenciais e as particularidades correspondentes têm de ser tomadas em consideração.

# Apêndice A

## Obtendo a função $\phi(\tau)$ para Hamiltoniano quadrático geral

Neste apêndice, mostraremos como obter a função  $\phi(\tau)$  para o caso de um Hamiltoniano quadrático de forma geral. Considere a derivada temporal e espacial do estado  $\Phi_z(q, \tau)$  (5.14), calculadas a seguir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_z}{\partial q} &= \left[ -\frac{f}{g}q + \frac{f}{g}q(\tau) + ip_q(\tau) \right] \Phi_z, \\
 \frac{\partial^2 \Phi_z}{\partial q^2} &= \left\{ \frac{f^2}{g^2}q^2 - 2 \left[ \frac{f}{g}q(\tau) + ip_q(\tau) \right] \frac{f}{g}q + \frac{f}{g} \left[ \frac{f}{g}q(\tau) + 2ip_q(\tau) \right] q(\tau) - p_q^2(\tau) - \frac{f}{g} \right\} \Phi_z, \\
 \frac{\partial \Phi_z}{\partial \tau} &= -i \left[ i \left( \frac{f}{g} - 2is_2 \right) \left( p_q(\tau) - i\frac{f}{g}q(\tau) \right) + i\frac{f}{g}s_3 + s_4 \right] q \Phi_z \\
 &\quad - i \left\{ \left( 2s_1 + 4is_2 \frac{f}{g} - \frac{f^2}{g^2} \right) \frac{q^2}{2} + i\dot{\phi} \right\} \Phi_z, \tag{A.1}
 \end{aligned}$$

onde  $q(\tau)$  e  $p_q(\tau)$  correspondem ao valor esperado da coordenada e do momento nos ECG. Unindo essas derivadas, na forma como dada pela equação de Schrödinger (5.3), encontramos que  $\phi(\tau)$  satisfaz a equação

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}(\tau) &= -\frac{f^2}{ig^2} \frac{q^2(\tau)}{2} - \frac{f}{g} p_q(\tau) q(\tau) + \frac{1}{2i} p_q^2(\tau) + \frac{1}{2i} \frac{f}{g} - s_3 \frac{f}{g} q(\tau) - is_3 p_q(\tau) - s_2 - is_5 \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{f}{g} q^2(\tau) + iq(\tau) p_q(\tau) + \ln g \right] + \frac{1}{2i} [s_3 p_q(\tau) + s_4 q(\tau)] - is_5. \tag{A.2}
 \end{aligned}$$

Integrando no tempo, teremos

$$\phi(\tau) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{f}{g} q^2(\tau) + iq(\tau) p_q(\tau) + \ln g \right] + \frac{1}{2i} \int [s_3 p_q(\tau) + s_4 q(\tau) + 2s_5] d\tau + C. \tag{A.3}$$

Na situação em que os parâmetros do Hamiltoniano são independentes do tempo, juntamente com a condição

$$\Omega^2 = 2s_1 - 4s_2^2 \neq 0, \tag{A.4}$$

temos como calcular de forma exata  $\phi(\tau)$ . No que segue, teremos

$$\begin{aligned}
 \frac{d\phi(\tau)}{d\tau} &= \frac{1}{2i} \frac{d}{d\tau} [q(\tau) p_q(\tau)] - \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left[ \frac{f}{g} q^2(\tau) \right] - \frac{1}{2} \frac{d \ln g}{d\tau} + \frac{s_1 s_3 + s_2 s_4}{i\Omega^2} \frac{dq(\tau)}{d\tau} \\
 &\quad + \frac{2s_2 s_3 - s_4}{2i\Omega^2} \frac{dp_q(\tau)}{d\tau} - \frac{2s_1 s_3^2 - s_4^2}{2i\Omega^2} - is_5. \tag{A.5}
 \end{aligned}$$

Os cálculos realizados foram auxiliados pelas relações a seguir

$$\begin{aligned}
\frac{f^2}{ig^2}q^2(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \left( \frac{f}{g}q^2(\tau) \right) - 2is_1q^2(\tau) - 2\frac{f}{g}q(\tau)p_q(\tau) - 2s_3\frac{f}{g}q(\tau) \\
p_q^2(\tau) &= \frac{d}{d\tau} [q(\tau)p_q(\tau)] + 2s_1q^2(\tau) - s_3p_q(\tau) + s_4q(\tau), \\
q(\tau) &= \frac{2s_2}{4s_2^2 - 2s_1} \frac{dq(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{4s_2^2 - 2s_1} \frac{dp_q(\tau)}{d\tau} + \frac{s_4 - 2s_2s_3}{4s_2^2 - 2s_1}, \\
p_q(\tau) &= \frac{s_1}{s_1 - 2s_2^2} \frac{dq(\tau)}{d\tau} + \frac{s_2}{s_1 - 2s_2^2} \frac{dp_q(\tau)}{d\tau} + \frac{s_2s_4 - s_1s_3}{s_1 - 2s_2^2}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Logo, integrando no tempo, teremos

$$\begin{aligned}
\phi(\tau) &= \frac{q(\tau)p_q(\tau)}{2i} - \frac{f}{g} \frac{q^2(\tau)}{2} + \frac{s_1s_3 + s_2s_4}{i\Omega^2} q(\tau) + \frac{2s_2s_3 - s_4}{2i\Omega^2} p_q(\tau) - \frac{1}{2} \ln g \\
&\quad - \left( \frac{2s_1s_3^2 - s_4^2}{2i\Omega^2} - is_5 \right) \tau + C.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

# Apêndice B

## Demonstração da relação (2.16)

Neste apêndice, mostraremos que a relação (2.16), é constante para todo instante de tempo. Para isso, vamos considerar a derivada total do comutador  $[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]$ ,

$$\frac{d[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]}{d\tau} = \frac{d(\hat{A}\hat{A}^\dagger)}{d\tau} - \frac{d(\hat{A}^\dagger\hat{A})}{d\tau} = \frac{d\text{Re}(fg^*)}{d\tau}. \quad (\text{B.1})$$

Então, precisamos saber a derivada do produto de operadores, que obtemos ao considerar a relação (2.6). Fazendo a correspondência

$$\begin{aligned} \frac{d(\hat{A}\hat{B})}{d\tau} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(\tau), \hat{A}\hat{B}] + \frac{\partial(\hat{A}\hat{B})}{\partial\tau} \\ &= \frac{i}{\hbar} \hat{A} [\hat{H}(\tau), \hat{B}] + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(\tau), \hat{A}] \hat{B} + \hat{A} \frac{\partial\hat{B}}{\partial\tau} + \frac{\partial\hat{A}}{\partial\tau} \hat{B} \\ &= \hat{A} \left( \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(\tau), \hat{B}] + \frac{\partial\hat{B}}{\partial\tau} \right) + \left( \frac{i}{\hbar} [\hat{H}(\tau), \hat{A}] + \frac{\partial\hat{A}}{\partial\tau} \right) \hat{B} \\ &= \hat{A} \frac{d\hat{B}}{d\tau} + \frac{d\hat{A}}{d\tau} \hat{B}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Dessa forma, podemos escrever (B.1) da seguinte maneira

$$\frac{d[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]}{d\tau} = \hat{A} \frac{d\hat{A}^\dagger}{d\tau} + \frac{d\hat{A}}{d\tau} \hat{A}^\dagger - \hat{A}^\dagger \frac{d\hat{A}}{d\tau} - \frac{d\hat{A}^\dagger}{d\tau} \hat{A}. \quad (\text{B.3})$$

Lembrando que os operadores  $\hat{A}$  e  $\hat{A}^\dagger$  são integrais de movimento, ou seja,

$$\frac{d\hat{A}^\dagger}{d\tau} = \frac{d\hat{A}}{d\tau} = 0, \quad (\text{B.4})$$

teremos

$$\frac{d[\hat{A}, \hat{A}^\dagger]}{d\tau} = \frac{d\text{Re}(fg^*)}{d\tau} = 0 \Rightarrow \text{Re}(fg^*) = \text{const.} \quad \forall\tau. \quad (\text{B.5})$$

Como queríamos demonstrar.

# Referências Bibliográficas

- [1] R. L. Liboff 1980 *Introductory quantum mechanics* (Addison Wesley, New York).
- [2] D. M. Gitman, I. V. Tyutin e B. L. Voronov 2012 *Self-adjoint Extensions in Quantum Mechanics. General theory and applications to Schrödinger and Dirac equations with singular potentials* (Birkhauser, Boston).
- [3] H. R. Lewis 1967 *Classical and quantum system with time-dependent harmonic-oscillator-type hamiltonians* Phys. Rev. Lett. **18**, 510.
- [4] H. R. Lewis 1968 *Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators* J. Math. Phys. **11**, 1976.
- [5] H. R. Lewis e W. B. Riesenfeld 1969 *An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field* J. Math. Phys. **10**, 1458.
- [6] R. J. Glauber 1963 *Photon Correlations* Phys. Rev. Lett. **10**, 277.
- [7] R. J. Glauber 1963 *The Quantum Theory of Optical Coherence* Phys. Rev. Lett. **130**, 2529.
- [8] R. J. Glauber 1963 *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field* Phys. Rev. Lett. **131**, 2766.
- [9] E. C. G. Sudarshan 1963 *Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams* Phys. Lett. **10**, 277.
- [10] J. R. Klauder 1963 *Continuous-representation theory. I. Postulates of continuous-representation theory* J. Math. Phys. **4**, 1055.
- [11] J. R. Klauder 1963 *Continuous-representation Theory. II. Generalized relation between quantum and classical dynamics* J. Math. Phys. **4**, 1058.
- [12] A. O. Barut e L. Girardello 1971 *New “coherent” states associated with non-compact groups* Commun. Math. Phys. **21**, 41.
- [13] A. M. Peremolov 1986 *Generalized coherent states and their applications* (Springer, Berlin).
- [14] R. Gilmore 1972 *Geometry of symmetrized states* Ann. Phys. (NY) **74**, 391.
- [15] W. M. Zhang, D. Hsuang Feng e R. Gilmore 1990 *Coherent states: Theory and some applications* Reviews of Modern Phys. **62**, 867.
- [16] M. O. Scully e M. S. Zubairy 1997 *Quantum Optics* (Cambridge Univ. Press, Cambridge).

- [17] C. W. Gardiner e P. Zoller 2000 *Quantum Noise* (Springer, New York).
- [18] J. R. Klauder e B. S. Skagerstam 1985 *Coherent states, application in physics and mathematical physics* (World Scientific, Singapore).
- [19] J. P. Gazeau 2009 *Coherent states in quantum physics* (WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim).
- [20] S. T. Ali, J. P. Antoine e J. P. Gazeau 2014 *Coherent states, wavelets, and their generalizations* (Spring, New York).
- [21] J. R. Klauder e E. C. G. Sudarshan 1968 *Fundamentals of quantum optics* (W. A. Benjamin, New York).
- [22] J. P. Gazeau 2009 *Coherent states in quantum physics* (Wiley-VCH, Weinheim).
- [23] M. A. Nielsen e I. L. Chuang 2000 *Quantum computation and quantum information* (Cambridge Univ. Press, Cambridge).
- [24] V. V. Dodonov e V. I. Man'ko 1979 *Dynamical symmetries and coherent states of quantum systems* (Nauka, Moscow).
- [25] J. P. Gazeau e J. R. Klauder 1999 *Coherent states for systems with discrete and continuous spectrum* J. Phys. A: Math. Gen. **32**, 123.
- [26] J. B. Geloun e J. R. Klauder 2009 *Ladder operators and coherent states for continuous spectra* J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 375209.
- [27] J. B. Geloun, J. Hnybida e J. R. Klauder 2012 *Coherent states for continuous spectrum operators with non-normalizable fiducial states* J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 085301.
- [28] M. Hongoh 1977 *Coherent states associated with the continuous spectrum of noncompact groups* J. Math. Phys. **18**, 2081.
- [29] J. Guerrero, F. F. López-Ruiz, V. Aldaya e F. Cossío 2011 *Harmonic states for the free particle* J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 445307.
- [30] V. G. Bagrov, J. P. Gazeau, D. Gitman e A. Levine 2012 *Coherent states and related quantizations for unbounded motions* J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 125306.
- [31] G. Barton 1986 *Quantum mechanics of the inverted oscillator potential* Ann. Phys. **166**, 322.
- [32] R. G. Littlejohn 1986 *The semiclassical evolution of wave packets* Phys. Rep. **138**, 193.
- [33] V. G. Bagrov, D. M. Gitman e A. S. Pereira 2014 *Coherent and semiclassical states of a free particle* Physics-Uspekhi **57**, 891.
- [34] I. A. Malkin e V. I. Man'ko 1979 *Dynamical Symmetries and Coherent States of Quantum Systems* (Nauka, Moscow).
- [35] V. V. Dodonov e V. I. Man'ko 1989 *Invariants and correlated states of nonstationary quantum systems* (Nauka, Moscow).

- [36] V. V. Dodonov e V. I. Man'ko 2003 *Theory of Nonclassical States of Light* (Taylor & Francis Group, London, NY).
- [37] V. G. Bagrov, D. M. Gitman, E. S. Macedo e A. S. Pereira 2013 *Coherent states of inverse oscillator and related problems* J. Phys. A Math. Theor. **46**, 325305.
- [38] R. K. Colegrave e M. S. Abdalla 1981 *A canonical description of the Fabry-Perot cavity*. Optica Acta **28**, 495.
- [39] L. S. Brown 1991 *Quantum motion in a Paul trap*. Phys. Rev. Lett. **66**, 526.
- [40] N. A. Lemos e C. P. Natividade 1987 *Harmonic oscillator in expanding universes* Nuovo Cimento B **99**, 211.
- [41] X. C. Gao, J. Fu, H. Li e J. Gao 1998 *Invariant formulation and exact solutions for the relativistic charged Klein-Gordon field in a time-dependent spatially homogeneous electric field* Phys. Rev. A **57**, 753.
- [42] X. C. Gao, J. Fu, J. Xu e X. Zou 1999 *Invariant theory and exact solutions for the quantum Dirac field in a time-dependent spatially homogeneous electric field* Phys. Rev. A **59**, 55.
- [43] I. A. Pedrosa, G. P. Serra e I. Guedes 1997 *Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation* Phys. Rev. A **56**, 4300.
- [44] I. A. Pedrosa, C. Furtado e A. Rosas 2007 *Exact linear invariants and quantum effects in the early universe* Phys. Lett. B **651**, 384.
- [45] V. G. Bagrov, D. M. Gitman e A. S. Pereira 2015 *Coherent States of Systems with Quadratic Hamiltonians* Braz. J. Phys. **45**, 369.
- [46] H. P. Robertson 1930 *A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation* Phys. Rev. **35**, 667.
- [47] E. Schrödinger 1930 *Zum Heisenbergschen Unschärfepinzip* Ber. Kgl. Akad. Wiss. Berlin **24**, 296.
- [48] I. Fujiwara e K. Miyoshi 1980 *Pulsating states for quantal harmonic oscillator* Prog. Theor. Phys. **64**, 715.
- [49] A. K. Rajagopal e J. T. Marshall 1982 *New coherent states with applications to time-dependent systems* Phys. Rev. D **26**, 2977.
- [50] B. Remaud, C. Dorso e E. S. Hernandez 1982 *Coherent state propagation in open systems* Physica A **112**, 193.
- [51] J. N. Hollenhorst 1979 *Quantum limits on resonant-mass gravitational-radiation detectors* Phys. Rev. D **19**, 1669.
- [52] C. M. Caves 1981 *Quantum-mechanical noise in an interferometer* Phys. Rev. D **23**, 1693.
- [53] D. F. Walls 1983 *Squeezed states of light* Nature **306**, 141.

- [54] D. F. Walls e P. Zoller 1981 *Reduced quantum fluctuations in resonance fluorescence* Phys. Rev. Lett. **47**, 709.
- [55] W. Becker, M. O. Scully e M. S. Zubairy 1982 *Generation of squeezed coherent states via a free-electron laser*. Phys. Rev. Lett. **48**, 475.
- [56] B. Yurke 1984 *Use of cavities in squeezed-state generation* Phys. Rev. A **29**, 408.
- [57] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz e J. F. Valley 1985 *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in an optical cavity* Phys. Rev. Lett. **55**, 2409.
- [58] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmutter, R. G. DeVoe e D. F. Walls 1986 *Broad-band parametric deamplification of quantum noise in an optical fiber* Phys. Rev. Lett. **57**, 691.
- [59] L. A. Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall e H. Wu 1986 *Generation of squeezed states by parametric down conversion* Phys. Rev. Lett. **57**, 2520.
- [60] L. E. Ballentine 1998 *Quantum Mechanics: a modern development* (World Scientific, Singapore).
- [61] H. P. Robertson 1930 *A general formulation of the uncertainty principle and its classical interpretation* Phys. Rev. **35**, 667.
- [62] C. C. Gerry e P. L. Knight 2005 *Introductory Quantum Optics* (Cambridge University Press, New York).
- [63] R. G. Littlejohn 1986 *The semiclassical evolution of wave packets* Phys. Rep. **138**, 193.
- [64] V. G. Bagrov, S. P. Gavrilov, D. M. Gitman e D. P. Meira Filho 2011 *Coherent and semiclassical states in a magnetic field in the presence of the Aharonov–Bohm solenoid* J. Phys. A: Math. Theor. **44**, 055301.
- [65] V. De Alfaro e T. Regge 1965 *Potential Scattering* (North-Holland Publish., Amsterdam).
- [66] V. G. Bagrov, M. C. Baldiotti, D. M. Gitman e A. D. Levin 2005 *Spin equation and its solutions*, Ann. der Physik **14**, 764.
- [67] M. Abramowitz e I. A. Stegun 1965 *Handbook of mathematical functions* (Dover, New York).
- [68] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik 2007 *Table of integrals, series, and products* (Elsevier Inc, Oxford).