UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

INSTITUTO DE FÍSICA

**POLARIZAÇÃO DE HÍPERONS E DE ANTI-HÍPERONS
EM PROCESSOS INCLUSIVOS A ALTAS ENERGIAS**

Celso de Camargo Barros Júnior

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3562

ex. 2

Tese apresentada ao
Instituto de Física da
USP para a obtenção
do título de Doutor
em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Carlos Ourívio Escobar - UNICAMP

Prof. Dr. Fernando Silveira Navarra - IFUSP

Prof. Dr. Lauro Tomio - IFT

Prof. Dr. Manoel Roberto Robilotta - IFUSP

Prof. Dr. Yojiro Hama - IFUSP

Orientador: Prof. Dr. Yojiro Hama

SÃO PAULO
2001

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

Agradecimentos

À Patrícia, minha esposa. Ao Carlos Henrique e ao Breno.

Ao meu pai, à minha mãe, à minha avó e à toda a minha família, pelo apoio.

Ao professor Yojiro Hama, pela orientação.

Ao professor Manoel R. Robilotta, pelas discussões a respeito das interações a baixas energias.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Esta tese tem como objetivo apresentar e discutir resultados de um estudo sobre os fenômenos de polarização de híperons e de anti-híperons em processos inclusivos resultantes de interações próton-núcleo a altas energias (centenas de GeV). É proposto um modelo que acreditamos ser o principal responsável pela polarização de anti-híperons em tais processos. A polarização é resultante das interações finais entre os anti-híperons e outras partículas produzidas no processo (que na sua maioria são píons). O modelo baseia-se então em dois elementos: as interações píon-híperon a baixas energias (que estudamos através de lagrangianas efetivas) e das flutuações estatísticas do meio em expansão. O estudo deste meio baseia-se no modelo hidrodinâmico, que considera a formação de matéria hadrônica quente durante tais colisões. Os resultados estão em bom acordo com os dados experimentais e conseguem explicar pela primeira vez a polarização de anti-híperons.

Abstract

We present and discuss in this thesis results of a study on the hyperon and anti-hyperon polarization phenomena in high-energy (hundreds of GeV) proton-nucleus inclusive reactions. We propose a model that we believe is the main source of the anti-hyperon polarization in these processes. The polarization is originated by the final-state interactions between the anti-hyperons and other produced particles in these collisions (predominantly pions) and based on two elements: the low-energy pion-hyperon interaction (described by effective lagrangians) and the statistical fluctuations plus expansion of the background matter. The results agree quite well with the experimental data and give for the first time a convencing explanation of the anti-hyperon polarization.

Índice

I - Introdução	1
II - Dados Experimentais e Modelos Teóricos	6
II.1 - Dados Experimentais.....	6
II.2 - Modelos Teóricos	13
II.2.1 - Modelo de Recombinação de Quarks	13
II.2.2 - Modelo de Lund	15
II.2.3 - Modelo de Quarks Constituintes	16
II.2.4 - OPER.....	17
II.2.5 - Modelo Hidrodinâmico	18
II.2.6 - Modelo Microscópico	20
III - Interação Píon-Híperon	22
III.1 - Interação Píon-Nucleon	24
III.2 - Interação $\pi\Lambda$	29
III.3 - Interação $\pi\Sigma$	44
III.4 - Interação $\pi\Xi$	51
III.5 - Antipartículas.....	57

IV - Polarização em Processos Inclusivos	60
IV.1 - Relações entre S' e S	63
IV.2 - Médias em S'	69
IV.3 - Matéria Hadrônica em Expansão	72
IV.4 - Reações	79
V - Resultados	83
VI - Conclusões	89
VII - Referências	94
Apêndice A - Formalismo Geral	98
A1 - Cinemática	98
A2 - Amplitudes de Espalhamento	100
A3 - Observáveis	102
A4 - Equação de Dirac	103
A5 - Estados e Isospin	105
A6 - Matrizes dos Vértices	109
A7 - Operadores de Projeção	110
Apêndice B - Integrais I_n	115

I. Introdução

Muitas vezes, no estudo da Física, nos defrontamos com problemas que não se encaixam perfeitamente com o entendimento prévio que se tem do assunto. A polarização de híperons produzidos em processos inclusivos a altas energias é exatamente um destes problemas e quanto mais informações são obtidas, maiores são as dificuldades em se obter a explicação total dos fenômenos.

Até a experiência de Bunce e seus colaboradores [1] realizada em 1976, onde estudou-se a produção inclusiva de Λ a partir de colisões próton-Berílio a 300 GeV, acreditava-se que a polarização possuía uma tendência de anular-se com o aumento da energia. Sabia-se que em colisões elásticas πp , pp e Kp , por exemplo, a polarização dos prótons fica muito pequena a altas energias [2] e acreditava-se que esta fosse uma tendência geral. A conclusão final apresentada em [2] (artigo de 1976) a respeito das polarizações é que os efeitos spin-órbita decrescem consideravelmente com a energia e provavelmente poderiam ser desprezados para momentos incidentes no laboratório acima de 50-100 GeV. Teoricamente não havia motivo para acreditar que existisse polarização significativa em processos inclusivos a altas energias. Neste tipo de processo, existem várias reações possíveis que são responsáveis pela formação das

partículas observadas. A polarização observada é resultante da soma de muitos canais e assim o efeito esperado era a perda da coerência na soma das contribuições, resultando na diminuição da polarização. Contudo, a polarização de Λ observada em [1] diferia significativamente de 0 chegando a valores maiores que 20% o que era então totalmente inesperado.

Os resultados de Bunce [1], despertaram um grande interesse por este tipo de reação, que motivou a realização de uma série de experiências, que confirmaram os resultados anteriores para a polarização de Λ [3]-[6] e forneceram ainda novos resultados a partir do estudo de várias energias incidentes e vários tipos de núcleos como alvos. Em 1978 [4], mediu-se a polarização de $\bar{\Lambda}$ em processos semelhantes, iniciados por próton incidente. A partir dos resultados obtidos, pode-se constatar que a polarização de $\bar{\Lambda}$ é muito pequena, praticamente nula. Firmou-se então a idéia, mais tarde desmentida, de que os híperons poderiam ser polarizados mas não os anti-híperons, como veremos na discussão de modelos teóricos. Em 1981, Wilkinson e seus colaboradores conseguiram pela primeira vez observar a polarização de um híperon com carga diferente de zero, Σ^+ [7], que é positiva. Em 1983 [8], observou-se a polarização de Σ^- que é consistente com a de Σ^+ . Em 1986, Ramerika conseguiu observar a polarização de Ξ^- e esta é negativa [9].

Logo foi possível a obtenção de dados para outros anti-híperons além de $\bar{\Lambda}$. Em 1990 foi estudada a polarização de $\bar{\Xi}^+$ [10] e com surpresa verificou-se que era consideravelmente diferente de zero (negativa, com mais dados em [11]). Em 1993, Morelos e seus colaboradores obtiveram a polarização de $\bar{\Sigma}^-$ [12], que também verificou-se diferente de zero (positiva, com mais dados em [13]).

A variedade encontrada no comportamento das polarizações dos diversos

híperons abriu um interessante campo de investigação teórica. Os primeiros modelos com a intenção de explicar estes dados foram o modelo de Lund [15] e o modelo de recombinação de quarks [16]. Mais recentemente, o modelo de J.Soffer e N. Tornqvist [17] e muitos outros [18]-[23]. Estes modelos, de um modo geral, explicam bem a polarização de Λ e de Σ que, devido a sua semelhança estrutural (a nível de quarks) com os prótons incidentes, podem ser considerados como partículas dominantes em colisões pA . Contudo para Ξ , que possui dois quarks s , já aparecem dificuldades. Ao considerarmos anti-híperons estes modelos não se aplicam pois a hipótese de partículas dominantes não se aplica a anti-híperons, ou seja, devemos considerar um mecanismo indireto para explicarmos a produção deste tipo de partículas (devemos mencionar que, em [23], os autores conseguem **parametrizar** os dados de Λ e de $\bar{\Lambda}$ em termos de funções de fragmentação com polarização).

A impossibilidade de explicar as polarizações dos anti-híperons a partir dos modelos existentes constituiu uma imposição para que os estudos teóricos destes fenômenos continuassem. Y. Hama e T. Kodama em [24] consideraram o efeito das interações finais na polarização resultante dos (anti-) híperons. Os autores consideraram que em colisões hadrônicas a altas energias é formada matéria hadrônica quente, que emite partículas, inclusive híperons e anti-híperons, e a polarização é então decorrente da interação do híperon com este meio, que pode ser descrito através do modelo hidrodinâmico. O mecanismo de polarização para um híperon produzido deste modo é então o seguinte: o híperon (ou anti-híperon) é produzido sem polarização no interior deste meio e deverá atravessar uma certa quantidade de matéria hadrônica até escapar. Ao atravessar o meio, interage através de um potencial óptico com parâmetros determinados fenomenologicamente (que é um modo

simplificado de descrever esta interação), polarizando-se. Este modelo descreve razoavelmente bem os dados experimentais, mas a questão que permanece é a da determinação dos parâmetros do potencial óptico e o motivo de se necessitar de diferentes potenciais para as diferentes partículas observadas.

A explicação do potencial claramente vem do conhecimento da constituição microscópica do meio formado (do que este meio é feito) e do modo de interação verdadeiro entre o híperon produzido e os constituintes do meio. Como a maioria das partículas produzidas neste tipo de colisão são píons, uma primeira aproximação é considerar que o meio é constituído apenas de píons (pois a probabilidade do híperon encontrar píons em seu percurso será muito maior que a de encontrar um outro tipo de partícula). Estas partículas estariam em movimento caótico dentro do meio. O cálculo da polarização seria feito, levando-se em conta dois fatores: a interação elementar pión-híperon a baixas energias (algumas centenas de MeV) e o cálculo de médias, considerando flutuações estatísticas. Em [25] foi estudado principalmente o segundo elemento, deixando para uma etapa posterior o estudo da interação elementar pión-híperon (πY). Calculamos então a polarização para um híperon emergente de um elemento de matéria hadrônica e pudemos constatar que em média é possível sobrar uma polarização resultante diferente de zero (dependendo do potencial). Deste modo encontramos resultados qualitativamente de acordo com o comportamento dos dados experimentais.

O problema que restou foi justamente o de determinar a interação pión-híperon de um modo realístico, pois considerar a equação de Dirac com um potencial óptico arbitrário é apenas uma aproximação. Este é o principal objetivo deste trabalho, isto é, estudar as interações elementares de um modo consistente com o conhecimento

atual das propriedades dos híperons (ressonâncias, momentos magnéticos), para então calcular a polarização de anti-híperons em processos inclusivos a altas energias e verificar se os resultados estão de acordo com os dados.

Basicamente consideraremos as interações elementares através de lagrangianas efetivas com invariância quiral (incluindo termos de ressonâncias), calculando as amplitudes de espalhamento a baixas energias no referencial de centro de massa do par πY . Estes resultados serão usados para calcular a polarização média em processos inclusivos através do método de Monte Carlo. Finalmente compararemos os resultados obtidos com os dados experimentais. O modelo apresentado deve ser o mecanismo dominante na polarização de anti-híperons, mas para os híperons este mecanismo deve apenas ser uma correção (talvez desprezível) de outros mecanismos mais importantes, baseados no efeito de partícula dominante, como os descritos nos modelos anteriores [15]-[23].

O roteiro a ser seguido nesta tese será o seguinte: No capítulo II, faremos uma breve exposição dos dados experimentais existentes e dos modelos propostos para explicá-los. No capítulo III, faremos um estudo do espalhamento píon-híperon (a baixas energias) baseado em lagrangianas efetivas, fazendo analogia com a interação píon-nucleon. No capítulo IV, mostraremos como estes resultados podem ser usados para calcular a polarização em processos inclusivos a altas energias. No capítulo V, mostraremos os resultados finais e no capítulo VI, apresentaremos as conclusões finais e a discussão dos resultados.

II. Dados Experimentais e Modelos Teóricos

Este capítulo será dedicado a uma breve revisão da fundamentação do problema. Mostraremos os principais resultados experimentais para a polarização dos diversos híperons e anti-híperons e depois alguns modelos teóricos que foram propostos com a finalidade de explicar estes dados. No final, mostraremos a nossa proposta, que se aplica ao cálculo da polarização de anti-híperons.

II.1 - Dados Experimentais

As reações estudadas são processos inclusivos do tipo

$$p + A \rightarrow Y(\bar{Y}) + X \quad (1)$$

onde p é um próton, A , um núcleo, $Y(\bar{Y})$ é o híperon (anti-híperon) e X , muitas partículas não observadas. Os momentos dos prótons incidentes são da ordem de algumas centenas de GeV (de 60 a 800 GeV). Estuda-se então a polarização dos híperons produzidos, que aparece na direção

$$\hat{n} = \frac{\vec{p}_p \times \vec{p}_Y}{|\vec{p}_p \times \vec{p}_Y|} \quad (2)$$

Figura 1: Plano de Produção.

que é a direção normal ao plano de produção, definido pelo momento do próton incidente $\vec{p}_p$ e do híperon emergente $\vec{p}_Y$.

Na prática, incide-se um feixe de prótons, com um certo ângulo θ (entre 0.5 e 20 mrad tipicamente) em relação à direção x , na qual os híperons são produzidos. O plano de produção será o plano xz e a polarização aparecerá então na direção perpendicular, y (ver Figura 1). A polarização dos híperons é determinada a partir da assimetria observada nos decaimentos

$$\Lambda \rightarrow p\pi^- ,$$

$$\bar{\Lambda} \rightarrow \bar{p}\pi^+ ,$$

$$\Sigma^+ \rightarrow p\pi^0 ,$$

$$\bar{\Sigma}^- \rightarrow \bar{p}\pi^0 ,$$

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda\pi^- \rightarrow p\pi^-\pi^- ,$$

$$\bar{\Xi}^+ \rightarrow \bar{\Lambda}\pi^+ \rightarrow \bar{p}\pi^+\pi^+ ,$$

que, para o decaimento $\Lambda \rightarrow p\pi$ no referencial de repouso de Λ , é dada por

$$\frac{dN}{d(\cos \theta_i)} = \frac{1}{2}(1 + \alpha_\Lambda P_{\Lambda i} \cos \theta_i) , \quad (3)$$

onde i é a direção espacial (x, y ou z), θ_i são os ângulos em relação a direção i , $P_{\Lambda i}$, a polarização (na direção i) e α_Λ , o parâmetro de assimetria (uma constante [1]).

Figura 2: Polarização de Λ e $\bar{\Lambda}$ como função de p_t e de x_f , usando os dados de [6] (feixe de 400 GeV), onde os símbolos brancos (quadrados, etc.) referem-se às anti-partículas e os pretos às partículas.

Para a polarização de Σ a expressão é análoga pois o decaimento é $\Sigma \rightarrow p\pi$. Para Ξ , ocorrem dois decaimentos $\Xi \rightarrow \Lambda\pi \rightarrow p\pi\pi$, e assim utiliza-se (3) para estudar a polarização de Λ , e a polarização de Ξ pode ser calculada [11] a partir de

$$\vec{P}_\Lambda = \frac{\alpha_\Xi \hat{\Lambda} + \gamma_\Xi P_\Xi + (1 - \gamma_\Xi)(\hat{\Lambda} \cdot \vec{P}_\Xi) \hat{\Lambda} + \beta_\Xi (\vec{P}_\Xi \times \hat{\Lambda})}{1 + \alpha_\Xi \hat{\Lambda} \cdot \vec{P}_\Xi}, \quad (4)$$

onde $\alpha_\Xi, \beta_\Xi, \gamma_\Xi$ são constantes, $\hat{\Lambda}$, a direção de Λ e $\vec{P}_\Lambda$ e $\vec{P}_\Xi$, as polarizações.

Os principais resultados de polarização para Λ, Σ, Ξ e para os respectivos anti-híperons como função do momento transversal, p_t , ou da variável de Feynman, x_f , estão nas figuras 2, 3 e 4 (os ângulos de espalhamento estão indicados nas figuras).

Figura 3: Polarização de Σ e $\bar{\Sigma}$ para um ângulo de 5 mrad usando os dados de [12] (feixe de 800 GeV).

Como podemos observar na Figura 2, a polarização de Λ é negativa e aumenta

(em módulo) com p_t desde 0 (para $p_t = 0$) até valores entre -0.2 e -0.4 (dependendo do ângulo de produção). Para menores ângulos (maiores x_f) as polarizações são maiores. A Figura 2 também mostra que a polarização de Λ aumenta com x_f , até valores próximos de -0.4 para x_f próxima de 0.8. Já a polarização de $\bar{\Lambda}$ parece ser praticamente nula (ou menor que 0.05) no intervalo de p_t estudado.

Figura 4: Polarização de Ξ^- e Ξ^+ usando os dados de [11] (com feixes de 400 e 800 GeV).

É interessante observar que enquanto se obtém partículas Λ com valores altos de x_f (até quase 0.8), os $\bar{\Lambda}$ produzidos estão na região de baixos x_f (entre 0 e 0.3), o que mostra que Λ é produzido como partícula dominante enquanto que $\bar{\Lambda}$ não, o que significa que a também a polarização destas partículas é proveniente de mecanismos diferentes. Entretanto, o fato de $P_{\bar{\Lambda}}$ ser praticamente nula criou uma idéia falsa de

que somente os híperons (e não os anti-híperons) seriam polarizados inclusivamente, motivando o aparecimento de modelos, aplicáveis somente para os híperons (veja na discussão da seção II.2 abaixo).

A Figura 3 mostra as polarizações de Σ^+ e $\bar{\Sigma}^-$, que diferentemente de Λ são positivas (atingindo um máximo da ordem de 0.15), sendo que a polarização de $\bar{\Sigma}^-$ é um pouco menor.

Já as polarizações de Ξ^- e $\bar{\Xi}^+$ (Figura 4) são negativas e chegam a valores da ordem de -0.15.

A dependência da polarização com o momento do feixe foi investigada e não apresentou diferenças significativas. A variação do alvo (Be, Cu, Pt,...) também não acarreta diferenças significativas no resultado final.

A Figura 5 mostra polarizações de partículas resultantes de um feixe de Σ^- a 330 GeV, onde se vêem diferenças significativas de comportamento em relação aos dados com o feixe de prótons, principalmente para Λ , cujo módulo da polarização diminuiu e para Σ^+ onde houve uma troca de sinal. A polarização de $\bar{\Lambda}$ permaneceu muito pequena (próxima de zero), enquanto que a polarização de Ξ^- permaneceu negativa, porém valores maiores foram obtidos (até próximos de -0.35, para $\langle x_f \rangle = 0.52$ e $p_t \sim 1$). Estes fatos, juntamente com a independência do alvo, suportam a idéia de que a polarização de híperons é de fato em grande parte um efeito de partícula dominante, ao passo que a de anti-híperons tem uma origem totalmente diferente.

Observando as figuras 2, 3, 4 e 5, podemos verificar a variedade de comportamento que existe nas polarizações dos diversos híperons, e estes resultados motivaram o aparecimento de um grande número de trabalhos teóricos nos últimos 20 anos. Contudo, a explicação dos dados experimentais se mostrou uma tarefa bem

Figura 5: Polarizações com um feixe de Σ^- [14] (com momento igual a 330 GeV).

difícil. A maioria dos modelos existentes explica somente a polarização de Λ (alguns explicam a de Σ também), mas não é capaz de explicar a causa da polarização dos anti-híperons.

II.2 - Modelos Teóricos

Nesta seção serão apresentados resumidamente alguns dos modelos mais aceitos na explicação da polarização de híperons, suas principais virtudes e problemas. Esta exposição não será feita com a intenção de apresentar uma revisão completa dos modelos existentes, mas sim com a intenção de ser ilustrativa e situar o problema quanto às dificuldades existentes e ao que vem sendo feito a respeito.

A aplicação direta da QCD no estudo da polarização de híperons ainda não foi feita, considerada a dificuldade de utilizar as lagrangianas e o formalismo desta teoria. O que existe são vários modelos fenomenológicos para considerar o mecanismo de produção de híperons a partir de prótons, ambos compostos por quarks com spin de $SU(6)$.

II.2.1 - Modelo de Recombinação de Quarks

Neste modelo supõe-se que os hadrons são compostos por quarks de valência e por quarks do mar. Os bárions possuem três quarks qqq de valência (uud para o próton) e muitos quarks do mar. Já os mésons possuem um par $q\bar{q}$ de valência. Para se produzir uma partícula Λ (uds) a partir de um próton (uud) incidente, deve-se trocar um dos quarks u por um quark s (ver Figura 6). Já para um Ξ^- (dss), deve-se trocar o par uu por um par ss e assim por diante. Note-se que se se quisesse produzir um anti-híperon ($\bar{q}\bar{q}\bar{q}$) a partir de um próton, dever-se-iam trocar os três quarks de valência: (uud) por ($\bar{u}\bar{d}\bar{s}$) no caso de $\bar{\Lambda}$, por exemplo.

Figura 6: Recombinação de Quarks.

Em [16], T.A. Degrand e H.I. Miettinen propuseram que a polarização dos híperons produzidos surge ao se trocar os quarks. Por exemplo, para a produção de Λ o próton incidente necessita de um quark s do mar que, portanto, terá um momento muito menor que o do próton. Ao acelerar este quark s de um modo não colinear com sua velocidade média, um termo de precessão de Thomas aparecerá na hamiltoniana, o que significa um potencial efetivo (com interação spin-órbita) do tipo

$$V_{ef} = V(r) - \frac{1}{2m^2} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} \vec{L} \cdot \vec{S} \quad , \quad (5)$$

polarizando o quark s e assim o híperon resultante. Pode-se obter deste modo a polarização de Λ com bom acordo com os dados. Este modelo pode ser aplicado também a outros híperons com algum ingrediente adicional, mas o problema é que ele é incapaz de produzir a polarização de anti-híperons pelas razões citadas acima e também discutidas em II.1 . Este modelo foi proposto numa época em que só se conheciam dados de $\bar{\Lambda}$, ou seja, $P_{\bar{\Lambda}} = 0$. Com a obtenção de dados para outros anti-híperons, $\bar{\Sigma}$ e $\bar{\Xi}$, com $P \neq 0$, faz-se necessário dar uma descrição alternativa. Atualmente, existem outros modelos que seguem esta mesma linha, como em [22], por exemplo, mas a impossibilidade de explicar a polarização de anti-híperons continua.

II.2.2 - Modelo de Lund

O modelo de Lund [15] é bem semelhante ao anterior, a polarização aparece como uma consequência da troca de quarks. A diferença está no modo de interação entre os quarks. Imagina-se que durante a colisão o próton incidente fragmenta-se em um quark u e um diquark ud . Ao afastar-se o diquark ud do quark u , será criado um campo de cor essencialmente unidimensional (uma corda), que quando esticada suficientemente gera um par $q\bar{q}$. Para a produção de Λ o par criado deve ser $s\bar{s}$ (veja Figura 7).

Figura 7: Polarização no modelo de Lund.

O quark s será produzido com um momento angular na direção

$$\hat{L} = \frac{\vec{q} \times \vec{k}_t}{|\vec{q} \times \vec{k}_t|}, \quad (6)$$

onde $\vec{q}$ é o momento do diquark inicial e $\vec{k}_t$, o momento transversal do quark s . Pela conservação do momento angular total, o quark s deverá então ser produzido com spin compensando o momento angular orbital, o que irá fornecer um híperon produzido polarizado. Contudo a troca de dois ou três quarks fica muito difícil com este modelo, o que mostra a necessidade de um modelo melhor. Um outro problema é que este modelo fornece uma polarização negativa, que está de acordo para Λ , mas o que fazer no caso de Σ ?

II.2.3 - Modelo de Quarks Constituintes

Outro modelo que foi usado para explicar a polarização de híperons foi o de quarks constituintes [18]-[20]. Faz-se uma descrição não perturbativa dos hadrons, na qual estes são compostos de três quarks constituintes cercados por um condensado de quarks. Quarks constituintes não são partículas, mas sim quarks de corrente cercados por uma nuvem de pares $q\bar{q}$, deste modo possuindo massas grandes (da ordem de 300 MeV), que podem ser calculadas a partir de (para U , por exemplo)

$$m_U = m_u - g_4 \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle - 2g_6 \langle 0 | \bar{d}d | 0 \rangle \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle \quad (7)$$

onde g_4 e g_6 são constantes (foram usadas letras maiúsculas para quarks constituintes e minúsculas para quarks de corrente). Esta estrutura baseia-se na QCD e no modelo de NJL.

O raio dos quarks constituintes pode ser considerado como o raio da nuvem

$$r_Q = \frac{\xi}{m_Q} \quad , \quad (8)$$

onde $\xi = 1/3$. O fator de forma é

$$F_Q(q) = \left(1 + \frac{\xi^2 q^2}{m_Q^2}\right)^{-2} \quad , \quad (9)$$

a distribuição de matéria é aproximadamente exponencial

$$d_Q(b) \propto e^{-\frac{m_Q}{\xi} b} \quad , \quad (10)$$

e o spin (de um quark constituinte U , por exemplo) é dado por

$$J_U = 1/2 = J_u + J_{q\bar{q}} + \langle L_{q\bar{q}} \rangle \quad , \quad (11)$$

de onde pode se observar que o spin do quark constituinte depende do spin do quark de corrente e do momento angular médio da nuvem.

As interações se dão através da superposição das nuvens, que assim se excitam produzindo novos quarks constituintes. Ao se produzir um quark constituinte S por exemplo, este sofrerá espalhamento múltiplo e assim se polarizará, e este é o mecanismo para a produção de Λ polarizado.

O problema deste modelo é que os autores supõe que para $\bar{\Lambda}$ o mecanismo deva ser outro, que depende de uma dinâmica de fragmentação ainda não disponível.

II.2.4 - OPER

Em [17], J. Soffer e N. A. Tornquist procuram explicar a polarização de híperons através do OPER (Reggeized one pion exchange).

Figura 8: Colisão pp no OPER.

Os autores supõe que o processo inclusivo

$$p + p \rightarrow \Lambda + X \quad (12)$$

é dominado pelo subprocesso

$$\pi + p \rightarrow \Lambda + K \quad , \quad (13)$$

ou seja, que a interação pp é dominada pela troca de um pión (Figura 8). Efetuando os cálculos, com a utilização de dados experimentais de $\pi + p \rightarrow \Lambda + K$, os autores conseguem resultados com bom acordo com os dados experimentais para o processo (12) Mas fica uma questão: qual partícula deve ser trocada para se obter os anti-híperons?

Existem outros modelos mais recentes, como [21]-[23] (em [23] estuda-se a polarização de $\bar{\Lambda}$ também, conseguindo uma parametrização em termos de funções de fragmentação com polarização, entretanto, trata-se de uma parametrização ad-hoc). Podemos observar, de um modo geral, que a polarização de híperons consegue ser explicada, mas a dos anti-híperons, não. Isto sugere que a polarização de anti-híperons deve ocorrer devido a um mecanismo de produção indireto (o que é bem razoável pois, como discutido em II.1, estes são produzidos com valores baixos de x_f), como a emissão térmica a partir de um meio quente, e é justamente este o assunto da próxima seção.

II.2.5 - Modelo Hidrodinâmico

Após a breve exposição de alguns modelos existentes e de suas limitações vamos passar a um modelo que possui interesse direto para este trabalho, pois foi o ponto de partida para o nosso estudo.

Os modelos hidrodinâmicos supõe que durante as interações hadrônicas a altas energias forma-se um meio quente, que se expande e se resfria emitindo então as partículas que são observadas. Por este mecanismo, pode-se produzir qualquer tipo de partícula (ou anti-partícula). As partículas produzidas irão interagir com o meio que as cerca antes de ficarem livres. Em [24] Y. Hama e T. Kodama usaram um

modo simples para representar a interação dos híperons produzidos com este meio, ou seja, considerar que os híperons obedecem à equação de Dirac

$$E\Psi = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m + V)\Psi \quad (14)$$

onde o potencial (que em [24] foi tomado como um potencial óptico constante) representa a interação com o meio para $r < R$, e fora do meio, $V = 0$ (vácuo). Resolvendo a equação de Dirac dentro e fora do meio, pode-se calcular a polarização com a qual o híperon emerge.

Figura 9: Produção de híperons no modelo hidrodinâmico.

Devemos ressaltar que embora os híperons sejam produzidos com momentos da ordem de centenas de GeV, a energia relativa entre os híperons e o meio é baixa (centenas de MeV), pois estes são produzidos termicamente no interior de uma parte do fluido, e o fluido é que possui uma rapidez grande no sistema de laboratório. Considerando que o fluido está em expansão, com uma distribuição de rapidez aproximadamente dada por

$$\frac{d\rho}{dy} \propto e^{-\alpha y^2} \quad , \quad (15)$$

pode-se então obter a polarização resultante fazendo um cálculo de média sobre as polarizações dos híperons provenientes de diferentes partes do fluido. O modelo consegue descrever razoavelmente bem as características experimentais, como a dependência com x_f e p_t se forem tomados os valores adequados para as partes reais e imaginárias do potencial. O único problema, é que para descrever as polarizações das diferentes partículas, necessita-se de diferentes valores para o potencial óptico, que neste modelo é um parâmetro fenomenológico. Observando este modelo ficam então algumas questões a serem respondidas, como o motivo de necessitar-se de diferentes valores do potencial para as diferentes partículas e principalmente, qual a origem do potencial.

II.2.6 - Modelo Microscópico

As questões que surgiram no estudo da seção anterior poderiam ser esclarecidas observando o modelo com maior detalhe. O potencial óptico nada mais é do que uma descrição macroscópica aproximada de uma média de processos elementares que ocorrem no interior do meio em questão. Devemos então tentar descobrir quais são estes processos (principalmente os mais importantes), e qual o seu efeito sobre os híperons produzidos.

Sabe-se que em colisões hadrônicas a altas energias a maioria das partículas produzidas são píons. O que devemos concluir então é que durante a colisão, quando o meio quente já se expandiu e se resfriou o suficiente, é composto predominantemente por píons. No interior deste meio é que se encontram os híperons produzidos, e deste modo, as interações que estes sofrem são em sua maioria com píons (vamos desprezar as interações com outros tipos de partículas, pois sabe-se que elas são em

número muito menor) e a polarização deve ocorrer como um efeito médio destas interações.

Formulando mais especificamente, para o cálculo de polarização média decorrente de interações finais a partir de uma descrição microscópica deveremos considerar dois elementos: a interação pión híperon a baixas energias e o cálculo de médias (utilizando as interações elementares) considerando flutuações estatísticas de um meio térmico em expansão.

Em [25] focalizamos a nossa atenção ao segundo destes elementos e, utilizando uma descrição simples para as interações pión-híperon (equação de Dirac com um potencial óptico central), fizemos o cálculo de polarização média para um elemento de fluido (onde as partículas são produzidas termicamente). Constatamos que a polarização não se anula totalmente com este procedimento.

Estes resultados forneceram sustentação para que o nosso estudo continuasse e é este o objetivo do presente trabalho. Desejamos então, em primeiro lugar, fazer uma descrição realística para a interação πY (para os vários tipos de híperons), o que não foi feito em [25], para então calcularmos a polarização média em processos inclusivos. Para as interações elementares utilizaremos lagrangianas efetivas com simetria quirial e a partir destas, calcularemos os diagramas de Feynman mais importantes a baixas energias (do tipo árvore). A inclusão das ressonâncias predominantes será feita. Usaremos então estes resultados para o cálculo de polarizações médias resultantes de processos inclusivos nos moldes de [25] e incluindo a expansão do fluido.

III. Interação Píon-Híperon a Baixas Energias

Como dissemos anteriormente, uma parte fundamental do modelo que estamos propondo é a descrição das interações microscópicas, que os híperons sofrem antes de escaparem do meio no qual foram produzidos. É razoável supor que as interações predominantes são as interações píon-híperon (devido ao grande número de píons produzidos nas colisões hadrônicas e nucleares a altas energias) a baixas energias, com momentos no referencial de centro de massa (do par πY) menores que ~ 500 MeV (que é a região dominada pelos processos elásticos e com troca de carga) e é ao estudo destas interações que dedicaremos este capítulo.

Infelizmente, devido às dificuldades experimentais e talvez a alguma falta de interesse dos físicos experimentais, nenhum dado experimental a respeito de colisões píon-híperon (seções de choque, etc.) existe. Estudos teóricos também são muito raros [26]-[29], existindo apenas cálculos de algumas defasagens (S e $P_{1/2}$) para interações $\pi\Lambda$, o que significa que há muito para ser feito. O que devemos fazer então é propor um modelo para as interações de nosso interesse. Mas como fazê-lo de um modo realístico?

Já que estas interações são tão mal conhecidas, o que parece mais natural é procurar sistemas semelhantes, que tenham sido bem estudados. O espalhamento πN , por outro lado, é muito bem estudado, com grande quantidade de dados existentes [30]-[31], e muitos modelos que explicam estes dados [32]-[39], principalmente a baixas energias (que é justamente a região do nosso interesse). É bem sabido que as ressonâncias representam um papel fundamental nos processos elásticos πN a baixas energias e dominam as seções de choque na maioria dos casos. Para o espalhamento $\pi^+ p$, por exemplo, a ressonância $\Delta^{++}(1232)$, domina quase que completamente a seção de choque a baixas energias.

Felizmente, muitas ressonâncias de híperons são conhecidas atualmente, e com as suas principais propriedades razoavelmente bem estudadas (e tabeladas) [40]. O que parece ser o mais razoável a fazer então, é utilizar um modelo que descreva bem o espalhamento πN e adaptá-lo para as diversas interações πY de interesse, incluindo as ressonâncias dominantes a baixas energias (o que significa supor que a baixas energias as seções de choque são dominadas pelos termos provenientes das ressonâncias) e os respectivos parâmetros (massas, larguras, etc.).

Um modelo que é adequado para estudar a interação πN é o modelo quiral relativístico com lagrangianas efetivas, apresentado em [39], [41] (que em [41] é usado para incluir a interação πN no cálculo de forças nucleares). Neste modelo são usados vários tipos de partículas intermediárias, inclusive ressonâncias. Este é um modelo realístico e que descreve bem os dados experimentais, mas ao aplicá-lo para o espalhamento πY nos deparamos com duas dificuldades: A primeira é que o modelo, como acontece em qualquer modelo efetivo, viola a unitariedade da matriz S . A segunda é que as constantes de acoplamento com as ressonâncias $Y\pi Y^*$

ainda não são conhecidas, devido ao desconhecimento deste tipo de interação. Na oportunidade em que estas dificuldades surgirem mostraremos como superá-las.

Como estamos interessados em estudar várias reações elásticas e com troca de carga simultaneamente (π^+ , π^- e π^0 com os híperons), um modo de diminuir o número de cálculos é usar o formalismo de isospin, descrito no apêndice A (seções A.5, A.6 e A.7), do qual usaremos vários resultados neste capítulo.

Neste capítulo, em primeiro lugar, mostraremos como as lagrangianas de [41] associadas a diagramas de Feynman (mostrados na Figura 1) podem ser usadas para o estudo do espalhamento πN . Em seguida, mostraremos como podemos adaptar este modelo para as interações πY , e calcularemos os observáveis de interesse (polarizações, seções de choque) no referencial de centro de massa do par πY (que são os resultados apresentados em [42]) que serão usados no próximo capítulo para calcular a polarização em processos inclusivos. Finalmente, mostraremos como estes resultados podem ser aplicados para antipartículas.

III.1 - Interação Píon-Núcleon

Atualmente, existem vários modelos que descrevem razoavelmente bem a interação πN . Um destes é o modelo quiral relativístico, com lagrangianas efetivas (apresentado em [39], [43]-[47]). Nesta seção faremos uma breve exposição dos principais pontos deste modelo para mostrar de um modo geral como trataremos a interação πY .

Para o estudo da interação πN , utilizam-se lagrangianas efetivas no cálculo de diagramas de Feynman (considerando os processos mais simples e a nível de árvore) que fornecem as amplitudes de espalhamento. Para o cálculo de defasagens deve-se

fazer a unitarização das amplitudes de espalhamento, pois os cálculos feitos deste modo (considerando apenas diagramas do tipo árvore) violam a unitariedade da matriz S .

A matriz de espalhamento $T_{\pi N}^{ab}$ para a interação πN possui uma forma geral

$$T_{\pi N}^{ba} = \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \left[A^+ + \frac{(k + k')}{2} B^+ \right] \delta_{ba} + \left[A^- + \frac{(k + k')}{2} B^- \right] i \epsilon_{bac} \tau^c \right\} u(\vec{p}) , \quad (1)$$

onde p e p' são os momentos inicial e final do nucleon, k e k' os momentos inicial e final do pión e a e b , as cargas inicial e final do pión. As amplitudes $A^\pm$ e $B^\pm$ são calculadas através da soma de contribuições devidas a interações com vários tipos de partículas intermediárias. A Figura 1 mostra os gráficos de interesse (suprimindo os gráficos cruzados, que nos cálculos são incluídos), utilizados em [41].

Figura 1: Diagramas para a Interação πN .

No caso do nucleon que possui isospin $1/2$, teremos $I = 3/2$ ou $1/2$, assim a decomposição da matriz $T_{\pi N}^{ba}$ em estados de isospin é

$$T_{\pi N}^{ba} = \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \left[A^{\frac{3}{2}} + \frac{(k + k')}{2} B^{\frac{3}{2}} \right] P_{\frac{3}{2}} + \left[A^{\frac{1}{2}} + \frac{(k + k')}{2} B^{\frac{1}{2}} \right] P_{\frac{1}{2}} \right\} u(\vec{p}) , \quad (2)$$

onde P_I são os operadores de projeção em estados de isospin (ver apêndice A). Comparando as expressões (1) e (2) podemos obter as relações das amplitudes provenientes dos gráficos $A^\pm$ e $B^\pm$ com as amplitudes para cada estado de isospin A^I e B^I ,

$$\begin{cases} A^{\frac{1}{2}} = A^+ + 2A^- , \\ A^{\frac{3}{2}} = A^+ - A^- , \end{cases} \quad (3)$$

e

$$\begin{cases} B^{\frac{1}{2}} = B^+ + 2B^- , \\ B^{\frac{3}{2}} = B^+ - B^- . \end{cases} \quad (4)$$

O modelo quiral para a interação πN com lagrangianas efetivas apresentado em [39] utiliza

$$\mathcal{L}_{\pi NN} = \frac{g}{2m} [\bar{N} \gamma_\mu \gamma_5 \vec{\tau} N] \cdot \partial^\mu \vec{\phi} , \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_{\pi N\Delta} = g_\Delta \left\{ \bar{\Delta}^\mu \left[g_{\mu\nu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \vec{M} N \right\} \cdot \partial^\nu \vec{\phi} + H.c. , \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{\rho NN} = \frac{g_0}{2} [\bar{N} \gamma_\mu \vec{\tau} N] \vec{\rho}^\mu + \frac{g_0}{2} \left[\bar{N} \left(\frac{\mu_p - \mu_n}{4m} \right) i \sigma_{\mu\nu} \vec{\tau} N \right] \cdot (\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu) , \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{\rho\pi\pi} = g_0 \vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{\phi} \times \partial^\mu \vec{\phi}) - \frac{g_0}{4m_\rho^2} (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi} \times \partial^\nu \vec{\phi}) , \quad (8)$$

onde N , Δ , $\vec{\phi}$ e $\vec{\rho}$ são o nucleon, delta, pion e rho, com massas m_N , m_Δ , m_π e m_ρ . μ_p e μ_n são os momentos magnéticos anômalos do próton e do nêutron, $\vec{M}$ e $\vec{\tau}$ são matrizes de isospin (Apêndice A) e Z , um parâmetro que representa a possibilidade de “ Δ -off-shell” possuir spin 1/2. A partir destas lagrangianas podemos obter as regras de Feynman para vértices e propagadores (Figura 2), que são usadas para o cálculo dos diagramas da Figura 1. As expressões correspondentes aos vértices são

$$V_{\pi NN} = \frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \tau^a , \quad (9)$$

$$V_{\pi N\Delta} = g_\Delta \left[k^\mu - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma^\mu \not{k} \right] M^a , \quad (10)$$

$$V_{\rho NN} = i \frac{g_0}{2} \left[\gamma^\mu + \frac{\mu_p - \mu_n}{2m} i \sigma^{\mu\lambda} q_\lambda \right] \tau^c , \quad (11)$$

$$V_{\rho\pi\pi} = -\epsilon_{abc} g_0 \left[k^\mu + k'^\mu - \frac{q \cdot k}{2m_\rho^2} (k'^\mu - k^\mu) \right] . \quad (12)$$

É importante ressaltar que no vértice $V_{\pi NN}$, dois nucleons estão ligados através de uma matriz de pauli τ^a (ver Apêndice A), que combina um pión e um núcleon em um núcleon. Já no vértice $V_{\pi N\Delta}$, aparece a matriz M^a (Apêndice A), que combina um pión e um nucleon em um Δ . As expressões dos vértices no espalhamento πY são

semelhantes a estas, mas deve-se tomar o cuidado de utilizar as matrizes adequadas para cada caso, pois existem híperons com diferentes isospins (estas matrizes estão no apêndice A).

Figura 2: Vértices e Propagadores para a Interação πN .

Já as expressões relativas aos propagadores são

$$i\Delta(q) = \frac{i}{q^2 - m_\pi^2} , \quad (13)$$

$$iS(p) = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} , \quad (14)$$

$$iG_{\mu\nu}(p) = -i \frac{\not{p} + m_\Delta}{p^2 - m_\Delta^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma_\mu \gamma_\nu - \frac{\gamma_\mu p_\nu}{3m_\Delta} + \frac{p_\mu \gamma_\nu}{3m_\Delta} - \frac{2p_\mu p_\nu}{3m_\Delta^2} \right] , \quad (15)$$

$$i\Delta_{\mu\nu}(q) = -i \frac{(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / m_\rho^2)}{q^2 - m_\rho^2} , \quad (16)$$

onde podemos notar que aparece o propagador de ressonância com spin 3/2, $G_{\mu\nu}$, que é uma interessante (e útil) característica para o nosso estudo.

O modelo inclui ainda um termo σ , o que é feito através de uma parametrização simples [32],[41], porém, versões mais recentes como [34] calculam esta contribuição a partir de lagrangianas efetivas. No nosso cálculo vamos então simplesmente incluir este termo através da parametrização de [41] com os mesmos parâmetros.

Resumindo, o procedimento adotado é o seguinte: A partir da soma das contribuições dos diagramas obtém-se as amplitudes $A^\pm$ e $B^\pm$ (que são simplesmente funções de s e t). Estas amplitudes relacionam-se com as amplitudes de isospin A^I e B^I através de (3) e (4). A partir destas amplitudes, obtemos as matrizes T^I (para cada isospin) que são usadas para calcular as amplitudes de espalhamento das reações que quisermos a partir das expressões do Apêndice A.5, e com estas, os observáveis de interesse.

Este modelo descreve razoavelmente bem os dados experimentais para o espalhamento πN a baixas energias [39] e por isso esperamos que o modelo adaptado ao espalhamento πY também foneça resultados confiáveis, e é a esta adaptação que dedicaremos as próximas seções.

III.2 - Interação $\pi\Lambda$

A interação $\pi\Lambda$ é a mais simples de todas, pois Λ possui isospin nulo e assim teremos apenas uma amplitude, dada por

$$T^{ba} = \bar{u}(\vec{p}') \left[A + \frac{(k + k')}{2} B \right] \delta_{ba} u(\vec{p}) , \quad (17)$$

Os diagramas que contribuem estão na Figura 3 (onde os termos cruzados estão omitidos porém considerados nos cálculos). Vamos simplesmente considerar a troca de Σ , σ e $\Sigma^*(1385)$, que é a ressonância de massa mais baixa (e atualmente está bem determinada [40]). A interação através de Λ e ρ não é possível por motivos de isospin. As lagrangianas são

$$\mathcal{L}_{\Lambda\pi\Sigma} = \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma}}{2m_\Lambda} [\bar{\Sigma}_\alpha \gamma_\mu \gamma_5 \Lambda] \partial^\mu \phi_\alpha + H.c. , \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_{\Lambda\pi\Sigma^*} = g_{\Lambda\pi\Sigma^*} \left\{ \bar{\Sigma}^{*\mu}_\alpha \left[g_{\mu\nu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \Lambda \right\} \partial^\nu \phi_\alpha + H.c. , \quad (19)$$

além do termo da troca de σ .

Figura 3: Diagramas para a Interação $\pi\Lambda$.

Na troca de Σ existe a contribuição de um termo direto e de um cruzado e a amplitude total é a soma dos dois termos, onde os índices d e c significam direto e cruzado (Figura 4). Calculando os diagramas teremos amplitudes do tipo

$$\begin{aligned} T_d &= \bar{u}(\vec{p}') \left[A_d + \frac{(k + k')}{2} B_d \right] u(\vec{p}) \\ T_c &= \bar{u}(\vec{p}') \left[A_c + \frac{(k + k')}{2} B_c \right] u(\vec{p}) , \end{aligned} \quad (20)$$

que somadas fornecem as contribuições totais

$$\begin{cases} A_\Sigma = A_d + A_c \\ B_\Sigma = B_c + B_d \end{cases} .$$

Figura 4: Diagramas d e c para a interação através de Σ .

Vamos calcular explicitamente as contribuições da Figura 4, considerando o caso geral com uma partícula incidente de massa m e formando uma partícula intermediária de massa m^* . O termo direto (Figura 4) é

$$\begin{aligned} T_d &= -\bar{u}(\vec{p}') \left(\frac{g}{2m} \not{k}' \gamma_5 \right) S(p+k) \left(\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \right) u(\vec{p}) \\ &= -\frac{g^2}{4m^2} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \not{k}' \gamma_5 \frac{(\not{p} + \not{k} + m^*)}{(p+k)^2 - m^{*2}} \not{k} \gamma_5 \right\} u(\vec{p}) \\ &= \frac{g^2}{4m^2(s - m^{*2})} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \not{k}' (m^* \not{k} - \mu^2 - \not{p} \not{k}) \right\} u(\vec{p}) \\ &= \frac{g^2}{4m^2(s - m^{*2})} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ m^* \not{k}' \not{k} + \not{k}' (-\mu^2 - 2p \cdot k + \not{k} \not{p}) \right\} u(\vec{p}) \\ &= \frac{g^2}{4m^2(s - m^{*2})} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ (m^* + m) \not{k}' \not{k} - (s - m^2) \not{k}' \right\} u(\vec{p}) \\ &= \frac{g^2}{4m^2(s - m^{*2})} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ (m^* + m)[(s - m^2) - 2m \not{k}] - (s - m^2) \not{k}' \right\} u(\vec{p}) \\ &= \frac{g^2}{4m^2(s - m^{*2})} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ (m^* + m)(s - m^2) - [2m(m + m^*) + s - m^2] \frac{\not{k}' + \not{k}}{2} \right\} u(\vec{p}) , \end{aligned} \quad (21)$$

onde foram usadas algumas identidades do Apêndice A.4. Já o termo cruzado pode ser calculado de modo semelhante

$$\begin{aligned} T_c &= -\frac{g^2}{4m^2} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \not{k} \gamma_5 \frac{(\not{p} - \not{k}' + m^*)}{(p-k')^2 - m^{*2}} \not{k}' \gamma_5 \right\} u(\vec{p}) \\ &= \frac{g^2}{4m^2(u - m^{*2})} \bar{u}(\vec{p}') \left\{ (m^* + m)(u - m^2) + [2m(m + m^*) + u - m^2] \frac{\not{k}' + \not{k}}{2} \right\} u(\vec{p}) . \end{aligned}$$

E deste modo

$$\begin{aligned}
A_d &= \frac{g^2(m+m^*)(s-m^2)}{4m^2(s-m^{*2})} , \\
A_c &= \frac{g^2(m^*+m)(u-m^2)}{4m^2(u-m^{*2})} , \\
B_d &= \frac{g^2[m^2-s-2m(m+m^*)]}{4m^2(s-m^{*2})} , \\
B_c &= \frac{g^2[2m(m+m^*)+u-m^2]}{4m^2(u-m^{*2})} .
\end{aligned} \tag{22}$$

que para $m^* = m$ se reduzem a

$$\begin{aligned}
A_d &= A_c = \frac{g^2}{2m} , \\
B_d &= -\frac{g^2}{4m^2} - \frac{g^2}{s-m^2} , \\
B_c &= \frac{g^2}{4m^2} + \frac{g^2}{u-m^2} ,
\end{aligned} \tag{23}$$

que são as mesmas expressões encontradas em [41] para o espalhamento πN . Para se obter o termo representado pelo diagrama 3a, devemos tomar $m = m_\Lambda$, $m^* = m_\Sigma$ e $g = g_{\Lambda\pi\Sigma}$. Somando as contribuições dos diagramas direto e cruzado obtemos

$$\begin{aligned}
A_\Sigma &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma}^2}{4m_\Lambda^2} (m_\Lambda + m_\Sigma) \left\{ \frac{s-m_\Lambda^2}{s-m_\Sigma^2} + \frac{u-m_\Lambda^2}{u-m_\Sigma^2} \right\} , \\
B_\Sigma &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma}^2}{4m_\Lambda^2} \left\{ \frac{m_\Lambda^2-s-2m_\Lambda(m_\Lambda+m_\Sigma)}{s-m_\Sigma^2} + \frac{2m_\Lambda(m_\Lambda+m_\Sigma)+u-m_\Lambda^2}{u-m_\Sigma^2} \right\} .
\end{aligned} \tag{24}$$

O diagrama 3b para a troca de $\Sigma^*(1385)$ pode ser calculado de modo similar ao feito acima para a troca de Σ (tomando o cuidado de inserir o propagador de ressonância com spin 3/2 $G_{\mu\nu}$). Para o diagrama direto obtemos

$$T_d = g_{\Lambda\pi\Sigma^*}^2 \bar{u}(\vec{p}') \left[k'_\mu - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_\mu \not{k}' \right] G^{\mu\nu}(p+k) \left[k_\nu - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_\nu \not{k} \right] u(\vec{p}) , \tag{25}$$

que desenvolvida e somada a do diagrama cruzado fornece

$$A_{\Sigma^*} = \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}^2}{3m_\Lambda} \left\{ \frac{\nu_{\Sigma^*}}{\nu_{\Sigma^*}^2 - \nu^2} \hat{A} - \frac{m_\Lambda^2 + m_\Lambda m_{\Sigma^*}}{m_{\Sigma^*}^2} (2m_{\Sigma^*}^2 + m_\Lambda m_{\Sigma^*} - m_\Lambda^2 + 2m_\pi^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4m_\Lambda}{m_{\Sigma^*}^2} [(m_\Lambda + m_{\Sigma^*})Z + (2m_{\Sigma^*} + m_\Lambda)Z^2]k \cdot k' \Big\} , \\
B_{\Sigma^*} &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}^2}{3m_\Lambda} \left\{ \frac{\nu}{\nu_{\Sigma^*}^2 - \nu^2} \hat{B} - \frac{8m_\Lambda^2 \nu Z^2}{m_{\Sigma^*}^2} \right\} , \tag{26}
\end{aligned}$$

onde $\nu = (s - u)/4m_\Lambda$, $\nu_{\Sigma^*} = (m_{\Sigma^*}^2 - m_\Lambda^2 - k \cdot k')/2m_\Lambda$ (como definidos no Apêndice A) e

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \frac{(m_{\Sigma^*} + m_\Lambda)^2 - m_\pi^2}{2m_{\Sigma^*}^2} \left[2m_{\Sigma^*}^3 - 2m_\Lambda^3 - 2m_\Lambda m_{\Sigma^*}^2 - 2m_\Lambda^2 m_{\Sigma^*} + m_\pi^2(2m_\Lambda - m_{\Sigma^*}) \right] + \\
&+ \frac{3}{2}(m_\Lambda + m_{\Sigma^*})t , \\
\hat{B} &= \frac{1}{2m_{\Sigma^*}^2} \left[(m_{\Sigma^*}^2 - m_\Lambda^2)^2 - 2m_\pi^2(m_{\Sigma^*}^2 + m_\Lambda^2) + m_\pi^4 \right] + \frac{3}{2}t . \tag{27}
\end{aligned}$$

Para o termo σ , será usada simplesmente a parametrização de [41],

$$\begin{aligned}
A_\sigma &= a + bt \\
B_\sigma &= 0 , \tag{28}
\end{aligned}$$

onde usaremos os parâmetros de [41], $a = 1.05m_\pi^{-1}$ e $b = -0.80m_\pi^{-3}$ (para ter uma idéia aproximada da contribuição).

Estamos agora interessados em expandir as amplitudes calculadas em ondas parciais. Vamos descrever brevemente o procedimento que vamos adotar para fazer esta expansão, de modo semelhante ao encontrado em outros lugares, como [39], [48]-[51]. Inicialmente, vamos definir a matriz M como

$$M = \frac{T}{8\pi\sqrt{s}} = \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \bar{u}(\vec{p}') \left[A + \frac{(k + k')}{2} B \right] u(\vec{p}) , \tag{29}$$

com

$$u^\alpha(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E + m}} \begin{pmatrix} E + m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \chi^\alpha , \tag{30}$$

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu = \begin{pmatrix} k_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_0 \end{pmatrix} , \tag{31}$$

veja Apêndice A para detalhes da notação . Vamos continuar os cálculos, agora no referencial de centro de massa (até agora os cálculos estavam em termos de invariantes), onde os módulos dos momentos são iguais $k = k' = p = p'$ e chamaremos simplesmente de k . O ângulo de espalhamento é θ e $s = (E + k_0)^2$.

A matriz de espalhamento pode também ser expressa como

$$M = f(k, \theta) + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} g(k, \theta) = f_1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})}{kk'} f_2 \quad , \quad (32)$$

onde $\hat{n}$ é o vetor normal ao plano de espalhamento, e é dado por

$$\hat{n} = \frac{\vec{k} \times \vec{k}'}{|\vec{k} \times \vec{k}'|} \quad . \quad (33)$$

As amplitudes f e g podem ser expandidas em ondas parciais como

$$\begin{aligned} f(k, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+} + lf_{l-}] P_l(x) \quad , \\ g(k, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} [f_{l-} - f_{l+}] P_l^{(1)}(x) \quad , \end{aligned} \quad (34)$$

onde as amplitudes parciais dependem das defasagens

$$f_{l\pm} = \frac{1}{2ik} [e^{2i\delta_{l\pm}} - 1] = \frac{e^{i\delta_{l\pm}}}{k} \text{sen}(\delta_{l\pm}) \quad . \quad (35)$$

Nesta tese decidimos calcular as amplitudes de ondas parciais através de (veja o Apêndice A)

$$f_{l\pm} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [P_l(x) f_1(x) + P_{l\pm 1}(x) f_2(x)] dx \quad . \quad (36)$$

A partir das expressões (30) e (31), podemos calcular

$$\begin{aligned} \bar{u}(\vec{p}') u(\vec{p}) &= (E + m) - (E - m) \cos(\theta) - i(E - m) \text{sen}(\theta) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \\ \bar{u}(\vec{p}') \not{k} u(\vec{p}) &= (E + m)(\sqrt{s} - m) + (\sqrt{s} + m)(E - m) \cos(\theta) + \\ &\quad + i(E - m)(\sqrt{s} + m) \text{sen}(\theta) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \quad , \end{aligned} \quad (37)$$

o que leva a

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{(E + m)}{8\pi\sqrt{s}} [A + (\sqrt{s} - m)B] , \\ f_2 &= \frac{(E - m)}{8\pi\sqrt{s}} [-A + (\sqrt{s} + m)B] . \end{aligned} \quad (38)$$

Note que no caso geral as amplitudes f_1 , f_2 , f e g e as matrizes M e T devem ter índices de isospin (são definidas para os vários estados de isospin) como f_1^I e assim por diante. Aqui estamos omitindo estes índices, pois para o espalhamento $\pi\Lambda$, só existe um estado, o que torna o índice desnecessário, mas nos outros casos de interações πY , devemos considerá-lo explicitamente.

De posse destas expressões, temos tudo o que precisamos para o cálculo das amplitudes $f_{1\pm}$. As amplitudes A e B são calculadas diretamente dos gráficos de Feynman, com as quais calculamos f_1 e f_2 a partir das expressões (38), que são usadas em (36) para obter a decomposição da matriz de espalhamento em ondas parciais (34).

Vamos então calcular explicitamente as amplitudes f_S , f_{P1} e f_{P3} , para os três tipos de interação considerados no espalhamento $\pi\Lambda$: trocas de σ , Σ e Σ^* (1385).

Para o caso de σ , que é o mais simples, temos A_σ e B_σ dados por (28). Sabendo que $t = 2k^2x - 2k^2$, podemos calcular f_1 e f_2 explicitamente como função de $x = \cos \theta$, onde θ é o ângulo de espalhamento no referencial de centro de massa do par $\pi\Lambda$, para então usar a expressão (36), e integrando em x , calcular as contribuições para cada onda parcial como função de k . Assim

$$A_\sigma = a - 2k^2b + 2k^2bx = \alpha + \beta x , \quad (39)$$

e sabendo que

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

teremos

$$A_\sigma = \alpha P_0 + \beta P_1 . \quad (40)$$

Deste modo,

$$f_1 = \frac{(E + m_\Lambda)}{8\pi\sqrt{s}}[A + (\sqrt{s} - m_\Lambda)B] = \frac{(E + m_\Lambda)}{8\pi\sqrt{s}}[\alpha P_0 + \beta P_1] , \quad (41)$$

$$f_2 = \frac{(E - m_\Lambda)}{8\pi\sqrt{s}}[-A + (\sqrt{s} + m_\Lambda)B] = \frac{(m_\Lambda - E)}{8\pi\sqrt{s}}[\alpha P_0 + \beta P_1] . \quad (42)$$

Inserindo então f_1 e f_2 na expressão (36), e usando as relações de ortogonalidade para polinômios de Legendre (19) do Apêndice A, podemos calcular

$$\begin{aligned} f_S^\sigma &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1(x)P_0(x) + f_2(x)P_1(x)]dx = \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \left[\alpha(E + m_\Lambda) + \frac{\beta}{3}(m_\Lambda - E) \right] , \\ f_{P_1}^\sigma &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1(x)P_1(x) + f_2(x)P_0(x)]dx = \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \left[\frac{(E + m_\Lambda)}{3}\beta + \alpha(m_\Lambda - E) \right] , \\ f_{P_3}^\sigma &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [f_1(x)P_1(x) + f_2(x)P_2(x)]dx = \beta \frac{(E + m_\Lambda)}{24\pi\sqrt{s}} . \end{aligned}$$

Os resultados finais são

$$\begin{aligned} f_S^\sigma &= \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \left[(E + m_\Lambda)(a - 2k^2b) + 2k^2b \frac{(m_\Lambda - E)}{3} \right] , \\ f_{P_1}^\sigma &= \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \left[\frac{2k^2b(E + m_\Lambda)}{3} + (m_\Lambda - E)(a - 2k^2b) \right] , \\ f_{P_3}^\sigma &= k^2b \frac{(E + m_\Lambda)}{12\pi\sqrt{s}} . \end{aligned} \quad (43)$$

Vamos agora estudar as contribuições do termo Σ . Calculando f_1 e f_2 e mostrando explicitamente a dependência em x , teremos

$$f_1 = a_1 + \frac{b_1 + c_1 x}{\gamma + 2k^2 x} \quad (44)$$

com

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{g^2(E + m_\Lambda)}{32\pi\sqrt{s}m_\Lambda^2(s - m_\Sigma^2)} \left\{ (s - m_\Lambda^2)(2m_\Lambda + m_\Sigma - \sqrt{s}) + 2m_\Lambda(m_\Lambda + m_\Sigma)(m_\Lambda - \sqrt{s}) \right\} , \\
b_1 &= \frac{g^2(E + m_\Lambda)}{32\pi\sqrt{s}m_\Lambda^2} \left\{ (2Ek_0 - m_\pi^2)(\sqrt{s} + m_\Sigma) + 2m_\Lambda(m_\Lambda + m_\Sigma)(m_\Lambda - \sqrt{s}) \right\} , \\
c_1 &= \frac{g^2(E + m_\Lambda)(\sqrt{s} + m_\Lambda)}{16\pi\sqrt{s}m_\Lambda^2} k^2 , \\
\gamma &= 2Ek_0 - m_\pi^2 - m_\Lambda^2 + m_\Sigma^2
\end{aligned} \tag{45}$$

e

$$f_2 = a_2 + \frac{b_2 + c_2 x}{\gamma + 2k^2 x} \tag{46}$$

com

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{g^2(E - m_\Lambda)}{32\pi\sqrt{s}m_\Lambda^2(s - m_\Sigma^2)} \left\{ (m_\Lambda^2 - s)(2m_\Lambda + m_\Sigma + \sqrt{s}) - 2m_\Lambda(m_\Lambda + m_\Sigma)(m_\Lambda + \sqrt{s}) \right\} , \\
b_2 &= \frac{g^2(E - m_\Lambda)}{32\pi\sqrt{s}m_\Lambda^2} \left\{ (2Ek_0 - m_\pi^2)(\sqrt{s} - m_\Sigma) - 2m_\Lambda(m_\Lambda + m_\Sigma)(m_\Lambda + \sqrt{s}) \right\} , \\
c_2 &= \frac{g^2(E - m_\Lambda)(\sqrt{s} - m_\Lambda)}{16\pi\sqrt{s}m_\Lambda^2} k^2 .
\end{aligned} \tag{47}$$

Podemos calcular as amplitudes parciais novamente através da expressão (36), que integrada para cada onda fornece

$$\begin{aligned}
f_S^\Sigma &= a_1 + \frac{b_1}{2}I_0 + \frac{(b_2 + c_1)}{2}I_1 + \frac{c_2}{2}I_2 \\
f_{P1}^\Sigma &= a_2 + \frac{b_2}{2}I_0 + \frac{b_1 + c_2}{2}I_1 + \frac{c_1}{2}I_2 \\
f_{P3}^\Sigma &= -\frac{b_2}{4}I_0 + \frac{2b_1 - c_2}{4}I_1 + \frac{2c_1 + 3b_2}{4}I_2 + \frac{3}{4}c_2I_3 .
\end{aligned} \tag{48}$$

Integrais do tipo

$$I_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n dx}{\gamma + 2k^2 x} \tag{49}$$

que aparecem em (48) estão apresentadas no apêndice B.

Finalmente, para calcular a contribuição de $\Sigma^*(1385)$ devemos inserir os valores de A_{Σ^*} e B_{Σ^*} (expressões (26)) em (38) e obtemos

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}^2}{3} \frac{(E + m_\Lambda)}{8\pi\sqrt{s}} \left\{ \frac{[\hat{A} + (\sqrt{s} - m_\Lambda)\hat{B}]}{m_{\Sigma^*}^2 - s} + \frac{[\hat{A} + (m_\Lambda - \sqrt{s})\hat{B}]}{m_{\Sigma^*}^2 - u} \right. \\
&\quad \left. - a_0 + a_z k \cdot k' - \frac{8m_\Lambda \nu Z^2 (\sqrt{s} - m_\Lambda)}{m_{\Sigma^*}^2} \right\} , \\
f_2 &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}^2}{3} \frac{(E - m_\Lambda)}{8\pi\sqrt{s}} \left\{ \frac{[-\hat{A} + (\sqrt{s} + m_\Lambda)\hat{B}]}{m_{\Sigma^*}^2 - s} - \frac{[\hat{A} + (m_\Lambda + \sqrt{s})\hat{B}]}{m_{\Sigma^*}^2 - u} \right. \\
&\quad \left. + a_0 - a_z k \cdot k' - \frac{8m_\Lambda \nu Z^2 (\sqrt{s} + m_\Lambda)}{m_{\Sigma^*}^2} \right\} .
\end{aligned}$$

Podemos expressar f_1 e f_2 acima como função de x ,

$$\begin{aligned}
f_1 &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}^2}{3} \frac{(E + m_\Lambda)}{8\pi\sqrt{s}} \left\{ \alpha_1 + \beta_1 x + \frac{a_1 + b_1 x}{\gamma + 2k^2 x} \right\} , \\
f_2 &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}^2}{3} \frac{(E - m_\Lambda)}{8\pi\sqrt{s}} \left\{ \alpha_2 + \beta_2 x - \frac{a_2 + b_2 x}{\gamma + 2k^2 x} \right\} , \tag{50}
\end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{3(\sqrt{s} + m_{\Sigma^*})}{4m_{\Sigma^*}^2 s} \{ m_{\Sigma^*}^2 s - (m_\Lambda^2 - m_\pi^2)^2 \} - a_0 + \frac{(E_\Delta + m_\Lambda)^2}{\sqrt{s} + m_{\Sigma^*}} + \\
&\quad + a_z k_0^2 + \frac{4(m_\Lambda - \sqrt{s})Z^2}{m_{\Sigma^*}^2} (2Ek_0 + k^2) , \\
\beta_1 &= \frac{-3k^2}{m_{\Sigma^*} - \sqrt{s}} - k^2 a_z - \frac{4k^2 Z^2}{m_{\Sigma^*}^2} (\sqrt{s} - m_\Lambda) , \\
a_1 &= 3(2m_\Lambda - \sqrt{s} + m_{\Sigma^*})(q_\Delta^2 - k^2) + (m_{\Sigma^*} - 2m_\Lambda + \sqrt{s})(E_\Delta + m_\Lambda)^2 , \\
b_1 &= 3k^2(m_{\Sigma^*} + 2m_\Lambda - \sqrt{s}) , \\
\alpha_2 &= -3 \frac{q_\Delta^2 - k^2}{m_{\Sigma^*} + \sqrt{s}} + \frac{(E_\Delta + m_\Lambda)^2}{\sqrt{s} - m_{\Sigma^*}} + a_0 + \\
&\quad - a_z k_0^2 - \frac{4(m_\Lambda + \sqrt{s})Z^2}{m_{\Sigma^*}^2} (2Ek_0 + k^2) , \\
\beta_2 &= \frac{-3k^2}{m_{\Sigma^*} + \sqrt{s}} + k^2 a_z - \frac{4k^2 Z^2}{m_{\Sigma^*}^2} (\sqrt{s} + m_\Lambda) , \\
a_2 &= 3(2m_\Lambda + \sqrt{s} + m_{\Sigma^*})(q_\Delta^2 - k^2) + (m_{\Sigma^*} - 2m_\Lambda - \sqrt{s})(E_\Delta + m_\Lambda)^2 , \\
b_2 &= 3k^2(m_{\Sigma^*} + 2m_\Lambda + \sqrt{s}) ,
\end{aligned}$$

$$\gamma = m_{\Sigma^*}^2 - m_{\Lambda}^2 - m_{\pi}^2 + 2Ek_0 . \quad (51)$$

As expressões para as amplitudes com $l=0$ e 1 são

$$\begin{aligned} f_S^{\Sigma^*} &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}}{48\pi\sqrt{s}} \left\{ (E + m_{\Lambda}) \left[2\alpha_1 + a_1 I_0 + b_1 I_1 \right] + (E - m_{\Lambda}) \left[\frac{2}{3}\beta_2 - a_2 I_1 - b_2 I_2 \right] \right\} , \\ f_{P1}^{\Sigma^*} &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}}{48\pi\sqrt{s}} \left\{ (E + m_{\Lambda}) \left[\frac{2}{3}\beta_1 + a_1 I_1 + b_1 I_2 \right] + (E - m_{\Lambda}) \left[2\alpha_2 - a_2 I_0 - b_2 I_1 \right] \right\} , \\ f_{P3}^{\Sigma^*} &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma^*}}{48\pi\sqrt{s}} \left\{ (E + m_{\Lambda}) \left[\frac{2}{3}\beta_1 + a_1 I_1 + b_1 I_2 \right] + \frac{(m_{\Lambda} - E)}{2} \left[3I_3 b_2 + 3a_2 I_2 - a_2 I_0 - b_2 I_1 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (52)$$

Com os resultados obtidos, agora podemos calcular as amplitudes de espalhamento f_{α} para cada onda ($\alpha = \{l, j\}$) a partir de

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^{\Sigma} + f_{\alpha}^{\sigma} + f_{\alpha}^{\Sigma^*} . \quad (53)$$

Faremos os cálculos para as ondas parciais S , $P_{\frac{1}{2}}$ e $P_{\frac{3}{2}}$, pois estamos interessados no estudo de baixas energias, onde se pode desprezar as ondas mais altas D , F e assim por diante.

Observando as expressões resultantes para os diversos f_{α} podemos constatar que estas amplitudes são reais em todos os casos estudados, e o mesmo vale para ondas mais altas. Este fato viola a unitariedade da matriz S ,

$$S = I - iT \quad (54)$$

e além disso impossibilita o cálculo de defasagens, pois estas são calculadas para expressões complexas a partir de (35). Podemos superar este problema (que é decorrente da utilização dos diagramas somente de ordem mais baixa, do tipo árvore), fazendo uma unitarização das amplitudes calculadas. Para tanto vamos reinterpretar as amplitudes calculadas como elementos da matriz de reação K [38],[39],[50],

que se relaciona com a matriz de espalhamento T através de

$$T = \frac{K}{1 - iK} , \quad (55)$$

o que significa redefinir a amplitude f_α pela relação

$$f_\alpha^U = \frac{f_\alpha}{1 - ikf_\alpha} , \quad (56)$$

onde f_α^U é a amplitude unitarizada, e deste modo as defasagens são dadas por

$$f_\alpha = \frac{1}{k} \text{tg}(\delta_\alpha) \Rightarrow \delta_\alpha = \text{tg}^{-1}(kf_\alpha) , \quad (57)$$

em vez de (35), que é a expressão que usaremos efetivamente para os cálculos.

Os parâmetros que vamos usar foram tirados de tabelas [40] ou de trabalhos anteriores e são $m_\Lambda = 1.115$ GeV, $m_\Sigma = 1.192$ GeV, $m_{\Sigma^*} = 1.385$ GeV, $m_\pi = 0.139$ GeV, $g_{\Lambda\pi\Sigma} = 11.7$ [50] e $Z = -0.5$ [39].

Ainda resta uma última dificuldade: a constante de acoplamento $g_{\Lambda\pi\Sigma^*}$ ainda não é conhecida. Contudo, existe um procedimento que podemos adotar para todas as ressonâncias bariônicas: A partir do conhecimento da massa m_r e da largura da ressonância Γ_0 [40], podemos calcular a defasagem da ressonância através da expressão de Breit-Wigner relativística [51]

$$\delta_{l\pm} = \text{tg}^{-1} \left[\frac{\Gamma_0 \left(\frac{k}{k_0} \right)^{2l}}{2(m_r - \sqrt{s})} \right] , \quad (58)$$

onde k_0 é o momento no referencial de centro de massa, correspondente ao pico da ressonância $\Sigma^*(1385)$, cujo valor é 0.207 GeV. É possível obter a constante de acoplamento que nos interessa variando-a de modo que a defasagem δ_{P3} (no presente caso) calculada anteriormente introduzindo-se (52) em (57), ajuste a expressão de Breit-Wigner (58). O valor obtido para $g_{\Lambda\pi\Sigma^*}$ a partir do procedimento descrito foi

9.38 GeV^{-1} . Observando o resultado (Figura 5), podemos constatar que o ajuste obtido é muito bom e, deste modo, podemos confiar no valor obtido para a constante de acoplamento.

Figura 5: Comparação entre o cálculo com a constante de acoplamento $g_{\Lambda\pi\Sigma^*}$ e o resultado da expressão de Breit-Wigner (58).

Conhecendo então $g_{\Lambda\pi\Sigma^*}$, calculamos numericamente as defasagens δ_S , δ_{P1} , δ_{P3} e os resultados numéricos como função do momento no referencial de centro de massa, k , estão na Figura 6. Podemos observar que a defasagem δ_{P3} , é a maior de todas, cruzando o valor de 90° para $k = k_0 = 0.207 \text{ GeV}$, o que significa a formação da ressonância $\Sigma^*(1385)$. A defasagem δ_S é razoavelmente grande, chegando a valores próximos de -50° , mas a defasagem δ_{P1} é muito pequena e pode até ser desprezada (nesta região de energia) se não necessitarmos de muita precisão nos cálculos. A energias em torno de 400 MeV, as defasagens D (que podem ser calculadas do mesmo

modo que as anteriores) valem menos que 1° , e as mais altas possuem valores menores ainda e por este motivo não serão mostradas nos gráficos e serão desprezadas nos cálculos.

Figura 6: Defasagens para o espalhamento $\pi\Lambda$ como função de k , o módulo do momento no referencial de centro de massa.

Considerando apenas $l = 0$ e 1 , f e g são aproximadamente dados por

$$\begin{aligned} f &\sim f_S + (2f_{P3} + f_{P1})\cos\theta \\ -g &\sim (f_{P3} - f_{P1})\sin\theta, \end{aligned} \quad (59)$$

e assim podemos calcular as seções de choque (Figuras 7 e 8) e polarizações (Figura 9) com

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = |f|^2 + |g|^2 \quad (60)$$

$$\vec{P} = -2 \frac{\text{Im}(f^*g)}{|f|^2 + |g|^2} \hat{n} \quad (61)$$

$$\sigma_t = 4\pi \sum_l [(l+1)|f_{l+}|^2 + l|f_{l-}|^2] \quad . \quad (62)$$

Figura 7: Seção de Choque total para o espalhamento $\pi\Lambda$ como função de k .

Observando as Figuras 7 e 8 podemos notar que a ressonância $\Sigma^*(1385)$ domina as seções de choque a baixas energias, o que é um resultado muito parecido com o espalhamento π^+p , onde $\Delta^{++}(1232)$ domina. A polarização (na Figura 9, como função de $x = \cos \theta$ para vários valores do momento k) é positiva a baixas energias mudando de sinal para $k \sim k_0$ e então permanece negativa. É interessante observar que a inversão de sinal ocorre justamente na região da ressonância $\Sigma^*(1385)$, onde a seção de choque é dominante. Esta troca de sinal possivelmente é a causa da polarização de $\bar{\Lambda}$ em processos inclusivos anular-se, pois ao efetuar-se um cálculo de médias haverá um cancelamento.

Calculadas então todas as quantidades de interesse para o espalhamento $\pi\Lambda$,

Figura 8: $d\sigma/d\Omega$ como função de x para vários valores de k .

Figura 9: Polarizações para o espalhamento $\pi\Lambda$ como função de x .

vamos então passar ao estudo dos outros casos, $\pi\Sigma$ e $\pi\Sigma$, usando o mesmo procedimento adotado nesta seção.

III.3 - Interação $\pi\Sigma$

O espalhamento $\pi\Sigma$ é o caso com o maior número de amplitudes a calcular pois Σ possui isospin 1 e, assim, o sistema $\pi\Sigma$ pode estar em três estados possíveis de isospin, 0, 1 e 2. A amplitude de espalhamento terá a forma geral

$$\begin{aligned} T_{\beta\delta,\alpha\gamma} &= \langle \pi_\gamma \Sigma_\delta | T | \pi_\alpha \Sigma_\beta \rangle = \\ &= \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \left[A + \frac{(k+k')}{2} A' \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \left[B + \frac{(k+k')}{2} B' \right] \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \right. \\ &\quad \left. + \left[C + \frac{(k+k')}{2} C' \right] \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \right\} u(\vec{p}) , \end{aligned} \quad (63)$$

que como podemos observar, agora é determinada por seis amplitudes (A, A', B, B', C e C') enquanto que no caso de um bárion com isospin 1/2 existem quatro amplitudes ($A^\pm$ e $B^\pm$) e no caso de um bárion com isospin 0, apenas duas A e B . Decompondo a matriz T em estados de isospin temos

$$\begin{aligned} T_{\beta\delta,\alpha\gamma} &= \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \left[A_0 + \frac{(k+k')}{2} B_0 \right] P_0 + \left[A_1 + \frac{(k+k')}{2} B_1 \right] P_1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[A_2 + \frac{(k+k')}{2} B_2 \right] P_2 \right\} u(\vec{p}) \\ &= \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \frac{1}{3} \left[A_0 + \frac{(k+k')}{2} B_0 \right] \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \right. \\ &\quad \frac{1}{2} \left[A_1 + \frac{(k+k')}{2} B_1 \right] \left[\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \right] + \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left[A_2 + \frac{(k+k')}{2} B_2 \right] \left[3\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + 3\delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} - 2\delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] \right\} u(\vec{p}) , \end{aligned} \quad (64)$$

onde usamos os operadores de projeção P_I (ver apêndice A). Os índices α e γ são os estados de isospin inicial e final do pión e os índices β e δ são os estados inicial e

final de Σ . A partir das expressões (63) e (64) podemos obter

$$\begin{cases} A = \frac{1}{3}(A_0 - A_2) , \\ B = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) , \\ C = \frac{1}{2}(A_2 - A_1) , \end{cases} \quad (65)$$

o que fornece

$$\begin{cases} A_0 = 3A + B + C , \\ A_1 = B - C , \\ A_2 = B + C , \end{cases} \quad \begin{cases} B_0 = 3A' + B' + C' , \\ B_1 = B' - C' , \\ B_2 = B' + C' . \end{cases} \quad (66)$$

Os diagramas de Feynman fornecem A , A' , B , B' , C e C' . A partir destas amplitudes podemos então calcular as amplitudes A_I e B_I para os três estados de isospin através de (66).

As lagrangianas que usaremos são

$$\mathcal{L}_{\pi\Sigma\Sigma} = \frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}}{2m_\Sigma} [\bar{\Sigma}\gamma_\mu\gamma_5\vec{t}\Sigma] \cdot \partial^\mu \vec{\phi} \quad (67)$$

$$\mathcal{L}_{\rho\Sigma\Sigma} = \frac{g_0}{2} [\bar{\Sigma}\gamma_\mu\vec{t}\Sigma] \rho^\mu + \frac{g_0}{2} \left[\bar{\Sigma} \left(\frac{\mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}}{4m_\Sigma} \right) i\sigma_{\mu\nu}\vec{t}\Sigma \right] \cdot (\partial^\mu \rho^\nu - \partial^\nu \rho^\mu) , \quad (68)$$

além daquelas dadas pelas expressões (8) e (18), usadas no caso de πp e $\pi\Lambda$, respectivamente (o vértice $\pi\Sigma\Lambda^*$ é calculado usando a lagrangiana (18), com as substituições de m_Λ por m_{Λ^*} e $g_{\Sigma\pi\Lambda}$ por $g_{\Sigma\pi\Lambda^*}$). Os gráficos que consideraremos estão na Figura 10.

Figura 10: Diagramas para a interação $\pi\Sigma$.

Os cálculos dos diagramas podem ser efetuados de forma análoga aos da interação $\pi\Lambda$ apresentados na seção anterior e por isso não vamos apresentá-los, o que seria

uma tediosa repetição. Vamos simplesmente apresentar os resultados finais. Ao efetuar os cálculos, deve-se tomar o cuidado de adaptar as regras de Feynman da Figura 1 com as matrizes de isospin dos vértices corretas (definidas no apêndice A). Nos vértices $V_{\pi\Sigma\Sigma}$ as matrizes que fazem esta combinação são as matrizes t^a , que obedecem

$$\langle b|t_c|a\rangle = -i\epsilon_{bac} . \quad (69)$$

Já nos vértices $V_{\pi\Sigma\Lambda}$ e $V_{\pi\Sigma\Lambda^*}$ aparecerá simplesmente um fator $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$ para o gráfico direto, e para o termo cruzado o fator será $\delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}$.

Efetuando os cálculos, os resultados mostrarão amplitudes $(A, B, \dots)$ multiplicadas por fatores do tipo $\delta_{ab}\delta_{cd}$. A é o termo que multiplica $\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta}$ (ver (63)), B multiplica $\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta}$ e assim por diante.

Para a troca de ρ (diagr(10e)) a amplitude é

$$T_\rho = \bar{u}(\vec{p}') \left[A_\rho + \frac{(\not{k} + \not{k}')}{2} B_\rho \right] \left[\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \right] u(\vec{p}) , \quad (70)$$

com

$$\begin{aligned} A_\rho &= -\frac{g_0^2}{m_\rho^2} (\mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}) \nu \frac{1 - t/4m_\rho^2}{1 - t/m_\rho^2} , \\ B_\rho &= \frac{g_0^2}{m_\rho^2} (1 + \mu_{\Sigma^0} - \mu_{\Sigma^-}) \frac{1 - t/4m_\rho^2}{1 - t/m_\rho^2} , \end{aligned} \quad (71)$$

onde $\nu = (s - u)/4m_\Sigma$. Para a troca de Σ temos

$$\begin{aligned} A_\Sigma &= -\frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}^2}{2m_\Sigma} , \\ B_\Sigma &= \frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}^2}{m_\Sigma} , \\ C_\Sigma &= -\frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}^2}{2m_\Sigma} , \\ A'_\Sigma &= -\frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}^2}{4m_\Sigma^2} - \frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}^2}{u - m_\Sigma^2} , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'_\Sigma &= g_{\Sigma\pi\Sigma}^2 \left[\frac{1}{u - m_\Sigma^2} - \frac{1}{s - m_\Sigma^2} \right] , \\
C'_\Sigma &= \frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}^2}{4m_\Sigma^2} + \frac{g_{\Sigma\pi\Sigma}^2}{s - m_\Sigma^2} .
\end{aligned} \tag{72}$$

Para Λ

$$\begin{aligned}
A_\Lambda &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma}^2 (m_\Sigma + m_\Lambda)}{m_\Sigma^2} \frac{s - m_\Sigma^2}{s - m_\Lambda^2} , \\
B_\Lambda &= 0 , \\
C_\Lambda &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma}^2 (m_\Sigma + m_\Lambda)}{m_\Sigma^2} \frac{u - m_\Sigma^2}{u - m_\Lambda^2} , \\
A'_\Lambda &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma}^2}{m_\Sigma^2} \frac{m_\Sigma^2 - s - 2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Lambda)}{s - m_\Lambda^2} , \\
B'_\Lambda &= 0 , \\
C'_\Lambda &= \frac{g_{\Lambda\pi\Sigma}^2}{m_\Sigma^2} \frac{2m_\Sigma(m_\Sigma + m_\Lambda) + u - m_\Sigma^2}{u - m_\Lambda^2} .
\end{aligned} \tag{73}$$

Figura 11: Defasagens para a interação $\pi\Sigma$.

Finalmente, para $\Lambda^*(1405)$, as expressões são as mesmas que para Λ . Apenas devemos trocar a constante de acoplamento e m_Λ por m_{Λ^*} .

Os parâmetros usados foram os mesmos da seção anterior, e ainda, $m_{\Lambda^*} = 1.406$ GeV, $m_\rho = 0.769$ GeV, $\mu_{\Sigma^0} = 0.649$ e $\mu_{\Sigma^-} = -0.16$. Em [50] encontram-se expressões que relacionam as constantes de acoplamento dos diversos híperons baseadas na simetria SU(6). A partir de $g_{\Lambda\pi\Sigma}$ obtém-se $g_{\Sigma\pi\Sigma} = 6.7$.

A constante $g_{\Sigma\pi\Lambda^*}$ foi calculada do mesmo modo que calculamos $g_{\Lambda\pi\Sigma^*}$ e o valor obtido foi $g_{\Sigma\pi\Lambda^*} = 8.74$ GeV⁻¹.

Agora, podemos calcular as defasagens e os observáveis que precisamos, efetuando os cálculos de modo similar ao do espalhamento $\pi\Lambda$. Os resultados estão nas Figuras 11-14.

Figura 12: Secções de choque totais como função de k para várias reações que produzem Σ^+ .

Figura 13: $d\sigma/d\Omega$ para o espalhamento $\pi\Sigma$.

Figura 14: Polarizações para Σ^- .

Para a interação $\pi\Sigma$ existem seis processos que nos interessam, formando Σ^+ após a colisão (resultados que na verdade serão aplicados para $\bar{\Sigma}^-$ que é a antipartícula de Σ^+). A Figura 12 mostra as seções de choque correspondentes. De um modo geral, a ressonância ainda domina várias seções de choque, embora com menor peso que nos casos πN , $\pi\Lambda$ e $\pi\Xi$ (mostrado a seguir). As figuras 13 e 14 mostram as distribuições angulares e as polarizações nos referidos canais como função de k e de x . É interessante notar que existe um certo predomínio da polarização positiva na região dos máximos das seções de choque, que deverá ter reflexos ao calcularmos a polarização de $\bar{\Sigma}^-$ em processos inclusivos a altas energias.

III.4 - Interação $\pi\Xi$

O último caso que nos falta estudar é o espalhamento $\pi\Xi$, e é isto que faremos nesta seção. Como Ξ possui isospin $1/2$, o espalhamento $\pi\Xi$ é totalmente análogo ao πN , e os gráficos com σ , ρ e Ξ (análogo a N) intermediárias possuirão as mesmas expressões analíticas calculadas para πN [41], devendo apenas trocar os parâmetros. A única diferença ocorre no caso da ressonância, pois $\Delta(1232)$ possui isospin $3/2$ e $\Xi^*(1530)$, $1/2$. Assim seus gráficos possuirão as matrizes τ_a nos vértices ao invés de M_a , fornecendo deste modo expressões analíticas diferentes.

No caso $\pi\Xi$ as amplitudes de interesse são as de isospin $1/2$ e $3/2$ para todas as partículas intermediárias. Relembremos que as relações que valem são (veja (3) e (4))

$$\begin{cases} A^{\frac{1}{2}} = A^+ + 2A^- \\ A^{\frac{3}{2}} = A^+ - A^- \end{cases}, \quad \begin{cases} B^{\frac{1}{2}} = B^+ + 2B^- \\ B^{\frac{3}{2}} = B^+ - B^- \end{cases}. \quad (74)$$

As lagrangianas para este caso são (quase iguais as do caso πN)

$$\mathcal{L}_{\pi\Xi\Xi} = \frac{g_{\pi\Xi\Xi}}{2m_{\Xi}} [\bar{\Xi} \gamma_{\mu} \gamma_5 \vec{\tau} \Xi] \cdot \partial^{\mu} \vec{\phi}, \quad (75)$$

$$\mathcal{L}_{\pi\Xi\Xi^*} = g_{\pi\Xi\Xi^*} \left\{ \bar{\Xi}^{*\mu} \left[g_{\mu\nu} - \left(Z + \frac{1}{2} \right) \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \bar{\tau}\Xi \right\} \cdot \partial^\nu \vec{\phi} + H.c. , \quad (76)$$

$$\mathcal{L}_{\rho\Xi\Xi} = \frac{\gamma_0}{2} [\bar{\Xi} \gamma_\mu \bar{\tau}\Xi] \vec{\rho}^\mu + \frac{\gamma_0}{2} \left[\bar{\Xi} \left(\frac{\mu_p - \mu_n}{4m_\Xi} \right) i\sigma_{\mu\nu} \bar{\tau}\Xi \right] \cdot (\partial^\mu \vec{\rho}^\nu - \partial^\nu \vec{\rho}^\mu) , \quad (77)$$

$$\mathcal{L}_{\rho\pi\pi} = \gamma_0 \vec{\rho}_\mu \cdot (\vec{\phi} \times \partial^\mu \vec{\phi}) - \frac{\gamma_0}{4m_\rho^2} (\partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi} \times \partial^\nu \vec{\phi}) , \quad (78)$$

e os diagramas que serão usados estão na Figura 15.

Figura 15: Diagramas para a Interação $\pi\Xi$.

Calculando $A^\pm$ e $B^\pm$ a partir dos diagramas de Feynman acima, obtemos os mesmos resultados do espalhamento πN [41] para a contribuição de Ξ ,

$$\begin{aligned} A_\Xi^+ &= \frac{g_{\Xi\pi\Xi}^2}{m_\Xi} , \\ A_\Xi^- &= 0 , \\ B_\Xi^+ &= g_{\Xi\pi\Xi}^2 \left[\frac{1}{u - m_\Xi^2} - \frac{1}{s - m_\Xi^2} \right] , \\ B_\Xi^- &= -\frac{g_{\Xi\pi\Xi}^2}{2m_\Xi^2} - g_{\Xi\pi\Xi}^2 \left[\frac{1}{u - m_\Xi^2} + \frac{1}{s - m_\Xi^2} \right] , \end{aligned} \quad (79)$$

para ρ ,

$$\begin{aligned} A_\rho^+ &= B_\rho^+ = 0 , \\ A_\rho^- &= -\frac{g_0^2}{m_\rho^2} (\mu_{\Xi^0} - \mu_{\Xi^-}) \nu \frac{1 - t/4m_\rho^2}{1 - t/m_\rho^2} , \\ B_\rho^- &= \frac{g_0^2}{m_\rho^2} (1 + \mu_{\Xi^0} - \mu_{\Xi^-}) \frac{1 - t/4m_\rho^2}{1 - t/m_\rho^2} . \end{aligned} \quad (80)$$

E para a troca de $\Xi^*(1530)$, temos (tomando cuidado com as matrizes dos vértices)

$$A_{\Xi^*}^\pm = \frac{g_{\Xi\pi\Xi^*}^2}{3m_\Xi} \left\{ \frac{\nu_{\Xi^*}}{\nu_{\Xi^*}^2 - \nu^2} \hat{A} - \frac{m_\Xi^2 + m_\Xi m_{\Xi^*}}{m_{\Xi^*}^2} (2m_{\Xi^*}^2 + m_\Xi m_{\Xi^*} - m_\Xi^2 + 2m_\pi^2) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4m_{\Xi}}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Xi} + m_{\Xi^*})Z + (2m_{\Xi^*} + m_{\Xi})Z^2 \right] k.k' \Big\} , \\
A_{\Xi^*}^- &= \frac{g_{\Xi\pi\Xi^*}^2}{3m_{\Xi}} \left\{ \frac{\nu}{\nu_{\Xi^*}^2 - \nu^2} \hat{A} + \frac{8m_{\Xi}^2\nu}{m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Xi} + m_{\Xi^*})Z + (2m_{\Xi^*} + m_{\Xi})Z^2 \right] \right\} , \\
B_{\Xi^*}^+ &= \frac{g_{\Xi\pi\Xi^*}^2}{3m_{\Xi}} \left\{ \frac{\nu}{\nu_{\Xi^*}^2 - \nu^2} \hat{B} - \frac{8m_{\Xi}^2\nu Z^2}{m_{\Xi^*}^2} \right\} , \\
B_{\Xi^*}^- &= \frac{g_{\Xi\pi\Xi^*}^2}{3m_{\Xi}} \left\{ \frac{\nu_{\Xi^*}}{\nu_{\Xi^*}^2 - \nu^2} \hat{B} - \frac{4m_{\Xi}}{m_{\Xi^*}^2} \left[(2m_{\Xi}^2 + 2m_{\Xi}m_{\Xi^*} - 2m_{\pi}^2)Z + (2m_{\Xi}^2 + 4m_{\Xi}m_{\Xi^*})Z^2 \right] \right. \\
& \quad \left. - m_{\Xi} \frac{(m_{\Xi} + m_{\Xi^*})^2}{m_{\Xi^*}^2} - \frac{4m_{\Xi}Z^2}{m_{\Xi^*}^2} k.k' \right\} , \tag{81}
\end{aligned}$$

onde ν e ν_{Ξ^*} estão definidos no apêndice A e

$$\begin{aligned}
\hat{A} &= \frac{(m_{\Xi^*} + m_{\Xi})^2 - m_{\pi}^2}{2m_{\Xi^*}^2} \left[2m_{\Xi^*}^3 - 2m_{\Xi}^3 - 2m_{\Xi}m_{\Xi^*}^2 - 2m_{\Xi}^2m_{\Xi^*} + m_{\pi}^2(2m_{\Xi} - m_{\Xi^*}) \right] + \\
& \quad + \frac{3}{2}(m_{\Xi} + m_{\Xi^*})t , \\
\hat{B} &= \frac{1}{2m_{\Xi^*}^2} \left[(m_{\Xi^*}^2 - m_{\Xi}^2)^2 - 2m_{\pi}^2(m_{\Xi^*}^2 + m_{\Xi}^2) + m_{\pi}^4 \right] + \frac{3}{2}t . \tag{82}
\end{aligned}$$

Os parâmetros usados são $m_{\Xi}=1.318$ GeV, $m_{\Xi^*}=1.533$ GeV, $\mu_{\Xi^0} = -1.25$, $\mu_{\Xi^-} = 0.349$, e $g_{\Xi\pi\Xi}=4$. A constante de acoplamento $\Xi\pi\Xi^*$ é calculada do mesmo modo que fizemos anteriormente (nas seções 2 e 3) e o valor obtido é 4.54 GeV^{-1} . Os resultados finais estão nas Figuras 16-19. Nas Figuras 17-19, consideramos somente as reações com Ξ^- no estado final, tendo em vista a aplicação no capítulo seguinte para o cálculo de polarização de Ξ^+ em processos inclusivos.

Neste caso, podemos notar que mais uma vez as ressonâncias dominam a seção de choque total. O espalhamento elástico $\pi^+\Xi^-$ é o que possui maior seção de choque e por isso, deverá ter maior peso ao calcularmos a polarização média. Note que para esta reação, as polarizações começam positivas (a 100 MeV), mas depois ficam bem negativas (chegando quase a 1 para $k=300$ MeV). Nas duas outras reações com seção de choque altas, a troca de carga $\pi^-\Xi^0 \rightarrow \pi^0\Xi^-$ e a reação $\pi^0\Xi^- \rightarrow \pi^0\Xi^-$ as polarizações também trocam de sinal, mas parece haver um predomínio

Figura 16: Defasagens para a interação $\pi\Xi$.

Figura 17: Seções de choque totais para a produção de Ξ^- .

da polarização negativa. Observando estes resultados esperamos que no cálculo de médias, sobre alguma polarização negativa.

Figura 18: Distribuições angulares para a interação $\pi\Xi$.

Devemos ainda observar que as constantes de acoplamento neste caso são muito menores que no espalhamento πN ou no espalhamento $\pi\Lambda$ (existe um fator de aproximadamente 0.4) o que sugere que possivelmente, a amplitude para o termo σ também seja proporcionalmente menor. No capítulo V (resultados), estudaremos este efeito, diminuindo proporcionalmente a amplitude do termo σ .

Figura 19: Polarização de Ξ^- .

III.5 - Antipartículas:

Até agora fizemos apenas os cálculos para partículas, mas na verdade, o nosso principal interesse é o estudo de antipartículas, pois estamos propondo um modelo para calcular a polarização de antipartículas. Nesta seção vamos mostrar as relações dos resultados que obtivemos para partículas com os que descrevem as antipartículas.

As antipartículas são representadas pelos espinores de Dirac v [52]-[55], dados por

$$v^\alpha(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \right) \chi^\alpha, \quad (83)$$

sendo que para as partículas iniciais usamos $\bar{v}(\vec{p})$ e para as finais $v(\vec{p}')$. A Figura 20 mostra os diagramas para antipartículas.

Figura 20: Diagramas d e c para antipartículas.

Vamos calcular explicitamente o diagrama direto da Figura 20, que representa a interação de antipartículas de massa m com píons através da formação de uma outra antipartícula de massa m^* para mostrar as diferenças na formulação da matriz de espalhamento e as diferenças que aparecem nos resultados. Calculando o diagrama direto

$$\begin{aligned} T_d &= -\bar{v}(\vec{p}) \left(\frac{g}{2m} \not{k} \gamma_5 \right) S(-p-k) \left(\frac{g}{2m} \not{k}' \gamma_5 \right) v(\vec{p}') \\ &= -\frac{g^2}{4m^2} \bar{v}(\vec{p}) \left\{ \not{k} \gamma_5 \frac{(m^* - \not{p} - \not{k})}{(p+k)^2 - m^{*2}} \not{k}' \gamma_5 \right\} v(\vec{p}') \\ &= \frac{g^2}{4m^2(s - m^{*2})} \bar{v}(\vec{p}) \left\{ (m^* \not{k} + \mu^2 + \not{k} \not{p}) \not{k}' \right\} v(\vec{p}') \\ &= \frac{g^2}{4m^2(s - m^{*2})} \bar{v}(\vec{p}) \left\{ m^* \not{k} \not{k}' + (\mu^2 + 2p \cdot k - \not{p} \not{k}) \not{k}' \right\} v(\vec{p}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g^2}{4m^2(s-m^{*2})} \bar{v}(\vec{p}) \left\{ (m^* + m) \not{k} \not{k}' + (s - m^2) \not{k}' \right\} v(\vec{p}') \\
&= \frac{g^2}{4m^2(s-m^{*2})} \bar{v}(\vec{p}) \left\{ (m^* + m)[(s - m^2) + 2m \not{k}'] + (s - m^2) \not{k}' \right\} v(\vec{p}') \\
&= \frac{g^2}{4m^2(s-m^{*2})} \bar{v}(\vec{p}) \left\{ (m^* + m)(s - m^2) + [2m(m + m^*) + s - m^2] \not{k}' \right\} v(\vec{p}') ,
\end{aligned} \tag{84}$$

podemos notar que o resultado é bem parecido com obtido para as partículas (ver expressão(21)). Calculando ainda

$$\begin{aligned}
\bar{v}(\vec{p})v(\vec{p}') &= -(E + m) + (E - m) \cos(\theta) - i(E - m) \sin(\theta) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} \\
\bar{v}(\vec{p}') \not{k} v(\vec{p}) &= (E + m)(\sqrt{s} - m) + (\sqrt{s} + m)(E - m) \cos(\theta) + \\
&\quad -i(E - m)(\sqrt{s} + m) \sin(\theta) \vec{\sigma} \cdot \hat{n} ,
\end{aligned} \tag{85}$$

podemos constatar (comparando com as expressões (37)) que os sinais de $\bar{v}v$ e $\bar{u}u$ são opostos, os sinais de $\bar{v} \not{k} v$ e $\bar{u} \not{k} u$ são iguais e os termos que contêm os vetores normais para partículas e antipartículas possuem sinais opostos.

Substituindo estes resultados na expressão (84), obtemos a expressão para T_d .

No caso de partículas a matriz M é dada por (expressão (32))

$$M_p = f_p + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}_p g_p . \tag{86}$$

Já para as antipartículas,

$$M_{\bar{p}} = f_{\bar{p}} + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}_{\bar{p}} g_{\bar{p}} = -f_p + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n}_{\bar{p}} g_p \tag{87}$$

e assim podemos concluir que as amplitudes f e g trocam de sinal no caso das antipartículas e o sinal relativo também muda. Se forem considerados todos os outros diagramas, as conclusões serão as mesmas. Considerando então os resultados que obtivemos nas seções anteriores para o espalhamento de partículas, podemos

constatar que as seções de choque serão as mesmas (para reações conjugadas, como por exemplo os espalhamentos elásticos $\pi^+\Sigma^+$ e $\pi^-\bar{\Sigma}^-$), e **as polarizações trocarão de sinal** mas com o mesmo módulo. Este fato poderia ser constatado, simplesmente observando a invariância de CPT, mas preferimos mostrar explicitamente que isto realmente ocorre.

Como conclusões finais deste capítulo, podemos observar que o comportamento das polarizações obtidas varia bastante, se compararmos os três casos. Enquanto P_Λ oscila, P_Σ possui uma tendência de ser positiva e P_Ξ é predominantemente negativa. Simplesmente observando estes resultados já é possível constatar que estas diferenças de polarizações para os diferentes híperons devem permanecer ao efetuarmos o cálculo de médias. Para as antipartículas ocorre a mesma coisa, mas o sinal da polarização muda.

De posse dos resultados que precisamos, podemos agora passar a estudar a polarização de híperons em processos inclusivos a altas energias, o que será feito no próximo capítulo.

IV. Polarização em Processos Inclusivos

Tendo calculado a polarização dos híperons no referencial de centro de massa do par πY como função do momento k e do ângulo de espalhamento θ para as várias reações de interesse, possuímos o ingrediente principal para o cálculo de polarização média em processos inclusivos. Vamos agora dar prosseguimento aos cálculos estudando em detalhe o processo de produção de partículas em colisões a altas energias.

Acreditamos que a polarização dos anti-híperons seja devida às interações finais que estes sofrem. Para implementar estas interações utilizaremos conceitos do modelo hidrodinâmico, que é um modo de fácil visualização do processo de colisão. Além disso, em colisões com energias da ordem de centenas de GeV, são produzidas muitas partículas e por este motivo o modelo hidrodinâmico mostra-se adequado para estudar este tipo de sistema, pois consegue descrever razoavelmente bem as principais características dos dados experimentais tais como a multiplicidade, as razões de diferentes tipos de partículas, as distribuições de rapidez, as de momento transversal, etc. Contudo, devemos observar que o modelo hidrodinâmico não é o único modo possível de incluir as interações finais, isto poderia ser feito de vários

outros modos.

Vamos então supor que durante a colisão é formada uma matéria hadrônica quente que se expande e se resfria, formando as partículas finais quando sua temperatura atinge um valor próximo ao da massa do pión (figura 1). O híperon em questão (na verdade estamos interessados nos anti-híperons) é produzido no interior deste meio, interagindo com os constituintes e assim polarizando-se. Como o número de píons produzidos em processos a altas energias é muito maior que o das demais partículas a probabilidade de ocorrerem colisões πY é muito maior que a de ocorrer um outro tipo de colisão, como YN , YK ou YY , por exemplo. Por este motivo, vamos considerar apenas as colisões πY e desprezar o efeito das demais. O que iremos então estudar é o efeito médio destas colisões, considerando apenas a última colisão sofrida pelo híperon e levando em conta as flutuações estatísticas. Deste modo é possível obter a polarização média com a qual os híperons emergem do meio.

Figura 1: Interação pA .

Um modo de tratar este sistema é dividir este fluido formado em pequenos ele-

mentos com velocidades que obedecem a uma determinada distribuição de rapidez $dN/d\alpha$, sendo α a rapidez destes elementos de fluido no sistema de laboratório (onde as partículas finais são detectadas). Supomos que as partículas são produzidas no interior destes elementos de fluido com momentos aleatórios no espaço tridimensional, porém obedecendo a distribuições estatísticas (de Fermi-Dirac e de Bose-Einstein). Consequentemente, os módulos dos momentos serão baixos (da ordem de centenas de MeV, região na qual foram feitos os cálculos do capítulo anterior) em relação ao elemento de fluido (o que significa um momento relativo baixo entre as partículas) e os altos momentos com os quais estas partículas são observadas (centenas de GeV) são devidos à rapidez que estes elementos de fluido possuem no sistema de laboratório, isto é, ao movimento coletivo das partículas.

Deste modo, notamos que existem três referenciais de interesse ao abordarmos o problema: o referencial de centro de massa do par πY (onde fizemos os cálculos do capítulo passado), que chamaremos de S , o referencial onde o elemento de fluido está em repouso (onde as partículas são produzidas termicamente), que chamaremos de S' e o referencial de laboratório onde as partículas são observadas, S_L . Devemos então obter as transformações de Lorentz entre estes referenciais, para então efetuarmos o cálculo de médias, considerando partículas produzidas com distribuições estatísticas e provenientes de diferentes elementos de fluido, que obedecem a uma determinada distribuição de rapidez experimental.

Neste capítulo iremos em primeiro lugar estudar a transformação de S para S' e como calcular a polarização média com a qual o híperon emerge do elemento de fluido. Depois estudaremos a transformação de S' para S_L , e como calcular a polarização média devida a híperons provenientes de diferentes elementos de fluido com

diferentes velocidades. Finalmente, incluiremos as várias reações elásticas possíveis no cálculo de médias.

IV.1 - Relações entre S' e S :

Antes de estudarmos especificamente o nosso problema, vamos estudar a transformação geral que o quadri vetor ([56]-[58], tratam o problema com detalhe)

$$x^\mu = (x_0, \vec{x}) , \quad (1)$$

definido em um certo referencial R , sofre ao passarmos a um referencial R' , que se move com uma velocidade arbitrária $\vec{\beta}$ em relação a R . A parte de $\vec{x}$ paralela a $\vec{\beta}$

$$\vec{x}_{\parallel} = \vec{\beta} \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} \quad (2)$$

se transforma como

$$\vec{x}_{\parallel}' = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta}x_0) , \quad (3)$$

onde $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. A componente perpendicular a $\vec{\beta}$, $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}_{\parallel}$ é a mesma nos dois referenciais.

Já a parte temporal x_0 se transforma de acordo com

$$x_0' = \gamma(x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) . \quad (4)$$

O 4-vetor é então transformado como

$$x'^\mu = \left(\gamma(x_0 - \vec{\beta} \cdot \vec{x}), \vec{x} + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{x} - x_0 \right) \right) . \quad (5)$$

que no caso da velocidade na direção x , por exemplo, se reduz a

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - \beta t) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \beta x) \end{cases} , \quad (6)$$

que é um resultado bem conhecido. A transformação inversa é dada por

$$x^\mu = \left(\gamma \left(x'_0 + \vec{\beta} \cdot \vec{x}' \right), \vec{x}' + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{x}' + x'_0 \right) \right) . \quad (7)$$

No capítulo anterior, calculamos $\vec{P}$ e $d\sigma/d\Omega$ no referencial de centro de massa do par πY , por ser mais fácil efetuar os cálculos neste sistema de referência. Contudo, para o estudo de produção de partículas no modelo hidrodinâmico, é mais conveniente considerar o referencial S' , que é o referencial próprio de um elemento de fluido, no interior do qual as partículas se movem termicamente e com momentos aleatórios. Os resultados que obtivemos no capítulo anterior são funções das variáveis k , θ em S e do vetor normal $\hat{n}$. O que devemos fazer então é transformar estes resultados para S' , onde o centro de massa do par πY possui velocidade $\vec{v}_{cm}$. Basta calcularmos esta velocidade para fazermos a transformação de referenciais, pois S' se move com velocidade $\vec{\beta} = -\vec{v}_{cm}$ com relação a S .

Em primeiro lugar, vamos definir os 4-momentos inicial e final (antes e depois da interação) do híperon em S que é o referencial de centro de massa do par $\pi\Lambda$ (para fixar as idéias, vamos tomar o sistema πY a seguir, mas evidentemente todos os resultados podem ser estendidos para outros híperons),

$$\Lambda_0^\mu = (E_0, \vec{\Lambda}_0) \quad (\text{inicial}) , \quad (8)$$

$$\Lambda^\mu = (E_0, \vec{\Lambda}) \quad (\text{final}) , \quad (9)$$

e para o pión

$$\pi_0^\mu = (E_{\pi_0}, -\vec{\Lambda}_0) \quad (\text{inicial}) , \quad (10)$$

$$\pi^\mu = (E_{\pi_0}, -\vec{\Lambda}) \quad (\text{final}) . \quad (11)$$

Em S' , os 4-momentos são

$$\Lambda'^\mu_0 = (E'_0, \vec{\Lambda}'_0) , \quad (12)$$

$$\Lambda'^\mu = (E', \vec{\Lambda}') , \quad (13)$$

$$\pi_0'^\mu = (E'_{\pi_0}, \vec{\pi}_0') , \quad (14)$$

$$\pi'^\mu = (E'_\pi, \vec{\pi}') . \quad (15)$$

Os invariantes cinemáticos s e t em S' são dados por

$$s = (\Lambda_0'^\mu + \pi_0'^\mu)^2 = m_\pi^2 + m_\Lambda^2 + 2E'_0 E'_{\pi_0} - 2\vec{\Lambda}_0' \cdot \vec{\pi}_0' , \quad (16)$$

$$t = (\Lambda_0'^\mu - \Lambda'^\mu)^2 = 2m_\Lambda^2 - 2E'_0 E' + 2\vec{\Lambda}_0' \cdot \vec{\Lambda}' . \quad (17)$$

A velocidade $\vec{v}_{cm}$ pode então ser calculada

$$\vec{v}_{cm} = \frac{\vec{\pi}_0' + \vec{\Lambda}_0'}{E'_0 + E'_{\pi_0}} = -\vec{\beta} , \quad (18)$$

e também γ que é dado por

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{E'_0 + E'_{\pi_0}}{\sqrt{s}} . \quad (19)$$

Tendo estabelecido os 4-momentos em S e S' e a velocidade do centro de massa, estamos em condições de estudar como a polarização e $d\sigma/dt$ se transformam de um referencial para outro. Para calcularmos a polarização e a seção de choque em S' precisamos então calcular as variáveis do centro de massa (usadas no capítulo III) k , θ e o vetor normal $\hat{n}$ como funções dos momentos de S' .

Vamos então estudar a transformação de S' para S . Vamos considerar os eixos de S' paralelos aos de S , o que apenas simplifica os cálculos, mas não altera os resultados finais. Decompondo os momentos em coordenadas esféricas temos

$$\vec{\Lambda}_0' = \Lambda_0'(\sin\theta'_0 \cos\phi'_0, \sin\theta'_0 \sin\phi'_0, \cos\theta'_0) \quad (20)$$

$$\vec{\Lambda}' = \Lambda'(\sin\theta' \cos\phi', \sin\theta' \sin\phi', \cos\theta') \quad (21)$$

$$\vec{\pi}_0' = \pi_0'(\sin\theta'_\pi \cos\phi'_\pi, \sin\theta'_\pi \sin\phi'_\pi, \cos\theta'_\pi) , \quad (22)$$

que se forem colocados em (16), fornecem

$$\begin{aligned} s &= (\Lambda'_0 + \pi'_0)^2 \\ &= m_\Lambda^2 + m_\pi^2 + 2E'_0 E'_{\pi 0} - 2\Lambda'_0 \pi'_0 [\cos\theta'_0 \cos\theta'_\pi + \sin\theta'_0 \sin\theta'_\pi \cos(\phi'_0 - \phi'_\pi)] \end{aligned} \quad (23)$$

Por outro lado, $k = \Lambda_0$, o módulo do momento no referencial de centro de massa do par, pode ser calculado e dá

$$\Lambda_0 = \frac{\sqrt{(s - m_\Lambda^2 - m_\pi^2)^2 - 4m_\Lambda^2 m_\pi^2}}{2\sqrt{s}} . \quad (24)$$

A velocidade relativa entre os referenciais é a velocidade do centro de massa em S' , dada pela expressão (18), e usando as expressões (20)-(22), podemos escrever as componentes de $\vec{\beta}$ como

$$\begin{aligned} \beta_x &= -\frac{\pi'_0 \sin\theta'_\pi \cos\phi'_\pi + \Lambda'_0 \sin\theta'_0 \cos\phi'_0}{E'_0 + E'_{\pi 0}} , \\ \beta_y &= -\frac{\pi'_0 \sin\theta'_\pi \sin\phi'_\pi + \Lambda'_0 \sin\theta'_0 \sin\phi'_0}{E'_0 + E'_{\pi 0}} , \\ \beta_z &= -\frac{\pi'_0 \cos\theta'_\pi + \Lambda'_0 \cos\theta'_0}{E'_0 + E'_{\pi 0}} . \end{aligned} \quad (25)$$

Conhecendo estes valores e γ dado pela expressão (19) podemos calcular os momentos no referencial de centro de massa do par πY usando a expressão (7)

$$\vec{\Lambda}_0 = \vec{\Lambda}'_0 + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{\Lambda}'_0 + E'_0 \right) = \vec{\Lambda}'_0 + \alpha_0 \vec{\beta} , \quad (26)$$

$$\vec{\Lambda} = \vec{\Lambda}' + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{\Lambda}' + E' \right) = \vec{\Lambda}' + \alpha \vec{\beta} , \quad (27)$$

$$\vec{\pi}_0 = \vec{\pi}'_0 + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \cdot \vec{\pi}'_0 + E'_{\pi 0} \right) , \quad (28)$$

com

$$\alpha_0 = \gamma \left\{ \frac{\gamma \Lambda'_0}{\gamma + 1} \left[\beta_x \sin\theta'_0 \cos\phi'_0 + \beta_y \sin\theta'_0 \sin\phi'_0 + \beta_z \cos\theta'_0 \right] + E'_0 \right\} , \quad (29)$$

$$\alpha = \gamma \left\{ \frac{\gamma \Lambda'}{\gamma + 1} \left[\beta_x \sin\theta' \cos\phi' + \beta_y \sin\theta' \sin\phi' + \beta_z \cos\theta' \right] + E' \right\} . \quad (30)$$

Assim, observando a transformação de cada componente,

$$\Lambda_{0x} = \Lambda_0 \sin\theta_0 \cos\phi_0 = \Lambda'_0 \sin\theta'_0 \cos\phi'_0 + \alpha_0 \beta_x , \quad (31)$$

$$\Lambda_{0y} = \Lambda_0 \sin\theta_0 \sin\phi_0 = \Lambda'_0 \sin\theta'_0 \sin\phi'_0 + \alpha_0 \beta_y , \quad (32)$$

$$\Lambda_{0z} = \Lambda_0 \cos\theta_0 = \Lambda'_0 \cos\theta'_0 + \alpha_0 \beta_z , \quad (33)$$

podemos calcular

$$\cos\theta_0 = \frac{1}{\Lambda_0} \left[\Lambda'_0 \cos\theta'_0 + \alpha_0 \beta_z \right] , \quad (34)$$

$$\cos\phi_0 = \frac{1}{\Lambda_0 \sin\theta_0} \left[\Lambda'_0 \sin\theta'_0 \cos\phi'_0 + \alpha_0 \beta_x \right] \quad (35)$$

e

$$\sin\phi_0 = \frac{1}{\Lambda_0 \sin\theta_0} \left[\Lambda'_0 \sin\theta'_0 \sin\phi'_0 + \alpha_0 \beta_y \right] , \quad (36)$$

valendo expressões análogas para $\cos\theta$, $\cos\phi$ e $\sin\phi$. Com estas variáveis podemos expressar os momentos inicial $\vec{\Lambda}_0$ e final $\vec{\Lambda}$ do híperon no referencial de centro de massa do par

$$\vec{\Lambda}_0 = \Lambda_0 (\sin\theta_0 \cos\phi_0, \sin\theta_0 \sin\phi_0, \cos\theta_0) , \quad (37)$$

$$\vec{\Lambda} = \Lambda_0 (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) , \quad (38)$$

e assim podemos determinar o ângulo de espalhamento no referencial de centro de massa, θ^* (que no capítulo anterior chamamos de θ e estamos mudando a notação simplesmente para evitar confusões com o ângulo dado na expressão (38))

$$\begin{aligned} \vec{\Lambda}_0 \cdot \vec{\Lambda} &= \Lambda_0^2 \cos\theta^* = \\ &= \Lambda_0^2 \left[\cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\phi_0 - \phi) \right] , \end{aligned}$$

o que determina completamente as variáveis no centro de massa.

Para o cálculo das amplitudes de espalhamento f e g (calculadas no capítulo anterior) precisamos de Λ_0 , dado pela expressão (24), e de $\cos\theta^*$, dado por

$$\cos\theta^* = \cos\theta_0 \cos\theta + \sin\theta_0 \sin\theta \cos(\phi_0 - \phi) . \quad (39)$$

As amplitudes, considerando apenas as ondas S e P , são aproximadamente dadas por

$$\begin{aligned} f(\Lambda_0, \theta^*) &= a(\Lambda_0) + b(\Lambda_0) \cos \theta^* , \\ -g(\Lambda_0) &= c(\Lambda_0) \sin \theta^* , \end{aligned} \quad (40)$$

onde

$$\begin{aligned} a(\Lambda_0) &= e^{i\delta_s} \sin\delta_s \\ b(\Lambda_0) &= 2e^{i\delta_{P3}} \sin\delta_{P3} + e^{i\delta_{P1}} \sin\delta_{P1} \\ c(\Lambda_0) &= e^{i\delta_{P3}} \sin\delta_{P3} - e^{i\delta_{P1}} \sin\delta_{P1} , \end{aligned} \quad (41)$$

e os δ_α são funções apenas de Λ_0 .

Podemos então calcular no sistema S

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_+ + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_- = \frac{1}{\Lambda_0^2} [|f|^2 + |g|^2] \quad (42)$$

e

$$\vec{P} = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_+ - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_-}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_+ + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_-} = P \hat{n} = -2 \frac{\text{Im}[f^* g]}{|f|^2 + |g|^2} \hat{n} , \quad (43)$$

onde $(d\sigma/d\Omega)_\pm$ indicam distribuições angulares com os spins nas direções de $\pm\hat{n}$.

Para transformarmos a polarização para o sistema do fluido S' devemos notar que

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega'} \right)_\pm = \frac{d\Omega}{d\Omega'} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_\pm . \quad (44)$$

Ao calcularmos $\vec{P}'$ com uma expressão análoga à (43) haverá um cancelamento mútuo dos fatores $d\Omega/d\Omega'$ e deste modo teremos $P = P'$.

A única coisa que falta é determinar o vetor normal, que no referencial de centro de massa é

$$\hat{n} = \frac{\vec{\Lambda}_0 \times \vec{\Lambda}}{|\vec{\Lambda}_0 \times \vec{\Lambda}|} = \frac{1}{\Lambda_0^2} (\vec{\Lambda}_0 \times \vec{\Lambda}) \quad . \quad (45)$$

Reescrevendo, este $\hat{n}$ em termos de variáveis do referencial S' , $\hat{n}'$ será então [59]

$$\hat{n}' = \frac{1}{\Lambda_0^2} [(\vec{\Lambda}'_0 + \alpha_0 \vec{\beta}) \times (\vec{\Lambda}' + \alpha \vec{\beta})] = \frac{1}{\Lambda_0^2} [\vec{\Lambda}'_0 \times \vec{\Lambda}' + \vec{\beta} \times (\alpha_0 \vec{\Lambda}' - \alpha \vec{\Lambda}'_0)] \quad , \quad (46)$$

e assim a expressão da polarização em S' será

$$\vec{P}' = \frac{P}{\Lambda_0^2} [\vec{\Lambda}'_0 \times \vec{\Lambda}' + \vec{\beta} \times (\alpha_0 \vec{\Lambda}' - \alpha \vec{\Lambda}'_0)] \quad , \quad (47)$$

com Λ_0 e $\cos \theta^*$ dados pelas expressões (24) e (39) e

$$P'_0 = -2 \frac{\text{Im}[f^* g]}{|f|^2 + |g|^2} \quad . \quad (48)$$

Resumindo, o que fizemos nesta seção foi o seguinte: imaginamos a geração aleatória de um híperon e de um pión (em S'); transformamos os momentos para o referencial de centro de massa do par para então obtermos a polarização resultante da sua interação (utilizando os resultados do capítulo anterior); e então voltamos para S' , obtendo $\vec{P}'$ e $d\sigma/dt$ como função das variáveis de S' . Na verdade, poderíamos ter feito os cálculos do capítulo passado diretamente em S' , o que teria evitado efetuar a transformação de Lorentz, mas os cálculos seriam mais complicados e a visualização dos resultados finais seria mais difícil, o que justifica a utilização do método descrito.

IV.2 - Médias em S' :

Conhecendo a polarização e a seção de choque resultantes de uma colisão em S' , podemos agora calcular a polarização média $\langle \vec{P}' \rangle$ do híperon levando em conta

todos os momentos, tanto do híperon como do pión, dentro do meio. Como já mencionamos antes, consideraremos apenas a última colisão do híperon nesse meio.

Vamos supor que os píons sejam produzidos de acordo com a distribuição de Bose-Einstein

$$F_{BE}(\pi'_0) \propto \frac{1}{\exp(\frac{E'_{\pi_0}}{T}) - 1} , \quad (49)$$

e os híperons de acordo com a distribuição de Fermi-Dirac

$$F_{FD}(\Lambda'_0) \propto \frac{1}{\exp(\frac{E'_0}{T}) + 1} , \quad (50)$$

onde a temperatura $T \sim m_\pi$. Podemos então constatar que estamos considerando partículas produzidas caoticamente, com momentos cujos módulos obedecem a distribuições estatísticas, mas os ângulos θ e ϕ são totalmente livres (apenas sofrerão algumas restrições ao modelarmos a forma do sistema e ao requerermos condições para detecção).

O que desejamos é calcular os valores médios das polarizações destas partículas emergentes, considerando que cada evento possui peso proporcional a

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{\Lambda_0^2} \frac{d\sigma}{d\Omega} , \quad (51)$$

que é um invariante de Lorentz. Assim,

$$\langle \vec{P}' \rangle = \frac{\langle \vec{P}' d\sigma/dt \rangle}{\langle d\sigma/dt \rangle} , \quad (52)$$

onde

$$\langle \frac{d\sigma}{dt} \rangle = \frac{\int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) (d\sigma/dt) \delta^4(\Lambda'_{0\mu} + \pi'_{0\mu} - \Lambda'_\mu - \pi'_\mu) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}'}{\int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) \delta^4(\Lambda'_{0\mu} + \pi'_{0\mu} - \Lambda'_\mu - \pi'_\mu) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}'} , \quad (53)$$

$$\langle \vec{P}' \frac{d\sigma}{dt} \rangle = \frac{\int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) \vec{P}' (d\sigma/dt) \delta^4(\Lambda'_{0\mu} + \pi'_{0\mu} - \Lambda'_\mu - \pi'_\mu) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}'}{\int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) \delta^4(\Lambda'_{0\mu} + \pi'_{0\mu} - \Lambda'_\mu - \pi'_\mu) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}'} , \quad (54)$$

o que fornece

$$\frac{\langle \vec{P}'(d\sigma/dt) \rangle}{\langle d\sigma/dt \rangle} = \frac{\int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) \vec{P}' (d\sigma/dt) \delta^4(\Lambda'_{0\mu} + \pi'_{0\mu} - \Lambda'_\mu - \pi'_\mu) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}'}{\int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) (d\sigma/dt) \delta^4(\Lambda'_{0\mu} + \pi'_{0\mu} - \Lambda'_\mu - \pi'_\mu) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}'} . \quad (55)$$

Para calcularmos as médias devemos então efetuar as integrações das expressões acima em nove dimensões ($d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}'$) usando $\vec{P}'$ e $d\sigma/dt$ expressos em termos das variáveis de S' , conforme calculando na seção anterior (que são expressões razoavelmente complicadas). Calculando a expressão (55), obteremos a polarização média com a qual o híperon emerge do elemento de fluido como função de seu momento $\vec{\Lambda}'$. Note-se que neste resultado o movimento do fluido não foi levado em conta ainda.

As nove integrais podem ser reduzidas a seis, simplesmente integrando três funções δ espaciais e eliminando a dependência no momento final do pión $\vec{\pi}'$. Assim, as integrais

$$\langle F \rangle = \int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) F(\vec{\pi}'_0, \vec{\Lambda}'_0, \vec{\Lambda}') \delta^4(\Lambda'_{0\mu} + \pi'_{0\mu} - \Lambda'_\mu - \pi'_\mu) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 d\vec{\pi}' , \quad (56)$$

onde F é $\vec{P}'(d\sigma/dt)$ ou $d\sigma/dt$, reduzir-se-ão a

$$\langle F \rangle = \int F_{BE}(\pi'_0) F_{FD}(\Lambda'_0) F(\vec{\pi}'_0, \vec{\Lambda}'_0, \vec{\Lambda}') \delta(E'_0 + E'_{\pi_0} - E' - \sqrt{m_\pi^2 + (\vec{\pi}'_0 + \vec{\Lambda}'_0 - \vec{\Lambda}')^2}) d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 . \quad (57)$$

Vamos chamar

$$\mathcal{F} = \frac{1}{(\exp(\frac{E'_{\pi_0}}{T}) - 1)} \frac{1}{(\exp(\frac{E'_0}{T}) + 1)} \Lambda_0'^2 \pi_0'^2 \delta(E'_0 + E'_{\pi_0} - E' - \sqrt{m_\pi^2 + (\vec{\pi}'_0 + \vec{\Lambda}'_0 - \vec{\Lambda}')^2}) \quad (58)$$

e

$$d\xi = d\vec{\Lambda}'_0 d\vec{\pi}'_0 \quad (59)$$

e assim a expressão para a polarização média será

$$\langle \vec{P}' \rangle = \frac{\int (\vec{P}' d\sigma/dt) \mathcal{F} d\xi}{\int (d\sigma/dt) \mathcal{F} d\xi} , \quad (60)$$

que é uma expressão que contém integrações em seis dimensões.

Como ainda temos uma função delta, podemos efetuar a integração em $d(\cos \theta'_\pi)$ (ou qualquer outra variável), utilizando a propriedade

$$\int f(x)\delta(g(x))dx = \sum_{x_i} \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (61)$$

onde x_i são as raízes de $g(x) = 0$, conforme fizemos em [25], o que reduz os cálculos a integrais em cinco dimensões. Podemos observar que o cálculo resultante não é simples (efetuar as integrais em cinco dimensões) e obter resultados analíticos é uma tarefa muito difícil (se não for impossível) e por isso decidimos efetuar estas integrações pelo método de Monte Carlo.

IV.3 - Matéria Hadrônica em Expansão:

Os resultados da seção anterior mostram como é possível obter a polarização média com a qual um híperon emerge em relação a um elemento de fluido, que pode ser descrito pelo referencial S' . Contudo, esta não é a polarização observada, pois o elemento de fluido possui uma rapidez longitudinal α no sistema de laboratório. Na verdade, como em [60], também pode considerar-se uma rapidez transversal α_t . O fluido é então formado por muitos elementos com velocidades variáveis, velocidades estas que obedecem a uma distribuição de rapidez $dN/d\alpha$. Para calcularmos então a polarização que é observada no laboratório devemos ainda fazer duas coisas: fazer uma transformação de Lorentz de S' para S_L e calcular outra média considerando agora partículas provenientes de diferentes elementos de fluido com diferentes velocidades e deste modo com peso estatístico $dN/d\alpha$ (não esquecendo que α é a rapidez do elemento de fluido no referencial de laboratório).

Em primeiro lugar, vamos estudar a transformação de referenciais entre S' e S_L . Neste caso a transformação é bem mais simples que a que relaciona S' e S , pois estaremos considerando a velocidade paralela a um dos eixos.

Figura 2: S_L e S' .

Sabendo os valores dos momentos e da polarização $\vec{P}'$ em S' , o que queremos é calcular estas quantidades no referencial de laboratório S_L . Continuando com a escolha de referenciais paralelos ($\hat{x}'//\hat{x}_L$ e assim por diante) e, supondo que na experiência o próton incide na direção $\hat{x}_L$, o que irá provocar a expansão longitudinal do fluido na direção $\hat{x}_L$ com uma velocidade $v = \tanh\alpha$, teremos

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad , \quad (62)$$

e deste modo teremos uma transformação de referenciais,

$$\begin{cases} \Lambda_{xL} = \gamma_1(\Lambda'_x + vE') \quad , \\ \Lambda_{yL} = \Lambda'_y \quad , \\ \Lambda_{zL} = \Lambda'_z \quad . \end{cases} \quad (63)$$

O módulo do momento do híperon será

$$\Lambda_L = \sqrt{\Lambda_{xL}^2 + \Lambda_{yL}^2 + \Lambda_{zL}^2} \quad (64)$$

e o ângulo de espalhamento

$$\cos\theta_L = \frac{\Lambda_{xL}}{\Lambda_L} \quad . \quad (65)$$

O momento transversal

$$\Lambda_T = \Lambda_L \sin \theta_L = \Lambda_L \sqrt{1 - \frac{\Lambda_{xL}^2}{\Lambda_L^2}} = \sqrt{\Lambda_{yL}^2 + \Lambda_{zL}^2} . \quad (66)$$

A variável de Feynman é

$$x_F \cong \frac{\Lambda_{Lx}}{p_p} , \quad (67)$$

onde p_p é o momento incidente do próton.

Nas direções $\hat{y}_L$ e $\hat{z}_L$ a polarização não se altera, pois a velocidade de transformação é na direção $\hat{x}_L$, e são justamente estas componentes que necessitamos no cálculo. Nas experiências a polarização é medida na direção normal ao plano de espalhamento

$$\hat{n}_L = \frac{\hat{x}_L \times \vec{\Lambda}_L}{|\hat{x}_L \times \vec{\Lambda}_L|} = \frac{1}{\Lambda_T} [\Lambda_{yL} \hat{x}_L - \Lambda_{zL} \hat{y}_L] , \quad (68)$$

e a polarização na direção normal será

$$P_n = \vec{P}_L \cdot \hat{n}_L = \frac{1}{\Lambda_T} [\Lambda_{yL} P_{zL} - \Lambda_{zL} P_{yL}] = \frac{1}{\Lambda_T} [\Lambda'_y P'_z - \Lambda'_z P'_y] . \quad (69)$$

A rapidez de uma partícula é definida como

$$y = \ln \left(\frac{p_{\parallel} + E}{m_t} \right) , \quad (70)$$

onde $p_{\parallel}$ é a componente do momento na direção da rapidez y , m_t é a massa transversal dada por

$$m_t = \sqrt{p_T^2 + m^2} , \quad (71)$$

e assim a rapidez de Λ observada no laboratório será

$$y_L = \ln \left(\frac{\Lambda_L \cos \theta_L + \sqrt{\Lambda_L^2 + m_\Lambda^2}}{\sqrt{\Lambda_T^2 + m_\Lambda^2}} \right) . \quad (72)$$

Em S' teremos

$$y' = \ln \left(\frac{\Lambda' \cos \theta' + \sqrt{(\Lambda')^2 + m_\Lambda^2}}{\sqrt{\Lambda_T'^2 + m_\Lambda^2}} \right) , \quad (73)$$

A rapidez é uma quantidade aditiva, assim se estivermos considerando uma partícula com rapidez y' no interior de um elemento de fluido com rapidez α , sua rapidez no laboratório será

$$y_L = \alpha + y' \quad . \quad (74)$$

e assim

$$\alpha = \ln \left(\frac{\Lambda_L \cos \theta_L + \sqrt{\Lambda_L^2 + m_\Lambda^2}}{\Lambda' \cos \theta' + \sqrt{(\Lambda')^2 + m_\Lambda^2}} \right) \quad , \quad (75)$$

Para calcularmos a polarização média com a qual o híperon atinge o detector precisamos saber como as velocidades de diferentes elementos de fluido estão distribuídas, ou seja, qual é a forma de $dN/d\alpha$. Podemos responder a esta pergunta se observarmos os dados experimentais para distribuições de rapidez de partículas produzidas em colisões pA [61] a $p_L=200$ GeV, onde a maioria das partículas observadas são píons. Assim se usarmos os dados de [61] considerando que são para píons (na verdade os dados são para todos os hadrons negativos produzidos), não estaremos cometendo um grande erro. A distribuição de rapidez de píons observada experimentalmente, dN/dy , é a convolução da distribuição de rapidez térmica dN/dy' no sistema próprio do fluido com a distribuição de rapidez dos elementos de fluido $dN/d\alpha$. Assim,

$$\frac{dN}{dy} = \int \frac{dN}{d\alpha}(\alpha) \frac{dN}{dy'}(y - \alpha) d\alpha \quad . \quad (76)$$

Em primeiro lugar, vamos calcular a distribuição de rapidez térmica com a qual os píons são produzidos. Os píons obedecem à distribuição de Bose-Einstein,

$$\frac{1}{E'} \frac{dN}{dy' d\vec{p}_T} = \frac{dN}{d\vec{p}} \propto \frac{1}{e^{\frac{E'}{T}} - 1} \quad , \quad (77)$$

e deste modo

$$\frac{dN}{dy'} = \int d^2 p_t \frac{dN}{dy' d\vec{p}_t} \propto \int d^2 p_t \frac{E'}{e^{\frac{E'}{T}} - 1} \quad (78)$$

usando

$$E' = m_t \cosh y' \quad (79)$$

teremos

$$\frac{dN}{dy'} \propto \int d^2 p_t \frac{m_t \cosh y'}{e^{\frac{m_t}{T} \cosh y'} - 1} = 2\pi \cosh y' \int_{m_\pi}^{\infty} dm_t \frac{m_t^2 e^{-\frac{m_t}{T} \cosh y'}}{1 - e^{-\frac{m_t}{T} \cosh y'}} \quad (80)$$

e como $(m_t \cosh y')/T$ é um fator grande, pode-se expandir a integral em série e integrar termo a termo

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dy'} &\propto 2\pi \cosh y' \sum_{n=0}^{\infty} \int_{m_\pi}^{\infty} dm_t m_t^2 e^{-m_t \frac{(n+1)}{T} \cosh y'} = \\ &= 2\pi T m_\pi^2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{(n+1)m_\pi}{T} \cosh y'} \left[\frac{2(\frac{T}{m_\pi})^2}{(n+1)^3 \cosh^2 y'} + \frac{2(\frac{T}{m_\pi})}{(n+1)^2 \cosh y'} + \frac{1}{(n+1)} \right] \end{aligned}$$

e o resultado final será aproximadamente uma gaussiana dada por

$$\frac{dN}{dy'} \sim A' e^{-\beta' y'^2} \quad (81)$$

com $\beta' = 1.016$ para $T \sim m_\pi$. Observando a Figura 3 fica claro que esta aproximação é boa. Com esta aproximação os próximos cálculos ficarão bem mais simples.

Vamos agora supor como é frequentemente feito que o fluido obedeça aproximadamente à uma distribuição de rapidez gaussiana dada por

$$\frac{dN}{d\alpha} = A e^{-\beta(\alpha-\alpha_0)^2} \quad (82)$$

e deste modo

$$\frac{dN}{dy} \propto \int e^{-\beta(\alpha-\alpha_0)^2} e^{-\beta'(\alpha-y)^2} d\alpha \quad (83)$$

que é simplesmente uma integral de funções gaussianas,

$$\frac{dN}{dy} = A_0 e^{-\frac{\beta\beta'}{\beta+\beta'}(y-\alpha_0)^2} \quad (84)$$

Figura 3: Comparação entre o cálculo exato para dN/dy' e a aproximação gaussiana.

Figura 4: Distribuição de Rapidez para um elemento de Fluido comparada com os dados de [61].

Como y varia de 0 a 6 (na colisão pA com $p_t = 200$ GeV) tomamos $\alpha_0 = 3$ que é o ponto médio. Observando os dados apresentados na Figura 4, notamos que há uma assimetria em relação a $y = \alpha_0$, pois a colisão é entre próton e núcleo de enxofre. No ajuste de β devemos tentar reproduzir os dados na região $y > \alpha_0 = 3$. Observamos na Figura 4 que um bom ajuste pode ser obtido com $\beta \sim 3$. Para valores menores de y , poderíamos por exemplo incluir mais uma gaussiana para o ajuste ficar perfeito na região influenciada pelo enxofre, mas como o nosso interesse é para partículas produzidas com rapidez em torno de 6, os elementos de fluido com rapidez baixa praticamente não contribuem e podem ser desprezados (pois neste caso deveriam ser geradas termicamente partículas com rapidez maior que 3, o que é altamente improvável, veja que na Figura 4 estes eventos são praticamente inexistentes). Então para os nossos interesses esta parametrização basta. Assim, podemos constatar que a utilização de uma distribuição de rapidez gaussiana conforme a expressão (82) com α_0 e β dados acima é bem razoável.

Conhecendo a distribuição de rapidez $dN/d\alpha$, agora podemos calcular a polarização média observada no sistema de laboratório a partir de

$$\langle \vec{P}_L \rangle = \frac{\int (dN/d\alpha) (\vec{P}_L d\sigma/dt) \mathcal{F} d\xi d\alpha}{\int (dN/d\alpha) (d\sigma/dt) \mathcal{F} d\xi d\alpha} \quad (85)$$

onde para simplificar a notação usaremos

$$\langle \vec{P}_L \rangle = \frac{\int (\vec{P}_L d\sigma/dt) \mathcal{G} d\tau}{\int (d\sigma/dt) \mathcal{G} d\tau} \quad , \quad (86)$$

com $\mathcal{G} = (dN/d\alpha) \mathcal{F}$ e $d\tau = d\xi d\alpha$, o que fornece agora uma integração em 7 dimensões (foi incluída a rapidez α como variável a ser integrada e após as integrações a polarização sairá ainda como função de $\vec{\Lambda}_L$). Se quisermos incluir ainda a expansão transversal, basta tomarmos uma rapidez transversal α_t para o fluido, modificar adequadamente as transformações de Lorentz (63) utilizando agora as transformações

gerais (7), pois a velocidade do fluido irá agora possuir componentes longitudinal e transversal. Deve-se ainda incluir uma distribuição de rapidez $dN/d\alpha_t$ (semelhante à de [60]), como

$$\frac{dN}{d\alpha_t} = e^{-B\alpha_t^2} , \quad (87)$$

com B da ordem de 6.5 e integrar em α_t , o que modifica agora nossas integrais para oito dimensões (ainda com a função delta, que pode ser integrada com a expressão (61)).

Conforme ilustrado pela Figura 2, os nossos híperons deixam o fluido, que tem uma forma cilíndrica, dirigindo-se ao detector. Eles podem sair de diferentes elementos superficiais de fluido ao longo da direção x_L (o que equivale a diferentes valores de α), mas também podem sair de diferentes pontos com diferentes ângulos azimutais. Isto deveria ser considerado fazendo uma integração angular em torno do eixo. Uma alternativa equivalente, porém mais conveniente do ponto de vista do método de Monte Carlo, é manter fixo o ângulo do elemento de superfície e variar a posição do detector (no cálculo, é claro), mantendo somente o ângulo θ_L constante.

IV.4 - Reações :

Na seção anterior mostramos como calcular a polarização média de um híperon (ou anti-híperon) produzido termicamente em um elemento de fluido, que possui uma distribuição de rapidez $dN/d\alpha$ (aproximada por uma gaussiana), considerando a sua última colisão nesse meio. A expressão para a polarização média (86) é geral, ou seja, pode ser usada para qualquer reação πY que ocorra. Contudo, para cada híperon existem várias reações possíveis e com seções de choque que devem ser

consideradas. Para a produção de Λ (e de $\bar{\Lambda}$), existem três reações possíveis,

$$\begin{aligned}\pi^+\Lambda &\rightarrow \pi^+\Lambda , \\ \pi^-\Lambda &\rightarrow \pi^-\Lambda , \\ \pi^0\Lambda &\rightarrow \pi^0\Lambda ,\end{aligned}\tag{88}$$

para Σ^+ (cuja antipartícula é $\bar{\Sigma}^-$) existem seis reações elásticas,

$$\begin{aligned}\pi^+\Sigma^+ &\rightarrow \pi^+\Sigma^+ , \\ \pi^0\Sigma^+ &\rightarrow \pi^0\Sigma^+ , \\ \pi^-\Sigma^+ &\rightarrow \pi^-\Sigma^+ , \\ \pi^+\Sigma^- &\rightarrow \pi^-\Sigma^+ , \\ \pi^+\Sigma^0 &\rightarrow \pi^0\Sigma^+ , \\ \pi^0\Sigma^0 &\rightarrow \pi^-\Sigma^+ ,\end{aligned}\tag{89}$$

e para Ξ^- (cuja antipartícula é $\bar{\Xi}^+$) existem quatro reações

$$\begin{aligned}\pi^+\Xi^- &\rightarrow \pi^+\Xi^- , \\ \pi^0\Xi^- &\rightarrow \pi^0\Xi^- , \\ \pi^-\Xi^- &\rightarrow \pi^-\Xi^- , \\ \pi^-\Xi^+ &\rightarrow \pi^+\Xi^- ,\end{aligned}\tag{90}$$

cuja polarizações e seções de choque foram calculadas no capítulo anterior.

Para incluir todos os processos citados, devemos fazer ainda mais uma média considerando todas as reações R_i a partir de

$$\langle \vec{P}_L \rangle = \frac{\int (\vec{P}_L d\sigma/dt)_{R_1} \mathcal{G} d\tau + \int (\vec{P}_L d\sigma/dt)_{R_2} \mathcal{G} d\tau + \dots + \int (\vec{P}_L d\sigma/dt)_{R_N} \mathcal{G} d\tau}{\int (d\sigma/dt)_{R_1} \mathcal{G} d\tau + \int (d\sigma/dt)_{R_2} \mathcal{G} d\tau + \dots + \int (d\sigma/dt)_{R_N} \mathcal{G} d\tau} , \tag{91}$$

e assim

$$\langle \vec{P}_L \rangle = \frac{\int \{ (\vec{P}_L d\sigma/dt)_{R_1} + (\vec{P}_L d\sigma/dt)_{R_2} + \dots (\vec{P}_L d\sigma/dt)_{R_N} \} \mathcal{G} d\tau}{\int \{ (d\sigma/dt)_{R_1} + (d\sigma/dt)_{R_2} + \dots (d\sigma/dt)_{R_N} \} \mathcal{G} d\tau} . \quad (92)$$

O caso do espalhamento $\pi\Lambda$ é o mais simples. Existem apenas três reações e com polarizações e seções de choque iguais. Assim, supondo que π^+ , π^- e π^0 sejam produzidos em quantidades quase iguais,

$$\left(\vec{P}_L \frac{d\sigma}{dt} \right)_{R_1} = \left(\vec{P}_L \frac{d\sigma}{dt} \right)_{R_2} = \left(\vec{P}_L \frac{d\sigma}{dt} \right)_{R_3} = \left(\vec{P}_L \frac{d\sigma}{dt} \right) \quad (93)$$

consequentemente a expressão (92) se reduz a

$$\langle \vec{P}_L \rangle = \frac{\int (\vec{P}_L d\sigma/dt) \mathcal{G} d\tau}{\int (d\sigma/dt) \mathcal{G} d\tau} . \quad (94)$$

Para os outros casos, podemos simplificar as integrais de (92) manipulando as somas entre as chaves. Para uma determinada reação, as amplitudes f e g são dadas por somas das contribuições dos diferentes estados de isospin I (ver capítulo anterior)

$$f = \sum_I \alpha_I f_I = \sum_I \alpha_I (a_I + b_I \cos \theta) , \quad (95)$$

$$g = \sum_I \alpha_I g_I = \sum_I \alpha_I c_I . \quad (96)$$

com os coeficientes α_I para Ξ e Σ estão no Apêndice A.5 (expressões (61) e (63)).

A seção de choque é dada por

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{k^4} \left[|f|^2 + |g|^2 \sin^2 \theta \right] = \frac{\pi}{k^4} \left[\left| \sum_I \alpha_I (a_I + b_I \cos \theta) \right|^2 + \left| \sum_I \alpha_I c_I \right|^2 \sin^2 \theta \right] . \quad (97)$$

Já a polarização

$$P_L \frac{d\sigma}{dt} = -2 \frac{\text{Im}(f^* g)}{|f|^2 + |g|^2 \sin^2 \theta} \frac{\pi}{k^4} \left[|f|^2 + |g|^2 \sin^2 \theta \right] = -2 \frac{\pi}{k^4} \left[\text{Im}(f^* g) \right] = \quad (98)$$

$$= -2\frac{\pi}{k^4} \left[\text{Im} \left(\left(\sum_I \alpha_I (a_I + b_I \cos \theta) \right)^* \sum_I \alpha_I c_I \right) \right] .$$

Devemos então somar essas quantidades para todas as reações. Fazendo as somas para o caso de Σ obtemos

$$\sum_r \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_r = \frac{\pi}{k^4} \left[A(|f_0|^2 + |g_0|^2 \sin^2 \theta) + B(|f_1|^2 + |g_1|^2 \sin^2 \theta) + C(|f_2|^2 + |g_2|^2 \sin^2 \theta) \right] \quad (99)$$

e

$$\sum_r \left(P_L \frac{d\sigma}{dt} \right)_r = -2\frac{\pi}{k^4} \left[\text{Im} \left(A f_0^* g_0 + B f_1^* g_1 + C f_2^* g_2 \right) \right] \quad (100)$$

com $A = 0.333$, $B = 1$ e $C = 1.667$.

Para o caso de Ξ teremos

$$\sum_r \left(\frac{d\sigma}{dt} \right)_r = \frac{\pi}{k^4} \left[A(|f_{\frac{1}{2}}|^2 + |g_{\frac{1}{2}}|^2 \sin^2 \theta) + B(|f_{\frac{3}{2}}|^2 + |g_{\frac{3}{2}}|^2 \sin^2 \theta) + 2C \text{Re}(f_{\frac{1}{2}}^* f_{\frac{3}{2}} + g_{\frac{1}{2}}^* g_{\frac{3}{2}} \sin^2 \theta) \right] \quad (101)$$

e

$$\sum_r \left(P_L \frac{d\sigma}{dt} \right)_r = -2\frac{\pi}{k^4} \left[A f_{\frac{1}{2}}^* g_{\frac{1}{2}} + B f_{\frac{3}{2}}^* g_{\frac{3}{2}} + C(f_{\frac{1}{2}}^* g_{\frac{3}{2}} + f_{\frac{3}{2}}^* g_{\frac{1}{2}}) \right] \quad (102)$$

com $A = 0.777$, $B = 1.777$ e $C = 0.222$.

V. Resultados

No capítulo anterior descrevemos um procedimento para o cálculo de polarização de híperons e anti-híperons produzidas em processos inclusivos a altas energias. Neste capítulo vamos aplicá-lo para os processos estudados em laboratórios. Observando as expressões das polarizações médias, podemos constatar que obter resultados analíticos é uma tarefa praticamente inexecutável. Por este motivo, conforme já mencionado no fim da seção IV.2, vamos fazer uma estimativa numérica da polarização média através do método de Monte Carlo.

Neste capítulo mostraremos as polarizações resultantes de $\bar{\Lambda}$, $\bar{\Sigma}^-$ e $\bar{\Xi}^+$, com e sem a expansão transversal do fluido. Estudaremos também o efeito da variação de β , parâmetro que controla a distribuição de rapidez, na polarização, pois como foi mostrado no capítulo anterior, este parâmetro apresenta uma certa incerteza.

Para efetuarmos as integrações da expressão (92) do capítulo anterior, vamos tomar π'_0 e Λ'_0 , indo de zero a infinito, φ'_π e φ'_0 , de 0 a 2π , θ'_0 , de 0 a $\pi/2$ (a rigor, poderíamos ter θ'_0 indo até π , mas estes eventos em nosso caso possuem pouco peso estatístico, pois queremos que após a colisão o híperon emergja do meio) e θ_π de 0 a

π .

Devido à geometria do problema, a contribuição mais importante deve vir quando o detector e o elemento superficial do fluido estão no mesmo plano, ou seja, $x_L z_L$ (ver a Figura 3 do capítulo anterior), quando a polarização se escreve, de acordo com (IV.69),

$$P_n = \vec{P}_L \cdot \hat{n}_L = -P'_y, \quad (1)$$

ou seja, a componente observada da polarização irá trocar de sinal. Como ao calcularmos a polarização de **anti-híperons** devemos trocar o sinal das polarizações calculadas no capítulo III (veja a seção III.6), teremos então duas trocas de sinal e assim esperamos que as polarizações médias de anti-híperons possuam o mesmo sinal das polarizações do capítulo III, e para os híperons, o sinal será trocado. Nesta discussão está implícita a idéia de que o híperon (ou anti-híperon) detectado com pequeno ângulo em relação ao eixo incidente sofre, na colisão com π , um desvio no sistema de centro de massa no mesmo sentido que em S_L . Calculando então obtemos os resultados mostrados nas Figuras de 1 a 4.

Observando as figuras, podemos constatar que, para $\bar{\Lambda}$, o acordo com os dados é quase perfeito, com uma polarização média em torno de zero. Este fato é reflexo da mudança de sinal que ocorre na polarização de $\bar{\Lambda}$ calculada no capítulo III (Figura 9), que ao efetuarmos a média, provoca um cancelamento quase perfeito produzindo um resultado próximo de 0. É interessante observar que a expansão transversal aumenta a polarização média, pois as partículas que emergem rasantes em S' são as com maior polarização, e a expansão transversal faz com que estas adquiram um maior momento transversal (p_t da ordem dos dados). Este fato ocorre também para os outros anti-híperons.

Figura 1: Polarização de $\bar{\Lambda}$ com e sem Expansão transversal para $\beta=2$ comparada com dados de [6] e [4], que são para um feixe de prótons incidentes.

Figura 2: Polarização de $\bar{\Lambda}$ com e sem Expansão transversal para $\beta=2$ comparada com os dados de um feixe de Σ^- de momento 330 GeV (dados de [14]).

Figura 3: Polarização de $\bar{\Sigma}^-$ comparada com os dados de [12] (ângulo de produção de 5 mrad e momento incidente de 800 GeV).

Figura 4: Polarização de $\bar{\Xi}^+$ do cálculo comparada com os dados de [11] (ângulo de produção de 2.5 mrad e momento incidente igual a 800 GeV).

Na figura 2, vemos um bom acordo do mesmo cálculo também com os $\bar{\Lambda}$ produzidos por um feixe de Σ^- , o que sustenta a idéia da produção de anti-híperons por um mecanismo indireto.

No caso de $\bar{\Sigma}^-$ (Figura 3), podemos notar que a polarização resultante foi positiva, com valores bem próximos aos dos dados. Ao observarmos as polarizações calculadas no capítulo III (Figura 14), vemos que há um predomínio da polarização positiva para as reações com maior seção de choque e concluímos que este predomínio prevaleceu nas médias. Note que incluída a expansão transversal a polarização aumenta um pouco mais. Observe também que a tendência mostrada pelos dados de apresentar primeiro um crescimento e depois decrescimento é reproduzida pelos cálculos.

Já no caso de Ξ^+ , efetuamos a variação de β , com e sem expansão transversal. Conforme discutimos no final da seção III.4, imaginamos que a contribuição de σ poderia estar superestimada, e por este motivo, experimentamos diminuir a e b multiplicando-os por 0.4 (que é aproximadamente o fator que aparece ao compararmos as constantes de acoplamento de $\pi\Xi\Xi$ com πNN , por exemplo). Estudamos ainda o efeito da inclusão de mais uma ressonância, $\Xi^*(1620)$, simplesmente incluindo-a através da expressão de Breit-Wigner (III-58), e somando esta defasagem à δ_{P_3} calculada no capítulo III e efetuando os cálculos do modo já descrito. Os resultados finais destes cálculos estão na Figura 4. A curva (1) é feita com $\beta = 3$ com expansão transversal e com a inclusão de $\Xi^*(1620)$. A curva (2) é para $\beta = 3$ com expansão transversal mas sem $\Xi^*(1620)$ e a curva (3) é para $\beta = 3$ sem expansão transversal. As curvas de (1) a (3) utilizam a parametrização de σ do capítulo III, e as curvas (4) ($\beta = 2.6$) e (5) ($\beta = 3.6$) foram feitas diminuindo o termo σ conforme

a discussão anterior. Podemos notar que a diminuição do termo σ melhora bastante o acordo com os dados experimentais.

Podemos então constatar que de um modo geral, os resultados descreveram razoavelmente bem os dados, principalmente quanto às diferenças de sinais nas polarizações resultantes dos diferentes anti-híperons, fato que até hoje não havia sido realizado.

VI. Conclusões

Nesta tese desenvolvemos um modelo para explicar a polarização de anti-híperons em processos inclusivos a altas energias. Imaginamos que a polarização de anti-híperons é devida às interações finais que estes sofrem após serem produzidos. Este é um argumento bem razoável, pois em primeiro lugar num meio denso onde eles são produzidos, a interação com as partículas vizinhas é certamente importante; além disso, é aceito que em decaimentos fracos de híperons, as interações finais πY são consideráveis [28], [29]. Consideramos que os anti-híperons sejam produzidos sem polarização, e se polarizem através de interações finais com as outras partículas produzidas e, como a maioria destas partículas são píons, a interação πY seja a dominante. Utilizamos o modelo quiral relativístico com lagrangianas efetivas para estudarmos estas interações (a baixas energias, no sistema de centro de massa do par), e fizemos estimativas para as constantes de acoplamento desconhecidas $\pi Y Y^*$, utilizando características de Y^* , para então calcularmos as polarizações e seções de choque. Implementamos então estas interações através do modelo hidrodinâmico (o que poderia ter sido feito de outro modo), considerando a expansão do fluido e várias

reações elásticas e com troca de carga. Obtivemos então resultados que descrevem razoavelmente bem os dados experimentais.

A partir do conteúdo exposto até agora, podemos ter uma visualização melhor do fenômeno da polarização de híperons. Para a produção de partículas em colisões a altas energias existem dois mecanismos distintos: o direto e o indireto (Figura 1).

Figura 1: Mecanismos Direto e Indireto de Produção de Partículas

O mecanismo direto é o responsável pela produção das partículas dominantes, que são produzidas já polarizadas a partir da troca de um ou dois constituintes do hadron incidente, preservando grande parte do momento inicial (mecanismo que pode produzir Λ , Σ e Ξ em um processo iniciado por p). Este mecanismo produz polarização dependente do feixe mas não do alvo. O mecanismo indireto se aplica tanto para híperons como para anti-híperons. Por este mecanismo, as partículas são produzidas dentro da matéria densa formada durante a colisão. Quando as partículas produzidas não possuem quarks em comum com o hadron incidente, os três quarks são criados durante a interação (ver Figura 1) e portanto, este é o único

mecanismo possível para a produção (por exemplo, de anti-partículas). Espera-se que, em média, a polarização das partículas produzidas deste modo seja nula pois os quarks são criados com spins em direções aleatórias. Contudo, sabe-se que a polarização de alguns anti-híperons não é nula, então a única possibilidade é que estas partículas se polarizem depois que foram produzidas através de interações finais com as outras partículas. Isto prova que as interações finais são muito importantes neste tipo de reação e, na verdade, são a causa da polarização de anti-híperons. Se as interações finais são importantes nos mecanismos indiretos de produção espera-se que também tenham algum efeito (possivelmente um pouco menor) na polarização de híperons, ou seja, os resultados obtidos com modelos que consideram o mecanismo direto devem ser corrigidos levando-se em conta também a produção indireta, o que ainda não foi feito (na verdade, até agora não havia um modelo para calcular este efeito. Em [42] estamos propondo um modelo que pode ser usado para este fim, que é basicamente o apresentado no capítulo III).

Uma característica do mecanismo indireto de produção, é que a produção de partículas deva ser independente do feixe incidente (ou praticamente independente). Observando as Figuras 1 e 2 do capítulo anterior, podemos observar que os resultados obtidos para $\bar{\Lambda}$ estão em bom acordo tanto para os dados obtidos com um feixe de prótons como para os obtidos com um feixe de Σ^- , o que sustenta ainda mais este tipo de mecanismo. Pelo nosso modelo, podemos esperar ainda que se houvessem dados para $\bar{\Sigma}$ e $\bar{\Xi}$ produzidos por um feixe de Σ^- , as polarizações deveriam ser consistentes com as obtidas com um feixe de prótons.

O estudo dos mecanismos indiretos pode ser feito de um modo natural através da utilização do modelo hidrodinâmico, pois este consegue descrever relativamente bem

a produção de partículas produzidas neste tipo de processo. A implementação das interações finais foi feita através da observação das interações microscópicas entre as partículas (a baixas energias) que ocorrem no interior do fluido, que se expande produzindo aproximadamente uma distribuição de rapidez gaussiana (expressão (82) do capítulo III). A expansão transversal também se mostrou importante neste modelo, pois esta aumenta o momento das partículas que emergem com ângulos próximos de $\pi/2$ (rasantes) em relação ao elemento de fluido, e são justamente estas partículas que possuem maior polarização.

Devemos observar que o modelo quiral relativístico com lagrangianas efetivas consegue descrever bem os dados da interação πN até aproximadamente 400 MeV, e esperamos que o mesmo ocorra aqui. Note que quanto a estas interações, não tentamos ajustar os parâmetros da teoria, usamos simplesmente os esperados. Contudo os parâmetros da interação através de σ por exemplo podem ser diferentes para os diferentes híperons, e principalmente para Ξ , como discutido no capítulo III, pois a sua constante de acoplamento com píons é bem menor que a de p ou Λ . Deste modo, os parâmetros a e b foram diminuídos (proporcionalmente às constantes de acoplamento com π), o que melhorou sensivelmente os resultados (ver capítulo anterior), sugerindo que este termo estava sendo superestimado.

Incluindo a ressonância $\Xi^*(1620)$, houve um aumento no módulo da polarização para $p_t \sim 0.7$ GeV. A inclusão de ressonâncias mais altas irão causar modificações para valores maiores de p_t ($\sim 0.9 - 1.0$ GeV) pois as próximas ressonâncias que decaem em $\pi\Xi$ são $\Xi^*(1820)$ e $\Xi^*(1950)$.

A inclusão de canais acoplados como

$$\pi\Sigma \rightarrow \Sigma(\Sigma^*) \rightarrow \pi\Lambda \quad (1)$$

e

$$\pi\Lambda \rightarrow \Sigma(\Sigma^*) \rightarrow \pi\Sigma \quad (2)$$

foi desprezada nos cálculos. No caso da produção de Λ a partir de Σ , podemos desprezar esta contribuição, pois a constante de acoplamento $\pi\Sigma\Sigma^*$ é bem menor que a $\pi\Lambda\Sigma^*$, o que fornece seções de choque em torno de 15% da seção de choque elástica $\pi\Lambda$. Este efeito é um pouco maior para a produção de Σ (em torno de 30%), mas também desprezamos esta contribuição. No futuro podemos estudar estes efeitos.

De um modo geral o modelo descreve razoavelmente bem os dados, se não perfeitamente, pelo menos explica a origem das diferenças nos sinais das polarizações de anti-híperons, fato que não havia sido realizado até hoje.

VII. Referências

- [1] G. Bunce *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1113 (1976).
- [2] G. Giacomelli *Phys. Rep.* **23** 123 (1976).
- [3] K. Heller *et al.*, *Phys. Lett.* **68B** 480 (1977).
- [4] K. Heller *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **41** 607 (1978).
- [5] S. Erhan *et al.*, *Phys. Lett.* **82B** 301 (1979).
- [6] B. Lundberg *et al.*, *Phys. Rev.* **D40**, 3557 (1989).
- [7] C. Wilkinson *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **46** 803 (1981).
- [8] L. Deck *et al.*, *Phys. Rev.* **D28**, 1 (1983).
- [9] R. Ramerika *et al.*, *Phys. Rev.* **D33**, 3172 (1986).
- [10] P. M. Ho *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1713 (1990).
- [11] P. M. Ho *et al.*, *Phys. Rev.* **D44**, 3402 (1991).
- [12] A. Morelos *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 2172 (1993).
- [13] A. Morelos *et al.*, *Phys. Rev.* **D52**, 3777 (1995).
- [14] M. I. Adamovich *et al.*, *CERN-PPE/94-86* (1994).
- [15] B. Andersson, G. Gustafson and G. Ingelman, *Phys. Lett.* **85B**, 417 (1979).

- [16] T. A. DeGrand and H. I. Miettinen, *et al.*, *Phys. Rev.* **D24**, 2419 (1981).
- [17] J. Soffer e N. A. Törnqvist, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 907 (1992).
- [18] S. M. Troshin e N. E. Tyurin, *Phys. Rev.* **D55**, 1265 (1997).
- [19] S. M. Troshin e N. E. Tyurin, *Phys. Rev.* **D52**, 3862 (1995).
- [20] S. M. Troshin e N. E. Tyurin, *Part. World* **3**, 165 (1994).
- [21] J. Szwed *Phys. Lett.* **105B** 403 (1981).
- [22] Y. Kitsukawa and K. Kubo, *Prog. Theor. Phys.* **103**, 1173 (2000).
- [23] M. Anselmino, D. Boer, U. D'Alesio and F. Murgia *hep-ph/0008186* (2000)
- [24] Y. Hama e T. Kodama, *Phys. Rev.* **D48**, 3116 (1993).
- [25] Celso C. Barros Jr. *Dissertação de Mestrado*, IFUSP (1995).
- [26] R. Nath and A. Kumar, *Nuovo Cimento* **36**, 669 (1965).
- [27] B. R. Martin, *Phys. Rev.* **138**, B1136 (1965).
- [28] A. N. Kammal, *Phys. Rev.* **D58**, 077501 (1998).
- [29] A. Datta, P. O'Donnell and S. Pakvasa , preprint hep-ph/9806374 (1998).
- [30] V. S. Zidell, R. A. Arndt and L. D. Roper *Phys. Rev.* **D21**, 1255 (1980).
- [31] R. Kosh and E. Pietarinen, *Nuc. Phys.* **A336**, 331 (1980).
- [32] M. G. Olsson and E. T. Osypowski, *Nuc. Phys.* **B101**, 136 (1975).
- [33] B. C. Pearce and B. K. Jennings, *Nucl. Phys.* **A528**, 655 (1991).
- [34] P. F. A. Goudsmit, H. J. Leisi, E. Matsinos, B. L. Birbair and A. B. Gridnev, *Nucl. Phys.* **A575**, 673 (1994).
- [35] D. Bofinger and W. S. Woolcock, *Nuovo Cim. A* **104**, 1489 (1991).
- [36] F. Gross and Y. Surya, *Phys. Rev.* **C47**, 703 (1993).
- [37] V. Bernard, N. Keiser and Ulf-G. Meißner, *Int. Jour. of Mod. Phys. E*, Vol. 4, No. 3, 193 (1995).

- [38] H. B. Tang and P. J. Ellis, *Phys. Rev.* **C56**, 3363 (1997).
- [39] A. M. M. Menezes, *Espalhamento πN a baixas energias*, Dissertação de mestrado, IFUSP (1985).
- [40] Particle Data Group, *Eur. Phys. J.* **C15**, 1 (2000).
- [41] H. T. Coelho, T. K. Das e M. R. Robilotta *Phys. Rev.* **C28**, 1812 (1983); ver também *Rev. Bras. Física*, vol. especial may 1982, p.19 .
- [42] C. C. Barros Jr. e Y. Hama, *Phys. Rev.* **C63**, 065203 (2001).
- [43] S. Weinberg, *Phys. Rev.* **166**, 1568 (1968).
- [44] J. Schwinger, *Phys. Lett.* **24B**, 473 (1967).
- [45] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Rev* **163**, 1727 (1967).
- [46] S. Coleman, J. Wess and B. Zumino, *Phys. Rev* **177**, 2239 (1969).
- [47] S. Weinberg , *Physica* **96A**, 327 (1979).
- [48] J. Hamilton and W. S. Woolcock, *Rev. Mod. Phys.* **35**, 737 (1963).
- [49] G. Kallen, *Elementary Particle Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, (1964).
- [50] H. Pilkuhn, *The Interaction of Hadrons*, (North-Holland, Amsterdam) (1967).
- [51] M. L. Perl *High Energy Hadron Physics*, (Wiley-Interscience, New York) (1974).
- [52] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, New York (1984).
- [53] F. Halzen and A. D. Martin, *Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*, John Wiley and Sons, New York (1984).
- [54] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York (1964).
- [55] M. Kaku, *Quantum Field Theory, A Modern Introduction*, Oxford University

press, New York (1993).

[56] C. Moller , *The Theory of Relativity*, Oxford University Press, Oxford (1957).

[57] E. Byckling, K. Kajantie, *Particle Kinematics*, John Wiley and Sons, London (1973).

[58] R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics: A Guide to the Kinematics of High Energy Physics*, Benjamin, New York (1964).

[59] N. Hoshisaki, *Prog. Theor. Phys., Suppl.* **42**, 107 (1968).

[60] Y. Hama and F. S. Navarra, *Phys. Lett* **129B**, 251 (1983); *Z. Phys.* **C53**, 501 (1992).

[61] Por exemplo, T.Alber et al., *hep-ex/9711001*

Apêndice A: Formalismo Geral

O formalismo aqui apresentado pode ser encontrado em vários lugares [48]- [55]. Estamos fazendo uma breve apresentação do mesmo, apenas para facilitar a leitura. Será feito um breve resumo da cinemática utilizada, do formalismo de amplitudes de espalhamento, e serão mostradas as expressões usadas no cálculo de observáveis. Mostraremos também algumas expressões relativas à equação de Dirac necessárias para o cálculo de diagramas de Feynmann. Finalmente mostraremos alguns resultados do formalismo de isospin que possui grande importância, pois no cálculo de médias do capítulo IV estaremos considerando várias reações simultaneamente. Estudaremos então os estados possíveis, os operadores de projeção em estados de isospin e as matrizes dos vértices (responsáveis pela recombinação de partículas).

A.1 - Cinemática

Vamos fazer um estudo da cinemática do espalhamento pión-bárion (inclusive reações com troca de carga) no referencial de centro de massa, que é o referencial que usaremos no estudo das interações a baixas energias, descrito no capítulo III. Usaremos p e p' para os momentos inicial e final do bárion, k e k' para os momentos inicial e final do pión e a e b para as cargas inicial e final do pión.

Como no referencial de centro de massa o momento total é nulo, temos

$$\vec{p} + \vec{k} = \vec{p}' + \vec{k}' = 0 \quad , \quad (1)$$

e assim os módulos de todos os momentos são iguais, os quais chamaremos então simplesmente de k . O ângulo de espalhamento é θ . A massa do pión é μ e a do bárion é m . As energias são

$$\begin{aligned} k_0 = k'_0 &= \sqrt{k^2 + \mu^2} \quad , \\ E = E' &= \sqrt{k^2 + m^2} \quad . \end{aligned} \quad (2)$$

As variáveis de Mandelstam são definidas para um referencial qualquer como

$$s = (p + k)^2 = m^2 + \mu^2 + 2k.p = m^2 + \mu^2 + 2Ek_0 - 2\vec{k}.\vec{p} \quad , \quad (3)$$

$$t = (k - k')^2 = 2\mu^2 - 2k.k' = 2\mu^2 - 2k_0k'_0 + 2\vec{k}.\vec{k}' \quad , \quad (4)$$

$$u = (p - k')^2 = m^2 + \mu^2 - 2k'.p = m^2 + \mu^2 - 2Ek'_0 + 2\vec{k}'.\vec{p} \quad . \quad (5)$$

No sistema de centro de massa, em que estamos trabalhando, elas se reescrevem (com $x = \cos(\theta)$)

$$s = m^2 + \mu^2 + 2Ek_0 + 2k^2 \quad , \quad (6)$$

$$t = 2k^2(x - 1) \quad , \quad (7)$$

$$u = m^2 + \mu^2 - 2k^2x - 2Ek_0 \quad , \quad (8)$$

$$s - u = 4Ek_0 + 2k^2 + 2k^2x \quad . \quad (9)$$

Estas variáveis relacionam-se através de

$$s + t + u = 2m^2 + 2\mu^2 \quad . \quad (10)$$

Vamos definir as variáveis ν e ν_r , que aparecem algumas vezes no cálculo de diagramas do capítulo III

$$\nu = \frac{(p+p') \cdot (k+k')}{4m} = \frac{s-u}{4m} = \frac{2Ek_0 + k^2 + k'^2}{2m} , \quad (11)$$

$$\nu_r = \frac{m_r^2 - m^2 - k \cdot k'}{2m} , \quad (12)$$

onde r é um índice relativo à ressonância, ou seja, m_r é a massa da ressonância formada na interação píon-bárion.

A.2 - Amplitudes de Espalhamento

A amplitude T_I para um determinado estado de isospin é

$$T_I = \bar{u}(\vec{p}') \left[A^I(s, t) + \frac{(k+k')}{2} B^I(s, t) \right] u(\vec{p}) , \quad (13)$$

onde podemos observar que os A^I e B^I são funções de s e t . A amplitude de espalhamento para um determinado processo é então formada pela soma das diversas amplitudes T_I , podendo então ser decomposta em estados de isospin a partir de

$$T_{\pi B} = \sum_I \bar{u}(\vec{p}') \left\{ \left[A^I(s, t) + \frac{(k+k')}{2} B^I(s, t) \right] P_I \right\} u(\vec{p}) , \quad (14)$$

onde P_I são os operadores de projeção em estados de isospin I . Estes operadores estão no apêndice A.7.

A matriz M_I , para um estado de isospin I , invariante por rotação e reflexões espaciais, é dada em termos de amplitudes de “spin-non-flip” e “spin-flip” por

$$M_I = \frac{T_I}{8\pi\sqrt{s}} = f^I(k, \theta) + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} g^I(k, \theta) , \quad (15)$$

onde k é o momento no referencial de centro de massa, θ , o ângulo de espalhamento e $\hat{n}$ é o vetor normal ao plano de espalhamento, definido por

$$\hat{n} = \frac{\vec{p} \times \vec{p}'}{|\vec{p} \times \vec{p}'|} = \frac{\vec{k} \times \vec{k}'}{|\vec{k} \times \vec{k}'|} . \quad (16)$$

INSTITUTO DE FÍSICA

100

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3562
ex. 2

As amplitudes $f^I(k, \theta)$ e $g^I(k, \theta)$ são dadas por

$$\begin{aligned} f^I(k, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+}^I(k) + lf_{l-}^I(k)]P_l(x) , \\ g^I(k, \theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} [f_{l-}^I(k) - f_{l+}^I(k)]P_l^{(1)}(x) , \end{aligned} \quad (17)$$

e no referencial de centro de massa podem ser expressas em termo de A^I e B^I através de

$$\begin{aligned} f^I &= \frac{1}{8\pi\sqrt{s}} \left\{ (E+m) \left[A^I + (\sqrt{s}-m)B^I \right] + \frac{E-m}{\sqrt{1-x^2}} \left[-A^I + (\sqrt{s}+m)B^I \right] \right\} , \\ \sqrt{1-x^2}g^I &= \frac{(E-m)}{8\pi\sqrt{s}} \left[-A^I + (\sqrt{s}+m)B^I \right] . \end{aligned} \quad (18)$$

Usando a ortogonalidade dos polinômios de Legendre

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x)P_{l'}(x)dx &= \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} , \\ \int_{-1}^1 P_l^m(x)P_{l'}^m(x)dx &= \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'} , \end{aligned} \quad (19)$$

vem

$$\begin{aligned} f_{l+}^I(k) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^I(k, x)P_l(x)dx - \frac{1}{2(l+1)} \int_{-1}^1 g^I(k, x)P_l^{(1)}(x)dx , \\ f_{l-}^I(k) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f^I(k, x)P_l(x)dx + \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 g^I(k, x)P_l^{(1)}(x)dx . \end{aligned} \quad (20)$$

Se quisermos expressar as expressões (20) apenas em termos de polinômios de Legendre, devemos usar as relações de recorrência

$$\begin{aligned} \sqrt{1-x^2}P_l^{(1)}(x) &= (1-x^2)P_l'(x) , \\ &= l[P_{l-1}(x) - xP_l(x)] , \\ &= (l+1)[xP_l(x) - P_{l+1}(x)] , \end{aligned} \quad (21)$$

que levam a

$$f_{l+}^I(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[f^I(k, x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} g^I(k, x) \right] P_l(x)dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{g^I(k, x)}{\sqrt{1-x^2}} P_{l+1}(x)dx ,$$

$$f_{l-}^I(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left[f^I(k, x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} g^I(k, x) \right] P_l(x) dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{g^I(k, x)}{\sqrt{1-x^2}} P_{l-1}(x) dx , \quad (22)$$

ou

$$f_{l\pm}^I = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [P_l(x) f_1^I(x) + P_{l\pm 1}(x) f_2^I(x)] dx , \quad (23)$$

com

$$\begin{aligned} f^I(k, \theta) &= f_1^I(k, \theta) + \cos(\theta) f_2^I(k, \theta) , \\ g^I(k, \theta) &= \sin(\theta) f_2^I(k, \theta) . \end{aligned} \quad (24)$$

Esta é uma outra maneira de escrever as amplitudes parciais. f_1^I e f_2^I são chamadas de amplitudes de helicidade e estão relacionadas com M_I dada por (15) através de

$$M_I = f_1^I + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{k}')(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})}{kk'} f_2^I . \quad (25)$$

Assim usando as relações (15), (18) e (25), vem

$$\begin{aligned} f_1^I &= \frac{(E+m)}{8\pi\sqrt{s}} \left[A^I + (\sqrt{s}-m)B^I \right] , \\ f_2^I &= \frac{(E-m)}{8\pi\sqrt{s}} \left[-A^I + (\sqrt{s}+m)B^I \right] . \end{aligned} \quad (26)$$

A.3 - Observáveis

A relação entre as amplitudes $f_{l\pm}$ e as defasagens é

$$f_{l\pm} = \frac{1}{2ik} [e^{2i\delta_{l\pm}} - 1] = \frac{e^{i\delta_{l\pm}}}{k} \sin(\delta_{l\pm}) . \quad (27)$$

As amplitudes f e g são

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)f_{l+} + lf_{l-}] P_l(x) = \\ &= f_S + (2f_{P3} + f_{P1})P_1 + (3f_{D5} + 2f_{D3})P_2 + (4f_{F7} + 3f_{F5})P_3 + \dots \\ g(\theta) &= \sum_{l=1}^{\infty} [f_{l+} - f_{l-}] P_l^{(1)}(x) = \end{aligned} \quad (28)$$

$$= (f_{P3} - f_{P1})P_1^{(1)}(x) + (f_{D5} - f_{D3})P_2^{(1)} + \dots \quad (29)$$

A partir de

$$M = f(\theta) + i\vec{\sigma} \cdot \hat{n} g(\theta), \quad (30)$$

calcula-se

$$\begin{aligned} \langle +|M|+ \rangle &= f + ig \quad , \\ \langle -|M|- \rangle &= f - ig \quad , \\ \langle +|M|- \rangle &= \langle -|M|+ \rangle = 0 \end{aligned}$$

onde $|\pm\rangle$ são os espinores

$$|+\rangle = \chi^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad |-\rangle = \chi^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (31)$$

E deste modo, os observáveis

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{cm}} = \sum_{spin} |\langle f|M|i \rangle|^2 = |f + ig|^2 + |f - ig|^2 = |f|^2 + |g|^2 \quad , \quad (32)$$

$$\vec{P} = \frac{(d\sigma/d\Omega_+) - (d\sigma/d\Omega_-)}{d\sigma/d\Omega} \hat{n} = -2 \frac{\text{Im}(f^*g)}{|f|^2 + |g|^2} \hat{n} \quad , \quad (33)$$

$$\sigma_t = 4\pi \sum_l [(l+1)|f_{l+}|^2 + l|f_{l-}|^2] \quad . \quad (34)$$

A.4 - Equação de Dirac

A equação de Dirac para uma partícula de massa m é

$$(\not{p} - m)u = 0 \quad , \quad (35)$$

$$\bar{u}(\not{p} - m) = 0 \quad , \quad (36)$$

que tem como solução o espinor u em 4 dimensões

$$u^\alpha(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} E+m \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \chi^\alpha \quad . \quad (37)$$

Já para antipartículas, a equação de Dirac é

$$(\not{p} + m)v = 0 \quad (38)$$

$$\bar{v}(\not{p} + m) = 0 \quad , \quad (39)$$

que tem como solução o espinor v dado por

$$v^\alpha(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{E+m}} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ E+m \end{pmatrix} \chi^\alpha \quad . \quad (40)$$

A notação $\not{k}$ significa

$$\not{k} = k_\mu \gamma^\mu = k_0 \gamma^0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} k_0 & -\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -k_0 \end{pmatrix} \quad , \quad (41)$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \vec{\gamma} &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \end{aligned} \quad (42)$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (43)$$

A regra de anticomutação para as matrizes γ é

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad . \quad (44)$$

Define-se ainda

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (45)$$

e

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad . \quad (46)$$

Deste modo,

$$k\gamma^5 = -\gamma^5 k \quad , \quad (47)$$

$$a \cdot b + b \cdot a = 2a \cdot b \quad . \quad (48)$$

A partir da conservação da energia e do momento

$$k + p = k' + p' \quad , \quad (49)$$

obtem-se as relações

$$\begin{aligned} \bar{u} k u &= \bar{u} k' u \quad , \\ \bar{u} k k u &= \bar{u} k' k' u = \mu^2 \quad , \\ \bar{u} k' k u &= (s - m^2)\bar{u} u - 2m\bar{u} k u \quad , \\ \bar{u} k k' u &= (u - m^2)\bar{u} u + 2m\bar{u} k u \quad , \end{aligned} \quad (50)$$

e

$$\begin{aligned} \bar{v} k v &= \bar{v} k' v \quad , \\ \bar{v} k k v &= \bar{v} k' k' v = \mu^2 \quad , \\ \bar{v} k' k v &= (u - m^2)\bar{v} v - 2m\bar{v} k v \quad , \\ \bar{v} k k' v &= (s - m^2)\bar{v} v + 2m\bar{v} k v \quad . \end{aligned} \quad (51)$$

A.5 - Estados de Isospin

No interior do fluido devem existir π^+ , π^- e π^0 em quantidades praticamente iguais. O que estamos interessados em estudar é a interação dos híperons Λ , Σ e Ξ (e suas antipartículas) com estes três tipos de píons, considerando todos os processos elásticos e com troca de carga possíveis. É fácil perceber que existe um

grande número de reações possíveis. Devemos então, usar o formalismo de isospin para reduzir o número de cálculos necessários.

A primeira coisa a fazer então é verificar quais os estados de isospin podem ser formados com píons e bárions.

Os píons, como podem ter cargas 0 e ± 1 , podem ser representados por

$$\pi = \begin{pmatrix} \pi^+ \\ \pi^0 \\ \pi^- \end{pmatrix} , \quad (52)$$

ou seja, podemos considerar seu isospin $I = 1$, com autovalores de I_3 0 e ± 1 . Já os nucleons são dois e podem ser representados por

$$N = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} , \quad (53)$$

com dois níveis (p e n), possuindo deste modo isospin $I=1/2$. A combinação de uma partícula de isospin 1 com uma de isospin $1/2$ pode ter valores de isospin total $3/2$ ou $1/2$. Os estados com isospin $3/2$, formados de um pión e um núcleon, são

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle &= |\pi^+ p\rangle , \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^+ n\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 p\rangle , \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^0 n\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^- p\rangle , \\ \left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle &= |\pi^- n\rangle . \end{aligned} \quad (54)$$

Já os estados com isospin $1/2$ são

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^+ n\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^0 p\rangle , \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}} |\pi^0 n\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} |\pi^- p\rangle . \end{aligned} \quad (55)$$

Para representarmos os elementos da matriz de espalhamento T , vamos introduzir a notação

$$\langle I, m | T | I', m' \rangle = \delta_{I,I'} \delta_{m,m'} T_I , \quad (56)$$

onde estamos considerando a interação forte independente da carga. Para o espalhamento πN , existem apenas duas amplitudes, $T_{\frac{3}{2}}$ e $T_{\frac{1}{2}}$, dadas por

$$\begin{aligned} T_{\frac{3}{2}} &= \langle \frac{3}{2}, m | T | \frac{3}{2}, m \rangle , \\ T_{\frac{1}{2}} &= \langle \frac{1}{2}, m | T | \frac{1}{2}, m \rangle , \end{aligned} \quad (57)$$

ou seja, os resultados independem dos estados individuais representados por m , dependendo apenas do isospin total I . Calculando $|\pi N\rangle$ a partir das relações (54) e (55) e fazendo os produtos entre os estados obtemos

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ p | T | \pi^+ p \rangle &= \langle \pi^- n | T | \pi^- n \rangle = T_{\frac{3}{2}} , \\ \langle \pi^+ n | T | \pi^+ n \rangle &= \langle \pi^- p | T | \pi^- p \rangle = \frac{1}{3}T_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}T_{\frac{1}{2}} , \\ \langle \pi^0 n | T | \pi^0 n \rangle &= \langle \pi^0 p | T | \pi^0 p \rangle = \frac{2}{3}T_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}T_{\frac{1}{2}} , \\ \langle \pi^0 n | T | \pi^- p \rangle &= \langle \pi^+ n | T | \pi^0 p \rangle = \langle \pi^- p | T | \pi^0 n \rangle = \langle \pi^0 p | T | \pi^+ n \rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}T_{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3}T_{\frac{1}{2}} . \end{aligned} \quad (58)$$

Para o caso $\pi\Lambda$, não há necessidade de fazer nenhum cálculo sendo o resultado trivial, pois o isospin de Λ é nulo, e só há uma amplitude, T_1 (ou simplesmente T).

Vamos agora estudar o sistema $\pi\Sigma$. Existem três tipos de Σ ,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma^+ \\ \Sigma^0 \\ \Sigma^- \end{pmatrix} . \quad (59)$$

Assim o isospin total do sistema $\pi\Sigma$ poderá ser $I=2,1,0$. Os estados formados são

$$\begin{aligned} |\pi^+ \Sigma^+ \rangle &= |2, 2\rangle , \\ |\pi^+ \Sigma^0 \rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}|2, 1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 1\rangle , \\ |\pi^+ \Sigma^- \rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}|2, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 0\rangle , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\pi^0 \Sigma^+\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}|2, 1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 1\rangle , \\
|\pi^0 \Sigma^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 0\rangle , \\
|\pi^0 \Sigma^-\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}|2, -1\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}|1, -1\rangle , \\
|\pi^-\Sigma^+\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}}|2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1, 0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 0\rangle , \\
|\pi^-\Sigma^0\rangle &= \sqrt{\frac{1}{2}}|2, -1\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}|1, -1\rangle , \\
|\pi^-\Sigma^-\rangle &= |2, -2\rangle .
\end{aligned} \tag{60}$$

A partir destes resultados podemos obter as amplitudes para processos específicos

$$\begin{aligned}
\langle \pi^+\Sigma^+|T|\pi^+\Sigma^+\rangle &= \langle \pi^-\Sigma^-|T|\pi^-\Sigma^-\rangle = T_2 , \\
\langle \pi^+\Sigma^0|T|\pi^+\Sigma^0\rangle &= \langle \pi^-\Sigma^0|T|\pi^-\Sigma^0\rangle = \langle \pi^0\Sigma^+|T|\pi^0\Sigma^+\rangle = \langle \pi^0\Sigma^-|T|\pi^0\Sigma^-\rangle = \frac{T_2}{2} + \frac{T_1}{2} , \\
\langle \pi^0\Sigma^0|T|\pi^0\Sigma^0\rangle &= \frac{2T_2}{3} + \frac{T_0}{3} , \\
\langle \pi^+\Sigma^-|T|\pi^+\Sigma^-\rangle &= \langle \pi^-\Sigma^+|T|\pi^-\Sigma^+\rangle = \frac{T_2}{6} + \frac{T_1}{2} + \frac{T_0}{3} , \\
\langle \pi^-\Sigma^+|T|\pi^+\Sigma^-\rangle &= \langle \pi^+\Sigma^-|T|\pi^-\Sigma^+\rangle = \frac{T_2}{6} - \frac{T_1}{2} + \frac{T_0}{3} , \\
\langle \pi^+\Sigma^0|T|\pi^0\Sigma^+\rangle &= \langle \pi^-\Sigma^0|T|\pi^0\Sigma^-\rangle = \langle \pi^0\Sigma^+|T|\pi^+\Sigma^0\rangle = \langle \pi^0\Sigma^-|T|\pi^-\Sigma^0\rangle = \frac{T_2}{2} - \frac{T_1}{2} , \\
\langle \pi^+\Sigma^-|T|\pi^0\Sigma^0\rangle &= \langle \pi^-\Sigma^+|T|\pi^0\Sigma^0\rangle = \langle \pi^0\Sigma^0|T|\pi^+\Sigma^-\rangle = \langle \pi^0\Sigma^0|T|\pi^-\Sigma^+\rangle = \frac{T_2}{3} - \frac{T_0}{3} .
\end{aligned} \tag{61}$$

Considerando agora o espalhamento $\pi\Xi$, sabemos que $I_\Xi = 1/2$, pois existem dois estados de carga para Ξ ,

$$\Xi = \begin{pmatrix} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{pmatrix} . \tag{62}$$

Com isso, podemos concluir que este caso é totalmente análogo ao caso πN , devendo apenas fazer as trocas $p \rightarrow \Xi^0$ e $n \rightarrow \Xi^-$. Assim obtemos

$$\langle \pi^+\Xi^0|T|\pi^+\Xi^0\rangle = \langle \pi^-\Xi^-|T|\pi^-\Xi^-\rangle = T_{\frac{3}{2}} ,$$

$$\begin{aligned}
\langle \pi^+ \Xi^- | T | \pi^+ \Xi^- \rangle &= \langle \pi^- \Xi^0 | T | \pi^- \Xi^0 \rangle = \frac{1}{3} T_{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} T_{\frac{1}{2}} , \\
\langle \pi^0 \Xi^- | T | \pi^0 \Xi^- \rangle &= \langle \pi^0 \Xi^0 | T | \pi^0 \Xi^0 \rangle = \frac{2}{3} T_{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} T_{\frac{1}{2}} , \\
\langle \pi^0 \Xi^- | T | \pi^- \Xi^0 \rangle &= \langle \pi^+ \Xi^- | T | \pi^0 \Xi^0 \rangle = \langle \pi^- \Xi^0 | T | \pi^0 \Xi^- \rangle = \langle \pi^- \Xi^+ | T | \pi^0 \Xi^0 \rangle = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{3} T_{\frac{3}{2}} - \frac{\sqrt{2}}{3} T_{\frac{1}{2}} .
\end{aligned} \tag{63}$$

Observando os resultados obtidos acima, podemos perceber que o uso do formalismo de isospin simplifica bastante o tratamento do problema, pois é possível estudar um grande número de reações a partir de poucas amplitudes. No caso de $\pi\Lambda$, só existe uma amplitude, T_1 . No caso de πN e $\pi\Xi$, duas: $T_{\frac{3}{2}}$ e $T_{\frac{1}{2}}$. No caso do espalhamento de $\pi\Sigma$, existem três, T_0 , T_1 e T_2 . Os resultados obtidos neste apêndice serão utilizados no cálculo das amplitudes das reações πY do capítulo III.

A.6 - Matrizes dos Vértices

Ao estudarmos a interação πB a partir de diagramas de Feynman, podemos perceber que existe a possibilidade de inclusão de vários tipos de partículas intermediárias. No caso do espalhamento πN , podemos ter Nucleons, Δ ou mésons. Isto significa que um pión e um nucleon podem se combinar em um estado de isospin $1/2$ ($\pi N \rightarrow N$, que é $1+1/2 \rightarrow 1/2$) ou $3/2$ ($\pi N \rightarrow \Delta$, que é $1+1/2 \rightarrow 3/2$) no estado intermediário. No caso dos híperons acontecem situações semelhantes, com vários tipos de combinação possíveis. Estas transições de isospin podem ser incorporadas através de matrizes que, ao operarem nos bárions (aparecem nos vértices dos diagramas), produzam o efeito desejado. Vamos dedicar esta seção à exposição destas matrizes.

No caso do vértice πNN , temos $1+1/2 \rightarrow 1/2$, e as matrizes que efetuam estas

transições são as matrizes de Pauli τ_i , que obedecem a

$$\tau_b^\dagger \tau_a = \delta_{ba} + i\epsilon_{bac} \tau_c . \quad (64)$$

Nesta e nas relações abaixo, os índices a, b e c se referem a componentes de isospin do pión (1, 2, 3 ou ± 1 e 0. Vejam as lagrangianas do capítulo III) e o produto acima aparece ao considerarmos o gráfico inteiro, ou seja, o processo $\pi N \rightarrow N \rightarrow \pi N$. Já em um vértice do tipo $\pi N \Delta$, por exemplo, onde existe uma combinação do tipo $1+1/2 \rightarrow 3/2$, as matrizes são as matrizes 2×4 M_i , que obedecem a

$$M_b^\dagger M_a = \frac{2}{3} \delta_{ba} + \frac{i}{3} \epsilon_{bac} \tau_c . \quad (65)$$

Esta combinação aparecerá no processo $\pi N \rightarrow \Delta \rightarrow \pi N$.

Ao considerarmos vértices do tipo $\pi \Lambda \Sigma$, que são do tipo $1+0 \rightarrow 1$, teremos simplesmente um fator δ_{ba} , pois o estado inicial da partícula incidente com isospin 1 (que no nosso caso é o pión), é igual ao do bárion final (que é o sigma). O último caso de interesse é o dos vértices do tipo $\pi \Sigma \Sigma$, que são do tipo $1+1 \rightarrow 1$, e as matrizes responsáveis são as matrizes 3×3 t_i , que obedecem à relação

$$\langle \beta | t_c | \alpha \rangle = -i\epsilon_{\beta\alpha c} , \quad (66)$$

onde α e β representam os estados de isospin de Σ e c o do pión.

A.7 - Operadores de Projeção

De um modo geral, os operadores de projeção em auto-estados de um operador Ω com autovalores ω_i são dados por

$$P_i = \prod_{j \neq i} \frac{\Omega - \omega_j}{\omega_i - \omega_j} , \quad (67)$$

que realmente é um operador de projeção pois

$$P_i|k\rangle = \delta_{ik}|k\rangle \quad ,$$

onde $|k\rangle$ é um auto-estado com autovalor ω_k .

Vamos determinar os operadores de projeção em auto-estados de isospin para o sistema πN . Para este sistema, o operador de isospin é

$$\vec{T} = \frac{1}{2}\vec{\tau} + \vec{t}_\pi \quad , \quad (68)$$

assim

$$T^2\psi = \left[\left(\frac{\tau}{2} \right)^2 + \vec{t}_\pi \cdot \vec{\tau} + (t_\pi)^2 \right] \psi$$

e para um estado T

$$T(T+1)\psi = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) + \vec{t}_\pi \cdot \vec{\tau} + 1(1+1) \right] \psi \quad .$$

Deste modo

$$(\vec{t}_\pi \cdot \vec{\tau})\psi = [T(T+1) - 2 - \frac{3}{4}]\psi = \omega_i\psi \quad , \quad (69)$$

que fornece os autovalores

$$T = \frac{1}{2} \rightarrow \omega_{\frac{1}{2}} = -2 \quad ,$$

$$T = \frac{3}{2} \rightarrow \omega_{\frac{3}{2}} = 1 \quad .$$

Calculando os operadores de projeção acima definidos, referente ao operador $\Omega = \vec{t}_\pi \cdot \vec{\tau}$, temos

$$\begin{aligned} P_{\frac{1}{2}} &= \frac{1 - \vec{t}_\pi \cdot \vec{\tau}}{3} \quad , \\ P_{\frac{3}{2}} &= \frac{2 + \vec{t}_\pi \cdot \vec{\tau}}{3} \quad . \end{aligned} \quad (70)$$

Sabendo que

$$\langle b|t_c|a\rangle = -i\epsilon_{bac} \quad , \quad (71)$$

(vou omitir de agora em diante o sufixo π , colocando somente o índice referente ao isospin), onde $|a\rangle$ e $|b\rangle$ são os estados de isospin do pión e t_c uma das três componentes de isospin. Podemos concluir (para partículas de isospin 1) que

$$\langle b|\vec{t}|a\rangle = -i\epsilon_{bac}\hat{e}_c \quad , \quad (72)$$

onde $\hat{e}_c$ é um versor na direção c . Deste modo,

$$\langle b|\vec{t}.\vec{\tau}|a\rangle = -i\epsilon_{bac}\tau_c \quad . \quad (73)$$

Assim podemos calcular

$$\begin{aligned} \langle b|P_{\frac{1}{2}}|a\rangle &= \frac{1}{3}\langle b|1 - \vec{t}.\vec{\tau}|a\rangle = \frac{1}{3}[\delta_{ba} + i\epsilon_{bac}\tau_c] \quad , \\ \langle b|P_{\frac{3}{2}}|a\rangle &= \frac{1}{3}\langle b|2 + \vec{t}.\vec{\tau}|a\rangle = \frac{1}{3}[2\delta_{ba} - i\epsilon_{bac}\tau_c] \quad . \end{aligned}$$

Os operadores de projeção que atuam sobre o nucleon para este caso são então

$$\begin{aligned} (P_{\frac{1}{2}})_{ba} &= \frac{1}{3}\delta_{ba} + \frac{i}{3}\epsilon_{bac}\tau_c \quad , \\ (P_{\frac{3}{2}})_{ba} &= \frac{2}{3}\delta_{ba} - \frac{i}{3}\epsilon_{bac}\tau_c \quad . \end{aligned} \quad (74)$$

Para o caso de duas partículas (1 e 2) com isospin 1 temos

$$\vec{T} = \vec{t}_1 + \vec{t}_2 \quad , \quad (75)$$

e efetuando os cálculos conforme o caso anterior teremos (para $\Omega = \vec{t}_1.\vec{t}_2$)

$$\omega_i = \frac{T_i}{2}(T_i + 1) - 2 \quad , \quad (76)$$

Substituindo estas expressões nos operadores de projeção chegamos finalmente a

$$\begin{aligned}
 (P_0)_{\gamma\alpha,\delta\beta} &= \frac{1}{3}\delta_{\gamma\delta}\delta_{\alpha\beta} \\
 (P_1)_{\gamma\alpha,\delta\beta} &= \frac{1}{2}[\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\delta\beta} - \delta_{\delta\alpha}\delta_{\gamma\beta}] \\
 (P_2)_{\gamma\alpha,\delta\beta} &= \frac{1}{6}[3\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\delta\beta} + 3\delta_{\delta\alpha}\delta_{\gamma\beta} - 2\delta_{\gamma\delta}\delta_{\alpha\beta}] \quad .
 \end{aligned} \tag{78}$$

Apêndice B: Integrais I_n

Na decomposição das amplitudes de espalhamento calculadas no capítulo III em ondas parciais, existe um tipo de integral que aparece várias vezes. Usaremos então este apêndice para listar estas integrais, que neste trabalho são chamadas de I_n . Estas integrais são dadas por

$$I_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n dx}{\gamma + 2k^2 x} . \quad (1)$$

Sabemos que

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln \left[\frac{a+b}{b-a} \right] \quad (2)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x dx}{ax + b} = \frac{2}{a} - \frac{b}{a^2} \ln \left[\frac{a+b}{b-a} \right] \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{ax + b} = -\frac{2b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} \ln \left[\frac{a+b}{b-a} \right] \quad (4)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{ax + b} = \frac{2a^2 + 6b^2}{3a^3} - \frac{b^3}{a^4} \ln \left[\frac{a+b}{b-a} \right] \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{ax + b} = -\frac{2a^2b + 6b^3}{3a^4} + \frac{b^4}{a^5} \ln \left[\frac{a+b}{b-a} \right] , \quad (6)$$

o que fornece os resultados

$$I_0 = \frac{1}{2k^2} \ln \left[\frac{2k^2 + \gamma}{\gamma - 2k^2} \right] \quad (7)$$